

# Goldie 定理

戚天成 

复旦大学 数学科学学院

2025 年 11 月 30 日

这份笔记主要记录了我在 2023 年 4 月中旬的几天所学习的 Goldie 定理基础知识，主要参考材料是 [?]. Goldie 定理 (见 [定理2.14]) 是研究非交换 Noether 环的重要工具，它由 Alfred Goldie(英国, 1920-2005) 于上个世纪 50 年代证明 (见 [?]-[?]), Goldie 也因他的杰出理论被人称为 “Lord of the Rings” . Goldie 通过引入一致模、一致维数以及 Goldie 环的概念发展了他的理论，右 Goldie 环是右 Noether 环以及素 PI 环的推广 (见 [例2.3] 和 [推论2.7]). Goldie 定理表明一个含幺环  $R$  的右商环  $Q$ (即  $R$  关于全体正则元构成的乘闭子集  $S$  的右局部化  $R_S$ ) 存在且为 Artin 半单环的充要条件是  $R$  是半素右 Goldie 环. 也就是说，Goldie 成功刻画了那些右商环存在且商环 Artin 半单的那些环. 更进一步，含幺环  $R$  的右商环存在且为 Artin 单环的充要条件是  $R$  是素右 Goldie 环. 让我们先一瞥 Goldie 定理：对一个含幺环，以下四条等价：

- $R$  是半素右 Goldie 环.
- $R$  半素，右奇异理想  $\zeta(R) = 0$  且  $R$  具有有限右一致维数.
- $R$  满足对任何右理想  $I$ ,  $I$  是本质右理想的充要条件是  $I$  含某个  $R$  中正则元.
- $R$  的右商环  $Q$  存在且是 Artin 半单环.

素 PI 环 (例如整区)，半素右 Noether 环都是特殊的半素右 Goldie 环. 这份笔记主要由以下三部分构成：

(1) 基础知识回顾，内容涵盖本质子模、一致子模、相关素理想、一致维数的概念与基本性质以及非交换局部化的知识回顾. 其中本质子模、一致模和一致维数的部分是学习 Goldie 定理的必须材料，非交换局部化与相关素理想中介绍的内容基本不会在 Goldie 定理证明中用到，但至少需要知道一个含幺环关于乘闭子集可作局部化的充要条件，因此初次阅读可先跳过局部化与相关素理想的小节.

(2) Goldie 环的概念与证明 Goldie 定理. 我们会看到 Noether 环与素 PI 环都是 Goldie 环.

(3) Goldie 理论在非交换代数中的基本应用 (例如 Small 定理 [推论3.27] 和 Jategaonkar 主理想定理 [定理3.29]).

由于水平有限，虽然我全力以赴，但还是无法避免笔记中存在不足与错误，欢迎大家指出！

# 目录

<b>1 预备基础</b>	<b>3</b>
1.1 本质子模 . . . . .	3
1.2 一致模 . . . . .	4
1.3 局部化：回首基本概念 . . . . .	6
1.4 局部化：无挠与内射性 . . . . .	16
1.5 一致维数：基本概念 . . . . .	21
1.6 相关素理想 . . . . .	22
1.7 一致维数：通用性质 . . . . .	26
<b>2 Goldie 定理</b>	<b>32</b>
2.1 Goldie 环 . . . . .	32
2.2 Goldie 定理 . . . . .	33
2.3 Order 理论初步 . . . . .	36
<b>3 Goldie 理论的应用</b>	<b>44</b>
3.1 Noether PI 蕴含 FBN . . . . .	44
3.2 Small 定理 . . . . .	48
3.3 Jategaonkar 主理想定理 . . . . .	52
3.4 Maximal orders . . . . .	54
3.5 Jacobson 环 . . . . .	59

# 1 预备基础

## 1.1 本质子模

本节先回顾一些关于本质子模的基本事实,所有的提及的概念和引理都会在之后用到.

回忆模  $M$  的子模  $N$  被称为**本质子模**,如果  $M$  的任何非零子模  $X$  满足  $X \cap N \neq 0$ .当  $N$  是  $M$  的本质子模时,也称  $M$  是  $N$  的**本质扩张**,记作  $N \trianglelefteq_e M$ .若含幺环  $R$  的右理想  $I$  作为子模是本质的,称  $I$  是  $R$  的**本质右理想**.例如素环  $R$  的任何非零双边理想  $I$  一定是本质右理想(Goldie 定理的证明中会应用它).

**Example 1.1.** 设  $R$  是 Artin 半单环(例如域上矩阵代数),那么  $R$  的本质右理想只有  $R$ .

*Proof.* 设  $I$  是  $R$  的本质右理想,那么由  $R_R$  是完全可约模得到  $I_R$  是  $R_R$  的直和因子.所以如果  $I \neq R$ ,通过考察  $I$  作为右  $R$ -模的直和补可知  $I$  和某个非零右理想之交为零.这迫使  $I = R$ .  $\square$

**Lemma 1.2.** 设  $N$  是含幺环  $R$  的幂零理想,则它的左零化子  $\text{lann}N = \{a \in R | aN = 0\}$  是  $R$  的本质右理想.

*Proof.* 不妨设  $N \neq 0$ ,任取非零右理想  $X$ ,取自然数  $k$  使  $XN^k \neq 0, XN^{k+1} = 0$ ,那么  $XN^k \neq 0 \subseteq \text{lann}N \cap X$  表明  $\text{lann}N$  是  $R$  的本质右理想.  $\square$

关于本质子模,这里列出一些基本结论,注意下述引理的最后一个结论也给了我们一个含幺环  $R$  是 Artin 半单环的刻画——本质右理想只有自身的环. 我们会在 Goldie 定理的证明过程中应用这一观察.

**Lemma 1.3.** 设  $R$  是含幺环,  $M$  是右  $R$ -模,那么

- (1)(传递性) 若  $P$  是  $M$  的本质子模,  $N$  是  $P$  的本质子模,则  $N$  是  $M$  的本质子模.
- (2)(取交封闭) 设  $N_1, N_2$  均为  $M$  的本质子模,那么  $N_1 \cap N_2$  也是  $M$  的本质子模.
- (3) 设  $N$  是  $M$  的本质子模,  $x \in M$ ,记  $x^{-1}N = \{a \in R | xa \in N\}$ ,那么  $x^{-1}N$  是  $R$  的本质右理想.
- (4)(有限直和保本质) 设  $N_i \trianglelefteq_e M_i, i = 1, 2, \dots, t$ ,则  $\bigoplus_{i=1}^t N_i \trianglelefteq_e \bigoplus_{i=1}^t M_i$ .
- (5) 任给  $M$  的子模  $N$ ,存在  $M$  的子模  $N'$  使得  $N \cap N' = 0$  且  $N \oplus N' \trianglelefteq_e M$ .
- (6)(基座的本质子模刻画) 称  $M$  全体不可约子模之和为  $M$  的**基座**(socle),记为  $\text{soc}M$ .如果  $M$  不存在不可约子模,那么定义  $\text{soc}M = 0$ .关于模的基座,有  $\text{soc}M$  是  $M$  全体本质子模之交.特别地,  $M = \text{soc}M$  等价于  $M$  是仅有的本质子模.因此对非零模  $M$  而言,  $M$  的本质子模只有自己的充要条件是  $M$  是完全可约模.

*Proof.* (1) 和 (2) 通过定义不难得到.下证 (3).任取  $R$  的非零右理想  $I$ ,如果  $xI = 0$ ,那么  $I \subseteq x^{-1}N$ .否则  $xI$  作为  $M$  的非零子模与  $N$  之交非零,由此可知  $x^{-1}N \cap I \neq 0$ .这就得到了 (3).对 (4),只需验证  $t = 2$  时结论成立再归纳地容易完成证明.现在说明  $N_1 \oplus N_2$  是  $M_1 \oplus M_2$  的本质子模.任取  $M_1 \oplus M_2$  的子模  $Z \neq 0$ ,不妨设  $Z$  中有元素  $(z_1, z_2)$  满足  $z_1, z_2 \neq 0$ ,那么存在  $a \in R$  使得  $z_1a \neq 0 \in N_1$ .如果这时  $z_2a = 0$ ,那么  $(z_1, z_2)a \neq 0 \in N_1 \oplus N_2$ .否则,对  $z_2a \neq 0 \in M_2$ ,存在  $b \in R$  使得  $z_2ab \neq 0 \in N_2$ ,于是便得到了 (4).

现在说明 (5).作  $\mathcal{S} = \{X | X \text{是 } M \text{ 子模且 } X \cap N = 0\}$ ,这是关于包含关系的非空偏序集,它任何全序子集有上界,故应用 Zorn 引理可得  $\mathcal{S}$  的极大元  $N'$ ,易见  $N \cap N' = 0$  且  $N \oplus N' \trianglelefteq_e M$ .

最后验证 (6). $M$  的不可约子模必定含于每个本质子模内,因此若记  $T$  是  $M$  全体不可约子模之和,立即有  $T \subseteq \text{soc}M$ .不妨设  $\text{soc}M \neq 0$ ,我们通过说明基座是完全可约模来得到  $\text{soc}M \subseteq T$ .任取  $\text{soc}M$  的子模  $S$ ,应用 (5) 知存在  $M$  的子模  $C$  使得  $S \oplus C$  是  $M$  的本质子模,所以  $\text{soc}M = S \oplus (C \cap \text{soc}M)$ ,故  $\text{soc}M$  完全可

约. 由此得到  $T = \text{soc}M$ , 即基座作为  $M$  所含的最大完全可约子模是全体本质子模之交. 那么  $\text{soc}M = M$  等价于  $M$  的本质子模只有自己, 而前者等价于  $M$  是完全可约模.  $\square$

其中 [引理1.3(4)] 也告诉我们取内射包跟有限直和可交换.

**Corollary 1.4.** 设  $M_1, \dots, M_n$  是右  $R$ -模, 则  $E(M_1 \oplus \dots \oplus M_n) \cong E(M_1) \oplus E(M_2) \oplus \dots \oplus E(M_n)$ .

*Proof.* 对每个  $1 \leq i \leq n$ , 有  $M_i \trianglelefteq_e E(M_i)$ , 所以  $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$  是  $E(M_1) \oplus E(M_2) \oplus \dots \oplus E(M_n)$  的本质子模, 而  $E(M_1) \oplus E(M_2) \oplus \dots \oplus E(M_n)$  作为内射模的有限直和是内射的, 因此  $E(M_1) \oplus E(M_2) \oplus \dots \oplus E(M_n)$  是  $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$  的内射包.  $\square$

在上述 [引理1.3(5)] 中, 我们看到  $\mathcal{S} = \{X | X \text{是 } M \text{ 子模且 } X \cap N = 0\}$  的极大元总存在, 如果  $N'$  是极大元, 那么称  $N'$  是  $N$  在  $M$  中的补. 如果  $M$  的子模  $X$  是某个子模在  $M$  中的补, 称  $X$  是  $M$  的补子模.

**Lemma 1.5.** 设  $N$  是  $M$  中的补子模且  $M$  的子模  $N' \supseteq N$ . 那么  $N'$  存在非零子模  $Y$  使得  $Y \cap N = 0$ .

*Proof.* 设  $N$  是  $X$  在  $M$  中的补, 那么  $N' \cap X \neq 0$ , 取  $Y = N' \cap X$  即可.  $\square$

由此可知, 若模  $M$  有子模  $X \subsetneq Y$  使得  $X$  是  $Y$  的直和因子, 设为  $Y = X \oplus X'$ , 若  $Y$  有补子模  $C$ , 则  $X' \oplus C$  是  $X$  的补子模. 也就是说这时可选取  $Y$  的补子模  $C$  以及  $X$  的补子模  $C'$  使得  $C \subsetneq C'$ .

对含幺环  $R$ , 记  $\mathcal{F}(R)$  是  $R$  所有本质右理想构成的集合, 那么 [引理1.3(1)(2)(3)] 表明

$$\zeta(R) = \{a \in R | \text{存在 } E \in \mathcal{F}(R) \text{ 使得 } aE = 0\}$$

是  $R$  的理想, 称为  $R$  的右奇异理想 (right singular ideal). 我们以后会说明满足右零化子升链条件的环, 它的右奇异理想是幂零的 (见 [引理2.11]), 进而知满足右零化子升链条件的半素环的右奇异理想是零.

## 1.2 一致模

本节我们先介绍一致模, 它是满足任意两个非零子模之交非零的模, 随后说明不含非零子模无限直和的模  $M$  一定包含某个一致模 (见 [引理1.83]), 并且这样的  $M$  一定会含有一个本质子模可表示为有限个一致模的直和 (见 [引理1.84]). 我们将证明, 这样的本质子模, 它的有限一致子模直和分解的直和项数目是固定的 (见 [定理1.85]), 由此导出模的一致维数的概念, 这是定义右 Goldie 环的必要基础.

**Definition 1.6 (一致模).** 称非零模  $U$  是一致的 (uniform), 如果  $U$  所有非零子模都是  $U$  的本质子模.

不可约模明显是一致的, 反之不然 (例如  $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ ). 根据定义也可以看到一致模的非零子模仍是一致子模. 我们指出模的一致性有下面的内部刻画, 由此可见  $R$  的一致右理想  $I \neq 0$  满足存在  $a, b \neq 0 \in I$  使  $ab \neq 0$ .

**Lemma 1.7.** 设  $U$  是非零右  $R$ -模, 则以下三条等价. (1)  $U$  是一致的. (2)  $U$  不包含一些 (至少两个) 非零子模的直和. (3) 任给非零元  $u_1, u_2 \in U$ , 存在  $r_1, r_2 \in R$  使得  $u_1r_1 = u_2r_2 \neq 0$ .

*Proof.* (1) 明显蕴含 (2), 要看到 (2) 蕴含 (1), 只需对  $U$  的每个非零子模  $X$  应用 [引理1.3(5)] 得到  $X$  是本质子模, 即  $U$  是一致模. (1) 和 (3) 的等价性是明显的.  $\square$

**Proposition 1.8.** 设右  $R$ -模  $U$  是一致的, 那么其内射包  $E(U)$  是不可分内射模. 反之, 任何不可分内射模  $M$  都是一致模. 因此非零模  $U$  是一致模当且仅当内射包  $E(U)$  是不可分内射模.

*Proof.* 否则, 存在非零子模  $W_1, W_2$  使  $E(U) = W_1 \oplus W_2$ , 于是  $W_1 \cap U \neq 0, W_2 \cap U \neq 0$ , 进而它们作为  $U$  非零子模的交  $(W_1 \cap U) \cap (W_2 \cap U) \neq 0$ , 这与  $W_1 \cap W_2 = 0$  矛盾. 现设  $M$  是不可分内射模, 那么  $M$  的任何非零子模  $M'$  满足  $M = E(M')$ . 这说明  $M$  的任何非零子模  $M'$  都是  $M$  的本质子模, 故  $M$  是一致模.  $\square$

回忆非零模  $M_R$  被称为强不可分模, 如果  $\text{End}M_R$  是局部环. 内射模的不可分性有如下刻画.

**Theorem 1.9.** 设  $R$  是含幺环, 非零模  $M$  是内射右  $R$ -模, 那么以下等价:

- (1)  $M$  是不可分模.
- (2) 对  $M$  的任何非零子模  $M'$  有  $M = E(M')$ .
- (3)  $M$  是一致模.
- (4) 存在一致模  $U_R$  使得  $M = E(U)$ .
- (5)  $M$  是强不可分模.

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2): 这时对非零子模  $M'$  有  $E(M')$  是  $M$  的内射子模, 所以由  $M$  的不可分性迫使  $M = E(M')$ . (2) $\Rightarrow$ (3) 来自一致模和内射包的定义. (3) $\Rightarrow$ (4): 取  $U = M$  即可. (4) $\Rightarrow$ (5): 需证  $\text{End}M_R$  是局部环, 为此只需验证任意两个不可逆元素之和依然不可逆. 任取不可逆元  $f, g \in \text{End}M_R$ . 首先说明  $\text{Ker}f \neq 0$ : 若不然, 设  $\text{Ker}f = 0$ , 那么  $M \cong \text{Im}f$ , 于是  $\text{Im}f$  作为  $M$  的内射子模是  $M$  的直和因子 (因为  $f$  不是同构所以  $\text{Im}f$  是真子模). 设一致模  $U_R$  使得  $M = E(U)$ , 那么  $U$  可以表示为两个非零子模的直和, 这与  $U$  是一致模矛盾. 由此知  $\text{Ker}f \neq 0$ , 同理  $\text{Ker}g \neq 0$ . 因此  $\text{Ker}f$  与  $\text{Ker}g$  和  $U$  的交集都是非零模. 现在

$$\text{Ker}(f + g) \supseteq (\text{Ker}f \cap U) \cap (\text{Ker}g \cap U) \neq 0,$$

因此  $f + g$  不是同构, 这说明  $f + g$  是  $\text{End}M_R$  中不可逆元.  $\square$

**Remark 1.10.** 交换仿射代数上的强不可分内射模一般不是有限维模. 例如域  $\mathbb{k}$  上多项式代数  $R = \mathbb{k}[x]$  有不可分内射模  $Q = \mathbb{k}(x)$ ,  $Q$  是无限维模 (并且当  $\mathbb{k}$  是无限域时易见  $Q$  不是有限生成  $R$ -模).

**Example 1.11.** 因为不可约模是一致的, 所以不可约模的内射包总是 (强) 不可分内射模.

利用 Bass-Papp 定理可以得到 Noether 环上的内射模总能够分解为一些不可分内射模的直和.

**Proposition 1.12.** 设  $R$  是右 Noether 环, 那么任何内射右  $R$ -模  $M$  是一些不可分内射模的直和.

*Proof.* 注意任何非零内射模  $E_R$  必定存在 (非零) 不可分内射子模, 因为取  $x \neq 0 \in E$ , 考虑内射包  $E(xR) \subseteq E$ , 我们用反证法说明  $E(xR)$  含有不可分内射子模. 若不然, 则存在非零真内射子模  $I_{11}, I_{12}$  使得  $E(xR) = I_{11} \oplus I_{12}$ ,  $I_{11}$  不是不可分内射子模表明存在  $I_{11}$  的非零真内射子模  $I_{21}, I_{22}$  使得  $I_{11} = I_{21} \oplus I_{22}$ , 如此继续, 递归地可得到非零内射子模序列  $\{I_{k1}\}_{k \geq 1}$  以及  $\{I_{k2}\}_{k \geq 1}$  使得  $I_1 = I_{11} \oplus I_{12}, I_{k1} = I_{k+1,1} \oplus I_{k+1,2}, \forall k \geq 1$ . 易见

$$I_1 = I_{12} \oplus I_{22} \oplus \cdots \oplus I_{n2} \oplus I_{n1}, \forall n \geq 1.$$

所以我们有  $E(xR)$  的子模严格升链  $I_{12} \subsetneq I_{12} \oplus I_{22} \subseteq I_{12} \oplus I_{22} \oplus I_{32} \subsetneq \cdots$ , 它诱导  $xR$  的子模严格升链

$$I_{12} \cap xR \subsetneq (I_{12} \oplus I_{22}) \cap xR \subseteq (I_{12} \oplus I_{22} \oplus I_{32}) \cap xR \subsetneq \cdots$$

这与  $xR$  是 Noether 模矛盾. 因而  $E(xR)$  有不可分内射子模, 这也说明  $E$  有不可分内射子模. 现在我们说明内射模  $M$  是一些不可分内射模的直和. 不妨设  $M \neq 0$ , 考虑集合

$$S = \{\{M_i\}_{i \in \Lambda} \mid \{M_i\}_{i \in \Lambda} \text{ 是 } M \text{ 的不可分内射子模族且 } \sum_{i \in \Lambda} M_i = \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i\}$$

那么根据前面的讨论知道  $(S, \subseteq)$  是非空偏序集, 可直接验证它任何全序子集有上界, 所以应用 Zorn 引理知  $S$  有极大元  $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ . 依 Bass-Papp 定理, 右 Noether 环上任何一族内射右模的直和仍内射, 所以  $\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$  是  $M$  的直和因子, 设为  $M = E \oplus (\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i)$ , 假设  $E \neq 0$ , 则由前面的讨论知道  $E$  有不可分内射子模, 这会与子模族  $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$  的极大性矛盾, 所以  $E = 0$ , 从而  $M = \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$ .  $\square$

**Corollary 1.13.** 设  $R$  是右 Noether 环,  $M_R$  有限生成. 那么  $E(M)$  是有限多个不可分内射模的直和.

*Proof.* 根据 [命题1.12],  $E(M)$  可分解为一些不可分内射模的直和, 设为  $E(M) = \bigoplus_{i \in \Gamma} E_i$ , 那么存在有限多个  $i_1, \dots, i_m \in \Gamma$  使得  $M \subseteq E_{i_1} \oplus \dots \oplus E_{i_m}$ . 注意  $M \trianglelefteq_e E(M)$ , 所以也有  $M \trianglelefteq_e E_{i_1} \oplus \dots \oplus E_{i_m}$ . 这说明

$$E(M) = E_{i_1} \oplus \dots \oplus E_{i_m}.$$

$\square$

**Remark 1.14.** 例如对  $R$  的素理想  $P$ , 取  $M = R/P$ , 那么  $E(R/P)$  可分解为有限多个不可分内射模的直和. 之后得到 Goldie 定理后我们会看到该不可分内射模的直和分解中所有的直和项两两同构 (见 [命题3.7]).

### 1.3 局部化：回首基本概念

本节简要回顾非交换环与其上模的局部化构造和基本性质. 先回忆右局部化的定义.

**Definition 1.15.** 设  $R$  是含幺环,  $S$  是  $R$  的一个乘闭子集, 称二元组  $(R_S, \lambda)$  (其中  $R_S$  是环,  $\lambda : R \rightarrow R_S$  是环同态) 是  $R$  关于  $S$  的右局部化, 如果满足:

- (1) 任给  $s \in S$ ,  $\lambda(s)$  在  $R_S$  中可逆;
- (2) 每个  $R_S$  中元素可表为  $\lambda(a)\lambda(s)^{-1}$  的形式;
- (3)  $\text{Ker } \lambda = \{a \in R \mid \text{存在 } s \in S \text{ 使得 } as = 0\}$ .

**Remark 1.16.** 局部化本身是从  $R$  出发构造一个“更大”的环让乘闭子集  $S$  中元素均成为可逆元, 因此 (1) 的要求是自然的. 这里的定义 (2)-(3) 在交换层面是交换局部化的直接事实. 我们可以这么理解定义中的 (3): 如果右局部化存在, 我们把  $R_S$  中的元素  $\lambda(a)\lambda(s)^{-1}$  形式上写作  $a/s$ , 那么  $\lambda(a) = a/1$ .  $R_S$  的零元应当是  $0/1$ , 因此  $a \in \text{Ker } \lambda$  应当意味着在  $R_S$  中  $a/1 = 0/1$ . 因此应当在“适当通分”后分子分母相同. 即存在  $u \in R$  和  $v \in R$  使得  $au = 0v = 0$ ,  $u = 1u = 1v = v \in S$ . 故  $a \in \text{Ker } \lambda \Leftrightarrow$  存在  $s \in R$  使得  $as = 0$ . 我们也指出这里的右局部化  $R_S$  即便存在也有可能是零环 (这是交换代数中的共识), 易见  $R_S = 0$  当且仅当  $0 \in S$ .

回忆含幺环  $R$  的一个乘闭子集  $S$  被称为右 **Ore 集**, 如果对任何  $a \in R, s \in S$ , 有  $sR \cap aS \neq \emptyset$ . 容易验证当右局部化  $R_S$  存在时,  $S$  必为右 Ore 集. 如果  $S$  是  $R$  的右 Ore 集, 那么对任何右  $R$ -模  $M$ ,  $M$  的  $S$ -挠部分  $t_S(M) = \{x \in M \mid \text{存在 } s \in S, \text{ 使得 } xs = 0\}$  是  $M$  的子模. 原因是对每个  $x_1, x_2 \in t_S(M)$ , 设  $s_1, s_2 \in S$  使  $x_1s_1 = x_2s_2 = 0$ . 因为  $S$  满足右 Ore 条件, 存在  $a \in R, t \in S$  使得  $s_1a = s_2t = u \in S$ , 从而  $x_1u = x_2u = 0$ ,

即  $(x_1 - x_2)u = 0$ , 所以  $x_1 - x_2 \in t_S(M)$ . 下面再说明  $x_1r \in t_S(M), \forall r \in R$ . 同样由右 Ore 条件, 存在  $b \in R, v \in S$  使  $s_1b = rv$ , 于是  $x_1rv = 0$ . 这就说明了  $t_S(M)$  是  $M$  的  $R$ -子模. 进而知含幺环  $R$  的右 Ore 集  $S$  满足  $R$  上任何右模的  $S$ -挠部分仍为子模. 有时也称  $t_S(M)$  是  $M$  关于  $S$  的挠子模 (一些文献中记作  $\text{ass}_M S$ ). 特别地,  $t_S(R) = \{a \in R | \text{存在 } s \in S \text{ 使得 } as = 0\}$  是  $R$  的右理想, 故  $t_S(R)$  是  $R$  的理想 (容易验证当右局部化  $R_S$  存在时,  $\bar{S} \subseteq \bar{R} = R/t_S(R)$  中元素均为正则元). 事实上, 如果含幺环  $R$  的乘闭子集  $S$  满足对任何右  $R$ -模  $M$ , 集合  $t_S(M) = \{x \in M | \text{存在 } s \in S, \text{ 使得 } xs = 0\}$  总是子模, 那么  $S$  必定满足右 Ore 条件, 即我们有:

**Proposition 1.17.** 对含幺环  $R$  以及乘闭子集  $S$ ,  $S$  满足右 Ore 条件  $\Leftrightarrow$  任何右  $R$ -模  $M$  满足  $t_S(M)$  是子模.

*Proof.* 前面已经证过必要性. 充分性: 设所有右  $R$ -模  $M$  满足  $t_S(M)$  是子模, 我们需要说明对每个  $a \in R, s \in S$  有  $aS \cap sR \neq \emptyset$ . 考虑右  $R$ -模  $M = R/sR$ , 那么  $\bar{1} \in t_S(M)$ , 于是由  $t_S(M)$  是子模知  $t_S(M) = M$ , 故对  $\bar{a} \in M$ , 存在  $t \in S$  使得  $at \in sR$ , 得证.  $\square$

回忆非交换环局部化理论的基本结果是: 对含幺环  $R$  以及一个乘闭子集  $S$ , 右 (经典) 商环  $(R_S, \lambda)$  存在的充要条件是  $S$  是右 Ore 集且  $\bar{S} = \{s + t_S(R) | s \in S\}$  中元素均为  $\bar{R} = R/t_S(R)$  中的正则元. 我们指出, 当  $S$  满足右 Ore 条件时,  $\bar{S}$  的正则性条件可以被替换成 (这也是更容易验证的条件):

**Lemma 1.18.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右 Ore 集, 则  $\bar{S} \subseteq \bar{R} = R/t_S(R)$  是由一些正则元构成的充要条件是对任何  $a \in R, s \in S$ , 如果  $sa = 0$ , 那么存在  $t \in S$  使得  $at = 0$ .

*Proof.* 必要性: 当  $sa = 0$  时, 在  $\bar{R}$  中  $\bar{a} = 0$ , 进而存在  $t \in S$  使得  $at = 0$ . 充分性: 首先  $\bar{S}$  中元素总是  $\bar{R}$  中的左正则元, 故只需验证每个  $\bar{s} \in \bar{S}$  均为右正则元. 设  $a \in R$  使得  $sa \in t_S(R)$ , 那么存在  $u \in S$  使得  $sau = 0$ , 对  $au \in R$  再次使用条件, 得存在  $v \in S$  使得  $auv = 0$ , 因此取  $t = uv \in S$ , 便有  $at = 0$ .  $\square$

**Remark 1.19.** 因此  $\bar{S}$  是  $\bar{R}$  中一些正则元构成的充要条件是  $R$  中每个可以被  $S$  中元素  $s$  左乘零化的元素  $a$ , 都可以被  $S$  中某个元素  $t$  右乘零化. 总而言之, 要使  $R$  关于乘闭子集  $S$  的右局部化  $R_S$  存在, 本质上只要满足:

- 每个“左分式”  $s^{-1}a (a \in R, s \in S)$  都可以调整成“右分式”  $bt^{-1}$ , 即  $s^{-1}a = bt^{-1}$ , 整理即得右 Ore 条件.
- 对  $a \in R$ ,  $a$  能被  $S$  中某元素“左零化”蕴含  $a$  能被  $S$  中某元素“右零化”.

**Example 1.20** (斜 Laurent 多项式环). 设  $R$  是含幺环,  $\sigma : R \rightarrow R$  是环同构. 考虑加法群自同态环  $\text{End}(R^{\mathbb{Z}}, +)$  中的元素  $x : (r_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (\sigma(r_{i-1}))_{i \in \mathbb{Z}}$  以及  $x^{-1} : (r_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (\sigma^{-1}(r_{i+1}))_{i \in \mathbb{Z}}$ , 易验证这两个元素互为逆元. 再将  $R$  上元素的左乘变换到  $\text{End}(R^{\mathbb{Z}}, +)$  的标准嵌入视作等同. 记  $R[x, x^{-1}; \sigma]$  是  $x, x^{-1} R$  在  $\text{End}(R^{\mathbb{Z}}, +)$  中生成的子环, 称为  $R$  上斜 Laurent 多项式环. 它是自由  $R$ -模, 有基  $\{x^k | k \in \mathbb{Z}\}$  (考察作为  $R^{\mathbb{Z}}$  上加法自同态在集中于 0 次位置是 1 的数组上的作用) 且满足  $xa = \sigma(a)x, \forall a \in R$ . 当  $\sigma = \text{id}$  时, 这里的斜 Laurent 多项式环就是通常的 Laurent 多项式环. 利用  $\sigma$  是同构易验证  $R[x; \sigma]$  的乘闭子集  $S = \{x^k | k \in \mathbb{N}\}$  是右分母集且  $R[x; \sigma]_S \cong R[x, x^{-1}; \sigma]$ . 于是可应用之后介绍的 [命题 1.51] 得到当  $R$  是右 Noether 环时, 斜 Laurent 多项式环  $R[x, x^{-1}; \sigma]$  也是右 Noether 环.

**Example 1.21.** 设  $R$  是含幺环, 若乘闭子集  $S \subseteq Z(R)$ , 那么  $R_S$  存在. 这时设  $\lambda : R \rightarrow R_S$  是局部化映射, 那么对  $a, b \in R, s, t \in S$ ,  $\lambda(a)\lambda(s)^{-1} = \lambda(b)\lambda(t)^{-1}$  当且仅当存在  $u \in S$  使得  $(at - sb)u = 0$ . 若进一步  $S$  是由

$R$  的一些中心正则元构成的乘闭子集, 那么  $\lambda$  是单射, 这时  $as^{-1} = bt^{-1}$  的充要条件是  $at = sb$ . 并且与交换情形一样, 对含于中心的乘闭子集  $S$ , 对  $R$  的任意真理想  $I$ , 记  $\bar{S}$  是  $S$  对应于  $R/I$  中的乘闭子集, 那么

$$\varphi : (R/I)_{\bar{S}} \rightarrow R_S/I_S, (a+I)(s+I)^{-1} \mapsto as^{-1} + I_S$$

是定义合理的环同构, 即这时关于理想作商和对中心乘闭子集作局部化可交换.

**Remark 1.22.** 这里指出如果含幺环  $R$  作为中心  $Z = Z(R)$  上的模是有限生成模或者  $R$  是素环, 那么任何中心乘闭子集  $S \subseteq Z$ (默认  $0 \notin S$ ) 满足  $R_S$  的中心就是  $Z_S$ . 当  $R$  是素环时,  $Z$  是整区, 易验证局部化映射  $\lambda : R \rightarrow R_S$  是单射, 由此易得  $Z(R_S) = Z_S$ . 如果  $R_Z$  是有限生成模, 可设  $a_1, \dots, a_m \in R$  满足  $R = Za_1 + \dots + Za_m$ . 任取  $\lambda(a)\lambda(s)^{-1} \in Z(R_S)$ , 有  $\lambda(a)\lambda(b) = \lambda(b)\lambda(a), \forall b \in R$ . 因此对每个正整数  $1 \leq j \leq m$ , 存在  $s_j \in S$  使得  $(aa_j - a_ja)s_j = 0$ . 那么  $as_1 \cdots s_m \in Z$ . 因此  $\lambda(a)\lambda(s)^{-1} = \lambda(as_1 \cdots s_m)\lambda(ss_1 \cdots s_m)^{-1} \in Z_S$ .

含幺交换环在乘闭子集处局部化的素谱会与该环素谱中和乘闭子集不相交的素理想子集间有天然双射. 含幺环在中心乘闭子集处的局部化仍保留这一性质(若  $S$  仅要求是正规正则元构成, 结论未必成立, [注记1.54]).

**Proposition 1.23.** 设  $R$  是含幺环, 若乘闭子集  $S \subseteq Z(R)$ , 那么有双射

$$\varphi : \{P \in \text{Spec}R | P \cap S = \emptyset\} \rightarrow \text{Spec}R_S, P \mapsto P_S,$$

其中  $P_S = \{\lambda(p)\lambda(s)^{-1} | p \in P, s \in S\}$ , 这里  $\lambda : R \rightarrow R_S$  是局部化映射.  $\varphi$  的逆映射将每个  $R_S$  的素理想  $\mathfrak{q}$  映至  $\{a \in R | \exists s \in S \text{ 使得 } \lambda(a)\lambda(s)^{-1} \in \mathfrak{q}\}$ . 如果赋予  $\{P \in \text{Spec}R | P \cap S = \emptyset\}$  素谱  $\text{Spec}R$  上 Zariski 拓扑的子空间拓扑、 $\text{Spec}R_S$  上 Zariski 拓扑, 则双射  $\varphi$  给出同胚.

*Proof.* 任取  $R$  的素理想  $P$ , 并设  $P \cap S = \emptyset$ . 易验证  $P_S$  是  $R_S$  的理想, 下证  $P_S$  是真理想. 如果存在  $p \in P, s \in S$  使得  $\lambda(1) = \lambda(p)\lambda(s)^{-1}$ , 那么存在  $u \in S$  使得  $(p-s)u = 0$ . 进而  $us \in P$ , 这和  $P \cap S = \emptyset$  矛盾. 再说明  $P_S$  是  $R_S$  的素理想. 任何  $R_S$  中理想都具备  $I_S$  的形式, 这里  $I$  是  $R$  的理想, 所以只需验证若  $R$  的理想  $I, J$  满足  $I_S J_S \subseteq P_S$ , 则  $IJ \subseteq P$  即可. 利用  $S \subseteq Z(R)$  易验证任何  $a \in IJ$  满足存在  $s \in S$  使得  $as \in P$ . 于是  $aRs \subseteq P$ , 因此  $P$  是素理想以及  $s \notin P$  蕴含  $a \in P$ , 这说明  $IJ \subseteq P$ . 以上讨论表明  $\varphi$  是定义合理的映射. 如果  $R$  的素理想  $P, Q$  满足均与  $S$  不相交以及  $P_S = Q_S$ , 那么易验证任何  $p \in P$  满足存在  $u \in S$  使得  $pu \in Q$ , 类似前面的讨论由  $pRu \subseteq Q$  得到  $p \in Q$ . 于是  $P \subseteq Q$ , 类似可验证  $Q \subseteq P$ , 因此  $\varphi$  是单射. 任取  $R_S$  的素理想  $\mathfrak{q}$ , 定义  $Q = \{a \in R | \exists s \in S \text{ 使得 } \lambda(a)\lambda(s)^{-1} \in \mathfrak{q}\}$ , 那么  $Q$  是  $R$  的理想且  $Q_S = \mathfrak{q}$ . 通过  $\mathfrak{q}$  是真理想易见  $Q \cap S = \emptyset$ . 如果  $R$  的理想  $I, J$  满足  $IJ \subseteq Q$ , 则  $I_S J_S \subseteq Q_S = \mathfrak{q}$ . 故  $I_S \subseteq Q_S$  或  $J_S \subseteq Q_S$ . 不妨设  $I_S \subseteq Q_S = \mathfrak{q}$ , 那么根据  $Q$  的定义得到  $I \subseteq Q$ . 所以  $Q$  是素理想, 这说明  $\varphi$  是单射.

最后说明  $\varphi$  是同胚. 任何  $\text{Spec}R_S$  中闭集形如  $V(I_S)$  的形式,  $I$  是  $R$  的理想. 不妨设  $I \cap S = \emptyset$ , 那么可直接验证  $\varphi^{-1}(V(I_S)) = V(I) \cap \{P \in \text{Spec}R | P \cap S = \emptyset\}$ , 所以  $\varphi$  是连续映射. 再说明  $\varphi$  是闭映射. 不妨设  $I$  是  $R$  的与  $S$  不相交的理想, 则有  $\varphi(V(I) \cap \{P \in \text{Spec}R | P \cap S = \emptyset\}) = V(I_S)$ , 因此  $\varphi$  是闭映射.  $\square$

当右 Ore 集  $S$  满足  $\bar{S} = \{s + t_S(R) | s \in S\}$  中元素均为  $\bar{R} = R/t_S(R)$  中的正则元(或者按照前面的刻画,  $S$  满足对任何  $a \in R$ , 若有  $s \in S$  使得  $sa = 0$ , 则有  $t \in S$  使得  $at = 0$ )时, 也称  $S$  是  $R$  的右分母集. 沿用这个术语: 含幺环  $R$  关于乘闭子集  $S$  能作右局部化的充要条件是  $S$  是右分母集. 含幺环  $R_S$  一旦能够关于乘闭子集  $S$  作右局部化, 那么  $R$  到  $R_S$  有标准保幺环同态, 故  $R$  具有 IBN 性质蕴含  $R_S$  也具有 IBN 性质.

**Remark 1.24.** 如果不要求 [命题1.23] 中的  $S$  是中心乘闭子集, 仅要求这里的  $S$  是右分母集, 但额外要求  $R_S$  是右 Noether 环, 那么可以证明这里考虑的  $\varphi$  还是满射, 见 [定理1.56].

**Proposition 1.25.** 设含幺环  $R$  有右分母集  $S$  满足右局部化  $Q = R_S$  是右 Noether 环. 那么对  $R$  的任何理想  $I$ ,  $IQ$  是  $Q$  的理想.

*Proof.* 只需证  $IQ$  是  $Q$  的左理想. 对任何  $s \in S$ , 在  $R$  中  $sI \subseteq I$  说明在  $Q$  中  $I \subseteq s^{-1}I$ . 于是  $s^{-1}IQ \subseteq s^{-2}IQ \subseteq \dots$  是  $Q$  的右理想升链. 由  $Q$  是右 Noether 环得到存在正整数  $n$  使得  $s^{-n}IQ = s^{-n+1}IQ = \dots$ . 因此在  $Q$  中有  $s^{-1}IQ = IQ$ , 这说明  $IQ$  是  $Q$  的左理想.  $\square$

与交换代数中一样, 当我们有了  $R$  的右分母集  $S$ , 我们也可以去对任何一个右  $R$ -模去作右局部化  $M_S$ . 为了构造  $M_S$ , 我们简单回顾  $R_S$  构造过程并做一些准备. 记  $\mathcal{F}$  是  $R$  所有与  $S$  相交非空的右理想构成的集合, 即  $\mathcal{F} = \{I | I \text{ 是右理想且 } I \cap S \neq \emptyset\}$ . 注意  $R \in \mathcal{F}$ . 固定记号  $\bar{R} = R/t_S(R)$ , 易知

**Lemma 1.26.** 设  $R$  是含幺环,  $S$  是右分母集, 那么  $\mathcal{F} = \{I | I \text{ 是右理想且 } I \cap S \neq \emptyset\}$  满足对任何  $I, J \in \mathcal{F}$  与  $\alpha \in \text{Hom}_R(I, \bar{R})$ , 有  $I \cap J \in \mathcal{F}$  以及  $\alpha^{-1}(\bar{J}) = \{a \in I | \alpha(a) \in J + t_S(R)/t_S(R)\} \in \mathcal{F}$ .

