基礎からの力学系 (第7章)

参考文献

- 小室，基礎からの力学系，サイエンス社，2002

Table of contents

- 写像の周期点，およびベクトル場の周期軌道の分岐

はじめに

この章では，写像の周期点の分岐について述べる．

$$\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}, \mu), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \ \mu \in \mathbb{R}^p \quad (7.1)$$

$\mu = \mu_0$のとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$が不動点であるとする．

$$f(\boldsymbol{x}_0, \mu_0) = \boldsymbol{x}_0 \quad (7.2)$$

Def 7.1 (双曲型，安定，不安定)

$\boldsymbol{x}_0$において線形化して得られる線形写像

$$\boldsymbol{u} \mapsto A\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n,\quad (7.3)$$

$$A = D_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0, \mu_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0, \mu_0) \right)_{1 \le i,j \le n} \qquad (7.4)$$

において，Aのどの固有値も単位円$S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ 上にないとき，不動点$\boldsymbol{x}_0$は双曲型であるという．

Aのすべての固有値が単位円の内側$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$ にあるとき，不動点$\boldsymbol{x}_0$は安定であるという．

Aの少なくとも1つの固有値が単位円の外側$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > 1\}$ にあるとき，不動点$\boldsymbol{x}_0$は不安定であるという．

Def 7.2

パラメータμを固定して，写像$f(\cdot,\mu):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$の$p$回の合成写像を$f^p$で表す．

$$\boldsymbol{x}\mapsto f^p(\boldsymbol{x},\mu) \quad (7.5)$$
$$f^p(\cdot,\mu)=f(\cdot,\mu)\circ\cdots\circ f(\cdot,\mu) \quad (7.6)$$

点$\boldsymbol{p}$がf^pの不動点であり，$1\leq i<p$なる任意のiに対しては，f^iの不動点ではないときは，$\boldsymbol{p}$はfのp周期点であるという．

$$f^p(\boldsymbol{p},\mu)=\boldsymbol{p},\ f^i(\boldsymbol{p},\mu)\neq\boldsymbol{p}\ (1\leq i<p) \quad (7.7)$$

fのp周期点$\boldsymbol{p}$がそれぞれ双曲型，安定，不安定であるとは，f^pの不動点として双曲型，安定，不安定であることである．

写像fの周期点の分岐は合成写像f^pの不動点の分岐に帰着する．

Th 7.1

$\mu = \mu_0$において不動点$\boldsymbol{x}_0$が双曲的であればパラメータμをμ_0の近傍で変化させるとき，不動点は持続して，安定性の型は変化しない．

$\rightsquigarrow$ 写像の不動点の分岐を考えるには，$\mu = 0$のとき，原点に非双曲型不動点を持つ場合を考えればよい．

1次元写像のサドル・ノード分岐

1次元写像

$$x \mapsto f(x,\mu) = x + \mu - x^2,\ x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \quad (7.8)$$

を考える．

1. $\mu < 0$ のとき: 不動点を持たない．
2. $\mu = 0$ のとき: $x = 0$に固有値1をもつ不動点を持つ．
3. $\mu > 0$ のとき: 2つの不動点$P^+ = (\sqrt{\mu})$ と $P^- = (-\sqrt{\mu})$ を持つ．
   - $P^{\pm}$の固有値は$f_x(\pm\sqrt{\mu},\mu) = 1 \mp 2\sqrt{\mu}$で与えられる．
   - $0 < \mu \ll 1$ならば，P^+は安定，P^-は不安定．

