关于有限生成投射模的经典同构

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 2 月 5 日

有限生成投射模广泛地出现在数学的各个分支, 它是有限生成自由模 (例如除环上有限维线性空间) 的推广. 在微分几何中, 光滑流形的任何光滑向量丛的光滑截面全体作为光滑函数环上的模便是有限生成投射模 (事实上, 向量丛的截面函子给出连通光滑流形的光滑向量丛范畴与光滑函数环上有限生成投射模范畴间的范畴等价). 在代数几何中, 代数闭域上光滑仿射簇的 Kähler 微分模和向量场模 (坐标环的导子模) 也是有限生成投射模. 在代数场景, P.I.D.(又例如局部环、域上有限个未定元的多项式环) 上的投射模等价于自由模. 含幺环上有有限表现的模 (例如 Noether 环上有限生成模) 是投射模当且仅当它是平坦模 (而含幺交换环上有限生成模是平坦模当且仅当它在每个极大理想处作局部化是自由的, 所以含幺交换环上有限表现模是投射的当且仅当它在每个极大理想处的局部化是投射的, 所以含幺交换环上有限表现模的投射性具有局部-整体性质).

有许多有限维线性空间满足的经典同构事实上在有限生成投射模场景也都是成立的, 这份笔记的目的就是整理一些有限生成投射模的经典同构, 以方便日后的查阅. 关于投射模的基本性质可参考 [Jac09].

1 双重对偶函子

设 R 是含幺环, 对偶基定理表明左 R-模 P 是投射模的充要条件是存在 $\{x_i|i\in I\}\subseteq P$ 与 $\{x_i^*|i\in I\}\subseteq P^*=\mathrm{Hom}_R(P,R)$ 使得对每个 $x\in P$, $x_i(x)$ 只对有限多个 $i\in I$ 非零且 $x=\sum\limits_{i\in I}x_i^*(x)x_i,\forall x\in P$. 并且当 P 是有限生成投射模时, 对偶基定理中的指标集 I 也可以选为有限集. 我们用对偶基定理说明下面的引理.

Lemma 1.1. 设左 R-模 P 是有限生成投射模, 则对偶模 P^* 是有限生成投射右 R-模.

Proof. 由对偶基定理, 存在 $\{x_1,...,x_n\}\subseteq P,\{x_1^*,...,x_n^*\}\subseteq P^*$ 使得 $x=x_1^*(x)x_1+\cdots+x_n^*(x)x_n,\forall x\in P$. 于是任何 $f\in P^*$ 作用上式得到 $f=x_1^*f(x_1)+\cdots+x_n^*f(x_n)$. 而每个 $x\in P$ 诱导模同态 $x^{**}:P^*\to R,f\mapsto f(x)$, 因此 $f=x_1^*x_1^{**}(f)+\cdots x_n^*x_n^{**}(f),\forall f\in P^*$. 根据对偶基定理, P^* 是有限生成投射右 R-模. □

Remark. 对无限生成投射模结论未必成立, 例如考虑可数个 $\mathbb{Z}$ 的直和, 视作自由 $\mathbb{Z}$-模, 其对偶模不是投射的.

Theorem 1.2. 设左 R-模 P 是有限生成投射模, 那么 $\eta_P:P\to P^{**},x\mapsto x^{**}$ 是左 R-模同构, 其中

$$x^{**}:P^*\to R,f\mapsto f(x).$$

Proof. 易验证 η_P 是左 R-模同态. 先说明 τ_P 是单射. 如果 $x \in P$ 满足 $x^{**}(f) = 0, \forall f \in P$, 那么考虑投射模 P 的对偶基 $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq P, \{x_1^*, ..., x_n^*\} \subseteq P^*$ 便有 $x_i^*(x) = 0, \forall 1 \leq i \leq n$. 这说明 $x = 0$, 因此 τ_P 是单射. 最后说明 τ_P 是满射. 任取 $\theta \in P^{**}$, 首先有 $f = x_1^* x_1^{**}(f) + \cdots x_n^* x_n^{**}(f), \forall f \in P^*$, 于是我们用 θ 作用上式可知 $\theta = \theta(x_1^*)x_1^{**} + \cdots + \theta(x_n^*)x_n^{**}$, 这说明 $\theta = \eta_P(\theta(x_1^*)x_1 + \cdots + \theta(x_n^*)x_n)$. 所以 θ 是满射. □

Remark. 该结论对无限生成投射模一般不成立, 例如考虑域 $\Bbbk$ 上无限维线性空间 V, 总有 $\dim_{\Bbbk} V^* > \dim_{\Bbbk} V$.

在本节最后做一些范畴层面的注记. 记 R 上有限生成投射左模范畴为 R-**proj**, [引理1.1] 表明我们有双重对偶函子 $(-)^{**} = \mathrm{Hom}_R(-, R)\mathrm{Hom}_R(-, R) : R\text{-}\mathbf{proj} \to R\text{-}\mathbf{proj}$. 再定义

$$\eta : \mathrm{ob}R\text{-}\mathbf{proj} \to \bigcup_{P \in \mathrm{ob}R\text{-}\mathbf{proj}} \mathrm{Hom}_R(P, P^{**}), P \mapsto \eta_P.$$

容易验证 η 是 R-**proj** 上恒等函子到双重对偶函子 $(-)^{**}$ 的自然变换. [定理1.2] 表明 η 是自然同构.

