Goldie 定理

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 3 月 15 日

这份笔记主要记录了我在 2023 年 4 月中旬的几天所学习的 Goldie 定理基础知识, 主要参考材料是 [MR87]. Goldie 定理 (见 [定理2.10]) 是研究非交换 Noether 环的重要工具, 它由 Alfred Goldie(英国, 1920-2005) 于上个世纪 50 年代证明 (见 [Gol58]-[Gol60]), Goldie 也因他的杰出理论被人称为“Lord of the Rings” . Goldie 通过引入一致模、一致维数以及 Goldie 环的概念发展了他的理论, 右 Goldie 环是右 Noether 环以及素 PI 环的推广 (见 [例2.2] 和 [推论2.5]). Goldie 定理表明一个含幺环 R 的右商环 Q(即 R 关于全体正则元构成的乘闭子集 S 的右局部化 R_S) 存在且为 Artin 半单环的充要条件是 R 是半素右 Goldie 环. 也就是说, Goldie 成功刻画了那些右商环存在且商环 Artin 半单的那些环. 更进一步, 含幺环 R 的右商环存在且为 Artin 单环的充要条件是 R 是素右 Goldie 环. 让我们先一督 Goldie 定理：对一个含幺环, 以下四条等价：

- R 是半素右 Goldie 环.
- R 半素, 右奇异理想 $\zeta(R) = 0$ 且 R 具有有限右一致维数.
- R 满足对任何右理想 I, I 是本质右理想的充要条件是 I 含某个 R 中正则元.
- R 的右商环 Q 存在且是 Artin 半单环.

这份笔记主要由以下三部分构成：

(1) 基础知识回顾, 内容涵盖本质子模、一致子模、相关素理想、一致维数的概念与基本性质以及非交换局部化的知识回顾. 其中本质子模、一致模和一致维数的部分是学习 Goldie 定理的必须材料, 非交换局部化与相关素理想中介绍的内容基本不会在 Goldie 定理证明中用到, 但至少需要知道一个含幺环关于乘闭子集可作局部化的充要条件, 因此初次阅读可先跳过局部化与相关素理想的小节.

(2)Godie 环的概念与证明 Godie 定理. 我们会看到 Noether 环与素 PI 环都是 Godie 环.

(3)Godie 理论在非交换代数中的基本应用.

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出!

目录

1 预备基础 **3**

1.1 本质子模 3

1.2 一致模 4

1.3 局部化：回首基本概念 5

1.4 局部化：无挠与内射性 12

1.5 一致维数：基本概念 14

1.6 相关素理想 15

1.7 一致维数：通用性质 17

2 Goldie 定理 **18**

2.1 Goldie 环 18

2.2 Goldie 定理 19

3 Goldie 理论的应用 **23**

3.1 Noether PI 蕴含 FBN 23

3.2 Jacobson 环 25

1 预备基础

1.1 本质子模

本节先回顾一些关于本质子模的基本事实, 所有的提及的概念和引理都会在之后用到.

回忆模 M 的子模 N 被称为**本质子模**, 如果 M 的任何非零子模 X 满足 $X \cap N \neq 0$. 当 N 是 M 的本质子模时, 也称 M 是 N 的本质扩张, 记作 $N \trianglelefteq_e M$. 若含幺环 R 的右理想 I 作为子模是本质的, 称 I 是 R 的**本质右理想**. 例如素环 R 的任何非零双边理想 I 一定是本质右理想 (Goldie 定理的证明中会应用它).

Lemma 1.1. 设 N 是含幺环 R 的幂零理想, 则它的左零化子 $\mathrm{lann}N = \{a \in R | aN = 0\}$ 是 R 的本质右理想.

Proof. 不妨设 $N \neq 0$, 任取非零右理想 X, 取自然数 k 使 $XN^k \neq 0, XN^{k+1} = 0$, 那么 $XN^k \neq 0 \subseteq \mathrm{lann}N \cap X$ 表明 $\mathrm{lann}N$ 是 R 的本质右理想. □

关于本质子模, 这里列出一些基本结论, 注意下述引理的最后一个结论也给了我们一个含幺环 R 是 Artin 半单环的刻画——本质右理想只有自身的环. 我们会在 Goldie 定理的证明过程中应用这一观察.

Lemma 1.2. 设 R 是含幺环, M 是右 R-模, 那么
(1)(传递性) 若 P 是 M 的本质子模, N 是 P 的本质子模, 则 N 是 M 的本质子模.
(2)(取交封闭) 设 N_1, N_2 均为 M 的本质子模, 那么 $N_1 \cap N_2$ 也是 M 的本质子模.
(3) 设 N 是 M 的本质子模, $x \in M$, 记 $x^{-1}N = \{a \in R | xa \in N\}$, 那么 $x^{-1}N$ 是 R 的本质右理想.
(4)(有限直和保本质) 设 $N_i \trianglelefteq_e M_i, i = 1, 2, ..., t$, 则 $\bigoplus\limits_{i=1}^{t} N_i \trianglelefteq_e \bigoplus\limits_{i=1}^{t} M_i$.
(5) 任给 M 的子模 N, 存在 M 的子模 N' 使得 $N \cap N' = 0$ 且 $N \oplus N' \trianglelefteq_e M$.
(6)(基座的本质子模刻画) 称 M 全体不可约子模之和为 M 的**基座** (socle), 记为 $\mathrm{soc}M$. 如果 M 不存在不可约子模, 那么定义 $\mathrm{soc}M = 0$. 关于模的基座, 有 $\mathrm{soc}M$ 是 M 全体本质子模之交. 特别地, $M = \mathrm{soc}M$ 等价于 M 是仅有的本质子模. 因此对非零模 M 而言, M 的本质子模只有自己的充要条件是 M 是完全可约模.

Proof. (1) 和 (2) 通过定义不难得到. 下证 (3). 任取 R 的非零右理想 I, 如果 $xI = 0$, 那么 $I \subseteq x^{-1}N$. 否则 xI 作为 M 的非零子模与 N 之交非零, 由此可知 $x^{-1}N \cap I \neq 0$. 这就得到了 (3). 对 (4), 只需验证 $t = 2$ 时结论成立再归纳地容易完成证明. 现在说明 $N_1 \oplus N_2$ 是 $M_1 \oplus M_2$ 的本质子模. 任取 $M_1 \oplus M_2$ 的子模 $Z \neq 0$, 不妨设 Z 中有元素 (z_1, z_2) 满足 $z_1, z_2 \neq 0$, 那么存在 $a \in R$ 使得 $z_1 a \neq 0 \in N_1$. 如果这时 $z_2 a = 0$, 那么 $(z_1, z_2)a \neq 0 \in N_1 \oplus N_2$. 否则, 对 $z_2 a \neq 0 \in M_2$, 存在 $b \in R$ 使得 $z_2 ab \neq 0 \in N_2$, 于是便得到了 (4).

现在说明 (5). 作 $\mathcal{S} = \{X | X\text{是}M\text{子模且}X \cap N = 0\}$, 这是关于包含关系的非空偏序集, 它任何全序子集有上界, 故应用 Zorn 引理可得 $\mathcal{S}$ 的极大元 N', 易见 $N \cap N' = 0$ 且 $N \oplus N' \trianglelefteq_e M$.

最后验证 (6). M 的不可约子模必定含于每个本质子模内, 因此若记 T 是 M 全体不可约子模之和, 立即有 $T \subseteq \mathrm{soc}M$. 不妨设 $\mathrm{soc}M \neq 0$, 我们通过说明基座是完全可约模来得到 $\mathrm{soc}M \subseteq T$. 任取 $\mathrm{soc}M$ 的子模 S, 应用 (5) 知存在 M 的子模 C 使得 $S \oplus C$ 是 M 的本质子模, 所以 $\mathrm{soc}M = S \oplus (C \cap \mathrm{soc}M)$, 故 $\mathrm{soc}M$ 完全可约. 由此得到 $T = \mathrm{soc}M$, 即基座作为 M 所含的最大完全可约子模是全体本质子模之交. 那么 $\mathrm{soc}M = M$ 等价于 M 的本质子模只有自己, 而前者等价于 M 是完全可约模. □

其中 [引理1.2(4)] 也告诉我们取内射包跟有限直和可交换.

Corollary 1.3. 设 $M_1, ..., M_n$ 是右 R-模, 则 $E(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) \cong E(M_1) \oplus E(M_2) \oplus \cdots \oplus E(M_n)$.

Proof. 对每个 $1 \le i \le n$, 有 $M_i \trianglelefteq_e E(M_i)$, 所以 $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ 是 $E(M_1) \oplus E(M_2) \oplus \cdots \oplus E(M_n)$ 的本质子模, 而 $E(M_1) \oplus E(M_2) \oplus \cdots \oplus E(M_n)$ 作为内射模的有限直和是内射的, 因此 $E(M_1) \oplus E(M_2) \oplus \cdots \oplus E(M_n)$ 是 $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ 的内射包. □

在上述 [引理1.2(5)] 中, 我们看到 $\mathcal{S} = \{X | X是M子模且X \cap N = 0\}$ 的极大元总存在, 如果 N' 是极大元, 那么称 N' 是 **N 在 M 中的补**. 如果 M 的子模 X 是某个子模在 M 中的补, 称 X 是 M 的**补子模**.

Lemma 1.4. 设 N 是 M 中的补子模且 M 的子模 $N' \supsetneq N$. 那么 N' 存在非零子模 Y 使得 $Y \cap N = 0$.

Proof. 设 N 是 X 在 M 中的补, 那么 $N' \cap X \neq 0$, 取 $Y = N' \cap X$ 即可. □

由此可知, 若模 M 有子模 $X \subsetneq Y$ 使得 X 是 Y 的直和因子, 设为 $Y = X \oplus X'$, 若 Y 有补子模 C, 则 $X' \oplus C$ 是 X 的补子模. 也就是说这时可选取 Y 的补子模 C 以及 X 的补子模 C' 使得 $C \subsetneq C'$.

对含幺环 R, 记 $\mathcal{F}(R)$ 是 R 所有本质右理想构成的集合, 那么 [引理1.2(1)(2)(3)] 表明

$$\zeta(R) = \{a \in R | 存在E \in \mathcal{F}(R)使得aE = 0\}$$

是 R 的理想, 称为 R 的**右奇异理想** (right singular ideal). 我们以后会说明满足右零化子升链条件的环, 它的右奇异理想是幂零的 (见 [引理2.7]), 进而知满足右零化子升链条件的半素环的右奇异理想是零.

1.2 一致模

本节我们先介绍一致模, 它是满足任意两个非零子模之交非零的模, 随后说明不含非零子模无限直和的模 M 一定包含某个一致模 (见 [引理1.42]), 并且这样的 M 一定会含有一个本质子模可表示为有限个一致模的直和 (见 [引理1.43]). 我们将证明, 这样的本质子模, 它的有限一致子模直和分解的直和项数目是固定的 (见 [定理1.44]), 由此导出模的一致维数的概念, 这是定义右 Goldie 环的必要基础.

Definition 1.5 (一致模)**.** 称非零模 U 是**一致的** (uniform), 如果 U 所有非零子模都是 U 的本质子模.

不可约模明显是一致的, 反之不然 (例如 $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$). 根据定义也可以看到一致模的非零子模仍是一致子模. 我们指出模的一致性有下面的内部刻画, 由此可见 R 的一致右理想 $I \neq 0$ 满足存在 $a, b \neq 0 \in I$ 使 $ab \neq 0$.

Lemma 1.6. 设 U 是非零右 R-模, 则以下三条等价. (1)U 是一致的. (2)U 不包含一些 (至少两个) 非零子模的直和. (3) 任给非零元 $u_1, u_2 \in U$, 存在 $r_1, r_2 \in R$ 使得 $u_1 r_1 = u_2 r_2 \neq 0$.

Proof. (1) 明显蕴含 (2), 要看到 (2) 蕴含 (1), 只需对 U 的每个非零子模 X 应用 [引理1.2(5)] 得到 X 是本质子模, 即 U 是一致模. (1) 和 (3) 的等价性是明显的. □

Proposition 1.7. 设右 R-模 U 是一致的, 那么其内射包 $E(U)$ 是不可分内射模. 反之, 任何不可分内射模 M 都是一致模.因此非零模 U 是一致模当且仅当内射包 $E(U)$ 是不可分内射模.

Proof. 否则, 存在非零子模 $W_1, W2$ 使 $E(U) = W_1 \oplus W_2$, 于是 $W_1 \cap U \neq 0, W_2 \cap U \neq 0$, 进而它们作为 U 非零子模的交 $(W_1 \cap U) \cap (W_2 \cap U) \neq 0$, 这与 $W_1 \cap W_2 = 0$ 矛盾. 现设 M 是不可分内射模, 那么 M 的任何非零子模 M' 满足 $M = E(M')$. 这说明 M 的任何非零子模 M' 都是 M 的本质子模, 故 M 是一致模. □

1.3 局部化：回首基本概念

本节简要回顾非交换环与其上模的局部化构造和基本性质. 先回忆右局部化的定义.

Definition 1.8. 设 R 是含幺环, S 是 R 的一个乘闭子集, 称二元组 (R_S, λ)(其中 R_S 是环, $\lambda : R \to R_S$ 是环同态) 是 R **关于** S **的右局部化**, 如果满足：
(1) 任给 $s \in S$, $\lambda(s)$ 在 R_S 中可逆;
(2) 每个 R_S 中元素可表为 $\lambda(a)\lambda(s)^{-1}$ 的形式;
(3) $\mathrm{Ker}\lambda = \{a \in R | \text{存在} s \in S \text{使得} as = 0\}$.

Remark. 局部化本身是从 R 出发构造一个“更大”的环让乘闭子集 S 中元素均成为可逆元, 因此 (1) 的要求是自然的. 这里的定义 (2)-(3) 在交换层面是交换局部化的直接事实. 我们可以这么理解定义中的 (3)：如果右局部化存在, 我们把 R_S 中的元素 $\lambda(a)\lambda(s)^{-1}$ 形式上写作 a/s, 那么 $\lambda(a) = a/1$. R_S 的零元应当是 $0/1$, 因此 $a \in \mathrm{Ker}\lambda$ 应当意味着在 R_S 中 $a/1 = 0/1$. 因此应当在“适当通分”后分子分母相同. 即存在 $u \in R$ 和 $v \in R$ 使得 $au = 0v = 0, u = 1u = 1v = v \in S$. 故 $a \in \mathrm{Ker}\lambda \Leftrightarrow$ 存在 $s \in R$ 使得 $as = 0$. 我们也指出这里的右局部化 R_S 即便存在也有可能是零环 (这是交换代数中的共识), 易见 $R_S = 0$ 当且仅当 $0 \in S$.