パラメータの変化に伴って，安定不動点と不安定不動点が接近し，合体し，そして消滅する (サドル・ノード分岐)．

一般に1次元写像

$$x \mapsto f(x, \mu) \quad (7.9)$$

が$f(0,0) = 0, f_x(0,0) = 1$を満たすとき，

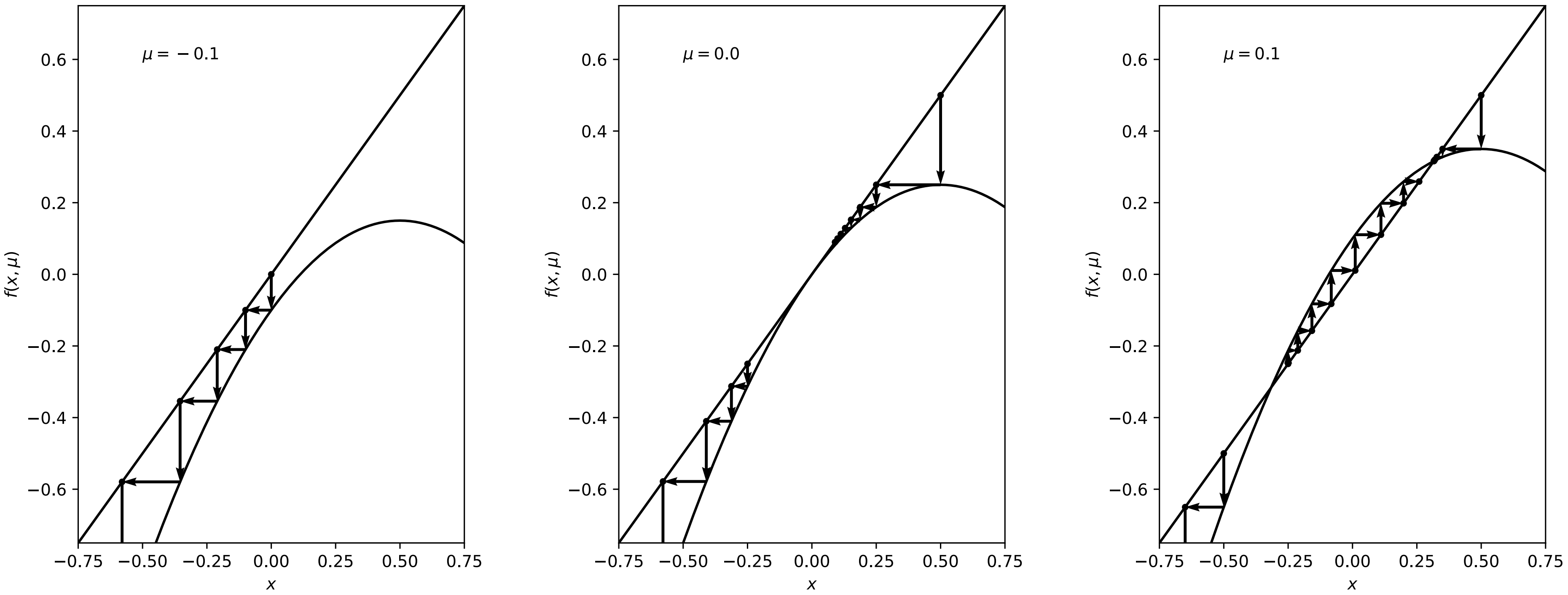
$$f_\mu(0,0) = 0, \quad f_{xx}(0,0) \neq 0 \quad (7.10)$$

ならば，$\mu = 0$のとき$x = 0$においてサドル・ノード分岐が生じる．

サドル・ノード分岐を生じる1次元写像の標準形は，

$$x \mapsto x + \mu \mp x^2 \quad (7.11)$$

で与えられる．


μ = −0.1
μ = 0.0
μ = 0.1
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
f(x, μ)
−0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75
x

1次元写像のトランスクリティカル分岐

写像$f(x,\mu)$が$x=0$に常に不動点を持つという拘束条件

$$f(0,\mu)=0 \quad (7.12)$$

の下で一般的に生じる分岐.

1次元写像

$$x \mapsto f(x,\mu)=x+\mu x-x^2 \quad (7.13)$$

を考える.

1. $\mu < 0$かつ$|\mu| \ll 1$のとき: 不動点$O = (0)$は固有値$1 + \mu < 1$を持ち安定．不動点$P = (\mu)$は固有値$1 - \mu > 1$を持ち不安定．
2. $\mu = 0$のとき: 不動点は$O = (0)$のみで，固有値は1．
3. $\mu > 0$かつ$|\mu| \ll 1$のとき: 不動点$O = (0)$は固有値$1 + \mu > 1$を持ち不安定，不動点$P = (\mu)$は固有値$1 - \mu < 1$を持ち安定．

パラメータの変化に伴い，不動点Oに他の不動点Pがぶつかり，通過し，不動点Oは安定から不安定に，不動点Pは不安定から安定になる (安定性の交代).

