Groupement de recherche SEEDS Systèmes d'énergie électrique dans leurs dimensions sociétales	Optimisation topologique	T. Cherrière T. Gauthey

Introduction

L'objectif de ce tutoriel est d'appliquer une méthode d'optimisation topologique au dimensionnement d'un transformateur. On cherche une répartition optimisée de fer dans l'espace qui permet de maximiser le flux magnétique $\mathcal{J}$ transmis d'une bobine P à une bobine S. La répartition de fer est représentée par un champ de *densité* $\rho \in [0, 1]$: lorsque $\rho(x) = 0$, alors le matériau au point x est de l'air ; à l'inverse, lorsque $\rho(x) = 1$, alors le matériau au point x est du fer. Afin d'obtenir un résultat rapidement, on utilise un algorithme d'optimisation basé sur une **descente de gradient**. Afin de le mettre en oeuvre, il est nécessaire de:

1. Calculer le champ magnétique associée à ρ par la **méthode des éléments finis**
2. Calculer la fonction objectif $\mathcal{J}$ et de sa dérivée $\mathrm{d}_\rho\mathcal{J}$. On utilisera la **méthode de l'état adjoint**.
3. Définir un **algorithme d'optimisation** rapide et robuste (adaptation de pas, normalisation de gradient, etc)

Présentation du problème

On considère un domaine d'optimisation Ω dont on note $\partial\Omega$ le bord externe. Deux bobinages : un primaire (P) et un secondaire (S) sont représentés par des densités de courant.

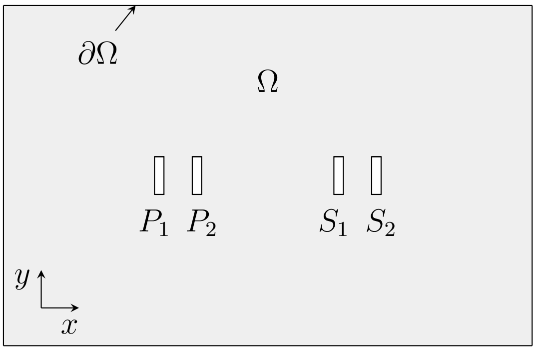

Figure 1: Domaine de calcul.

Calcul de l'état physique par éléments finis

L'objectif de cette partie est d'établir le problème physique magnétostatique sous forme variationnelle, qui pourra ensuite être discrétisé et résolu par `Ngsolve`. On rappelle les équations de Maxwell en magnétostatique :

$$\text{Maxwell-Thomson :} \quad \mathrm{div}\ \vec{b} = 0 \tag{1a}$$

$$\text{Maxwell-Ampère :} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{h} = \vec{j} \tag{1b}$$

Pour simplifier, on considèrera le fer comme linéaire. Cela nous donne la loi de comportement :

$$\vec{b} = \mu_0 \mu_r \, \vec{h} \tag{2}$$

Avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$H/m la perméabilité du vide, $\mu_r = 1$ pour l'air et $\mu_r = 1000$ pour le fer. De par le théorème de Helmoltz-Hodge, l'équation (1a) peut être vérifiée en tout point en posant le potentiel vecteur $\vec{a}$ tel que :

$$\vec{b} = \overrightarrow{\text{rot}} \, \vec{a} \tag{3}$$

En 3D, l'équation de la magnétostatique linéaire s'écrit donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \overrightarrow{\text{rot}} \, \vec{a} \right) = \vec{j} \tag{4}$$

Question 1: On se place dans un cas 2D : tous les champs sont invariants selon l'axe z. Par ailleurs, le champ $\vec{b}$ est contenu dans le plan (x, y), et $\vec{j}$ est orienté selon l'axe z. Montrer que l'équation (4) peut se réécrire comme :

$$-\text{div} \left(\nu \, \overrightarrow{\text{grad}} \, a_z \right) = j_z \tag{5}$$

Avec $\nu = (\mu_0 \mu_r)^{-1}$ la réluctivité magnétique.

On rappelle la définition des opérateurs de dérivations en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \, u = \nabla u = \begin{bmatrix} \text{d}_x u \\ \text{d}_y u \\ \text{d}_z u \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{div} \, \vec{a} = \nabla . \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \text{d}_x a_x + \text{d}_y a_y + \text{d}_z a_z \quad ;$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \, \vec{a} = \nabla \times \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{d}_y a_z - \text{d}_z a_y \\ \text{d}_z a_x - \text{d}_x a_z \\ \text{d}_x a_y - \text{d}_y a_x \end{bmatrix}$$

