分次代数

戚天成

2023 年 10 月 16 日

在线性代数中, 域 $\Bbbk$ 上多项式环 $R=\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 可写为 $R=\bigoplus\limits_{d=0}^{\infty}R_d$, 其中 R_d 是 d 次齐次多项式全体, 易见 $R_iR_j\subseteq R_{i+j},\forall i,j\in\mathbb{N}$, 这就是分次代数的雏形. 此外, 我们所熟知的张量代数 (见 [例1.4])、外代数 (见 [例1.5]) 和自由代数 (见 [例1.6]) 也都具有自然的分次结构. 在代数几何中, 考虑域 $\Bbbk$ 上 n 维射影空间中的射影簇 $X\subseteq\mathbb{P}^n$, 它的齐次坐标环上 $\Bbbk[x_0,x_1,...,x_n]/I(X)$ 就有天然的分次结构 (见 [例1.7]). 在代数拓扑中, 拓扑空间 X 系数在任意含幺交换环 R 中的上同调环 $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}H^i(X;R)$ 是分次环 (见 [例1.8]). 分次结构在众多数学领域中的出现使得我们有理由去探索分次代数.

目录

1 基本概念

1.1 定义和基本例子

Definition 1.1 (分次环, 分次代数, 分次模)**.** 若含幺环 R 有加子群族 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 使得 $R_iR_j\subseteq R_{i+j},\forall i,j\in\mathbb{Z}$ 以及 $R=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}R_i$, 称 R 是 **$\mathbb{Z}$-分次环**, 简称为**分次环**, 这时称 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是分次环 R 的**分次**. 并且易知 $1_R\in R_0$ 且 R_0 也是含幺环. 对自然数 l, 一般用 $R_{\geq l}$ 来表示 $R_l\oplus R_{l+1}\oplus\cdots$. 如果分次环 R 是域 $\Bbbk$ 上的代数并且这时 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $\Bbbk$-线性子空间族, 称 R 是**分次代数**. 如果分次环 R 满足 $R_i=0,\forall i<0$, 则称 R 是**正分次环**或 **$\mathbb{N}$-分次环**. 如果 R 是分次 $\Bbbk$-代数使得每个 R_i 作为 $\Bbbk$-线性空间是有限维的, 称 R 是**局部有限分次代数**. 如果 R 是正分次代数并且 $R_0=\Bbbk 1_R$(有时把 $\Bbbk 1_R$ 简写为 $\Bbbk$), 则称 R 是**连通分次代数**. 如果分次环 R 上的左模 M 满足存在加子群族 $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 使得 $M=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}M_i$ 使得 $R_iM_j\subseteq M_{i+j},\forall i,j\in\mathbb{Z}$, 则称 M 是**分次左 R-模**, $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 称为 M 上的**分次**. 如果分次模 M 满足存在整数 n 使得 $M=M_n$, 则称 M 是**集中在 n 次 (位置) 的分次模**. 对分次环 R 上的分次模 M, 称 M_i 中的元素是 **i 次齐次元**, 并对 $x\neq 0\in M_i$, 记 $\deg x=i$(那么对非零的 i 次齐次元 x 和非零的 j 次齐次元 y, 只要 $xy\neq 0$, 就有 $\deg xy=\deg x+\deg y$). 零元可视作任意次数的齐次元. 如果分次模 M 中元素 $x\in M$ 满足 $x=\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}x_i,x_i\in M_i$, 称 x_i 是 **x 的 i 次部分**. 如果 $M=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}M_i$ 是分次左 R-模, 那么每个 M_i 是左 R_0-模, 若每个 M_i 作为 R_0-模都是有限生成的, 那么称 M 是**左有限分次模**. 如果 R 是分次 $\Bbbk$-代数, 分次模 $M=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}M_i$ 满足每个 M_i 还是 $\Bbbk$ 上的线性子空间, 称 M 是**分次代数 R 上的左模**. 如果分次代数 R 上的分次左模 M 满足每个 M_i 是有限维 $\Bbbk$-线性空间, 称 M 是**局部有限分次模**. 如果分次环 R 上的分次模 $M=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}M_i$ 满足对充分小的 i 都有 $M_i=0$, 称 M 是**下有界的**. 如果对充分大的 i 有 $M_i=0$, 则称 M 是**上有界的**. 类似可把左模的概念都定义到右模情形.

任给含幺环 R, 都可以看成集中在 0 次的分次环, 任何左 R-模 M 也可视作集中在 0 次的分次模. 于是对任何 $\mathbb{Z}$-模 M, 如果它可分解为加子群的直和 $M=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}M_i$, 那么它自然可视作分次 $\mathbb{Z}$-模. 类似地, 对 $\Bbbk$-分次代数 A 上的左模 $M=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i$, 它可天然视作分次 $\Bbbk$-模. 所以对分次 $\Bbbk$-模 M,N, 可通过定义 $(M\otimes_{\Bbbk}N)_l=\mathrm{span}\{x_i\otimes y_j\in M\otimes_A N|x_i\in M_i,y_j\in N_j,i+j=l\}$ 赋予 $M\otimes_{\Bbbk}N$ 一分次 $\Bbbk$-模结构.

在交换代数中, 含幺交换环 R 的幂等元全体和素谱的既开又闭子集全体一一对应, 进而得到 R 没有非平凡幂等元当且仅当 $\mathrm{Spec}R$ 是连通空间. 下述引理解释了连通分次代数命名的缘由.

Lemma 1.2. 设域 $\Bbbk$ 上的正分次代数 A 是连通分次代数, 那么它的幂等元只有 $0,1$.

下面是一些分次代数的基本例子.

Example 1.3 (Laurent 多项式环)**.** 设 R 是含幺交换环, $R[x,x^{-1}]=\{\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}a_ix^i|a_i\text{仅对至多有限个}i\text{非零}\}$ 是 R 上的 **Laurent 多项式环**, 那么 $R[x,x^{-1}]=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}Rx^i$ 是分次环.

Example 1.4 (张量代数)**.** 对含幺交换环 K 上任何模 M 均可决定**张量代数** $T(M)=K1_{T(M)}\oplus M\oplus M^{(2)}\oplus\cdots$, 这里 $M^{(k)},k\geq 2$ 表示 k 个 M 作 K-张量积. 若这时 K 是域, 那么张量代数是连通分次代数.

Example 1.5 (外代数)**.** 对含幺交换环 K 上模 M, 可决定**外代数** $E(M)=T(M)/B$, 这里 B 表示 $\{x\otimes x|x\in M\}$ 在张量代数 $T(M)$ 中生成的理想, 易验证 $B=\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}B\cap M^{(i)}$ 以及 $B\cap K1_{T(M)}=0$, 其中 $M^{(0)}=$

$K1_{T(M)}, M^{(1)} = M$. 若记 $E^{(i)}(M) = (M^{(i)} + B)/B$, 那么 $E(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} E^{(i)}(M)$ 且 $E^{(i)}(M)E^{(j)}(M) \subseteq E^{(i+j)}(M), \forall i, j \in \mathbb{N}, E^{(0)}(M) = K1_{E(M)}$, 所以当 K 是域时外代数 $E(M)$ 是连通分次代数.

Example 1.6 (自由代数)**.** 设 $\Bbbk\langle x_1, ..., x_n\rangle$ 是由 $\{x_1, ..., x_n\}$ 作为自由变量张成的自由代数, 类似于 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$, 可对 $\Bbbk\langle x_1, ..., x_n\rangle$ 中非交换多项式定义次数的概念, 它当然也有连通分次代数结构.

Example 1.7 (齐次坐标环)**.** 设 $\mathbb{P}^n$ 是域 $\Bbbk$ 上 n 维射影空间, 称 $\Bbbk[x_0, ..., x_n]$ 中一些齐次多项式在 $\mathbb{P}^n$ 中的公共零点集是 $\mathbb{P}^n$ 中的**射影簇** (易见射影簇定义合理). 对射影簇 $X \neq \varnothing$, 记 $I(X)$ 是 $\Bbbk[x_0, ..., x_n]$ 中全体零化 X 的齐次多项式生成的理想, 称为 X 的**齐次理想**. 记 S_d 是 $\Bbbk[x_0, ..., x_n]$ 中全体 d 次齐次多项式构成的子空间, 那么 $I(X) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I(X) \cap S_d$, 所以商代数 $\Bbbk[x_0, ..., x_n]/I(X)$ 上有分次 $\{(S_d + I(X))/I(X)\}_{d\in\mathbb{N}}$. 称商代数 $\Bbbk[x_0, ..., x_n]/I(X)$ 是射影簇 X 的**齐次坐标环**. 易见 $I(X) \cap S_0 = 0$, 所以齐次坐标环是连通分次代数.

Example 1.8 (上同调环)**.** 记 $\mathbb{R}^\infty = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{R} = \left\{(a_i)_{i=0}^\infty | 至多有限个 a_i \neq 0\right\}$, 通过范数 $\|(a_i)_{i=0}^\infty\| = \left(\sum_{i=0}^\infty a_i\right)^{1/2}$ 赋予该空间度量拓扑. 记 $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^n$ 是各分量为零的元素, ε_i 是第 i 分量为 1, 其余分量为零的元素, 称 $\mathbb{R}^\infty$ 中由点 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ 张成的几何体

$$\Delta_n = \left\{\sum_{i=0}^n t_i\varepsilon_i | t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1\right\}$$

是**标准 n-单形**. 若 X 是拓扑空间, 称任何连续映射 $T : \Delta_n \to X$ 是 X **的奇异 n-单形**. 注意 $\Delta_0 = \{\varepsilon_0\}$, 所以 X 的奇异 0-单形与 X 中点一一对应. 将 X 的全体奇异 n-单形张成的自由 Abel 群记作 $S_n(X)$, 称为 n **维奇异链群**, 里面的元素称为 n **维奇异链**. 那么对每个自然数 n, 可如下定义加群同态 $d_{n+1} : S_{n+1}(X) \to S_n(X)$: 对每个奇异 $n+1$-单形 T, 定义连续映射

$$\begin{aligned} l(\varepsilon_0, ..., \hat{\varepsilon_j}, ..., \varepsilon_{n+1}) : \Delta_n &\to \Delta_{n+1} \\ \sum_{i=0}^n t_i\varepsilon_i &\mapsto \sum_{i=0}^{j-1} t_i\varepsilon_i + \sum_{i=j}^n t_i\varepsilon_{i+1} \end{aligned}$$

那么 $Tl(\varepsilon_0, ..., \hat{\varepsilon_j}, ..., \varepsilon_{n+1}) : \Delta_n \to X$ 是奇异 n-单形, 于是可定义 $d_{n+1}T = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j Tl(\varepsilon_0, ..., \hat{\varepsilon_j}, ..., \varepsilon_{n+1})$ 来得到加群同态 d_{n+1}. 下面我们来说明 $(S_\bullet(X), d_\bullet)$ 构成链复形. 先指出对拓扑空间之间的连续映射 $f : X \to Y$, 可天然导出奇异链群间的群同态 $f_n : S_n(X) \to S_n(Y)$ 使得 $f_n(T) = fT$, 对任何 n 维奇异单形 T 成立.

$$\Delta_n \xrightarrow{T} X \xrightarrow{f} Y$$

那么直接计算让我们看到对每个自然数 n 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} S_{n+1}(X) & \xrightarrow{d_{n+1}} & S_n(X) \\ {\scriptstyle f_{n+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\ S_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & S_n(Y) \end{array}$$

现在我们把每个奇异 $n+1$-单形 T 视作拓扑空间 Δ_{n+1} 到拓扑空间 X 的连续映射, 那么它导出下述交换图：

$$\begin{tikzcd}
S_{n+1}(\Delta_{n+1}) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "T_{n+1}"'] & S_n(\Delta_{n+1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "T_n"] & S_{n-1}(\Delta_{n+1}) \arrow[d, "T_{n-1}"] \\
S_{n+1}(X) \arrow[r, "d_{n+1}"] & S_n(X) \arrow[r, "d_n"] & S_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

注意到 $\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}} \in S_{n+1}(\Delta_{n+1})$, 所以我们想说明的 $d_n d_{n+1} T = 0$ 可转换为说明

$$d_n d_{n+1} T = d_n d_{n+1} T_{n+1}(\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}) = T_{n-1}\partial_n\partial_{n+1}(\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}) = 0.$$

直接计算可知

$$\begin{aligned}
\partial_n\partial_{n+1}(\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}) &= \partial_n(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j l(\varepsilon_0, ..., \hat{\varepsilon_j}, ..., \varepsilon_{n+1})) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j \partial_n(l(\varepsilon_0, ..., \hat{\varepsilon_j}, ..., \varepsilon_{n+1})) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j[\sum_{i<j}(-1)^i l(\varepsilon_0, ..., \hat{\varepsilon_i}, ..., \hat{\varepsilon_j}, ..., \varepsilon_{n+1}) + \sum_{i>j}(-1)^{i-1} l(\varepsilon_0, ..., \hat{\varepsilon_j}, ..., \hat{\varepsilon_i}, ..., \varepsilon_{n+1})] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

于是得到链复形

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} S_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{d_1} S_0(X) \longrightarrow 0$$

称为 **X 的奇异链复形**. 称该复形的 i 次同调为 X **的** i **次奇异同调**. 将 $Z_i(X) = \mathrm{Ker} d_i$ 称为 i **维闭链群**, 其中元素称为 i **维闭链**. 将 $B_i(X) = \mathrm{Im} d_{i+1}$ 称为 i **维边缘链群**, 其中元素称为 i **维边缘链**. 现设 R 是含幺交换环, 用逆变 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, {}_{\mathbb{Z}}R)$ 作用上述奇异链复形得到上链复形 $(S^\bullet(X;R), \delta^\bullet = d^*_{\bullet+1})$

$$0 \longrightarrow S^0(X;R) \xrightarrow{d_1^*} S^1(X;R) \xrightarrow{d_2^*} S^2(X;R) \xrightarrow{d_3^*} \cdots$$

其中 $S^i(X;R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_i(X), R)$, 称为**系数在** R **中的** i **维奇异上链群**. 称 $S^i(X;R)$ 中的元素为**系数在** R **中的** i **维奇异上链**. 称 $Z^i(X;R) = \mathrm{Ker}\delta^i$ 称为 i **维上闭链群**, 其中元素为 i **维上闭链**. 称 $B^i(X;R) = \mathrm{Im}\delta^{i-1}$ 为 i **维上边缘链群**, 其中元素称为 i **维上边缘链**. 称复形 $(S^\bullet(X;R), \delta^\bullet)$ 的 i 次上同调为 X **系数在** R **中的** i **次上同调**, 记作 $H^i(X;R)$. 对自然数 p, q, 记 $l(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_p) : \Delta_p \to \Delta_{p+q}, \sum_{i=0}^{p} t_i\varepsilon_i \mapsto \sum_{i=0}^{p} t_i\varepsilon_i$ 以及 $l(\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, ..., \varepsilon_{p+q}) : \Delta_q \to \Delta_{p+q}, \sum_{i=0}^{q} t_i\varepsilon_i \mapsto \sum_{i=0}^{p} t_i\varepsilon_{i+p}$, 它们明显是连续映射. 对奇异上链 $c^p \in S^p(X;R), c^q \in S^q(X;R)$, 我们定义 $c^p \smile c^q : S^{p+q}(X) \to R$ 是满足

$$(c^p \smile c^q)(T) = c^p(Tl(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_p))c^q(Tl(\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, ..., \varepsilon_{p+q})), \forall T \in S^{p+q}(X)$$

