

基礎からの力学系 (第2章)

参考文献

- 小室，基礎からの力学系，サイエンス社，2002

Table of contents

- 連続時間力学系
- 離散時間力学系
- ポアンカレ写像

連続時間力学系 — ベクトル場 —

- 通常の微分積分学の教科書で扱われる微分方程式の定義と，力学系理論で扱われる微分方程式との関係について．
- 独立変数を t とする．

Def 2.1

1. n 階常微分方程式

- $F : D (\subset \mathbb{R}^{n+2}) \rightarrow \mathbb{R}$: $n + 2$ 変数実数値関数 ($n \geq 1$)

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

を n 階常微分方程式という．

Def 2.1 (続き)

2. 正規形の n 階常微分方程式

- $f : D_0 (\subset \mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$: $n + 1$ 変数実数値関数

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

を正規形の n 階常微分方程式という.

3. 1階連立常微分方程式 / 常微分方程式系

$f_1, \dots, f_n : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.3)$$

を1階連立常微分方程式という.

1階連立常微分方程式は、 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ および写像 $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$g(t, \boldsymbol{x}) = (f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)) \quad (2.4)$$

によって,

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = g(t, \boldsymbol{x}) \quad (2.5)$$

のように表される (\mathbb{R}^n における常微分方程式). 以下, $\dot{\boldsymbol{x}} := d\boldsymbol{x}/dt$ とする.

⇨ 連続時間力学系を表現する代表的な数学モデル

ODE (2.5) において, 写像 g が時間 t を陽に含むか含まないかは, 力学系理論での扱いに違いが生じる.

- 自律系
 - 写像 g が時間 t を陽に含まない場合

Def 2.2 (自律系)

1. $\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ とする. $f : D (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ を,

$$f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_n(\boldsymbol{x}))^T \quad (2.6)$$

とする. このとき, ODE

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) \quad (2.7) \iff \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.8)$$

を自律系という.

Def 2.2 (続き)

2. D を相空間, D の各点 \boldsymbol{x} にベクトル $f(\boldsymbol{x})$ を対応させる写像

$$f : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$$

をベクトル場という.

- ベクトル場はODEを幾何学的に表現したもの. 力学系の理論ではベクトル場はODEと同じ意味で使われることが多い.

3. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された曲線 $\boldsymbol{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ が

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}(t)) \quad (2.10)$$

を満たすとき, \boldsymbol{x} はODE (2.7)の解 (解曲線) であるという.

- $\boldsymbol{x}(0)$: 初期値
- ODEの解 \boldsymbol{x} は, ベクトル場の軌道 (orbit) とも呼ばれる.

Def 2.2 (続き)

4. $I \subset \mathbb{R}$ を 0 を含む開区間, $D \subset \mathbb{R}^n$ とする. 写像 $\varphi : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ が $\varphi(0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$ を満たし, 各 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ を固定するとき,

$$\frac{d\varphi(t, \boldsymbol{x}_0)}{dt} = f(\varphi(t, \boldsymbol{x}_0)) \quad (2.11)$$

を満たすならば, φ は ODE (2.7) の流れ (flow) であるという (ベクトル場 (2.9) の流れとも呼ばれる).

例 2.1 (2次元自律系ODE)

1. $\boldsymbol{x} = (x, y)$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

