統計的学習理論 第 4 章 補足資料

スライドに載せていない証明の部分の補足資料となっている．

■定理 4.2 の証明　定理 4.2 を示すために，次の補題を示す．

補題 1. *Hermite* 行列 A, B が非負定値であれば，*Hadamard* 積 $A \circ B$ も非負定値である．

Proof. $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ とする．A, B は Hermite より，固有値をそれぞれ λ_i, μ_i $(i = 1, \dots, n)$，固有ベクトルをそれぞれ u_i, v_i $(i = 1, \dots, n)$ とすると，$\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ であり，u_i (および v_i) は互いに直交するようにとれる．このとき，

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^*,\ B = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j v_j^*$$

とスペクトル分解できる (u_i^*, v_j^* は u_i, v_j の共役転置)．ここで，

$$(u_i u_i^*) \circ (v_j v_j^*) = (u_{i,k}\bar{u}_{i,l} \cdot v_{j,k}\bar{v}_{j,l})_{k,l} = (u_{i,k}v_{j,k} \cdot \bar{u}_{i,l}\bar{v}_{j,l})_{k,l} = (u_i \circ v_j)(u_i \circ v_j)^*$$

が成立する．よって，

$$A \circ B = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (u_i u_i^*) \circ (v_j v_j^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (u_i \circ v_j)(u_i \circ v_j)^*$$

が成立する．A, B は非負定値より，$\lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ であり，行列 $(u_i \circ v_j)(u_i \circ v_j)^*$ は非負定値である．よって，$\forall x \in \mathbb{C}^{n\times n}$ に対して，

$$x^*(A \circ B)x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j x^*(u_i \circ v_j)(u_i \circ v_j)^* x \geq 0$$

が成り立ち，$A \circ B$ が非負定値であることが示される．□

この結果を用いて，定理 4.2 を証明する．

Proof.
1 の証明　カーネル関数の定義において $n = 1$ とすると，定義より明らか．
2 の証明　$ak_1 + b$, $k_1 + k_2$ の対称非負定値性は容易に分かる．カーネル関数の積 $k = k_1 \cdot k_2$ について考える．$x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ に対してカーネル関数 k_i から定義されるグラム行列を K_i とする．このとき，$K = (k(x_i, x_j))$ は，$K = K_1 \circ K_2$ と，非負定値行列の Hadamard 積を用いて表される．定理 1 より，K が非負定値であることが示され，$k_1 \cdot k_2$ がカーネル関数であることが示される．

3 の証明　極限 k_∞ の対称性は明らか．ここで，各 ℓ に対して k_ℓ がカーネル関数より，各 ℓ に対して $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j k_\ell(x_i, x_j) \geq 0$ が成り立つ．よって，$\ell \to \infty$ として $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j k_\infty(x_i, x_j) \geq 0$ が示され，k_∞ の非負定値性が示される．よって，k_∞ がカーネル関数であることが示される． $\square$