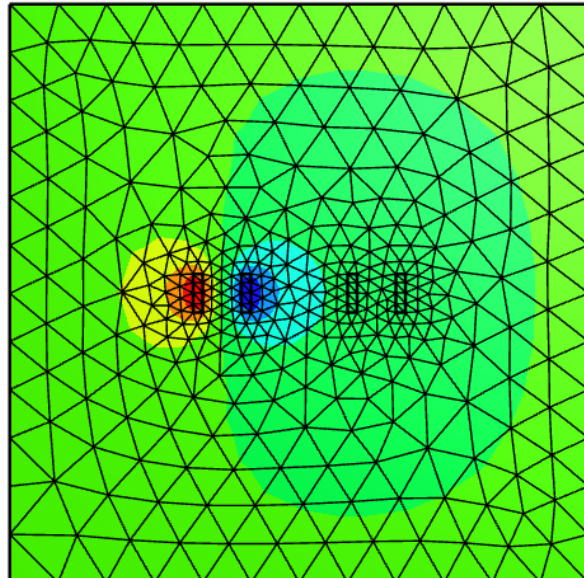


Optimisation topologique magnétique

Maximisation du flux dans un transformateur

Proposé par: Théodore Cherrière (SATIE), Thomas GAUTHEY (GeePs - CMAP)



I Introduction

L'objectif de ce tutoriel est d'appliquer une méthode d'optimisation topologique au dimensionnement d'un transformateur. On cherche une répartition optimisée de fer dans l'espace qui permet de maximiser le flux magnétique f transmis d'une bobine P à une bobine S . La répartition de fer est représentée par un champ de *densité* $\rho \in [0, 1]$: lorsque $\rho(x) = 0$, alors le matériau au point x est de l'air ; à l'inverse, lorsque $\rho(x) = 1$, alors le matériau au point x est du fer. Afin d'obtenir un résultat rapidement, on utilise un algorithme d'optimisation basé sur une **descente de gradient**. Afin de le mettre en oeuvre, il est nécessaire de :

1. Calculer le champ magnétique associée à ρ par la **méthode des éléments finis**
2. Calculer la fonction objectif f et de sa dérivée $d_\rho f$. On utilisera la **méthode de l'état adjoint**.
3. Définir un **algorithme d'optimisation** rapide et robuste (adaptation de pas, ...)

II Présentation du problème

On considère un domaine d'optimisation \mathcal{D} inclus dans un domaine de calcul Ω dont on note $\partial\Omega$ le bord externe. On résout les équations de la physique sur Ω . Deux bobinages primaires P_1 , P_2 et secondaires S_1 , S_2 sont traversés par une densité de courant homogène $J = 10 \text{ A/mm}^2$. La position de ces bobinages est supposée fixée.

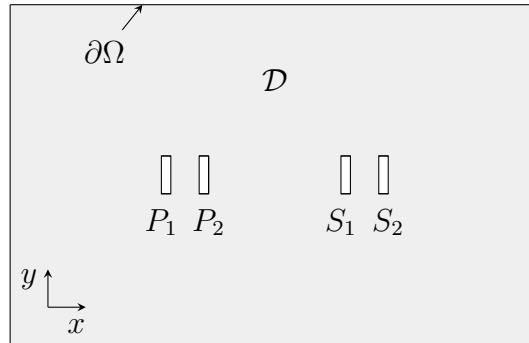


Figure 1: Domaine de calcul.

NOTE: $\Omega = D \cup P_1 \cup P_2 \cup S_1 \cup S_2$

III Calcul de l'état physique par éléments finis

III.1 Théorie

L'objectif de cette partie est d'établir le problème physique magnétostatique sous forme variationnelle, qui pourra ensuite être discrétisé et résolu par NGSolve. On rappelle les équations de Maxwell en magnétostatique :

$$\text{Maxwell-Thomson : } \operatorname{div} \vec{b} = 0 \quad (1a)$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \operatorname{rot} \vec{h} = \vec{j} \quad (1b)$$

