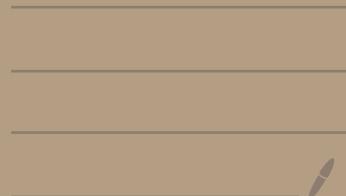


# カルマと人生の基礎

---

第1章 - 第2章



## 1. はじめに.

### 1.1. フィルタリング

ミステム制御理論、構組みで發展。

… 基本は時系列解析。

～) ダイナミクスとその時系列を扱う全く領域で利用可能。

## 1.2. フィルタとは。

### ④ フィルタリング理論。

- 1940年代、コルモゴロフ(ロシア)、ヴィナー(米)らが定常時系列(定常確率過程)に対して提案。

#### Point 1.1 (古典的フィルタリング問題)

一測定された時系列データの中から、信号(Signal;  $s$ )成分とノイズ(Noise;  $N$ )成分を除去するアルゴリズムを見つける。

… ただし、この時刻までの時系列データを用いて、この時刻で信号処理を行う。

… 二つの解決に対する解説として得られたのが Wiener Filter。

位相平均を用いた定式化。

これに対し、かくはんは状態空間表現を用いて上記のフィルタリングの解を与えた。

#### Point 1.2 (状態推定問題とこのフィルタリング問題)

- 現時刻までに確定可能な量である時系列データと。

場全によじては入力も用いて、ダイナミクスを規定する状態変数の値を確定する。

c.f. オグザーバー：状態方程式、状態を推定する方法。

～) 録音などで音源(つまり確定的)な場合全好用。

かくはんフィルタ：不確定的構組みで状態推定問題を解決する。

1.3. フィルタリング問題，例題.

図 バネ・マス・ダムシステム.

運動方程式式:

$$M \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} + C \frac{d\gamma(t)}{dt} + K\gamma(t) = u(t) \quad (1.1)$$

where

$t \in [0, \infty)$  : 運動時間

M: 質量

C: 摩擦係数

K: バネ定数

$u(t)$ : 入力(力)

$\gamma(t)$ : 出力(質量の位置)

$\frac{d\gamma(t)}{dt}$ : 速度,  $\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}$ : 加速度

ダイヤミック

運動方程式

解法: 差分方程式

①仮定

位相  $\gamma(t)$  のみが用意可能

$$\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} = \frac{1}{M} \left( -C \frac{d\gamma(t)}{dt} - K\gamma(t) + u(t) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\gamma(t)}{dt} \right)$$

(1.1) を状態方程式表現に変換する

状態変数を以下で定義

$$\begin{cases} x_1(t) := \gamma(t) & (\text{位相}) \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} x_2(t) := \frac{d\gamma(t)}{dt} & (\text{速度}) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\sim \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad (1.4)$$

(1.1) - (1.3) 代入.

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{M} \left( -C x_2(t) - K x_1(t) + u(t) \right) \quad (1.5)$$

(1.4), (1.5) 代入

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} u(t) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

状態ベクトル  $x(t)$  と

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

元々代入式

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

2つ目  
 $\frac{d}{dt} x(t) =: \dot{x}(t) \leq ?$

(1.6) - (1.8) 5)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (1.1) \quad \text{状態方程式}$$

25(2). 假定 $\psi$  出力  $\gamma(t)$  は、

$$y(t) = C^T x(t) \quad (1.10) \text{ 为 } \text{微分} \text{ 方程}$$

where

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1, 1)$$

$(1.9), (1.10)$  をミスでなく~~間違~~誤解して、  
 $\exists x \exists y$ . ~~この~~空間内に  $x$  と  $y$  が  
互いに近傍集合  $A, B, C$  が既知でない~~存在~~。

実体(2)は、交通工具の障害、飲酒運転等が混入する。

上人、準備下で、22歳は2人下の7ヶ月位で7歳の誕生日。

Point 1.3 (力率32%で497イルタリ27%内蔵)

ミステリーダイヤルミストが既知 (i.e.  $\{A, B, C\}$  が既知) である

という位置、下で、部音汚土中の位置、(大) x.5

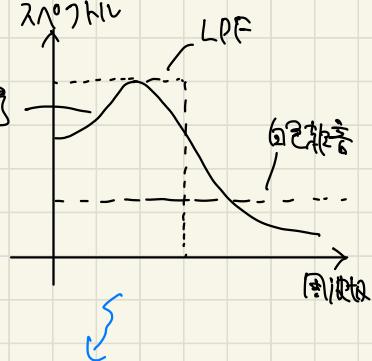
狀態變數)( $x$ ) (i.e.速度及位置) 為確定量 $\Rightarrow$

位置が決まっているときの速度、求める

## …位置信息の微分

HPF තුළුවයි.

～位置で→隣接音が多く含まれる場合に付.  
多く位置で→を LPF (隣接音) が付.



-fix 12.

《信号》：伍峰（1971—至今）  
《敲音》（白色书）：王道才（1971—至今）

7月17日 構造(2次級)  
カットオフ周波数 12  
渡電流 12A

カルマニルマニ

（… 複数の正規化色性を復元。

～ミステリーロード最後設計で生す。

ソートマニア

～ハードウェアとCPUやサムが1つでも、ソフトウェアで補足できす。

① カルマニルマニはモデルベースストラクチャ Q - T

…文書系の正確性はモデルが利用できるか、その順序を適切に適用するここで、状態推定(カルマニア)ができます。

～モデルの「支循」を進めて、何が見えるか見つけ！

1.4. 離散時間信号の推定問題  $\{y(t); 0 \leq t < \infty\}$

自然界に存在する信号は連続時間信号だが、我々が物理世界では離散時間信号

$\{y(k); k=0, 1, 2, \dots\}$ , 時刻  $t = -T$

① 推定問題は、利用できず  $t = -T$  の時刻と推定した後の時刻の間で3つの分類でます。

Point 1.4. (推定問題)

現時刻を  $k$  とします。推定問題は3つに分類されます。

○予測 (Prediction)

