仿射簇上的向量场

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 1 月 24 日

这份笔记主要用于介绍仿射簇上的切丛和 (多项式) 向量场, 向量场可由坐标环的导子模中的元素等价地定义. 概形语言下的切丛与向量场可参见 [GW23, p.19, Definition 17.38]. 这里讨论的仿射簇未必光滑. 如果考虑的簇是光滑的, 这里定义的向量场与 [Har77], [Sie96],[ES10] 和 [KP23, Example 1.5] 中的定义一致.

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出, 谢谢.

1 Zariski 切空间

本节简要回顾仿射簇的 Zariski 切空间以及相关等价刻画. 下面是 Zariski 切空间的概念.

Definition 1.1 (Zariski 切空间)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 对应理想为 $I(X)$, $p \in X$. 称 $T_pX = V(\{\sum_{i=1}^{n}(\partial F/\partial x_i)(p)x_i | F \in I(X)\}) \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇 X 在 p 处 **Zariski 切空间**, 其中的元素被称为 p 处**切向量**.

Remark 1.2. 如果仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$ 对应的理想 $I(X) \subseteq \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 可由 $f_1, ..., f_m$ 生成, 那么 T_pX 即 $\Bbbk^n$ 中系数矩阵为 Jacobi 矩阵 $((\partial f_i/\partial dx_j)(p))_{m\times n} \in \Bbbk^{m\times n}$ 的线性方程组的解空间.

Example 1.3. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是不可约多项式 $f \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的零点集, 那么 T_pX 即线性方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)x_n = 0$$

的解空间. 一般地, 若仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是不可约的且是 1 维的, 则称 X 是**仿射曲线**. 现在设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域. 例如考虑仿射 (尖点) 曲线 $C = V(x^3 - y^2) \subseteq \Bbbk^2$, 它在 $p = (0, 0)$ 处的切空间 $T_pC = \Bbbk^2$(注意局部维数 $\dim_p C = 1$). 又例如我们有圆周曲线 $S = V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \Bbbk^2$, 它也是仿射曲线 (可直接验证 $\Bbbk[x, y]$ 有素理想升链 $0 \subsetneq (x^2 + y^2 - 1) \subsetneq (x - 1, y)$, 再由 $\text{k.dim}\Bbbk[x, y] = 2$ 可知 S 的坐标环 $\mathcal{O}(S)$ 的 Krull 维数也是 1, 所以 S 是 1 维簇), 并且在每点 $p \in S$ 处的切空间 $T_pS \cong \Bbbk$.

Proposition 1.4. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $Y \subseteq X$ 是闭子簇且 $p \in Y$. 那么 $\dim_{\Bbbk} T_pY \le \dim_{\Bbbk} T_pX$.

Proof. 设 $I(X)$ 可由 $f_1, ..., f_m \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 生成, 那么 $T_pX = V(\{\sum_{i=1}^{n}(\partial f_k/\partial x_i)(p)x_i | 1 \le k \le m\})$. 可设存在 $f_{m+1}, ..., f_t \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 使得 $Y = V(f_1, ..., f_m, f_{m+1}, ..., f_t)$, 那么明显有 $T_pY \subseteq T_pX$ 是 $\Bbbk$-线性子空间. □

Remark 1.5. 若取 $X = \Bbbk, Y = \{p\} \subseteq X$, 那么 $T_pY = 0 \subsetneq T_pX = \Bbbk$. 此时有严格不等式 $\dim_{\Bbbk} T_pY < \dim_{\Bbbk} T_pX$. 若取 $X = \Bbbk^2, Y = V(x^3 - y^2) \subseteq X$, 那么 $T_pY = T_pX = \Bbbk^2$, 此时 $\dim_{\Bbbk} T_pY = \dim_{\Bbbk} T_pX$. 通过上述命题的证明过程, 可以看到域 $\Bbbk$ 上仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$ 在一点处切空间维数可如下计算: 取定 $p \in X$, 设 $I(X)$ 可由 $f_1, ..., f_m \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 生成, 那么 $T_pX = V(\{\sum_{i=1}^{n} (\partial f_k/\partial x_i)(p)x_i | 1 \leq k \leq m\})$. 所以 T_pX 的线性维数就是 $n - r$, 其中 r 表示点 p 处 Jacobi 矩阵 $(\partial f_i/\partial x_j(p))_{m\times n} \in \Bbbk^{m\times n}$ 的秩.

