Zariski 切空间

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2025 年 12 月 20 日

这份笔记主要记录了代数几何中 Zariski 切空间的基本概念与部分结论, 这里聚焦于仿射簇. 主要参考文献是 [Har77], [Sha94],[SP94] 和 [Mat70]. 我们将看到代数闭域上仿射簇在给定点处的局部维数总不超过该点切空间的线性维数 (见 [推论1.19]). 当给定点处局部维数与切空间线性维数一致时, 就有了光滑点的概念 (见 [定义2.1]). 代数闭域上仿射簇在给定点处光滑的充要条件是该点处局部环是正则局部环 (见 [定理2.6]). 特别地, 代数闭域上仿射曲线在给定点处的光滑性与该点处局部环的离散赋值性等价; 仿射曲线整体光滑与正则函数环是 Dedekind 整区等价. 代数闭域上仿射簇的奇异轨迹总是闭子簇 (见 [定理2.14]), 事实上奇异轨迹由该簇不可约分解的每个分支奇异轨迹添加上所有不同不可约分支的交点构成. 例如仿射簇的光滑点集总是稠密开子集 ([定理2.22]). 再介绍几个仿射簇的光滑性理论在同调环论方面的应用, 例如自内射维数无限的交换仿射代数的构造 (见 [例3.9]). 最后介绍仿射簇间正则映射产生的切映射.

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出, 谢谢.

1 Zariski 切空间

本节介绍仿射簇的 Zariski 切空间及其等价刻画. 研究几何对象在一点处的切空间的思想源于“线性逼近”. 具体地, 设 $\Bbbk$ 是域, 仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$ 对应的 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的理想 $I(X)$ 由 $f_1, ..., f_m \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 生成, 则 $X = V(f_1, ..., f_m)$. 固定 X 内一点 $p = (p_1, ..., p_n)$, 那么 $f_i(p) = 0, i = 1, 2, ..., m$. 为考虑 X 在 p 处的“线性逼近”, 先观察每个 f_i 在 p 处的 Taylor 展开

$$f_i(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - p_j) + g(x_1, ..., x_n),$$

这里 g 是关于 $x_j - p_j$ 的其余高次项之和. 那么

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_p = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p).$$

所以每个 f_i 在 p 处有线性多项式 $\sum_{j=1}^{n}(\partial f_i/\partial x_j)(p)(x_j - p_j)$ 逼近. 于是我们能够把

$$V(\{\sum_{j=1}^{n}(\partial f_i/\partial x_j)(p)(x_j - p_j)|1 \le i \le m\})$$

认为是 X 在 p 点处的线性近似. 并且有

$$V(\{\sum_{j=1}^{n}(\partial f_i/\partial x_j)(p)(x_j-p_j)|1\le i\le m\})=V(\{\sum_{j=1}^{n}(\partial F/\partial x_j)(p)(x_j-p_j))|F\in I(X)\}).$$

通常我们希望定义出的切空间确实是 ($\Bbbk^n$ 中的) 线性空间, 因此将上述仿射簇平移至经过原点得到

Definition 1.1 (Zariski 切空间)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X\subseteq\Bbbk^n$ 是仿射簇, 对应理想为 $I(X)$, $p\in X$. 称 $T_pX=V(\{\sum\limits_{i=1}^{n}(\partial F/\partial x_i)(p)x_i|F\in I(X)\})\subseteq\Bbbk^n$ 是仿射簇 X 在 p 处 **Zariski 切空间**.

Remark 1.2. 如果仿射簇 $X\subseteq\Bbbk^n$ 对应的理想 $I(X)\subseteq\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 可由 $f_1,...,f_m$ 生成, 那么 T_pX 即 $\Bbbk^n$ 中系数矩阵为 Jacobi 矩阵 $((\partial f_i/\partial dx_j)(p))_{m\times n}\in\Bbbk^{m\times n}$ 的线性方程组的解空间, 所以有

$$\dim_{\Bbbk}T_pX=n-\operatorname{rank}\left(((\partial f_i/\partial dx_j)(p))_{m\times n}\right)$$

Example 1.3. 设 $\Bbbk$ 是域, $X\subseteq\Bbbk^n$ 是不可约多项式 $f\in\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 的零点集, 那么 T_pX 即线性方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(p)x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)x_n=0$$

的解空间. 一般地, 若仿射簇 $X\subseteq\Bbbk^n$ 是不可约的且是 1 维的, 则称 X 是**仿射曲线**. 现在设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域. 例如考虑仿射 (尖点) 曲线 $C=V(x^3-y^2)\subseteq\Bbbk^2$, 它在 $p=(0,0)$ 处的切空间 $T_pC=\Bbbk^2$(注意局部维数 $\dim_pC=1$). 又例如我们有圆周曲线 $S=V(x^2+y^2-1)\subseteq\Bbbk^2$, 它也是仿射曲线 (可直接验证 $\Bbbk[x,y]$ 有素理想升链 $0\subsetneq(x^2+y^2-1)\subsetneq(x-1,y)$, 再由 $\mathrm{k.dim}\Bbbk[x,y]=2$ 可知 S 的坐标环 $A(S)$ 的 Krull 维数也是 1, 所以 S 是 1 维簇), 并且在每点 $p\in S$ 处的切空间 $T_pS\cong\Bbbk$.

Remark 1.4. 如果 $\Bbbk=\mathbb{R}$, 那么任何仿射簇 $X\subseteq\mathbb{R}^n$ 都是某个多项式 $f\in\mathbb{R}[x_1,...,x_n]$ 的零点集. 具体地, 如果 $X=V(f_1,...,f_m)$, 命 $f=f_1^2+\cdots+f_m^2$, 则 $X=V(f)$.

Remark 1.5. 本例第一条曲线在某点处局部维数与切空间线性维数不同. 第二条 (圆周) 曲线每点局部维数与切空间的线性维数一致. 之后引入的光滑点与奇异点的概念 (见 [定义2.1]) 便区分了这两个几何对象.

Example 1.6 (乘积簇的切空间)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X\subseteq\Bbbk^n,Y\subseteq\Bbbk^m$, 设 X 可由多项式 $f_1,...,f_r\in\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 决定, Y 可由 $g_1,...,g_s\in\Bbbk[y_1,...,y_m]$ 决定, 那么 $X\times Y$ 是 $\Bbbk[x_1,...,x_n,y_1,...,y_m]$ 中多项式 $f_1,...,f_r,g_1,...,g_s$ 决定的零点集. 所以应用 [定义1.1] 马上得到对任何 $p\in X,q\in Y$ 有典范线性同构 $T_pX\oplus T_qY\cong T_{(p,q)}(X\times Y)$.

Proposition 1.7. 设 $\Bbbk$ 是域, $X\subseteq\Bbbk^n$ 是仿射簇, $Y\subseteq X$ 是闭子簇且 $p\in Y$. 那么 $\dim_{\Bbbk}T_pY\le\dim_{\Bbbk}T_pX$.