- 時刻  $(k-n)$  までの過去  $t = -T$  に基いて、現在の値  $y(k)$  を推定する問題。

… 予測値  $\hat{y}(k|k-n)$  を書き。

○フィルタリング (filtering)

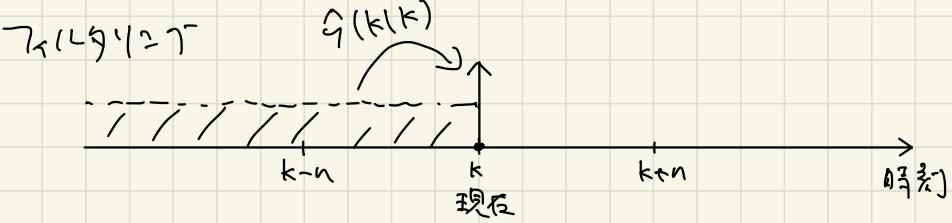
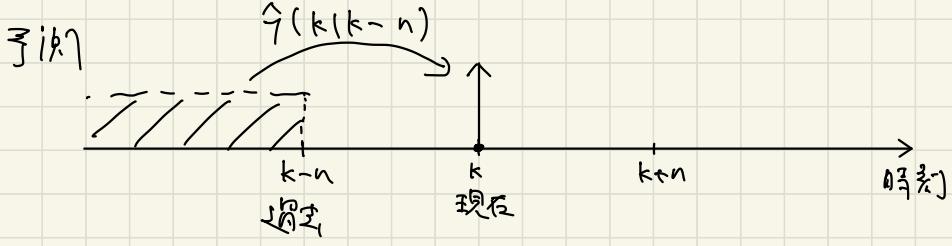
- 時刻  $k$  までの現時刻までの  $t = -T$  に基いて、現在の値  $y(k)$  を推定する問題。

… フィルタリング値  $\hat{y}(k|k)$  を書き。

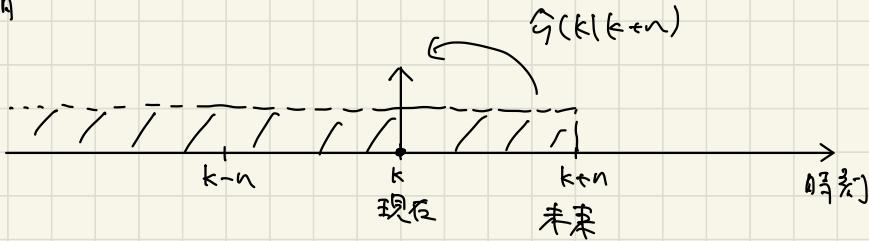
○平滑 (smoothing)

- 時刻  $(k-n)$  までの未来  $t = -T$  (基づいて) 現在の値  $y(k)$  を書き  $n$  個

… 平滑値  $\hat{y}(k|k+n)$  を書き。



予測



1.5.  $\hat{y}_{\text{実測}} = ?$  の入力回路の構造

① 確率的・統計的方法基盤が重要。

・実験、観測のモデル化。

1.6. カルマ=カルマの設計手順は一本の筋成

② カルマ=カルマの設計手順。

時系列モデル設計

①

時系列モデル化

…時系列モデル化技術  
時間差のモデル化構築

$\Rightarrow$

$\hat{y}_{\text{実測}} = ?$

.. カルマ=カルマ  
設計、実装

2. 時系列のモデル化

モデルベース

カルマ＝モデルを用いて時系列やシステム状態を定義  
→ 時系列をモデルする時系列やシステムのモデル化

高精度な状態推定が  
行えるかどうかを基準。  
重要!!

2.1. モデル化とは

モデル化

… 対象とするシステムまたは時系列(信号)の性質を特徴づける  
モデルを構築すること。

基礎

① 複雑な物理現象をモデル化する現象

モデルと、単純化された物理的表現に変換しようとすると

モデル化の過程で

○ 方法論

○ 工学化・知識化・経験  
が重視。

ここで対象とするモデル(例、2次方程式)に記述でき。

モデルとは、対象の本質的な部分だけを抽出して、  
特定の形式で表現したものである。

重要性は、

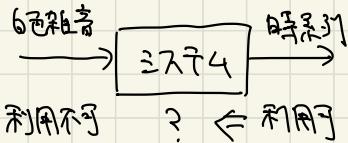
モデルには本物がもつ特徴があり、それを(モデル化する人)  
が着目する。これが致していやすといふこと。

→ モデル = 26件

モデル化不能か

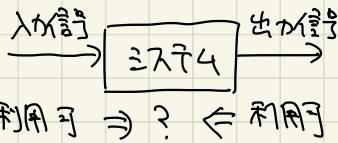
…本物を記述していける部分がある。

2.2. 時系列] ⑨モード「=」とミスティックモード「!=」.



対象とする時系列を、ある種形ミスティック入力で  
モード「!=」.

