量子仿射空间

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 5 月 22 日

这份笔记主要记录量子仿射空间的基本性质与相关概念, 主要参考文献是 [BG12], [GL09] 和 [CPWZ16].

目录

1 量子仿射空间

在古典代数几何中我们知道代数闭域上的仿射簇与交换仿射可约代数范畴间有标准的范畴对偶——仿射簇与坐标环之间的对应. 量子仿射空间可以理解为仿射空间的“量子坐标环”. 原因是多项式代数 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ (这里假设 $\Bbbk$ 是无限域) 是 $\Bbbk^n$ 的坐标环, 它可以视作单参数 (设参数为 q) 的量子仿射空间 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 中令参数 $q \to 1$ 的某种“极限”. 本章我们首先给出多参数量子仿射空间的定义 (见 [定义1.3]), 这是最简单的一类量子坐标环. 随后利用 Ore 扩张的基本性质说明量子仿射空间总是双边 Noether 的仿射整环 ([命题1.7]). 对单参数的量子仿射空间, 我们介绍单位根处量子仿射空间中心的基本性质以及量子仿射空间作为中心上模有限代数的基本表现. 我们也介绍量子环面 (见 [定义1.15]) 和泛参数的量子仿射空间, 并说明具体参数的量子仿射空间可以视作泛参数量子仿射空间的“特殊化”(见 [命题1.20]). 这一构造源于单位根处量子代数的研究 (见 [DCL94], [DCKP93], [DCKP93], [DCKP92], [DCKP92] 和 [DCKP91]), 在 [BG03] 中被公理化. 由此可知量子仿射空间在其中心上有标准的 Poisson order 结构 (见 [命题1.21]). 最后在基域特征零且参数是单位根的场景, 我们指出量子仿射空间的中心上的 Poisson 结构总是非平凡的. 因此人们能够从量子仿射空间的中心决定的 Poisson 簇的几何信息读出其不可约表示的信息 (例如见 [BG03] 和 [BY18]).

1.1 基本概念

本节固定域 $\Bbbk$, 将 $\Bbbk$ 所有非零元构成的乘法群记作 $\Bbbk^\times$. 在给出量子仿射空间定义 ([定义1.3]) 前我们需要

Definition 1.1. 设 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, 如果 A 满足

$$q_{ii} = 1, \forall 1 \le i \le n \text{ 且} q_{ij}q_{ji} = 1, \forall 1 \le i \ne j \le n,$$

则称 $\boldsymbol{q}$ 是**乘性反对称阵**.

Example 1.2. 对 $q \in \Bbbk^\times$, 之后定义的单参数量子仿射空间需要下述标准的乘性反对称阵

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 & q & \cdots & q \\ q^{-1} & 1 & \cdots & q \\ \vdots & \vdots & & q \\ q^{-1} & q^{-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 1.3. 设 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n}$ 是 $\Bbbk$ 上乘性反对称阵, 称由生成元 $x_1, x_2, ..., x_n$ 以及生成关系

$$x_i x_j = q_{ij} x_j x_i, \forall 1 \le i, j \le n,$$

得到的 $\Bbbk$-代数称为 $\boldsymbol{q}$ 处的**多参数量子仿射 n-空间**, 记作 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$. 如果 $\boldsymbol{q}$ 取为 [例1.2] 中矩阵, 即这时

$$x_i x_j = q x_j x_i, \forall 1 \le i < j \le n,$$

那么把得到的量子仿射空间记作 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$, 称为 q 处的**单参数量子仿射 n-空间**.

Remark 1.4. 乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}$ 处的多参数量子仿射空间可表示为 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) = \Bbbk\langle x_1, ..., x_n\rangle/(x_i x_j - q_{ij} x_j x_i)$. 如果 $\boldsymbol{q}$ 的每个分量都是 1, 那么 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) = \Bbbk[x_1, ..., x_n] = \mathcal{O}(\Bbbk^n)$. 如果把 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 中所有分量为 1 的矩阵记 $\mathbf{1}$, 那么上述讨论表明当乘性反对称阵 $\boldsymbol{q} \to \mathbf{1}$ 时, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \to \mathcal{O}(\Bbbk^n)$, 这时也称 $\mathcal{O}(\Bbbk^n)$ 是 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 的**半经典极限**. 从量子仿射 n-空间的定义中我们也可以看出要求 $\boldsymbol{q}$ 是乘性反对称是自然的: 一方面, 我们自然有 x_i 与自身可交换; 另一方面, 在 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 中对 $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$ 两边同时左乘上 q_{ij}^{-1} 得到 $q_{ij}^{-1} x_i x_j = x_j x_i = q_{ji} x_i x_j$.

Example 1.5. 设 $q \in \Bbbk^\times$, 将 q 处的量子仿射 2-空间 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 称为 q 处的**量子平面**.

