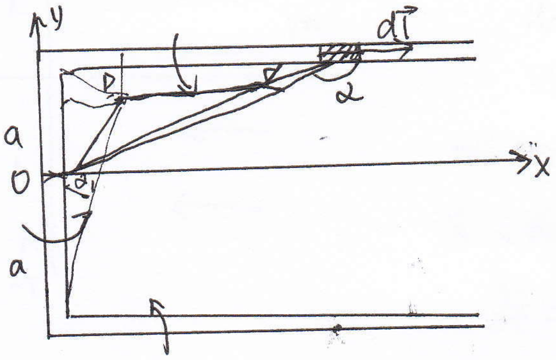
201031032　前全部给你，给您造成的不便，请您原谅！

5-16 在原静止不可压缩的无界流场中，在 $z=0$ 平面上放置一强度为 Γ 的Π形涡线，求 $z=0$ 平面上Π线型涡线所围区域的速度场。



解：由已知：

由毕奥一萨伐尔公式：

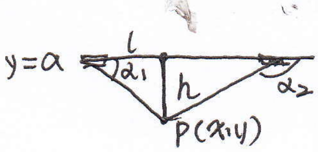
$$\vec{v}=\oint_l \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

将"⊏"形线分成"—"+"|"+"—"

① 上半部分"—"对P点产生的速度场：

$$\vec{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\oint_l\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$d\vec{l}=dl\cdot\vec{i}$，$r=\sqrt{(l-x)^2+(a-y)^2}$



则：$r^2=(l-x)^2+(a-y)^2$，$\tan(\pi-\alpha)=\frac{a}{l}$

$$-\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha=-\frac{a}{l^2}dl \Rightarrow dl=\frac{1}{a}\left(\frac{l}{\cos\alpha}\right)^2\cdot d\alpha=\frac{a\,d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\vec{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{a}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a}{\tan\alpha}+x\right)^2+(a-y)^2}\cdot(-\sin\alpha)\,e_z\cdot d\alpha$$

$$=\frac{\Gamma}{2\pi(y-a)}\vec{e_z}$$

$l^2+h^2=r^2$，$r=l/\cos\alpha$

$\frac{h}{l}=\tan\alpha$.

$-\frac{h}{l^2}dl=\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$

$\Rightarrow dl=-\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{h}{\tan\alpha}\right)^2d\alpha$

$=-\frac{h}{\sin^2\alpha}d\alpha$

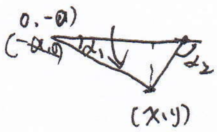
或：$\vec{v}=\oint\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$　$\alpha_2\to\pi$，$\alpha_1\to\frac{\pi}{2}$

$$=\oint\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\cdot\sin\alpha\,(-e_z)$$

$$=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\frac{\sin\alpha}{h}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin\alpha\,d\alpha$$

$$=\frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)e_z$$

$$=\frac{\Gamma}{4\pi(a-y)}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}+1\right)\vec{e_z}.$$



② 由"|"对P点产生的速度场：

$$\vec{v}=\frac{\Gamma}{4\pi(0-x)}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)e_z$$

$$=+\frac{\Gamma}{4\pi x}\left(\frac{y+a}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}+\frac{a-y}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}\right)\vec{e_z}.$$

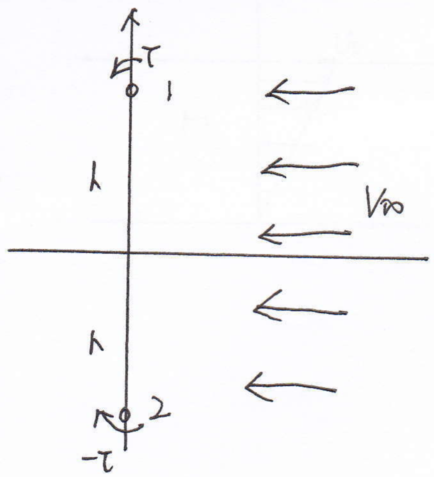
③ 由"—"对P点产生的速度场：

$$\vec{v}=-\frac{\Gamma}{4\pi(y+a)}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)\vec{e_z}\quad\alpha_1\to0,$$

$$=+\frac{\Gamma}{4\pi(y+a)}\left(1+\frac{x}{\sqrt{(x)^2+(y+a)^2}}\right)\vec{e_z}$$