*Proof.* 任取  $s_1 \in I \cap S, s_2 \in J \cap S$ , 则存在  $a \in R, t \in S$  使  $s_1a = s_2t \in S$ . 进而  $s_2t \in S \cap I \cap J$ . 设  $\alpha(s_1) = b + t_S(R)$ , 那么存在  $v \in S, c \in R$  使得  $bv = s_2c$ , 于是  $\alpha(s_1v) = s_2c + t_S(R) \in \bar{J}$ .  $\square$

回忆在  $R_S$  的构造中 (这里遵循 [?], 类似于交换代数的构造可见 [?]), 我们考虑了集合

$$W = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} \text{Hom}_R(I, \bar{R}),$$

在其上赋予了二元关系  $\sim$ : 对  $\alpha_1 \in \text{Hom}_R(I_1, \bar{R}), \alpha_2 \in \text{Hom}_R(I_2, \bar{R}) \in W$ , 定义  $\alpha_1 \sim \alpha_2$  当且仅当存在  $J \subseteq I_1 \cap I_2$  使得  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  在  $J$  上取值相同. 随后在商集  $R_S = W / \sim$  上定义了自然加法和乘法, 其中  $\alpha_1 \in \text{Hom}_R(I_1, \bar{R}), \alpha_2 \in \text{Hom}_R(I_2, \bar{R})$  所在等价类的乘法定义为  $[\alpha_1][\alpha_2] = [\gamma]$ , 这里  $\gamma : \alpha_2^{-1}(I_1) \rightarrow \bar{R}, c \mapsto \alpha_1\alpha_2(c)$  (严格地,  $\alpha_2\alpha_1(c)$  指, 设  $\alpha_2(c) = b + t_S(R) \in \bar{I}_1$ , 记  $\alpha_1(b)$  为  $\alpha_2\alpha_1(c)$ , 这明显定义合理). 随后可直接验证  $R_S$  关于上述运算构成含幺环 (可能是零环), 并且有自然保幺环同态  $\lambda_S : R \rightarrow R_S$ , 其中对每个  $a \in R$ ,  $\lambda_S(a)$  是  $a$  在  $R$  上决定的左乘变换对应的同态  $a_l : R \rightarrow \bar{R}, x \mapsto \bar{ax}$  所在的等价类. 易见  $\text{Ker } \lambda_S = t_S(R)$ . 每个  $s \in S$ , 对应于  $R_S$  中的元素  $\lambda_S(s)$  在  $R_S$  中可逆, 其逆元为  $\alpha : sR \rightarrow \bar{R}, sx \mapsto \bar{x}$  所在等价类. 这里  $\alpha : sR \rightarrow \bar{R}$  定义合理的原因是, 若  $x_1, x_2 \in R$  满足  $sx_1 = sx_2$ , 在  $\bar{R}$  中  $\bar{s}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0$ , 再利用  $\bar{S}$  中元素均为  $\bar{R}$  中正则元可得  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ . 因为这里的  $\alpha : sR \rightarrow \bar{R}$  定义合理, 所以它是右  $R$ -模同态是明显的. 要看到  $(R_S, \lambda_S)$  是  $R$  的右商环, 还需说明每个  $R_S$  中元素可表为形如  $\lambda_S(a)\lambda_S(s)^{-1}, a \in R, s \in S$  的形式. 对每个  $[\alpha] \in R_S$ , 这里  $\alpha : I \rightarrow \bar{R}$ , 取  $s \in I \cap S$  并记  $\alpha(s) = b + t_S(R)$ , 可直接计算验证  $[\alpha] = \lambda_S(b)\lambda_S(s)^{-1}$ . 因此通过上述构造确实可得  $R$  关于右分母集  $S$  的右局部化  $(R_S, \lambda_S)$ . 于是下面模的局部化构造基本上就是“例行公事”. 记  $\bar{M} = M/t_S(M)$ , 根据之前的讨论它是定义合理的右  $R$ -商模, 并且  $\bar{M}$  可自然地视作右  $\bar{R}$ -模. 考虑集合

$$T = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} \text{Hom}_R(I, \bar{M}),$$

在  $T$  上如下定义二元关系 “ $\sim$ ”: 对  $\alpha_1 \in \text{Hom}_R(I_1, \bar{M}), \alpha_2 \in \text{Hom}_R(I_2, \bar{M}) \in T$ , 定义  $\alpha_1 \sim \alpha_2$  当且仅当存在  $J \subseteq I_1 \cap I_2$  使得  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  在  $J$  上取值相同. 明显  $\sim$  是  $T$  上等价关系, 记  $\alpha$  所在的等价类为  $[\alpha]$ . 对

$\alpha_1 \in \text{Hom}_R(I_1, \overline{M})$ ,  $\alpha_2 \in \text{Hom}_R(I_2, \overline{M}) \in T$ , 定义  $[\alpha_1] + [\alpha_2] = [\beta]$ , 其中  $\beta$  是  $T$  中在  $I_1 \cap I_2$  上取值与  $\alpha_1 + \alpha_2$  一致的右  $R$ -模同态. 易见  $(T / \sim, +)$  是定义合理的加法群. 记  $M_S = T / \sim$ , 对每个  $x \in M$ , 定义  $\theta_S(x)$  是  $\alpha : R \rightarrow \overline{M}, a \mapsto \overline{xa}$  所在的等价类, 那么  $\theta_S(x)$  定义合理 (不依赖于右理想  $I_1 \in \mathcal{F}$  的选取), 于是得到加群同态  $\theta_S : M \rightarrow M_S$ , 易见  $\text{Ker}\theta_S = \{x \in M \mid \text{存在 } s \in S \text{ 使得 } xs = 0\} = t_S(M)$ . 接下来我们为  $M_S$  赋予右  $R_S$ -模结构:

$$M_S \times R_S \rightarrow M_S, ([\alpha], [\beta]) \mapsto [\gamma],$$

这里  $\alpha : I_1 \rightarrow \overline{M}, \beta : I_2 \rightarrow \overline{R}$  均为右  $R$ -模同态,  $\gamma : \beta^{-1}(I_1) \rightarrow \overline{M}, c \mapsto \alpha(c)$ , 其中  $\alpha(c) = b + t_S(R)$  (易验证  $\gamma$  是定义合理的右  $R$ -模同态). 根据 [引理1.26], 通过直接地计算验证可知上面的数乘作用作为映射定义合理并且给出了加群  $M_S$  上的右  $R_S$ -模结构. 需要指出, 与  $R_S$  类似地, 每个  $M_S$  中元素都可以表示为  $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1}$  的形式, 为记号简明常记作  $xs^{-1}$  或  $x/s$  (验证过程与  $R_S$  情形完全类似, 任取  $[\alpha] \in M_S$ , 这里  $\alpha : I \rightarrow \overline{M}$ , 取  $s \in I \cap S$ , 并记  $\alpha(s) = x + t_S(M)$ , 那么可直接计算得到  $[\alpha]\lambda_S(s) = \theta_S(x)$ , 再利用  $\lambda_S(s)$  是  $R_S$  中可逆元得到结论). 利用  $M_S$  上的右  $R_S$ -模结构, 我们当然可以利用环同态  $\lambda_S : R \rightarrow R_S$  也给  $M_S$  一个右  $R$ -模结构:

$$M_S \times R \rightarrow M_S, (x, a) \mapsto x\lambda_S(a).$$

一旦  $M_S$  赋予上述右  $R$ -模结构, 通过前面  $\theta_S : M \rightarrow M_S$  的定义可直接计算验证  $\theta_S$  是右  $R$ -模同态, 即有  $\theta_S(xs) = \theta_S(x)s = \theta_S(x)\lambda_S(s), \forall x \in M, s \in S$ . 总结一下, 我们上述构造的右  $R_S$ -模  $M_S$  满足:

- 有标准映射  $\theta_S : M \rightarrow M_S$  是右  $R$ -模同态且  $\text{Ker}\theta_S = t_S(M) = \{x \in M \mid \text{存在 } s \in S \text{ 使得 } xs = 0\}$ .
- 对于上述标准映射,  $M_S$  中任何元素可表示为  $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1}$  的形式.

易见当  $0 \in S$  时  $M_S = 0$ . 与交换情形一样,  $M_S$  具有下述泛性质.

**Proposition 1.27.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集,  $M$  是右  $R$ -模, 那么对上述构造的二元组  $(M_S, \theta_S)$ , 有: 对任何右  $R_S$ -模  $X$  和右  $R$ -模同态  $\varphi : M \rightarrow X$ , 存在唯一的右  $R_S$ -模同态  $\bar{\varphi} : M_S \rightarrow X$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta_S} & M_S \\ & \searrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & X \end{array}$$

*Proof.* 命  $\varphi : M_S \rightarrow X, \theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1} \mapsto \varphi(x)\lambda_S(s)^{-1}$ , 下面说明  $\varphi$  作为映射定义合理. 如果有  $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1} = \theta_S(x')\lambda_S(s')^{-1}$ , 即  $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1}\lambda_S(s') = \theta_S(x')$ . 设  $\lambda_S(s)^{-1}\lambda_S(s') = \lambda_S(a)\lambda_S(t)^{-1}$ , 于是  $\theta_S(x)\lambda_S(a) = \lambda_S(x')\lambda_S(t)$ , 因为  $\theta_S$  是右  $R$ -模同态, 所以此时有  $\theta_S(xa) = \theta_S(x't)$ , 进而存在  $u \in S$  使得  $(xa - x't)u = 0$ . 由此知  $(\varphi(x)a - \varphi(x')t)u = 0$ . 进而  $\varphi(x)\lambda_S(a) = \varphi(x')\lambda_S(t)$ , 即  $\varphi(x)\lambda_S(a)\lambda_S(t)^{-1} = \varphi(x')$ , 于是  $\varphi(x)\lambda_S(s)^{-1}\lambda_S(s') = \varphi(x')$ , 由此得到  $\bar{\varphi}$  作为映射定义合理. 类似地, 可直接计算说明  $\bar{\varphi}$  是右  $R_S$ -模同态.  $\bar{\varphi}$  的唯一性是明显的, 因为  $M_S$  中元素均可表为  $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1}$  的形式.  $\square$

**Definition 1.28 (模的局部化).** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集,  $M$  是右  $R$ -模.  $M$  在乘闭子集  $S$  处的右局部化是指满足下述条件的二元组  $(M_S, \theta_S)$ :

- $M_S$  是右  $R_S$ -模,  $\theta_S$  是右  $R$ -模同态.

- 对任何右  $R_S$ -模  $X$  和右  $R$ -模同态  $\varphi : M \rightarrow X$ , 存在唯一的右  $R_S$ -模同态  $\bar{\varphi} : M_S \rightarrow X$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta_S} & M_S \\ & \searrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & X \end{array}$$

**Remark 1.29.** 由局部化的泛性质定义立即得到只要存在必定在同构有意义下唯一. 而我们前面花了很大篇幅所构造的二元组  $(M_S, \theta_S)$  正说明了存在性 (由 [命题1.27] 便知) 且  $\text{Ker}\theta_S = \{x \in M \mid \exists s \in S \text{ 使得 } xs = 0\}$ . 设  $(R_S, \lambda_S)$  是  $R$  关于右分母集  $S$  的右局部化, 模的局部化也可以如下等价地定义: 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集,  $M$  是右  $R$ -模.  $M$  在乘闭子集  $S$  处的右局部化是指满足下述条件的二元组  $(M_S, \theta_S)$ :

- $M_S$  是右  $R_S$ -模,  $\theta_S$  是右  $R$ -模同态,  $M_S$  中元素均可表为  $\theta_S(x)\lambda_S(s)^{-1}$  的形式.
- $\text{Ker}\theta_S = t_S(M) = \{x \in M \mid \exists s \in S \text{ 使得 } xs = 0\}$ .

可直接验证该定义蕴含前面泛性质定义, 前面说明过模局部化的存在性, 因此这两个定义等价.

模的 (非交换) 局部化也有交换代数中类似的通常性质成立.

**Lemma 1.30.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集,  $M$  是右  $R$ -模. 设  $(R_S, \lambda), (M_S, \theta)$  分别是  $R, M$  关于  $S$  的右局部化, 则有右  $R_S$ -模同构  $\eta_M : M_S \rightarrow M \otimes_R R_S$  使得  $\eta_M(\theta(x)\lambda(s)^{-1}) = x \otimes \lambda(s)^{-1}, \forall x \in M, s \in S$ .

*Proof.* 易知  $f : M \times R_S \rightarrow M_S, (x, \alpha) \mapsto \theta(x)\alpha$  是  $R$ -平衡映射, 所以存在唯一的加群同态  $\xi_M : M \otimes_R R_S \rightarrow M_S$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} M \times R_S & \xrightarrow{\otimes} & M \otimes_R R_S \\ & \searrow f & \downarrow \xi_M \\ & & M_S \end{array}$$

同时, 对右  $R$ -模同态  $g : M \rightarrow M \otimes_R R_S, x \mapsto x \otimes \lambda(1)$ , 由局部化的泛性质知存在唯一的右  $R_S$ -模同态  $\eta_M : M_S \rightarrow M \otimes_R R_S$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta} & M_S \\ & \searrow g & \downarrow \eta_M \\ & & M \otimes_R R_S \end{array}$$

易验证  $\eta_M$  和  $\xi_M$  互为逆映射且  $\eta_M(\theta(x)\lambda(s)^{-1}) = x \otimes \lambda(s)^{-1}, \forall x \in M, s \in S$ .  $\square$

**Remark 1.31.** 故标准映射  $g : M \rightarrow M \otimes_R R_S, x \mapsto x \otimes 1_{R_S}$  的核也是  $M$  的  $S$ -挠部分 (这是右  $R$ -子模):

$$t_S(M) = \{x \in M \mid \exists s \in S, \text{ 使得 } xs = 0\}.$$

**Lemma 1.32.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集,  $M, N$  是右  $R$ -模且  $f : M \rightarrow N$  是右  $R$ -模同态. 记  $(M_S, \theta_M), (N_S, \theta_N)$  是  $M, N$  关于  $S$  的右局部化. 那么存在唯一的右  $R_S$ -模同态  $f_S : M_S \rightarrow N_S$  使得  $f_S(\theta_M(x)\lambda(s)^{-1}) = \theta_N(f(x))\lambda(s)^{-1}, \forall x \in M, s \in S$ .

*Proof.* 作右  $R$ -模同态  $\tilde{f} : M \rightarrow N_S, x \mapsto \theta_N(f(x))$ , 那么存在唯一的右  $R_S$ -模同态  $f_S : M_S \rightarrow N_S$  使得

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta_M} & M_S \\ & \searrow \tilde{f} & \downarrow f_S \\ & & N_S \end{array}$$

交换. 不难看出这里诱导的  $f_S$  就是所求同态.  $\square$

**Remark 1.33.** 该引理表明我们可以像交换代数中一样去定义局部化函子  $(-)S : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R_S$ .

**Corollary 1.34.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集,  $(-)S : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R_S$  是局部化函子, 那么有自然同构  $(-)S \cong - \otimes_R R_S$ . 之后我们将看到这也是正合函子, [命题1.41].

*Proof.* 定义  $\eta : M \mapsto \eta_M : M_S \rightarrow M \otimes_R R_S$ , 这里  $\eta_M$  来自 [引理1.30], 为右  $R_S$ -模同构. 为说明  $\eta$  是局部化函子  $(-)S$  到张量函子  $- \otimes_R R_S$  的自然同构, 还需验证  $\eta$  的自然性, 这通过直接计算不难得到.  $\square$

一般局部化函子不保持模的不可约性, 在局部化环  $R_S$  上不可约的模视作  $R$ -模也未必不可约.

**Example 1.35** (局部化不保持不可约性). 设  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  是不可约  $\mathbb{Z}$ -模, 考虑其在素理想  $3\mathbb{Z}$  处的局部化, 得到零模, 故不可约模在素理想处的局部化未必不可约. 若  $M$  是含幺交换环  $R$  在乘闭子集  $S$  处局部化  $R_S$  上的不可约模, 也未必能保证  $M$  视作  $R$ -模仍不可约. 例如考虑  $R = \mathbb{Z}$  在所有非零整数构成的乘闭子集  $S$  处的局部化  $R_S = \mathbb{Q}$ , 那么  $\mathbb{Q}$  作为自身上模自然是不可约的, 但  $\mathbb{Q}$  作为  $\mathbb{Z}$ -模有无穷多非平凡子模.

**Definition 1.36** ( $S$ -挠模). 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集,  $M$  是右  $R$ -模, 如果  $t_S(M) = M$ , 即对任何  $x \in M$ , 存在  $s \in S$  使得  $xs = 0$ , 则称  $M$  是  $S$ -挠模 ( $S$ -torsion). 如果  $M$  满足能够被  $S$  中某个元素零化的元素只有零, 即  $t_S(M) = 0$ , 称  $M$  是  $S$ -无挠 ( $S$ -torsionfree). 任何右  $R$ -模  $M$ ,  $M/t_S(M)$  总是  $S$ -无挠.

**Lemma 1.37.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集且  $j : N \rightarrow M$  是右  $R$ -模间的本质单同态. 如果  $N$  是  $S$ -无挠的, 那么  $M$  也是  $S$ -无挠的.

*Proof.* 这时  $j(N) \cap t_S(M) = t_S(j(N)) = 0$ , 故由  $j(N)$  是  $M$  的本质子模知  $t_S(M) = 0$ .  $\square$

**Remark 1.38.** 该引理说  $S$ -无挠模的本质扩张还是  $S$ -无挠的.

**Proposition 1.39.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集,  $M$  是右  $R$ -模, 则以下三条等价:

- (1)  $M$  是  $S$ -挠模. (2)  $M_S = 0$ . (3)  $M \otimes_R R_S = 0$ .

*Proof.* 在 [引理1.30] 中我们已经看到  $M_S \cong M \otimes_R R_S$ , 所以 (2) 与 (3) 的等价性不言自明. 下证 (1)  $\Leftrightarrow$  (2). 考虑局部化定义中的标准映射  $\theta : M \rightarrow M_S$ , 则每个  $M_S$  中元素均可表为  $\theta(x)\lambda(s)^{-1}$  的形式并且  $\text{Ker}\theta = t_S(M)$ . 那么  $M_S = 0 \Leftrightarrow \theta(x) = 0, \forall x \in M \Leftrightarrow \text{Ker}\theta = M \Leftrightarrow M = t_S(M)$ , 由此得到 (1) 与 (2) 等价.  $\square$

**Example 1.40.** 设  $R$  是 (非交换) 整环, 若  $R$  的正则元集是右 Ore 集, 称  $R$  是右 Ore 整环. 一般整环的正则元集是乘闭子集但未必满足右 Ore 条件, 例如域  $\mathbb{k}$  上的自由代数  $\mathbb{k}\langle x, y \rangle$ , 它不是右 Ore 整环. 现在设  $R$  是整环, 从 [引理1.7] 我们可知  $R_R$  是一致模的充要条件是  $R$  是右 Ore 整环. 特别地, 整区作为自身的模明显是一致的. 前面我们提到对含幺环  $R$  的右 Ore 集  $S$ ,  $R$  上任何右模关于该乘闭子集的挠部分仍是子模. 故若  $R$  的正则元全体是右 Ore 集, 那么任何右  $R$ -模  $M$  的挠部分  $t(M) = \{x \in M \mid \text{存在正则元 } a \in R \text{ 使得 } xa = 0\}$  是  $M$  的子模, 这覆盖了抽象代数中的经典结果.

在交换代数中我们知道局部化函子是正合的, 这个事实在非交换世界仍成立.

**Proposition 1.41.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集,  $(-)S : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R_S$  是局部化函子, 那么  $(-)S : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R_S$  是共变加性正合函子. 特别地,  $R_S$  是平坦左  $R$ -模.

*Proof.* 由定义便知  $(-)_{\mathcal{S}} : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R_{\mathcal{S}}$  是共变加性函子. 我们只需验证局部化函子是正合函子. 自然同构  $(-)_{\mathcal{S}} \cong - \otimes_R R_{\mathcal{S}}$  表明  $(-)_{\mathcal{S}}$  是右正合函子, 故只需说明局部化函子保持单射. 如果有单右  $R$ -模同态  $f : X \rightarrow Y$ , 我们必须说明  $f_{\mathcal{S}} : X_{\mathcal{S}} \rightarrow Y_{\mathcal{S}}$  是单射. 设  $\theta_X : X \rightarrow X_{\mathcal{S}}, \theta_Y : Y \rightarrow Y_{\mathcal{S}}, \lambda : R \rightarrow R_{\mathcal{S}}$  是局部化定义中的标准映射, 那么  $f_{\mathcal{S}}(\theta_X(x)\lambda(s)^{-1}) = \theta_Y(f(x))\lambda(s)^{-1}, \forall x \in X, s \in S$ . 如果  $\alpha = \theta_X(x)\lambda(s)^{-1} \in X_{\mathcal{S}}$  满足  $f_{\mathcal{S}}(\alpha) = 0$ , 那么  $\theta_Y(f(x)) = 0$ . 进而存在  $u \in S$  使得  $f(x)u = 0$ , 即  $f(xu) = 0$ . 因为  $f$  是单射, 所以  $xu = 0$ , 这表明  $\theta(x) = 0$ , 进而  $\alpha = 0$ . 这就得到  $f_{\mathcal{S}}$  是单射, 故  $(-)_{\mathcal{S}} : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R_{\mathcal{S}}$  是正合函子.  $\square$

**Remark 1.42.** 若  $R$  有中心乘闭子集  $S$ , 那么左/右局部化  $R_{\mathcal{S}}$  存在, 这时  $R_{\mathcal{S}}$  作为左  $R$ -模和右  $R$ -模都平坦. 如果  $R$  有中心子环  $C$  且  $S$  是  $C$  的乘闭子集, 那么  $C_{\mathcal{S}}$  可视作  $R_{\mathcal{S}}$  的子环. 这时任何  $R_{\mathcal{S}}$ -模都可以视作  $C_{\mathcal{S}}$ -模.

对  $R, M$  在  $S$  处的局部化  $(R_{\mathcal{S}}, \lambda), (M_{\mathcal{S}}, \theta)$ , 固定记  $\lambda(a)\lambda(s)^{-1}$  为  $as^{-1}$ , 记  $\theta(x)\lambda(s)^{-1}$  为  $xs^{-1}$ . 在交换代数中, 我们熟知含幺交换 Noether 环上模的本质扩张在局部化下仍保持. 在非交换层面, 有

**Proposition 1.43.** 设含幺环  $R$  是右 Noether 的,  $j : N \rightarrow M$  是本质单同态,  $S$  是  $R$  的右分母集且  $S \subseteq Z(R)$ , 则  $j_{\mathcal{S}} : N_{\mathcal{S}} \rightarrow M_{\mathcal{S}}$  仍为本质单同态.

*Proof.* 因为  $(-)_{\mathcal{S}}$  是正合函子, 所以  $j_{\mathcal{S}}$  仍单, 只需再说明  $j_{\mathcal{S}}(N_{\mathcal{S}})$  是  $M_{\mathcal{S}}$  的本质子模. 任取  $x1^{-1} \neq 0 \in M_{\mathcal{S}}$ (那么对任何  $t \in S$  有  $xt \neq 0$ ), 需要说明  $j_{\mathcal{S}}(N_{\mathcal{S}}) \cap (x1^{-1})R_{\mathcal{S}} \neq 0$ . 这里使用反证法, 假设  $j_{\mathcal{S}}(N_{\mathcal{S}}) \cap (x1^{-1})R_{\mathcal{S}} = 0$ . 取  $\{\text{ann}_R(xs) | s \in S\}$  中的极大元  $\text{ann}_R(xs), t \in S$ (因为这里元素的零化子是右理想, 所以通过  $R$  的右 Noether 条件可保证取到极大元), 那么  $j(N) \cap xtR \neq 0$ . 设  $R$  的右理想  $I$  满足  $j(N) \cap xtR = xtI$ . 那么可设  $I = a_1R + a_2R + \cdots + a_nR$ , 进而  $xta_k1^{-1} = 0, \forall 1 \leq k \leq n$ . 于是存在  $u \in S$  使得  $xta_ku = 0, \forall 1 \leq k \leq n$ (这里对所有的  $k$  能够取到一个公共的  $s$  可以直接由  $S \subseteq Z(R)$  保证, 或者用右 Ore 条件). 因而  $xtuI = 0$ . 这意味着  $I \subseteq \text{ann}(xtu) = \text{ann}(xt)$ (这里用到  $\text{ann}(xt)$  的极大性以及  $u \in Z(R)$ ), 所以  $xtI = 0$ , 得到矛盾.  $\square$

**Remark 1.44.** 一般地, 非交换 Noether 环上模的本质扩张未必在局部化下保持, 具体例子可见 [?]. 之后我们将利用该命题在 [推论 1.75] 中证明右 Noether 环上的右模取内射包和关于中心乘闭子集作局部化可交换.

**Lemma 1.45.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集, 那么局部化函子  $(-)_{\mathcal{S}} : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R_{\mathcal{S}}$  满足对任何右  $R_{\mathcal{S}}$ -模  $X$  都存在右  $R$ -模  $M$  使得  $X \cong M_{\mathcal{S}}$ (本质满性). 并且任何右  $R_{\mathcal{S}}$ -模间的右  $R$ -模同态  $f : X \rightarrow Y$  都可天然视作  $R_{\mathcal{S}}$ -模同态.

*Proof.* 任何右  $R_{\mathcal{S}}$ -模  $X$  可天然视作右  $R$ -模, 故取  $M = X$ . 则有  $X \cong M \otimes_R R_{\mathcal{S}} \cong M_{\mathcal{S}}$ . 现取定右  $R_{\mathcal{S}}$ -模间的右  $R$ -模同态  $f : X \rightarrow Y$ , 那么  $f(xas^{-1})s = f(xas^{-1}s) = f(xa), \forall a \in R, s \in S$ . 从而  $f(xas^{-1}) = f(x)as^{-1}, \forall as^{-1} \in R_{\mathcal{S}}$ . 即  $f$  是右  $R_{\mathcal{S}}$ -模同态.  $\square$

局部化函子也可以和直和可交换.

**Proposition 1.46.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集, 那么局部化函子  $(-)_{\mathcal{S}} : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R_{\mathcal{S}}$  与任意直和可交换. 即对任何右  $R$ -模族  $\{M_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$  有右  $R_{\mathcal{S}}$ -模同构  $(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha})_{\mathcal{S}} \cong \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (M_{\alpha})_{\mathcal{S}}$ .

*Proof.* 验证想法与交换情形完全类似. 作右  $R$ -模同态

$$f : \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (M_{\alpha})_{\mathcal{S}}, (x_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda} \mapsto (x_{\alpha}1^{-1})_{\alpha \in \Lambda},$$

由  $f$  可诱导右  $R_{\mathcal{S}}$ -模同态  $F : (\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha})_{\mathcal{S}} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (M_{\alpha})_{\mathcal{S}}$ , 再用余积泛性质可自然地构造  $F$  的逆映射.  $\square$

**Corollary 1.47.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集, 那么对任何自由右  $R$ -模  $M$ ,  $M_S$  是自由右  $R_S$ -模.

*Proof.* 设  $M \cong \bigoplus_{i \in I} R$  (作为右  $R$ -模), 则  $M_S \cong (\bigoplus_{i \in I} R)_S \cong \bigoplus_{i \in I} R_S$  (作为右  $R_S$ -模).  $\square$

**Corollary 1.48.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集, 那么对任何投射右  $R$ -模  $P$ ,  $P_S$  是投射右  $R_S$ -模.

*Proof.* 因为  $P$  是投射模, 故它为某个自由模的直和因子, 设  $F = P \oplus L$ , 其中  $F$  是自由右  $R$ -模. 进而  $F_S \cong P_S \oplus L_S$ , 这说明  $P_S$  是某个自由右  $R_S$ -模的直和因子, 进而  $P_S$  投射.  $\square$

**Remark 1.49.** 对有限生成自由右  $R$ -模  $F$ , 明显  $F_S$  也是有限生成模, 进而是有限生成自由右  $R_S$ -模. 于是对任何有限生成投射右  $R$ -模  $P$ , 局部化  $P_S$  也是有限生成投射右  $R_S$ -模.

**Corollary 1.50.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集, 那么对任何右  $R$ -模  $M$  有  $\text{p.dim}(M_S)_{R_S} \leq \text{p.dim}M_R$ . 特别地, 由 [引理1.45] 知  $\text{r.gl.dim}R_S \leq \text{r.gl.dim}R$ .

*Proof.* 由局部化函子的正合性以及投射模作局部化后不改变投射性, 可知  $M_R$  的投射分解关于  $S$  作局部化后可得  $M_S$  作为右  $R_S$ -模的一个投射分解, 由此得  $\text{p.dim}(M_S)_{R_S} \leq \text{p.dim}M_R$ .  $\square$

最后我们指出局部化保持 Noether 性质与 Artin 性质来结束本节. 给定含幺环  $R$  和右分母集  $S$ , 那么对  $R_S$  任何理想  $\mathfrak{J}$ , 若记  $I = \{a \in R \mid \text{存在 } s \in S \text{ 使 } as^{-1} \in \mathfrak{J}\}$ , 那么  $I$  是  $R$  的右理想且  $\mathfrak{J} = I_S$ . 这一观察表明

**Proposition 1.51.** 设  $R$  是含幺环, 乘闭子集  $S$  是右分母集, 那么  $I \mapsto I_S$  给出  $R$  的右理想格  $\mathcal{L}(R)$  到  $R_S$  右理想格  $\mathcal{L}(R_S)$  的偏序满射  $\pi$ , 且存在偏序映射  $j : \mathcal{L}(R_S) \rightarrow \mathcal{L}(R)$  使得  $\pi j = \text{id}_{\mathcal{L}(R_S)}$ . 特别地, 当  $R$  是右 Noether(Artin) 环时,  $R_S$  也是右 Noether(Artin) 环.

设  $R$  是含幺环,  $S$  是  $R$  的右分母集 (默认右局部化  $R_S \neq 0$ ), 并设  $M$  是右  $R$ -模. 那么我们有右  $R_S$ -模  $M_S$ , [注记1.29], 以及标准映射  $\theta : M \rightarrow M_S$ . 对  $M_S$  的子模  $\widetilde{M}$ , 置  $\widetilde{M}^c := \{x \in M \mid x1^{-1} = \theta(x)\lambda(1)^{-1} \in \widetilde{M}\}$ , 这是  $M$  的右  $R$ -子模, 称为  $\widetilde{M}$  到  $M$  的收缩. 对  $M$  的子模  $N$ , 称  $M_S$  的  $R_S$ -子模  $\{xs^{-1} \in M_S \mid x \in N, s \in S\}$  是  $N$  到  $M_S$  的扩张, 记作  $N^e$ . 下面讨论收缩和扩张的关系:

**Theorem 1.52.** 设含幺环  $R$  有右分母集  $S$ ,  $M$  是右  $R$ -模.

- (1) 如果  $\widetilde{M}$  是  $M_S$  的右  $R_S$ -子模, 那么  $M/\widetilde{M}^c$  是  $S$ -无挠的且  $\widetilde{M} = \widetilde{M}^{ce}$ .
- (2) 如果  $N$  是  $M$  的右  $R$ -子模, 那么  $N \subseteq N^{ec}$  且  $N^{ec}/N = t_S(M/N)$ . 特别地,  $N = N^{ec}$  当且仅当右  $R$ -模  $M/N$  是  $S$ -无挠的.

*Proof.* (1) 如果  $s \in S$  和  $x \in M$  使得  $xs \in \widetilde{M}^c$ , 那么  $x1^{-1} \in \widetilde{M}$ , 这说明  $x \in \widetilde{M}^c$ , 我们证明了  $M/\widetilde{M}^c$  是  $S$ -无挠的. 要看到  $\widetilde{M} = \widetilde{M}^{ce}$  只需要注意任何  $xs^{-1} \in \widetilde{M}$  满足  $x \in \widetilde{M}^c$  即可.

(2) 只要验证  $N^{ec}/N = t_S(M/N)$ . 如果  $x + N \in t_S(M/N)$ , 那么存在  $s \in S$  使得  $xs \in N$ . 因此  $x1^{-1} \in N^e$ , 我们得到  $x \in N^{ec}$ . 反之, 如果  $x \in N^{ec}$ , 则  $x1^{-1} \in N^e$ , 即存在  $y \in N, t \in S$  使得  $x1^{-1} = yt^{-1}$ , 因此  $y - xt \in t_S(M)$ , 我们得到  $x + N \in t_S(M/N)$ .  $\square$

**Proposition 1.53.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右分母集,  $I$  是  $R_S$  的理想. 那么  $I^c$  是  $R$  的理想且  $I = I^{ce}$ . 如果  $I^c$  是  $R$  的素理想, 那么  $I$  也是  $R$  的素理想.

*Proof.* 因为  $I^c = \{a \in R \mid a1^{-1} \in I\}$ , 所以  $I^c$  明显是  $R$  的理想,  $I = I^{ce}$  来自 [定理1.52(1)]. 并且当  $I^c$  是真理想时,  $I$  是真理想 (注意到这时自动有  $I^c$  和  $S$  不相交). 如果  $R_S$  有理想  $A, B$  使得  $AB \subseteq I$ , 那么  $A^cB^c \subseteq I^c$ . 因此  $I^c$  如果是和  $S$  不相交的素理想, 那么  $A^c$  和  $B^c$  至少有一个在  $I^c$  中. 不妨设  $A^c \subseteq I^c$ , 那么  $A \subseteq I$ .  $\square$

**Remark 1.54.** 一般地, 如果  $R_S$  的理想  $I$  是素理想, 未必有  $I^c$  是  $R$  的素理想. 例如设  $A$  是所有  $\mathbb{Z}$  到域  $\mathbb{k}$  的函数构成的环, 那么  $A$  上有代数自同构  $\sigma$  满足  $\sigma(f)(n) = f(n-1), \forall f \in A, n \in \mathbb{Z}$ . 于是  $R = A[x; \sigma]$  有右分母集  $S = \{1, x, x^2, \dots\}$ . 命  $I \subseteq R$  是  $A$  中所有在 0 以外的点取值为零的函数和  $x \in R$  生成的理想, 那么可直接验证  $I \neq 0, I^2 = 0$  来得到  $R$  不是半素环. 下面说明  $R_S = A[x^{\pm 1}; \sigma]$  (回忆 [例1.20]) 是素环, 只需注意到任何  $a, b \neq 0 \in A$  总存在整数  $k$  使得  $a\sigma^k(b) \neq 0$ , 因此对任何非零元  $f, g \in R_S$ , 考察  $f, g$  最高次项系数, 可适当构造  $x^m$  满足  $fx^mg \neq 0$  来得到  $R_S$  的零理想是素理想. 这时不存在  $R$  的素理想  $Q$  使得  $Q_S = 0$ .

**Lemma 1.55.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右分母集, 满足  $R_S$  是右 Noether 环 (例如  $R$  是右 Noether 环, [命题1.51]). 那么对  $R$  的任何真理想  $I$ ,  $S$  在  $R/I$  中的像集  $\bar{S}$  是  $R/I$  的右分母集,  $I_S = I^e$  是  $R_S$  的理想, 且有定义合理的标准环同构  $R_S/I_S \cong (R/I)_{\bar{S}}$ .

*Proof.* 由于  $S$  作为  $R$  的乘闭子集满足右 Ore 条件,  $\bar{S}$  作为  $R/I$  的乘闭子集当然也满足右 Ore 条件. 所以只需要验证 (见 [引理1.18]) 如果对  $a \in R$ , 存在  $s \in S$  使得  $sa \in I$ , 则有  $t \in S$  使得  $at \in I$ . 对每个正整数  $n$ , 命  $I_n = \{a \in R \mid s^n a \in I\}$ , 那么  $I_n$  给出  $R_S$  的右理想, 因此由  $R_S$  是右 Noether 环, 对充分大的正整数  $N$  有  $I_N R_S = I_{N+1} R_S = \dots$ . 对  $s^N$  和  $a$  应用右 Ore 条件, 得到存在  $u \in S$  和  $b \in R$  使得  $s^N b = au$ . 所以  $s^{N+1} b = sau \in I$  蕴含  $b \in I_{N+1}$ . 于是  $b1^{-1} \in I_{N+1} R_S = I_N R_S = (I_N)^e$ , 于是  $b \in I_N^{ce}$ . 根据 [定理1.52(2)], 存在  $v \in S$  使得  $bv \in I_N$ , 所以  $auv = s^N bv \in I$ . 取  $t = uv$  即可. 现在我们得到右局部化  $(R/I)_{\bar{S}}$ . 不难看到有定义合理的环同态  $R_S \rightarrow (R/I)_{\bar{S}}$ . 我们需要验证  $I_S = I^e$  是  $R_S$  的理想来得到该环同态诱导典范同态  $\theta : R_S/I_S \rightarrow (R/I)_S$ , 易见  $\theta$  是满射, 而  $\theta$  是单射也容易验证. 下面验证  $I^e$  是  $R_S$  的理想来完成证明.

只需要验证对任何  $s \in S, a \in I$  有  $s^{-1}a \in I^e$  即可. 对  $a, s$  应用右 Ore 条件, 存在  $b \in R, t \in S$  使得  $at = sb$ . 根据前面的讨论,  $sb \in I$  蕴含存在  $u \in S$  使得  $bu \in I$ . 因此  $s^{-1}a = bt^{-1} = buu^{-1}t^{-1} \in I^e$ .  $\square$

**Theorem 1.56.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右分母集, 满足  $R_S$  是右 Noether 环.

- (1) 设  $R$  的理想  $I$  满足右  $R$ -模  $R/I$  是  $S$ -无挠的. 则  $I$  是素理想当且仅当  $I^e = I_S$  是素理想.
- (2) 设  $\tilde{I}$  是  $R_S$  的理想. 则  $\tilde{I}$  是  $R_S$  的素理想当且仅当  $\tilde{I}^c$  是  $R$  的素理想. 特别地, 对  $R_S$  的任何素理想  $\tilde{Q}$ , 存在  $R$  的素理想  $Q$  使得  $\tilde{Q} = Q_S$ . 因此有定义合理的满射  $\{P \in \text{Spec}R \mid P \cap S = \emptyset\} \rightarrow \text{Spec}R_S, P \mapsto P_S$ .

*Proof.* (1) 根据条件, 可应用 [定理1.52(2)] 得到  $I^{ce} = I$ . 所以 [命题1.53] 保证了  $I$  是素理想蕴含  $I^e$  是素理想. 反之, 如果  $I^e$  是  $R_S$  的素理想, 那么  $I$  是  $R$  的真理想. 我们设  $R$  有理想  $A, B$  使得  $AB \subseteq I$ . 那么 [引理1.55] 保证了  $A^e, B^e$  都是  $R_S$  的理想且若记  $\lambda : R \rightarrow R_S$  是局部化映射, 则  $A^e B^e \subseteq \lambda(A)B^e \subseteq (AB)^e \subseteq I^e$ . 故  $A^e \subseteq I^e$  或  $B^e \subseteq I^e$ . 不妨设  $A^e \subseteq I^e$ . 那么  $A \subseteq A^{ec} \subseteq I^{ec} = I$ .

(2) 对  $\tilde{I}$ , 总有  $\tilde{I}^{ce} = \tilde{I}$  以及  $R/\tilde{I}^c$  是  $S$ -无挠的, [定理1.52(1)]. 所以应用 (1) 可知  $\tilde{I}^c$  是素理想当且仅当  $\tilde{I}^{ce} = \tilde{I}$  是素理想. 这时, 对任何  $R_S$  的素理想  $\tilde{Q}$ ,  $Q = \tilde{Q}^c$  是  $R$  的素理想且满足要求.  $\square$

回忆含幺环  $R$  的素理想  $P$  是完全素理想等价于要求  $R/P$  是整环.

**Corollary 1.57.** 设  $R$  是右 Noether 环,  $S$  是  $R$  的右分母集 (默认  $R_S \neq 0$ ). 如果  $R$  的素理想都是完全素理想, 那么右局部化  $R_S$  的所有素理想也都是完全素理想.

*Proof.* 由条件  $R_S$  是右 Noether 环, [命题1.51]. 根据 [定理1.56],  $R_S$  的任何素理想形如  $Q_S$ , 其中  $Q$  是  $R$  的某个和  $S$  不相交的素理想. 因此  $S$  在  $R/Q$  中的像集  $\bar{S}$  是整环  $R/Q$  的一些非零元构成的右分母集, [引理1.55]. 且有环同构  $(R/Q)_{\bar{S}} \cong R_S/Q_S$  也是整环. 因此  $Q_S$  是  $R_S$  的完全素理想.  $\square$

## 1.4 局部化：无挠与内射性

本节所讨论的内容并不会在 Godie 定理证明过程中用到, 因此初次阅读可以跳过. 在上一节中我们看到非交换环  $R$  如果关于一个乘闭子集  $S$  能够作局部化, 即  $S$  是右分母集, 那么我们还是可以对每个右  $R$ -模  $M$  关于  $S$  作局部化, 进而定义出局部化函子  $(-)_{\bar{S}} : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R_S$ , 它是加性共变正合函子, 满足自然同构  $- \otimes_R R_S \cong (-)_{\bar{S}}$ , 和任意直和可交换, 保持模的自由性与投射性等. 本节我们来考虑局部化对应的挠理论 (torsion theory). 一般地, 一个 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  的非空全子范畴  $\mathcal{S}$  被称为 **Serre 子范畴**, 若对任何  $\mathcal{A}$  中短正合列  $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ ,  $X$  在  $\mathcal{S}$  中当且仅当  $X'$  与  $X''$  都在  $\mathcal{S}$  中. 容易证明一个 Abel 范畴的非空全子范畴  $\mathcal{S}$  是 Serre 子范畴当且仅当  $\mathcal{S}$  对取子对象、商对象、扩张对象封闭. 在 [命题1.39] 中我们看到一个右  $R$ -模关于一个右分母集  $S$  是挠模当且仅当  $M_S = 0$ . 这让我们立即看到:

**Proposition 1.58.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右分母集, 则  $S$ -挠模全体构成的  $\text{Mod-}R$  的全子范畴是 Serre 子范畴.