Proof. 设 $I(X)$ 可由 $f_1,...,f_m\in\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 生成, 那么 $T_pX=V(\{\sum\limits_{i=1}^{n}(\partial f_k/\partial x_i)(p)x_i|1\le k\le m\})$. 可设存在 $f_{m+1},...,f_t\in\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 使得 $Y=V(f_1,...,f_m,f_{m+1},...,f_t)$, 那么明显有 $T_pY\subseteq T_pX$ 是 $\Bbbk$-线性子空间. □

Remark 1.8. 若取 $X=\Bbbk,Y=\{p\}\subseteq X$, 那么 $T_pY=0\subsetneq T_pX=\Bbbk$. 此时有严格不等式 $\dim_{\Bbbk}T_pY<\dim_{\Bbbk}T_pX$. 若取 $X=\Bbbk^2,Y=V(x^3-y^2)\subseteq X$, 那么 $T_pY=T_pX=\Bbbk^2$, 此时 $\dim_{\Bbbk}T_pY=\dim_{\Bbbk}T_pX$. 通过上述命题的证明过程, 可以看到域 $\Bbbk$ 上仿射簇 $X\subseteq\Bbbk^n$ 在一点处切空间维数可如下计算: 取定 $p\in X$, 设 $I(X)$ 可由 $f_1,...,f_m\in\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 生成, 那么 $T_pX=V(\{\sum\limits_{i=1}^{n}(\partial f_k/\partial x_i)(p)x_i|1\le k\le m\})$. 所以 T_pX 的线性维数就是 $n-r$, 其中 r 表示点 p 处 Jacobi 矩阵 $(\partial f_i/\partial x_j(p))_{m\times n}\in\Bbbk^{m\times n}$ 的秩.

光滑流形在一点处的切空间可由该流形光滑函数环在给定点的全体导子给出, 下面是仿射簇情形的概念.

Definition 1.9 (导子)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 称 $\Bbbk$-线性映射 $D : A(X) \to \Bbbk$ 是 X 在点 p 处的**导子**, 如果 $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f), \forall f, g \in A(X)$. 这里 $A(X)$ 表示仿射簇 X 的坐标环.

Remark 1.10. 如果 $\Bbbk$ 是代数闭域, $A(X)$ 到 X 上的正则函数环是标准嵌入是代数同构. 因此当我们考虑代数闭域上的仿射簇时, 常将该簇的正则函数环与坐标环视作等同. 上述概念也是交换代数中导子概念的特殊情形, 回忆含幺交换环 K 上交换代数 R 到 R-模 M 的 K-导子 D 是指满足 $D(ab) = D(a)b + aD(b), \forall a, b \in R$ 的 K-模同态. 那么所有 R 到 M 的 K-导子构成的集合 $\mathrm{Der}_K(A, M)$ 是 K-模. 对 $\Bbbk$ 上仿射簇 X 内固定的点 p, 可通过定义 $A(X) \times \Bbbk \to \Bbbk, (f, \alpha) \mapsto f(p)\alpha$ 来赋予 $\Bbbk$ 一个 $A(X)$-模结构. 进而 $D \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}(A(X), \Bbbk)$ 当且仅当 $D(fg) = g(p)D(f) + f(p)D(g), \forall f, g \in A(X)$.

仿射簇在一点处的切空间类似流形情形也可由在给定点处全体导子给出, 这是更自然内蕴的 (等价) 定义.

Lemma 1.11. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 那么 T_pX 与 X 在 p 点导子全体构成的线性空间 Ω_p 间有 $\Bbbk$-线性同构 $\varphi : T_pX \to \Omega_p, a = (a_1, ..., a_n) \mapsto D_a : A(X) \to \Bbbk$, 其中 $D_a : A(X) \to \Bbbk, f \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} (\partial f/\partial x_i)(p)a_i$ 是由多项式函数 f 在每个变量上的偏导数诱导的标准导子.

Proof. 首先可直接计算验证 $\varphi : T_pX \to \Omega_p, a = (a_1, ..., a_n) \mapsto D_a$ 是定义合理的 $\Bbbk$-线性映射. 若 $a, b \in T_pX$ 满足 $D_a = D_b$, 把这两个导子作用各坐标函数 $x_i : X \to \Bbbk$ 可得 $a = b$, 由此得到映射 φ 是单射. 对任何 p 处的 $\Bbbk$-导子 D, 命 $a_i = D(x_i)$ 得到点 $a = (a_1, ..., a_n) \in \Bbbk^n$, 直接验证可得该点满足 $D_a = D$, 故 φ 满. □

Remark 1.12. 记 $p \in X$ 对应坐标环 $A(X)$ 的极大理想为 $\mathfrak{m}$, 那么 $A(X)/\mathfrak{m} = \Bbbk$. 这时可天然赋予 $\Bbbk$ 上 $A(X)$-模结构, 即 $f \cdot \alpha = f(p)\alpha, \forall f \in A(X), \alpha \in \Bbbk$. 所以 $\Omega_p = \mathrm{Der}_{\Bbbk}(A(X), \Bbbk) \cong \mathrm{Der}_{\Bbbk}(A(X), A(X)/\mathfrak{m})$.

Remark 1.13. 考虑 [引理1.11] 给出的 Zariski 切空间的内蕴定义, 那么 [例1.6] 诱导线性同构

$$\eta : T_pX \oplus T_qY \xrightarrow{\cong} T_{(p,q)}(X \times Y), (\delta, \partial) \mapsto \eta(\delta, \partial),$$

其中 $\eta(\delta, \partial) : \mathcal{O}(X \times Y) \to \Bbbk$ 满足将任何 $X \times Y$ 上正则函数写成 $\sum_k f_k g_k$, 其中 $f_k \in \mathcal{O}(X), g_k \in \mathcal{O}(Y)$, 后

$$\eta(\delta, \partial)(\sum_k f_k g_k) = \sum_k (\delta(f_k)g_k(q) + f_k(p)\partial(g_k)).$$

仍设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇并取定 X 内一点 p. 记 $\mathfrak{m}_p = \{f \in A(X) | f(p) = 0\}$ 是 p 所对应 $A(X)$ 的极大理想, 如果 D 是仿射簇 X 在点 p 处的导子, 那么 $D(\mathfrak{m}_p^2) = 0$. 所以每个导子 D 可天然诱导出 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 上的 $\Bbbk$-线性函数. 反之, 任给 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 上的 $\Bbbk$-线性函数 l, 通过定义 $D_l : A(X) \to k, f \mapsto l(\overline{f - f(p)})$ 可得到一导子, 可直接计算验证这给出 X 在 p 点导子全体与 $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ 间的 k-线性同构, 于是我们得到下述命题.

Proposition 1.14. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$, p 点对应 $A(X)$ 的极大理想记作 $\mathfrak{m}_p$. 则作为 $\Bbbk$-线性空间有同构 $T_pX \cong (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. 特别地, $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 也是有限维线性空间, 满足 $\dim_{\Bbbk} T_pX = \dim_{\Bbbk} \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$.