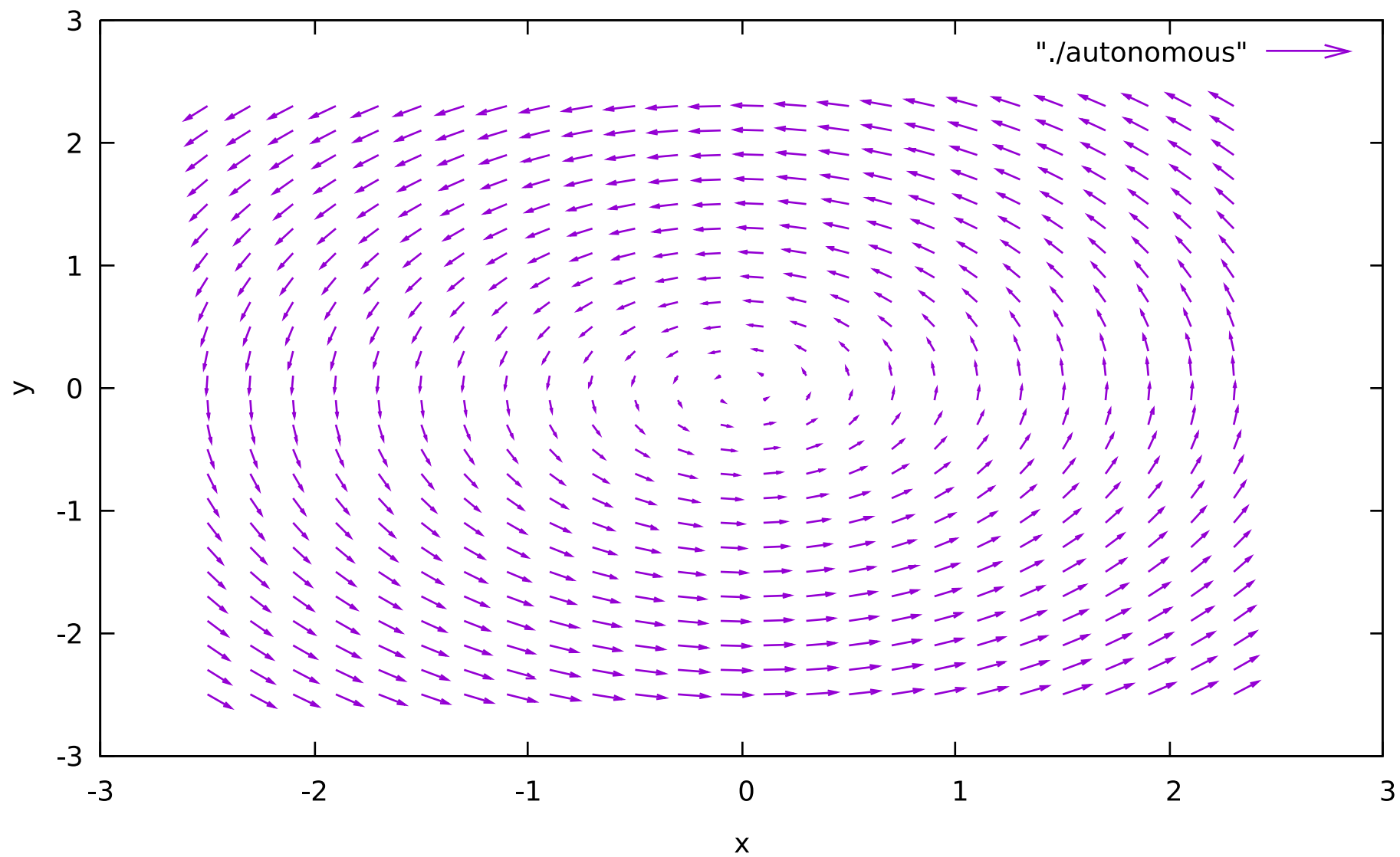
$$f(\boldsymbol{x}) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (y, -x) \quad (2.12)$$

で定義．このとき，

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (2.13)$$

は f によって与えられる自律系のODE．

2. ベクトル場は， $(x, y) \mapsto (y, -x)$ である．相空間は \mathbb{R}^2 ．



3. 曲線 $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{x}(t) = (x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \quad (2.14)$$

で定義すれば, \boldsymbol{x} は初期値 (x_0, y_0) を持つ解曲線となる.

4. $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(t, x_0, y_0) = (x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) = (x_t, y_t) \quad (2.15)$$

と定義. φ は上のODEの流れである.

Def 2.3 (非自律系)

1. $g : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ とする.

◦ $I \subset \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$

$$g(t, \boldsymbol{x}) = (g_1(t, \boldsymbol{x}), \dots, g_n(t, \boldsymbol{x}))^T = (g_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(t, x_1, \dots, x_n))^T \quad (2.19)$$

このとき, ODE

$$\dot{\boldsymbol{x}} = g(t, \boldsymbol{x}) \quad (2.20) \iff \begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = g_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.21)$$

を非自律系 (non-autonomous system) という.

2. $I \times D$: 拡大相空間.

$$(t, \boldsymbol{x}) \mapsto (1, g(t, \boldsymbol{x})) \quad (2.22)$$

をベクトル場という.

3. 曲線 $\boldsymbol{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ が

$$\dot{\boldsymbol{x}} = g(t, \boldsymbol{x}(t)) \quad (2.23)$$

を満たすとき, \boldsymbol{x} はODE (2.20) の解 (解曲線) という. $\boldsymbol{x}(t_0)$: 初期値.

4. $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が $\varphi(t_0, t_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$ を満たし, 各 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in I \times D$ を固定するとき

$$\frac{d\varphi(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)}{dt} = g(t, \varphi(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)) \quad (2.24)$$

を満たすならば, φ はODE (2.20) の流れであるという.

