ゲーム理論の基礎 (非協力ゲーム)

目次

- 戦略型ゲーム
  - 戦略型ゲームの定義
  - 最適反応とナッシュ均衡
  - 混合戦略と混合戦略ナッシュ均衡
  - 数値計算

1. 戦略型ゲーム

1.1. 戦略型ゲームの定義

戦略型ゲーム：複数の意思決定主体間の相互作用を表す数理モデル

- 意思決定主体は自分自身の**行動** (純粋戦略) を選択する
  - 行動に対して**利得**が与えられている
  - 利得は、自分の行動と他の意思決定主体の行動に依存して決まる

数学的に戦略型ゲームを定義する。

Def (戦略型ゲーム)

戦略型ゲーム G は、タプル $G = (\mathcal{N}, S, U)$ として定義される。
ただし、

- $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$: プレイヤーの集合 (有限集合)
- $S = \times_{k \in \mathcal{N}} S_k$: 純粋戦略空間
  - S_k: プレイヤー k の純粋戦略集合
- $U : S \to \mathbb{R}^n$: 利得関数、$U(s) = (U_1(s), \dots, U_n(s))$
  - $U_k : S \to \mathbb{R}$: プレイヤー k の利得関数

例：囚人のジレンマ

$\mathcal{N} = \{1, 2\}, S_1 = S_2 = \{C, NC\}, U$ は以下の表のように定義。

$1 \setminus 2$	C	NC
C	$(-2, -2)$	$(-10, 0)$
NC	$(0, -10)$	$(-5, -5)$

プレイヤー 1 が戦略 C、プレイヤー 2 が戦略 NC をとったとき

- プレイヤー 1 の利得：-10
- プレイヤー 2 の利得：0

補足

$e_m^i \in \mathbb{R}^m$: 第i要素のみが1であるようなm次元単位ベクトル

とする。2人ゲームの利得は行列 (利得行列) として表現される。

$i \in S_1, j \in S_2$ に対して、

$$U_1(i,j) = \left(e^i_{|S_1|}\right)^{\mathrm{T}} A e^j_{|S_2|},\ U_2(i,j) = \left(e^i_{|S_1|}\right)^{\mathrm{T}} B e^j_{|S_2|}$$

- $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le |S_1|, 1 \le j \le |S_2|}, a_{i,j} = U_1(i,j)$
- $B = (b_{i,j})_{1 \le i \le |S_1|, 1 \le j \le |S_2|}, b_{i,j} = U_2(i,j)$

プレイヤー1、プレイヤー2の利得行列 A, B は以下のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,|S_2|} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{|S_1|,1} & \cdots & a_{|S_1|,|S_2|} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,|S_2|} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{|S_1|,1} & \cdots & b_{|S_1|,|S_2|} \end{pmatrix}$$

囚人のジレンマの例では、

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

となる。

1.2 最適反応とナッシュ均衡

$s_{-k} := (s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, s_n)$ とする。

Def (最適反応)

$s_k^* \in S_k$ が s_{-k} に対する純粋最適反応 $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall s_k \in S_k, \;\; U_k(s_k^*, s_{-k}) \geq U_k(s_k, s_{-k})$$

- 他のプレイヤーの行動を固定したときの最適な行動
- 等価な条件は、$U_k(s_k^*, s_{-k}) = \max_{s_k \in S_k} U_k(s_k, s_{-k})$
- 1つとは限らないが、必ず存在する

Def (ナッシュ均衡)

$s^* \in S$ が (純粋戦略) ナッシュ均衡 $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall k \in \mathcal{N}, \forall s_k \in S_k,\ \ U_k(s_k^*, s_{-k}^*) \geq U_k(s_k, s_{-k}^*)$$

- 自分だけが行動を変更しても得をしない
- 等価な条件は、$\forall k \in \mathcal{N},\ \ U_k(s_k^*, s_{-k}^*) = \max_{s_k \in S_k} U_k(s_k, s_{-k}^*)$
- 1つとは限らず、存在しない場合もある
- すべてのプレイヤーにとって合理的
  - 実現すればそこから動かない。どのように実現するかは考えない。

