从仿射簇到仿射概形

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 7 月 22 日

这份笔记主要记录从经典仿射代数几何到现代仿射代数几何的基本介绍, 主要参考文献是 [GW20] 和 [Har77]. 由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出, 谢谢.

设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 以下的仿射簇均指仿射空间中的 Zariski 闭子集. 经典仿射代数几何中我们熟知:

• $\Bbbk$ 上仿射簇 X 坐标环 $\mathcal{O}(X)$ 的根理想集与 X 的闭子簇集有自然的双射 $\{I \subseteq \mathcal{O}(X)|I\text{是根理想}\} \to \{Z \subseteq X|Z\text{是闭子集}\}, I \mapsto V(I)$. 若将该双射限制在 $\mathcal{O}(X)$ 的素理想集上, 便得到 $\mathcal{O}(X)$ 的素理想集与 X 的不可约闭子集间的双射. 若进一步限制该双射于 $\mathcal{O}(X)$ 的极大理想集, 则给出 $\mathcal{O}(X)$ 的极大理想集与 X 的所有单点集之间的双射, 并且这给出极大谱 $\text{maxSpec}\mathcal{O}(X)$ 与 X 间的同胚.

• $\Bbbk$ 上的仿射簇范畴与 $\Bbbk$ 上有限生成交换半素代数范畴间有自然的范畴对偶. 该对偶函子将每个仿射簇 X 对应到坐标环 $\mathcal{O}(X)$, 把每个正则映射 $\varphi : X \to Y$ 对应到标准代数同态 $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$(将 X 的坐标环等同于 X 上多项式函数代数, 则 φ 可逆变地诱导出 Y 的函数环到 X 的函数环的代数同态). 特别地, 仿射簇 X 与 Y 同构当且仅当 $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y)$. 进而可从坐标环的代数结构读出簇的几何信息, 例如 X 在点 $p \in X$ 的光滑性等价于 $\mathcal{O}(X)$ 在 p 对应的极大理想处作局部化是正则局部环.

因为 $\Bbbk$ 上仿射簇范畴与 $\Bbbk$-有限生成半素交换代数范畴间存在范畴对偶. 因此一个基本问题是何类几何对象产生的范畴能够于含幺交换环范畴对偶? 这是仿射概形 (见 [定义2.2]) 产生的基本动机. 我们将在 [定理2.5] 中看到仿射概形范畴与含幺交换环范畴间存在自然的范畴对偶.

要定义仿射概形, 结合 $\Bbbk$ 上仿射簇与其坐标环的极大谱间有自然的同胚, 一个基本想法是用含幺交换环的极大谱来作为含幺交换环对应的仿射概形定义的底空间. 但通常含幺交换环的极大理想关于环同态的原像集未必仍是极大理想, 用极大谱去定义仿射概形便失去了自然的函子性质. 而含幺交换环间的环同态可自然逆变地诱导素谱间的连续映射, 因此为保留自然的函子性, 含幺交换环对应的仿射概形的底空间选取为给定环的素谱. 设 R 是含幺交换环, $N(R)$ 是其素根, 那么标准满射 $\pi : R \to R/N(R), a \mapsto a + N(R)$ 诱导的连续映射 $\pi^* : \text{Spec}(R/N(R)) \to \text{Spec}R, Q \mapsto \pi^{-1}(Q)$ 是同胚. 由此可构造不同构的含幺交换环 R_1, R_2 使得 $\text{Spec}R_1$ 与 $\text{Spec}R_2$ 同胚. 这说明含幺交换环的素谱不足以重塑出环本身, 因此有必要在素谱的基础上多引入某种额外结构来蕴含环所有的结构信息, 这是考虑结构层 (见 [定理2.1]) 的基本动机.

这里也介绍概形的基本概念与相关基本性质. 例如给定含幺交换环上的概形 (见 [定义2.15]) 以及概形的约化性与有限型性. 我们将看到含幺交换环 K 上的仿射概形范畴与 K-交换代数范畴间有自然的范畴对偶 (见 [定理2.16]). 最后介绍域上仿射代数簇的概念, 它是域上有限型的约化仿射概形. 我们将指出域 $\Bbbk$ 上仿射代数簇范畴与 $\Bbbk$-交换半素代数范畴间有范畴对偶. 特别地, 若 $\Bbbk$ 是代数闭域, 则 $\Bbbk$-仿射簇范畴与 $\Bbbk$-仿射代数簇范

畴是范畴等价的 (但经典的仿射簇带上正则函数环层未必是仿射概形, 见 [例2.6]). 特别地, $\Bbbk$-仿射簇范畴可忠实满地嵌入 $\Bbbk$-仿射概形范畴. 于是可在概形框架下研究经典的簇理论.

1 层论回顾

层是微分拓扑、代数拓扑、复几何、范畴表示论以及代数几何等领域的常用工具, 层论被认为最早于 1945 年由 Jean Leray(法国, 1906-1998) 发展, 随后被众多数学家广泛应用到各领域中. 如无特别说明, 以下的范畴 $\mathcal{C}$ 都是具体范畴, 即存在 $\mathcal{C}$ 到集合范畴 **Sets** 的忠实函子, 并把 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ 对应的集合依然记作 A.

Definition 1.1. 设 X 是拓扑空间, $\mathcal{C}$ 是范畴. 记 $\mathbf{Top}(X)$ 是由 X 上全体开集关于集合包含关系诱导的偏序范畴, 称 $\mathbf{Top}(X)$ 到 $\mathcal{C}$ 的逆变函子是 X 上**取值在 $\mathcal{C}$ 中的预层**.

Remark 1.2. 在这里我们约定一些记号与术语. 设 $\mathscr{F} : \mathbf{Top}(X) \to \mathcal{C}$ 是取值在范畴 $\mathcal{C}$ 中的预层. 如果 V, U 是 X 的开子集满足 $V \subseteq U$, 那么这对应 $\mathcal{C}$ 中从 $\mathscr{F}(U)$ 到 $\mathscr{F}(V)$ 的态射, 记作 $\mathrm{Res}^U_V : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$, 常称为 ($U$ 在 V 上的) **限制态射**. 如果 $V \subseteq U$ 是 X 的开子集且 $f \in \mathscr{F}(U)$, 常把 $\mathrm{Res}^U_V(f)$ 记作 $f|_V$. 对 X 的每个开子集 U, 也把 $\mathscr{F}(U)$ 记 $\Gamma(U, \mathscr{F})$, 称其中的元素为 $\mathscr{F}$ 在 U 上的**截面**. 将 $\Gamma(X, \mathscr{F})$ 中元素称为 $\mathscr{F}$ 的**整体截面**.

为叙述方便, 之后始终将含幺交换环范畴记作 **CRing**, 其中的环同态都是保持幺元的.

Example 1.3. 设 X 是拓扑空间, 记 $\mathscr{C}(U)$ 是 X 的开子集 U 上的实值连续函数全体构成的连续函数环. 如果 V, U 是 X 的开子集满足 $V \subseteq U$, 记 $\mathrm{Res}^U_V : \mathscr{C}(U) \to \mathscr{C}(V), f \mapsto f|_V$. 则可定义出逆变函子 $\mathscr{C} : \mathbf{Top}(X) \to \mathbf{CRing}$. 称 $\mathscr{C}$ 为 X 上**连续函数环预层**, 其整体截面全体 $\Gamma(X, \mathscr{C}) = \mathscr{C}(X)$ 是 X 的连续函数环.

粗糙地说, 层相比于预层所多加的条件即要求几何对象相容的“局部数据”可以唯一地得到“整体数据”.

Definition 1.4. 设 X 是拓扑空间, $\mathcal{C}$ 是范畴, $\mathscr{F} : \mathbf{Top}(X) \to \mathcal{C}$ 是预层. 如果 $\mathscr{F}$ 满足**粘接条件**, 即对 X 的任何开子集 U, U 的开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$(这里开覆盖指所有 U_i 之并恰为 U) 以及 $s_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{F})(i \in I)$, 只要 $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}, \forall i, j \in I$, 就存在唯一的 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ 使得 $s|_{U_i} = s_i, \forall i \in I$, 则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的**层**.

Remark 1.5. 如果 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上层, 那么取 $U = U_i = I = \varnothing$, 考虑 U 的开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$ 并利用层的定义中的粘接条件可证得 $\mathscr{F}(\varnothing)$ 是单点集, 因此当范畴 $\mathcal{C}$ 是模范畴或含幺交换环范畴时, $\mathscr{F}(\varnothing) = 0$.

Example 1.6. 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上取值在范畴 $\mathcal{C}$ 中的层, 固定 X 的开子集 U, 那么 U 的开子集均为 X 的开子集, 于是可限制 $\mathscr{F}$ 定义出层 $\mathscr{F}|_U : \mathbf{Top}(U) \to \mathcal{C}$, 称为 $\mathscr{F}$ 在开子集 U 上的**限制**.

根据层的定义不难看出 [例1.3] 中定义的连续函数环预层是层. 称取值在 **CRing** 中的层为**环层**.

Definition 1.7. 设 X 是拓扑空间, $\mathcal{O}_X$ 是其上环层. 称 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是**赋环空间**, $\mathcal{O}_X$ 被称为其**结构层**.

Example 1.8. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇, 对每个 X 的开子集 U, 记 $\mathcal{O}_X(U)$ 为拟仿射簇 U 上正则函数环, 如果 V, U 是 X 的开子集满足 $V \subseteq U$, 定义 $\mathrm{Res}^U_V : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V), f \mapsto f|_V$ 为正则函数的限制映射. 那么我们得到逆变函子 $\mathcal{O}_X : \mathbf{Top}(X) \to \mathbf{CRing}$. 由正则函数的定义易知预层 $\mathcal{O}_X$ 是 X 上层, 称为 X 上**正则函数环层**. X 的正则函数环层的整体截面全体为 X 上正则函数环. 若 $\Bbbk$ 是代数闭域, 则 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 就是 X 的坐标环.

对代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇 X, 其正则函数环 $\mathcal{O}_X(X)$ 关于每个 $p\in X$ 对应的极大理想作局部化即得 X 在点 p 处的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$. 我们知道 X 在 p 点处光滑当且仅当局部环 $\mathcal{O}_p(X)$ 是正则局部环. 因此可以考虑对预层引入"局部概念"来观察几何对象在给定点处的局部表现.

Definition 1.9. 设 X 是拓扑空间, $\mathscr{F}$ 是取值在范畴 $\mathcal{C}$ 中的预层, $p\in X$. 如果正向极限

$$\mathscr{F}_p=\varinjlim_{x\in U}\mathscr{F}(U)$$

存在, 则称 $\mathscr{F}_p$ 是 X 在 p 处的**茎**. 这里的正向系是 p 所有的开邻域上二元关系 $\le$: $U\le V\Leftrightarrow V\subseteq U$ 诱导的. 具体地, 对 p 点的开邻域 U,V, 如果 $V\subseteq U(U\le V)$, 则对应 $\mathcal{C}$ 中态射 $\mathrm{Res}^U_V:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$.

