Perceptron multi-couche

Apprentissage et reconnaissance – GIF-4101 / GIF-7005

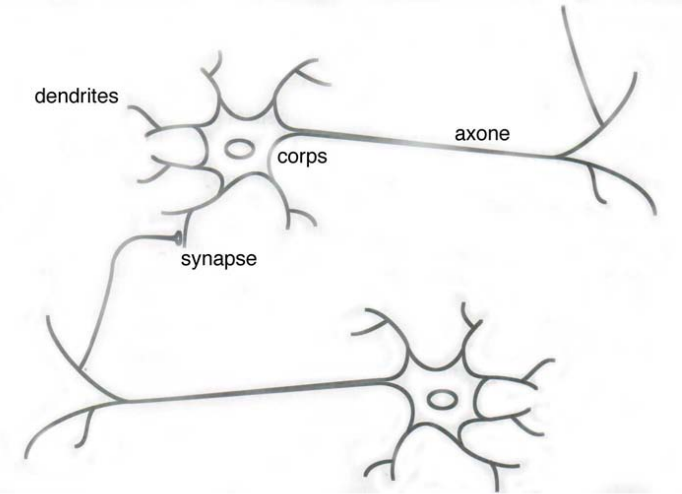
Professeur : Christian Gagné

Semaine 13 : 2 décembre 2011

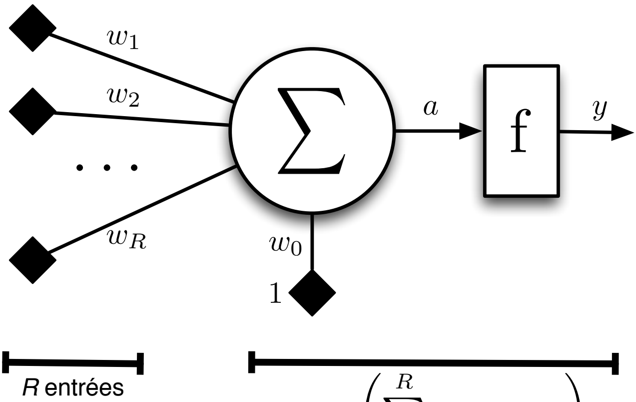
Intelligence naturelle

- Cerveau : siège de l'intelligence naturelle
  - Calculs parallèles et distribués
  - Apprentissage et généralisation
  - Adaption et contexte
  - Tolérant aux fautes
  - Faible consommation d'énergie
- Machine computationelle biologique !

Neurone biologique



Modèle de neurone artificiel

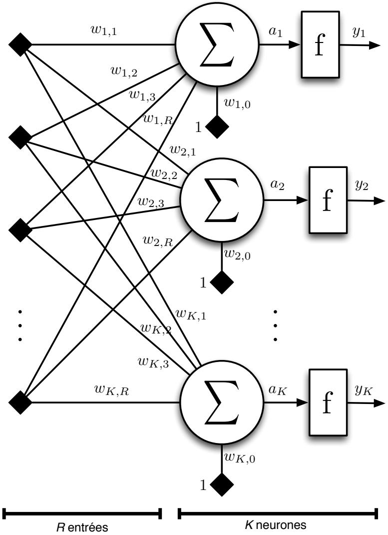


$$y = \mathrm{f}\left(\sum_{t=1}^{R} w_i x_i + w_0 \right)$$

Réseau de neurones

- Chaque neurone est un discriminant linéaire avec une fonction de transfert f
$$y = \mathrm{f}\left(\sum_i w_i x_i + w_0\right) = \mathrm{f}(\mathbf{w}^T\mathbf{x} + w_0)$$
- Exemples de fonctions de transfert
  - Fonction linéaire : $\mathrm{f}_{lin}(a) = a$
  - Fonction sigmoïde : $\mathrm{f}_{sig}(a) = \frac{1}{1+\exp(-a)}$
  - Fonction seuil : $\mathrm{f}_{seuil}(a) = 1$ si $a \geq 0$ et $\mathrm{f}_{seuil}(a) = 0$ autrement
- Plusieurs neurones connectés ensembles forment un réseau de neurones
  - Réseau à une couche : neurones connectés sur les entrées
  - Réseau à plusieurs couches : certains neurones sont connectés sur les sorties d'autres neurones

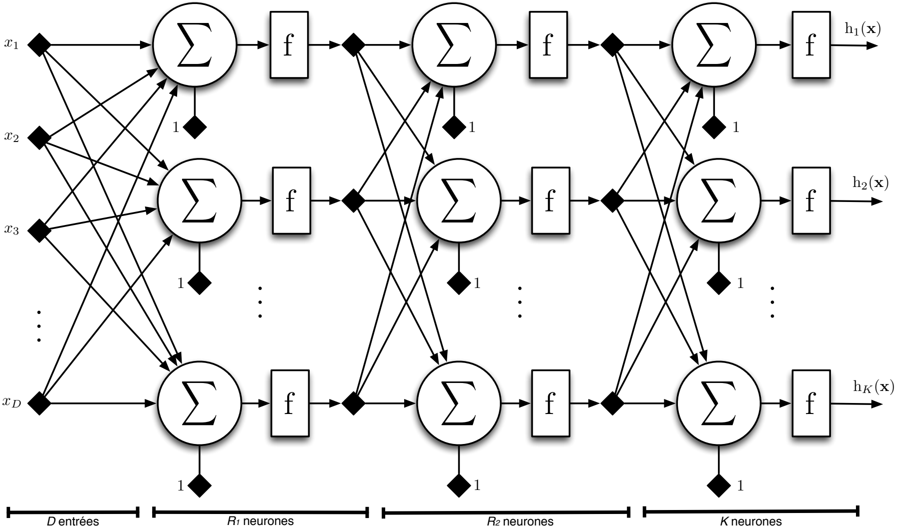
Réseau de neurones (une couche)