$\rightsquigarrow$ トランスクリティカル分岐

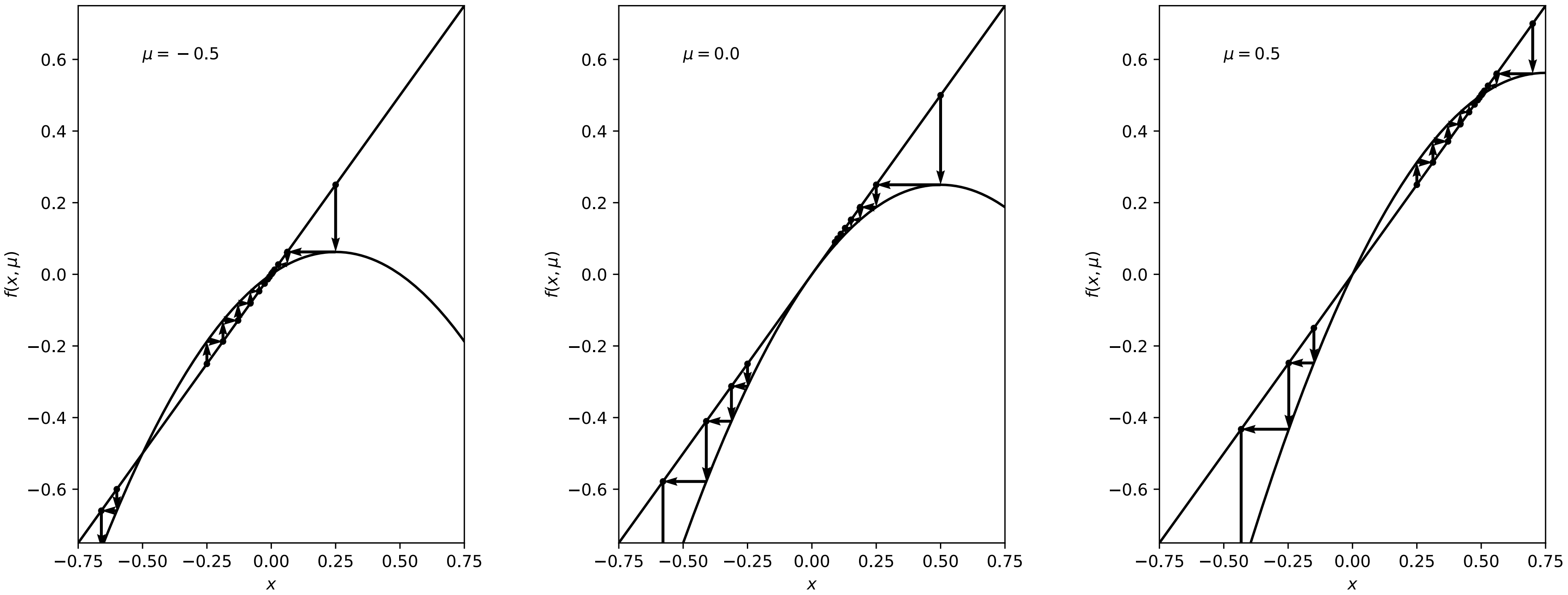
一般に1次元写像

$$x \mapsto f(x, \mu) \quad (7.14)$$

が$f(0,0) = 0, f_x(0,0) = 1$を満たすとき，

$$f_\mu(0,0) = 0,\ f_{x\mu} \neq 0,\ f_{xx}(0,0) \neq 0 \quad (7.15)$$

ならば，$\mu = 0$のとき$x = 0$においてトランスクリティカル分岐が生じる．



$(x, f(x, \mu))$-平面での軌道の変化

1次元写像のピッチフォーク分岐

写像$f(x,\mu)$がxに関して奇関数

$$f(-x,\mu) = -f(x,\mu) \quad (7.17)$$

であるという拘束条件の下で一般的に生じる分岐.
xに関して奇関数 $\Rightarrow$ 原点が不動点
より，この拘束条件はトランスクリティカル分岐の拘束条件より強い.