(a) 時系列] ⑨モード「=」

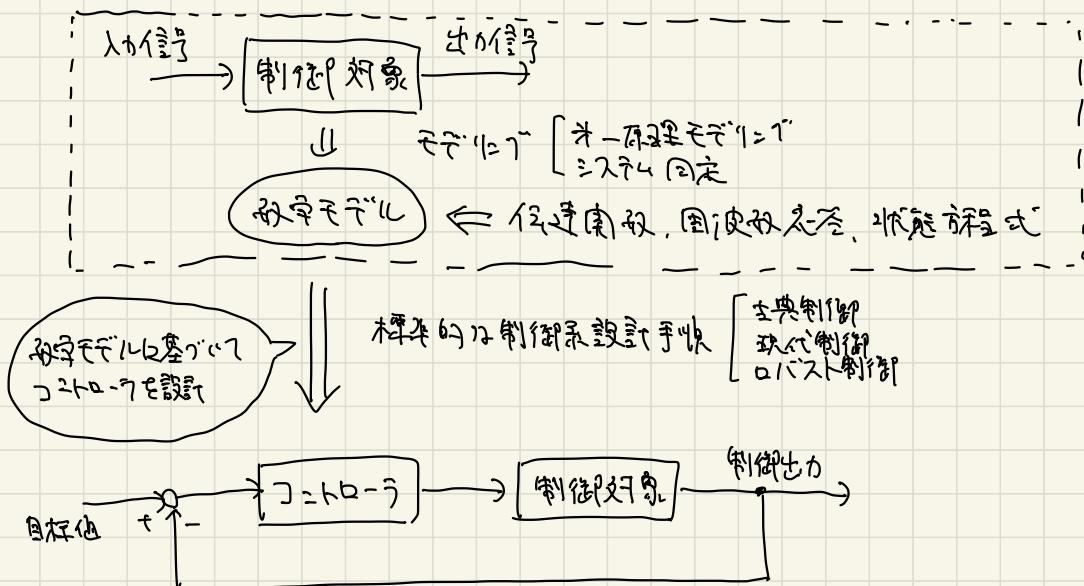


対象とするミスティックモードで、そのミスティック入力信号  
から構成可.

(b) ミスティックモード「=」  
(ミスティック固定)

③ モデルに基づく制御.

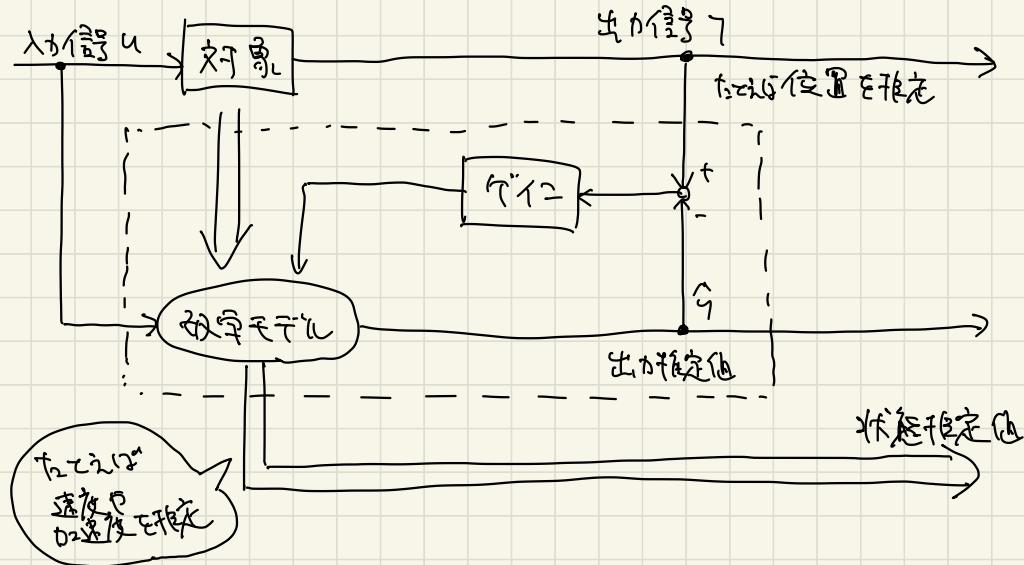
- ミスティックモデルが得失失敗, そしに基づいて制御系を構成可.



### ③ モデルに基づく状態推定

時系列あるのは三入力のモデルが得られるとき。

② モデル(2)に基づく状態推定(フィルタリング)を行なう。



2.3. 線形動的三入力で用いた時系列のモデル化。

対象とする時系列を $\gamma$ - $\gamma$ とす。

$\{\gamma(k), k=1, \dots, N\}$   $\curvearrowleft$  時間スケーリング周期で用いる  
とする。 $\curvearrowright$  離散化された離散時間で $\gamma$ 。

利用できるデータ

時間変遷程

無相関な時系列。

時系列(存在過程)  $\gamma(k)$  が白色雑音で表すは、

$\{\gamma(i); i=1, 2, \dots, k-1\}$

の測定値から  $\gamma(k)$  を予測するにはどうぞ。

一方、力等三入力では、出入信号(位置の推定値)、 $\gamma$ 、 $\dot{\gamma}$ 、 $\ddot{\gamma}$   
速度、加速度、情報を含まる。

$\curvearrowleft$  時系列が白色雑音でない(なぜ)、時系列 $\gamma$ を $\gamma$ の入力、 $\gamma$ の出力  
情報(あるは、物理的)で $\gamma$ か、何とか運動的(構造)  
が含まれる。

微分方程式  
差分方程式

### ③ 白色組織

時系列  $\gamma(k)$  の自己相関関数は、

$$\phi_{\gamma}(\tau) := E[\gamma(k)\gamma(k+\tau)] \quad (2.1)$$

のように定義する。

$\tau$ : 遅延。

実で  $\gamma(k)$  の式をよく解説するが、自己相関を計算する。

$$\phi_{\gamma}(\tau) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N-\tau} \gamma(k)\gamma(k+\tau) & \tau \geq 0 \\ \phi_{\gamma}(-\tau) & \tau < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

いま、時系列  $\gamma(k)$  の自己相関関数が、

$$\phi_{\gamma}(\tau) = \begin{cases} \sigma_{\gamma}^2 & \text{if } \tau = 0 \\ 0 & \text{if } \tau \neq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

とみなす。 $\gamma(k)$  は **白色組織**であると呼ばれる。 $\rightarrow \sigma_{\gamma}^2 = \gamma(k)$  の分散

①  $\tau \neq 0$  のとき 自己相関 0

～) **白色組織**  $\underline{\text{無相関}}$

時系列が零均値である白色組織  $\gamma(k)$  は

$\gamma(k+\tau)$  は肉密してつながる。

$\rightarrow$  つまり、白色組織  $\gamma(k)$  はすべての時間でつながり、現状には  $\gamma(k)$  が白色組織  $\gamma(k)$  である。

また、白色組織  $\gamma(k)$  は  $\gamma(k)$  の  $\gamma(k+\tau)$  に一定値である。i.e.