的加群同态, 由此得到映射 $\smile: S^p(X;R) \times S^q(X;R) \to S^{p+q}(X;R), (c^p, c^q) \mapsto c^p \smile c^q$, 称奇异上链 $c^p \smile c^q$ 是 c^p 与 c^q 的**杯积**. 通过直接地计算可知杯积是结合的, 即对任给奇异链 $c^p \in S^p(X;R), c^q \in S^q(X;R)$ 和 $c^r \in S^r(X;R)$, 有 $(c^p \smile c^q) \smile c^r = c^p \smile (c^q \smile c^r)$. 通过直接计算也可以得到下述**上边缘链公式**：

$$\delta^{p+q}(c^p \smile c^q) = (\delta^p c^p) \smile c^q + (-1)^p c^p \smile (\delta^q c^q), \forall c^p \in S^p(X;R), c^q \in S^q(X;R).$$

若将所有 0 维奇异单形映射到 1 的 0 维奇异上链为 z^0, 即 $z^0 : S_0(X) \to R$, $\sum\limits_{T:\Delta_0\to R} n_T T \mapsto \sum\limits_{T:\Delta_0\to R} n_T$, 那么对任何奇异上链 $c^p \in S^p(X;R)$, 可直接计算得到 $z^0 \smile c^p = c^p \smile z^0 = c^p$ 并且 z^0 是上闭链. 现在可正式地开始引入上同调环上的运算. 作 $A = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} H^i(X;R)$, 那么 A 有天然加群结构, 每个直和项 $H^i(X;R)$ 都是加群 (更严格地, 记 $\ell_i : H^i(X;R) \to A$ 是标准嵌入, $\ell_i(H^i(X;R))$ 是加法群). 通过奇异上链间的杯积, 可诱导映射

$$\begin{aligned} H^p(X;R) \times H^q(X;R) &\to H^{p+q}(X;R) \\ (\overline{z^p}, \overline{z^q}) &\mapsto \overline{z^p \smile z^q} \end{aligned}$$

根据上面的上边缘链公式, 只要 z^p, z^q 是上闭链, 那么 $\delta^{p+q}(z^p \smile z^q) = 0$, 并且若有上闭链 $z^p, w^p \in Z^p(X;R)$ 以及 $z^q, w^q \in Z^q(X;R)$ 满足 $z^p - w^p = \delta^{p-1}(c^{p-1}), z^q - w^q = \delta^{q-1}(d^{q-1})$, 那么

$$\delta^{p+q-1}(c^{p-1} \smile z^q) = (\delta^{p-1}c^{p-1}) \smile z^q + (-1)^{p-1}c^{p-1} \smile (\delta^q z^q) = (\delta^{p-1}c^{p-1}) \smile z^q,$$

$$\delta^{p+q-1}(w^p \smile d^{q-1}) = (\delta^p w^p) \smile d^{q-1} + (-1)^p w^p \smile (\delta^{q-1}d^{q-1}) = (-1)^p w^p \smile (\delta^{q-1}d^{q-1}),$$

而 $z^p \smile z^q - w^p \smile w^q = \delta^{p-1}(c^{p-1}) \smile z^q + w^p \smile \delta^{q-1}(d^{q-1})$, 所以把上面第一个等式加上第二个等式的 $(-1)^p$ 倍可得 $z^p \smile z^q - w^p \smile w^q \in B^{p+q}(X;R)$, 综上, 上述映射定义合理. 于是由上述映射可天然赋予 $A = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} H^i(X;R)$ 环结构. 具体地, 记 $\pi_i : A \to H^i(X;R)$ 是标准投射, 定义

$$A \times A \to A, (x,y) \mapsto \sum_{s=0}^{\infty} \ell_s(\sum_{i+j=s} \pi_i(x) \smile \pi_j(y))$$

那么 $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} H^i(X;R)$ 关于加法与上述乘法运算构成环, 并且有幺元 $\ell_0(z^0)$. 我们称含幺环 $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} H^i(X;R)$ 为 X **系数在 R 中的上同调环**. 根据它乘法的定义知它确实是分次环, 有分次 $\{\ell_i(H^i(X;R))\}_{i=0}^{\infty}$.

Example 1.9 (滤环的相伴分次环)**.** 若含幺环 R 的加子群族 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 (i)$F_iF_j \subseteq F_{i+j}, \forall i,j \in \mathbb{N}$, (ii) 对任何 $i < j$, $F_i \subseteq F_j$, (iii)$\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} F_i = R$, 则称 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 R 的一个**滤**. 带有滤的环称为**滤环**. 如果 R 是正分次环, 有分次 $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 那么通过定义 $F_n = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ 可得 R 的滤 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 故分次环一定是滤环. 反之, 若给定滤环 R, 对 R 上的滤 $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots$, 记 $F-1 = 0$, 考虑加群 $T = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} F_i/F_{i-1}$, 通过定义 $(\overline{a_i})_{i=0}^{\infty} \cdot (\overline{b_j})_{j=0}^{\infty} = (\sum\limits_{i+j=k} \overline{a_ib_j})_{k=0}^{\infty}$ 可赋予 T 一个环结构. 现在我们设 $1 \in F_0$, 那么 T 就是含幺环, 并且根据 T 的定义我们看到在它还是个分次环, 记该分次环为 $\mathrm{gr}R$, 称为滤环 R 的**相伴分次环**.

Example 1.10 (复形产生分次模)**.** 设 R 是含幺环, 将其视作集中在 0 次部分的分次环, 那么对任何 R-模复形 $(C_\bullet, d_\bullet)$, 所有项的直和 $C = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} C_i$ 是分次 R-模.

Proposition 1.11. 分次环的中心是也是分次环.

证明: 设含幺环 R 有分次 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 对每个 $x \in Z(R)$, 设 $x = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} x_i, x_i \in R_i$, 则对任何齐次元 a, 根据 $xa = ax$ 可知 $x_ia = ax_i$, 那么每个 $x_i \in Z(R)$, 这说明 $Z(R) = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}(Z(R) \cap R_i)$ 是分次环. □

Definition 1.12 (分次环同态, 分次代数同态, 分次模同态)**.** 设 R,S 是分次环, $R=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}R_i, S=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}S_i$, 若保幺环同态 $f:R\to S$ 满足 $f(R_i)\subseteq S_i,\forall i\in\mathbb{Z}$, 则称 f 是**分次环同态**. 如果这时 R,S 是域 $\Bbbk$ 上的分次代数, f 是 $\Bbbk$-代数同态, 则称 f 是**分次代数同态**. 易见分次环 (代数) 同态的复合仍是分次环 (代数) 同态. 如果一个分次模同态是可逆映射, 那么它的逆映射也是分次模同态, 称可逆的分次模同态为**分次模同构**. 两个分次模 M,N 之间如果存在分次模同构, 则称这两个分次模**同构**, 记作 $M\cong N$. 如果 $R=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}R_i$ 是分次环, M,N 都是分次左 R-模, 若模同态 $f:M\to N$ 满足 $f(M_i)\subseteq N_i,\forall i\in\mathbb{Z}$, 则称 f 是**分次模同态**. 一般地, 对给定的整数 d, 将满足 $f(M_i)\subseteq N_{i+d},\forall i\in\mathbb{Z}$ 的模同态称为**次数 d 的**. 那么我们前面定义的分次模同态就是指次数为 0 的模同态. 类似可定义分次代数上的模情形的概念.

Example 1.13. 设 $f:M\to N$ 是分次 R-模间的分次模同态, 对 $x\in M$, 若记 x_i 是 x 的 i 次分量, 则由 $f(x)=f(\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}x_i)=\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}f(x_i)$ 知 $f(x)_i=f(x_i)$.

Definition 1.14 (分次理想, 分次子模)**.** 设 I 是分次环 R 的理想, 如果 $I=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}(I\cap R_i)$, 则称 I 是**分次理想**. 类似可定义分次左理想与分次右理想的概念. 零理想和整个分次环是平凡的分次理想. 如果 I 是分次理想, 那么商环 R/I 会有天然的分次结构, 具体地, $R/I=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}(R_i+I)/I$ 给出 R/I 上分次结构. 类似地, 对分次环 R 上的分次左 R-模 M, 如果子模 N 满足 $N=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}N\cap M_i$, 则称该子模是 M 的**分次子模**. 完全类似地我们可以看到对分次子模 N, 商模 M/N 有天然分次左 R-模结构.

我们也指出分次理想和分次子模有如下等价刻画, 这可通过定义直接看到.

Lemma 1.15. 设 R 是分次环, 那么理想 I 是分次理想的充要条件是 I 可由一些齐次元生成. 设 M 是分次环 R 上的分次左模, 那么子模 N 是分次子模的充要条件是 N 可由一些齐次元生成.

Corollary 1.16. 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, 那么任何分次子模族 $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足 $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}N_\alpha$ 和 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}N_\alpha$ 仍为分次子模. 类似地, 分次环的任何分次理想族的交与和仍分次.

证明: 易见 $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}N_\alpha$ 可由一些齐次元生成, 所以是分次子模. 而后者明显满足分次子模的定义. □

Example 1.17. 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, I 是分次左理想, 则 IM 是 M 的分次子模.

Definition 1.18 (平移)**.** 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, d 是整数. 那么可定义分次模 $M(d)=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}M_{i+d}$, 即 $M(d)$ 的 i 次位置是 M_{i+d}, 那么 $M(d)$ 还是分次 R-模, 称 $M(d)$ 是分次模 M 的 d **次平移**. 易见作为非分次模, 有 $M=M(d)$, 所以若 N 是分次真子模, 那么 $N(d)$ 也是 $M(d)$ 的分次真子模.

Example 1.19. 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, 则 Ann_RM 是分次理想且 $\mathrm{Ann}_RM=\mathrm{Ann}_RM(d),\forall d\in\mathbb{Z}$.

Example 1.20. 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, 有分次子模 N, 则投射 $\pi:M\to M/N$ 是分次模同态. 类似地, 若 R 是分次环, 真理想 I 是分次理想, 则投射 $\pi:R\to R/I$ 是分次环同态.

Example 1.21. 设 $X\neq\varnothing\subseteq\mathbb{P}^n$ 是域 $\Bbbk$ 上的射影簇, 则齐次理想 $I(X)$ 是多项式环 $\Bbbk[x_0,...,x_n]$ 的分次理想.

Lemma 1.22. 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, 则对全序分次子模族 $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 有 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}N_\alpha$ 也是分次子模.

证明: 注意到这时 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$ 确实是子模且 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$ 即得它是分次子模. □

Proposition 1.23. 设 R 是分次环, M, N 是分次左 R-模, 那么对任何次数为 d 的模同态 (特别地, 分次模同态)$f: M \to N$, $\mathrm{Ker}f$ 是 M 的分次子模, $\mathrm{Im}f$ 是 N 的分次子模. 对任何 N 的分次子模 N', $f^{-1}(N')$ 是 M 的分次子模. 类似地, 分次环间的分次同态的核是分次理想, 像是分次子环. 分次环同态 $f: R \to S$ 满足对 S 任何分次 (左) 理想 I 有 $f^{-1}(I)$ 是 R 的分次 (左) 理想.

Proposition 1.24 (分次对应定理)**.** 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模且有分次子模 N, 那么 M 包含 N 的分次子模全体与 M/N 的分次子模全体有一一对应

$$f: \{N' | N'\text{是}M\text{分次子模且}N' \supseteq N\} \to \{M/N\text{的分次子模}\}, N' \mapsto N'/N$$

类似地, 设 R 是分次环, I 是分次真理想, 那么 $\{J | J\text{是包含}I\text{的分次理想}\} \to \{R/I\text{的分次理想}\}, J \mapsto J/I$ 给出 R 含 I 的分次理想全体和 R/I 的分次理想全体的一一对应.

Proposition 1.25 (基本同态定理)**.** 设 R 是分次环, $f: M \to N$ 是分次 R-模间次数为 d 的模同态, 那么有分次模同构 $M/\mathrm{Ker}f \to (\mathrm{Im}f)(d), \overline{x} \mapsto f(x)$. 特别地, 当 $d = 0$ 时有 $M/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f$.

非分次环的情形, 我们知道任何真理想含于某个极大理想中, 任何左理想含于某个极大左理想中. 与之类似地有分次情形的版本. 我们类似定义极大分次理想、极大分次子模的概念. 称分次模全体分次真子模构成集合的极大元为**极大分次子模**. 根据 [引理1.22], 我们看到非零有限生成分次模的极大分次子模总存在. 同理:

Corollary 1.26. 设 R 是分次环, 则 R 任何分次真理想含于某个极大分次理想中, 特别地, 极大分次理想总存在. 对分次左理想也有类似结论成立. 所以没有左逆的齐次元总在某个极大分次左理想中.

如果分次环的极大理想 I 是分次理想, 它当然是极大分次理想. 下面的例子说反之不然.

Example 1.27. 考虑域 $\Bbbk$ 上的 Laurent 多项式环 $\Bbbk[x, x^{-1}]$(见 [定义1.3]), 它有分次结构 $\Bbbk[x, x^{-1}] = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} \Bbbk x^i$, 因为每个非零齐次元是 R 中可逆元, 所以零理想是唯一的极大分次理想, 但它不是 $\Bbbk[x, x^{-1}]$ 的极大理想. $\Bbbk[x, x^{-1}]$ 中元素 $1 + x$ 不可逆, 不是齐次元, 它不在任何极大分次理想中.

Lemma 1.28. 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, 如果 N 是极大分次子模, 那么对自然数 d, $N(d)$ 是 $M(d)$ 的极大分次子模.

Lemma 1.29. 设 A 是连通分次 $\Bbbk$-代数, $M \neq 0$ 是有限生成分次左 A-模, 对 $\Bbbk$ 赋予标准分次使之成为分次 A-模, 那么存在整数 ℓ 和分次左 A-模同态 $f: M[\ell] \to \Bbbk$ 使得 $f \neq 0$, 进而 f 是满射.

证明: 条件已经保证 M 有下界, 设 ℓ 是使得 $M_\ell \neq 0$ 的最小整数, 取定 M_ℓ 的一个基, 把基中每个元素映至 1 定义出 $\Bbbk$-线性映射 $f_\ell: M_\ell \to \Bbbk$, 那么它也是 A_0-模同态. 现在通过定义 $f(M_j) = 0, \forall j \neq \ell$ 把 f_ℓ 延拓至 M 上成为 $\Bbbk$-线性映射 $f: M \to \Bbbk$, 根据前面的定义知 $f \neq 0$. 下面说明 f 是次数为 $-\ell$ 的左 A-模同态. 先说明它确实是左 A-模同态: 任取 t 次齐次元 $m_t \in M_t$ 和齐次元 $a_j \in A_j$, 如果 $t < \ell$, 那么 $f(a_j m_t) = 0 = a_j f(m_t)$. 如果 $t = \ell$, 那么 $j = 0$, 由 $f|_{M_\ell} = f_\ell$ 是线性映射即得 $f(a_j m_t) = a_j f(m_t)$. 如果 $t > \ell$, 那么 $f(a_j m_t) = 0 = a_j f(m_t)$. 于是我们得到 f 是左 A-模同态, 并且满足 $f(M_{i+\ell}) \subseteq \Bbbk_i$. 由此得到 $f: M \to \Bbbk$ 是非零且次数为 $-\ell$ 的 A-模同态. 将 f 视作 $M[\ell]$ 到 $\Bbbk$ 的分次模同态即可. □

1.2 分次模范畴

回忆分次环 R 上的分次左 R-模 M,N 之间的分次模同态 $f:M\to N$ 是指满足 $f(M_i)\subseteq N_i,\forall i\in\mathbb{Z}$ 的模同态. 那么全体分次模和分次模间的分次模同态构成一范畴, 称为**分次左 R-模范畴**, 记作 $\mathrm{Gr}R$. 我们把全体有限生成分次模构成的全子范畴记作 $\mathrm{gr}R$. 对分次右模的情形我们分别引入记号 $\mathrm{Gr}R^{\circ}$ 和 $\mathrm{gr}R^{\circ}$. 在 [定义1.18] 中所引入分次模的平移给出了分次模范畴上的函子:

Example 1.30 (平移函子)**.** 对每个分次左 R-模 M, 在 [定义1.18] 中对每个整数 d, 都定义了分次模 $M(d)$, 那么我们得到天然的函子 $(d):\mathrm{Gr}R\to\mathrm{Gr}R$ 满足 (d) 作用每个分次模 M 得到 $M(d)$, 并且 (d) 作用 f 保持 f 不动. 易见平移函子 (d) 是范畴 $\mathrm{Gr}R$ 上的自同构, 并且它是加性共变正合函子.

