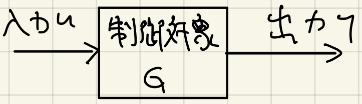
カルマンフィルタの基礎

第3章ー第4章

3. システムのモデリング

◎ 制御系設計のためのシステムのモデリング.

3.1. 信号とシステム.



u : 入力信号
y : 出力信号
G : 対象となるシステム.

信号とシステムの観点から、制御の問題は次の3つに分類できる、

- モデリング (modeling)
  入出力信号 u と y が与えられたとき、システム G を求める.
- 解析 (analysis)
  入力信号 u とシステム G が与えられたとき、出力信号 y の性質を調べる.
- 設計 (design)
  システム G と出力信号 y の目標値 r が与えられたとき、入力信号 u を求める.

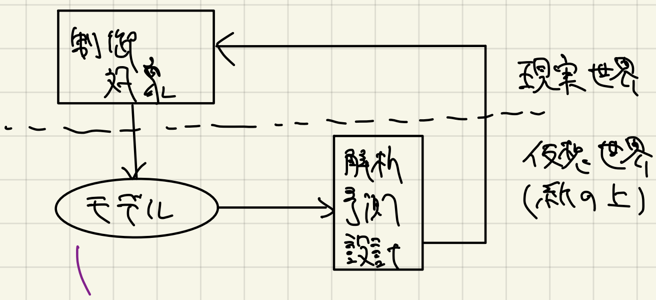
- 信号とシステムの区別を明確にする.
- 信号とシステムに関する基礎理論をじっくり学ぶ.

3.2. 制御のためのモデリング.

○ 制御系設計法の分類

(1) モデルベースド制御
- 現代制御
- ロバスト制御
- モデル予測制御

(2) モデルフリー制御
- ファジィ制御
- ニューロ制御



現実世界と
仮想世界を結ぶ
インタフェース

古典制御
…ノンパラメトリック

現代制御
…パラメトリック

◎ 制御と推定は双対な問題.

3.2.2. 数学モデルの構築法

モデルの分類
- ・数学モデル（数理モデル）
- ・グラフィカルモデル

◎数理モデルの構築法.

科学法則

(1) 第一原理モデリング
- ・対象を支配する第一原理に基づいてモデリングを行う
- ・対象の構造が完全に既知の場合に適用可.（ホワイトボックスモデリング）

☑利点
- ・対象の挙動が忠実に再現できる.
- ・計算機上でモデリングして、解析や予測を行うことができる.

☒問題点
- ・詳細なモデルを計算機上に実装するとシミュレータができる.
  モデルが複雑 → 制御系設計にそのまま利用するのが難しい.
- ・実際に実験を行わなければ値が分からないパラメータも存在する.

(2) システム同定
- ・実験データに基づくモデリング
  …対象をブラックボックスと見なしてその入出力データから統計的な手法でモデリングを行う方法.（ブラックボックスモデリング）

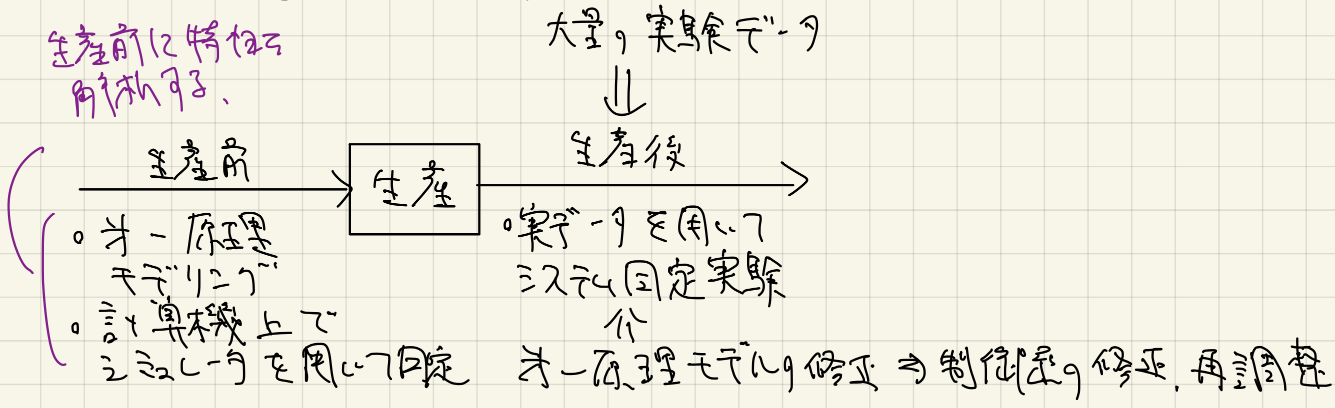
☑利点
- ・複雑なシステムに対しても、実験データから比較的簡潔なモデルを得ることができる.
- ・さまざまなシステム同定法が提案. MATLABで実装.