$$\phi_{\gamma}(k) = \text{const.}$$

～) 白色組織  $\gamma(k)$  はすべての周波成分を含む。

「上上、準備、下」。  
ある時系列は、

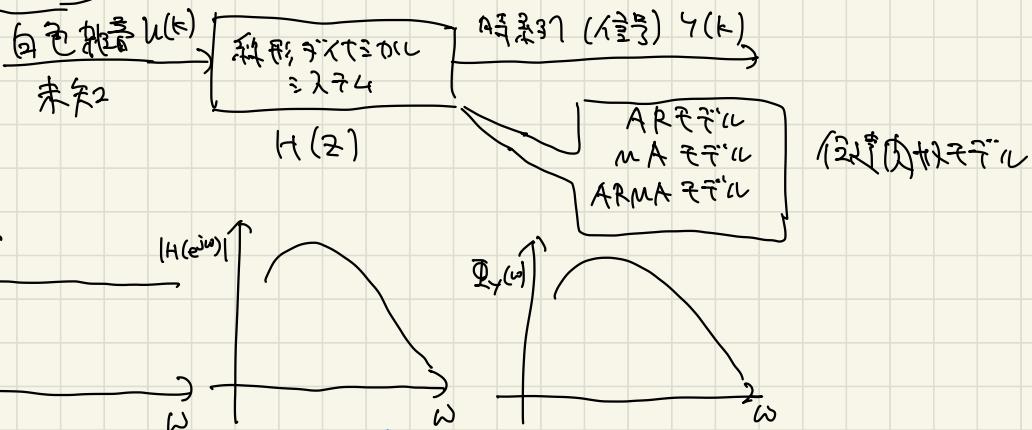
平均 0, 分散 1 の正規性 白色噪音  $u(k)$  加え  
何らかの線形離散時間モデルに入力 (伝達関数  $H(z)$ )  
を通し、得られたものが時系列。そしてこれが  $y(k)$ 。

$$\sim y(k) = H(z) u(k) \quad (2.4)$$

又：時系列模型 (演算子)

$$\text{e.g. } \sum y(k) = y(k+1)$$

EX - 2



图(波形)は一定  $10^{\circ} - 20^{\circ}$  附近

- ① 白色噪音が表す波形特性をもつ入力  $u$  を通すと、  
時系列  $y(k)$  の  $10^{\circ} - 20^{\circ}$  付近密度は、入力  $u$  の波形特性と同様。
- ~ 時系列の動特性を了解するに、入力  $u$  の形状と同様。

- ② 線形入力を用いた、時系列の  $10^{\circ} - 20^{\circ}$  附近、 $y(k)$  が  $10^{\circ} - 20^{\circ}$ 。

主な考え方

{ 入力: 白色噪音  $u(k)$   
出力: 時系列  $y(k)$  } の線形、入力と出力、

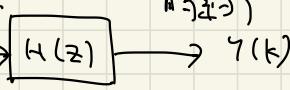
目的: 信号の

モード =  $y$

## 2.4. 石賓率過程のスペクトル分解と ARMA モデル

(再掲)

正規性白色噪音



時系列

定常

いま、入力信号は白色噪音より、定常確率過程である。

分散を  $\gamma_0$  とし、出力信号は、パワースペクトル密度函数

$$\Phi_y(\omega) = H(e^{-j\omega}) \underline{H(e^{j\omega})} \Phi_u(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2$$

↑  
周波数密度函数

$y(k) = H(z) u(z)$   
が

を満たす定常確率過程となる。

ここで次の問題点。

- 周波数  $\omega$  の複素平面であるスペクトル密度函数は、つねに (2.5) のように  $H(e^{-j\omega}) H(e^{j\omega})$  と因数分解してよいですか？
- なぜよりは複数でないか？
- なぜよりは複数でないか？

⇒ スペクトル分解 内容

…一般的には複数には難しかが、以下の条件で解けることが知られてる。

### Point 2.1 スペクトル分解定理

有理形入力スペクトル密度函数  $\Phi_u(\omega)$  をもつ定常確率過程は常に

$$\Phi_y(\omega) = H(e^{-j\omega}) H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \quad (2.6)$$

すなはちよつて平面、「単位円内（単位円上を含む）」に、全ての極で零点をもつ有理函数  $H$  が存在する。

重要な点。

「有理形である」という仮定

「単位円内にすべての極で零点をもつ」という仮定

安定 (stable)

最小位相 (minimum phase)

有理形

… スペクトル密度関数  $\Phi(\omega)$  が  $e^{j\omega}$  の有理関数で表される。

(13))

$\gamma(k)$ : 留意過程

1)  $\gamma$ -入出力密度が

$$\Phi(\omega) = \frac{1 + b^2 + 2b \cos \omega}{1 + a^2 + 2a \cos \omega}, \quad |a| < 1, |b| < 1, \quad (2.7)$$

$0 \leq \omega \leq 2\pi$

where  $\omega$ : 正規化周波数

…  $\tau = \gamma^{-1} = \gamma$  周期で正规化。

$$\cos \omega = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \quad (2.8)$$

$\gamma'$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \frac{1 + b^2 + b(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1 + a^2 + a(e^{j\omega} + e^{-j\omega})} \\ &= \frac{(1 + be^{j\omega})(1 + be^{-j\omega})}{(1 + ae^{j\omega})(1 + ae^{-j\omega})} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Let

$$A(e^{j\omega}) = 1 + a e^{j\omega}, \quad B(j\omega) = 1 + b e^{j\omega} \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow \Phi(\omega) = \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} \frac{B(e^{-j\omega})}{A(e^{-j\omega})} = \left| \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} \right|^2 \quad (2.11)$$

$$\therefore \gamma', \quad z = e^{j\omega} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a z^{-1}, \quad B(z^{-1}) = 1 + b z^{-1} \quad (2.13) \end{aligned}$$

∴ 本では時間シフトオペレータと呼ぶ方、意味で  $z$  を用いる。

時系列が定常過程 (= 稳定) に安定・最小位相という仮定が必要。

入力と一次差化、  
時系列  $\{y(k); k=1, 2, \dots\}$  の

$$A(z^{-1}) y(k) = B(z^{-1}) u(k) \quad (2.14)$$

を記述できる。式(2.13)

