# 高等数学

# 第一章 函数、极限、连续

邻域：左右半邻域，左右半去心邻域，无穷大的邻域

例02 开方忘了加负号

例09 没代入算。想当然了

例10 泰勒展开阶数低了

例13 泰勒级数阶数低了。能用洛必达优先洛必达。用泰勒展开的时候带上皮亚诺余项，方便检查是不是阶数不够。

例17 加减不能做等价无穷小变换

例21 型积分的另一种做法：如果不好算，可以尝试把转化为，再计算。（原题目有误，把指数分母的x改成，最终结果是）

例24

例25夹逼定理和定积分有时会同时使用。能凑出来的部分用定积分，其余部分（形似）用夹逼定理。

例28 看不懂。暂且搁置

例29 根据算术平均值和几何平均值的不等式来确定数列的上下界。

例30 设数列由和确定，若增，则单调，否则不单调。不单调时应该先设解出a，再证明极限等于a。数列极限

例39 求极限的时候随时把可以直接求出的因子、可以直接用等价无穷小代换的因子代换掉。

例42 放缩

# 第二章 一元函数微分学

用定义导数时，应注意u的正负。如果u只能取正（或者负），那么只能定义右（或者左）导数。

例14 求之前先转化为。

例36 根据要证明的等式构造函数。

微分方程法：把条件看作微分方程，解出来，一边是常数C，另一边就是应该构造的函数，或者稍加改造。不能完全凭这个，只能作为参考。

例39 区间内可导，导函数不一定连续（例：，可导但导函数在x=0点间断）。所以不能对导函数用零点定理。证明方法：闭区间连续的函数必存在极值，极值不在端点就只能在区间内部的点，极值点处的导数为0。

例45 套公式即可

例46 先把待求量设出来，再证明它和设的值相等。

# 第三章 一元函数积分学

，

，

，

，

，

瑕点：设其倒数是等价无穷小。可以理解成在时，

瑕点处的反常积分：时，瑕积分收敛。时，瑕积分发散。

无穷区间的反常积分：时，无穷积分收敛。时，无穷积分发散。

例17 求分式分解时，可以用代入特殊值（包括复数值）、求特殊点导数、取极限值等等的方式快速求出因数的值，避免待定系数求解的大量运算。也可以从高次到低次，分步地化简出每个分式。

用三角换元证明。

例18 三角函数积分：化成同角，尽量约分，分母化成单项式，。

。

例22 ，解出h，k，从而

。

例34 配对积分法：求形如的积分时，可以先设出（要求和有能约分或能提出微分的关系），求出两式的和差，再通过两式的和差求出原积分。

例38 并非关于x=1对称。瑕点并非都是两边对称的。

例43 对于给定条件的积分，应该尽量往条件上凑。

例47 判断含sinx的无穷区间积分的敛散性时，可以分割成[nπ,(n+1)π]的小区间，分别计算积分，再用级数求和。注意把非零有界量（不影响积分敛散性）用常数替换掉减少计算。

例48 讨论敛散性时，当时1是瑕点。

例51

例55 求物理量的时候看清楚条件，是直径还是半径。

例62 对比两边等式，找出不同之处，再对不同之处进行代换。

例67 分部积分：活用常数。

# 第四章 向量代数与空间解析几何

任意柱面方程的建立：（已知母线方向向量）

若准线已知两曲面交线方程，在准线上取一点，求出该点的母线方程，再联立准线方程，消去。

若准线已知参数方程，则柱面方程

曲线的投影柱面：

往哪个面投影，就只保留那两个坐标，联立消去另一个。

如果是投影曲线，需要加。

例10 两共面直线的交点：把其中一个直线化为参数方程，代入另一个直线方程中，解出参数。

例14 柱面方程

例19 求投影曲线、投影柱面的时候，应该注意变量的范围，可以画草图看看。

# 第五章 多元函数微分学

二元泰勒定理：

拉格朗日型余项：，

拉格朗日余项

点为，其中

佩亚诺型余项：

其中

例25 由和确定了，隐函数求导时应该

设，。

y()、z()表示一种运算，不要和表示因变量的y、z搞混。

例26 ，等式右边的y不能展开成，因为y实际上是x的一元函数，所以只能写成。

画成树状图就是

例28 是一条直线

例36 多元函数微分学不会做就对已知的方程求导

例48 一种解多元方程组的方法：

将方程化为x和y的线性齐次方程组，因为x和y有非零解，故系数矩阵的行列式为0。

# 第六章 多元函数积分学

两类线积分的联系：

其中，为有向曲线的切线的方向余弦。

正向曲线：延L行走，区域D始终位于左边。单连通域的话就是逆时针。

两类面积分的联系：

其中，，为曲面指定侧的法向量的方向余弦。

若已知，则。若或同理。

矢量，

标量，

梯度算子（矢量），

标量的梯度是矢量，

矢量的散度是标量，

矢量的旋度是矢量。

变力做功是力的第二类线积分，通量的矢量场的第二类面积分。

例14 ，通解外边负里边正

柯西-施瓦兹不等式：乘积的和的平方小于等于平方的和的乘积

.