1.2 基本结构

本节固定域 $\Bbbk$ 上乘性反对称阵 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n}$. 根据量子仿射空间的定义, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是仿射 $\Bbbk$-代数. 下面我们通过说明 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是多项式代数作有限次 Ore 扩张得到的代数来得到 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 的基本环论性质.

命 $\tau_1 : \Bbbk[x_1] \to \Bbbk[x_1], f(x_1) \mapsto f(q_{21}x_1)$, 易见 τ_1 是代数自同构, 并记 $R_1 = \Bbbk[x_1][x_2; \tau_1]$. 递归地, 如果已经对每个正整数 $1 \le i \le n-1$ 定义了 $R_i = \Bbbk[x_1][x_2; \tau_1] \cdots [x_i; \tau_{i-1}]$, 其中 $\tau_{k-1} : R_{k-1} \to R_{k-1}$ 是由

$$\tau_{k-1}(f(x_1, ..., x_{k-1})) = f(q_{k1}x_1, ..., q_{k,k-1}x_{k-1}), \forall f(x_1, ..., x_{k-1}) \in R_{k-1}$$

确定的代数自同构 (可直接验证). 再考虑代数自同构 $\tau_i : R_i \to R_i, f(x_1, ..., x_i) \mapsto f(q_{i+1,1}x_1, ..., q_{i+1,i}x_i)$ 定义出的 Ore 扩张 R_{i+1}, 进而得到 $R_n = \Bbbk[x_1][x_2; \tau_1] \cdots [x_{n-1}; \tau_{n-2}][x_n; \tau_{n-1}]$. 我们有

Lemma 1.6. 上述构造的 (递归)Ore 扩张代数 $R_n = \Bbbk[x_1][x_2;\tau_1]\cdots[x_{n-1};\tau_{n-2}][x_n;\tau_{n-1}]$ 同构于 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$.

Proof. 考虑自由代数到 R_n 的标准代数同态 $\theta : \Bbbk\langle x_1, ..., x_n\rangle \to R_n, f(x_1, ..., x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_n)$. 对每个正整数对 $1 \le i < j \le n$, $\theta(x_ix_j - q_{ij}x_jx_i) = x_ix_j - q_{ij}\tau_{j-1}(x_i)x_j = x_ix_j - x_ix_j = 0$. 因此 θ 诱导代数同态 $\tilde{\theta} : \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \to R_n$ 满足 $\tilde{\theta}(x_k) = x_k, \forall 1 \le k \le n$. 于是知 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 作为 $\Bbbk$-线性空间有基

$$\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} | i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}\}.$$

这一观察表明 $\tilde{\theta}$ 是单射. 而 $\tilde{\theta}$ 明显是满射, 因此 $\tilde{\theta}$ 是代数同构. □

通过 [引理1.6], 以及 Ore 扩张代数的基本性质, 我们立即看到

Proposition 1.7. 量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是双边 Noether 仿射 $\Bbbk$-整环且有 $\Bbbk$-基 $\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} | i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}\}$.

Corollary 1.8. 量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 既不是左 Artin 环也不是右 Artin 环.

Proof. 有左理想严格降链 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)x_n \supsetneq \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)x_n^2 \supsetneq \cdots$ 和右理想严格降链 $x_1\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \supsetneq x_1^2\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \supsetneq \cdots$. □

下面我们着眼于参数 q 是单位根时, $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 中心的基本性质, 更一般的讨论见 [CPWZ16]. 设 q 是 ℓ 次本原单位根, 那么明显有 $\hat{\mathcal{Z}} = \Bbbk[x_1^\ell, ..., x_n^\ell] \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{O}_q(\Bbbk^n))$. 于是知 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 是有限生成 $\hat{\mathcal{Z}}$-模, 可由

$$\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} | 0 \le i_1, ..., i_n \le \ell - 1\}$$

生成. 通过对上述生成元集中每个单项式的幂指数组模 ℓ 可知 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 是秩为 ℓ^n 的自由 $\hat{\mathcal{Z}}$-模.

以下设 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n}$ 是 [例1.2] 中定义的矩阵. 对每个正整数 $1 \le i \le n$, 定义 $\tau_i : \mathcal{O}_q(\Bbbk^n) \to \mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 是由 $\tau_i(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}) = q_{i1}^{k_1}\cdots q_{in}^{k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 确定的线性同构, 不难看出 τ_i 还是 $\Bbbk$-代数同构. 对任何 $f \in \mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$, 易知 $x_if = \tau_i(f)x_i$, 所以 τ_i 可以理解为 x_i 决定的“共轭变换”. 一个基本的观察是

Lemma 1.9. 设 $f \in \mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$, 那么 $fx_i = x_if$ 当且仅当 $\tau_i(f) = f$.

