复光滑簇的解析化

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2025 年 12 月 6 日

处理复仿射代数群的一个基本手段是将其“复解析化”为复 Lie 群后使用复流形的理论来研究复代数群. 这源于任何 d 维不可约光滑复仿射簇都能自然赋予 d 维复流形结构 (作为仿射簇的维数和作为复流形的维数相同). 更一般地, 复数域上任何不可约发仿射簇的光滑轨迹都能够赋予典范的复流形结构 [Mum76, OV90]. 这份笔记的主要目标便是记录这一事实的证明 (相关基本术语见 [Har77, Huy05]):

Theorem 0.1 ([OV90, p.90])**.** 设 $X \subseteq \mathbb{C}^n$ 是不可约复仿射簇, X^{reg} 是 X 的所有 (Zariski 切空间意义下定义的) 光滑点构成的子集 (特别地, X^{reg} 是 X 的稠密开子集). 那么 X^{reg} 关于 $\mathbb{C}^n$ 上欧式拓扑具有自然的复流形结构, 并且作为复流形的维数就是 X 作为仿射簇的维数. 特别地, d 维光滑复仿射簇有典范 d 维复流形结构.

Remark 0.2. 如果 G 是 d 维复仿射代数群, 那么 G 的不可约分支两两不相交且是 d 维光滑簇. 应用 [定理0.1] 可知 G 关于欧式拓扑具有的典范复流形结构构成复 Lie 群 [OV90, p.101].

在给出 [定理0.1] 的证明前我们引入一些记号并做一些准备. 设定义仿射簇 X 的理想可由 $\{f_1, ..., f_m\} \subseteq \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ 生成. 对每个 $p \in X$, T_pX 表示 X 在 p 处的 Zariski 切空间, 那么总有

$$\dim_{\mathbb{C}} T_pX = n - \mathrm{rank} J_p \geq \dim_p X = \dim X, \tag{0.1}$$

式(0.1)的最后一个等号来自 X 的不可约条件, 记号 J_p 表示下述 Jacobi 矩阵:

$$J_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

记 $r := n - \dim X$. 则 $p \in X^{\mathrm{reg}}$ 当且仅当 $\mathrm{rank} J_p = r$. 并注意到对任何 $q \in X$, (0.1)说明 $\mathrm{rank} J_q \leq r$. 所以

当 J 的分量视作 X 上正则函数时, J 的所有 $r+1$ 阶子式作为 X 上的正则函数都是零.

现在取定 $p \in X^{\mathrm{reg}}$, 那么总有 J_p 的 r 阶子式非零, 我们不妨设

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_r}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_r}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r}(p) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{0.2}$$

对于一般情形, 下面的讨论依然成立, 区别是涉及到的指标 (来自子式的行标和列标) 更复杂. 我们有

Lemma 0.3 ([OV90])**.** 对 $1 \leq i \leq m$ 和 $1 \leq k \leq r$, 存在 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ 中多项式 g_{ik} 作为 X 上正则函数有:

$$D\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{r} g_{ik}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

其中 D 表示由 J 的前 r 行和前 r 列给出的 r 阶子式 (这是多项式, 也可视作 X 上正则函数).

Proof. 如果 $1 \leq i \leq r$, 命 $g_{ik} = \delta_{ik}D$. 下设 $r+1 \leq i \leq m$, 对每个 $1+r \leq j \leq n$, 考虑 J 的前 r 行和第 i 行带上前 r 列与第 j 列构成的 $r+1$ 阶子式 (作为 X 上正则函数是零), 记该子式按照最后一列展开, $\partial f_k/\partial x_j$ 在 $r+1$ 阶子式中的代数余子式是 A_{kj}(当 $k = i$ 时, 代数余子式就是 D). 那么 A_{kj} 和关于 $j \geq r+1$ 的选取无关, 记作 A_k(例如 $A_i = D$). 那么对 $j \geq r+1$ 有 $A_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - A_{i-1}\frac{\partial f_r}{\partial x_j} + \cdots + (-1)^r A_1 = 0$. 并且该等式对 $1 \leq j \leq r$ 也成立: 如果 $j_0 \leq r$, 将 J 的前 r 行和第 i 行构成的 $(r+1) \times n$ 阶子矩阵, 取前 r 列, 但额外增加该子矩阵的第 j_0 列作为第 $r+1$ 列得到的矩阵行列式明显是零, 考察该 $r+1$ 阶行列式按照最后一列的展开. 故对

$$D\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = A_{i-1}\frac{\partial f_r}{\partial x_j} + \cdots + (-1)^{r-1}A_1 = 0,$$