根据前面分次模范畴的记号, 我们用 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(M,N)$ 表示分次模 M 到 N 的分次模同态全体. 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(M,N(d))$ 就是分次模 M 到 N 所有次数为 d 的模同态全体. 记加法子群

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(M,N(n))\subseteq\mathrm{Hom}_R(M,N),$$

易验证上式确实是内直和, 称 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$ 为**分次 Hom 集**. 易见 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(M,N)$ 和 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$ 上有天然的加群结构, $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$ 中次数为 d_1 的模同态加上次数为 d_2 的模同态是次数为 d_1+d_2 的模同态. 对分次模 X, 我们可定义共变加性函子 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(X,-):\mathrm{Gr}R\to\mathbf{Ab}$ 以及逆变加性函子 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-,X):\mathrm{Gr}R\to\mathbf{Ab}$. 事实上根据 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$ 上的分次 $\mathbb{Z}$-模结构我们可以看到 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(X,-):\mathrm{Gr}R\to\mathrm{Gr}\mathbb{Z}$ 和 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-,X):\mathrm{Gr}R\to\mathrm{Gr}\mathbb{Z}$. 下述命题说在适当条件下分次 Hom 集与通常 Hom 集一致.

Proposition 1.31. 设 R 是分次环, M,N 是分次 R-模满足 M 是有限生成的, 则 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)=\mathrm{Hom}_R(M,N)$.

证明: 默认用 x_i 来表示分次模中某个元素 x 的 i 次分量. 设 $f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$, 对每个整数 j, 定义

$$f_j:M\to N,\sum_{i\in\mathbb{Z}}x_i\mapsto f(x_i)_{i+j}$$

那么 f_j 是次数为 j 的模同态. 设 M 可由齐次元 $x_1,...,x_m$ 生成, 设 $r,s\in\mathbb{Z}$ 使得每个 $x_i\in M_{-r}\oplus\cdots\oplus M_r$ 以及 $f(x_i)\in N_{-s}\oplus\cdots\oplus N_s$ 那么直接验证可得 $f=\sum\limits_{k=-r-s}^{r+s}f_k\in\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$. □

任给一族分次左 R-模 $\{M^{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$, 我们来说明它在 $\mathrm{Gr}R$ 中积和余积都存在. 设 $\coprod_{\alpha\in\Lambda}M^{\alpha}$ 是这族模在 R-Mod 中的余积, 那么通过定义 $\left(\coprod_{\alpha\in\Lambda}M^{\alpha}\right)_i=\coprod_{\alpha\in\Lambda}M_i^{\alpha}$ 可得 $\coprod_{\alpha\in\Lambda}M^{\alpha}$ 上分次 R-模结构, 并且记 $i_{\alpha}:M^{\alpha}\to\coprod_{\alpha\in\Lambda}M^{\alpha}$ 是标准嵌入, 可见 i_{α} 是分次模同态, 可直接验证 $(\coprod_{\alpha\in\Lambda}M^{\alpha},\{i_{\alpha}:M^{\alpha}\to\coprod_{\alpha\in\Lambda}M^{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda})$ 是分次模族 $\{M^{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在分次模范畴 $\mathrm{Gr}R$ 中的余积 (一族分次模的余积有时也称为**直和**). 而上述讨论并不能直接对 $\{M^{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在 R-Mod 中的积上进行, 为此, 我们定义 $\prod_{\alpha\in\Lambda}M^{\alpha}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\prod_{\alpha\in\Lambda}M_i^{\alpha}$, 那么有标准投射 $p_{\alpha}:\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\prod_{\alpha\in\Lambda}M_i^{\alpha}\to M^{\alpha},((x_i^{\alpha})_{\alpha\in\Lambda})_{i\in\mathbb{Z}}\mapsto\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}x_i^{\alpha}$, 它是分次模同态. 通过直接验证可知 $(\prod_{\alpha\in\Lambda}M^{\alpha},\{p_{\alpha}:\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\prod_{\alpha\in\Lambda}M_i^{\alpha}\to M_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda})$ 是分次模族 $\{M^{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在分次模范畴 $\mathrm{Gr}R$ 中的积, 不过我们需要强调这里的记号 $\prod_{\alpha\in\Lambda}M^{\alpha}$ 并不是在 R-Mod 中取积, 它们一般不同. 我们把刚刚的讨论总结为下面的推论.

Corollary 1.32. 在分次模范畴 $\mathrm{Gr}R$ 中任何一族分次模的积和余积存在. 故 $\mathrm{Gr}R$ 是加性范畴.

之前我们已经看到对分次模之间的分次模同态 $f: M \to N$, 总有 $\mathrm{Ker}f, \mathrm{Im}f$ 仍是分次模, 并且分次模关于分次子模的商模还是分次模. 对分次模同态序列 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$, 如果 $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$, 则称 f 和 g 在 N 处**正合**. 类似于模范畴可定义分次模范畴中**正合列**的概念. 满分次模同态明显是 $\mathrm{Gr}R$ 中的 epic 态, 单分次模同态明显是 $\mathrm{Gr}R$ 中的 monic 态, 下面我们说明在分次模范畴中 epic 态与满分次模同态等价, monic 态与单分次模同态等价. 事实上若 $f: M \to N$ 是 monic 态, 那么考虑标准嵌入 $i: \mathrm{Ker}f \to M$ 以及零同态 $0: \mathrm{Ker}f \to M$, 它们都是分次模同态并且满足 $fi = f0 = 0$, 那么 $i = 0$, 也就是说 $\mathrm{Ker}f = 0$, 故分次模范畴中 monic 态一定是单同态. 完全类似地讨论可得分次模范畴中 epic 态是满同态. 根据前面讨论可知：

Proposition 1.33. 在分次模范畴 $\mathrm{Gr}R$ 中任何分次模同态的核与余核存在. 任何 monic 态是它余核的核, epic 态是它核的余核. 任何分次模同态 $f: M \to N$ 有下述满单分解 (回忆 [命题1.25])：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & N \\ & M/\mathrm{Ker}f \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

所以分次模范畴 $\mathrm{Gr}R$ 它是 Abel 范畴.

于是我们马上看到对每个分次模 X, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(X, -): \mathrm{Gr}R \to \mathbf{Ab}$ 是共变加性左正合函子, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(-, X): \mathrm{Gr}R \to \mathbf{Ab}$ 是逆变加性左正合函子. 以及：

Proposition 1.34. 设 R 是分次环, 那么对分次模 X, 有 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(X, -): \mathrm{Gr}R \to \mathrm{Gr}\mathbb{Z}$ 是共变加性左正合函子, $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, X): \mathrm{Gr}R \to \mathrm{Gr}\mathbb{Z}$ 是逆变加性左正合函子.

我们再来看张量函子. 如果 R 是分次环, 那么对分次左 R-模 M 和分次右 R-模 N, $M \otimes_R N$ 至少是个 $\mathbb{Z}$-模. 首先 M 和 N 可天然视作分次 $\mathbb{Z}$-模 $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i, N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N_i$. 记

$$(M \otimes_{\mathbb{Z}} N)_l = \left\{ \sum_{i+j=l} x_i \otimes y_j \in M \otimes_{\mathbb{Z}} N \mid x_i \in M_i, y_j \in N_j \right\},$$

那么 $M \otimes_{\mathbb{Z}} N = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} (M \otimes_{\mathbb{Z}} N)_l$, 我们来说明这是直和. 因为张量函子保余积, 所以

$$M \otimes_R N = \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} N_j \right) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (M_i \otimes_{\mathbb{Z}} N_j),$$

由此容易验证 $M \otimes_{\mathbb{Z}} N = \bigoplus\limits_{l\in\mathbb{Z}} (M \otimes_{\mathbb{Z}} N)_l$, 即 $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ 上有自然分次 $\mathbb{Z}$-模结构. 于是我们可以说明对任何分次右 R-模 M 和分次左 R-模 N 的张量积 $M \otimes_R N$ 上也有分次 $\mathbb{Z}$-模结构, 为了看到这点, 先指出

$$\Phi: (M \otimes_{\mathbb{Z}} N)/(\{x \otimes ay - xa \otimes y | x \in M, y \in N, a \in R\}) \to M \otimes_R N, \overline{x \otimes y} \mapsto x \otimes y$$

是定义合理的加群同构, 并注意 $K = (\{x \otimes ay - xa \otimes y \mid x \in M, y \in N, a \in R\})$ 是分次 $\mathbb{Z}$-子模, 因此上式左边是分次 $\mathbb{Z}$-模, 由此我们可用上述加群同构赋予 $M \otimes_R N$ 分次 $\mathbb{Z}$-模结构. 具体地, 记

$$(M \otimes_R N)_l = \left\{ \sum_{i+j=l} x_i \otimes y_j \in M \otimes_R N \mid x_i \in M_i, y_j \in N_j \right\} = \Phi\left(\frac{(M \otimes_{\mathbb{Z}} N)_l + K}{K} \right),$$

那么 $M \otimes_R N = \Phi((M \otimes_{\mathbb{Z}} N)/K) = \bigoplus\limits_{l\in\mathbb{Z}} (M \otimes_R N)_l$, 这就引出下面的概念.

Definition 1.35 (分次张量积)**.** 设 R 是分次环, 对任何分次右 R-模 M 和分次左 R-模 N 的张量积 $M \otimes_R N$ 上有分次 $\mathbb{Z}$-模结构 $M \otimes_R N = \bigoplus\limits_{l \in \mathbb{Z}} (M \otimes_R N)_l$, 称为 M 和 N 的**分次张量积**.

引入分次模的张量积后, 我们可以看到对分次模间任何次数为 d 的左 R-模同态 $f : M \to N$ 和分次右 R-模 X, 加群同态 $\mathrm{id}_X \otimes f : X \otimes_R M \to X \otimes_R N$ 也是次数为 d 的 $\mathbb{Z}$-模同态. 于是我们可定义 $\mathrm{Gr}R$ 到 $\mathrm{Gr}\mathbb{Z}$ 的张量函子 $X \otimes_R -$, 根据刚刚的讨论我们知道它确实将分次模同态映为分次模同态. 模范畴上的张量函子是右正合的, 所以根据我们分次张量积的定义便知：

Proposition 1.36. 设 R 是分次环, X 是分次右 R-模, 则张量函子 $X \otimes_R - : \mathrm{Gr}R \to \mathrm{Gr}\mathbb{Z}$ 是右正合函子. 同理对分次左模决定的张量函子有类似结论成立.

最后再指出, 因为分次模范畴 $\mathrm{Gr}R$ 是 Abel 范畴, 我们便有了分次模复形、分次模复形间的链映射、分次模复形的同调的概念, 并且分次模复形的同调自然会有分次结构. 当然有下面的长正合列定理.

Proposition 1.37 (复形短正合列导出长正合列)**.** 设 R 是分次环, 并给定分次 R-模复形的短正合列

$$0 \longrightarrow (C', d') \xrightarrow{\ \alpha\ } (C, d) \xrightarrow{\ \beta\ } (C'', d'') \longrightarrow 0 \ ,$$

那么对每个整数 i, 存在分次 R-模同态 $\Delta_i : H_i(C'') \to H_{i-1}(C)$ 使得下述同调间的分次模同态序列正合：

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{i+1}} H_i(C') \xrightarrow{\tilde{\alpha_i}} H_i(C) \xrightarrow{\tilde{\beta_i}} H_i(C'') \xrightarrow{\Delta_i} H_{i-1}(C') \xrightarrow{\tilde{\alpha}_{i-1}} H_{i-1}(C) \xrightarrow{\tilde{\beta}_{i-1}} \cdots .$$

我们把这里的 Δ_i 称为**连接同态**, 连接同态的一个重要特征是它有自然性：给定分次模复形的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (C', d'_C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (C, d_C) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & (C'', d''_C) \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (D', d'_D) \arrow[r, "\gamma"'] & (D, d_D) \arrow[r, "\delta"'] & (D'', d''_D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中上下两行是复形短正合列, 那么对每个整数 i, 有下图交换：

$$\begin{tikzcd}
H_i(C'') \arrow[r, "\Delta_i"] \arrow[d, "\widetilde{f''_i}"'] & H_{i-1}(C') \arrow[d, "\widetilde{f'_{i-1}}"] \\
H_i(D'') \arrow[r, "\Delta_i"'] & H_{i-1}(D')
\end{tikzcd}$$

注意上下两行的连接同态是不同的复形短正合列导出的.

1.3 分次双模

Definition 1.38 (分次双模)**.** 设 R, S 是分次环, ${}_RM_S$ 是分次 $\mathbb{Z}$-模 $M = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ 且是 R-S 双模, 如果对任何自然数 i, j, k 有 $R_i M_j S_k \subseteq M_{i+j+k}$, 那么称 ${}_RM_S$ 是**分次 R-S 双模**. 注意这个定义等价于要求分次 $\mathbb{Z}$-模 $M = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ 是 R-S 双模, ${}_RM = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ 是分次左 R-模, $M_S = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ 是分次右 S-模.

回忆分次 Hom 集 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N) = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(M, N(n))$, 它是分次 $\mathbb{Z}$-模. 与非分次情形一样讨论可得：

Proposition 1.39. 设 R, S 是分次环, 那么

- 当 M 是分次 R-S 双模, N 是分次左 R-模时, $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)$ 有天然分次左 S-模结构.
- 当 M 是分次左 R-模, N 是分次 R-S 双模时, $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)$ 有天然分次右 S-模结构.

前面我们看到对分次右 R-模 M 和分次左 R-模 N 的张量积 $M \otimes_R N$ 上有分次 $\mathbb{Z}$-模结构 $M \otimes_R N = \bigoplus\limits_{l\in\mathbb{Z}} (M \otimes_R N)_l$, 那么当 M 或 N 其中一个有分次双模结构时当然会有:

Proposition 1.40. 设 R, S 是分次环, 那么

- 当 M 是分次 S-R 双模, N 是分次左 R-模时, $M \otimes_R N$ 有天然分次左 S-模结构.
- 当 M 是分次右 R-模, N 是分次 R-S 双模时, $M \otimes_R N$ 有天然分次右 S-模结构.