Proposition 1.10. 设 n 是偶数, 那么 $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)) = \Bbbk[x_1^\ell, ..., x_n^\ell]$.

Proof. 不妨设 $\ell \ge 2$. 之前已经指出 $\Bbbk[x_1^\ell, ..., x_n^\ell] \subseteq Z(\mathcal{O}_q(\Bbbk^n))$. 任取 $Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n))$ 中的元素 f, 对 f 的每个单项式 $x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}$, 由 $\tau_i(f) = f, \forall 1 \le i \le n$ 可知 τ_i 作用 $x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}$ 不动. 记 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 中主对角线全为零, 严格上三角部分全为 1, 严格下三角部分全为 -1 的矩阵 (即 $\boldsymbol{q}$ 每个分量关于 q 的幂指数按照原有次序排成的矩阵), 可直接计算 $\det(a_{ij})_{n\times n} = 1$. 因为 $\tau_i(x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}) = x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}$, 所以对每个正整数 $1 \le i \le n$, 有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}d_j = 0, \pmod{\ell}.$$

于是由 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 上可逆 n 阶阵得到每个 $d_j = 0, \pmod{\ell}$. 这与 $x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}$ 的选取矛盾. □

Remark 1.11. 特别地, n 是偶数时, $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_q(\Bbbk^n))$ 的中心同构于 n 元多项式代数.

Example 1.12. 量子平面 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2) = \Bbbk\langle x, y\rangle/(xy - qyx)$ 的中心是 $\Bbbk[x^\ell, y^\ell]$.

如果 n 是奇数, 那么 [命题1.10] 一般不成立. 例如

Example 1.13. 设 $n=\ell=3$, 那么 $x_1^2x_2x_3^2\in\mathcal{Z}(\mathcal{O}_q(\Bbbk^3))$ 但 $x_1^2x_2x_3^2\notin\Bbbk[x_1^3,x_2^3,x_3^3]$.

Remark 1.14. 记 $\hat{\mathcal{Z}}=\Bbbk[x_1^3,x_2^3,x_3^3]\subsetneq\mathcal{Z}(\mathcal{O}_q(\Bbbk^3))$, 之前指出 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^3)$ 是秩为 $\ell^n=27$ 的自由 $\hat{\mathcal{Z}}$-模. 但此时 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^3)$ 作为中心上的模不再是自由的. 注意到 $x_1^2x_2x_3^2$ 数乘 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^3)$ 中的非零元 $x_1x_2-x_2x_1$ 是零, 所以 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^3)$ 作为中心上的模有 (非零) 挠元, 结合中心是整区便知 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^3)$ 不是自由 $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_q(\Bbbk^3))$-模. 一般地, 整区上的平坦模都是无挠的, 所以 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^3)$ 在中心上不是平坦的.

上述例子表明单位根处的量子仿射 n-空间作为中心上的有限生成模通常不是平坦的. 当 n 是偶数时, 单位根处的量子仿射 n-空间总是中心上的有限生成自由模.

1.3 量子环面

本节固定域 $\Bbbk$ 以及乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}$. 记 S 是量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 中 $\{x_1,...,x_n\}$ 生成的乘法幺半群. 易见乘闭子集 S 满足左 Ore 条件与右 Ore 条件, 于是由 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是整环可知 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 关于 S 的局部化存在. 下面我们介绍量子环面的概念, 它由 Y. Manin(俄罗斯, 1937-2023) 在 [Man91] 中引入. 我们将看到量子环面就是 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 关于 S 的局部化. 这也解释了量子环面命名之由: (暂时) 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 那么有拟仿射簇间的正则同构 $\varphi:(\Bbbk^\times)^n\to\mathcal{V}(x_1x_2\cdots x_{n+1}-1)\subseteq\Bbbk^{n+1},(x_1,...,x_n)\mapsto(x_1,...,x_n,(x_1\cdots x_n)^{-1})$, 这说明有拟仿射簇同构 $(\Bbbk^\times)^n\cong\mathcal{V}(x_1x_2\cdots x_{n+1}-1)$. 特别地, $(\Bbbk^\times)^n$ 是仿射簇. 在代数群理论中通常 $(\Bbbk^\times)^n$ 称为秩为 n 的**代数环面**. 代数环面 $(\Bbbk^\times)^n$ 的坐标环 $\mathcal{O}((\Bbbk^\times)^n)=\Bbbk[x_1,...,x_{n+1}]/(x_1x_2\cdots x_{n+1}-1)$(可用反证法比较多项式分解式中低次项来得到 $x_1x_2\cdots x_{n+1}-1$ 的不可约性) 同构于 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 在 $\{x_1,...,x_n\}$ 生成的乘法幺半群处作局部化. 当我们把非交换代数等同于“非交换空间”时, 量子环面可视作代数环面的“非交换类似物”.