例：囚人のジレンマ

$1 \setminus 2$	C	NC
C	$(-2,-2)$	$(-10,0)$
NC	$(0,-10)$	$(-5,-5)$

- プレイヤー2の戦略をCに固定したときのプレイヤー1の利得
  - プレイヤー1がCをとる：-2、プレイヤー1がNCをとる：0
- プレイヤー2の戦略をNCに固定したときのプレイヤー1の利得
  - プレイヤー1がCをとる：-10、プレイヤー1がNCをとる：-5

プレイヤー1の戦略を固定したときも同様。

- 最適反応
  - C に対して NC
  - NC に対して NC
- ナッシュ均衡：(NC, NC)
  - 囚人のジレンマでは、ナッシュ均衡はパレート最適ではない。
    - パレート最適：自分の利得を上げるには他のプレイヤーの利得を悪化させる状態
  - 双方のプレイヤーにとって利得が一番良いのは (C, C) となること。

1.3 混合戦略と混合戦略ナッシュ均衡

ゲーム $G = (\mathcal{N}, S, U)$ を考える。S_k 上の確率分布 X_k をプレイヤー k の混合戦略と呼ぶ。X_k は以下のように表される。

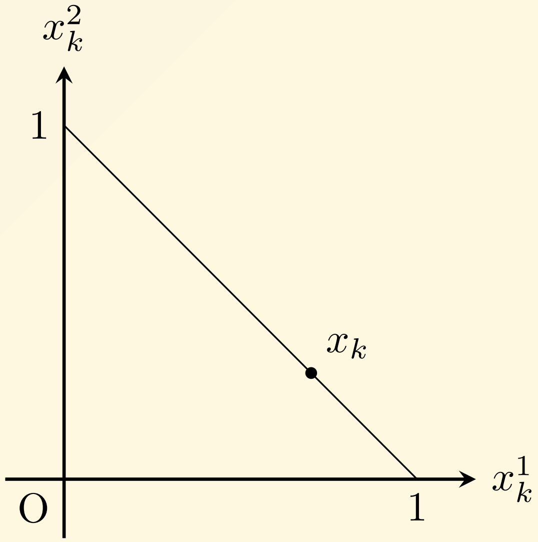
$$X_k = \left\{ x_k = \begin{pmatrix} x_k^1 \\ \vdots \\ x_k^{|S_k|} \end{pmatrix} \middle| \forall i \in S_k \, x_k^i \geq 0, \ \sum_{j \in S_k} x_k^j = 1 \right\}$$

また、純粋戦略空間 S に対応する混合戦略空間 X は、

$$X = \times_{k \in \mathcal{N}} X_k$$

補足

X_k は単位ベクトル $e^i_{|S_k|}$ $(\forall i \in S_k)$ を頂点とする $|S_k|-1$ 次元単位単体となる。
$S_k = \{1, 2\}$ のとき、混合戦略 $x_k = (x^1_k, x^2_k)^{\mathrm{T}}$ は、線分 $x^1_k + x^2_k = 1$, $0 \leq x^i_k \leq 1$ $(i = 1, 2)$ 上の点である。



以下の記号を定義する。

- $x := (x_1, \dots, x_n) \in X$
- $x_{-k} := (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$
- $x(s) := \prod_{i \in \mathcal{N}} x_i^{s_i}$: $x \in X$ で $s \in S$ が実際に起こる確率

利得関数の混合戦略への拡張 (期待利得関数) は、以下で定義される。

- $u : X \to \mathbb{R}^n, u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$
  - $u_k : X \to \mathbb{R}$

$$u_k(x) = \sum_{s \in S} x(s) U_k(s) = \sum_{i \in S_k} x_k^i u_k \left(e^i_{|S_k|}, x_{-k} \right)$$