Pour simplifier, on considérera le fer comme linéaire. Cela nous donne la loi de comportement :

$$\vec{b} = \mu_0 \mu_r \vec{h} \quad (2)$$

Avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ la perméabilité du vide, $\mu_r = 1$ pour l'air et $\mu_r = 1000$ pour le fer. De par le théorème de Helmholtz-Hodge, l'équation (1a) peut être vérifiée en tout point en posant le potentiel vecteur \vec{a} tel que :

$$\vec{b} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} \quad (3)$$

En 3D, l'équation de la magnétostatique linéaire s'écrit donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} \right) = \vec{j} \quad (4)$$

Question 1: On se place dans un cas 2D : tous les champs sont invariants selon l'axe z . Par ailleurs, le champ \vec{b} est contenu dans le plan (x, y) , et \vec{j} est orienté selon l'axe z . Montrer que l'équation (4) peut se réécrire comme :

$$-\text{div} \left(\nu \overrightarrow{\text{grad}} a_z \right) = j_z \quad (5)$$

Avec $\nu = (\mu_0 \mu_r)^{-1}$ la réluctivité magnétique.

On rappelle la définition des opérateurs de dérivations en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} u = \nabla u &= \begin{bmatrix} d_x u \\ d_y u \\ d_z u \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{div} \vec{a} = \nabla \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = d_x a_x + d_y a_y + d_z a_z \quad ; \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} &= \nabla \times \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_y a_z - d_z a_y \\ d_z a_x - d_x a_z \\ d_x a_y - d_y a_x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Solution: On calcule :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \nabla \times \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_y a_z - d_z a_y \\ d_z a_x - d_x a_z \\ d_x a_y - d_y a_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_y a_z \\ -d_x a_z \\ d_x a_y - d_y a_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc seul a_z est utile pour décrire \vec{b} . On pose alors $a_x = a_y = 0$, ce qui vérifie $d_x a_y - d_y a_x = 0$. Finalement :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{b} \right) = \nabla \times \left(\nu \begin{bmatrix} d_y a_z \\ -d_x a_z \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -d_z(\nu d_x a_z) \\ d_z(\nu d_y a_z) \\ -d_x(\nu d_x a_z) - d_y(\nu d_y a_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\text{div}(\nu \overrightarrow{\text{grad}} a_z) \end{bmatrix}$$

La projection sur l'axe z permet d'obtenir (5).

Dans la suite de l'énoncé pour simplifier les notations, on note $a := a_z$ et $j := j_z$.

Question 2: On pose $\mathcal{H}^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions suffisamment régulières (de carré intégrables et dont le gradient¹ est de carré intégrable sur Ω). On donne les formules suivantes :

$$\text{Formule de Leibniz : } \operatorname{div} (m\vec{a}) = m \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} m \quad (6a)$$

$$\text{Théorème de la divergence: } \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} = \int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n} \quad (6b)$$

En multipliant (5) une fonction $a^* \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ puis en utilisant (6a) et (6b), montrer que:

$$\forall a^* \in \mathcal{H}^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} a^* \cdot \nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} a - \int_{\partial\Omega} a^* \nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} a \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} a^* j \quad (7)$$

Cette équation s'appelle la forme variationnelle de (5), aussi appelée forme faible.

Solution: La multiplication de (5) par $a^* \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ et l'intégration sur Ω donne :

$$\forall a^* \in \mathcal{H}^1(\Omega), \quad - \int_{\Omega} a^* \operatorname{div} \left(\nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} a \right) = \int_{\Omega} a^* j$$

On applique (6a) :

$$\forall a^* \in \mathcal{H}^1(\Omega), \quad - \int_{\Omega} \left(\operatorname{div} (a^* \nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} a_z) - \overrightarrow{\operatorname{grad}} a^* \cdot \nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} a \right) = \int_{\Omega} a^* j$$

On applique ensuite (6b) pour trouver l'égalité recherchée :

$$\forall a^* \in \mathcal{H}^1(\Omega), \quad - \int_{\partial\Omega} a^* \nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} a \cdot \vec{n} + \int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} a^* \cdot \nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} a = \int_{\Omega} a^* j$$

Question 3: L'équation (7) fait apparaître un terme de bord, il faut donc connaître les conditions limites. On choisit des conditions de Dirichlet homogène : $a = 0$ sur $\partial\Omega$. Justifier que ce choix correspond à un champ \vec{b} tangentiel au bord.