∴由Π型涡线所围区域产生的速度场为：$\vec{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\left[\frac{2a}{a^2-y^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{y+a}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}+\frac{a-y}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}\right)\right]$

5-17 不可压无界流场有一对强度为 Γ 的直线涡，方向相反，分别放在 $(0,h)$ 与 $(0,-h)$ 上，无穷远处有一均流 V_∞，使这两个涡线停留不动。求 V_∞ 及其相应的流线方程。



解：由已知，

涡1对涡2产生的速度为：

$$u_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y_2-y_1}{R_{12}^2} = -\frac{\Gamma}{4\pi h}$$

$$v_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x_2-x_1}{R_{21}^2} = 0$$

同理：

$$u_1 = +\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y_1-y_2}{R_{12}^2} = -\frac{\Gamma}{4\pi h}$$

$$v_1 = 0$$

则：均匀来流：$V_\infty = \frac{\Gamma}{4\pi h}$.

涡1及涡2在空间产生的速度场为：

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{y-h}{R_1^2} + \frac{-(y+h)}{R_2^2}\right) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2} + \frac{-(y+h)}{x^2+(y+h)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{x}{x^2+(y-h)^2} + \frac{-x}{x^2+(y+h)^2}\right]$$

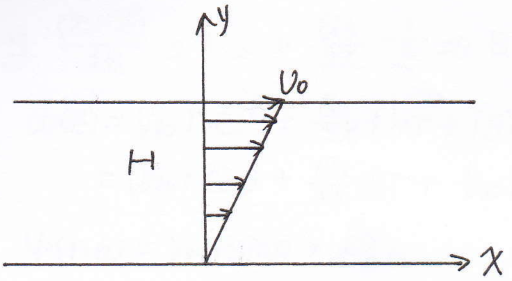
当有均匀来流时：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-\Gamma}{4\pi h} - \dfrac{\Gamma}{2\pi}\left[\dfrac{y-h}{x^2+(y-h)^2} + \dfrac{-(y+h)}{x^2+(y+h)^2}\right] \quad (\text{注意正负号}). \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\left[\dfrac{x}{x^2+(y-h)^2} + \dfrac{-(x)}{x^2+(y+h)^2}\right]\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{h} + \ln\frac{(x^2+(y-h)^2)}{(x^2+(y+h)^2)} = C \quad (C\text{为常数}).$$

$\therefore V_\infty = \frac{\Gamma}{4\pi h}$，且相应的流线方程为 $\frac{y}{h} + \ln\frac{x^2+(y-h)^2}{x^2+(y+h)^2} = C$.

对于两平板之间简单剪切流，如两板相距H，下板固定上板以U_0在自身平面匀速直线运动，试确定流函数方程，求流函数ψ以及两平板间体积流量Q_V.



解：由已知：

在$y=0$，$v=0$，$u=0$

在$y=H$，$v=0$，$u=U_0$

又：

$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$，流函数方程：$\nabla^2\psi=\frac{U_0}{H}$.

设$\psi=\frac{U_0}{2H}\cdot y^2$ 则：$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=H}=u\big|_{y=H}=U_0$，$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$.

则：

$$Q_V=\int_0^H y\frac{U_0}{H}dy=U_0\cdot\frac{y^2}{2H}\Big|_0^H=\frac{U_0H}{2}$$

答：流函数$\psi=\frac{U_0}{2}\frac{1}{H}y^2$，两板间体积流量$Q_V=\frac{U_0H}{2}$.

6-11. 已知速度势φ，求相应流函数ψ.

(1) $\varphi=xy$；

解：由已知：

$\varphi=xy$:

$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=y=\frac{\partial\psi}{\partial y}\Rightarrow\psi=\frac{y^2}{2}+f_1(x)$

$v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\Rightarrow\psi=-\frac{x^2}{2}+f_2(y)$.

$\therefore\psi=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}$

(2) $\varphi=x^3-3xy^2$.

解：由已知：

$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=3x^2-3y^2=\frac{\partial\psi}{\partial y}\Rightarrow\psi=3x^2y-y^3+f_1(x)$

$v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-6xy=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\Rightarrow\psi=3x^2y+f_2(y)$

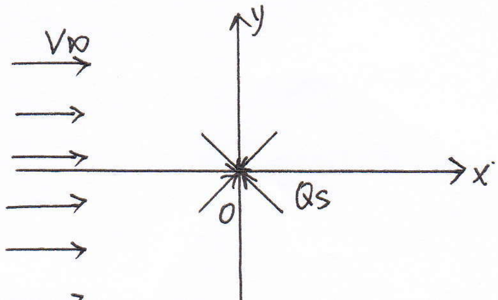
$\therefore\psi=3x^2y-y^3$.