Remark 1.15. 正是因为该命题, 一些文献通过 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 的对偶空间来定义仿射簇在点 p 处的切空间, 相较于原先的定义而言这更内蕴. 一般也将 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 的对偶空间称为该簇在 p 点处的**余切空间**, 记作 T_p^*X. 保持前面的记号, 设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇且 $p \in X$, $\mathfrak{m}_p$ 表示 p 对应在 $A(X)$ 中的极大理想. 分别称

$$TX = \coprod_{p \in X} T_pX = \coprod_{p \in X} (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*, \ T^*X = \coprod_{p \in X} T_p^*X = \coprod_{p \in X} \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$$

为 X 的**切丛**和**余切丛**. 对正整数 k, 可将 $\wedge^k T_p^*X$(在 $\Bbbk$ 上作外积) 视作 T_pX 上交错 k-重线性函数全体. 称

$$\wedge^k TX = \coprod_{p\in X} \wedge^k T_p^*X,\ \wedge^k T^*X = \coprod_{p\in X} \wedge^k T_pX$$

为 X 上**反变 k-张量丛**和**协变 k-张量丛**. 称每个截面 $\pi : X \to \wedge^k TX$ 为 **k-向量场**. 例如 2-向量场将每个 $p \in X$ 对应为 T_pX 上某个交错双线性函数.

记 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是仿射簇 X 在点 $p \in X$ 处的局部环, $\mathfrak{m}_p$ 是点 p 对应的极大理想, 那么总有 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{O}_{X,p} \cong A(X)_{\mathfrak{m}_p}$. 若记 p 在 $A(X)$ 中对应的极大理想是 M_p, 那么可直接验证 $\Bbbk$-线性同构 $M_p/M_p^2 \cong (\mathfrak{m}_p)_{\mathfrak{m}_p}/(\mathfrak{m}_p^2)_{\mathfrak{m}_p}$(一般地, 对含幺交换环 K 上的交换代数 R, 若有极大理想 $\mathfrak{m}$, 那么有标准 K-模同构 $\theta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2, x + \mathfrak{m}^2 \mapsto x/1 + \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2$, θ 明显是单射, 要看到 θ 是满射, 对任给 $x/s \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$, 因为 $s \notin \mathfrak{m}$, 故存在 $a \in R$ 使得 $1 - sa \in \mathfrak{m}$, 于是 $x - xsa \in \mathfrak{m}^2$, 这意味着 $x/s + \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2 = xa/1 + \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2$, 所以 θ 是满射). 总之, 我们得到

Proposition 1.16. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$, $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 X 在 p 点处的局部环. 若记 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的极大理想, 则有 $\Bbbk$-线性同构 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* \cong T_pX$. 特别地, $\dim_{\Bbbk}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{\Bbbk}T_pX$. 并注意到 X 在点 p 处的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 满足剩余域 $\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m} \cong \Bbbk$(对含幺交换环 R 与极大理想 $\mathfrak{m}$ 总有环同构 $R/\mathfrak{m} \cong R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$).

Remark 1.17. 对含幺交换局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 记 $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ 为 R 的剩余域. 称 $\Bbbk$-线性空间 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ 为 R 的**切空间**. 将 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 称为 R 的**余切空间**. 通过上述命题可知当 R 是仿射簇在一点处的局部环时, 退化为经典定义. 对一般的含幺交换环 R 及其极大理想 $\mathfrak{m}$, 有线性维数 $\dim_{R/\mathfrak{m}}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}}\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}/{\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}}^2$. 所以对交换 Noether 环 R, 可以定义 R 的 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}R$ 处余切空间为 $R/\mathfrak{m}$-线性空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. 其 Zariski 切空间可定义为 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 作为 $R/\mathfrak{m}$-线性空间的对偶空间. 由此不难得到 $\mathrm{k.dim}R_{\mathfrak{m}} \leq \dim_{R/\mathfrak{m}}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. 如果进一步 R 是域 $\Bbbk$ 上仿射整区, 那么 $\mathrm{k.dim}R_{\mathfrak{m}} = \mathrm{k.dim}R, \forall \mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}R$.

Remark 1.18. 重复 [命题1.14] 的证明可知代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇在 p 处的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 到 $\Bbbk$ 的导子全体和 $\mathcal{O}_{X,p}$ 唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$ 定义出的空间 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m})^*$ 也有典范的 $\Bbbk$-线性同构, 所以 T_pX 也可以用 $\mathcal{O}_{X,p}$ 在 p 处所有到 $\Bbbk$ 的导子模定义. 这时 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathcal{O}_{X,p}, \Bbbk) \to \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(X), \Bbbk), \delta \mapsto (f \mapsto \delta([(X, f)]))$ 是线性同构.

所以对任何 $p \in X$ 处的正则函数芽 $[(U, f)] \in \mathcal{O}_{X,p}$(特别地, 也可以考虑 f 是 X 上正则函数), 可以决定 T_pX 上线性函数 $(df)_p : T_pX \to \Bbbk, \delta \mapsto \delta([U, f])$. 即 $(df)_p \in T_p^*X$. 在同构 $T_p^*X \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 下 (这里 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathcal{O}_{X,p}$ 唯一的极大理想), $(df)_p$ 对应至 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中元素 $[(U, f - f(p))] + \mathfrak{m}^2$. 注意到前面关于 Zariski 切空间的等价定义表明如果 X 上正则函数 f 和 $p \in X$ 的开邻域 U 满足 $f(U) = 0$, 那么所有 $\nu \in T_pX$ 满足 $\nu(f) = 0$.

注意到 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是交换 Noether 局部环, 故有交换 Noether 局部环的维数特性立即得到:

Corollary 1.19. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 那么 $\mathrm{k.dim}\mathcal{O}_{X,p} \leq \dim_{\Bbbk}T_pX$.

Remark 1.20. 由于 $\Bbbk$ 是代数闭域, 故 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的 Krull 维数就是 X 在点 p 处的局部维数. 因此, 如果这时 Y 是仿射簇 X 含点 p 的闭子簇, 那么 $\mathrm{k.dim}\mathcal{O}_{Y,p} \leq \mathrm{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}$.

2 光滑点和奇异点

光滑点和奇异点研究代数几何中自然产生的概念. 在 [推论1.19] 中我们已经看到仿射簇在一点处局部环的 Krull 维数总不超过这点处 Zariski 切空间的线性维数. 当取到等号时, 就得到了光滑点的概念.

Definition 2.1 (光滑点, 奇异点)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 当 $\dim_{\Bbbk} T_p X = \dim_p X$ 时, 称 p 是 X 的**光滑点**, 否则称 p 是**奇异点**. 对簇 X, 若在每点都光滑, 则称该簇是**光滑簇**.

Remark 2.2. 一般称仿射簇 X 所有奇异点构成的集合为 X 的**奇异轨迹**, 记作 $\mathrm{Sing}X$.

Proposition 2.3. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是不可约仿射簇, 则 $\mathrm{Sing}X$ 是 X 的闭子集.

Proof. 设 $X = V(f_1, ..., f_m)$, 其中 $f_1, ..., f_m \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$. 因为 X 是不可约簇, 所以 $\dim X = \dim_p X, \forall p \in X$. 那么

$$\mathrm{Sing}X = \left\{ p \in X \middle| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{m\times n} \text{的秩严格小于} n - \dim X \right\}$$

就是多项式矩阵 $(\partial f_i / \partial x_j)_{m\times n}$ 所有阶不超过 $n - \dim X$ 的子式的公共零点集. □

Remark 2.4. 我们将在 [定理2.14] 中证明代数闭域上仿射簇的奇异轨迹总是闭子集.