例2.2 (1次元非自律系ODE)

1. $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

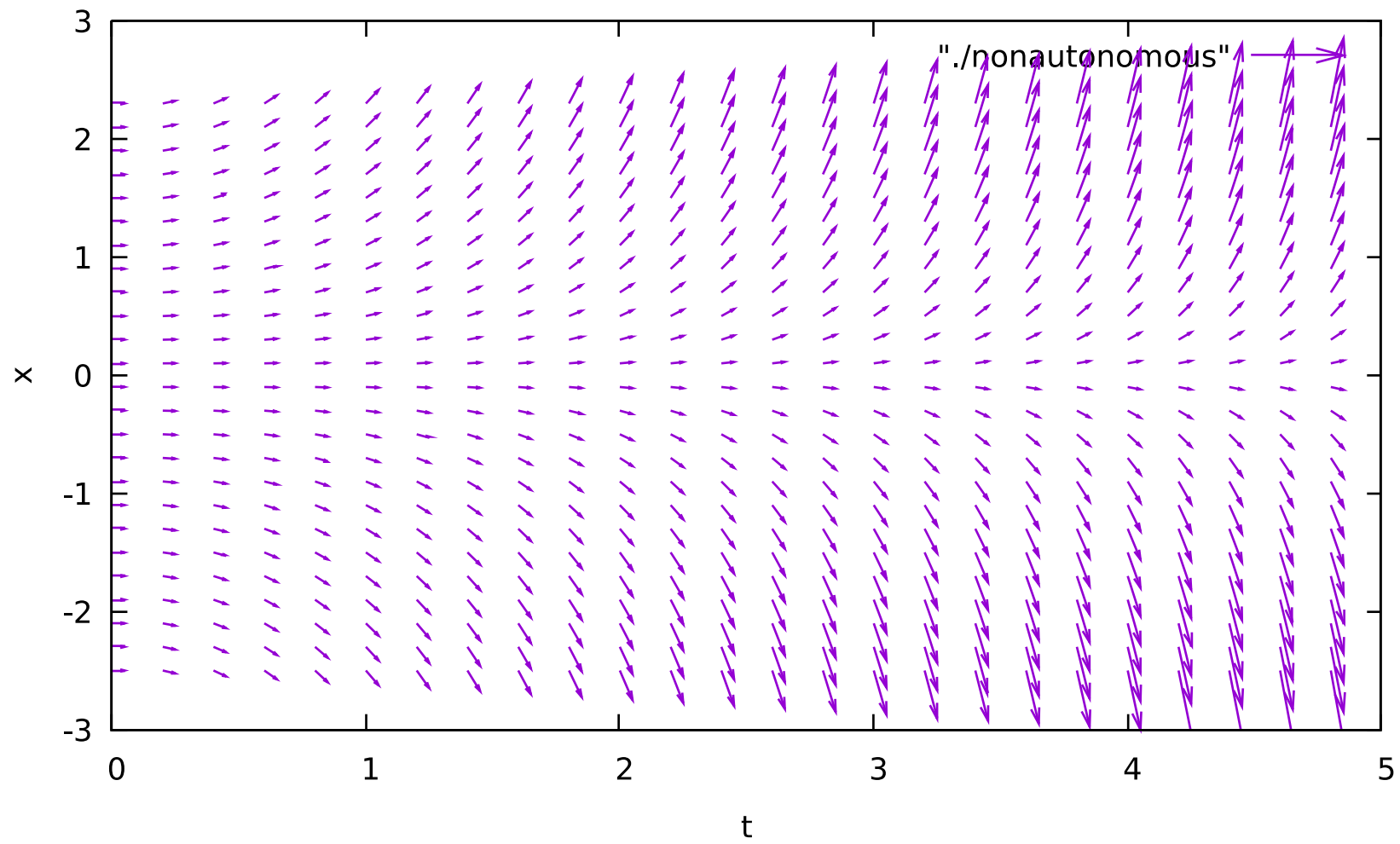
$$g(x, t) = xt \quad (2.25)$$

で定義．このとき，

$$\dot{x} = g(t, x) = xt \quad (2.26)$$

は g によって与えられる非自律系のODE．

2. ベクトル場は $(t, x) \mapsto (1, xt)$ ．拡大相空間は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ．



3. 曲線 $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\boldsymbol{x}(t) = x_0 \exp \left(\frac{1}{2} (t^2 - t_0^2) \right) \quad (2.27)$$

で定義すれば, \boldsymbol{x} は $t = t_0$ のとき, x_0 を初期値とする解曲線となる.

4. 写像 $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を,

$$\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 \exp \left(\frac{1}{2} (t^2 - t_0^2) \right) \quad (2.28)$$

で定義. この φ は上のODEの流れである.