ゲーム $G = (\mathcal{N}, S, U)$ は、$G = (\mathcal{N}, X, u)$ に拡張される。

2人ゲームとき、利得関数 u_1, u_2 は利得行列 A, B を用いて以下のように表現される。

$$u_1(x) = \sum_{s \in S} x(s) U_1(s) = \sum_{s \in S} x_1^{s_1} x_2^{s_2} U_1(s_1, s_2)$$

$$= \sum_{s_1 \in S_1} \sum_{s_2 \in S_2} x_1^{s_1} x_2^{s_2} a_{s_1, s_2} = x_1^{\mathrm{T}} A x_2$$

$$u_2(x) = \sum_{s_1 \in S_1} \sum_{s_2 \in S_2} x_1^{s_1} x_2^{s_2} b_{s_1, s_2} = x_1^{\mathrm{T}} B x_2$$

例：囚人のジレンマ

混合戦略集合 X_k $(k=1,2)$ は以下のように定義される。

- $X_k = \left\{ x_k \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_k = (x_k^1, 1-x_k^1)^{\mathrm{T}},\ 0 \le x_k^1 \le 1 \right\}$ $(k=1,2)$

利得関数 $u_1 : X \to \mathbb{R}$, $u_2 : X \to \mathbb{R}$ は以下のように定義される。

$$u_1(x) = x_1^{\mathrm{T}} A x_2 = \begin{pmatrix} x_1^1 & 1-x_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^1 \\ 1-x_2^1 \end{pmatrix}$$

$$u_2(x) = x_1^{\mathrm{T}} B x_2 = \begin{pmatrix} x_1^1 & 1-x_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^1 \\ 1-x_2^1 \end{pmatrix}$$

Def (最適反応)

$s_k^* \in \beta_k(x)$ を x_{-k} に対する**純粋**戦略最適反応、
$x_k^* \in \tilde{\beta}_k(x)$ を x_{-k} に対する**混合**戦略最適反応と呼ぶ。

- 純粋戦略最適反応対応 $\beta_k : X \to 2^{S_k}$:

$$\beta_k(x) = \left\{ i \in S_k \;\middle|\; \forall j \in S_k \; u_k\left(e^i_{|S_k|}, x_{-k}\right) \geq u_k\left(e^j_{|S_k|}, x_{-k}\right) \right\}$$

- 混合戦略最適反応対応 $\tilde{\beta}_k : X \to 2^{X_k}$:

$$\tilde{\beta}_k(x) = \left\{ x_k^* \in X_k \;\middle|\; \forall x'_k \in X_k \; u_k\left(x_k^*, x_{-k}\right) \geq u_k\left(x'_k, x_{-k}\right) \right\}$$

Def (ナッシュ均衡)

$x^* \in \tilde{\beta}(x^*)$ が成り立つとき、x^* をナッシュ均衡という。

$$\tilde{\beta}(x) := \times_{k \in \mathcal{N}} \beta_k(x) \subseteq X$$

- ナッシュ均衡
  - すべてのプレイヤーにとって合理的な解
  - 有限ゲームでは必ず存在 (複数存在する可能性あり)

例：調整ゲーム

$1 \setminus 2$	1	2
1	$(2, 1)$	$(0, 0)$
2	$(0, 0)$	$(1, 2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

プレイヤー2の混合戦略を $x_2 = (x_2^1, 1 - x_2^1)^\mathrm{T}$ で固定する。プレイヤー1が純粋戦略をとるときの期待利得は、

$$u_1(e_2^1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^1 \\ 1 - x_2^1 \end{pmatrix} = 2x_2^1$$

$$u_1(e_2^2, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^1 \\ 1 - x_2^1 \end{pmatrix} = 1 - x_2^1$$

$$\therefore u_1(e_2^1, x_2) - u_1(e_2^2, x_2) = -1 + 3x_2^1$$

プレイヤー1の混合戦略を$x_1 = (x_1^1, 1 - x_1^1)^{\mathrm{T}}$で固定する。プレイヤー2が純粋戦略をとるときの期待利得は、

$$u_2(e_2^1, x_1) = \begin{pmatrix} x_1^1 & 1 - x_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1^1$$

$$u_2(e_2^2, x_1) = \begin{pmatrix} x_1^1 & 1 - x_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 2x_1^1$$