Remark 2.5. 若 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 且 X 是不可约光滑 d 维仿射簇, 则 X 上有自然的 d 维复流形结构 [Mum81, p.10-12]. 若 $\Bbbk = \mathbb{R}$, 在 [注记1.4] 中已经指出实仿射簇总是某个多项式的零点集, 进而不可约光滑实仿射簇也可自然视作光滑实流形 [Lee13, Corollary 5.14]. 故 $\Bbbk = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的场景依然可以使用微分或是解析的工具研究光滑簇.

根据正则局部环的定义以及 [推论1.19] 我们立即得到:

Theorem 2.6 (光滑性刻画)**.** 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 那么 X 在点 p 处的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是正则局部环的充要条件是 $p \in X$ 是光滑点.

Remark 2.7. 因此由正则环的定义可知代数闭域上仿射簇光滑当且仅当该簇坐标环是正则环.

如果 X 是不可约仿射簇, 那么 X 任意两个点具有相同局部维数, 因此 [定理2.6] 和 [注记1.2] 表明:

Corollary 2.8. 设 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是由 $f_1, ..., f_m \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 定义的不可约仿射簇, $p \in X$. 则 $p \in X$ 光滑的充要条件是 Jacobi 矩阵 $((\partial f_i / \partial dx_j)(p))_{m\times n}$ 的秩为 $n - \dim X$.

下面我们将 [推论2.8] 用交换代数语言重述为

Corollary 2.9. 设代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射整区 A 满足存在 $f_1, ..., f_m \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 使 $A \cong \Bbbk[x_1, ..., x_n]/(f_1, ..., f_m)$. 那么对 A 的极大理想 $\mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{m}}$ 是正则局部环当且仅当 $\mathfrak{m}$ 对应的 $\Bbbk^n$ 中点 p 满足 Jacobi 矩阵 $((\partial f_i / \partial dx_j)(p))_{m\times n}$ 的秩为 $n - \mathrm{k.dim}A$.

利用正则局部环是整区这一事实我们就可以证明仿射簇任何两个不同不可约分支的交点是奇异点.

Corollary 2.10. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 且有不可约分支分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r$. 那么对任何 $p \in X_i \cap X_j$, 这里 $1 \le i \ne j \le r$, 有 p 是奇异点. 即两个不同的不可约分支的交点都是奇异点.

Proof. 假设 p 是光滑点, 那么 [定理2.6] 表明 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是正则局部环. 特别地, $\mathcal{O}_{X,p}$ 是整区, 所以零理想是它唯一的极小素理想. 但这时若记 $\mathfrak{m}$ 是点 p 对应坐标环 $A(X)$ 的极大理想, 则 $(I(X_i)/I(X))_{\mathfrak{m}}$ 与 $(I(X_j)/I(X))_{\mathfrak{m}}$ 都是 $\mathcal{O}_{X,p} \cong A(X)_{\mathfrak{m}}$ 的极小素理想, 且它们不相同. 这就得到了矛盾, 所以 p 是奇异点. □

Remark 2.11. 该推论说代数闭域上仿射簇内任何光滑点落在唯一的不可约分支中. 特别地, 我们能够说明代数闭域上的光滑仿射簇的不可约性与连通性等价: 根据定义总有不可约蕴含连通. 反之, 如果给定的光滑仿射簇是可约的, 那么根据 [推论2.10], 不同的不可约分支不相交. 因此光滑簇能够分解为有限多个两两不相交的闭子集之并, 这和 X 的连通性矛盾.

为了证明代数闭域上仿射簇的奇异点集总是闭子集, 还需下述引理.

Lemma 2.12. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 且有不可约分支分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r$. 那么对 X 内每个只落在唯一的不可约分支 X_t 的点 p, 有 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{O}_{X,p} \cong \mathcal{O}_{X_t,p}$. 特别地, 有 $\Bbbk$-线性同构 $T_pX \cong T_pX_t$.

Proof. 首先我们有标准 $\Bbbk$-代数同态 $\varphi : \mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{O}_{X_t,p}, [(U, f)] \mapsto [(U \cap X_t, f)]$, 其中 U 是含 p 的某个开邻域, $f : U \to \Bbbk$ 是 U 上正则函数. 因为 X_t 是不可约分支 $\{X_1, X_2, ..., X_t\}$ 中唯一含有点 p 的不可约分支, 故

$$W = X - \bigcup_{j \neq t} X_j \subseteq X_t$$

也是 X 的含 p 开邻域. 于是对任何 X_t 的含 p 开邻域 V 以及 V 上正则函数 $h : V \to \Bbbk$, 有 $[(V \cap W, h)] \in \mathcal{O}_{X,p}$ 且 $\varphi([(V \cap W, h)]) = [(V, h)]$, 这说明 φ 是满射. 下证 φ 是单射, 如果 X 的含 p 开邻域 U_1, U_2 上的正则函数 $g_1 : U_1 \to \Bbbk, g_2 : U_2 \to \Bbbk$ 满足 $\varphi([(U_1, g_1)]) = \varphi([(U_2, g_2)])$, 那么存在 X_t 的含 p 开邻域 $L \subseteq U_1 \cap U_2 \cap X_t$ 使得 g_1 和 g_2 在 L 上取值相同. 这时 $L \cap W$ 是 X 的含 p 开邻域, 所以 $[(U_1, g_1)] = [(L \cap W, g_1)] = [(L \cap W, g_2)] = [(U_2, g_2)]$. 这表明 φ 是单射. 因此得到 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{O}_{X,p} \cong \mathcal{O}_{X_t,p}$. □

Remark 2.13. 因为 X_t 是唯一包含点 p 的不可约分支, 故局部维数 $\dim_p X = \dim_p X_t$. 结合上述引理的结论我们马上看到, 如果点 p 落在唯一的不可约分支 X_t 中, 则 p 是 X_t 的光滑点的充要条件是 p 是 X 的光滑点.

Theorem 2.14. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 则 $\mathrm{Sing}X$ 是 X 的闭子集.

Proof. 设 X 有不可约分支分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r$. 那么 [引理2.12] 表明对每个正整数 $1 \leq i \leq r$, 只要

$$W_i = X_i - \bigcup_{k \neq i} X_k \neq \varnothing,$$

则 $p \in W_i$ 是 X 的奇异点的充要条件是 p 是 X_i 的奇异点. 因此 $\mathrm{Sing}X \cap W_i = \mathrm{Sing}X_i \cap W_i, \forall 1 \leq i \leq r$. 记所有 X 是任意两个不同的不可约分支之交集中点的点构成的集合为 N, 则 [推论2.10] 表明 $N \subseteq \mathrm{Sing}X$. 由 $X = N \cup W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_r$ 得到 $\mathrm{Sing}X = N \cup (W_1 \cap \mathrm{Sing}X_1) \cup \cdots \cup (W_r \cap \mathrm{Sing}X_r)$. 此外, 注意到对每个 $1 \leq i \leq r$, 有 $N \cup (W_i \cap \mathrm{Sing}X_i) = N \cup \mathrm{Sing}X_i$, 因此 $\mathrm{Sing}X = N \cup \mathrm{Sing}X_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Sing}X_r$. 而 [命题2.3] 告诉我们每个 $\mathrm{Sing}X_i$ 都是 X_i 的闭子集, 所以 $\mathrm{Sing}X$ 也是 X 的闭子集. □

Remark 2.15. 该定理的证明过程事实上告诉我们更多, 任何代数闭域上仿射簇的奇异点集就是各不可约分支的奇异点集基础上添加所有互异不可约分支的交点. 特别地, 若代数闭域上仿射簇 X 有不可约分支分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r$, 那么 $\mathrm{Sing}X \supseteq \mathrm{Sing}X_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Sing}X_r$.

