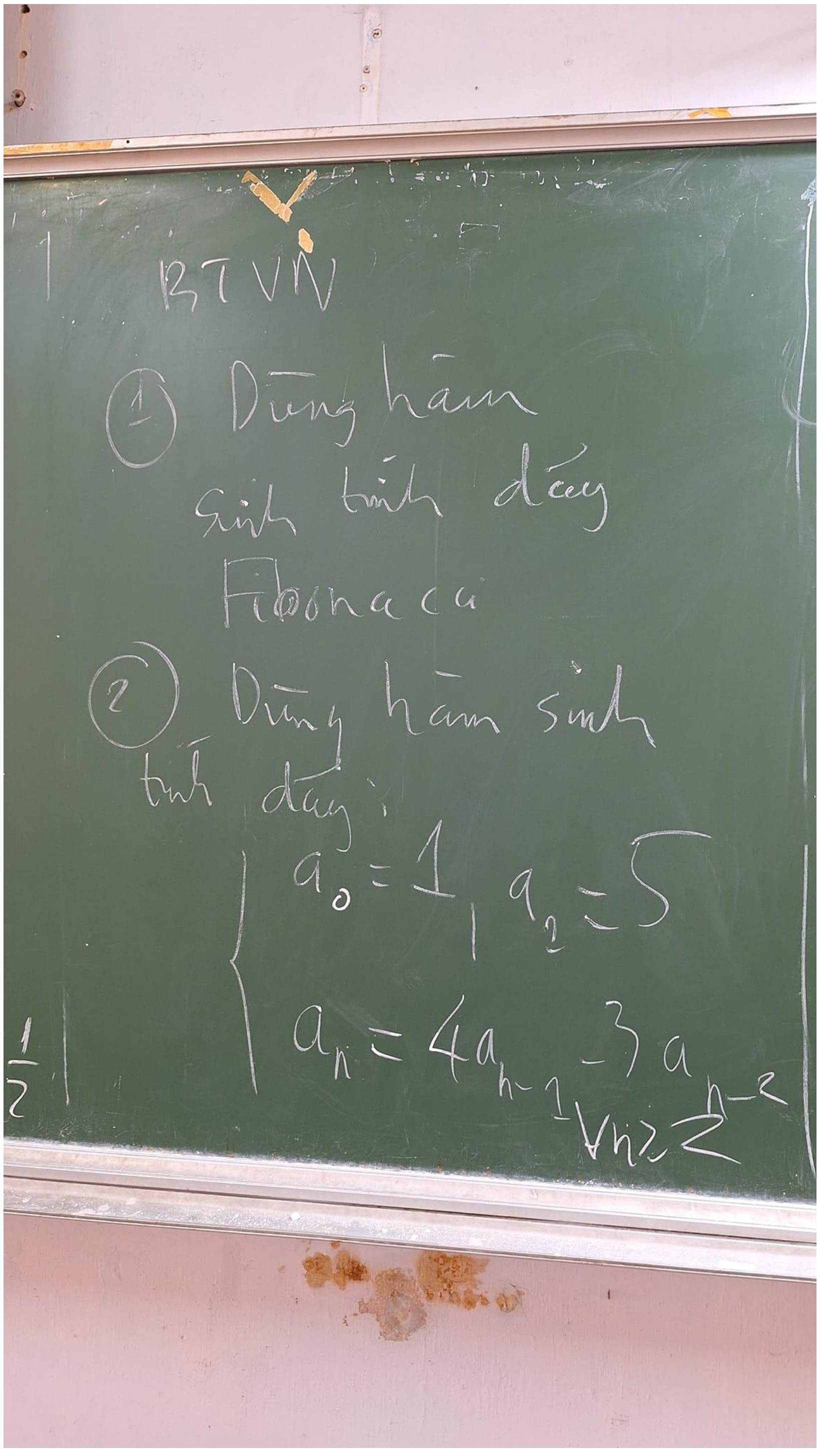
<u>BÀI TẬP LÝ THUYẾT LẦN 8 – PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN</u>

Họ và tên: Trần Công Hiếu.

MSSV: 21110294.



1/ Dùng hàm sinh tính dãy Fibonacci.

Ta có dãy Fibonacci như sau:

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Đặt G(z) là hàm sinh cho dãy (F_n). Ta có:

Cách 1.

Do $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ nên $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$

Lại có:

$$G(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \cdots + F_{n+1} z^{n+1} + F_{n+2} z^{n+2} + \cdots$$

$$-xG(z) = -F_0 z - F_1 z^2 - F_2 z^3 - \cdots - F_{n+1} z^{n+2} - F_{n+2} z^{n+3} - \cdots$$

$$-x^2 G(z) = -F_0 z^2 - F_1 z^3 - F_2 z^4 - \cdots - F_{n+1} z^{n+3} - F_{n+2} z^{n+4} - \cdots$$

Cộng 3 vế các đẳng thức trên, ta thu được:

$$(1 - z - z^2)G(z) = F_0 + (F_1 - F_0)z + (F_2 - F_1 - F_0)z^2 + \cdots + (F_{n+2} - F_{n+1} - F_n)z^{n+2} + \cdots$$

Vì $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ nên:

$$(1 - z - z^2)G(z) = F_0 + (F_1 - F_0)z = z$$

$$\Leftrightarrow G(z) = \frac{z}{(1 - z - z^2)}$$

Phân tích:

$$G(z) = \frac{z}{(1 - z - z^2)} = \frac{A}{1 - \alpha z} + \frac{B}{1 - \beta z}$$

$$Với\ A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Viết lại thành:

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha z} - \frac{1}{1-\beta z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}G(z) = \frac{1}{1-\alpha z} - \frac{1}{1-\beta z} \ (*)$$

Mà ta có công thức tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn là:

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

Áp dụng vào $(*)$ ta được:

$$\sqrt{5}G(z) = \frac{1}{1-\alpha z} - \frac{1}{1-\beta z} = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\beta z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^n - \beta^n)\, z^n$$

Do đó, hệ số z^n trong khai triển:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Vậy dãy Fibonacci có công thức tổng quát là:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \forall n \geq 0$$

<u>Cách 2.</u>

$$G(z) = F_0 + F_1 z + \sum_{k=2}^{\infty} F_k z^k$$

$$= F_0 + F_1 z + \sum_{k=2}^{\infty}(F_{k-1} + F_{k-2}) z^k$$

$$= F_0 + F_1 z + z\sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1} z^{k-1} + z^2 \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2} z^{k-2}$$

$$= F_0 + F_1 z + z(G(z) - F_0) + z^2 G(z)$$

$$= F_0 + (F_1 - F_0)z + zG(z) + z^2 G(z)$$

$$\Leftrightarrow (1 - z - z^2)G(z) = F_0 + (F_1 - F_0)z = z$$

$$\Leftrightarrow G(z) = \frac{z}{(1 - z - z^2)}$$

Phân tích $G(z)$, ta được:

$$G(z) = \frac{z}{(1 - z - z^2)} = \frac{A}{1 - \alpha z} + \frac{B}{1 - \beta z}$$

$$Với\ A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$G(z) = \frac{A}{1 - \alpha z} + \frac{B}{1 - \beta z} = A \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z)^k + B \sum_{k=0}^{\infty} (\beta z)^k$$

Khi:

$$\begin{cases} |z| < \dfrac{1}{|\alpha|} \\ |z| < \dfrac{1}{|\beta|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| < \dfrac{2}{1 + \sqrt{5}} \\ |z| < \dfrac{2}{-1 + \sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow |z| < \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right) z^k$$

$$\Rightarrow F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right)$$

Thay $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1$

2/ Dùng hàm sinh tính dãy:

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 5 \\ a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \end{cases}, \forall n \geq 2$$

Cách 1.

Ta có $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ nên $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$

Đặt $G(x)$ là hàm sinh cho dãy (a_n), ta có:

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots$$

$$-4xG(x) = -4a_0x - 4a_1x^2 - 4a_2x^3 - \cdots - 4a_{n+1}x^{n+2} - 4a_{n+2}x^{n+3} - \cdots$$

$$3x^2G(x) = 3a_0x^2 + 3a_1x^3 + 3a_2x^4 + \cdots + 3a_{n+1}x^{n+3} + 3a_{n+2}x^{n+4} - \cdots$$

Cộng 3 vế các đẳng thức trên, ta thu được:

$$(1 - 4x + 3x^2)G(x) = a_0 + (a_1 - 4a_0)x + \cdots + (a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2})x^n + \cdots$$

$$\Leftrightarrow (1 - 4x + 3x^2)G(x) = a_0 + (a_1 - 4a_0)x = x + 1$$

$$\Leftrightarrow G(x) = \frac{x+1}{(1 - 4x + 3x^2)} = -\left(\frac{1}{1-x}\right) + 2\left(\frac{1}{1-3x}\right)$$

$$\Rightarrow G(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -1 + 2.3^n\, x^n$$

Do đó hệ số của x^n trong khai triển của $G(x)$ là:

$$-1 + 2.3^n$$

Vậy dãy công thức tổng quát là:

$$a_n = -1 + 2.3^n, \forall n \geq 0$$

Cách 2.

$$G(z) = a_0 + a_1z + \sum_{k=2}^{\infty} a_kz^k$$

$$= a_0 + a_1 z + \sum_{k=2}^{\infty} (4a_{k-1} - 3F_{k-2}) z^k$$

$$= a_0 + a_1 z + 4z \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} z^{k-1} - 3z^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} z^{k-2}$$

$$= a_0 + a_1 z + 4z(G(z) - a_0) - 3z^2 G(z)$$

$$= a_0 + (a_1 - 4a_0)z + 4zG(z) - 3z^2 G(z)$$

$$\Leftrightarrow (1 - 4z + 3z^2)G(z) = a_0 + (a_1 - 4a_0)z = z + 1$$

$$\Leftrightarrow G(z) = \frac{z+1}{(1 - 4z + 3z^2)}$$

Phân tích $G(z)$, ta được:

$$G(z) = \frac{z}{(1 - 4z + 3z^2)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-3z} = \frac{A(1-3z) + B(1-z)}{(1-z)(1-3z)}$$

$$= \frac{(-3A - B)z + (A + B)}{(1-z)(1-3z)}$$

Cân bằng hệ số, ta thu được hệ:

$$\begin{cases} -3A - B = 1 \\ A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$G(z) = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-3z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} (3z)^k$$

Khi:

$$\begin{cases} |z| < \dfrac{1}{|1|} \\ |z| < \dfrac{1}{|3|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| < 1 \\ |z| < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow |z| < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-1 + 2.3^{k}\right) z^{k}$$

$$\Rightarrow a_k = -1 + 2.3^{k}$$

Thay $a_0 = 1, a_1 = 5, F_2 = 17$