Definition 1.15. 考虑由生成元 $x_1,...,x_n,x_1^{-1},...,x_n^{-1}$ 与关系 $x_ix_j=q_{ij}x_jx_i,x_ix_i^{-1}=x_i^{-1}x_i=1,\forall 1\le i,j\le n$ 定义出的 $\Bbbk$-代数, 记作 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$, 称为 $\boldsymbol{q}$ 处的**多参数量子环面**. 如果 $\boldsymbol{q}$ 取为 [例1.2] 中矩阵, 这时得到的量子环面称为**单参数的**, 并记作 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^n)$.

任给保幺环同态 $\varphi:\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)\to R$, 并设 $\varphi(S)$ 中元素均在 R 中可逆. 通过 $\alpha\cdot a=\varphi(\alpha)a,\forall\alpha\in\Bbbk,a\in R$ 可赋予 R 上 $\Bbbk$-代数结构使 φ 成为 $\Bbbk$-代数同态. 于是存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\eta:\Bbbk\langle x_1,...,x_n,x_1^{-1},...,x_n^{-1}\rangle\to R$ 使得 $\eta(x_i)=\varphi(x_i),\eta(x_i^{-1})=\varphi(x_i)^{-1},\forall 1\le i\le n$. 易见 $\eta(x_ix_j-q_{ij}x_jx_i)=\eta(x_ix_i^{-1}-1)=\eta(x_i^{-1}x_i-1)=0$, 所以 η 诱导唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\tilde{\eta}:\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)\to R$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk\langle x_1,...,x_n,x_1^{-1},...,x_n^{-1}\rangle \arrow[r] \arrow[dr, "\eta"'] & \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n) \arrow[d, dashed, "\tilde{\eta}"] \\
 & R
\end{tikzcd}$$

由 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 作为 $\Bbbk$-代数可由 $\{x_1,...,x_n,x_1^{-1},...,x_n^{-1}\}$ 生成可知 $\tilde{\eta}$ 是使下图交换唯一的代数同态:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \arrow[r, "\lambda_S"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n) \arrow[d, dashed, "\tilde{\eta}"] \\
 & R
\end{tikzcd}$$

这里 $\lambda_S:\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)\to\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 是标准映射. 于是知 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)\cong\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)_S$. 上述讨论证明了

Proposition 1.16. 量子环面 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 是 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 关于 S 的局部化.

现在由量子环面的定义, 量子仿射空间是双边 Noether 整环以及局部化的性质立即得到

Corollary 1.17. 量子环面 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 是双边 Noether 仿射 $\Bbbk$-整环.

Remark 1.18. 量子环面不是除环, 例如 $1+x_1$ 就不是可逆元: 若不然, 存在 $f(x_1,...,x_n), cx_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}(c\in\Bbbk^\times)$ 使得在 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 中有 $(1+x_1)f(x_1,...,x_n)=cx_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$, 等号左边表示为标准基 ([命题1.7] 意义下) 线性组合后至少有两个非零单项式, 矛盾. 特别地, 量子环面存在不可逆的正则元, 所以量子环面不是左、右 Artin 的.

下面设 $q\in\Bbbk^\times$ 是 ℓ 次本原单位根, 类似于量子仿射空间, 这时量子环面也在某个中心子代数上模有限. 考虑 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 的中心子代数 $\hat{\mathcal{Z}}=\Bbbk[x_1^\ell,...,x_n^\ell]$, 注意 $x_1^\ell,...,x_n^\ell\in S$, 这时 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 有中心子代数 $\hat{\mathcal{Z}}(\hat{\mathcal{Z}}\cap S)^{-1}$. 容易验证 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 作为 $\hat{\mathcal{Z}}(\hat{\mathcal{Z}}\cap S)^{-1}$ 上的模可由 $\{(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n})(x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n})^{-1}|0\le i_1,...,i_n,j_1,...,j_n\le\ell-1\}$ 生成. 即

Proposition 1.19. 单位根处的量子环面在某个中心子代数上模有限.

1.4 泛参数量子仿射空间

之前我们讨论的量子仿射空间的参数是取定的域中非零元, 下面我们考虑参数是未定元的量子仿射空间. 本节仍固定域 $\Bbbk$, 并设 $\hbar$ 是 $\Bbbk$ 上未定元. 定义 $\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)$ 是由生成元 $x_1,...,x_n$ 与关系

$$x_ix_j=\hbar x_jx_i,\forall 1\le i<j\le n$$

确定的 $\Bbbk[\hbar]$-代数. 称 $\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)$ 是 $\hbar$ 处的**量子仿射 n-空间**. 任给 $q\in\Bbbk^\times$, 那么 $\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)$ 到 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 有标准 $\Bbbk$-代数同态 $\Phi:\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)\to\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 将形如 $f(\hbar)x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}(f(\hbar)\in\Bbbk[\hbar])$ 的元素映至 $f(q)x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$, 即 Φ 是赋值 $\hbar=q$ 诱导的代数同态. 下面说明 $\mathrm{Ker}\Phi=(\hbar-q)$. 首先 $(\hbar-q)\subseteq\mathrm{Ker}\Phi$ 是明显的, 现设

$$\sum_{k_1,...,k_n}f_{k_1\cdots k_n}(\hbar)x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\in\mathrm{Ker}\Phi,$$