称仿射空间 $\Bbbk^n$ 中非常数多项式 $f \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的零点集 $V(f)$ 为**超曲面**. 事实上, $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的素理想 (f) 不会包含非零真理想, 否则, 假设存在非零素理想 Q 使得 $Q \subsetneq (f)$, 那么可设 $g \neq 0 \in Q$ 是 Q 中次

数最低的非零多项式, 设存在 $h \in \Bbbk[x_1,...,x_n]$ 使得 $g = fh$. 进而由 $f \notin Q$ 得到 $h \in Q$, 但 h 是 Q 中次数严格低于 g 的多项式, 得到矛盾. 因此 $\mathrm{ht}(f) = 1$. 于是由仿射整区所有极大素理想链长度相同立即得到 $\mathrm{k.dim}\Bbbk[x_1,...,x_n]/(n-1)$. 翻译成几何的语言, 仿射空间 $\Bbbk^n$ 中任何不可约超曲面的维数是 $n-1$. 因为多项式环 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$, 任何非常数多项式可分解为一些不可约多项式之积, 故 $\Bbbk^n$ 中的超曲面 H 总是有限个不可约超曲面之并, 这说明 $\dim H = n-1$. 借助这一观察, 我们可以给出不可约超曲面奇异轨迹的计算公式.

Theorem 2.16. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X = V(f) \subseteq \Bbbk^n$ 是不可约多项式 $f \in \Bbbk[x_1,...,x_n]$ 决定的超曲面. 那么

$$\mathrm{Sing}X = V(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, ..., \partial f/\partial x_n, f).$$

Proof. 根据前面的讨论, $\dim_p X = \dim X = n-1, \forall p \in X$. 所以由 [例1.3] 给出的不可约超平面在给定点处切空间满足的线性方程可知 $p \in \mathrm{Sing}X$ 当且仅当 $p \in X$ 且 $p \in V(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, ..., \partial f/\partial x_n)$. □

Remark 2.17. 还可以进一步说明 $\Bbbk^n$ 中仿射超曲面 $X = V(f)$ 的奇异轨迹 $\mathrm{Sing}X$ 是 X 的真闭子集. 在 [定理2.14] 中我们已经看到 $\mathrm{Sing}X$ 是 X 的闭子集. 假设 $\mathrm{Sing}X = X$, 那么对任何 $p \in X$ 有 $p \in V(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, ..., \partial f/\partial x_n)$. 进而对每个正整数 $1 \leq i \leq n$, $\partial f/\partial x_i \in I(X)$. 结合 $I(X) = (f)$ 是 f 生成的主理想可知每个 $\partial f/\partial x_i = 0$(比较次数). 如果 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$, 由 f 是非常数多项式立即得到矛盾. 如果 $\mathrm{char}\Bbbk$ 为某个素数 p, 那么 $\partial f/\partial x_i = 0$ 表明 f 每个非零单项式中 x_i 的幂次是 p 的倍数. 因此 f 是关于 $x_1^p, x_2^p, ..., x_n^p$ 的多项式. 由 $\Bbbk$ 是代数闭域, 任何 $c \in \Bbbk$ 均为 $\Bbbk$ 中某个元素的 p 次幂, 所以利用 $\mathrm{char}\Bbbk = p$ 知存在 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 中多项式 g 使得 $f = g^p$, 这与 f 是不可约多项式矛盾. 因此 $\mathrm{Sing}X$ 是 X 的真闭子集, 结合 X 是不可约空间立即得到 X 所有光滑点构成的子集是 X 中稠密开子集.

Example 2.18. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 那么仿射平面 $\Bbbk^2$ 中的仿射曲线恰为 $\Bbbk^2$ 中的不可约超曲面. 故由 [定理2.16] 知不可约多项式 $f \in \Bbbk[x,y]$ 决定的仿射曲线 $X = V(f)$ 的奇异轨迹 $\mathrm{Sing}X = V(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, f)$.

事实上, 代数闭域上任何仿射簇的奇异轨迹都是真闭子集. 我们马上在 [定理2.22] 中证明, 首先需要

Lemma 2.19. 域 $\Bbbk$ 上任何仿射整区 A 都存在极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $A_{\mathfrak{m}}$ 是正则局部环.

Proof. 首先存在 A 的素理想 P 使得 A_P 是正则局部环, 例如取 $P = 0$. 依 [Mat70, p.248, Theorem 74] 知 $\mathrm{Sing}A = \{Q \in \mathrm{Spec}A | A_Q\text{不是正则局部环}\}$ 是 $\mathrm{Spec}A$ 的真闭子集. 假设不存在极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $A_{\mathfrak{m}}$ 是正则局部环, 那么若设 I 是 R 的理想使得 $\mathrm{Sing}A = V(I)$, 则 $\mathrm{maxSpec}A \cap V(I) = \mathrm{maxSpec}A$. 进而 $I \subseteq \mathrm{Jac}A$. 因为域上交换仿射代数是 Jacobson 环, 所以 $I \subseteq N(A)$. 这说明 $V(I) = \mathrm{Spec}A$, 矛盾. □

Remark 2.20. 对仿射整区 A, 若设理想 I 满足在 $\mathrm{Spec}A$ 中 $V(I) = \mathrm{Sing}A$, 那么由零理想不在 $\mathrm{Sing}A$ 中知 $I \neq 0$. 即便仅要求理想 I 满足 $V(I) \cap \mathrm{maxSpec}A = \mathrm{Sing}A \cap \mathrm{maxSpec}A$, 根据 [引理2.19], 总有 $\mathrm{Sing}A \cap \mathrm{maxSpec}A$ 是 $\mathrm{maxSpec}A$ 的真闭子集, 所以依然有 $I \neq 0$. 现在我们固定仿射整区 A 的理想 I 满足 $V(I) \cap \mathrm{maxSpec}A = \mathrm{Sing}A \cap \mathrm{maxSpec}A$, 任取 $y \neq 0 \in I$, 记 $A[y^{-1}]$ 是 A 在 y 生成的乘法幺半群 S 处的局部化, 那么由局部整体关系, 任何 $A[y^{-1}]$ 的极大理想是由与 $S = \{1, y, y^2, ...\}$ 不相交的极大理想关于 y 作局部化得到的. 因此 $A[y^{-1}]$ 的极大理想形如 $\mathfrak{m}_S$, 这里 $\mathfrak{m} \cap S = \varnothing$ 是 A 的极大理想. 那么由 $A[y^{-1}] = A_S$ 在 $\mathfrak{m}_S$ 处的局部化就是 $A_{\mathfrak{m}}$ 得到 $A[y^{-1}]$ 在所有极大理想处的局部化都是正则局部环.