1次元写像

$$x \mapsto f(x, \mu) = x + \mu x - x^3 \quad (7.18)$$

を考える．

1. $\mu < 0$かつ$|\mu| \ll 1$のとき: 不動点は$O = (0)$のみ．固有値$1 + \mu < 1$を持ち安定．
2. $\mu = 0$のとき: 不動点は$O = (0)$のみで，固有値は1．
3. $\mu > 0$かつ$|\mu| \ll 1$のとき: 不動点$O = (0)$は固有値$1 + \mu > 1$を持ち不安定．不動点$O = (0)$の両側に2つの不動点$P^{\pm} = \pm\sqrt{\mu}$が存在し，固有値$1 - 2\mu < 1$を持ち安定．

$\rightsquigarrow$ パラメータの変化に伴い，安定不動点Oが不安定化し，その両側に安定な不動点$P^{\pm}$が発生する (ピッチフォーク分岐).

一般に1次元写像

$$x \mapsto f(x, \mu) \quad (7.19)$$

が$f(0,0)=0, f_x(0,0)=1$を満たすとき，

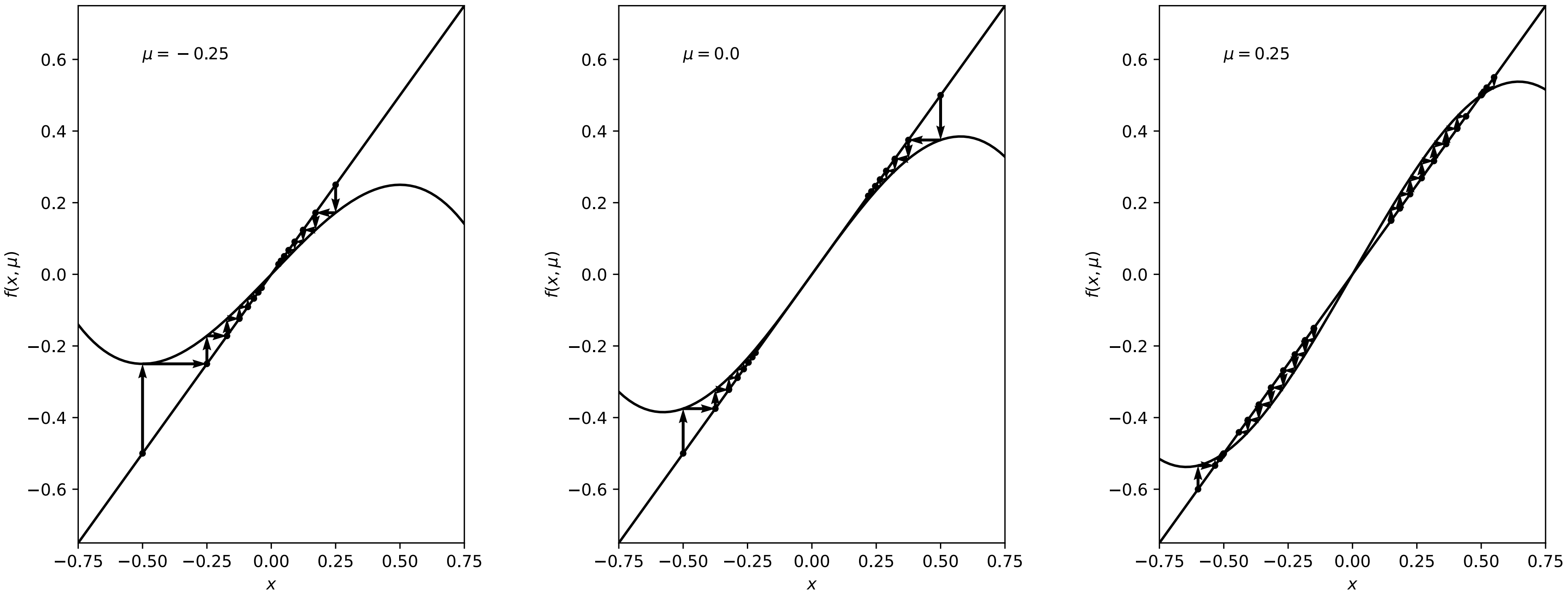
$$f_\mu(0,0)=f_{xx}(0,0)=0,\ f_{x\mu}(0,0)\neq 0,\ f_{xxx}(0,0)\neq 0 \quad (7.20)$$

