

Polynôme et dictionnaire

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme. On représente P par un dictionnaire \mathbf{p} tel que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, si $a_k \neq 0$ alors $\mathbf{p}[\mathbf{k}]$ vaut a_k (on ne stocke pas les coefficients nuls de P). Dit autrement, $\mathbf{p}[\mathbf{k}]$ contient le coefficient de degré k de P .

1. Définir le dictionnaire représentant le polynôme $7 + 3X^2 - X^5$.
2. Écrire une fonction `degre` renvoyant le degré d'un polynôme.
3. Écrire une fonction `derive` qui renvoie la dérivée P' d'un polynôme P .
4. Définir une fonction `somme(p, q)` renvoyant un dictionnaire représentant la somme des deux polynômes \mathbf{p} et \mathbf{q} . Quelle est sa complexité en fonction des degrés n_1 et n_2 de \mathbf{p} et \mathbf{q} ?
5. Faire de même avec une fonction `produit(p, q)`.
6. Écrire une fonction `evaluate(x, p)` renvoyant $P(x)$, si possible avec $O(n)$ multiplications, où $n = \deg(P)$.