Remark 1.10. 当 $\mathcal{C}=\mathbf{Sets}$ 时, $\mathscr{F}_p$ 可如下具体地构造: 考虑集合 $T=\{(U,s)|U\text{是含}p\text{的开邻域},s\in\mathscr{F}(U)\}$, 在 T 上定义二元关系 $\sim$: $(U,s)\sim(V,t)$ 当且仅当存在 x 的开邻域 $W\subseteq U\cap V$ 使得 $\mathrm{Res}^U_W(s)=\mathrm{Res}^V_W(t)$. 容易验证这是 T 上等价关系. 考虑商集 $\mathscr{F}_p=T/\sim$. 无论 $\mathcal{C}$ 是模范畴或是 **CRing**, 都易在 $T/\sim$ 上定义出相应代数结构. 对每个 X 的开子集 U, $\mathscr{F}(U)$ 到 $\mathscr{F}_p$ 都有自然映射 $\alpha_U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}_p,f\mapsto[(U,f)]$. 易验证 $(\mathscr{F}_p,\{\alpha_U|p\in U\text{是开邻域}\})$ 就是 $\mathscr{F}$ 在 p 处的茎. 以后将 $\mathscr{F}_p$ 与此具体构造视作等同, 由此易见 X 每个开子集 U 上的截面 $s\in\Gamma(U,\mathscr{F})$ 对应茎 $\mathscr{F}_p$ 中元素 $[(U,s)]$, 称为 s 在点 p 处的**芽**.

如果赋环空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 满足对每个点 p 处的茎 $\mathcal{O}_{X,p}=(\mathcal{O}_X)_p$ 是局部环, 称 $(X,\mathcal{O}_X)$ 是**局部赋环空间**.

Example 1.11. 在 [例1.6] 中我们看到拓扑空间上的层可限制在给定开子集上, 如果局部赋环空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 有开子集 U, 易知 $(U,\mathcal{O}_X|_U)$ 也是局部赋环空间.

Example 1.12. 考虑域 $\Bbbk$ 上仿射簇 X 的正则函数环层 $\mathcal{O}_X$. 对每个 $p\in X$, $\mathcal{O}_X$ 在该点处的茎就是 X 在 p 点的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$. 所以 $(X,\mathcal{O}_X)$ 是局部赋环空间. X 每个开子集 U 上正则函数 $s:U\to\Bbbk$ 对应正则函数芽 $[(U,s)]\in\mathcal{O}_{X,p}$. 因此也将局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 称为 X 在 p 处的**正则函数芽环**.

设 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 是拓扑空间 X 上取值在范畴 $\mathcal{C}$ 中的预层, 称逆变函子 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的自然变换为 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的一个**态射**. 因此 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的态射是满足下述条件的映射

$$\eta:\mathrm{ob}\mathbf{Top}(X)\to\bigcup_{U\in\mathrm{ob}\mathbf{Top}(X)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathscr{F}(U),\mathscr{G}(U)),U\mapsto\eta_U:$$

对所有 X 的开子集链 $V\subseteq U$, 下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\eta_U"] \arrow[d, "\mathrm{Res}^U_V(\mathscr{F})"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{Res}^U_V(\mathscr{G})"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\eta_V"] & \mathscr{G}(V)
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathbf{Top}(X)$ 是小范畴, 所以 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的所有态射构成的类是集合. 可用自然变换的合成来定义预层间的合成来得到 X 上的**预层范畴**, 记作 $\mathbf{Psh}(X,\mathcal{C})$(在 $\mathcal{C}$ 明确的场景下, 简写为 $\mathbf{PSh}(X)$). 称 X 上所有层构成的预层范畴的全子范畴为 X 上的**层范畴**, 记作 $\mathbf{Sh}(X,\mathcal{C})$(相应地简记为 $\mathbf{Sh}(X)$).

设 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 是拓扑空间 X 上取值在 Abel 群范畴中的层, $\eta:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是态射, 那么根据正向极限的定义, 对每个点 $p\in X$, 层间态射 η 诱导茎间态射 $\eta_p:\mathscr{F}_p\to\mathscr{G}_p$. η_p 是使得下图交换的唯一态射:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_p \arrow[rrr, dashed, "\eta_p"] & & & \mathscr{G}_p \\
& \mathscr{F}(U) \arrow[ul, "\alpha_U"'] \arrow[r, "\eta_U"] \arrow[d, "\mathrm{Res}^U_V(\mathscr{F})"] & \mathscr{G}(U) \arrow[ur, "\beta_U"] \arrow[d, "\mathrm{Res}^U_V(\mathscr{G})"'] & \\
& \mathscr{F}(V) \arrow[uul, bend left, "\alpha_V"] \arrow[r, "\eta_V"] & \mathscr{G}(V) \arrow[uur, bend right, "\beta_V"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 $V\subseteq U$ 是 X 的任意含 p 的开子集链. 元素层面, η_p 将每个 $\mathscr{F}_p$ 中形如 $[(U,s)]$ 的元素映至 $[(U,\eta_U(s))]$.

Proposition 1.13. 设 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 是拓扑空间 X 上 Abel 群层, 那么态射 $\eta:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是同构的充要条件是对任何 $p\in X$, η 诱导的茎间态射 $\eta_p:\mathscr{F}_p\to\mathscr{G}_p$ 是同构.

Proof. 必要性明显, 只需验证充分性. 设 $\eta_p:\mathscr{F}_p\to\mathscr{G}_p$ 对所有 $p\in X$ 是同构, 需要验证对 X 的每个开子集 U, $\eta_U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U)$ 是同构. 假设 $s\in\mathscr{F}(U)$ 满足 $\eta_U(s)=0$. 固定 $p\in X$, 则 $[(U,s)]\in\mathscr{F}_p$ 满足 $[(U,\eta_U(s))]=0$, 故由 η_p 是单射知存在 p 的开邻域 $V\subseteq U$ 使得 $\mathrm{Res}^U_V(s)=0$. 于是利用层的粘接条件得到 $s=0$, 这说明 η_U 是单射. 最后说明 η_U 是满射, 任取 $t\in\mathscr{G}(U)$. 对每个 $p\in X$, 利用 η_p 满得存在 $[(V_p,s_p)]\in\mathscr{F}_p$ 使得 $[(V,\eta_V(s_p))]=[(U,t)]$, 其中 V_p 是 p 的开邻域. 用 $U\cap V_p$ 更小的含 p 开子集替换 V_p 可设 $\eta_{V_p}(s_p)=t|_{V_p}$. 因为 $\{V_p\}_{p\in U}$ 是 U 的开覆盖, 所以粘接条件保证存在 $s\in\mathscr{F}(U)$ 使得 $s|_{V_p}=s_p$. 于是 $\eta_U(s)$ 在 V_p 上的限制就是 $t|_{V_p}$. 现在应用粘接条件中的唯一性便得到 $\eta_U(s)=t$, 这说明 η_U 是满射. □

Remark 1.14. 同样的证明过程可知结论对拓扑空间上环层也成立.

如果拓扑空间 X 上取值在 Abel 群范畴的预层 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 间有态射 η, 则将每个开子集 U 对应到加群 $\mathrm{Ker}\eta_U$, 将开子集链 $V\subseteq U$ 对应到 $\mathrm{Ker}\eta_U$ 到 $\mathrm{Ker}\eta_V$ 的自然的限制映射, 那么可得预层 $\mathrm{Ker}\eta$. 若进一步要求 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 均为层, 则易验证 $\mathrm{Ker}\eta$ 也是层. 类似地, 将 X 的每个开子集 U 对应到加群 $\mathrm{Coker}\eta_U$ 可自然地定义预层的余核 $\mathrm{Coker}\eta$. 但当 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 都是层时, 一般无法保证预层的余核是层. 层范畴中态射余核的构造依赖于层化.

Proposition 1.15. 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上取值在 Abel 群范畴的预层. 则存在 X 上取值在 Abel 群范畴的层 $\tilde{\mathscr{F}}$ 和预层的态射 $i_{\mathscr{F}}:\mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$ 使得 $(\tilde{\mathscr{F}},i_{\mathscr{F}})$ 满足下述泛性质: 对任何 X 上取值在 Abel 群范畴的层 $\mathscr{G}$ 和预层态射 $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$, 存在唯一的态射 $\tilde{\varphi}:\tilde{\mathscr{F}}\to\mathscr{G}$ 使得 $\tilde{\varphi}i_{\mathscr{F}}=\varphi$, 即下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[rr, "i_{\mathscr{F}}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \tilde{\mathscr{F}} \arrow[dl, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\
& \mathscr{G} &
\end{tikzcd}$$

易见 $(\tilde{\mathscr{F}},i_{\mathscr{F}})$ 在同构意义下唯一, 称为 $\mathscr{F}$ 的**层化**或**伴随层**. $\mathscr{F}$ 的伴随层 $(\tilde{\mathscr{F}},i_{\mathscr{F}})$ 即预层 $\mathscr{F}$ 到嵌入函子 $J:\mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab})\to\mathbf{PSh}(X,\mathbf{Ab})$ 的泛性质.

Proof. 由泛性质的同构唯一性知只需验证其存在性. 任给 X 的开子集 U, 定义 $\tilde{\mathscr{F}}(U)$ 为

$$\tilde{\mathscr{F}}(U)=\{(s_x)_{x\in U}\in\prod_{x\in U}\mathscr{F}_x|\text{对任给}x\in U,\text{存在}x\text{的开邻域}W\subseteq U\text{与}t\in\mathscr{F}(W)\text{使得}s_w=t_w,\forall w\in W\},$$

