

白话流体力学

Chapter 1

课程介绍

我们在以前的课程中接触到了很多理论，每个理论都涉及到繁复的方程。记住这些公式的书写方法不是学习目的，理论联系实际，了解基本物理规律，掌握解决实际问题的方法才是我们学习的主要目的。

以前学习过的内容主要有这样几部分，它们的繁琐程度是由简渐难

- 通过分析控体的质量、动量变化简单估算一些实际问题中的压强、受力等情况，这种方法不能掌握流场的速度分布等详细信息；
- 如果运动形式只有平动和变形而没有旋转，我们可以通过求解速度势和流函数来掌握整个流场的速度和压强分布，就是所谓的势流理论；
- 如果存在旋转，但是流体的粘性力很小(相对于惯性力)，我们可以使用欧拉方程(即NS方程忽略粘性项)来求解问题；
- 对于有旋，有粘，不可压的流场，使用NS方程来求解。

从现在开始，我们主要研究一些实际问题。下面的内容和能动、土木水利等学院开设的流体力学课很相似。在真实的世界里，我们不直接假设无粘，无旋等限制条件，而是通过分析控制方程(NS方程)中各项的大小和重要性，进行取舍。形成简单的、可以得到解析解的方程。我们面对的实际问题可以分成两大类，通俗的说法即内流和外流。内流指的是管道、明渠等液体输运装置中的流场，为了使流量达到生产生活的要求，我们需要选用功率合适的水泵。外流是车船飞行器外边界周围的流场，它决定了物体在流体中运动所受到的阻力，运动轨迹。为了使车辆达到理想的速度，也需要选用合理的发动机。掌握内流和外流的规律能使我们用最小的代价完成任务。课件的名字是白话流体力学，既然是白话，文中会使用很多非专业的生活用语代替科学词汇，作者会尽量使用引号将这些词汇圈起。

内流和外流本质上没有区别，不可压流场的速度 \vec{V} 和压强 P 在任意时刻都遵循纳维斯托克斯方程(Navier-Stokes,简称NS)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x} + g_x + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\rho \partial y} + g_y + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\rho \partial z} + g_z + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

这里，所有速度均为瞬时速度。我们在第一章首先解决内流问题，下一章再来考虑外流问题。

Chapter 2

内流

2.0.1 求解简单平板流和管流

二维充分发展的平行平板间层流

我们首先要解决的内流是最简单的平板流(两无限大平板间流场), 然后再来研究在实际生活中广泛使用的圆管流。我们的目标是建立流体能量损失和管径、流速、流体粘性、密度、管材等因素的关系。对于一个图1.1所示的定常二维充分发展的流场。‘定常’意味这流速不随时间变化($\partial/\partial t = 0$)。‘二维’意味着速度在z方向没有分量($w = 0$), 任何物理量在z方向也没有梯度 ($\partial/\partial z = 0$)。所谓‘充分发展’意味着在x方向上速度不再发生任何变化, 流场的发展已经稳定, 所以 速度在x方向的导数都为零($\partial/\partial x = 0$)。 g_x 和 g_z 也都为零。这样, 描述定常二维充分发展的平板流的NS方程可以写成

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\rho \partial y} + g_y + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{cases} \quad (2.1)$$

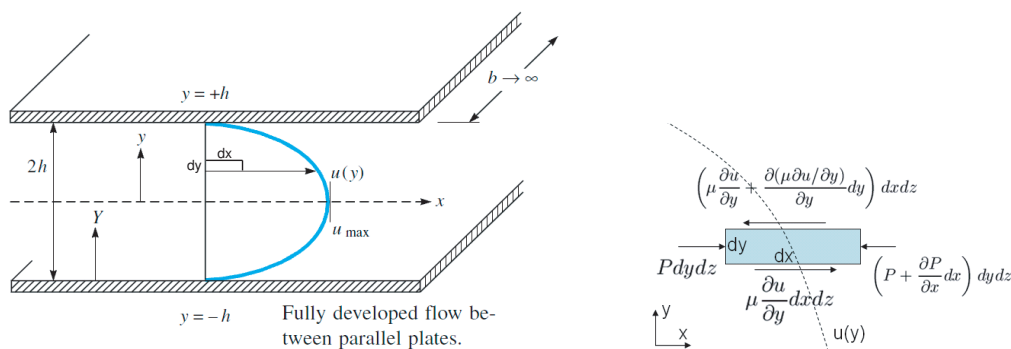


Figure 2.1: 充分发展的平板流Fully developed channel flow.

利用边界条件

$$v = 0, y = h$$

来求解 $\partial v / \partial y = 0$ ，可得流场内竖直速度都为零 ($v = 0$)。这样NS方程进一步简化成

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\rho \partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial P}{\rho \partial y} = g_y \end{cases} \quad (2.2)$$

这个结果也可以利用一个简单的受力平衡求得。压强梯度在一个微元体两侧面上造成的水平力和上下表面上的粘性力合力相平衡。竖直方向上的压强变化即静水压强，如果流体为空气，竖直方向上压强变化可以忽略。这个简化了的方程可以利用边界条件

$$\begin{cases} u = 0, y = h \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, y = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

求得二维定常充分发展的平板流速度分布为

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) (h^2 - y^2) \quad (2.4)$$

在一定压强梯度条件下，速度分布为一抛物线。抛物线形由管流的动力源 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 决

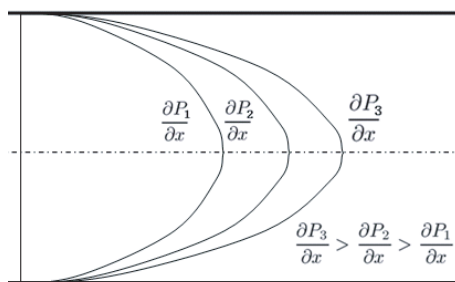


Figure 2.2: 平板流中速度分布曲线和压强梯度关系

定。流场中最大速度在中线位置 $y = 0$

$$u_{max} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} h^2. \quad (2.5)$$

若平板宽度为 b ，流量则为

$$Q = \int_{-h}^h u(y) b dy = \int_{-h}^h \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) (h^2 - y^2) b dy = -\frac{2bh^3}{3\mu} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (2.6)$$

平均速度为 $V = Q/2bh$

$$V = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2}{3} u_{max}. \quad (2.7)$$

壁面切应力 (τ_w) 是流体对单位面积壁面的作用力，它是由流体的粘性和流体靠近壁面地区速度变化快慢决定的，

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=h} = h \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (2.8)$$

壁面切应力乘以壁面的面积就是壁面施加给流体的阻力。

通过上面的推导结果我们可以发现，最大速度，平均速度，流量，壁面切应力，阻力都和流场的“动力” $\frac{\partial P}{\partial x}$ 成线性关系，如图1.2。 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 越大，也就是说流体受到的‘挤力’越大，那么最大速度 u_{max} 和流量 Q 也就越大。同时，靠近壁面的速度斜率 $\frac{du}{dy}$ 也越大，这样壁面对流体施加了更大的阻力来平衡增大的‘挤力’。

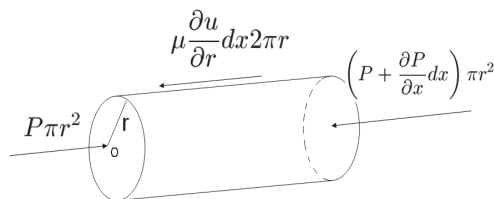


Figure 2.3: 圆管流中力的平衡

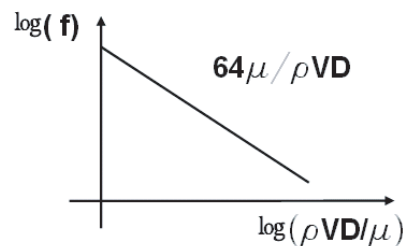


Figure 2.4: 管流雷诺数Re和摩阻系数f的关系

换个角度来看，流场流量越大，在一定距离以内的压强损失也就最大。我们知道，在水平放置的平行平板内发展的流体微团，动能和势能都不会发生变化，压强变化即是能量的变化。所以我们可以说流量越大，能量损失越大。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu}{h} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} \quad (2.9)$$

可见，对于高度2h的平板流，如果液体粘度越大，能量损失越大。如果壁面附近速度梯度越大，能量损失也大。

充分发展的圆管层流

利用同样的方法，很容易可以得到水平放置圆管流的速度分布，见图1.3所示圆柱流向压力差和摩擦阻力平衡求得定常充分发展的圆管流(半径R)速度分布为

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx \pi r^2 + \mu \frac{\partial u}{\partial r} dx 2\pi r = 0 \quad (2.10)$$

$$u = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) (R^2 - r^2) = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (2.11)$$

在一定压强梯度条件下，速度分布为一抛物线。这个流场被称作泊肃叶(Poiseuille)流场。其中，流场中最大速度

$$u_{max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} R^2. \quad (2.12)$$

壁面切应力

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{2\mu u_{max}}{R} = \frac{R}{2} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (2.13)$$

流量则为

$$Q = \int_0^R u 2\pi r dr = \frac{1}{2} u_{max} \pi R^2 = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (2.14)$$

平均速度为 $V = Q/\pi R^2 = u_{max}/2$ 。若长度L的管道压强损失为 ΔP ，在单位长度上的压强损失为

$$\frac{\Delta P}{L} = -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{8\mu Q}{\pi R^4} \quad (2.15)$$

以上压强梯度 $\frac{\Delta P}{L}$ 单位为 Pa/m 。我们知道流体以速度V流动,它的‘动压’为 $\rho V^2/2 [Pa]$ 。我们可以问在L/D个直径长度的距离内，压强损失是动压多少倍？答案是一个没有量纲的量，它完全是百分数，这个量f(有教材使用 λ)被称为摩阻系数(friction factor),或称为Darcy friction factor.

$$f = \frac{2\Delta P/\rho V^2}{L/D} = \frac{16\mu Q D}{\pi R^4 \rho V^2} = \frac{64\mu}{\rho V D} \quad (2.16)$$

以上关系存在的先决条件是管内只有压强和粘性两个力，且能达到平衡。它适用于任何材质的管线(玻璃管、铝管、铸铁管等等)和所有的牛顿流体(空气、水、汽油等等)。因为管线的压强损失 ΔP 受到一系列参数影响，包括长度、直径、密度、粘性等，所以一个管线往往有自己独特的 $\Delta P \sim V$ 曲线，但 $f \sim \mu/\rho V D$ 曲线(图1.4)却是所有管线都遵从的。这里 $\mu/\rho V D$ 代表了粘性力和流体惯性的比，显示了哪个量更加重要

$$\frac{\mu}{\rho V D} = \frac{\mu \frac{V}{D} D^2}{\rho V D^2 V}, \quad (2.17)$$

分子 $\mu \frac{V}{D} D^2$ 表示管流一个截面上受到的粘性力的量级，分母 $\rho V D^2 V$ 代表通过截面流体的动量(也被称为流体的惯性力),这个比值的倒数有个德国名字：雷诺数(Reynolds number, 简称为Re)。Re直接决定了f，其实质是粘性力和惯性的关

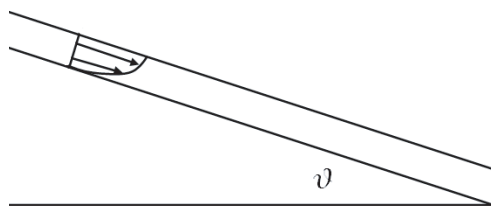


Figure 2.5: 作业：一薄层液体沿斜坡下流

系 决定了一个直径 D 距离内压强损失(ΔP)和流体动压($\rho V^2/2$)的关系。图1.9这样一条简单的曲线描述了一个复杂的问题,能用简洁清晰的公式和曲线描述复杂问题是所有科学家追求的目标, 成功的科学家常常描述科学的简单、自然、美, 他们指的也许就是类似 $f = 64/Re$ 这样的东西吧。