☒欠点
- ・実験的なモデリング法. → モノがないとモデリングできない.

(3) グレーボックスモデリング.
- ・(1)、(2)の中間
- ・部分的な物理情報が利用可能.
  - ・実際に制御の現場で用いられているモデリング法.

3.2.3. 大量のデータの利用.

モデリングの例：生産現場



第一原理モデリング
… 対象を忠実に再現することを目指して作られた.
⇝ 複雑.

⇒ モデルの簡単化

実システム	近似	公称モデル
非線形	→ 線形化 →	線形
分布定数 (PDE)	→ 集中化 →	集中定数 (ODE)
時変	→	時不変
連続時間	→ 離散化 →	離散時間
高次	→ 低次元化 →	低次

◎ 近年は、「大量のデータの中からいかにして意味のある情報を抽出するか」ということが多くの分野で望まれている.

⇝ データマイニング, 学習理論.

3.3. 第一原理モデリング
◎ 対象が従う物理法則や化学法則などの第一原理を十分調べること.

3.4. システム同定
システム同定
… 対象とする動的システムの入出力データの測定値から, ある目的のもとで, 対象と同一である何らかの数学モデルを構築すること.

図 目的
・何のためにシステム同定を行うか.
(例)
・制御系設計
・異常診断/故障検出
・モデルに基づいた計測
・適応信号処理
・状態推定

◎ システム同定は最終目的ではない.

図 数学モデル
制御工学で用いられる数学モデル
・伝達関数
・周波数伝達関数
・ステップ応答
・状態方程式
⇝ システム同定法と目的に依存.

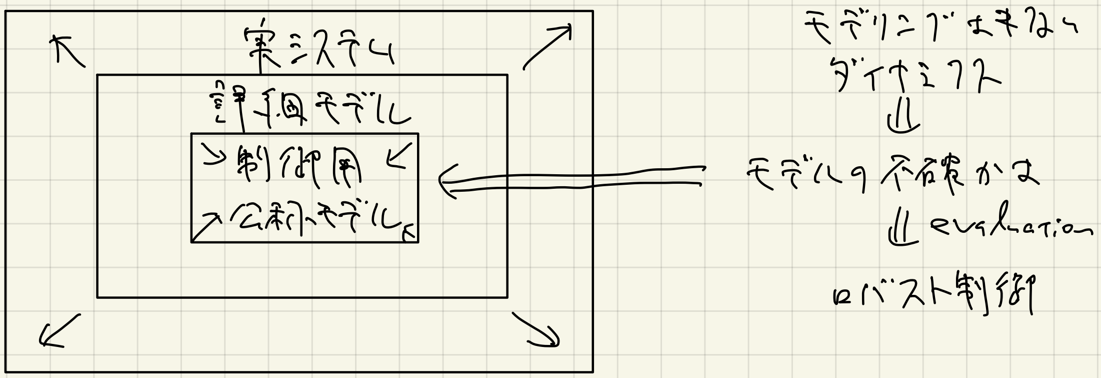
⊡ 同一であること.
- モデルの品質に関係.
- 対象の重要な特性がモデルに盛り込まれているとき、同一であると見なす.

モデルの不確かさ
…モデルに含まれなかった動特性.