那么 $\tilde{\mathscr{F}}(U)$ 上有自然的加群结构且对任何开子集链 $V\subseteq U$, $\tilde{\mathscr{F}}(U)$ 中每个元素 $(s_x)_{x\in U}$ 诱导 $(s_x)_{x\in V}\in\tilde{\mathscr{F}}(V)$, 这给出标准限制映射 $\tau_V^U:\tilde{\mathscr{F}}(U)\to\tilde{\mathscr{F}}(V)$. 由此可定义逆变函子 $\tilde{\mathscr{F}}:\mathbf{Top}(X)\to\mathbf{Ab}$. 下面验证 X 上预层 $\tilde{\mathscr{F}}$ 是层. 任取开子集 U 和其开覆盖 $\{U_i|i\in I\}, f_i\in\tilde{\mathscr{F}}(U_i), i\in I$ 使得 $f_i|_{U_i\cap U_j}=f_j|_{U_i\cap U_j}$, 那么定义 $f=(s_x)_{x\in U}$ 满足若 $x\in U_i$, 则 s_x 为 f_i 在指标 x 处分量. 由 $\tilde{\mathscr{F}}$ 的定义易知 $f=(s_x)_{x\in U}$ 定义合理且 $f\in\tilde{\mathscr{F}}(U)$. 根据 f 的构造立即得到 $f|_{U_i}=f_i,\forall i\in I$. 如果还有 $g\in\tilde{\mathscr{F}}(U)$ 满足 $g|_{U_i}=f_i,\forall i\in I$. 那么对每个 $x\in U$, 设 $x\in U_j$, 则 g 在 x 处分量与 f 在 x 处分量一致, 这说明 f 是唯一满足限制在每个 U_i 上是 f_i 的元素, 因此 $\tilde{\mathscr{F}}$ 是层. 下面定义预层的态射 $i_{\mathscr{F}}:\mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$ 为将每个 X 的开子集 U 映至加群同态 $i_{\mathscr{F},U}:\mathscr{F}(U)\to\tilde{\mathscr{F}}, s\mapsto(s_x)_{x\in U}$. 根据 $\tilde{\mathscr{F}}(U)$ 的定义, 明显 $(s_x)_{x\in U}\in\tilde{\mathscr{F}}(U),\forall s\in\mathscr{F}(U)$(取 $W=U,t=s$ 即可). 所以 $i_{\mathscr{F},U}$ 是定义合理的加群同态, 并且易见对任何 X 的开子集链 $V\subseteq U$ 有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "i_{\mathscr{F},U}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_V^U"'] & \tilde{\mathscr{F}}(U) \arrow[d, "\tau_V^U"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "i_{\mathscr{F},V}"] & \tilde{\mathscr{F}}(V)
\end{tikzcd}$$

所以 $i_{\mathscr{F}}:\mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$ 是预层间自然变换. 任给预层态射 $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$, 对每个 $x\in X$, φ 诱导茎间同态 $\varphi_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x, [(T,v)]\mapsto[(T,\varphi_T(v))]$. 下面需要构造满足 $\tilde{\varphi}i_{\mathscr{F}}=\varphi$ 的态射 $\tilde{\varphi}:\tilde{\mathscr{F}}\to\mathscr{G}$. 任给开子集 U 和 $(s_x)_{x\in U}\in\tilde{\mathscr{F}}(U)$. 对每个 $x\in U$, 根据 $\tilde{\mathscr{F}}(U)$ 的定义, 存在 x 的开邻域 $W_x\subseteq U$ 和 $t(x)\in\mathscr{F}(W_x)$ 使得 $t(x)_w=s_w,\forall w\in W_x$. 因此如果 $x,y\in U$ 满足 $W_x\cap W_y\neq\varnothing$, 那么 $t(x)$ 和 $t(y)$ 在 $W_x\cap W_y$ 中每点处的芽相同. 因此 $\varphi_{W_x}(t(x))$ 与 $\varphi_{W_y}(t(y))$ 在 $W_x\cap W_y$ 中每点处的芽相同, 利用 $\mathscr{G}$ 的粘接条件便知 $\varphi_{W_x}(t(x))$ 与 $\varphi_{W_y}(t(y))$ 在 $W_x\cap W_y$ 上的限制相同. 所以由 $\{W_x\}_{x\in U}$ 构成 U 的开覆盖可知存在唯一的 $\tilde{\varphi}((s_x)_{x\in U})\in\mathscr{G}(U)$ 使得 $\tilde{\varphi}((s_x)_{x\in U})$ 在每个开子集 W_x 上的限制是 $\varphi_{W_x}(t(x))$(并且可直接验证 $\tilde{\varphi}((s_x)_{x\in U})$ 的构造不依赖于满足 $\tilde{\mathscr{F}}(U)$ 定义的开子集族 $\{W_x\}_{x\in U}$ 的选取). 易验证 $\tilde{\varphi}_U:\tilde{F}(U)\to\mathscr{G}(U),(s_x)_{x\in U}\mapsto\tilde{\varphi}((s_x)_{x\in U})$ 是定义合理的加群同态并且 $\tilde{\varphi}$ 为层间态射. 对每个 $s\in\mathscr{F}(U)$, 由 $\tilde{\varphi}_U$ 的定义合理性便知 $\varphi_U(s)=\tilde{\varphi}((s_x)_{x\in U})$, 这说明 $\tilde{\varphi}i_{\mathscr{F}}=\varphi$. 最后证明满足 $\tilde{\varphi}i_{\mathscr{F}}=\varphi$ 的态射 $\tilde{\varphi}$ 是唯一的. 如果还有态射 $\psi:\tilde{\mathscr{F}}\to\mathscr{G}$ 满足 $\psi i_{\mathscr{F}}=\tilde{\varphi}i_{\mathscr{F}}$, 那么对任何开子集 U 和 U 上截面 s 总有 $\tilde{\varphi}_U((s_x)_{x\in U})=\psi_U((s_x)_{x\in U})$. 对任给 $(t_x)_{x\in U}\in\tilde{\mathscr{F}}(U)$, 每个 $x\in U$ 都存在开邻域 W_x 以及 W_x 上截面 $g(x)$ 使得 $g(x)_w=t_w,\forall w\in W_x$. 下面说明 $\psi_U((s_x)_{x\in U})=\tilde{\varphi}_U((s_x)_{x\in U})$. 这时 $\psi_{W_x}((t_w)_{w\in W_x})=\psi_{W_x}((g(x))_{w\in W_x})=\tilde{\varphi}_{W_x}((g(x))_{w\in W_x})=\tilde{\varphi}_{W_x}((t_w)_{w\in W_x})$, 因此 $\psi_U((s_x)_{x\in U})$ 和 $\tilde{\varphi}_U((s_x)_{x\in U})$ 在每个开子集 W_x 上限制相同. 由于 $\{W_x\}_{x\in U}$ 是 U 的开覆盖, 所以利用 $\mathscr{G}$ 的粘接性质立即得到 $\psi_U((s_x)_{x\in U})=\tilde{\varphi}_U((s_x)_{x\in U})$. 进而 $\tilde{\varphi}_U=\psi_U$ 对 X 的任何开子集 U 成立. 由此得到 $\tilde{\varphi}$ 的唯一性. □

Remark 1.16. 如果 $\mathscr{F}$ 本身就是 X 上层, 取 $\tilde{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$ 以及 $i_{\mathscr{F}}$ 为恒等函子便知其层化同构于自身.

Corollary 1.17. 设 X 是拓扑空间, 则 $\mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab})$ 中任何态射存在余核.

Proof. 设 $\eta:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是 X 上层的态射, 设 $\mathscr{C}$ 是 η 对应的预层余核, 即把每个开子集 U 对应到 $\mathrm{Coker}\eta_U$, 每个开子集链 $V\subseteq U$ 对应到 $\mathrm{Coker}\eta_U$ 到 $\mathrm{Coker}\eta_V$ 的自然同态得到的预层, 并记 $\pi:\mathscr{G}\to\mathscr{C}$ 是预层余核的标准投射, 每个开子集 U 对应的同态 π_U 都是满射. 下面说明 $(\tilde{\mathscr{C}}, i_{\mathscr{C}}\pi)$ 是 η 在层范畴中的余核.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "\eta"] & \mathscr{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\xi"'] & \mathscr{C} \arrow[r, "i_{\mathscr{C}}"] \arrow[dl, dashed, "\bar{\xi}"'] & \tilde{\mathscr{C}} \arrow[dll, dashed, "\tilde{\xi}"] \\
& \mathscr{H} & &
\end{tikzcd}$$

首先根据伴随层的泛性质可知 $i_{\mathscr{C}}\pi$ 是层范畴中的 epic 态. 任给 X 上层 $\mathscr{H}$ 和态射 $\xi:\mathscr{G}\to\mathscr{H}$ 并设 $\xi\eta=0$. 那么由 π 的定义可知存在态射 $\bar{\xi}:\mathscr{C}\to\mathscr{H}$ 使得 $\xi=\bar{\xi}\pi$. 再由伴随层的泛性质得到态射 $\tilde{\xi}:\tilde{\mathscr{C}}\to\mathscr{H}$ 使得 $\tilde{\xi}i_{\mathscr{C}}=\bar{\xi}$. 于是 $\xi=\tilde{\xi}i_{\mathscr{C}}\pi$. 因此 $(\tilde{\mathscr{C}},i_{\mathscr{C}}\pi)$ 是 η 在层范畴中的余核. □

下面我们说明拓扑空间之间的连续映射 $f:X\to Y$ 可诱导层范畴之间的函子. 对 X 上层 $\mathscr{F}$, 我们来定义一个 Y 上的层 $f_*(\mathscr{F})$: 任给 Y 的开子集 V, 定义 $f_*(\mathscr{F})(V)=\mathscr{F}(f^{-1}(V))$; 任给 Y 的开子集链 $V\subseteq U$, $f^{-1}(V)\subseteq f^{-1}(U)$, 所以有 $\mathscr{F}$ 的限制映射 $\mathrm{Res}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(V)}:\mathscr{F}(f^{-1}(U))\to\mathscr{F}(f^{-1}(V))$, 把 $\mathrm{Res}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(V)}$ 记作 Res^U_V 再更改记号得到 $\mathrm{Res}^U_V:f^*(\mathscr{F})(U)\to f_*(\mathscr{F})(V)$, 于是得到预层 $f_*(\mathscr{F})$. 因为 $\mathscr{F}$ 是层, 因此由 $f_*(\mathscr{F})$ 的定义直接保证了 $f_*(\mathscr{F})$ 满足粘接条件. 由此得到的层 $f_*(\mathscr{F})$ 被称为 $\mathscr{F}$ 沿 f 的**推出层**. 根据推出层的定义, 任何 X 上层间态射 $\eta:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 也可以自然地对应 $f_*(\mathscr{F})$ 到 $f_*(\mathscr{G})$ 的态射 $f_*(\eta):f_*(\mathscr{F})\to f_*(\mathscr{G})$, 满足把 Y 中每个开子集 V 对应到自然变换 $\eta_{f^{-1}(V)}$. 上述讨论表明对给定连续映射取推出层给出函子 $f_*:\mathbf{Sh}(X)\to\mathbf{Sh}(Y)$.

Definition 1.18. 设 $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ 是赋环空间. 如果 $f:X\to Y$ 是连续映射且 $f^\#:\mathcal{O}_Y\to f_*\mathcal{O}_X$ 是 Y 的环层间的态射, 则称 $(f,f^\#)$ 是赋环空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 到 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ 的一个**态射**.

如果 $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y),(Z,\mathcal{O}_Z)$ 均为赋环空间, 那么对态射 $(f,f^\#):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ 和 $(g,g^\#):(Y,\mathcal{O}_Y)\to(Z,\mathcal{O}_Z)$, 有连续映射 $gf:X\to Z$ 以及环层间态射 $(g_*f^\#)g^\#:\mathcal{O}_Z\to g_*f_*(\mathcal{O}_X)=(gf)_*(\mathcal{O}_X)$. 定义 $(f,f^\#)$ 与 $(g,g^\#)$ 的合成为 $(gf,(g_*f^\#)g^\#):(X,\mathcal{O}_X)\to(Z,\mathcal{O}_Z)$. 通过直接计算验证可知赋环空间之间态射的合成具备结合律且每个赋环空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 上的单位态是 $(\mathrm{id}_X,1_{\mathcal{O}_X})$. 并且不难看出 $(X,\mathcal{O}_X)$ 到 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ 的态射全体构成的类是集合. 因此所有的赋环空间关于上述定义的态射以及合成构成范畴, 称为**赋环空间范畴**.