Example 1.41. 设 R 是分次环, 那么 R 可天然视作分次 R-R 双模, 对任何分次左 R-模 M 有分次 R-模同构 $R \otimes_R M \cong M$. 且张量函子 $R \otimes_R - : \mathrm{Gr}R \to \mathrm{Gr}R$ 与 $\mathrm{Gr}R$ 上恒等函子自然同构. 右模情形有类似结论成立.

1.4 分次 Jacobson 根

Definition 1.42 (分次不可约模, 分次完全可约模)**.** 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, 如果 M 非零且分次子模只有零模和它本身, 则称 M 是**分次不可约模**或**分次单模**. 分次不可约模的平移仍分次不可约. 类似可定义右模情形. 如果非零分次模 M 是一些分次不可约模的直和, 则称它是**分次完全可约模**.

Example 1.43. 设 R 是分次环, I 是极大分次左理想, 那么 R/I 是分次不可约模 (所以 R 的每个分次极大左理想都是某个分次不可约模 M 的零化子 $\mathrm{Ann}_R M$). 例如 Laurent 多项式环 $\Bbbk[x, x^{-1}]$ 作为自身上的分次模是分次不可约的 (见 [例1.27]) 但它作为自身上的模不是不可约模. 反之, 若分次环 R 的分次左理想 I 使得 R/I 作为分次 R-模不可约, 则 I 是极大分次左理想.

Example 1.44 (分次不可约模未必集中在 0 次)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, 把 $R = \Bbbk$ 视作天然分次环, 并将它也视作集中在 1 次的分次模 M, 那么 M 作为分次不可约模它非零的直和项未必在 0 次位置.

下面的引理告诉我们分次不可约模可由任何非零齐次元生成, 并且每个非零位置是 R_0-不可约的.

Lemma 1.45. 设 R 是分次环, $M = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ 是分次不可约左 R-模, 那么 M 的任何非零齐次元可生成 M. 并且对任何 $M_i \neq 0$, 有 M_i 是不可约 R_0-模. 特别地, M 作为 R_0-模是完全可约模.

证明: 因为非零齐次元生成 M 的非零分次子模, 所以第一个结论明显成立. 如果 $M_i \neq 0$, 任取 $x_i \neq 0 \in M_i$, 那么 Rx_i 是 M 的非零分次子模, 所以 $Rx_i = M$, 从而 $R_0 x_i = M_i$, 这表明 M_i 作为 R_0-模是不可约的. □

Example 1.46 (分次不可约模未必可由非零元生成)**.** 前面我们指出分次不可约模可由非零齐次元生成, 但这不代表它的任何非零元可生成整个模. 例如域 $\Bbbk$ 上的 Laurent 多项式环 $\Bbbk[x, x^{-1}]$ 作为自身上的分次模不可约, 考虑非零元 $1 + x \in \Bbbk[x, x^{-1}]$, 已在 [例1.27] 中指出它不可逆, 所以 $\Bbbk[x, x^{-1}]$ 无法由 $1 + x$ 生成.

Lemma 1.47. 设 R 是分次环, N 是不可约左 R_0-模, 记 $t(R \otimes_{R_0} N)$ 是分次 R-模 $R \otimes_{R_0} N$ 所有在 0 次部分是零的分次子模之和, 它也是分次子模, 那么 $M = (R \otimes_{R_0} N)/t(R \otimes_{R_0} N)$ 是分次不可约左 R-模, 并且它的 0 次部分 M_0 满足作为 R_0-模同构于 N 且 M 的任何非零齐次元 $x_i \in M_i$ 都存在 $a_{-i} \in R_{-i}$ 使得 $a_{-i} x_i \neq 0 \in M_0$.

证明: 注意到 $R\otimes_{R_0}N=\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}R_i\right)\otimes_{R_0}N\cong\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(R_i\otimes_{R_0}N)$, 所以 $R\otimes_{R_0}N$ 的 0 次部分作为 R_0-模同构于 $R_0\otimes_{R_0}N$ 是不可约模. 特别地, $(R\otimes_{R_0}N)_0\neq 0$, 这一观察说明 M 的 0 次部分 M_0 非零且作为 R_0-模也不可约. 任取 M 的非零齐次元 $x_i\in M_i$, 由 Rx_i 是 M 的非零分次子模可知 $(Rx_i)_0\neq 0$. 这说明 $a_{-i}\in R_{-i}$ 使得 $a_{-i}x_i\neq 0\in M_0$. 最后我们来说明 M 是分次不可约 R-模. 任取 M 的非零分次子模 X, 根据前面的讨论知 $X_0\cap M_0\neq 0$, 将 $X_0\cap M_0$ 视作 R_0-模立即得到 $X_0=M_0$, 根据 M 的定义可知 $RM_0=M$, 故 $X_0=M_0$ 也说明了 $X=M$. 这就说明了 M 为分次不可约模. $\square$

Definition 1.48 (分次 Jacobson 根)**.** 设 R 是分次环, 称 R 全体极大分次左理想之交为 R 的**分次 Jacobson 根**, 记作 $J(R)$. 为了区分非分次情形, 记通常的 Jacobson 根为 $\mathrm{Jac}(R)$.

对含幺环 R, 我们知道 $\mathrm{Jac}(R)$ 是 R 全体极大左理想之交也是全体极大右理想之交. 我们稍后会说明分次 Jacobson 根 $J(R)$ 也是分次环 R 的全体极大分次右理想之交.

Proposition 1.49. 设 R 是分次环, 那么分次 Jacobson 根 $J(R)$ 是全体分次不可约左 R-模的零化子之交. 特别地, $J(R)$ 是双边分次理想. 同理可证不可约右模零化子之交就是全体极大分次右理想之交.

证明: 记 Q 是全体分次不可约左 R-模的零化子之交, 因为每个极大分次左理想都是某个分次不可约左 R-模的零化子, 所以 $J(R)\supseteq Q$. 反之, 任何分次不可约左 R-模 M, 取 $x_d\neq 0\in M_d$, 则 $f:R\to M(d),a\mapsto ax_d$ 是分次模同态, 其核 $\mathrm{Ker}f=\mathrm{ann}_R(x_d)$ 是 R 的极大分次左理想, 这也就是说 M 的任何非零齐次元零化子均为 R 的极大分次左理想, 于是由 Ann_RM 是 M 所有非零齐次元零化子之交得到 Q 是 R 的一些极大分次左理想之交, 这说明 $Q\supseteq J(R)$, 从而 $J(R)=Q$. $\square$

Corollary 1.50. 设 R 是分次环, M 是分次不可约左 R-模, 则 $J(R)M=0$.

证明: 根据前面的命题, $J(R)\subseteq\mathrm{Ann}_RM$. 故 $J(R)M=0$. $\square$

Corollary 1.51. 设 R 是分次环, $\mathrm{Jac}(R_0)$ 是 R 的 0 次部分的环的非分次 Jacobson 根, 那么对 R 的分次 Jacobson 根 $J(R)$, 我们有 $J(R)\cap R_0=\mathrm{Jac}(R_0)$.

证明: 任取分次不可约模 M, [引理1.45] 表明 M 是完全可约 R_0-模, 故 $\mathrm{Jac}(R_0)M=0$, 结合 [命题1.49] 得 $\mathrm{Jac}(R_0)\subseteq J(R)\cap R_0$. 另一方面, 对任何不可约左 R_0-模 N, 考虑 [引理1.47] 中定义的分次不可约模 $M=(R\otimes_{R_0}N)/t(R\otimes_{R_0}N)$, 它满足 M_0 作为 R_0-模同构于 N 且 M 的任何非零齐次元 $x_i\in M_i$ 都存在 $a_{-i}\in R_{-i}$ 使得 $a_{-i}x_i\neq 0\in M_0$. 于是 $J(R)M=0$, 特别地, $(J(R)\cap R_0)M_0=0$, 那么也有 $(J(R)\cap R_0)N=0$. 这说明 $J(R)\cap R_0\subseteq\mathrm{Jac}(R_0)$. $\square$

Corollary 1.52. 设 $R=\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}R_i$ 是正分次环, 则 $J(R)=\mathrm{Jac}(R_0)\oplus R_{\geq 1}$, 其中 $R_{\geq 1}=\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}R_i$.

证明: 根据 [推论1.51] 立即可知 $\mathrm{Jac}(R_0)\subseteq J(R)\subseteq\mathrm{Jac}(R_0)\oplus R_{\geq 1}$. 对每个 $x_i\in R_i,i\geq 1$, 考虑分次左理想 Rx_i, 如果 $Rx_i\not\subseteq J(R)$, 则有某个极大分次左理想 M 满足 $Rx_i\not\subseteq M$, 于是 $Rx_i+M=R$. 这说明存在 $b\in R,y\in M$ 使得 $bx_i+y=1$, 比较等式两边元素的 0 次部分得到 $1\in M$, 矛盾. 从而 $R_i\subseteq J(R),\forall i\geq 1$. $\square$

Corollary 1.53 (Nakayama)**.** 设 $R=\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}R_i$ 是正分次环, M 是有下界的非零分次 R-模, 并设 n 是使得 $M_n\neq 0$ 的最小整数. 如果 M_n 是有限生成 R_0-模, 那么 $J(R)M\subsetneq M$.

证明: 若不然, 有 $M = J(R)M = J(R_0)M + R_{\geq 1}M$, 从而 $M_n = J(R_0)M_n$, 由非分次版本的 Nakayama 引理得 $M_n = 0$, 矛盾. 所以 $J(R)M \subsetneq M$. □

Example 1.54 (连通分次代数的分次 Jacobson 根)**.** 设 $A = \Bbbk \oplus A_{\geq 1}$ 是域 $\Bbbk$ 上的连通分次代数, 那么其分次 Jacobson 根为 $J(A) = A_{\geq 1}$. 如果 I 是连通分次代数 A 的真分次理想, 那么 $I \subseteq A_{\geq 1}$, 故连通分次代数的分次 Jacobson 根是最大真分次理想. 这类似于含幺交换局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 它的 Jacobson 根与唯一极大理想一致.

于是可知对域 $\Bbbk$ 上的连通分次代数 A 和 A 上有下界的分次模 M, 易知 $M = 0$ 的充要条件是 $J(A)M = M$. 充分性成立的原因是当 $M \neq 0$ 时, 设 n 是使得 $M_n \neq 0$ 的最小整数, 这时 $J(A)M \subseteq M_{\geq n+1} \subsetneq M$, 矛盾. 我们把这里的讨论总结为下述推论.

Corollary 1.55 (Nakayama)**.** 给定域 $\Bbbk$ 上的连通分次代数 A 和 A 上有下界的分次模 M, 那么 $M = 0$ 的充要条件是 $J(A)M = M$.

Proposition 1.56. 设 R 是分次环, 则 $J(R)$ 是满足以下性质的分次真理想 I 中最大的: 对任何齐次元 $a \in R$, $\overline{a} \in R/I$ 可逆蕴含 $a \in R$ 可逆. 类似地可以证明 R 的全体极大分次右理想之交也满足该性质, 所以 $J(R)$ 也是 R 的全体极大分次右理想之交.

证明: 首先说明 $J(R)$ 满足对任何齐次元 $a \in R, \overline{a} \in R/J(R)$ 可逆蕴含 $a \in R$ 可逆. 注意到 Ra 是分次左理想, 如果它不是 R, 则 Ra 含于某个极大分次左理想 M, 而 $\overline{a} \in R/J(R)$ 可逆蕴含着存在 $b \in R$ 使得 $1 - ba \in J(R)$, 于是 $1 \in M$, 矛盾. 因此 $Ra = R$, 于是知存在齐次元 $b \in R$ 使得 $ba = 1$, 那么 $\overline{b}$ 作为 $R/J(R)$ 中可逆元, 我们重复上述讨论可得 $Rb = R$, 即也存在齐次元 c 使得 $cb = 1$. 现在 b 既有左逆又有右逆, 我们推得 b 是 R 中可逆元, 因此 a 可逆. 其次我们需要说明任何满足：对任何齐次元 $a \in R, \overline{a} \in R/I$ 可逆蕴含 $a \in R$ 可逆. 这一条件的分次真理想 I 一定含于 $J(R)$. 假设 $I \not\subseteq J(R)$, 那么有某个极大分次左理想 M 不包含 I, 这意味着 $I + M = R$, 故存在 I 中齐次元 a 与 M 中齐次元 b 使得 $a + b = 1$, 注意到 $\overline{b}$ 是 R/I 中可逆元, 根据 I 的假设推得 b 可逆, 这和 M 是真左理想矛盾. 因此 $I \subseteq J(R)$. □

与非分次情形一样, 我们也有下面的有限生成分次模版本的 Nakayama 引理成立.

Theorem 1.57 (分次 Nakayama 引理)**.** 设 R 是分次环, I 是 R 的分次左理想, 那么以下三条等价:
(1)$I \subseteq J(R)$.
(2) 对任何有限生成分次左 R-模 M, $IM = M$ 蕴含 $M = 0$.
(3) 对任何分次左 R-模 M 和分次子模 N, 只要 M/N 是有限生成模, 那么 $N + IM = M$ 蕴含 $N = M$.

证明: (1)⇒(2): 假设 $M \neq 0$, 那么它是非零有限生成分次模, 故存在极大分次子模 M', 那么 M/M' 是分次不可约左 R-模, 依 [命题1.49], $J(R)(M/M') = 0$, 所以 $J(R)M \subseteq M'$, 这说明 $M = IM \subseteq J(R)M \subseteq M'$, 矛盾.

(2)⇒(3): 这时 $N + IM = M$ 保证了对有限生成分次模 M/N 有 $I(M/N) = M/N$, 进而 $M = N$.

(3)⇒(1): 假设 $I \not\subseteq J(R)$, 那么存在极大分次左理想 M 使得 $I \not\subseteq M$, 这说明 $I + M = M + IR = R$, 因为 R/M 是分次不可约模, 它是有限生成的, 所以 $R = M$, 矛盾. □

Corollary 1.58. 设 R 是分次环, M 是分次有限生成 R-模, $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq M$ 是齐次元集, 那么 M 可由 $\{x_1, ..., x_n\}$ 生成的充要条件是 $M/J(R)M$ 可由 $\{\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}\}$ 生成.

1.5 分次投射模

在本节我们将看到分次投射模事实上等价于具有分次结构的投射模 (见 [命题1.64]).

Definition 1.59 (分次自由模, 分次投射模)**.** 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模.

- 如果 M 是自由 R-模且有个基是由齐次元构成的, 则称 M 是**分次自由模**.
- 如果 M 满足函子 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(M,-):\mathrm{Gr}R\to\mathbf{Ab}$ 是正合函子, 则称 M 是**分次投射模**.

Proposition 1.60. 一族分次模的直和是分次投射模当且仅当每个直和项是分次投射模.

与非分次情形完全类似的方法我们可以得到:

Proposition 1.61. 分次自由模是分次投射模.

在 R-Mod 中任何模 M 都满足存在投射模 P 以及 P 到 M 的满模同态. 一般地, 若 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 满足任何对象 A 都满足存在**投射对象** P(即满足任何 epic 态 $\varepsilon:B\to C$ 和态 $f:P\to C$, 存在态 $g:P\to B$ 使得 $\varepsilon g=f$) 以及 P 到 A 的 epic 态, 则称 $\mathcal{A}$ 有**足够多的投射对象**. 那么模范畴有足够多的投射对象, 在分次模范畴中, 也有足够多的投射对象:任取分次环 R 上的分次左 R-模 $M=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}M_i$, 我们来构造一个分次自由左 R-模 F 以及它到分次模 M 的满分次模同态 $\varepsilon:F\to M$. 具体地, 可选取 M 的齐次生成元集 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 那么我们可作一个以 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为基的自由 R-模 F, 那么 F 到 M 有自然的满同态 ε 将每个 u_α 映至 u_α. 对每个整数 i, 定义 F_i 是所有形如 $a_ju_\alpha(a_j\in R_j,u_\alpha\in M_{i-j})$ 的有限和构成的集合, 它构成 F 的加法子群且 $F=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}F_i,R_jF_i\subseteq F_{i+j},\forall i,j\in\mathbb{Z}$. 所以 L 是分次自由 R-模且 ε 是分次模同态. 总结为下述推论.