光滑流形在一点处的切空间可由该流形光滑函数环在给定点的全体导子给出, 下面是仿射簇情形的概念.

Definition 1.6 (导子)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 称 $\Bbbk$-线性映射 $D : \mathcal{O}(X) \to \Bbbk$ 是 X 在点 p 处的**导子**, 如果 $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f), \forall f, g \in \mathcal{O}(X)$. 这里 $\mathcal{O}(X)$ 表示仿射簇 X 的坐标环.

Remark 1.7. 根据仿射簇的坐标环的定义, 可将簇上多项式函数环与坐标环视作等同. 上述概念也是交换代数中导子概念的特殊情形, 回忆含幺交换环 K 上交换代数 R 到 R-模 M 的 K-导子 D 是指满足 $D(ab) = D(a)b + aD(b), \forall a, b \in R$ 的 K-模同态. 那么所有 R 到 M 的 K-导子构成的集合 $\mathrm{Der}_K(A, M)$ 是 K-模. 对 $\Bbbk$ 上仿射簇 X 内固定的点 p, 可通过定义 $\mathcal{O}(X) \times \Bbbk \to \Bbbk, (f, \alpha) \mapsto f(p)\alpha$ 来赋予 $\Bbbk$ 一个 $\mathcal{O}(X)$-模结构. 进而 $D \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(X), \Bbbk)$ 当且仅当 $D(fg) = g(p)D(f) + f(p)D(g), \forall f, g \in \mathcal{O}(X)$.

仿射簇在一点处的切空间类似流形情形也可由在给定点处全体导子给出, 这是更自然的 (等价) 定义.

Lemma 1.8. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 那么 T_pX 与 X 在 p 点导子全体构成的线性空间 Ω_p 间有 $\Bbbk$-线性同构 $\varphi : T_pX \to \Omega_p, a = (a_1, ..., a_n) \mapsto D_a : \mathcal{O}(X) \to \Bbbk$, 其中 $D_a : \mathcal{O}(X) \to \Bbbk, f \mapsto \sum_{i=1}^{n} (\partial f/\partial x_i)(p)a_i$ 是由多项式函数 f 在每个变量上的偏导数诱导的标准导子.

Proof. 首先可直接计算验证 $\varphi : T_pX \to \Omega_p, a = (a_1, ..., a_n) \mapsto D_a$ 是定义合理的 $\Bbbk$-线性映射. 若 $a, b \in T_pX$ 满足 $D_a = D_b$, 把这两个导子作用各坐标函数 $x_i : X \to \Bbbk$ 可得 $a = b$, 由此得到映射 φ 是单射. 对任何 p 处的 $\Bbbk$-导子 D, 命 $a_i = D(x_i)$ 得到点 $a = (a_1, ..., a_n) \in \Bbbk^n$, 直接验证可得该点满足 $D_a = D$, 故 φ 满. $\square$

Remark 1.9. 记 $p \in X$ 对应坐标环 $\mathcal{O}(X)$ 的极大理想为 $\mathfrak{m}$, 那么 $\mathcal{O}(X)/\mathfrak{m} = \Bbbk$. 这时可天然赋予 $\Bbbk$ 上 $\mathcal{O}(X)$-模结构, 即 $f \cdot \alpha = f(p)\alpha, \forall f \in \mathcal{O}(X), \alpha \in \Bbbk$. 所以 $\Omega_p = \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(X), \Bbbk) \cong \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(X)/\mathfrak{m})$.

仍设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇并取定 X 内一点 p. 记 $\mathfrak{m}_p = \{f \in \mathcal{O}(X) | f(p) = 0\}$ 是 p 所对应 $\mathcal{O}(X)$ 的极大理想, 如果 D 是仿射簇 X 在点 p 处的导子, 那么 $D(\mathfrak{m}_p^2) = 0$. 所以每个导子 D 可天然诱导出 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 上的 $\Bbbk$-线性函数. 反之, 任给 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 上的 $\Bbbk$-线性函数 l, 通过定义 $D_l : \mathcal{O}(X) \to k, f \mapsto l(\overline{f - f(p)})$ 可得到一导子, 可直接计算验证这给出 X 在 p 点导子全体与 $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ 间的 k-线性同构, 于是我们得到下述命题.