Corollary 2.21. 设 X 是代数闭域 $\Bbbk$ 上不可约仿射簇, 则 X 的光滑点集是 X 的稠密开子集.

Proof. 通过 [引理2.19] 知 Sing$X$ 是真闭子集, 再结合 X 的不可约性便知. $\square$

Theorem 2.22. 设 X 是代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇, 则 X 的光滑点集是 X 的稠密开子集.

Proof. 设 X 有不可约分支分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r$, 记 X 的光滑点集为 Reg$X$. 首先对每个固定的正整数 $1 \leq i \leq r$, 有

$$W_i = X_i - \bigcup_{k \neq i} X_k$$

是 X_i 的非空开子集, 所以 [推论2.21] 说 W_i 中含 X_i 的光滑点 q, 由 [引理2.12] 知 q 也是 X 的光滑点, 因此 Reg$X \cap X_i \neq \varnothing, \forall 1 \leq i \leq r$. 现在利用 X_i 的不可约性得到 Reg$X \cap X_i$ 在 X_i 中稠密, 因此 Reg$X$ 也在 X 中稠密 (将 Reg$X \cap X_i$ 关于 i 取并再在 X 中取闭包). 故 Reg$X$ 是 X 的稠密开子集. $\square$

Remark 2.23. 该定理表明仿射簇上总存在光滑点并且几乎处处是光滑点.

3 光滑性的同调应用

现在我们可以用“可视化”的几何对象来构造一些代数例子. 回忆正则局部环的同调刻画:

Auslander-Buchsbaum-Serre Theorem. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是交换 Noether 局部环, 则以下五条等价:
(1) 环 R 是正则局部环.
(2) 整体维数 gl.dim$R < +\infty$.
(3) 投射维数 p.dim$_R k < +\infty$.
(4) 任何有限生成 R-模 M 有 p.dim$_R M < +\infty$.
(5) 投射维数 p.dim$_R \mathfrak{m} < +\infty$.
并且这时 gl.dim$R$ = k.dim$R$.

Remark 3.1. 通过该定理我们看到代数闭域上仿射簇 X 的奇异轨迹 Sing$X$ 与坐标环 $A(X)$ 的极大谱的子集

$$\{\mathfrak{m} \in \text{maxSpec}A(X) | \text{gl.dim}A(X)_\mathfrak{m} = +\infty\}$$

间有标准双射. 对任给交换 Noether 环 R, 称 Sing$R = \{\mathfrak{m} \in \text{maxSpec}R | \text{gl.dim}R_\mathfrak{m} = +\infty\}$ 为 R 的**奇异轨迹**. 之前通过 [定理2.22] 我们看到仿射簇的奇异轨迹总是真闭子集. 一般地, 交换 Noether 环的奇异轨迹可能是整个极大谱. 例如考虑域 $\Bbbk$ 上对偶数代数 $R = \Bbbk[x]/(x^2)$, 它作为一个 P.I.D. 关于非平凡理想的商环是 quasi-Frobenius 环. 因而其整体维数不是零就是无限的. 而 Jac$R = (x)/(x^2) \neq 0$, 因此 R 不是 Artin 半单环, 这意味着 gl.dim$R = +\infty$. 注意到 maxSpec$R = \{(x)/(x^2)\}$, 故由任何交换 Noether 环 S 满足 gl.dim$S = \sup\{S_\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \text{maxSpec}S\}$ 得到 R 在唯一的极大理想 $(x)/(x^2)$ 处局部化不是正则局部环. 所以对偶数代数作为交换 Noether 环的奇异轨迹就是整个极大谱. M. Nagata 在 [Nag59, Theorem 3] 中证明了域上仿射代数的奇异轨迹总是其素谱的闭子集并给出了一般交换 Noether 环的奇异轨迹可能不是闭子集的例子. 不过 [引理2.19] 表明域上的仿射整区总存在光滑点, 即奇异轨迹是真闭子集.

Proposition 3.2. 设 R 是域 $\Bbbk$ 上仿射整区, 记半素理想 I 满足 $V(I) = \text{Sing}R$, 那么对 $y \neq 0 \in I$, R 在 y 生成的乘法幺半群处的局部化 $R[y^{-1}]$ 满足 Sing$(R[y^{-1}]) = \varnothing$.

Proof. 在 [注记2.20] 中已经说明 $R[y^{-1}]$ 关于所有极大理想作局部化是正则局部环. $\square$

因此仿射簇 X 上只要存在奇异点 p, 就能够产生一个整体维数无限的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$. 例如:

Example 3.3. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 考虑仿射曲线 $C = V(x^3 - y^2) \subseteq \Bbbk^2$, 它在 $p = (0,0)$ 处的切空间 $T_pC = \Bbbk^2$. 而该曲线在 p 处局部环的 Krull 维数不可能超过 $A(C)$ 的 Krull 维数, 故 $\text{k.dim}\mathcal{O}_{C,p} \leq 1 < 2 = \dim_{\Bbbk} T_pC$(事实上 $A(C)$ 作为 1 维 Noether 整区它在极大理想处的局部化也是 1 维 Noether 整区). 故 p 是 C 的奇异点. 于是 $\text{gl.dim}\mathcal{O}_{C,p} = +\infty$. 此时 Noether 局部环 $\mathcal{O}_{C,p}$ 的 Krull 维数有限而整体维数无限.

根据光滑点的刻画, 我们很容易建立起离散赋值环与 Dedekind 整区在仿射代数几何中对应的几何特性.

Example 3.4 (曲线的光滑性)**.** 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $C \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射曲线, $p \in C$. 则 C 在 p 点光滑当且仅当 $\mathcal{O}_{C,p}$ 是离散赋值环. C 是光滑曲线的充要条件是 $A(C)$ 是 Dedekind 整区.

Example 3.5. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 我们已经看到仿射曲线 $C = V(x^3 - y^2) \subseteq \Bbbk^2$ 的奇异轨迹 $\text{Sing}C = \{(0,0)\}$. 因此对 $C \subseteq \Bbbk^2$ 有 $\text{Sing}C \nsubseteq \text{Sing}(\Bbbk^2)$. 一般地, 对仿射簇 X 的闭子簇 Y, 并没有 $\text{Sing}Y \subseteq \text{Sing}X$.

Remark 3.6. 我们可以用曲线 $C = V(x^3 - y^2) \subseteq \Bbbk^2$ 的奇异性构造非 U.F.D. 的交换局部整区: 依然设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 因为 $(0,0)$ 是 C 的奇异点, 所以坐标环 $A(C)$ 在 $(0,0)$ 所对应的极大理想 (这里记作 $\mathfrak{m}$) 处的局部化 $A(C)_{\mathfrak{m}}$ 不是正则局部环. 应用 [例3.4] 得到 $A(C)_{\mathfrak{m}}$ 不是离散赋值环, 因此不可能是 U.F.D..