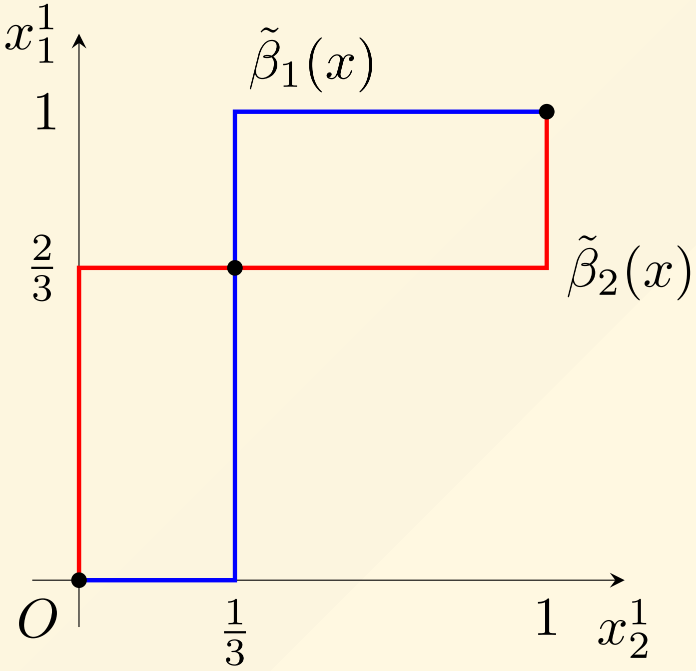
$$\therefore u_2(e_2^1, x_1) - u_2(e_2^2, x_1) = -2 + 3x_1^1$$

混合戦略最適反応対応 $\tilde{\beta}_k(x)$ $(k = 1, 2)$ は、

$$\tilde{\beta}_1(x) = \begin{cases} e_2^1 & \text{if } x_2^1 > \frac{1}{3} \\ X_1 & \text{if } x_2^1 = \frac{1}{3} \\ e_2^2 & \text{if } x_2^1 < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}_2(x) = \begin{cases} e_2^1 & \text{if } x_1^1 > \frac{2}{3} \\ X_2 & \text{if } x_1^1 = \frac{2}{3} \\ e_2^2 & \text{if } x_1^1 < \frac{2}{3} \end{cases}$$

と求められる。



ナッシュ均衡は

$$x^* \in \left\{ (e_2^1, e_2^1), (e_2^2, e_2^2), \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)^{\mathrm{T}}, \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)^{\mathrm{T}} \right) \right\}$$

1.4 数値計算

Python の `nashpy` というパッケージを使うと、2人ゲームの定義、ナッシュ均衡の導出が可能。

```
python3 -m venv ~/.venvs/game_numerical
source ~/.venvs/game_numerical/bin/activate
(game_numerical) pip install --upgrade pip
(game_numerical) pip install -r requirements.txt
```

`requirements.txt` には、 `numpy` , `nashpy` , `jupyter` , `ipykernel` が記述されていれば良い。

例：じゃんけん

```
A = np.array([[0, 1, -1],
              [-1, 0, 1],
              [1, -1, 0]])
B = np.array([[0, -1, 1],
              [1, 0, -1],
              [-1, 1, 0]])
coordination_game = nash.Game(A, B)
coordination_game
```

```
Zero sum game with payoff matrices:

Row player:
[[ 0  1 -1]
 [-1  0  1]
 [ 1 -1  0]]

Column player:
[[ 0 -1  1]
 [ 1  0 -1]
 [-1  1  0]]
```

```python
equilibria = coordination_game.vertex_enumeration()
for eq in equilibria:
    print(eq)
```

```
(array([0.33333333, 0.33333333, 0.33333333]), array([0.33333333, 0.33333333, 0.33333333]))
```

参考文献

[1] 岡田章, *ゲーム理論*, 2011.
[2] H. Peter, *Game Theory: A Multi-Leveled Approach*, Springer, 2015.
[3] Nashpy's documentation, accessed on 08/06/2022