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k) \quad (2.15)$$

と書くことを主張する。ただし、

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \quad (2.16)$$

$$B(z^{-1}) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \quad (2.17)$$

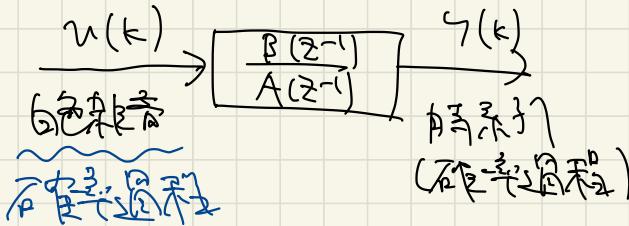
式(2.13)は  $n=1$  (= 好き)

$u(k)$ : 平均、分散(過去見掛け自己相関)

② ARMAモデル (Auto-Regressive Moving Average)

... 自己回帰・移動平均

... 三次元の時間的構造表現 (= 好き)



(2.14) (= (2.13) (= 入力

$$(1 + a z^{-1}) y(k) = (1 + b z^{-1}) u(k)$$

$$y(k) + a y(k-1) = u(k) + b u(k-1)$$

... 確率差分方程式表現

(2.18)

## Point 2.2 (表現定理)

重 (w) : 有理形入力で密度内数が与えられたとき、入力が白色粒音で、

- } 総形
- } 潜在肯定
- } 最小位相
- } 入力のミスマッチ

出力が入力密度内数重 (w) となるような定常過程を与えるシステムが存在する。

→ 可能な定常確率過程は白色粒音を肯定・最小位相 7 に纏めて生成される。

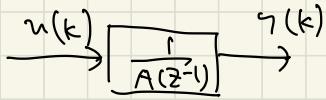
★ 入力密度因子が確定・最小位相という假定  
… 入力密度因子を (符号を除いて) 一定に走らせる。

## Point 2.2 まとめ

時系列  $\{y(k)\}$  は有理密度  $(10^k \times 1)^T$  で表現される  
総形ミスマッチ等で表現される。

## 2.5. ARモデルとMAモデル

### 2.5.1. ARモデル (Auto-Regressive)



$$y(k) = \frac{1}{A(z^{-1})} u(k) \quad (2.19)$$

$$\text{where } A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \quad (2.20)$$

~ 白色高齢過程から、分母だけが分子のループを除く。  
時系列が生成される。  
分母：極は複数。

~ 極の情報が支配的)は時系列モデル = y  
(e.g. 音声信号, 地震波) - 共振

$$z^n A(z^{-1}) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2.21)$$

$a_i$  は個々の根が極。

~ 極がすべて零平面の範囲内に存在するとき。

$y(k)$  は定常過程。

--  $\therefore a_i \neq 0$  は肯定条件式。

#### Remark

ARMA モデル, 安定条件は AR モデルと同じ。

$$(例) A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1}$$

AR(1) モデル

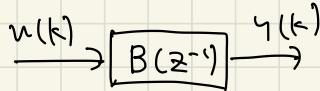
$$(1 + a_1 z^{-1}) y(k) = u(k) \quad \therefore y(k) = \underbrace{-a_1 y(k-1)}_{\substack{\text{1時刻前,} \\ \text{自分, 価}}}_{\substack{\text{自己回帰}}} + u(k)$$

↓

自己回帰

④ 潛定式來源時系列  $\gamma = \{ \gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(k) \}$  の AR 模型  $(L^k)$  は  $\{a_1, a_2, \dots\}$  を推定する問題  
が時系列  $\gamma$  の中心的特性。  
~ AR 模型  $(L^k)$  の  $\gamma$  は  $B(z^{-1})$   
・赤池, Burg

### 2.5.2. MA 模型 (Model Average)



$$\gamma(k) = B(z^{-1}) u(k) \quad (2.22)$$

where

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \quad (2.23)$$

角  $b_i$  は  $11^\circ$  で一定

~ 自由相位過程が零点だけ構成される FIR 模型

$$(2.22) \text{ の入出力関係は一定}.$$

(131)

$$B(z^{-1}) = 0.5 + 0.5z^{-1}$$

MA 模型

$$\gamma(k) = \frac{u(k) + u(k-1)}{2}$$

… (132) 移動平均模型。

### 2.5.3. ARIMA 模型 (Auto-Regressive Integrated Moving Average)

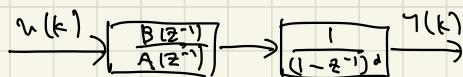
Box-Jenkins 法

非定常時系列を記述するモデル。

$$A(z^{-1}) \nabla^d \gamma(k) = B(z^{-1}) u(k) \quad (2.24)$$

where

$$\nabla^d = (1 - z^{-1})^d, \quad d = 0, 1, 2. \quad (2.25)$$



2次例題を参考.

$$A(z^{-1}) = (1+a_1 z^{-1}), \quad B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1}, \quad d = 1.$$

(2.24) 式1.

$$(1+a_1 z^{-1})(1-z^{-1})\gamma(k) = (b_0 + b_1 z^{-1})u(k)$$
$$\therefore (1+(a_1 - 1)z^{-1} - a_1 z^{-2})\gamma(k) = (b_0 + b_1 z^{-1})u(k)$$

よし

$$\gamma(k) - (1-a_1)\gamma(k-1) - a_1\gamma(k-2) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1)$$

$$\therefore \gamma(k) = (1-a_1)\gamma(k-1) + a_1\gamma(k-2) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1)$$

(2.26)

が得られる。また。

$$(1+a_1 z^{-1})\nabla\gamma(k) = (b_0 + b_1 z^{-1})u(k)$$

よし。

$$\nabla\gamma(k) = -a_1\nabla\gamma(k-1) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) \quad (2.27)$$

と書くこともできる。

④  $d=0$  : ARMAモデル。

-般に  $d=1, 2$  (1階差分, 2階差分) がとられる。

⑤ ARIMAモデルは時系列モデルにd個の積分器 ( $\frac{1}{(1-z)^d}$ )