积分形式：

例20 证明积分和某个数的不等式关系，用幂级数展开。

例21 硬做即可

例39 补线尽量平行于坐标轴

例42 空间曲线第二类积分

直接法：建立曲线参数方程，代入。

用斯托克斯公式：

。

化为平面线积分：通过把z和dz都用x,y表示，积分曲线变为投影。

例44 化面积分为一重积分，找准面积微元dS和dx（或dx、dy）的关系。

例51 第二类面积分已知直接法（三项统一）：

。

例57 计算柱面侧面积，化为第一类线积分，。

例58 有不好算的数先用一个式子表示出来，最终计算的时候直接用式子代换。

# 第七章 无穷级数

如果积分得到的幂级数在端点收敛，且其和函数在端点左（右）连续，则积分得到的和函数的收敛域可以扩张。

比如的收敛域是(-1,1)，积分得到的收敛域就是[-1,1)。

例16 则。

例20 在条件收敛。

例21(5)

例27(1) 的级数，一般给它拆开（不要求导积分，太麻烦）

例27(3) 的幂级数，设，便于求导积分。

.

例28(2) 求出和函数后，确定和函数的定义域，再对比幂级数的收敛域，在幂级数中代入缺失的点，求出在和函数没有定义的点上的幂函数的值。分母为0的点和端点需要考虑一下。

例32 证明幂级数收敛半径不小于1，也就是证明系数数列有界。

例37 展开为傅里叶级数时，要单独算。

# 第八章 常微分方程

例3 型微分方程：化成齐次方程。

例14 已知通解求微分方程的一般方法：通过y，y'，y''的运算消去任意常数，得到的就是原方程。

例15 如果全微分方程的原函数看不出来，可以进行线积分。

。

例17

例18 如果题中没说f(x)可导，不能利用公式求导。如果只说了f(x)有定义，只能用导数定义求导数。

# 线性代数

# 第一章 行列式

，。

。

例1 行列式计算时如果没有1，在第一列凑出一个1再往后进行。

例7 。

例13 A与B相似，则，。

# 第二章 矩阵

等价：秩相同。。P，Q是一系列初等矩阵，也就是可逆阵。

相似：特征值相同。。P为可逆矩阵。

合同：正负惯性系数相同。。C为可逆矩阵。

实对称矩阵相似一定合同，因为实对称矩阵可以用正交阵进行相似对角化，即。

例4

例7

。（及以上均为0矩阵）

例19 分块矩阵求逆矩阵：先设，再解出来

# 第三章 向量

，是齐次方程组是解，其线性组合也是齐次方程组的解，解向量的集合是n维向量空间的子空间，称为解空间W。

解空间的维数是。

过渡矩阵：n维向量空间的两组基，

若（注意系数的位置是转置的），

设，，

即，称为从到的过渡矩阵。

如果向量在基底的坐标为，在基底的坐标为，则坐标变换公式为，或。

从一个规范正交基到另一个规范正交基的过渡矩阵是正交矩阵。

例12 不同特征值对应的特征向量线性无关的证明方法：

设，则，

又，所以，

因为，所以，所以，所以、无关。

进而推知所有不同特征值对应的特征向量线性无关。

例24 求过渡矩阵（）：初等变换法

。

向量空间中，某个基下的坐标和向量不是一回事。坐标是用基底对向量线性表示的系数向量。同一个向量在不同基下的坐标不同，但还是一个向量。

# 第四章 线性方程组

克拉默法则：非齐次线性方程组的系数行列式，则方程有唯一解，且唯一解为，其中是中第i列元素（即的系数）替换成方程组右端的常数项所构成的行列式。

推论：齐次线性方程组的行列式方程组有唯一0解，否则有无穷多解。

即如果齐次线性方程组有非零解，其行列式。

非齐次线性方程组无解

非齐次线性方程组有解

线性无关，线性相关

b可由线性表出，且表出法唯一有唯一解

线性相关，b可由线性表出，表出法不唯一有无穷多解

例5 高阶矩阵不能拿三阶矩阵的算法算，只能行列展开。

例9 形似的矩阵利用爪形消元法。。

例10 假设m个方程，n个未知数，系数矩阵秩为r的方程组

假设非齐次方程组的增广矩阵化为行阶梯之后是这个样子。

如果，说明多余的方程对方程组的解没有任何影响。这时就可以推断：因为，所以已知方程不足以解出所有未知数，因此有无穷多解。

如果没有只含有0的列，即，此时只有唯一解。

如果是，说明存在矛盾的无解方程（），因此方程组无解。

所以当时，不存在多余方程，因此一定有解。如果此时有，则有唯一解。

例15

# 第五章 特征值、特征向量、相似矩阵

例8(2) 不可相似对角化的矩阵的幂运算会增加不存在的特征向量。

例如特征值为，特征向量为，特征值为，特征向量为。

例12(2)