INDICE : On rappelle qu'on a exprimé le champ \vec{b} en 2D dans la question 1 par :

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_y a \\ -d_x a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{\operatorname{grad}} a$$

Solution: On a vu dans le calcul associé à la question 1 que :

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} d_y a \\ -d_x a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{\operatorname{grad}} a = R\left(-\frac{\pi}{2}\right) \overrightarrow{\operatorname{grad}} a_z$$

Avec $R(\theta)$ la matrice de rotation associée à θ . On remarque donc que \vec{b} est perpendiculaire au gradient de a . Comme a est une constante sur $\partial\Omega$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}} a$ est colinéaire à \vec{n} , donc \vec{b} est perpendiculaire à \vec{n} , ce qui correspond bien à un champ tangentiel au bord.

¹On parle de gradient au sens des distributions, ce qui permet de généraliser la notion de dérivée.

Question 4: La prise en compte des conditions de Dirichlet permet d'exclure $\partial\Omega$ de l'espace dans lequel on recherche le champ a_z ; la considération du terme de bord n'est donc plus pertinente. On définit alors l'espace $\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \{a \in \mathcal{H}^1(\Omega), a = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$. Montrer alors que le problème magnétostatique à résoudre s'écrit:

$$\text{Trouver } a_z \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ qui vérifie } \forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} a^* \cdot \nu \overrightarrow{\text{grad}} a = \int_{\Omega} a^* j \quad (8)$$

Solution: Comme a_z est nul sur $\partial\Omega$, on a bien $a \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Par ailleurs, considérer $a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ permet d'annuler le terme de bord sans changer le reste de l'espace. On obtient ensuite la formulation variationnelle de (8), qui n'est rien d'autre que (7) sans le terme de bord.

III.2 Application / Implémentation

Question 5: Dans le notebook, coder une fonction `solveMag` qui prend comme argument un champ de réductivité `nu`, et qui renvoie la composante z du potentiel vecteur magnétique `state`. Le maillage `mesh` et la densité de courant `jz` sont supposées être des variables globales du problème.

Question 6: Coder une fonction `bField` qui prend comme argument `state` et renvoie l'induction magnétique vectorielle `b`.

Question 7: Afficher la norme du potentiel vecteur `state` ainsi que le champ magnétique `b` pour un champ `nu` uniforme et égal à ν_0 , et une densité de courant $j_z = 10 \text{ A/mm}^2$ dans la bobine primaire, telle que son flux soit orienté vers \vec{e}_y .

Solution: D'après la règle du tire-bouchon/de la main droite, on a $j = 10 \text{ A/mm}^2$ sur P_1 et $j = -10 \text{ A/mm}^2$ sur P_2 .

IV Calcul de la fonction objectif

IV.1 Théorie

Question 8: Justifier que le flux entre deux point A et B est proportionnel à $a_z(A) - a_z(B)$. Comment interpréter son signe ? On pourra faire appel au théorème de Stokes :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial S} \vec{a} \cdot d\vec{l} \quad (9)$$

Solution: Le théorème de Stokes nous dit que le flux de \vec{b} est égal à la circulation du potentiel vecteur a_z autour de ce contour. En 2D, cette circulation devient une simple différence, comme le montre le schéma suivant.

IV.2 Application / Implémentation

Question 9: Coder une fonction `fObjectif` qui à partir du champ `az` renvoie le flux moyen dans la bobine secondaire. On comptera positivement - *pour cette bobine* - un flux orienté vers $-\vec{e}_y$.

V Calcul du gradient par la méthode de l'adjoint

V.1 Théorie

Dans notre cas, f - l'objectif - est la fonction qui pour un état magnétique \bar{a} donne la valeur (scalaire) du flux transmis de la bobine primaire à la bobine secondaire. L'état magnétique \bar{a} dépend **implicitement** de ρ comme solution du problème magnétostatique.

$$\forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \mathcal{F}(\bar{a}(\rho), a^*, \rho) = 0 \quad (\text{magnétostatique}) \quad (10)$$

On veut obtenir le gradient pour le problème suivant.