Corollary 1.62. 设 R 是分次环, 那么任何分次模 M 满足存在分次自由模 F 和满分次模同态 $\varepsilon:F\to M$.

Remark. 根据前面的讨论, 如果 M 是有限生成的分次模, 那么 F 也可取成有限生成分次自由模.

Corollary 1.63. 设 P 是分次左 R-模, 那么 P 是分次投射模的充要条件是它是某个分次自由模 F 的分次直和因子, 即存在 F 的分次子模 L 使得 $F=P\oplus L$.

证明: 注意分次模在其直和因子上的标准投射也是分次模同态, 故应用非分次情形完全相同的方法便得. □

下面的命题告诉我们分次模在分次模范畴中投射与在模范畴中投射是等价的.

Proposition 1.64. 设 P 是分次左 R-模, 那么 P 是分次投射模的充要条件是 P 是投射模.

证明: 必要性是明显的, 因为 [推论1.63] 告诉我们分次投射模是分次自由模的直和因子, 自由模的直和因子必定是投射模. 所以要说明的仅有充分性. 先取定分次自由模 F 以及 F 到 P 的满分次模同态 $\pi:F\to P$, 那么由 P 是投射模知存在模同态 $\alpha:P\to F$ 使得 $\pi\alpha=\mathrm{id}_P$. 注意! 这里 α 未必是分次模同态. 下面来修正 α 得到一分次模同态:定义 $j:P\to F,\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}x_i\mapsto\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}(\alpha(x_i))_i$, 其中 $(\alpha(x_i))_i$ 表示元素 $\alpha(x_i)\in F$ 的 i 次部分, 那么 j 是分次模同态且满足 $\pi j=\mathrm{id}_P$, 这说明 P 是某个分次自由模的直和因子, 进而得到 P 分次投射. □

根据上述证明过程使用的技术也可证明下述结果成立.

Lemma 1.65. 设 M 是分次 R-模, N 是 M 的分次子模, 那么 N 是 M 的分次直和因子当且仅当 N 是 M 的直和因子.

证明: 只需证明充分性：设分次子模 N 满足存在 M 的子模 L 使得 $M = N \oplus L$, 记 $j : N \to M$ 是标准嵌入, 则有 R-模同态 $p : M \to N$ 使得 $pj = \mathrm{id}_N$, 定义 $p' : M \to N, \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} x_i \mapsto \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} p(x_i)_i$, 那么 p' 是分次模同态并且 $p'j = \mathrm{id}_N$. 由此可知 $M = N \oplus \mathrm{Ker}p'$, 即 N 是分次直和因子. □

Example 1.66. 对分次 $\Bbbk$-代数 A 和分次 $\Bbbk$-线性空间 V, $A \otimes_{\Bbbk} V$ 赋予标准分次, 那么它作为左 A-模是自由的, 所以是分次自由 A-模.

既然 $\mathrm{Gr}R$ 有足够多投射对象, 我们就可以和模范畴中一样考虑每个对象的投射分解. 如无特别说明, 涉及分次模的复形默认在分次模范畴上的复形范畴中考虑. 与非分次情形一样我们可以定义一个分次模上分次投射复形、分次模上表示以及下面的分次投射分解.

Definition 1.67 (分次投射分解)**.** 设 R 是分次环, M 是分次 R-模, 若下述形式的正合复形 $(P_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$

$$\longrightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \longrightarrow \quad \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

满足每个 P_i 是分次投射模, d_i 和 ε 是分次模同态, 则称 $(P_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$ 是 M 的**分次投射分解**或**分次投射表示**. 若更进一步每个 P_i 是分次自由模, 称 $(P_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$ 是 M 的**分次自由分解**.

因为前面我们看到了 $\mathrm{Gr}R$ 有足够多投射对象, 所以任何分次模都有分次投射分解. 与非分次情形完全一样的方法我们可证得下面的分次比较引理.

Proposition 1.68 (分次比较引理)**.** 设 R 是分次环, M, M' 均为分次 R-模, $(P_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$ 是 M 上分次投射复形, $(P'_\bullet, d'_\bullet, \varepsilon')$ 是 M' 上的一个表示. 那么对任何分次模同态 $u : M \to M'$, 存在链同伦意义下唯一的分次链映射 $\alpha : (P_\bullet, d_\bullet) \to (P'_\bullet, d'_\bullet)$ 使得 $\varepsilon'\alpha_0 = u\varepsilon$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\alpha_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & P'_n \arrow[r, "d'_n"] & P'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "d'_2"] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

我们也有分次形式马蹄引理成立, 它的证明和非分次情形没有区别. 在 [命题1.36] 中我们看到分次模决定的张量函子是右正合函子, 所以我们可以考虑分次张量函子的左导出函子, 采用和非分次情形一样的记号：把分次左 R-模 X 决定的张量函子 $- \otimes_R X : \mathrm{Gr}R^\circ \to \mathbf{Ab}$ 的 n 次左导出函子记为 $\mathrm{Tor}^n_R(-, X)$. 采用非分次情形的记号是合理的, 原因是我们已经在 [命题1.64] 中看到分次投射模作为模也是投射的, 所以任何分次模的分次投射分解如果在 R-模范畴中看, 也给出了模的投射分解, 因此这里分次模范畴上 Tor 函子作用分次模得到的加群和非分次情形的 Tor 群是同构的. 我们还是 Tor 函子的长正合列性质, 即任何分次模短正合列诱导 Tor 群长正合列. 完全类似地可考虑分次右 R-模决定的张量函子的左导出函子, 它也具备 Tor 函子的通常性质.

在分次情形也有极小投射分解的概念. 如果分次模 M 的分次子模 N 满足对任何 M 的分次子模 X, $X + N = M$ 蕴含 $X = M$, 称 N 是**分次多余子模**. 由定义知分次多余子模的分次子模还是分次多余的. 对连通分次代数 A 上有下界的分次模 M, 由 [推论1.55] 可知 JM 是 M 的分次多余子模.

Definition 1.69. 设 R 是分次环, 如果分次 R-模 M 的分次投射分解 $(P_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$ 满足每个 $\mathrm{Ker}d_i$ 是 P_i 的分次多余子模, 则称 $(P_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$ 是 M 的**分次极小投射分解**.

Proposition 1.70. 连通分次代数 A 上有下界的分次模 M 总存在分次极小投射分解.

证明: 设 V_0 是 M 作为分次 $\Bbbk$-线性空间的分次 $\Bbbk$-子空间使得 $M = V_0 \oplus JM$ 是分次 $\Bbbk$-子空间的直和, 考虑 $P_0 = A \otimes_{\Bbbk} V_0$, 赋予标准分次 (因为 A 是正分次且 M 下有界, 所以 P_0 也下有界), 它是分次自由 A-模 (见[例1.66]), 作分次 A-模同态 $\varepsilon : P_0 \to M$ 使得 $\varepsilon(a \otimes v) = av$. 根据 $V_0 \subseteq \mathrm{Im}\varepsilon$ 得到 $M/\mathrm{Im}\varepsilon = J(M/\mathrm{Im}\varepsilon)$, 这迫使 ε 是满射. 下面我们说明 $\mathrm{Ker}\varepsilon \subseteq JP_0$ 来得到 $\mathrm{Ker}\varepsilon$ 是分次多余子模. 若不然, 存在 $\mathrm{Ker}\varepsilon$ 的齐次元 $x \notin JP_0$ 以及齐次元 $v \neq 0 \in V_0$ 使得 $x - 1 \otimes v \in JP_0$, 作用 ε 得到 $0 \neq v \in JM \cap V_0$, 矛盾. 所以 $\mathrm{Ker}\varepsilon \subseteq JP_0$. 于是 $\mathrm{Ker}\varepsilon$ 是有下界的多余分次子模. 再对 $\mathrm{Ker}\varepsilon$ 重复上述讨论, 递归地可构造分次极小投射分解. □

与非分次情形类似地, 易证分次环上的分次模只要分次极小投射分解存在, 就在复形同构意义下唯一. 并且任何 M 的分次投射分解到 M 的极小分次投射分解有满链映射. 此外我们也可以得到 M 的任何分次投射分解也可以表示为 M 的一个分次投射分解与分次模正合复形的直和.

在非分次情形对每个左 R-模 M 我们会关注它的投射维数 $\mathrm{p.dim}_R M$, 我们当然也可以对分次情形引入**分次投射维数**的概念. 但我们可以说明分次模的分次投射维数事实上就是它作为非分次模的投射维数.

Proposition 1.71. 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, 那么 M 的分次投射维数就是 $\mathrm{p.dim}_R M$.

证明: 因为分次投射模作为模是投射的, 所以分次模 M 的每个分次投射分解自然给出 M 的投射分解, 从而知 $\mathrm{p.dim}_R M$ 不超过 M 的分次投射维数. 所以当 $\mathrm{p.dim}_R M = +\infty$ 时结论直接成立. 下设 $\mathrm{p.dim}_R M = n \in \mathbb{N}$, 设分次模正合列

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

满足每个 P_i 是分次投射模, 那么也是投射模, 所以由非分次模投射维数的基本性质我们得到 K_n 作为非分次模就是投射模, 这时应用 [命题1.64] 可知 K_n 是分次投射模, 于是我们得到 M 的分次投射维数不超过 n, 进而这时 M 的分次投射维数就是 n. □

我们也可以类似非分次情形去定义分次环的**分次整体维数**, 具体地, 对分次环 R, 分次整体维数 $\mathrm{gr.gl.dim}R$ 定义为 R 上所有分次模投射维数的上确界. 那么根据定义以及 [命题1.71] 马上看到

Proposition 1.72. 设 R 是分次环, 那么 $\mathrm{gr.gl.dim}R \leq \mathrm{gl.dim}R$.

1.6 分次内射模

Definition 1.73 (分次内射模)**.** 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, 如果 M 满足函子 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(-, M) : \mathrm{Gr}R \to \mathbf{Ab}$ 是正合函子, 则称 M 是**分次内射模**.

Proposition 1.74. 一族分次模 I_α 的积是分次内射模当且仅当每个 I_α 是分次内射模.

Example 1.75 (分次内射模的平移还是分次内射)**.** 设 R 是分次环, 对自然数 d, 平移函子 $(d) : \mathrm{Gr}R \to \mathrm{Gr}R$ 是正合函子, 所以分次模 M 是分次内射模的充要条件是 $M(d)$ 是分次内射模.

Definition 1.76 (分次本质扩张)**.** 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, 如果分次子模 N 满足对 M 任何非零分次子模 X 有 $X\cap N\neq 0$, 则称 N 是**分次本质子模**, 而 M 称为 N 的**分次本质扩张**, 记作 $N\trianglelefteq_e M$(易见分次本质扩张具有传递性). 如果分次本质扩张 $M\subsetneq N$, 称这是**真分次本质扩张**. 如果分次本质扩张 $E\supseteq M$ 满足不存在 M 的分次本质扩张 E' 使得 $E\subsetneq E'$, 则称该分次本质扩张 $E\supseteq M$ 是**极大的**. 对分次单同态 $j:N\to M$, 若 $j(N)$ 是 M 的分次本质子模, 称 j 是**分次本质单同态**.

与非分次情形类似地, 一个分次子模 N 是分次模 M 的分次本质子模当且仅当对 M 的任何非零齐次元 x 有 $N\cap Rx\neq 0$. 易见如果分次模 X 没有真分次本质扩张, 那么和它分次同构的分次模也没有真分次本质扩张. 和非分次情形一样, 分次内射模也就是没有真分次本质扩张的分次模.

Proposition 1.77. 设 R 是分次环, Q 是分次左 R-模, 那么 Q 是分次内射模的充要条件是任何分次本质单同态 $0\longrightarrow Q\xrightarrow{i} M$ 是同构.

证明: 必要性：这时存在分次模同态 $p':M\to Q$ 使得 $p'i=\mathrm{id}_Q$, 由此立即得到 $M=\mathrm{Ker}p'\oplus\mathrm{Im}i$, 结合 i 是分次本质单同态迫使 $\mathrm{Ker}p'=0$, 这说明 i 是分次模同构. 充分性：我们需要说明对任何分次模 M 及其分次子模 N, 记 $j:N\to M$ 是标准嵌入, 那么对任何分次模同态 $\alpha:N\to Q$, 存在分次模同态 $g:M\to Q$ 使得

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

交换. 为此, 作分次模 $T=(M\oplus Q)/\{(x,-\alpha(x))|x\in N\}$ 易见 $(\{(x,-\alpha(x))|x\in N\}$ 是分次子模, 我们选择这个分次子模作商的原因是 Q 可通过自然的方式嵌入 T, 设为 $u:Q\to T$, 之后会说明 $u(Q)$ 是 T 的分次直和因子, 并注意 M 到 T 的自然映射 $M\to T,x\mapsto\overline{(x,0)}=\overline{(0,\alpha(x))}$ 进而 T 在 $u(Q)$ 上的标准投射可诱导出 M 到 Q 的分次模同态 g 使得 $gj=\alpha$) 考虑自然嵌入 $u:Q\to T,q\mapsto\overline{(0,q)}$, 它是分次单同态. 下证 $u(Q)$ 是 T 的分次直和因子, 考虑集合 $S=\{M'|M'\text{是}T\text{的分次子模并且}M'\cap u(Q)=0\}$, 那么 S 关于分次模的包含关系构成非空偏序集, 易见 S 任何全序子集有上界, 依 Zorn 引理, S 有极大元 M', 下面说明 $T=u(Q)\oplus M'$. 置

$$\begin{aligned} j_0:u(Q)&\to T/M' \\ x&\mapsto x+M' \end{aligned}$$

这是分次模同态并且 $M'\cap u(Q)=0$ 保证了 j_0 是单射. 此外, M' 的极大性进一步保证了 j_0 是分次本质单同态：任取 T/M' 非零分次子模 X/M'(其中 X 是包含 M' 的分次子模), 如果 $X/M'\cap j_0u(Q)=0$, 则 $(u(Q)+M')\cap X=M'$, 特别地, $u(Q)\cap X\subseteq u(Q)\cap M'=0$, 结合 $X\supsetneq M'$ 得到矛盾. 根据条件, Q 出发的任何分次本质单同态都为同构, 这说明 j_0 是同构, 进而 $T=M'\oplus u(Q)$. 现在我们可以定义出 α 的扩充 $g:M\to Q$. 具体地, 设 $\pi:T\to Q,m'+u(q)\mapsto q$, 这里 $m'\in M',q\in Q$, 这是定义合理的分次模同态, 作 $g:M\to Q,x\mapsto\pi(\overline{(x,0)})$, 它是分次模同态并且当 $x\in N$ 时, $g(x)\pi(\overline{(x,0)})=\pi(\overline{(0,\alpha(x))})=\pi(u(\alpha(x)))=\alpha(x)$, 所以分次模同态 g 确实满足 $gj=\alpha$. 即说明了 Q 是分次内射模. $\square$

Corollary 1.78. 设 R 是分次环, Q 是分次左 R-模, 则 Q 是分次内射模当且仅当 Q 没有真分次本质扩张.