Example 1.3. 设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, $\Omega(\mathcal{M})$ 是所有光滑 1-形式构成的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模, $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 是所有光滑向量场构成的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模, 那么 Swan 定理表明 $\Omega(\mathcal{M})$ 和 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 都是有限生成投射模. 我们有标准 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构 $\eta : \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M}))(\cong \mathfrak{X}(\mathcal{M}))$, 其中

$$\eta(\varphi) : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}), f \mapsto \varphi(df), \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M})).$$

[定理1.2] 表明我们进一步有 $\Omega(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\mathfrak{X}(\mathcal{M}), C^\infty(\mathcal{M}))$.

2 张量函子与 Hom 函子的某种相容性

设 R, S 是含幺环, M 是 R-S 双模, N 是左 S-模. 设 $\mathrm{Hom}_R(-, M) \otimes_S N : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ 是逆变 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(-, M) : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Mod}\text{-}S$ 与张量函子 $- \otimes_S N : \mathbf{Mod}\text{-}S \to \mathbf{Ab}$ 的合成, 这里 $\mathbf{Ab}$ 是 Abel 群范畴. 左 R-模 $M \otimes_S N$ 决定逆变 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(-, M \otimes_S N) : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$. 对每个左 R-模 X, 定义

$$\eta_X : \mathrm{Hom}_R(X, M) \otimes_S N \to \mathrm{Hom}_R(X, M \otimes_S N), f \otimes n \mapsto \eta_X(f \otimes n),$$

这里 $\eta_X(f \otimes n) : X \to M \otimes_S N, x \mapsto f(x) \otimes n$. 那么 η_X 明显是定义合理的加群同态并且可直接计算验证

$$\eta : \mathrm{ob}R\text{-}\mathbf{Mod} \to \bigcup_{X \in \mathrm{ob}R\text{-}\mathbf{Mod}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X, M) \otimes_S N, \mathrm{Hom}_R(X, M \otimes_S N)), X \mapsto \eta_X$$

是 $\mathrm{Hom}_R(-, M) \otimes_S N$ 到 $\mathrm{Hom}_R(-, M \otimes_S N)$ 的自然变换. 若 N 进一步是 S-T 双模, 那么 η_X 是右 T-模同态.

Example 2.1. 如果 $R = S$ 且 $M = R$ 视作自然的 R-R 双模, 那么借助自然同构 $R \otimes_R - \cong \mathrm{id}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}$, 可将上述自然变换变为 $\mathrm{Hom}_R(-, R) \otimes_R N$ 到 $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ 的标准自然变换

$$\zeta : \mathrm{ob}R\text{-}\mathbf{Mod} \to \bigcup_{X \in \mathrm{ob}R\text{-}\mathbf{Mod}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X, R) \otimes_R N, \mathrm{Hom}_R(X, N)), X \mapsto \zeta_X,$$

其中 $\zeta_X(f \otimes n) : X \to N, x \mapsto f(x)n$.

现设 P 是有限生成投射左 R-模, 下面说明 η_P 是加群同构. 首先可直接验证对任何左 R-模族 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 有

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i=1}^n X_i, M)\otimes_S N & \xrightarrow{\eta_{\oplus_{i=1}^n X_i}} & \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i=1}^n X_i, M\otimes_S N) \\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong \\
\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom}_R(X_i, M)\otimes_S N & \xrightarrow{\oplus_{i=1}^n \eta_{X_i}} & \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom}_R(X_i, M\otimes_S N)
\end{array}$$

交换, 这里竖直方向的加群同态是标准同构. 所以 $\eta_{\oplus_{i=1}^n X_i}$ 是加群同构 $\Leftrightarrow$ 每个 η_{X_i} 是同构. 因为任何有限生成左 R-投射模都是某个 R^n 的直和因子, 因此只需验证 $P=R$ 的情形即可. 下面我们说明 η_R 是同构. 考虑标准同构 $\lambda: M\otimes_S N\to \mathrm{Hom}_R(R,M)\otimes_S N$ 以及 $\mu: \mathrm{Hom}_R(R, M\otimes_S N)\to M\otimes_S N$, 那么可直接验证 $\mu\eta_R\lambda$ 是恒等映射, 这说明 η_R 是同构. 上述讨论证明了下述定理.

Theorem 2.2. 设 R,S 是含幺环, M 是 R-S 双模, N 是左 S-模. 那么对任何有限生成投射左 R-模 P,

$$\eta_P: \mathrm{Hom}_R(P,M)\otimes_S N\to \mathrm{Hom}_R(P, M\otimes_S N), f\otimes n\mapsto \eta_X(f\otimes n)$$

是加群同构, 这里 $\eta_P(f\otimes n): P\to M\otimes_S N, x\mapsto f(x)\otimes n$. 所以自然变换

$$\eta: \mathrm{ob}R\textbf{-Mod}\to \bigcup_{X\in \mathrm{ob}R\textbf{-Mod}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X,M)\otimes_S N, \mathrm{Hom}_R(X, M\otimes_S N)), X\mapsto \eta_X$$

限制在 R-**proj** 给出 $\mathrm{Hom}_R(-,M)\otimes_S N$ 到 $\mathrm{Hom}_R(-,M\otimes_S N)$ 的自然同构.