作业：一液体薄层沿斜坡下流, 速度充分发展, 厚度 h , 角度 θ , 见图1.5. 仿效平板流的解法找到速度分布曲线, 找到流量, 切应力。提示：液体表层切应力为零。

2.0.2 求解复杂平板流

湍流

我们前面提到‘定常’意味这流速不随时间变化($\partial/\partial t = 0$), 这种流场被形象的称为层流(laminar flow), 即流体分层流动。不同层的流体速度不同, 不同层流体之间通过分子运动的碰撞进行动量交换, 压力差和粘性力相平衡。在层流中, 粘性力有效地限制了流体微团的运动, 也可以说, 微团自身具有的惯性(或动量)不足以反抗粘性力的束缚, 所以规规矩矩的在所在的层内运动。然而, 实际生产生活中的大多数流场都不满足这个狭隘的‘定常’条件。在德国科学家雷诺的实验中发现, 当流体的运动速度足够大以后, 即便是在管壁非常光滑的管流中, 流场也很难保持图1.6(a)所示的稳定状态, 任何轻微的扰动都使流场进入一个紊乱的状态。在这样紊乱的流场里, 流体微团在随流向下运动以外, 还在做着貌似无序的运动, 同一个

微团的瞬态速度随时都在改变(见图2.3)。这种流场被称为紊流或者湍流(turbulent flow)。湍流中的流体微团具有的惯性相对粘性力要大得多,它们可以轻易的摆脱粘性力的束缚,更加自由的在流场中运动。这种流场的动量传递不仅有分子碰撞,更重要的还有微团‘无序’运动引起的动量传递。所以在湍流中压强梯度引起的力和粘性力以及新的湍流力相平衡。因为存在更有效的动量传递方式,流体能更有效的混合,湍流场中的低速区的面积要明显小于层流(见图2.3)。也因如此,在流量相同的条件下,湍流在靠近壁面的速度梯度($\partial u / \partial y$)也大于层流,说明当流场从层流转化成湍流以后,壁面切应力也相应增大了。

生活中也可以看到因为无序运动而引发阻力增加的情况。比如我们周围的交通,如果每个司机都遵守交通规则、形成文明的驾车习惯,每辆车的行驶速度都可以得到提高,大多数的交通阻塞都可以避免。但是在现实生活中,交通法规好似微弱的粘性力,根本无法束缚街上大量的自以为是的司机,他(她)们错误地认为在公路上自由的窜行见缝插针的行驶可以缩短自己的旅行时间,其结果是降低了整体交通的行进速度。

我们在这里研究的对象是定常的、二维的、充分发展的、平行平板间发展的湍流。所谓定常湍流,是指平均速度不随时间变化,即任意两段时间内平均速度都相等。二维湍流是指平均速度在 z 方向没有分量($\overline{w(t)} = 0$),任何物理量的时间平均在 z 方向也没有梯度。而充分发展湍流是指平均速度在 x 方向没有梯度。为了研究湍流场能量的消耗,首要解决对象就是流场平均速度分布 $U(y)$ 。有了 $U(y)$,切应力和压强损失等就可以迎刃而解。

雷诺分解

为了求得流场时间平均速度分布 $U(y)$,我们首先要得到关于平均速度的方程。我们可以把速度分成两个部分,既平均值和脉动值,如图1.8所示。比如,水平瞬时

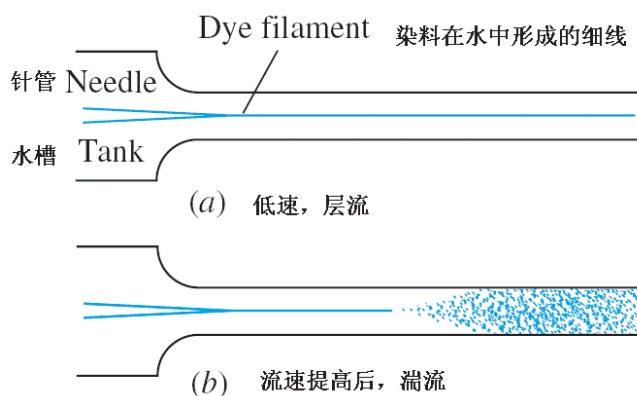


Figure 2.6: 德国科学家O. Reynolds在20世纪初对流体运动稳定性的观察结果。

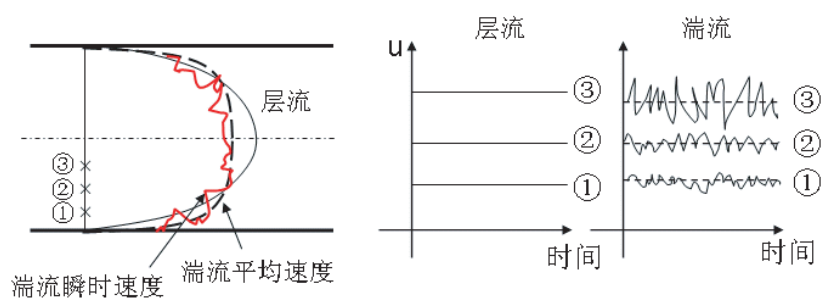


Figure 2.7: 圆管流的层流和湍流平均速度分布曲线(流量相同), 以及三个点上的速度随时间变化。层流速度不随时间变化, 而湍流变化剧烈。

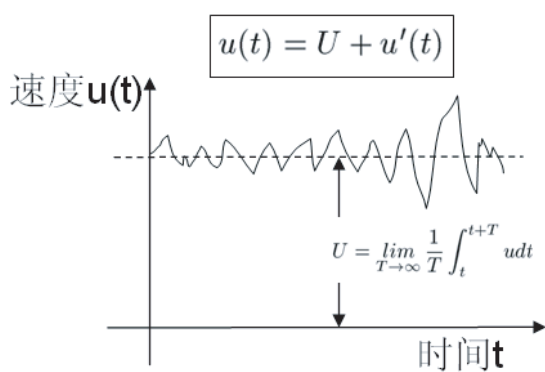


Figure 2.8: 湍流速度可以分解为平均速度和脉动速度之和。

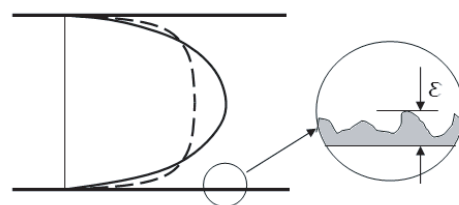


Figure 2.9: 管流的粗糙度。

速度可以分解为

$$u(t) = U + u'(t) \quad (2.18)$$

这里U为平均速度

$$U = \overline{u(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u dt \quad (2.19)$$

对于定常湍流，U不随时间变化 $\partial U / \partial t = 0$ ，充分发展的湍流 $\partial U / \partial x = 0$ ，二维湍流 $\partial U / \partial z = 0$ ， $W = 0$ 。而脉动速度 $u'(t)$ 是时间的函数，其时均值为零 $\overline{u'(t)} = 0$ 。脉动速度的方差和其他统计特性在x,z方向的梯度也为零 $\overline{\partial u'^2(t)} / \partial x = 0$ ， $\overline{\partial u'^2(t)} / \partial z = 0$ 。根据这些条件，我们来分析简化NS方程，以便求得U(y)。

连续性方程

连续性方程可以分解为

$$\nabla \cdot (\vec{V} + \vec{v}') = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial(U + u')}{\partial x} + \frac{\partial(V + v')}{\partial y} + \frac{\partial(W + w')}{\partial z} = 0 \quad (2.21)$$

对方程每一项求时均

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial(U + u')}{\partial x} + \frac{\partial(V + v')}{\partial y} + \frac{\partial(W + w')}{\partial z}} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial w'}{\partial z}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} \right) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

可见不仅瞬时速度满足连续性，平均速度自身也满足连续性方程。公式(2.21)减去公式(2.22)得到

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \quad (2.23)$$

可见脉动速度也满足连续性方程。

动量方程

动量方程分解

$$\frac{\partial(\vec{V} + \vec{v}')}{\partial t} + [(\vec{V} + \vec{v}') \cdot \nabla](\vec{V} + \vec{v}') = -\frac{\nabla(P + p')}{\rho} + \vec{g} + \nu \nabla^2(\vec{V} + \vec{v}') \quad (2.24)$$

水平方向上的动量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U + u')}{\partial t} + (U + u')\frac{\partial(U + u')}{\partial x} + (V + v')\frac{\partial(U + u')}{\partial y} + (W + w')\frac{\partial(U + u')}{\partial z} = \\ -\frac{\partial(P + p')}{\rho \partial x} + g_x + \nu \left(\frac{\partial^2(U + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(U + u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(U + u')}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

同样对方程的每一项求时均

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{U \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial U}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{V \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{v' \frac{\partial U}{\partial y}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} \\ + W \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{W \frac{\partial u'}{\partial z}} + \overline{w' \frac{\partial U}{\partial z}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$-\frac{\partial P}{\rho \partial x} - \frac{\partial \overline{p'}}{\rho \partial x} + g_x + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'}}{\partial z^2} \quad (2.27)$$

这个公式有很多项，貌似复杂，其实很多涉及到脉动速度的项都为零。比如 $\overline{U \frac{\partial u'}{\partial x}}$ ，这里U为常数，求和与求导都是线性过程，操作顺序可以互换，所以变成 $\overline{U \frac{\partial u'}{\partial x}} = U \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} = 0$ 。但是要注意的是 $\overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y}}$ 这类项不为零，它可以化成 $0.5 \overline{\partial v'^2 / \partial y}$ 。回忆概率统计课上学到的知识，当随机信号 $v'(t)$ 的平均值为零的时候，它的方差 $\overline{v'^2}$ 没有必要为零，其y方向梯度也不为零。去掉0项，上述方程变成

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x} + g_x + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.28)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x} + g_x + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.29)$$

公式左侧的三个脉动项可以化为，

$$\begin{aligned} \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} &= \overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} - \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}} - \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial u'w'}{\partial z}} - \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} \\ &= \overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial u'w'}{\partial z}} - \overline{u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)} = \overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial u'w'}{\partial z}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

所以，水平方向的平均速度U的方程变成

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \left(\overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial u'w'}{\partial z}} \right) - \frac{\partial P}{\rho \partial x} + g_x + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.31)$$

对于水平放置的平行平板间发展的、定常、二维、充分发展湍流，因为 $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$,

$V=0, W=0, \overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} = 0, \overline{\frac{\partial u'w'}{\partial z}} = 0, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, g_x = 0$ ，所以方程可简化为

$$0 = - \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}} - \frac{\partial P}{\rho \partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (2.32)$$

可见，湍流有三个应力项存在，比层流的平衡公式(公式1.2)多了一项，压强梯度产生的力在湍流中和粘性力以及‘湍流力’相平衡，

雷诺应力 $\rho \overline{u'v'}$

$$\frac{\partial P}{\rho \partial x} = - \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \quad (2.33)$$

这里 $\overline{\partial u'v'}/\partial y$ 代表了湍流引起应力的大小， $\overline{u'v'}$ 是水平脉动速度 $u'(t)$ 和 $v'(t)$ 两组信号的协方差，又被称作相关性(回忆概率统计)。如果流体微团规规矩矩在自己的阶层内行动，不存在脉动速度，脉动的相关性为零，流场中不存在‘湍流力’。如果微团四处窜动的越剧烈， $u'(t)$ 和 $v'(t)$ 之间的关联就越强。‘湍流力’随着关联性的梯度产生变化。