**Remark 1.59.** 特别地, 如果  $R$  是交换环,  $S$  是  $R$  的所有正则元构成的乘闭子集, 那么  $R$  上的  $S$ -挠模就是  $R$  上挠模 (这里的挠模是指每个非零元都能被  $R$  中某个正则元零化的  $R$ -模). 并且对  $R$ -模短正合列  $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ ,  $X'$  和  $X''$  是挠模蕴含  $X$  是挠模.

例如, 在代数拓扑中同调群与同伦群计算的需要使得挠 Abel 群或者对于某个素数  $p$  的  $p$ -挠群有研究的必要. 若取  $R = \mathbb{Z}$ ,  $S = \mathbb{Z} - \{0\}$ , 那么  $S$ -挠模就是经典意义上的挠 Abel 群. 取  $R = \mathbb{Z}, S = \{1, p, p^2, \dots\}$ , 那么  $S$ -挠模就是  $p$ -挠 Abel 群. 根据上述命题可知, 挠 Abel 群全子范畴和  $p$ -挠 Abel 群全子范畴都是 **Ab** 的 Serre 子范畴. 因此这些被广泛关注的挠对象都可以被纳入 Serre 子范畴框架下研究. 容易验证:

**Proposition 1.60.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右分母集, 取  $S$ -挠部分天然定义出共变加性函子  $t_S : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R$ , 它把每个右  $R$ -模  $M$  对应到它的  $S$ -挠部分  $t_S(M)$ , 每个右  $R$ -模同态  $f : X \rightarrow Y$  对应到限制映射  $t_S(f) = f| : t_S(X) \rightarrow t_S(Y), x \mapsto f(x)$ . 则  $t_S : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R$  是左正合函子.

称一个右  $R$ -模  $M$  是  $S$ -可除的, 如果对任何  $x \in M$  和  $s \in S$ , 存在  $y \in M$  使  $x = ys$ . 例如, 当  $R = \mathbb{Z}$ ,  $S = \mathbb{Z} - \{0\}$  时,  $S$ -可除模就是可除 Abel 群. 一个基本的观察是

**Lemma 1.61.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右分母集, 则任何右  $R_S$ -模作为右  $R$ -模都是  $S$ -无挠且  $S$ -可除的.

*Proof.* 任取  $x \in t_S(M)$ , 那么存在  $s \in S$  使得  $xs = 0$ , 于是  $x = xss^{-1} = 0$ . 所以  $M_S$  是  $S$ -无挠模. 任取  $z \in M$  和  $s \in S$ , 有  $z = zs^{-1}s$ , 所以  $M$  是  $S$ -可除的.  $\square$

**Remark 1.62.** 因此每个右  $R$ -模局部化函子  $(-)_{\bar{S}} : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R_S$  下的像作为右  $R$ -模是  $S$ -无挠的.

**Proposition 1.63.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右分母集,  $M$  是右  $R$ -模. 如果  $M$  既  $S$ -无挠又  $S$ -可除, 则局部化定义中的标准映射  $\theta : M \rightarrow M_S, x \mapsto x1^{-1}$  是右  $R$ -模同构.

*Proof.*  $M$  的  $S$ -无挠性保证了  $\theta$  单,  $M$  的  $S$ -可除性保证了  $\theta$  满.  $\square$

**Remark 1.64.** 若取  $M = R$ ,  $S$  是由一些正则元构成的右 Ore 集, 那么局部化映射  $\lambda : R \rightarrow R_S, a \mapsto a1^{-1}$  单.

在 [命题1.41] 中我们看到  $R_S$  作为左  $R$ -模是平坦的, 所以下面的引理立即告诉我们任何内射右  $R_S$ -模作为右  $R$ -模是  $S$ -无挠且内射的 (我们前面已经看到任何右  $R_S$ -模作为右  $R$ -模都是  $S$ -无挠的).

**Lemma 1.65.** 设  $\alpha : R \rightarrow T$  是保幺环同态, 于是  $T$  有自然的  $R$ - $T$  双模结构并且任何右  $T$ -模可天然视作右  $R$ -模. 如果  ${}_R T$  平坦 (即这里的环扩张平坦), 那么任何内射右  $T$ -模作为右  $R$ -模也内射.

*Proof.* 任取内射右  $T$ -模  $Q$ . 考虑自然同构  $\text{Hom}_R(-, Q_R) \cong \text{Hom}_R(-, \text{Hom}_T({}_R T, Q_T)) \cong \text{Hom}_T(- \otimes_R T, Q_T) \cong \text{Hom}_T(-, Q_T)(- \otimes_R T)$  是正合函子的合成. 这说明  $Q_R$  是内射模.  $\square$

**Remark 1.66.** 该引理表明平坦扩张可反向保持模的内射性. 最平凡的情况, 例如任何整区  $R$  的商域  $F$  上线性空间  $V$  总是内射的, 将  $V$  视作  $R$  上的模是内射  $R$ -模.

**Remark 1.67.** 对偶地, 如果  $T$  作为右  $R$ -模平坦, 那么任何内射左  $T$ -模作为左  $R$ -模也内射: 设  $Q$  是内射左  $T$ -模. 那么  $\text{Hom}_R(-, Q) \cong \text{Hom}_R(-, \text{Hom}_T(T T_{R,T} Q)) \cong \text{Hom}_T(T \otimes_R -, Q)$  是正合函子. 例如, 对域  $\mathbb{k}$  上 Hopf 代数  $H$ , 余乘法  $\Delta : H \rightarrow H \otimes_{\mathbb{k}} H$  是代数同态.  $H \otimes_{\mathbb{k}} H$  通过  $\Delta$  可视作左  $H$ -模和右  $H$ -模, 这时  $H \otimes_{\mathbb{k}} H$  作为左  $H$ -模和右  $H$ -模都自由, [?, Lemma 2.1].

因为任何内射右  $R_S$ -模作为右  $R$ -模是  $S$ -无挠且内射的, 所以我们可以说明任何内射右  $R_S$ -模都是由某个  $S$ -无挠且内射的右  $R$ -模关于  $S$  作局部化得到的. 反之, 我们也关心对内射右  $R$ -模  $M$ , 何时局部化能够保持模的内射性, 即何时  $M_S$  是内射右  $R_S$ -模.

**Proposition 1.68.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右分母集,  $M$  是内射右  $R$ -模. 那么当  $M$  是  $S$ -无挠时,  $M_S$  是内射右  $R_S$ -模. 这仅为充分条件, 例如当  $R$  是含幺交换 Noether 环时, 任何内射  $R$ -模  $M$  的局部化  $M_S$  是内射  $R_S$ -模, 但  $M$  未必是  $S$ -无挠的. 例如取  $R = \mathbb{Z}, S = \mathbb{Z} - \{0\}, M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , 易知  $M$  是可除 Abel 群, 所以为内射  $\mathbb{Z}$ -模但是  $M$  是  $S$ -挠模. 即有可能会出现  $M_R$  是内射  $S$ -挠模但  $M_S$  也是内射  $R_S$ -模的情况!

*Proof.* 我们断言  $M_R$  是可除  $S$ -模, 一旦证明该断言, 利用 [命题1.63] 立即得到  $M_S$  作为右  $R$ -模是内射模, 进而由 [引理1.45] 可知结论成立. 现在我们来证明  $M_R$  是可除  $S$ -模. 任取  $s \in S, x \in M$ , 作  $f : sR \rightarrow M, sa \mapsto xa$ , 先说明  $f$  定义合理. 如果  $a_1, a_2 \in R$  使得  $sa_1 = sa_2$ , 两边作用局部化同态  $\lambda : R \rightarrow R_S$ , 利用  $\lambda(s)$  可逆可得  $a_1 - a_2 \in \text{Ker } \lambda = t_S(R)$ . 故存在  $t \in S$  使得  $(a_1 - a_2)t = 0$ , 这蕴含在  $M$  中  $xa_1t = xa_2t$ . 因为  $M$  是  $S$ -无挠的, 所以  $xa_1 = xa_2$ , 这就说明  $f : sR \rightarrow M_S$  是定义合理的右  $R$ -模同态. 进而由  $M_R$  是内射模知  $f$  可延拓为  $R$  到  $M$  的模同态, 由此可知存在  $y \in M$  使得  $x = ys$ .  $\square$

**Remark 1.69.** 证明过程告诉我们  $S$ -无挠的内射右  $R$ -模是  $S$ -可除的. 前面提到交换 Noether 环上的内射模关于乘闭子集作局部化仍是内射模, 一般在非交换层面结论不成立, K. R. Goodearl 与合作者在 [?] 中对任何非交换 Noether 单整环构造了反例, 他们在文中指出结论在 FBN 环 (见 [定义3.1]) 情形成立. 不过对于右 Noether 环  $R$ , 如果乘闭子集  $S \subseteq Z(R)$ , 我们稍后会在 [命题1.74] 中证明任何内射右  $R$ -模关于乘闭子集  $S$  作右局部化后是内射  $R_S$ -模.

**Corollary 1.70.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右分母集,  $X$  是右  $R_S$ -模, 那么  $X$  作为右  $R_S$ -模是内射模的充要条件是存在  $S$ -无挠的内射右  $R$ -模  $M$  使得  $X \cong M_S$  (作为右  $R_S$ -模).

在 [引理1.37] 中我们看到  $S$ -无挠模的本质扩张还是  $S$ -无挠的, 特别地, 任何  $S$ -无挠模  $M_R$  的内射包  $E(M)$  是  $S$ -无挠的内射右  $R$ -模. 反之, 任何  $S$ -无挠的内射右  $R$ -模是自身的内射包, 所以

**Proposition 1.71.** 设  $S$  是含幺环  $R$  的右分母集,  $M$  是右  $R$ -模, 那么  $M$  是  $S$ -无挠的内射模当且仅当  $M$  是某个  $S$ -无挠右  $R$ -模的内射包.

由此, 可以说  $\text{Mod-}R_S$  中任何内射右  $R_S$ -模都可由某个  $S$ -无挠的右  $R$ -模取内射包再作局部化得到的. 在本节最后我们介绍右 Noether 环上内射性、内射包与在中心乘闭子集处局部化的关系.

**Lemma 1.72.** 设  $R$  是含幺环,  $C$  是  $R$  的中心子环,  $S \subseteq C$  是乘闭子集,  $M$  是有限表现右  $R$ -模, 那么对任何右  $R$ -模  $N$ , 有  $C_S$ -模同构  $(\text{Hom}_R(M, N))_S \cong \text{Hom}_{R_S}(M_S, N_S)$ .

*Proof.* 对任何右  $R$ -模  $X, Y$ , 总能定义出下述定义合理的  $C_S$ -模同态 (这里  $(\text{Hom}_R(X, Y))_S$  是  $C_S$ -模):

$$\eta_{X,Y} : (\text{Hom}_R(X, Y))_S \rightarrow \text{Hom}_{R_S}(X_S, Y_S), \frac{f}{s} \mapsto \eta_{X,Y}\left(\frac{f}{s}\right) : X_S \rightarrow Y_S, x/t \mapsto f(x)/st.$$

且对任何正整数  $l$ , 易验证有  $\eta_{R^l, N} : (\text{Hom}_R(R^l, N))_S \rightarrow \text{Hom}_{R_S}(R_S^l, N_S)$  是  $C_S$ -模同构. 现设  $M$  有自由表现  $R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0$ , 那么可验证有下面的  $C_S$ -模同态的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\text{Hom}_R(M, N))_S & \xrightarrow{(\beta^*)_S} & (\text{Hom}_R(R^n, N))_S & \xrightarrow{(\alpha^*)_S} & (\text{Hom}_R(R^m, N))_S \\ & & \downarrow \eta_{M, N} & & \downarrow \eta_{R^n, N} & & \downarrow \eta_{R^m, N} \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{R_S}(M_S, N_S) & \xrightarrow{(\beta_S)^*} & \text{Hom}_{R_S}((R^n)_S, N_S) & \xrightarrow{(\alpha_S)^*} & \text{Hom}_{R_S}((R^m)_S, N_S) \end{array}$$

上图上下两行正合, 再由  $\eta_{R^n, N}$  与  $\eta_{R^m, N}$  是同构可得  $\eta_{M, N}$  是同构.  $\square$

**Corollary 1.73.** 设  $R$  是含幺环,  $C$  是  $R$  的中心子环,  $S \subseteq C$  是乘闭子集, 右  $R$ -模  $M$  有有限生成投射分解且  $N$  是右  $R$ -模. 则对任何自然数  $n$  有  $C_S$ -模同构  $(\text{Ext}_R^n(M, N))_S \cong \text{Ext}_{R_S}^n(M_S, N_S)$ .

*Proof.* 设  $M$  有有限生成投射分解  $\cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 那么

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P_0, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_1, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_2, N) \longrightarrow \cdots$$

的  $n$  次上同调模就是  $\text{Ext}_R(M, N)$ . 因为  $(-)S$  是正合函子, 所以

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P_0, N)_S \longrightarrow \text{Hom}_R(P_1, N)_S \longrightarrow \text{Hom}_R(P_2, N)_S \longrightarrow \cdots$$

的  $n$  次上同调就是  $(\text{Ext}_R^n(M, N))_S$ . 因为每个  $P_i$  作为右  $R$ -模有有限表现, 所以利用 [引理1.72] 得到有

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_0, N)_S & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_1, N)_S & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_2, N)_S \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{R_S}((P_0)_S, N_S) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R_S}((P_1)_S, N_S) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R_S}((P_2)_S, N_S) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

交换. 所以有  $C_S$ -模同构  $(\text{Ext}_R^n(M, N))_S \cong \text{Ext}_{R_S}^n(M_S, N_S)$ .  $\square$

因为右 Noether 环上任何有限生成右  $R$ -模都有有限表现, 所以 [引理1.72] 使我们能够证明

**Proposition 1.74.** 设含幺环  $R$  是右 Noether 环,  $E$  是内射右  $R$ -模, 那么对  $R$  的任何中心乘闭子集  $S$ (默认  $R_S \neq 0$ ) 有  $E_S$  是内射右  $R_S$ -模. 对偶地, 左 Noether 环  $R$  上内射模关于中心乘闭子集的局部化也是内射模.

*Proof.* 根据 Baer 判别法, 只需证明对  $R_S$  的任何右理想  $J$  以及右  $R_S$ -模同态  $g: J \rightarrow E_S$ , 都存在右  $R_S$ -模同态  $\bar{g}: R_S \rightarrow E_S$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & J & \xrightarrow{\iota} & R_S \\ & & g \downarrow & \swarrow \bar{g} & \\ & & E_S & & \end{array}$$

设  $R$  的右理想  $I$  满足  $J = I_S$ . 那么根据 [引理1.72], 总存在右  $R$ -模同态  $f: I \rightarrow E$  以及  $v \in S$  使得  $fv^{-1}$  对应  $g \in \text{Hom}_{R_S}(I_S, E_S)$ . 即有  $g(bs^{-1}) = f(b)s^{-1}v^{-1}, \forall s \in S, b \in I$ . 因为  $E$  是内射右  $R$ -模, 所以存在右  $R$ -模同态  $\bar{f}: R \rightarrow E$  使得  $\bar{f}|_I = f$ . 现在定义  $\bar{g} = (\bar{f})_S v^{-1}$ , 易验证  $\bar{g}$  是满足要求的右  $R_S$ -模同态.  $\square$

**Corollary 1.75.** 设含幺环  $R$  是右 Noether 环,  $S$  是  $R$  的中心乘闭子集. 那么对任何右  $R$ -模  $M$ , 取内射包与作局部化可交换, 即有右  $R_S$ -模同构  $(E_R(M))_S \cong E_{R_S}(M_S)$ .

*Proof.* 设  $i: M \rightarrow E_R(M)$  是标准嵌入, 这是本质单同态. 在 [命题1.43] 中已经说明  $i_S: M_S \rightarrow (E_R(M))_S$  依然是本质单同态. 由 [命题1.74],  $(E_R(M))_S$  是内射右  $R_S$ -模. 所以  $(E_R(M))_S \cong E_{R_S}(M_S)$ .  $\square$

回忆左  $R$ -模  $M$  的内射分解  $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \dots$  被称为极小内射分解, 如果  $I^0$  是  $\text{Im}\eta$  的内射包且对每个  $i \geq 1$ ,  $I^i$  是  $\text{Im}d^{i-1}$  的内射包. 因为每个模都存在内射包, 所以对任何模容易递归地构造其极小内射分解. 极小内射分解在同构意义下唯一:

**Lemma 1.76.** 设  $_RM$  有极小内射分解  $(I, d, i), (J, h, j)$ , 则对任何使下图交换的链映射  $\alpha: (I, d) \rightarrow (J, h)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & I^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \xrightarrow{d^1} \dots \\ & & \downarrow \text{id}_M & & \downarrow \alpha^0 & & \downarrow \alpha^1 & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & J^0 & \xrightarrow{h^0} & J^1 & \xrightarrow{h^1} \dots \end{array}$$

有每个  $\alpha^k$  是同构 (比较引理保证了这样的链映射  $\alpha$  总存在).

*Proof.* 因为  $i: M \rightarrow I^0$  是本质单同态且  $J^0$  是内射模, 所以  $\alpha^0$  是单射, 从而由  $\alpha^0(I^0) \supseteq M$  是内射模以及内射包的极小性得到  $\alpha^0(I^0) = J^0$ , 因此  $\alpha^0$  是同构. 因为  $\alpha^0$  是同构, 所以下图中的同态  $\widetilde{\alpha^0}$  自然也是同构.

$$\begin{array}{ccccc} & & I^0 & & \\ & \nearrow \alpha^0 & & \searrow d^0 & \\ J^0 & \xleftarrow{h^0} & & \xrightarrow{\widetilde{h^0}} & J^1 \\ & \searrow & & \nearrow \widetilde{\alpha^0} & \\ & & J^0/\text{Ker}h^0 & & \end{array}$$

因为嵌入  $0 \longrightarrow I^0/\text{Ker}d^0 \xrightarrow{\widetilde{d^0}} I^1$  是本质单同态,  $\widetilde{h^0}\widetilde{\alpha^0}$  单且  $J^1$  是内射模, 所以  $\alpha^1$  是单射. 注意到  $\alpha^1(I^1)$  是包含  $\widetilde{h^0}(J^0/\text{Ker}h^0)$  的内射模, 所以由内射包极小性可知  $\alpha^1(I^1) = J^1$ , 故  $\alpha^1$  是同构. 归纳地可证每个  $\alpha^k$  都是同构. 因此链映射  $\alpha$  是链同构.  $\square$

利用 [引理1.76] 和比较引理易知模的极小内射分解是所有内射分解中长度最短的. 这也可如下证明:

**Proposition 1.77.** 任何模的极小内射分解长度给出该模的内射维数.

*Proof.* 如果模的内射维数是  $+\infty$ , 结论直接成立. 下设  $\text{inj.dim}_R M = n$ . 任取  $M$  的极小内射分解

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \cdots,$$

则有正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \longrightarrow I^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} \text{Im} d^{n-1} \longrightarrow 0,$$

因为  $M$  的内射维数是  $n$ , 所以上述复形中模  $\text{Im} d^{n-1}$  是内射模. 进而由  $D^n$  是  $\text{Im} d^{n-1}$  的内射包得到  $I^n = \text{Im} d^{n-1}$ (因为内射模没有真本质扩张), 所以  $I^j = 0, \forall j \geq n+1$ , 得证.  $\square$

**Lemma 1.78.** 设左  $R$ -模  $M$  是不可约模, 左  $R$ -模  $X$  有极小内射分解  $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \cdots$ , 则  $0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, I^0) \xrightarrow{(d^0)_*} \text{Hom}_R(M, I^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \text{Hom}_R(M, I^2) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{(d^{n-1})_*} \text{Hom}_R(M, I^n) \longrightarrow 0$  的微分都是零映射.

*Proof.* 事实上, 如果有  $f \neq 0 \in \text{Hom}_R(M, I^i)$ , 那么  $\text{Im} f \cong I^i$  是  $I^i$  的非零单子模. 结合  $\text{Ker} d^i$  是  $I^i$  的本质子模得到  $\text{Ker} d^i \cap \text{Im} f \neq 0$ , 进而  $\text{Im} f \subseteq \text{Ker} d^i$ . 所以  $(d^i)_* = 0$ .  $\square$

现在我们应用 [命题1.74] 和 [命题1.43] 说明 Noether 环上模的极小内射分解在局部化下保持.

**Proposition 1.79.** 设  $R$  是左 Noether 环, 有中心乘闭子集  $S$ . 那么对任何左  $R$ -模  $M$  的极小内射分解

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \cdots,$$

有  $0 \longrightarrow M_S \xrightarrow{\eta} (I^0)_S \xrightarrow{d^0} (I^1)_S \longrightarrow \cdots$ , 是  $M_S$  作为  $R_S$ -模的极小内射分解.

*Proof.* 因为局部化函子是正合的, 所以由 [命题1.74] 得到

$$0 \longrightarrow M_S \xrightarrow{\eta} (I^0)_S \xrightarrow{d^0} (I^1)_S \longrightarrow \cdots,$$

是  $M_S$  作为  $R_S$ -模的内射分解. 现在 [命题1.43] 表明本质单同态在局部化下保持, 故这也是极小内射分解.  $\square$

**Corollary 1.80.** 设左 Noether 环  $R$  有中心乘闭子集  $S$ ,  $M$  是不可约左  $R$ -模且  $M_S \neq 0$ . 如果  $\text{p.dim}_R M < +\infty$ , 就有  $\text{p.dim}_{R_S} M_S = \text{p.dim}_R M$ .

*Proof.* 从 [推论1.50] 得到  $\text{p.dim}_{R_S} M_S \leq \text{p.dim}_R M$ . 记  $n = \text{p.dim}_R M \in \mathbb{N}$ , 那么存在非零左  $R$ -模  $X$  使得  $\text{Ext}_R^n(M, X) \neq 0$ . 设  $X$  有极小内射分解  $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \cdots$ , 那么得到复形

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, I^0) \xrightarrow{(d^0)_*} \text{Hom}_R(M, I^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \text{Hom}_R(M, I^2) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{(d^{n-1})_*} \text{Hom}_R(M, I^n) \longrightarrow 0.$$

于是由  $\text{Ext}_R^n(M, X) \neq 0$  得到  $\text{Hom}_R(M, I^n) \neq 0$ . 所以存在  $f \neq 0 \in \text{Hom}_R(M, I^n)$ . 结合  $M$  是不可约模得到  $f$  是单射, 进而  $f_S : M_S \rightarrow (I^n)_S$  是单  $R_S$ -模同态. 因为  $M_S \neq 0$ , 所以  $M_S$  作为  $R_S$ -模也是不可约的. 对  $X$  取定的极小内射分解作局部化, 由 [命题1.79] 知  $0 \longrightarrow X_S \xrightarrow{\eta} (I^0)_S \xrightarrow{d^0} (I^1)_S \longrightarrow \cdots$  是  $X_S$  作为  $R_S$ -模的极小内射分解. 应用 [引理1.78] 得到  $\text{Ext}_{R_S}^n(M_S, X_S) = \text{Hom}_{R_S}(M_S, (I^n)_S) \neq 0$ .  $\square$

## 1.5 一致维数：基本概念

**Definition 1.81** (有限一致维数). 若模  $M$  不含非零子模的无限直和, 那么称该模具有有限一致维数.

具有有限一致维数的模它的子模一定也具有有限一致维数. 无限维线性空间没有有限一致维数.

**Example 1.82.** 一致模、Artin 模和 Noether 模都有有限一致维数.

在正式地引入一致维数的概念 (见 [定义1.86]) 前, 我们需要对一致模有更进一步的认识.

**Lemma 1.83.** 若非零模  $M$  有有限一致维数, 那么它含有一个一致子模. 故 Noether 模总含有一个一致子模.

*Proof.* 假设  $M$  没有一致子模, 那么  $M$  所有子模都不是一致的, 于是对每个子模  $N \neq 0$ , 它作为一个不是一致模的模, 必定存在  $N$  的非零子模  $N_1, N_2$  使得  $N \supseteq N_1 \oplus N_2$ . 那么  $M$  包含两个非零子模的直和  $M_1 \oplus M_2$ , 而  $M_2$  也包含两个非零子模的直和  $M_{21} \oplus M_{22}$ , 进而  $M \supseteq M_1 \oplus M_{21} \oplus M_{22}$ . 如此继续, 我们得到  $M$  包含无限个非零子模的直和, 这与  $M$  具有有限一致维数矛盾.  $\square$

**Lemma 1.84.** 设  $M$  具有有限一致维数, 那么  $M$  包含一个本质子模  $X$  使得  $X$  是有限个一致子模的直和.

*Proof.* 如果  $M = 0$ , 结论不证自明. 下设  $M \neq 0$ , 那么 [引理1.83] 表明  $M$  含一致子模. 即集合

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigoplus_{i=1}^t U_i \mid U_i \text{是 } M \text{ 的一致子模}, t \geq 1 \right\} \neq \emptyset,$$

现在我们用反证法证明  $\mathcal{S}$  中含有本质子模. 若不然对每个  $\bigoplus_{i=1}^m U_i \in \mathcal{S}$ , 根据 [引理1.3(5)] 知存在  $M'$  使得  $M' \cap \left( \bigoplus_{i=1}^m U_i \right) = 0$  且  $\left( \bigoplus_{i=1}^m U_i \right) \oplus M'$  是本质子模, 那么  $M' \neq 0$ , 所以 [引理1.83] 表明  $M'$  含一致子模  $U_{m+1}$ , 于是  $\bigoplus_{i=1}^{m+1} U_i \in \mathcal{S}$ , 重复上述讨论, 得到  $M$  含有非零子模的无限直和, 矛盾. 故  $\mathcal{S}$  中有本质子模.  $\square$

根据前面的引理, 如果模  $M$  具有有限一致维数, 那么它必定含有一个形如有限个一致子模直和的本质子模, 设为  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$ . 那么对  $M$  所包含的任何非零子模的直和  $\bigoplus_{i=1}^r M_i$  (这里每个  $M_i \neq 0$ ) 必有  $r \leq m$ . 因为  $W = \bigoplus_{i=2}^r M_i$  不是本质子模, 所以 [引理1.3(4)] 蕴含存在某个  $U_i$ , 不妨设  $i = 1$ , 使得  $W \cap U_1 = 0$  (否则, 对每个  $U_i$ ,  $U_i$  的非零子模都是  $U_i$  本质子模, 进而  $W = \bigoplus_{i=2}^r M_i$  满足每个  $W \cap U_i$  是  $U_i$  本质子模, 从而  $\bigoplus_{i=1}^m (U_i \cap W)$  是  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$  的本质子模, 这导致  $W$  是  $M$  的本质子模), 现在我们得到直和  $U_1 \oplus \left( \bigoplus_{i=2}^r M_i \right)$ , 再对  $W$  重复上述讨论便看到  $r \leq m$ . 现在我们可以给出

**Theorem 1.85.** 设模  $M$  有有限一致维数,  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$  是一些一致模的直和且是  $M$  的本质子模. 那么

(1)  $M$  包含的任何非零子模的直和  $\bigoplus_{i=1}^r M_i$  满足  $r \leq m$ , 即直和项数目不超过  $m$ .

(2)  $M$  任意一些一致子模的直和  $W = \bigoplus_{i=1}^s V_i$ ,  $W$  是本质子模的充要条件是  $s = m$ .

*Proof.* 前面的讨论已经证明了 (1), 现在来说明 (2). (2) 的必要性由 (1) 立即得到, 只需验证充分性. 假设  $W = \bigoplus_{i=1}^s V_i$  不是本质子模, 那么应用 [引理1.3(5)] 得到存在非零子模  $T$  使得  $W \oplus T$  是本质子模, 进而  $M$  包含一个直和项数目为  $m+1$  的非零子模直和, 这和 (1) 的结果矛盾. 因此  $s=m$  时  $W$  是本质子模.  $\square$

于是上述定理表明, 对具有有限一致维数的模  $M$  (例如 Noether 模), 它的可表示为有限个一致模直和的本质子模  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$ , 其直和项数目  $m$  是  $M$  的不变量, 由此就引出一致维数的概念.

**Definition 1.86** (一致维数). 设  $M$  是模, 如果  $M$  不包含非零子模无限直和, 设  $M$  有本质子模  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$ , 其中  $U_i$  均为一致模, 称  $m$  为  $M$  的一致维数或 Goldie 维数. 若  $M$  包含非零子模的无限直和, 称  $M$  的一致维数是  $+\infty$ . 记  $M$  的一致维数为  $\text{u.dim}_R M$ . 具有有限一致维数的模确实一致维数有限. 同构的模一致维数相同.

如果右  $R$ -模  $M$  具有有限一致维数, 设  $\text{u.dim}_R M = m$ , 那么存在有限个一致模的直和  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$  使得它是  $M$  的本质子模, 进而由本质子模的传递性可得  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$  是  $E(M)$  的本质子模, 所以

$$E(M) = E\left(\bigoplus_{i=1}^m U_i\right) = \bigoplus_{i=1}^m E(U_i),$$

这里最后一个等式成立的原因是 [推论1.4]. 由此知  $E(M)$  可表示为  $m$  个不可分内射模的直和. 我们证明了

**Proposition 1.87.** 设  $M$  是右  $R$ -模,  $m \in \mathbb{N}$ . 那么  $\text{u.dim}_R M = m \Leftrightarrow E(M)$  是  $m$  个不可分内射模的直和.

**Example 1.88.** 设  $R$  是右 Noether 环,  $I_R$  是内射右  $R$ -模并设  $I$  可分解为有限多个不可分内射模的直和  $I = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$  (例如, 根据 [推论1.13], 当  $I$  是某个有限生成  $R$ -模的内射包). 那么  $\text{u.dim}_R I = n$ .

**Example 1.89.** 设  $R = \Delta$  是除环, 那么  $\Delta$  上有限维线性空间的一致维数就是其线性维数.

**Example 1.90.** 设  $R$  是 Artin 单环, 那么存在正整数  $n$  和除环  $\Delta$  使得  $R \cong M_n(\Delta)$ . 易见  $M_n(\Delta)$  作为自身上左模可分解为  $n$  个不可约模的直和. 因此  $M_n(\Delta)$  作为自身上模的一致维数就是  $n$ . 从而  $\text{u.dim}_R R = n$ .

**Example 1.91.** 设  $R$  是 Artin 半单环,  $M$  是具有有限一致维数的右  $R$ -模. 由于  $M$  可以分解为有限多个不可约模的直和, 所以  $M$  的合成列长度就是  $M$  作为右  $R$ -模的一致维数, 这可视作 [例1.89] 的推广. 如果  $M$  的一致维数不是有限的, 那么  $M$  是无限长的.

## 1.6 相关素理想

这节介绍相关素理想的概念和基本性质, 它们并不会在 Goldie 定理的证明中用到, 初次阅读可跳过本节. 若右  $R$ -模  $M \neq 0$  满足对任何非零子模  $M'$  有  $\text{Ann}_R M = \text{Ann}_R M'$ , 则称  $M$  是素模. 注意到不可约模总是素模, 因此素模可视作不可约模的推广. 不可约模的非零子模只有自身, 依然是不可约模. 根据素模的定义可知素模的任何非零子模依然是素模. 固定含幺环  $R$ . 下面的引理表明素模的零化子总是素理想.

**Lemma 1.92.** 设  $M_R$  是素模, 则  $\text{Ann}_R M$  是  $R$  的素理想.

*Proof.* 因为  $M \neq 0$ , 所以  $\text{Ann}_R M$  是  $R$  的真理想. 任取  $R$  的理想  $A, B$  使  $AB \subseteq \text{Ann}_R M$ , 假设  $A \not\subseteq \text{Ann}_R M$ , 那么  $MA$  是  $M$  的非零子模, 于是  $B \subseteq \text{Ann}_R(AM) = \text{Ann}_R M$ , 所以  $\text{Ann}_R M$  是素理想.  $\square$

**Remark 1.93.** 我们知道含幺环上不可约模的零化子总是本原理想. 在特殊的环类场景本原理想与极大理想等价.

**Example 1.94.** 设  $R$  上非零右  $R$ -模  $M$  满足  $\text{Ann}_R M$  是  $R$  的极大理想, 则  $M$  是素模.

*Proof.* 因为  $M \neq 0$ , 所以  $\text{Ann}_R M$  是  $R$  的真理想. 任取  $M$  的非零子模  $N$ , 有  $\text{Ann}_R M \subseteq \text{Ann}_R N \subsetneq R$ , 因此  $\text{Ann}_R M$  的极大性迫使  $\text{Ann}_R M = \text{Ann}_R N$ . 这表明  $M$  是素模.  $\square$

**Remark 1.95.** 特别地, 单环上任何非零模都是素模. 注意模的零化子是极大理想并不能表明模的不可约性.

**Definition 1.96** (相关素理想). 设  $R$  是含幺环,  $M$  是右  $R$ -模, 如果  $R$  的素理想  $P$  满足存在  $M$  的素子模  $N$  使得  $P = \text{Ann}_R N$ , 则称  $P$  是  $M$  的相关素理想 (associated prime).  $M$  所有相关素理想构成集合记作  $\text{Ass}(M)$ .

**Remark 1.97.** 我们将在 [命题1.102(5)] 中说明满足双边理想升链的环上的非零模总有相关素理想.

**Example 1.98.** 当  $M_R$  是不可约模时,  $\text{Ass}(M) = \{\text{Ann}_R M\}$ .

**Example 1.99.** 设  $I$  是  $R$  的理想, 那么右  $R$ -模  $R/I$  是素模当且仅当  $I$  是素理想. 这时,  $\text{Ann}_R(R/I) = \{I\}$ .

**Remark 1.100.** 如果记含幺环  $R$  上素右  $R$ -模同构类全体构成的类为  $\mathcal{P}(R)$ , 则  $\mathcal{P}(R) \rightarrow \text{Spec} R$ ,  $[M_R] \mapsto \text{Ann}_R M$  是满射. 任何极大理想关于该满射的原像类是所有以该极大理想为零化子的模同构类全体.

在交换代数中, 含幺交换环  $R$  上模  $M$  的一个相关素理想  $P$  是指形如  $\text{ann}_R(x), x \in M$  的素理想. 下面我们说明非交换情形的相关素理想是交换情形的推广.

**Proposition 1.101.** 设  $R$  是含幺交换环,  $M$  是  $R$ -模. 则素理想  $P$  是  $M$  某个素子模零化子的充要条件是存在  $x \in M$  使得  $P = \text{ann}_R(x)$ .

*Proof.* 必要性: 设  $P = \text{Ann}_R N$ ,  $N$  是  $M$  的素子模, 任取  $x \neq 0 \in N$ , 有  $P = \text{Ann}_R N = \text{Ann}_R(Rx) = \text{ann}_R(x)$ .

充分性: 这时  $M$  有个同构于  $R/P$  的子模, 故由 [例1.99] 知  $R/P$  是以  $P$  为零化子的素子模.  $\square$

下面是一些相关素理想集的常用性质.

**Proposition 1.102.** 设  $R$  是含幺环,  $M_R$  是右  $R$ -模. 那么

- (1) 对任何  $M$  的子模  $M'$  有  $\text{Ass}(M') \subseteq \text{Ass}(M)$ .
- (2) 对任何  $M$  的本质子模  $M'$  有  $\text{Ass}(M') = \text{Ass}(M)$ . 特别地, 总有  $\text{Ass}_E(M) = \text{Ass}(M)$ .
- (3) 对任给  $R$ -模正合列  $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ , 有  $\text{Ass}(M) \subseteq \text{Ass}(M') \cup \text{Ass}(M'')$ .
- (4) 对  $R$ -模  $M_1, \dots, M_n$  有  $\text{Ass}(M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n) = \bigcup_{i=1}^n \text{Ass}(M_i)$ .
- (5) 若  $R$  满足双边理想升链条件 (例如  $R$  是单边 Noether 环), 那么  $M \neq 0$  当且仅当  $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ .
- (6) 若  $M$  是一致模 (例如不可分内射模, 见 [命题1.8]), 那么  $|\text{Ass}(M)| \leq 1$ .

*Proof.* (1) 是明显的, (2) 由  $E(M)$  的素子模  $X$  和  $M$  之交是  $M$  的素子模立即得到. 现在说明 (3), 任取  $P \in \text{Ass}M$  并设  $M$  的素子模  $N$  满足  $\text{Ann}_R N = P$ . 如果  $N \cap \text{Im}\alpha \neq 0$ , 那么  $M'$  含有一个零化子是  $P$  的素子模, 结论成立. 如果  $N \cap \text{Im}\alpha = 0$ , 那么把  $\beta$  限制于  $N$  上是单的, 由此知  $\beta(N)$  是  $M''$  的素子模且  $\beta(N)$  的零化子是  $P$ . 所以  $P \in \text{Ass}(M'')$ , 这就证明了 (3). 由 (1) 与 (3) 立即得到 (4).

(5) 只需验证必要性. 考虑  $R$  的非空理想集  $\mathcal{S} = \{\text{Ann}_R N \mid N \neq 0 \subseteq M\}$ , 由条件知  $\mathcal{S}$  (关于包含关系) 有极大元  $\text{Ann}_R N_0$ , 根据  $N_0$  的选取知  $N_0$  是  $M$  的素子模, 从而  $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ .

(6) 如果  $\text{Ass}(M) = \emptyset$ , 结论直接成立. 下设  $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ , 任取  $P_1 = \text{Ann}_R N_1, P_2 = \text{Ann}_R N_2 \in \text{Ass}M$ , 其中  $N_1, N_2$  是素子模. 那么  $N_1 \cap N_2 \neq 0$  既是  $N_1$  子模又是  $N_2$  子模保证了  $P_1 = \text{Ass}(N_1 \cap N_2) = P_2$ .  $\square$

**Remark 1.103.** 再指出 [命题1.102(4)] 可以加强为无限直和: 任给  $R$ -模族  $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$  有  $\text{Ass}(\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i) = \bigcup_{i \in \Lambda} \text{Ass}(M_i)$ . 根据 [命题1.102(1)], 只需证任何  $P \in \text{Ass}(\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i)$ , 存在某个  $i_0 \in \Lambda$  使得  $P \in \text{Ass}(M_{i_0})$ . 现在设  $\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$  有素子模  $X$  使得  $P = \text{Ann}_R X$ . 注意到  $X$  的非零子模依然是素模, 所以任取  $x \neq 0 \in X, Rx$  是  $\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$  的素子模且  $P = \text{Ann}_R(Rx)$ . 因为  $x \in \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$  只有关于有限多个指标  $i$  的分量非零, 所以存在  $\Lambda$  有有限子集  $\Lambda_0$  使得  $Rx$  可嵌入  $\bigoplus_{i \in \Lambda_0} M_i$ . 于是应用 [命题1.102(4)] 得到

$$P \in \text{Ass}(\bigoplus_{i \in \Lambda_0} M_i) = \bigcup_{i \in \Lambda_0} \text{Ass}(M_i),$$

这说明存在  $i_0 \in \Lambda$  使得  $P \in \text{Ass}(M_{i_0})$ , 故  $\text{Ass}(\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i) = \bigcup_{i \in \Lambda} \text{Ass}(M_i)$ .

**Corollary 1.104.** 设  $M_R$  具有有限一致维数 (例如 Noether 模), 则  $\text{Ass}M$  是有限集且  $|\text{Ass}M| \leq \text{u.dim}M$ .

*Proof.* 若  $\text{u.dim}M = m$ , 那么存在有限个一致模的直和  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$  使得它是  $M$  的本质子模, 进而由本质子模的传递性可得  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$  是  $E(M)$  的本质子模, 所以  $E(M) = E(\bigoplus_{i=1}^m U_i) = \bigoplus_{i=1}^m E(U_i)$ , 那么应用 [命题1.8] 以及 [命题1.102(2)(4)(6)] 知相关素理想集  $\text{Ass}M = \text{Ass}E(M)$  是有限集并且证明过程表明  $|\text{Ass}M| \leq m = \text{u.dim}M$ .  $\square$

**Corollary 1.105.** 设  $R$  是右 Noether 环, 那么任何一致模右  $R$ -模的相关素理想集恰好只有一个元素.

**Remark 1.106.** 相关素理想是单点集的模通常被称为 **cotertiary** 模.

**Example 1.107.** 设含幺环  $R$  有素理想  $P$ , 那么  $E(R/P)$  是 cotertiary 模,  $\text{Ass}(E(R/P)) = \{P\}$ .

在本节最后记录一些交换场景相关素理想集的通用性质. 对含幺交换环  $R$  上的模  $M$ , 我们已经在 [命题1.101] 中看到  $P \in \text{Ass}M$  的充要条件是存在  $x \neq 0 \in M$  使得  $P = \text{ann}_R(x)$ . 在交换代数中通常使用该等价刻画作为相关素理想的原始定义. 当  $R$  是交换 Noether 环时, 我们能够对  $\text{Ass}M$  说更多.