Example 2.3. 如果 $R=S$ 且 $M=R$ 视作自然的 R-R 双模, 那么借助自然同构 $R\otimes_R -\cong \mathrm{id}_{R\textbf{-Mod}}$ 可得

$$\zeta: \mathrm{ob}R\textbf{-proj}\to \bigcup_{P\in \mathrm{ob}R\textbf{-proj}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(P,R)\otimes_R N, \mathrm{Hom}_R(P,N)), P\mapsto \zeta_P$$

是 $\mathrm{Hom}_R(-,R)\otimes_R N$ 到 $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ 的自然同构, 其中 $\zeta_P(f\otimes n): P\to N, x\mapsto f(x)n$.

如果 X 不是有限生成投射模, 即使 M 是有限生成投射左 R-模, η_X 也未必是同构. 例如取 $R=S=\mathbb{Z}$, $M=R=\mathbb{Z}, N=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 那么对 $X=N=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 易见 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,N)\neq 0$ 但 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,M)=0$. 但如果 N 是有限生成投射左 S-模, 仍能够保证 η_X 对所有的左 R-模 X 成立. 为此, 我们固定左 R-模 X, 用 ξ_N 替代 η_X. 那么我们可定义出函子 $\mathrm{Hom}_R(X,M)\otimes_S -$ 到 $\mathrm{Hom}_R(X,M\otimes_S -)$ 的自然变换

$$\xi: \mathrm{ob}S\textbf{-Mod}\to \bigoplus_{N\in \mathrm{ob}S\textbf{-Mod}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X,M)\otimes_S N, \mathrm{Hom}_R(X,M\otimes_S N)), N\mapsto \xi_N.$$

并且当 N 是 S-T 双模或 X 是 R-T 双模时, ξ_N 是 T-模同构. 可直接验证对任何左 S-模族 $\{N_i\}_{i=1}^n$, 有

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(X,M)\otimes_S \left(\bigoplus_{i=1}^n N\right) & \xrightarrow{\xi_{\oplus_{i=1}^n N_i}} & \mathrm{Hom}_R(X, M\otimes_S \left(\bigoplus_{i=1}^n N\right)) \\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong \\
\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom}_R(X,M)\otimes_S N_i & \xrightarrow{\oplus_{i=1}^n \xi_{N_i}} & \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom}_R(X, M\otimes_S N_i)
\end{array}$$

交换. 所以要说明 ξ_N 对任何有限生成投射模 N 是同构, 只需验证 $N=S$ 的情形. 类似于 η_R, 容易验证 ξ_S 是加群同构. 结合 [定理2.2] 我们得到下述结果.

Theorem 2.4. 设 R, S 是含幺环, M 是 R-S 双模, N 是左 S-模, X 是左 R-模. 并定义加群同态

$$\theta_{X,N} : \mathrm{Hom}_R(X, M) \otimes_S N \to \mathrm{Hom}_R(X, M \otimes_S N), f \otimes n \mapsto \theta_{X,N}(f \otimes n),$$

这里 $\theta_{X,N}(f \otimes n) : X \to M \otimes_S N, x \mapsto f(x) \otimes n$. 那么当 X 是有限生成投射左 R-模或 N 是有限生成投射左 S-模时, $\theta_{X,Y}$ 是同构. 并且如果定义自然变换

$$\eta : \mathrm{ob}R\textbf{-Mod} \to \bigcup_{X \in \mathrm{ob}R\textbf{-Mod}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X, M) \otimes_S N, \mathrm{Hom}_R(X, M \otimes_S N)), X \mapsto \eta_X = \theta_{X,N},$$

$$\xi : \mathrm{ob}S\textbf{-Mod} \to \bigcup_{N \in \mathrm{ob}S\textbf{-Mod}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X, M) \otimes_S N, \mathrm{Hom}_R(X, M \otimes_S N)), N \mapsto \xi_N = \theta_{X,N},$$

那么把 η 与 ξ 限制在相应有限生成投射模全子范畴上, 均为自然同构.

相应地, 用完全相同的方法我们可以证明上述定理的右模版本.

Theorem 2.5. 设 R, S 是含幺环, M 是 R-S 双模, N 是右 R-模, X 是右 S-模, 并定义加群同态

$$\theta_{X,N} : N \otimes_R \mathrm{Hom}_S(X, M) \to \mathrm{Hom}_S(X, N \otimes_R M), n \otimes f \mapsto \theta_{X,N}(n \otimes f),$$

这里 $\theta_{X,N}(f \otimes n) : X \to M \otimes_S N, x \mapsto n \otimes f(x)$. 那么当 X 是有限生成投射右 S-模或 N 是有限生成投射右 R-模时, $\theta_{X,N}$ 是加群同构. 并且如果定义自然变换

$$\eta : \mathrm{ob}\textbf{Mod-}S \to \bigcup_{X \in \mathrm{ob}\textbf{Mod-}S} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N \otimes_R \mathrm{Hom}_S(X, M), \mathrm{Hom}_S(X, N \otimes_R M)), X \mapsto \eta_X = \theta_{X,N},$$

$$\xi : \mathrm{ob}\textbf{Mod-}R \to \bigcup_{N \in \mathrm{ob}\textbf{Mod-}R} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N \otimes_R \mathrm{Hom}_S(X, M), \mathrm{Hom}_S(X, N \otimes_R M)), N \mapsto \xi_N = \theta_{X,N},$$

那么把 η 与 ξ 限制在相应有限生成投射模全子范畴上, 均为自然同构.

