# 第一讲

n阶行列式计算结果为以这n个n维向量为邻边的n维图形的（有向）体积。

副对角线行列式：。

拉普拉斯展开式：。

行（列）和相等：加到同一行（列）。

对差别最小的行（列）处理出尽可能多的0元素。

按0元素多的行（列）展开。

加边法：。

递推法：建立和的关系。要有相同的元素分布，仅仅是n少了1。

数学归纳法：已知表达式，进行证明。

抽象行列式的计算：妙用。

，=，。

1000题错题

A组

4 行列式是 n+1阶，不是n阶。看清行列式的阶数。

B组

2 行和相等，往外提

11 ，不要当成k。

C组

2 。

# 第二讲（重要）

，。

的特征值：，的特征值：。（保持这个顺序）

主对角线元素之和：迹。

1000题错题

B组

4 初等行变换后，余子式也发生了变化，不能还按之前的计算。

C组

2 观察到所求行列式和A的伴随对称，并且少了一阶。所以转置，加边法。

# 第三讲

A的秩为1（行列成比例）

，

试算，。看是否等于kA或kE。

如果，或，则A可相似对角化。

分解：，。

初等变换

相似理论

E的妙用：

元素和代数余子式的关系：

三角分块阵：主对角线求逆，副对角线求逆并且换位置。

，

多余项：左乘同行，右乘同列，添负号。

对角分块阵求逆：主对角线矩阵原位置求逆，副对角线三角求逆并且都倒过来写。

舒尔公式：把一个普通分块阵，用初等分块阵，化为三角分块阵。

上三角：

（把第一行的倍加到第二行）

下三角：

（把第一列的倍加到第二列）

对角分块：

矩阵方程：可逆直接求逆，不可逆就看成方程组求解，看不成方程组的待定元素法，设出来代入求解。

n阶方阵A有：

例题错题：

3.11 把（的矩阵）和（矩阵的迹）联系起来：平方一下。

1000题错题：

A组

9 幂次n算错了

14 待定因子暴力破解

B组

6 特征值分析错误

9

13 矩阵提公因子直接提

# 第四章

左乘列满秩矩阵，右乘行满秩矩阵，矩阵的秩不变。

把矩阵看成向量组：

左乘矩阵相当于列分块，每一列都能用A的列向量表示。

。

右乘矩阵相当于行分块，每一行都能用A的行向量表示。

。

结论：。证明方法：同解。

证明：设，。

如果成立，易知一定成立。如果成立，则，即，向量模为0则向量为0，所以，也就是成立。所以和是同解方程组，。

注意：如A列满秩，可以得出可逆，但注意不要写，因为不能保证A行列相等，逆矩阵不一定存在。

1000题错题：

B组

4 用算秩，要分析s，不能想当然。，是二重根不能说明，所以不能说明。因为A不可相似对角化，所以的基础解系不能包含两个解向量，因此，。

# 第五章

设通解是

表示非齐次的任意解的是个线性无关的向量。

也可以用。

公共解：

给出两个方程组：联立。

给出一个方程组和一个解：把解代入方程组，求出系数关系。

给出两个解：两端相等。

齐次同解：，且的解满足（或者反过来）

三秩相等：

非齐次同解：用定义（的解全是的解，的解全是的解。）

可相似对角化的矩阵的秩等于非零特征值的个数。

1000题错题

B组

5 齐次方程组有非零解系数矩阵列不满秩。

C组

3 注意用了同一个字母n的意义。

6(2) 。

# 第六章

证明向量组无关：设，左乘A。

超过n个n维向量相关。

向量组等价：

定义：可以相互表出。

如果等秩，可以单方表出。

三秩相等。

向量空间的维数（基向量个数）不一定等于基向量的维数。

比如和是一个二维向量空间的基（但不是的基）

过渡矩阵

由到的过渡矩阵C：（C乘在右）

坐标变换公式：。

满足

例题错题

例6.6 左乘列满秩矩阵不改变矩阵的秩。向量组的秩等于向量个数，说明向量组线性无关。

1000题错题

A组

3 越乘秩越不大。

6 正交单位向量有两个方向的。

C组

3 用相似矩阵求n阶矩阵。

# 第七章

，，的特征向量均与A的特征向量相同，特征值做对应变换。

，，的线性组合（由于特征向量相同），特征值也做线性组合。

确定特征值的取值范围：。（只能确定取值范围，如果有多个根，不能确定特征值）

，B的特征值与A相同，B的特征向量为

（同样地，如果已知B的特征向量为，则A对应的特征向量为）

的特征值和A相同，但特征值要重新计算。

和A属于不同特征值的特征向量正交。

同一特征值的特征向量的（非零）线性组合仍然是对应的特征向量。

不同特征值的特征向量的线性组合不是任何特征值对应的特征向量。

创造可逆阵P，使得，得到相似矩阵，计算特征值和特征向量。

1000题错题

B组

9 审题：单位特征向量（）。

13 结论：矩阵和它的转置矩阵不同特征值对应的特征向量正交。

C组

1 审题：注意条件。

# 第八章

A可相似对角化的充要条件：。（证可相似对角化、反求秩）

特征根的重数和该特征根对应的线性无关的特征向量数相等。

实对称矩阵：不同特征值的特征向量正交。相同特征值的特征向量无关。

普通矩阵：不同特征值的特征向量无关。相同特征值的特征向量可能相关或无关。

（实对称矩阵特征值都是实数）

矩阵相似（不一定可以相似对角化）

（f是幂、伴随、逆的线性组合），，，。

实对称特征向量全部正交

普通矩阵的特征值不全部正交：线性无关的特征向量可能是不同特征值的特征向量，它们进行正交化之后不是任何特征值的特征向量。

证明：如果特征向量全部正交，则矩阵一定实对称（可证明）。

实对称矩阵（有很多很方便）

A为实对称矩阵为实对称矩阵（不能反推）

正交矩阵的特征值取值范围是1或。（取模证明）

# 第九章

矩阵合同：不一定相似）

实对称矩阵配方矩阵语言，C不一定是特征向量，也不一定是特征值。

配方法和正交变换法的结果不一样，但都是标准型。标准型不唯一。

化实对称矩阵：。（主对角线之外的地方平均一下）

最值：求最小值就把特征值都缩小到最小特征值，再取模。

（最大值同理）

正交变换不改变空间曲面的形状（长度不变），只改变方向和位置（）。

二次型曲面：

椭球面，单叶双曲面，双叶双曲面，

椭圆柱面，双曲柱面

合同的充要条件：正负惯性指数相等。

实对称矩阵相似一定合同。

求合同的C的方法：配方法，成对初等变换法。

写成平方和也不一定正定（线性变换不可逆，结果可能是0）。

1000题错题

C组

5 配方法的C不是正交阵，没有，列向量也不是特征向量，不是特征值。