# 第一章 函数极限连续

## 第一节 函数

复合函数：只有外层函数的定义域和内层函数的值域有交集的时候才能复合。

证明：在有限区间有界在该区间有界。

有界

转化公式：。

## 第二节 极限

数列极限：N项之后的无穷多项都落在A的邻域内。

函数极限：去心邻域内必须有定义。但。并可以。

，但，因为在0的邻域内总能取到0。因此极限不存在。并且因为在去心邻域内总有无定义的点，因此极限不存在。

等价代换加减条件：加减项不等价。

求：化为，求，则原式。

泰勒展开阶数：分式上下同幂，加减存在不为零项即可。

定积分法求n项和极限：提。

另一方法求：夹逼（用基本不等式，代入）

极限：根本思想处理分母使其为0。洛必达，等价无穷小，泰勒。

选填结论：，则。原理：拉格朗日。大题要证。

若，，则。（不要求）

极限：洛必达，上下同除以最高阶无穷大。

选填：抓大头

：通分（分式），有理化（根式），提无穷因子找等价。

数列极限不用化为函数极限，可以直接用拉格朗日中值定理。

。（）

。（）

型：尝试用拉格朗日中值定理化简。P26 例4

型：等价代换0，化为或。

型：凑基本极限，改写成指数，结论化为，求，则原式。

技巧：。

数列和极限适合夹逼：分母变化部分是主体部分的次量级

适合定积分定义：分母变化部分和主体部分是同量级

连乘：夹逼、取对数。

常用不等式：

①

②，

③，

④

递推数列不单调可先求初步结果再证明

需要把代入化简，证明，。

极限值必要复杂的话可以用字母代替，避免大量书写。

数列极限——级数

已知求多项式系数（根式、分式）：提出无穷大因子，从高次到低次各个击破。

选填：直接瞪眼法，挨个抓大头。

若在的某邻域内连续，且当时是x的m阶无穷小，是x的n阶无穷小，则当时，是x的阶无穷小。

简而言之，被积函数m阶，积分上限n阶，则积分阶。

上下限都变，抓低阶。

如果函数是奇函数，那它在0点处的等价无穷小一定是奇数次。偶函数则是偶数次。

## 第三节 连续

间断点：去心邻域内有定义，不连续

基本初等函数定义域内处处连续，初等函数定义区间内处处连续。

解答题讨论初等函数连续性时需要用得到上述条件（在无定义的点不连续，其余连续）。

判断间断点的时候要从原本的形式判断间断点，不能乱化简。

使用介值定理、最值定理的时候注意需要闭区间连续（开区间构造成闭区间）。

例题错题：

P6例2

P30例 计算错误

严选题错题：

9 求含抽象函数f的极限，用泰勒展开求导数最保险。

23、24 用三步法算出A后记得算。

28 审题

36(2) 型极限如果不是多项式的形式，首先考虑洛必达。

# 第二章 一元函数微分学

## 第一节

导数存在，导数极限不一定存在，导数不一定连续。

洛必达法则条件：分子分母导数连续。

最多可以用到几阶：

若f(x) n阶可导：最多出现。

若f(x) n阶连续可导：最多出现。

导数定义：凑趋于0的变量

存在且存在

证明存在连续导数：①处处可导②导数连续

内层外层导数都存在，可以用链导法，复合函数导数等于内外层导数乘积。

内外层存在某个导数不存在，不能说明复合函数导数不存在，必须要通过求复合函数后再判断该点导数。

求解隐函数高阶导数：利用原式对求出的低阶导数进行化简。

求参数方程在某点的二阶导数：用公式比较方便。

## 第二节 导数应用

微分方程确定的函数的极值：设一阶导数为0，求二阶导数。

渐近线：写成，可以用泰勒。

无穷大的转换：。

罗尔定理：闭区间连续，开区间可导，两端点值相等，则存在导数为0的点。

罗尔定理推论：区间上，则方程在区间内最多n个实根。

具有参数的方程实根问题：变形方程，分离参数，再构造函数，求导后不含参数。

题目给出函数和高阶导数：泰勒。展开点：提供函数和导数值信息多的点。

证明：用罗尔定理。

分析法：构造辅助函数，使。

微分方程法：求微分方程的通解，

则辅助函数。

欲证，令。

欲证，令。

欲证，令。

欲证，令。

有两问的题，解第二问记得用第一问的铺垫。

分析法构造函数时，合理使用常数（求导时会去掉），使得证明两端点相等更容易。

构造函数在端点无定义：补充定义使构造函数在端点处值等于极限值，也就连续。

双中值：

不要求：在同一区间上用两次中值定理（拉格朗日，柯西）

要求：将区间分为两个子区间，在两个子区间分别用拉格朗日。

把两个中值点分离开，分别用中值定理。

逆推法：先待定，写出，，代入到原方程，观察c的取值。要求这个c可以取到（通过零点定理可证明能取到）。

高阶导数：：泰勒（拉格朗日余项），在导数信息多的点展开（有函数值有导数值，取提供导数值的点）。

例题错题：

P59 例7 洛必达不能出现无法证明连续的导数。

P64 例 注意反函数求导的自变量取值。

P73 例2 计算错误

P83 注(3) 。

P85 注(3) 证明：微分方程法，求出两个通解，按照通解的形式即可构造出函数，用两次罗尔定理。

P90 注(2) 泰勒公式搞错了。绝对值不等式：

严选题错题：

1 审题

20 如果计算参数方程确定的导数，给出的是直角坐标的点，首先算出参数。

26 罗尔定理及其推论

28 计算错误

32 审题求导错误

45、46 公式法构筑函数：欲证，令。

47 根据题目给出的条件进行联系，用分析法构造函数。有时候罗尔定理需要专门设出在该点取的是极大值还是极小值，为后续证明提供方便。

题源探究5 斜渐近线化为，注意常数只有和有界项才能单独算，k上的常数项会影响b的结果，所以不能直接单独算。

# 第三章 一元函数积分学

## 第一节

，

。

，

，

,

.