从公式(1.33)我们看到，要想通过解方程的办法求得 $U(y)$ ，必须先知道雷诺应力 $\rho \overline{u'v'}$ 和 U 的关系。这是一个困扰流体力学界上百年的一个难题，目前没有，未来

也很可能不会出现定论。进30年来出现了一些进展, 目前普遍公认在不受壁面影响的地区 $\overline{u'v'}$ 和平均速度梯度 $\frac{\partial U}{\partial y}$ 有紧密关系(如图1.10所示), 这个不难理解, 因为自然界中的很多紊乱现象总是和不均联系在一起的, ‘不患寡而患不均’, 社会不和谐会导致混乱, 使财富重新分配; 流速不均匀, 会产生‘湍流力’, 加速动量交换。不均混乱的驱动力, 混乱的运动减小了不均。为了能够通过数值模拟的方法解决湍流问题, 很多学者提出了联系雷诺应力和平均速度梯度的方程, 这样的方程被称作‘湍流模型’, 知名的模型包括 $k-\epsilon$ 模型, 雷诺应力模型等等。商用软件FLUENT等都吸纳了这些模型, 用户可以在数值模拟过程中选用。目前世界上由很多科技工作者(包括作者在内), 都在通过各种手段研究某个特定流场中湍流统计特性($\overline{u'v'}$ 等)和一些因素(包括速度梯度等等)的关系。大家在一点点的打造一个巨人, 并期待着某一天一盆水或者一阵风能够浇到或者吹到下一个牛顿, 他能站在巨人肩上, 写出一个关于 $\overline{u'v'}$ 简单却准确的方程, though this day may never come。

图1.10显示的是在湍流场中靠近壁面地区速度和切应力的分布。速度随着距壁面的距离逐渐加大。流场中的切应力主要由两部分组成, 在靠近壁面的区域, 因为速度梯度很大所以粘性应力 $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ 较大, 而因为受到壁面的限制, 脉动速度 $u'(t)$ 和 $v'(t)$ 都比较小, 所以雷诺应力(即‘湍流力’)相对粘性力较小。这个区域被称作粘性底层。随着 y 的增大, 粘性应力和雷诺应力的总和减小, 但粘性应力的下降速度非常快, 而雷诺应力先增后降。在粘性底层以外, 雷诺应力要远大于粘性应力, 因为无序运动所产生的混合流体的能力远大于分子运动的混合能力。

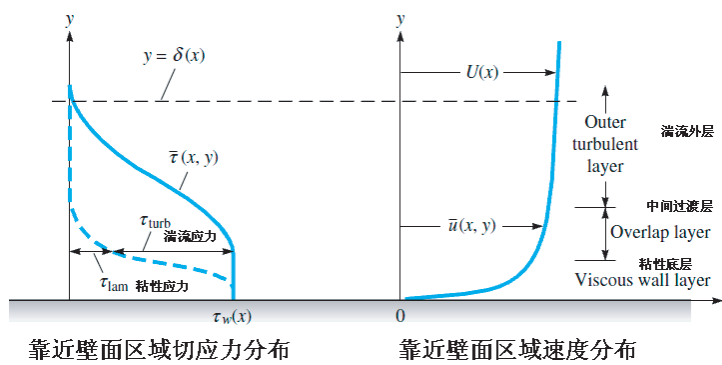


Figure 2.10: 湍流中靠近壁面区域的应力和水平方向平均速度分布图.

2.0.3 实验方法和相似律

因为雷诺应力的存在，我们无法依靠一个简单的公式来精确计算湍流的压强损失，只能依靠实践经验来指导工程设计。学者们在实验室内完成一系列实验，将实测数据制成图表，工程技术人员在处理实际问题的时候，可以根据这些图表取得所需数据。本节将详细讨论制作这类图表所需要注意一系列问题，

以充分发展湍流在圆管中的压强损失为例，工业生产过程中涉及的管径从毫米级到十几米不等，管材包括金属、塑料、混凝土等，输送液体的种类也很广泛，想要把所有可能的组合都进行一次实验是不可能的。就算是有这样的图表，其厚度也会和‘康熙字典’不相上下，不具备任何实用价值。所以，在真正进行实验以前，一定要进行充分分析，并有针对性地进行实验，才能取得简单有效的结果，事半功倍。通过前几节的理论分析我们知道，在层流中单位长度距离上的压强损失($\Delta P/L$)和流体的速度(V)、密度(ρ)、管径(D)有关。如果实验结果在x-y图上画出，横坐标为无量纲组合 $1/Re = \mu/\rho V D$ ，纵坐标为另一无量纲组合 $f = 2\Delta P D/L\rho V^2$ ，这样不管多少组实验，所有数据都会重合在一条曲线上，也就是说，我们只需进行一组或几组实验就能取得普适的结果。湍流和层流中涉及的变量差别不大，所以无量纲组合应该基本相同。但是，我们在其他大多数工程问题中并没有这么幸运地能通过方程直接解除 f, Re 一类的无量纲组合。我们需要一个方法，它能够在不清楚描述物理现象的方程前提下，能合理地组合物理量形成类似 f, Re 的无量纲量。这个的方法叫 Π 方法。

Buckingham Π 方法

我们要研究的问题涉及若干个有量纲的物理量，我们的目标是通过组合这些物理量形成一组无量纲量，使实验数据曲线重合。以圆管湍流问题为例，涉及的物理量

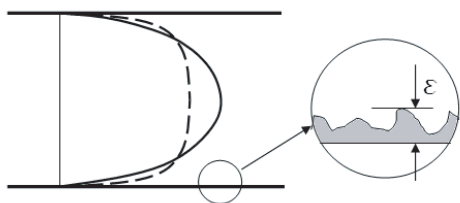


Figure 2.11: 管流的粗糙度.

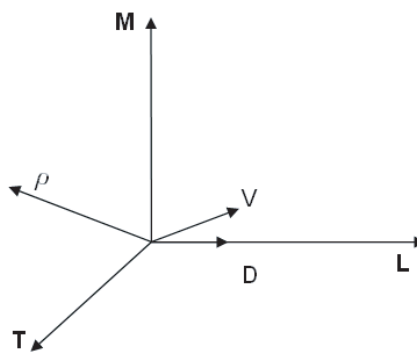


Figure 2.12: 在质量-长度-时间的量纲空间里，直径，速度，密度三个向量可以组合成空间内任意一向量.

理量有 $\Delta P/L, V, \rho, D, \mu$ 。除了这些以外，湍流压强损失还和内壁面的相对粗糙程度有很大关系(注意！粗糙程度对层流影响不大)。我们使用 ε 来表示壁面粗糙度，见图1.11。

$$\Delta P/L = f(V, D, \rho, \mu, \varepsilon) \quad (2.34)$$

我们把这些变量的量纲列在下面的表中

量纲	$\Delta P/L [Pa/m]$	$V [m/s]$	$D [m]$	$\rho [kg/m^3]$	$\mu [kg/m \cdot s]$	$\varepsilon [m]$
M(质量)	1	0	0	1	1	0
L(长度)	-2	1	1	-3	-1	1
T(时间)	-2	-1	0	0	-1	0

利用线性代数中学到的知识，我们可以想象在一个三维空间内(见图1.12)，坐标系分别为MLT，每一个变量都是一个向量，三个独立的向量可以通过线性组合来表达空间中的任意向量，这样四个相互独立的向量通过线性组合就一定能形成零向量 $[0\ 0\ 0]^T$ 。为了组合成有效的无量纲变量，我们选择下面三个相互独立的向

量, (线代课程中称它们是MLT空间的一组‘基’)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \rho = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

依次来表达其他的向量

$$\Delta \mathbf{P}/\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

首先, $\Delta P/L$ 量纲的表达方法为

$$[\Delta P/L] = [V]^a [D]^b [\rho]^c, \quad (2.37)$$

这里[]代表量纲, 为确定常数a,b,c, 需求解线性方程

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

可得a=2,b=-1,c=1,即 $[\Delta P/L] = [V]^2 [D]^{-1} [\rho]$, 于是可得第一个无量纲组合

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P D}{\rho V^2 L}. \quad (2.40)$$

针对下一个变量 μ , 假设 $[\mu] = [V]^a [D]^b [\rho]^c$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

可得 $a=1, b=1, c=1$, 即 $[\mu] = [V][D][\rho]$, 于是第二个无量纲组合

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}. \quad (2.42)$$

针对下一个变量 ε , 假设 $[\varepsilon] = [V]^a [D]^b [\rho]^c$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

可得 $a=0, b=1, c=0$, 即 $[\varepsilon] = [D]$, 于是第二个无量纲组合

$$\Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D}. \quad (2.44)$$

我们成功的把一个公式1.34所示的6个有量纲变量问题‘简化’(也许有部分读者对这个词有异议)成了一个只有3个无量纲变量的问题

$$\Pi_1 = g(\Pi_2, \Pi_3). \quad (2.45)$$

这里 Π_1 为摩阻系数 f 的 $1/2$, Π_2 为雷诺数 Re 的倒数, Π_3 表示为凸凹高度占管径的比例。如果一共有 M 个有量纲变量, 那么就会有 $M-N$ 个无量纲组合, N 为涉及量纲的数量, 通常为3。变量数量缩小之后, 实验数据可以画成简洁的图线。德国科学家尼库拉兹(Johann Nikuradse)将不同直径的沙粒粘贴在管壁内侧, 并进行了一些列的实验研究, 准确的确定了摩阻系数 f 和雷诺数 Re 以及相对粗糙度的关系, 如图1.13所示。这个图本应被称为尼库拉兹图, 但是他积极参与纳粹活动, 战后科学界有意地忽视了尼库拉兹的很多贡献。现在通常用普林斯顿大学教授刘易斯穆迪(Lewis Moody)的名字, 称此图为穆迪图。

有一点需要注意的是, Π 方法形成的无量纲组合不是唯一的。选择 ρ, V, D 作为基, 和选择 ρ, V, μ 得到的结果是不一样的。原则上, 只要是三个量纲独立的向量就

可以作为基(比如, V, D, ε 的向量就不独立, 它们三个量纲向量的所有组合, 只能形成图1.12中的一个平面, 而不是整个MLT空间), 但是, 在选择最合理的基变量的时候需要对物理现象有深刻的理解。II方法好似一把菜刀, 刀刃和刀背甚至刀把都能切菜, 你会怎么选择?

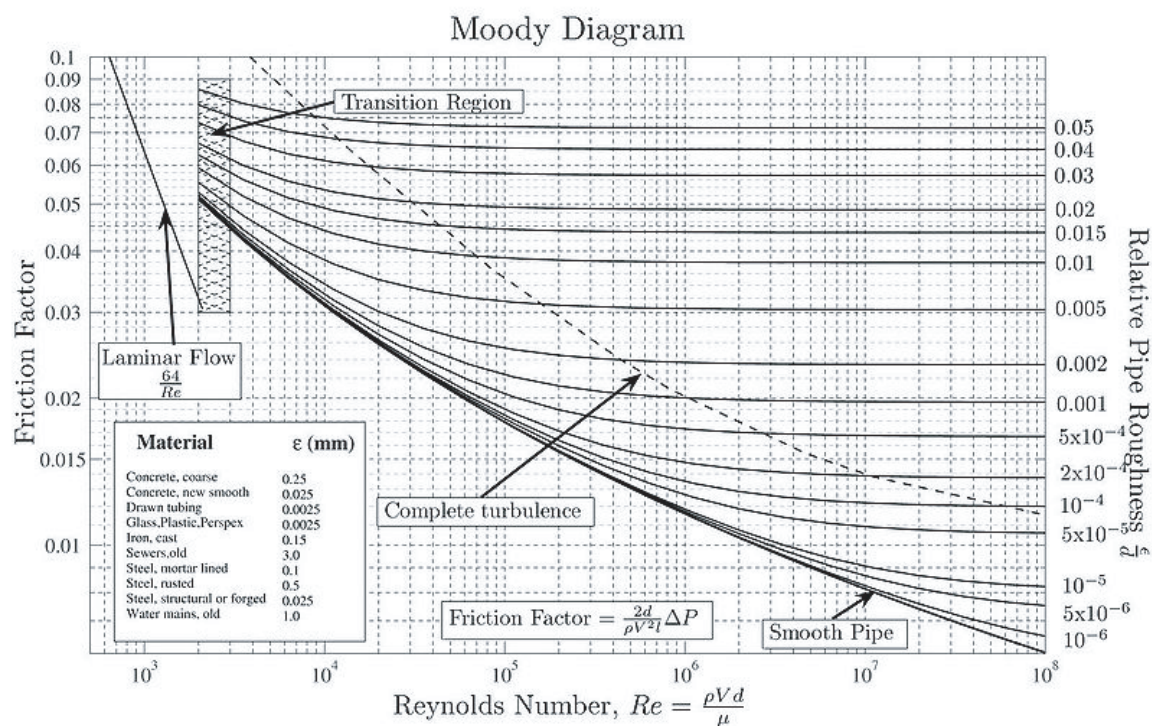


Figure 2.13: 描述摩阻系数(friction factor)和雷诺数(Reynolds number)以及管壁相对粗糙度(relative roughness)的穆迪图.