Lemma 1.19. 如果 $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ 是同构的赋环空间, 则有环同构 $\mathcal{O}_X(X)\cong\mathcal{O}_Y(Y)$.

下面我们考虑局部赋环空间. 设 $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ 是局部赋环空间, 如果赋环空间之间的态射 $(f,f^\#):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ 满足对任何 $p\in X$, 局部环间的环同态 $(f^\#)_p:\mathcal{O}_{Y,f(p)}\to\mathcal{O}_{X,p}$ 是局部同态 (见下面的 [引理1.20]), 则称 $(f,f^\#):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ 为**局部赋环空间之间的态射**.

Lemma 1.20. 设 $(R,\mathfrak{m}),(S,\mathfrak{n})$ 是交换局部环, 则 $f(\mathfrak{m})\subseteq\mathfrak{n}$ 的充要条件是 $f(\mathfrak{m})=\mathfrak{n}$. 此时称 f 是**局部同态**.

Remark 1.21. 这里 $f(\mathfrak{m})\subseteq\mathfrak{n}$ 等价于 $\mathfrak{m}\subseteq f^{-1}(\mathfrak{n})$, 也等价于 $\mathfrak{m}=f^{-1}(\mathfrak{n})$.

根据局部赋环空间之间态射的定义不难看出局部赋环空间之间态射的合成仍为局部赋环空间, 因此所有局部赋环空间构成赋环空间范畴的子范畴, 它不是全子范畴 (存在赋环态射不是局部赋环态射的例子).

Conclusion. 本节先介绍了预层的概念 ([定义1.1]) 以及相关基本术语, 例如对给定拓扑空间的所有开子集取连续函数环并考虑限制映射便可产生预层的例子 ([例1.3]). 我们可以把拓扑空间上的预层代入该例子来赋予预层定义的几何直观: 把拓扑空间的每个开子集对应到其上函数环, 具有包含关系的开子集链对应函数环间的限制映射. 满足粘接条件的预层便是层 ([定义1.4]), 粘接条件可以用拓扑空间上连续函数的特有性质予以理解: 如果拓扑空间 X 的开子集 U 有开覆盖 $\{U_i|i\in I\}$, 那么如果每个 U_i 上都有连续函数 f_i 满足连续函数族 $\{f_i\}_{i\in I}$ 在定义域的公共部分有相同取值, 那么这族连续函数可唯一粘接成 U 上的连续函数. 考察拓扑空间上所有开子集上的连续函数环 (这里没有介绍光滑流形的例子, 可以类似考虑其开子集上的光滑函数环给出光滑函数环层) 或是仿射簇的所有开子集上的正则函数环 ([例1.8]) 都能产生层的例子. 随后对拓扑空间上的层介绍了给定点处茎的概念 ([定义1.9]), 它可用于研究几何对象的局部特性. 例如仿射簇的正则函数环层在给

定点处的茎就是簇在给定点处的局部环 ([例1.12]), 这时层在给定点处的茎是正则局部环当且仅当该点是光滑点. 因为预层和层都是函子, 因此用函子间的自然变换可给出 (预) 层间态射的概念, 进而产生给定拓扑空间上的 (预) 层范畴. 通过 [命题1.13] 可知层间态射是同构当且仅当该态射诱导每点处茎的态射是同构, 这是层满足“各点局部性质可得到整体数据”性质的反映. 在 [命题1.15] 中介绍了预层的伴随层, 它给定预层到“层范畴到预层范畴的嵌入函子”的泛性质. 最后我们介绍了赋环空间范畴与局部赋环空间范畴.

2 仿射概形

本节的目标是对任给含幺交换环, 引入其素谱上一个具体的结构层使得带有结构层的素谱能够重塑环.

固定含幺交换环 R, 考虑 R 的素谱 $\mathrm{Spec}R$, 我们将构造 $\mathrm{Spec}R$ 上的一个环层 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}$ 使得 $(R,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$ 是局部赋环空间且 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}$ 的整体截面全体 $\Gamma(\mathrm{Spec}R,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})\cong R$, 进而该环层已经蕴含 R 所有的结构信息 ([定理2.1]). 以下记每个元素 $a\in R$ 对应 $X=\mathrm{Spec}R$ 中的**主开集** $\{P\in\mathrm{Spec}R|a\notin P\}$ 为 X_a, 易见 $\{X_a|a\in R\}$ 是 Zariski 拓扑的一个拓扑基. 之后构造的环层 $\mathcal{O}_X$ 会满足 $\Gamma(D(f),\mathcal{O}_X)\cong R_a$, 即 R 在元素 a 生成的乘法幺半群处的局部化. 并且我们会看到含幺交换环范畴与仿射概形范畴是范畴对偶的 (见 [定理2.5]).

现在对每个 X 的开子集 U, 定义 $\mathcal{O}_X(U)$ 为所有满足下述条件的映射 $s:U\to\coprod_{\mathfrak{p}\in U}R_{\mathfrak{p}}$ 构成的集合:

对每个 $\mathfrak{p}\in U$, 存在 $\mathfrak{p}$ 的某个开邻域 $V\subseteq U$ 以及 $a\in R,s\in R-\bigcup_{\mathfrak{q}\in V}\mathfrak{q}$ 使得 $s(\mathfrak{q})=a/s\in R_{\mathfrak{q}},\forall\mathfrak{q}\in V$.

即映射 $s:U\to\coprod_{\mathfrak{p}\in U}R_{\mathfrak{p}}$ 局部上可表示为统一分式, 其中 $\coprod_{\mathfrak{p}\in U}R_{\mathfrak{p}}$ 表示局部环族 $\{R_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}R\}$ 的无交并.

通过 $R_{\mathfrak{p}}$ 的环结构可自然地赋予 $\mathcal{O}_X(U)$ 上的含幺交换环结构. 对 X 的每个开子集链 $V\subseteq U$, 有天然的限制映射 $\mathrm{Res}^U_V:\mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_X(V)$. 进而定义出逆变函子 $\mathcal{O}_X:\mathbf{Top}(X)\to\mathbf{CRing}$. 因为每个开子集 U 对应的 $\mathcal{O}_X(U)$ 的定义是局部的, 故容易验证预层 $\mathcal{O}_X$ 满足粘接公理, 为 X 上环层. 称之为素谱上的**结构层**.

下面我们说明 $(X,\mathcal{O}_X)$ 是局部赋环空间, 并且 $\mathcal{O}_X$ 可重塑给定的含幺交换环 R.

Theorem 2.1. 设 R 是含幺交换环, $X=\mathrm{Spec}R$, $\mathcal{O}_X$ 是如上定义的结构层. 那么:
(1) 对每个素理想 $\mathfrak{p}$, 茎 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}\cong R_{\mathfrak{p}}$ 是局部环, 故 $(X,\mathcal{O}_X)$ 是局部赋环空间.
(2) 对每个 $a\in R$, 主开集 X_a 对应的含幺交换环 $\mathcal{O}_X(X_a)\cong R_a$. 特别地, $\mathcal{O}_X(X)\cong R$.

Proof. (1) 固定 R 的素理想 $\mathfrak{p}$, 有标准映射 $\varphi:\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}\to R_{\mathfrak{p}},[(U,s)]\mapsto s(\mathfrak{p})$, 这是定义合理的环同态. 注意到 $R-\mathfrak{p}$ 中每个元素 v 对应 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ 中的可逆元 $[(X,v/1)]$, 因此环同态 $R\to\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}},a\mapsto[(X,a/1)]$ 把 $R-\mathfrak{p}$ 中元素映至 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ 中的可逆元, 这里把 $a/1$ 视作映射 $a/1:X\to\coprod_{\mathfrak{q}\in X}R_{\mathfrak{q}},\mathfrak{q}\mapsto a/1$. 这诱导出环同态

$$\psi:R_{\mathfrak{p}}\to\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}},a/v\mapsto[(X_v,a/v)],$$

其中 $a/v:X_v\to\coprod_{\mathfrak{q}\in X_v}R_{\mathfrak{q}},\mathfrak{q}\mapsto a/v$. 容易验证 φ 与 ψ 是互逆的映射, 故有环同构 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}\cong R_{\mathfrak{p}}$.

(2) 固定 $a\in R$, 由环同态 $R\to\mathcal{O}_X(X_a),b\mapsto b/1$ 将 a 的自然数幂映至可逆元知该环同态诱导环同态 $\psi:R_a\to\mathcal{O}_X(X_a),b/a^m\mapsto b/a^m$, 这里 $b/a^m\in\mathcal{O}_X(X_a)$ 表示将 X_a 中每个素理想映至 b/a^m 的映射. 下面证明 ψ 是单射. 如果 $b/a^m\in R_a$ 满足 b/a^m 是 X_a 上零映射, 那么每个 $\mathfrak{p}\in X_a$ 满足 $\mathrm{ann}_R(b)\not\subseteq\mathfrak{p}$, 这里 $\mathrm{ann}_R(b)=\{c\in R|cb=0\}$. 因此 $V(\mathrm{ann}_R(b))\cap X_a=\varnothing$, 进而 $a\in\sqrt{\mathrm{ann}_R(b)}$, 这说明在 R_a 中 $b/a^m=0$.

最后证 $\psi:R_a\to\mathcal{O}_X(X_a)$ 是满射, 任取 $s\in\mathcal{O}_X(X_a)$. s 关于 ψ 原像的构造分为两步.

Step 1. 首先说明存在 $u_1,...,u_r \in R$ 使得 $X_a = X_{u_1} \cup \cdots \cup X_{u_m}$ 且 s 在每个 $X_{u_j}(1 \le j \le r)$ 上可表示为 a_j/u_j 的形式. 根据 $\mathcal{O}_X$ 的定义, X_a 可表示为一些开子集 $\{U_i|i \in I\}$ 的并, 且在每个 U_i 上 s 形如 c_i/v_i, 其中 $v_i \in R$ 满足 $v_i \notin \mathfrak{q}, \forall \mathfrak{q} \in U_i$. 因为 $\{X_b|b \in R\}$ 是素谱的拓扑基, 所以每个 U_i 可表为一些 X_b 的并, 所以可不妨设每个 U_i 都为主开集, 设为 $U_i = X_{b_i}$. 从而 $X_{b_i} \cap V(v_i) = \varnothing, \forall i \in I$ 且 X_a 为 $\{X_{b_i}|i \in I\}$ 之并. 于是 $b_i \in \sqrt{(v_i)}$, 所以存在 $d_i \in R$ 和正整数 n_i 使得 $b_i^{n_i} = d_i v_i$, 这里 $d_i \notin \mathfrak{q}, \forall \mathfrak{q} \in X_{b_i}$. 所以 s 在每个 X_{b_i} 上可表示为 $c_i d_i / b_i^{n_i}$. 注意到 $X_{b_i} = X_{b_i^{n_i}}$, 所以用 u_i 替换 $b_i^{n_i}$, a_i 替换 $c_i d_i$, 再结合 X_a 是拟紧空间便知存在有限个 $u_1,...,u_r \in R$ 使得 $X_a = X_{u_1} \cup \cdots \cup X_{u_m}$ 且 s 在每个 $X_{u_j}(1 \le j \le r)$ 上可表示为 a_j/u_j.