を含む、  
~> 非定常時系列を記述することができる。

⑥  $1^{\circ}$   $\gamma$ -スペクトル密度  $\rightarrow$  ARMAモデルは計算下りるが、  
計算してもスペクトル密度因数が与えられていない  
スペクトル分解を行うのが難しい。

## 2.6. 時系列の状態空間モデル

ARMAモデル

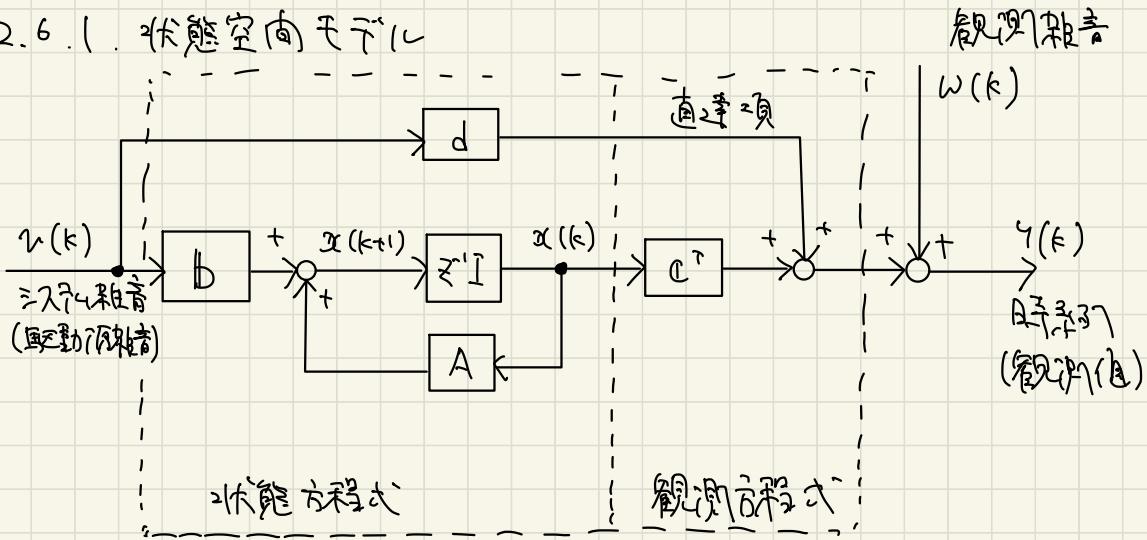
- 1. 白色雜音によつて線形動的入子モデルが駆動され、
- 2. 出力として時系列が生成される

… 現実には時系列データ  $y(k)$ 、観測値には白色雜音などがある。

∴ 仮想構成(による記述)を時系列モデルで

= 状態空間表現(変換)、観測方程と考慮してモデルを導入

### 2.6.1. 状態空間モデル



離散時間状態方程式

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \quad (2.28)$$

where

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ : 時刻  $k$  における状態。

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : 入子化行列。  
… 因子由加算性の内因式  
すなはち自己決定。

$b \in \mathbb{R}^n$

… 時不变

- 時系列の振る舞いを唯一に決定する
- これが最も最小化する
- 時系列未来予測誤差の振る舞いを予測する
- これが最も最小化する

$u(k)$  : 入子化雜音

… 正規性の白色雜音。

## 観測方程式

$$y(k) = C^T \alpha(k) + d u(k) + \omega(k) \quad (2.29)$$

where

$C \in \mathbb{R}^n$ : 観測係数ベクトル

$d$ : 直達項

… 離散時間、場合には演算順序が存在せず、 $d=0$   
とする場合が多い。

$\omega(k)$ : 觀測誤差

… ミステリ相  $u(k)$  と無相関且正規性白色相  $\omega(k)$  が仮定。

また次と、状態空間表現は、

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + b u(k) \\ y(k) = C^T x(k) + d u(k) + \omega(k) \end{cases}$$

## ④ 正規性相

- 時系列で見る相の振幅、分布が正規分布に従う。

カルマニセルトによる重要点リスト

(1) 正規分布の確率変数の高次モーメントは、 $E[X^k] = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \mu^i \sigma^{k-i}$

… 独立  $\Leftrightarrow$  無相関

$$(2) X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2 \sigma^2)$$

$$Z = (X - \mu) / \sigma \sim N(0, 1)$$

2.6.2. 状態空間モデルからARMAモデルへの変換

(2.28) を初期値を 0 とし  $\alpha(0)$  を  $\alpha_0$  とする。  $\sim$  連続な方程式入力

$$(2I - A) \alpha(z) = bu(z)$$

$$\therefore \alpha(z) = (2I - A)^{-1} bu(z) \quad (2.30)$$

(2.29) を変換

$$y(z) = C^T \alpha(z) + d u(z) + \omega(z) \quad (2.34)$$

(2.30), (2.34) より

$$y(z) = (C^T (2I - A)^{-1} b + d) u(z) + \omega(z) \quad (2.35)$$

が得られる。(2.35) と (2.4) を比較すると、  
 $H(z) = C^T (zI - A)^{-1} B + d \quad (2.36)$   
 $\sim$  状態空間内にミスフィットを考慮した形の状態方程式。

$$y(z) = H(z) u(z) + w(z) \quad (2.37)$$

~) 状態空間表現は伝達関数表現に観測系を考慮した形となる。

(137)

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

$a \approx 1$ ,

$$H(z) = C^T (zI - A)^{-1} B$$

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z + 0.5 & 0 \\ 0 & z + 0.3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (z + 0.5)^{-1} & 0 \\ 0 & (z + 0.3)^{-1} \end{bmatrix}$$

よし

$$\begin{aligned} H(z) &= [-2.5 \ 3] \begin{bmatrix} (z + 0.5)^{-1} & 0 \\ 0 & (z + 0.3)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [-2.5 \ 3] \begin{bmatrix} (z + 0.5)^{-1} \\ (z + 0.3)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{-2.5}{(z + 0.5)} + \frac{3}{(z + 0.3)} \\ &= \frac{-2.5(z + 0.3) + 3(z + 0.5)}{(z + 0.5)(z + 0.3)} \\ &= \frac{\cancel{z^2} + 0.8z + 0.15}{\cancel{z^2} + 1} \\ &\approx \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}} \end{aligned}$$

//

## 2.7. 状態空間モデルの実現

実現

... 時系列を状態空間モデルで表現する。

ここで、ARMAモデルから正準形を求める方法を紹介する。

2.7.1. 可観測正準形.