回忆含幺环 R 的一个乘闭子集 S 被称为**右 Ore 集**, 如果对任何 $a \in R, s \in S$, 有 $sR \cap aS \neq \varnothing$. 容易验证当右局部化 R_S 存在时, S 必为右 Ore 集. 如果 S 是 R 的右 Ore 集, 那么对任何右 R-模 M, M 的 **S-挠部分** $t_S(M) = \{x \in M | \text{存在} s \in S, \text{ 使得} xs = 0\}$ 是 M 的子模. 原因是对每个 $x_1, x_2 \in t_S(M)$, 设 $s_1, s_2 \in S$ 使 $x_1 s_1 = x_2 s_2 = 0$. 因为 S 满足右 Ore 条件, 存在 $a \in R, t \in S$ 使得 $s_1 a = s_2 t = u \in S$, 从而 $x_1 u = x_2 u = 0$, 即 $(x_1 - x_2)u = 0$, 所以 $x_1 - x_2 \in t_S(M)$. 下面再说明 $x_1 r \in t_S(M), \forall r \in R$. 同样由右 Ore 条件, 存在 $b \in R, v \in S$ 使 $s_1 b = rv$, 于是 $x_1 rv = 0$. 这就说明了 $t_S(M)$ 是 M 的 R-子模. 进而知含幺环 R 的右 Ore 集 S 满足 R 上任何右模的 S-挠部分仍为子模. 有时也称 $t_S(M)$ 是 M 关于 S 的挠子模 (一些文献中记作 $\mathrm{ass}_M S$). 特别地, $t_S(R) = \{a \in R | \text{存在} s \in S \text{使得} as = 0\}$ 是 R 的右理想, 故 $t_S(R)$ 是 R 的理想 (容易验证当右局部化 R_S 存在时, $\overline{S} \subseteq \overline{R} = R/t_S(R)$ 中元素均为正则元). 事实上, 如果含幺环 R 的乘闭子集 S 满足对任何右 R-模 M, 集合 $t_S(M) = \{x \in M | \text{存在} s \in S, \text{ 使得} xs = 0\}$ 总是子模, 那么 S 必定满足右 Ore 条件, 即我们有：

Proposition 1.9. 对含幺环 R 以及乘闭子集 S, S 满足右 Ore 条件 $\Leftrightarrow$ 任何右 R-模 M 满足 $t_S(M)$ 是子模.

Proof. 前面已经证过必要性. 充分性：设所有右 R-模 M 满足 $t_S(M)$ 是子模, 我们需要说明对每个 $a \in R, s \in S$ 有 $aS \cap sR \neq \varnothing$. 考虑右 R-模 $M = R/sR$, 那么 $\overline{1} \in t_S(M)$, 于是由 $t_S(M)$ 是子模知 $t_S(M) = M$, 故对 $\overline{a} \in M$, 存在 $t \in S$ 使得 $at \in sR$, 得证. □

回忆非交换环局部化理论的基本结果是：对含幺环 R 以及一个乘闭子集 S, 右 (经典) 商环 (R_S, λ) 存在的充要条件是 S 是右 Ore 集且 $\overline{S} = \{s + t_S(R) | s \in S\}$ 中元素均为 $\overline{R} = R/t_S(R)$ 中的正则元. 我们指出, 当 S 满足右 Ore 条件时, $\overline{S}$ 的正则性条件可以被替换成：

Lemma 1.10. 设 S 是含幺环 R 的右 Ore 集, 则 $\overline{S} \subseteq \overline{R} = R/t_S(R)$ 是由一些正则元构成的充要条件是对任何 $a \in R, s \in S$, 如果 $sa = 0$, 那么存在 $t \in S$ 使得 $at = 0$.

Proof. 必要性：当 $sa = 0$ 时, 在 $\overline{R}$ 中 $\overline{a} = 0$, 进而存在 $t \in S$ 使得 $at = 0$. 充分性：首先 $\overline{S}$ 中元素总是 $\overline{R}$ 中的左正则元, 故只需验证每个 $\overline{s} \in \overline{S}$ 均为右正则元. 设 $a \in R$ 使得 $sa \in t_S(R)$, 那么存在 $u \in S$ 使得 $sau = 0$, 对 $au \in R$ 再次使用条件, 得存在 $v \in S$ 使得 $auv = 0$, 因此取 $t = uv \in S$, 便有 $at = 0$. □

Remark. 因此 $\overline{S}$ 是 $\overline{R}$ 中一些正则元构成的充要条件是 R 中每个可以被 S 中元素 s 左乘零化的元素 a, 都可以被 S 中某个元素 t 右乘零化. 总而言之, 要使 R 关于乘闭子集 S 的右局部化 R_S 存在, 本质上只要满足:

- 每个"左分式" $s^{-1}a(a \in R, s \in S)$ 都可以调整成"右分式" bt^{-1}, 即 $s^{-1}a = bt^{-1}$, 整理即得右 Ore 条件.
- 对 $a \in R$, a 能被 S 中某元素"左零化"蕴含 a 能被 S 中某元素"右零化".

Example 1.11. 设 R 是含幺环, 若乘闭子集 $S \subseteq Z(R)$, 那么 R_S 存在. 这时设 $\lambda : R \to R_S$ 是局部化映射, 那么对 $a, b \in R, s, t \in S$, $\lambda(a)\lambda(s)^{-1} = \lambda(b)\lambda(t)^{-1}$ 当且仅当存在 $u \in S$ 使得 $(at - sb)u = 0$. 若进一步 S 是由 R 的一些中心正则元构成的乘闭子集, 那么 λ 是单射, 这时 $as^{-1} = bt^{-1}$ 的充要条件是 $at = sb$. 并且与交换情形一样, 对含于中心的乘闭子集 S, 对 R 的任意真理想 I, 记 $\overline{S}$ 是 S 对应在 R/I 中的乘闭子集, 那么

$$\varphi : (R/I)_{\overline{S}} \to R_S/I_S, (a + I)(s + I)^{-1} \mapsto as^{-1} + I_S$$

是定义合理的环同构, 即这时关于理想作商和对中心乘闭子集作局部化可交换.

Remark. 这里指出如果含幺环 R 作为中心 $Z = Z(R)$ 上的模是有限生成模或者 R 是素环, 那么任何中心乘闭子集 $S \subseteq Z$(默认 $0 \notin S$) 满足 R_S 的中心就是 Z_S. 当 R 是素环时, Z 是整区, 易验证局部化映射 $\lambda : R \to R_S$ 是单射, 由此易得 $Z(R_S) = Z_S$. 如果 R_Z 是有限生成模, 可设 $a_1, ..., a_m \in R$ 满足 $R = Za_1 + \cdots + Za_m$. 任取 $\lambda(a)\lambda(s)^{-1} \in Z(R_S)$, 有 $\lambda(a)\lambda(b) = \lambda(b)\lambda(a), \forall b \in R$. 因此对每个正整数 $1 \leq j \leq m$, 存在 $s_j \in S$ 使得 $(aa_j - a_j a)s_j = 0$. 那么 $as_1 \cdots s_m \in Z$. 因此 $\lambda(a)\lambda(s)^{-1} = \lambda(as_1 \cdots s_m)\lambda(ss_1 \cdots s_m)^{-1} \in Z_S$.

含幺交换环在乘闭子集处局部化的素谱会与该环素谱中和乘闭子集不相交的素理想子集间有天然双射. 含幺环在中心乘闭子集处的局部化仍保留这一性质.

Proposition 1.12. 设 R 是含幺环, 若乘闭子集 $S \subseteq Z(R)$, 那么有双射

$$\varphi : \{P \in \mathrm{Spec}R | P \cap S = \varnothing\} \to \mathrm{Spec}R_S, P \mapsto P_S,$$

其中 $P_S = \{\lambda(p)\lambda(s)^{-1} | p \in P, s \in S\}$, 这里 $\lambda : R \to R_S$ 是局部化映射. φ 的逆映射将每个 R_S 的素理想 $\mathfrak{q}$ 映至 $\{a \in R | \text{存在} s \in S \text{使得} \lambda(a)\lambda(s)^{-1} \in \mathfrak{q}\}$. 如果赋予 $\{P \in \mathrm{Spec}R | P \cap S = \varnothing\}$ 素谱 $\mathrm{Spec}R$ 上 Zariski 拓扑的子空间拓扑、$\mathrm{Spec}R_S$ 上 Zariski 拓扑, 则双射 φ 给出同胚.

Proof. 任取 R 的素理想 P, 并设 $P \cap S = \varnothing$. 易验证 P_S 是 R_S 的理想, 下证 P_S 是真理想. 如果存在 $p \in P, s \in S$ 使得 $\lambda(1) = \lambda(p)\lambda(s)^{-1}$, 那么存在 $u \in S$ 使得 $(p - s)u = 0$. 进而 $us \in P$, 这和 $P \cap S = \varnothing$ 矛盾. 再说明 P_S 是 R_S 的素理想. 任何 R_S 中理想都具备 I_S 的形式, 这里 I 是 R 的理想, 所以只需验证若 R 的理想 I, J 满足 $I_S J_S \subseteq P_S$, 则 $IJ \subseteq P$ 即可. 利用 $S \subseteq Z(R)$ 易验证任何 $a \in IJ$ 满足存在 $s \in S$ 使得 $as \in P$. 于是 $aRs \subseteq P$, 因此 P 是素理想以及 $s \notin P$ 蕴含 $a \in P$, 这说明 $IJ \subseteq P$. 以上讨论表明 φ 是定义合理的映射. 如果 R 的素理想 P, Q 满足均与 S 不相交以及 $P_S = Q_S$, 那么易验证任何 $p \in P$ 满足存在 $u \in S$ 使得 $pu \in Q$, 类似前面的讨论由 $pRu \subseteq Q$ 得到 $p \in Q$. 于是 $P \subseteq Q$, 类似可验证 $Q \subseteq P$, 因此 φ 是单射. 任取 R_S 的素理想 $\mathfrak{q}$, 定义 $Q = \{a \in R | \text{存在} s \in S \text{使得} \lambda(a)\lambda(s)^{-1} \in \mathfrak{q}\}$, 那么 Q 是 R 的理想且 $Q_S = \mathfrak{q}$. 通过 $\mathfrak{q}$ 是真理想易见 $Q \cap S = \varnothing$. 如果 R 的理想 I, J 满足 $IJ \subseteq Q$, 则 $I_S J_S \subseteq Q_S = \mathfrak{q}$. 故 $I_S \subseteq Q_S$ 或 $J_S \subseteq Q_S$. 不妨设 $I_S \subseteq Q_S = \mathfrak{q}$, 那么根据 Q 的定义得到 $I \subseteq Q$. 所以 Q 是素理想, 这说明 φ 是单射.

最后说明 φ 是同胚. 任何 $\mathrm{Spec}R_S$ 中闭集形如 $V(I_S)$ 的形式, I 是 R 的理想. 不妨设 $I \cap S = \varnothing$, 那么可直接验证 $\varphi^{-1}(V(I_S)) = V(I) \cap \{P \in \mathrm{Spec}R | P \cap S = \varnothing\}$, 所以 φ 是连续映射. 再说明 φ 是闭映射. 不妨设 I 是 R 的与 S 不相交的理想, 则有 $\varphi(V(I) \cap \{P \in \mathrm{Spec}R | P \cap S = \varnothing\}) = V(I_S)$, 因此 φ 是闭映射. $\square$

当右 Ore 集 S 满足 $\overline{S}=\{s+t_S(R)|s\in S\}$ 中元素均为 $\overline{R}=R/t_S(R)$ 中的正则元 (或者按照前面的刻画, S 满足对任何 $a\in R$, 若有 $s\in S$ 使得 $sa=0$, 则有 $t\in S$ 使得 $at=0$) 时, 也称 S 是 R 的**右分母集**. 沿用这个术语：含幺环 R 关于乘闭子集 S 能作右局部化的充要条件是 S 是右分母集. 含幺环 R_S 一旦能够关于乘闭子集 S 作右局部化, 那么 R 到 R_S 有标准保幺环同态, 故 R 具有 IBN 性质蕴含 R_S 也具有 IBN 性质.

与交换代数中一样, 当我们有了 R 的右分母集 S, 我们也可以去对任何一个右 R-模去作右局部化 M_S. 为了构造 M_S, 我们简单回顾 R_S 构造过程并做一些准备. 记 $\mathcal{F}$ 是 R 所有与 S 相交非空的右理想构成的集合, 即 $\mathcal{F}=\{I|I\text{是右理想且}I\cap S\neq\varnothing\}$. 注意 $R\in\mathcal{F}$. 固定记号 $\overline{R}=R/t_S(R)$, 易知

Lemma 1.13. 设 R 是含幺环, S 是右分母集, 那么 $\mathcal{F}=\{I|I\text{是右理想且}I\cap S\neq\varnothing\}$ 满足对任何 $I,J\in\mathcal{F}$ 与 $\alpha\in\mathrm{Hom}_R(I,\overline{R})$, 有 $I\cap J\in\mathcal{F}$ 以及 $\alpha^{-1}(\overline{J})=\{a\in I|\alpha(a)\in J+t_S(R)/t_S(R)\}\in\mathcal{F}$.

Proof. 任取 $s_1\in I\cap S, s_2\in J\cap S$, 则存在 $a\in R, t\in S$ 使 $s_1a=s_2t\in S$. 进而 $s_2t\in S\cap I\cap J$. 设 $\alpha(s_1)=b+t_S(R)$, 那么存在 $v\in S, c\in R$ 使得 $bv=s_2c$, 于是 $\alpha(s_1v)=s_2c+t_S(R)\in\overline{J}$. □

回忆在 R_S 的构造中 (这里遵循 [MR87], 类似于交换代数的构造可见 [GJ85]), 我们考虑了集合

$$W=\bigcup_{I\in\mathcal{F}}\mathrm{Hom}_R(I,\overline{R}),$$

在其上赋予了二元关系 $\sim$: 对 $\alpha_1\in\mathrm{Hom}_R(I_1,\overline{R}),\alpha_2\in\mathrm{Hom}_R(I_2,\overline{R})\in W$, 定义 $\alpha_1\sim\alpha_2$ 当且仅当存在 $J\subseteq I_1\cap I_2$ 使得 α_1 和 α_2 在 J 上取值相同. 随后在商集 $R_S=W/\sim$ 上定义了自然加法和乘法, 其中 $\alpha_1\in\mathrm{Hom}_R(I_1,\overline{R}),\alpha_2\in\mathrm{Hom}_R(I_2,\overline{R})$ 所在等价类的乘法定义为 $[\alpha_1][\alpha_2]=[\gamma]$, 这里 $\gamma:\alpha_2^{-1}(\overline{I_1})\to\overline{R},c\mapsto\alpha_1\alpha_2(c)$(严格地, $\alpha_2\alpha_1(c)$ 指, 设 $\alpha_2(c)=b+t_S(R)\in\overline{I_1}$, 记 $\alpha_1(b)$ 为 $\alpha_2\alpha_1(c)$, 这明显定义合理). 随后可直接验证 R_S 关于上述运算构成含幺环 (可能是零环), 并且有自然保幺环同态 $\lambda_S:R\to R_S$, 其中对每个 $a\in R$, $\lambda_S(a)$ 是 a 在 R 上决定的左乘变换对应的同态 $a_l:R\to\overline{R},x\mapsto\overline{ax}$ 所在的等价类. 易见 $\mathrm{Ker}\lambda_S=t_S(R)$. 每个 $s\in S$, 对应在 R_S 中的元素 $\lambda_S(s)$ 在 R_S 中可逆, 其逆元为 $\alpha:sR\to\overline{R},sx\mapsto\overline{x}$ 所在等价类. 这里 $\alpha:sR\to\overline{R}$ 定义合理的原因是, 若 $x_1,x_2\in R$ 满足 $sx_1=sx_2$, 在 $\overline{R}$ 中 $\overline{s}(\overline{x_1}-\overline{x_2})=0$, 再利用 $\overline{S}$ 中元素均为 $\overline{R}$ 中正则元可得 $\overline{x_1}=\overline{x_2}$. 因为这里的 $\alpha:sR\to\overline{R}$ 定义合理, 所以它是右 R-模同态是明显的. 要看到 (R_S,λ_S) 是 R 的右商环, 还需说明每个 R_S 中元素可表为形如 $\lambda_S(a)\lambda_S(s)^{-1},a\in R,s\in S$ 的形式. 对每个 $[\alpha]\in R_S$, 这里 $\alpha:I\to\overline{R}$, 取 $s\in I\cap S$ 并记 $\alpha(s)=b+t_S(R)$, 可直接计算验证 $[\alpha]=\lambda_S(b)\lambda_S(s)^{-1}$. 因此通过上述构造确实可得 R 关于右分母集 S 的右局部化 (R_S,λ_S). 于是下面模的局部化构造基本上就是“例行公事”. 记 $\overline{M}=M/t_S(M)$, 根据之前的讨论它是定义合理的右 R-商模, 并且 $\overline{M}$ 可自然地视作右 $\overline{R}$-模. 考虑集合