Proposition 1.10. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$, p 点对应 $\mathcal{O}(X)$ 的极大理想记作 $\mathfrak{m}_p$. 则作为 $\Bbbk$-线性空间有同构 $T_pX \cong (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. 特别地, $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 也是有限维线性空间, 满足 $\dim_{\Bbbk} T_pX = \dim_{\Bbbk} \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$.

Remark 1.11. 正是因为该命题, 一些文献通过 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 的对偶空间来定义仿射簇在点 p 处的切空间, 相较于原先的定义而言这更内蕴. 一般也将 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 的对偶空间称为该簇在 p 点处的**余切空间**. 类似于切空间, 将余切空间中的元素称为 X 在点 p 处的**余切向量**.

记 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是仿射簇 X 在点 $p \in X$ 处的局部环, $\mathfrak{m}_p$ 是点 p 对应的极大理想, 那么总有 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{O}_{X,p} \cong \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p}$. 若记 p 在 $\mathcal{O}(X)$ 中对应的极大理想是 M_p, 那么可直接验证 $\Bbbk$-线性同构 $M_p/M_p^2 \cong (\mathfrak{m}_p)_{\mathfrak{m}_p}/(\mathfrak{m}_p^2)_{\mathfrak{m}_p}$(一

般地, 对含幺交换环 K 上的交换代数 R, 若有极大理想 $\mathfrak{m}$, 那么有标准 K-模同构 $\theta:\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to\mathfrak{m}_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\mathfrak{m}^2, x+\mathfrak{m}^2\mapsto x/1+\mathfrak{m}_\mathfrak{m}^2$, θ 明显是单射, 要看到 θ 是满射, 对任给 $x/s\in\mathfrak{m}_\mathfrak{m}$, 因为 $s\notin\mathfrak{m}$, 故存在 $a\in R$ 使得 $1-sa\in\mathfrak{m}$, 于是 $x-xsa\in\mathfrak{m}^2$, 这意味着 $x/s+\mathfrak{m}_\mathfrak{m}^2=xa/1+\mathfrak{m}_\mathfrak{m}^2$, 所以 θ 是满射). 总之, 我们得到

Proposition 1.12. 设 $\Bbbk$ 是域, $X\subseteq\Bbbk^n$ 是仿射簇, $p\in X$, $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 X 在 p 点处的局部环. 若记 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的极大理想, 则有 $\Bbbk$-线性同构 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*\cong T_pX$. 特别地, $\dim_\Bbbk\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=\dim_\Bbbk T_pX$. 并注意到 X 在点 p 处的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 满足剩余域 $\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}\cong\Bbbk$(对含幺交换环 R 与极大理想 $\mathfrak{m}$ 总有环同构 $R/\mathfrak{m}\cong R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\mathfrak{m}$).

Remark 1.13. 对含幺交换局部环 $(R,\mathfrak{m})$, 记 $\Bbbk=R/\mathfrak{m}$ 为 R 的剩余域. 称 $\Bbbk$-线性空间 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ 为 R 的**切空间**. 将 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 称为 R 的**余切空间**. 通过上述命题可知当 R 是仿射簇在一点处的局部环时, 退化为经典定义. 对一般的含幺交换环 R 及其极大理想 $\mathfrak{m}$, 有线性维数 $\dim_{R/\mathfrak{m}}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=\dim_{R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\mathfrak{m}}\mathfrak{m}_\mathfrak{m}/{\mathfrak{m}_\mathfrak{m}}^2$. 所以对交换 Noether 环 R, 可以定义 R 的 $\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}R$ 处余切空间为 $R/\mathfrak{m}$-线性空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. 其 Zariski 切空间可定义为 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 作为 $R/\mathfrak{m}$-线性空间的对偶空间. 由此不难得到 $\mathrm{k.dim}R_\mathfrak{m}\le\dim_{R/\mathfrak{m}}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. 如果进一步 R 是域 $\Bbbk$ 上仿射整区, 那么 $\mathrm{k.dim}R_\mathfrak{m}=\mathrm{k.dim}R,\forall\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}R$.