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \min_{\rho} f(\bar{a}(\rho)) \\ \text{s.c. } \mathcal{F}(\bar{a}(\rho), a^*, \rho) = 0, \quad \forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (11)$$

On note cet état $\bar{a}(\rho)$ pour bien souligner cette dépendance implicite en ρ . On souhaite calculer la dérivée directionnelle ² de $f(\bar{a}(\rho))$ par rapport à ρ qui représente la répartition de matière. Elle s'écrit alors (règle de la chaîne) :

$$\forall v, \quad d_{\rho}f(\bar{a}(\rho))(v) = \partial_{\bar{a}}f(\bar{a}) \underbrace{d_{\rho}\bar{a}(\rho)(v)}_{\text{inconnu !}} \quad (12)$$

On note que le terme $d_{\rho}\bar{a}(\rho)(v)$ n'est pas directement calculable, puisqu'on ne connaît pas l'expression explicite de $\bar{a}(\rho)$. Pour résoudre cette difficulté, on ajoute un degré de liberté λ en introduisant l'opérateur Lagrangien \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(a, \lambda, \rho) = \underbrace{f(a)}_{\text{Coût}} + \underbrace{\mathcal{F}(a, \lambda, \rho)}_{\text{EDP en forme faible}} = \int_{S_2} a - \int_{S_1} a + \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \lambda \cdot \nu(\rho) \overrightarrow{\text{grad}} a - \int_{\Omega} \lambda j_z \quad (13)$$

où ρ, a, λ sont pour le moment des champs scalaires supposés quelconques.

On peut vérifier que si $a = \bar{a}(\rho)$, on a bien $\mathcal{L}(a, \lambda, \rho) = f(a)$. On veut alors calculer $d_{\rho}\mathcal{L}(\bar{a}(\rho), \lambda, \rho)$. Comme précédemment, on utilise la règle de la chaîne :

$$\forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \forall v \quad d_{\rho}\mathcal{L}(\bar{a}(\rho), \lambda, \rho)(v) = d_{\rho}\mathcal{L}(\bar{a}(\rho), \lambda, \rho) + \partial_a\mathcal{L}(\bar{a}(\rho), \lambda, \rho) \underbrace{(d_{\rho}\bar{a}(\rho)(v))}_{\text{inconnu !}} \quad (14)$$

Il y a toujours la présence du terme qu'on ne sait pas calculer, mais on peut contourner le problème en imposant pour ρ et $\bar{a}(\rho)$ donnés:

$$\partial_a\mathcal{L}(\bar{a}(\rho), \lambda, \rho)(v) = 0, \quad \forall v \quad (15)$$

Cela peut se faire en choisissant judicieusement λ , qui constitue le degré de liberté supplémentaire du lagrangien.

²Voir Annexe I. pour la définition de la dérivée direction et des opérateurs d et ∂

Question 10: L'équation 15 permet de déterminer la valeur de l'état adjoint λ . Montrer que cette équation est équivalente à résoudre le problème suivant :

$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \hat{\lambda} \cdot \nu(\rho) \overrightarrow{\text{grad}} v = \int_{S_2} v - \int_{S_1} v \quad (16)$$

On rappelle pour cela les formules de dérivées directionnelles suivantes :

$$d_a a(v) = v \quad ; \quad d_a \left(\int_{\Omega} f(a) dx \right) (v) = \int_{\Omega} d_a(f(a))(v) \quad ; \quad d_a \left(\overrightarrow{\text{grad}} a \right) (v) = \overrightarrow{\text{grad}} (d_a a(v))$$

Solution: Par application directe des formules données, on obtient:

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{a}} \mathcal{L}(v) = 0, \forall v &\Rightarrow \partial_{\hat{a}} \left(\int_{S_2} \hat{a} \right) (v) - \partial_{\hat{a}} \left(\int_{S_1} \hat{a} \right) (v) + \partial_{\hat{a}} \left(\int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \hat{\lambda} \cdot \nu(\rho) \overrightarrow{\text{grad}} \hat{a} \right) (v) = 0, \forall v \\ &\Rightarrow \int_{S_2} \partial_{\hat{a}}(a)(v) - \int_{S_1} \partial_{\hat{a}}(a)(v) + \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \hat{\lambda} \cdot \nu(\rho) \partial_{\hat{a}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \hat{a} \right) (v) = 0, \forall v \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \hat{\lambda} \cdot \nu \overrightarrow{\text{grad}} v = \int_{S_2} v - \int_{S_1} v, \forall v \end{aligned}$$

Question 11: Coder une fonction `solveAdjointState` qui prend comme argument un champ de réductivité `nu` et renvoie l'état adjoint du système `pz`. Tracer l'adjoint et commenter.

