

BÀI TẬP LÝ THUYẾT LẦN 7 – PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN

Họ và tên: Trần Công Hiếu.

MSSV: 21110294.

Ví dụ:

Kiểm tra chuỗi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

- Có bán kính hội tụ $R = 1$? Hội tụ tại $z = -1$ hoặc $z = 1$?

Algorithm Analysis

fppt.com

Bán kính hội tụ R được tính bằng công thức sau:

$$R = \frac{1}{\rho}, \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Với chuỗi trên, lúc này:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot z^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot z^k$$

với $a_k = 1/k$.

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{k} \right|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|k|^{\frac{1}{k}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{\ln(|k|)}{k}}}$$

$$= \frac{1}{e^{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(|k|)}{k}}} = \frac{1}{e^{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\ln(|k|))'}{(k)'} }} = \frac{1}{e^{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

Suy ra: chuỗi có bán kính hội tụ $R = 1$.

- Xét với $z = -1$, ta có chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz. (Vì $\left(\frac{1}{k}\right)$ là dãy giảm và $\left(\frac{1}{k}\right) \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$ nên chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ hội tụ)
- Xét với $z = 1$, ta có chuỗi điều hòa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nên phân kỳ. Bởi:

$$\int_1^K \frac{1}{x} dx = \ln(x)|_1^K = \ln(K) \rightarrow \infty \text{ khi } K \rightarrow \infty.$$