◎ 統計的な評価関数を用いてモデルがどの程度元のシステムと同一であるかを判断する.

3.4.2. システム同定用ソフトウェア
◎ MATLAB, System Identification TOOLBOX.

3.5. 制御のためのモデリングのポイント.



◎ 制御のためのモデリング
対象の主要なダイナミクスを、できるだけ簡単な公称モデルで表現.

○ モデルの不確かさ
制御工学においては、詳細モデルと公称モデルの差.

⊡ ロバスト制御のためのモデリング
(1) どれだけ第一原理モデリングを制御対象に近づけられるか？
(2) 制御用公称モデルが第一原理モデルの重要な部分をよく近似しているか？
(3) 近似しきれなかった部分を定量的に評価できるか？

☆ モデリングが最終目的ではなく、最終的に構成される制御系の性能が大事.

4. 最小二乗推定法

4.1. 最小二乗推定法（スカラの場合）

4.1.1. 最小二乗推定値

例：ある物質の温度の測定

x：温度を表す r.v.
… ある時刻における物理量の真値は r.v. の実現値と考える。

$$E[x] = \bar{x}, \quad E[(x-\bar{x})^2] = \sigma_x^2 \qquad (4.1)$$

… 既知。

物質の温度の観測方程式

$$y = cx + w \qquad (4.2)$$

- y：観測値
- w：観測雑音

$$E[w] = \bar{w}, \quad E[(w-\bar{w})^2] = \sigma_w^2 \qquad (4.3)$$

@ w と x が無相関であると仮定。

- c：物理量から観測量への変換係数（既知）

推定問題

雑音に汚された観測値（スカラ量）y から信号（スカラ量）x の推定値 $\hat{x}$ を求める。

$$\hat{x} = f(y) = \alpha y + \beta \qquad (4.4)$$

線形推定則を仮定。

推定誤差

$$e := x - \hat{x} \qquad (4.5)$$

⇝ 平均二乗誤差（MSE）が最小になるように α、β を決定する。

以下、推定誤差の平均値（1次モーメント）と分散（2次モーメント）に関する 2つの条件を導くことで、未知数（α、β）を決定する。

① 推定誤差の平均値を 0 にする。（1次モーメント）

$$E[e] = E[x - \hat{x}] = E[x - \alpha y - \beta]$$
$$= E[x - \alpha(cx + w) - \beta]$$
$$= (1 - \alpha c)\bar{x} - \alpha\bar{w} - \beta = 0 \qquad (4.6)$$

よって、

$$\hat{\beta} = (1-\alpha c)\bar{x} - \alpha\bar{w} = \bar{x} - \alpha(c\bar{x} + \bar{w}) \qquad (4.7)$$

のとき、$\hat{x}$ は不偏推定値。

② 推定分散誤差を最小化（2次モーメント）

$$
\begin{aligned}
&E[\{e - E[e]\}^2] \\
&= E[[(x - \alpha y - \beta) - \{(1-\alpha c)\bar{x} - \alpha\bar{w} - \beta\}]^2] \\
&= E[\{x - \alpha(cx + w) - (1-\alpha c)\bar{x} + \alpha\bar{w}\}^2] \\
&= E[\{(1-\alpha c)(x - \bar{x}) - \alpha(w - \bar{w})\}^2] \\
&= (1-\alpha c)^2 E[(x-\bar{x})^2] - 2\alpha(1-\alpha c)E[(x-\bar{x})(w-\bar{w})] + \alpha^2 E[(w-\bar{w})^2] \\
&= (1-\alpha c)^2 \sigma_x^2 + \alpha^2 \sigma_w^2 \quad (\because x \text{ と } w \text{ は無相関}) \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