$$T=\bigcup_{I\in\mathcal{F}}\mathrm{Hom}_R(I,\overline{M}),$$

在 T 上如下定义二元关系“$\sim$”：对 $\alpha_1\in\mathrm{Hom}_R(I_1,\overline{M}),\alpha_2\in\mathrm{Hom}_R(I_2,\overline{M})\in T$, 定义 $\alpha_1\sim\alpha_2$ 当且仅当存在 $J\subseteq I_1\cap I_2$ 使得 α_1 和 α_2 在 J 上取值相同. 明显 $\sim$ 是 T 上等价关系, 记 α 所在的等价类为 $[\alpha]$. 对 $\alpha_1\in\mathrm{Hom}_R(I_1,\overline{M}),\alpha_2\in\mathrm{Hom}_R(I_2,\overline{M})\in T$, 定义 $[\alpha_1]+[\alpha_2]=[\beta]$, 其中 β 是 T 中在 $I_1\cap I_2$ 上取值与 $\alpha_1+\alpha_2$ 一致的右 R-模同态. 易见 $(T/\sim,+)$ 是定义合理的加法群. 记 $M_S=T/\sim$, 对每个 $x\in M$, 定义 $\theta_S(x)$ 是 $\alpha:R\to\overline{M},a\mapsto\overline{xa}$ 所在的等价类, 那么 $\theta_S(x)$ 定义合理 (不依赖于右理想 $I_1\in\mathcal{F}$ 的选取), 于是得到加群同态 $\theta_S:M\to M_S$, 易见 $\mathrm{Ker}\theta_S=\{x\in M|\text{存在}s\in S\text{使得}xs=0\}=t_S(M)$. 接下来我们为 M_S 赋予右 R_S-模结构：

$$M_S\times R_S\to M_S,([\alpha],[\beta])\mapsto[\gamma],$$

这里 $\alpha: I_1 \to \overline{M}, \beta: I_2 \to \overline{R}$ 均为右 R-模同态, $\gamma: \beta^{-1}(\overline{I_1}) \to \overline{M}, c \mapsto \alpha(b)$, 其中 $\alpha(c) = b + t_S(R)$(易验证 γ 是定义合理的右 R-模同态). 根据 [引理1.13], 通过直接地计算验证可知上面的数乘作用作为映射定义合理并且给出了加群 M_S 上的右 R_S-模结构. 需要指出, 与 R_S 类似地, 每个 M_S 中元素都可以表示为 $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1}$ 的形式, **为记号简明常记作** xs^{-1} 或 x/s(验证过程与 R_S 情形完全类似, 任取 $[\alpha] \in M_S$, 这里 $\alpha: I \to \overline{M}$, 取 $s \in I \cap S$, 并记 $\alpha(s) = x + t_S(M)$, 那么可直接计算得到 $[\alpha]\lambda_S(s) = \theta_S(x)$, 再利用 $\lambda_S(s)$ 是 R_S 中可逆元得到结论). 利用 M_S 上的右 R_S-模结构, 我们当然可以利用环同态 $\lambda_S: R \to R_S$ 也给 M_S 一个右 R-模结构：

$$M_S \times R \to M_S, (x, a) \mapsto x\lambda_S(a).$$

一旦 M_S 赋予上述右 R-模结构, 通过前面 $\theta_S: M \to M_S$ 的定义可直接计算验证 θ_S 是右 R-模同态, 即有 $\theta_S(xs) = \theta_S(x)s = \theta_S(x)\lambda_S(s), \forall x \in M, s \in S$. 总结一下, 我们上述构造的右 R_S-模 M_S 满足：

- 有标准映射 $\theta_S: M \to M_S$ 是右 R-模同态且 $\mathrm{Ker}\theta_S = t_S(M) = \{x \in M | 存在 s \in S 使得 xs = 0\}$.
- 对于上述标准映射, M_S 中任何元素可表示为 $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1}$ 的形式.

易见当 $0 \in S$ 时 $M_S = 0$. 与交换情形一样, M_S 具有下述泛性质.

Proposition 1.14. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, M 是右 R-模, 那么对上述构造的二元组 (M_S, θ_S), 有：对任何右 R_S-模 X 和右 R-模同态 $\varphi: M \to X$, 存在唯一的右 R_S-模同态 $\overline{\varphi}: M_S \to X$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta_S"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M_S \arrow[d, dashed, "\overline{\varphi}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Proof. 命 $\varphi: M_S \to X, \theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1} \mapsto \varphi(x)\lambda_S(s)^{-1}$, 下面说明 φ 作为映射定义合理. 如果有 $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1} = \theta_S(x')\lambda_S(s')^{-1}$, 即 $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1}\lambda_S(s') = \theta_S(x')$. 设 $\lambda_S(s)^{-1}\lambda_S(s') = \lambda_S(a)\lambda_S(t)^{-1}$, 于是 $\theta_S(x)\lambda_S(a) = \lambda_S(x')\lambda_S(t)$, 因为 θ_S 是右 R-模同态, 所以此时有 $\theta_S(xa) = \theta_S(x't)$, 进而存在 $u \in S$ 使得 $(xa - x't)u = 0$. 由此知 $(\varphi(x)a - \varphi(x')t)u = 0$. 进而 $\varphi(x)\lambda_S(a) = \varphi(x')\lambda_S(t)$, 即 $\varphi(x)\lambda_S(a)\lambda_S(t)^{-1} = \varphi(x')$, 于是 $\varphi(x)\lambda_S(s)^{-1}\lambda_S(s') = \varphi(x')$, 由此得到 $\overline{\varphi}$ 作为映射定义合理. 类似地, 可直接计算说明 $\overline{\varphi}$ 是右 R_S-模同态. $\overline{\varphi}$ 的唯一性是明显的, 因为 M_S 中元素均可表为 $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1}$ 的形式. □

Definition 1.15 (模的局部化)**.** 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, M 是右 R-模. M **在乘闭子集 S 处的右局部化**是指满足下述条件的二元组 (M_S, θ_S):

- M_S 是右 R_S-模, θ_S 是右 R-模同态.
- 对任何右 R_S-模 X 和右 R-模同态 $\varphi: M \to X$, 存在唯一的右 R_S-模同态 $\overline{\varphi}: M_S \to X$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta_S"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M_S \arrow[d, dashed, "\overline{\varphi}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Remark. 由局部化的泛性质定义立即得到只要存在必定在同构有意义下唯一. 而我们前面花了很大篇幅所构造的二元组 (M_S, θ_S) 正说明了存在性 (由 [命题1.14] 便知) 且 $\mathrm{Ker}\theta_S = \{x \in M | 存在 s \in S 使得 xs = 0\}$. 设 (R_S, λ_S) 是 R 关于右分母集 S 的右局部化, 模的局部化也可以如下等价地定义：设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, M 是右 R-模. M **在乘闭子集 S 处的右局部化**是指满足下述条件的二元组 (M_S, θ_S):

• M_S 是右 R_S-模, θ_S 是右 R-模同态, M_S 中元素均可表为 $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1}$ 的形式.
• $\mathrm{Ker}\theta_S = t_S(M) = \{x \in M | 存在 s \in S 使得 xs = 0\}$.
可直接验证该定义蕴含前面泛性质定义, 前面说明过模局部化的存在性, 因此这两个定义等价.

模的 (非交换) 局部化也有交换代数中类似的通常性质成立.

Lemma 1.16. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, M 是右 R-模. 设 $(R_S, \lambda), (M_S, \theta)$ 分别是 R, M 关于 S 的右局部化, 则有右 R_S-模同构 $\eta_M : M_S \to M \otimes_R R_S$ 使得 $\eta_M(\theta(x)\lambda(s)^{-1}) = x \otimes \lambda(s)^{-1}, \forall x \in M, s \in S$.

Proof. 易知 $f : M \times R_S \to M_S, (x, \alpha) \mapsto \theta(x)\alpha$ 是 R-平衡映射, 所以存在唯一的加群同态 $\xi_M : M \otimes_R R_S \to M_S$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \times R_S \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R R_S \arrow[d, dashed, "\xi_M"] \\ & M_S \end{tikzcd}$$

同时, 对右 R-模同态 $g : M \to M \otimes_R R_S, x \mapsto x \otimes \lambda(1)$, 由局部化的泛性质知存在唯一的右 R_S-模同态 $\eta_M : M_S \to M \otimes_R R_S$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "g"'] & M_S \arrow[d, dashed, "\eta_M"] \\ & M \otimes_R R_S \end{tikzcd}$$

易验证 η_M 和 ξ_M 互为逆映射且 $\eta_M(\theta(x)\lambda(s)^{-1}) = x \otimes \lambda(s)^{-1}, \forall x \in M, s \in S$. □

Remark. 由此可见标准映射 $g : M \to M \otimes_R R_S, x \mapsto x \otimes 1_{R_S}$ 的核也是 M 的 S-挠部分：

$$t_S(M) = \{x \in M | 存在 s \in S, \text{ 使得 } xs = 0\}.$$

Lemma 1.17. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, M, N 是右 R-模且 $f : M \to N$ 是右 R-模同态. 记 $(M_S, \theta_M), (N_S, \theta_N)$ 是 M, N 关于 S 的右局部化. 那么存在唯一的右 R_S-模同态 $f_S : M_S \to N_S$ 使得 $f_S(\theta_M(x)\lambda(s)^{-1}) = \theta_M(f(x))\lambda(s)^{-1}, \forall x \in M, s \in S$.

Proof. 作右 R-模同态 $\tilde{f} : M \to N_S, x \mapsto \theta_N(f(x))$, 那么存在唯一的右 R_S-模同态 $f_S : M_S \to N_S$ 使得

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & M_S \arrow[d, dashed, "f_S"] \\ & N_S \end{tikzcd}$$

交换. 不难看出这里诱导的 f_S 就是所求同态. □

Remark. 该引理表明我们可以像交换代数中一样去定义**局部化函子** $(-)_S : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R_S$.

Corollary 1.18. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, $(-)_S : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R_S$ 是局部化函子, 那么有自然同构 $(-)_S \cong - \otimes_R R_S$.

Proof. 定义 $\eta : M \mapsto \eta_M : M_S \to M \otimes_R R_S$, 这里 η_M 来自 [引理1.16], 为右 R_S-模同构. 为说明 η 是局部化函子 $(-)_S$ 到张量函子 $- \otimes_R R_S$ 的自然同构, 还需验证 η 的自然性, 这通过直接计算不难得到. □

一般局部化函子不保持模的不可约性, 在局部化环 R_S 上不可约的模视作 R-模也未必不可约.

Example 1.19 (局部化不保持不可约性)**.** 设 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是不可约 $\mathbb{Z}$-模, 考虑其在素理想 $3\mathbb{Z}$ 处的局部化, 得到零模, 故不可约模在素理想处的局部化未必不可约. 若 M 是含幺交换环 R 在乘闭子集 S 处局部化 R_S 上的不可约模, 也未必能保证 M 视作 R-模仍不可约. 例如考虑 $R = \mathbb{Z}$ 在所有非零整数构成的乘闭子集 S 处的局部化 $R_S = \mathbb{Q}$, 那么 $\mathbb{Q}$ 作为自身上模自然是不可约的, 但 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模有无穷多非平凡子模.

Definition 1.20 (S-挠模)**.** 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, M 是右 R-模, 如果 $t_S(M) = M$, 即对任何 $x \in M$, 存在 $s \in S$ 使得 $xs = 0$, 则称 M 是 **S-挠模** (S-torsion). 如果 M 满足能够被 S 中某个元素零化的元素只有零, 即 $t_S(M) = 0$, 称 M 是 **S-无挠** (S-torsionfree). 任何右 R-模 M, $M/t_S(M)$ 总是 S-无挠.

Lemma 1.21. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集且 $j : N \to M$ 是右 R-模间的本质单同态. 如果 N 是 S-无挠的, 那么 M 也是 S-无挠的.

Proof. 这时 $j(N) \cap t_S(M) = t_S(j(N)) = 0$, 故由 $j(N)$ 是 M 的本质子模知 $t_S(M) = 0$. □

Remark. 该引理说 S-无挠模的本质扩张还是 S-无挠的.

Proposition 1.22. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, M 是右 R-模, 则以下三条等价:
(1) M 是 S-挠模. (2) $M_S = 0$. (3) $M \otimes_R R_S = 0$.

Proof. 在 [引理1.16] 中我们已经看到 $M_S \cong M \otimes_R R_S$, 所以 (2) 与 (3) 的等价性不言自明. 下证 (1)⇔(2). 考虑局部化定义中的标准映射 $\theta : M \to M_S$, 则每个 M_S 中元素均可表为 $\theta(x)\lambda(s)^{-1}$ 的形式并且 $\mathrm{Ker}\theta = t_S(M)$. 那么 $M_S = 0 \Leftrightarrow \theta(x) = 0, \forall x \in M \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\theta = M \Leftrightarrow M = t_S(M)$, 由此得到 (1) 与 (2) 等价. □

Example 1.23. 设 R 是 (非交换) 整环, 若 R 的正则元集是右 Ore 集, 称 R 是**右 Ore 整环**. 一般整环的正则元集是乘闭子集但未必满足右 Ore 条件, 例如域 $\Bbbk$ 上的自由代数 $\Bbbk\langle x, y\rangle$, 它不是右 Ore 整环. 现在设 R 是整环, 从 [引理1.6] 我们可知 R_R 是一致模的充要条件是 R 是右 Ore 整环. 特别地, 整区作为自身上的模明显是一致的. 前面我们提到对含幺环 R 的右 Ore 集 S, R 上任何右模关于该乘闭子集的挠部分仍是子模. 故若 R 的正则元全体是右 Ore 集, 那么任何右 R-模 M 的挠部分 $t(M) = \{x \in M | 存在正则元 a \in R 使得 xa = 0\}$ 是 M 的子模, 这覆盖了抽象代数中的经典结果.

在交换代数中我们知道局部化函子是正合的, 这个事实在非交换世界仍成立.

Proposition 1.24. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, $(-)_S : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R_S$ 是局部化函子, 那么 $(-)_S : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R_S$ 是共变加性正合函子. 特别地, R_S 是平坦左 R-模.