穆迪图

穆迪图是一个有力的工具，工程师可以根据所设计管路的雷诺数 Re 和管壁相对粗糙度 ϵ/D 查得管路的摩阻系数 f ，从而得到压强损失 ΔP 。对各种管径、流速、流体种类，穆迪图都是有效的。穆迪图有如下几点需要注意的地方

- 当雷诺数较小的时候 $Re < 2000$ ，流场为层流。这时候流向方向的压强梯度和粘性力平衡。 $f = 64/Re$ ，摩阻系数只和雷诺数有关，和管壁相对粗糙度无关。粗糙度增加会引起层流提前转化为湍流；
- 当雷诺数增大 $Re > 4000$ ，摩阻系数 f 和雷诺数 Re 以及管壁相对粗糙度 ϵ/D 相

关。这时候流向方向的压强梯度和粘性力以及‘湍流力’平衡，流场为湍流；

- 雷诺数在 $4000 > Re > 2000$ 为层流湍流过渡区 (transition region)，层湍过渡受很多因素影响；
- 湍流流场，相同的雷诺数下，管壁粗糙度 ε/D 越大，摩阻系数 f 越大；
- 一根管道(粗糙度固定)，流场为湍流，随着流速增大(雷诺数随之增大)，摩阻系数先减小(注意不是阻力减小)，逐渐达到某固定值。粗糙度越大，达到固定值的雷诺数越小；
- 摩阻系数不随雷诺数改变的区域被称作完全湍流区 (complete turbulence region).

一些主要材质的管道的粗糙度见下表

材料	$\varepsilon(mm)$
普通水泥管道	0.25
经过光滑处理的水泥管道	0.025
有机玻璃、塑料管道	0.0025
新铸铁管道	0.15
旧铸铁污水排水管	3
普通钢管	0.1
生锈钢管	0.5

例1: 某农田灌溉工程需使用2000米长铸铁管道从水库取水，管径20厘米，已知常温下水密度为 $998 kg/m^3$ ，运动粘性系数为 $\nu = 10^{-6} m^2/s$ ，当流量为0.25升/秒的时候，沿管路因粘性导致的压强损失 (pressure loss) 为多大？若流量为10升/秒，管路的压头损失 (head loss) 为多大？

分析: 压强损失 ΔP 是摩阻系数 f 的一部分 (f 是 ΔP 的无量纲形式)，求 ΔP 必先求 f 。所以首先要找到雷诺数 Re 和相对粗糙度，如果 $Re < 2000$ 就可以直接根

据 $f = 64/Re$ 求 f , 若 $Re > 2000$ 则根据穆迪图查 f , 再根据 f 定义式反求 ΔP .

解: 当 $Q=0.25\text{L/s}$,

$$V = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{4 \times 0.25 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{3.14 \times 0.2^2 \text{m}^2} = 0.008 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.008 \frac{\text{m}}{\text{s}} 0.2 \text{m}}{10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 1600,$$

雷诺数小于2000, 流场可以认为是层流, 摩阻系数则为

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1600} = 0.04,$$

根据摩阻系数 f 的定义式

$$f = \frac{2\Delta P/\rho V^2}{L/D}, \quad (2.46)$$

可知压强损失 (pressure loss) 为

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2}, \quad (2.47)$$

$$\Delta P = 0.04 \frac{2000 \text{m}}{0.2 \text{m}} 998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 0.008^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} / 2 = 12.8 \text{Pa}.$$

当 $Q=10\text{L/s}$,

$$V = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{4 \times 10 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{3.14 \times 0.2^2 \text{m}^2} = 0.32 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.32 \frac{\text{m}}{\text{s}} 0.2 \text{m}}{10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 6.4 \times 10^4,$$

雷诺数远大于2000, 流场是湍流。管壁粗糙度为 $\varepsilon = 0.15\text{mm}$, 相对粗糙度为

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.15 \times 10^{-3} \text{m}}{0.2 \text{m}} = 7.5 \times 10^{-4}.$$

在穆迪图中, 根据 $Re = 6.4 \times 10^4$ 和 $\frac{\varepsilon}{D} = 7.5 \times 10^{-4}$, 发现 $f=0.024$ 。压头(head)是能量以长度为单位的表达形式。所以压头损失(head loss)为

$$h_f = \frac{\Delta P}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}, \quad (2.48)$$

$$h_f = 0.024 \frac{2000m}{0.2m} \frac{0.32^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2}} = 1.25m.$$

作业：直径1厘米有机玻璃圆管，长50米，水流量2立方米每小时，常温，求管路的沿程阻力损失(粘性导致 ΔP 的另一种说法)。

2.0.4 考虑粘性损失的能量方程

图1.14是一个完整的管路系统。水从一个蓄水池(水面高度 z_1)被水泵抽到另一个位置较高的蓄水池(z_2)中。管道直径5cm,全长100米,材料为铸铁(粗糙度 $\varepsilon=0.15\text{mm}$)。这个管路比较复杂,除了在100米管路上有沿程阻力损失以外,管路内还安装了一系列会引起能量损失的装置,包括连接蓄水池和管道的直角入口出口、管路两端设置的阀门、半径15厘米的转弯、90度的弯头。这些装置都能促进流体混合,增加能量损失。这样一个管路的核心是选择能达到流量 Q 的水泵。水泵达不到设计要求会使用户断水。相信大多数读者有因‘水压低’影响生活的经历¹。在工业生产过程中,这可能会造成很大的灾难。如果核反应堆的冷却水路流量达不到要求,会造成冷却水的过热、蒸发并有可能导致爆炸等事故。

我们已经知道流体运动的‘动压头’是 $V^2/2g$,一条长 L 直径 D 的管路的沿程阻力损失为 $f(L/D)$ 个动压头,

$$h_f = \left(f \frac{L}{D}\right) \left(\frac{V^2}{2g}\right).$$

我们仿效这个公式,可以说每个部件造成的损失为 K 个动压头。这样,这个部件造成的‘局部阻力损失’为

$$h_m = \frac{\Delta P}{\rho g} = K \frac{V^2}{2g}. \quad (2.49)$$

这里 K 为这个部件的局部阻力系数。因为这些附加装置引起运动的复杂性,不存在 K 的精确理论解,我们只能依赖实验结果。一般来说,入口、出口、弯头等简单部件的 K 值可根据教科书或设计手册等资料查询。复杂部件比如阀门等,生产厂家会对自己的产品做性能测试,并在网络上公布能量损失和开度、流量等参数的关系,供用户查询。

我们学习过,在一个没有阻力损失、没有流体机械的管路中,我们可以使用伯

¹当我写到这里的时候,大工综合实验1号楼4楼自来水又断了

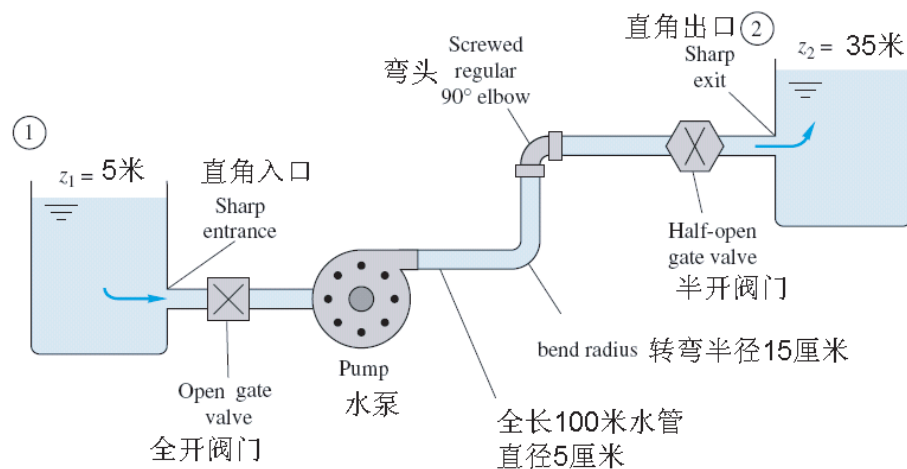


Figure 2.14: 一个典型的管路系统

努利方程找到沿管路流速变化，高度和压强的变化关系。

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2, \quad (2.50)$$

但现在我们面对一个更加复杂的问题，管路中包含了泵输入的能量，若其扬程²为 h_p ，我们可以把这部分能量加到等式左边。阻力损失包括两个部分，沿程阻力损失(h_f)和局部阻力损失(h_m)这两部分能量阻力可以加在伯努利方程的右边，这样，伯努利方程变成了描述管路能量平衡的方程

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 - h_p + h_f + h_m, \quad (2.51)$$

假设用户提出图1.14中的管路必须达到一定的流量 $Q=0.002\text{m}^3/\text{s}$ ，我们首先需要求得 h_m 和 h_f ，然后可根据式1.51求出相对应的泵的扬程 h_p 。要想估算 h_m ，首先需要根据图15-18和表1查各个部件的局部损失系数 K 。

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 - h_p + h_f + h_m,$$

²以长度为单位的能量

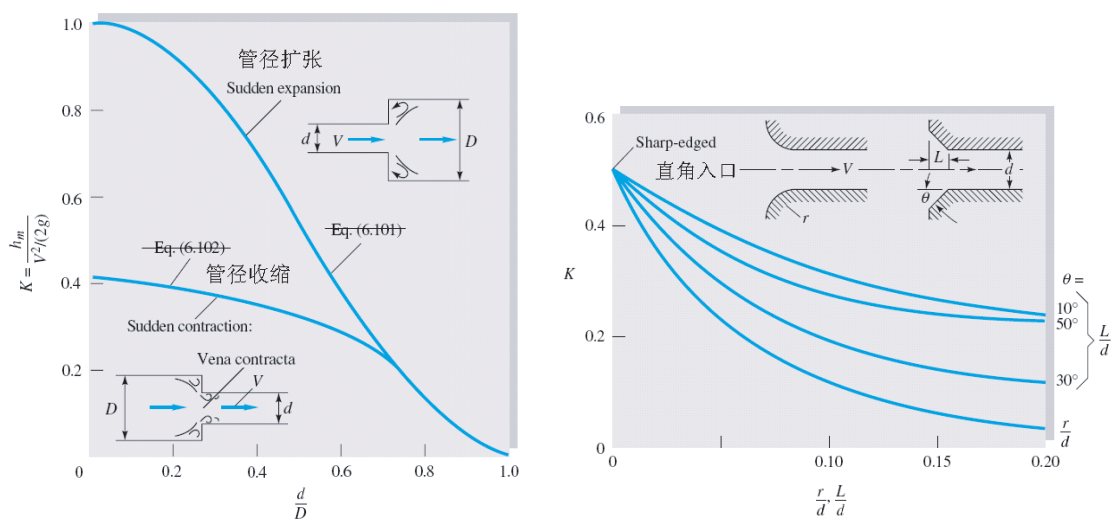


Figure 2.15: 入口、出口口阻力损失系数 K . Figure 2.16: 入口几何形状对阻力损失系数 K 的影响.