まず ARMAモデルを考える。

$$\gamma(k) + a_1 \gamma(k-1) + a_2 \gamma(k-2) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad (2.45)$$

初期値を0とする (2.45) を考慮.

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \gamma(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) u(z) \quad (2.46)$$

ミスリード  $u$  が時系列  $\gamma$  までの個々の値が得られる。

$$G(z) = \frac{\gamma(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (2.47)$$

... 分子が不適切 (bi-proper)  
→ 直達形が存在する。

$$(2.45) \text{ で } b_0 u(k)$$

→ 時刻  $k$  で入力  $u(k)$  の瞬間退化可逆性  $\gamma(k)$  に到達する。

直達形を個々の外に出すため (2式変形).

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{b_0 (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) - b_0 a_1 z^{-1} - b_0 a_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \\ &= b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0) z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0) z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \\ &= \beta_0 + \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (2.48) \end{aligned}$$

$\beta_2$  と  $\beta_1$  は

$$\beta_0 = b_0, \quad \beta_1 = b_1 - a_1 b_0, \quad \beta_2 = b_2 - a_2 b_0$$

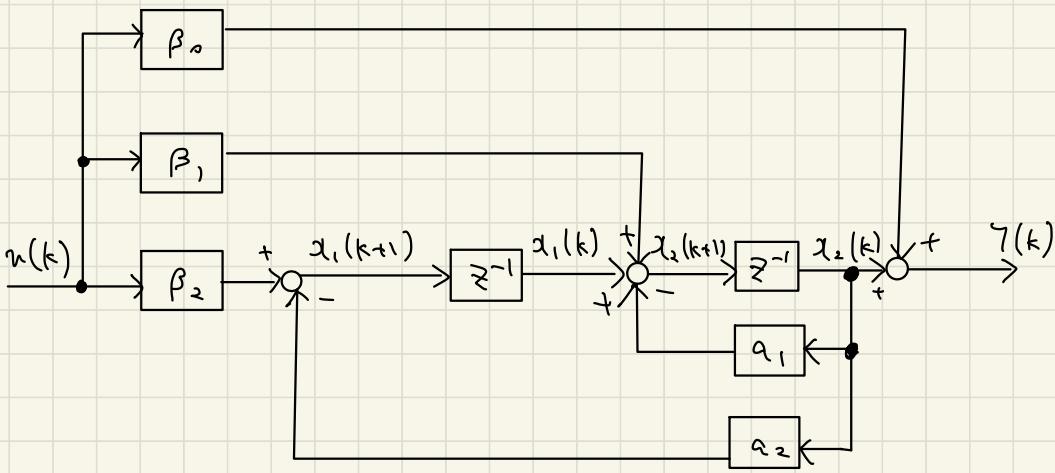
とする。

以上より、(2.48) の伝達関数は、 $\gamma(k)$  が  $x_1(k)$  と  $x_2(k)$  によって現れる。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.49)$$

$$\gamma(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \beta_0 u(k) \quad (2.50)$$

… 可観測性実現。



$\mathcal{Z}^{-1}$ ：遅延器

$\beta_0$  等：俠取器

0：加算器

で書き改めてある。  $\leadsto$  回路実現と密接に關係。

-般の ARMA モデル

$$\gamma(k) + a_1 \gamma(k-1) + \dots + a_n \gamma(k-n) \\ = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (2.51)$$

を表す。

2次元の易解性と同様に、係数の実数性

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \\ = \beta_0 + \frac{\beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (2.52)$$

where

$$\beta_0 = b_0, \quad \beta_i = b_i - a_i b_0 \quad (i=1, \dots, n)$$

より  $(2.52)$  は可逆測定形

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \ddots & & -a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.53)$$

$$\gamma(k) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \beta_0 u(k) \quad (2.54)$$

(2.54) 実現形

2.7.2 可制御正準形

可制御正準形  $\Leftrightarrow$  可観測正準形は相似.

(2.52) 9 可制御正準形による実現は,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_1 & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.55)$$

$$y(k) = [p_n \cdots p_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + p_0 u(k) \quad (2.56)$$

2.8. 測定データに基づく時系列モデル化法

⑤ 固定放散係数による時系列モデル化法 (2.4節)

- ・確定的過程である時系列の  $90\%$  が入力に対する反応を入力に分解する.
- ARMA モデルを構築.

～ 実データを適切に対し固有な構造がある.

- ・定常性を満たすようデータが十分多く利用できるか.
- ・入力に分解できるか.

⇒ 時間領域における時系列モデル化法

## 2.8.1. ARモデルを用いた同定.

時系列  $\gamma(k)$  が測定されたとき、 $29 \text{ 年} - 7 / 12$   
基づいて (2.19) の AR モデル  $\gamma(k) = a_1\gamma(k-1) + \dots + a_n\gamma(k-n) + u(k)$   
と想定してみる。

∴ AR モデルを用いた時系列モーリング。

差分方程式

$$\gamma(k) = -a_1\gamma(k-1) - a_2\gamma(k-2) - \dots - a_n\gamma(k-n) + u(k) \quad (2.57)$$

で記述される AR モデルの  $1^{\circ}$  予測-推定過程は

(2.57) は

$$\gamma(k) = \Theta^T \varphi(k) + u(k) \quad (2.58)$$

where

$$\Theta = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T : \text{未知 } 1^{\circ} \text{ 予測-推定ベクトル}$$

$$\varphi(k) = [-\gamma(k-1), -\gamma(k-2), \dots, -\gamma(k-n)]^T : \text{②回目ベクトル}$$