Proof. 由定义便知 $(-)_S : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R_S$ 是共变加性函子. 我们只需验证局部化函子是正合函子. 自然同构 $(-)_S \cong - \otimes_R R_S$ 表明 $(-)_S$ 是右正合函子, 故只需说明局部化函子保持单射. 如果有单右 R-模同态 $f : X \to Y$, 我们必须说明 $f_S : X_S \to Y_S$ 是单射. 设 $\theta_X : X \to X_S, \theta_Y : Y \to Y_S, \lambda : R \to R_S$ 是局部化定义中的标准映射, 那么 $f_S(\theta_X(x)\lambda(s)^{-1}) = \theta_Y(f(x))\lambda(s)^{-1}, \forall x \in X, s \in S$. 如果 $\alpha = \theta_X(x)\lambda(s)^{-1} \in X_S$ 满足 $f_S(\alpha) = 0$, 那么 $\theta_Y(f(x)) = 0$. 进而存在 $u \in S$ 使得 $f(x)u = 0$, 即 $f(xu) = 0$. 因为 f 是单射, 所以 $xu = 0$, 这表明 $\theta(x) = 0$, 进而 $\alpha = 0$. 这就得到 f_S 是单射, 故 $(-)_S : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R_S$ 是正合函子. □

对 R, M 在 S 处的局部化 $(R_S, \lambda), (M_S, \theta)$, 固定记 $\lambda(a)\lambda(s)^{-1}$ 为 as^{-1}, 记 $\theta(x)\lambda(s)^{-1}$ 为 xs^{-1}. 在交换代数中, 我们熟知含幺交换 Noether 环上模的本质扩张在局部化下仍保持. 在非交换层面, 有

Proposition 1.25. 设含幺环 R 是右 Noether 的, $j: N \to M$ 是本质单同态, S 是 R 的右分母集且 $S \subseteq Z(R)$, 则 $j_S: N_S \to M_S$ 仍为本质单同态.

Proof. 因为 $(-)_S$ 是正合函子, 所以 j_S 仍单, 只需再说明 $j_S(N_S)$ 是 M_S 的本质子模. 任取 $x1^{-1} \neq 0 \in M_S$(那么对任何 $t \in S$ 有 $xt \neq 0$), 需要说明 $j_S(N_S) \cap (x1^{-1})R_S \neq 0$. 这里使用反证法, 假设 $j_S(N_S) \cap (x1^{-1})R_S = 0$. 取 $\{\mathrm{ann}_R(xs) | s \in S\}$ 中的极大元 $\mathrm{ann}_R(xt), t \in S$(因为这里元素的零化子是右理想, 所以通过 R 的右 Noether 条件可保证取到极大元), 那么 $j(N) \cap xtR \neq 0$. 设 R 的右理想 I 满足 $j(N) \cap xtR = xtI$. 那么可设 $I = a_1R + a_2R + \cdots + a_nR$, 进而 $xta_k1^{-1} = 0, \forall 1 \leq k \leq n$. 于是存在 $u \in S$ 使得 $xta_ku = 0, \forall 1 \leq k \leq n$(这里对所有的 k 能够取到一个公共的 s 可以直接由 $S \subseteq Z(R)$ 保证, 或者用右 Ore 条件). 因而 $xtuI = 0$. 这意味着 $I \subseteq \mathrm{ann}(xtu) = \mathrm{ann}(xt)$(这里用到 $\mathrm{ann}(xt)$ 的极大性以及 $u \in Z(R)$), 所以 $xtI = 0$, 得到矛盾. □

Remark. 一般地, 非交换 Noether 环上模的本质扩张未必在局部化下保持, 具体例子可见 [GJ88].

Lemma 1.26. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, 那么局部化函子 $(-)_S: \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R_S$ 满足对任何右 R_S-模 X 都存在右 R-模 M 使得 $X \cong M_S$(本质满性). 并且任何右 R_S-模间的右 R-模同态 $f: X \to Y$ 都可天然视作 R_S-模同态.

Proof. 任何右 R_S-模 X 可天然视作右 R-模, 故取 $M = X$. 则有 $X \cong M \otimes_R R_S \cong M_S$. 现取定右 R_S-模间的右 R-模同态 $f: X \to Y$, 那么 $f(xas^{-1})s = f(xas^{-1}s) = f(xa), \forall a \in R, s \in S$. 从而 $f(xas^{-1}) = f(x)as^{-1}, \forall as^{-1} \in R_S$. 即 f 是右 R_S-模同态. □

局部化函子也可以和直和可交换.

Proposition 1.27. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, 那么局部化函子 $(-)_S: \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R_S$ 与任意直和可交换. 即对任何右 R-模族 $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 有右 R_S-模同构 $(\bigoplus\limits_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha)_S \cong \bigoplus\limits_{\alpha \in \Lambda} (M_\alpha)_S$.

Proof. 验证想法与交换情形完全类似. 作右 R-模同态

$$f: \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \to \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (M_\alpha)_S, (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \mapsto (x_\alpha 1^{-1})_{\alpha \in \Lambda},$$

由 f 可诱导右 R_S-模同态 $F: (\bigoplus\limits_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha)_S \to \bigoplus\limits_{\alpha \in \Lambda} (M_\alpha)_S$, 再用余积泛性质可自然地构造 F 的逆映射. □

Corollary 1.28. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, 那么对任何自由右 R-模 M, M_S 是自由右 R_S-模.

Proof. 设 $M \cong \bigoplus\limits_{i \in I} R$(作为右 R-模), 则 $M_S \cong (\bigoplus\limits_{i \in I} R)_S \cong \bigoplus\limits_{i \in I} R_S$(作为右 R_S-模). □

Corollary 1.29. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, 那么对任何投射右 R-模 P, P_S 是投射右 R_S-模.

Proof. 因为 P 是投射模, 故它为某个自由模的直和因子, 设 $F = P \oplus L$, 其中 F 是自由右 R-模. 进而 $F_S \cong P_S \oplus L_S$, 这说明 P_S 是某个自由右 R_S-模的直和因子, 进而 P_S 投射. □

Remark. 对有限生成自由右 R-模 F, 明显 F_S 也是有限生成模, 进而是有限生成自由右 R_S-模. 于是对任何有限生成投射右 R-模 P, 局部化 P_S 也是有限生成投射右 R_S-模.

Corollary 1.30. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, 那么对任何右 R-模 M 有 $\mathrm{p.dim}(M_S)_{R_S} \leq \mathrm{p.dim}M_R$. 特别地, 由 [引理1.26] 知 $\mathrm{r.gl.dim}R_S \leq \mathrm{r.gl.dim}R$.

Proof. 由局部化函子的正合性以及投射模作局部化后不改变投射性, 可知 M_R 的投射分解关于 S 作局部化后可得 M_S 作为右 R_S-模的一个投射分解, 由此得 $\mathrm{p.dim}(M_S)_{R_S} \leq \mathrm{p.dim}M_R$. □

最后我们指出局部化保持 Noether 性质与 Artin 性质来结束本节. 给定含幺环 R 和右分母集 S, 那么对 R_S 任何理想 $\mathfrak{J}$, 若记 $I = \{a \in R | 存在 s \in S 使 as^{-1} \in \mathfrak{J}\}$, 那么 I 是 R 的任意右理想且 $\mathfrak{J} = I_S$. 这一观察表明

Proposition 1.31. 设 R 是含幺环, 乘闭子集 S 是右分母集, 那么 $I \mapsto I_S$ 给出 R 的右理想格 $\mathcal{L}(R)$ 到 R_S 右理想格 $\mathcal{L}(R_S)$ 的偏序满射 π, 且存在偏序映射 $j : \mathcal{L}(R_S) \to \mathcal{L}(R)$ 使得 $\pi j = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(R_S)}$. 特别地, 当 R 是右 Noether(Artin) 环时, R_S 也是右 Noether(Artin) 环.

1.4 局部化：无挠与内射性

本节所讨论的内容并不会在 Godie 定理证明过程中用到, 因此初次阅读可以跳过. 在上一节中我们看到非交换环 R 如果关于一个乘闭子集 S 能够作局部化, 即 S 是右分母集, 那么我们还是可以对每个右 R-模 M 关于 S 作局部化, 进而定义出局部化函子 $(-)_S : \mathrm{Mod}\text{-}R \to \mathrm{Mod}\text{-}R_S$, 它是加性共变正合函子, 满足自然同构 $- \otimes_R R_S \cong (-)_S$, 和任意直和可交换, 保持模的自由性与投射性等. 本节我们来考虑局部化对应的挠理论 (torsion theory). 一般地, 一个 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的非空全子范畴 $\mathcal{S}$ 被称为 **Serre 子范畴**, 若对任何 $\mathcal{A}$ 中短正合列 $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$, X 在 $\mathcal{S}$ 中当且仅当 X' 与 X'' 都在 $\mathcal{S}$ 中. 容易证明一个 Abel 范畴的非空全子范畴 $\mathcal{S}$ 是 Serre 子范畴当且仅当 $\mathcal{S}$ 对取子对象、商对象、扩张对象封闭. 在 [命题1.22] 中我们看到一个右 R-模关于一个右分母集 S 是挠模当且仅当 $M_S = 0$. 这让我们立即看到：

Proposition 1.32. 设 S 是含幺环 R 的右分母集, 则 S-挠模全体构成的 $\mathrm{Mod}\text{-}R$ 的全子范畴是 Serre 子范畴.

例如, 在代数拓扑中同调群与同伦群计算的需要使得挠 Abel 群或者对于某个素数 p 的 p-挠群有研究的必要. 若取 $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} - \{0\}$, 那么 S-挠模就是经典意义下的挠 Abel 群. 取 $R = \mathbb{Z}, S = \{1, p, p^2, ...\}$, 那么 S-挠模就是 p-挠 Abel 群. 根据上述命题可知, 挠 Abel 群全子范畴和 p-挠 Abel 群全子范畴都是 **Ab** 的 Serre 子范畴. 因此这些被广泛关注的挠对象都可以被纳入 Serre 子范畴框架下研究. 容易验证：

Proposition 1.33. 设 S 是含幺环 R 的右分母集, 取 S-挠部分天然定义出共变加性函子 $t_S : \mathrm{Mod}\text{-}R \to \mathrm{Mod}\text{-}R$, 它把每个右 R-模 M 对应到它的 S-挠部分 $t_S(M)$, 每个右 R-模同态 $f : X \to Y$ 对应到限制映射 $t_S(f) = f| : t_S(X) \to t_S(Y), x \mapsto f(x)$. 则 $t_S : \mathrm{Mod}\text{-}R \to \mathrm{Mod}\text{-}R$ 是左正合函子.

称一个右 R-模 M 是 **S-可除的**, 如果对任何 $x \in M$ 和 $s \in S$, 存在 $y \in M$ 使 $x = ys$. 例如, 当 $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} - \{0\}$ 时, S-可除模就是可除 Abel 群. 一个基本的观察是

Lemma 1.34. 设 S 是含幺环 R 的右分母集, 则任何右 R_S-模作为右 R-模都是 S-无挠且 S-可除的.

Proof. 任取 $x \in t_S(M)$, 那么存在 $s \in X$ 使得 $xs = 0$, 于是 $x = xss^{-1} = 0$. 所以 M_R 是 S-无挠模. 任取 $z \in M$ 和 $s \in S$, 有 $z = zs^{-1}s$, 所以 M 是 S-可除的. □

Remark. 因此每个右 R-模局部化函子 $(-)_S : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R_S$ 下的像作为右 R-模是 S-无挠的.

Proposition 1.35. 设 S 是含幺环 R 的右分母集, M 是右 R-模. 如果 M 既 S-无挠又 S-可除, 则局部化定义中的标准映射 $\theta : M \to M_S, x \mapsto x1^{-1}$ 是右 R-模同构.

Proof. M 的 S-无挠性保证了 θ 单, M 的 S-可除性保证了 θ 满. $\square$

Remark. 若取 $M = R$, S 是由一些正则元构成的右 Ore 集, 那么局部化映射 $\lambda : R \to R_S, a \mapsto a1^{-1}$ 单.

在 [命题1.24] 中我们看到 R_S 作为左 R-模是平坦的, 所以下面的引理立即告诉我们任何内射右 R_S-模作为右 R-模是 S-无挠且内射的 (我们前面已经看到任何右 R_S-模作为右 R-模都是 S-无挠的).

Lemma 1.36. 设 $\alpha : R \to T$ 是保幺环同态, 于是 T 有自然的 R-T 双模结构并且任何右 T-模可天然视作右 R-模. 如果 ${}_RT$ 平坦 (即这里的环扩张平坦), 那么任何内射右 T-模作为右 R-模也内射.

Proof. 任取内射右 T-模 Q. 考虑自然同构 $\text{Hom}_R(-, Q_R) \cong \text{Hom}_R(-, \text{Hom}_T({}_RT_T, Q_T)) \cong \text{Hom}_T(- \otimes_R T, Q_T) \cong \text{Hom}_T(-, Q_T)(- \otimes_R T)$ 是正合函子的合成. 这说明 Q_R 是内射模. $\square$

Remark. 该引理表明平坦扩张可反向保持模的内射性. 最平凡的情况, 例如任何整区 R 的商域 F 上线性空间 V 总是内射的, 将 V 视作 R 上的模是内射 R-模.

因为任何内射右 R_S-模作为右 R-模是 S-无挠且内射的, 所以我们可以说任何内射右 R_S-模都是由某个 S-无挠且内射的右 R-模关于 S 作局部化得到的. 反之, 我们也关心对内射右 R-模 M, 何时局部化能够保持模的内射性, 即何时 M_S 是内射右 R_S-模.

Proposition 1.37. 设 S 是含幺环 R 的右分母集, M 是内射右 R-模. 那么当 M 是 S-无挠时, M_S 是内射右 R_S-模. 这仅为充分条件, 例如当 R 是含幺交换 Noether 环时, 任何内射 R-模 M 的局部化 M_S 是内射 R_S-模, 但 M 未必是 S-无挠的. 例如取 $R = \mathbb{Z}, S = \mathbb{Z} - \{0\}$, $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, 易知 M 是可除 Abel 群, 所以为内射 $\mathbb{Z}$-模但是 M 是 S-挠模. 即有可能会出现 M_R 是内射 S-挠模但 M_S 也是内射 R_S-模的情况!

Proof. 我们断言 M_R 是可除 S-模, 一旦证明该断言, 利用 [命题1.35] 立即得到 M_S 作为右 R-模是内射模, 进而由 [引理1.26] 可知结论成立. 现在我们来证明 M_R 是可除 S-模. 任取 $s \in S, x \in M$, 作 $f : sR \to M, sa \mapsto xa$, 先说明 f 定义合理. 如果 $a_1, a_2 \in R$ 使得 $sa_1 = sa_2$, 两边作用局部化同态 $\lambda : R \to R_S$, 利用 $\lambda(s)$ 可逆可得 $a_1 - a_2 \in \text{Ker}\lambda = t_S(R)$. 故存在 $t \in S$ 使得 $(a_1 - a_2)t = 0$, 这蕴含在 M 中 $xa_1t = xa_2t$. 因为 M 是 S-无挠的, 所以 $xa_1 = xa_2$, 这就说明 $f : sR \to M_S$ 是定义合理的右 R-模同态. 进而由 M_R 是内射模知 f 可延拓为 R 到 M 的模同态, 由此可知存在 $y \in M$ 使得 $x = ys$. $\square$

Remark. 证明过程告诉我们 S-无挠的内射右 R-模是 S-可除的. 前面提到交换 Noether 环上的内射模关于乘闭子集作局部化仍是内射模, 一般在非交换层面结论不成立, K. R. Goodearl 与合作者在 [GJ85] 中对任何非交换 Noether 单整环构造了反例, 他们在文中指出结论在 FBN 环 (见 [定义3.1]) 情形成立. 不过对于右 Noether 环 R, 如果乘闭子集 $S \subseteq Z(R)$, 那么可以证明任何内射右 R-模关于乘闭子集 S 作右局部化后是右 R_S-模.