Perceptron multi-couche

- Réseau à une couche : ensemble de discriminants linéaires
  - Incapable de classer correctement des données non-linéairement séparables
- Réseau à plusieurs couches (perceptron multi-couche)
  - Discriminants linéaires (neurones) cascadés à la sortie d'autres discriminants linéaires
  - Capable de classer des données non-linéairement séparables
  - Ensemble de classifieurs simples
  - Chaque couche fait une projection dans un nouvel espace
- Lors du traitement de données, l'information se propage des entrées vers les sorties

Perceptron multi-couche

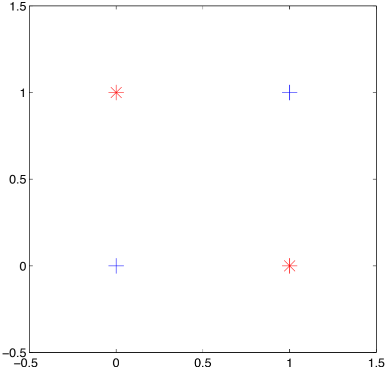


Problème du XOR

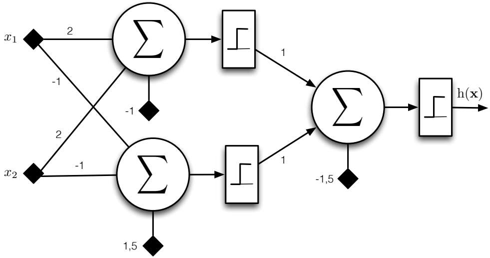
- Problème du XOR

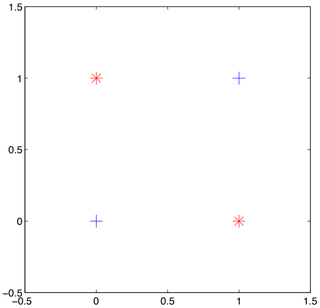
$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{x}_1 = [0\ 0]^T & r_1 = 0 \\
\mathbf{x}_2 = [0\ 1]^T & r_2 = 1 \\
\mathbf{x}_3 = [1\ 0]^T & r_3 = 1 \\
\mathbf{x}_4 = [1\ 1]^T & r_4 = 0
\end{array}
$$

- Exemple de données non-linéairement séparables



Réseau pour le problème du XOR

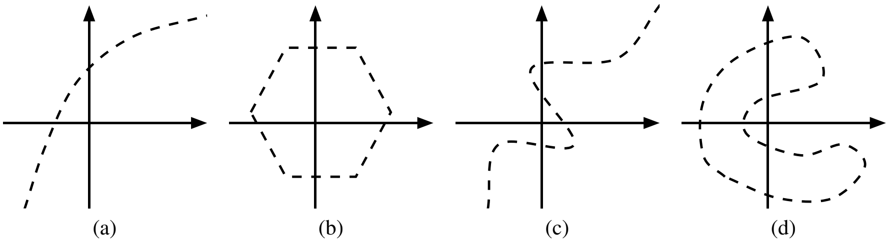




Topologies de réseaux

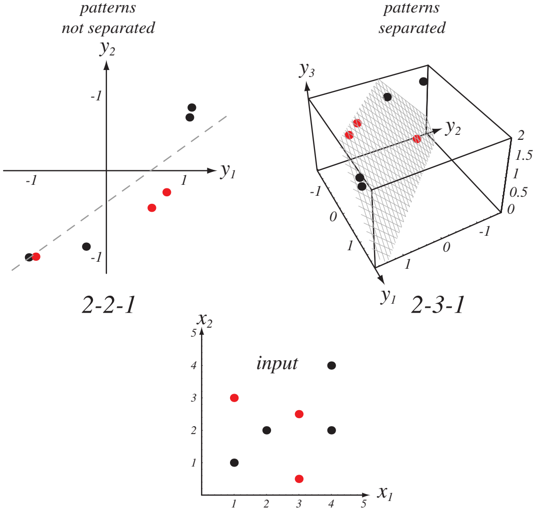
- Selon la topologie de réseau utilisé, différentes frontières de décisions sont possibles
  - Réseau avec une couche cachée et une couche de sortie : frontières convexes
  - Deux couches cachées ou plus : frontières concaves
    - Le réseau de neurones est alors un approximateur universel
- Nombre de poids (donc de neurones) détermine directement la complexité du classifieur
  - Détermination de la bonne topologie est souvent *ad hoc*, par essais et erreurs

Formes de frontières de décision



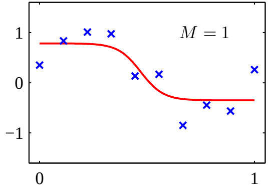
Exemples de frontières de décision : (a) convexe ouverte ; (b) convexe fermée ; (c) concave ouverte ; et (d) concave fermée