**Lemma 1.108.** 设  $R$  是交换 Noether 环,  $M$  是非零有限生成  $R$ -模, 记  $Z(M)$  是  $M$  在  $R$  中的零因子集. 那么

- (1) 集合  $\{\text{ann}(x) \mid x \neq 0 \in M\}$  中的任何一个零化子都含于该集合的某个极大元 (也是  $M$  的相关素理想) 中, 该集合的极大元是有限的, 并且  $Z(M)$  就是这有限个极大零化子之并;
- (2) 对任何理想  $I \subseteq Z(M)$ , 存在  $P \in \text{Ass}(M)$  使得  $I \subseteq P$ .

*Proof.* (1) 先说明对每个  $x \neq 0 \in M$ ,  $\text{ann}(x)$  一定包含于集合  $\{\text{ann}(x) \mid x \neq 0 \in M\}$  的某个极大元中. 考虑集合  $\{\text{ann}(y) \mid x \neq 0 \in M, \text{ann}(x) \subseteq \text{ann}(y)\}$ , 那么它非空, 故由  $R$  是 Noether 环知该理想集有极大元, 这证明了第一个结论. 易见  $Z(M) = \bigcup_{x \neq 0 \in M} \text{ann}(x)$ , 所以  $Z(M)$  可表为  $\{\text{ann}(x) \mid x \neq 0 \in M\}$  所有极大元之并 (容易验证每个极大元都是素理想, 故是  $M$  的相关素理想). 因此我们要验证的只有  $\{\text{ann}(x) \mid x \neq 0 \in M\}$  的极大元数

目有限. 若不然, 设  $\{\text{ann}(x_i) | x_i \neq 0 \in M, i \in \Lambda\}$  是极大元全体, 其中指标集  $\Lambda$  是无限集. 考虑所有  $x_i$  生成的子模  $N$ , 那么  $N$  作为  $M$  的子模是有限生成的, 设  $N$  可由  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$  生成, 那么

$$\text{Ann}_R(N) = \bigcap_{k=1}^n \text{ann}(x_{i_k}) \subseteq \text{ann}(y), \forall y \in N.$$

取  $y = x_{i_{n+1}}, i_{n+1} \in \Lambda$  使得  $x_{i_{n+1}} \neq x_{i_k}, k = 1, 2, \dots, n$ , 那么  $\bigcap_{k=1}^n \text{ann}(x_{i_k}) \subseteq \text{ann}(x_{i_{n+1}})$ , 于是由素理想性质知存在某个  $k$  使得  $\text{ann}(x_{i_k}) \subseteq \text{ann}(x_{i_{n+1}})$ , 再由极大性得到  $\text{ann}(x_{i_k}) = \text{ann}(x_{i_{n+1}})$ , 得到矛盾. 所以集合  $\{\text{ann}(x) | x \neq 0 \in M\}$  中的极大元数目有限.

(2) 设  $\{\text{ann}(x_1), \dots, \text{ann}(x_m)\}$  是集合  $\{\text{ann}(x) | x \neq 0 \in M\}$  的极大元全体, 那么

$$I \subseteq Z(M) = \text{ann}(x_1) \cup \text{ann}(x_2) \cup \dots \cup \text{ann}(x_m),$$

因为每个  $\text{ann}(x_k)$  是素理想, 所以存在某个  $k_0$  使得  $I \subseteq \text{ann}(x_{k_0})$ .  $\square$

**Remark 1.109.** 根据 [推论1.104], 交换 Noether 环上有限生成模的相关素理想集是有限集.

如果  $R$  是含幺交换 Noether 环,  $S$  是  $R$  的乘闭子集,  $M$  是  $R$ -模, 我们可以搞清楚局部化后的模  $M_S$  作为  $R$ -模的相关素理想集与  $M$  的相关素理想集之间的关系. 并且相关素理想一定在支集中.

**Lemma 1.110.** 设  $R$  是含幺交换 Noether 环,  $S$  是  $R$  的乘闭子集,  $M$  是  $R$ -模 (不需要有限生成). 那么:

- (1) 我们有  $\text{Ass}_R(M_S) = \text{Ass}_R(M) \cap \{P \in \text{Spec } R | P \cap S = \emptyset\}$ , 即局部化  $M_S$  的相关素理想集就是  $M$  相关素理想集中那些与  $S$  不相交的素理想全体.
- (2) 对任意素理想  $P$ ,  $P \in \text{Ass}_R(M)$  的充要条件是  $P_P \in \text{Ass}_{R_P}(M_P)$ .
- (3)  $\text{Ass } M \subseteq \text{Supp } M$  且  $\text{Supp } M$  中的极小元都在  $\text{Ass } M$  中. 特别地, 当  $M = R$  时,  $\text{Spec}(R) = \text{Supp } R$  中任何极小元, 即  $R$  的所有极小素理想, 都是  $R$  作为  $R$ -模的相关素理想.

*Proof.* (1) 这个结论的证明可直接验证得到. 具体地, 任取  $P \in \text{Ass}_R(M_S)$ , 可设  $x/s \in M_S$  使得  $\text{ann}(x/s) = P$ , 则  $P$  与  $S$  不交. 下面说明  $P$  是  $M$  某个元素的零化子. 因为  $P$  是有限生成理想, 可设  $P = (p_1, \dots, p_t)$ , 对每个  $p_i$ , 存在  $u_i \in S$  使得  $u_i p_i x = 0$ , 那么  $p_i \in \text{ann}(u_1 u_2 \cdots u_t x)$ ,  $i = 1, \dots, t$ , 从而  $P = \text{ann}(u_1 u_2 \cdots u_t x)$ , 故  $P \in \text{Ass}_R(M)$  且与  $S$  不交. 另一方面, 如果  $P \in \text{Ass}_R(M)$  且与  $S$  不相交, 那么存在  $x \in M$  使得  $\text{ann}(x) = P$ , 任取  $t \in S$ , 易验证  $P = \text{ann}(tx/t)$ .

(2) 我们使用 (1) 所证明的等式来证明 (2). 必要性: 由  $P \cap (R - P) = \emptyset$  得  $P \in \text{Ass}_R(M_P)$ , 设  $P = \text{ann}_R(x/s)$ , 有  $P_P = \text{ann}_{R_P}(x/s)$ , 所以  $P_P \in \text{Ass}_{R_P}(M_P)$ . 充分性: 如果  $P_P \in \text{Ass}_{R_P}(M_P)$ , 设  $P_P = \text{ann}_{R_P}(x/s)$ , 则  $P = \text{ann}_R(x/s)$ , 故由 (1) 知  $P \in \text{Ass}_R(M)$ .

(3) 任取  $P \in \text{Ass } M$ , 则  $M$  有子模与  $R/P$  同构, 于是有正合列  $0 \longrightarrow R/P \xrightarrow{\alpha} M$ , 因为  $R_P$  作为  $R$ -模平坦, 所以有  $R_P$ -模正合列  $0 \longrightarrow R_P \otimes_R R/P \xrightarrow{\text{id}_{R_P} \otimes \alpha} R_P \otimes_R M$ , 故得形如  $0 \longrightarrow R_P/P_P \longrightarrow M_P$  的  $R_P$ -模正合列, 由此知  $M_P \neq 0$ , 于是  $\text{Ass } M \subseteq \text{Supp } M$ .

下证  $\text{Supp } M$  中的极小元  $P$  都在  $\text{Ass } M$  中, 根据 (2) 知只要证  $P_P \in \text{Ass}_{R_P}(M_P)$  即可. 这时  $M_P \neq 0$  且  $P$  的选取方式保证了对任何素理想  $Q \subsetneq P$  有  $M_Q = 0$ , 这导致  $(M_P)_{Q_P} = 0$ . 于是知  $\text{Supp}(M_P) = \{P_P\}$ , 因此  $\text{Ass}_{R_P}(M_P)$  非空且前面证明的  $\text{Ass}_{R_P}(M_P) \subseteq \text{Supp}(M_P)$  迫使  $\text{Ass}_{R_P}(M_P) = \{P_P\}$ , 得证.  $\square$

回忆交换代数中对准素子模也有相关素理想的概念, 这和我们刚刚介绍的相关素理想是有关系的. 事实上很容易验证对含幺交换 Noether 环  $R$  上的有限生成模  $M$ , 真子模  $N$  是以  $Q$  为相关素理想的准素子模当且仅当  $\text{Ass}(M/N) = \{Q\}$ : 必要性是明显的, 因为对每个  $x \notin N$ , 有  $\sqrt{\text{ann}(x+N)} = Q$ , 而  $\text{Ass}(M/N)$  非空, 任何  $P \in \text{Ass}(M/N)$  满足  $P = \sqrt{P} = Q$ . 充分性: 对每个  $x \in M - N$ , 相关素理想集  $\text{Ass}(R(x+N)) \neq \emptyset$ , 故  $\text{Ass}(R(x+N)) = \{Q\}$ . 所以  $\text{Supp}(R(x+N))$  的极小元唯一, 就是  $Q$ , 从而由  $\text{Supp}(R(x+N)) = V(\text{Ann}_R(R(x+N))) = V(\text{ann}(x+N))$  得到  $Q = \sqrt{\text{ann}(x+N)}$ . 即  $Q = \sqrt{\text{ann}(x+N)}, \forall x \in M - N$ , 于是由  $M$  是有限生成模得到  $\sqrt{\text{Ann}_R(M/N)} = Q$ . 容易验证对每个  $a \in R$  所诱导的  $M/N$  上左乘变换  $a_l : M/N \rightarrow M/N$  不是单同态就是幂零同态, 故  $N$  是以  $Q$  为相关素理想的准素子模.

**Example 1.111.** 设含幺交换 Noether 环  $R$  有根理想  $I$ , 则  $\text{Ass}_R(R/I)$  就是含  $I$  的极小素理想全体.

*Proof.* 不妨设  $I$  是真理想且  $P_1, \dots, P_r$  是全体含  $I$  极小素理想, 则对每个  $P_i$ , 取  $x \in \bigcap_{j \neq i} P_j - P_i$ , 易验证  $P_i = \text{ann}_R(x+I) \in \text{Ass}_R(R/I)$ . 反之, 若  $Q = \text{ann}_R(x+I)$  是相关素理想, 那么  $x \notin I$ , 于是存在  $P_i$  使得  $x \notin P_i$ , 由此得到  $Q = \text{ann}_R(x+I) \subseteq P_i$ , 再由  $P_i$  的极小性迫使  $Q = \text{ann}_R(x+I) = P_i$  是极小素理想.  $\square$

**Remark 1.112.** 这时可以给相关素理想一个几何解释. 设  $\mathbb{k}$  是代数闭域,  $X \subseteq \mathbb{k}^n$  是非空仿射簇, 那么理想  $I(X)$  是根理想并且多项式环  $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  中包含  $I(X)$  的极小素理想全体对应  $X$  的不可约分支. 而前面的讨论我们看到, 坐标环  $\mathcal{O}(X) = R/I(X)$  作为  $R$ -模的相关素理想集  $\text{Ass}_R(\mathcal{O}(X))$  就是含  $I(X)$  的极小素理想全体. 故相关素理想对应了仿射簇的不可约分支. 所故可把相关素理想集视作仿射簇不可约分支的推广.

## 1.7 一致维数: 通用性质

对任何模  $M$ , 我们已经定义了它的一致维数  $\text{u.dim}_R M$ . 当  $M$  不包含非零子模无限直和时, 它有有限的一致维数, 并且该维数表示  $M$  的可表示为有限个一致子模直和的本质子模直和项数目. 根据 [定理1.85], 对具有有限一致维数的模, 它所包含的任何有限直和, 直和项数目都被该模的一致维数控制. 本节主要介绍一些关于一致维数的基本性质, 它们是后续证明 Goldie 定理的基本工具.

**Lemma 1.113.** 设  $M, M_1, M_2$  是模, 那么

- (1)  $M$  的一致维数是 1 当且仅当  $M$  是一致模.
- (2)  $M$  的一致维数是 0 当且仅当  $M = 0$ .
- (3) 若  $M$  有一致维数  $n$ , 那么它的任何子模  $N$  满足  $\text{u.dim}_R N \leq n$ . 等号成立当且仅当  $N$  是本质子模.
- (4) (一致维数保有限直和)  $\text{u.dim}_R(M_1 \oplus M_2) = \text{u.dim}_R M_1 + \text{u.dim}_R M_2$ .
- (5)  $M$  有有限一致维数的充要条件是  $M$  满足补子模升链条件. 事实上  $\text{u.dim}_R M$  就是补子模链的最大长度.

*Proof.* (1) 充分性明显. 必要性: 假设  $M$  不是一致的, 则存在非零子模  $M'$  不是本质子模, 于是存在非零子模  $C$  使得  $M' \oplus C$  是  $M$  的本质子模, 这和  $\text{u.dim}_R M = 1$  矛盾. (2) 由一致维数的定义即得.

(3) 首先  $N$  作为具有有限一致维数的模的子模也具有有限一致维数. 如果  $N$  的一致维数至少是  $n+1$ , 那么  $N$  包含  $n+1$  个非零子模的直和, 这和 [定理1.85(1)] 矛盾. 故  $\text{u.dim}_R N \leq n$ . 下面再说明  $\text{u.dim}_R N = n$  当且仅当  $N$  是本质子模. 若  $\text{u.dim}_R N = n$ , 那么存在  $N$  的一致子模  $V_1, \dots, V_n$  使得  $\bigoplus_{i=1}^n V_i$  是  $N$  的本质子模, 由  $\text{u.dim}_R M = n$  以及 [定理1.85] 可见  $\bigoplus_{i=1}^n V_i$  是  $M$  的本质子模, 从而  $N$  包含一个子模是  $M$  的本质子模, 这

说明  $N$  是本质的. 反之, 若  $N$  是本质子模, 并设  $M$  的一致子模  $U_1, \dots, U_n$  使  $\bigoplus_{i=1}^n U_i$  是  $M$  的本质子模, 那么每个  $U_i \cap N \neq 0$  它是  $N$  的一致子模, 从而  $N$  包含非零子模的直和  $\bigoplus_{i=1}^n U_i \cap N$ , 这说明  $\text{u.dim}_R N \geq n$ .

(4) 如果  $M_1, M_2$  中有一个一致维数不是有限的, 结论直接成立. 下设  $M_1, M_2$  均有有限一致维数, 于是由 [引理1.3] 知  $M_1 \oplus M_2$  有个本质子模可表为  $\text{u.dim}_R M_1 + \text{u.dim}_R M_2$  个一致子模的直和.

(5) 根据 [引理1.5], 对每个补子模  $X$ , 若有子模  $X'$  真包含  $X$ , 那么  $X'$  会有非零子模  $Y$  使得  $Y \cap X = 0$ , 即产生直和  $X \oplus Y$ . 所以, 当  $M$  的一致维数  $\text{u.dim}_R M = n < +\infty$  时,  $M$  的任何补子模链长度不会超过  $n$ . 否则, 若有补子模严格升链  $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_{n+1}$ , 会产生直和项数为  $n+1$  的非零子模的直和, 这将与  $\text{u.dim}_R M = n$  矛盾. 由此我们看到当  $M$  的一致维数有限时, 任何补子模严格升链长度被一致维数控制, 进而  $M$  满足补子模升链条件. 反之, 假设  $M$  没有有限的一致维数, 即  $M$  包含非零子模的无限直和, 设  $M$  包含非零子模的无限直和  $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ , 对每个  $t \geq 1$ ,  $\bigoplus_{i=t}^{\infty} M_i$  真包含  $\bigoplus_{i=t+1}^{\infty} M_i$ , 故可选取  $\bigoplus_{i=t+1}^{\infty} M_i$  的补子模  $C_{t+1}$  以及选取  $\bigoplus_{i=t}^{\infty} M_i$  的补子模  $C_t$  使得  $C_t \subsetneq C_{t+1}$  (事实上, 对选定的  $C_t$ , 考虑  $C_{t+1} = M_t \oplus C_t$  即可). 于是我们得到补子模严格升链, 得到矛盾. 因此  $M$  不含非零子模的无限直和, 即它具有有限一致维数. 目前我们已经说明一个模具有有限一致维数的充要条件是它满足补子模升链条件. 而前面证明过程表明

- 若  $\text{u.dim}_R M = n$ , 则  $M$  任何补子模严格升链长度不超过  $n$ .
- 若  $M$  包含非零子模的直和  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ , 那么可得长度是  $n$  的补子模升链  $C_1 \subsetneq \dots \subsetneq C_{n-1} \subsetneq C_n \subsetneq M$ .
- 若  $M$  包含非零子模的无限直和,  $M$  有无限长的补子模严格升链.

由此可见模  $M$  的一致维数  $\text{u.dim}_R M$  就是补子模链的最大长度.  $\square$

**Remark 1.114.** 特别地, 结论 (1) 和 (4) 表明如果一个完全可约模可分解为  $t$  个不可约模直和, 那么  $t$  就是该完全可约模的一致维数. 结论 (4) 还表明任何模与其本质扩张具有相同的一致维数.

当我们把含幺环  $R$  视作自身上的右模  $R_R$  来讨论一致维数时, 把  $\text{u.dim}_R R_R$  记为  $\text{r.u.dim}_R$  或  $\text{u.dim}_R$ .

**Example 1.115.** 设  $R$  是右 Noether 环, 那么  $\text{r.u.dim}_R < +\infty$ .

**Example 1.116.** 设  $\mathbb{H}$  是四元数环, 它是中心单代数. 我们有  $\text{u.dim}_{\mathbb{H}} = 1$ . 因为  $\mathbb{H}$  是除环 (也是  $\mathbb{R}$  上有限维单代数), 所以  $\mathbb{H}$  上不可分内射模同构类只有一个, 即  $\mathbb{H}$  作为自身上右模所在的同构类. 这时  $\mathbb{H}$  作为  $\mathbb{R}$  上内射模的一致维数为  $\text{u.dim}_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4$ . 之后会在 [命题1.126] 中看到更一般的一致维数关系.

**Remark 1.117.** 一般地, 如果含幺环  $R$  是 Artin 半单环, 那么  $R$  上的 (非零) 模都是完全可约的, 也都是内射模. 因此  $R$  上的不可分内射模就是  $R$  上单模. 如果  $R = M_n(\mathbb{k})$  是域上矩阵代数, 那么  $R$  上的不可约模作为  $\mathbb{k}$ -模的一致维数是  $n$ .

下述引理不仅告诉我们含幺环  $R$  的右商环  $Q$  如果存在, 那么  $R$  和  $Q$  的一致维数同时有限或同时无限, 也提供了证明环/右商环 (如果存在) 中右理想是本质右理想的手段.

**Lemma 1.118.** 设  $R$  是含幺环,  $S$  是由一些正则元构成的右 Ore 集 (这时局部化的标准映射  $\lambda: R \rightarrow Q$  是单射), 那么有右局部化  $Q = R_S$ . 对  $R$  的右理想  $I$  和  $Q$  的右理想  $J$ , 记  $I_S = \{as^{-1} | a \in I, s \in S\}$  是  $Q$  的右理

想,  $J \cap R = \lambda^{-1}(J) = \{b \in R \mid \text{存在 } s \in S \text{ 使 } bs^{-1} \in J\}$  是  $R$  的右理想. 则有

- (1)  $I$  是  $R$  的本质右理想当且仅当  $I_S$  是  $Q$  的本质右理想.
- (2)  $J$  是  $Q$  的本质右理想当且仅当  $R \cap J$  是  $R$  的本质右理想.
- (3)  $\text{r.u.dim} Q = \text{r.u.dim} R$ .

*Proof.* 利用  $S$  中元素均为正则元, 容易验证  $R$  的任何右理想  $I_1, I_2$ , 有  $I_1 \cap I_2 = 0 \Leftrightarrow (I_1)_S \cap (I_2)_S = 0$ . 特别地, 对右理想  $I_1$ , 有  $I_1 = 0 \Leftrightarrow (I_1)_S = 0$ . 此外,  $Q$  的任何右理想  $J_1$  总满足  $J_1 = (J_1 \cap R)_S$ , 故 (1)(2) 明显成立. 为了看到 (3) 成立, 只需注意下面两个容易验证的事实.

- 对  $R$  的任何右理想族  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ,  $(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha)_S = \sum_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha)_S$ . 且  $\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$  是直和当且仅当  $\sum_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha)_S$  是直和.
- 对  $R$  的非零右理想  $U$ ,  $U$  是一致模当且仅当  $U_S$  作为右  $Q$ -模是一致的.

□

为之后引用方便, 这里记录些关于半素环极小素理想相关的基本事实 (不会在 Goldie 定理证明中用到).

**Proposition 1.119.** 设含幺环  $R$  是半素环, 且有理想  $I$ . 那么:

- (1)  $\text{lann}(I) = \text{rann}(I)$ , 以下记作  $\text{ann}(I)$ .
- (2)  $\text{ann}(I)$  是  $I$  作为  $R$  的  $R$ - $R$  双子模 (或等价地, 左  $R \otimes_{\mathbb{Z}} R^{op}$ -子模) 唯一的补子模.
- (3)  $\text{ann}(I)$  是  $R$  的所有不包含  $I$  的极小素理想之交.
- (4)  $I$  作为  $R$ - $R$  双模是一致模当且仅当  $\text{ann}(I)$  是  $R$  的极小素理想.
- (5)  $I$  作为  $R$ - $R$  双子模是  $R$  的本质子模当且仅当  $\text{ann}(I) = 0$ .
- (6) 如果  $I$  不含于  $R$  的任何极小素理想, 那么  $I$  作为  $R$ - $R$  双子模是  $R$  的本质子模.

*Proof.* 因为  $R$  是半素环, 所以  $R$  的理想  $N$  一旦满足  $N^2 = 0$ , 便有  $N = 0$ . 现在  $\text{lann}(I)$  是  $R$  的理想且满足  $\text{lann}(I)I = 0$ , 所以  $(I\text{lann}(I))^2 = 0$ . 于是  $\text{lann}(I) \subseteq \text{rann}(I)$ . 对称地, 得到  $\text{rann}(I) \subseteq \text{lann}(I)$ , 故 (1) 成立. 如果  $R$  的理想  $A$  满足  $A \cap I = 0$ , 那么  $AI = 0$ , 于是  $A \subseteq \text{ann}(I)$ . 这说明  $I$  作为  $R$ - $R$  双模的子模的任何补子模都含于  $\text{ann}(I)$ . 注意到  $(\text{ann}(I) \cap I)^2 = 0$ , 所以  $R$  是半素环也保证了  $\text{ann}(I)$  是  $I$  作为  $R$  的  $R$ - $R$  双子模的唯一补子模, 这就证明了 (2). 下证 (3), 设  $R$  的所有不包含  $I$  的极小素理想之交为  $L$  (如果不存在这样的极小素理想, 那么  $I = R$ , 自然也有  $L = R$ ). 因为  $R$  是半素的, 所以  $L$  和所有含  $I$  极小素理想之交是零, 这蕴含  $L \cap I = 0$ . 由 (2) 的证明过程得到  $L \subseteq \text{ann}(I)$ . 由于  $\text{ann}(I)I = 0$ , 所以对任何  $R$  的不含  $I$  的极小素理想  $P$ , 有  $\text{ann}(I) \subseteq I$ . 至此我们得到  $\text{ann}(I)$  就是所有不包含  $I$  的极小素理想之交.

(4) 假设  $I$  作为  $R$ - $R$  双模是一致模 ( $I \neq 0$  说明  $\text{ann}(I)$  是真理想), 那么对  $I$  包含的任何非零理想  $I'$ ,  $I \cap \text{ann}(I') = 0$ : 若不然, 由  $I'$  是  $I$  的本质子模得到  $I' \cap \text{ann}(I') \neq 0$ , 这和 (2) 矛盾. 于是由  $\text{ann}(I)$  是  $I$  唯一的补子模得到  $\text{ann}(I') \subseteq \text{ann}(I)$ . 而明显有  $\text{ann}(I) \subseteq \text{ann}(I')$ , 故前面的讨论说明这时对  $I$  包含的任何非零理想  $I'$ , 有  $\text{ann}(I') = \text{ann}(I)$ . 下证  $\text{ann}(I)$  是素理想, 一旦证明, 则由 (3) 迫使  $\text{ann}(I)$  是  $R$  的极小素理想. 现在设  $R$  的理想  $A, B$  满足  $AB \subseteq \text{ann}(I)$ . 如果  $BI = 0$ , 结论直接成立. 如果  $BI \neq 0$ , 那么  $BI$  是含于  $I$  的非零理想, 我们得到  $\text{ann}(BI) = \text{ann}(I)$ . 进而  $A \subseteq \text{ann}(I)$ . 至此我们证明了  $\text{ann}(I)$  是  $R$  的极小素理想. 反之, 如果  $\text{ann}(I)$  是  $R$  的极小素理想, 我们说明对  $I$  包含的任何非零理想  $I'$ , 总有  $\text{ann}(I) = \text{ann}(I')$ : 注意到 (3) 保证了  $\text{ann}(I')$  是一些不包含  $I'$  的极小素理想之交, 结合  $\text{ann}(I') \supseteq \text{ann}(I)$  得到不包含  $I'$  的极小素理想就是  $\text{ann}(I)$ . 因此  $\text{ann}(I) = \text{ann}(I')$ . 下面说明  $I$  作为  $R$ - $R$  双模是一致模. 若不然,  $I$  包含非零子模的直和  $A \oplus B$ ,

这里  $A, B$  都是  $R$  的非零理想. 进而  $\text{ann}(A) \supsetneq \text{ann}(I)$ (因为  $\text{ann}(A)$  包含  $B$ , 而  $\text{ann}(I) \cap I = 0$ ). 这和前面的观察矛盾. 由此得到  $I$  作为  $R$ - $R$  双模是一致模.

(5) 如果  $I$  作为  $R$ - $R$  双子模是  $R$  的本质子模, 那么 (2) 保证了  $\text{ann}(I) = 0$ . 反之, 当  $\text{ann}(I) = 0$  时, 由  $\text{ann}(I)$  是  $I$  的补子模得到  $I$  和  $R$  的非零理想之交非零. 即  $I$  作为  $R$ - $R$  双子模是  $R$  的本质子模.

(6) 如果  $I$  不含于  $R$  的所有极小素理想, 那么由  $N(R)$  是  $R$  的所有极小素理想之交,  $R$  半素以及 (3) 便知  $\text{ann}(I) = 0$ . 现在应用 (5) 得到  $I$  是本质双边理想.  $\square$

之后我们把含幺环  $R$  的形如  $\text{ann}(I)$ , 这里  $I$  是  $R$  的理想, 的双边理想称为  $R$  的零化理想.

**Proposition 1.120.** 设含幺环  $R$  是半素的, 那么以下等价:

- (1)  $R$  作为  $R$ - $R$  双模有有限一致维数.
- (2)  $R$  仅有有限多个极小素理想.
- (3)  $R$  仅有有限多个零化理想.
- (4)  $R$  关于零化理想满足升链条件.

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2): 设  $R$  作为  $R$ - $R$  双模的一致维数是  $n$ . 由一致维数定义, 存在  $R$  的本质双边理想  $U_1, \dots, U_n$  使得  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$  是  $R$  的本质理想. 命  $P_i = \text{ann}U_i$ , 则 [命题1.119(4)] 说明  $P_i$  是  $R$  的极小素理想. 注意到

$$\bigcap_{i=1}^n P_i = \bigcap_{i=1}^n \text{ann}U_i \subseteq \text{ann}(U_1 \oplus \dots \oplus U_n) = 0,$$

最后一个等号来自 [命题1.119(5)]. 这说明  $R$  有限多个极小素理想之交为零. 于是这有限多个极小素理想的乘积为零, 迫使  $R$  的极小素理想数目有限.

(2) $\Rightarrow$ (3): 根据 [命题1.119(3)], 由  $R$  的极小素理想数目有限迫使  $R$  仅有有限多个零化理想.

(3) $\Rightarrow$ (4): 因为  $R$  的零化理想数目仅有有限多个, 所以  $R$  关于零化理想满足升链条件.

(4) $\Rightarrow$ (1): 根据 [命题1.119(2)],  $R$  作为  $R$ - $R$  双模中的补子模都是零化理想. 故由 [引理1.113(5)] 即得.  $\square$

**Remark 1.121.** 特别地, 单边 Noether 环关于双边理想满足升链条件说明  $R$  仅有有限多个极小素理想.

在交换代数中我们知道极小素理想都不含正则元, [?] 中给出了相应非交换推广, 这里记录在下面的 [定理1.122]. 首先引入两个术语: 设  $R$  是含幺环,  $a \in R$ . 如果  $a$  满足存在  $R$  中元素  $r_1, r_2$  使得  $r_1r_2 \neq 0$  且  $r_1ar_2 = 0$ , 则称  $a$  是  $R$  中的弱零因子. 如果  $R$  的非空子集  $S$  满足  $0 \notin S, 1 \in S$  且对任何  $s_1, s_2 \in S$ , 都存在  $b \in R$  使得  $s_1bs_2 \in S$ , 那么称  $S$  是  $R$  的  $m$ -系.  $R$  的零因子都是弱零因子,  $R$  的任何素理想  $P$  都诱导  $m$ -系  $R - P$ . 如果  $R$  有  $m$ -系  $T$ , 那么总存在素理想  $Q$  使得  $Q \cap T = \emptyset$ : 命  $\mathcal{S} = \{I \subseteq R \mid I \text{是 } R \text{ 的理想且 } I \cap T = \emptyset\}$ . 那么  $0 \in \mathcal{S}$  说明  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  是非空偏序集. 不难验证  $\mathcal{S}$  任何全序子集有上界, 所以应用 Zorn 引理得到  $\mathcal{S}$  有极大元  $Q$ . 我们验证  $Q$  是  $\mathcal{S}$  的素理想: 若不然, 则存在  $R$  的理想  $I, J$  使得  $IJ \subseteq Q$  但  $I, J \not\subseteq Q$ . 用  $I+Q, J+Q$  替换  $I, J$  可不妨设  $I, J \supsetneq Q$ . 所以由  $Q$  的极大性,  $I \cap T \neq \emptyset, J \cap T \neq \emptyset$ . 设  $t_1, t_2 \in T$  满足  $t_1 \in I, t_2 \in J$ . 那么  $t_1Rt_2 \subseteq IJ \subseteq Q$ . 因为  $T$  是  $m$ -系, 所以存在  $b \in R$  使得  $t_1bt_2 \in T$ , 于是  $Q \cap T \neq \emptyset$ , 矛盾. 故  $Q$  是素理想.

**Theorem 1.122.** 设含幺环  $R$  有极小素理想  $P$ , 则  $P$  中元素都是弱零因子. 特别地,  $P$  不含中心正则元.

*Proof.* 记  $S = R - P$ . 假设  $P$  有元素  $a$  不是弱零因子, 命

$$T = \{r_1a^{i_1}r_2a^{i_2} \cdots r_k a^{i_k} r_{k+1} \mid k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}, r_1 \cdots r_{k+1} \in S\}.$$

因为  $S \subseteq T$ , 所以  $1 \in T$ . 并且  $1 \in S$  保证  $a \in T$ , 这说明  $S \subsetneq T$ . 我们断言  $T$  是  $R$  的  $m$ -系. 一旦证明该断言, 根据前面的讨论, 存在  $R$  的素理想  $Q$  使得  $Q \subseteq R - T \subsetneq R - S = P$ , 这与  $P$  的极小性矛盾.

先说明  $0 \notin T$ . 若不然, 有  $T$  中元素  $r_1 a^{i_1} r_2 a^{i_2} \cdots r_k a^{i_k} r_{k+1} = 0$ . 如果有某个幂指数  $i_j \geq 1$ , 那么在表达式  $r_1 a^{i_1} r_2 a^{i_2} \cdots r_k a^{i_k} r_{k+1}$  中的  $a^{i_j}$  部分删去一个  $a$  后, 得到的表达式  $r_1 a^{i_1} r_2 a^{i_2} \cdots r_j a^{i_j-1} r_{j+1} \cdots r_k a^{i_k} r_{k+1} = 0$ (因为  $a$  不是弱零因子). 于是我们得到  $r_1 r_2 \cdots r_k = 0$ . 这说明  $0 \in S$ , 矛盾.

最后说明任取  $t_1, t_2 \in T$ , 总存在  $b \in R$  使得  $t_1 b t_2 \in T$ . 我们设

$$t_1 = r_1 a^{i_1} r_2 a^{i_2} \cdots r_k a^{i_k} r_{k+1}, t_2 = s_1 a^{j_1} s_2 a^{j_2} \cdots s_\ell a^{j_\ell} s_{\ell+1}.$$

这里  $r_1 \cdots r_{k+1}, s_1 \cdots s_{\ell+1} \in S$ . 因为  $S$  是  $m$ -系, 所以存在  $b \in R$  使得  $r_1 \cdots r_{k+1} b s_1 \cdots s_{\ell+1} \in S$ . 于是根据  $T$  的构造我们得到  $r_1 a^{i_1} r_2 a^{i_2} \cdots r_k a^{i_k} r_{k+1} b s_1 a^{j_1} s_2 a^{j_2} \cdots s_\ell a^{j_\ell} s_{\ell+1} \in T$ , 即  $t_1 b t_2 \in T$ .  $\square$

对含幺环  $R$  和素理想  $P$ , 如果  $I$  是含于  $P$  的理想, 那么我们总能够选取到含于  $P$  的  $I$  上极小素理想: 命

$$\mathcal{I} = \{Q \subseteq R \mid I \subseteq Q \subseteq P \text{ 且 } Q \text{ 是素理想}\}.$$

那么  $P \in \mathcal{I}$  说明  $\mathcal{I}$  非空. 现在我们定义  $\mathcal{I}$  上偏序关系  $Q_1 \leq Q_2 \Leftrightarrow Q_1 \supseteq Q_2$ (注意包含关系反向). 那么对任何  $\mathcal{I}$  的(非空)全序子集  $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ , 定义  $Q = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} Q_\alpha$ , 那么  $Q$  是真理想且  $Q \supseteq I$ . 我们验证  $Q$  是素理想: 如果  $R$  的理想  $A, B$  满足  $AB \subseteq Q$  但  $A, B \not\subseteq Q$ , 那么存在指标  $\alpha, \beta \in \Lambda$  使得  $A \not\subseteq Q_\alpha, B \not\subseteq Q_\beta$ . 由  $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  的全序性, 有  $Q_\alpha \subseteq Q_\beta$  或  $Q_\beta \subseteq Q_\alpha$ . 不妨设  $Q_\alpha \subseteq Q_\beta$ , 那么  $B \not\subseteq Q_\alpha$ . 但  $AB \subseteq Q_\alpha$ , 这与  $Q_\alpha$  是素理想矛盾. 因此  $Q$  是素理想,  $Q \in \mathcal{I}$ . 故  $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  关于  $\leq$  有上界  $Q$ . 应用 Zorn 引理,  $(\mathcal{I}, \leq)$  有极大元  $P_0$ . 于是  $P_0 \subseteq P$  且  $P_0$  是  $I$  上极小素理想. 现在我们用前面的讨论证明:

**Corollary 1.123.** 设含幺环  $R$  有中心子环  $C$ ,  $P$  是  $R$  的素理想.  $c_1, \dots, c_n \in C \cap P$  满足  $c_1$  是  $R$ -正则元,  $c_2$  是  $R/c_1R$ -正则元,  $\dots$ ,  $c_n$  是  $R/(c_1R + \cdots + c_{n-1}R)$ -正则元. 那么  $n \leq \text{ht}P$ .

*Proof.* 因为  $c_1, \dots, c_n \in C \cap P$ , 故  $c_1R + \cdots + c_{n-1}R \subseteq P \subsetneq R$ . 根据 [定理1.122], 任何含幺环的极小素理想都不含中心正则元. 因此  $c_1R$  上的极小素理想都不是  $R$  的极小素理想,  $(c_1R + c_2R)/c_1R$  作为包含  $R/c_1R$  的中心正则元  $c_2 + (c_1R)$  的真理想,  $(c_1R + c_2R)/c_1R$  上极小素理想都不是  $R/c_1R$  的极小素理想,  $\dots$ ,  $(c_1R + \cdots + c_nR)/(c_1R + \cdots + c_{n-1}R)$  上的极小素理想都不是  $R/(c_1R + \cdots + c_{n-1}R)$  上的极小素理想.

根据前面的讨论, 我们可选取  $(c_1R + \cdots + c_nR)/(c_1R + \cdots + c_{n-1}R)$  上的极小素理想  $P_n/(c_1R + \cdots + c_{n-1}R)$  使得  $P_n \subseteq P$ . 那么  $P_n/(c_1R + \cdots + c_{n-2}R)$  是  $R/(c_1R + \cdots + c_{n-2}R)$  的包含  $(c_1R + \cdots + c_{n-1}R)/(c_1R + \cdots + c_{n-2}R)$  的素理想. 那么可选取含于  $P_n/(c_1R + \cdots + c_{n-2}R)$  的  $(c_1R + \cdots + c_{n-1}R)/(c_1R + \cdots + c_{n-2}R)$  上极小素理想  $P_{n-1}/(c_1R + \cdots + c_{n-2}R)$ . 根据  $P_{n-1}$  的选取可知  $P_{n-1}/(c_1R + \cdots + c_{n-1}R)$  是环  $R/(c_1R + \cdots + c_{n-1}R)$  的极小素理想. 所以 [定理1.122] 说明  $c_n \notin P_{n-1}$ . 于是  $P_{n-1} \subsetneq P_n$ .

同样地, 在环  $R/(c_1R + \cdots + c_{n-3}R)$  中, 可选取含于  $P_{n-1}/(c_1R + \cdots + c_{n-3}R)$  的  $(c_1R + \cdots + c_{n-2}R)/(c_1R + \cdots + c_{n-3}R)$  上极小素理想  $P_{n-2}/(c_1R + \cdots + c_{n-3}R)$ . 利用 [定理1.122] 知  $c_{n-2} \notin P_{n-2}$ , 因此有  $P_{n-2} \subsetneq P_{n-1}$ . 重复上述讨论, 我们得到素理想链  $P_n \supsetneq P_{n-2} \supsetneq P_{n-3} \supsetneq \cdots \supsetneq P_2 \supsetneq P_1$ , 这里  $P_1$  是  $c_1R$  上的极小素理想. 根据 [定理1.122],  $R$  上极小素理想都不包含  $c_1R$ , 因此  $P_1$  不是  $R$  的极小素理想. 故又存在  $R$  的素理想  $P_0$  使得  $P_1 \supsetneq P_0$ . 故由  $P \supseteq P_n \supsetneq P_{n-2} \supsetneq P_{n-3} \supsetneq \cdots \supsetneq P_2 \supsetneq P_1 \supsetneq P_0$  得到  $n \leq \text{ht}P$ .  $\square$

在本节最后我们讨论当含幺环  $R$  在中心子环  $C$  上是有限生成模时, 右  $R$ -模的一致维数与其作为  $C$ -模的一致维数间的关系. 以下结论并不会在 Goldie 定理证明中用到, 初次阅读可跳过.

为叙述方便, 下面固定记号  $R$  是  $C$  上模有限代数, 并且  $R = Ca_1 + \cdots + Ca_t$ .  $M_R$  是右  $R$ -模, 那么  $M$  可视作  $C$ -模. 对  $M$  的任何  $C$ -子模  $N$ , 记集合  $\{x \in M \mid xa_i \in N\}$  为  $Na_i^{-1}$ , 这是  $M$  的  $C$ -子模. 考虑  $C$ -模同态

$$j : M/Na_i^{-1} \rightarrow M/N, x + Na_i^{-1} \mapsto xa_i + N,$$

易见这是单射并且  $j$  诱导  $M/Na_i^{-1}$  的  $C$ -子模格到  $M/N$  的  $C$ -子模格的保序嵌入.

现在固定  $M$  的  $C$ -子模, 记  $\mathfrak{b}(N)$  是  $N$  包含的最大  $R$ -子模, 称为  $N$  的界. 下面说明

**Lemma 1.124.** 总有  $\mathfrak{b}(N) = \bigcap_{i=1}^t Na_i^{-1}$ . 如果进一步  $N$  是  $M$  作为  $C$ -模的本质  $C$ -子模, 那么每个  $Na_i^{-1}$  是  $M$  的本质  $C$ -子模. 这时  $\mathfrak{b}(N)$  也是  $M$  的本质  $C$ -子模. 进而  $\mathfrak{b}(N)$  是  $M$  的本质  $R$ -子模.