Corollary 1.38. 设 S 是含幺环 R 的右分母集, X 是右 R_S-模, 那么 X 作为右 R_S-模是内射模的充要条件是存在 S-无挠的内射右 R-模 M 使得 $X \cong M_S$(作为右 R_S-模).

在 [引理1.21] 中我们看到 S-无挠模的本质扩张还是 S-无挠的, 特别地, 任何 S-无挠模 M_R 的内射包 $E(M)$ 是 S-无挠的内射右 R-模. 反之, 任何 S-无挠的内射右 R-模是自身的内射包, 所以

Proposition 1.39. 设 S 是含幺环 R 的右分母集, M 是右 R-模, 那么 M 是 S-无挠的内射模当且仅当 M 是某个 S-无挠右 R-模的内射包.

由此, 可以说 Mod-R_S 中任何内射右 R_S-模都可由某个 S-无挠的右 R-模取内射包再作局部化得到的.

1.5 一致维数：基本概念

Definition 1.40 (有限一致维数)**.** 若模 M 不含非零子模的无限直和, 那么称该模具有**有限一致维数**.

具有有限一致维数的模它的子模一定也具有有限一致维数. 无限维线性空间没有有限一致维数.

Example 1.41. 一致模、Artin 模和 Noether 模都有有限一致维数.

在正式地引入一致维数的概念 (见 [定义1.45]) 前, 我们需要对一致模有更进一步的认识.

Lemma 1.42. 若非零模 M 有有限一致维数, 那么它含有一个一致子模. 故 Noether 模总含有一个一致子模.

Proof. 假设 M 没有一致子模, 那么 M 所有子模都不是一致的, 于是对每个子模 $N \neq 0$, 它作为一个不是一致模的模, 必定存在 N 的非零子模 N_1, N_2 使得 $N \supseteq N_1 \oplus N_2$. 那么 M 包含两个非零子模的直和 $M_1 \oplus M_2$, 而 M_2 也包含两个非零子模的直和 $M_{21} \oplus M_{22}$, 进而 $M \supseteq M_1 \oplus M_{21} \oplus M_{22}$. 如此继续, 我们得到 M 包含无限个非零子模的直和, 这与 M 具有有限一致维数矛盾. □

Lemma 1.43. 设 M 具有有限一致维数, 那么 M 包含一个本质子模 X 使得 X 是有限个一致子模的直和.

Proof. 如果 $M = 0$, 结论不证自明. 下设 $M \neq 0$, 那么 [引理1.42] 表明 M 含一致子模. 即集合

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigoplus_{i=1}^{t} U_i | U_i\text{是}M\text{的一致子模}, t \geq 1 \right\} \neq \varnothing,$$

现在我们用反证法证明 S 中含有本质子模. 若不然对每个 $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} U_i \in \mathcal{S}$, 根据 [引理1.2(5)] 知存在 M' 使得 $M' \cap \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{m} U_i \right) = 0$ 且 $\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{m} U_i \right) \bigoplus M'$ 是本质子模, 那么 $M' \neq 0$, 所以 [引理1.42] 表明 M' 含一致子模 U_{m+1}, 于是 $\bigoplus\limits_{i=1}^{m+1} U_i \in \mathcal{S}$, 重复上述讨论, 得到 M 含有非零子模的无限直和, 矛盾. 故 $\mathcal{S}$ 中有本质子模. □

根据前面的引理, 如果模 M 具有有限一致维数, 那么它必定含有一个形如有限个一致子模直和的本质子模, 设为 $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} U_i$. 那么对 M 所包含的任何非零子模的直和 $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} M_i$(这里每个 $M_i \neq 0$) 必有 $r \leq m$. 因为 $W = \bigoplus\limits_{i=2}^{r} M_i$ 不是本质子模, 所以 [引理1.2(4)] 蕴含存在某个 U_i, 不妨设 $i = 1$, 使得 $W \cap U_1 = 0$(否则, 对每个 U_i, U_i 的非零子模都是 U_i 本质子模, 进而 $W = \bigoplus\limits_{i=2}^{r} M_i$ 满足每个 $W \cap U_i$ 是 U_i 本质子模, 从而 $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} (U_i \cap W)$ 是 $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} U_i$ 的本质子模, 这导致 W 是 M 的本质子模), 现在我们得到直和 $U_1 \bigoplus \left(\bigoplus\limits_{i=2}^{r} M_i \right)$, 再对 W 重复上述讨论便看到 $r \leq m$. 现在我们可以给出

Theorem 1.44. 设模 M 有有限一致维数, $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ 是一些一致模的直和且是本质子模. 那么

(1)M 包含的任何非零子模的直和 $\bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ 满足 $r \leq m$, 即直和项数目不超过 m.

(2)M 任意一些一致子模的直和 $W = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$, W 是本质子模的充要条件是 $s = m$.

Proof. 前面的讨论已经证明了 (1), 现在来说明 (2). (2) 的必要性由 (1) 立即得到, 只需验证充分性. 假设 $W = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$ 不是本质子模, 那么应用 [引理1.2(5)] 得到存在非零子模 T 使得 $W \oplus T$ 是本质子模, 进而 M 包含一个直和项数目为 $m+1$ 的非零子模直和, 这和 (1) 的结果矛盾. 因此 $s = m$ 时 W 是本质子模. □

于是上述定理表明, 对具有有限一致维数的模 M, 它的可表示为有限个一致模直和的本质子模 $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$, 其直和项数目 m 是不变量, 由就引出一致维数的概念.

Definition 1.45 (一致维数)**.** 设 M 是模, 如果 M 不包含非零子模无限直和, 设 M 有本质子模 $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$, 其中 U_i 均为一致模, 称 m 为 M 的**一致维数**或 **Goldie 维数**. 若 M 包含非零子模的无限直和, 称 M 的一致维数是 $+\infty$. 记 M 的一致维数为 $\mathrm{u.dim}_R M$. 具有有限一致维数的模确实一致维数有限. 同构的模一致维数相同.

如果右 R-模 M 具有有限一致维数, 设 $\mathrm{u.dim}_R M = n$, 那么存在有限个一致模的直和 $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ 使得它是 M 的本质子模, 进而由本质子模的传递性可得 $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ 是 $E(M)$ 的本质子模, 所以 $E(M) = E(\bigoplus_{i=1}^{m} U_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} E(U_i)$(这里最后一个等式成立的原因是 [推论1.3]).

1.6 相关素理想

这节介绍相关素理想的概念和基本性质, 它们并不会在 Goldie 定理的证明中用到, 初次阅读可跳过本节. 若右 R-模 $M \neq 0$ 满足对任何非零子模 M' 有 $\mathrm{Ann}_R M = \mathrm{Ann}_R M'$, 则称 M 是**素模**. 注意到不可约模总是素模, 因此素模可视作不可约模的推广. 下面的引理表明素模的零化子总是素理想.

Lemma 1.46. 设 M_R 是素模, 则 $\mathrm{Ann}_R M$ 是 R 的素理想.

Proof. 因为 $M \neq 0$, 所以 $\mathrm{Ann}_R M$ 是 R 的真理想. 任取 R 的理想 A, B 使 $AB \subseteq \mathrm{Ann}_R M$, 假设 $A \not\subseteq \mathrm{Ann}_R M$, 那么 MA 是 M 的非零子模, 于是 $B \subseteq \mathrm{Ann}_R(MA) = \mathrm{Ann}_R M$, 所以 $\mathrm{Ann}_R M$ 是素理想. □

Example 1.47. 设 R 上非零右 R-模 M 满足 $\mathrm{Ann}_R M$ 是 R 的极大理想, 则 M 是素模.

Proof. 因为 $M \neq 0$, 所以 $\mathrm{Ann}_R M$ 是 R 的真理想. 任取 M 的非零子模 N, 有 $\mathrm{Ann}_R M \subseteq \mathrm{Ann}_R N \subsetneq R$, 因此 $\mathrm{Ann}_R M$ 的极大性迫使 $\mathrm{Ann}_R M = \mathrm{Ann}_R N$. 这表明 M 是素模. □

Definition 1.48 (相关素理想)**.** 设 R 是含幺环, M 是右 R-模, 如果 R 的素理想 P 满足存在 M 的素子模 N 使得 $P = \mathrm{Ann}_R N$, 则称 P 是 M 的**相关素理想** (associated prime). M 所有相关素理想构成集合记作 $\mathrm{Ass}(M)$.

Example 1.49. 设 I 是 R 的理想, 那么右 R-模 R/I 是素模当且仅当 I 是素理想. 这时, $\mathrm{Ann}_R(R/I) = \{I\}$.

在交换代数中, 含幺交换环 R 上模 M 的一个相关素理想 P 是指形如 $\mathrm{ann}_R(x), x \in M$ 的素理想. 下面我们说明非交换情形的相关素理想是交换情形的推广.

Proposition 1.50. 设 R 是含幺交换环, M 是 R-模. 则素理想 P 是 M 某个素子模零化子的充要条件是存在 $x \in M$ 使得 $P = \mathrm{ann}_R(x)$.

Proof. 必要性: 设 $P = \mathrm{Ann}_R N$, N 是 M 的素子模, 任取 $x \neq 0 \in N$, 有 $P = \mathrm{Ann}_R N = \mathrm{Ann}_R(Rx) = \mathrm{ann}_R(x)$. 充分性：这时 M 有个同构于 R/P 的子模, 故有以 P 为零化子的素子模. $\square$

下面是一些相关素理想集的常用性质.

Proposition 1.51. 设 R 是含幺环, M_R 是右 R-模. 那么
(1) 对任何 M 的子模 M' 有 $\mathrm{Ass}(M') \subseteq \mathrm{Ass}(M)$.
(2) 对任何 M 的本质子模 M' 有 $\mathrm{Ass}(M') = \mathrm{Ass}(M)$. 特别地, 总有 $\mathrm{Ass}E(M) = \mathrm{Ass}(M)$.
(3) 对任给 R-模正合列 $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$, 有 $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$.
(4) 对 R-模 $M_1, ..., M_n$ 有 $\mathrm{Ass}(M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}M_i$.
(5) 若 R 满足双边理想升链条件 (例如 R 是单边 Noether 环), 那么 $M \neq 0$ 当且仅当 $\mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$.
(6) 若 M 是一致模, 那么 $|\mathrm{Ass}(M)| \leq 1$.

Proof. (1) 是明显的, (2) 由 $E(M)$ 的素子模 X 和 M 之交是 M 的素子模立即得到. 现在说明 (3), 任取 $P \in \mathrm{Ass}M$ 并设 M 的素子模 N 满足 $\mathrm{Ann}_R N = P$. 如果 $N \cap \mathrm{Im}\alpha \neq 0$, 那么 M' 含有一个零化子是 P 的素子模, 结论成立. 如果 $N \cap \mathrm{Im}\alpha = 0$, 那么把 β 限制于 N 上是单的, 由此知 $\beta(N)$ 是 M'' 的素子模且 $\beta(N)$ 的零化子是 P. 所以 $P \in \mathrm{Ass}(M'')$, 这就证明了 (3). 由 (1) 与 (3) 立即得到 (4).

(5) 只需验证必要性. 考虑 R 的非空理想集 $\mathcal{S} = \{\mathrm{Ann}_R N | N \neq 0 \subseteq M\}$, 由条件知 $\mathcal{S}$(关于包含关系) 有极大元 $\mathrm{Ann}_R N_0$, 易知 N_0 是 M 的素子模, 从而 $\mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$.

(6) 如果 $\mathrm{Ass}(M) = \varnothing$, 结论直接成立. 下设 $\mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$, 任取 $P_1 = \mathrm{Ann}_R N_1, P_2 = \mathrm{Ann}_R N_2 \in \mathrm{Ass}M$, 其中 N_1, N_2 是素子模. 那么 $N_1 \cap N_2 \neq 0$ 既是 N_1 子模又是 N_2 子模保证了 $P_1 = \mathrm{Ass}(N_1 \cap N_2) = P_2$. $\square$

Corollary 1.52. 设 M_R 具有有限一致维数 (例如 M 是 Noether 模), 那么 $\mathrm{Ass}M$ 是有限集.

Proof. 若 $\mathrm{u.dim}M = n$, 那么存在有限个一致模的直和 $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ 使得它是 M 的本质子模, 进而由本质子模的传递性可得 $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ 是 $E(M)$ 的本质子模, 所以 $E(M) = E(\bigoplus_{i=1}^{m} U_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} E(U_i)$, 那么应用 [命题1.51(2)(4)(6)] 知 $\mathrm{Ass}M = \mathrm{Ass}E(M)$ 是有限集. $\square$

最后, 我们自然关心在什么条件下可以保证一个非零模的相关素理想集非空.

Proposition 1.53. 设 R 是含幺环, M_R 是非零模, 则当集合 $\{\mathrm{Ann}_R N | N\text{是}M\text{非零子模}\}$ 存在极大元 $\mathrm{Ann}_R N_0$ 时, N_0 是 M 的素子模且 $\mathrm{Ann}_R N_0$ 是 M 的一个相关素理想. 特别地, 若环 R 满足双边理想升链条件 (例如 R 是单边 Noether 环), 那么任何非零 R-模的相关素理想集非空.

Proof. 设 $\mathrm{Ann}_R N_0$ 是 $\{\mathrm{Ann}_R N | N\text{是}M\text{非零子模}\}$ 的一个极大元, 下证 N_0 是 M 的素子模. 任取 N_0 的非零子模 X, 有 $\mathrm{Ann}_R N_0 \subseteq \mathrm{Ann}_R X$, 故由 $\mathrm{Ann}_R N_0$ 的选取方式迫使 $\mathrm{Ann}_R N_0 = \mathrm{Ann}_R X$. 故 N_0 是 M 的素子模. $\square$

该命题的一个直接推论是：

Corollary 1.54. 设 R 是右 Noether 环, 那么任何一致模 U_R 的相关素理想恰好一个.

1.7 一致维数：通用性质

对任何模 M, 我们已经定义了它的一致维数 $\mathrm{u.dim}_R M$. 当 M 不包含非零子模无限直和时, 它有有限的一致维数, 并且该维数表示 M 的可表示为有限个一致子模直和的本质子模直和项数目. 根据 [定理1.44], 对具有有限一致维数的模, 它所包含的任何有限直和, 直和项数目都被该模的一致维数控制. 本节主要介绍一些关于一致维数的基本性质, 它们是后续证明 Goldie 定理的基本工具.

Lemma 1.55. 设 M, M_1, M_2 是模, 那么
(1)M 的一致维数是 1 当且仅当 M 是一致模.
(2)M 的一致维数是 0 当且仅当 $M = 0$.
(3) 若 M 有一致维数 n, 那么它的任何子模 N 满足 $\mathrm{u.dim}_R N \leq n$. 等号成立当且仅当 N 是本质子模.
(4)(一致维数保有限直和)$\mathrm{u.dim}_R(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{u.dim}_R M_1 + \mathrm{u.dim}_R M_2$.
(5)M 有有限一致维数的充要条件是 M 满足补子模升链条件. 事实上 $\mathrm{u.dim}_R M$ 就是补子模链的最大长度.

Proof. (1) 充分性明显. 必要性：假设 M 不是一致的, 则存在非零子模 M' 不是本质子模, 于是存在非零子模 C 使得 $M' \oplus C$ 是 M 的本质子模, 这和 $\mathrm{u.dim}_R M = 1$ 矛盾. (2) 由一致维数的定义即得.