Question 2: On pose $\mathcal{H}^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions suffisamment régulières (de carré intégrables et dont le gradient[1]) est de carré intégrable sur Ω. On donne les formules suivantes :

$$\text{Formule de Leibniz :} \quad \text{div} \, (m\vec{a}) = m \, \text{div} \, \vec{a} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \, m \tag{6a}$$

$$\text{Théorème de la divergence:} \quad \int_\Omega \text{div} \, \vec{a} = \int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n} \tag{6b}$$

En multipliant (5) une fonction $a^* \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ puis en utilisant (6a) et (6b), montrer que:

$$\forall a^* \in \mathcal{H}^1(\Omega), \quad \int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}} \, a^* \cdot \nu \, \overrightarrow{\text{grad}} \, a_z - \int_{\partial\Omega} a^* \nu \, \overrightarrow{\text{grad}} \, a_z \cdot \vec{n} = \int_\Omega a^* j_z \tag{7}$$

Cette équation s'appelle la forme variationnelle de (5), aussi appelée forme faible.

Question 3: L'équation (7) fait apparaître un terme de bord, il faut donc connaître les conditions limites. On choisit des conditions de Dirichlet homogène : $a_z = 0$ sur $\partial\Omega$. Justifier que ce choix correspond à un champ $\vec{b}$ tangentiel au bord.
INDICE : On rappelle qu'on a exprimé le champ $\vec{b}$ en 2D dans la question 1 par :

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{d}_y a_z \\ -\text{d}_x a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{\text{grad}} \, a_z$$

[1] On parle de gradient au sens des distributions, ce qui permet de généraliser la notion de dérivée.

Question 4: La prise en compte des conditions de Dirichlet permet d'exclure $\partial\Omega$ de l'espace dans lequel on recherche le champ a_z ; la considération du terme de bord n'est donc plus pertinente. On définit alors l'espace $\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \{a \in \mathcal{H}^1(\Omega), a = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$. Montrer alors que le problème magnétostatique à résoudre s'écrit:

$$\text{Trouver } a_z \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ qui vérifie} \quad \forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}}\ a^* \cdot \nu\ \overrightarrow{\text{grad}}\ a_z = \int_\Omega a^* j_z \tag{8}$$

Question 5: Dans le notebook, coder une fonction `solveMag` qui prend comme argument un champ de réluctivité `nu`, et qui renvoie la composante z du potentiel vecteur magnétique `az`. Le maillage `mesh` et la densité de courant `jz` sont supposées être des variables globales du problème.

Question 6: Coder une fonction `az2b` qui prend comme argument `az` et renvoie l'induction magnétique vectorielle `b`.

Question 7: Afficher la norme du potentiel vecteur `az` ainsi que le champ magnétique `b` pour un champ `nu` uniforme et égal à ν_0, et une densité de courant $j_z = 10\,\text{A/mm}^2$ dans la bobine primaire, telle que son flux soit orienté vers $\vec{e}_y$.

Calcul de la fonction objectif

Question 8: Justifier que le flux ϕ entre deux point A et B est proportionnel à $a_z(A) - a_z(B)$. Comment interpréter le signe de ϕ ? On pourra faire appel au théorème de Stokes :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{a} \cdot \text{d}\vec{s} = \oint_{\partial S} \vec{a} \cdot \text{d}\vec{l} \tag{9}$$

Question 9: Coder une fonction `fluxSecondaire` qui à partir du champ `az` renvoie le flux moyen `phi` dans la bobine secondaire. On comptera positivement un flux orienté vers $-\vec{e}_y$.

Calcul du gradient par la méthode de l'adjoint

On veut obtenir le gradient pour problème suivant.

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \min\limits_{\rho} f(\overline{a}(\rho)) \\ \text{s.c. } \mathcal{F}(\overline{a}(\rho), a^*, \rho) = 0, \quad \forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{10}$$

Dans notre cas, f est la fonction qui pour un état magnétique $\overline{a}$ donne la valeur (scalaire) du flux transmis de la bobine primaire à la bobine secondaire. L'état magnétique $\overline{a}$ dépend **implicitement** de ρ comme solution du problème magnétostatique.

$$\forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \mathcal{F}(\overline{a}(\rho), a^*, \rho) = 0 \quad \text{(magnetostatique)} \tag{11}$$

On note cet état $\overline{a}(\rho)$ pour bien souligner cette dépendance implicite en ρ. On souhaite calculer la dérivée directionnelle de $f(\overline{a}(\rho))$ par rapport à ρ qui représente la répartition de matière. Elle s'écrit alors (règle de la chaîne) :

$$\forall \theta, \quad \text{d}_\rho f(\overline{a}(\rho))(\theta) = \text{d}_{\overline{a}} f(\overline{a})\, \underbrace{\text{d}_\rho \overline{a}(\rho)(\theta))}_{\text{inconnu !}} \tag{12}$$