在微分几何中, 光滑流形 $\mathcal{M}$ 在给定点 $p\in\mathcal{M}$ 处的切空间 $T_p\mathcal{M}$ 除了可定义为光滑函数环 $C^\infty(\mathcal{M})$ 的导子模 $\mathrm{Der}_\mathbb{R}(C^\infty(\mathcal{M}),\mathbb{R})$, 这里 $\mathbb{R}$ 上的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模结构来自 $f\cdot c=f(p)c,\forall f\in C^\infty(\mathcal{M}),c\in\mathbb{R}$, 也可以等价地定义为 $\mathrm{Der}_\mathbb{R}(C_p^\infty,\mathbb{R})$, 其中 C_p^∞ 表示 $\mathcal{M}$ 在 p 处的光滑函数芽环. 在仿射簇场景下切空间也有类似刻画.

Proposition 1.14. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇, $p\in X$. 那么 $T_pX\cong\mathrm{Der}_\Bbbk(\mathcal{O}_{X,p},\Bbbk)$.

Proof. 之前我们已经看到若记 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的极大理想, 则有 $\Bbbk$-线性同构 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*\cong T_pX$ 以及 $\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}=\Bbbk$. 因此只需验证 $\Bbbk$-线性同构 $\mathrm{Der}_\Bbbk(\mathcal{O}_{X,p},\Bbbk)\cong\mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\Bbbk)$ 即可. 定义 $\theta:\mathrm{Der}_\Bbbk(\mathcal{O}_{X,p},\Bbbk)\to\mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\Bbbk),\delta\mapsto\theta(\delta)$ 为 $\theta(\delta):\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to\Bbbk,\overline{x}\mapsto\delta(x)$, 因为 $\delta(\mathfrak{m}^2)=0$, 所以 θ 是定义合理的 $\Bbbk$-线性映射. 反之, 定义 $\eta:\mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\Bbbk)\to\mathrm{Der}_\Bbbk(\mathcal{O}_{X,p},\Bbbk),\varphi\mapsto\eta(\varphi)$, 其中 $\eta(\varphi)$ 作用每个正则函数芽 $[(U,f)]$ 为 $\varphi(\overline{[(U,f-f(p))]})$. 现在验证 $\eta(\varphi)$ 是 $\Bbbk$-导子. 任取 p 处正则函数芽 $[(U,f)],[(V,g)]\in\mathcal{O}_{X,p}$, 则 $\eta(\varphi)([(U,f)][(V,g)])=\eta(\varphi)([(U\cap V,fg)])=\varphi(\overline{[(U\cap V,fg-f(p)g(p))]})=\varphi(\overline{[(U\cap V,fg-f(p)g+f(p)g-f(p)g(p))]})$. 于是由

$$\varphi(\overline{[(U\cap V,fg-f(p)g]})+\varphi(\overline{[(U\cap V,f(p)g-f(p)g(p)]})=\varphi(\overline{[(U\cap V,fg-f(p)g]})+f(p)\eta(\varphi)([(V,g)])$$

以及 $0=\overline{[(U\cap V,(f-f(p))(g-g(p)))]}=\overline{[(U\cap V,fg-f(p)g]}-g(p)\overline{[(U\cap V,f-f(p))]}$ 便知 $\eta(\varphi)$ 是 $\Bbbk$-导子. 于是容易直接验证 θ 和 φ 是互逆的映射, 所以 θ 是 $\Bbbk$-线性同构. $\square$

2 切丛与向量场

类似于微分几何的场景, 我们可以通过仿射簇上的 Zariski 切空间来定义其切丛.

Definition 2.1. 设 $X\subseteq\Bbbk^n$ 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇. 作

$$TX=\coprod_{p\in X}T_pX=\{(p,v_p)\in\Bbbk^{2n}|p\in X,v_p\in T_pX\}\subseteq\Bbbk^{2n},$$

那么 $TX=V(S)\subseteq\Bbbk^{2n}$, 其中 S 为 $\{f(x_1,...,x_n)\in\Bbbk[x_1,...,x_n,...,x_{2n}]|f(x_1,...,x_n)\in I(X)\}$ 与

$$\left\{\sum_{i=1}^n\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,...,x_n)x_{i+1}\in\Bbbk[x_1,...,x_{2n}]|F\in I(X)\right\}$$

的并集, 所以 TX 也是仿射簇, 称为 X 的**切丛**.