*Proof.* 等式  $\mathfrak{b}(N) = \bigcap_{i=1}^t Na_i^{-1}$  可直接验证, 这里仅说明等号右边是左边的子集. 任取  $x \in \bigcap_{i=1}^t Na_i^{-1}$ , 那么  $xa_i \in N, \forall 1 \leq i \leq t$ . 于是  $xR \subseteq N$ . 特别地,  $xR \subseteq \mathfrak{b}(N)$ , 这说明  $x \in \mathfrak{b}(N)$ . 下面设  $N$  是  $M$  的本质  $C$ -子模. 任取  $M$  的非零  $C$ -子模  $X$ , 如果  $Xa_i = 0$ , 那么  $X \subseteq Na_i^{-1}$ . 如果  $Xa_i \neq 0$ , 那么由条件  $Xa_i \cap N \neq 0$ , 于是  $X \cap Na_i^{-1} \neq 0$ . 由此知  $Na_i^{-1}$  是  $M$  的本质  $C$ -子模. 其余是明显的.  $\square$

**Lemma 1.125.** 集合  $\{N \subseteq M \mid N \text{ 是 } M \text{ 的 } C \text{-子模且 } \mathfrak{b}(N) = 0\}$  作为关于包含关系的非空偏序集存在极大元.

*Proof.* 记  $\mathcal{S} = \{N \subseteq M \mid N \text{ 是 } M \text{ 的 } C \text{-子模且 } \mathfrak{b}(N) = 0\}$ , 由  $0 \in \mathcal{S}$  知  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  是非空偏序集. 下面用 Zorn 引理说明  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  中存在极大元. 任取其全序子集  $\{N_i\}_{i \in \Gamma}$ , 那么  $\bigcup_{i \in \Gamma} N_i$  也是  $M$  的  $C$ -子模. 下面通过验证

$$\mathfrak{b}\left(\bigcup_{i \in \Gamma} N_i\right) = \bigcap_{j=1}^t \left(\bigcup_{i \in \Gamma} N_i\right) a_j^{-1} = 0$$

来说明  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  满足 Zorn 引理使用条件. 任取  $x \in \mathfrak{b}\left(\bigcup_{i \in \Gamma} N_i\right)$ , 对每个  $1 \leq j \leq t$  有某个  $i_j \in \Gamma$  使得  $xa_j \in N_{i_j}$ . 于是由  $\{N_i\}_{i \in \Gamma}$  全序知存在某个  $1 \leq j_0 \leq t$  使得  $xa_j \in N_{i_{j_0}}, \forall 1 \leq j \leq t$ . 于是知  $x \in \mathfrak{b}(N_{i_{j_0}}) = 0$ .  $\square$

**Proposition 1.126.** 设  $R$  是中心子环  $C$  上模有限代数, 设  $R = Ca_1 + \cdots + Ca_t$ , 并给定右  $R$ -模  $M$ ,  $\text{u.dim}_R M = d$ . 根据 [引理1.125], 可选取  $\{N \subseteq M \mid N \text{ 是 } M \text{ 的 } C \text{-子模且 } \mathfrak{b}(N) = 0\}$  中关于包含关系的极大元, 记作  $N$ . 则:

- (1)  $\text{u.dim}_C(M/N) \leq d \leq \text{u.dim}_C M \leq dt$ .
- (2) 如果  $M_R$  是不可约模, 那么  $M_C$  是完全可约模并且长度至多为  $t$ , 即有  $1 \leq \ell_C(M) \leq t$ . 并且将  $M_C$  分解为不可约  $C$ -模直和 (只可能是有限多项) 后, 直和项两两同构.
- (3) 如果  $M_R$  是有限长的模, 那么  $M_C$  也是有限长的模.

*Proof.* (1) 从 [定理1.85] 不难看到  $\text{u.dim}_R M \leq \text{u.dim}_C M$ . 假设  $\text{u.dim}_C(M/N) \geq d+1$ , 那么  $M$  存在真包含  $N$  的  $C$ -子模  $X_1, \dots, X_k, k \geq d+1$  使得在  $M/N$  中有  $\overline{X_1} \oplus \cdots \oplus \overline{X_k}$ , 其中  $\overline{X_i} = X_i/N$ . 因为  $N$  的极大性, 所以每个  $X_i$  满足  $\mathfrak{b}(X_i) \neq 0$ , 是  $M$  的非零  $R$ -子模. 因为  $M$  作为  $R$ -模的一致维数是  $d$ , 所以存在某个  $1 \leq j \leq k$ , 使得  $\mathfrak{b}(X_j) \cap (\sum_{i \neq j} \mathfrak{b}(X_i)) \neq 0$ . 于是  $N \supseteq X_j \cap (\sum_{i \neq j} X_i) \neq 0$ . 即  $N$  包含某个非零  $R$ -模, 这与  $\mathfrak{b}(N) = 0$  矛盾. 因此  $\text{u.dim}_C(M/N) \leq d$ . 考虑之前引入的  $C$ -子模格间的保序嵌入  $j : M/Na_i^{-1} \rightarrow M/N, x + Na_i^{-1} \mapsto xa_i + N$ ,

那么  $j$  保持  $C$ -子模的有限直和表明  $\text{u.dim}_C M / Na_i^{-1} \leq \text{u.dim}_C M / N \leq d$ . 结合  $\bigcap_{i=1}^t Na_i^{-1} = 0$ (见 [引理1.124]) 知  $M$  到  $\bigoplus_{i=1}^t M / Na_i^{-1}$  的标准映射是  $C$ -模嵌入, 所以  $\text{u.dim}_C M \leq \text{u.dim}_C \bigoplus_{i=1}^t M / Na_i^{-1} \leq dt$ .

(2) 这时条件选取的  $C$ -模  $N$  就是  $M$  的极大  $C$ -子模. 因此  $j: M / Na_i^{-1} \rightarrow M / N, x + Na_i^{-1} \mapsto xa_i + N$  是  $C$ -模嵌入表明  $M / Na_i^{-1}$  不是零模就是不可约  $C$ -模. 所以结合刚刚指出的  $M$  作为  $C$ -模可嵌入  $\bigoplus_{i=1}^t M / Na_i^{-1}$  知  $M$  是完全可约  $C$ -模. 并且由  $\bigoplus_{i=1}^t M / Na_i^{-1}$  作为完全可约  $C$ -模可分解为不超过  $t$  个不可约模的直和知其长度不超过  $t$ . 所以  $M_C$  的长度也不超过  $t$ . 注意到只要  $M / Na_i^{-1} \neq 0$ , 就有  $C$ -模同构  $M / Na_i^{-1} \cong M / N$ . 因此由 Krull-Schmidt 定理知  $M_C$  分解为有限多个不可约  $C$ -模, 直和项间两两同构.

(3) 如果  $M_R$  有有限长, 不妨设  $M \neq 0$ . 设  $M$  有合成列  $M = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_s \supseteq M_{s+1} = 0$ . 由 (2) 知  $M_s$  和  $M_{s-1}/M_s$  作为  $C$ -模都有有限长, 于是  $M_{s-1}$  作为  $C$ -模也有有限长. 同理结合  $M_{s-2}/M_{s-1}$  是不可约  $R$ -模得到它作为  $C$ -模有有限长. 依次类推可得  $M$  作为  $C$ -模有有限长.  $\square$

**Remark 1.127.** 如果设  $t$  是  $R$  作为有限生成  $C$ -模的最小生成元集数目, 那么 [例1.116] 表明  $\text{u.dim}_C M \leq dt$  可能取到等号. 例如我们设  $R_C$  是秩为  $t$  的自由模, 那么总有  $\text{u.dim}_R M \leq \text{u.dim}_C M \leq (\text{u.dim}_R M)(\text{rank}_C R)$ .

**Example 1.128.** 设  $\mathbb{k}$  是域,  $R = M_2(\mathbb{k}) \oplus M_3(\mathbb{k})$ . 那么  $R$  是 Artin 半单环, 因此不可约模等价于不可分内射模. 这时  $R$  共有两个极大理想  $M_2(\mathbb{k}) \oplus 0$  以及  $0 \oplus M_3(\mathbb{k})$ . 对应  $0 \oplus \mathbb{k}^3$  和  $\mathbb{k}^2 \oplus 0$  所在的不可约模同构类. 分别记上述两个不可分内射  $R$ -模为  $E_1, E_2$ . 那么若  $C = \mathbb{k}$ , 则  $\text{u.dim}_C E_1 = 3, \text{u.dim}_C E_2 = 2$ .

## 2 Goldie 定理

### 2.1 Goldie 环

本节介绍右 Goldie 环的概念和基本性质, 它是接下来讨论的基本对象. 之前提到, Goldie 定理说含幺环  $R$  存在右商环  $Q$  并且  $Q$  是 Artin 半单的充要条件是  $R$  是半素右 Goldie 环. 在引入下面 Goldie 环的定义后, 我们马上可以看到该命题的必要性证明 (见 [命题2.4]). 下面关于右 Goldie 环的讨论都有左 Goldie 环的版本.

**Definition 2.1** (Goldie 环). 若含幺环  $R$  满足右零化子升链条件且  $\text{r.u.dim} R < +\infty$ , 称  $R$  是右 Goldie 环.

**Remark 2.2.** 对含幺环  $R$ , 考虑  $R$  的反环  $R^{op}$ . 那么  $R$  的右零化子对应  $R^{op}$  的左零化子,  $R$  的右理想对应  $R^{op}$  的左理想. 由此易知  $R$  是右 Goldie 环当且仅当  $R^{op}$  是左 Goldie 环. 如果  $Q = R_S$  是  $R$  关于一些正则元构成的乘闭子集  $S$  的右局部化, 那么  $Q^{op}$  自然是  $R^{op}$  关于  $S$  ( $S$  中元素当然也是  $R^{op}$  中的正则元) 的左局部化. 因此对右 Goldie 环发展的理论都可以通过反环构造, 对应到左 Goldie 环理论. 如果含幺环  $R$  既是右 Goldie 环又是左 Goldie 环, 称  $R$  为 Goldie 环.

**Example 2.3.** 因右 Noether 环  $R$  满足补子模和右零化子升链条件, 故  $R$  是右 Goldie 环.

设  $\lambda: R \rightarrow R_S$  是右局部化定义中的环同态, 若  $S$  是由  $R$  的一些正则元构成的乘闭子集, 那么  $\lambda$  是单射, 即  $R$  可嵌入右局部化  $Q = R_S$ . 下面我们来看看当  $Q$  存在时,  $Q$  的特性可反过来蕴含  $R$  的哪些信息.

**Proposition 2.4.** 若含幺环  $R$  有一些正则元构成的乘闭子集  $S$  使得右局部化  $Q = R_S$  存在, 那么

- (1) 如果  $Q$  是右 Goldie 环, 那么  $R$  也是右 Goldie 环.
- (2) 如果  $Q$  是 Artin 半单环, 那么  $R$  是半素右 Goldie 环.
- (3) 如果  $Q$  是 Artin 单环, 那么  $R$  是素右 Goldie 环.

*Proof.* 由于  $Q = R_S$  存在, 所以乘闭子集  $S$  是由一些正则元构成的右 Ore 集.

(1) 设  $Q$  是右 Goldie 环, 那么 [引理1.118(3)] 表明  $R$  有有限右一致维数. 对任给  $R$  的右零化子  $\text{rann}_R X \subsetneq \text{rann}_R Y$ , 其中  $X, Y$  是  $R$  的子集, 易验证  $\text{rann}_Q X \subsetneq \text{rann}_Q Y$ . 于是由  $Q$  满足右零化子升链条件保证了  $R$  也满足右零化子条件, 所以  $R$  是右 Goldie 环.

(2) 由于  $Q$  是右 Artin 的, 所以也是右 Goldie 环, 于是 (1) 的结果表明  $R$  是右 Goldie 环. 下面验证  $R$  是半素环. 为此, 我们说明  $R$  没有非零幂零理想. 设  $N$  是幂零理想, 需要说明  $N = 0$ . [引理1.2] 表明  $\text{lann}N$  是本质右理想. 因为  $S$  是  $R$  的由一些正则元构成右 Ore 集, 故 [引理1.118(1)] 说  $(\text{lann}N)_S$  是  $Q$  的本质右理想. 而  $Q$  是 Artin 半单环蕴含  $(\text{lann}N)_S$  是直和因子, 于是知  $Q = (\text{lann}N)_S$ . 从而  $\text{lann}N$  中有正则元, 故  $N = 0$ .

(3) 和 (2) 类似地, 易知  $R$  是右 Goldie 环. 为了得到  $R$  是素环, 我们说明对任何非零理想  $I, J \subseteq R$  有  $IJ \neq 0$ . 设  $\lambda : R \rightarrow Q$  是右局部化的嵌入映射, 那么  $\lambda(I)$  在  $Q$  中生成的理想是  $Q$ , 由此可以看到  $\lambda(I)$  在  $Q$  中生成的左理想也是  $Q$ : 具体地, 利用  $R_S$  中有限个元素都有公分母, 可设  $1_Q = \sum_{i=1}^n \lambda(r_i)\lambda(s_i)^{-1}\lambda(a_i)\lambda(d)^{-1}$ , 其中  $s_i, d$  是正则元,  $a_i \in I, r_i \in R$ . 那么  $\lambda(d)$  作为  $Q$  中可逆元在  $\lambda(I)$  生成的左理想内. 由此知  $Q\lambda(I) = Q$ , 同样地, 有  $Q\lambda(J) = Q$ . 现在, 利用  $Q\lambda(IJ) = Q\lambda(I)\lambda(J) = Q\lambda(J) = Q$  便可看到  $IJ \neq 0$ .  $\square$

**Remark 2.5.** 如果  $R$  关于一些正则元集构成的乘闭子集  $S$  的左局部化  $Q$  存在, 那么  $Q^{op}$  是  $R^{op}$  关于一些正则元构成乘闭子集的局部化, [注记2.2]. 当  $Q$  是左 Goldie 环时,  $Q^{op}$  是右 Goldie 环, 于是由 [命题2.4] 得到  $R$  是左 Goldie 环. 类似地, 当  $Q$  是 Artin 半单环或 Artin 单环时, 分别得到  $R$  是半素左 Goldie 环以及  $R$  是素右 Goldie 环. 特别地, 如果  $R$  关于一些正则元构成的乘闭子集  $S$  的左右局部化都存在, 记作  $Q$ , 那么  $Q$  是 Artin 半单环能够得到  $R$  是半素 Goldie 环,  $Q$  是 Artin 单环能够保证  $R$  是素 Goldie 环.

**Example 2.6.** 任何整区  $R$  关于所有正则元构成的乘闭子集  $S$  的商环  $R_S$  就是它的商域, 即  $R_S$  是域, 所以整区总是右 Goldie 环. 而整区未必是 Noether 的, 所以我们可以构造是右 Goldie 环但不 Noether 的例子.

给定含幺交换环  $K$  上的素 PI 代数  $R$  (例如素 PI 环), Posner 定理表明  $R$  的关于非零中心正则元全体的右局部化存在并且是其中心上的有限维中心单代数, 进而是 Artin 单代数. 所以 [命题2.4(3)] 告诉我们

**Corollary 2.7.** 含幺交换环  $K$  上的素 PI 代数  $R$  是右 Goldie 环. 特别地, 素 PI 环是右 Goldie 环.

**Remark 2.8.** 因为素 PI 环  $R$  关于中心正则元构成的乘闭子集  $S$  的右局部化  $R_S$  当然也是  $R$  关于  $S$  的左局部化, 所以  $R_S$  是  $R$  关于  $S$  的局部化. 那么通过 [注记2.5] 知  $R$  是素 Goldie 环.

## 2.2 Goldie 定理

在正式证明 Goldie 定理前, 还需做一些准备. 在 [注记2.2] 中已经指出对右 Goldie 环发展的理论可以利用反环得到左 Goldie 环的相应理论, 因此下面我们主要讨论的都是右 Goldie 环许多概念和结论都有相应的左 Goldie 环版本. 称环的右零化子集中极大元为极大右零化子.

**Lemma 2.9.** 设含幺环  $R$  满足右零化子升链条件, 那么

- (1) 每个极大右零化子形如  $\text{rann}(a)$ .
- (2) 对每个  $b \in R$ , 存在正整数  $m$  使得  $\text{rann}(b^m) = \text{rann}(b^{m+1}) = \dots$ , 此时  $b^m R \cap \text{rann}(b^m) = 0$ .
- (3)  $R$  的任何诣零左(右)理想会包含一个非零幂零左(右)理想.

*Proof.* (1) 是明显的. (2) 正整数  $m$  的存在性由右零化子升链条件保证. 容易验证  $b^m R \cap \text{rann}(b^m) = 0$ . 最后证明 (3), 以左为例. 设  $L$  是非零诣零左理想, 取  $\text{rann}(a)$  是  $\{\text{rann}(a) | a \neq 0 \in L\}$  中极大元, 下面通过说明  $aya = 0, \forall y \in R$  来得到  $Ra$  是非零幂零左理想. 对  $y \in R$ , 设正整数  $k$  使  $(ya)^k = 0, (ya)^{k-1} \neq 0$ , 那么  $\text{rann}(a)$  的极大性迫使  $\text{rann}(a) = \text{rann}(ya)^{k-1}$ , 因此  $aya = 0$ .  $\square$

**Remark 2.10.** 特别地, 半素右 Goldie 环不含非零的诣零单边理想.

**Lemma 2.11.** 设  $R$  是满足右零化子升链条件的含幺环, 那么它的右奇异理想  $\zeta(R) = \{a \in R | \text{存在 } E \in \mathcal{F}(R) \text{ 使得 } aE = 0\}$ , 其中  $\mathcal{F}(R)$  是  $R$  的本质右理想集, 是幂零理想. 特别地, 若进一步  $R$  是半素的 (例如  $R$  是半素右 Goldie 环), 有  $\zeta(R) = 0$

*Proof.* 记  $I = \zeta(R)$ , 那么由  $R$  满足右零化子升链条件知对充分大的正整数  $n$  有  $\text{rann}I^n = \text{rann}I^{n+1}$ . 下证  $I^{n+1} = 0$ . 假设  $I^{n+1} \neq 0$ , 取  $\{\text{rann}(a) | a \in I, I^n a \neq 0\}$  的极大元  $\text{rann}(a)$ . 对每个  $b \in I$ , 由奇异理想的定义知  $\text{rann}(b)$  是  $R$  的本质右理想, 那么  $\text{rann}(b) \cap aR \neq 0$ , 那么  $\text{rann}(a)$  的选取方式迫使  $I^n ba = 0$ . 因此  $I^{n+1}a = 0$ , 从而  $I^n a = 0$ , 矛盾! 因此  $I^{n+1} = 0$ , 得证.  $\square$

**Lemma 2.12.** 设  $R$  是具有有限右一致维数且奇异理想  $\zeta(R) = 0$  的半素环 (例如半素右 Goldie 环, 之后我们会看到这是半素右 Goldie 环的等价刻画). 那么  $R$  的任何右正则元  $c$  是正则元且  $cR$  是  $R$  的本质右理想.

*Proof.*  $c$  的右正则性使  $R_R$  的子模  $cR$  和  $R$  同构, 故  $\text{u.dim}(cR) = \text{u.dim}R$ , 进而 [引理1.113(3)] 表明  $cR$  是  $R$  的本质右理想. 因为  $\zeta(R) = 0$ , 所以  $\text{lann}(cR) = 0$ , 那么  $\text{lann}(c) = 0$ , 从而  $c$  是正则元.  $\square$

下述命题在半素右 Goldie 环层面建立了本质右理想和正则元之间的联系.

**Proposition 2.13 (Goldie).** 设  $R$  是具有有限右一致维数且右奇异理想  $\zeta(R) = 0$  的半素环, 那么

- (1) 对  $R$  的右理想  $I$ ,  $I$  包含一个元素  $c$  使得  $\text{rann}(c) \cap I = 0$ .
- (2) 对  $R$  的右理想  $I$ ,  $I$  是本质的当且仅当  $I$  包含  $R$  的一个正则元.

特别地, 半素右 Goldie 环的一个右理想是本质右理想当且仅当它包含一个正则元.

*Proof.* (1) 我们分两步来证明满足条件的  $c$  的存在性.

**Step1.** 我们先说明当  $I_R$  是一致模时, 存在  $c \in I$  满足条件. 事实上, 因为  $I$  是一致模, 所以存在  $I$  中非零元  $c, d$  使得  $cd \neq 0$ . 下面说明  $V = \text{rann}(c) \cap I$  是零. 假设  $V \neq 0$ , 那么  $V$  是  $I$  的本质子模, 从而对上述非零元  $d$ , 有  $d^{-1}V = \{a \in R | da \in V\}$  (回忆 [引理1.3(3)]) 是  $R$  的本质右理想. 而  $cd(d^{-1}V) = 0$  以及  $\zeta(R) = 0$  让我们得到了矛盾. 因此  $V = \text{rann}(c) \cap I = 0$ . 所以当  $I$  是一致模时, 满足条件的  $c$  存在.

**Step2.** 对一般的情形, 不妨设  $I \neq 0$ . 因为  $R$  具有有限右一致维数, 所以  $R$  的任何非零右理想有有限一致维数, 于是 [引理1.83] 告诉我们  $R$  的任何非零右理想包含某个一致子模. 那么  $I$  包含一致子模  $U_1$ , 于是

存在  $a_1 \in U_1$  使得  $\text{rann}(a_1) \cap U_1 = 0$ . 如果  $\text{rann}(a_1) \cap I = 0$ , 取  $c = a_1$  即可. 否则, 对  $R$  的非零右理想  $\text{rann}(a_1) \cap I$ , 包含一致模  $U_2$ , 那么同样存在  $a_2 \in U_2$  使得  $\text{rann}(a_2) \cap U_2 = 0$ . 注意这时有

$$a_1R \oplus a_2R \oplus (\text{rann}(a_1) \cap \text{rann}(a_2) \cap I) \subseteq I$$

(具体地, 首先  $a_1R \oplus (\text{rann}(a_1) \cap I) \subseteq I$ , 在  $\text{rann}(a_1) \cap I$  中有直和分解  $a_2R \oplus (\text{rann}(a_1) \cap \text{rann}(a_2) \cap I)$ ). 如果这里  $\text{rann}(a_1) \cap \text{rann}(a_2) \cap I = 0$ , 那么  $c = a_1 + a_2$  满足条件. 重复上述讨论, 因为  $R$  具有有限右一致维数, 因此上述讨论在有限步后终止. 具体地, 在第  $k$  步得到

$$a_1R \oplus a_2R \oplus \cdots \oplus a_kR \oplus (\text{rann}(a_1) \cap \text{rann}(a_2) \cap \cdots \cap \text{rann}(a_k) \cap I) \subseteq I$$

不妨设此时已稳定, 那么  $\text{rann}(a_1) \cap \text{rann}(a_2) \cap \cdots \cap \text{rann}(a_k) \cap I = 0$ . 选取  $c = \sum_{i=1}^k a_i$  即可.

(2) 必要性: 设  $I$  是本质右理想, 由 (1) 可选取  $c \in I$  使得  $\text{rann}(c) \cap I = 0$ , 进而  $\text{rann}(c) = 0$ , 这说明  $c$  是右正则元, 现在应用 [引理2.12], 得到  $c$  是正则元. 充分性: 设  $c \in R$  是正则元, [引理2.12] 表明  $cR$  是本质右理想, 所以  $I$  也是本质右理想.  $\square$

含幺环  $R$  在全体正则元构成的乘闭子集处的右局部化  $Q$  若存在, 则称  $Q$  是  $R$  的右(经典)商环. 例如右 Ore 整区的右商环是除环. 现在我们可以给出主定理——Goldie 定理的证明.

**Theorem 2.14** (Goldie 定理). 设  $R$  是含幺环, 那么以下四条等价:

- (1)  $R$  是半素右 Goldie 环.
- (2)  $R$  半素, 右奇异理想  $\zeta(R) = 0$  且  $R$  具有有限右一致维数.
- (3)  $R$  满足对任何右理想  $I$ ,  $I$  是本质右理想的充要条件是  $I$  含某个  $R$  中正则元.
- (4)  $R$  的右商环  $Q$  存在且是 Artin 半单环.

更进一步, 含幺环  $R$  是素右 Goldie 环的充要条件是右商环  $Q$  存在且  $Q$  为 Artin 单环.

*Proof.* 在 [引理2.11] 中已证 (1) $\Rightarrow$ (2). [命题2.13(2)] 中已证 (2) $\Rightarrow$ (3). [命题2.4(2)] 中已证 (4) $\Rightarrow$ (1). 所以我们只要验证 (3) $\Rightarrow$ (4). 要说明右商环的存在性, 只需说明  $R$  的所有正则元构成的乘闭子集  $S$  是右 Ore 集. 下证  $S$  满足右 Ore 条件, 即对任给  $a \in R, d \in S$  有  $aS \cap dR \neq \emptyset$ . 这时正则元  $d$  满足  $dR$  是  $R$  的本质右理想, 应用 [引理1.3(3)] 立即得到  $a^{-1}(dR)$  是  $R$  的本质右理想, 于是得到  $a^{-1}(dR)$  包含一个正则元  $c$ , 即  $ac \in dR$ , 所以  $aS \cap dR \neq \emptyset$ . 由此得到右商环  $Q$  存在. 再通过说明  $Q_Q$  是完全可约模来得到  $Q$  是 Artin 半单环. 从 [引理1.3(6)] 我们看到只需验证  $Q$  的本质右理想  $J$  只有  $Q$  自身. 根据 [引理1.118(2)] 得到  $R \cap J$  是  $R$  的本质右理想, 所以由条件  $J \cap R$  包含  $R$  的一个正则元  $c$ , 于是  $J$  包含一个  $Q$  的可逆元, 故  $J = Q$ .

最后我们来说明  $R$  是素右 Goldie 环的充要条件是右商环  $Q$  存在且是 Artin 单环. [命题2.4(3)] 中已证充分性. 必要性: 这时  $Q$  已经是 Artin 半单环, 只要说明  $Q$  单. 任取  $Q$  的非零理想  $X$ , 那么  $R \cap X$  是  $R$  的非零理想, 进而由  $R$  是素环得到  $R \cap X$  是本质右理想. 同样由 [命题2.13(2)] 得  $R \cap X$  含  $R$  的一个正则元, 所以  $X$  含  $Q$  中可逆元, 由此得到  $X = Q$ . 因此  $Q$  是单环.  $\square$

**Remark 2.15.** 因为素环的非零理想总是本质右理想, 故右 Noether 素环的非零理想有正则元.

**Remark 2.16.** 因为  $R$  是半素右 Goldie 环当且仅当  $R^{op}$  是半素左 Goldie 环, 我们当然也有相应半素左 Goldie 环的 Goldie 定理. 例如  $R$  是半素左 Goldie 环当且仅当  $R$  的左商环存在且为 Artin 半单环.  $R$  是半素左 Goldie 环等价于  $R$  的任何左理想  $I$ ,  $I$  是本质左理想当且仅当  $I$  含有某个  $R$  中正则元.

**Example 2.17.** 因为半素右 Noether 环一定是半素右 Goldie 环, 所以半素右 Noether 环的右商环存在且是 Artin 半单环. 特别地, 右 Noether 整环关于非零元全体构成的乘闭子集可作局部化. 即右 Noether 整环是右 Ore 整环 (回忆 [例1.40]). 我们当然也可以不使用 Goldie 定理直接地去说明右 Noether 整环是右 Ore 整环: 只需说明对右 Noether 整环  $R$  中任何非零元  $a, b$ , 有  $aR \cap bR \neq 0$  即可. 若不然, 设  $aR \cap bR = 0$ , 我们说明这会导致  $\sum_{n=0}^{\infty} b^n aR$  是右理想直和, 进而  $R$  有右理想严格升链, 得到矛盾. 假设  $\sum_{n=0}^{\infty} b^n aR$  不是直和, 那么存在不全为零的元素

$$r_s, r_{s+1}, \dots, r_{t-1}, r_t \in R (s < t, r_s, r_t \neq 0)$$

使得  $b^s ar_s + b^{s+1} ar_{s+1} + \dots + b^t ar_t = 0$ , 这蕴含  $ar_s \in aR \cap bR$ , 但  $ar_s \neq 0$ , 得到矛盾. 类似地, 素右 Noether 环也有右商环, 并且右商环是 Artin 单环, 进而知右 Noether 环关于素理想的商总有右商环, 且其中心是域.

**Corollary 2.18.** 设  $R$  是半素右 Goldie 环,  $a, b \in R$  满足  $ab$  是正则元. 那么  $a, b$  都是  $R$  的正则元.

*Proof.* 记  $Q$  是  $R$  的右商环. 由条件,  $a$  是  $Q$  的左正则元且  $b$  是  $Q$  的右正则元. 根据 Goldie 定理,  $Q$  是 Artin 半单环, 所以  $a, b$  在  $Q$  中都可逆. 由此立即得到  $a, b$  也是  $R$  中的正则元.  $\square$

**Corollary 2.19.** 设  $R$  是半素 Goldie 环,  $M$  是有限生成左  $R$ -模且 (关于  $R$  的正则元全体构成的乘闭子集) 无挠. 那么  $M$  可嵌入某个有限生成自由左  $R$ -模. 对称地, 有限生成右  $R$ -模也可嵌入有限生成自由模.

*Proof.* 根据 Goldie 定理,  $R$  的经典商环  $Q$  存在且为 Artin 半单环. 记  $S$  是  $R$  的正则元集全体, 那么局部化映射  $\lambda_S : M \rightarrow M_S$  是单射, [注记1.31]. 而  $M_S$  作为有限生成  $Q = R_S$ -模是完全可约的, 即  $M_S$  可分解为有限多个  $Q$  的直和, 这也可视作左  $R$ -模分解. 这说明存在自然数  $n$  使得  $M$  作为左  $R$ -模可嵌入  $Q^n$ . 因此可不妨设  $M$  就是  $Q^n$  的有限生成左  $R$ -子模. 设  $M \subseteq Q^n$  作为左  $R$ -模有生成元  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ , 每个  $\alpha_j$  是分量为  $Q$  中元素的列向量. 并且可将所有  $\alpha_j$  的所有分量表示为右分式, 具有相同的公分母. 故存在  $R$  中正则元  $s$  使得  $Ms \subseteq R^n$ . 因为有左  $R$ -模同构  $M \cong Ms$ , 故  $M$  作为左  $R$ -模可嵌入  $R^n$ .  $\square$

**Remark 2.20.** 反之, 含幺环上的有限生成自由模总是 (关于正则元全体构成的乘闭子集) 无挠的. 所以半素 Goldie 环上的有限生成模  $M$  是无挠的当且仅当  $M$  是某个有限生成自由模的子模. 回忆整区上的平坦模总是无挠的: 如果整区  $R$  有正则元  $z$ ,  $M$  是平坦左  $R$ -模, 那么由  $z_l : R \rightarrow R, r \mapsto zr$  是单  $R$ -模同态,  $z_l \otimes \text{id}_M$  也是单射, 由此可知  $M$  是无挠  $R$ -模.

**Corollary 2.21.** 设  $R$  是半素 Goldie 环,  $U$  是有限生成右  $R$ -模, 是一致模且无挠. 那么存在  $R$  的非零右理想  $I$  使得有右  $R$ -模同构  $U \cong I$ .

*Proof.* 因为  $U$  可嵌入某个  $R^n$ , [推论2.19], 所以存在右  $R$ -模同态  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow R$  使得

$$\text{Ker } f_1 \cap \text{Ker } f_2 \cap \dots \cap \text{Ker } f_n = 0.$$

$U$  作为一致模, 一定有某个  $\text{Ker } f_i = 0$ , 因此  $f_i$  给出  $U$  和  $R$  某个右理想间同构.  $\square$

## 2.3 Order 理论初步

如果含幺环  $Q$  的任何正则元都是可逆元, 则称  $Q$  是商环 (ring of quotients). 易见  $Q$  是商环当且仅当它是自身关于正则元全体的右 (左) 局部化 (即  $Q$  的右商环存在且局部化映射是同构). 例如 Artin 环总

是商环. 考虑连续函数环  $T = C[0, 1]$ , 那么  $x - 1/2$  是  $T$  中正则元但不是可逆元, 所以  $T$  不是商环. 存在非 Artin 的商环, 例如考虑集合  $A = [0, +\infty)$ , 考虑幂集  $Q = \mathcal{P}(A)$ , 对任何  $X, Y \in Q$ , 由  $X + Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ ,  $X \cdot Y = X \cap Y$  可赋予  $Q$  上含幺交换环结构, 零元为  $\emptyset$ , 索元为  $A$ , 不难看出  $Q$  中任何非幺元的元素都不是正则元, 即幺元是唯一的正则元. 记  $I_n = \mathcal{P}([n, +\infty))$ , 那么  $I_n$  是  $Q$  的理想并且给出  $Q$  的理想严格降链  $I_1 \supseteq \cdots \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$ . 所以  $Q = \mathcal{P}(A)$  是非 Artin 的交换商环.

**Example 2.22.** 设含幺环  $R$  的正则元集为  $S$ , 并设右商环  $Q = R_S$  存在, 那么右商环是商环.

*Proof.* 需要验证任何正则元  $as^{-1} \in Q$  满足  $a \in S$  来得到  $Q$  是商环. 任给非零元  $b \in R$ , 由  $as^{-1}$  是  $Q$  中正则元知  $ba \neq 0$ . 因为  $sb \neq 0$ , 因此  $ab = (as^{-1})(sb) \neq 0$ . 由此得到  $a$  是  $R$  中正则元, 这蕴含  $as^{-1}$  可逆.  $\square$

**Remark 2.23.** 因此一个含幺环  $Q$  是商环当且仅当  $Q$  是某个含幺环的右商环.

下面我们介绍商环中 order 的概念. 例如, 整区总是其商城中的 order.

**Definition 2.24.** 设  $Q$  是商环, 如果  $Q$  的子环  $R$ (未必含幺) 满足任何  $Q$  中元素形如  $as^{-1}$ , 其中  $a, s \in R$ , 则称  $R$  是  $Q$  中的右 order. 如果  $Q$  的子环  $R$  满足任何  $Q$  中元素形如  $s^{-1}a$ , 其中  $a, s \in R$ , 则称  $R$  是  $Q$  中的左 order. 如果  $Q$  的子环  $R$  既是  $Q$  中右 order 又是左 order, 则称  $R$  为  $Q$  中 order.

**Remark 2.25.** 如果  $R$  是商环  $Q$  中的右 order, 那么  $Q$  的任何包含  $R$  的含幺子环也是  $Q$  的右 order.

**Remark 2.26.** 如果  $Q$  是商环, 那么  $Q^{op}$  也是商环. 所以  $R$  是商环  $Q$  中右 order 等价于  $R^{op}$  是商环  $Q^{op}$  中左 order. 于是商环中关于右 order 的讨论可借助反环得到左 order 的相应版本.

**Remark 2.27.** 在代数数论中, 设  $L$  是代数数域并设  $n = [L : \mathbb{Q}]$ , 如果  $L$  的含幺子环  $\mathcal{O}$  是秩为  $n$  的自由 Abel 群, 则称  $\mathcal{O}$  是  $L$  的 order.  $L$  的整数环  $\mathcal{O}_L$  总是  $L$  的 order, 并且任何  $L$  的 order 都是  $\mathbb{Z}$  的整扩张, 这说明  $\mathcal{O}_L$  是  $L$  中最大的 order, 因此也把  $\mathcal{O}_L$  称为  $L$  的 maximal order. “order”一词源于 Dedekind 对  $\mathcal{O}_L$  的命名. 数论中人们研究 order 的主要动机是它可以覆盖很多与代数数域的整数环性质类似但未必是 Dedekind 整区的例子. 设  $D$  是既不是 0 也不是 1 的无平方因子整数, 二次域  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$  的整数环  $\mathcal{O}_K$  满足  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$ , 其中

$$\omega = \begin{cases} (1 + \sqrt{D})/2, & D \equiv 1 \pmod{4} \\ \sqrt{D}, & D \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

并注意到  $\text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{D}]) = \text{Frac}(\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{D})/2]) = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ . 现取  $D = 5$ , 那么  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  的整数环  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[(1 + \sqrt{5})/2] \supsetneq \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ . 因为  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  不是整闭扩张, 所以  $\mathbb{Z}(\sqrt{5})$  不是 Dedekind 整区. 特别地,  $\mathbb{Z}(\sqrt{5})$  和  $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{5})/2]$  是不同构的整区, 但它们具有同构的商城. 这里  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  是秩为 2 的自由 Abel 群, 因此  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  是  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  中的 order. 一般地, 如果  $D$  满足  $D \equiv 1 \pmod{4}$ , 那么  $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subsetneq \mathbb{Z}[(1 + \sqrt{D})/2]$  并且  $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$  是秩为 2 的自由 Abel 群. 同样  $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{D})$  不是整闭扩张说明  $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$  不是 Dedekind 整区, 因此  $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$  是异于  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$  的整数环的 order. 所以考虑代数数域的 order 使得我们可以研究比其整数环更丰富却享有类似性质的整环类. 设  $\mathcal{O}$  是代数数域  $L$  的含幺子环且满足  $z\mathcal{O}$  是有限生成模, 那么  $\mathcal{O}$  是  $L$  的 order(自由 Abel 群的定义) 的充要条件是  $\mathcal{O}$  所生成  $L$  的  $\mathbb{Q}$ -子空间是  $L$ . 因此在非交换代数领域, 人们使用此刻画来推广 order 的概念: 设  $K$  是域,  $R$  是  $K$  的含幺子环(所以  $R$  是整区),  $A$  是有限维  $K$ -代数,  $\Lambda$  是  $A$  的含幺子环并且是有限生成  $R$ -模. 如果  $K\Lambda = A$ (即  $\Lambda$  在  $A$  中生成的  $K$ -子空间是  $A$ ), 则称  $\Lambda$  是  $A$  中的  $R$ -order. 如果取

$K = \mathbb{Q}, R = \mathbb{Z}, A$  是代数数域  $L$ , 那么  $L$  中的  $\mathbb{Z}$ -order 就是  $L$  中的 order. 例如考虑整区  $R$  及其商域  $K$ , 那么  $M_n(R)$  是  $M_n(K)$  中的  $R$ -order. 如果  $G$  是有限群, 那么群代数  $RG$  是  $KG$  中的  $R$ -order. 更一般地, 就有上面定义里商环中 order 的概念. 并且商环中的 order 概念覆盖了非交换代数中的经典定义: 首先, 有限维  $K$ -代数  $A$  作为 Artin 环是商环. 其次, 因为  $K\Lambda = A$ , 所以对任何  $a \in A$ , 存在  $k_1, \dots, k_m \in K, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$  使得  $a = k_1\lambda_1 + \dots + k_m\lambda_m$ . 设  $k_j = s_j t_j^{-1}$ , 这里  $s_j, t_j \in R$ , 那么化简可知存在  $\lambda \in \Lambda$  使得  $\lambda(t_1 \cdots t_m 1_\Lambda)^{-1} = a$ , 这说明如果  $\Lambda$  是有限维  $K$ -代数  $A$  中的 order, 则  $\Lambda$  也是商环  $A$  中的 order.

**Proposition 2.28.** 设  $R$  是 Noether 整区,  $K$  是  $R$  的商域且  $A$  是有限维  $K$ -代数. 那么  $A$  中总存在  $R$ -order.

*Proof.* 任取  $A$  的一个  $K$ -基, 并作该基生成的有限生成  $R$ -模  $M$ . 命  $\Lambda = \{a \in A | aM \subseteq M\}$ , 易见  $\Lambda$  是  $A$  的含幺子环,  $\Lambda$  是有限生成  $R$ -模并且  $\Lambda \supseteq R$ . 下证  $\Lambda$  是  $A$  中 R-order. 只需证明对任何  $b \in A$ , 存在  $r \in R$  使得  $rb \in \Lambda$ . 取  $_RM$  的一个有限生成元集  $\{m_1, \dots, m_t\}$ , 对每个  $m_i$ , 不难看到存在  $r_i \in R$  使得  $r_i b m_i \in M$ (因为  $M$  作为集合包含一个  $A$  的  $K$ -基). 取  $r = r_1 \cdots r_t$  即可.  $\square$

**Example 2.29.** 设含幺环  $R$  的右商环  $Q$  存在. 那么  $R$  是  $Q$  中右 order. 如果  $R$  的左、右商环都存在, 设为  $Q$ , 那么  $R$  是  $Q$  中的 order. 前面我们已经看到  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  和  $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$  有公共的商域  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , 所以  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  和  $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$  都是  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  中 order. 即商环中的 order 可能不唯一. 命

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

那么  $R$  是  $Q$  中 order 且  $Q$  是 Artin 环, 通过下面的 [命题2.30] 可知  $Q$  是  $R$  的右商环.

**Proposition 2.30.** 设  $R$  是商环  $Q$  中的右 order, 记  $S = \{Q\text{中可逆元}\} \cap R$ , 那么  $Q = R_S$ . 如果进一步  $Q$  是右 Artin 的或者  $R$  是  $Q$  中 order, 则  $S$  就是  $R$  所有正则元构成的集合. 这时  $Q$  是  $R$  的右商环.