适当调整系数的符号便得到多项式 g_{ik} 的存在性. □

现在我们证明 [定理0.1]: 只需要说明任何 $p \in X^{\mathrm{reg}}$, 存在 $\mathbb{C}^n$ 在欧式拓扑下的开子集 U, 使得 $X^{\mathrm{reg}} \cap U$ 到 $\mathbb{C}^{n-r}$ 的某个开子集有双全纯映射 φ_U, 并且当 $(X^{\mathrm{reg}} \cap U, \varphi_U)$ 和 $(X^{\mathrm{reg}} \cap V, \varphi_V)$ 的定义域有交集时, φ_U 和 φ_V 全纯相容. 现在我们由(0.2), 可应用全纯映射版本的隐函数定理得到存在 $\mathbb{C}^r$ 的开子集 U_1 和 $\mathbb{C}^{n-r}$ 的开子集 U_2 以及全纯映射 $g : U_2 \to U_1$ 使得 $p \in U_1 \times U_2$ 满足 D 关于 $U_1 \times U_2$ 中所有点是非零的并且对任何 $z = (z_1, ..., z_n) \in U_1 \times U_2$, $f_j(z) = f_j(p)$ 对所有的 $1 \leq j \leq r$ 成立当且仅当 $g(z_{r+1}, ..., z_n) = (z_1, ..., z_r)$. 因此, $z \in \mathbb{C}^n$ 在 $f_1, ..., f_r$ 的公共零点集 X' 中当且仅当 $g(z_{r+1}, ..., z_n) = (z_1, ..., z_r)$. 我们把 $g : U_2 \to U_1$ 写作 $g = (g_1, ..., g_r)$, 每个 g_j 是取值在 $\mathbb{C}$ 中的全纯函数. 我们总可适当选取 U_2 是道路连通的. 现在记 $U \coloneqq U_1 \times U_2$(那么 $p \in U \cap X \subseteq X^{\mathrm{reg}}$). 那么 $X' \cap U$ 到 $\mathbb{C}^{n-r}$ 的开子集 U_2 的有全纯映射 $\varphi_U : (z_1, ..., z_n) \mapsto (z_{r+1}, ..., z_n)$, 它有逆映射 $p \mapsto (g_1(p), ..., g_r(p), p)$, 所以 φ_U 定义了 $X' \cap U$ 到 $U_2 \subseteq \mathbb{C}^{n-r}$ 的双全纯映射. 我们断言

$$X' \cap U = X \cap U. \tag{0.3}$$

一旦断言(0.3)成立, 那么 $X' \cap U = X^{\mathrm{reg}} \cap U$ 并且根据我们关于 φ_U 的构造方式, 有交集有坐标卡并且当 $(X^{\mathrm{reg}} \cap U, \varphi_U)$ 和 $(X^{\mathrm{reg}} \cap V, \varphi_V)$ 自动全纯相容, 便能够得到 X^{reg} 是 $n - r = \dim X$ 维复流形.

现在我们验证(0.3)来完成证明. 只需要验证 $X' \cap U \subseteq X \cap U$. 我们记 $p = (p_1, ..., p_n)$. 考虑道路连通空间 U_2 中的光滑道路 $\gamma : [0,1] \to U_2, t \mapsto (x_{r+1}(t), ..., x_n(t))$ 满足 $\gamma(0) = (p_{r+1}, ..., p_n)$, 那么我们能够得到 $X' \cap U$ 中光滑道路 $\theta : t \mapsto (g_1(x_{r+1}(t), ..., x_n(t)), ..., g_r(x_{r+1}(t), ..., x_n(t)), x_{r+1}(t), ..., x_n(t))$. 由 [引理0.3],

$$D(\theta(t))\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\theta(t)) = \sum_{k=1}^{r} g_{ik}(\theta(t))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\theta(t)) + \sum_{\ell=1}^{m} h_{i\ell}(\theta(t))f_\ell(\theta(t)), \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n,$$

其中 $h_{i\ell} \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. 对每个 j, 将上式两边乘上 $d(x_j(t))/dt$ 并求和得到

$$D(\theta(t))\frac{df_i(\theta(t))}{dt} = \sum_{k=1}^{r} g_{ik}(\theta(t))\frac{df_k(\theta(t))}{dt} + \sum_{\ell=1}^{m} \psi_{i\ell}(\theta(t))f_\ell(\theta(t)) = \sum_{\ell=1}^{m} \psi_{i\ell}(\theta(t))f_\ell(\theta(t)).$$

上式最后一个等号来自 $f_k(\theta(t)) = 0, \forall t \in [0,1]$(因为 X' 是 $f_1, ..., f_r$ 的公共零点集). 现在一阶常微分方程组

$$D(\theta(t))\frac{df_i(\theta(t))}{dt} = \sum_{\ell=1}^{m} \psi_{i\ell}(\theta(t))f_\ell(\theta(t))$$

有初值条件 $f_i(\theta(0)) = 0, i = 1, ..., m$, 并且满足 Picard-Lindelöf 定理 (解的存在唯一性定理) 条件, 所以有 $f_i(\theta(t)) = 0, \forall t \in [0,1]$. 特别地, 根据 U_2 的道路连通性, 我们能够需求 $\theta(t)$ 是连接 p 和 $X' \cap U$ 中任给点的光滑道路来得到 $X' \cap U$ 中所有点都是 $f_1, ..., f_m$ 的公共零点, 故(0.3)成立. □

参考文献

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume No. 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Huy05] Daniel Huybrechts. *Complex geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. An introduction.

[Mum76] David Mumford. *Algebraic geometry. I*, volume No. 221 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Complex projective varieties.

[OV90] A. L. Onishchik and È.B. Vinberg. *Lie groups and algebraic groups*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Translated from the Russian and with a preface by D. A. Leites.