(4.8) は β と無関係。⤳ 誤差を最小化する α を選べる。

(4.8) より、

$$
\begin{aligned}
&E[\{e - E[e]\}^2] \\
&= (c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2)\alpha^2 - 2c\sigma_x^2\alpha + \sigma_x^2 \\
&= (c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2)\left[\alpha^2 - \frac{2c\sigma_x^2}{c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2}\alpha\right] + \sigma_x^2 \\
&= (c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2)\left[\alpha - \frac{c\sigma_x^2}{c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2}\right]^2 + \sigma_x^2 - \frac{c^2\sigma_x^4}{c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2} \\
&= (c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2)\left[\alpha - \frac{c\sigma_x^2}{c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2}\right]^2 + \frac{1}{\sigma_x^{-2} + c^2\sigma_w^{-2}} \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

いま、

$$\sigma^2 := \frac{1}{\sigma_x^{-2} + c^2\sigma_w^{-2}} \qquad (4.10)$$

とおくと、(4.9) は

$$E[\{e - E[e]\}^2] = (c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2)(\alpha - c\sigma_w^{-2}\sigma^2)^2 + \sigma^2 \qquad (4.11)$$

これより、

$$\alpha = c\frac{\sigma^2}{\sigma_w^2} \qquad (4.12)$$

のとき、推定誤差分散は最小値

$E[\{e - E[e]\}^2] = \sigma^2 \quad (4.13)$ をとる。⤳ $\hat{x}$ は最小分散推定値。

以上の結果をまとめる.

☐ 最小二乗推定法

x : r.v.

$E[x] = \bar{x}$, $E[(x-\bar{x})^2] = \sigma_x^2$ (既知)

y : 観測値

$y = cx + w$

w : 観測雑音

$E[w] = \bar{w}$, $E[(w-\bar{w})^2] = \sigma_w^2$

x と w は無相関.

このとき、x の最小二乗推定値 $\hat{x}$ は、

$$\hat{x} = x + \frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2}\left(y - (c\bar{x} + \bar{w})\right) \qquad (4.14)$$

で与えられる。

ただし、σ^2 は推定誤差

$$e = x - \hat{x} \qquad (4.15)$$

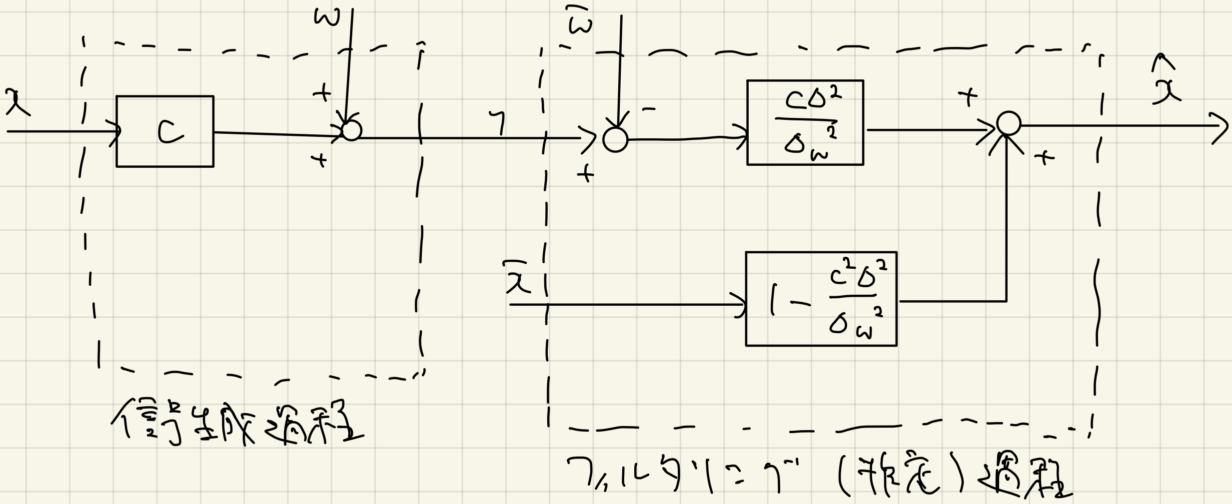
の分散で、

$$\sigma^2 = E[\{e - E[e]\}^2] = \frac{1}{\sigma_x^{-2} + c\sigma_w^{-2}} \qquad (4.16)$$

で与えられる.

◎ $\hat{x}$: 事後推定値, $\bar{x}$: 事前推定値.