*Proof.* 因为  $S$  中元素都是  $Q$  中正则元, 因此  $S$  是  $R$  的正则元集的子集. 记  $\lambda : R \rightarrow Q$  是标准嵌入, 那么  $\lambda(S) = S$  在  $Q$  中可逆并且由  $R$  是右 order 知  $Q$  中元素都可以表示为  $as^{-1} = \lambda(a)\lambda(s)^{-1}, a \in R, s \in S$  的形式.  $0 = \text{Ker } \lambda = \{a \in R | \text{存在 } s \in S \text{ 使得 } as = 0\}$ , 因此  $(Q, \lambda)$  是  $R$  关于  $S$  的右局部化, 即  $Q = R_S$ .

下设  $Q$  进一步是右 Artin 环. 前面已经指出  $S$  中元素都是  $R$  中正则元. 所以下面需要验证  $R$  中正则元都是  $Q$  中可逆元. 因为  $Q$  是右 Artin 的, 所以只要验证任何  $R$  中正则元  $a$  是  $Q$  中右正则元即可. 任取  $Q$  中非零元素  $x$ , 因为  $R$  是右 order, 所以可设  $x = bt^{-1} \neq 0 \in R, t \in S$ , 进而  $ax = abt^{-1} \neq 0$ . 这说明  $a$  可逆.

最后, 设这时  $R$  是商环  $Q$  中的 order. 任给  $R$  中正则元  $a$ , 为了说明  $a$  是  $Q$  中可逆元, 只需验证  $a$  是  $Q$  中正则元. 任取非零元  $x \in Q$ , 需要验证  $ax, xa \neq 0$ . 因为  $R$  是 order, 所以存在  $b, c \in R, u, v \in S$  使得  $x = bu^{-1} = v^{-1}c$ . 那么  $ax = abu^{-1} \neq 0, xa = v^{-1}ca \neq 0$ . 因此  $S$  就是  $R$  的正则元集.  $\square$

**Remark 2.31.** 当  $R$  是  $Q$  中 order 时, [命题2.30] 说明  $Q$  是  $R$  的所有正则元构成乘闭子集的右局部化. 因为  $Q$  中元素都能够表示为  $s^{-1}a$  的形式, 这里  $s, a \in R$ , 所以  $s$  作为  $Q$  中可逆元自然也是  $R$  中正则元. 由此立即得到  $Q$  也是  $R$  的左商环. 因此  $Q$  中的 order  $R$  满足左右商环存在且为  $Q$ .

**Remark 2.32.** 特别地, 商环中的任意两个 order(右 Artin 环中任意两个右 order) 具有相同的商环. 如果含幺环  $R$  关于一些正则元构成的乘闭子集的右局部化存在, 记作  $Q$ , 那么  $R$  是  $Q$  中的右 order. 所以当  $Q$  是右 Artin 环时, [命题2.30] 说明  $Q$  就是  $R$  的右商环.

**Example 2.33.** 设  $R$  是素 PI 环, 记其中心为  $Z$ ,  $S = Z - \{0\}$  是中心正则元集. 根据 Posner 定理,  $R_S$  是其中心  $Z_S$  上的有限维中心单代数, 故  $R_S$  是商环. 这时  $\lambda: R \rightarrow R_S, a \mapsto a1^{-1}$  是单环同态. 所以  $R$  是商环  $R_S$  中的 order. 特别地, 如果素环  $R$  在其中心  $Z$  上是有限生成模, 那么  $R$  是有限维  $Z_S$ -代数  $R_S$ (中心单代数) 中的 order. 例如取  $R$  是整区, 则  $Z = R$  是素 PI 环,  $R_S$  就是整区的商域  $Q$ , 那么该素 PI 环的例子便是整区是其商域中的 order 的非交换推广. 反之, 如果含幺环  $R$  是某个有限维中心单代数中的 order, 那么  $R$  一定是素环: 根据 Goldie 定理,  $R$  的右商环存在且右商环是 Artin 单环的充要条件是  $R$  为素右 Goldie 环可知  $R$  是素环. 因为  $Q$  是有限维代数, 所以  $Q$  是 PI 环, 因此  $R$  是素 PI 环. 即有限维中心单代数中的 order 都是素 PI 环. 于是结合 Posner 定理可知  $R$  是素 PI 环的充要条件是  $R$  的右商环存在且为有限维中心单代数.

设  $R$  是商环  $Q$  中的 order, 那么 [命题2.30] 表明  $R$  中正则元均在  $Q$  中可逆且  $Q$  就是  $R$  的右商环. 反之, 如果  $R$  存在右商环  $Q$ , 设局部化映射  $\lambda: R \rightarrow Q$  并将  $R$  与  $\lambda(R)$  视作等同, 那么 [例2.22] 表明  $R$  是商环  $Q$  中的右 order. 所以研究商环  $Q$  中的 order 本质上就是研究左、右商环存在且为  $Q$  的环. 回到数论场景, 设  $L$  是代数数域,  $\mathcal{O}$  是  $L$  中的 order(即  $\mathcal{O}$  生成的  $L$  的  $\mathbb{Q}$ -线性子空间就是  $L$ ), 那么  $L$  中任何元素都可以表示为  $as^{-1}$  的形式, 其中  $a \in \mathcal{O}, s \in \mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}$ . 之前我们也已经看到这时商环  $L$  的子环  $\mathcal{O}$  就是该商环中的 order. 因此  $\mathcal{O}$  的商域就是  $L$ . 研究代数数域  $L$  中 order 可以理解为研究所有商域是  $L$  的整区.

**Lemma 2.34.** 设  $R$  是商环  $Q$  中的右 order,  $S$  是  $Q$  中的子环. 如果存在  $Q$  中可逆元  $a, b$  使得  $aRb \subseteq S$ , 那么  $S$  也是  $Q$  中的右 order. 特别地, 如果  $R$  是  $Q$  中的左 order(那么  $R^{op}$  是  $Q^{op}$  中右 order) 满足存在可逆元  $a, b$  使得  $aRb \subseteq S$ , 那么  $S$  也是  $Q$  中的左 order.

*Proof.* 设  $Q$  有可逆元  $a, b$  使得  $aRb \subseteq S$ . 任取  $q \in Q$ , 那么由  $R$  是右 order 知存在  $r, t \in R$  使得  $a^{-1}qa = rt^{-1}$ . 那么  $q = art^{-1}a^{-1} = (arb)(atb)^{-1}$ . 根据条件, 这里  $arb, atb \in S$ , 因此  $S$  是  $Q$  中的右 order.  $\square$

**Remark 2.35.** 如果取  $a = b = 1$ , 我们也可以看出  $Q$  的包含  $R$  的含幺子环是  $Q$  中右 order.

下面的 [命题2.36] 表明素右 Goldie 环  $R$  的右商环  $Q$  中包含  $R$  非零理想的含幺子环也是  $Q$  中右 order.

**Proposition 2.36.** 设含幺环  $R$  是素右 Goldie 环,  $I$  是  $R$  的非零理想,  $S$  是  $R$  的含幺子环满足  $I \subseteq S$ . 那么  $S$  也是素右 Goldie 环并且  $S$  和  $R$  有相同的右商环.

*Proof.* 根据 Goldie 定理,  $R$  存在右商环  $Q$  且为 Artin 单环. 因为  $R$  是素环, 所以  $I$  是  $R$  的本质右理想, 进而由 [定理2.14(3)] 知  $I$  包含  $R$  的某个正则元, 记作  $c$ . 因此由  $Q$  是商环(见 [例2.22]) 知  $c$  为  $Q$  的可逆元. 于是由  $cR \subseteq S$  以及 [引理2.34] 便知  $S$  是  $Q$  中右 order. 应用 [命题2.30] 便知  $Q$  是  $S$  的右商环. 最后由 Goldie 定理,  $S$  作为右商环存在且是 Artin 单环的环必为素右 Goldie 环.  $\square$

在 [例2.33] 中我们看到(有限维)中心单代数中的右 order 等价于素 PI 环. 一般地, 我们有

**Theorem 2.37.** 设  $R$  是含幺环, 那么  $R$  是某个 Artin 半单环中的右 order 当且仅当  $R$  是半素右 Goldie 环.

*Proof.* 充分性: 由 Goldie 定理,  $R$  是其右商环  $Q$  中的右 order 且  $Q$  是 Artin 半单环. 必要性: 如果  $R$  是 Artin 半单环  $Q$  中的右 order, 那么 [命题2.30] 说明  $Q$  是  $R$  的右商环. 故  $R$  是半素右 Goldie 环.  $\square$

基于 [引理2.34], 可自然定义给定商环中右 order 间的等价性.

**Definition 2.38** (等价 orders). 设  $Q$  是商环,  $R_1, R_2$  都是  $Q$  中右 order. 如果存在  $Q$  中可逆元  $a_1, a_2, b_1, b_2$  使得  $a_1R_1b_1 \subseteq R_2$  且  $a_2R_2b_2 \subseteq R_1$ , 那么称  $R_1$  与  $R_2$  是等价的, 记作  $R_1 \sim R_2$ .

**Remark 2.39.** 对商环  $Q$  中的 order 也可以定义等价 order 的概念.

**Example 2.40.** 设  $Q = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ,  $R_1 = \mathcal{O}_Q$ ,  $R_2 = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ , 那么  $R_1 \sim R_2$ .

之后我们主要关心 order 等价类中的极大元, 下面的 [引理2.41] 有助于证明某个 order 代表元的极大性.

**Lemma 2.41.** 设  $Q$  是商环,  $R_1, R_2$  是  $Q$  中等价的右 orders 且  $R_1 \subseteq R_2$ . 那么存在  $Q$  中可逆元  $a, b \in R_1$  使

$$aR_2b \subseteq R_1.$$

*Proof.* 因为  $R_1, R_2$  是等价的右 orders, 所以存在  $Q$  中可逆元  $u, v$  使得  $uR_2v \subseteq R_1$ . 命  $u = as^{-1}, v = bt^{-1}$ , 这里  $a, b, s, t \in R_1$ . 这时  $s \in R_2$  表明  $aR_2b \subseteq as^{-1}R_2b \subseteq R_1t \subseteq R_1$ .  $\square$

**Remark 2.42.** 设  $L$  是代数数域,  $\mathcal{O}$  是  $L$  中的  $\mathbb{Z}$ -order(或等价地, 数论意义下  $L$  中的 order), 那么考虑  $\mathcal{O}_L$  作为有限生成自由  $\mathbb{Z}$ -模的基易验证存在正整数  $\ell$  使得  $\ell\mathcal{O}_L \subseteq \mathcal{O}$ . 因此  $L$  中任何  $\mathbb{Z}$ -order 和  $\mathcal{O}_L$  等价.

固定商环  $Q$ , 那么  $Q$  中所有右 order 间的等价确实是等价关系. 因此每个右 order 都在唯一的等价类中(在数论场景, 代数数域所有的  $\mathbb{Z}$ -order 在同一个等价类中, [注记2.42]). 如果  $Q$  中右 order  $R$  是其所在等价类中的极大元, 则称  $R$  是 **maximal 右 order**. 类似可定义 maximal 左 order 和 maximal order 的概念. 如果一个 order 作为右 order 是极大的, 那么该 order 自然也是 maximal order.

**Proposition 2.43.** 设含幺环  $R$  是单右 Goldie 环, 那么  $R$  是(右商环中的)maximal 右 order.

*Proof.* 如果存在和  $R$  等价的右 order  $S \supseteq R$ , 那么由 [引理2.41] 知存在非零元  $a, b \in R$  使得  $aSb \subseteq R$ . 特别地,  $RaSbR \subseteq R$ . 于是  $(RaR)S(RbR) \subseteq R$ . 结合  $R$  是单环便得  $R = S$ .  $\square$

特征零的域上 Weyl 代数是双边 Noether 单环, 也是整环. 于是应用 [命题2.43] 得到

**Example 2.44.** 特征为零的域上的 Weyl 代数都是 maximal order.

下面做一些准备后证明素右 Goldie 环如果是 maximal 右 order, 那么其中心是整闭整区(见 [定理2.46]). 称整区  $R$  是完全整闭的, 如果  $Q = \text{Frac } R$  满足对任何  $a \neq 0, q \in Q, aq^n \in R$  对所有正整数  $n$  成立蕴含  $q \in R$ .

**Lemma 2.45.** 设  $R$  是整区. 如果  $R$  是完全整闭的, 那么  $R$  是整闭的. 如果  $R$  进一步是 Noether 的, 那么  $R$  是整闭性蕴含完全整闭性. 特别地, 对 Noether 整区, 整闭性与完全整闭性等价.

*Proof.* 设  $R$  是完全整闭整区, 并记  $Q$  是  $R$  的商域. 任取  $R$  上整元  $q \in Q$ , 那么  $R[q]$  是有限生成  $R$ -模. 所以存在  $a \neq 0$  使得  $aR[q] \subseteq R$ . 特别地,  $aq^n \in R, \forall n \geq 1$ . 所以由  $R$  的完全整闭性知  $q \in R$ . 这就证明了  $R$  是整闭整区. 现在设  $R$  是 Noether 整闭整区, 下证  $R$  是完全整闭的. 如果  $a \neq 0, q \in Q$  满足  $aq^n \in R, \forall n \geq 1$ , 那么  $aR[q] \subseteq R$ . 于是在  $Q$  中有  $R[q] \subseteq Ra^{-1}$ . 注意到  $Ra^{-1}$  是 Noether 环  $R$  上的循环模, 所以  $R[q]$  也是 Noether 模. 特别地,  $R[q]$  是有限生成模. 这说明  $q$  是  $R$  上整元, 于是由  $R$  的整闭性得到  $q \in R$ .  $\square$

**Theorem 2.46.** 设  $R$  是素右 Goldie 环, 中心为  $Z$ . 如果  $R$  是 maximal 右 order, 那么  $Z$  是整闭整区.

*Proof.* 根据 [引理2.45], 若能证明  $Z$  是完全整闭整区, 便有结论成立. 下证  $Z$  是完全整闭整区. 设  $a \neq 0, q \in \text{Frac}Z$  满足  $aq^n \in Z, \forall n \geq 1$ . 根据 Goldie 定理, 这时  $R$  的右商环  $Q$  存在且为 Artin 单环,  $R[q]$  自然是  $Q$  的右 order, 并且  $R[q] \sim R$ . 因此由  $R$  是 maximal right order 便知  $R = R[q]$ . 特别地,  $q \in Z$ .  $\square$

**Remark 2.47.** 如果  $R$  是素 Goldie 环 (例如素 PI 环) 且为 maximal order, 同样可证  $R$  的中心  $Z$  是整闭整区: 设  $a \neq 0, q \in \text{Frac}Z$  满足  $aq^n \in Z, \forall n \geq 1$ . 那么  $R$  的商环  $Q$  存在且为 Artin 单环. 由  $R$  是  $Q$  中的 order 知  $R[q]$  也是  $Q$  中的 order, 于是通过  $R \sim R[q]$  得到  $R = R[q]$ . 进而  $q \in Z$ .

**Corollary 2.48.** 设  $R$  是整区, 那么  $R$  是 maximal order 的充要条件是  $R$  完全整闭.

*Proof.* 必要性来自 [定理2.46] 的证明过程. 下证充分性: 设  $R'$  是  $R$  的商域中与  $R$  等价的 order 并且满足  $R' \supseteq R$ . 并注意  $R \sim R'$  也说明存在  $a \neq 0 \in R$  使得  $aR' \subseteq R$ . 任取  $q \in R'$ , 那么  $aq^n \in R, \forall n \geq 1$ . 所以由  $R$  是完全整闭整区可知  $q \in R$ . 这说明  $R = R'$ .  $\square$

**Remark 2.49.** 如果  $R$  是 1 维 Noether 整区, 那么 [引理2.45] 和 [推论2.48] 说明  $R$  也是 maximal order 当且仅当  $R$  是整闭整区. 特别地, 1 维 Noether 整区  $R$  是 Dedekind 整区当且仅当  $R$  是 maximal order.

**Example 2.50.** 如果含幺环  $R$  是右 Noether 素环或素 PI 环 (见 [推论2.7]), 那么当  $R$  是 maximal right order 时,  $R$  的中心是整闭整区.

在 Dedekind 整区理论中, 分式理想起到重要作用. 例如对不是域的整区  $R$ ,  $R$  是 Dedekind 整区的充要条件是  $R$  的非零分式理想都是可逆理想. 在 order 理论的研究中也可以考虑非交换分式理想.

**Definition 2.51.** 设  $Q$  是商环,  $R$  是  $Q$  中右 order. 如果  $Q$  作为右  $R$ -模的子模  $I$  满足存在  $Q$  中可逆元  $a, b$  使得  $aI \subseteq R$  且  $bR \subseteq I$ , 那么称  $I$  是分式右  $R$ -理想. 如果  $Q$  作为左  $R$ -模的子模  $L$  满足存在  $Q$  中可逆元  $a, b$  使得  $Ia \subseteq R$  且  $Rb \subseteq L$ , 那么称  $I$  是分式左  $R$ -理想. 如果  $Q$  作为  $R$ - $R$  双模的子模  $I$  满足  $I$  是分式左  $R$ -理想且分式右  $R$ -理想, 那么称  $I$  是分式  $R$ -理想. 如果  $S$  也是  $Q$  中的右 order, 那么当  $Q$  作为  $S$ - $R$  双模的子模  $I$  既是分式左  $S$ -理想又是分式右  $R$ -理想, 则称  $I$  是分式  $(S, R)$ -理想.

**Remark 2.52.** 设  $R$  是  $Q$  中右 order,  $I$  是分式右/左  $R$ -理想. 那么根据定义,  $I$  含有  $Q$  中可逆元 (故  $I \neq 0$ ).

**Remark 2.53.** 设  $R$  是整区,  $Q$  是  $R$  的商域. 那么  $Q$  的任何非零  $R$ -子模  $I$  总满足存在  $Q$  中非零元  $b$  使得  $bR = Rb \subseteq I$ . 所以当  $I$  进一步满足存在非零元  $a \in Q$  使得  $aI = Ia \subseteq R$  时, 总可选取  $a' \neq 0 \in R$  使得  $a'I \subseteq R$ . 因此这里的非交换分式理想是整区场景通常的 (非零) 分式理想的非交换推广.

整区作为素 PI 环当然是素右 Goldie 环, 因此在半素右 Goldie 环场景发展的分式理想理论便覆盖了整区场景的经典理论. 回忆素环的非零理想都是本质右理想, 整区的非零理想都是分式理想, 一般地, 有

**Example 2.54.** 设  $R$  是半素右 Goldie 环,  $I$  是  $R$  的本质右理想,  $Q$  是  $R$  的右商环. 根据 Goldie 定理, 存在  $R$  的正则元  $b$  使得  $b \in I$ . 注意  $b$  是  $Q$  中可逆元, 且  $bR \subseteq I$ . 因为  $I \subseteq R$ , 因此  $I$  是分式右  $R$ -理想. 反之, 如果  $I \subseteq Q$  是  $R$  的分式右  $R$ -理想, 那么存在  $Q$  中可逆元使得  $aI$  是  $R$  的右理想, 当然也有右  $R$ -模同构  $aI \cong I$ . 这时  $aI$  是  $R$  的本质右理想: 设  $b$  是  $Q$  的可逆元满足  $bR \subseteq I$ , 那么  $abR \subseteq aI$ ,  $ab$  作为  $Q$  中可逆元也是  $R$  的正则元. 所以  $aI$  作为半素右 Goldie 环  $R$  的含有某个  $R$  中正则元的右理想是本质右理想. 于是  $Q$  的任何分式右  $R$ -理想  $I$  作为右  $R$ -模同构于  $R$  的本质右理想  $aI$ .

更具体地, 对固定的正整数  $\ell$ , 考虑下述素 PI 环:

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \ell\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

那么  $R$  是  $Q = M_2(\mathbb{Q})$  中的 order, 于是 [命题2.30] 说明  $Q$  是  $R$  的右商环. 易见  $M_2(\mathbb{Z})$  是  $Q$  中的分式  $R$ -理想. 现在我们考虑分式  $R$ -理想的左/右 order, 它们可用于刻画右 order 的极大性, 见 [命题3.31].

**Definition 2.55.** 设  $R$  是商环  $Q$  中的右 order,  $I$  是分式右/左  $R$ -理想. 定义

$$O_r(I) = \{q \in Q | Iq \subseteq I\}, O_l(I) = \{q \in Q | qI \subseteq I\}.$$

分别称  $O_r(I)$  和  $O_l(I)$  为  $I$  的右 order 和左 order.

**Remark 2.56.** 如果  $I$  是分式右  $R$ -理想, 那么  $O_r(I) \supseteq R$ ; 如果  $I$  是分式左  $R$ -理想, 那么  $O_l(I) \supseteq R$ .

下面说明分式  $R$ -理想的左 order 和右 order 都是给定商环中的右 order 且为与  $R$  等价的右 order.

**Lemma 2.57.** 设  $R$  是商环  $Q$  中的右 order.  $I$  是  $Q$  中的分式右/左  $R$ -理想. 那么:

- (1)  $O_r(I)$  和  $O_l(I)$  都是  $Q$  中的右 order 并且和  $R$  等价.
- (2)  $I$  是分式  $(O_l(I), O_r(I))$ -理想.

*Proof.* (1) 根据  $O_r(I)$  和  $O_l(I)$  的定义,  $O_r(I)$  和  $O_l(I)$  明显都是  $Q$  的含幺子环. 当  $I$  是分式右  $R$ -理想时, [注记2.56] 指出  $R \subseteq O_r(I)$ , 所以 [引理2.34] 保证了  $O_r(I)$  是  $Q$  中右 order. 因为现在假设  $I$  是分式右  $R$ -理想, 所以有  $Q$  中可逆元  $a, b$  使得  $aI \subseteq R$  以及  $bR \subseteq I$ . 于是  $bRaI \subseteq bR \subseteq I$ , 因此  $bRa \subseteq O_l(I)$  以及 [引理2.34] 说明  $O_l(I)$  是  $Q$  中右 order. 对称地, 当  $I$  是分式左  $R$ -理想时, 设  $a, b \in Q$  是可逆元满足  $Ia \subseteq R$  和  $Rb \subseteq I$ , 那么  $aRb \subseteq O_r(I)$  以及  $R \subseteq O_l(I)$ . 因此  $O_l(I)$  和  $O_r(I)$  是  $Q$  中右 order.

现在验证  $O_r(I)$  和  $O_l(I)$  作为  $Q$  中的右 order 都与  $R$  等价. 先设  $I$  是分式右  $R$ -理想. 那么  $abO_r(I) \subseteq R$  以及前面指出的  $R \subseteq O_r(I)$  说明  $O_r(I) \sim R$ . 而  $aO_l(I)b \subseteq R$  保证  $R \sim O_l(I)$ . 再设  $I$  是分式左  $R$ -理想. 那么  $R \subseteq O_l(I)$  和  $O_l(I)ba \subseteq R$  说明  $R \sim O_l(I)$ .  $aRb \subseteq O_r(I)$  和  $bO_r(I)a \subseteq R$  保证  $R \sim O_r(I)$ .

(2) 根据  $O_l(I)$  和  $O_r(I)$  的定义得到  $I$  是  $Q$  作为  $O_l(I)-O_r(I)$  双模的子模. 当  $I$  是分式右  $R$ -理想时, 设  $Q$  的可逆元  $a, b$  满足  $aI \subseteq R$  以及  $bR \subseteq I$ . 那么  $aI \subseteq O_r(I)$  和  $bO_r(I) \subseteq I$  说明  $I$  是分式右  $O_r(I)$ -理想.  $Ia \subseteq O_l(I)$  和  $O_l(I)b \subseteq I$  说明  $I$  是分式左  $O_l(I)$ -理想. 当  $I$  是分式左  $R$ -理想时, 设可逆元  $a, b \in Q$  满足  $Ia \subseteq R$  以及  $Rb \subseteq I$ . 那么  $IaI \subseteq I$  保证  $Ia \subseteq O_l(I)$ ,  $aI \subseteq O_r(I)$ ,  $b \in I$  保证  $bO_r(I) \subseteq I$ ,  $O_l(I)b \subseteq I$ .  $\square$

**Remark 2.58.** 如果  $R$  是  $Q$  中的 order, 那么根据 [引理2.57] 的证明过程, 无论  $I$  是分式左  $R$ -理想或是分式右  $R$ -理想,  $O_r(I)$  和  $O_l(I)$  都是  $Q$  中与  $R$  等价的 order, [引理2.34].

设  $R$  是商环  $Q$  中的右 order, 如果分式右  $R$ -理想  $I$  满足  $I \subseteq O_r(I)$ , 则称  $I$  是整右  $R$ -理想. 类似可定义整左  $R$ -理想的概念. 当  $R$  是半素右 Goldie 环时, [例2.54] 说明含于  $R$  的整右  $R$ -理想就是本质右理想. 商环中的分式右  $R$ -理想也是分式右  $O_r(I)$ -理想 ([引理2.57]), 因此  $I$  可能是关于不同右 order 的分式右理想. 通常将含于  $R$  的整右  $R$ -理想称为右  $R$ -理想. 下面的 [引理2.59] 通过定义不难验证.

**Lemma 2.59.** 设  $R$  是商环  $Q$  中的右 order,  $I$  是分式右  $R$ -理想. 那么以下等价:

- (1)  $I$  是整右  $R$ -理想.
- (2)  $I$  是整右  $O_r(I)$ -理想.
- (3)  $I$  是整左  $O_l(I)$ -理想.
- (4)  $I^2 \subseteq I$ .

设  $R$  是商环  $Q$  中的右 order, 满足  $I, J$  是  $Q$  作为右  $R$ -模的子模. 那么 [命题2.30] 说明存在  $R$  的一些正则元构成的乘闭子集  $S$  使得  $Q = R_S$ . 因此我们有标准映射  $\text{Hom}_R(I, J) \rightarrow \text{Hom}_{R_S}(I_S, J_S), f \mapsto f_S$ , 见 [推论1.34]. 有标准映射  $I \otimes_R Q \rightarrow IQ, s \otimes q \mapsto sq$ , 这明显是满射. 而  $Q$  是平坦左  $R$ -模保证了  $I \otimes_R Q \rightarrow R \otimes_R Q \cong Q$  是单射. 所以对  $I$ , 有右  $Q$ -模同构  $I \otimes_R Q \rightarrow IQ$ . 同样也有右  $Q$ -模同构  $J \otimes_R Q \cong JQ$ . 因此标准映射  $\text{Hom}_R(I, J) \rightarrow \text{Hom}_{R_S}(I_S, J_S)$  诱导标准单射  $j : \text{Hom}_R(I, J) \rightarrow \text{Hom}_Q(IQ, JQ)$ . 可直接验证

$$\text{Im } j = \{\beta \in \text{Hom}_Q(IQ, JQ) \mid \beta(I) \subseteq J\}.$$

并注意当  $I = J$  时,  $j$  也是环同态. 因此我们有

**Proposition 2.60.** 设  $R$  是商环  $Q$  中的右 order,  $I$  是分式右  $R$ -理想. 则有环同构  $\text{End}(I_R) \cong O_l(I)$ .

*Proof.* 保持前面的记号, 这时  $J = I$ , 有环同构  $\tilde{j} : \text{End}(I_R) \rightarrow \{\beta \in \text{Hom}_Q(IQ, IQ) \mid \beta(I) \subseteq I\}$ .  $I$  是分式右  $R$ -理想说明  $I$  中有  $Q$  的可逆元, 所以  $IQ = Q$ . 于是  $\tilde{j} : \text{End}(I_R) \rightarrow \{\beta \in \text{Hom}_Q(Q, Q) \mid \beta(I) \subseteq I\}$ . 因为  $Q$  作为右  $Q$ -模上的自同态都是由  $Q$  中某个元素的左乘实现, 故对  $Q$  中元素决定的左乘变换产生的标准环同构  $Q \cong \text{End}(Q_Q)$ ,  $\text{End}(Q_Q)$  的子环  $\{\beta \in \text{End}(Q_Q) \mid \beta(I) \subseteq I\}$  在该环同构下对应  $Q$  的子环  $O_l(I)$ , 这就得到了环同构  $\text{End}(I_R) \cong O_l(I)$ . 该环同构将每个  $O_l(I)$  中元素对应到该元素在  $I$  上左乘变换.  $\square$

**Remark 2.61.** 如果对 [命题2.60] 前面的讨论取  $J = R$ ,  $I$  是分式右  $R$ -理想, 我们得到左  $R$ -模同构

$$\text{Hom}_R(I_R, {}_R R_R) \cong \{q \in Q \mid qI \subseteq R\}.$$

并且该模同构可由  $\{q \in Q \mid qI \subseteq R\} \rightarrow \text{Hom}_R(I_R, {}_R R_R), q \mapsto (x \mapsto qx)$  给出.

**Remark 2.62.** 设  $Q$  是商环,  $R$  是  $Q$  中 order,  $I$  是分式  $(R, R)$ -理想. 那么  $Q$  是  $R$  的左商环也是  $R$  的右商环. 这时  $I$  作为分式左  $R$ -理想, 我们也可以借助  $Q$  是平坦右  $R$ -模得到右  $R$ -模同构  $\{q \in Q \mid Iq \subseteq R\} \cong \text{Hom}_R({}_R I, {}_R R_R)$ . 并且该同构可由  $i : \{q \in Q \mid Iq \subseteq R\} \rightarrow \text{Hom}_R({}_R I, {}_R R_R), q \mapsto (x \mapsto xq)$  给出. 我们也有环同构  $\text{End}({}_R I) \cong O_r(I)$ . 该环同构将  $O_r(I)$  中每个元素对应到  $I$  上右乘变换.

**Proposition 2.63.** 设  $R$  是商环  $Q$  中的右 order 且  $I$  是分式右  $R$ -理想. 那么  $I_R$  投射蕴含  $I_R$  有限生成.

*Proof.* 根据 [注记2.61], 那么存在  $I$  的对偶基  $\{x_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq I_R$  以及  $\{x_i^*\}_{i \in \Lambda} \subseteq I^* = \text{Hom}_R(I_R, R_R)$ . 对每个  $x_i^*$ , 存在  $q_i \in \{q \in Q \mid qI \subseteq R\}$  使得  $x_i^*$  是  $q_i$  在  $I$  上决定的左乘变换. 并且对任何  $s \in I$ ,  $q_i s$  仅对有限多个指标非零. 而  $I$  含有  $Q$  中可逆元, 因此仅有有限多个  $q_i$  非零. 由此得到  $I_R$  是有限生成投射模.  $\square$

### 3 Goldie 理论的应用

#### 3.1 Noether PI 蕴含 FBN

**Definition 3.1.** 如果一个素环  $R$  的任何本质右理想都含有一个非零理想, 则称该素环是右有界的 (right bounded). 如果含幺环  $R$  满足对任何素理想  $P$ , 商环  $R/P$  都是右有界环, 则称  $R$  是右全有界的 (right fully bounded). 类似可定义左有界素环与左全有界环的概念. 如果一个素环既是左有界的又是右有界的, 称该素环有界. 如果一个含幺环既是右全有界环又是左全有界环, 称该环是全有界的 (fully bounded). 将右全有界的右 Noether 环简称为右 FBN 环. 全有界的双边 Noether 环简称为 FBN 环.

**Example 3.2.** 如果素环  $R$  是右有界的, 那么  $R$  的非零右理想可能不含非零双边理想.

*Proof.* 考虑存在非平凡右理想的 Artin 单环  $R$ , 例如  $M_n(\mathbb{k})$ ,  $n \geq 2$ . 那么  $R$  的非平凡右理想不包含非零双边理想. 但  $R$  的本质右理想只有  $R$  (回忆 [例1.1]).  $\square$

本节的目标是说明右 Noether PI 环是右 FBN 环 (特别地, 素右 Noether PI 环的任何本质右理想都含有某个非零理想. 事实上, 素 PI 环都是右有界环, 见 [定理3.5]). 在 [推论2.7] 中我们看到素 PI 环是右 Goldie 环, 因此由 Goldie 定理, 素 PI 环的任何本质右理想都会含  $R$  的某个正则元. 回忆对含幺环  $K$  上一个 PI 代数  $A$  (可以没有  $1_A$ ), 如果  $A$  满足某个次数为  $d \geq 1$  的首一多项式  $f \in K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , 那么  $A$  满足  $K$  上某个次数不超过  $d$  的首一多重线性多项式 (见我的 PI 代数笔记). 我们利用这个工具先证明:

**Proposition 3.3.** 设含幺环  $R$  是 PI 的,  $a \in R$ , 那么对充分大的正整数  $n$ , 右理想  $a^n R + \text{rann}(a^n)$  一定包含  $R$  的某个非零理想.

*Proof.* 考虑集合  $S = \{l \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \text{存在某个 } l \text{ 次首一多重线性多项式使得对某个正整数 } k, a^k R \text{ 满足该多项式}\}$ , 因为  $R$  是 PI 环, 所以  $S$  非空, 由良序原理, 存在  $S$  中最小元  $l$ , 设它对应  $a^k R$  满足的首一多重线性多项式  $g(x_1, x_2, \dots, x_l) \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_l \rangle$ , 那么一方面, 由  $a^n R \subseteq a^k R, \forall n \geq k$  知对每个正整数  $n \geq k$ ,  $a^n R$  也满足  $g$ ; 另一方面, 根据  $l$  的选取, 任何  $a^n R (n \geq k)$  不会满足次数严格低于  $l$  的首一多重线性多项式. 不妨设  $g$  表达式中项  $x_1 \cdots x_l$  的系数是 1. 现在我们将  $g$  如下拆分:  $g(x_1, \dots, x_l) = x_1 g_1(x_2, \dots, x_l) + g_2(x_1, \dots, x_l)$ , 其中  $g_1$  是以  $x_2, \dots, x_l$  为变量的首一多重线性多项式,  $g_2$  是每项不以变量  $x_1$  为首的多重线性多项式 (在证明 Köthe 猜想在 PI 环层面成立时, 我们也用过这个技术). 那么对任何  $r_1, \dots, r_l \in R$ , 有

$$0 = g(a^n r_1, a^{2n} r_2, \dots, a^{2n} r_l) = (a^n r_1) g_1(a^{2n} r_2, \dots, a^{2n} r_l) + g_2(a^n r_1, \dots, a^{2n} r_l), \forall n \geq k.$$

根据前面的讨论,  $g_1$  作为次数严格低于  $l$  的首一多重线性多项式不能零化  $a^{2n} R$ , 故可选取适当  $r_2, \dots, r_l \in R$  使  $g_1(a^{2n} r_2, \dots, a^{2n} r_l) \neq 0$ . 记  $s = g_1(a^{2n} r_2, \dots, a^{2n} r_l) \neq 0, a^{2n} t = g_2(a^n r_1, \dots, a^{2n} r_l) \in R$  (这里  $s$  依赖于  $n$ ), 则

$$a^n r_1 s + a^{2n} t = 0 \Rightarrow a^n(r_1 s + a^n t) = 0, \forall r_1 \in R, n \geq k.$$

因此对充分大的正整数  $n$ ,  $R s \subseteq a^n R + \text{rann}(a^n)$ , 因为包含关系右边也是右理想, 所以  $R s R \subseteq a^n R + \text{rann}(a^n)$ . 即对充分大的正整数  $n$ ,  $a^n R + \text{rann}(a^n)$  会包含一个非零理想  $R s R$ .  $\square$

**Corollary 3.4.** 设含幺环  $R$  是 PI 环,  $a \in R$  满足  $\text{rann}(a) = 0$ , 那么  $aR$  包含某个非零理想.

*Proof.* 因为  $a$  的右零化子是平凡的, 所以对任何首一多重线性的多项式  $g \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_l \rangle$ ,  $aR$  满足  $g$  当且仅当对所有的  $k \geq 1$  有  $a^k R$  满足  $g$ . 这意味着在前一命题证明过程中所构造的集合  $\mathcal{S}$  的最小元  $l$  所对应的首一多重线性多项式  $g$  可以零化每个  $a^k R (k \geq 1)$ . 所以在前一命题证明过程中可取  $n = k = 1$  来得到  $aR$  会包含一个非零理想.  $\square$

现在我们可以给出 PI 环是右全有界环的证明. 回忆一个半素 PI 环任何非零理想会和中心之交非零.

**Theorem 3.5.** 设  $R$  是 PI 环, 那么对每个素理想  $P$ , 有  $R/P$  是右有界环, 即  $R/P$  任何本质右理想都包含一个非零理想. 从而知 PI 环是右全有界环. 特别地, 右 Noether PI 环是右 FBN 环.

*Proof.* 只要证素 PI 环是右有界环即可. Posner 定理告诉我们素 PI 环是右 Goldie 素环, 从而 Goldie 定理保证了素 PI 环的任何本质右理想会包含一个正则元, 于是 [推论3.4] 表明该正则元生成的右理想必定包含某个非零理想. 故素 PI 环的任何本质右理想会包含某个非零理想.  $\square$

**Remark 3.6.** 通过 [定理3.5] 的证明过程可知素 PI 环的本质右理想都包含某个中心正则元. Goldie 定理表明半素右 Goldie 环的本质右理想都含有正则元, 但这不能得出含有中心正则元. 但即便是 Noether 整环的本质右理想都有可能不含任何中心正则元. 例如考虑域  $\mathbb{k}$  上非单位根  $q$  处的量子平面  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$ , 它存在非平凡理想并且中心就是  $\mathbb{k}$ , 那么该环的任何非平凡双边理想都是本质右理想, 但不含中心正则元.

根据交换代数中的 Matlis 理论, 交换 Noether 环  $R$  的不可分内射模同构类全体  $\mathcal{I}(R)$  与素谱  $\text{Spec } R$  间有标准的双射  $\alpha : \text{Spec } R \rightarrow \mathcal{I}(R), P \mapsto [E(R/P)]$ . 在非交换场景, 如果  $R$  是右 Noether 环, 对  $P \in \text{Spec } R$ , 一般内射模  $E(R/P)$  不是不可分模, 根据 [命题1.12],  $E(R/P)$  可分解为一些不可分内射模的直和. 我们有

**Proposition 3.7.** 设  $R$  是右 Noether 环,  $P \in \text{Spec } R$ . 设内射模  $E(R/P)$  有 (强) 不可分内射模分解  $\bigoplus_{i \in \Gamma} E_i$ , 那么对任给  $i, j \in \Gamma$  有  $E_i \cong E_j$ . 并注意由 [推论1.105] 可知  $\text{Ass } E_i = \{P\}$ .

*Proof.* 这时  $R/P$  作为右 Noether 素环是素右 Goldie 环, 所以根据 Goldie 定理,  $R/P$  的右商环  $Q$  存在并且是 Artin 单环. 易见  $Q$  作为右  $R/P$ -模是  $R/P$  的本质扩张, 作为  $R$ -模依然是本质扩张. 所以作为  $R$ -模有  $E(Q) = E(R/P)$ (这里内射包对  $R$ -模取). 因为  $Q$  是 Artin 单环, 所以可以分解为有几个极小右理想的直和, 设为  $Q = L_1 \oplus \dots \oplus L_t$ . 于是 [推论1.4] 保证了  $E(Q) = E(L_1) \oplus \dots \oplus E(L_t)$  给出  $E(Q)$  的不可分内射模直和分解(回忆 [例1.11]), 由 Krull-Schmidt 定理的证明过程可知每个  $E_i$  都同构于某个  $E(L_j)$ , 而 Artin 单环只有一个不可约模同构类, 所以对任给  $i, j \in \Gamma$  有  $E_i \cong E_j$ .  $\square$

**Remark 3.8.** 根据证明过程以及 Krull-Schmidt 定理, 任给右 Noether 环  $R$  的素理想  $P$ , 内射模  $E(R/P)$  都可以唯一地分解为有限多个两两同构的不可分内射模的直和. 并且分解的直和项数目就是  $\text{u.dim}_R E(R/P)$ . 如果  $R$  有中心子环  $C$  使得  ${}_C R$  是有限生成模. 命  $\mathfrak{p} = P \cap C$ . 那么  $R_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}} \cong (R/P)_{\overline{C-\mathfrak{p}}}$ . 注意到  $R/P$  这时是模有限素环, 因此  $\overline{C-\mathfrak{p}}$  作为中心乘闭子集均由  $R/P$  中正则元构成. 现在应用 [引理1.118(3)] 可知  $\text{u.dim}_R R_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}} = \text{u.dim}_R R/P = \text{u.dim}_R Q$ , 其中  $Q$  表示  $R/P$  的右商环. 注意到  $P_{\mathfrak{p}} \cap C_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} C_{\mathfrak{p}}$  以及  $P_{\mathfrak{p}}$  是  $R_{\mathfrak{p}}$  的极大理想, 这时  $R_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}}$  是 Artin 单环. 所以根据 [例1.90], 记  $n = \text{u.dim}_R R/P = \text{u.dim}_R Q = \text{u.dim}_R E_R(R/P)$ , 则存在除环  $\Delta$  使得  $R_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}} \cong M_n(\Delta)$ . 并且  $\Delta$  是  $C_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} C_{\mathfrak{p}}$  上有限维可除代数.