分部积分：

幂函数乘指数、三角：把指数、三角放进去，可幂函数降次。

幂函数乘对数、反三角：把幂函数放进去，把对数、反三角化简开。

指数乘三角：都可以，但两次要一致。

积不出的积分：，，。（不是初等函数）

一定能积出的积分：

有理函数积分（部分分式法）（**加项减项拆，凑微分降幂**）

三角有理式积分（万能代换（sinx、cosx都是一次））（**三角变形，换元，分部**）

若（关于sinx的奇函数），令。

若（关于cosx的奇函数），令。

若（加两个负号值不变），令。

简单无理式积分，令。

## 第二节

求极限时，不能用积分中值定理写成，原因是c是一个和n有关的变量，不能断定。

复杂积分看不出怎么凑微分：对复杂部分求导，凑出另外部分。

区间再现：令，。

使用情景：被积函数原函数很难找到。（如）

或者

分部积分时，可以在积分变量里添加常数，值不变，使出现的乘积项好算。

顺序：反对幂指三。左边的求导，右边的积分。

分部积分：积分再现，积分抵消。

指数三角积分公式：（同理）

有理分式积分：代入几个特殊值求待定系数，比同次系数相等解方程好算。

表格法求乘积的积分：，一般是u是幂函数，求导n次变成0。

写表格：上边依次求导，下边依次积分：……

再按照对角乘起来，符号相间：

代入函数值求任意常数时，要注意该点是否有定义。如果无定义，需要利用连续性，用该点的极限值求。

柯西积分不等式：

同一区间积分值的比较：题目一般都是一个被积函数恒大于另一个，直接代入算。

变上限积分证明积分不等式：提供了单调性、导数信息。

联系函数值、导数值、积分：拉格朗日中值定理，积分中值定理

## 第三节

伽马函数：，两个反常积分（一个无界，一个无限）

递推公式：，

## 第四节

旋转体体积：，。

旋转体侧面积：

例题错题：

P97 例4 计算错误

P99 例12 若（加两个负号值不变），令。

P106 例1 计算错误

P117 例9 代入函数值求任意常数时，要注意该点是否有定义。如果无定义，需要利用连续性，用该点的极限值求。

P121 例5 联系函数值、导数值、积分：拉格朗日中值定理，积分中值定理，变限积分。

P122 例6 添1凑柯西积分不等式：

证明积分不等式的时候要构造变限积分，不能只从条件写定积分。

P126 例1 计算错误

P127 例3 灵活交换指数。

P130 例2 定积分计算错误。旋转体体积：对的二重积分

使用华莱士公式时，如果不是区间，注意正负号。

严选题错题：

12 审题。

14 计算错误。。

32 求平均忘记除以区间长度。

37 注意积分上下限，符号错误。

40 计算错误，第一类换元少了系数。

55(2) 计算错误。有很多分数需要通分时，先按因子分类计算初步结果，再通分。

57 计算错误。

61(2) 计算错误，绕极轴（x轴）旋转体的体积应该对y积分。

# 第四章 微分方程

通解：任意常数的个数等于微分方程的阶。

解：积分曲线

常系数非齐次。

欧拉方程：

令，。

看不出形式：对调xy或变量代换（）。

对含未知函数的项进行除的时候可能会丢解，要保证除的不为0，或者单独判断。

知道通解求方程（不一定是常系数）：用y求出y’、y’’，消去任意常数。

积分方程：通过积分式定出初始条件。

函数方程：利用导数定义，把函数方程化为微分方程。

最好能积分出来一个任意常数就解出来一个。

例题错题：

P143 例1(5) 计算错误

P144 例2(2) 计算错误

P145 例3(7) 知道通解求方程（不一定是常系数）：用y求出y’、y’’，消去任意常数。

P147 例3 ：两边求导，消去含的项。

严选题错题：

18 算非齐次方程特解的时候要用非齐次的通解，不能直接用齐次的通解求任意常数。

21 计算错误

23 处理的一种办法：将其除到另一侧看成分母，凑出的导数。

29

30(2) 计算错误

32 计算错误，没有看出来变量可分离

33 是齐次方程，平方了再算反而算不出来。（如果方程里存在项，但是x和y是齐次的，考虑开平方拆开）。

# 第五章 多元函数微分学

## 第一节 重极限 连续 偏导数 全微分

重极限存在：任意方式

多元没有洛必达

多元极限：取绝对值放缩

。

全微分的等价形式：

1.

2.

3.

4.