注意到任何 $g(\hbar)\in\Bbbk[\hbar]$ 满足 $g(\hbar)-g(q)\in(\hbar-q)$, 所以这时 $\sum\limits_{k_1,...,k_n}f_{k_1\cdots k_n}(q)x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\in\mathrm{Ker}\Phi$. 于是

$$f_{k_1\cdots k_n}(q)=0,\forall k_1,...,k_n\in\mathbb{N}.$$

因此 $\mathrm{Ker}\Phi\subseteq(\hbar-q)$, 进而 $\mathrm{Ker}\Phi=(\hbar-q)$. 上述讨论表明

Proposition 1.20. 设 $q\in\Bbbk^\times$, 则 $\hbar-q$ 是 $\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)$ 的中心正则元且有 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)/(\hbar-q)\cong\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$.

这一观察表明量子仿射空间的中心上有自然的 Poisson 结构. 首先让我们回忆“特殊化”的代数构造.

设 A,R 是域 $\Bbbk$ 上代数, $\hbar$ 是 R 的中心正则元, 满足有 $\Bbbk$-代数同构 $A\cong R/\hbar R$(这里设 $\theta:A\to R/\hbar R$ 是 $\Bbbk$-代数同构), $\pi:R\to R/\hbar R$ 是标准投射, 那么有满同态 $\theta^{-1}\pi:R\to A$, 设该满同态有 $\Bbbk$-线性截面 $\iota:A\to R$(该满同态总存在, 只需取定 A 的一个基并考虑该基中元素关于 $\theta^{-1}\pi$ 的原像). 我们把满足上述条件的代数 A(即有 $A\cong R/\hbar R$, 这里 $\hbar$ 是 R 的中心正则元) 称为由**特殊化**得到的. 根据 ι 的定义我们知道 $\pi\iota=\theta$. 下面将在 A 的中心上赋予 Poisson 结构. 对 $z_1,z_2\in\mathcal{Z}=\mathcal{Z}(A)$, 命

$$\{z_1,z_2\}=\theta^{-1}\pi\left(\frac{[\iota(z_1),\iota(z_2)]}{\hbar}\right).$$

即将 $\mathcal{Z}$ 中元素先通过线性截面 ι 映至 R 中, 在 R 中作换位子除以中心正则元 $\hbar$ 后再拉回 A 中.

下面我们将说明 $\{z_1, z_2\}$ 的定义不依赖于线性截面的选取并且 $\{z_1, z_2\} \in \mathcal{Z}$.

我们先说明对任何 $s \in R$ 有 $\iota(z)s - s\iota(z)$ 在 π 作用下为零, 这里 $z \in \mathcal{Z}$. 在首先存在 $\hat{s} \in A$ 使得 $\theta(\hat{s}) = \pi(s)$, 所以 $\pi(\iota(z)s - s\iota(z)) = \theta(z\hat{s} - \hat{s}z) = 0$. 下面我们说明 $\{z_1, z_2\}$ 的定义不依赖于线性截面 ι 的选取. 如果还有 $\Bbbk$-线性截面 $\tilde{\iota} : A \to R$, 即满足 $\pi\tilde{\iota} = \theta$, 那么存在 $s, t \in R$ 使得 $\tilde{\iota}(z_1) - \iota(z_1) = s\hbar, \tilde{\iota}(z_2) - \iota(z_2) = t\hbar$. 只需验证

$$\frac{[\iota(z_1), \iota(z_2)] - [\tilde{\iota}(z_1), \tilde{\iota}(z_2)]}{\hbar}$$

在 π 的作用下为零即可, 我们计算 $[\iota(z_1), \iota(z_2)] - [\tilde{\iota}(z_1), \tilde{\iota}(z_2)]$. 代入上面对 s, t 的假设整理可得

$$\iota(z_1)(\iota(z_2) - \tilde{\iota}(z_2)) + (\iota(z_1) - \tilde{\iota}(z_1))\tilde{\iota}(z_2) + (\tilde{\iota}(z_2) - \iota(z_2))\iota(z_1) = \hbar(x - \tilde{x}),$$

其中 $[\iota(z_1), \iota(z_2)] = \hbar x, [\tilde{\iota}(z_1), \tilde{\iota}(z_2)] = \hbar\tilde{x}$. 上式左边为 $(\tilde{\iota}(z_2)s - s\tilde{\iota}(z_2))\hbar + (t\iota(z_1) - \iota(z_1)t)\hbar$, 因此

$$(\tilde{\iota}(z_2)s - s\tilde{\iota}(z_2)) + (t\iota(z_1) - \iota(z_1)t) = x - \tilde{x}.$$

由此便知 $\pi(x - \tilde{x}) = 0$, 所以 $\{z_1, z_2\}$ 的定义不依赖于线性截面 ι 的选取.