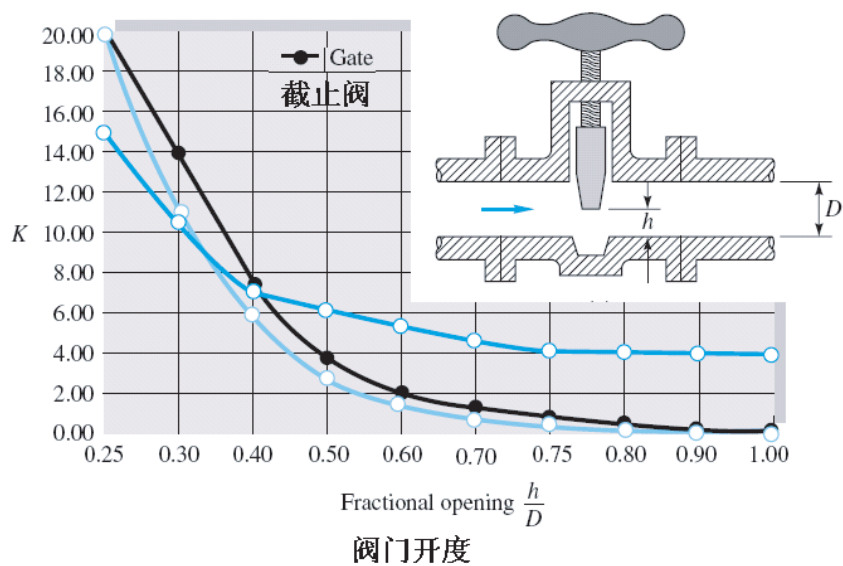


Figure 2.17: 普通截止阀阻力损失系数 K 和开度的关系.

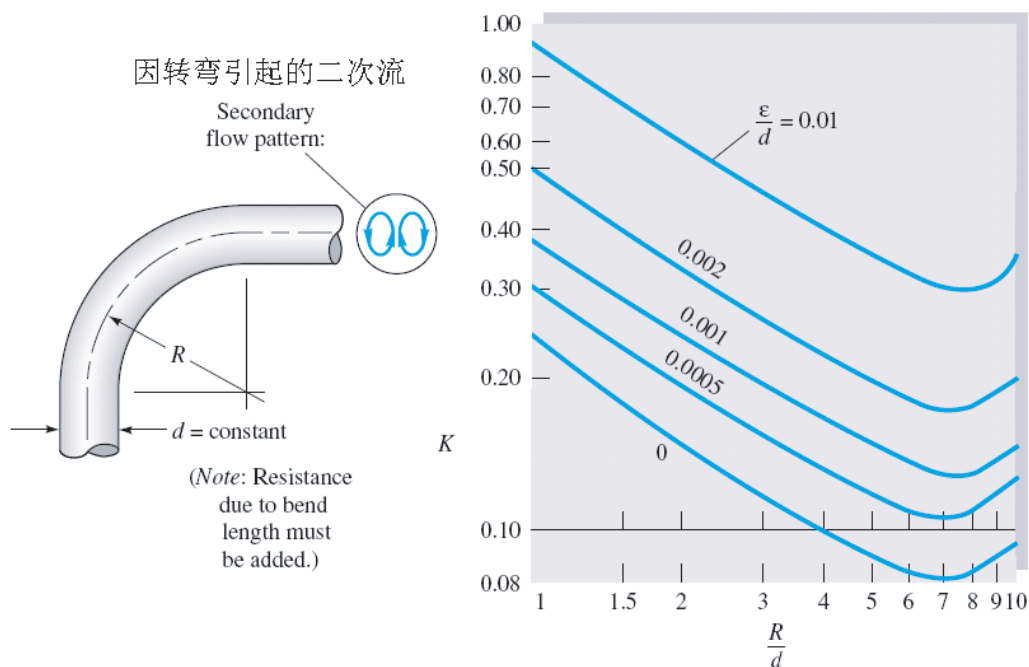


Figure 2.18: 管路转弯引起的阻力损失。

Table 2.1: 弯头阻力损失系数

角度	直径 $d=12.5\text{mm}$	25mm	50mm	100mm
45°	0.39	0.32	0.30	0.29
90°	2.0	1.5	0.95	0.64
180°	2.0	1.5	0.95	0.64

Table 2.2: 管路损失系数K总结

部件	局部阻力系数 K	依据
直角入口	0.5	图1.15或者1.16
全开阀门	0	图1.17
半径15厘米转弯	0.3	图1.18
90度弯头	0.95	表1.1
半开阀门	4	图1.17
直角出口	1	图1.15
	$\sum K = 6.75$	

这时，点1和2都在水面，它们的表压和速度都为零。公式变为

$$z_1 = z_2 - h_p + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + (\sum K) \frac{V^2}{2g},$$

$$h_p = z_2 - z_1 + (f \frac{L}{D} + \sum K) \frac{V^2}{2g}, \quad (2.52)$$

可见，泵输入的能量使流体克服了高差 Δz 、沿程阻力和局部阻力。如果图1.14中管路的流量为 $0.002m^3/s$ ，对应的泵的扬程 h_p 为多少呢？

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.002}{3.14 \times 0.05^2} = 1.0m/s$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.0m/s \times 0.05m}{10^{-6}m^2/s} = 50000$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.15mm}{50mm} = 0.003$$

根据穆迪图， $f = 0.028$ 。根据上面表1.2的分析， $\sum K = 6.75$ ，

$$h_p = z_2 - z_1 + (f \frac{L}{D} + \sum K) \frac{V^2}{2g} = 35m - 5m + (0.028 \frac{100m}{0.05m} + 6.75) \frac{1m^2/s^2}{2 \times 9.8m/s^2}$$

$$h_p = 30m + (2.9m + 0.3m) = 33.2m.$$

泵单位时间内输送给水的能量应为单位时间内提升的流体重量乘高度

$$P = \rho Q g h_p = 1000 \text{ kg/m}^3 0.002 \text{ m}^3/\text{s} 9.8 \text{ m/s}^2 33.2 \text{ m} = 651 \text{ w} \quad (2.53)$$

若泵的效率(η)为60%,连接在水泵上面的电机的耗电功率为

$$P_{motor} = W_p / \eta = 651 \text{ w} / 0.6 = 1085 \text{ w}$$

Chapter 3

外流

物体在流体中运动的时候，靠近物体表面流场的状态决定了物体受到的阻力。这样的流场通常被称为外流。在这一章里，我们研究外流的一些规律。主要研究内容是确定流场形态(速度变化曲线)和物体受力的关系。外流和内流的物理本质是一样的(都符合NS方程)，但因为边界条件不同，所以发展规律有所不同。比如，外流中基本没有‘充分发展’状态，流场沿物体边界持续不断的发生变化。

我们先从最简单的外流开始研究。为了方便研究，我们通常假设物体静止，而流体相对物体运动。如图2.1所示，运动速度为 U_e 的流体自左向右沿x轴运动，一平板保持静止。平板上受到的压强不随x发生改变，流场中没有内流中的压强‘推力’。流体和平板之间不会出现滑移现象，贴近平板的流体速度永远为零。因为粘性的作用，速度慢的流体会拖慢周边相对速度较高的流体，受到粘性影响的区域水平运动速度小于 U_e ，被称作边界层(Boundary Layer)。远离平板的区域不受粘性影响，流体流动的速度保持 U_e 。随着流体沿边界的发展，受到墙壁影响的区域越来越大。如果流体间传递动量的机制只有分子运动，流体在边界层中分层运动，为层流边界层(Laminar Boundary Layer)。如果流体失稳，出现貌似‘无序’的运动，

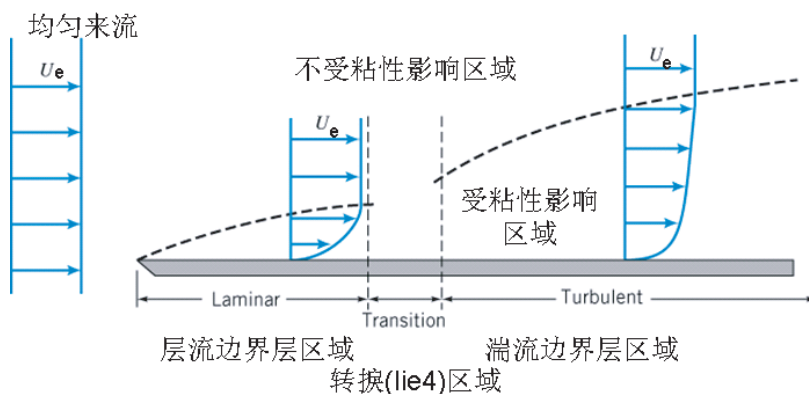


Figure 3.1: 在均匀来流中，沿平板发展的边界层示意图.

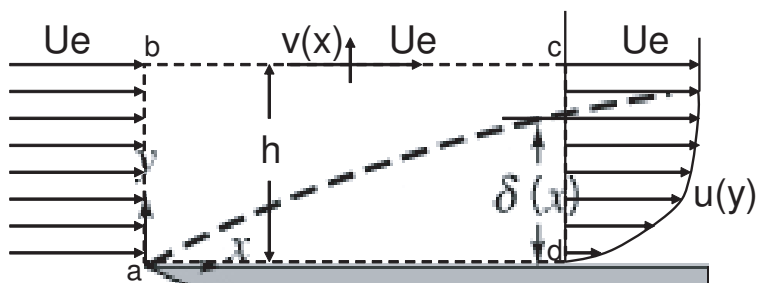


Figure 3.2: 分析沿平板发展的层流边界层使用的控体,控体长 x ,宽 b ,高 h .