现在我们做了充分的准备去说明分次模范畴有足够多的内射对象.

Corollary 1.79. 设 R 是分次环, 那么任何分次模 M 都是某个分次内射模 Q 的分次子模.

证明: 在 R-Mod 中 M 作为 R-模可嵌入一内射模 I, 作 $S = \{M'|M'\text{是}I\text{的子模并且其上有分次结构}M' = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M'_i\text{使得}M\text{是}M'\text{的分次子模}\}$, 那么 S 非空且关于分次模包含关系构成偏序集, 易验证 S 任何全序子集有上界, 所以根据 Zorn 引理 S 有极大元 Q, 下证 Q 分次内射.

我们已经看到一个分次模是分次内射模的充要条件是它没有真本质扩张, 下面用反证法说明 Q 是分次内射模. 如果 Q 不是分次内射模, 那么它有真分次本质扩张 $Q \subseteq Q'$. 因为 I 是内射模, 所以存在模同态 $f : Q' \to I$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "j"] \arrow[d] & Q' \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

下面说明 f 是单射, 一旦证明这一点, 用 Q' 上分次结构赋予 $f(Q')$ 分次结构使之成为真包含 Q 的分次子模, 进而与 Q 的极大性矛盾, 由此得到 Q 是分次内射模. 为了说明 f 是单射, 我们说明若 $\mathrm{Ker}f \neq 0$, 那么对每个 $x \neq 0 \in \mathrm{Ker}f$, 存在非零齐次元 $c \in R$ 使得 $cx \neq 0 \in Q$, 进而可知 $f(cx) = 0$, 这和 $f|_Q$ 是单射相矛盾.

设 $x = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_j, x_i, x_j \neq 0, j \geq i$, 对 $j - i \in \mathbb{N}$ 作归纳证明结论. 如果 $i = j$, 那么 x 本身是非零齐次元, 这时利用 Q 是 Q' 的本质分次子模即得 $Rx \cap Q \neq 0$. 假设结论对 $j - i = n - 1 (n \geq 1)$ 的情形成立, 并设这时 $j - i = n$, 那么对 x_i, 存在非零齐次元 b 使得 $bx_i \neq 0 \in Q$, 如果 $bx = bx_i$, 那么结论直接成立. 否则, 对 $b(x - x_i) \neq 0 \in \mathrm{Ker}f$ 应用归纳假设即知存在非零齐次元 a 使得 $ab(x - x_i) \neq 0 \in Q$, 于是取 $c = ab$, 我们得到 $cx \neq 0 \in Q$, 这就得到了 $f(cx) = 0$, 结合前面的讨论我们可得 f 是单射. $\square$

于是知一个分次模是分次内射模当且仅当它是某个分次内射模的分次直和因子. 接下来可以和非分次时一样去考虑内射包. 下面的引理的证明和非分次情形完全类似.

Lemma 1.80. 设 R 是分次环, 那么对任何分次本质单同态 $j : N \to M$ 以及单分次模同态 $k : N \to Q$, 这里 Q 是分次内射模, 那么对任何使得下图交换的分次模同态 $l : N \to Q$ 必定是单射.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"'] & M \arrow[dl, dashed, "l"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

通过上述引理与非分次情形一样讨论可得下述推论.

Corollary 1.81. 设 R 是分次环, 那么对任何分次模 M, 设 Q_0 是以 M 为分次子模的分次内射模 (在 [推论1.79] 中已证存在性), 那么存在 Q_0 的分次内射子模 Q 使得 Q 是 M 的分次本质扩张.

证明: 作 $S = \{N \subseteq Q_0 | M\text{是}N\text{的分次本质子模}\}$, 则 $M \in S$ 并且易验证 $(S, \subseteq)$ 满足 Zorn 引理条件, 故由 Zorn 引理, 存在 $(S, \subseteq)$ 中极大元 Q, 从而 $i : M \to Q$ 是分次本质单同态, 下证 Q 是分次内射模. 根据 [命题1.77] 只需说明任何分次本质单同态 $k : Q \to L$ 是同构, 记 $j : Q \to Q_0$ 是标准嵌入.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & Q \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"'] & Q_0 \\ & & L \arrow[ur, dashed, "l"] & \end{tikzcd}$$

首先存在单分次模同态 $l: L \to Q_0$ 使得 $lk = j$, 于是 $M \trianglelefteq_e Q, k(Q) \trianglelefteq_e L$ 进而 $Q = j(Q) \trianglelefteq_e l(L) \subseteq Q_0$, 所以由 Q 的极大性保证了 $l(L) = Q = lk(Q)$, 所以 $L = k(Q)$, 即 k 是分次模同构, 从而 Q 是分次内射模. $\square$

Corollary 1.82 (分次内射包)**.** 设分次模 M 是分次模 I 的分次子模, 则以下三条等价：
(1)I 是 M 的极大分次本质扩张.
(2)I 是分次内射模且为 M 的分次本质扩张.
(3)I 是包含 M 的极小分次内射模.
称满足上述三个性质中任意一条的分次模 I 是 M 的**分次内射包**, 它明显在同构意义下唯一.

证明: (1)⇒(2)：因本质扩张的传递性知 I 没有真分次本质扩张, 从而 I 是分次内射模.

(2)⇒(3)：假设有包含 M 的分次内射模 Q 使得 Q 是 I 的分次真子模, 那么 I 是 Q 的真分次本质扩张, 这和 Q 的分次内射性相矛盾. 故 I 是包含 M 的极小分次内射模.

(3)⇒(1)：由 [推论1.81] 知存在 I 的分次本质子模 Q 使得 Q 是 M 的分次本质扩张, 由 I 的极小性, 得到 $I = Q$, 所以 I 是 M 的极大分次本质扩张. $\square$

下面是分次版本的 Baer 判别法, 其证明思想和非分次情形一样, 不过细节上略有不同.

Proposition 1.83 (分次 Baer 判别法)**.** 设 R 是分次环, 分次 R-模 Q 是分次内射模的充要条件是任何 R 的分次左理想 I 到 Q 的 d 次模同态都可以扩充为 R 到 Q 的 d 次模同态, 即对标准嵌入 $j: I \to R$, $i^*: \underline{\mathrm{Hom}}_R(R, Q) \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(I, Q)$ 是满射.

证明: 必要性由定义明显成立, 因为对任何次数为 d 的模同态 $f: I \to Q$, 可视作分次模同态 $f: I \to Q(d)$, 于是可扩充为分次模同态 $\tilde{f}: R \to Q(d)$, 这给出次数为 d 的分次模同态 $\tilde{f}: R \to Q$. 充分性的证明思想与非分次情形基本一样. 我们只需证明对任何分次模 M 及其子模 N, 设 $i: N \to M$ 是标准嵌入, 那么对任何分次模同态 $g: N \to Q$ 都存在分次模同态 $f: M \to Q$ 使得 $fi = g$. 考虑集合 $S = \{(M', f') | M'\text{是分次子模}, f': M' \to Q\text{是分次模同态且满足}f'|_N = g\}$, 它明显非空, 在其上定义二元关系 $(M_1, f_1) \leq (M_2, f_2) \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2, f_2|_{M_1} = f_1$ 可使 $(S, \leq)$ 成为非空偏序集, 不难验证它任何全序子集有上界, 于是应用 Zorn 引理得极大元 (M', f'). 最后我们使用反证法说明 $M' = M$. 假设 $M' \subsetneq M$, 取齐次元 $x \in M - M'$, 那么 $M' + Rx$ 是真包含 M' 的分次子模 (注意一直到现在我们还没使用条件), 设 $\deg x = d$. 考虑 $I = \{a \in R | ax \in M'\}$, 那么 I 是 R 的分次左理想, 定义 $h: I \to Q, a = \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} a_l \mapsto f'(ax) = \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} f'(a_l x)$, 它是次数为 d 的模同态, 所以可扩充为次数是 d 的模同态 $k: R \to Q$. 现定义 $f'': M' + Rx \to Q, y + ax \mapsto f'(y) + k(a)$, 它是定义合理的分次模同态并且 $f''|_{M'} = f'$, 这与 (M', f') 的极大性矛盾. 所以 $M' = M$, 结论成立. $\square$

如果一个分次模 Q 作为 R-模是内射的, 那么容易验证它也是分次内射模, 下面的例子表明反之不然.

Example 1.84 (分次内射模未必内射)**.** 考虑域 $\Bbbk$ 上 Laurent 多项式环 $\Bbbk[x, x^{-1}]$, 它作为自身上的分次模是分次不可约模 (回忆 [例1.27]), 它是分次理想仅有零理想和本身, 故依分次 Baer 判别法, $\Bbbk[x, x^{-1}]$ 是分次内射模. 但它作为 $\Bbbk[x, x^{-1}]$-模不是内射的, 原因是 $\Bbbk[x, x^{-1}]$ 是 P.I.D., 明显 $\Bbbk[x, x^{-1}]$ 作为自身上的模不是可除的.

总结一下, 分次模范畴有足够多的内射对象 (见 [推论1.79]), 分次模总有分次内射包并且它是同构唯一的. 与投射情形对偶地, 可定义一个分次模的下的分次内射复形、分次余分解和下面的分次内射分解.

Definition 1.85 (分次内射分解)**.** 设 R 是分次环, M 是分次 R-模, 若下述形式的正合复形 $(I^\bullet, d^\bullet, \eta)$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

满足每个 I^i 是分次投射模, d^i 和 η 是分次模同态, 则称 $(I^\bullet, d^\bullet, \eta)$ 是 M 的**分次内射分解**或**分次内射余表示**.

因为分次模范畴有足够多的内射对象, 所以任何分次模都有分次内射分解. 也有内射比较引理.

Proposition 1.86 (分次比较引理)**.** 设 R 是分次环, M, M' 是分次模, 设 (D, d, η) 是 M 下的一个分次内射复形, (D', d', η') 是 M' 的一个分次余表示, 那么对任给分次模同态 $\lambda : M' \to M$, 存在分次链映射 $g : (D', d') \to (D, d)$ 使得 $g^0\eta' = \eta\lambda$, 且这样的分次链映射 g 在同伦意义下唯一.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\eta"] & D^0 \arrow[r, "d^0"] & D^1 \arrow[r, "d^1"] & D^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\eta'"] \arrow[u, "\lambda"] & (D')^0 \arrow[r, "(d')^0"] \arrow[u, "g^0"] & (D')^1 \arrow[r, "(d')^1"] \arrow[u, "g^1"] & (D')^2 \arrow[r, "(d')^2"] \arrow[u, "g^2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

对一个分次模 M 的分次子模 N, 若 N 作为模是本质的, 那么 N 当然是 M 的分次本质子模. 事实上分次子模是分次本质子模也蕴含了它是本质子模.

Proposition 1.87. 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模, N 是 M 的分次子模. 那么 N 是分次本质子模的充要条件是 N 是本质子模.

证明: 只要验证必要性. 任取 M 的非零元 $x = x_t + x_{t+1} + \cdots + x_{s-1} + x_s$, 其中 $x_i \in M_i, t \le s, x_t, x_s \ne 0$. 下面对自然数 $s-t$ 作归纳证明存在 R 中非零齐次元 c 使得 $cx \ne 0 \in N \cap X$, 一旦证明该断言, 即 $Rx \cap N \ne 0$, 我们便得 N 是 M 是本质子模. 如果 $s - t = 0$, 那么 x 是非零齐次元, 于是由 N 是分次本质子模保证了 $Rx \cap N \ne 0$, 由此立即得到 c 的存在性. 假设结论对 $s-t$ 不超过 $n-1$ 的情形结论成立, 现设 $s - t = n \ge 1$, 首先存在非零齐次元 b 使得 $bx_t \ne 0 \in N$. 如果 $bx = bx_t$, 那么取 $c = b$ 即可. 否则, $b(x - x_t) \ne 0$, 对非零元 $b(x-x_t)$ 应用归纳假设, 存在非零齐次元 a 使得 $ab(x-x_t) \ne 0 \in N$. 取 $c = ab$ 是齐次元, 那么 $cx \ne 0 \in N$(前面已经说明 $bx_t \in N$, 所以 $cx \in N$). 由此我们得到对 M 的任何非零元 x, $Rx \cap N \ne 0$, 故 N 是本质子模. □

1.7 $\underline{\text{Ext}}$ 函子

在分次模范畴 $\mathrm{Gr}R$ 中, 我们已经看到共变加性函子 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(X, -) : \mathrm{Gr}R \to \mathrm{Gr}\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(X, -) : \mathrm{Gr}R \to \mathbf{Ab}$ 以及逆变加性函子 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, X) : \mathrm{Gr}R \to \mathrm{Gr}\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(-, X) : \mathrm{Gr}R \to \mathbf{Ab}$ 都是左正合函子 (见 [命题1.34]), 而分次模范畴本身具有足够多的投射对象和内射对象, 故可以此定义它们的右导出函子 (与非分析情形一样, 导出函子本质上不依赖于投射分解/内射分解的选取).

Definition 1.88. 设 R 是分次环, X 是分次模. 记左正合函子 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, X) : \mathrm{Gr}R \to \mathrm{Gr}\mathbb{Z}$ 的 n 次右导出函子为 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(-, X) : \mathrm{Gr}R \to \mathbf{Ab}$. 记 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(-, X)(M)$ 为 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(M, X)$. 对 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}R}(-, X) : \mathrm{Gr}R \to \mathbf{Ab}$, 记它的 n 次右导出函子是 $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Gr}R}(-, X)$, 并记 $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Gr}R}(-, X)(M)$ 为 $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Gr}R}(M, X)$.

与非分次情形一样我们有自然同构 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, X) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^0_R(-, X)$. 并且依分次马蹄引理同样可证明分次模短正合列诱导导出函子的长正合列.

Proposition 1.89. 任给分次 R-模短正合列 $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$, 有长正合列

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(M'',X) \xrightarrow{\beta^*} \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,X) \xrightarrow{\alpha^*} \underline{\mathrm{Hom}}_R(M',X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(M'',X) \longrightarrow \cdots .$$

与非分次情形一样可用$\underline{\mathrm{Ext}}$ 函子判定分次模的分次投射性, 证明和非分次情形基本一样.

Proposition 1.90 (分次投射模刻画)**.** 设 M 是分次 R-模, 则以下三条等价：(1)M 是分次投射模. (2) 对任何分次 R-模 N 有 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N)=0,\forall n\geq 1$. (3) 对任何分次 R-模 N 有 $\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,N)=0$.

和非分次情形一样我们可以通过取定 X 的分次投射分解来定义出函子 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(X,-)$, 它满足

$$\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(X,-)(M)=\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(X,M),\forall M\in \mathrm{ob}\ \mathrm{Gr}R.$$

并且是共变加性函子. 同样分次模短正合列有相应导出函子长正合列：

Proposition 1.91. 任给分次 R-模短正合列 $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$, 有长正合列

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(X,M') \xrightarrow{\beta^*} \underline{\mathrm{Hom}}_R(X,M) \xrightarrow{\alpha^*} \underline{\mathrm{Hom}}_R(X,M'') \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(X,M') \longrightarrow \cdots .$$

通过该$\underline{\mathrm{Ext}}$ 群长正合列性质可类似给出分次内射模的刻画.