ならば，$\mu=0$のとき$x=0$においてピッチフォーク分岐が生じる．

ピッチフォーク分岐を生じる1次元写像の標準形は，

$$x \mapsto x+\mu x \mp x^3 \quad (7.21)$$

で与えられる．



$(x, f(x, \mu))$-平面での軌道の変化

1次元写像の周期倍分岐

1次元写像

$$x \mapsto f(x,\mu) = -x - \mu x + x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \quad (7.22)$$

を考える．

1. $\mu < 0$かつ$|\mu| \ll 1$のとき: 不動点$O = (0)$は固有値$-1-\mu$をもつ．$|-1-\mu| < 1$であるから，不動点$O = (0)$は安定．
2. $\mu = 0$のとき: 不動点$O = (0)$は固有値-1を持つ．
3. $\mu > 0$かつ$|\mu| \ll 1$のとき: 不動点$O = (0)$は固有値$-1-\mu < -1$を持ち不安定．不動点$O = (0)$の両側に2つの2周期点$P^{\pm} = \pm\sqrt{\mu}$が存在し，安定である．

$\rightsquigarrow$ 安定不動点Oが不安定化し，その両側に安定な2周期点$P^{\pm}$が発生する (周期倍分岐).

$\mu > 0$かつ$|\mu| \ll 1$のとき，$P^{\pm} = \pm\sqrt{\mu}$が2周期点であることは，

$$f(\sqrt{\mu}, \mu) = -\sqrt{\mu} - \mu\sqrt{\mu} + \mu\sqrt{\mu} = -\sqrt{\mu} \quad (7.23)$$

$$f(-\sqrt{\mu}, \mu) = \sqrt{\mu} + \mu\sqrt{\mu} - \mu\sqrt{\mu} = \sqrt{\mu} \quad (7.24)$$

から分かる．また，これらが安定であることは，

$$f_x(x, \mu) = -1 - \mu + 3x^2 \quad (7.25)$$

を使い，

$$D_x(f^2)(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = f_x(\mp\sqrt{\mu}, \mu) f_x(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = (-1 + 2\sqrt{\mu})^2 < 1 \quad (7.26)$$