○ 最小二乗推定法のブロック線図



特に、$E[w] = 0$ のとき、最小二乗推定値は

$$\hat{x} = \bar{x} + \frac{c\sigma_x^2}{\sigma_w^2}\underbrace{(y - c\bar{x})}_{\text{観測値による修正項}} \qquad (4.17)$$

最小二乗推定値 (4.14) の意味.

$c=1$ とおく, i.e.,

$$y = x + w \quad (4.23)$$

$\bar{w}=0$ とする. このとき, (4.14) は,

$$\hat{x} = \bar{x} + \alpha(y-\bar{x}) \quad (4.24)$$

となる. ただし, α は推定ゲインで, (4.12) で定義される.

ここで,

$$\alpha = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_w^2} = \frac{1}{1+\frac{\sigma_w^2}{\sigma_x^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{SNR}} \quad (4.25)$$

where

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} \quad (4.26)$$

… 雑音の分散と信号の分散の比.

推定ゲインは,

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.27)$$

の範囲に存在する.

- 雑音が存在しない場合, $\alpha = 1$.
- $\sigma_w^2 \to \infty \Rightarrow \alpha \to 0$

(4.24) より,

$$\hat{x} = (1-\alpha)\bar{x} + \alpha y \quad (4.28)$$

… 事後推定値 $\hat{x}$ は事前推定値 $\bar{x}$ と観測値 y の重み付き平均.

- $\alpha \to 1$: 雑音が存在しない. $\hat{x} \to y$.
- $\alpha \to 0$: 雑音が ∞. 観測値の信頼性がない. $\hat{x} \to \bar{x}$.

4.1.2. 直交性の原理.

(4.14) で与えられた $\hat{x}$ と e の相関を計算する.

$$\begin{aligned} E[\hat{x}e] &= E\left[\left\{\bar{x} + \frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2}\left(y-(c\bar{x}+\bar{w})\right)\right\}e\right] \\ &= \left\{\bar{x} - \frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2}(c\bar{x}+\bar{w})\right\}E[e] + \frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2}E[ye] \\ &= \frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2}E[y(x-\hat{x})] \quad (\because E[e]=0) \end{aligned} \quad (4.29)$$

ここで、

$$E[y(x-\hat{x})]$$

$$=E\Big[\underbrace{(cx+w)}_{y}\Big\{x-\underbrace{\Big(\bar{x}+\frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2}\big(y-(c\bar{x}+\bar{w})\big)\Big)}_{\hat{x}}\Big\}\Big]$$

$$=E\Big[(cx+w)\Big\{(x-\bar{x})-\frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2}c(x-\bar{x})-\frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2}(w-\bar{w})\Big\}\Big]$$

$$=E\Big[(cx+w)\Big\{\Big(1-\frac{c^2\sigma^2}{\sigma_w^2}\Big)(x-\bar{x})-\frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2}(w-\bar{w})\Big\}\Big]$$

$$=c\Big(1-\frac{c^2\sigma^2}{\sigma_w^2}\Big)E[x(x-\bar{x})]-\frac{c^2\sigma^2}{\sigma_w^2}E[w(w-\bar{w})] \qquad (4.30)$$

ここで、

$$E[x(x-\bar{x})]=E\big[(x-\bar{x})(x-\bar{x})+\bar{x}(x-\bar{x})\big]=\sigma_x^2 \qquad (4.31)$$

$$E[w(w-\bar{w})]=E\big[(w-\bar{w})(w-\bar{w})+\bar{w}(w-\bar{w})\big]=\sigma_w^2 \qquad (4.32)$$

より、

$$E[y(x-\hat{x})]=c\Big(1-\frac{c^2\sigma^2}{\sigma_w^2}\Big)\sigma_x^2-\frac{c^2\sigma^2}{\sigma_w^2}\sigma_w^2$$

$$=c\Big[1-\sigma^2\Big(\frac{c^2}{\sigma_w^2}+\frac{1}{\sigma_x^2}\Big)+\frac{\sigma^2}{\sigma_x^2}\Big]\sigma_x^2-c\sigma^2$$