则为湍流边界层(Turbulent Boundary Layer)。湍流边界层的发展速度明显快于层流边界层。从层流边界层发展到湍流边界层的过程被称作转捩(读列, Transition)。

3.0.5 求解层流边界层

刚才提到，我们研究边界层的主要目的是确定物体的受力状况，物体受阻力的大小主要包括两个部分，压强力和粘性力

$$F_D = \int_S P dA + \int_S \tau_w dA. \quad (3.1)$$

压强力比较容易计算(在目前的例子里为0)，我们在这里主要研究壁面切应力 τ_w 和它引起的力。研究过程和内流相同，我们先通过解析的办法求解简单的层流，确

定它的速度分布 $u(y)$ ，求解 τ_w ，再求阻力 F 。

如图2.2所示的是研究控体。控体左侧(ab面)速度均匀 $u = U_e$ ，右侧(cd面) $y \leq \delta$ 的区域内速度 $u \leq U_e$ ， $y > \delta$ 的区域内速度 $u = U_e$ 。右侧离开控体的流量小于左侧进入的流量，根据质量守恒，一定有部分流体穿越bc面离开控体，所以cd面不仅有水平速度 U_e ，还存在竖直速度 $v(x)$ 。边界层的高度为 δ ，它随着距起点的距离 x 逐渐增长。

速度分布曲线

我们知道层流内流的速度分布为抛物线，因为物理机制相同，我们可以同样假设外流边界层内的速度分布 u 也为 y 的二次曲线¹

$$u = ay^2 + by + c$$

边界条件

$$\begin{cases} \text{at } y = 0, & u = 0 \\ \text{at } y = \delta, & u = U_e \\ \text{at } y = \delta, & du/dy = 0 \end{cases}$$

求解 a, b, c 可得

$$u = \left(-\frac{U_e}{\delta^2}\right)y^2 + \left(2\frac{U_e}{\delta}\right)y,$$

$$\frac{u}{U_e} = -\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

总这个结果可以看出 y/δ 决定了 u/U_e ，边界层的速度分布 u 虽然随 x 改变，但是各个 x 上速度分布都是相似的。比如，如果在 x_1 点，距离壁面15% δ 点的速度为60% U_e ，那么在 x_2 点，距离壁面15% δ 点的速度也是60% U_e 。所以我们可以定义一

¹这里要注意，在外流中速度是 x 和 y 的函数， $u(x, y)$

个百分数 $\eta = y/\delta$, 层流边界层内的速度分布变成

$$u/U_e = 2\eta - \eta^2. \quad (3.2)$$

根据这个速度分布, 我们可以求得壁面切应力

$$\begin{aligned} \tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} &= \frac{\mu U_e}{\delta} \left. \frac{\partial(u/U_e)}{\partial(y/\delta)} \right|_{y/\delta=0} = \frac{\mu U_e}{\delta} \left. \frac{\partial(u/U_e)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\mu U_e}{\delta} \left. \frac{\partial(2\eta - \eta^2)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}, \\ \tau_w &= \frac{2\mu U_e}{\delta}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

公式(2.2)和公式(2.3)中存在一个未知变量 $\delta(x)$, 需进一步利用力平衡关系求解。

质量守恒和动量平衡

对于图2.2所示控体, 定常、不可压条件的质量守恒方程为

$$\int_{CS} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0.$$

沿ab, bc, cd面应用这个方程, 得

$$\begin{aligned} -U_e h b + \int_0^h u b dy + \int_0^x v b dx &= 0, \\ \int_0^x v dx &= U_e h - \int_0^h u dy. \end{aligned} \quad (3.4)$$

控体上方bc面流出的流量等于入口和出口流量之差。这些流出控体流体的水平速度为 U_e 。

对于图2.2所示控体, 定常、不可压条件的水平动量方程为

$$F_x = \int_{CS} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

沿ab, bc, cd面应用这个方程, 得阻力大小 F_D

$$-F_D = U_e (-\rho U_e h b) + \int_0^h u \rho u b dy + \int_0^x U_e \rho v b dx,$$

$$-\frac{F_D}{\rho b} = -U_e^2 h + \int_0^h u^2 dy + U_e \int_0^x v dx,$$

将质量守恒式2.4带入上式，取代最后一项

$$-\frac{F_D}{\rho b} = -U_e^2 h + \int_0^h u^2 dy + U_e^2 h - U_e \int_0^h u dy,$$

$$-\frac{F_D}{\rho U_e^2 b} = \int_0^h \left(\frac{u}{U_e}\right)^2 dy - \int_0^h \left(\frac{u}{U_e}\right) dy = \int_0^h \frac{u}{U_e} \left(\frac{u}{U_e} - 1\right) dy.$$

因为在 $\delta \leq y \leq h$ 区域内 $u = U_e$,积分为零,所以方程可以变成

$$\frac{F_D}{\rho U_e^2 b} = \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) d(y/\delta) = \delta \int_0^1 \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) d\eta,$$

这样我们有了一个联系阻力和速度分布的方程

$$\frac{F_D}{\rho U_e^2 b \delta} = \int_0^1 \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) d\eta. \quad (3.5)$$

我们首先把速度 u/U_e 分布公式(式2.2)带入式(2.5)右侧，得

$$\frac{F_D}{\rho U_e^2 b \delta} = \int_0^1 (-\eta^2 + 2\eta)(\eta^2 - 2\eta + 1) d\eta = \int_0^1 (-\eta^4 + 4\eta^3 - 5\eta^2 + 2\eta) d\eta = \frac{2}{15}. \quad (3.6)$$

控体内任意一小段上的阻力为

$$dF_D = \tau_w b dx, \text{ or, } dF_D/dx = \tau_w b$$

这个关系把公式(2.6)和公式(2.3)联系起来，有

$$\frac{dF_D}{dx} = \frac{2}{15} \rho U_e^2 b \frac{d\delta}{dx} = \frac{2\mu U_e}{\delta} b. \quad (3.7)$$

经过整理可得

$$2\delta d\delta = 30 \frac{\mu}{\rho U_e} dx,$$

在 $[0, x]$ 间积分，对应的边界层厚度为0和 δ ,

$$\int_0^\delta 2\delta d\delta = 30 \frac{\mu}{\rho U_e} \int_0^x dx,$$

$$\delta^2 = 30 \frac{\mu}{\rho U_e} x = 30 \frac{\mu}{\rho U_e x} x^2,$$

$$\delta = 5.48 \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_e x}} x,$$

于是, 我们就得到了层流边界层厚度沿x变化的规律

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{\frac{\rho U_e x}{\mu}}} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}}. \quad (3.8)$$

这里 Re_x 是以距起始点长度x为长度尺度的雷诺数²。有了这个规律, 配合 τ_w 公式(式2.3), 我们就可以解出壁面切应力和粘性阻力。

考虑到无量纲量的广泛应用性, 我们不妨仿效管流的沿程阻力系数, 定义一个平板流阻力的无量纲数: 表面局部摩阻系数(Skin friction)

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = \frac{2\mu U_e / \delta}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = \frac{4\mu}{\rho U_e \delta} = \frac{4\mu}{\rho U_e x} \frac{x}{\delta} = \frac{4}{Re_x} \frac{\sqrt{Re_x}}{5.48} = \frac{0.73}{\sqrt{Re_x}}. \quad (3.9)$$

表面局部摩阻系数为壁面切应力和来流动压的比值。

3.0.6 湍流边界层

和内流一样, 当流体微团的惯性远大于粘性力的时候, 它们会挣脱粘性的束缚, 其运动状态会发生明显的变化, 分层流动消失了, 取代的是貌似无序的混乱运动。通常来讲, 我们认为沿光滑平板发展的边界层开始都是层流边界层, 随着距离起始点x的增加, $Re_x (= U_e x / \nu)$ 逐渐增大, 当 $Re_x \approx 5 \times 10^5$ 的时候, 层流边界层转变为湍流边界层。转换过程是一个复杂的过程, 受到很多因素的干扰, 所以雷诺数50万只是一个大概的估计, 和管路中的 $Re_D = 2000$ 一样, 仅能作为初步设计的参考而已。在求解管流过程中我们知道, 湍流远比层流复杂, 貌似无序的运动大大增加了流体中的动量交换。流场中除了粘性应力以外, 又增加了雷诺应力 $\overline{u'_i u'_j}$ 。在

²圆管流雷诺数使用直径D

管流中我们通常依靠穆迪图(图1.13)来查询沿程阻力系数求解压力降。在湍流边界层中，我们则依靠经验公式。

图2.3所示的湍流边界层曲线和层流不同，因为流体‘混合’机制更加有效，所以湍流边界层内的低速区域比较小。通常我们假设在湍流边界层的大多数区域内，速度曲线为1/7次方曲线

$$\frac{u}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7}. \quad (3.10)$$

当接近壁面的时候，这个曲线并不适用，因为这个曲线给出的 τ_w 无限大，显然是不正确的。在接近壁面的地区，有人提出了相应的速度分布。利用这些速度分布，重复在上一节的推导过程。就可以得出湍流边界层厚度 δ 和表面局部摩阻系数 C_f (skin friction)随 x 的发展规律

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.382}{Re_x^{1/5}}, \quad (3.11)$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = \frac{0.0594}{Re_x^{1/5}}. \quad (3.12)$$

可见，湍流边界层的发展速度比层流边界层快，引起的壁面切应力也更大。

例：图2.4所示的是一边界层沿一平板发展的情况。来流速度 $U=1\text{m/s}$,板长 $L=1\text{m}$,宽 $W=10\text{m}$,介质为水($\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$)。求(a)边界层会不会发生转捩，如果发生转捩，具体位置？(b)如果没有发生转捩，在 $x=L$ 位置边界层厚度 δ 为多少？壁面切应力 τ_w 是多少？阻力 F_D 多大？(c)在平板起始点我们粘贴了一根细线，它对来流起扰动作用，这样边界层从 $x=0$ 开始就是湍流状态，在 $x=L$ 位置边界层厚度为多少？ τ_w 是多少？阻力 F_D 多大？

解：(a) 判断是否转捩需要看雷诺数 Re_L 是否大于 5×10^5 。

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{1\text{m/s} \cdot 1\text{m}}{10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} = 10^6.$$

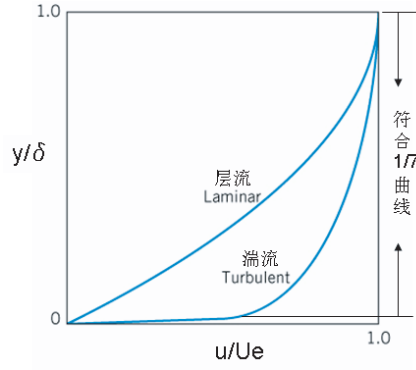


Figure 3.3: 层、湍流边界层速度曲线对比.

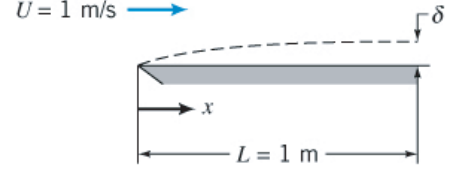


Figure 3.4: 例题.

Re_L 大于 5×10^5 , 发生了转捩。具体位置 x 符合

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu} = \frac{1x}{10^{-6}} = 5 \times 10^5,$$

$$x = 0.5m$$

边界层在 $x=0.5$ 米处转捩。

(b) 如果没有发生转捩, $x=L$ 处边界层厚度 δ 和切应力 τ_w 沿板全长符合公式(2.8)和(2.9)

$$\delta(x=L) = \frac{5.48}{\sqrt{Re_L}} = 5.48 \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = 5.48 \sqrt{\frac{10^{-6}m^2/s}{1m/s \cdot 1m}} = 0.0055m,$$

表面局部摩阻系数 C_f 为

$$C_f(x=L) = \frac{\tau_w(x=L)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.73}{\sqrt{Re_L}}.$$

壁面切应力

$$\tau_w(x=L) = \frac{1}{2}\rho U^2 \frac{0.73}{\sqrt{Re_L}} = \frac{1}{2}\rho U^2 0.73 \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{1}{2} \times 1000 \times 1^2 \times 0.73 \sqrt{\frac{10^{-6}}{1 \times 1}} = 0.37Pa.$$

整个板受到的阻力可以通过积分得到

$$F_D = \int_0^L \tau_w(x) W dx = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\rho U^2 \frac{0.73}{\sqrt{Re_x}} \right) W dx = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\rho U^2 0.73 \sqrt{\frac{\nu}{U}} x^{-1/2} \right) W dx,$$

$$= \frac{1}{2} \times 1000 \times 1^2 \times 0.73 \sqrt{\frac{10^{-6}}{1}} \times (2 - 0) \times 10 = 7.3N.$$