定义判定可微性两部曲：

A. 偏导数，是否存在？

B. 是否为0？

## 第二节 偏导数与全微分的计算

隐函数：就能说明这个方程确定了z是x、y的函数。

全微分方程：

偏积分：一个偏导数积分求出u，再对另一个求导，相等。

凑微分：分组凑。

先看凑微分好不好凑。

多重复合函数、隐函数求偏导数：微分形式不变性

对所有函数求全微分，求什么留什么，别的消掉。

## 第三节 极值与最值

化简目标函数：求导方便。

条件极值证明不等式：用一段作为约束条件等于k，证明另一端的最大（小）值小（大）于k。

海伦公式：三角形周长2p，三边长a、b、c，面积

例题错题

P169 例10

P176 例6 不能说明。

P182 例7 基本不等式：算术平均值小于等于几何平均值。

严选题错题

4 等价无穷小对象搞错了，，是有界量。

15 计算错误。漏了负号。

18 计算错误

25 。

29 计算错误

47 解拉格朗日方程组：在把和消掉，化为含x、y、z的三个三元方程。

48 如果两个约束条件都是齐次的，可以计算，能把约束条件代入，只留常数。

52 构造函数，使定义域内能证明存在极值点。

题源探究 10 计算错误

# 第六章 二重积分

## 第一节

二重积分方法选取：主要看函数，适合极坐标就极坐标。

没给出具体形式的抽象函数：利用奇偶性、对称性。

排除：设具体函数，设参数。

对y积分：做的线。对x积分：做的线。  
对积分：做的线。对r积分：做的线。（极坐标的坐标线）  
极坐标累次积分交换次序：也可以放到的直角坐标下。

证明二重积分等于定积分：化成累次积分，证明等于定积分（变量代换、交换次序等方法）。

例题错题

P191 例13 。

P193 例4 三角函数积分，符号计算错误。

严选题错题

17 在二重积分的内层积分中利用几何意义化简：。

22 三角函数积分，符号计算错误。

25 积分计算错误。

27 积分计算错误：被积函数看错了。

28 审题错误（）

32 积分计算错误：算术通分错误。

# 第七章 无穷级数

## 第一节

正项级数的积分判别法：是单调减，非负的连续函数，且，则与同敛散。

比较判别法和极限形式：不方便，但是适用范围宽（，）。

比值和根值判别法：方便，但是适用范围窄。（存在，，时可以判断）。

莱布尼茨准则：不能倒过来（已知交错级数收敛，推不出绝对值递减）。

条件给出，化为除的形式，用比较判别法。

用比值、根值算出，绝对值级数发散，就可以说明原级数发散

等价代换只能用在正项级数

## 第二节

收敛区间：开区间

条件收敛的点：收敛区间的端点

级数四则运算之后的收敛域一定包含，，但不一定收敛域就是。

可导：收敛区间（排除端点）。连续可积：收敛域。

直接展开法：求n阶导数，考察泰勒公式余项是否为0。

间接展开法：从已知展开式利用性质求展开。

求和函数要说明收敛域

多拆项，少求导积分。

注意首项。

除以x的时候要单独判断。

幂级数求和函数：求导数建立微分方程。

## 第三节

幂级数展开：任意阶可导。（要求很高）

傅里叶展开：满足狄利克雷收敛定理就可以。

傅里叶展开的间断点要用收敛定理判断。

不需要必须用0点对称周期的表达式，只要是一个周期就可以傅里叶展开。

例题错题