现在说明 $\{z_1, z_2\} \in \mathcal{Z}$. 事实上, 任给 $a \in A$, $\theta(a\{z_1, z_2\}) = \pi(\iota(a)[\iota(z_1), \iota(z_2)]/\hbar)$, $\theta(\{z_1, z_2\}a) = \pi([\iota(z_1), \iota(z_2)]\iota(a)/\hbar)$. 所以要看到 $\{z_1, z_2\} \in \mathcal{Z}$ 只需验证 $\iota(a)[\iota(z_1), \iota(z_2)] = [\iota(z_1), \iota(z_2)]\iota(a)$. 用 π 作用等号左边与等号右边便可看到两式相等, 因此 $\{-, -\} : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ 是定义合理的交错 $\Bbbk$-双线性映射, 且该定义不依赖于 ι 的选取. 下面我们验证 $(\mathcal{Z}, \{-, -\})$ 是 $\Bbbk$-Poisson 代数. 任取 $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{Z}$, 有

$$\theta(\{z_1z_2, z_3\}) = \pi\left(\frac{[\iota(z_1z_2), \iota(z_3)]}{\hbar}\right), \theta(z_1\{z_2, z_3\} + \{z_1, z_3\}z_2) = \pi\left(\frac{\iota(z_1)[\iota(z_2), \iota(z_3)] + [\iota(z_1), \iota(z_3)]\iota(z_2)}{\hbar}\right),$$

易见 $\theta(z_1\{z_2, z_3\} + \{z_1, z_3\}z_2) = \pi([\iota(z_1)\iota(z_2), \iota(z_3)]/\hbar)$, 所以只需验证

$$\pi\left(\frac{[\iota(z_1z_2) - \iota(z_1)\iota(z_2), \iota(z_3)]}{\hbar}\right) = 0$$

便可得 $\{-, -\}$ 在每个分量上具有导子性质. 用 π 作用 $\iota(z_1z_2) - \iota(z_1)\iota(z_2)$ 可得零, 所以存在 $w \in R$ 使得 $\iota(z_1z_2) - \iota(z_1)\iota(z_2) = \hbar w$, 于是由 π 作用 $w\iota(z_3) - \iota(z_3)w$ 为零便知 π 作用 $[\iota(z_1z_2) - \iota(z_1)\iota(z_2), \iota(z_3)]/\hbar$ 为零. 最后只要再验证 $(\mathcal{Z}, \{-, -\})$ 是 $\Bbbk$-Lie 代数便知 $(\mathcal{Z}, \{-, -\})$ 是 Poisson 代数, 因为换位子本身满足 Jacobi 恒等式, 所以只需验证 $\theta(\{\{z_1, z_2\}, z_3\}) = \pi([[\iota(z_1), \iota(z_2)], \iota(z_3)]/\hbar^2)$ 即可. 直接计算可知

$$\theta(\{\{z_1, z_2\}, z_3\}) = \pi\left(\frac{[\iota(\{z_1, z_2\}), \iota(z_3)]}{\hbar}\right),$$

而 $\pi\iota(\{z_1, z_2\}) = \pi([\iota(z_1), \iota(z_2)]/\hbar)$, 这说明 $\iota(\{z_1, z_2\}) - [\iota(z_1), \iota(z_2)]/\hbar$ 对应 $R/\hbar R$ 中同一元素. 设

$$\iota(\{z_1, z_2\}) - [\iota(z_1), \iota(z_2)]/\hbar = \hbar u, u \in R.$$

那么可直接计算得到

$$[\iota(\{z_1, z_2\}), \iota(z_3)] = \frac{[[\iota(z_1), \iota(z_2)], \iota(z_3)]}{\hbar} + (u\iota(z_3) - \iota(z_3)u)\hbar,$$

这说明 $[\iota(\{z_1,z_2\}),\iota(z_3)]/\hbar-[[\iota(z_1),\iota(z_2)],\iota(z_3)]/\hbar^2$ 在 π 作用下是零. 因此 $\{-,-\}$ 满足 Jacobi 恒等式. 由此我们证明了对 $\Bbbk$-代数同构 $\theta:A\to R/\hbar R$, 任取一线性截面 $\iota:A\to R$(即满足 $\theta^{-1}\pi\iota=\mathrm{id}_A$), 如果定义

$$\{z_1,z_2\}=\theta^{-1}\pi\left(\frac{[\iota(z_1),\iota(z_2)]}{\hbar}\right),\forall z_1,z_2\in\mathcal{Z},$$