から分かる．

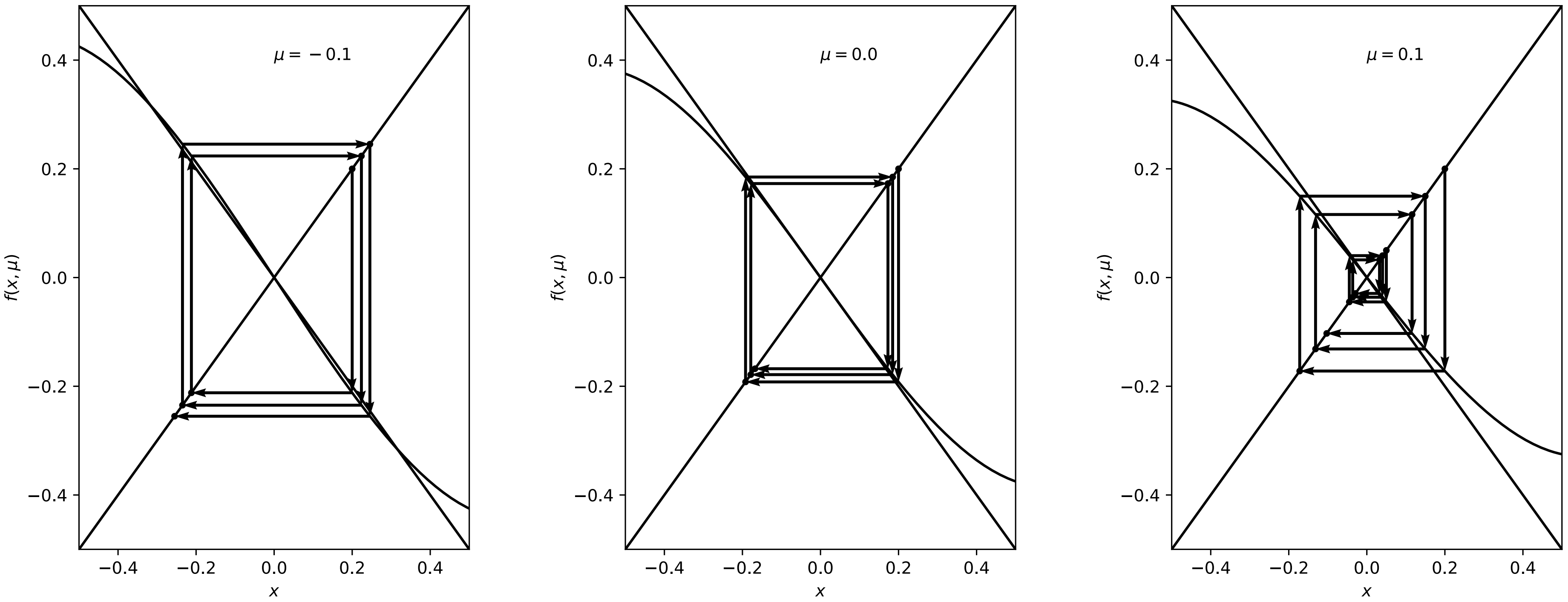
一般に1次元写像

$$x \mapsto f(x,\mu) \quad (7.27)$$

が$f(0,0)=0, f_x(0,0)=-1$を満たすとき，

$$(f^2)_\mu(0,0)=(f^2)_{xx}(0,0)=0,$$
$$(f^2)_{x\mu}(0,0)\neq 0,\ (f^2)_{xxx}(0,0)\neq 0 \quad (7.28)$$

ならば，$\mu=0$のとき$x=0$において周期倍分岐が生じる．



$(x, f(x, \mu))$-平面での軌道の変化

2次元写像のサドル・ノード分岐，トランスクリティカル分岐，ピッチフォーク分岐，及び周期倍分岐

補足資料に掲載．

2次元写像のナイマルク—サッカー分岐

Jacobi行列

$$A = \begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{pmatrix} (\mathbf{0}, 0) \quad (7.31)$$

が絶対値1の複素共役固有値を持つ場合について述べる．

2次元写像

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y, \mu) \\ f_2(x, y, \mu) \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

に極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad (7.33)$$

を施したとき，

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g(r) \\ h(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + d\mu r + ar^3 \\ \theta + c_0 + c_1\mu + br^2 \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

で与えられる写像を考える (a, b, c_0, c_1, d: 定数).

$g(0) = 0$より，$\boldsymbol{x} = (0,0)$は不動点．不動点$\mathbf{0} = (0,0)$におけるJacobi行列

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{pmatrix} (\mathbf{0}, \mu) \quad (7.35)$$

は，

$$A(\mu) = (1 + d\mu) \begin{pmatrix} \cos(c_0 + c_1\mu) & -\sin(c_0 + c_1\mu) \\ \sin(c_0 + c_1\mu) & \cos(c_0 + c_1\mu) \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

で与えられる．

$A(\mu)$の固有値は，

$$(1+d\mu)\exp(\pm(c_0+c_1\mu)i) = (1+d\mu)(\cos(c_0+c_1\mu) \pm i\sin(c_0+c_1\mu)) \quad (7.37)$$