Nombre de neurones sur la couche cachée

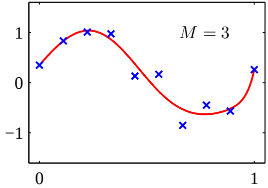


Tiré de *R.O. Duda, P.E. Hart, D.G. Stork, Pattern Classification, Wiley Interscience, 2001.*

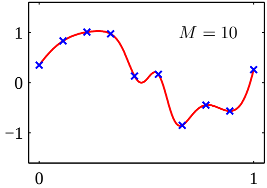
Nombre de neurones sur la couche cachée



1-1-1



1-3-1



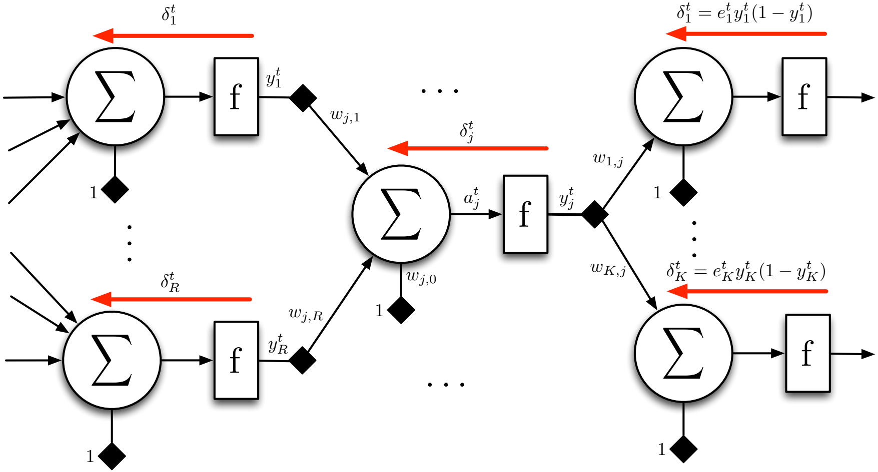
1-10-1

Tiré de *C. M. Bishop, Pattern Recognition and Machine Learning, Springer, 2006.*

Rétropropagation des erreurs

- Apprentissage avec le perceptron multi-couche : déterminer les poids $\mathbf{w}, w_0$ de tous les neurones
- Rétropropagation des erreurs
  - Apprentissage par descente du gradient
  - Couche de sortie : correction guidée par l'erreur entre les sorties désirées et obtenues
  - Couches cachées : correction selon les sensibilités (influence du neurone sur l'erreur dans la couche de sortie)

Rétropropagation des erreurs



Valeurs de sortie des neurones

- Valeur y_j^t du neurone j pour la donnée $\mathbf{x}^t$

$$y_j^t = \mathrm{f}(a_j^t) = \mathrm{f}\left(\sum_{i=1}^{R} w_{j,i} y_i^t + w_{j,0}\right)$$

  - f : fonction d'activation du neurone
  - $a_j^t = \sum_{i=1}^{R} w_{j,i} y_i^t + w_{j,0}$: sommation pondérée des entrées du neurone
  - $w_{j,i}$: poids du lien connectant le neurone j au neurone i de la couche précédente
  - $w_{j,0}$: biais du neurone j
  - y_i^t : sortie du neurone i de la couche précédente pour la donnée $\mathbf{x}^t$
  - R : nombre de neurones sur la couche précédente

Erreur de la couche de sortie

- Un ensemble de données $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^t, \mathbf{r}^t\}_{t=1}^N$, avec $\mathbf{r}^t = [r_1^t \; r_2^t \; \ldots \; r_K^t]^T$, où $r_j^t = 1$ si $\mathbf{x}^t \in C_j$, autrement $r_j^t = 0$
- Erreur observée pour donnée $\mathbf{x}^t$ sur neurone j de la couche de sortie

$$e_j^t = r_j^t - y_j^t$$

- Erreur quadratique observée pour donnée $\mathbf{x}^t$ sur les K neurones de la couche de sortie (un neurone par classe)

$$E^t = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K} (e_j^t)^2$$

- Erreur quadratique moyenne observée pour les données du jeu $\mathcal{X}$

$$E = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} E^t$$

Correction de l'erreur pour la couche de sortie

- Correction des poids par descente du gradient de l'erreur quadratique moyenne

$$\Delta w_{j,i} = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{j,i}} = -\frac{\eta}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{\partial E^t}{\partial w_{j,i}}$$

- L'erreur du neurone j dépends des neurones de la couche précédente
  - Développement en utilisant la règle du chaînage des dérivées ($\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^t}{\partial w_{j,i}} &= \frac{\partial E^t}{\partial e_j^t} \frac{\partial e_j^t}{\partial y_j^t} \frac{\partial y_j^t}{\partial a_j^t} \frac{\partial a_j^t}{\partial w_{j,i}} \\ \frac{\partial E^t}{\partial w_{j,0}} &= \frac{\partial E^t}{\partial e_j^t} \frac{\partial e_j^t}{\partial y_j^t} \frac{\partial y_j^t}{\partial a_j^t} \frac{\partial a_j^t}{\partial w_{j,0}} \end{aligned}$$