便有 Poisson 代数 $(\mathcal{Z},\{-,-\})$, 并且这里的 Poisson 括号不依赖于线性截面的选取. 对每个 $z\in\mathcal{Z}$, 定义

$$D_z:A\to A,a\mapsto\theta^{-1}\pi\left(\frac{[\iota(z),\hat{a}]}{\hbar}\right),$$

这里 $\hat{a}\in\pi^{-1}(\theta(a))$(是 R 中元素), 我们说明 D_z 是 A 上定义合理的导子并且不依赖于线性截面 ι 的选取. 如果还有 $\tilde{a}\in R$ 也满足 $\pi(\tilde{a})=\theta(a)$, 那么存在 $x\in R$ 使得 $\hat{a}-\tilde{a}=\hbar x$, 那么易见 $\pi([\iota(z),\hbar x]/\hbar)=0$, 所以 D_z 的定义不依赖于 $\hat{a}$ 的选取. 对任何 $b\in A$, $\theta^{-1}\pi(\hat{b})=b$, 所以由换位子在每个分量上具有导子性质可知 $D_z\in\mathrm{Der}_{\Bbbk}A$. 结合 $D:\mathcal{Z}\to\mathrm{Der}_{\Bbbk}A,z\mapsto D_z$ 是 $\Bbbk$-线性的, 按照 [BG03] 中的术语, 我们得到 A 带上 $\Bbbk$-线性映射 $D:\mathcal{Z}\to\mathrm{Der}_{\Bbbk}A$ 是 $\mathcal{Z}$ 上 Poisson order. 总结一下, 前面的讨论证明了单位根量子群理论中的经典观察:

Proposition 1.21 (特殊化产生 Poisson order)**.** 设 $\Bbbk$-代数 A 是由特殊化得到的代数. 具体地, 设有 $\Bbbk$-代数 R, R 的中心正则元 $\hbar$ 以及 $\Bbbk$-代数同构 $\theta:A\to R/\hbar R$. 任取 $\theta^{-1}\pi:R\to A$ 的线性截面 $\iota:A\to R$, 定义

$$\{z_1,z_2\}=\theta^{-1}\pi\left(\frac{[\iota(z_1),\iota(z_2)]}{\hbar}\right),\forall z_1,z_2\in\mathcal{Z}=\mathcal{Z}(A).$$

那么 $\{-,-\}:\mathcal{Z}\times\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$ 是定义合理的 Poisson 括号且不依赖于线性截面 ι 的选取. 如果进一步定义 $\Bbbk$-线性映射 $D:\mathcal{Z}\to\mathrm{Der}_{\Bbbk}A,z\mapsto D_z$ 满足

$$D_z:A\to A,a\mapsto\theta^{-1}\pi\left(\frac{[\iota(z),\hat{a}]}{\hbar}\right),$$

其中 $\hat{a}\in\pi^{-1}(\theta(a))$ 是 a 关于 $\theta^{-1}\pi$ 在 R 中的一个原像, 那么 D 定义合理且 (A,D) 是 Poisson $\mathcal{Z}$-order.

Remark 1.22. 这里的 Poisson order 没有要求 ${}_{\mathcal{Z}}A$ 是有限生成模的条件. $\mathcal{Z}$ 上的 Poisson 结构不依赖于线性截面 ι 的选取, 而不同的线性截面定义出的导子 D_z 相差一 A 上内导子 (即存在 $a_0\in A$ 使得该导子为 $[a_0,-]$): 设 $\theta^{-1}\pi$ 有线性截面 $\iota,\tilde{\iota}:A\to R$, 那么对固定的 $z\in\mathcal{Z}$, 存在唯一的 $w\in R$ 使得 $\iota(z)-\tilde{\iota}(z)=w\hbar$, 于是对任何 $a\in A$, $D_z(a)-\tilde{D}_z(a)=\theta^{-1}\pi([w,\hat{a}])$. 因为这里 $\hat{a}$ 满足 $\pi(\tilde{a})=\theta(a)$, 所以 $D_z(a)-\tilde{D}_z(a)=[\theta^{-1}\pi(w),a]$, 记 $b=\theta^{-1}\pi(w)\in A$, 则 $D_z-\tilde{D}_z=[b,-]$. 所以 D_z 关于不同线性截面的选取相差一内导子.

Example 1.23. 设 $q\in\Bbbk^\times$, 考虑标准 $\Bbbk$-代数同构 $\theta:\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)\to\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)/(\hbar-q)$, 那么由 $\hbar-q$ 是 $\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)/(\hbar-q)$ 中的中心正则元知量子仿射空间 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 可特殊化得到. 而前面的"$\hbar=q$"赋值代数同态 $\Phi:\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)\to\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 就是 $\theta^{-1}\pi$. 它有 $\Bbbk$-线性截面 $\iota:\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)\to\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)$ 满足将每个 $cx_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ 映至 $cx_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\in\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)$. 在这些记号下, 我们得到 $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}(\mathcal{O}_q(\Bbbk^n))$ 上 Poisson 结构 $\{-,-\}$ 以及 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 上 Poisson $\mathcal{Z}$-order 结构.