(c)如果从开始就是湍流边界层， $x=L$ 处边界层厚度 δ 和切应力 τ_w 沿板全长符合公式(2.11)和(2.12)

$$\delta(x=L) = \frac{0.382}{Re_x^{1/5}} = 0.382 \left(\frac{\nu}{UL} \right)^{1/5} = 0.382 \left(\frac{10^{-6}}{1 \times 1} \right)^{1/5} = 0.0241m,$$

$$\tau_w(x=L) = \frac{1}{2} \rho U^2 C_f(x=L) = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{0.0594}{Re_L^{1/5}} = \frac{1}{2} \rho U^2 0.0594 \left(\frac{\nu}{UL} \right)^{1/5}$$

$$\tau_w(x=L) = \frac{1}{2} \times 1000 \times 1^2 \times 0.0594 \left(\frac{10^{-6}}{1 \times 1} \right)^{1/5} = 1.87Pa.$$

$$F_D = \int_0^L \tau_w(x) W dx = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \frac{0.0594}{Re_x^{1/5}} \right) W dx = \int_0^L \frac{1}{2} \rho U^2 0.0594 \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{1/5} W dx,$$

$$F_D = \frac{1}{2} \rho U^2 0.0594 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/5} W \int_0^L x^{-1/5} dx = \frac{1}{2} \times 1000 \times 1^2 \times 0.0594 \left(\frac{10^{-6}}{1} \right)^{1/5} 10 \frac{5}{4} (1-0),$$

$$F_D = 23.4N.$$

湍流边界层的阻力是层流边界层阻力的3倍左右，厚度也大很多。

3.0.7 压强对边界层发展的影响

前面两节考虑的是不受外界环境影响的边界层($dp/dx = 0$)的发展状况，我们提到，

这样的‘一片’宽度 dx 的边界层受到的阻力 dF_D 就是壁面的切力

$$dF_D = \tau_w b dx. \quad (3.13)$$

有些情况下阻力并不是只有壁面力。比如图2.5中，因边界层外部的速度 U_e 随 x 发生变化，沿下板发展的边界层受到了压强的影响，有的区域压强产生的力和壁面切力方向相同($dp/dx > 0$)，而有的地区相反($dp/dx < 0$)。在这一个小节中，我们加

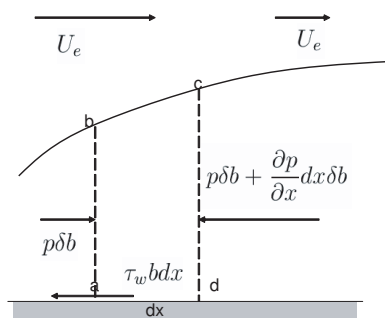
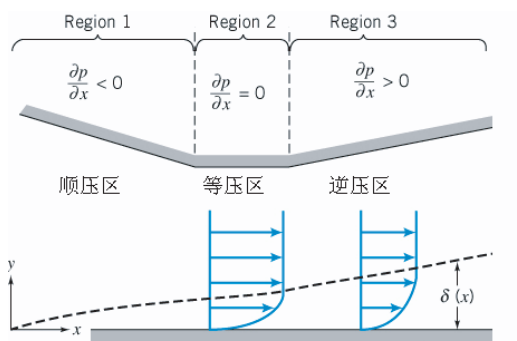


Figure 3.5: 边界层受到压强变化的影响
Figure 3.6: 压强梯度对边界层的作用力.

入压强对边界层的影响。如图2.6所示，这时候阻力由两部分组成，壁面切力和压强力，式(2.13)变成

$$dF_D = \tau_w b dx + \frac{\partial p}{\partial x} \delta b dx. \quad (3.14)$$

通过ab,cd面的净水平动量等于两面的动量差

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u \rho b dy \right) dx.$$

通过bc面的水平动量等于通过bc面的流量乘速度 U_e

$$-U_e \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho b dy \right) dx.$$

于是，动量方程为

$$-\tau_w b - \frac{\partial p}{\partial x} \delta b = -U_e \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho b dy \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u \rho b dy \right). \quad (3.15)$$

压强在x方向的变化规律是和边界层外面的速度 U_e 联系在一起的，根据伯努利方程，沿一条水平的流线

$$p + \frac{1}{2} \rho U_e^2 + \rho g z = C,$$

取微分，在一小段长为 dx 的流线上

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}, \quad (3.16)$$

将上式带入式(2.15),并利用 $\delta = \int_0^\delta dy$,得

$$\begin{aligned} \tau_w &= U_e \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u^2 dy \right) + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} \int_0^\delta dy. \\ \tau_w &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(U_e \int_0^\delta \rho u dy \right) - \frac{\partial U_e}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u^2 dy \right) + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} \int_0^\delta dy. \end{aligned}$$

U_e 不是 y 的函数，可得

$$\tau_w = \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho U_e u dy \right) - \frac{dU_e}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) - \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u^2 dy \right) + \rho \frac{dU_e}{dx} \int_0^\delta U_e dy.$$

等式左边13项组合，24项组合

$$\begin{aligned} \tau_w &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u (U_e - u) dy \right) + \frac{dU_e}{dx} \left(\int_0^\delta \rho (U_e - u) dy \right). \\ \frac{\tau_w}{\rho} &= \frac{d}{dx} \left(U_e^2 \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \right) + \frac{dU_e}{dx} U_e \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy. \end{aligned} \quad (3.17)$$

右边第二项就是因为压强变化对 τ_w 的影响。当压强梯度为零的时候($dp/dx = 0$)，边界层外部的速度不会变化($dU_e/dx = 0$)等式右边第二项自然消失。等式(2.17)里面的两个积分都有明确的物理意义，

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy, \quad (3.18)$$

$$\rho U_e \delta^* = \int_0^\delta (U_e - u) b dy = \int_0^\delta U_e dy - \int_0^\delta u b dy,$$

$\int_0^\delta u b dy$ 表示的是边界层的流量， $\int_0^\delta U_e b dy$ 表示的是若无墙壁，流体应有的流量。 $\rho U_e b \delta^*$ 表示的是因边界层排挤作用导致的流量差， δ^* 代表这个流量差应有的厚度，叫‘排挤厚度’。图见课本354页。

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy, \quad (3.19)$$

$\int_0^\delta u^2 b dy$ 表示的是边界层的动量, $\int_0^\delta U_e u b dy$ 表示的是若无墙壁, 流体应有的动量($\int_0^\delta u b dy$ 为流量, 它们应该具有速度 U_e)。 θ 代表因为壁面的排挤作用导致的‘动量损失厚度’。最后, 式(2.17)可以写成

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}(U_e^2 \theta) + \frac{dU_e}{dx} U_e \delta^*. \quad (3.20)$$

3.0.8 边界层分离

我们在前面研究中发现, 如果边界层外的压强梯度为零($dp/dx = 0$), 壁面切应力 τ_w 逐渐减小(层流或湍流边界层 C_f 公式分别为式2.9和2.12), 但 τ_w 不会减小到零, 更不会为负值。如果压强梯度不为零, 就有可能出现 τ_w 等于零, 甚至为负值的情况。我们知道, 当边界层的发展受到压强梯度影响的时候, 壁面切应力和边界层的排挤厚度 δ^* , 动量损失厚度 θ , 以及外流速度变化有关(公式2.20)

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}(U_e^2 \theta) + \frac{dU_e}{dx} U_e \delta^*,$$

当压强梯度大于零($dp/dx > 0$)的时候, 根据伯努利方程, 边界层外的速度逐渐减小 $dU_e/dx < 0$, 上面的公式告诉我们, 壁面切应力有可能为负值。图(2.7)是在 $dp/dx > 0$ 条件下边界层的变化示意图。当压强沿 x 方向增大的时候, 流体的运动受到了压强引起的阻力, 靠近壁面的流体微团因为初始速度较慢, 速度有可能减为零。当靠近壁面的区域速度减为零的时候, 速度在墙面的梯度为零($du/dy = 0$), 壁面切应力为零($\mu du/dy = 0$)。这个时候, 因为没有了切应力, 我们说边界层已经不再‘贴’在壁面上, 边界层从壁面‘分离’出来, 而这个 $\tau_w=0$ 的被‘分离点’。在分离点的下游, 贴近壁面区域的速度继续减小, 变成负值, 其速度和主流速度方向相反, 这个区域被称作‘分离区’, 或者‘回流区’。

在实际生产生活中, 压强梯度不都是由边界层外速度 U_e 变化引起的, 大多是由物体的形状变化引起的。比如, 图(2.8)中的机翼表面, 这里来流速

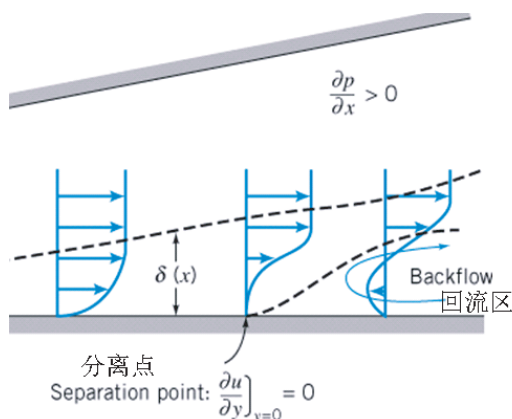


Figure 3.7: 边界层分离示意图

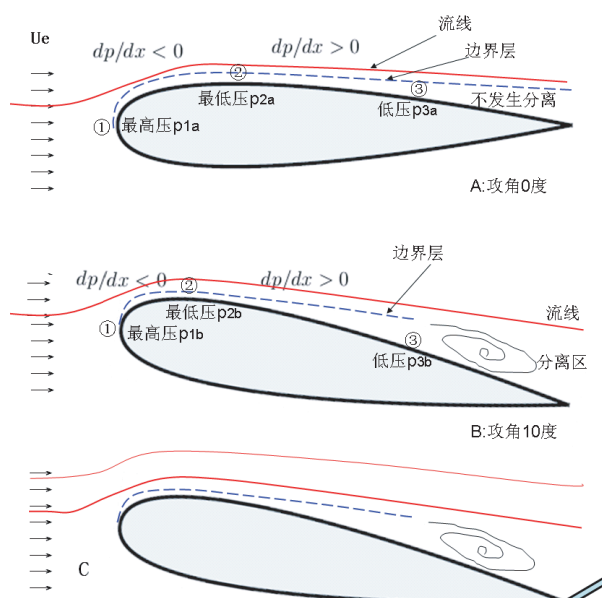


Figure 3.8: 机翼上表面边界层分离.