Calcul des dérivées partielles

- Développement avec fonction d'activation sigmoïde ($y_j^t = \frac{1}{1+\exp(-a_j^t)}$)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E^t}{\partial e_j^t} &= \frac{\partial}{\partial e_j^t} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K} (e_j^t)^2 = e_j^t \\
\frac{\partial e_j^t}{\partial y_j^t} &= \frac{\partial}{\partial y_j^t} r_j^t - y_j^t = -1 \\
\frac{\partial y_j^t}{\partial a_j^t} &= \frac{\partial}{\partial a_j^t} \frac{1}{1+\exp(-a_j^t)} = \frac{exp(-a_j^t)}{[1+exp(-a_j^t)]^2} \\
&= \frac{1}{1+exp(-a_j^t)} \frac{exp(-a_j^t)+1-1}{1+exp(-a_j^t)} = y_j^t(1-y_j^t) \\
\frac{\partial a_j^t}{\partial w_{j,i}} &= \frac{\partial}{\partial w_{j,i}} \sum_{i=1}^{R} w_{j,i} y_i^t + w_{j,0} = y_i^t \\
\frac{\partial a_j^t}{\partial w_{j,0}} &= \frac{\partial}{\partial w_{j,0}} \sum_{i=1}^{R} w_{j,i} y_i^t + w_{j,0} = 1
\end{aligned}
$$

Apprentissage pour la couche de sortie

- Apprentissage des poids de la couche de sortie

$$
\begin{aligned}
\Delta w_{j,i} &= -\frac{\eta}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial E^t}{\partial w_{j,i}} = -\frac{\eta}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial E^t}{\partial e_j^t}\frac{\partial e_j^t}{\partial y_j^t}\frac{\partial y_j^t}{\partial a_j^t}\frac{\partial a_j^t}{\partial w_{j,i}} \\
&= \frac{\eta}{N}\sum_{t=1}^{N} e_j^t y_j^t (1 - y_j^t) y_i^t
\end{aligned}
$$

- Apprentissage des biais de la couche de sortie

$$
\begin{aligned}
\Delta w_{j,0} &= -\frac{\eta}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial E^t}{\partial w_{j,0}} = -\frac{\eta}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial E^t}{\partial e_j^t}\frac{\partial e_j^t}{\partial y_j^t}\frac{\partial y_j^t}{\partial a_j^t}\frac{\partial a_j^t}{\partial w_{j,0}} \\
&= \frac{\eta}{N}\sum_{t=1}^{N} e_j^t y_j^t (1 - y_j^t)
\end{aligned}
$$

Règle du delta

- Poser un delta δ_j^t, qui corresponds au *gradient local* du neurone j pour la donnée $\mathbf{x}^t$

$$\begin{aligned}
\delta_j^t &= e_j^t y_j^t (1 - y_j^t) \\
\Delta w_{j,i} &= \frac{\eta}{N} \sum_{t=1}^{N} \delta_j^t y_i^t \\
\Delta w_{j,0} &= \frac{\eta}{N} \sum_{t=1}^{N} \delta_j^t
\end{aligned}$$

- Formulation utile pour correction de l'erreur sur les couches cachées

Correction de l'erreur pour les couches cachées

- Gradient de l'erreur pour les couches cachées

$$\frac{\partial E^t}{\partial w_{j,i}} = \frac{\partial E^t}{\partial y_j^t} \frac{\partial y_j^t}{\partial a_j^t} \frac{\partial a_j^t}{\partial w_{j,i}}$$

- Seul $\frac{\partial E^t}{\partial y_j^t}$ change, $\frac{\partial y_j^t}{\partial a_j^t}$ et $\frac{\partial a_j^t}{\partial w_{j,i}}$ sont les même que sur la couche de sortie
  - Erreur pour un neurone de la couche cachée dépend de l'erreur des neurones k de la couche suivante (rétropropagation des erreurs)

$$E^t = \frac{1}{2} \sum_k (e_k^t)^2$$

$$\frac{\partial E^t}{\partial y_j^t} = \frac{\partial}{\partial y_j^t} \frac{1}{2} \sum_k (e_k^t)^2 = \sum_k e_k^t \frac{\partial e_k^t}{\partial y_j^t}$$