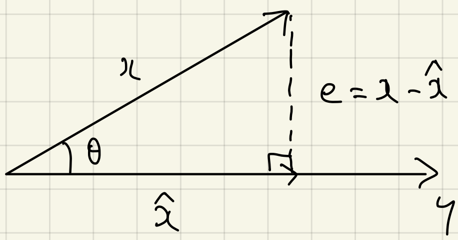
$$=c\Big(1-\sigma^2\frac{1}{\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{\sigma_x^2}\Big)\sigma_x^2-c\sigma^2$$

$$=0$$

〜> 最小二乗推定値と推定誤差は無相関。

$$E[\hat{x}e]=0. \qquad (4.33)$$

…直交性の原理。



Q. 何故線形推定則でよい？

〜> r.v. が正規性であると仮定。

4.2 最小二乗推定法

n個の観測値

$$y = Cx + w \quad (4.37)$$

が得られる多変数の場合を考える.

y : 観測ベクトル
x : 信号ベクトル
w : 観測雑音ベクトル

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

仮定

x と w は無相関.

$$\mathbb{E}[x] = \bar{x}, \quad \mathbb{E}[(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T] = \Sigma_x \quad (4.39)$$

$$\mathbb{E}[w] = \bar{w}, \quad \mathbb{E}[(w-\bar{w})(w-\bar{w})^T] = \Sigma_w \quad (4.40)$$

… Σ_x, Σ_w : 正定値対称.

⇝ 出力 y の平均ベクトルは,

$$\mathbb{E}[y] = \mathbb{E}[Cx + w] = C\bar{x} + \bar{w}$$

共分散行列は,

$$\mathbb{E}[(y - \mathbb{E}[y])(y - \mathbb{E}[y])^T]$$

$$= \mathbb{E}[((Cx + w) - (C\bar{x} + \bar{w}))((Cx + w) - (C\bar{x} + \bar{w}))^T]$$

$$= \mathbb{E}[\{C(x-\bar{x}) + (w-\bar{w})\}\{C(x-\bar{x}) + (w-\bar{w})\}^T]$$

$$= C\Sigma_x C^T + \Sigma_w \quad (\because x, w \text{は無相関}) \quad (4.41)$$

線形推定則

$$\hat{x} = Fy + d \quad (4.42)$$

を用いる.

- F : $n \times n$ 行列
- d : $n \times 1$ ベクトル

を決定する問題

$$e := x - \hat{x} \quad (4.43)$$

… 推定誤差ベクトル,

⇝ 最小二乗推定値を導出する.

推定誤差ベクトルに対して、

$$\mathbb{E}[\mathbb{e}] = \mathbb{E}[x - Fy - d]$$
$$= \bar{x} - F(C\bar{x} + \bar{w}) - d = 0. \quad (4.44)$$

より、
$$d = \bar{x} - F(C\bar{x} + \bar{w}) = (I - FC)\bar{x} - F\bar{w} \quad (4.45)$$
を得る。

推定誤差ベクトルの共分散行列を、
$$\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbb{e}\mathbb{e}^T] \quad (4.46)$$
とする
… 誤差共分散行列. ($n \times n$ 行列)

4.1節より、2次モーメントの最小化に関連するのは行列 F の部分である。
⇝ 共分散行列を最小にする行列 F を求める

$$\mathbb{P} = \mathbb{E}[(x - Fy - d)(x - Fy - d)^T] \quad (\because (4.43))$$
$$= \mathbb{E}[\{x - F(Cx + w) - d\}\{x - F(Cx + w) - d\}^T] \quad (\because (4.37)) \quad (4.47)$$

ここで、
$$x - F(Cx + w) - d$$
$$= (I - FC)x - Fw - d$$
$$= (I - FC)x - Fw - (I - FC)\bar{x} + F\bar{w} \quad (\because (4.45))$$
$$= (I - FC)(x - \bar{x}) - F(w - \bar{w}) \quad (4.48)$$