**Remark 3.9.** 根据证明过程可知对右 Noether 环  $R$  和素理想  $P$ ,  $E(R/P)$  是不可分内射模当且仅当  $R/P$  是右商环是自身上不可约右模. 这也等价于  $R/P$  的右商环是除环. 这又等价于  $P$  是  $R$  的完全素理想. 通常, 即

便  $R$  是右 Noether 素环, 也未必存在完全素理想. 例如考虑  $n \geq 2$  并取  $R = M_n(\mathbb{k})$ , 这里  $\mathbb{k}$  是域. 这也说明对右 Noether 素环  $R$ , 一般地, 有可能对所有的素理想  $P$  都有  $\text{u.dim}_R E(R/P) \geq 2$ .

**Example 3.10.** 设  $R$  是代数闭域  $\mathbb{k}$  上仿射模有限代数, 在中心子代数  $C$  上是有限生成模. 设  $M$  是  $R$  的极大理想, 那么  $\mathfrak{m} = M \cap C$  是  $C$  的极大理想. 下面说明  $\text{u.dim} R/M$  就是  $M$  对应的  $R$  的不可约表示的  $\mathbb{k}$ -线性维数. 注意到  $C/\mathfrak{m}$  是仿射交换代数且是域, 所以  $\mathbb{k} = C/\mathfrak{m}$ . 于是由  $R/M$  是  $C/\mathfrak{m}$  上有限维单代数知存在正整数  $n$  使得  $R/M \cong M_n(\mathbb{k})$ , 因此  $\text{u.dim} R/M = n$  就是  $R/M$  的不可约表示的  $\mathbb{k}$ -线性维数.

**Corollary 3.11.** 设  $R$  是右 Noether 环, 记不可分内射右  $R$ -模同构类全体为  $\mathcal{I}(R)$ , 那么

$$\Phi : \mathcal{I}(R) \rightarrow \text{Spec}R, [E_R] \mapsto \text{Ass}E$$

是满射.

**Remark 3.12.** 当  $R$  是右 Artin 环时, 可直接证明上述映射  $\Phi$  是双射: 设  $R/\text{Jac}R$  可分解为  $n$  个 Artin 单环的直和, 那么这蕴含  $R$  有  $n$  个不可约模同构类, 进而  $|\text{Spec}R| = n$ . 设  $R$  的一个不可约模同构类代表元集为  $\{V_1, \dots, V_n\}$ , 那么  $E(V_i) \cong E(V_j) \Leftrightarrow V_i = V_j$ (只要  $E(V_i) \cong E(V_j)$ , 那么  $V_i$  在同构  $E(V_i) \cong E(V_j)$  下的同态像与  $V_j$  相交非零). 因此  $\{E(V_1), \dots, E(V_n)\}$  是两两不同构的不可分内射模构成的集合. 下面说明任何不可分内射模一定同构于某个  $E(V_i)$ . 任取不可分内射右  $R$ -模  $E$ , 并取定  $x \neq 0 \in E$ , 那么  $xR$  作为有限生成右  $R$ -模有合成列, 所以  $E$  包含某个不可约模  $V_i$ . 于是  $E(V_i)$  是含于  $E$  的不可分内射模, 结合  $E$  的不可分性迫使  $E = E(V_i)$ . 因此我们得到  $\{E(V_1), \dots, E(V_n)\}$  就是  $\mathcal{I}(R)$  的一个代表元集. 因此  $|\mathcal{I}(R)| = n$  保证了  $\Phi$  是双射. 根据上述证明过程不难看到对一般的含幺环  $R$ , 如果  $R$  有不可约模同构类的代表元集  $\{V_i | i \in \Gamma\}$ , 那么  $\{E(V_i) | i \in \Gamma\}$  是两两不同构的不可分内射模构成的集合, 该集合在  $\Phi$  下的像就是  $\text{maxSpec}R$ . 并且对右 Noether 环  $R$  上的任何有限长不可分内射模  $I_R$ , 总存在不可约模  $V_R$  使得  $I \cong E(V)$ .

现在设右 Noether 环  $R$  在中心子环  $C$  上是有限生成模. 我们关心不可分内射右  $R$ -模作为  $C$ -模的相关素理想集. 首先我们需要 [?] 中给出的下述观察

**Lemma 3.13.** 设  $R$  是右 Noether 环并且是中心子环  $C$  上有限生成模,  $E_R \neq 0$  是不可分内射模. 那么对  $C$  的任何乘闭子集  $S$ (要求  $0 \notin S$  以保证  $C_S \neq 0$ ) 有: 如果存在  $s \in S$  和  $x \neq 0 \in E$  使得  $xs = 0$ , 那么作为  $R_S$ -模有  $E_S = 0$ . 并且总有  $|\text{Ass}_C E| \leq 1$ .

*Proof.* 现设存在  $s \in S$  和  $x \neq 0 \in E$  使得  $xs = 0$ . 那么由  $E_R$  是不可分内射模知  $E_R(xR) = E$ . 对等式两边关于  $S$  作局部化得到  $E_S \cong (E_R(xR))_S \cong E_{R_S}((xR)_S)$ (最后一个同构式来自 [推论1.75]). 而条件  $xs = 0$  说明  $(xR)_S = 0$ , 因此  $E_S = 0$ . 下证  $|\text{Ass}_C E| \leq 1$ . 假设存在  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$  都在  $\text{Ass}_C E$  中, 不妨设  $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$ , 那么可选取  $t \in \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ . 因为  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_C I$ , 所以存在  $x \neq 0 \in E$  使得  $xt = 0$ . 现在  $t \in C - \mathfrak{q}$  意味着  $E_{\mathfrak{q}} = 0$ . 但从 [引理1.110] 中我们已经看到  $\text{Ass}_C E \subseteq \text{Supp}_C E$ . 因此  $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_C E$  蕴含  $E_{\mathfrak{q}} \neq 0$ , 得到矛盾.  $\square$

**Corollary 3.14.** 设  $R$  是右 Noether 环并且是中心子环  $C$  上有限生成模,  $E_R \neq 0$  是不可分内射模. 那么  $|\text{Ass}_R E| = |\text{Ass}_C E| = 1$  并且若记  $\text{Ass}_R E = \{P\}$ . 那么  $\text{Ass}_C E = \{P \cap C\}$ .

*Proof.* 因为  $E_R$  是右 Noether 环上一致模, 所以  $|\text{Ass}_R E| = 1, |\text{Ass}_C E| = 1$  来自 [引理3.13]. 现在设  $\text{Ass}_R E = \{P\}$ , 那么存在  $E_R$  的素子模  $N_R$  满足  $P = \text{Ann}_R N$ . 于是对任何  $x \neq 0 \in N$  有  $P = \text{Ann}_R(xR)$ . 由此不难看出  $P \cap C = \text{ann}_C(x)$ . 所以  $\text{Ass}_C E = \{P \cap C\}$ .  $\square$

**Remark 3.15.** 如果在推论条件下进一步要求  $R_C$  是投射模, 那么 [引理1.65] 表明  $E_R$  作为  $C$ -模也是内射的. 记  $\mathfrak{p} = C \cap P$ , 这时由上述推论以及交换代数中的 Matlis 定理立即得到

$$E_C \cong \bigoplus_{i \in \Gamma} E_C(C/\mathfrak{p}).$$

[命题1.126(1)] 表明这里指标集  $\Gamma$  是有限的 (因为这时  $\text{u.dim}_C E$  有限). 同理也有  $\text{u.dim}_C E_R(R/P) < +\infty$ .

**Corollary 3.16.** 设含幺环  $R$  满足是 Noether 中心子环  $C$  上有限生成模. 那么对任何有有限一致维数的左  $R$ -模  $M$  (例如  $M$  是有限生成  $R$ -模), 那么  $\text{Ass}_C M = \{P \cap C \mid P \in \text{Ass}_R M\}$ .

*Proof.* 易验证总有  $\{P \cap C \mid P \in \text{Ass}_R M\} \subseteq \text{Ass}_C M$ . 下证  $M$  作为  $C$ -模的任何相关素理想可表示为  $\text{Ass}_R M$  中某个素理想和  $C$  的交. 不妨设  $M \neq 0$ . 因为  $M$  有有限一致维数, 所以存在  $M$  的一致子模  $U_1, \dots, U_m$  使得  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$  是  $M$  的本质子模. 于是  $\bigoplus_{i=1}^m U_i$  也是  $E(M)$  的本质子模, 进而得到  $\bigoplus_{i=1}^m E(U_i) = E(\bigoplus_{i=1}^m U_i) = E(M)$ . 根据 [定理1.9], 每个  $E(U_i)$  是不可分内射左  $R$ -模, 所以由 [命题1.102], 可设  $\text{Ass}_R E(U_i) = \{P_i\}$ , 那么 [推论3.14] 说明  $\text{Ass}_C E(U_i) = \{P_i \cap C\}$ . 由 [命题1.102(4)] 可知  $\text{Ass}_C E(M) = \{P_i \cap C \mid 1 \leq i \leq m\}$  以及  $\text{Ass}_R M = \{P_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ . 现在因为  $\text{Ass}_C M \subseteq \text{Ass}_C E(M)$ , 所以我们得到  $\text{Ass}_C M \subseteq \{P \cap C \mid P \in \text{Ass}_R M\}$ .  $\square$

事实上, [推论3.16] 中对  $M$  一致维数有限的条件是多余的. 回忆 Bass-Papp 定理保证了左 Noether 环  $R$  上任意内射模族的直和依然是内射的, 由此可得左 Noether 环上任意内射模总可以分解为一些不可分内射模的直和 (见 [引理3.18]), 所以我们可以使用 [注记1.103] 证明

**Theorem 3.17.** 设含幺环  $R$  满足是 Noether 中心子环  $C$  上有限生成模. 那么对任何左  $R$ -模  $M$  有

$$\text{Ass}_C M = \{P \cap C \mid P \in \text{Ass}_R M\}.$$

*Proof.* 只需证任何  $\text{Ass}_C M$  中素理想可表示为  $\text{Ass}_R M$  中某个素理想和  $C$  的交. 记  $E(M)$  是  $M$  作为左  $R$ -模的内射包, 那么作为  $C$ -模也有  $\text{Ass}_C M \subseteq \text{Ass}_C E(M)$ . 所以只需证  $E(M)$  作为  $C$ -模的相关素理想都形如  $P \cap C$ , 其中  $P \in \text{Ass}_R M$ . 不妨设  $M \neq 0$ . 根据下面的 [引理3.18],  $E(M)$  作为内射左  $R$ -模可以分解为一些不可分内射左  $R$ -模的直和  $E(M) = \bigoplus_{i \in \Lambda} E_i$ , 这里每个  $E_i$  是不可分内射模. 根据 [命题1.102(6)], 对每个指标  $i \in \Lambda$ , 可设  $\text{Ass}_R E_i = \{P_i\}$ . 那么 [命题1.102(2)] 和 [注记1.103] 说明  $\text{Ass}_R M = \text{Ass}_R E(M) = \{P_i \mid i \in \Lambda\}$ . 对每个  $E_i$  应用 [推论3.14] 得到  $\text{Ass}_C E_i = \{P_i \cap C\}$ . 现在将  $R$ -模分解式  $E(M) = \bigoplus_{i \in \Lambda} E_i$  视作  $C$ -模分解式, 应用 [注记1.103] 便知  $\text{Ass}_C E(M) = \{P_i \cap C \mid i \in \Lambda\}$ . 因此  $\text{Ass}_C M \subseteq \{P \cap C \mid P \in \text{Ass}_R M\}$ .  $\square$

**Lemma 3.18.** 设  $R$  是左 Noether 环, 那么任何内射左  $R$ -模  $M$  是一些不可分内射模的直和.

*Proof.* 注意任何非零内射模  $_R E$  必定存在不可分内射子模, 因为取  $x \neq 0 \in E$ , 考虑内射包  $E(Rx) \subseteq E$ , 我们用反证法说明  $E(Rx)$  含有不可分内射子模. 若不然, 则存在非零真内射子模  $I_{11}, I_{12}$  使得  $E(Rx) = I_{11} \oplus I_{12}$ ,  $I_{11}$  不是不可分内射子模表明存在  $I_{11}$  的非零真内射子模  $I_{21}, I_{22}$  使得  $I_{11} = I_{21} \oplus I_{22}$ , 如此继续, 递归地可得到非零内射子模序列  $\{I_{k1}\}_{k \geq 1}$  以及  $\{I_{k2}\}_{k \geq 1}$  使得  $I_1 = I_{11} \oplus I_{12}, I_{k1} = I_{k+1,1} \oplus I_{k+1,2}, \forall k \geq 1$ . 易见

$$I_1 = I_{12} \oplus I_{22} \oplus \cdots \oplus I_{n2} \oplus I_{n1}, \forall n \geq 1.$$

所以我们有  $E(Rx)$  的子模严格升链  $I_{12} \subsetneq I_{12} \oplus I_{22} \subseteq I_{12} \oplus I_{22} \oplus I_{32} \subsetneq \cdots$ , 它诱导  $Rx$  的子模严格升链

$$I_{12} \cap Rx \subsetneq (I_{12} \oplus I_{22}) \cap Rx \subseteq (I_{12} \oplus I_{22} \oplus I_{32}) \cap Rx \subsetneq \cdots$$

这与  $Rx$  是 Noether 模矛盾. 因而  $E(Rx)$  有不可分内射子模, 这也说明  $E$  有不可分内射子模. 现在我们说明内射模  $M$  是一些不可分内射模的直和. 不妨设  $M \neq 0$ , 考虑集合

$$S = \{\{M_i\}_{i \in \Lambda} \mid \{M_i\}_{i \in \Lambda} \text{ 是 } M \text{ 的不可分内射子模族且 } \sum_{i \in \Lambda} M_i = \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i\}$$

那么根据前面的讨论知道  $(S, \subseteq)$  是非空偏序集, 可直接验证它任何全序子集有上界, 所以应用 Zorn 引理知  $S$  有极大元  $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ . 依 Bass-Papp 定理, 左 Noether 环上任何一族内射左模的直和仍内射, 所以  $\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$  是  $M$  的直和因子, 设为  $M = E \oplus (\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i)$ , 假设  $E \neq 0$ , 则由前面的讨论知道  $E$  有不可分内射子模, 这会与子模族  $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$  的极大性矛盾, 所以  $E = 0$ , 从而  $M = \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$ .  $\square$

## 3.2 Small 定理

本节介绍 Goldie 理论以及 reduced rank(见 [定义3.22]) 在 Small 定理 (右 Noether 环的右 Artin 商环存在性刻画) 证明上的应用, 见 [推论3.27].

设  $R$  是半素右 Goldie 环, 根据 Goldie 定理,  $R$  的右商环  $Q$  存在且为 Artin 半单环, 见 [定理2.14]. 因此存在  $Q$  的中心幂等元  $e_1, \dots, e_k$  使得  $Q = \bigoplus_{i=1}^k Qe_i$  且每个  $Q_i = Qe_i$  是以  $e_i$  为幺元的 Artin 单环, 以下固定前述记号.  $Q$  的素/极大理想全体就是  $\{\sum_{i \neq j} Q_i \mid 1 \leq j \leq k\}$ . 对每个  $1 \leq j \leq k$ , 记

$$M_j = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_{j-1} \oplus Q_{j+1} \oplus \cdots \oplus Q_k.$$

记  $S$  是  $R$  所有正则元构成的乘闭子集, 则  $Q = R_S$ . 并且局部化映射  $\lambda_S : R \rightarrow Q = R_S$  是单射. 利用此单射将  $R$  与  $\lambda_S(R)$  视作等同, 于是  $R$  成为  $Q$  的含幺子环. 命  $P_i = M_i \cap R$ ,  $A_i = Q_i \cap R$  以及  $A = \bigoplus_i A_i$ .

**Proposition 3.19.** 设  $R$  是半素右 Goldie 环,  $Q$  是  $R$  的右商环. 保持前面的记号, 我们有:

- (1) 每个  $P_i$  是  $R$  的极小素理想, 且  $\{P_i \mid 1 \leq i \leq k\}$  是  $R$  的所有极小素理想.
- (2)  $R$  的任何形如  $I \cap R$  的理想, 这里  $I$  是  $Q$  的理想, 就是  $R$  的所有零化理想 (回忆 [命题1.120]).
- (3) 每个  $A_i$  是  $R$  的极小非零零化理想, 并且  $\{A_i \mid 1 \leq i \leq k\}$  是  $R$  的所有极小非零零化理想.
- (4)  $A$  是  $R$  的本质右理想.
- (5) 有环同构  $R/P_i \cong e_i R$ .
- (6) 记  $\mathcal{C}_R(P_i) = \{a \in R \mid a + P_i \text{ 是 } R/P_i \text{ 中的正则元}\}$ , 那么  $S = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{C}_R(P_i)$ .

*Proof.* (1) 我们证明每个  $P_i$  是  $R$  的素理想, 一旦证明该事实, 由所有  $P_i$  之交是零立即得到  $P_i$  是极小素理想, 并且  $R$  的任何极小素理想都是某个  $P_i$ . 易见  $P_i$  是  $R$  的真理想. 现在设  $R$  的理想  $X, Y$  满足  $XY \subseteq P_i$ . 根据 [命题1.25],  $XQ, YQ$  都是  $Q$  的理想. 所以  $(XQ)(YQ) \subseteq XYQ \subseteq P_i Q \subseteq M_i$ . 于是  $XQ \subseteq M_i$  或  $YQ \subseteq M_i$ . 由此得到  $P_i$  是素理想. 因此  $\{P_i \mid 1 \leq i \leq k\}$  是  $R$  的所有极小素理想.

(2) 注意到  $R$  的零化理想都可写作一些极小素理想的交, [命题1.119(3)], 所以由  $P_i$  的定义可知  $R$  的零化理想都能表示为  $Q$  的某个理想和  $R$  的交. 反之, 任取  $Q$  的理想  $I$ , 那么由  $I$  是一些  $M_i$  之交可知  $I \cap R$  是一些  $P_i$  之交. 可设  $\Lambda$  是  $\{1, 2, \dots, k\}$  的子集, 满足  $I \cap R = \bigcap_{i \in \Lambda} P_i$ . 记  $\Lambda'$  是  $\Lambda$  在  $\{1, 2, \dots, k\}$  中的补集. 命  $L = \bigcap_{j \in \Lambda'} P_j$ . 那么不包含  $L$  的全体极小素理想就是  $\{P_i \mid i \in \Lambda\}$ . 于是 [命题1.119(3)] 说明  $I \cap R = \text{ann}(L)$ .

(3) 首先 (2) 保证了每个  $A_i$  是  $R$  的零化理想 ( $Q_i \neq 0$  也保证了  $A_i \neq 0$ ). 现在每个  $Q_i$  都是  $Q$  的极小非零理想, 所以  $Q_i \cap R$  在  $Q$  中生成的理想就是  $Q_i$ . 并且如果  $Q$  的理想  $L$  和  $Q_i$  之交非零, 那么  $L \supseteq Q_i$ . 这迫

使  $A_i = R \cap Q_i$  都是  $R$  的极小非零化理想. 任何  $R$  的非零化理想都形如  $L \cap Q$ , 这里  $L$  是  $Q$  的非零理想. 所以存在  $1 \leq i_0 \leq k$  使得  $L \supseteq Q_{i_0}$ . 于是  $L$  包含  $A_{i_0}$ . 故  $\{A_i | 1 \leq i \leq k\}$  是所有极小非零化理想.

(4) 注意到  $A_i Q$  是  $Q$  的理想, 见 [命题1.25], 我们看到  $A_i Q = Q_i$ . 于是  $AQ = Q$  (或等价地,  $A_S = Q$ ). 现在应用 [引理1.118(1)] 便知  $A$  是  $R$  的本质右理想.

(5) 因为  $e_i$  是  $Q_i = Qe_i$  的幺元, 因此也是含幺环  $Re_i$  的幺元. 命  $R \rightarrow Re_i, a \mapsto ae_i$ , 那么这是满环同态并且核为  $R \cap M_i = P_i$ . 因此有同构  $R/P_i \cong Re_i$ .

(6) 因为所有  $P_i$  之交是零理想, 所以  $R$  到  $R/P_1 \times \cdots \times R/P_k$  的标准映射是单射. 由此不难看到  $\cap_{i=1}^k \mathcal{C}_R(P_i)$  中元素都是  $R$  中正则元. 现在任取  $s \in S$ , 那么  $se_i \in Q_i$  作为 Artin 单环  $Q_i$  中的正则元是可逆的. 于是知  $se_i \in e_i R$  也是正则元. 进而由 (5) 可知对每个  $P_i, s \in \mathcal{C}_R(P_i)$ .  $\square$

**Remark 3.20.** 如果  $R$  是交换 Noether 半素环, 那么由  $N(R)$  和局部化可交换以及  $N(R)$  由所有幂零元构成, 可知对  $R$  的每个极小素理想  $\mathfrak{p}_i$ , 有  $R_{\mathfrak{p}_i}$  是域. 并且  $R$  是半素环保证了  $R$  的零因子集恰好是所有极小素理想之并: 在 [定理1.122] 中我们已经看到  $R$  的极小素理想中的元素都是零因子. 如果  $a \neq 0 \in R$  是零因子, 则有  $b \neq 0 \in R$  使得  $ab = 0 \in N(R)$ . 而  $b$  不在某个极小素理想中 (因为  $N(R) = 0$  是所有极小素理想之并), 所以根据素理想的定义知  $a$  在某个极小素理想中. 因此对交换 Noether 半素环  $R$  的极小素理想全体  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r, \cup_i \mathfrak{p}_i$  就是  $R$  的零因子集. 如果交换 Noether 半素环  $R$  在商环  $Q$  中是整闭的, 那么每个  $e_i$  作为  $R$  上整元, 也在  $R$  中, 因此  $R = \oplus_{i=1}^k Re_i$ . 根据 [命题3.19],  $k = r$  且可设  $Re_i \cong R/\mathfrak{p}_i$ . 故当  $R$  局部时,  $R$  是整区.

一般地, 半素 Goldie 环  $R$  的素理想  $P$  对应的乘闭子集  $\mathcal{C}_R(P)$  中元素可能不在  $R$  中正则.

**Example 3.21.** 考虑下述素 PI 环 (易见作为  $\mathbb{Z}$ -模是有限生成自由模, 因此也是双边 Noether 环):

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

那么可直接验证  $M = \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$  是  $R$  的极大理想且有  $R/M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . 于是知

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

在  $\mathcal{C}_R(M)$  中, 但  $a$  不是  $R$  中正则元.

保持前面的记号,  $R$  是半素右 Goldie 环,  $Q = R_S$  是  $R$  的右商环. 那么对任何右  $R$ -模  $M$ , 有右  $R_S$ -模同构  $M \otimes_R Q = M \otimes_R R_S \cong M_S$  (回忆 [推论1.34]). 称右  $M \otimes_R Q$  作为右  $Q$ -模的一致维数为  $M$  的 **reduced rank**, 记作  $\rho(M)$ . 当  $M$  是有限生成右  $R$ -模时,  $\rho(M)$  有限且  $\rho(M)$  就是  $M$  作为右  $Q$ -模的合成列长度 (因为  $Q$  是 Artin 半单环, 任何右  $Q$ -模是完全可约的). 注意到对任何右  $R$ -模短正合列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

有右  $Q$ -模短正合列  $0 \longrightarrow M' \otimes_R Q \longrightarrow M \otimes_R Q \longrightarrow M'' \otimes_R Q \longrightarrow 0$ , [命题1.41]. 所以由该右  $Q$ -模短正合列可裂 (因为  $Q$  是 Artin 半单环) 以及 [引理1.113(4)] 得到  $\rho(M) = \rho(M') + \rho(M'')$ .

为了对右 Noether 环也能讨论 reduced rank, 我们需要将前面的设置适当放宽.

**Definition 3.22.** 设  $R$  是含幺环,  $N$  是素根满足  $R/N$  是右 Goldie 环且  $N$  是幂零理想 (例如  $R$  是右 Noether 环). 如果右  $R$ -模  $M$  有子模序列  $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_k = 0$  满足对每个  $0 \leq i \leq k-1$  有  $M_i N \subseteq M_{i+1}$ , 则称该有限子模序列为  $M$  的一个 **Loewy 序列**. 称

$$\rho_R(M) = \sum_{i=0}^k \rho_{R/N}(M_i/M_{i+1})$$

为  $M$  的 **reduced rank**.

**Remark 3.23.** 易见  $N$  的幂零性保证了  $M$  的 Loewy 序列总存在: 取  $M_i = MN^i$ . 并且根据 Loewy 序列的定义, 有  $MN^i \subseteq M_i$ . 我们马上在下面的 [引理3.24] 证明上述 reduced rank 不依赖于 Loewy 序列的选取. 进而知当  $R$  是半素右 Goldie 环时, 上述定义与原有 reduced rank 的定义一致.

**Lemma 3.24.** 设  $R$  是含幺环,  $N$  是素根满足  $R/N$  是右 Goldie 环且  $N$  是幂零理想. 那么任何右  $R$ -模的 reduced rank 不依赖于 Loewy 序列的选取, 并且对任何右  $R$ -模短正合列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

有  $\rho(M) = \rho(M') + \rho(M'')$ .

*Proof.* 前面已经指出了半素右 Goldie 环场景的 reduced rank 关于短正合列具有可加性. 由此可直接验证任何右  $R$ -模  $M$  的 Loewy 序列的加细 (依然是 Loewy 序列) 与给定 Loewy 序列定义出的 reduced rank 一致. 现在任取右  $R$ -模  $M$  的两个 Loewy 序列, 将它们加细成合成列, 那么 Schreier 加细定理保证了给定的两个 Loewy 序列存在加细具有相同 reduced rank. 于是由 Loewy 序列的加细不改变定义的 reduced rank 知  $M$  的任意两个 Loewy 序列定义出的 reduced rank 都相同. 这就证明了  $\rho(M)$  不依赖于 Loewy 序列的选取.

要证明对任给右  $R$ -模短正合列  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ , 总有  $\rho(M) = \rho(M') + \rho(M'')$ , 只需验证  $M'$  是  $M$  的子模且  $M'' = M/M'$  的情形即可. 现在设  $M'$  和  $M''$  有 Loewy 序列

$$M' = M'_0 \supseteq M'_1 \supseteq \cdots \supseteq M'_\ell = 0, \quad M'' = M''_0 \supseteq M''_1 \supseteq \cdots \supseteq M''_s = 0.$$

对每个自然数  $0 \leq j \leq s$ , 设  $M''_j = X_j/M'$ , 这里  $X_j \supseteq M'$ . 那么  $X_0 = M$  且  $X_s = M'$ . 并且由  $M''_j N \subseteq M''_{j+1}$  可知  $X_j N \subseteq X_{j+1}$ . 所以  $M = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_s = M' \supseteq M'_1 \supseteq \cdots \supseteq M'_\ell = 0$  定义了  $M$  的 Loewy 序列. 于是由前面证明的 reduced rank 不依赖于 Loewy 序列的选取知  $\rho(M) = \rho(M') + \rho(M'')$ .  $\square$

如果  $R$  是右 Noether 环,  $M$  是有限生成右  $R$ -模, 那么由有限生成右  $R/N$ -模的一致维数有限, 见 [引理1.113], 由此可知  $\rho(M) < +\infty$ . 对  $R$  的任何真理想  $I$ , 记  $\mathcal{C}_R(I) = \{a \in R | a + I \text{ 是 } R/I \text{ 中的正则元}\}, \mathcal{C}'_R(I) = \{a \in R | a + I \text{ 是 } R/I \text{ 中的右正则元}\}$ . 下面我们来看 reduced rank 关于正则元的应用.

**Proposition 3.25.** 设含幺环  $R$  的素根  $N$  是幂零理想且  $R/N$  是右 Goldie 环,  $M$  是右  $R$ -模. 则

- (1)  $\rho(M) = 0$  当且仅当对任何  $m \in M$ , 存在  $c \in \mathcal{C}(N)$  使得  $mc = 0$ .
- (2) 如果  $\rho(R) < +\infty$ , 那么对任何  $a \in R$  和右正则元  $c$ , 存在  $a_1 \in R$  与  $c_1 \in \mathcal{C}(N)$  使得  $ac_1 = ca_1$ .
- (3) 如果  $\rho(R) < +\infty$ , 那么  $R$  的任何右正则元  $c$  都在  $\mathcal{C}(N)$  中.
- (4) 如果  $\rho(R) < +\infty$  且  $R$  的右商环  $Q$  存在, 那么  $Q$  的素根  $N'$  满足  $N' \cap R = N$ , 对任何正整数  $k$  有  $(N')^k = N^k Q = QN^k Q$ . 如果更进一步要求  $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(N)$ , 那么  $Q/N'$  是  $R/N$  的右商环且  $N' = NQ$ .

*Proof.* (1) 必要性: 先考虑  $N = 0$  的情形, 设  $\rho(M) = 0$ . 这时  $R$  有右商环  $Q$  且 [引理3.24] 说明对任何  $m \in M$  有  $\rho(mR) = 0$ . 于是  $mR \cong R/\text{ann}(m)$  满足  $(R/\text{ann}(m)) \otimes_R Q$  作为右  $Q$ -模的一致维数是零. 于是 [引理1.113(2)] 说明  $(R/\text{ann}(m)) \otimes_R Q = 0$ . 现在由  $Q$  是平坦左  $R$ -模说明标准映射  $\text{ann}(m) \otimes_R Q \rightarrow R \otimes_R Q$  是同构. 所以  $\text{ann}(m)$  中有  $R$  的正则元 (否则  $\text{ann}(m)$  关于正则元集构成的乘闭子集的局部化是  $Q$  的真理想), 进而知当  $R$  是半素环时, 结论成立. 现在对一般情形, 设  $\rho(M) = 0$  且  $M$  有 Loewy 序列  $\{M_i | 0 \leq i \leq \ell\}$ . 那么每个  $M_i/M_{i+1}$  作为右  $R/N$ -模的 reduced rank 都是零. 应用半素情形已经证明的结论, 任何  $m_i \in M_i$  都存在  $c_i \in \mathcal{C}(N)$  使得  $m_i c_i \in M_{i+1}$ . 因此对任何  $m \in M$ , 可右乘上有限多个  $\mathcal{C}(N)$  中元素的乘积为零. 而  $\mathcal{C}(N)$  是乘闭的, 故存在  $c \in \mathcal{C}(N)$  使得  $mc = 0$ .

充分性: 取  $M$  的 Loewy 序列  $\{M_i | 0 \leq i \leq \ell\}$ . 那么对  $M_i/M_{i+1}$  中每个元素, 作为右  $R/N$ -模都能够被某个  $R/N$  中的正则元零化. 这说明  $M_i/M_{i+1} \otimes_{R/N} Q(R/N) = 0$ , 进而  $\rho_{R/N}(M_i/M_{i+1}) = 0$ . 于是  $\rho(M) = 0$ .

(2) 任取  $R$  的右正则元  $c$ , 有右  $R$ -模同构  $R \cong cR$ , 所以结合  $\rho(R)$  有限和 [引理3.24] 可知  $\rho(R/cR) = 0$ . 于是对任给  $a + cR \in R/cR$ , 应用 (1) 得到存在  $c_1 \in \mathcal{C}(N)$  使得  $ac_1 \in cR$ .

(3) 任取  $R$  的右正则元  $c$ , 那么 (2) 说明存在  $a_1 \in R, c_1 \in \mathcal{C}(N)$  使得  $c_1 = ca_1$ . 所以  $(c + N)(a_1 + N)$  是  $R/N$  中的正则元. 现在应用 [推论2.18] 得到  $c \in \mathcal{C}(N)$ .

(4) 先证  $QNQ = NQ$ , 为此只要验证  $QNQ \subseteq NQ$  (这也保证了  $NQ$  是双边理想). 因为  $N$  是  $R$  的理想, 所以只需要验证对任何  $n \in N$  和  $c \in \mathcal{C}(0)$  有  $c^{-1}n \in NQ$  即可. 在  $Q$  中, 总存在  $a \in R$  和  $d \in \mathcal{C}(0)$  使得  $c^{-1}n = ad^{-1}$ . 那么  $ca = nd$ . 应用 (3) 得到  $a \in N$ . 所以  $c^{-1}n \in NQ$ . 至此我们得到  $QNQ = NQ$ . 归纳地容易验证对每个正整数  $k$ ,  $N^k Q = QN^k Q$  以及  $(NQ)^k = N^k Q$ . 所以  $N$  是幂零理想也保证了  $NQ$  幂零. 这说明  $NQ \subseteq N'$  以及  $NQ \cap R = N$ . 下面说明  $Q/NQ$  是  $R/N$  关于  $\mathcal{S} = \{a + N | a \in \mathcal{C}(0)\}$  有右局部化: 任取  $bt^{-1} \in Q$ , 利用  $NQ \cap R = N$  易知  $bt^{-1} \notin NQ$  当且仅当  $b \notin N$ . 记  $\lambda : R/N \rightarrow Q/NQ$  是标准映射, 那么  $NQ \cap R = N$  说明  $\lambda$  是单射 (根据 (3),  $0 = \text{Ker } \lambda = \{a + N | \text{存在 } s + N \in \mathcal{S} \text{ 使得 } as \in N\}$ ). 根据  $\mathcal{S}$  和  $Q$  的定义知  $\lambda(\mathcal{S})$  中元素都在  $Q/NQ$  中可逆且  $Q/NQ$  中元素都可以表示为  $\lambda(a + N)\lambda(s + N)^{-1}, s + N \in \mathcal{S}$  的形式. 至此我们证明了  $\lambda : R/N \rightarrow Q/NQ$  是右局部化映射. 于是由  $R/N$  半素可直接验证  $Q/NQ$  作为  $R/N$  关于一些正则元构成乘闭子集的局部化也是半素环. 这说明  $N' \subseteq NQ$ . 故  $N' = NQ$ .

最后, 如果进一步要求  $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(N)$ , 那么  $\mathcal{S} = \mathcal{C}_{R/N}(0)$ , 所以  $Q/N' = Q/NQ$  是  $R/N$  关于所有正则元构成的乘闭子集的右局部化. 所以  $Q/N'$  是  $R/N$  的右商环, 根据 Goldie 定理,  $Q/N'$  是 Artin 半单环.  $\square$

**Theorem 3.26.** 设含幺环  $R$  有素根  $N$ . 那么  $R$  的右商环存在且为右 Artin 环当且仅当  $R$  满足:

- (1)  $R/N$  是右 Goldie 环且  $N$  是幂零理想.
- (2)  $\rho(R) < +\infty$  且  $\mathcal{C}_R(0) = \mathcal{C}_R(N)$ .

*Proof.* 充分性: 根据 [命题3.25(2)] 和  $R$  满足  $\rho(R) < +\infty$  且  $\mathcal{C}_R(0) = \mathcal{C}_R(N)$ , 我们得到  $R$  关于  $\mathcal{C}_R(0)$  满足右 Ore 条件. 所以  $R$  有右商环  $Q$ , 记  $Q$  的素根为  $N'$ , 那么 [命题3.25] 说明  $Q/N'$  是  $R/N$  的右商环且  $N' = NQ$ . 下面我们证明  $Q$  是右 Artin 环来完成充分性的证明. 注意  $R$  作为右  $R$ -模有 Loewy 序列  $R \supseteq N \supseteq N^2 \supseteq \dots \supseteq N^t = 0$ . 所以由  $\rho(R) < +\infty$  可知每个  $N^i/N^{i+1}$  作为右  $R/N$ -模的 reduced rank 有限. 于是  $N^i/N^{i+1} \otimes_{R/N} Q/N'$  作为右  $Q(R/N)$ -模有有限一致维数. 利用  $N' = NQ$  可直接验证右  $Q$ -模同构  $N^i/N^{i+1} \otimes_{R/N} Q/N' \cong N^i/N^{i+1} \otimes_R Q$ , 所以  $N^i/N^{i+1} \otimes_R Q$  作为右  $Q$ -模有有限一致维数. 现在  $Q$  是平坦左  $R$ -模保证了右  $Q$ -模同构  $N^i Q/N^{i+1} Q \cong N^i/N^{i+1} \otimes_R Q$ . 所以根据 [命题3.25(4)],  $(N')^i/(N')^{i+1}$  作为右  $Q$ -模有有限长, 进而  $(N')^i/(N')^{i+1}$  自然是有限生成右  $Q$ -模. 因为  $Q/N'$  是 Artin 半单环, 所以每个  $(N')^i/(N')^{i+1}$

视作有限生成右  $Q/N'$ -模后也是 Artin 模, 那么也是 Artin 右  $Q$ -模. 因为  $(N')^t = 0$ , 所以我们能够得到  $N'$  是 Artin 右  $Q$ -模. 现在利用  $Q/N'$  也是 Artin 右  $Q$ -模得到  $Q$  作为右  $Q$ -模是 Artin 的. 故  $Q$  是右 Artin 环.

必要性: 如果  $R$  的右商环  $Q$  存在且是右 Artin 环, 那么  $Q$  的素根  $N'$  是幂零理想. 特别地,  $N' \cap R$  也是  $R$  的幂零理想 (所以  $N' \cap R \subseteq N$ ). 不难看到  $R$  的正则元在  $R/(R \cap N')$  中的像都是正则元, 并且  $Q/N'$  就是  $R/(R \cap N')$  关于  $\{s + (R \cap N') | s \in \mathcal{C}_R(0)\}$  的右局部化, 于是应用 [命题2.4(2)] 得到  $R/(R \cap N')$  是半素右 Goldie 环. 这迫使  $N = N' \cap R$ . 于是  $R/N$  是右 Goldie 环且  $N$  是幂零理想. 下证  $NQ = N'$ .

先说明  $NQ$  是  $Q$  的理想. 为此只要验证对任何  $n \in N$  和  $s \in \mathcal{C}_R(0)$  有  $s^{-1}n \in NQ$ . 现在  $Q$  的存在性说明存在  $a \in R$  和  $d \in \mathcal{C}_R(0)$  使得  $s^{-1}n = ad^{-1}$ . 只要证  $a \in N$  便知  $NQ$  是  $Q$  的理想. 而这由  $a \in N' \cap R$  即得. 于是  $NQ \subseteq N'$  是  $Q$  的理想. 现在标准映射  $\mu: R/N \rightarrow Q/NQ$  是单射, 并且可直接验证  $\mu$  是  $R/N$  关于  $\{s + N | s \in \mathcal{C}_R(0)\}$  的右局部化映射. 所以  $Q/NQ \cong Q/N'$  是半素的, 这迫使  $N' = NQ$ . 于是  $QNQ = N' = NQ$ . 归纳地可知对任何正整数  $\ell$ , 有  $N^\ell Q = (NQ)^\ell$ .

现在利用  $N' = NQ$  可直接验证右  $Q$ -模同构  $N^i/N^{i+1} \otimes_{R/N} Q/N' \cong N^i/N^{i+1} \otimes_R Q$ , 而  $Q$  是平坦左  $R$ -模以及前面的讨论说明有右  $Q$ -模同构  $N^i/N^{i+1} \otimes_R Q \cong N^i Q/N^{i+1} Q = (N')^i/(N')^{i+1}$ . 因为  $Q/N'$  是 Artin 半单的, 所以  $(N')^i/(N')^{i+1}$  作为右  $Q$ -模有合成列, 所以一致维数有限. 这迫使  $N^i/N^{i+1}$  作为右  $R/N$ -模一致维数有限. 因此  $\rho(R)$  有限. 最后我们验证  $\mathcal{C}_R(0) = \mathcal{C}_R(N)$ .

可直接验证任何  $R/N$  的正则元都是  $Q/N'$  中的正则元, 所以由  $Q/N'$  是 Artin 环知  $\mathcal{C}_R(N)$  中元素在  $Q/N'$  中的像都是可逆元. 而  $Q$  是 Artin 环保证了  $N'$  就是  $Q$  的 Jacobson 根, 因此  $\mathcal{C}_R(N)$  中元素作为  $Q$  中的元素都可逆. 特别地,  $\mathcal{C}_R(N) \subseteq \mathcal{C}_R(0)$ . 现在应用 [命题3.25(3)] 即可.  $\square$

作为 [定理3.26] 的特殊情况, 我们得到 Small 关于右 Noether 环的右 Artin 商环存在性刻画.

**Corollary 3.27** (Small 定理). 设  $R$  有右 Noether 环, 记  $R$  的素根为  $N$ . 那么  $R$  的右商环存在且为右 Artin 环当且仅当  $R$  满足  $\mathcal{C}_R(0) = \mathcal{C}_R(N)$ .