On cherche maintenant à partir de l'expression de la dérivée directionnelle $d_{\rho} f(\bar{a}(\rho))$ à obtenir un gradient $\nabla_{\rho} f(\bar{a}(\rho))$. On rappelle la formule de la dérivée directionnelle en x dans la direction h

$$f(x + h) = f(x) + d_x f(x)(h) + o(h^2) \quad (17)$$

et celle du développement de Taylor en x pour une petite variation h

$$f(x + h) = f(x) + \nabla_x f(x) \cdot h + o(h^2) \quad (18)$$

On peut donc identifier ces expressions et obtenir l'expression du gradient :

$$d_x f(x)(h) = \nabla_x f(x) \cdot h \quad (19)$$

NOTE: On peut voir le gradient comme la direction qui maximise la variation de f .

Question 12: Montrer que le gradient du problème peut s'écrire:

$$\nabla_{\rho} f(\bar{a}(\rho)) = \overrightarrow{\text{grad}} \lambda \partial_{\rho} \nu(\rho) \overrightarrow{\text{grad}} a \quad (20)$$

Solution: Comme pour l'adjoint, on utilise les formules de dérivation directionnelles :

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} \mathcal{L}(v) &= \partial_{\rho} \left(\int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \lambda \cdot \nu(\rho) \overrightarrow{\text{grad}} a \right) (v) \\ &= \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \lambda \cdot \partial_{\rho} \nu(\rho)(v) \overrightarrow{\text{grad}} a \\ &= \int_{\Omega} \left(\partial_{\rho} \nu(\rho) \overrightarrow{\text{grad}} \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} a \right) \cdot v \end{aligned}$$

Par identification, on obtient la forme annoncée.

V.2 Application / Implémentation

Question 13: Coder une fonction `gradRho` qui à partir des états directs `az` et adjoints `pz` et du champ de densité `rho` renvoie une direction de descente.

VI Optimisation

VI.1 Application / Implémentation

On est maintenant capable à partir d'une distribution de matière d'évaluer ses performances au sens de la fonction objectif et d'obtenir une direction de descente à partir de la méthode de la variable adjointe.

Question 14: Un algorithme de descente de gradient est donné. Compléter la ligne de mise à jour `rho` et lancer le code.

On veut maintenant rajouter une **contrainte de pourcentage maximal** de matière dans la zone de design.

Question 15: Coder deux fonctions `massConst` et `dRhomassConst` prenant comme argument la densité `rho` et renvoyant respectivement le pourcentage massique et le gradient de cette expression.

Question 16: Une version de l'algorithme est proposée en incluant une contrainte de pourcentage maximale de matière. Faire varier cette contrainte et tracer le Pareto Pourcentage massique/Energie. Commenter.

Question 17: Inverser le sens du flux dans la fonction objectif pour le problème sans contraintes. Commenter.

~ Fin du sujet ~

Annexe I. : Dérivation

Cette annexe a pour objectif de définir de manière semi-rigoureuse les différentes dérivées utilisées dans le tutoriel. Pour une fonction $f : x \mapsto f(x)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , sa dérivée (si elle est définie) s'écrit comme :

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (21)$$

Cette dérivée correspond à la pente de la droite tangente à la courbe $(x, f(x))$.

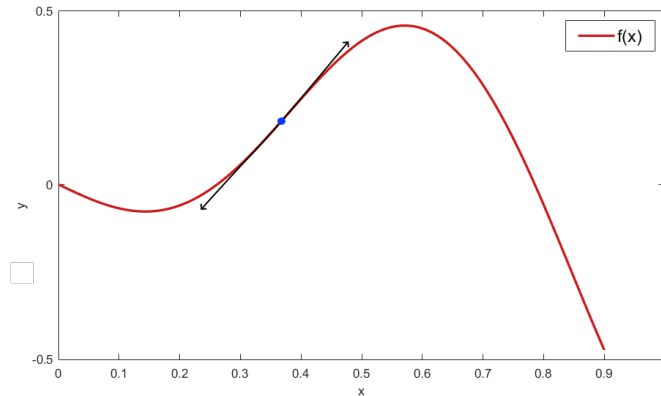


Figure 2: Dérivée d'un fonction - intuition géométrique

On peut étendre la notion de dérivée pour une fonction à plusieurs variable en dérivant de manière **indépendante** par rapport à chacune d'entre-elles. On a alors des dérivées dites partielles " ∂ ".