Remark 2.2. 根据上述定义, 仿射簇的切丛也是仿射簇. 仿射簇 X 的切丛 TX 到 X 有标准投射 $\pi : TX \to X$, 它明显是正则映射. 如果正则映射 $s : X \to TX$ 满足 $\pi s = \mathrm{id}$, 称 s 为切丛的一个 (整体) **截面**. 对 X 不同的两点 p, q, $\pi^{-1}(p)$ 和 $\pi^{-1}(q)$ 上有自然的 $\Bbbk$-线性结构, 满足 $\pi^{-1}(p) \cong T_pX, \pi^{-1}(q) \cong T_qX$. 因此一般 $\pi^{-1}(p)$ 和 $\pi^{-1}(q)$ 可能有不同的 $\Bbbk$-线性维数. 若 X 是不可约光滑仿射簇, 则 $\dim_{\Bbbk} T_pX = \dim_{\Bbbk} T_qX = \dim X, \forall p, q \in X$.

Example 2.3. 设 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇, 则 $s : X \to TX, p \mapsto (p, 0)$ 为 TX 的一个截面, 称为**零截面**.

Definition 2.4. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇, 称 TX 的任何整体截面 $\mathcal{V} : X \to TX$ 为 X 上的一个**向量场**.

Remark 2.5. 根据上述定义, X 上向量场 $\mathcal{V} : X \to TX$ 将每个点 p 对应到 p 处一个切向量.

记 X 上所有向量场构成的集合为 $\Gamma(TX)$. 进而可在 $\Gamma(TX)$ 上赋予 $\mathcal{O}(X)$-模结构: 其上加法运算利用每点处切空间上加法运算赋予, 数乘作用定义为 $\mu : \mathcal{O}(X) \times \Gamma(TX) \to \Gamma(TX), (f, \mathcal{V}) \to \mu(f, \mathcal{V})$, 其中 $\mu(f, \mathcal{V}) : X \to TX, p \mapsto f(p)v_p$, 其中 $\mathcal{V}(p) = (p, v_p)$. 由此不难看出 $\Gamma(TX)$ 是 $\mathcal{O}(X)$-模.

易见每个 $\mathcal{O}(X)$ 上导子 D 可以产生 X 每点 p 处的切向量 $\mathcal{V}_p(D) : \mathcal{O}(X) \to \Bbbk, f \mapsto D(f)(p)$. 于是 $(\mathcal{V}_p(D)(x_1), \mathcal{V}_p(D)(x_2), ..., \mathcal{V}_p(D)(x_n)) = (D(x_1)(p), ..., D(x_n)(p)) \in T_pX$. 对每个固定的正整数 $1 \le j \le n$, $D(x_j)$ 为 X 上多项式函数, 所以 $\mathcal{V}(D) : X \to TX, p \mapsto (p, \mathcal{V}_p(D))$ 是 X 上向量场. 反之, 任给 X 上向量场 $\mathcal{W} : X \to TX, p \mapsto (p, f_1(p), ..., f_n(p))$, 这里 $f_j \in A(X)$ 并且 $(f_1(p), ..., f_n(p)) \in T_pX$. 作

$$D(f) = f_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(f_1, ..., f_n) + f_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(f_1, ..., f_n) + \cdots + f_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(f_1, ..., f_n), \forall f \in A(X),$$

这里每个 $(\partial f / \partial x_j)(f_1, ..., f_n)$ 表示对偏导数多项式 $\partial f / \partial x_j$ 作赋值 $(x_1, ..., x_n) = (f_1, ..., f_n)$. 注意到对每个 $h \in I(X)$, $D(h)$ 作为 X 上多项式函数为零, 所以 $D : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ 是定义合理的线性变换. 并且不难看出 $D \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$ 且 $\mathcal{W} = \mathcal{V}(D)$. 根据前面的讨论, 命 $\mathcal{V} : \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X) \to \Gamma(TX), D \mapsto \mathcal{V}(D)$, 那么这是定义合理的满 $\Bbbk$-线性映射. 假设 $D, D' \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$ 满足 $\mathcal{V}(D) = \mathcal{V}(D')$, 那么对每个正整数 $1 \le j \le n$, $D(x_j)$ 与 $D'(x_j)$ 作为 X 上多项式函数相同, 进而 $D(x_j) = D'(x_j), \forall 1 \le j \le n$. 进而由 X 上坐标函数集 $\{x_1, ..., x_n\}$ 是 $\mathcal{O}(X)$ 作为 $\Bbbk$-代数的一个生成元集知 $D = D'$. 因此得到线性同构 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X) \cong \Gamma(TX)$. 结合 $\Gamma(TX)$ 上 $\mathcal{O}(X)$-模结构的定义易见该同构也是 $\mathcal{O}(X)$-模同构. 总结一下, 我们得到