P217 例1(4)(5)(6) 注意收敛域端点的判定。交错的调和级数收敛。端点的级数收敛，函数也要有定义。

P220 例1(1) 级数求和时要先判断收敛域。和函数有定义的点直接写和函数，和函数无定义、但级数收敛的点需要从级数或者和函数的极限入手，特殊判断。

常用公式：。

严选题错题

29 已知算要带上常数。

30 求导过去忘了积分回来。

39 微分方程不会解

# 第八章

## 第一节

混合积：

轮换对称、交换变号：

混合积的几何应用：；判断三向量共面。

## 第二节

求直线方程：往往是用两平面交线表示更好算。

过某直线的平面束方程：。

代入直线外一点，解出，即可求出过直线和该点的平面方程。

判断空间内两直线相交：任取两直线上各一点A、B，计算混合积。

如果不为零，那么两直线距离。

直线绕坐标轴转：旋转面上一点和对应曲线上一点的关系：某个坐标相同，到旋转轴距离相同。联立消去直线上点的坐标。

以任意一条空间直线L为母线的柱面方程：设位于准线曲线上，则可设出过P且与L平行的直线方程。消去，使结果具有一般性，即为柱面方程。

曲线的切向量：

，切向量：，其中，为两平面法向量。

证明曲线是柱面：法向量和某个向量恒垂直。

角平分线向量：

## 第五节

方向导数：若可微，则（方向向量要单位化）

方向导数的几何意义：截面切线的斜率。

梯度（向量）：方向指向方向导数最大的方向，模等于方向导数最大值。

例题错题：

P233 例2 平面束方程。

P235 例1 异面直线距离：（）

P238 例2柱面方程。

P239 例 求投影曲线时应注意自变量的取值范围。

严选题错题：

5 切向量、方向导数搞错了

题源探究9 微分方程解错了

# 第九章

## 第一节

被积函数是一元函数，并且面积好算：先二后一。

柱坐标先后相当于直角坐标先一后二。先后相当于先二后一。

写空间曲线参数方程：先写投影曲线的参数方程（两个变量），再写另一个。

三重积分交换次序：在二重积分上交换（只考虑两个变量）可以避免画三维图形。

两类面积分的联系：

。

补线用格林公式可以直接写，里边不用抄。

斯托克斯公式：如果被积函数是平面就用行列式（第一类）形式（方向余弦是常数）。如果被积函数不是平面就写成第二类面积分的形式。

空间第二类线积分降维平面线积分：把所有z都换成。方向保持一致。

第二类线面积分奇偶性反过来：关于坐标面奇函数变成二倍，偶函数变成0。

注意只有线面积分可以直接带进去，三重积分不能代入。

第二类积分出现奇异点：挖洞用格林公式、高斯公式，证明路径无关。

## 第二节

标量的梯度是向量：

向量的散度是标量：

向量的旋度是向量：

例题错题

P258 例5 格林公式是，不要无脑把后边的偏导数减前边的偏导数。

P263 例3 面积分可以用几何意义化简为一重积分。

P266 例5 一二类面积分的转化：

。

积分面。的单位向量（方向与有向曲面的方向一致）。

严选题错题

8 椭球不具有轮换对称性，只能用常规方法求。

12 定积分符号计算错误。

16 二重积分计算错误（先化简，再化累次积分）。

18 第一型线积分计算错误。

23 补线的方向错误。

25 顺时针的曲线用格林公式要加负号。

28 求导错误。

34 投影平面面积错误（三维平面投影成二维平面，面积要乘以）

37 投影暗示了这个积分应该用直接法做。