

## Polynôme et dictionnaire

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme. On représente  $P$  par un dictionnaire  $\mathbf{p}$  tel que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , si  $a_k \neq 0$  alors  $\mathbf{p}[\mathbf{k}]$  vaut  $a_k$  (on ne stocke pas les coefficients nuls de  $P$ ). Dit autrement,  $\mathbf{p}[\mathbf{k}]$  contient le coefficient de degré  $k$  de  $P$ .

1. Définir le dictionnaire représentant le polynôme  $7 + 3X^2 - X^5$ .
2. Écrire une fonction `degre` renvoyant le degré d'un polynôme.
3. Écrire une fonction `derive` qui renvoie la dérivée  $P'$  d'un polynôme  $P$ .
4. Définir une fonction `somme(p, q)` renvoyant un dictionnaire représentant la somme des deux polynômes  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ . Quelle est sa complexité en fonction des degrés  $n_1$  et  $n_2$  de  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  ?
5. Faire de même avec une fonction `produit(p, q)`.
6. Écrire une fonction `evaluate(x, p)` renvoyant  $P(x)$ , si possible avec  $O(n)$  multiplications, où  $n = \deg(P)$ .