∴ AR モデルの  $1^{\circ}$  未知  $1^{\circ}$  予測-推定過程  
で時系列  $\gamma(k)$  を記述できる。

評価函数

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\{ \gamma(k) - \hat{\Theta}^T \varphi(k) \right\}^2 \quad (2.61)$$

∴  $J_N$  を最小化する  $\hat{\Theta}$  を  $1^{\circ}$  予測-推定過程とする。

…最小二乗推定法。

(2.61) より

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \gamma(k)^2 - 2 \hat{\Theta}^T \varphi(k) \gamma(k) + \hat{\Theta}^T \varphi(k) \varphi(k)^T \hat{\Theta} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \gamma(k)^2 - 2 \hat{\Theta}^T \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \gamma(k) \right) + \hat{\Theta}^T \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi(k)^T \right) \hat{\Theta} \quad (2.62)$$

2.63.

$$C_N := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \gamma(k)^2, \quad h_N := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \epsilon(k) \gamma(k), \quad G_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \epsilon(k) \epsilon(k)^T \quad (2.63)$$

2.62).

$$J_N = C_N - 2 \hat{\theta}^T h_N + \hat{\theta}^T G_N \hat{\theta} \quad (2.64)$$

…  $\hat{\theta}$  は実数形

…  $G_N$  が正定値で  $J_N$  は最小値をもつ。

$$\frac{dJ_N}{d\hat{\theta}} = 2 G_N \hat{\theta} - 2 h_N = 0 \quad (2.65)$$

より、正規方程式

$$G_N \hat{\theta} = h \quad (2.66)$$

が得られる。

② 一括り理最小二乗問題

… 直接的解法

$$\hat{\theta} = G_N^{-1} h_N \quad (2.67)$$

③ 2次 AR<sup>2</sup> IL

$$\gamma(k) = -\alpha_1 \gamma(k-1) - \alpha_2 \gamma(k-2) + u(k), \quad k=1, \dots, N \quad (2.68)$$

$$\epsilon(k) = [-\gamma(k-1), \gamma(k-2)]^T \quad \text{より},$$

$$G_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} -\gamma(k-1) \\ -\gamma(k-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma(k-1) & \gamma(k-2) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \gamma(k-1)^2 & \gamma(k-1) \gamma(k-2) \\ \gamma(k-1) \gamma(k-2) & \gamma(k-2)^2 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$h_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} -\gamma(k) \gamma(k-1) \\ -\gamma(k) \gamma(k-2) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$N$  が十分大きいと仮定すると、 $\hat{\phi}_y(\tau)$  の行は時系列の自己相関係数

$$\hat{\phi}_y(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)y(k-\tau)$$

(= 矢量です).

よし、ARモデルの  $\gamma^0$  や  $\gamma^{-1}$  の最小二乗法定値は.

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \phi_y(0) & \phi_y(1) \\ \phi_y(1) & \phi_y(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_y(1) \\ \phi_y(2) \end{bmatrix}$$

以上より、時系列  $y(t)$  が観測されたら、そこから自己相関係数  $\phi_y(\tau)$  を計算し、2個の値を用いて伝達係数モデル及び AR モデルの係数を推定できます。

$$G = \begin{bmatrix} \phi_y(0) & \phi_y(1) \\ \phi_y(1) & \phi_y(0) \end{bmatrix} : \text{伝達係数}.$$

-般形は.

$$G = \begin{bmatrix} \phi_y(0) & \phi_y(1) & \cdots & \phi_y(n-1) \\ \phi_y(1) & \phi_y(0) & & \phi_y(n-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_y(n-1) & \phi_y(n-2) & \cdots & \phi_y(0) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

## 2.8.2. ARMA モデルを用いた同定.

### ◦ ARモデル

… 未知のパラメータに因る線形.

～ 線形方程式を解くことで推定値が求められる.

### ◦ ARMAモデル

… 未知のパラメータに因る非線形.

～ パラメータ推定因式は非線形最適化問題.

### (13) ARMAモデル

$$\gamma(k) + a_1\gamma(k-1) + a_2\gamma(k-2) = u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) \quad (2.74)$$

…  $b_0 = 1$ .

(2.74) 12.

$$\gamma(k) = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2] \begin{bmatrix} -\gamma(k-1) \\ -\gamma(k-2) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \end{bmatrix} + u(k)$$

$$= \theta^T \varrho(k) + u(k) \quad (2.75)$$

(2.75) と (2.58) は 同様だが、(2) 個ベクトル  $\varrho(k)$  の要素は

過去の白色雑音の値  $u(k-1), u(k-2)$  を含まない

～ 観測可能でなければ、(1) パラメータ推定値を用いて

計算可又は求められない.

… 結論は同じである.

(谷萩, ARMAモデルと時間的信号処理, 2008)

2.8.3. 大気室内モデルを用いて固定。  
時系列  $\{y(k) : k=1, 2, \dots\}$  の大気室内モデル

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.77)$$

$$y(k) = C^T x(k) + \omega(k) \quad (2.78)$$

① うなづき行い、ベクトル  $(A, B, C)$  を固定する方法  
を考へる。

…直達法  $d_n(k)$  は複数となるべき。

～部分室内固定法。

…正準相内解法 (赤丸)

…部分分散確率部分室内法

ここでは、一般的な手順のみを説明する。

Step 1. 時系列  $\{y(k) : k=1, \dots, N\}$  が自己分散度数 (平均値が 0 で決まる) と自己相関度数 (自己相関度数と自己) を計算する。

Step 2. 自己分散行列要素と  $(I - \hat{A})^{-1}$  と  $\hat{B}^T$  を構成する。

Step 3.  $(I - \hat{A})^{-1}$  行列を特異値分解し、2つ特異値を大工式を参考にして時系列の次数を決定する。

Step 4. ディト不变性や最小二乗法を用いて、 $(A, B, C)$  を計算する。

(山上、三入千鶴固定 → 部分室内法 1-59 T70Q-7)  
2004