なので、(4.47) は、

$$\mathbb{P} = \mathbb{E}[\{(I - FC)(x - \bar{x}) - F(w - \bar{w})\}\{(I - FC)(x - \bar{x}) - F(w - w)\}^T]$$
$$= (I - FC)\Sigma_x (I - FC)^T + F\Sigma_w F^T \quad (\because x と w は無相関)$$
$$= F(C\Sigma_x C^T + \Sigma_w)F^T - FC\Sigma_x - \Sigma_x C^T F^T + \Sigma_x \quad (4.49)$$

⇝ F に関して2次形式。何らかの条件をみたせば共分散行列の最小値を与える F が存在する。
2次の記号を定義。

$$A = C\Sigma_x C^T + \Sigma_w, \quad B = C\Sigma_x \quad (4.50)$$

$$⇝ \quad \mathbb{P} = \underbrace{FAF^T}_{2次} \underbrace{- FB - B^T F}_{1次} \underbrace{+ \Sigma_x}_{0次} \quad (4.51)$$

A は正定値より、この関数は最小値をもつ。

ここで、

$$\mathbb{P} = FAF^T - FB - B^TF^T + \Sigma_x$$

$$= (F - B^TA^{-1})A(F - B^TA^{-1})^T + \Sigma_x - B^TA^{-1}B \qquad (4.52)$$

$\rightsquigarrow \quad F = B^TA^{-1} \quad (4.53)$

が成り立つとき、$\mathbb{P}$は最小値

$$\mathbb{P} = \Sigma_x - B^TA^{-1}B \qquad (4.54)$$

をとる，元の記号に戻すと、

$$F = \Sigma_x C^T (C\Sigma_x C^T + \Sigma_w)^{-1} \qquad (4.55)$$

となる．よって、

$$\hat{x} = Fy + (I - FC)\bar{x} - F\bar{w} \qquad (\because (4.42), (4.45))$$

$$= \bar{x} + F\{y - (C\bar{x} + \bar{w})\}$$

$$= \bar{x} + \Sigma_x C^T (C\Sigma_x C^T + \Sigma_w)^{-1}\{y - (C\bar{x} + \bar{w})\} \qquad (4.56)$$

… 多変量の場合の最小二乗推定値．

共分散行列の最小値は、

$$\mathbb{P} = \Sigma_x - \Sigma_x C^T(\Sigma_w + C\Sigma_x C^T)^{-1}C\Sigma_x \qquad (4.57)$$

で与えられる．

Woodbury

$$(A + UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(B^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

逆行列補題

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

… システム同定における逐次最小二乗推定法の導出に用いられる．

スカラーの場合の推定分散誤差は

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sigma_x^{-2} + c^2\sigma_w^{-2}}$$

であった．多変量の場合にも、

$$(\Sigma_x^{-1} + C^T\Sigma_w^{-1}C)^{-1} \qquad (4.59)$$

であることが予想される．(4.59)にWoodburyを適用する．

$$A \leftarrow \Sigma_x^{-1}, \quad U \leftarrow C^T, \quad B \leftarrow \Sigma_w^{-1}, \quad V \leftarrow C$$

$$(\Sigma_x^{-1} + C^T \Sigma_w^{-1} C)^{-1}$$

$$= \Sigma_x - \Sigma_x C^T (\Sigma_w + C \Sigma_x C^T)^{-1} C \Sigma_x$$

$$= P \qquad (4.60)$$

以上より，推定誤差共分散行列の最小値は以下のように2つの式として記述できる．

$$P = (\Sigma_x^{-1} + C^T \Sigma_w^{-1} C)^{-1}$$

$$= \Sigma_x - \Sigma_x C^T (\Sigma_w + C \Sigma_x C^T)^{-1} C \Sigma_x \qquad (4.61)$$

(4.55) のゲイン行列Fは以下のように変形できる．

$$F = \Sigma_x C^T (C \Sigma_x C^T + \Sigma_w)^{-1}$$

$$= \underbrace{\Sigma_x C^T \Sigma_w^{-1} - \Sigma_x C^T \Sigma_w^{-1}}_{\text{加える}} + \Sigma_x C^T (C \Sigma_x C^T + \Sigma_w)^{-1}$$