1.5 单位根处量子仿射空间

本节固定域 $\Bbbk$ 以及 $\Bbbk$ 中的 ℓ 次本原单位根 ε. 我们在此场景下重新总结 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 的基本性质. 之前我们已经看到 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 是双边 Noether 仿射 $\Bbbk$-整环 (见 [命题1.7]) 并且这时 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 在中心子代数 $\hat{\mathcal{Z}}=\Bbbk[x_1^\ell,...,x_n^\ell]$

上是秩为 ℓ^n 的有限生成自由模. 如果进一步 n 是偶数, 那么 $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)) = \Bbbk[x_1^\ell, ..., x_n^\ell]$. 当 n 是奇数时, 可能有 $\hat{\mathcal{Z}} \subsetneq \mathcal{Z}(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n))$ 并且 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 作为中心上的有限生成模未必是自由的 (见 [例1.13]).

通过 [命题1.21], 我们看到模有限代数 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 作为可特殊化得到的代数是中心上的 Poisson order. 即便 ε 是单位根, 通常中心上的 Poisson 结构也不是平凡的: 沿用 [例1.23] 中的记号, 这时 $q = \varepsilon$, 考虑的 $\mathcal{O}_\hbar(\Bbbk^n)$ 中的中心正则元为 $\hbar - \varepsilon$. 设 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$, 这时对 $x_1^\ell, x_2^\ell \in \hat{\mathcal{Z}}$, 有

$$\{x_1^\ell, x_2^\ell\} = \theta^{-1}\pi\left(\frac{[\iota(x_1^\ell), \iota(x_2^\ell)]}{\hbar - \varepsilon}\right) = \theta^{-1}\pi\left(\frac{(\varepsilon^\ell - \hbar^\ell)x_1^\ell x_2^\ell}{\hbar - \varepsilon}\right) = \theta^{-1}\pi(-(\varepsilon^{\ell-1} + \varepsilon^{\ell-2}\hbar + \cdots + \varepsilon\hbar^{\ell-2} + \hbar^{\ell-1})x_1^\ell x_2^\ell).$$

化简上式, 得到 $\{x_1^\ell, x_2^\ell\} = -\ell\varepsilon^{\ell-1}x_1^\ell x_2^\ell$. 再由 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$ 得到 $\{x_1^\ell, x_2^\ell\} \neq 0$.

上述讨论表明单位根处的量子仿射空间作为可特殊化得到的模有限代数, 其上 Poisson order 结构在特征零的域场景下是非平凡的. 因为 $\Bbbk$-代数同构 $\Bbbk[x_1^\ell, ..., x_n^\ell] \cong \Bbbk[x_1, ..., x_n]$, 所以当 n 为偶数时, $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 本质上就是一个多项式 Poisson 代数. 这时 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 是一个光滑仿射 Poisson 整区上的 Poisson order.

参考文献

[BG03] K.A. Brown and I. Gordon. Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory. 2003.

[BG12] K. Brown and K.R. Goodearl. *Lectures on algebraic quantum groups*. Birkhäuser, 2012.

[BY18] K.A. Brown and M.T. Yakimov. Azumaya loci and discriminant ideals of pi algebras. *Advances in Mathematics*, 340:1219–1255, 2018.

[CPWZ16] S. Ceken, J.H. Palmieri, Y.-H. Wang, and J.J. Zhang. The discriminant criterion and automorphism groups of quantized algebras. *Advances in Mathematics*, 286:754–801, 2016.

[DCKP91] C. De Concini, V.G. Kac, and C. Procesi. Representations of quantum groups at roots of 1. *Modern quantum field theory (Bombay, 1990)*, pages 333–335, 1991.

[DCKP92] C. De Concini, V.G. Kac, and C. Procesi. Quantum coadjoint action. *Journal of the American Mathematical Society*, 5(1):151–189, 1992.

[DCKP93] C. De Concini, V.G. Kac, and C. Procesi. Some quantum analogues of solvable lie groups. *arXiv preprint hep-th/9308138*, 1993.

[DCL94] C. De Concini and V. Lyubashenko. Quantum function algebra at roots of 1. *Advances in Mathematics*, 108(2):205–262, 1994.

[GL09] K.R. Goodearl and E.S. Letzter. Semiclassical limits of quantum affine spaces. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 52(2):387–407, 2009.

[Man91] Y. Manin. *Topics in non-commutative geometry*. Princeton University Press, 1991.