6-20 如图所示，在速度为V_∞的均匀来流流场中，若在原点放置一强度为Q_s的汇，求

(1) 驻点位置；

(2) 过驻点流线；

(3) 沿着过驻点流线的速度与压强分布.



解：(1) 由已知：

① 由速度为V_∞的均匀来流产生的复势：

$$W(z)=V_\infty\cdot z.$$

② 由点汇为Q_s的流场产生的复势为：

$$W(z)=\frac{Q_s}{\ }\ln z.$$

则：由二者叠加产生的总复势为：

$$w(z)=V_\infty z+\frac{Q_s}{2\pi}\ln z.$$

当 $\frac{dw(z)}{dz}=V_\infty+\frac{Q_s}{2\pi}\cdot\frac{1}{z}=0$ 时，$z=-\frac{Q_s}{2\pi V_\infty}$

$$w(z)=V_\infty r\cdot e^{i\theta}+\frac{Q_s}{2\pi}(\ln r+i\theta)$$

$$=(V_\infty r\sin\theta+\frac{Q_s}{2\pi}\theta)i+V_\infty r\cos\theta+\frac{Q_s}{2\pi}\ln r.$$

$$\psi(r,\theta)=V_\infty r\sin\theta+\frac{Q_s}{2\pi}\theta$$

$$\varphi(r,\theta)=V_\infty r\cos\theta+\frac{Q_s}{2\pi}\ln r.$$

$$v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{1}{r}(V_\infty r\cdot\cos\theta+\frac{Q_s}{2\pi})=V_\infty\cos\theta+\frac{Q_s}{2\pi r}$$

$$v_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}=-V_\infty\sin\theta.$$

当 $r=-\frac{Q_s}{2\pi V_\infty}$，$\theta=0$ 时，

$$\varphi(r,\theta)=V_\infty r\sin\theta+\frac{Q_s}{2\pi}\theta=0\Rightarrow r=-\frac{Q_s}{2\pi V_\infty}\frac{\theta}{\sin\theta}.$$

$$v_r=V_\infty\cos\theta-V_\infty\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

$$v_\theta=-V_\infty\cdot\sin\theta.$$

由伯努利方程：

$+\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$

$$p=p_\infty+(-\frac{1}{2}\rho v^2)=p_\infty+\frac{-\rho}{2}[V_\infty^2+V_\infty^2\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}-2V_\infty^2\frac{\sin 2\theta}{2\theta}]+\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$$

$$\therefore\ p=p_\infty+\frac{\rho V_\infty^2}{2}[\frac{\sin 2\theta}{\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}]$$

答：(1) 驻点位置为 $z=-\frac{Q_s}{2\pi V_\infty}$

(2) 过驻点流线为 $V_\infty r\cdot\sin\theta+\frac{Q_s}{2\pi}\theta=0$

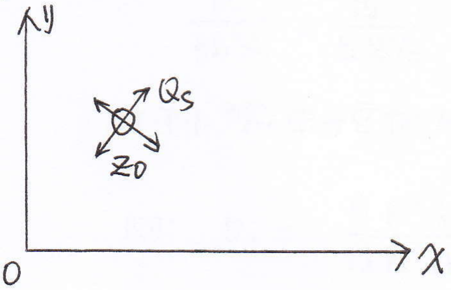
(3) 沿着过驻点流线的速度与压强分布为：

$$v_r=V_\infty\cos\theta-V_\infty\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$v_\theta=-V_\infty\sin\theta.$$

$$p=p_\infty+\frac{\rho V_\infty^2}{2}[\frac{\sin 2\theta}{\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}].$$

6-27. 在直角区域内的 z_0 处放置一个强度为 Q_s 的源，求流场复势与复速度.