Proposition 1.92 (分次内射模刻画)**.** 设 M 是分次 R-模, 则以下三条等价：(1)M 是分次内射模. (2) 对任何分次 R-模 N 有 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(N,M)=0,\forall n\geq 1$. (3) 对任何分次 R-模 N 有 $\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(N,M)=0$.

此外, 我们也可以考虑 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(X,-):\mathrm{Gr}R\to\mathbf{Ab}$ 的右导出函子, 它有完全一样的长正合列性质, 并且与非分次情形一样, 有 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(X,-)$ 的 n 次右导出函子作用任何分次 R-模 M 后作为加群同构于 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(X,M)$. 故和非分次时一样有两种方式计算 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N)$. 上述讨论也可对 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Gr}R}(-,X)$ 进行.

通过取定分次模 M 的分次投射分解, 基于前面的讨论可直接看到下述命题成立.

Proposition 1.93. 设 M,N 是分次 R-模, 那么有加群同构 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N)\cong\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Gr}R}(M,N(i))$. 并且当 R 是域 $\Bbbk$ 上分次代数时, 该加群同构便成为线性同构. 所以如无特别说明, 我们常将该同构视作等同, 即

$$\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N)=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Gr}R}(M,N(i)),$$

由此我们可以讨论分次 Ext 群 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N)$ 的分次.

我们也指出分次 Ext 群与通常 Ext 群在某些场合下一致.

Proposition 1.94. 设 R 是域 $\Bbbk$ 上分次代数, M,N 是分次左 R-模满足 M 有个有限生成分次投射表示, 那么 $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N)=\mathrm{Ext}^n_R(M,N),\forall n\geq 0$.

证明: 取定 M 的一个有限生成分次投射表示, 由 [命题1.31] 即得. □

现在我们可以介绍 (连通分次版本的)Artin-Schelter Gorenstein 代数与 Artin-Schelter 正则代数的概念, 它们是非交换代数几何中的重要研究对象.

Definition 1.95 (AS-Gorenstein 代数)**.** 设 A 是域 $\Bbbk$ 上连通分次 $\Bbbk$-代数, 称 A 为 d **维 Artin-Schelter Gorenstein 代数** (或简称为 **AS-Gorenstein 代数**), 如果
(1) A 的左右内射维数有限且为 d;
(2) $\underline{\mathrm{Ext}}^i_A({}_A\Bbbk, {}_AA) = 0, \underline{\mathrm{Ext}}^i_A(\Bbbk_A, A_A) = 0, \forall i \neq d$;
(3) 作为分次 $\Bbbk$-线性空间, $\underline{\mathrm{Ext}}^d_A({}_A\Bbbk, {}_AA) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^d_A(\Bbbk_A, A_A) \cong \Bbbk(l)$, 这里 $l \in \mathbb{Z}$ 被称为 **Gorenstein index**.

Remark. 这里的 AS-Gorenstein 代数可以认为是交换代数中 Gorenstein 局部环的类似物. 回忆含幺交换 Noether 局部环 R 如果内射维数有限, 则称为 **Gorenstein 局部环**. 由 Serre 定理, 正则局部环是 Gorenstein 局部环. 可以证明 Gorenstein 环总是 Cohen-Macaulay 局部环 (见我的 CM 环笔记). 回忆一个含幺交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上深度为 t 的非零有限生成模 M 的 **type**(记作 $r(M)$) 是指 M 关于 $\mathfrak{m}$ 的 t 次 Bass 数, 即 $r(M) = \dim_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^t_R(\Bbbk, M)$, 这里 $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$. 交换代数中的一个经典结果是对一个含幺交换 Noether 局部环, 它是 Gorenstein 局部环的充要条件是它是 type 为 1 的 Cohen-Macaulay 局部环. A. Grothendieck 在得到他局部对偶定理的同时也引入了 canonical 模的概念：含幺交换 Noether 局部环上一个极大 Cohen-Macaulay 模如果 type 为 1 且具有有限内射维数, 称之为该环的 **canonical 模** (也被称为 **dualizing 模**). 可以证明当 Cohen-Macaulay 局部环 R 上的 canonical 模存在时, 它在同构意义下唯一, 故我们常记之为 ω_R. 由 canonical 模的定义, 我们立即看到对一个 d 维交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 一个非零有限生成 R-模 ω_R 是 canonical 模的充要条件是

$$\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, \omega_R) = \begin{cases} 1, & i = d, \\ 0, & i \neq d. \end{cases}$$

Gorenstein 性与 canonical 模的联系是, 可以证明：一个 Cohen-Macaulay 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Gorenstein 局部环的充要条件是 R 的 canonical 模 ω_R 存在且 $\omega_R \cong R$. 因此, 一个内射维数是 d 的 Gorenstein 局部环 R(那么它的深度与 Krull 维数自然也都是 d), 满足

$$\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) = \begin{cases} 1, & i = d, \\ 0, & i \neq d. \end{cases}$$

这说明 d 维 Gorenstein 局部环满足 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) = 0, \forall i \neq d$ 以及 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) \cong \Bbbk$(作为 $\Bbbk$-线性空间). 反之, 如果一个 d 维 Cohen-Macaulay 局部环 R 满足 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) = 0, \forall i \neq d$ 以及 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) \cong \Bbbk$, 那么 R 必定是 Gorenstein 局部环. 总之, 我们可以看到：一个 d 维交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Gorenstein 局部环的充要条件是 R 满足 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) = 0, \forall i \neq d$ 以及 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) \cong \Bbbk$. 由此可见, AS-Gorenstein 局部环可以被认为是交换代数中 Gorenstein 局部环在非交换连通分次代数中的类似物.

Definition 1.96 (AS-正则代数)**.** 设 A 是域 $\Bbbk$ 上连通分次 $\Bbbk$-代数, 如果 A 是 d 维 AS-Gorenstein 代数并且整体维数是 d, 那么 A 称为 d 维 **Artin-Schelter-正则代数**, 简称为 **AS-正则代数**.

Remark. AS-正则代数最早来自 Artin 与 Schelter 于 1987 年的工作 [AS87]. AS-正则代数被认为是非交换射影空间中的"坐标环". 如果连通分次代数 A 本身是双边 Noether 的 (这时它左右整体维数一致, 并且可以证明左右内射维数有限的双边 Noether 环左右内射维数相同), 那么当 A 是整体维数有限的 AS-Gorenstein 环时, 其整体维数必定是 d. 一般地, 对左 Noether 环 R, 可以证明 (细节参见我的同调维数笔记) 当 $\mathrm{inj.dim}_R R$ 和 $\sup\{\mathrm{inj.dim}_R M | M\text{是内射维数有限的左}R\text{-模}\}$ 有限时, 这两个数相等, 即

$$\mathrm{inj.dim}_R R = \sup\{\mathrm{inj.dim}_R M | M\text{是内射维数有限的左}R\text{-模}\}.$$

特别地, 如果左 Noether 环的左整体维数有限, 那么该环的左整体维数就是 (左) 自内射维数.

1.8 Noether 性质

本节考虑分次代数以及分次模的 Noether 性质. 称一个分次环 R 上的分次模 M 是**左 Noether 的**, 如果它任何分次子模升链稳定, 或等价地, 任何分次子模有限生成. 与非分次情形一样, 一个基本的观察是分次模的分次 Noether 性质可以继承到分次子模. 我们知道含幺环 R 上的左 R-模 M 是 Noether 模当且仅当 M 任何子模有限生成. 对下有界的分次模, 下述命题表明任何分次子模有限生成足以保证模是 Noether 的.

Proposition 1.97. 设 R 是分次环, M 是下有界分次左 R-模, 则 M 是 Noether 模当且仅当 M 的每个分次子模是有限生成的.

证明: 必要性明显, 只要证充分性. 任给 M 的子模 N, 对每个整数 n, 定义 $(L_N)_n$ 是 $N \cap M_{\leq n}$ 中所有元素的 n 次部分构成的加子群, 那么 $L_N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (L_N)_n$ 明显是 M 的分次子模. 下证对 M 的子模链 $N \subsetneq N'$ 有分次子模链 $L_N \subsetneq L_{N'}$, 一旦证明该断言则条件保证了 M 的任何子模升链稳定. 首先存在整数 n 使得 $N \cap M_{\leq n} \subsetneq N' \cap M_{\leq n}$, 那么由 M 是下有界的, 存在满足上述条件的最小整数 l, 不妨设 $n = l$ 是满足条件的最小整数, 取 $y \in N' \cap M_{\leq n} - N \cap M_{\leq n}$, 那么 $y_n \notin L_N$, 若不然, 存在 $x \in N \cap M_{\leq n}$ 使得 $x_n = y_n$, 这说明 $x - y \in N' \cap M_{\leq n-1}$, 进而 n 的最小性迫使 $x - y \in N \cap M_{\leq n-1}$, 于是 $y \in N \cap M_{\leq n}$, 得到矛盾, 故 $L_N \subsetneq L_{N'}$. 结合前面的讨论得到 M 是 Noether 模. □

注意, 上述命题的证明过程还告诉我们更多.

Corollary 1.98. 设 R 是分次环, M 是下有界分次左 R-模, 则每个子模 N 可对应一 M 的分次子模 L_N, 使得当 $N \subsetneq N'$ 时有 $L_N \subsetneq L_{N'}$. 特别地, 对有下界的分次模 M, 它是 Artin(Noether) 模等价于它是分次 Artin(Noether) 模.

Corollary 1.99. 设 R 是正分次环, 那么 R 是左 Noether 环的充要条件是 R 的任何分次左理想有限生成.

Hilbert 基定理表明左 Noether 环 R 上的多项式环 $R[x]$ 还是左 Noether 的, 将多项式环视作正分次环后自然可以问

Question 1.100. 设 $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ 是正分次环, 满足 R_0 是左 Noether 模且每个 R_i 是有限生成左 R_0-模, 那么是否有 R 是左 Noether 环?

考虑域 $\Bbbk$ 上的自由代数 $\Bbbk\langle x_1, ..., x_n\rangle (n \geq 2)$, 它有天然的正分次结构使得该自由代数满足条件, 但明显不是左、右 Noether 环. 在交换情形也会有下面的反例.

Example 1.101 (局部有限连通分次交换代数未必 Noether)**.** 设 $A = \Bbbk[x_1, x_2, ...]$ 是域上可数个未定元的多项式代数, 通过定义 $\deg x_s = s$ 对多项式中的元素赋予新的次数 (例如单项式 $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 的次数是 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n$), 定义 A_i 是所有在新的次数意义下 i 次齐次多项式构成的 $\Bbbk$-线性空间, 则 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ 构成交换的连通分次代数, 它是局部有限的, 即每个 A_i 是有限维线性空间, 但 A 明显不是 Noether 环.

在交换代数中, 我们对交换正分次环的 Noether 性质有充分的刻画. 具体地, 对交换正分次环 $R=\bigoplus_{i=0}^{\infty}R_i$, R 是 Noether 环当且仅当 R_0 是 Noether 环且 R 是 R_0 上的有限生成代数. 明显该命题不能直接平行地在非交换情形给出, 例如域 $\Bbbk$ 上的自由代数 $\Bbbk\langle x_1,...,x_n\rangle(n\geq 2)$ 不是 Noether 环, 而它的 0 次部分 $\Bbbk$ 是 Noether 的, 各分次是 0 次部分上的有限生成模. 不过在非交换情形还是可以得到

Proposition 1.102. 设正分次环 $R=\bigoplus_{i=0}^{\infty}R_i$ 是左 Noether 环, 那么 R_0 是左 Noether 环且 R 作为 $\mathbb{Z}$-代数可由 R_0 和有限个正次数的齐次元 $u_1,...,u_n$ 生成. 并且若记 $S=\{v_1\cdots v_s|v_j\in\{u_1,...,u_n,1\},s\in\mathbb{N}\}$, 则 S 是 R 作为左 R_0-模的一个生成元集.

证明: 因 $R/R_{\geq 1}\cong R_0$, 所以 R_0 是左 Noether 环. 下面构造正次数元素 $u_1,...,u_n$ 使得 S 是 R 作为左 R_0-模的一个生成元集, 进而也得到了 R 作为 $\mathbb{Z}$-代数可由 R_0 和有限个正次数的元素 $u_1,...,u_n$ 生成. 设 $R_{\geq 1}$ 作为左 R-模有齐次生成元集 $\{u_1,...,u_n\}$, 它们都具有正次数, 下证 S 是 R 作为左 R_0-模的一个生成元集. 我们只需要说明每个 R_n 都在 S 张成的左 R_0-子模 N 中即可. 根据 S 的定义即知 R_0 在 N 中. 如果已证明 $R_0,...,R_{t-1}$ 在 N 中, 对 $R_t(t\geq 1)$ 每个非零元 x, 设 $x=\sum_{i=1}^{n}a_iu_i$, 不妨设每个 $a_iu_i\neq 0,a_i$ 是齐次元且 $\deg x=\deg a_i+\deg u_i$, 因为 a_i 次数严格小于 t, 所以由归纳假设我们得到 $R_t\subseteq N$. 由此得到结论. $\square$

Corollary 1.103 (正分次 Noether 环上有限生成正分次模的分次结构)**.** 设正分次环 $R=\bigoplus_{i=0}^{\infty}R_i$ 是左 Noether 环, 那么任何有限生成正分次左 R-模 M 满足每个 M_n 是有限生成左 R_0-模.

证明: 前面已经看到存在 R 的有限个正次数的齐次元 $u_1,...,u_n$ 使得 $S=\{v_1\cdots v_s|v_j\in\{u_1,...,u_n,1\}\}$ 是 R 作为左 R_0-模的一个生成元集. 于是使用交换情形完全类似的方法易证结论. $\square$

Corollary 1.104. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上的正分次左 Noether 代数, 如果 A_0 是有限维的, 那么 A 是有限生成 $\Bbbk$-代数且每个 A_n 是有限维的, 即 A 是局部有限维代数.

证明: 因为 A 作为 $\Bbbk$-代数可由 A_0 和有限多个正次数的齐次元 $u_1,...,u_n$ 生成, 所以如果 A_0 维数有限, 则 A 作为 $\Bbbk$-代数仿射. 这时 A 作为自身上的左模自然是有限生成的, 故每个 A_n 作为左 A_0-模有限生成, 从而作为 $\Bbbk$-线性空间也有限生成, 这一观察表明 A 是局部有限维代数. $\square$

1.9 齐次坐标环

在 [例1.7] 中我们已经介绍过射影簇的齐次坐标环, 它是经典代数几何中的主要研究对象. 易见齐次坐标环是多项式代数 $\Bbbk[x_0,...,x_n]$ 商掉一个分次理想的产物, 它天然继承多项式代数的分次, 故也是连通分次代数. 因此要研究齐次坐标环的分次代数性质, 研究多项式代数关于一个分次理想的商代数即可.

以下我们固定域上多项式代数 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 以及它的一个分次理想 $I\subsetneq A$, 并把之前介绍的分次代数基本理论特殊化在连通分次代数 A/I 上. 一个基本的观察是

Lemma 1.105. 连通分次代数 $\Bbbk[x_1,...,x_n]/I$ 是交换 Noether 连通分次代数, 故其上任何有限生成分次模 M 都是 Noether 模, 并且 M 具有有限生成分次投射表示.

Corollary 1.106. 连通分次代数 $A=\Bbbk[x_1,...,x_n]/I$ 满足 $\underline{\mathrm{Ext}}_A^n(\Bbbk,A)=\mathrm{Ext}_A^n(\Bbbk,A),\forall n\geq 0$.