Step 2. 这时在每个 $X_{u_i} \cap X_{u_j} = X_{u_i u_j}$ 上, s 有 a_i/u_i 与 a_j/u_j 两种表示方式, 故由之前证明的 ψ 是单射可知在 $R_{u_i u_j}$ 中 $a_i/u_i = a_j/u_j$. 因此对上述固定的 $1 \le i, j \le r$, 存在正整数 ℓ_{ij} 使得 $(u_i u_j)^{\ell_{ij}}(a_i u_j - a_j u_i) = 0$. 故可选取充分大的正整数 n 使得 $(u_i u_j)^n (a_i u_j - a_j u_i) = 0, \forall 1 \le i, j \le r$. 用 u_i^{n+1} 替换 u_i, a_i 替换 $u_i^n a_i$, 可设 $X_a = X_{u_1} \cup \cdots \cup X_{u_m}$, s 在每个 $X_{u_j}(1 \le j \le r)$ 上可表示为 a_j/u_j 且满足 $a_i u_j = a_j u_i, \forall 1 \le i, j \le r$. 再由 $\{X_{u_i}\}_{i=1}^r$ 覆盖 X_a 得到存在 $z_1,...,z_r \in R$ 以及正整数 t 使得 $a^t = z_1 u_1 + \cdots + z_r u_r$. 命 $b = z_1 a_1 + \cdots + z_r a_r$, 那么对每个 $1 \le j \le r$, $u_j b = a_j z_1 u_1 + \cdots + a_j z_r u_r = a_j a^t$. 这说明 s 在每个 X_{u_i} 上可表为 b/a^t.

通过前面的讨论, 得到 $\psi(b/a^t) = s$, 所以 ψ 是满射. □

Definition 2.2. 如果一个局部赋环空间满足存在含幺交换环 R 使得该空间作为局部赋环空间与 $(R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$ 同构, 那么称该局部赋环空间是一个**仿射概形**. 每个含幺交换环 R 产生标准的仿射概形 $(R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$. 称所有仿射概形所构成的局部赋环空间范畴的全子范畴为**仿射概形范畴**.

Remark 2.3. 如果 R 是零环, 这时其素谱是空集, 对应的仿射概形称为**空概形**.

[定理2.1] 的一个直接推论便是素谱上的结构层承载了环的所有结构信息.

Corollary 2.4. 如果含幺交换环 R, S 决定的标准仿射概形 $(R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$ 和 $(S, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}S})$ 同构, 那么 $R \cong S$.

Proof. 由 [引理1.19], 这时 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}(\mathrm{Spec}R) \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}S}(\mathrm{Spec}S)$, 再应用 [定理2.1] 即可. □

代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇范畴与 $\Bbbk$ 上有限生成半素交换代数范畴间通过取仿射簇的坐标环可产生标准的范畴对偶. 下述定理表明仿射概形范畴等价于含幺交换环范畴的对偶范畴.

Theorem 2.5. 含幺交换环范畴与仿射概形范畴是范畴对偶的.

Proof. 因为仿射概形范畴和由所有形如 $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$ 的局部赋环空间构成的全子范畴 $\mathcal{C}$ 是等价的, 所以要证明结论只需构造 $\mathcal{C}$ 与 $\mathbf{CRing}$ 之间的范畴对偶. 下面先构造出范畴间对偶函子, 再验证它确实是对偶函子.

Step 1. 首先说明存在一自然的逆变函子 $F: \mathbf{CRing} \to \mathcal{C}$ 满足 $F(R) = (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$. 易知交换环间同态 $f: R \to R'$ 可逆变地诱导连续映射 $f^*: \mathrm{Spec}R' \to \mathrm{Spec}R, Q \mapsto f^{-1}(Q)$. 对 $\mathrm{Spec}R$ 的每个开子集 V 以及 $Q \in (f^*)^{-1}(V)$, 有自然的局部同态 $f_Q: R_{f^*(Q)} \to R'_Q, a/s \mapsto f(a)/f(s)$, 那么根据素谱上结构层的定义, 局部同态族 $\{f_Q | Q \in f^{-1}(V)\}$ 诱导映射 $(f^*)^\#(V): \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}(V) \to (f^*)_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'}(V) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'}((f^*)^{-1}(V)), s \mapsto (f^*)^\#(V)(s)$, 这里 $(f^*)^\#(V)(s)$ 将 $f^{-1}(V)$ 中每个素理想 Q 映至 $f_{\mathfrak{q}}(s(\mathfrak{q}))$, 其中 $\mathfrak{q} = f^*(Q)$. 易验证 $(f^*)^\#(V)$ 是定义合理的环同态并且

$$(f^*)^\#: \mathrm{ob}\mathbf{Top}(\mathrm{Spec}R) \to \bigcup_{V \in \mathrm{ob}\mathbf{Top}(\mathrm{Spec}R)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}(V), (f^*)_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}(V)), V \mapsto (f^*)^\#(V)$$

是函子 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}$ 到 $(f^*)_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}$ 的自然变换, 这说明 $(f^*)^\# : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R} \to f^*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'}$ 是环层间的态射.

根据 $(f^*)^\#$ 的定义可知对每个 $Q \in \mathrm{Spec}R'$, $\mathfrak{q} = f^*(Q)$ 以及 $\mathfrak{q}$ 的任何开邻域 V 有下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
R_{\mathfrak{q}} \arrow[rr, "f_Q"] & & R'_Q \\
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}(V) \arrow[u] \arrow[r, "(f^*)^\#(V)"] & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'}((f^*)^{-1}(V)) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

这里 $R_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R, f^*(Q)}, R'_Q = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R', Q}$, 因此 $(f^*, (f^*)^\#) : (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}) \to (\mathrm{Spec}R', \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'})$ 是局部赋环空间之间的态射. 于是通过定义 $F(R) = (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$ 并对任何交换环间的环同态 $f : R \to R'$ 如上定义 $F(f) = (f^*, (f^*)^\#)$ 可得逆变函子 $F : \mathbf{CRing} \to \mathcal{C}$.

Step 2. 下面来验证前面构造的函子 $F : \mathbf{CRing} \to \mathcal{C}$ 是范畴对偶. 根据 $\mathcal{C}$ 的定义直接得到 F 是本质满函子, 故还需验证 F 是忠实满函子, 即说明映射 $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(R, R') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((\mathrm{Spec}R', \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'}), (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}))$ 是双射. 先证 F 是单射. 如果环同态 $f, g : R \to R'$ 满足 $F(f) = (f^*, (f^*)^\#) = (g^*, (g^*)^\#) = F(g)$, 那么由 $(f^*)^\# = (g^*)^\#$ 知环同态 $(f^*)^\#(\mathrm{Spec}R), (g^*)^\#(\mathrm{Spec}R) : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}(\mathrm{Spec}R) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'}(\mathrm{Spec}R')$ 相同. 通过 [定理2.1] 我们看到环同构 $R \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}(\mathrm{Spec}R), a \mapsto a/1$, 所以 $(f^*)^\#(\mathrm{Spec}R) = (g^*)^\#(\mathrm{Spec}R)$ 表明 $f(a) = g(a), \forall a \in R$, 即 $f = g$. 最后验证 F 是满射, 任取局部赋环同态 $(h, h^\#) : (\mathrm{Spec}R', \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'}) \to (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$, 那么赋环态射 $h^\# : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R} \to h_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'}$, 它诱导 $\hat{h} = h^\#(\mathrm{Spec}R) : \Gamma(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}) \to \Gamma(\mathrm{Spec}R', \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'})$, 借助 [定理2.1] 可得环同态 $\varphi : R \to S$, 满足 $\hat{h}$ 把每个 $a/1 \in \Gamma(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$(注意 $\Gamma(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$ 中元素均具备这种形式) 映至 $\varphi(a)/1 \in \Gamma(\mathrm{Spec}R', \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R'})$. 任取 R' 的素理想 Q, 那么对任何 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R, h(Q)}$ 中元素 $[(U, s)]$ 存在 $h(Q)$ 的开邻域 $V \subseteq U$ 使得 s 在 V 上可表为 a/v 的形式, 进而知 $h^\#$ 所诱导的茎之间的同态把 $[(V, a/v)] \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R, h(Q)}$ 映至 $[[(h^{-1}(V), \varphi(a)/\varphi(v))] \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R', Q}$. 因为 $(h, h^\#)$ 是局部赋环映射, 所以 R'_Q 唯一的极大理想 $Q_Q = \{\varphi(a)/\varphi(v) | a \in h(Q), v \in R - h(Q)\}$, 由此得到 $\varphi^{-1}(Q) = h(Q)$. 由 Q 的任意性知上述环同态 φ 所诱导的素谱间的连续映射 φ^* 就是 h. 前面提到 $h^\#$ 诱导层面的间同态把形如 $[(V, a/v)]$ 映至形如 $[[(h^{-1}(V), \varphi(a)/\varphi(v))]$ 的元素, 可直接计算验证 $(\varphi^*)^\# = h^\#$. 所以 $F(\varphi) = (h, h^\#)$.

由此得到范畴对偶 $F : \mathbf{CRing} \to \mathcal{C}$, 结合 $\mathcal{C}$ 是仿射概形的全子范畴以及仿射概形的定义便得结论. $\square$

Notation. 当考虑的仿射概形是某个含幺交换环 R 决定的标准仿射概形 $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$ 时, 简记为 $\mathrm{Spec}R$.

Example 2.6. 设 X 是代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇, $\mathcal{O}_X$ 是其上正则函数环层. 之前已经在 [例1.12] 中指出 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是局部赋环空间. 考虑 X 的坐标环 $\mathcal{O}_X(X)$ 决定的仿射概形 $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_X(X)$, 那么 $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_X(X)$ 中元素与 X 的不可约闭子簇全体一一对应, 仿射概形中的闭点与 X 中点一一对应. 易验证拓扑同胚 $X \cong \mathrm{maxSpec}\mathcal{O}_X(X)$. 一般地, $(X, \mathcal{O}_X)$ 未必是仿射概形, 例如考虑仿射直线 $X = \mathbb{C}$, 它是不可约空间. 假设存在仿射概形 $\mathrm{Spec}R$ 使得 $(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ 与之同构, 则有同胚 $\mathbb{C} \cong \mathrm{Spec}R$, 因此 R 的素根 $N(R)$ 是素理想. 进而得到 $\mathbb{C}$ 中存在某个点的 Zariski 闭包是整个空间, 这与 $\mathbb{C}$ 中单点集是闭子集矛盾.