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto g(x, y) \end{cases} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x}g(x, y) = \partial_x g(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h} \quad (22)$$

La dérivée **partielle** dans la direction x au point $(x, y, g(x, y))$ correspond à la pente de la tangente à la courbe définie par l'intersection du plan $(g(x, y), \vec{x}, \vec{z})$ et de la surface $\{(x, y, g(x, y)), \forall x, y\}$

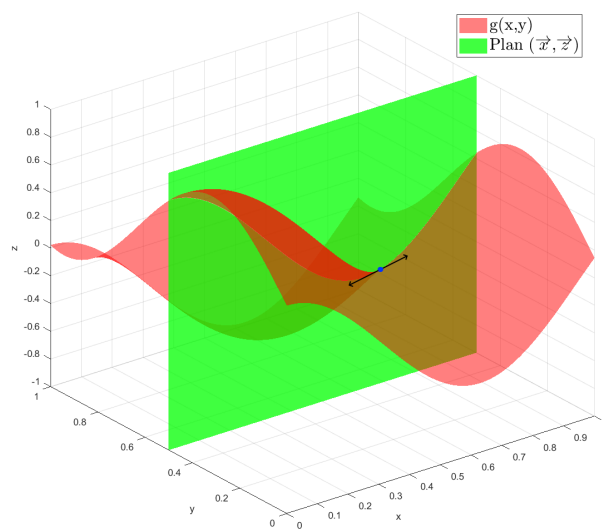


Figure 3: Représentation géométrique de la dérivée partielle

On peut étendre cette définition à toute direction $v = [v_x, v_y]$. On parle dans ce cas de dérivée **directionnelle**. Pour la même fonction que précédemment on a alors :

$$dg(x, y)(v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + hv_x, y + hv_y) - g(x, y)}{h} \quad (23)$$

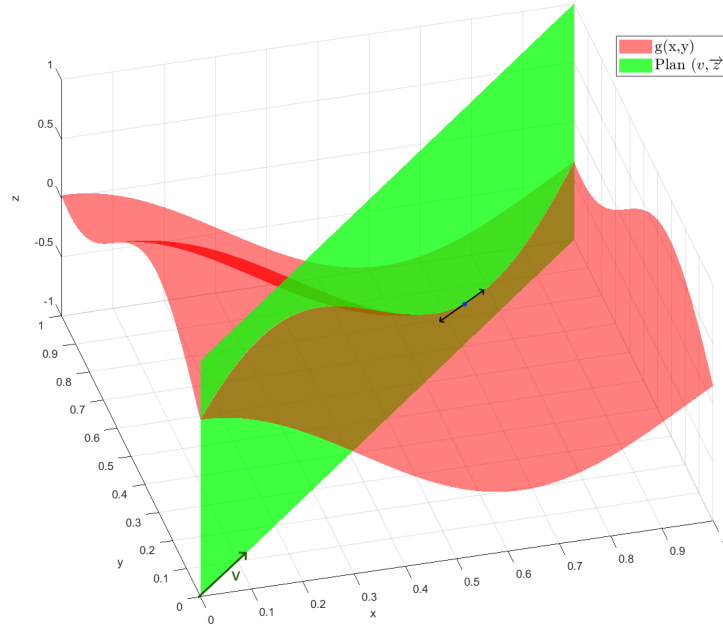


Figure 4: Représentation géométrique de la dérivée directionnelle

Cette formule est aussi valide pour une fonction prenant des champs³ en entrée même si la représentation graphique devient plus ardue.

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \mapsto g(X, Y) \end{cases} \quad ; \quad d_X g(X, Y)(V) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(X + hV, Y) - g(X, Y)}{h} \quad (24)$$

Cette dernière définition est aussi adaptée pour des champs définis sur les espaces traités dans le tutoriel soit $\mathcal{H}^1(\Omega)$ et $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

Pour plus de détails en terme de formalisme voir Antoine Henrot and Michel Pierre. *Variation et optimisation de formes*. Springer Berlin Heidelberg, 2005

³variables de dimension supérieure à 1, voire de *dimension infinie*.