回忆交换代数中的 Rees 定理 (证明细节见我的 CM 环笔记) 说对一个含幺交换 Noether 环 R 上的有限生成模 M 以及满足 $IM \neq M$ 的理想 I, 任何含于 I 的极大 M-正则序列长度可由

$$n = \min\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \mathrm{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}$$

给出. 现在取 $R = \Bbbk[x_1, ..., x_n]$, $I = (x_1, ..., x_n)$, 那么 $R/I \cong \Bbbk$ 且序列 $x_1, ..., x_n$ 是含于 I 的一个极大 R-正则序列, 特别地, $n = \min\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) \neq 0\}$. 同时, $\mathrm{p.dim}_R \Bbbk = n$(见吴老师同调代数讲义最后一节) 表明 $\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) = 0, \forall i \geq n+1$(也可以利用 $\mathrm{gl.dim}\Bbbk[x_1, ..., x_n] = n$ 来看). 总之, 我们得到 $\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) = 0, \forall i \neq n$ 以及 $\mathrm{Ext}^n_R(\Bbbk, R) \neq 0$. 那么 $\mathrm{Ext}^n_R(\Bbbk, R)$ 具有何种形式? 我们需要下述引理.

Lemma 1.107. 设 R 是含幺交换环, M, N 是 R-模, 如果 $x_1, ..., x_n$ 是包含在 $\mathrm{Ann}(N)$ 中的弱 M-正则序列, 那么有 R-模同构 $\mathrm{Hom}_R(N, M/(x_1, ..., x_n)M) \cong \mathrm{Ext}^n_R(N, M)$. 特别地, 取 $R = \Bbbk[x_1, ..., x_n], I = (x_1, ..., x_n)$ 以及 $N = R/I, M = R$, 我们马上得到 $\mathrm{Ext}^n_R(\Bbbk, R) \cong \Bbbk$.

证明: 见我的 CM 环笔记中 [引理 1.7]. □

Corollary 1.108. 设 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 是域上 n 元多项式代数, 那么它是 d 维 AS-正则代数.

可以证明域 $\Bbbk$ 上正分次代数 A 如果是正则环 (即是交换 Noether 环且关于任何极大理想作局部化是正则局部环, 或等价地, 关于任何素理想作局部化是正则局部环), 那么 A 分次同构于某个多项式代数 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$(见 [BH98, p.72, Exercise 2.2.25]). 因此交换 Noether 的 AS 正则代数只有多项式代数. Kirkman 在 [Kir16] 中说交换 AS 正则代数仅有多项式代数, 但我目前还没查到相关文献正式地叙述该结论 (知道的同学请告知我).

2 连通分次代数的同调性质

2.1 深度

在交换代数中, 任何交换 Noether 环上的有限生成模都有**级**的概念. 具体地, 对交换 Noether 环 R 上的有限生成模 M, 称 $\mathrm{grade}(I, M) = \inf\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}$ 是理想 I 在模 M 上的**级**. 当 $IM \neq M$ 时, 它就是含于理想 I 的任何极大 M-正则序列的公共长, 当 $IM = M$ 时, $\mathrm{grade}(I, M) = +\infty$. 当我们局限在交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 层面讨论其上有限生成模 M 的级时, 称 $\mathrm{grade}(\mathfrak{m}, M)$ 是 M 的**深度**, 并记作 $\mathrm{depth}M$. 依 Nakayama 引理, 交换 Noether 局部环上任何非零有限生成模的深度都是有限的. 深度是交换代数中的重要不变量, 对交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上的任何有限生成模 M, 总有不等式 $\mathrm{depth}M \leq \mathrm{k.dim}M$. 当该不等式取等号, 也就是左边的代数不变量和右边的几何不变量一致时, 就产生了 Cohen-Macaulay 模以及 Cohen-Macaulay 环的概念. Cohen-Macaulay 环具有良好的性质, 例如仿射簇 X 在一点 x 处的局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是 Cohen-Macaulay 环意味着任何经过点 x 的不可约分支具有相同的维数, 简而言之, Cohen-Macaulay 性质在几何上可体现局部等维性. 此外, 深度也可和模的投射维数产生联系, 在 1957 年, Auslander 和 Buchsbaum 给出了下面的公式, 它阐述了投射维数有限的有限生成模的投射维数和深度的关系.

Theorem 2.1 (Auslander-Buchsbaum,1957)**.** 设 R 是交换 Noether 局部环, $M \neq 0$ 是投射维数有限的有限生成 R-模, 则 $\mathrm{p.dim}_R M + \mathrm{depth}M = \mathrm{depth}R$.

在 [例1.54] 中我们看到连通分次 $\Bbbk$-代数 A 的分次 Jacobson 根 $J(A) = A_{\geq 1}$, 它是唯一的极大分次理想, 这使得它在某些方面的表现与局部环类似. 下面我们针对连通分次代数上的有限生成分次模定义深度的概念.

Definition 2.2 (深度)**.** 设 A 是连通分次 $\Bbbk$-代数, M 是有限生成分次 A-模, 定义

$$\mathrm{depth} M = \inf\{i \in \mathbb{N} | \underline{\mathrm{Ext}}^i_A(\Bbbk, M) \neq 0\},$$

称为分次模 M 的**深度**.

2.2 局部上同调

让我们先回忆一下交换代数中的局部上同调是如何定义的. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是 R-模, 定义 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = \{x \in M | 存在s \geq 0使得\mathfrak{m}^s x = 0\}$, 那么有天然的共变加性函子 $\Gamma_{\mathfrak{m}} : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ 满足对每个模同态 $f : M \to M'$ 有 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{m}}(M'), x \mapsto f(x)$. 关于函子 $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ 有下面的基本事实.

Proposition 2.3. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是 R-模. 那么:
(1) 对每个自然数 i, 考虑 R-模 $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M) \cong \{x \in M | \mathfrak{m}^i x = 0\}$, 对自然数 $i \leq j$, 定义

$$\begin{aligned} \varphi^i_j : \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M) &\to \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^j, M) \\ f &\mapsto \varphi^i_j(f) : R/\mathfrak{m}^j \to M \end{aligned}$$

这里 $\varphi^i_j(f) : R/\mathfrak{m}^j \to M, \overline{a} \mapsto f(\overline{a})$. 那么 R-Mod 上以 $(\mathbb{N}, \leq)$ 为指标集的正向系 $\{\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M), \varphi^i_j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ 的正向极限 $\varinjlim \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M) \cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$.
(2) 加性共变函子 $\Gamma_{\mathfrak{m}} : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ 是左正合函子.
(3) 对任给 R-模族 $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ 有 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(\oplus_{i \in \Lambda} M_i) = \oplus_{i \in \Lambda} \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_i)$.

证明: (1) 对每个自然数 i, 可自然定义 $\alpha_i : \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M) \to \Gamma_{\mathfrak{m}}(M), g \mapsto g(\overline{1})$, 于是当 $i \leq j$ 时有 $\alpha_i = \alpha_j \varphi^i_j$. 可直接验证对每个使得 $f_i = f_j \varphi^i_j$ 的模 X 与同态族 $\{f_i : \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M) \to X\}_{i \in \mathbb{N}}$, 存在唯一的模同态 $f : \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \to X$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \arrow[rr, dashed, "f"] & & X \\
& \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M) \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi^i_j"] & \\
& \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^j, M) \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

具体地, 这里同态 f 如下构造: 对每个 $x \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$, 存在自然数 s 使得 $\mathfrak{m}^s x = 0$, 定义 $g_x : R/\mathfrak{m}^s \to M, \overline{a} \mapsto ax$ 并置 $f(x) = f_s(g_x)$. 可直接验证 f 是定义合理的 R-模同态并使得上图交换.

(2) 任取 R-模正合列 $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$, 要验证

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(M') \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(f)} M \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(g)} \Gamma_{\mathfrak{m}}(M'')$$

正合. 作为 f 的限制 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(f)$ 自然是单射, $\Gamma_{\mathfrak{m}}(g)\Gamma_{\mathfrak{m}}(f)=0$ 也是明显的. 唯一需要说明的就是 $\mathrm{Ker}\Gamma_{\mathfrak{m}}(g)\subseteq \mathrm{Im}(\Gamma_{\mathfrak{m}}(f))$. 任取 $x\in \mathrm{Ker}\Gamma_{\mathfrak{m}}(g)$, 即 $g(x)=0$ 且存在自然数 t 使得 $\mathfrak{m}^t x=0$, 那么 $x\in \mathrm{Im}f$, 即存在 $y\in M'$ 使得 $f(y)=x$, 从而 $f(\mathfrak{m}^t y)=0$, 再利用 f 是单射得 $y\in\Gamma_{\mathfrak{m}}(M')$, 所以 $x\in\mathrm{Im}(\Gamma_{\mathfrak{m}}(f))$. 故 $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ 是左正合函子.

(3) 根据函子 $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ 的定义明显成立. □

因为 $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ 是左正合函子, 所以可考虑它的右导出函子, 我们把 $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ 的 i 次右导出函子称为 i **次局部上同调函子**, 记作 $H^i_{\mathfrak{m}}(-)$. 对 R-模 M, 称 $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ 是 M 的 i **次局部上同调群**. 我们完全类似地可定义连通分次代数上分次模范畴上的局部上同调函子. 首先, 对连通分次代数 A 上的分次模 M, 定义

$$\Gamma_A(M)=\{x\in M|\text{存在自然数}s\text{使得}A_{\geq s}x=0\},$$

这是 M 的分次子模. 称 $\Gamma_A(M)$ 中元素为 M 的**挠元**. 与非分次情形完全类似地可以证明在分次模范畴中

$$\Gamma_A(M)\cong \varinjlim \underline{\mathrm{Hom}}_A(A/A_{\geq i},M)$$

2.3 AS-正则代数

在 [定义1.96] 中我们介绍了连通分次版本的 AS-正则代数的概念, 它最早出现在 Artin 与 Schelter 的工作中 (在一些文献中, 也把 AS-正则代数定义为具有有限整体维数和 GK 维数的 AS-Gorenstein 代数). 域上的多项式代数是 AS-正则代数 [推论1.108], 可以证明交换 Noether 的 AS 正则代数必为多项式代数. 所以可以认为 AS-正则代数是多项式代数的非交换类似物.

2.4 群作用的 pertinency

为了证明非交换版本的 Auslander 定理, 鲍炎红, 何济位和张坚在 [BHZ19] 中引入了群作用的 pertinency. 原始定义如下:

Definition 2.4 ([BHZ19])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, 有限群 G 作用在 $\Bbbk$-代数 A 上 (于是可考虑冲积代数 $A\#G$). 记 $e=1\#(1/|G|)\sum\limits_{g\in G}g$,, 定义该群作用的 **pertinency** 为

$$\mathbf{p}(A,G)=\mathrm{GKdim}A-\mathrm{GKdim}A\#G/(e).$$

何济位与张印火在 [HZ19] 中针对带有群作用的代数定义了群作用的根的概念, 并给出了 pertinency 的一个等价定义: $\mathbf{p}(A,G)=\mathrm{GKdim}A-\mathrm{GKdim}A/\tau(A,G)$. 我们先来看群作用的根.

Definition 2.5 ([HZ19])**.** 设有限群 G 作用于 $\Bbbk$-代数 A 上, 称

$$\tau(A,G)=\{\sum_{i=1}^{n}|\text{对任何}g\neq 1\in G,\sum_{i=1}^{n}a_i(gb_i)=0\}$$

为 A **在** G **作用下的根**. 容易验证 $\tau(A,G)$ 是 A 的理想.

Lemma 2.6. 设有限群 G 作用于 $\Bbbk$-代数 A 上, 那么标准映射 $j:A/\tau(A,G)\to A\#G/(\sum\limits_{g\in G}g),\overline{a}\mapsto\overline{a\#1}$ 是定义合理的单代数同态. 特别地, $A\#G/(\sum\limits_{g\in G}g)$ 作为左 $A/\tau(A,G)$-模有限生成.

证明: 为说明 j 的定义合理性, 需验证对任何 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \in \tau(A,G)$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \# 1 \in (\sum\limits_{g\in G} g)$, 其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i g(b_i) = 0, \forall g \neq 1 \in G$. 而这只需注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \# 1 &= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n} a_i(gb_i)\# g \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n} (a_i\#1)(1\#g)(b_i\#1) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} (a_i\#1)(1\#g)(b_i\#1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i\#1)\sum_{g\in G}(1\#g)(b_i\#1).
\end{aligned}$$

j 明显是代数同态, 故还需说明 j 是单射, 这只要验证对每个 $x\in A$, 如果 $x\#1 \in (\sum\limits_{g\in G} g)$, 就有 $x\in\tau(A,G)$. 设

$$x\#1 = \sum_{h\in G}\sum_{k\in G}(a_h\#h)(1\#\sum_{g\in G} g)(b_k\#k).$$

先化简等式右侧:

$$\begin{aligned}
\sum_{h\in G}\sum_{k\in G}(a_h\#h)(1\#\sum_{g\in G} g)(b_k\#k) &= \sum_{h\in G}\sum_{k\in G}(a_h\#\sum_{g\in G} g)(b_k\#k) \\
&= \sum_{h\in G}\sum_{k\in G}\sum_{g\in G}(a_h(gb_k)\#gk) \\
&= \sum_{h\in G}\sum_{k\in G}\sum_{g\in G}(a_h(gk^{-1}b_k)\#g) \\
&= \sum_{g\in G}(\sum_{h\in G}\sum_{k\in G} a_h(gk^{-1}b_k))\#g.
\end{aligned}$$

于是由 $x\#1 = \sum\limits_{g\in G}(\sum\limits_{h\in G}\sum\limits_{k\in G} a_h(gk^{-1}b_k))\#g$ 立即可见

$$\sum_{h\in G}\sum_{k\in G} a_h(gk^{-1}b_k) = \begin{cases} \sum\limits_{h\in G}\sum\limits_{k\in G} a_h(k^{-1}b_k) = x, & g=1, \\ 0, & g\neq 1. \end{cases}$$

于是知 $x\in\tau(A,G)$. □

回忆对域 $\Bbbk$ 上的代数 A, A', A' 是 A 的子代数, 如果 A 作为 A' 上左/右模有限生成, 则 $\mathrm{GKdim}A = \mathrm{GKdim}A'$. 于是上述引理表明 $\mathrm{GKdim}A/\tau(A,G) = \mathrm{GKdim}A\#G/(\sum\limits_{g\in G} g)$, 这便得到 pertinency 两个定义的等价性.

参考文献

[AS87] Michael Artin and William F Schelter. Graded algebras of global dimension 3. *Advances in Mathematics*, 66(2):171–216, 1987.

[BH98] Winfried Bruns and H Jürgen Herzog. *Cohen-macaulay rings*. Number 39. Cambridge university press, 1998.

[BHZ19] Yanhong Bao, Jiwei He, and James J Zhang. Pertinency of hopf actions and quotient categories of cohen–macaulay algebras. *Journal of Noncommutative Geometry*, 13(2):667–710, 2019.

[HZ19] Ji-Wei He and Yinhuo Zhang. Local cohomology associated to the radical of a group action on a noetherian algebra. *Israel Journal of Mathematics*, 231:303–342, 2019.

[Jac09] Nathan Jacobson. *Basic algebra II*. Dover Publications, 2nd edition, 2009.

[Kir16] E Kirkman. Invariant theory of artin–schelter regular algebras: a survey. In *Recent developments in representation theory*, volume 673, pages 25–50. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2016.