设 R, S 是含幺环, M_1 是 R-S 双模, M_2 是 S-R 双模, X 是左 R-模, Y 是右 R-模, P 是左 S-模, Q 是右 S-模. 考虑左 S-模 $N = \mathrm{Hom}_R(Y, M_2)$, 那么有加群同态

$$\sigma : \mathrm{Hom}_R(X, M_1) \otimes_S \mathrm{Hom}_R(Y, M_2) \to \mathrm{Hom}_R(X, M_1 \otimes_S \mathrm{Hom}_R(Y, M_2)), f \otimes n \mapsto \sigma(f \otimes n),$$

其中 $\sigma(f \otimes n) : X \to M_1 \otimes_S \mathrm{Hom}_R(Y, M_2), x \mapsto f(x) \otimes n$. 结合 [定理2.5] 中给出的加群同态

$$\theta_{Y,M_1} : M_1 \otimes_S \mathrm{Hom}_R(Y, M_2) \to \mathrm{Hom}_R(Y, M_1 \otimes_S M_2)$$

可得加群同态 $\rho : \mathrm{Hom}_R(X, M_1) \otimes_S \mathrm{Hom}_R(Y, M_2) \to \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_R(Y, M_1 \otimes_S M_2))$. 根据 [定理2.4] 和 [定理2.5] 可知当 X 与 Y 都为有限生成投射模或 X 与 M_1 均为有限生成投射模时, ρ 是加群同构.

类似地, 可定义出加群同态 $\rho' : \mathrm{Hom}_R(X, M_1) \otimes_S \mathrm{Hom}_R(Y, M_2) \to \mathrm{Hom}_R(Y, \mathrm{Hom}_R(X, M_1 \otimes_S M_2))$ 满足当 X 与 Y 都是有限生成投射模或 Y 与 M_2 都是有限生成投射模时, ρ' 是同构.

现设 $R = S = K$ 是含幺交换环, X, Y, M_1, M_2 均为 K-模. 那么我们得到 K-模同态

$$\rho : \mathrm{Hom}_K(X, M_1) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(Y, M_2) \to \mathrm{Hom}_K(X, \mathrm{Hom}_K(Y, M_1 \otimes_K M_2)),$$

$$\rho' : \mathrm{Hom}_K(X, M_1) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(Y, M_2) \to \mathrm{Hom}_K(Y, \mathrm{Hom}_K(X, M_1 \otimes_K M_2))$$

将 ρ 合成上伴随同构 $\mathrm{Hom}_K(X, \mathrm{Hom}_K(Y, M_1 \otimes_K M_2)) \cong \mathrm{Hom}_K(X \otimes_K Y, M_1 \otimes_K M_2)$, ρ' 合成上伴随同构 $\mathrm{Hom}_K(Y, \mathrm{Hom}_K(X, M_1 \otimes_K M_2)) \cong \mathrm{Hom}_K(X \otimes_K Y, M_1 \otimes_K M_2)$, 那么得到一公共的 K-模同态

$$\psi : \mathrm{Hom}_K(X, M_1) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(Y, M_2) \to \mathrm{Hom}_K(X \otimes_K Y, M_1 \otimes_K M_2), f \otimes g \mapsto \psi(f \otimes g),$$

其中 $\psi(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y), \forall x \in X, y \in Y$. 那么通过 [定理2.4] 和 [定理2.5] 以及前面的讨论可知

Theorem 2.6. 设 K 是含幺交换环, X, Y, M_1, M_2 均为 K-模, 并设 $\psi : \mathrm{Hom}_K(X, M_1) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(Y, M_2) \to \mathrm{Hom}_K(X \otimes_K Y, M_1 \otimes_K M_2), f \otimes g \mapsto \psi(f \otimes g)$ 是由 $\psi(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y), \forall x \in X, y \in Y$ 定义的 K-模同态. 那么当以下三个条件之一满足时, ψ 是 K-模同构:
- X 和 Y 都是有限生成投射 K-模.
- X 和 M_1 都是有限生成投射 K-模.
- Y 和 M_2 都是有限生成投射 K-模.