Correction de l'erreur pour les couches cachées

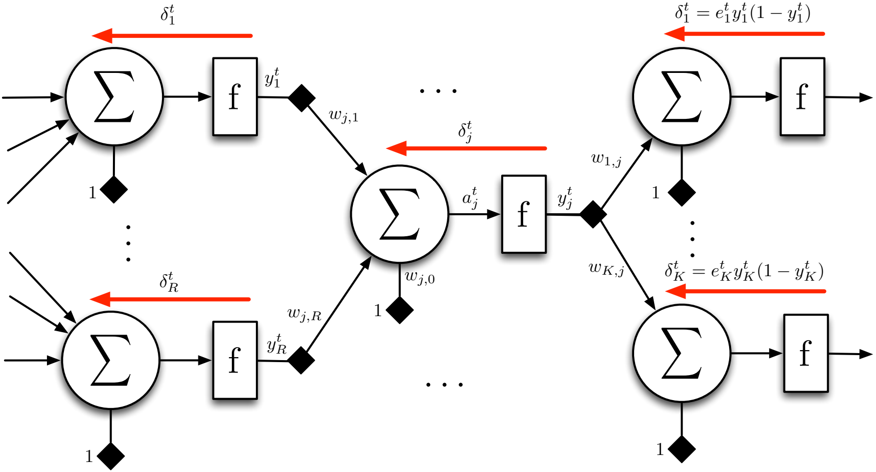
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E^t}{\partial y_j^t} &= \frac{\partial}{\partial y_j^t} \frac{1}{2} \sum_k (e_k^t)^2 = \sum_k e_k^t \frac{\partial e_k^t}{\partial y_j^t} \\
&= \sum_k e_k^t \frac{\partial e_k^t}{\partial a_k^t} \frac{\partial a_k^t}{\partial y_j^t} \\
&= \sum_k e_k^t \frac{\partial (r_k^t - y_k^t)}{\partial a_k^t} \frac{\partial \left(\sum_l w_{k,l} y_l^t + w_{k,0} \right)}{\partial y_j^t} \\
&= \sum_k e_k^t [-y_k^t (1 - y_k^t)] w_{k,j} \\
\delta_k^t &= e_k^t [y_k^t (1 - y_k^t)] \\
\frac{\partial E^t}{\partial y_j^t} &= -\sum_k \delta_k^t w_{k,j}
\end{aligned}
$$

Correction de l'erreur pour les couches cachées

- Correction de l'erreur correspondante

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E^t}{\partial w_{j,i}} &= \frac{\partial E^t}{\partial y_j^t} \frac{\partial y_j^t}{\partial a_j^t} \frac{\partial a_j^t}{\partial w_{j,i}} \\
&= -\left[\sum_k \delta_k^t w_{k,j}\right] y_j^t(1-y_j^t) y_i^t \\
\delta_j^t &= y_j^t(1-y_j^t) \sum_k \delta_k^t w_{k,j} \\
\Delta w_{j,i} &= -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{j,i}} = -\frac{\eta}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{\partial E^t}{\partial w_{j,i}} = \frac{\eta}{N} \sum_{t=1}^{N} \delta_j^t y_i^t \\
\Delta w_{j,0} &= -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{j,0}} = -\frac{\eta}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{\partial E^t}{\partial w_{j,0}} = \frac{\eta}{N} \sum_{t=1}^{N} \delta_j^t
\end{aligned}
$$

Rétropropagation des erreurs



Apprentissage batch et en-ligne

- Apprentissage batch
  - Guidé par l'erreur quadratique moyenne ($E = \frac{1}{N} \sum_t E^t$)
  - Correction des poids une fois à chaque époque, en calculant l'erreur pour tout le jeu de données
  - Relative stabilité de l'apprentissage
- Apprentissage en-ligne
  - Correction des poids pour chaque présentation de données, donc N corrections de poids par époque
  - Guidé par l'erreur quadratique de chaque donnée (E^t)
  - Requiert la permutation de l'ordre de traitement à chaque époque pour éviter les mauvaises séquences
  - Apprentissage en-ligne est plus rapide qu'en mode batch, mais avec risque de plus grandes instabilités

Saturation des neurones

- Plage opératoire des neurones avec fonction sigmoïde autours de 0
  - Pour valeurs de a faibles $\mathrm{f}_{sig}(a) \rightarrow 0$, et pour valeurs de a élevée, $\mathrm{f}_{sig}(a) \rightarrow 1$

$$\mathrm{f}_{sig}(1) = 0{,}7311, \quad \mathrm{f}_{sig}(5) = 0{,}9933, \quad \mathrm{f}_{sig}(10) \approx 1$$

- Pour valeurs grandes/petites, disons $x < -10$ ou $x > 10$, gradient pratiquement nul
  - Apprentissage extrêmement lent
- Valeurs d'entrées, les $\mathbf{x}^t$, doivent être normalisées au préalable dans $[-1, 1]$
  - Typiquement, normalisation selon valeurs min et max du jeu de données pour chaque dimension
  - Appliquer la même normalisation aux données évaluées (ne pas recalculer la normalisation)

Valeurs désirées en sortie

- En classement, valeurs désirées $r_i^t \in \{0, 1\}$
  - Souffre également du problème de saturation des neurones avec fonction sigmoïde
  - On vise à approximer les r_i^t avec les neurones de la couche de sortie

$$\mathrm{f}_{sig}(a) = 0 \;\Rightarrow\; a \to -\infty, \quad \mathrm{f}_{sig}(a) = 1 \;\Rightarrow\; a \to \infty$$

- Solution : transformer les valeurs désirées en valeurs $\tilde{r}_i^t \in \{0{,}05, 0{,}95\}$
  - Si $\mathbf{x}^t \in C_i$ alors $\tilde{r}_i^t = 0{,}95$
  - Autrement $\tilde{r}_i^t = 0{,}05$

Initialisation des poids

- Les poids et biais d'un perceptron multi-couche sont initialisés aléatoirement
  - Typiquement, on initialise les poids et biais uniformément dans $[-0{,}5, 0{,}5]$
$$w_{j,i} \sim \mathcal{U}(-0{,}5,\ 0{,}5),\ \forall i,j$$
- Perceptron multi-couche est donc un algorithme stochastique
  - D'une exécution à l'autre, on n'obtient pas nécessairement les mêmes résultats

