第一次作业

10

1. (1) 证明 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

证：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\varepsilon_{ijk}a_jb_k)\cdot c_i=a_j(\varepsilon_{ijk}b_kc_i)$

$=a_j\cdot(\varepsilon_{kij}b_kc_i)=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\varepsilon_{ijk}a_jb_k)c_i=(\varepsilon_{ijk}c_ia_j)b_k$

$=(\varepsilon_{kij}c_ia_j)b_k=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

(2) 证明 $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

证：$\vec{u}\times\vec{v}=\varepsilon_{ijk}u_jv_k=-\varepsilon_{ikj}v_ku_j=-\vec{v}\times\vec{u}$

2. (1) 证明 $\mathrm{div}(\phi\vec{v})=\phi\,\mathrm{div}\vec{v}+\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\phi$.

证：用指数记数法写为 $\nabla\cdot(\phi\vec{v})=\partial_i(\phi v_i)$

$=\phi\partial_iv_i+v_i\partial_i\phi=\phi\,\mathrm{div}\vec{v}+\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\phi$

(2) 证明 $\mathrm{div}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{v}\cdot\mathrm{curl}\vec{u}-\vec{u}\cdot\mathrm{curl}\vec{v}$

证：将上式记为

$\nabla\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=\cancel{\partial_i\varepsilon_{ij}\times}$

$=\partial_i(\varepsilon_{ijk}u_jv_k)$

$=v_k\varepsilon_{ijk}\partial_iu_j+u_j\varepsilon_{ijk}\partial_iv_k$

$=v_k\cdot\varepsilon_{kij}\partial_iu_j+u_j(-\varepsilon_{jik}\partial_iv_k)$

$=\vec{v}\cdot(\nabla\times\vec{u})-\vec{u}(\nabla\times\vec{v})$

$=\vec{v}\cdot\mathrm{curl}\vec{u}-\vec{u}\,\mathrm{curl}\vec{v}$

流体力学 21103008 李克诚