在同调环论领域人们也关注自内射维数无限的环. 我们知道正则局部环是 Gorenstein 局部环 (即自内射维数有限的交换 Noether 局部环), Gorenstein 局部环是特殊的 Cohen-Macaulay 局部环. 因此任何不是 Cohen-Macaulay 的交换 Noether 局部环都有无限的自内射维数. 而 Cohen-Macaulay 条件虽然没有等价地几何特性与之对应, 但它是介于局部光滑性 (前面提到正则局部环是 Cohen-Macaulay 局部环) 与局部等维性 (指穿过给定点的不可约分支具有统一的维数) 的代数概念. 具体而言, 我们有:

Proposition 3.7. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 如果仿射簇 X 在 p 点的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 Cohen-Macaulay 局部环, 那么 X 所有含 p 的不可约分支有相同的维数, 该维数是 $\text{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}$.

Remark 3.8. 该命题说只要仿射簇在一点处的局部环是 Cohen-Macaulay 的, 则仿射簇所有穿过该点的不可约分支具有相同的维数. 因此如果仿射簇内有一点是两个不同维数的不可约分支的交点, 那么这点处的局部环不是 Cohen-Macaulay 环. 于是可以通过这种方式构造自内射维数无限的环例子. 而 Cohen-Macaulay 环的局部化总是 Cohen-Macaulay 的, 所以仿射簇 X 如果在某点 p 处满足 $\mathcal{O}_{X,p}$ 不是 Cohen-Macaulay 环, 那么坐标环 $A(X)$ 也不是 Cohen-Macaulay 环. 于是 $A(X)$ 更不可能有有限的自内射维数.

Example 3.9. 设 X 是代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇, $p \in X$ 满足 p 是 X 的两个维数不相同的不可约分支的交点, 那么自内射维数 $\text{inj.dim}A(X) = +\infty$. 故 $A(X)$ 给出自内射维数无限的仿射交换代数例子. 例如考虑 2 维仿射簇 $X = V(xy, xz) = V(x) \cup V(y,z) \subseteq \Bbbk^3$, 那么不可约分支 $V(x)$ 和 $V(y,z)$ 的交点 $p = (0,0,0)$ 作为两个维数不同的不可约分支的交点满足 $\mathcal{O}_{X,p}$ 不是 Cohen-Macaulay 局部环 (在 [推论2.10] 中我们也看到代数闭域上仿射簇的任何两个不同的不可约分支的交点总是奇异点). 因此 X 满足条件.

4 切映射

如果 $F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ 是光滑流形间的光滑映射, $\dim\mathcal{M}=n,\dim\mathcal{N}=m$. 那么对固定的 $p\in\mathcal{M}$, F 可诱导切映射 $dF_p:T_p\mathcal{M}\to T_{F(p)}\mathcal{N}$, 并且若取定 p 所在的光滑坐标卡 (U,φ) 以及 $F(q)$ 所在的光滑坐标卡 (V,ψ), 设 $\varphi(q)=(x_1(q),...,x_n(q)),\forall q\in U$ 以及 $\psi(t)=(y_1(q),...,y_m(q))$ 是两个坐标卡的坐标表示. 则有自然的交换图:

$$\begin{tikzcd}
T_p\mathcal{M} \arrow[r, "dF_p"] \arrow[d, "\cong"'] & T_{F(p)}\mathcal{N} \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "J\hat{F}(\hat{p})"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

其中 $\hat{F}=\psi F\varphi^{-1},\hat{p}=\varphi(p)$ 分别是 F,p 的坐标表示, $J\hat{F}(\hat{p})$ 表示 $\hat{F}$ 在 $\hat{p}$ 处的 Jacobi 矩阵

$$J\hat{f}(\hat{p})=\begin{pmatrix}\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial x_1}(\hat{p}) & \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial x_2}(\hat{p}) & \cdots & \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial x_n}(\hat{p})\\ \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial x_1}(\hat{p}) & \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial x_2}(\hat{p}) & \cdots & \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial x_n}(\hat{p})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\hat{F}_m}{\partial x_1}(\hat{p}) & \frac{\partial\hat{F}_m}{\partial x_2}(\hat{p}) & \cdots & \frac{\partial\hat{F}_m}{\partial x_n}(\hat{p})\end{pmatrix}.$$

本节我们介绍仿射簇场景下, 仿射簇之间正则映射诱导的切映射以及相关基本性质.

设 $X\subseteq\Bbbk^n$ 与 $Y\subseteq\Bbbk^m$ 均为域 $\Bbbk$ 上仿射簇, $\varphi:X\to Y$ 是正则映射, 有坐标表示 $\varphi(p)=(F_1(p),...,F_m(p))$. 考虑 φ 的 Jacobi 矩阵

$$J\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix},$$

它是系数来自 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 的 $m\times n$ 阶矩阵. 固定 $p\in X$, 命 $d\varphi_p:T_pX\to T_{\varphi(p)}Y$ 是上述 Jacobi 矩阵在 p 点取值诱导的左乘变换, 我们来说明 $d\varphi_p$ 是定义合理的映射: 即需验证如果 $(a_1,...,a_n)\in\Bbbk^n$ 满足

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)a_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(p)a_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)a_n=0,\forall f\in I(X),$$

则 $(a_1,...,a_n)$ 对应的列向量经 $J\varphi(p)$ 左乘后得到的向量

$$(b_1,...,b_m)=\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_1}{\partial x_j}(p)a_j,\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_2}{\partial x_j}(p)a_j,...,\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_m}{\partial x_j}(p)a_j\right)\in\Bbbk^m$$

满足

$$\frac{\partial h}{\partial y_1}(\varphi(p))b_1+\frac{\partial h}{\partial y_2}(\varphi(p))b_2+\cdots+\frac{\partial h}{\partial y_m}(\varphi(p))b_m=0,\forall h\in I(Y).$$

注意到对任何 $h\in I(Y)$ 有 $h(F_1,...,F_m)\in I(X)$, 因此由多项式映射复合求导公式便知 $d\varphi_p$ 定义合理.

上面的讨论表明给定正则映射 $\varphi:X\to Y$ 并固定 $p\in X$. φ 可诱导切空间之间的线性映射 $d\varphi_p:T_pX\to T_{\varphi(p)}Y$, 称为正则映射 φ 在 p 处的**切映射**或**微分**. 类似于光滑流形间光滑映射在给定点处的切映射, 我们有

Proposition 4.1. 设 $X\subseteq\Bbbk^n,Y\subseteq\Bbbk^m,Z\subseteq\Bbbk^l$ 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇. $\varphi:X\to Y,\psi:Y\to Z$ 是正则映射, $p\in X$. 那么 $d(\mathrm{id})_p:T_pX\to T_pX$ 是恒等映射且 $d(\psi\varphi)_p=d(\psi)_{\varphi(p)}d\varphi_p$.