Example 2.7. 设 K 是含幺交换环, X, Y 是 K-模, 取 $M_1 = M_2 = K$, 将 [定理2.6] 中同态 ψ 结合标准同构 $K \otimes_K K \cong K$ 得到 K-模同态 $\tau : X^* \otimes_K Y^* \to (X \otimes_K Y)^*$, 其中 $\tau(f \otimes g)$ 满足 $\tau(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y), \forall x \in X, y \in Y$. 那么当 X 或 Y 是有限生成投射 K-模时, τ 是同构. 归纳地易证对任何有限生成投射 K-模 $X_1, ..., X_n$, 有 K-模同构 $\tau_n : X_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K X_n^* \to (X_1 \otimes_K \cdots \otimes_K X_n)^*, f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \mapsto \tau_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$, 其中 $\tau_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) : X_1 \otimes_K \cdots \otimes_K X_n \to K, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$. 所以 $X_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K X_n^*$ 作为 K-模同构于所有 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 到 K 的多重 K-线性型构成的 K-模. 该标准 K-模同构将任何 $f_1 \otimes \cdots f_n \in X_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K X_n^*$ 映至多重线性映射 $X_1 \times \cdots \times X_n \to K, (x_1, ..., x_n) \mapsto f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$. 在此标准同构下, 我们可以把 K-模 $X_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K X_n^*$ 与 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 到 K 的多重 K-线性型全体视作等同. 而 [定理1.2] 表明有限生成投射 K-模范畴上的双重对偶函子与恒等函子自然同构, 所以进一步有 $X_1 \otimes_K \cdots \otimes_K X_n$ 和 $X_1^* \times \cdots \times X_n^*$ 到 K 的多重线性型构成的 K-模同构. 该 K-模同构将每个 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ 映至多重线性映射 $X_1^* \times \cdots \times X_n^* \to K, (f_1, ..., f_n) \mapsto x_1^{**}(f_1) \cdots x_n^{**}(f_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$. 因此在有限生成投射模场景, 我们也可以把 $X_1 \otimes_K \cdots \otimes_K X_n$ 和 $X_1^* \times \cdots \times X_n^*$ 到 K 的多重线性型构成的 K-模视作等同.

Example 2.8. 设 K 是含幺交换环, X, M_2 是 K-模, 取 $M_1 = Y = K$ 并结合 K-模同构 $M_2 \cong \mathrm{Hom}_K(K, M_2)$ 以及 $X \otimes_K K \cong X, K \otimes_K M_2 \cong M_2$ 可得 K-模同态 $\mu : X^* \otimes_K M_2 \to \mathrm{Hom}_K(X, M_2) f \otimes m_2 \mapsto \mu(f \otimes m_2)$, 这里 $\mu(f \otimes m_2) : X \to M_2, x \mapsto f(x)m_2$. 故由 [定理2.6] 可知当 X 或 M_2 是有限生成投射模时 μ 是同构. 这就是 [例2.3] 的交换情形. 特别地, 如果 K 是域, 那么 X 与 M_2 只要有一个是有限维空间, 就有 μ 同构. 对称地, 我们也有 K-模同态 $\lambda : M_1 \otimes_K Y^* \to \mathrm{Hom}_K(Y, M_1), m_1 \times g \mapsto \lambda(m_1 \otimes g)$, 其中 $\lambda(m_1 \otimes g) : Y \to M_1, y \mapsto g(y)m_1$. 于是当 Y 或 M_1 是有限生成投射 K-模时, λ 是 K-模同构.

现设 $V_1, ..., V_n, W_1, ..., W_m$ 均为含幺交换环 K 上有限生成投射模. 我们来说明 K-模同构

$$V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \otimes_K W_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K W_m^* \cong \mathrm{Hom}_K(W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m, V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n).$$

首先, [例2.7] 提供了我们 K-模同构 $\tau_n : W_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K W_m^* \to (W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m)^*$, 满足把每个 $h_1 \otimes \cdots \otimes h_m \in W_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K W_m^*$ 映至 $\tau_n(h_1 \otimes \cdots \otimes h_m) : W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m \to K, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \mapsto h_1(w_1) \cdots h_m(w_m)$. 而

Lemma 2.9. 设 K 是含幺交换环, $P_1, ..., P_n$ 是投射 K-模, 那么 $P_1 \otimes_K \otimes_K \cdots \otimes_K P_n$ 也是投射模.

Proof. 只需验证 $n=2$ 的情形, 再归纳地得到结论. 考虑 Hom 函子与张量函子的伴随性质, 可得自然同构

$$\mathrm{Hom}_K(P_1 \otimes_K P_2, -) \cong \mathrm{Hom}_K(P_1, \mathrm{Hom}_K(P_2, -)),$$

上式右侧作为正合函子的合成仍正合, 所以 $P_1 \otimes_K P_2$ 是投射 K-模. □

Remark. 由此立即得到当 $P_1, ..., P_n$ 是有限生成投射 K-模时, $P_1 \otimes_K \otimes_K \cdots \otimes_K P_n$ 有限生成投射模. 这里再指出利用张量函子的结合性易验证含幺交换环上有限多个平坦模的张量积仍平坦.

所以 [例2.8] 给出 K-模同构 $\lambda : V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \otimes_K (W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m)^* \to \mathrm{Hom}_K(W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m, V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n)$ 满足把形如 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes g$ 的元素映至

$$\lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes g) : W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m \to V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n, w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \mapsto g(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n.$$

于是可得 K-模同构 $\omega_{n,m} : V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \otimes_K W_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K W_m^* \to \mathrm{Hom}_K(W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m, V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n)$ 满足对任何 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_m^* \in V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \otimes_K W_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K W_m^*$ 映至

$$\begin{aligned}\omega_{n,m}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_m^*) : W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m &\to V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \\ w_1 \otimes \cdots \otimes w_m &\mapsto w_1^*(w_1) \cdots w_m^*(w_m) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n.\end{aligned}$$

对称地, 我们也可以得到 K-模同构 $\pi_{n,m} : V_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K V_n^* \otimes_K W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m \to \mathrm{Hom}_K(V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n, W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m)$ 满足把每个形如 $v_1^* \otimes \cdots \otimes v_n^* \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$ 映至

$$\begin{aligned}\pi_{n,m}(v_1^* \otimes \cdots \otimes v_n^* \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) : V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n &\to W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &\mapsto v_1^*(v_1) \cdots v_n^*(v_n) w_1 \otimes \cdots \otimes w_m.\end{aligned}$$

我们把前面的若干讨论总结为下面的同构定理, 它可视作 [例2.7] 与 [例2.8] 的推广.