Algorithme de rétropropagation

1. Normaliser données d'entraînement $x_i^t \in [-1{,}1]$ et sortie désirées $\tilde{r}_j^t \in \{0{,}05, 0{,}95\}$
2. Initialiser les poids et biais aléatoirement, $w_{i,j} \in [-0{,}5, 0{,}5]$
3. Tant que le critère d'arrêt n'est pas atteint, répéter :
   1. Calculer les sortie observées en propageant les données vers l'avant
   2. Calculer les erreurs observées sur la couche de sortie

$$e_j^t = \tilde{r}_j^t - y_j^t, \quad j = 1, \ldots, K, \quad t = 1, \ldots, N$$

   3. Ajuster les poids et biais en rétropropageant l'erreur observée

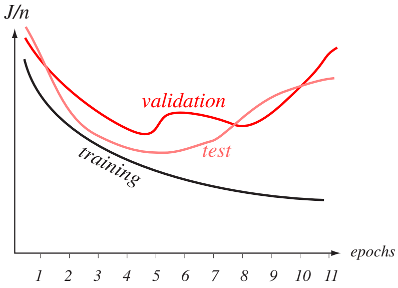
$$\begin{aligned} w_{j,i} &= w_{j,i} + \Delta w_{j,i} = w_{j,i} + \frac{\eta}{N} \sum_t \delta_j^t y_i^t \\ w_{j,0} &= w_{j,0} + \Delta w_{j,0} = w_{j,0} + \frac{\eta}{N} \sum_t \delta_j^t \end{aligned}$$

où le gradient local est défini par :

$$\delta_j^t = \begin{cases} e_j^t y_j^t (1 - y_j^t) & \text{si } j \in \text{couche de sortie} \\ y_j^t (1 - y_j^t) \sum_k \delta_k^t w_{k,j} & \text{si } j \in \text{couche cachée} \end{cases}$$

Surapprentissage et critère d'arrêt

- Nombre d'époques : facteur déterminant pour le surapprentissage
- Critère d'arrêt : lorsque l'erreur sur l'ensemble de validation augmente (généralisation)
- Requiert utilisation d'une partie des données de l'ensemble pour la validation



Tiré de *R.O. Duda, P.E. Hart, D.G. Stork, Pattern Classification, Wiley Interscience, 2001.*

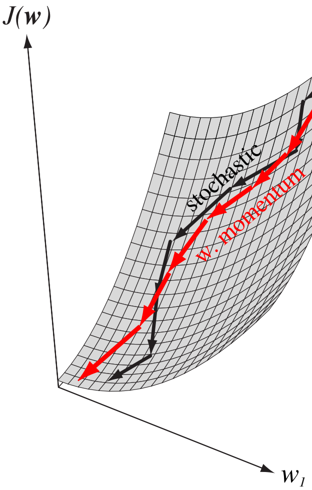
Momentum

- Régle du delta généralisée

$$\begin{aligned} w_{j,i}(n) &= w_{j,i}(n-1) + \frac{\eta}{N} \sum_t \delta_j^t y_i^t + \alpha \Delta w_{j,i}(n-1) \\ w_{j,0}(n) &= w_{j,0}(n-1) + \frac{\eta}{N} \sum_t \delta_j^t + \alpha \Delta w_{j,0}(n-1) \end{aligned}$$

- Facteur $\Delta w_{j,i}(n-1)$ est la correction effectuée au poids/biais à l'époque précédente
- Paramètre $\alpha \in [0{,}5, 1]$ est nommé *momentum*
- Donne une « inertie » à la descente du gradient, en incluant une correction provenant des itérations précédentes
- Avec momentum, le facteur $\Delta w_{j,i}(n-1)$ dépend lui-même de la correction de l'itération précédente $\Delta w_{j,i}(n-2)$, et ainsi de suite

Momentum



Tiré de *R.O. Duda, P.E. Hart, D.G. Stork, Pattern Classification, Wiley Interscience, 2001.*

Régression avec perceptron multi-couche

- Algorithme de rétropropagation développé ici pour fonction de transfert sigmoïde, pour le classement
  - D'autres fonctions de transfert peuvent être utilisées
    - Fonction linéaire : $\mathrm{f}_{lin}(a) = a$
    - Fonction tangente hyperbolique : $\mathrm{f}_{tanh}(a) = \tanh(a)$
  - En fait, toutes fonctions continues dérivables sur $\mathbb{R}$ peuvent être utilisées
- Perceptron multi-couche approprié pour de la régression
  - Topologie conseillée : une couche cachée avec fonction sigmoïde et une couche de sortie avec fonction linéaire
  - Critère de l'erreur quadratique moyenne approprié pour la régression

Méthode du deuxième ordre

- La descente du gradient est une méthode du premier ordre (dérivées premières)
- Possibilité de faire mieux avec des méthodes du deuxième ordre
- Méthode de Newton
  - Basé sur l'expansion de la série de Taylor du deuxième ordre, $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ un point dans le voisinage de $\mathbf{x}$

$$F(\mathbf{x}') = F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx F(\mathbf{x}) + \nabla F(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T \nabla^2 F(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = \hat{F}(\mathbf{x})$$

  - Recherche un plateau dans l'erreur quadratique $\hat{F}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \nabla F(\mathbf{x}) + \nabla^2 F(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = 0 \\ \Delta\mathbf{x} &= -(\nabla^2 F(\mathbf{x}))^{-1} \nabla F(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

