МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

по дисциплине

‘ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА’

Вариант №7

Выполнила:
Конаныхина Антонина
P3215
Преподаватель:
Малышева Татьяна
Алексеевна

Санкт-Петербург, 2022

Цель работы

Изучить численные методы интегрирования и реализовать три из них средствами программирования. Понять их сходства и различия.

Задание:

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя, исходя из варианта:
   - Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
   - Метод трапеций
   - Метод Симпсона

2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
2. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
4. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1 (столбец 3), точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 6$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений.
6. В отчете ***отразить последовательные вычисления***.

Дополнительное задание:

1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».
2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобственных интегралов 2 рода (заданными численными методами).
3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв: 1) в точке a, 2) в точке b, 3) на отрезке интегрирования

Рабочие формулы используемых методов

Метод прямоугольников

Используется непосредственная замену определенного интеграла интегральной суммой. На каждом шаге интегрирования функция аппроксимируется полиномом нулевой степени – отрезком, параллельным оси абсцисс. Площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из n- прямоугольников, далее считается их сумма.

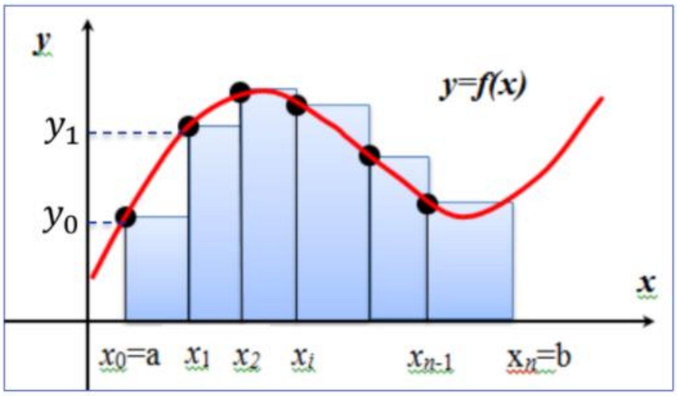
- **Метод левых прямоугольников**

  Рабочая формула метода:

$$h = \frac{b-a}{n} = const$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} f(y_{i-1})$$

Визуализация метода левых:



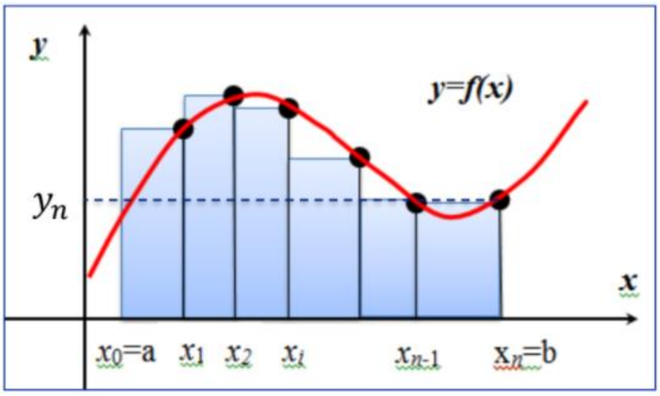
- **Метод правых прямоугольников**

  Рабочая формула метода:

$$h = \frac{b-a}{n} = const$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} f(y_i)$$

Визуализация метода правых:



- **Метод средних**

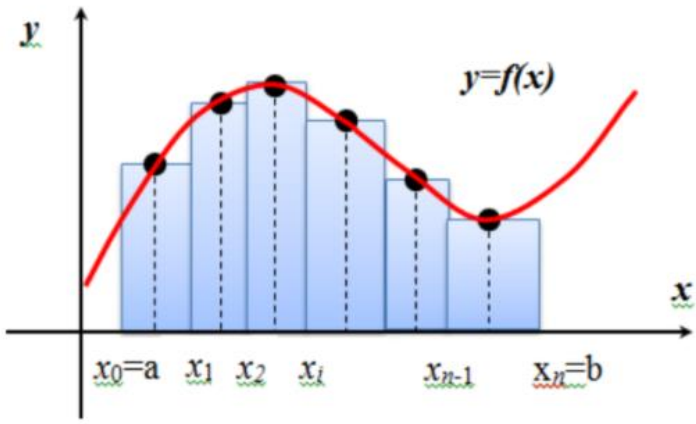
Рабочая формула метода:

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

$$h = \frac{b-a}{n} = const$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

Визуализация метода средних:



Метод трапеций

Рабочая формула метода:

$$h = \frac{b-a}{n} = const$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

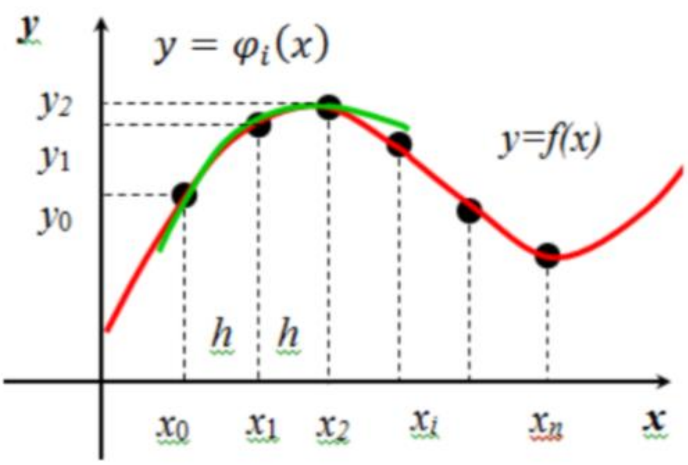
Метод Симпсона

На каждом отрезке $[x_{i-2}; x_i]$ подынтегральную функцию заменим интерполяционным многочленом второй степени (параболой).

Рабочая формула метода:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)$$

Визуализация метода:



Вычисление заданного интеграла

Прямое вычисление интеграла:

$$\int_0^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)\,dx = \left(x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - 7x\right)\Big|_0^2 = 16 - \frac{5 \cdot 8}{3} + 12 - 14 = \frac{2}{3}$$

Метод Ньютона-Котеса:

$$h = \frac{2+0}{6} = \frac{1}{3}$$

x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$f(x_i)$	-7	$\frac{-146}{27}$	$\frac{-109}{27}$	-2	$\frac{43}{27}$	$\frac{206}{27}$	17

$$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41 \cdot 2}{840} = \frac{41}{420}$$

$$c_6^1 = c_6^5 = \frac{9 \cdot 2}{35} = \frac{18}{35}$$

$$c_6^2 = c_6^4 = \frac{9 \cdot 2}{280} = \frac{9}{140}$$

$$c_6^3 = \frac{34 \cdot 2}{105} = \frac{68}{105}$$

$$I = \sum_{i=0}^{6} f(x_i) \cdot c_n^i = (-7) \cdot \frac{41}{420} - \frac{146 \cdot 18}{27 \cdot 35} - \frac{109 \cdot 9}{27 \cdot 140} - 2 \cdot \frac{68}{105} + \frac{43 \cdot 9}{27 \cdot 140} + \frac{206 \cdot 18}{27 \cdot 35} + 17 \cdot \frac{41}{420} = \frac{2}{3}$$

$$\Delta I = 0$$

Метод средних:

x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$f(x_i)$	-7	$\frac{-146}{27}$	$\frac{-109}{27}$	-2	$\frac{43}{27}$	$\frac{206}{27}$	17
$x_{i-\frac{1}{2}}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{11}{6}$
$f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$		$\frac{-661}{108}$	$\frac{-19}{4}$	$\frac{-341}{108}$	$\frac{-49}{108}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{1279}{108}$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{6} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-661}{108} - \frac{19}{4} - \frac{341}{108} - \frac{49}{108} + \frac{17}{4} + \frac{1279}{108}\right) = \frac{29}{54} \approx 0{,}53704$$