Theorem 2.10. 设 K 是含幺交换环, $V_1, ..., V_n, W_1, ..., W_m$ 是有限生成投射 K-模. 定义 K-模同态

$$\omega_{n,m} : V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \otimes_K W_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K W_m^* \to \mathrm{Hom}_K(W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m, V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n)$$

满足把任何 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_m^* \in V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \otimes_K W_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K W_m^*$ 映至

$$\begin{aligned}\omega_{n,m}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_m^*) : W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m &\to V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \\ w_1 \otimes \cdots \otimes w_m &\mapsto w_1^*(w_1) \cdots w_m^*(w_m) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n.\end{aligned}$$

再定义 K-模同态 $\pi_{n,m} : V_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K V_n^* \otimes_K W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m \to \mathrm{Hom}_K(V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n, W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m)$ 满足把 $v_1^* \otimes \cdots \otimes v_n^* \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$ 映至

$$\begin{aligned}\pi_{n,m}(v_1^* \otimes \cdots \otimes v_n^* \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) : V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n &\to W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_m \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &\mapsto v_1^*(v_1) \cdots v_n^*(v_n) w_1 \otimes \cdots \otimes w_m.\end{aligned}$$

那么 $\omega_{n,m}$ 和 $\pi_{n,m}$ 都是 K-模同构.

Definition 2.11. 设 K 是含幺交换环, V 是有限生成投射 K-模. 称

$$T^{(n,m)}(V)=\underbrace{V\otimes_K\cdots\otimes_K V}_{n\text{项}}\otimes_K\underbrace{V^*\otimes_K\cdots\otimes_K V^*}_{m\text{项}}$$

中的元素为 V 上 (n,m) 型**混合张量**, 这里 $n,m\in\mathbb{N}$(如果 $n=m=0$, 那么 $(0,0)$ 型混合张量就是 K 中元素). 如果 $n=0$, 那么称 $(0,m)$ 型混合张量为 m 阶**协变张量**. 如果 $m=0$, 称 $(n,0)$ 型混合张量为 n 阶**反变张量**.

Remark. 可以把 (n,m) 型混合张量理解为 $V^*\otimes_K\cdots\otimes_K V^*$($m$ 项) 到 $V\otimes_K\cdots\otimes_K V$($n$ 项) 的 K-模同态. m 阶协变张量可以视作 V 上 m 重 K-线性型, n 阶反变张量可以视作 V^* 上 n 重 K-线性型.

回忆 K-模 V 决定的张量代数 $T(V)=\oplus_{i=0}^{\infty}T^{(i)}(V)$, 其中 $T^{(i)}(V)$ 是 i 个 V 的张量积.

Example 2.12. 设 K 是含幺交换环, V 是有限生成投射模. 那么 $T^{(0,0)}(V)=T^{(0)}(V)=T^{(0)}(V^*)=K$. 对任何自然数 n, $T^{(n,0)}(V)=T^{(n)}(V),T^{(0,n)}(V)=T^{(n)}(V^*)$. $T^{(1,0)}(V)=V,T^{(0,1)}(V)=V^*$.

任取有限生成投射 K-模 V 上的 m 阶协变张量 $\alpha\in V^*\otimes_K\cdots\otimes_K V^*$, 它可等价地视作 m 重 K-线性型 $\alpha:V\times\cdots\times V\to K$. 如果 α 是对称线性型, 即 $\alpha(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(m)})=\alpha(v_1,...,v_m),\forall\sigma\in S_m$, 则称 α 是**对称的**. 易见 V 上所有 m 阶对称张量构成 $T^{(m)}(V^*)$ 的 K-子模, 记作 $\Sigma^{(m)}(V^*)$. 如果 V 上 m 阶协变张量 α 满足

$$\alpha(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(m)})=(\mathrm{sgn}\sigma)\alpha(v_1,...,v_m),\forall\sigma\in S_m,$$