Theorem 2.6 (向量场与导子模)**.** 设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇, $\Gamma(TX)$ 是 X 上所有向量场构成的 $\mathcal{O}(X)$-模. 对每个 $p \in X, D \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$, 记 $\mathcal{V}_p(D) : \mathcal{O}(X) \to \Bbbk, f \mapsto D(f)(p)$, $\mathcal{V}(D) : X \to TX, p \mapsto (p, \mathcal{V}_p(D))$ 是 X 上向量场. 那么 $\mathcal{V} : \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X) \to \Gamma(TX), D \mapsto \mathcal{V}(D)$ 是 $\mathcal{O}(X)$-模同构.

Remark 2.7. 因为 $\Gamma(TX) \cong \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$, 故也称导子模 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$ 中元素为 X 上**向量场**, 也把导子模 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$ 记为 $\mathfrak{X}(X)$. 若记 $\Omega(X)$ 是 X 的 Kähler 微分模, 则有 $\mathcal{O}(X)$-模同构 $\mathfrak{X}(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\Omega(X), \mathcal{O}(X))$.

回忆对任何域 $\Bbbk$ 上交换代数 R, 导子模 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}R$ 上有标准的 $\Bbbk$-Lie 代数结构: $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1, \forall \delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}R$. 因此 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$ 上标准 Lie 代数结构给出了 $\Gamma(TX)$ 上 $\Bbbk$-Lie 代数结构.

Example 2.8. 设 $(X, \{-, -\})$ 是域 $\Bbbk$ 上 Poisson 簇, 对每个 $f \in X$, 称 $\{f, -\} \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$ 是 X 上 **Hamilton 向量场**. 命 $\mathcal{H} : \mathcal{O}(X) \to \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X), f \mapsto \{f, -\}$, 那么 $\mathcal{H}$ 是 Lie 代数同态. 所以 Poisson 簇上的 Hamilton 向量场全体给出坐标环 $\mathcal{O}(X)$ 作为 Lie 代数的一个表示. 这产生 Lie 模结构 $(\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X), \{-, -\}_{\mathcal{H}})$, 其中 $\{-, -\}_{\mathcal{H}} : \mathcal{O}(X) \times \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X) \to \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X), (f, D) \mapsto [\rho(f), D] = [\{f, -\}, D]$. 如果 $\mathcal{P} \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$ 满足 $\mathcal{P}(\{f, g\}) = \{\mathcal{P}(f), g\} + \{f, \mathcal{P}(g)\}, \forall f, g \in \mathcal{O}(X)$, 称 $\mathcal{P}$ 为 X 上 **Poisson 向量场**.

参考文献

[ES10] Pavel Etingof and Travis Schedler. Poisson traces and d-modules on poisson varieties. *Geometric and Functional Analysis*, 20(4):958–987, 2010.

[GW23] U. Görtz and T. Wedhorn. *Algebraic Geometry II: Cohomology of Schemes*. Springer, 2023.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 1977.

[KP23] B. Kosmeijer and H. Posthuma. Hochschild cohomology of Lie-Rinehart algebras. *arXiv preprint arXiv:2312.14654*, 2023.

[Mat70] H. Matsumura. *Commutative algebra*, volume 120. WA Benjamin New York, 1970.

[Sie96] T. Siebert. Lie algebras of derivations and affine algebraic geometry over fields of characteristic 0. *Mathematische Annalen*, 305(2):271–286, 1996.

[TY05] P. Tauvel and R.W.T. Yu. *Lie algebra of an algebraic group*. Springer, 2005.