  - Calcul de l'inverse de la matrice Hessienne ($(\nabla^2 F(\mathbf{x}))^{-1}$) coûteux en calculs
  - Méthode du gradient conjugué évite le calcul de l'inverse de la matrice Hessienne

Fonctions de base radiale

- Fonctions de base radiale (RBF : *Radial Basis Functions*)

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}_i\|^2}{2s_i^2}\right]$$

- Consiste en une fonction gaussienne centrée sur $\mathbf{m}_i$ avec une influence locale paramétrée par s_i
  - À strictement parler, ce n'est pas une densité de probabilité de loi multinormale ($\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \neq 1$)
- Idée : chaque fonction gaussienne capture un groupe de données dans un certain voisinage
- Avec R fonctions gaussiennes, projection dans un espace à R dimensions

$$\phi = [\phi_1 \ \ldots \ \phi_R]^T : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^R$$

Discrimination avec fonctions gaussiennes

- Discrimination avec R fonctions gaussiennes (K classes)

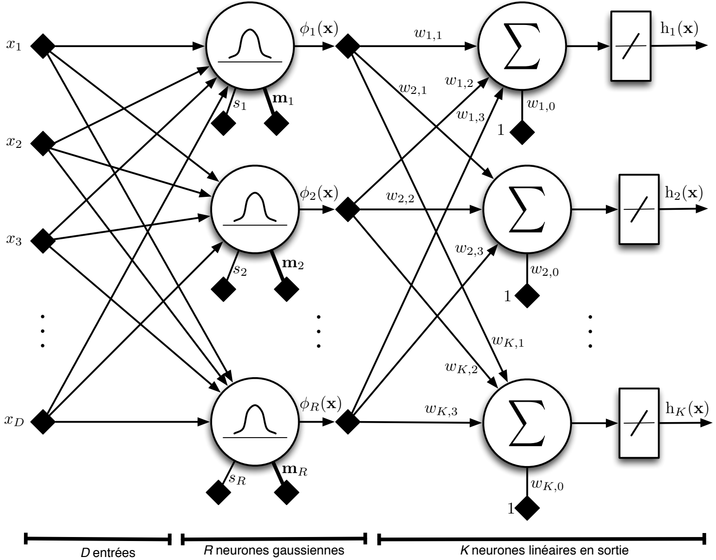
$$\mathrm{h}_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{R} w_{j,i}\phi_i(\mathbf{x}) + w_{j,0} = \sum_{i=1}^{R} w_{j,i} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}_i\|^2}{2s_i^2}\right] + w_{j,0}$$

- Paramètres du discriminant à estimer
  - Positions $\mathbf{m}_i$ des fonctions gaussiennes
  - Étalement s_i des fonctions
    - Fréquent de le partager entre les fonctions gaussiennes, $s_i = s$, $\forall i$
  - Poids $w_{j,i}$ des fonctions gaussiennes
    - Poids $w_{j,i}$ lie la j-ième classe à la i-ième fonction gaussienne
    - Peut être fixé à des constantes, $w_i = \pm 1$, selon l'association entre fonctions gaussiennes et classes
  - Biais $w_{j,0}$ des sorties
    - Avec poids égaux, ex. $w_{j,i} = \pm 1$, biais peut être nul, $w_{j,0} = 0$

Réseau RBF et rétropropagation

- Réseau RBF peut être vu comme un cas particulier d'un perceptron multi-couche
  - Une couche cachée avec fonction gaussienne
  - Couche de sortie avec fonction linéaire
- Développement des équations pour mettre à jour les $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{w}_j$, $w_{j,0}$ et même s_i avec descente du gradient est une instance de l'algorithme de rétropropagation des erreurs
  - Corrige d'abord les poids $\mathbf{w}_j$ et $w_{j,0}$ sur la couche de sortie
  - Corrige ensuite les positions des centres $\mathbf{m}_i$ et étalements s_i

Réseau RBF comme réseau de neurones



Apprentissage avec descente du gradient ($\mathbf{w}_j$ et $w_{j,0}$)

- Critère d'erreur quadratique

$$E(\mathbf{w}, w_0|\mathcal{X}) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K}(e_j^t)^2 = \frac{1}{2N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{K}\left[r_j^t - \left(\sum_{i=1}^{R} w_{j,i}\phi_i(\mathbf{x}^t) + w_{j,0}\right)\right]^2$$

- Dérivée partielle pour $\mathbf{w}_i$ et $w_{i,0}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{j,i}} &= -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[r_j^t - \left(\sum_{i=1}^{R} w_{j,i}\phi_i(\mathbf{x}^t) + w_{j,0}\right)\right]\phi_i(\mathbf{x}^t) = -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e_j^t\phi_i(\mathbf{x}^t) \\
\frac{\partial E}{\partial w_{i,0}} &= -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[r_j^t - \left(\sum_{i=1}^{R} w_{j,i}\phi_i(\mathbf{x}^t) + w_{j,0}\right)\right] = -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e_j^t
\end{aligned}$$

- Descente du gradient pour $w_{j,i} = w_{j,i} + \Delta w_{j,i}$, $i = 0, \ldots, K$

$$\Delta w_{j,i} = -\eta\frac{\partial E}{\partial w_{j,i}} = \frac{\eta}{N}\sum_{t=1}^{N} e_j^t\phi_i(\mathbf{x}^t), \quad \Delta w_{j,0} = -\eta\frac{\partial E}{\partial w_{j,0}} = \frac{\eta}{N}\sum_{t=1}^{N} e_j^t$$