这里 $\mathrm{sgn}\sigma$ 表示置换 σ 的符号, 则称 α 是**交错的**. 同样 V 上所有 m 阶交错张量构成 $T^{(m)}(V^*)$ 的 K-子模, 记作 $\Lambda^{(m)}(V^*)$. 任何 0 阶协变张量作为 K 中元素既是对称张量也是交错张量. 任何一个 V 上 1 阶协变张量, 本质上就是 V 上 K-线性函数, 同样既是对称张量也是交错张量. 下面把对称张量和交错张量联系起张量代数和对称代数. 首先回忆 K-模 V(未必有限生成投射) 的对称代数 $S(V)=T(V)/I,I$ 是 $\{x\otimes y-y\otimes x|x,y\in V\}$ 生成的理想, 外代数 $E(V)=T(V)/B,B$ 是 $\{x\otimes x|x\in V\}$ 生成的理想. 对每个自然数 m, 记 $S^{(m)}(V)=(T^{(m)}(V)+I)/I,E^{(m)}(V)=(T^{(m)}(V)+B)/B$, 那么 $S(V)=\oplus_{m=0}^{\infty}S^{(m)}(V),E(V)=\oplus_{m=0}^{\infty}E^{(m)}(V)$ 分别给出对称代数和外代数上的分次结构. 注意到 K-模同构

$$T^{(m)}(V)/(I\cap T^{(m)}(V))\cong S^{(m)}(V),T^{(m)}(V)/(B\cap T^{(m)}(V))\cong E^{(m)}(V),$$

所以有对偶模的 K-模同构 $\mathrm{Hom}_K(S^{(m)}(V),K)\cong\mathrm{Hom}_K(T^{(m)}(V)/(I\cap T^{(m)}(V)),K)$ 以及

$$\mathrm{Hom}_K(E^{(m)}(V),K)\cong\mathrm{Hom}_K(T^{(m)}(V)/(B\cap T^{(m)}(V)),K).$$

易验证当 V 是有限生成投射模时, 存在自然的 K-模同构 $\Sigma^{(m)}(V^*)\cong\mathrm{Hom}_K(T^{(m)}(V)/(I\cap T^{(m)}(V)),K)$ 以及

$$\Lambda^{(m)}(V^*)\cong\mathrm{Hom}_K(T^{(m)}(V)/(B\cap T^{(m)}(V)),K).$$

所以有 K-模同构 $\Sigma^{(m)}(V^*)\cong\mathrm{Hom}_K(S^{(m)}(V),K)$ 和 $\Lambda^{(m)}(V^*)\cong\mathrm{Hom}_K(E^{(m)}(V),K)$. 这说明当 V 是有限生成投射 K-模时, V 上所有 m 阶对称张量 (即 V 上所有 m 重对称 K-线性型) 构成的 K-模 $\Sigma^{(m)}(V^*)$ 同构于对称代数 m 次直和项的对偶模 $\mathrm{Hom}_K(S^{(m)}(V),K)$. 而 V 上所有 m 阶交错张量 (即 V 上所有 m 重交错 K-线性型) 构成的 K-模同构于外代数 m 次直和项的对偶模 $\mathrm{Hom}_K(E^{(m)}(V),K)$.

3 对偶函子与外幂的交换性

本节固定含幺交换环 K, 如无特别说明, 考虑的模均为 K-模. 取 K-模取外幂也是在系数环 K 上作.

Proposition 3.1. 设 V 是含幺交换环 K 上有限生成投射模, 那么对任何自然数 r, $\wedge^r V$ 也是有限生成投射 K-模. 并且有 K-模同构 $\wedge^r \mathrm{Hom}_K(V,K) \cong \mathrm{Hom}_K(\wedge^r V, K)$. 即对有限生成投射模取对偶和作外幂可交换.

Proof. 命 $\alpha : \wedge^r \mathrm{Hom}_K(V,K) \to \mathrm{Hom}_K(\wedge^r V, K)$ 满足对任何 $f_1, ..., f_r \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V,K)$ 有

$$\alpha(f_1 \wedge \cdots \wedge f_r)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) f_1(v_{\sigma(1)}) f_2(v_{\sigma(2)}) \cdots f_r(v_{\sigma(r)}).$$

因为 V 是有限生成投射模, 故有对偶基 $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ 与 $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subseteq V^*$, 于是可直接计算验证当 $r > n$ 时, $\wedge^r V = 0$; 当 $0 \le r \le n$ 时, $\{x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r} | 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n\}$ 和 $\{\alpha(x_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_r}^*) | 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n\}$ 给出 $\wedge^r V$ 的对偶基. 所以 $\wedge^r V$ 是有限生成投射模. 命

$$\beta : \mathrm{Hom}_K(\wedge^r V, K) \to \wedge^r \mathrm{Hom}_K(V,K), f \mapsto \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} f(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r}) x_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_r}^*,$$

可以直接计算验证 α 与 β 互为逆映射. □

Remark. 特别地, 对域上有限维线性空间 V, 有线性同构 $\wedge^r V^* \cong (\wedge^r V)^*$.

在本节最后我们说明秩为 n 的自由 K-模 V 在 K 上的外幂也是自由的, 并计算其自由秩 (见 [命题3.4]).

Lemma 3.2. 设 K 是含幺交换环, M 是 K-模, $E(M)$ 是其外代数. $i_M : M \to E(M)$ 是标准嵌入, 如果 K-模同态 $f : M \to E(M)$ 满足 $f(x) i_M(x) = i_M(x) f(x), \forall x \in M$, 那么存在唯一的反导子 $D : E(M) \to E(M)$使得

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "f"'] & E(M) \arrow[d, dashed, "D"] \\ & E(M) \end{tikzcd}$$

交换. 即若模同态 $f : M \to E(M)$ 满足每个 $x \in M$ 在 f 下的像与在 i_M 下的像在 $E(M)$ 中可交换, 则可将 f 延拓至 $E(M)$ 上.