Proof. 对恒等映射 $\mathrm{id}: X \to X$, 明显 $J(\mathrm{id})$ 是 $\Bbbk$ 上 n 阶单位阵, 所以 $d(\mathrm{id})_p: T_pX \to T_pX$ 是恒等映射. 如果设 φ 有坐标表示 $\varphi(p) = (F_1(q), ..., F_m(q))$, ψ 有坐标表示 $\psi(s) = (G_1(s), ..., G_l(s))$, 其中 $F_i \in \Bbbk[x_1, ..., x_n], G_j \in \Bbbk[x_1, ..., x_l]$. 那么 $\psi\varphi(q) = (G_1(F_1(q), ..., F_m(q)), ..., G_l(F_1(q), ..., F_m(q)))$. 于是由复合求导公式便得结论. □

Remark 4.2. 利用 [引理1.11], 可以采用正则函数环在给定点处导子模来定义 Zariski 切空间, 这时前面定义的 $\varphi: X \to Y$ 在 p 处的微分就是映射 $(d\varphi)_p: T_pX \to T_{\varphi(p)}Y, \delta \mapsto (g \mapsto \delta(g\varphi))$. 例如, 考虑仿射簇 X 到乘积簇 $X \times X$ 的对角嵌入 $\Delta: x \mapsto x \otimes x$, 可直接计算验证微分 $(d\Delta)_x: T_xX \to T_{(x,x)}(X \times X)$ 满足将每个 $\delta \in T_xX$ 映至 $\sum_k f_k \otimes g_k \mapsto \delta(\sum_k f_kg_k)$. 这说明, 由 [注记1.13], $(d\Delta)_x(\delta) = (\delta, \delta)$.

如果 $\varphi: X \to Y$ 是仿射簇之间的正则映射且 $\varphi(X) = y_0$, 即 φ 是常值函数, 那么易验证 $(d\varphi)_x = 0, \forall x \in X$. 此外, 利用 [注记1.13] 可验证对任何仿射簇之间的正则映射 $\varphi: X \to X'$ 和 $\psi: Y \to Y'$, 正则映射 $(\varphi, \psi): X \times Y \to X' \times Y'$ 在 $(x, y) \in X \times Y$ 的微分是 $((d\varphi)_x, (d\psi)_y)$.

对域 $\Bbbk$ 上仿射簇 X 以及 $p \in X$, 称 (X, p) 为**带基点仿射簇**. 如果带基点仿射簇 $(X, p), (Y, q)$ 之间的正则映射 $\varphi: X \to Y$ 满足 $\varphi(p) = q$, 则称 f 是**保持基点的**. 易见带基点仿射簇之间的保持基点的正则映射总存在, 例如考虑常值映射. 于是域 $\Bbbk$ 上所有带基点仿射簇与保基点的正则映射可构成一范畴, 称为域 $\Bbbk$ 上**带基点仿射簇范畴**. [命题4.1] 表明通过把带基点仿射簇 (X, p) 对应到切空间 T_pX, 把保基点正则映射 $\varphi: (X, p) \to (Y, q)$ 对应到线性映射 $d\varphi_p: T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ 可定义出 $\Bbbk$ 上带基点仿射簇范畴到 $\Bbbk$-线性空间范畴的函子.

Example 4.3 (仿射代数群的切空间)**.** 设 G 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射代数群, 即乘法映射 $\mu: G \times G \to G, (x, y) \mapsto xy$ 和求逆映射 $\iota G \to G, x \mapsto x^{-1}$ 是正则映射的带有群结构的仿射簇. 记 G 的幺元是 e. 这时乘法映射和求逆映射给出坐标环 $A(G)$ 上的 Hopf 代数结构, 余乘法 $\Delta: A(G) \to A(G) \otimes A(G), f \mapsto \sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)}$ 满足 $f(xy) = \sum_{(f)} f_{(1)}(x)f_{(2)}(y), \forall x, y \in G$; 余单位满足 $\varepsilon: A(G) \to \Bbbk, f \mapsto f(e)$. 群 G 的求逆映射提供对极 $S: A(G) \to A(G), f \mapsto (x \mapsto f(x^{-1}))$. 如果 G 是交换代数群, 那么 $A(G)$ 是余交换 Hopf 代数. 仿射代数群 G 在 e 处的切空间有自然的 Lie 代数结构, 如果 $v, w \in T_eG$, 视作 $A(G)$ 到 $\Bbbk$ 在 e 处的导子, Lie 括号定义为

$$[v, w](f) \coloneqq \sum_{(f)} (v(f_{(1)})w(f_{(2)}) - w(f_{(1)})v(f_{(2)})).$$

于是 $\mathrm{Lie}(G) \coloneqq (T_eG, [-, -])$ 是有限维 Lie 代数. 因为 G 总是有光滑点, [定理2.22], 所以 G 上元素的左乘变换蕴含 G 是光滑簇. 因此 $\mathrm{Lie}(G)$ 的 $\Bbbk$-维数是 $\dim G$. 应用 [注记1.13] 可直接验证 G 的乘法映射 $\mu: G \times G \to G$ 诱导的切映射 $(d\mu)_{(e,e)}: T_eG \oplus T_eG \to T_eG, (\delta, \partial) \mapsto \delta + \partial$ 就是切空间上加法运算. 更一般地, 对任何 $x, y \in G$, $(d\mu)_{(x,y)}: T_xG \oplus T_yG \to T_{xy}G$ 将每个 $(\delta, \partial) \in: T_xG \oplus T_yG$ 映至导子

$$A(G) \to \Bbbk, f \mapsto \sum_{(f)} (\delta(f_{(1)})f_{(2)}(y) + f_{(1)}(x)\partial(f_{(2)})). \tag{4.1}$$

如果记 $L_x: G \to G, R_y: G \to G$ 分别是元素 x, y 的左乘/右乘变换诱导的正则映射, 那么(4.1)可被改写为

$$(d\mu)_{(x,y)} = (dR_y)_x + (dL_x)_y. \tag{4.2}$$

记 $\delta: G \to G \times G$ 是对角映射, 现在考虑下面的正则序列的合成定义的映射 $\tau: G \to G \times G$:

$$G \xrightarrow{\Delta} G \times G \xrightarrow{(\mathrm{id}, \iota)} G \times G \xrightarrow{\mu} G.$$

对每个 $x \in G$, 考察 $(d\tau)_x = 0$, 利用(4.1)和 [注记4.2] 得到

$$(d\iota)_x = -(dL_{x^{-1}})_e (dR_{x^{-1}})_x. \tag{4.3}$$

特别地, 对式(4.3)命 $x = e$ 得到 $(d\iota)_e = -\mathrm{id} : T_eG \to T_eG$.

参考文献

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 1977.

[Lam99] T.-Y. Lam. *Lectures on modules and rings*, volume 189. Springer Science & Business Media, 1999.

[Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[Mat70] H. Matsumura. *Commutative algebra*, volume 120. WA Benjamin New York, 1970.

[Mum81] David Mumford. *Algebraic geometry. I*, volume 221 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981. Complex projective varieties, Corrected reprint.

[Nag59] M. Nagata. On the closedness of singular loci. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 2:5–12, 1959.

[Sha94] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry 1*, volume 2. Springer, 1994.

[SP94] I. R. Shafarevich and A.N. Parshin. *Algebraic geometry I: Algebraic curves, algebraic manifolds and schemes*. Springer, 1994.