Remark 2.7. 如果拓扑空间 X 中点 p 满足 $\{p\}$ 是稠密集, 则称 p 是 X 的**一般点**.

Example 2.8. 设 R 是含幺交换环, 称仿射概形 $\mathrm{Spec}R[x_1, ..., x_n]$ 是 R 上 n 维**仿射空间**. 当 $n = 1$ 时称 $\mathrm{Spec}R[x]$ 是**仿射直线**; 当 $n = 2$ 时称 $\mathrm{Spec}R[x, y]$ 是**仿射平面**. 如果 $R = \Bbbk$ 是代数闭域, 和经典仿射空间 $\Bbbk^n$ 相比, $\mathrm{Spec}R[x_1, ..., x_n]$“增添”了 $\Bbbk^n$ 中非单点的不可约闭子簇全体.

Example 2.9. 考虑仿射概形 $X = \mathrm{Spec}R$ 的任何非空主开集 X_a, 下证有局部赋环空间同构 $(X_a, \mathcal{O}_X|_{X_a}) \cong \mathrm{Spec}R_a$. 考虑局部化标准映射 $\lambda : R \to R_a, b \mapsto b/1$. 作用 [定理2.5] 中的范畴对偶 F 可得赋环空间态射 $F(\lambda) = (\lambda^*, (\lambda^*)^\#) : \mathrm{Spec}R_a \to \mathrm{Spec}R$. 因为 λ^* 诱导 $\mathrm{Spec}R_a$ 到 X_a 的拓扑同胚, 所以可将 $F(\lambda)$ 限制为仿射概形 $\mathrm{Spec}R_a$ 到 $(X_a, \mathcal{O}_X|_{X_a})$ 的态射, 该态射所对应环层 $\mathcal{O}_X|_{X_a}$ 到 $\xi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R_a}$ 的态射 (其中 $\xi : \mathrm{Spec}R_a \to X_a$ 是 λ^* 诱导的拓扑同胚) 在每点 $\mathfrak{p} \in X_a$ 处诱导的茎上同态就是标准同构 $R_\mathfrak{p} \cong (R_a)_{\mathfrak{p}_a}$. 现在应用 [命题1.13] 可得 $F(\lambda)$ 诱导的仿射概形 $\mathrm{Spec}R_a$ 到 $(X_a, \mathcal{O}_X|_{X_a})$ 的局部赋环空间态射是同构. 故 $(X_a, \mathcal{O}_X|_{X_a})$ 是仿射概形.

Remark 2.10. 因此任何仿射概形 X 的每点 p 都存在某个开邻域 V_p 使得 $(V_p, \mathcal{O}_X|_{V_p})$ 是仿射概形.

如果说流形是粘合欧式空间产生的几何对象, 那么概形就是粘合仿射概形产生的几何对象.

Definition 2.11. 设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是局部赋环空间, 若 X 存在开覆盖 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ 使得每个 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ 是仿射概形, 则称 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是**概形**, X 是其**底空间**. 将所有概形构成的局部赋环空间范畴的全子范畴定义为**概形范畴**.

Notation. 在不引起混淆时将概形 $(X, \mathcal{O}_X)$ 简记为 X.

Lemma 2.12. 设 X 是局部赋环空间, 则 X 是概形当且仅当 X 的每点有开邻域 U 使 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ 是仿射概形.

Proof. 充分性来自概形的定义, 必要性来自概形可被一些仿射概形覆盖以及 [例2.9]. □

Proposition 2.13. 设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是概形, 则任何开子集 U 满足 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ 是概形, 称 U 为 X 的**开子概形**.

Proof. 根据 [引理2.12], 局部赋环空间是概形当且仅当它每点局部上是仿射概形. 故结论明显成立. □

Remark 2.14. 如果概形 X 的开子集 U 作为开子概形进一步是仿射的, 称 U 是**仿射开子概形**. 根据 [例2.9], 仿射概形的所有仿射开子概形作为集合构成该概形底空间的一个拓扑基. 于是结合概形的定义得到给定概形的所有仿射开子概形构成拓扑基. 如果概形 X 有开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$ 满足每个 U_i 是 X 的仿射开子概形, 则称 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的一个**仿射开覆盖**.

在本节最后我们介绍给定概形上的概形以及给定交换环上的概形.

Definition 2.15. 设 X, S 是概形, 设 $f : X \to S$ 是概形间的态射. 称 (X, f) 是 S **上概形**或 S**-概形**, 这里的态射 f 被称为**结构态射**. 如果 $S = \mathrm{Spec}R$ 是含幺交换环 R 决定的仿射概形, 称 (X, f) 是交换环 R 上概形或 R**-概形**. 设 (X, f) 与 (Y, g) 均为 S-概形, 如果概形间的态射 $h : X \to Y$ 满足 $gh = f$, 则称 h 是 S**-概形态射**. 所有的 S-概形以及 S-概形构成的范畴称为 S**-概形范畴**.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

固定含幺交换环 K, 则对任何含幺交换环 A, 保幺环同态 $\alpha : K \to A$ 给出 A 上 K-代数结构. 反之, 任给 K-交换代数 A 诱导环同态 $\alpha : K \to A, k \mapsto k1_A$. 所以 K-交换代数本质上就是环同态 $\alpha : K \to A$. 如果 $f : A \to B$ 是含幺交换环间的环同态, 对标准映射 $\alpha_1 : K \to A, \alpha_2 : K \to B$, f 是 K-代数同态当且仅当 $f\alpha_1 = \alpha_2$. 下面我们说明 K-仿射概形范畴与 K-交换代数范畴间有自然的范畴对偶.

Theorem 2.16. 设 K 是含幺交换环, 记 K-**CAlg** 是 K 上交换代数范畴, K-**AffSch** 是 K-概形范畴. 如下定义逆变函子 $H: K\text{-}\mathbf{CAlg} \to K\text{-}\mathbf{AffSch}$: 对每个 K-交换代数 A, 记 $f_A: \mathrm{Spec}A \to \mathrm{Spec}K$ 是环同态 $\alpha_A: K \to A$ 在 [定理2.5] 中范畴对偶 F 作用下得到的仿射概形态射 $F(\alpha_A)$, 定义 $H(A) = (\mathrm{Spec}A, f_A)$. 对任何 K-交换代数同态 $\varphi: A \to B$, 则 $\alpha_B = \varphi\alpha_A$, 这诱导 $f_B = f_A F(\varphi)$. 定义 $H(\varphi) = F(\varphi)$, 那么

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}A \arrow[dr, "f_A"'] & & \mathrm{Spec}B \arrow[ll, "F(\varphi)"'] \arrow[dl, "f_B"] \\
& \mathrm{Spec}K &
\end{tikzcd}$$

的交换性保证了 $F(\varphi): H(B) \to H(A)$ 是仿射概形间的 K-概形态射. 所以 H 是定义合理的逆变函子. 那么 $H: K\text{-}\mathbf{CAlg} \to K\text{-}\mathbf{AffSch}$ 是范畴对偶.

Proof. 先说明 H 是本质满函子, 任取 K-仿射概形 (X, f), 可不妨设 $X = \mathrm{Spec}A, f: \mathrm{Spec}A \to \mathrm{Spec}K$. 因为 [定理2.5] 保证了函子 F 是满函子, 所以存在环同态 $\alpha_A: K \to A$ 使得 $F(\alpha_A) = f$, 由 α_A 可将 A 视作 K-代数. 进而 $(X, f) \cong H(A)$, 故 H 是本质满函子. 故只需要说明对任何 K-交换代数 A, B, $H: \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{CAlg}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathbf{AffSch}}(HB, HA), \varphi \mapsto H(\varphi) = F(\varphi)$ 是双射, 而这由 F 是忠实满函子保证. □

Remark 2.17. 因为代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇范畴与 $\Bbbk$-仿射半素交换代数范畴间有范畴对偶, 故该定理表明 $\Bbbk$ 上仿射簇范畴可忠实满地嵌入 $\Bbbk$-仿射概形范畴.

通过 [定理2.16] 可以看到, 研究交换环 K 上的仿射概形本质上就是研究 K-交换代数, 这是几何空间与交换代数之间的对应. 从这个角度看, 可以将研究非交换代数理解为研究某些“非交换空间”. 例如多项式代数 $\mathcal{O}(\Bbbk^2) = \Bbbk[x, y]$ 对应仿射平面 $\Bbbk^2$, 那么对 $q \in \Bbbk^*$, 可以将非交换代数 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2) = \Bbbk\langle x, y\rangle/(xy - qyx)$ 理解为某种非交换空间, 一般将 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 称为**量子平面**. 当 $q \to 1$ 时, 该非交换代数的“经典极限”为 $\mathcal{O}(\Bbbk^2)$.

Conclusion. 本节首先对任何含幺交换环 R 的素谱 $\mathrm{Spec}R$ 定义了其上结构层使得 $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$ 成为局部赋环空间 ([定理2.1]). 因为 $\Gamma(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}) \cong R$, 所以素谱上的结构层蕴含了环的所有结构信息. 一般地, 不同构的含幺交换环可能有同胚的素谱, 但带有结构层的素谱在同构意义下可重塑环 ([推论2.4]). 代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇范畴与 $\Bbbk$-仿射半素交换代数范畴间有自然的对偶, [定理2.5] 表明当把 $\Bbbk$-仿射半素交换代数范畴替换成更一般的交换环范畴时, 仿射概形范畴是与之对偶的几何范畴. 由于代数闭域上仿射簇和其坐标环的极大谱间有标准同胚, 所以用素谱作为定义仿射概形的底空间并不自然. 选取素谱替代极大谱来作为仿射概形的底空间的一个根本原因是它能保证极大谱无法具有的某种函子性质——极大理想关于环同态的原像未必是极大理想. [例2.6] 指出代数闭域上带有正则函数环层的仿射簇虽然是局部赋环空间但一般不是仿射概形. 类似流形是局部欧式的, 概形是局部仿射概形的 ([引理2.12]), 并且概形的每个开子集天然继承结构层成为开子概形 ([命题2.13]). 概形的所有仿射开子概形构成一个拓扑基. 结尾介绍了给定概形上的概形以及交换环上的概形, [定理2.16] 表明给定交换环上概形范畴与该交换环上交换代数范畴间有自然的对偶, 进而知代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇范畴可忠实满地嵌入 $\Bbbk$-仿射概形范畴, 由此可在概形框架下研究仿射簇.

3 基本性质

如果概形的底空间连通, 则称该概形**连通**. 如果概形的底空间拟紧, 则称该概形**拟紧**. 例如仿射概形总是拟紧的. 如果概形的底空间不可约, 则称该概形**不可约**. 因此不可约概形总是连通概形.

Example 3.1. 仿射概形 $\mathrm{Spec}R$ 是不可约的当且仅当 $N(R)$ 是 R 的素理想.