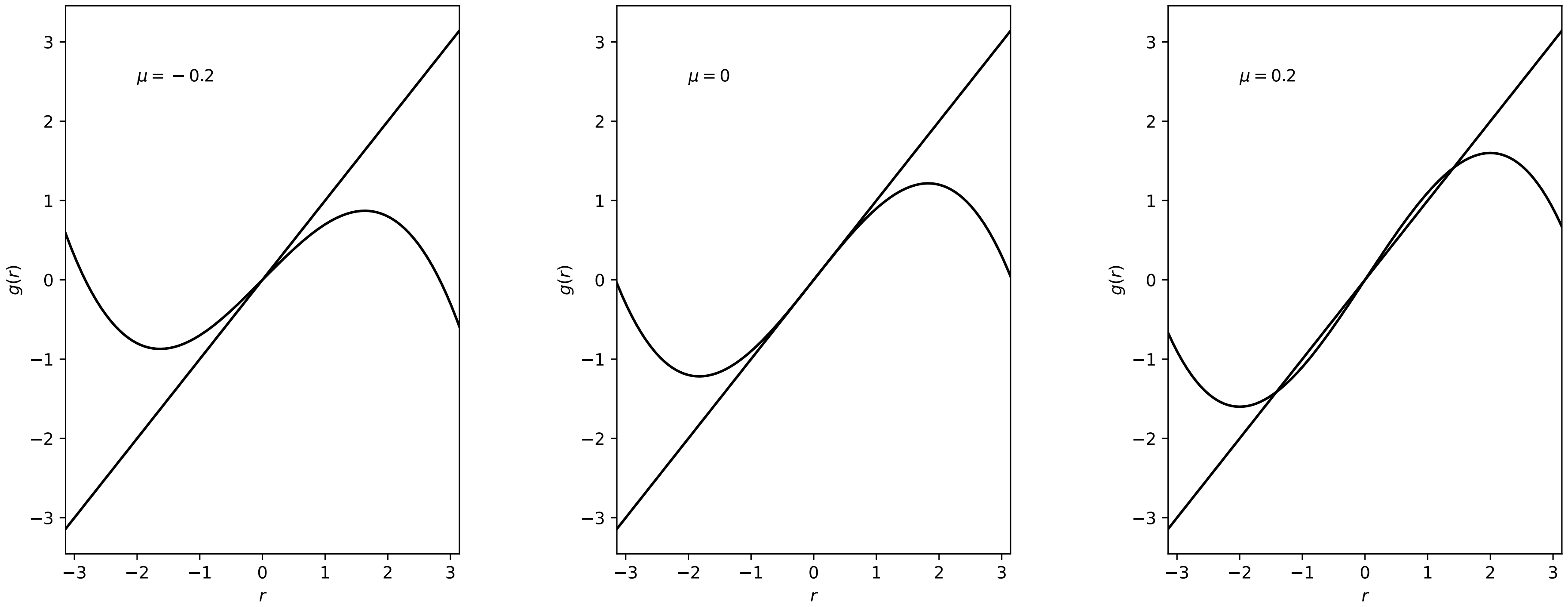
である．$d>0, a<0$のとき，写像は次の特徴を持つ．

1. $\mu < 0$かつ$|\mu| \ll 1$
    - $\boldsymbol{x} = (0,0)$に絶対値$1+d\mu<1$の複素共役固有値$(1+d\mu)\exp(\pm(c_0+c_1\mu)i)$を持つ安定平衡点が存在する．
2. $\mu = 0$
    - $\boldsymbol{x} = (0,0)$に絶対値1の複素共役固有値$\exp(\pm c_0 i)$を持つ平衡点が存在する．線形化行列は，

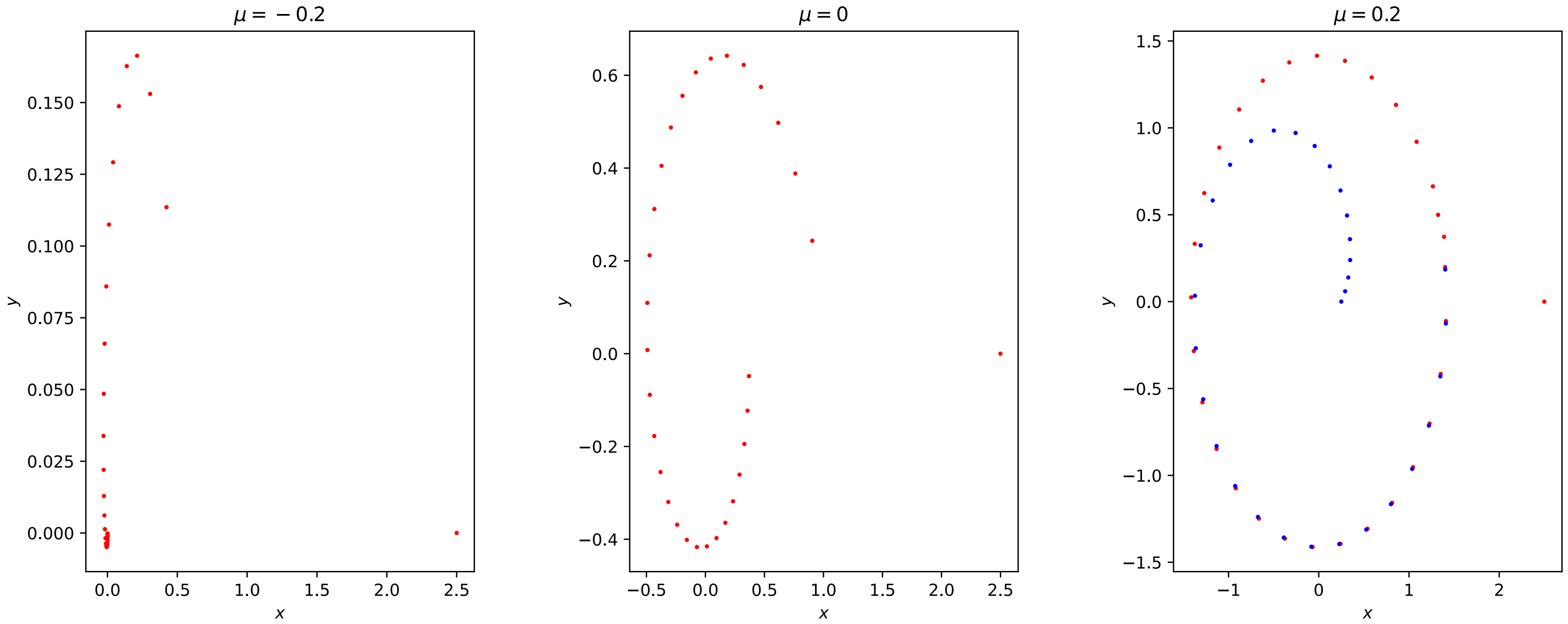
$$\begin{pmatrix} \cos(c_0) & -\sin(c_0) \\ \sin(c_0) & \cos(c_0) \end{pmatrix}$$