$$\Delta I = 0{,}66667 - 0{,}53704 = 0{,}12963\ (\sim 19{,}4\ \%)$$

Метод трапеций:

$$I = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-7 + 17}{2} + \frac{-146}{27} - \frac{109}{27} - 2 + \frac{43}{27} + \frac{206}{27}\right) = 0{,}9259$$

$$\Delta I = |0{,}6667 - 0{,}9259| = 0{,}2592\ (\sim 39\ \%)$$

Метод Симпсона:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n)$$
$$= \frac{1}{9} \cdot \left(-7 + 4\left(\frac{-146}{27} - 2 + \frac{206}{27}\right) + 2\left(\frac{-109}{27} + \frac{43}{27}\right) + 17\right) = \frac{2}{3}$$

$$\Delta I = 0$$

Листинг программы

```
def squad_method_mid(func, a, b):
    return func((a + b) / 2) * (b - a)
    #подсчёт площади одного интервала методом среднего


def squad_method_left(func, a, b):
    return func(a) * (b - a)
    #методом левого


def squad_method_right(func, a, b):
    return func(b) * (b - a)
    #методом правого


def trapezoid_method(func, a, b):
    return ((func(a) + func(b)) / 2) * (b - a)
    #методом трапеции


def simpson_method(func, a, b):
    return ((b - a) / 6) * (func(a) + 4 * func((a + b) / 2) + func(b))


def calc_integral(func, method_func, a, b, error, k):
    n = 4
    integral = -10
```

```python
    integral_prev = error * 2
    while abs((integral_prev - integral) / (2 ** k - 1)) > error:
        integral_prev = integral
        integral = 0
        h = (abs(a - b)) / n
        for i in range(n):
            integral += method_func(func, a + h * i, a + h * (i + 1))
        n *= 2

    return integral, n / 2, abs((integral_prev - integral) / (2 ** k - 1))


def calc_with_1st_break(func, method_func, a, b, br, err):
    if a <= br <= b:
        if a == br:
            return calc_integral(func, method_func, a + err, b, err, 4)[0]
        elif b == br:
            return calc_integral(func, method_func, a, b - err, err, 4)[0]
        else:
            return calc_integral(func, method_func, a, br - err, err, 4)[0] + \
                   calc_integral(func, method_func, br + err, b, err, 4)[0]
    else:
        return calc_integral(func, method_func, a, b, err, 4)[0]


def calc_with_2nd_break(func, method_func, a, b, br, err):
    if a <= br <= b:
        print("Интеграл не существует")
        exit()
    else:
        return calc_integral(func, method_func, a, b, err, 4)[0]
```

Результаты выполнения программы:

```
Введите 1 для функций без разрыва, 2 для функций с разрывом: 1
1: x^3 + 2.28x^2 - 1.934x - 3.907
2: x^2 - 3x - 2
3: sin(x) - cos(x) + 0.2x
Выберите функцию: 1
Введите точку a: 0
Введите точку b: 1
Введите точность: 0.01
Введите 1 для метода прямоугольника левого, 2 для метода прямоугольника правого, 3 для метода прямоугольника среднего, 4 для метода трапеций: 4
Получен ответ -3.85415625, 8.0 разбиений

Введите 1 для функций без разрыва, 2 для функций с разрывом: 2
1: 1/x
2: x^2 при x < 2, 3x при x >= 2
3: sign(x)
Выберите функцию: 2
Введите точку a: -1
Введите точку b: 4
Введите 1 для метода прямоугольника левого, 2 для метода прямоугольника правого, 3 для метода прямоугольника среднего, 4 для метода трапеций,
Ответ: 20.9999999
```

Вывод:

В результате выполнения данной лабораторной работой были изучены численные методы интегрирования и реализован метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона, методы вычисления несобственных интегралов 2 рода на языке программирования Python.