On note que le terme $\mathrm{d}_\rho\overline{a}(\rho)(\theta)$ n'est pas directement calculable, puisqu'on ne connaît pas l'expression explicite de $\overline{a}(\rho)$. Pour résoudre cette difficulté, on ajoute un degré de liberté λ en introduisant l'opérateur Lagrangien $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(a,\lambda,\rho) = \underbrace{f(a)}_{\text{Coût}} + \underbrace{\mathcal{F}(a,\lambda,\rho)}_{\text{EDP en forme faible}} = \int_{s+} a - \int_{s-} a + \int_\Omega \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \lambda.\,\nu(\rho)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ a - \int_\Omega \lambda j_z \tag{13}$$

où ρ,a,λ sont pour le moment des champs scalaires supposés quelconques.
On peut vérifier que si $a = \overline{a}(\rho)$, on a bien $\mathcal{L}(a,\lambda,\rho) = f(a)$. On veut alors calculer $\mathrm{d}_\rho\mathcal{L}(\overline{a}(\rho),\lambda,\rho)$.
Comme précédemment, on utilise la règle de la chaîne :

$$\forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \forall\theta \quad \mathrm{d}_\rho\mathcal{L}(\overline{a}(\rho),\lambda,\rho)(\theta) = \mathrm{d}_\rho\mathcal{L}(\overline{a}(\rho),\lambda,\rho) + \partial_a\mathcal{L}(\overline{a}(\rho),\lambda,\rho)\,\underbrace{(\mathrm{d}_\rho\overline{a}(\rho)(\theta))}_{\text{inconnu !}} \tag{14}$$

Il y a toujours la présence du terme qu'on ne sait pas calculer, mais on peut contourner le problème en imposant:

$$\partial_a\mathcal{L}(\overline{a}(\rho),\lambda,\rho)(v) = 0, \quad \forall v \tag{15}$$

Cela peut se faire en choisissant judicieusement λ, qui constitue le degré de liberté supplémentaire du lagrangien.

Question 10: L'équation 15 permet de déterminer la valeur du multiplicateur adjoint λ. Montrer que cette équation est équivalente à résoudre le problème suivant :

$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \hat{\lambda}\cdot\nu(\rho)\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ v = \int_{s-} v - \int_{s+} v \tag{16}$$

On rappelle pour cela les formules de dérivées directionnelles suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}a(v) = v \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\int_\Omega f(a)\mathrm{d}x\right)(v) = \int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}f(a)(v) \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ a\right)(v) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}a}(v)\right)$$

Question 11: Coder une fonction `solveAdj` qui prend comme argument un champ de réluctivité `nu` et renvoie l'état adjoint du système `pz`. Tracer l'adjoint et commenter.

Par rapport à la dérivée directionnelle, le gradient $\nabla_\rho f(\overline{a}(\rho))$ est défini comme la perturbation qui vérifie :

$$\nabla_\rho f(\overline{a}(\rho)) = \theta^*.\mathrm{d}_\rho f(\overline{a}(\rho))(\theta^*) \tag{17}$$

Avec θ^* la perturbation (de norme unitaire) qui maximise $\mathrm{d}_\rho f(\overline{a}(\rho))(\theta^*)$.

Dans le cas où il existe une fonction f' telle que $\mathrm{d}_\rho f(\overline{a}(\rho))(\theta^*)$ s'écrive sous la forme :

$$\mathrm{d}_\rho f(\overline{a}(\rho))(\theta^*) = \int_\Omega f'(\overline{a},\lambda,\rho).\theta \tag{18}$$

On a l'égalité :

$$\nabla_\rho f(\overline{a}(\rho)) = f'(\overline{a}(\rho),\lambda,\rho) \tag{19}$$

Question 12: Montrer que le gradient du problème peut s'écrire:

$$\nabla_\rho f(\overline{a}(\rho)) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \lambda\,\partial_\rho\nu(\rho)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ a \tag{20}$$

Question 13: Coder une fonction `descentDirection` qui à partir des états directs `az` et adjoints `pz` et du champ de densité `rho` renvoie une direction de descente.

Optimisation

On est maintenant capable à partir d'une distribution de matière d'évaluer ses performances au sens de la fonction objectif et d'obtenir une direction de descente à partir de la méthode de la variable adjointe.

Question 14: Un algorithme de descente de gradient est donné. Compléter la ligne de mise à jour de la variable de design.

Question 15: Une version de l'algorithme est proposée en incluant une contrainte de pourcentage maximale de matière. Faire varier cette contrainte et tracer le Pareto Flux/Energie. Commentez.

Question 16: (Bonus) Inverser le sens du flux dans la fonction objectif (et l'adjoint). Commenter