例23

又，所以

# 第六章 二次型

等价：秩相同。。P，Q是一系列初等矩阵，也就是可逆阵。

相似：特征值相同。。P为可逆矩阵。

合同：正负惯性系数相同。。C为可逆矩阵。

实对称矩阵相似一定合同，因为实对称矩阵可以用正交阵进行相似对角化，即。

二次型正定的充要条件：，其中D为可逆阵的全部特征值大于的全部顺序主子式大于0。

二次型正定的必要条件：主对角线元素大于0，行列式大于0。

例2 预先考虑求正交特征向量（避免进行史密斯正交化）

例如本题时，，则首先确定，在确定时，可直接将其设为，又因为其满足矩阵条件因此直接得出。

也就是求同一特征值对应的特征向量时，在求的时候就按照正交计算。

例5 配方法化二次型为标准型时，如果没有平方项无从下手，可以先用化出平方项，再往后进行。

例14 证明正定矩阵之前先证明是对称矩阵（）。

见到行（列）满秩的矩阵可以想到按行（列）分块，拆成线性无关的向量组。

# 概率论与数理统计

# 第一章 随机事件与概率

认清既定事实，区分两种情况：

假设a、b两个箱子，a里有p个货物，b里有q个货物。

①从两个箱子中的货物中随机抽取一个；

②从两个箱子中随机抽取一个箱子，再从其中随机抽取一个货物；

则他来源于a箱子的概率为？

①可通过条件概率公式计算：。

②随机抽取箱子的行为是既定事实，与他来自于哪个箱子无关，因此只会是。

例10 概率不能作为事件的相等关系的依据，但是是判断独立的依据。0概率事件与任何事件都相互独立。

例15、例16 完备事件组下条件概率的全概率公式：

以两种情况的完备事件组为例：；

经典错误：。

# 第二章 随机变量及其分布函数

泊松定理：二项分布n大p小，则有近似。

例6 泊松分布是从开始的。

# 第三章 多维随机变量及其分布

二维正态分布：

，，其中均为常数，记作。

如服从二维正态分布，则X,Y均服从一维正态分布。

相互独立。

若，即两者不是线性关系，则也服从正态分布。

若X,Y均服从一维正态分布，且相互独立，则服从二维正态分布，且。

若X,Y均服从一维正态分布，但没说相互独立，不能保证服从二维正态分布。

时，

对z求导，则。

若X,Y独立，即，则。

例5 计算条件密度时，如果分母为0，条件密度不存在（不能看二维密度是0就说条件密度是0，X或Y的条件密度的定义域要求或）。

例16 通过计算概率密度时，应注意：的定义域仅限的部分。如果在某个区域内，应求出在定义域内的积分为1，从而推断出其余区域的。

# 第四章 随机变量的数字特征

例6 速算结论：

例10 具有加性质的随机变量，转化为。任何条件下均成立。

例11 求正态分布相关数字特征时，先化为标准正态求解，解出来带回去。

求二维的一种方法：

例13 同例10

# 第五章 大数定律和中心极限定理

例4 n有点大（一般）时就用中心极限定理。

# 第六章 数理统计的基本概念

一个正态总体：

①，；

②与相互独立，且，；

③；

④。

两个相互独立的正态总体：

①，；

②如果，则

③

例3 有限取值的离散型总体X服从。

则它的样本的概率分布

。

例4 独立的泊松分布的和的分布就是把λ相加。

例9 求正态分布相关数字特征时，先化为标准正态求解，解出来带回去。

例12 已知n个样本形成的n维概率密度，求其概率可以用n重积分。

# 第七章 参数估计

一个正态总体的估计：

已知估计：

，即置信区间。

未知估计：

，

即置信区间。

估计：

，即置信区间。

两个正态总体的估计：

已知，，估计：

，

即置信区间。

未知，，但，估计：

，。

，

即置信区间。设

化简得。

估计：

，

即置信区间，

即。

例5 已知不能推知，只能用分布律或概率密度算。

例15 用最大似然估计法时，若不能通过求驻点的方法求出似然函数的最大值，就应该从参数的范围上入手，取其范围内能使似然函数最大的值。

# 第八章 假设检验

例4 检验两个正态分布有无差异，先检验，再在下检验。

例5 如果给出的两个正态样本容量相同，问和的大小关系，则设，对新样本的在未知的情况下进行估计。