Definition 3.2. 如果概形 X 存在仿射开覆盖 $\{U_i|i\in I\}$ 使得每个 $\Gamma(U_i,\mathcal{O}_X)$ 是交换 Noether 环, 则称 X 是**局部 Noether 概形**. 如果进一步 X 是拟紧的, 则称 X 是 **Noether 概形**.

Remark 3.3. 因为拓扑空间如果可被有限多个拟紧子集覆盖, 此空间本身也是拟紧的. 所以概形 X 是 Noether 概形当且仅当存在有限仿射开覆盖 $\{U_1,...,U_r\}$ 使得每个 $\Gamma(U_i,\mathcal{O}_X)$ 是交换 Noether 环.

Proposition 3.4. 考虑仿射概形 $X=\mathrm{Spec}R$, 则 X 是 Noether 概形当且仅当 R 是交换 Noether 环.

Proof. 根据 Noether 概形的定义, 只需验证必要性. 由下面的 [引理3.5] 以及 X 的拟紧性可知存在 $a_1,...,a_r\in R$ 使得 $\mathrm{Spec}R=X_{a_1}\cup\cdots\cup X_{a_r}$ 且每个 $\Gamma(X_{a_i},\mathcal{O}_X|_{X_{a_i}})$ 是 Noether 环. 于是 $(a_1,...,a_r)=R$. 下面说明 R 的任何理想 I 是有限生成的来得到 R 的 Noether 性. 因为每个 $R_{a_i}\cong\Gamma(X_{a_i},\mathcal{O}_X)$ 是 Noether 环, 所以 I_{a_i} 作为 R_{a_i} 中理想是有限生成的. 现在应用 [引理3.6] 便知 I 是有限生成的, 所以 R 是 Noether 环. □

Lemma 3.5. 设 U 是 $X=\mathrm{Spec}R$ 的仿射开子概形, 且满足 $\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ 是 Noether 环. 则对任何主开集 $X_a\neq\varnothing\subseteq U$, $\Gamma(X_a,\mathcal{O}_X|_U)$ 也是 Noether 环.

Proof. 由条件, 存在交换 Noether 环 B 和局部赋环空间同构 $(h,h^{\#}):(U,\mathcal{O}_X|_U)\to(\mathrm{Spec}B,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B})$. 设 $\Delta\subseteq\mathrm{Spec}B$ 是由 $X_a=h^{-1}(\Delta)$ 确定的开子集, 则有下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X,\mathcal{O}_X) \arrow[r, "\mathrm{Res}^X_U"] \arrow[dr, "\mathrm{Res}^X_{X_a}"'] & \Gamma(U,\mathcal{O}_X) \arrow[d, "\mathrm{Res}^U_{X_a}"] & \Gamma(\mathrm{Spec}B,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B}) \arrow[l, "h^{\#}(\mathrm{Spec}B)"'] \arrow[d] \\
 & \Gamma(X_a,\mathcal{O}_X) & \Gamma(\Delta,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B}) \arrow[l, "h^{\#}(\Delta)"]
\end{tikzcd}$$

这里 $h^{\#}(V)$ 对 $\mathrm{Spec}B$ 的任何开子集 V 都是环同构. 设 $b\in B\cong\Gamma(\mathrm{Spec}B,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B})$ 满足 $h^{\#}(\mathrm{Spec}B)(b)$ 是 a 关于 Res^X_U 的像 $\overline{a}$, 下证 Δ 是 $\mathrm{Spec}B$ 中 b 决定的主开集来得到 $R_a\cong\Gamma(X_a,\mathcal{O}_X)\cong\Gamma(\Delta,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B})\cong B_b$(应用[定理2.1]), 进而得到 $\Gamma(X_a,\mathcal{O}_X|_U)=\Gamma(X_a,\mathcal{O}_X)\cong R_a$ 也是 Noether 环.

记 $Y=\mathrm{Spec}B$, 需要验证 $h(X_a)=\Delta=Y_b$. 任取 $\mathfrak{p}\in X_a$, 则 $a/1$ 所对应的 $\Gamma(X_a,\mathcal{O}_X)$ 中映射在 $\mathfrak{p}$ 中取值是 $R_{\mathfrak{p}}$ 中的可逆元. 因为 $(h,h^{\#})$ 是局部赋环空间态射, 故它诱导下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
R_{\mathfrak{p}} & & & B_{h(\mathfrak{p})} \arrow[lll, "(h^{\#})_{\mathfrak{p}}"'] \\
 & \Gamma(U,\mathcal{O}_X) \arrow[ul, "\alpha_U"] \arrow[d] & \Gamma(\mathrm{Spec}B,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B}) \arrow[l, "h^{\#}(\mathrm{Spec}B)"'] \arrow[ur, "\beta_{\mathrm{Spec}B}"'] \arrow[d] & \\
 & \Gamma(X_a,\mathcal{O}_X) \arrow[uul, bend left, "\alpha_{X_a}"] & \Gamma(\Delta,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B}) \arrow[l, "h^{\#}(\Delta)"] \arrow[uur, bend right, "\beta_\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

这里 $\overline{a}\in\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ 在 α_U 下的像为 $a/1$ 对应 $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ 中映射在 $\mathfrak{p}$ 处取值. 注意到 $(h^{\#})_{\mathfrak{p}}$ 是同构, 所以 $b/1$ 对应 $\Gamma(\Delta,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B})$ 中映射在 $h(\mathfrak{p})$ 中的像也可逆. 这说明 $b\notin h(\mathfrak{p})$, 进而 $h(X_a)\subseteq Y_b$. 反之, 如果 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}R$ 使得 $h(\mathfrak{p})\in Y_b$, 那么 $b/1$ 对应 $\Gamma(\Delta,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B})$ 中映射在 $h(\mathfrak{p})$ 处取值是 $B_{h(\mathfrak{p})}$ 中可逆元, 因此 $\overline{a}/1$ 对应 $\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ 中映射在 $\mathfrak{p}$ 处取值也是可逆元. 这表明 $a\notin\mathfrak{p}$, 即 $\mathfrak{p}\in X_a$. 所以由 h 是同胚便知 $h(X_a)=Y_b$. □

Lemma 3.6. 设 R 是含幺交换环, $a_1, ..., a_r \in R$ 满足 $(a_1, ..., a_r) = R$. 如果 R-模 M 在每个 a_i 生成的乘法幺半群处的局部化 M_{a_i} 作为 R_{a_i}-模有限生成, 则 M 是有限生成 R-模.

Proof. 设每个 M_{a_i} 作为 R_{a_i}-模可由 $x_{i1}/a_i^{n_{i1}}, ..., x_{i,k_i}/a_i^{n_{i,k_i}}$ 生成. 记 N 是 $\{x_{ij} | 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq k_i\}$ 生成的 M 的 R-子模. 那么 $N_{a_i} = M_{a_i}, \forall 1 \leq i \leq r$. 因为对 R 的每个素理想 $\mathfrak{p}$, 都存在某个 a_i 不在 $\mathfrak{p}$ 中, 所以 M/N 在每个素理想 $\mathfrak{p}$ 处的局部化是零模, 这说明 $M/N = 0$. 特别地, $M = N$ 是有限生成 R-模. □

含幺交换环 R 如果素根是零, 即 R 是半素环, 则称 R 是**约化环**.

Definition 3.7. 设 X 是概形. 如果对任何 $p \in X$ 有 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是约化环, 则称 X 是**约化概形**.

Remark 3.8. 易见约化概形的开子概形 (回忆 [命题2.13]) 仍约化. 通常把不可约的约化概形称为**整概形**.

下面的命题解释了约化概形和整概形命名的原因.

Proposition 3.9. 设 X 是概形. 那么 X 是约化概形的充要条件是 X 的任何开子集 U 满足 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 是约化环. 更进一步, X 是整概形的充要条件是 X 的任何非空开子集 U 满足 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 是整区.

Proof. 如果 U 是约化概形 X 的开子集, 假设 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 中的存在非零幂零元 f, 设 $f^n = 0$. 那么存在 $p \in U$ 使得 $[(U, f)] \in \mathcal{O}_{X,p}$ 非零 (若不然, U 中每个点 p 满足存在 p 的开邻域 V_p 使得 $f|_{V_p} = 0$, 利用粘接条件得到 $f = 0$). 于是 $[(U, f)]$ 给出茎 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的一个非零幂零元, 这与 X 是约化概形矛盾. 反之, 如果概形 X 满足任何开子集 U 上截面全体 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 是约化环. 那么每个 $\mathcal{O}_{X,p}$ 中的幂零元 $[(U, f)]$ 满足存在正整数 n 和 p 的开邻域 $V \subseteq U$ 使得 $f^n|_V = (f|_V)^n = 0$. 由 $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ 是约化环得到 $f|_V = 0$, 因此 $[(U, f)] = 0$. 故 $\mathcal{O}_{X,p}$ 约化.

现在设 X 是整概形, 那么 X 的任何非空开子集 U 作为不可约空间的非空开子集仍不可约, 所以每个开子概形 U 都是整概形. 因此我们只需说明 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 是整区便得到 X 非空开子集 U 对应的环 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 均为整区. 假设 $f, g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 满足 $fg = 0$. 这时每个使得 $[(X, f)]$ 是 $\mathcal{O}_{X,p}$ 中非零元的点 $p \in X$ 的任何开邻域 V_p 都满足 $f|_{V_p} \neq 0$. 特别地, 因为 X 是局部仿射的 ([引理2.12]), 所以可选取 V_p 是 X 的仿射开子概形. 进而得到 $(f|_{V_p})(g|_{V_p}) = (fg)|_{V_p} = 0$. 如果我们能够证明结论对 X 是仿射概形的情形成立, 那么一般情形对仿射开子概形 V_p(根据前面的讨论, V_p 也是整概形) 应用仿射时的结果得到 $\Gamma(V_p, \mathcal{O}_X)$ 是整区. 于是由 $f|_{V_p} \neq 0$ 得到 $g|_{V_p} = 0$, 这表明 $[(X, g)] = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}$. 上述讨论表明 $X = \{p \in X | [(X, f)] = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}\} \cup \{p \in X | [(X, g)] = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}\}$. 即 X 中任何点 p 一定使得 f 或 g 中的某个在 p 处的芽是零. 根据茎的定义易见 $\{p \in X | [(X, f)] = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}\}$ 与 $\{p \in X | [(X, g)] = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}\}$ 都是 X 的开子集 (以 f 为例, 如果 $p \in X$ 满足 $[(X, f)] = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}$, 那么存在 p 的开邻域 W_p 使得 $f|_{W_p} = 0$. 这时任何 $q \in W_p$ 满足 $[(W_p, f)] = [(X, f)] \in \mathcal{O}_{X,q}$ 是零元). 所以 $X = \{p \in X | [(X, f)] = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}\}$ 或 $\{p \in X | [(X, g)] = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}\}$. 进而利用粘接条件可知 $f = 0$ 或 $g = 0$. 因此, 前面的讨论表明该命题的证明可转化为证明 X 是仿射概形的情形. 不妨设 $X = \mathrm{Spec}R$, 那么如果 $f, g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong R$ 满足 $fg = 0$, 那么 $X = V(f) \cup V(g)$. 因为 X 是不可约的, 所以 $X = V(f)$ 或 $V(g)$. 不妨设 $X = V(f)$, 那么 $f \in N(R)$. 而 X 是约化概形表明 R 是约化环, 所以 $N(R) = 0$. 于是 $f = 0$, 因此 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong R$ 是整区.