(3) 首先 N 作为具有有限一致维数的模的子模也具有有限一致维数. 如果 N 的一致维数至少是 $n+1$, 那么 N 包含 $n+1$ 个非零子模的直和, 这和 [定理1.44(1)] 矛盾. 故 $\mathrm{u.dim}_R N \leq n$. 下面再说明 $\mathrm{u.dim}_R N = n$ 当且仅当 N 是本质子模. 若 $\mathrm{u.dim}_R N = n$, 那么存在 N 的一致子模 $V_1, ..., V_n$ 使得 $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ 是 N 的本质子模, 由 $\mathrm{u.dim}_R M = n$ 以及 [定理1.44] 可见 $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ 是 M 的本质子模, 从而 N 包含一个子模是 M 的本质子模, 这说明 N 是本质的. 反之, 若 N 是本质子模, 并设 M 的一致子模 $U_1, ..., U_n$ 使 $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ 是 M 的本质子模, 那么每个 $U_i \cap N \neq 0$ 它是 N 的一致子模, 从而 N 包含非零子模的直和 $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \cap N$, 这说明 $\mathrm{u.dim}_R N \geq n$.

(4) 如果 M_1, M_2 中有一个一致维数不是有限的, 结论直接成立. 下设 M_1, M_2 均有有限一致维数, 于是由 [引理1.2] 知 $M_1 \oplus M_2$ 有个本质子模可表为 $\mathrm{u.dim}_R M_1 + \mathrm{u.dim}_R M_2$ 个一致子模的直和.

(5) 根据 [引理1.4], 对每个补子模 X, 若有子模 X' 真包含 X, 那么 X' 会有非零子模 Y 使得 $Y \cap X = 0$, 即产生直和 $X \oplus Y$. 所以, 当 M 的一致维数 $\mathrm{u.dim}_R M = n < +\infty$ 时, M 的任何补子模链长度不会超过 n. 否则, 若有补子模严格升链 $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n+1}$, 会产生直和项数为 $n+1$ 的非零子模的直和, 这将与 $\mathrm{u.dim}_R M = n$ 矛盾. 由此我们看到当 M 的一致维数有限时, 任何补子模严格升链长度被一致维数控制, 进而 M 满足补子模升链条件. 反之, 假设 M 没有有限的一致维数, 即 M 包含非零子模的无限直和, 设 M 包含非零子模的无限直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$, 对每个 $t \geq 1$, $\bigoplus_{i=t}^{\infty} M_i$ 真包含 $\bigoplus_{i=t+1}^{\infty} M_i$, 故可选取 $\bigoplus_{i=t+1}^{\infty} M_i$ 的补子模 C_{t+1} 以及选取 $\bigoplus_{i=t}^{\infty} M_i$ 的补子模 C_t 使得 $C_t \subsetneq C_{t+1}$(事实上, 对选定的 C_t, 考虑 $C_{t+1} = M_t \oplus C_t$ 即可). 于是我们得到补子模严格升链, 得到矛盾. 因此 M 不含非零子模的无限直和, 即它具有有限一致维数. 目前我们已经说明一个模具有有限一致维数的充要条件是它满足补子模升链条件. 而前面证明过程表明

- 若 $\mathrm{u.dim}_R M = n$, 则 M 任何补子模严格升链长度不超过 n.
- 若 M 包含非零子模的直和 $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, 那么可得长度是 n 的补子模升链 $C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_{n-1} \subsetneq C_n \subsetneq M$.
- 若 M 包含非零子模的无限直和, M 有无限长的补子模严格升链.

由此可见模 M 的一致维数 $\mathrm{u.dim}_R M$ 就是补子模链的最大长度. $\square$

当我们把含幺环 R 视作自身上的右模 R_R 来讨论一致维数时, 把 $\mathrm{u.dim} R_R$ 记为 $\mathrm{r.u.dim} R$ 或 $\mathrm{u.dim} R$.

Example 1.56. 设 R 是右 Noether 环, 那么 $\mathrm{r.u.dim} R < +\infty$.

下述引理不仅告诉我们含幺环 R 的右商环 Q 如果存在, 那么 R 和 Q 的一致维数同时有限或同时无限, 也提供了证明环/右商环 (如果存在) 中右理想是本质右理想的手段.

Lemma 1.57. 设 R 是含幺环, S 是由一些正则元构成的右 Ore 集 (这时局部化的标准映射 $\lambda : R \to Q$ 是单射), 那么有右局部化 $Q = R_S$. 对 R 的右理想 I 和 Q 的右理想 J, 记 $I_S = \{as^{-1} | a \in I, s \in S\}$ 是 Q 的右理想, $J \cap R = \lambda^{-1}(J) = \{b \in R | \text{存在} s \in S \text{使} bs^{-1} \in J\}$ 是 R 的右理想. 则有
(1) I 是 R 的本质右理想当且仅当 I_S 是 Q 的本质右理想.
(2) J 是 Q 的本质右理想当且仅当 $R \cap J$ 是 R 的本质右理想.
(3) $\mathrm{r.u.dim} Q = \mathrm{r.u.dim} R$.

Proof. 利用 S 中元素均为正则元, 容易验证 R 的任何右理想 I_1, I_2, 有 $I_1 \cap I_2 = 0 \Leftrightarrow (I_1)_S \cap (I_2)_S = 0$. 特别地, 对右理想 I_1, 有 $I_1 = 0 \Leftrightarrow (I_1)_S = 0$. 此外, Q 的任何右理想 J_1 总满足 $J_1 = (J_1 \cap R)_S$, 故 (1)(2) 明显成立. 为了看到 (3) 成立, 只需注意下面两个容易验证的事实.

- 对 R 的任何右理想族 $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $(\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha)_S = \sum\limits_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha)_S$. 且 $\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$ 是直和当且仅当 $\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha)_S$ 是直和.
- 对 R 的非零右理想 U, U 是一致模当且仅当 U_S 作为右 Q-模是一致的.

$\square$

2 Goldie 定理

2.1 Goldie 环

本节介绍右 Goldie 环的概念和基本性质, 它是接下来讨论的基本对象. 之前提到, Goldie 定理说含幺环 R 存在右商环 Q 并且 Q 是 Artin 半单的充要条件是 R 是半素右 Goldie 环. 在引入下面 Goldie 环的定义后, 我们马上可以看到该命题的必要性证明 (见 [命题2.3]).

Definition 2.1 (Goldie 环)**.** 若含幺环 R 满足右零化子升链条件且 $\mathrm{r.u.dim} R < +\infty$, 称 R 是**右 Goldie 环**.

Example 2.2. 因右 Noether 环 R 满足补子模和右零化子升链条件, 故 R 是右 Goldie 环.

设 $\lambda : R \to R_S$ 是右局部化定义中的环同态, 若 S 是由 R 的一些正则元构成的乘闭子集, 那么 λ 是单射, 即 R 可嵌入右局部化 $Q = R_S$. 下面我们来看看当 Q 存在时, Q 的特性可反过来蕴含 R 的哪些信息.

Proposition 2.3. 若含幺环 R 有一些正则元构成的乘闭子集 S 使得右局部化 $Q = R_S$ 存在, 那么
(1) 如果 Q 是右 Goldie 环, 那么 R 也是右 Goldie 环.
(2) 如果 Q 是 Artin 半单环, 那么 R 是半素右 Goldie 环.
(3) 如果 Q 是 Artin 单环, 那么 R 是素右 Goldie 环.

Proof. 由于 $Q = R_S$ 存在, 所以乘闭子集 S 是由一些正则元构成的右 Ore 集.

(1) 设 Q 是右 Goldie 环, 那么 [引理1.57(3)] 表明 R 有有限右一致维数. 对任给 R 的右零化子 $\mathrm{rann}_R X \subsetneq \mathrm{rann}_R Y$, 其中 X, Y 是 R 的子集, 易验证 $\mathrm{rann}_Q X \subsetneq \mathrm{rann}_Q Y$. 于是由 Q 满足右零化子升链条件保证了 R 也满足右零化子条件, 所以 R 是右 Goldie 环.

(2) 由于 Q 是右 Artin 的, 所以也是右 Goldie 环, 于是 (1) 的结果表明 R 是右 Goldie 环. 下面验证 R 是半素环. 为此, 我们说明 R 没有非零幂零理想. 设 N 是幂零理想, 需要说明 $N = 0$. [引理1.1] 表明 $\mathrm{lann}N$ 是本质右理想. 因为 S 是 R 的由一些正则元构成右 Ore 集, 故 [引理1.57(1)] 说 $(\mathrm{lann}N)_S$ 是 Q 的本质右理想. 而 Q 是 Artin 半单环蕴含 $(\mathrm{lann}N)_S$ 是直和因子, 于是知 $Q = (\mathrm{lann}N)_S$. 从而 $\mathrm{lann}N$ 中有正则元, 故 $N = 0$.

(3) 和 (2) 类似地, 易知 R 是右 Goldie 环. 为了得到 R 是素环, 我们说明对任何非零理想 $I, J \subseteq R$ 有 $IJ \neq 0$. 设 $\lambda : R \to Q$ 是右局部化的嵌入映射, 那么 $\lambda(I)$ 在 Q 中生成的理想是 Q, 由此可以看到 $\lambda(I)$ 在 Q 中生成的左理想也是 Q: 具体地, 利用 R_S 中有限个元素都有公分母, 可设 $1_Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda(r_i)\lambda(s_i)^{-1}\lambda(a_i)\lambda(d)^{-1}$, 其中 s_i, d 是正则元, $a_i \in I, r_i \in R$. 那么 $\lambda(d)$ 作为 Q 中可逆元在 $\lambda(I)$ 生成的左理想内. 由此知 $Q\lambda(I) = Q$, 同样地, 有 $Q\lambda(J) = Q$. 现在, 利用 $Q\lambda(IJ) = Q\lambda(I)\lambda(J) = Q\lambda(J) = Q$ 便可看到 $IJ \neq 0$. □

Example 2.4. 任何整区 R 关于所有正则元构成的乘闭子集 S 的商环 R_S 就是它的商域, 即 R_S 是域, 所以整区总是右 Goldie 环. 而整区未必是 Noether 的, 所以我们可以构造是右 Goldie 环但不 Noether 的例子.

给定含幺交换环 K 上的素 PI 代数 R(例如素 PI 环), Posner 定理表明 R 的关于非零中心正则元全体的右局部化存在并且是其中心上的有限维中心单代数, 进而是 Artin 单代数. 所以 [命题2.3(3)] 告诉我们

Corollary 2.5. 含幺交换环 K 上的素 PI 代数 R 是右 Goldie 环. 特别地, 素 PI 环是右 Goldie 环.

2.2 Goldie 定理

在正式证明 Goldie 定理前, 还需做一些准备. 称环的右零化子集中极大元为**极大右零化子**.

Lemma 2.6. 设含幺环 R 满足右零化子升链条件, 那么
(1) 每个极大右零化子形如 $\mathrm{rann}(a)$.
(2) 对每个 $b \in R$, 存在正整数 m 使得 $\mathrm{rann}(b^m) = \mathrm{rann}(b^{m+1}) = \cdots$, 此时 $b^m R \cap \mathrm{rann}(b^m) = 0$.
(3) R 的任何诣零左 (右) 理想会包含一个非零幂零左 (右) 理想.

Proof. (1) 是明显的. (2) 正整数 m 的存在性由右零化子升链条件保证. 容易验证 $b^m R \cap \mathrm{rann}(b^m) = 0$. 最后证明 (3), 以左为例. 设 L 是非零诣零左理想, 取 $\mathrm{rann}(a)$ 是 $\{\mathrm{rann}(a) | a \neq 0 \in L\}$ 中极大元, 下面通过说明 $aya = 0, \forall y \in R$ 来得到 Ra 是非零幂零左理想. 对 $y \in R$, 设正整数 k 使 $(ya)^k = 0, (ya)^{k-1} \neq 0$, 那么 $\mathrm{rann}(a)$ 的极大性迫使 $\mathrm{rann}(a) = \mathrm{rann}(ya)^{k-1}$, 因此 $aya = 0$. □

Remark. 特别地, 半素右 Goldie 环不含非零的诣零单边理想.

Lemma 2.7. 设 R 是满足右零化子升链条件的含幺环, 那么它的右奇异理想 $\zeta(R) = \{a \in R | \text{存在} E \in \mathcal{F}(R) \text{使得} aE = 0\}$, 其中 $\mathcal{F}(R)$ 是 R 的本质右理想集, 是幂零理想. 特别地, 若进一步 R 是半素的 (例如 R 是半素右 Goldie 环), 有 $\zeta(R) = 0$

Proof. 记 $I=\zeta(R)$, 那么由 R 满足右零化子升链条件知对充分大的正整数 n 有 $\mathrm{rann}I^n=\mathrm{rann}I^{n+1}$. 下证 $I^{n+1}=0$. 假设 $I^{n+1}\neq 0$, 取 $\{\mathrm{rann}(a)|a\in I, I^n a\neq 0\}$ 的极大元 $\mathrm{rann}(a)$. 对每个 $b\in I$, 由奇异理想的定义知 $\mathrm{rann}(b)$ 是 R 的本质右理想, 那么 $\mathrm{rann}(b)\cap aR\neq 0$, 那么 $\mathrm{rann}(a)$ 的选取方式迫使 $I^n ba=0$. 因此 $I^{n+1}a=0$, 从而 $I^n a=0$, 矛盾! 因此 $I^{n+1}=0$, 得证. □

Lemma 2.8. 设 R 是具有有限右一致维数且奇异理想 $\zeta(R)=0$ 的半素环 (例如半素右 Goldie 环, 之后我们会看到这是半素右 Goldie 环的等价刻画). 那么 R 的任何右正则元 c 是正则元且 cR 是 R 的本质右理想.

Proof. c 的右正则性使 R_R 的子模 cR 和 R 同构, 故 $\mathrm{u.dim}(cR)=\mathrm{u.dim}R$, 进而 [引理1.55(3)] 表明 cR 是 R 的本质右理想. 因为 $\zeta(R)=0$, 所以 $\mathrm{lann}(cR)=0$, 那么 $\mathrm{lann}(c)=0$, 从而 c 是正则元. □

下述命题在半素右 Goldie 环层面建立了本质右理想和正则元之间的联系.

Proposition 2.9 (Goldie)**.** 设 R 是具有有限右一致维数且右奇异理想 $\zeta(R)=0$ 的半素环, 那么
(1) 对 R 的右理想 I, I 包含一个元素 c 使得 $\mathrm{rann}(c)\cap I=0$.
(2) 对 R 的右理想 I, I 是本质的当且仅当 I 包含 R 的一个正则元.
特别地, 半素右 Goldie 环的一个右理想是本质右理想当且仅当它包含一个正则元.

Proof. (1) 我们分两步来证明满足条件的 c 的存在性.

Step1. 我们先说明当 I_R 是一致模时, 存在 $c\in I$ 满足条件. 事实上, 因为 I 是一致模, 所以存在 I 中非零元 c,d 使得 $cd\neq 0$. 下面说明 $V=\mathrm{rann}(c)\cap I$ 是零. 假设 $V\neq 0$, 那么 V 是 I 的本质子模, 从而对上述非零元 d, 有 $d^{-1}V=\{a\in R|da\in V\}$(回忆 [引理1.2(3)]) 是 R 的本质右理想. 而 $cd(d^{-1}V)=0$ 以及 $\zeta(R)=0$ 让我们得到了矛盾. 因此 $V=\mathrm{rann}(c)\cap I=0$. 所以当 I 是一致模时, 满足条件的 c 存在.