### 3.3 Jategaonkar 主理想定理

在交换代数中, Krull 主理想定理表明交换 Noether 环任何 (真) 主理想上的极小素理想高度都不超过 1. 本节我们介绍非交换 Noether 环场景的主理想定理 (见 [定理3.29]), 它来自 Jategaonkar[?]. 回忆含幺环  $R$  中元素  $a$  被称为  $R$  中的正规元, 如果  $aR = Ra$ . 例如  $R$  中心元都是正规的. 如果  $R$  是素环,  $a$  是  $R$  中非零正规元, 那么可直接验证  $a$  是  $R$  中正则元. 在证明主理想定理前, 我们需要

**Lemma 3.28.** 设  $R$  是右 Noether 素环,  $a \neq 0 \in R$  是正规元. 那么对  $R$  的任何右理想  $I$ , 存在正整数  $n$  使得  $I \cap a^n R \subseteq IaR$ .

*Proof.* 由条件,  $R$  是素右 Goldie 环, 所以可设  $R$  的右商环是  $Q$ . 那么在  $Q$  中, 任何正整数  $\ell$  定义出的  $Ia^{-\ell}R \cap R$  是  $R$  的右理想, 且有  $R$  的右理想升链  $Ia^{-1}R \cap R \subseteq Ia^{-2}R \cap R \subseteq \dots$ . 因为  $R$  是右 Noether 环, 所以存在正整数  $n$  使得  $Ia^{-n}R \cap R = Ia^{-n-1}R \cap R = \dots$ . 对等式  $Ia^{-n}R \cap R = Ia^{-(n+1)}R \cap R$  两边右乘上  $a^{n+1}$  得到  $IRa \cap Ra^{n+1} = I \cap Ra^{n+1}$  所以  $I \cap Ra^{n+1} \subseteq IaR$ .  $\square$

**Theorem 3.29** (Jategaonkar 主理想定理). 设  $R$  是右 Noether 环,  $a \in R$  是不可逆的正规元 (例如不可逆中心元). 那么  $aR$  上的极小素理想高度不超过 1.

*Proof.* 假设  $aR$  上的极小素理想  $P$  的高度至少是 2. 那么存在  $R$  的素理想  $P', P''$  使得  $P \supsetneq P' \supsetneq P''$ . 因为  $a \notin P''$ , 所以在右 Noether 素环  $R/P''$  中有非零正规元  $a + P''$ . 那么  $P/P''$  是  $(Ra + P'')/P''$  上极小素理想且  $P/P''$  的高度至少为 2. 用  $R$  替换  $R/P''$ ,  $a$  替换  $a + P''$ , 那么可不妨设  $R$  是右 Noether 素环,  $a$  是  $R$  的不可逆正规正则元,  $P$  是  $aR$  上极小素理想且包含非零素理想  $P'$ . 下面来导出矛盾.

因为  $R$  是素右 Goldie 环, 所以由  $R$  的非零理想都是本质右理想, 应用 [定理2.14] 知  $R$  的非零理想都含有某个正则元. 我们设  $P'$  含有正则元  $b$ . 现在对右理想  $bR$  应用 [引理3.28] 可知存在正整数  $n$  使得  $bR \cap a^n R \subseteq baR$ . 所以  $bR \cap a^{n+1} R = (bR \cap a^n R) \cap a^{n+1} R \subseteq baR \cap a^{n+1} R \subseteq (bR \cap a^n R)a \subseteq bRa^2 = ba^2 R$ . 归纳地, 可直接验证对任何正整数  $\ell$ , 有  $bR \cap a^{n+\ell} R \subseteq ba^{\ell+1} R$ . 特别地, 我们能够得到  $bR \cap a^{2n} R \subseteq a^n R$ .

因为  $a$  是正规元, 所以  $R$  的素理想包含  $aR$  当且仅当该素理想包含  $a^n R$ . 这一观察说明  $P$  也是  $a^n$  上极小素理想, 用  $a$  替换  $a^n$ , 可设  $a$  满足  $bR \cap a^2 R \subseteq baR$ . 那么  $bR \cap (a^2 R + baR) = baR$ . 于是有右  $R$ -模同构

$$\frac{a^2 R + bR}{a^2 R + baR} = \frac{a^2 R + bR + baR}{a^2 R + baR} \cong \frac{bR}{bR \cap (a^2 R + baR)} = \frac{bR}{baR}.$$

因为  $b$  是正则元, 所以也有右  $R$ -模同构  $bR/(baR) \cong R/aR$ . 记  $\bar{R} = R/aR$ , 那么我们得到右  $\bar{R}$ -模同构

$$\frac{a^2 R + bR}{a^2 R + baR} \cong \frac{R}{aR}.$$

于是有  $\rho_{\bar{R}}((a^2 R + bR)/(a^2 R + baR)) = \rho_{\bar{R}}(R/aR) = \rho_{\bar{R}}(\bar{R})$ . 现在我们断言

$$\rho_{\bar{R}}\left(\frac{aR + bR}{a^2 R + bR}\right) = 0. \quad (3.1)$$

一旦证明该断言, 对右 Noether 环  $\bar{R}$ , 记其素根为  $N/aR$ , 应用 [命题3.25(1)] 得到存在  $d \in \mathcal{C}_R(N)$  使得  $ad \in a^2 R + bR$ . 那么可设  $r, s \in R$  使得  $ad = a^2 r + bs$ . 整理得到  $a(d - ar) = bs \in P'$ . 因为  $a$  是正规元且  $a \notin P'$ , 所以  $d - ar \in P'$ . 于是  $d \in P$ . 由于  $N \supseteq aR$  (注意, 记号  $N$  来自  $N/aR$  是  $R/aR$  的素根, 现在已经假设了  $R$  是素环), 因此  $P/N$  是  $R/N$  中的极小素理想. 那么 [命题3.25(3)] 保证了  $\mathcal{C}_R(N) \subseteq \mathcal{C}_R(P)$ . 特别地,  $d \in \mathcal{C}_R(P)$ . 但  $d \in P$ , 这就得到了矛盾. 下面我们证明 (3.1) 来完成定理证明.

因为  $a$  是正规元, 所以对每个  $r \in R$ , 我们能够引入记号  $a^{-1}ra$  来表示由  $ax = ra$  决定的元素  $x \in R$ , 可直接验证  $\varphi : R \rightarrow R, r \mapsto a^{-1}ra$  是环自同构. 这诱导环自同构  $\varphi_a : R/aR \rightarrow R/aR, x + aR \mapsto \varphi(x) + aR$ . 利用  $\varphi_a$  赋予  $(aR + a^{-1}baR)/aR$  的右  $\bar{R}$ -模结构, 记作  $[(aR + a^{-1}baR)/aR]^{\varphi_a}$ , 易见有右  $\bar{R}$ -模同构  $(aR + bR)/aR \cong [(aR + a^{-1}baR)/aR]^{\varphi_a}$ , 所以  $\rho_{\bar{R}}((aR + bR)/aR) = \rho_{\bar{R}}([(aR + a^{-1}baR)/aR]^{\varphi_a})$ . 利用  $\varphi_a : R/aR \rightarrow R/aR$  是环同构可直接验证  $\rho_{\bar{R}}([(aR + a^{-1}baR)/aR]^{\varphi_a}) = \rho_{\bar{R}}((aR + a^{-1}baR)/aR)$ . 所以

$$\rho_{\bar{R}}\left(\frac{aR + bR}{aR}\right) = \rho_{\bar{R}}\left(\frac{aR + a^{-1}baR}{aR}\right).$$

现在通过  $a$  是正则元以及 reduced rank 关于短正合列具有可加性 (见 [引理3.24]), 我们有

$$\begin{aligned}
\rho_{\bar{R}}\left(\frac{aR + bR}{a^2R + baR}\right) &= \rho_{\bar{R}}\left(\frac{aR + bR}{a^2R + a(a^{-1}ba)R}\right) \\
&= \rho_{\bar{R}}\left(\frac{aR + bR}{aR}\right) + \rho_{\bar{R}}\left(\frac{aR}{a^2R + a(a^{-1}ba)R}\right) \\
&= \rho_{\bar{R}}\left(\frac{aR + a^{-1}baR}{aR}\right) + \rho_{\bar{R}}\left(\frac{R}{aR + a^{-1}baR}\right) \\
&= \rho_{\bar{R}}\left(\frac{R}{aR}\right) \\
&= \rho_{\bar{R}}\left(\frac{a^2R + bR}{a^2R + baR}\right).
\end{aligned}$$

于是由右  $\bar{R}$ -模短正合列

$$0 \longrightarrow (a^2R + bR)/(a^2R + baR) \longrightarrow (aR + bR)(a^2R + baR) \longrightarrow (aR + bR)(a^2R + bR) \longrightarrow 0,$$

得到  $\rho_{\bar{R}}((aR + bR)(a^2R + bR)) = 0$ , 而这就是 (3.1).  $\square$

Jategaonkar 主理想定理中正规元的条件是必要的, 例如考虑  $M_2(\mathbb{Z}[x])$  中的不可逆非正规元

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

命  $I = (2, x) \subseteq \mathbb{Z}[x]$  那么  $P = M_2(I)$  是  $M_2(\mathbb{Z}[x])$  中唯一包含  $a$  的素理想, 但  $\text{ht}P = 2$ (对  $I$  应用 Krull 主理想定理). 下面我们应用 Jategaonkar 主理想定理和 [定理1.122] 来说明单边 Noether 环非可逆的中心正则元生成的主理想上任何极小素理想的高度都是 1.

**Corollary 3.30.** 设  $R$  是右 Noether 环, 如果  $c \in R$  是不可逆中心正则元. 那么  $cR$  上极小素理想高度为 1.

*Proof.* 根据 Jategaonkar 主理想定理,  $cR$  上每个极小素理想  $P$  高度不超过 1. 再应用 [定理1.122] 得到  $P$  不是  $R$  的极小素理想. 所以  $\text{ht}P = 1$ .  $\square$

### 3.4 Maximal orders

在 [定义2.24] 中我们已经介绍商环中 order 的概念, 并且在 [命题2.30] 中看到在右 Artin 的商环中, 右 order 的右商环存在并且就是给定的商环. 特别地, 素 PI 环就是 (有限维) 中心单代数中的右 order, [例2.33]. 在 [命题2.43] 中我们看到单右 Goldie 环 (例如特征零的域上 Weyl 代数) 都是自身右商环中的 maximal 右 order. 素右 Goldie 环只要是 maximal 右 order, 那么它的中心是整闭整区, 见 [定理2.46]. 本节我们继续讨论 maximal order 的基本性质. 首先是 [定义2.51] 中介绍的非交换分式理想能够刻画右 order 的极大性.

**Proposition 3.31.** 设  $Q$  是商环,  $R$  是  $Q$  中的右 order. 那么以下条件等价:

- (1)  $R$  是 maximal 右 order.
- (2) 对任何分式  $R$ -(双边) 理想  $I$  有  $O_r(I) = O_l(I) = R$ .
- (3) 对任何  $R$ -理想  $I$  有  $O_r(I) = O_l(I) = R$ .

*Proof.* (1)⇒(2): 我们已经在 [引理2.57] 证明  $O_r(I)$  和  $O_l(I)$  都是与  $R$  等价的右 order 并且包含  $R$ , 所以  $R$  的极大性迫使  $O_r(I) = O_l(I) = R$ . (2)⇒(3) 是特殊情况, 回忆 [引理2.59] 之前的定义. 最后验证 (3)⇒(1) 来完成证明. 现在设  $S$  是  $Q$  中的右 order 满足  $R$  等价以及  $R \subseteq S$ . 那么 [引理2.41] 说明存在  $Q$  中可逆元  $r_1, r_2$  使得  $r_1Sr_2 \subseteq R$  且  $r_1, r_2 \in R$ . 命  $I = \{x \in R | r_1Sx \subseteq R\}$ , 那么  $I$  是  $R$  的理想且  $r_2 \in I$ . 由此立即得到  $I$  是  $R$ -理想且  $Sr_2 \subseteq O_l(I)$ . 所以由条件  $Sr_2 \subseteq R$ . 再考虑  $J = \{x \in R | Sx \subseteq R\}$ , 这也是  $R$  的理想且  $r_2 \in J$ . 因此  $J$  是  $R$ -理想. 易见  $S \subseteq O_l(J)$ , 所以  $S \subseteq R$ . 这说明  $R$  是 maximal 右 order.  $\square$

**Remark 3.32.** 根据 [注记2.58], 如果  $R$  是商环  $Q$  中的 order, 那么对分式  $R$ -理想  $I$ ,  $O_r(I)$  和  $O_l(I)$  都是  $Q$  中包含  $R$  的 order. 于是同样的证明过程表明  $R$  是  $Q$  中 maximal order 当且仅当对任何分式  $R$ -理想  $I$  有  $O_r(I) = O_l(I) = R$ , 也当且仅当对任何  $R$ -理想  $I$  有  $O_r(I) = O_l(I) = R$ .

**Corollary 3.33.** 设  $R, R'$  都是商环  $Q$  中 maximal 右 order,  $I$  是分式  $(R', R)$ -理想. 那么

$$\{q \in Q | qI \subseteq R\} = \{q \in Q | Iq \subseteq R'\} = \{q \in Q | IqI \subseteq I\}.$$

*Proof.* 根据 [引理2.57],  $O_r(I) \sim R, O_l(I) \sim R'$  且  $R \subseteq O_r(I), R' \subseteq O_l(I)$ . 因此由  $R, R'$  都是 maximal 右 order, 得到  $O_r(I) = R$  且  $O_l(I) = R'$ . 现在利用  $I$  是  $Q$  作为  $R'-R$  双模的子模可直接验证结论.  $\square$

**Remark 3.34.** 如果  $R$  是商环  $Q$  中的 maximal order, 根据 [注记2.58] 和 [注记3.32], 使用 [推论3.33] 同样的讨论可知对任何分式  $R$ -理想  $I$ ,  $\{q \in Q | qI \subseteq R\} = \{q \in Q | Iq \subseteq R\} = \{q \in Q | IqI \subseteq I\}$ . 注意这三个公共的集合都是  $Q$  作为  $R-R$  双模的子模, 所以根据 [注记2.61] 和 [注记2.62],  $I$  作为左  $R$ -模以及作为右  $R$ -模的对偶模都与上述三个相同的集合模同构. 所以当  $R$  是商环  $Q$  中的 maximal order 时, 对任何分式  $R$ -理想  $I$ , 引入记号  $I^* = \{q \in Q | IqI \subseteq I\}$ , 这是  $Q$  作为  $R-R$  双模的子模, 作为左  $R$ -模,  $I^* \cong \text{Hom}_R(I_R, {}_{RR}R)$ , 作为又  $R$ -模,  $I^* \cong \text{Hom}_R({}_{RR}R, I_R)$ . 通过  $I$  是分式  $R$ -理想也可以直接验证  $I^*$  含有  $Q$  中可逆元, 于是可直接验证  $I^*$  也是分式  $R$ -理想. 于是可继续考虑记号  $I^{**} = (I^*)^* \subseteq Q$ .

回忆右  $R$ -模  $M$  被称为 **torsionless** 模 (或半自反模), 如果任何  $m \neq 0 \in M$  满足存在右  $R$ -模同态  $\alpha : M \rightarrow R$  使得  $\alpha(m) \neq 0$ . 易见  $M$  是 torsionless 的当且仅当  $M$  可嵌入一些  $R$  的直积:

**Lemma 3.35.** 设  $M$  是右  $R$ -模, 那么  $M$  是 torsionless 当且仅当存在非空指标集  $\Lambda$  和单的模同态  $M \rightarrow \prod_{i \in \Lambda} R$ , 即  $M$  能够嵌入一些  $R$  的直积. 特别地, torsionless 模的子模依然 torsionless.

*Proof.* 充分性是明显的. 必要性: 对每个  $m \in M$  取定模同态  $\alpha_m : M \rightarrow R$  使得  $\alpha_m(m) \neq 0$ . 置

$$j : M \rightarrow \prod_{m \in M} R, x \mapsto (\alpha_m(x))_{m \in M},$$

那么  $j$  明显是右  $R$ -模同态且为单射.  $\square$

如果右  $R$ -模  $M$  是 torsionless 模, 那么  $M^* = \text{Hom}_R(M, R)$  便是 torsionless 左  $R$ -模: 任取  $\alpha \neq 0$ , 那么存在  $m_0 \in M$  使得  $\alpha(m_0) \neq 0$ . 现在  $m_0^{**} : M^* \rightarrow R, \beta \mapsto \beta(m_0)$  是左  $R$ -模同态且  $m_0^{**}(\alpha) \neq 0$ . 因此 torsionless 模的对偶模依然是 torsionless 模. 如果右  $R$ -模  $M$  满足  $R$  的任何正则元  $c$ , 都存在  $x \neq 0$  使得  $xc \neq 0$ , 则称  $M$  是 **torsion-free** 模 (即关于  $R$  所有正则元构成的乘闭子集是无挠的). 易见 torsionless 模都是 torsion-free 的, 因为前面指出 torsionless 模能够嵌入一些  $R$  的直积. 反之不然, 例如  $\mathbb{Q}$  是无挠  $\mathbb{Z}$ -模, 但  $\mathbb{Q}$

到  $\mathbb{Z}$  的  $\mathbb{Z}$ -模同态只有零同态. 对任何右  $R$ -模  $M$ , 记  $(-)^{**} : M \rightarrow M^{**}, x \mapsto x^{**}$  是标准右  $R$ -模同态, 这里  $x^{**}(f) = f(x), \forall f \in M^*$ . 易见  $M$  是 torsionless 模当且仅当  $(-)^{**}$  是单射.

**Definition 3.36.** 设  $M$  是右  $R$ -模. 如果  $(-)^{**} : M \rightarrow M^{**}$  是单射, 那么称  $M$  是自反模.

利用对偶基引理容易验证有限生成投射模都是自反模. 下面我们说明任何模的对偶模是 torsionless 模.

**Lemma 3.37.** 任给右  $R$ -模  $M$ , 标准映射  $M^* \rightarrow M^{***}$  是可裂单同态. 特别地,  $M^*$  是 torsionless 左  $R$ -模.

*Proof.* 记标准映射是  $\theta : M^* \rightarrow M^{***}$ , 命  $\psi : M^{***} \rightarrow M^*, F \mapsto (m \mapsto F(m^{**}))$ , 可直接验证  $\psi\theta = \text{id}_{M^*}$ .  $\square$

**Remark 3.38.** 如果  $M$  是自反右  $R$ -模, 那么 [引理3.37] 中的标准映射是满射: 沿用 [引理3.37] 的记号. 这时对任何  $m \in M$  以及  $F \in M^{***}$  可直接验证  $\theta\psi(F)(m^{**}) = F(m^{**})$ . 因此当  $M$  是自反模时,  $M^{**}$  可由  $\{m^{**} | m \in M\}$  生成, 从而  $\theta\psi(F) = F$ . 因此这时  $\theta\psi = \text{id}_{M^{***}}$ . 因此, 自反模的对偶模依然是自反模.

**Remark 3.39.** 对 Noether 右  $R$ -模  $M$ , 右  $R$ -模同构  $M \cong M^{**}$  蕴含  $M$  是自反模: 现在  $M$  是某个左  $R$ -模的对偶模, 因此 [引理3.37] 说明  $(-)^{**} : M \rightarrow M^{**}$  是可裂单同态. 如果  $M$  不是自反的, 那么该可裂单同态不是满射, 导致存在非零右  $R$ -模  $X$  使得  $M \cong M^{**} \cong M \oplus X$ . 于是 [定理1.85] 说明  $M$  的一致维数不是有限的. 这和  $M$  是 Noether 模矛盾. 对非 Noether 模结论未必成立, 见 [?]. 特别地, 如果  $R$  有 Noether 中心子环  $C$  满足  $R$  是有限生成  $C$ -模以及  $R$ - $R$  双模同构  $R \cong \text{Hom}_C(R, C)$ , 那么  $R$  作为  $C$ -模满足  $R \cong R^{**}$ . 于是由  $R$  作为  $C$ -模是 Noether 模得到  $R$  是自反  $C$ -模.

沿用 [注记3.34] 的记号. 设  $R$  是商环  $Q$  中 maximal order,  $I$  是分式  $R$ -理想. 那么 [注记2.61] 和 [注记2.62] 保证了右  $R$ -模同构  $\text{Hom}_R(\text{Hom}_R(I_R, {}_R R_R), {}_R R_R) \cong \text{Hom}_R({}_R(I^*), {}_R R_R) \cong I^{**}$ , 记这两个右  $R$ -模同构的合成为  $\zeta : \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(I_R, {}_R R_R), {}_R R_R) \rightarrow I^{**}$ , 那么右  $R$ -模同态  $\zeta(-)^{**} : I \rightarrow I^{**}$  就是  $I$  到  $I^{**}$  的嵌入. 同样地, 当  $I$  视作左  $R$ -模时, 标准映射  $(-)^{**}$  也与一个右  $R$ -模同构的合成给出  $I$  到  $I^{**}$  的标准嵌入. 所以

**Proposition 3.40.** 设  $R$  是商环  $Q$  中 maximal order,  $I$  是分式  $R$ -理想. 则以下等价:

- (1)  $I$  作为左  $R$ -模是自反模.
- (2)  $I$  作为右  $R$ -模是自反模.
- (3)  $I = I^{**} \subseteq Q$  (也见 [注记3.34]).

当分式  $R$ -理想  $I$  满足上述三条等价条件之一时, 称  $I$  是自反分式  $R$ -理想.

**Remark 3.41.** 如果  $R$  仅要求是商环  $Q$  中 order, 则对任何分式  $R$ -理想  $I$ , [注记2.61] 和 [注记2.62] 说明同样有左  $R$ -模同构  $\text{Hom}_R(I_R, {}_R R_R) \cong \{q \in Q | qI \subseteq R\}$  以及右  $R$ -模同构  $\text{Hom}_R({}_R I, {}_R R_R) \cong \{q \in Q | Iq \subseteq R\}$ .

素右 Goldie 环的非零理想都是本质右理想, 所以自然是分式右  $R$ -理想, [例2.54]. 因此, 对素 Goldie 环, 任何非零理想作为左理想或是右理想都是本质的, 进而是分式  $R$ -理想.

**Proposition 3.42.** 设  $R$  是素 Goldie 环且为 maximal order,  $P$  是非零素理想且作为分式  $R$ -理想是自反的 (根据 [命题3.40], 这等价于要求  $P$  是自反左  $R$ -模或自反右  $R$ -模). 那么  $\text{ht} P = 1$ .

*Proof.* 若不然, 则存在  $R$  的素理想  $P_1$  使得  $0 \neq P_1 \subsetneq P$ . 所以  $(P_1)^* \supseteq P^*$ . 于是 [注记3.34] 表明  $PP^*P_1 \subseteq P_1$  且  $P^*P_1$  是  $R$  的理想. 因此由  $P \not\subseteq P_1$  得到  $P^*P_1 \subseteq P_1$ . 这说明  $P^* \subseteq O_l(P_1) = R$ , 见 [注记3.32]. 于是  $P^* = R$ . 由于  $R^* = R$ , 所以  $P^{**} = R$ . 但条件说明  $P = P^{**}$ , 矛盾.  $\square$

**Definition 3.43.** 设  $R$  是素 Goldie 环,  $I$  是分式  $R$ -理想. 如果存在分式  $R$ -理想  $J$  使得  $IJ = JI = R$ , 则称  $I$  是可逆的. 定义中的  $J$  被  $I$  唯一决定, 因此可记  $J$  为  $I^{-1}$ .

**Remark 3.44.** 如果  $R$  是整区, 那么上述可逆理想的概念与交换代数中一致.

回忆整区  $R$  上的非零分式理想  $I$  是可逆理想当且仅当  $I$  是有限生成投射  $R$ -模 (这时  $I^{-1} = \{q \in Q | qI \subseteq R\}$ ). 下面是素 Goldie 环 (整区是特殊的素 PI 环) 的分式理想的可逆性刻画.

**Proposition 3.45.** 设  $R$  是素 Goldie 环,  $I$  是分式  $R$ -理想. 那么以下等价:

- (1)  $I$  是可逆的.
- (2)  $I$  作为左  $R$ -模和作为右  $R$ -模都是生成子.
- (3)  $O_r(I) = O_l(I) = R$  且  $I$  作为左  $R$ -模和右  $R$ -模都有限生成投射模.
- (4)  $O_r(I) = O_l(I) = R$  且  $I$  作为左  $R$ -模和右  $R$ -模都是投射模.

*Proof.* 记  $Q$  是  $R$  的商环, 那么  $R$  是  $Q$  中的 order. 所以可应用 [注记2.61] 和 [注记2.62].

(1) $\Rightarrow$ (2): 现在有左  $R$ -模同构  $\text{Hom}_R(I_R, {}_R R_R) \cong \{q \in Q | qI \subseteq R\}$  以及右  $R$ -模同构  $\text{Hom}_R({}_R I, {}_R R_R) \cong \{q \in Q | Iq \subseteq R\}$ . 由于  $I$  是可逆分式理想, 所以  $I^{-1}$  中元素决定的  $I_R$  上左乘变换可嵌入  $\text{Hom}_R(I_R, {}_R R_R)$ ,  $I^{-1}$  中元素决定的  ${}_R I$  上右乘变换可嵌入  $\text{Hom}_R({}_R I, {}_R R_R)$ , 这说明  $I$  无论作为左  $R$ -模或右  $R$ -模,  $I$  的迹理想都是  $R$ , 这说明  $I$  作为左  $R$ -模和作为右  $R$ -模都是生成子.

(2) $\Rightarrow$ (1): 设  $I$  作为左  $R$ -模和作为右  $R$ -模都是生成子. 那么存在  $f_1, \dots, f_n \in \text{Hom}_R(I_R, R_R), g_1, \dots, g_m \in \text{Hom}_R({}_R I, {}_R R)$  以及  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in I$  使得  $f_1(a_1) + \dots + f_n(a_n) = 1, g_1(b_1) + \dots + g_m(b_m) = 1$ . 根据 [注记2.61] 和 [注记2.62], 存在  $A = \{q \in Q | qI \subseteq R\}$  中的元素  $q_1, \dots, q_n$  和  $B = \{q \in Q | Iq \subseteq R\}$  中的元素  $q'_1, \dots, q'_m$  使得  $f_i = (q_i)_l, g_j = (q'_j)_r$ . 于是我们得到  $q_1 a_1 + \dots + q_n a_n = 1$  以及  $b_1 q'_1 + \dots + b_m q'_m = 1$ . 于是这里  $A$  和  $B$  都是分式  $R$ -理想且满足  $AI = R, IB = R$ . 这迫使  $A = B$ , 这也说明  $I$  是可逆的.

(1) $\Rightarrow$ (3): 现在  $II^{-1} = I^{-1}I = R$  说明  $O_r(I) = RO_r(I) = I^{-1}IO_r(I) \subseteq I^{-1}I = R$ . 同样地,  $O_l(I) \subseteq R$ . 由此得到  $O_r(I) = O_l(I) = R$ . 于是 [命题2.60] 和 [注记2.62] 说明  $I$  作为左  $R$ -模和右  $R$ -模的模自同态都来自  $R$  中元素的右乘变换和左乘变换. 所以结合  $I^{-1}$  既能嵌入  $\text{Hom}_R(I_R, R_R)$  (通过对应到  $I$  上左乘变换) 也能够嵌入  $\text{Hom}_R({}_R I, {}_R R)$  (通过对应到  $I$  上右乘变换) 可知标准映射  $I \otimes_R \text{Hom}_R(I_R, R_R) \rightarrow \text{End}(I_R)$  和  $\text{Hom}_R({}_R I, {}_R R) \otimes_R I \rightarrow \text{End}({}_R I)$  中  $I$  上恒等映射有原像. 进而对  $I$  应用对偶基引理得到  $I$  作为左  $R$ -模和右  $R$ -模都有限生成投射模.

(3) $\Rightarrow$ (1): 记  $A = \{q \in Q | qI \subseteq R\}$  和  $B = \{q \in Q | Iq \subseteq R\}$ . 那么由 [注记2.61] 和 [注记2.62] 关于  $\text{Hom}_R(I_R, R_R)$  和  $\text{Hom}_R({}_R I, {}_R R)$  的刻画以及对偶基引理可知  $1 \in AI, IB$ . 故  $R = AI = IB$ .

(4) $\Rightarrow$ (3): 应用 [命题2.63] 即可. (3) $\Rightarrow$ (4): 这是特殊情况.  $\square$

**Proposition 3.46.** 设  $R$  是素 Goldie 环, 那么以下等价:

- (1) 任何左  $R$ -模或者右  $R$ -模  $X$  只要是有限生成投射生成子, 那么  $X$  的非零子模都是生成子.
- (2)  $R$  是 maximal order 且每个理想作为左  $R$ -模或右  $R$ -模都是有限生成投射模.
- (3)  $R$  是 maximal order 且每个非零理想都是自反分式  $R$ -理想 (见 [命题3.40]).
- (4)  $R$  的每个非零理想都是可逆分式  $R$ -理想.

当素 Goldie 环  $R$  满足上述四个等价条件之一时, 称  $R$  是 **Asano 素环**或 **Asano order**.

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2): 因为  $R$  作为自身的模是有限生成投射生成子, 所以  $R$  的非零理想作为左  $R$ -模或是右  $R$ -模都是生成子. 于是 [命题3.45] 说明  $R$  的任何非零理想  $I$  ( $R$  的非零理想都是分式  $R$ -理想, 见 [例2.54]) 满足  $O_r(I) = O_l(I) = R$  且  $I$  作为左  $R$ -模和右  $R$ -模都有限生成投射模. 现在任何  $R$ -理想也是  $R$  的非零理想, 故应用 [注记3.32] 得到  $R$  是 maximal order.

(2) $\Rightarrow$ (3): 有限生成投射模都是自反模, 故由  $R$  是 maximal order 以及 [命题3.40] 便知.

(3) $\Rightarrow$ (4): 任取  $R$  的非零理想  $I$ , 那么  $I$  作为分式  $R$ -理想, 根据 [注记3.34] 有

$$I^* = \{q \in Q \mid qI \subseteq R\} = \{q \in Q \mid Iq \subseteq R\} = \{q \in Q \mid IqI \subseteq I\}.$$

所以  $J = I^*I$  是  $R$  的非零理想,  $I^*$  是分式  $R$ -理想. 下证  $J^* = R$ , 进而由  $R^* = R$  得到  $J^{**} = R$ . 而条件说明  $J$  是自反分式  $R$ -理想, 进而  $J = R$ , [命题3.40]. 由此得到  $I^*I = R$ . 任取  $q \in J^*$ , 即  $q \in Q(R$  的商环) 满足  $qJ \subseteq R$ , 那么  $qI^*I \subseteq R$  说明  $qI^* \subseteq I^*$ , 于是  $q \in O_l(I^*) = R$ , 见 [注记3.32]. 所以  $J^* \subseteq R$ , 而  $J$  是  $R$  的理想说明  $R \subseteq J^*$ , 所以  $J^* = R$ , 于是  $I^*I = R$ . 再证  $II^* = R$ : 命  $L = II^*$ , 这是  $R$  的非零理想, 且可类似直接验证  $L^* \subseteq O_r(I^*) = R$ , 于是  $L^* = R$ . 结合  $L$  的自反性便知  $L = R$ . 故  $I$  是可逆的.

(4) $\Rightarrow$ (1): 任取右  $R$ -模  $X$  是有限生成投射生成子,  $M$  是  $X$  的非零子模. 因为  $X$  是某个自由模的直和因子, 所以  $M$  是某个自由模的子模. 这说明  $M$  是非零 torsionless 模. 特别地,  $M$  的迹理想  $I = T(M) \neq 0$ . 从而条件保证  $I$  是可逆分式  $R$ -理想,  $I^{-1}I = R$ . 特别地, 对任何  $q \in I^{-1}$  和  $f \in \text{Hom}_R(M_R, R_R)$ ,  $qf(M) \subseteq R$ . 所以  $qf \in \text{Hom}_R(M_R, R_R)$ . 由此得到  $T(M) = R$ , 即  $M$  是生成子. 同样的讨论可证  $X$  是左模情形.  $\square$

**Remark 3.47.** 如果  $R$  的任何非零理想作为右  $R$ -模是生成子, 那么  $R$  是素环: 任取  $R$  的非零理想  $I$ , 我们说明  $Ix = 0$  (这里  $x \in R$ ) 蕴含  $x = 0$  来得到  $R$  是素环.  $I$  是生成子说明  $T(I) = R$ , 因此  $Ix = 0$  导致  $Rx = 0$ .

**Example 3.48.** 设  $R$  是整区, 则  $R$  是 Asano order 当且仅当  $R$  的遗传 Noether 环.

*Proof.* 必要性: 根据 [命题3.46],  $R$  的任何理想是有限生成投射模. 充分性: 这时  $R$  的任何非零理想  $I$  满足  $I$  是忠实的有限生成投射模, 即  $I$  是有限生成投射生成子. 于是  $I^*I = II^* = R$ , 回忆 [注记2.61] 和 [注记2.62]. 这说明  $I$  是可逆分式  $R$ -理想, 因此是 Asano order.  $\square$

在交换代数中, 我们知道: 如果  $R$  是整区且不是域, 那么  $R$  是 Dedekind 整区当且仅当  $R$  是遗传环 (这里 Dedekind 整区的定义排除了域, [例3.48] 中的 Noether 条件是多余的, 也见 [命题2.63]).

**Theorem 3.49.** 设  $R$  是含幺环, 那么以下等价:

- (1)  $R$  上有限生成投射生成子 (左模或右模) 的非零子模还是有限生成投射生成子.
- (2)  $R$  是遗传 Noether 素环且为 maximal order.
- (3)  $R$  是遗传 Noether Asano order.

如果含幺环  $R$  满足上述等价条件之一且不是 Artin 单环, 则称  $R$  为 **Dedekind 素环**.

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2): 现在  $R$  的非零理想都是生成子, 所以 [注记3.47] 说明  $R$  是素环. 而条件也说明  $R$  的左理想和右理想都是有限生成投射  $R$ -模, 故  $R$  是遗传 Noether 素环. 应用 [命题3.46] 得到  $R$  是 maximal order.

(2) $\Rightarrow$ (3):  $R$  的遗传性说明任何理想作为左  $R$ -模或右  $R$ -模都是投射模, 而  $R$  的双边 Noether 性说明  $R$  的任何理想作为单边模也是有限生成投射模. 于是 [命题3.46] 说明  $R$  是 Asano order.

(3) $\Rightarrow$ (1): [命题3.46] 说明  $R$  上有限生成投射生成子的非零子模依然是生成子. 结合  $R$  的遗传性便知.  $\square$

**Remark 3.50.** 对含幺交换环  $R$ ,  $R$  是 Dedekind 整区当且仅当  $R$  是 Dedekind 素环, [推论2.48].

### 3.5 Jacobson 环

在 Hilbert 零点定理证明过程中, 域上的仿射代数满足任何素理想都可以表示为一些极大理想之交这一性质起到了至关重要的作用. 下面 Jacobson 环概念便是这一捕捉特性后的非交换推广.

**Definition 3.51.** 称含幺环  $R$  是 **Jacobson 环**, 如果对任何素理想  $P$ ,  $P$  总可以表示为一些本原理想之交.

**Remark 3.52.** 由此立即看到含幺交换环  $R$  是 Jacobson 环当且仅当每个素理想是一些极大理想之交.

**Basic Observation.** 设  $R$  是含幺环, 则  $R$  是 Jacobson 环的充要条件是对任何素理想  $P$ ,  $R/P$  是半本原环.

本节的主要目标是应用 Goldie 定理证明适当条件下的右 Noether 代数是 Jacobson 环 (见 [命题3.57]), 在此之前先来看一些基本例子. 之前已经提到域上交换仿射代数是 Jacobson 环的雏形:

**Example 3.53.** 域上的仿射交换代数是 Jacobson 环.

*Proof.* 这里证明更强的断言: 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上仿射交换代数, 则任何理想  $I$  的根理想是所有包含  $I$  的极大理想之交. 记  $A$  的 Rabinowitsch 素谱是  $\text{Spec}_{\text{rab}} A = \{P \in \text{Spec} A \mid \text{存在极大理想 } \mathfrak{m} \subseteq A[x] \text{ 使得 } P = A \cap \mathfrak{m}\}$ , 那么这时  $\max \text{Spec} A = \text{Spec}_{\text{rab}} A \subseteq \text{Spec} A$ , 故只需验证  $\sqrt{I}$  包含 Rabinowitsch 素谱中所有含  $I$  素理想之交. 这里记 Rabinowitsch 素谱中所有含  $I$  素理想之交是  $T$ , 那么对每个  $a \in T$ , 有  $J = (I, ax - 1) = A[x]$ , 所以存在  $s_1, \dots, s_m \in I, f_1(x), \dots, f_m(x), g(x) \in A[x]$  使得  $f_1(x)s_1 + \dots + f_m(x)s_m + g(x)(ax - 1) = 1$ . 于是在 Laurent 多项式环  $A[x, x^{-1}]$  中有

$$f_1(x^{-1})s_1 + \dots + f_m(x^{-1})s_m + g(x^{-1})(ax^{-1} - 1) = 1,$$

在上式两边适当乘上  $x$  的某个正整数幂后知存在  $g_1(x), \dots, g_m(x), h(x) \in A[x], l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  使得  $g_1(x)s_1 + \dots + g_m(x)s_m + h(x)(a - x) = x^l$ , 所以  $a \in \sqrt{I}$ , 进而  $T \subseteq \sqrt{I}$ .  $\square$

**Example 3.54.** 设  $\mathbb{k}$  是域, 则  $A = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots]/(\{x_i x_j \mid i, j \geq 1\})$  是非 Noether 的 Jacobson 局部环.

*Proof.*  $A$  明显非 Noether. 注意到  $A$  唯一的素理想是  $(x_1, x_2, \dots)/(\{x_i x_j \mid i, j \geq 1\})$ , 故是 Jacobson 局部环.  $\square$

**Example 3.55.** 设  $\mathbb{k}$  是域, 则交换 Noether 局部代数  $A = \mathbb{k}[[x]]$  不是 Jacobson 环.

*Proof.* 注意到  $A$  唯一的极大理想是  $(x)$ , 而零理想是素理想, 所以  $A$  不是 Jacobson 环.  $\square$

**Example 3.56.** 任何单边 Artin 环是 Jacobson 环.

*Proof.* 只需注意到单边 Artin 的素理想集和极大理想集相同.  $\square$

**Basic Observation.** 设  $R$  是 Jacobson 环, 则  $R$  的局部闭素理想均为本原理想.

*Proof.* 如果  $P$  是局部闭素理想, 那么由  $P$  可以表为所有包含  $P$  的本原素理想之交可知一定存在某个本原素理想和  $P$  相同. 特别地,  $P$  是本原理想.  $\square$

**Proposition 3.57.** 设  $\mathbb{k}$ -代数  $A$  是右 Noether 的, 且  $\dim_{\mathbb{k}} A < |k|$ , 那么  $A$  是 Jacobson 环.

*Proof.* 如果  $\mathbb{k}$  是有限域, 那么  $A$  是有限集, 进而是 Artin 代数, 所以这时  $A$  是 Jacobson 环. 下设  $\mathbb{k}$  是无限域, 此时  $|\mathbb{k}| = |\mathbb{k}^\times|$ . 下面断言  $\text{Jac}A$  是诣零理想, 一旦证明该断言立即得到对每个  $A$  的素理想  $P$ ,  $A/P$  是半本原代数, 原因是如果  $\text{Jac}(A/P) \neq 0$ , 由  $A/P$  是右 Noether 素环知  $\text{Jac}(A/P)$  作为本质右理想总存在正则元, 这将与  $\text{Jac}(A/P)$  是诣零理想矛盾. 下面证明  $\text{Jac}A$  是诣零理想. 任取  $c \in \text{Jac}A$ , 我们有  $|\mathbb{k}^\times|$  个不同的元素  $c - \alpha, \alpha \in \mathbb{k}$ , 并且由  $c - \alpha = -\alpha(1 - \alpha^{-1}c)$  知这些元素都可逆, 注意到此时  $\{(c - \alpha)^{-1} | \alpha \in \mathbb{k}^\times\}$  是  $\mathbb{k}$ -线性相关的, 所以  $c$  是  $\mathbb{k}$  上代数元. 设  $c$  满足  $\mathbb{k}$  上首一多项式  $x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \alpha_1x + \alpha_0 (\alpha_i \in \mathbb{k})$ , 因为  $c$  不可逆所以  $\alpha_0 = 0$ , 不妨设  $m \geq 2$ . 从而  $c^m + \alpha_{m-1}c^{m-1} + \cdots + \alpha_1c = 0$ . 设  $l \geq 1$  是满足  $\alpha_l \neq 0$  的最小正整数, 则  $(1 + \alpha_l^{-1}c^{m-l} + \cdots + \alpha_l^{-1}\alpha_{l+1}c)c^l = 0$ , 注意  $1 + \alpha_l^{-1}c^{m-l} + \cdots + \alpha_l^{-1}\alpha_{l+1}c$  是  $A$  中可逆元, 故  $c$  幂零.  $\square$

**Corollary 3.58.** 设域  $\mathbb{k}$  不可数, 那么任何右 Noether 仿射  $\mathbb{k}$ -代数是 Jacobson 环.