解：由已知：

一个强度为 Q_s 的源在空间产生的复势为：

$$w(z)=\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z-z_0)$$

将 $y=0$ 处放入一个边界，则相应的 Q_s 在空间产生的复势为：

$$w(z)=\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z-z_0)+\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z-\bar{z}_0)$$

将 $x=0$ 放入一个边界，则相应的 Q_s 在空间产生的复势为：

$$w(z)=\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z-z_0)+\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z-\bar{z}_0)$$

$$+\frac{Q_s}{2\pi}\ln(-z-\bar{z}_0)+\frac{Q_s}{2\pi}\ln(-z-\bar{\bar{z}}_0)$$

$$=\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z-z_0)+\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z-\bar{z}_0)+\frac{Q_s}{2\pi}\ln(-z-\bar{z}_0)+\frac{Q_s}{2\pi}\ln(-z$$

$$=\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z_0^2-z^2)(\bar{z}_0^2-z^2)=\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z_0^2-z^2)(\bar{z}_0^2-z^2$$

则: $\frac{dw}{dz} = \frac{Q_s}{2\pi}\cdot\frac{1}{(z^2-z_0^2)(z^2-\bar{z}_0^2)}\cdot\left[2z(z^2-\bar{z}_0^2)+2z(z^2-z_0^2)\right]$

$$= \frac{Q_s}{2\pi}\cdot\frac{4z^3-2z(\bar{z}_0^2+z_0^2)}{(z^2-z_0^2)(z^2-\bar{z}_0^2)}$$

$$= \frac{Q_s}{\pi}\cdot\frac{z^3-z(\bar{z}_0^2+z_0^2)}{(z^2-z_0^2)(z^2-\bar{z}_0)}$$

答: 该流场的复势:

$$w(z)=\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z_0^2-z^2)(\bar{z}_0^2-z^2).$$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{Q_s}{\pi}\cdot\frac{z^3-z(\bar{z}_0^2+z^2)}{(z^2-z_0^2)(z^2-\bar{z}_0^2)}.$$

8.10 气球在空气(20°C)中匀速上升，其直径为1m，上升速度为3cm/s；塑料小球在水(20°C)中匀速下沉，其直径为2cm，问塑料小球下沉速度为何值时，气球与塑料小球的运动是动力相似的？若塑料小球的比重为1.5时，它在水中恰好以上述动力相似所要求的速度下沉，求气球所受的空气阻力？20°C下空气的$\nu=1.525\times10^{-5}m^2/s$，水的$\nu=1.006\times10^{-6}m^2/s$；空气密度为$1.23kg/m^3$，水的密度为$999kg/m^3$。

解: 由已知，

该问题应是定常问题，且无初始条件，且不考虑自由面，则只需考虑Re的影响即可。

对于气球: $A_1=\pi(\frac{D}{2})^2=\frac{\pi}{4}$，$v_1=3cm/s$，$d_1=1m$.

$\rho_1=1.23kg/m^3$，$\nu_1=1.525\times10^{-5}m^2/s$

对于小球: $\rho_2=999kg/m^3$，$\nu_2=1.006\times10^{-6}m^2/s$，$d_2=2cm$.

当 $Re_1=Re_2$ 时:

$$\frac{d_1v_1}{\nu_1}=\frac{d_2v_2}{\nu_2}，则: \frac{v_2}{v_1}=\frac{d_1}{\nu_1}\cdot\frac{\nu_2}{d_2}=\frac{1.006\times10^{-6}}{1.525\times10^{-5}}\cdot\frac{1}{2\times10^{-2}}\Rightarrow v_2=9.895cm/s.$$

当塑料小球与小球二者动力相似时:

$C_D=\frac{D}{\rho v^2 A}$ — 阻力系数应只与雷诺数有关，则:

$$\frac{D_1}{\rho_1v_1^2A_1}=\frac{D_2}{\rho_2v_2^2A_2}\Rightarrow D_1=\frac{\rho_1v_1^2A_1}{\rho_2v_2^2A_2}\cdot D_2.$$

对于小球，由于它做匀速运动，则: $D_2=mg=\rho_{球}\cdot\frac{4}{3}\pi d_2^3\frac{1}{4}\cdot g$.

$$则: D_1=\frac{\rho_1v_1^2A_1}{\rho_2v_2^2A_2}\cdot\rho_{球}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^3\cdot g$$

$$=\frac{1.23}{999}\cdot\left(\frac{1}{3.298}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2\times10^{-2}}\right)^2\cdot1000\times1.5\times\frac{4}{3}\times3.14\times(1\times10^{-2})^3\times9.8$$

$$\approx0.017N.$$

答: 当塑料小球以9.895cm/s的速度下沉时，气球与塑料球是动力相似的，且气球所受空气阻力为0.017N。