Step2. 对一般的情形, 不妨设 $I\neq 0$. 因为 R 具有有限右一致维数, 所以 R 的任何非零右理想有有限一致维数, 于是 [引理1.42] 告诉我们 R 的任何非零右理想包含某个一致子模. 那么 I 包含一致子模 U_1, 于是存在 $a_1\in U_1$ 使得 $\mathrm{rann}(a_1)\cap U_1=0$. 如果 $\mathrm{rann}(a_1)\cap I=0$, 取 $c=a_1$ 即可. 否则, 对 R 的非零右理想 $\mathrm{rann}(a_1)\cap I$, 包含一致模 U_2, 那么同样存在 $a_2\in U_2$ 使得 $\mathrm{rann}(a_2)\cap U_2=0$. 注意这时有

$$a_1R\oplus a_2R\oplus(\mathrm{rann}(a_1)\cap\mathrm{rann}(a_2)\cap I)\subseteq I$$

(具体地, 首先 $a_1R\oplus(\mathrm{rann}(a_1)\cap I)\subseteq I$, 在 $\mathrm{rann}(a_1)\cap I$ 中有直和分解 $a_2R\oplus(\mathrm{rann}(a_1)\cap\mathrm{rann}(a_2)\cap I)$). 如果这里 $\mathrm{rann}(a_1)\cap\mathrm{rann}(a_2)\cap I=0$, 那么 $c=a_1+a_2$ 满足条件. 重复上述讨论, 因为 R 具有有限右一致维数, 因此上述讨论在有限步后终止. 具体地, 在第 k 步得到

$$a_1R\oplus a_2R\oplus\cdots\oplus a_kR\oplus(\mathrm{rann}(a_1)\cap\mathrm{rann}(a_2)\cap\cdots\cap\mathrm{rann}(a_k)\cap I)\subseteq I$$

不妨设此时已稳定, 那么 $\mathrm{rann}(a_1)\cap\mathrm{rann}(a_2)\cap\cdots\cap\mathrm{rann}(a_k)\cap I=0$. 选取 $c=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$ 即可.

(2) 必要性：设 I 是本质右理想, 由 (1) 可选取 $c\in I$ 使得 $\mathrm{rann}(c)\cap I=0$, 进而 $\mathrm{rann}(c)=0$, 这说明 c 是右正则元, 现在应用 [引理2.8], 得到 c 是正则元. 充分性：设 $c\in R$ 是正则元, [引理2.8] 表明 cR 是本质右理想, 所以 I 也是本质右理想. □

含幺环 R 在全体正则元构成的乘闭子集处的右局部化 Q 若存在, 则称 Q 是 R 的**右 (经典) 商环**. 现在我们可以给出主定理——Goldie 定理的证明.

Theorem 2.10 (Goldie 定理)**.** 设 R 是含幺环, 那么以下四条等价：
(1) R 是半素右 Goldie 环.
(2) R 半素, 右奇异理想 $\zeta(R)=0$ 且 R 具有有限右一致维数.
(3) R 满足对任何右理想 I, I 是本质右理想的充要条件是 I 含某个 R 中正则元.
(4) R 的右商环 Q 存在且是 Artin 半单环.

更进一步, 含幺环 R 是素右 Goldie 环的充要条件是右商环 Q 存在且 Q 为 Artin 单环.

Proof. 在 [引理2.7] 中已证 (1)⇒(2). [命题2.9(2)] 中已证 (2)⇒(3). [命题2.3(2)] 中已证 (4)⇒(1). 所以我们只要验证 (3)⇒(4). 要说明右商环的存在性, 只需说明 R 的所有正则元构成的乘闭子集 S 是右 Ore 集. 下证 S 满足右 Ore 条件, 即对任给 $a\in R, d\in S$ 有 $aS\cap dR\neq\varnothing$. 这时正则元 d 满足 dR 是 R 的本质右理想, 应用 [引理1.2(3)] 立即得到 $a^{-1}(dR)$ 是 R 的本质右理想, 于是得到 $a^{-1}(dR)$ 包含一个正则元 c, 即 $ac\in dR$, 所以 $aS\cap dR\neq\varnothing$. 由此得到右商环 Q 存在. 再通过说明 Q_Q 是完全可约模来得到 Q 是 Artin 半单环. 从 [引理1.2(6)] 我们看到只需验证 Q 的本质右理想 J 只有 Q 自身. 根据 [引理1.57(2)] 得到 $R\cap J$ 是 R 的本质右理想, 所以由条件 $J\cap R$ 包含 R 的一个正则元 c, 于是 J 包含一个 Q 的可逆元, 故 $J=Q$.

最后我们来说明 R 是素右 Goldie 环的充要条件是右商环 Q 存在且是 Artin 单环. [命题2.3(3)] 中已证充分性. 必要性：这时 Q 已经是 Artin 半单环, 只要说明 Q 单. 任取 Q 的非零理想 X, 那么 $R\cap X$ 是 R 的非零理想, 进而由 R 是素环得到 $R\cap X$ 是本质右理想. 同样由 [命题2.9(2)] 得 $R\cap X$ 含 R 的一个正则元, 所以 X 含 Q 中可逆元, 由此得到 $X=Q$. 因此 Q 是单环. □

Remark. 因为素环的非零理想总是本质右理想, 故右 Noether 素环的非零理想有正则元.

Example 2.11. 因为半素右 Noether 环一定是半素右 Goldie 环, 所以半素右 Noether 环的右商环存在且是 Artin 半单环. 特别地, 右 Noether 整环关于非零元全体构成的乘闭子集可作局部化. 即右 Noether 整环是右 Ore 整环 (回忆 [例1.23]). 我们当然也可以不使用 Goldie 定理直接地去说明右 Noether 整环是右 Ore 整环：只需说明对右 Noether 整环 R 中任何非零元 a,b, 有 $aR\cap bR\neq 0$ 即可. 若不然, 设 $aR\cap bR=0$, 我们说明这会导致 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b^naR$ 是右理想直和, 进而 R 有右理想严格升链, 得到矛盾. 假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b^naR$ 不是直和, 那么存在不全为零的元素

$$r_s,r_{s+1},...,r_{t-1},r_t\in R(s<t,r_s,r_t\neq 0)$$

使得 $b^sar_s+b^{s+1}ar_{s+1}+\cdots+b^tar_t=0$, 这蕴含 $ar_s\in aR\cap bR$, 但 $ar_s\neq 0$, 得到矛盾. 类似地, 素右 Noether 环也有右商环, 并且右商环是 Artin 单环, 进而知右 Noether 环关于素理想的商总有右商环, 且其中心是域.

如果含幺环 Q 的任何正则元都是可逆元, 则称 Q 是**商环** (ring of quotients). 易见 Q 是商环当且仅当它是自身关于正则元全体的右 (左) 局部化 (即 Q 的右商环存在且局部化映射是同构). 例如 Artin 环总是商环. 考虑连续函数环 $T=C[0,1]$, 那么 $x-1/2$ 是 T 中正则元但不是可逆元, 所以 T 不是商环. 存在非 Artin 的商环, 例如考虑集合 $A=[0,+\infty)$, 考虑幂集 $Q=\mathcal{P}(A)$, 对任何 $X,Y\in Q$, 由 $X+Y=(X-Y)\cup(Y-X), X\cdot Y=X\cap Y$ 可赋予 Q 上含幺交换环结构, 零元为 $\varnothing$, 幺元为 A, 不难看出 Q 中任何非幺元的元素都不是正则元, 即幺元是唯一的正则元. 记 $I_n=\mathcal{P}([n,+\infty))$, 那么 I_n 是 Q 的理想并且给出 Q 的理想严格降链 $I_1\supsetneq\cdots\supsetneq\cdots\supsetneq I_n\supsetneq I_{n+1}\supsetneq\cdots$. 所以 $Q=\mathcal{P}(A)$ 是非 Artin 的交换商环.

Example 2.12. 设含幺环 R 的正则元集为 S, 并设右商环 $Q=R_S$ 存在, 那么右商环是商环.

Proof. 需要验证任何正则元 $as^{-1} \in Q$ 满足 $a \in S$ 来得到 Q 是商环. 任给非零元 $b \in R$, 由 as^{-1} 是 Q 中正则元知 $ba \neq 0$. 因为 $sb \neq 0$, 因此 $ab = (as^{-1})(sb) \neq 0$. 由此得到 a 是 R 中正则元, 这蕴含 as^{-1} 可逆. □

Remark. 因此一个含幺环 Q 是商环当且仅当 Q 是某个含幺环的右商环.

Definition 2.13. 设 Q 是商环, 如果 Q 的子环 R(未必含幺) 满足任何 Q 中元素形如 as^{-1}, 其中 $a, s \in R$, 则称 R 是 Q 中的**右 order**. 如果 Q 的子环 R 满足任何 Q 中元素形如 $s^{-1}a$, 其中 $a, s \in R$, 则称 R 是 Q 中的**左 order**. 如果 Q 的子环 R 既是 Q 中右 order 又是左 order, 则称 R 为 Q 中 **order**.

Remark. 在代数数论中, 设 L 是代数数域并设 $n = [L : \mathbb{Q}]$, 如果 L 的含幺子环 $\mathcal{O}$ 是秩为 n 的自由 Abel 群, 则称 $\mathcal{O}$ 是 L 的 **order**. L 的整数环 $\mathcal{O}_L$ 总是 L 的 order, 并且任何 L 的 order 都是 $\mathbb{Z}$ 的整扩张, 这说明 $\mathcal{O}_L$ 是 L 中最大的 order, 因此也把 $\mathcal{O}_L$ 称为 L 的 **maximal order**. "order" 一词源于 Dedekind 对 $\mathcal{O}_L$ 的命名. 数论中人们研究 order 的主要动机是它可以覆盖很多与代数数域的整数环性质类似但未必是 Dedekind 整区的例子. 设 D 是既不是 0 也不是 1 的无平方因子整数, 二次域 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 的整数环 $\mathcal{O}_K$ 满足 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$, 其中

$$\omega = \begin{cases} (1+\sqrt{D})/2, & D \equiv 1 (\bmod 4) \\ \sqrt{D}, & D \equiv 2, 3 (\bmod 4). \end{cases}$$

并注意到 $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{D}]) = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[(1+\sqrt{D})/2]) = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. 现取 $D = 5$, 那么 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 的整数环 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2] \supsetneq \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. 因为 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 不是整闭扩张, 所以 $\mathbb{Z}(\sqrt{5})$ 不是 Dedekind 整区. 特别地, $\mathbb{Z}(\sqrt{5})$ **和 $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$ 是不同构的整区, 但它们具有同构的商域**. 这里 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 是秩为 2 的自由 Abel 群, 因此 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 是 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 中的 order. 一般地, 如果 D 满足 $D \equiv 1(\bmod 4)$, 那么 $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subsetneq \mathbb{Z}[(1+\sqrt{D})/2]$ 并且 $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ 是秩为 2 的自由 Abel 群. 同样 $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 不是整闭扩张说明 $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ 不是 Dedekind 整区, 因此 $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ 是异于 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 的整数环的 order. 所以考虑代数数域的 order 使得我们可以研究比其整数环更丰富却享有类似性质的整环类. 设 $\mathcal{O}$ 是代数数域 L 的含幺子环且满足 ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$ 是有限生成模, 那么 $\mathcal{O}$ 是 L 中 order 的充要条件是 $\mathcal{O}$ 所生成 L 的 $\mathbb{Q}$-子空间是 L. 因此在非交换代数领域, 人们使用此刻画来推广 order 的概念: 设 K 是域, R 是 K 的含幺子环 (所以 R 是整区), A 是有限维 K-代数, Λ 是 A 的含幺子环并且是有限生成 R-模. 如果 $K\Lambda = A$(即 Λ 在 A 中生成的 K-子空间是 A), 则称 Λ 是 A 中的 ***R*-order**. 如果取 $K = \mathbb{Q}, R = \mathbb{Z}$, A 是代数数域 L, 那么 L 中的 $\mathbb{Z}$-order 就是 L 中的 order. 例如考虑整区 R 及其商域 K, 那么 $\mathrm{M}_n(R)$ 是 $\mathrm{M}_n(K)$ 中的 R-order. 如果 G 是有限群, 那么群代数 RG 是 KG 中的 R-order. 更一般地, 就有上面定义里商环中 order 的概念. 并且商环中的 order 概念覆盖了非交换代数中的经典定义: 首先, 有限维 K-代数 A 作为 Artin 环是商环. 其次, 因为 $K\Lambda = A$, 所以对任何 $a \in A$, 存在 $k_1, ..., k_m \in K, \lambda_1, ..., \lambda_m \in \Lambda$ 使得 $a = k_1\lambda_1 + \cdots + k_m\lambda_m$. 设 $k_j = s_j t_j^{-1}$, 这里 $s_j, t_j \in R$, 那么化简可知存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得 $\lambda(t_1 \cdots t_m 1_\Lambda)^{-1} = a$, 这说明如果 Λ 是有限维 K-代数 A 中的 order, 则 Λ 也是商环 A 中的 order.

Example 2.14. 设含幺环 R 的右商环 Q 存在. 那么 R 是 Q 中右 order. 如果 R 的左、右商环都存在, 设为 Q, 那么 R 是 Q 中的 order. 前面我们已经看到 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 和 $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$ 有公共的商域 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, 所以 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 和 $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$ 都是 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 中 order. 即商环中的 order 可能不唯一. 命

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

那么 R 是 Q 中 order 且 Q 是 Artin 环, 通过下面的 [命题2.16] 可知 Q 是 R 的右商环.

Example 2.15. 设 R 是素 PI 环, 记其中心为 Z, $S = Z - \{0\}$ 是中心正则元集. 根据 Posner 定理, R_S 是其中心 Z_S 上的有限维中心单代数, 故 R_S 是商环. 这时 $\lambda : R \to R_S, a \mapsto a1^{-1}$ 是单环同态. 所以 R 是商环 R_S 中的 order. 特别地, 如果素环 R 在其中心 Z 上是有限生成模, 那么 R 是有限维 Z_S-代数 R_S(中心单代数) 中的 order. 例如取 R 是整区, 则 $Z = R$ 是素 PI 环, R_S 就是整区的商域 Q, 那么该素 PI 环的例子便是整区是其商域中的 order 的非交换推广. 反之, 如果含幺环 R 是某个有限维中心单代数中的 order, 那么 R 一定是素环: 根据 Goldie 定理, R 的右商环存在且右商环是 Artin 单环的充要条件是 R 为素右 Goldie 环可知 R 是素环. 因为 Q 是有限维代数, 所以 Q 是 PI 环, 因此 R 是素 PI 环. 即有限维中心单代数中的 order 都是素 PI 环. 于是结合 Posner 定理可知 R **是素 PI 环的充要条件是** R **的右商环存在且为有限维中心单代数**.

Proposition 2.16. 设 R 是商环 Q 中的右 order, 记 $S = \{Q\text{中可逆元}\} \cap R$, 那么 $Q = R_S$. 如果进一步 Q **是右 Artin 的或者** R **是** Q **中 order**, 则 S 就是 R 所有正则元构成的集合. 这时 Q 是 R 的右商环.