まとめる

$$= \Sigma_x C^T \Sigma_w^{-1} - \Sigma_x C^T \left[\Sigma_w^{-1} - (C \Sigma_x C^T + \Sigma_w)^{-1} \right]$$

$$= \Sigma_x C^T \Sigma_w^{-1} - \Sigma_x C^T (C \Sigma_x C^T + \Sigma_w^{-1})^{-1} \left[(C \Sigma_x C^T + \Sigma_w) \Sigma_w^{-1} - I \right]$$

これでくくる

$$= \Sigma_x C^T \Sigma_w^{-1} - \Sigma_x C^T (C \Sigma_x C^T + \Sigma_w^{-1})^{-1} \left[\underbrace{(C \Sigma_x C^T + \Sigma_w) - \Sigma_w} \right] \Sigma_w^{-1}$$

これでくくる

$$= \Sigma_x C^T \Sigma_w^{-1} - \Sigma_x C^T (C \Sigma_x C^T + \Sigma_w^{-1})^{-1} C \Sigma_x C^T \Sigma_w^{-1}$$

$$= \underbrace{\left\{ \Sigma_x - \Sigma_x C^T (C \Sigma_x C^T + \Sigma_w^{-1})^{-1} C \Sigma_x \right\}}_{P} C^T \Sigma_w^{-1}$$

これでくくる

$$= P C^T \Sigma_w \qquad (4.62)$$

… 共分散行列を用いたゲイン行列の記述．

… αと同じ形式．

ここまでをまとめる。

多変量の場合の最小二乗推定値は、

$$\hat{x} = \bar{x} + PC^T\Sigma_w^{-1}\{y - (C\bar{x} + \bar{w})\} \qquad (4.63)$$

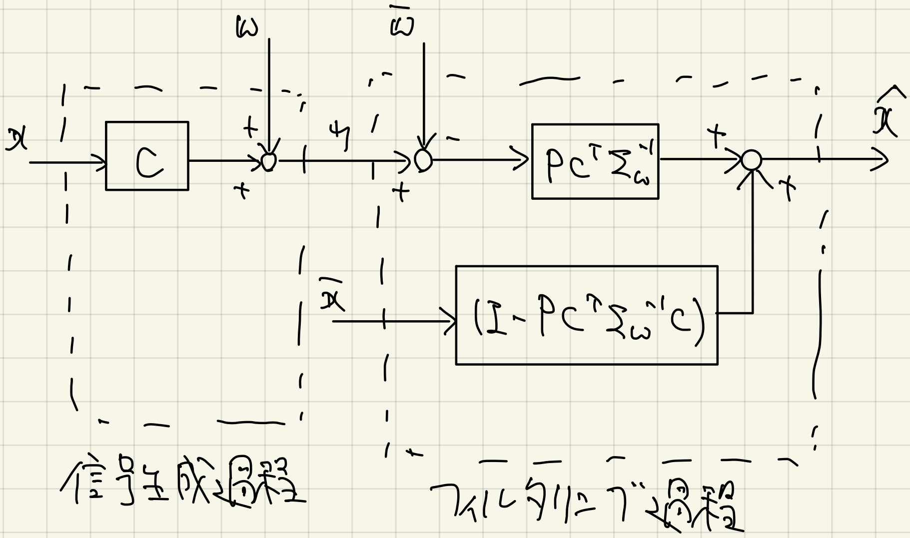
で与えられる。このとき、共分散行列は次で与えられる最小値をとる。

$$P = \Sigma_x - \Sigma_x C^T(\Sigma_w + C\Sigma_x C^T)^{-1} C\Sigma_x \qquad (4.64)$$

とくに、雑音の平均ベクトルが0の場合には、

$$\hat{x} = \bar{x} + PC^T\Sigma_w^{-1}(y - C\bar{x}) \qquad (4.65)$$

となる。ブロック線図を以下に示す。



◎ 推定値と推定誤差の直交性

$$E[\hat{x}e^T] = 0 \qquad (4.66)$$