最后说明当 X 满足任何非空开子集 U 都有 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 是整区时, X 是整概形. 这时 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 是约化环, 因此由前面证明的约化概形的刻画得到 X 是约化概形. 如果 X 不是不可约空间, 那么 X 存在两个非空开子集交集为空. 因为 X 是局部仿射的, 故可设这两个开子概形都是仿射的. 分别设为 U_1, U_2, 那么由层的粘接条件得到环同构 $\Gamma(U_1 \cup U_2, \mathcal{O}_X) \cong \Gamma(U_1, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U_2, \mathcal{O}_X)$. 于是 $\Gamma(U_1 \cup U_2, \mathcal{O}_X)$ 不是整区, 矛盾. □

Remark 3.10. 因为整区在任何乘闭子集处的局部化仍为整区, 所以仿射概形如果是整的, 它在每点处的茎是整区. 而概形是局部仿射的, 故考虑给定点处的仿射开子概形可得概形在每点处的茎是整区.

Corollary 3.11. 考虑仿射概形 $X = \mathrm{Spec}R$, 则 X 是整概形当且仅当 R 是整区.

Proof. 必要性由 [命题3.9] 以及 $R \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 立即得到. 现在验证充分性. 因为整区的素根为零理想, 也是素理想, 所以 X 是不可约空间. 对每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$, 有 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}$ 仍为整区. 故 X 是约化概形. □

Example 3.12. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上不可约仿射簇, 则其坐标环 $R = \mathcal{O}_X(X)$ 决定的仿射概形 $\mathrm{Spec}R$ 是整概形.

类似地, 可以仿射概形的约化性也可以由环的约化性刻画. 首先需要

Lemma 3.13. 设含幺交换环 R 是约化的, 则任何乘闭子集 S 满足 R_S 是约化环.

Proof. 如果 R_S 有幂零元 a/s, 则存在 $t \in R$ 和正整数 n 使得 $ta^n = 0$. 那么 ta 作为 R 的幂零元有 $ta = 0$, 于是 $a/s = ta/ts = 0$. 所以 R_S 也是约环环. □

Corollary 3.14. 考虑仿射概形 $X = \mathrm{Spec}R$, 则 X 是约化概形当且仅当 R 是约化环.

Proof. 必要性来自 [命题3.9], 下证充分性. 这时 [引理3.13] 表明 R 关于任何素理想处的局部化仍为约化环, 因此 [定理2.1] 保证了 $\mathcal{O}_X$ 在每个素理想处的茎是约化环. 故由约化概形的定义可知 X 是约化概形. □

Conclusion. 本节介绍了概形的一些拓扑性质与代数性质. 当考虑标准仿射概形 $\mathrm{Spec}R$ 时, 概形的拓扑性质退化到素谱 $\mathrm{Spec}R$ 的拓扑性质. 能够被一些满足 $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ 是 Noether 环的仿射开子概形 U_i 覆盖的概形 X 是局部 Noether 概形, 能被有限个满足该性质的仿射开子概形覆盖的概形是 Noether 概形. 在 [命题3.4] 中我们看到仿射概形 $\mathrm{Spec}R$ 是 Noether 概形等价于 R 是 Noether 环. 因为仿射簇的坐标环总是半素环, 自然可以考虑约化概形. 整概形是不可约的约化概形. [命题3.4] 表明概形 X 是约化概形当且仅当 X 任何开子集 U 上整体截面全体 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 是约化环. X 是整概形当且仅当 X 的任何非空开子集 U 满足 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 是整区. 这里要求 U 非空的原因是 $U = \varnothing$ 时, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 作为零环不是整区. 由此得到的 [推论3.11] 说 $\mathrm{Spec}R$ 是整概形当且仅当 R 是整区. 特别地, 仿射簇的坐标环决定的仿射概形总是整概形. 类似地, [推论3.14] 表明 $\mathrm{Spec}R$ 是约化概形当且仅当 R 是约化环.

4 仿射代数簇

本节固定域 $\Bbbk$. 因为任何 $\Bbbk$ 上仿射簇的坐标环是有限生成代数, 故可在 $\Bbbk$-概形范畴引入相应概念.

Definition 4.1. 设 (X, f) 是 $\Bbbk$-概形, 其中 $f : X \to \mathrm{Spec}\Bbbk$ 是结构态射. 如果 X 有仿射开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$ 满足每个仿射开子概形 U_i 作为 $\Bbbk$-仿射概形对应 $\Bbbk$ 上有限生成交换代数 (见 [定理2.16], 即 $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ 作为 $\Bbbk$-代数有限生成), 则称 X 是 $\Bbbk$ 上**局部有限型概形**. 如果进一步 X 拟紧, 则称 X 是 $\Bbbk$ 上**有限型概形**.

Remark 4.2. 域上的仿射概形是局部有限型当且仅当它是有限型.

Example 4.3. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇, 则其坐标环 $\mathcal{O}_X(X)$ 决定的仿射概形是有限型的.

Proposition 4.4. 设 $X = \mathrm{Spec}R$ 是 $\Bbbk$ 上仿射概形, 则 X 有限型概形当且仅当 R 是有限生成 $\Bbbk$-代数.

Proof. 充分性由定义立即得到. 必要性: 这时 $\mathrm{Spec}R$ 可由有限个有限生成 $\Bbbk$-代数 $\Gamma(U_i,\mathcal{O}_X)$ 的素谱覆盖. 因为 X 可由有限多个主开集 $X_{a_1}\cup X_{a_2}\cup\cdots\cup X_{a_m}$ 覆盖, 并且可设每个主开集含于某个 U_i, 那么由 [引理3.5] 的证明过程可知 $\Gamma(X_{a_j},\mathcal{O}_X)\cong R_{a_j}$ 是有限生成 $\Bbbk$-代数. 于是应用下面的 [引理4.6] 便得结果. □

Remark 4.5. 结合 [定理2.16] 立即得到 $\Bbbk$ 上有限生成交换代数范畴与 $\Bbbk$-有限型仿射概形范畴对偶.

Lemma 4.6. 设 $\Bbbk$-交换代数 R 的元素 $a_1,...,a_m$ 满足 $(a_1,...,a_m)=R$ 且每个 R_{a_j} 是有限生成 $\Bbbk$-代数. 那么 R 也是有限生成 $\Bbbk$-代数.

Proof. 由条件, 设 $1=b_1a_1+\cdots+b_ma_m$. 因为每个 R_{a_j} 是有限生成 $\Bbbk$-代数, 所以可设由 $c_{j1}/a_j^r,...,c_{jt}/a_j^r,1\leq t\leq l_j$, 其中 r 可选取不依赖于 j 的正整数. 考虑 R 中由所有 c_{ji},b_i,a_k 生成的 $\Bbbk$-子代数 A. 那么对每个 $b\in R$, 都存在充分大的正整数 N 使得 $a_j^Nb\in A$(考虑 R_{a_j} 中的元素 $b/1$). 注意到 $(a_1^N,a_2^N,...,a_m^N)=R$(转化为主开集便知), 所以 $A=R$. 这说明 R 是有限生成 $\Bbbk$-代数. □

通过 [定理2.16] 我们已经看到代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇范畴可忠实满地嵌入 $\Bbbk$-概形范畴. 每个仿射簇对应其坐标环决定的仿射概形. 现在我们可以在概形场景下给出仿射簇的定义.

Definition 4.7. 设 $\Bbbk$ 是域, 称 $\Bbbk$ 上有限型的约化仿射概形为**仿射代数簇**.

Remark 4.8. 结合 [定理2.16] 和 [推论3.14] 立即得到 $\Bbbk$ 上有限生成约化交换代数范畴和上述定义产生的 $\Bbbk$-仿射代数簇范畴间有范畴对偶. 如果这时 $\Bbbk$ 是代数闭域, 该范畴对偶诱导 $\Bbbk$ 上经典仿射簇范畴与 $\Bbbk$-仿射代数簇范畴的范畴等价. 域 $\Bbbk$ 上有限型的整仿射概形范畴同样与 $\Bbbk$-有限生成整区范畴间有范畴对偶 ([推论3.11]).

Conclusion. 本节首先介绍域上局部有限型概形和有限型概形的概念, 有限型概形是拟紧的局部有限型概形. 因此当考虑的概形是仿射概形时, 其局部有限型性质与有限型性质等价. [命题4.4] 表明域 $\Bbbk$ 上仿射概形 $\mathrm{Spec}R$ 是有限型的当且仅当 R 是 $\Bbbk$ 上有限生成交换代数. 事实上, 在 [定理2.16] 中我们就已经看到 $\Bbbk$ 上交换代数范畴和 $\Bbbk$-仿射概形范畴间有范畴对偶 $H:\Bbbk\textbf{-CAlg}\to\Bbbk\textbf{-AffSch}$, 因此考虑 H 在有限生成交换代数范畴上的限制可得到 $\Bbbk$ 上有限生成交换代数范畴与 $\Bbbk$-有限型仿射概形范畴对偶. 若进一步限制该范畴对偶到有限生成约化交换代数范畴, 则可得 $\Bbbk$-有限生成约化交换代数范畴和 $\Bbbk$-仿射代数簇范畴 (在 [定义4.7] 的意义下). 特别地, 如果 $\Bbbk$ 是代数闭域, 那么 [定义4.7] 产生的仿射代数簇范畴与经典的仿射簇范畴是范畴等价的. 现设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 则有下述范畴间的关系, 其中竖向箭头为自然的范畴嵌入 (忠实满函子), 横向双向箭头表示范畴对偶 (代数范畴与概形范畴间的范畴对偶不需要 $\Bbbk$ 是代数闭域就能保证, 见 [定理2.16]).

$$
\begin{tikzcd}
 & \Bbbk\text{-交换代数范畴} \arrow[r, leftrightarrow] & \Bbbk\text{-仿射概形范畴} \\
\Bbbk\text{-仿射簇范畴} \arrow[r, leftrightarrow] & \Bbbk\text{-有限生成约化交换代数范畴} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[u] & \Bbbk\text{-仿射代数簇范畴} \arrow[u] \\
\Bbbk\text{-不可约仿射簇范畴} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[u] & \Bbbk\text{-有限生成整区范畴} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[u] & \Bbbk\text{-有限型整仿射概形范畴} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

参考文献

[GW20] U. Görtz and T. Wedhorn. *Algebraic Geometry I: Schemes*. Springer Spektrum Wiesbaden, 2020.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 1977.