3. $\mu > 0$かつ$|\mu| \ll 1$
    - $\boldsymbol{x} = (0, 0)$に絶対値$1 + d\mu > 1$の複素共役固有値$(1 + d\mu)\exp(\pm(c_0 + c_1\mu)i)$を持つ不安定平衡点が存在する．その周囲に，半径$r = \sqrt{-d\mu/a}$の不変円を持つ．不変円は，周囲の点を近づけるという意味で安定である．

一般に，複素共役固有値を持つ安定不動点が，パラメータの変化に伴って不安定化し，その周囲に安定な不変円が発生する分岐をナイマルク—サッカー分岐 (Naimark-Sacker) という．また，時間を反転した力学系も考慮に入れて，複素共役固有値を持つ不安定不動点が安定化し，その周囲に不安定な不変円が発生する分岐も同じ名前で呼ばれる．



$g(r)$のグラフの変化



$\mu = -0.2$
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
y
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x
$\mu = 0$
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
y
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x
$\mu = 0.2$
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
y
−1
0
1
2
x

ベクトル場の周期軌道の分岐

3次元ベクトル場に周期軌道Γが存在するとする．Γと1点$\boldsymbol{p}$で横断的に交わる2次元平面をとることにより，ポアンカレ写像が定義できる．
$\rightsquigarrow$ 3次元自律ベクトル場の周期軌道の分岐は，ポアンカレ写像の不動点$\boldsymbol{p}$の分岐に帰着される．

Def 7.3

ポアンカレ写像の不動点$\boldsymbol{p}$がサドルノード分岐，トランスクリティカル分岐，ピッチフォーク分岐，周期倍分岐，およびナイマルク—サッカー分岐を起こすとき，周期軌道Γは，それぞれ，サドルノード分岐，トランスクリティカル分岐，ピッチフォーク分岐，周期倍分岐，およびナイマルク—サッカー分岐を起こしたという．

次に，時間に関して周期Tの周期性を持つ2次元非自律系ベクトル場

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = g(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (7.39)$$

$$g(t, \boldsymbol{x}) = g(t + T, \boldsymbol{x}) \quad (7.40)$$

の周期軌道の分岐を考える．

このベクトル場の流れを$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$とするとき，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$に対して，$\varphi(T, 0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$を対応する写像

$$P : \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \mapsto \varphi(T, 0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2 \quad (7.41)$$

を定義する．これを非自律系のポアンカレ写像，またはストロボ写像という．

2次元非自律ベクトル場の周期軌道の分岐は，このポアンカレ写像の不動点および周期点の分岐に帰着される．