離散時間力学系 — 写像 —

Def 2.4

1. $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: 連続写像.

$$f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_n(\boldsymbol{x}))^T = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_n(x_1, \dots, x_n))^T \quad (2.30)$$

このとき, 離散時間差分方程式

$$\boldsymbol{x}(t+1) = f(\boldsymbol{x}(t)), \quad (t = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.31)$$

$$\iff \begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (2.32)$$

を離散時間力学系という. 単に写像ということもある.

2. 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = f(\boldsymbol{x}_t), \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられる $\{\boldsymbol{x}_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$ を点 \boldsymbol{x}_0 を通る正の半軌道という.

3. f が同相写像 (逆写像 f^{-1} が存在し, 逆写像も連続) であるとき, 可逆系といい, そうでないとき, 非可逆系という.

可逆系の場合には, 時間の負の時間方向 (過去) への軌道も考えることができる.

点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\boldsymbol{x}_{t-1} = f^{-1}(\boldsymbol{x}_t) \quad (t = 0, -1, -2, \dots) \quad (2.34)$$

で与えられる点列 $\{\boldsymbol{x}_t : t = -1, -2, \dots\}$ を $\{\boldsymbol{x}_t : t = 0, 1, 2\}$ に加えて得られる点列 $\{\boldsymbol{x}_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ を \boldsymbol{x}_0 を通る軌道という.

ポアンカレ写像

連続時間力学系における周期軌道の解析は，1次元低い次元の空間における離散時間力学系の解析に帰着されることがある．

⇨ ポアンカレ写像

自律系のポアンカレ写像

3次元自律系ベクトル場

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$$

を考える．このベクトル場が周期軌道 Γ を持つとする．

このとき， Γ と1点 \boldsymbol{p} で横断的に交わる2次元平面 Σ をとる．

⇨ \boldsymbol{p} は流れ φ に沿って動く時，再び Σ 上の点 \boldsymbol{p} を打つ．

⇨ \boldsymbol{p} に十分近い Σ 上の点 \boldsymbol{q} が流れに沿って動くとき， \boldsymbol{p} の近くの点 \boldsymbol{q}' を打つと考えられる (\because 解の連続性， Σ が Γ に横断的であること)．

上記のようにして、 Σ 上の \boldsymbol{p} の近傍 U から Σ への写像が定義できる．

Def 2.5

U : Σ における \boldsymbol{p} の近傍． $\boldsymbol{q} \in U$ に対して、 \boldsymbol{q}' を流れ φ によって

$$\boldsymbol{q}' = \varphi(T, \boldsymbol{q}), \quad T = \min\{t > 0 \mid \varphi(t, \boldsymbol{q}) \in \Sigma\} \quad (2.36)$$

で定義する． この写像

$$P : U \ni \boldsymbol{q} \mapsto \boldsymbol{q}' \in \Sigma \quad (2.37)$$

を自律系ベクトル場のポアンカレ写像といい、 Σ をポアンカレ断面という．

Remark

- ポアンカレ写像は有界な領域 U で定義された写像
 - ~> \mathbf{q} に対して P で繰り返し変換すると、像が U の外に出てしまうことがある.
 - ~> 自律系のポアンカレ写像は、局所的に定義された離散時間力学系.
- ポアンカレ写像を使用する場面
 - パラメータを持つベクトル場の周期軌道の安定性の変化や分岐を調べるとき
 - ~> 周期軌道の安定性や分岐は、ポアンカレ写像の不動点 \mathbf{p} の安定性や分岐に帰着される
 - あらかじめ定めたポアンカレ断面がパラメータのどの範囲で有効に働くかは、ベクトル場や周期軌道の性質に依存する

非自律系のポアンカレ写像

時間に関して周期 T の周期性を持つ2次元の非自律ベクトル場を考える.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = g(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.38)$$

$$g(t, \boldsymbol{x}) = g(t + T, \boldsymbol{x}) \quad (2.39)$$

このベクトル場の流れを, $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ とする.

Def 2.6

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\varphi(T, 0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$ を対応させる写像

$$P : \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \mapsto \varphi(T, 0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.40)$$

を非自律系のポアンカレ写像 (ストロボ写像) という.

ベクトル場の解 $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $t = 0$ のとき $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ を初期値とし,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t + T), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.41)$$

を満たすとき, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ はポアンカレ写像 P の不動点となる ($P(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$).

また, 解 $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $t = 0$ のとき, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ を初期値とし,

$$\boldsymbol{x}(t) \neq \boldsymbol{x}(t + T) \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t + 2T) \quad (2.44)$$

を満たすとき, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ はポアンカレ写像 P の2周期点となる.

⇨ 非自律系ベクトル場の基本周期 T の整数倍の周期を持つ解曲線の解析を, ポアンカレ写像の周期点の解析に帰着させることができる.