Proof. 因为 S 中元素都是 Q 中正则元, 因此 S 是 R 的正则元集的子集. 记 $\lambda : R \to Q$ 是标准嵌入, 那么 $\lambda(S) = S$ 在 Q 中可逆并且由 R 是右 order 知 Q 中元素都可以表示为 $as^{-1} = \lambda(a)\lambda(s)^{-1}, a \in R, s \in S$ 的形式. $0 = \text{Ker}\lambda = \{a \in R | \text{存在} s \in S \text{使得} as = 0\}$, 因此 (Q, λ) 是 R 关于 S 的右局部化, 即 $Q = R_S$.

下设 Q 进一步是右 Artin 环. 前面已经指出 S 中元素都是 R 中正则元. 所以下面需要验证 R 中正则元都是 Q 中可逆元. 因为 Q 是右 Artin 的, 所以只要验证任何 R 中正则元 a 是 Q 中右正则元即可. 任取 Q 中非零元素 x, 因为 R 是右 order, 所以可设 $x = bt^{-1} \neq 0 \in R, t \in S$, 进而 $ax = abt^{-1} \neq 0$. 这说明 a 可逆.

最后, 设这时 R 是商环 Q 中的 order. 任给 R 中正则元 a, 为了说明 a 是 Q 中可逆元, 只需验证 a 是 Q 中正则元. 任取非零元 $x \in Q$, 需要验证 $ax, xa \neq 0$. 因为 R 是 order, 所以存在 $b, c \in R, u, v \in S$ 使得 $x = bu^{-1} = v^{-1}c$. 那么 $ax = abu^{-1} \neq 0, xa = v^{-1}ca \neq 0$. 因此 S 就是 R 的正则元集. □

Remark. 特别地, 商环中的任意两个 order(右 Artin 环中任意两个右 order) 具有相同的商环.

设 R 是商环 Q 中的 order, 那么 [命题2.16] 表明 R 中正则元均在 Q 中可逆且 Q 就是 R 的右商环. 反之, 如果 R 存在右商环 Q, 设局部化映射 $\lambda : R \to Q$ 并将 R 与 $\lambda(R)$ 视作等同, 那么 [例2.12] 表明 R 是商环 Q 中的右 order. 所以研究商环 Q 中的 order 本质上就是研究左、右商环存在且为 Q 的环. 回到数论场景, 设 L 是代数数域, $\mathcal{O}$ 是 L 中的 order(即 $\mathcal{O}$ 生成的 L 的 $\mathbb{Q}$-线性子空间就是 L), 那么 L 中任何元素都可以表示为 as^{-1} 的形式, 其中 $a \in \mathcal{O}, s \in \mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}$. 之前我们也已经看到这时商环 L 的子环 $\mathcal{O}$ 就是该商环中的 order. 因此 $\mathcal{O}$ 的商域就是 L. 研究代数数域 L 中 order 可以理解为研究所有商域是 L 的整区.

3 Goldie 理论的应用

3.1 Noether PI 蕴含 FBN

Definition 3.1. 如果一个素环 R 的任何本质右理想都含有一个非零理想, 则称该素环是**右有界的** (right bounded). 如果含幺环 R 满足对任何素理想 P, 商环 R/P 都是右有界环, 则称 R 是**右全有界的** (right fully bounded). 类似可定义**左有界素环**与**左全有界环**的概念. 如果一个素环既是左有界的又是右有界的, 称该素环**有界**. 如果一个含幺环既是右全有界环又是左全有界环, 称该环是**全有界的** (fully bounded). 将右全有界的右 Noether 环简称为**右 FBN 环**. 全有界的双边 Noether 环简称为 **FBN 环**.

本节的目标是说明右 Noether PI 环是右 FBN 环. 在 [推论2.5] 中我们看到素 PI 环是右 Goldie 环, 因此由 Goldie 定理, 素 PI 环的任何本质右理想都会含 R 的某个正则元. 回忆对含幺环 K 上一个 PI 代数 A(可以没有 1_A), 如果 A 满足某个次数为 $d \geq 1$ 的首一多项式 $f \in K\langle x_1, ..., x_n \rangle$, 那么 A 满足 K 上某个次数不超过 d 的首一多重线性多项式 (见我的 PI 代数笔记). 我们利用这个工具先证明：

Proposition 3.2. 设含幺环 R 是 PI 的, $a \in R$, 那么对充分大的正整数 n, 右理想 $a^n R + \mathrm{rann}(a^n)$ 一定包含 R 的某个非零理想.

Proof. 考虑集合 $\mathcal{S} = \{l \in \mathbb{Z}_{\geq 1} | 存在某个l次首一多重线性多项式使得对某个正整数k, a^k R满足该多项式\}$, 因为 R 是 PI 环, 所以 $\mathcal{S}$ 非空, 由良序原理, 存在 $\mathcal{S}$ 中最小元 l, 设它对应 $a^k R$ 满足的首一多重线性多项式 $g(x_1, x_2, ..., x_l) \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_l \rangle$, 那么一方面, 由 $a^n R \subseteq a^k R, \forall n \geq k$ 知对每个正整数 $n \geq k$, $a^n R$ 也满足 g; 另一方面, 根据 l 的选取, 任何 $a^n R (n \geq k)$ 不会满足次数严格低于 l 的首一多重线性多项式. 不妨设 g 表达式中项 $x_1 \cdots x_l$ 的系数是 1. 现在我们将 g 如下拆分：$g(x_1, ..., x_l) = x_1 g_1(x_2, ..., x_l) + g_2(x_1, ..., x_l)$, 其中 g_1 是以 $x_2, ..., x_l$ 为变量的首一多重线性多项式, g_2 是每项不以变量 x_1 为首的多重线性多项式 (在证明 Köthe 猜想在 PI 环层面成立时, 我们也用过这个技术). 那么对任何 $r_1, ..., r_l \in R$, 有

$$0 = g(a^n r_1, a^{2n} r_2, ..., a^{2n} r_l) = (a^n r_1) g_1(a^{2n} r_2, ..., a^{2n} r_l) + g_2(a^n r_1, ..., a^{2n} r_l), \forall n \geq k.$$

根据前面的讨论, g_1 作为次数严格低于 l 的首一多重线性多项式不能零化 $a^{2n} R$, 故可选取适当 $r_2, ..., r_l \in R$ 使 $g_1(a^{2n} r_2, ..., a^{2n} r_l) \neq 0$. 记 $s = g_1(a^{2n} r_2, ..., a^{2n} r_l) \neq 0, a^{2n} t = g_2(a^n r_1, ..., a^{2n} r_l) \in R$(这里 s 依赖于 n), 则

$$a^n r_1 s + a^{2n} t = 0 \Rightarrow a^n (r_1 s + a^n t) = 0, \forall r_1 \in R, n \geq k.$$

因此对充分大的正整数 n, $Rs \subseteq a^n R + \mathrm{rann}(a^n)$, 因为包含关系右边也是右理想, 所以 $RsR \subseteq a^n R + \mathrm{rann}(a^n)$. 即对充分大的正整数 n, $a^n R + \mathrm{rann}(a^n)$ 会包含一个非零理想 RsR. □

Corollary 3.3. 设含幺环 R 是 PI 环, $a \in R$ 满足 $\mathrm{rann}(a) = 0$, 那么 aR 包含某个非零理想.

Proof. 因为 a 的右零化子是平凡的, 所以对任何首一多重线性的多项式 $g \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_l \rangle$, aR 满足 g 当且仅当对所有的 $k \geq 1$ 有 $a^k R$ 满足 g. 这意味着在前一命题证明过程中所构造的集合 $\mathcal{S}$ 的最小元 l 所对应的首一多重线性多项式 g 可以零化每个 $a^k R (k \geq 1)$. 所以在前一命题证明过程中可取 $n = k = 1$ 来得到 aR 会包含一个非零理想. □

现在我们可以给出 PI 环是右全有界环的证明. 回忆一个半素 PI 环任何非零理想会和中心之交非零.

Theorem 3.4. 设 R 是 PI 环, 那么对每个素理想 P, 有 R/P 是右有界环, 即 R/P 任何本质右理想都包含一个非零理想. 从而知 PI 环是右全有界环. 特别地, 右 Noether PI 环是右 FBN 环.

Proof. 只要证素 PI 环是右有界环即可. Posner 定理告诉我们素 PI 环是右 Goldie 素环, 从而 Goldie 定理保证了素 PI 环的任何本质右理想会包含一个正则元, 于是 [推论3.3] 表明该正则元生成的右理想必定包含某个非零理想. 故素 PI 环的任何本质右理想会包含某个非零理想. □

3.2 Jacobson 环

在 Hilbert 零点定理证明过程中, 域上的仿射代数满足任何素理想都可以表示为一些极大理想之交这一性质起到了至关重要的作用. 下面 Jacobson 环概念便是这一捕捉特性后的非交换推广.

Definition 3.5. 称含幺环 R 是 **Jacobson 环**, 如果对任何素理想 P, P 总可以表示为一些本原理想之交.

Remark. 由此立即看到含幺交换环 R 是 Jacobson 环当且仅当每个素理想是一些极大理想之交.

Basic Observation. 设 R 是含幺环, 则 R 是 Jacobson 环的充要条件是对任何素理想 P, R/P 是半本原环.

本节的主要目标是应用 Goldie 定理证明适当条件下的右 Noether 代数是 Jacobson 环 (见 [命题3.10]), 在此之前先来看一些基本例子. 之前已经提到域上交换仿射代数是 Jacobson 环的雏形：

Example 3.6. 域上的仿射交换代数是 Jacobson 环.

Proof. 这里证明更强的断言：设 A 是域 $\Bbbk$ 上仿射交换代数, 则任何理想 I 的根理想是所有包含 I 的极大理想之交. 记 A 的 Rabinowitsch 素谱是 $\mathrm{Spec}_{rab}A = \{P \in \mathrm{Spec}A | \text{存在极大理想}\mathfrak{m} \subseteq A[x]\text{使得}P = A \cap \mathfrak{m}\}$, 那么这时 $\mathrm{maxSpec}A = \mathrm{Spec}_{rab}A \subseteq \mathrm{Spec}A$, 故只需验证 $\sqrt{I}$ 包含 Rabinowitsch 素谱中所有含 I 素理想之交. 这里记 Rabinowitsch 素谱中所有含 I 素理想之交是 T, 那么对每个 $a \in T$, 有 $J = (I, ax-1) = A[x]$, 所以存在 $s_1, ..., s_m \in I, f_1(x), ..., f_m(x), g(x) \in A[x]$ 使得 $f_1(x)s_1 + \cdots + f_m(x)s_m + g(x)(ax-1) = 1$. 于是在 Laurent 多项式环 $A[x, x^{-1}]$ 中有

$$f_1(x^{-1})s_1 + \cdots + f_m(x^{-1})s_m + g(x^{-1})(ax^{-1} - 1) = 1,$$

在上式两边适当乘上 x 的某个正整数幂后知存在 $g_1(x), ..., g_m(x), h(x) \in A[x], l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 使得 $g_1(x)s_1 + \cdots + g_m(x)s_m + h(x)(a-x) = x^l$, 所以 $a \in \sqrt{I}$, 进而 $T \subseteq \sqrt{I}$. □

Example 3.7. 设 $\Bbbk$ 是域, 则 $A = \Bbbk[x_1, x_2, ...]/(\{x_i x_j | i, j \geq 1\})$ 是非 Noether 的 Jacobson 局部环.

Proof. A 明显非 Noether. 注意到 A 唯一的素理想是 $(x_1, x_2, ...)/(\{x_i x_j | i, j \geq 1\})$, 故是 Jacobson 局部环. □

Example 3.8. 设 $\Bbbk$ 是域, 则交换 Noether 局部代数 $A = \Bbbk[[x]]$ 不是 Jacobson 环.

Proof. 注意到 A 唯一的极大理想是 (x), 而零理想是素理想, 所以 A 不是 Jacobson 环. □

Example 3.9. 任何单边 Artin 环是 Jacobson 环.

Proof. 只需注意到单边 Artin 的素理想集和极大理想集相同. □

Basic Observation. 设 R 是 Jacobson 环, 则 R 的局部闭素理想均为本原理想.

Proof. 如果 P 是局部闭素理想, 那么由 P 可以表为所有包含 P 的本原素理想之交可知一定存在某个本原素理想和 P 相同. 特别地, P 是本原理想. □

Proposition 3.10. 设 $\Bbbk$-代数 A 是右 Noether 的, 且 $\dim_{\Bbbk} A < |k|$, 那么 A 是 Jacobson 环.

Proof. 如果 $\Bbbk$ 是有限域, 那么 A 是有限集, 进而是 Artin 代数, 所以这时 A 是 Jacobson 环. 下设 $\Bbbk$ 是无限域, 此时 $|\Bbbk| = |\Bbbk^\times|$. 下面断言 $\mathrm{Jac}A$ 是诣零理想, 一旦证明该断言立即得到对每个 A 的素理想 P, A/P 是半本原代数, 原因是如果 $\mathrm{Jac}(A/P) \neq 0$, 由 A/P 是右 Noether 素环知 $\mathrm{Jac}(A/P)$ 作为本质右理想总存在正则元, 这将与 $\mathrm{Jac}(A/P)$ 是诣零理想矛盾. 下面证明 $\mathrm{Jac}A$ 是诣零理想. 任取 $c \in \mathrm{Jac}A$, 我们有 $|k^\times|$ 个不同的元素 $c-\alpha, \alpha \in \Bbbk$, 并且由 $c-\alpha = -\alpha(1-\alpha^{-1}c)$ 知这些元素都可逆, 注意到此时 $\{(c-\alpha)^{-1}|\alpha \in \Bbbk^\times\}$ 是 $\Bbbk$-线性相关的, 所以 c 是 $\Bbbk$ 上代数元. 设 c 满足 $\Bbbk$ 上首一多项式 $x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 (\alpha_i \in \Bbbk)$, 因为 c 不可逆所以 $\alpha_0 = 0$, 不妨设 $m \geq 2$. 从而 $c^m + \alpha_{m-1}c^{m-1} + \cdots + \alpha_1 c = 0$. 设 $l \geq 1$ 是满足 $\alpha_l \neq 0$ 的最小正整数, 则 $(1 + \alpha_l^{-1}c^{m-l} + \cdots + \alpha_l^{-1}\alpha_{l+1}c)c^l = 0$, 注意 $1 + \alpha_l^{-1}c^{m-l} + \cdots + \alpha_l^{-1}\alpha_{l+1}c$ 是 A 中可逆元, 故 c 幂零. $\square$

Corollary 3.11. 设域 $\Bbbk$ 不可数, 那么任何右 Noether 仿射 $\Bbbk$-代数是 Jacobson 环.

参考文献

[GJ85] K. R. Goodearl and D. A. Jordan. Localizations of injective modules. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 28(3):289-299, 1985.

[GJ88] K. R. Goodearl and D. A. Jordan. Localizations of essential extensions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 31(2):243–247, 1988.

[Gol58] A.W. Goldie. The structure of prime rings under ascending chain conditions. *Proc. London Math. Soc.*, 8(4):589–608, 1958.

[Gol60] A.W. Goldie. Semi-prime rings with maximal conditions. *Proc. London Math. Soc.*, 10:201–220, 1960.

[GWJ04] Kenneth R Goodearl and Robert Breckenridge Warfield Jr. *An introduction to noncommutative Noetherian rings*. Cambridge university press, 2004.

[MR87] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. American Mathematical Society, 1987.