Apprentissage avec descente du gradient ($\mathbf{m}_i$)

- Dérivée partielle pour $\mathbf{m}_i = [m_{i,1} \;\; m_{i,2} \;\; \cdots \;\; m_{i,D}]^T$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}^t)}{\partial m_{i,k}} &= \frac{\partial \exp\left[-\frac{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{m}_i\|^2}{2s_i^2}\right]}{\partial m_{i,k}} = \frac{(x_k^t - m_{i,k})}{s_i^2} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{m}_i\|^2}{2s_i^2}\right] \\
&= \frac{(x_k^t - m_{i,k})}{s_i^2}\phi_i(\mathbf{x}^t) \\
\frac{\partial E}{\partial m_{i,k}} &= -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} w_{j,i}\left[r_j^t - \left(\sum_{i=1}^{R} w_{j,i}\phi_i(\mathbf{x}^t) + w_{j,0}\right)\right]\frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}^t)}{\partial m_{i,k}} \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} e_j^t w_{j,i}\frac{(x_k^t - m_{i,k})}{s_i^2}\phi_i(\mathbf{x}^t)
\end{aligned}$$

- Apprentissage : $m_{i,k} = m_{i,k} + \Delta m_{i,k},\; i = 1, \ldots, R,\; k = 1, \ldots, D$

$$\Delta m_{i,k} = -\eta\frac{\partial E}{\partial m_{i,k}} = \frac{\eta}{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} e_j^t w_{j,i}\frac{(x_k^t - m_{i,k})}{s_i^2}\phi_i(\mathbf{x}^t)$$

Apprentissage avec descente du gradient (s_i)

- Dérivée partielle pour s_i

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}^t)}{\partial s_i} &= \frac{\partial \exp\left[-\frac{\|\mathbf{x}^t-\mathbf{m}_i\|^2}{2s_i^2}\right]}{\partial s_i} = 2\frac{\|\mathbf{x}^t-\mathbf{m}_i\|^2}{2s_i^3}\exp\left[-\frac{\|\mathbf{x}^t-\mathbf{m}_i\|^2}{2s_i^2}\right] \\
&= \frac{\|\mathbf{x}^t-\mathbf{m}_i\|^2}{s_i^3}\phi_i(\mathbf{x}^t) \\
\frac{\partial E}{\partial s_i} &= -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} w_{j,i}\left[r_j^t - \left(\sum_{i=1}^{R} w_{j,i}\phi_i(\mathbf{x}^t) + w_{j,0}\right)\right]\frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}^t)}{\partial s_i} \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} e_j^t w_{j,i}\frac{\|\mathbf{x}^t-\mathbf{m}_i\|^2}{s_i^3}\phi_i(\mathbf{x}^t)
\end{aligned}
$$

- Apprentissage : $s_i = s_i + \Delta s_i,\ i = 1,\ldots,R$

$$
\Delta s_i = -\eta\frac{\partial E}{\partial s_i} = \frac{\eta}{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} e_j^t w_{j,i}\frac{\|\mathbf{x}^t-\mathbf{m}_i\|^2}{s_i^3}\phi_i(\mathbf{x}^t)
$$

Apprentissage en bloc et hybride

- Apprentissage en bloc de réseau RBF
  - Apprentissage en bloc de $\mathbf{w}_j$, $w_{j,0}$, $\mathbf{m}_i$ et s_i par descente du gradient peut être relativement lourd, computationnellement parlant
  - Convergence lente vers résultats satisfaisants
- Apprentissage hybride
  - Fixer $s_i = s$ et apprendre les positions $\mathbf{m}_i$ par clustering (ex. K-means)
  - Ensuite, apprendre $\mathbf{w}_j$ et $w_{j,0}$ par descente du gradient

PRTools : perceptron multi-couche

- `[W,HIST] = BPXNC(A,UNITS,ITER,W_INI,T)` : Perceptron multi-couche avec rétropropagation des erreurs
  - `A` : Dataset PRTools pour l'entraînement
  - `UNITS` : Vecteur donnant le nombre de neurone sur chaque couche cachée (par défaut : `[5]`)
  - `ITER` : Nombre d'époque maximum pour l'entraînement (défaut : `inf`)
  - `W_INI` : Poids initiaux du réseau (défaut : aléatoire)
  - `T` : Dataset de validation (défaut : `[]`, utiliser `A`)
  - `W` : Mapping PRTools résultant
  - `HIST` : Tracé des performances selon les époques
  - Requiert la *Neural Network Toolbox*
- `[W,HIST] = LMNC(A,UNITS,ITER,W_INI,T)` : Perceptron multi-couche avec rétropropagation des erreurs basé sur une méthode du deuxième ordre (Levenberg-Marquardt)

PRTools : réseau RBF

- `W = RBNC(A,UNITS)` : réseau RBF entraîné par descente du gradient
  - `A` : dataset pour l'entraînement
  - `UNITS` : nombre de fonctions gaussiennes utilisées (defaut : 0,2 $\times$ nb. d'object, max de 100)
  - `W` : Mapping PRTools correspondant au réseau RBF entraîné
  - Requiert également la *Neural Network Toolbox*