度 U_e 不变。机翼的前缘压强最大，大约为 $p_1 = \rho U_e^2 / 2$ 。A、B 两状态下的 p_1 区别不大 ($p_{1a} = p_{1b}$)。流线沿机翼表面发生弯转，根据欧拉方程³机翼上表面的压强 p_2 低于大气压， p_2 的大小不仅受机翼形状影响，还取决于机翼与来流的夹角(攻角，angle of attack)。如图(2.8)所示，A 状态的攻角为 0，B 状态的攻角 10 度，流lines 在 B 状态的弯曲程度较大，所以 $p_{2b} < p_{1b}$ 。这样我们发现在 1-2 点之间的区域压力梯度小于零 $dp/dx < 0$ ，B 状态下压强变化比 A 状态大。

在 2-3 点之间的区域，随着机翼形状的变化流线逐渐变平，表面的压强也慢慢从最低压开始升高 ($dp/dx > 0$)，机翼后缘的压强 $p_3 > p_2$ 。对比 AB 两状态，A 状态流线较平，所以 $p_{3a} > p_{3b}$ 。B 状态下 2-3 点之间压强的变化较大 ($p_{3a} - p_{2a} < p_{3b} - p_{2b}$)。如果读者对上面提到的压强梯度变化还有疑虑的话，请继续阅读下一小节中关于圆柱扰流的讨论和实验数据。

³课上提到过，如果流线发生弯转，压强沿径向增大，以提供使流体弯转的向心力

在1-2点之间, $dp/dx < 0$, 壁面切应力 τ_w 永远为正, 边界层不会分离。在2-3点之间, $dp/dx > 0$, 边界层有可能分离。因为B状态下的压强梯度较大, 所以更有可能出现边界层分离。边界层分离以后, 回流区内的压强较低, 这极大的增加了飞行器的阻力, 降低了经济性能。飞行器的副翼通过扰动机翼周围流体来调整翻滚姿态(图2.8C), 当机翼上表面出现大面积的边界层分离的时候, 副翼处在回流区内, 无法有效控制飞行器。另外, 过大的阻力可以迅速降低飞行器速度, 速度降低继而引起升力的降低, 飞行器无法继续飞行。机翼上表面出现大面积回流区的情况通常被称作‘失速’(stall)。

3.0.9 阻力

降低流体对运载工具的阻力是一个很有意义的问题。下面我们以一个简单的例子，圆柱扰流，来研究阻力。我们都知道，运载工具受到的阻力 F_D 和来流速度 V 、物体迎风面积 A 以及物体形状的影响。为了对比形状的优劣，我们定义一个无量纲的量 C_D 来突出形状对阻力的影响

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}, \quad (3.21)$$

流线型的车辆 C_D 比较小，比如保时捷911型轿车和捷达轿车的迎风截面积相同，在相同速度行驶的时候，保时捷受到的阻力要小得多。在本节中，我们不考虑形状复杂的轿车，而着眼于一个简单的圆柱，圆柱周围流场和一个失速机翼的流场在物理上非常相似。

图2.9所示的是圆柱扰流的流场和压强分布。图中对比了两种不同边界层状态(层流和湍流边界层)对表面压强的影响。一个奇怪的现象就是层流边界层的 $C_D = 1.2$ 是湍流边界层对应阻力的4倍。层流比湍流的阻力大，这和我们以前的认识不一致(见式2.9和2.12)。这是因为阻力是由两部分组成的，物体表面的粘性力和压强力。公式(2.9)和(2.12)特指粘性力，而压强引起的力更为复杂。压强阻力往往和物体形状有关，所以这部分阻力也被称为形阻(form drag)。图2.9告诉我们，如果圆柱周围保持了层流边界层，那么在 $\theta = 80^\circ$ 的位置，也就是当壁面压强刚刚开始增大的位置，边界层就开始分离。流体分离之后，在圆柱之后($\theta = 80^\circ \sim 180^\circ$ 之间)形成了一个巨大的分离区。分离区的表压约为 $-0.4\rho V^2$ 。圆柱背后的负压，相当于有一个很大的力在拖着圆柱。所以阻力很高。如果边界层在分离之前转捩称为湍流边界层，分离点就被延迟至 $\theta = 120^\circ$ ，这样，圆柱背后的负压区域减小了，‘拖力’也随之减小了。这样，我们在粘性阻力上做了让步，但是成功地降低了压差阻力。湍流边界层有这样的神奇功效，是因为湍流的

强力混合作用，它能够加大边界层和外界的动量交换，使边界层内的低速流体的速度不至于很快的减为负值。这也是高尔夫球的表面是粗糙而不是光滑的原因⁴，粗糙表面可以促进边界层尽早的转捩，有效的降低阻力，增加飞行的稳定性。

可见我们有时候需要保持层流边界层，有时候需要湍流边界层才能减低阻力。所以，减阻工作的第一步是分析阻力的成因，以便对症下药。比如图2.10所示的物体，它所受到的阻力和形状有很大关系。当形状细长的时候(小厚度弦长比 t/c)，形状引起的压差阻力比较小，粘性阻力较大。当形状比较‘粗壮’(大 t/c)的时候，粘性阻力较小，而压差阻力较大。

如果粘性阻力为主，我们主要考虑以下几种方法减阻

- 尽量使用光滑表面，延缓边界层转捩；
- 对边界层进行抽吸，延缓边界层发展和转捩(图2.11)；
- 在转捩区使用微槽道等限制涡旋发展的装置(图2.12)；
- 使用柔性壁面（类似海豚皮肤的胶质，但仅有少数人在实验室实现了减阻）。

如果形状阻力为主，我们主要考虑以下几种方法减少分离区，以达到减阻目的

- 使用合理的流线形状(图2.13)；
- 使用涡旋发生器，促进边界层转捩，强混合减小分离区(图2.14)，如高尔夫球、鲨鱼皮泳衣等；
- 在分离区吹气(图2.15)；

⁴为了能有效遏制中国选手连续夺冠，国际乒联也许应该建议用高尔夫球的样子来改造乒乓球

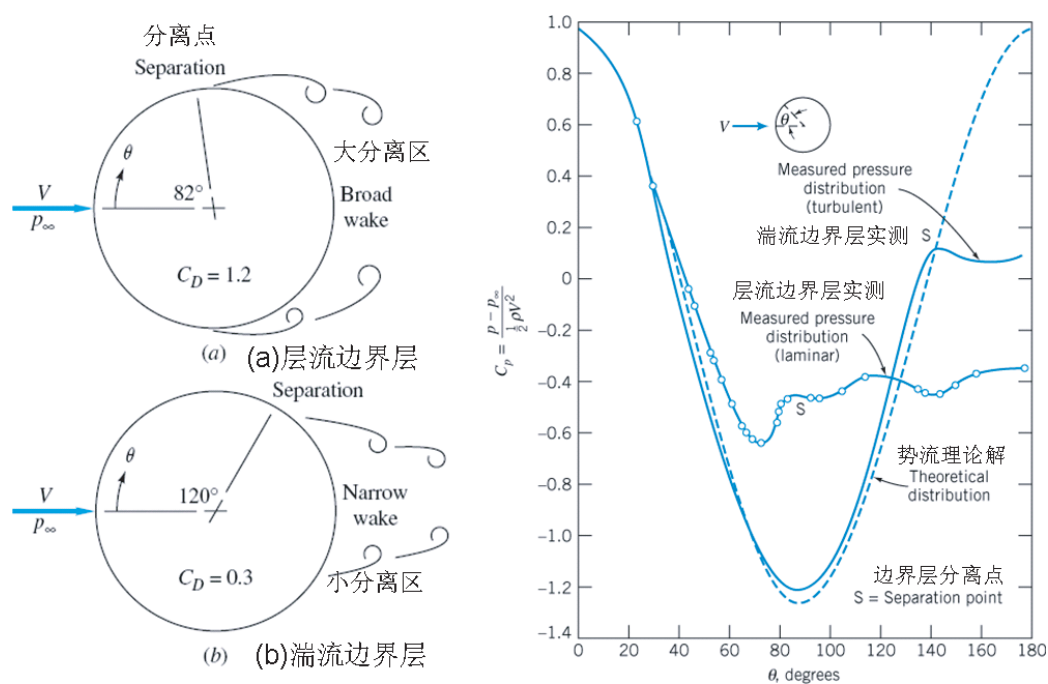


Figure 3.9: 圆柱在速度 V 的均匀来流中表明压强分布图和流程示意图

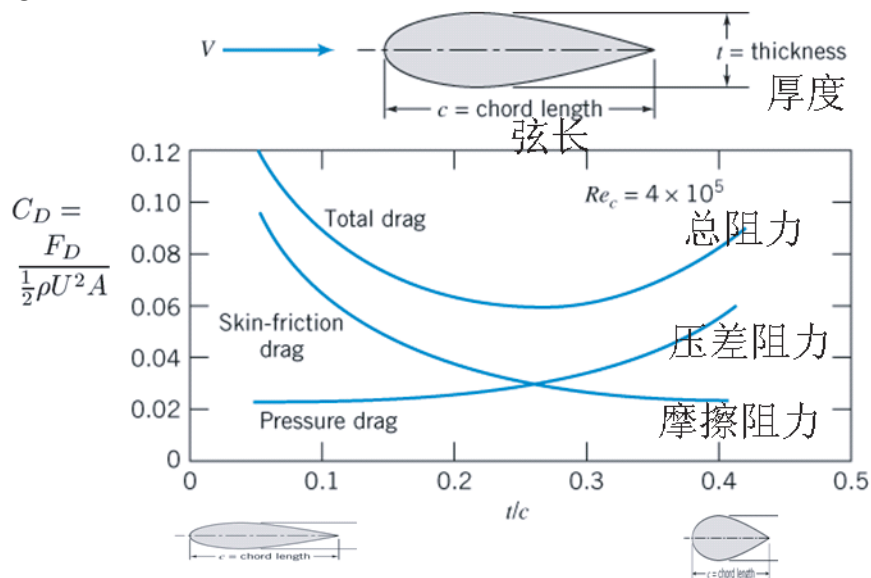


Figure 3.10: 总阻力分为压差阻力和粘性阻力两部分

- 利用机械电子等装置对边界层分离点进行周期性扰动，可加强流体混合减小分离区。

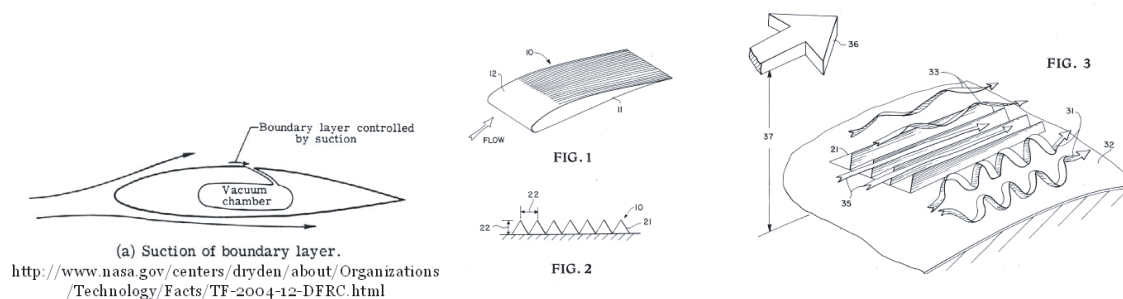


Figure 3.11: 通过抽吸边界层延缓 边界层的发展 and 转捩 Figure 3.12: 使用微槽道延缓边界层的和转捩

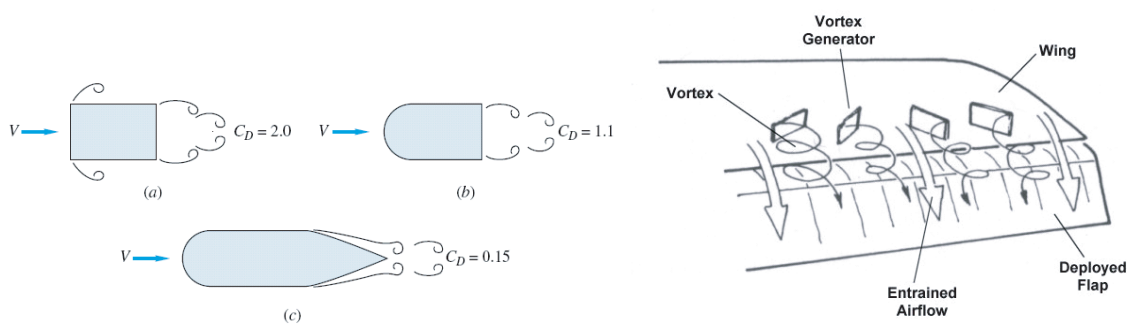


Figure 3.13: 使用合理的流线形状可以有效减阻 Figure 3.14: 使用涡旋发生器扰动流场，加强混合以减小分离区

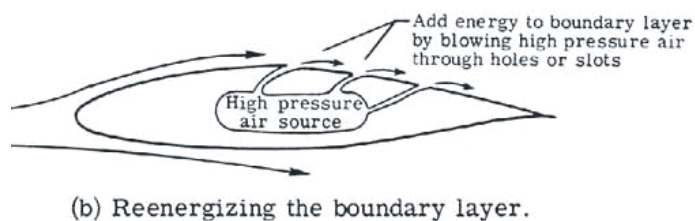


Figure 3.15: 在分离区吹气可减小分离区