Proof. 仅证 D 的存在性 (唯一性由反导子定义易证). 作矩阵代数 $A = \mathrm{M}_2(E(M))$ 以及 K-模同态

$$h : M \to A, x \mapsto \begin{pmatrix} i_M(x) & 0 \\ f(x) & -i_M(x) \end{pmatrix},$$

则 $h(x)^2 = 0, \forall x \in M$, 所以存在唯一的 K-代数同态 $\overline{h} : E(M) \to E(M)$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "h"'] & E(M) \arrow[d, dashed, "\overline{h}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

对上述代数同态 $\overline{h}: E(M) \to A$, $\overline{h}(x+B) = \begin{pmatrix} x+B & 0 \\ f(x) & -x+B \end{pmatrix}$ 表明对任何 $a \in E(M)$, $\overline{h}(a)$ 形如

$$\overline{h}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ D(a) & \bar{a} \end{pmatrix},$$

这定义出映射 $D: E(M) \to E(M)$, 并且由 $\overline{h}$ 是代数同态可得 D 是反导子. □

现在我们取特殊的 K-模同态 $\delta: M \to E(M)$ 满足 $\delta(x)i_M(x) = i_M(x)\delta(x), \forall x \in M$: 任给 K-模同态 $f: M \to K$(即 M 上 K-线性函数), 它诱导 K-模同态 $\delta: M \to E(M), x \mapsto f(x)1_{E(M)}$. 于是由 [引理3.2] 得 δ 导出反导子 $D: E(M) \to E(M)$ 使得 $Di_M = \delta$. 那么反导子 D 明显满足 $D(\wedge^1 M) \subseteq K1_{E(M)}$, 归纳地容易证明 $D(\wedge^r M) \subseteq \wedge^{r-1}M, \forall r \geq 1$. 下面我们来搞清楚 D 在每个外幂 $\wedge^r M$ 上是怎么作用的.

Lemma 3.3. 设反导子 $D: E(M) \to E(M)$ 是由 K-模同态 $f: M \to K$ 所诱导的, 则对每个正整数 r有

$$D(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} f(v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v_i} \wedge \cdots \wedge v_r, \forall v_1, ..., v_r \in M.$$

Proof. 当 $r = 1$ 时, 由反导子 D 的定义即得结果. 假设结论对 $r-1(r \geq 2)$ 的情形成立, 则 $D(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = D(v_1)(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r) - v_1 \wedge D(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r) = f(v_1)v_2 \wedge \cdots \wedge v_r - v_1 \wedge D(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$, 对 $D(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$ 应用归纳假设并代入上式整理即得结论. □

Proposition 3.4. 设 V 是含幺交换环 K 上秩为 n 的自由模, 有基 $\{v_1, ..., v_n\}$. 那么 V 决定的外代数 $E(V) = K1_{E(V)} \oplus \wedge^1 V \oplus \cdots \oplus \wedge^n V$ 且每个 $\wedge^r V$ 有基 $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\} (1 \leq r \leq n)$, 进而 $\wedge^r V$ 是自由模且有秩 C_n^r. 所以 $\mathrm{rank}_K E(V) = 2^n$.

Proof. 对正整数 $s \geq n+1$, 明显 $\wedge^s V = 0$. 我们对 $1 \leq r \leq n$ 归纳地证明结论, 当 $r = 1$ 时结论明显成立. 假设结论对 $r-1(2 \leq r \leq n)$ 成立, 我们来说明 $X = \{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ 是 $\wedge^r V$ 的基. 易见 $\wedge^r V$ 中元素都可以用 X 中有限个元素 K-线性表出, 要证的只有 X 的 K-线性无关性. 假设存在不全为零的 $c_{i_1 \cdots i_r} \in K$ 使得

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} c_{i_1 \cdots i_r} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} = 0,$$

设 $c_{j_1 \cdots j_r} \neq 0$, 设 $f \in V^*$ 是在 v_{j_1} 上取值 1, 其余 v_i 上取值 0 的线性函数 (这里 f 的定义依赖于 V 是自由模), 考虑 f 诱导的反导子 D, 作用上式可得

$$\sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_r \\ j_1 \notin \{i_1, ..., i_r\}}} c_{i_1 \cdots j_1 \cdots i_r} f(v_{j_1}) v_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{v_{j_1}} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} = 0,$$

其中项 $v_{j_2} \wedge \cdots \wedge v_{j_r}$ 的系数 $c_{j_1 \cdots j_r} \neq 0$, 这与 $r-1$ 情形结论成立的假设矛盾. □

Corollary 3.5. 设 V 是含幺交换环 K 上秩为 n 的自由模, 有基 $\{v_1, ..., v_n\}$. 设 $\psi_n: \wedge^n V \to K$ 是由 $\psi_n(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = 1$ 决定的 K-模同构, 那么对每个正整数 $1 \leq i \leq n-1$, 定义 $\psi_i: \wedge^i V \to (\wedge^{n-i} V)^* = \mathrm{Hom}_K(\wedge^{n-i} V, K), \alpha \mapsto \psi_i(\alpha)$ 为由 $\psi_i(\alpha): \wedge^{n-i} V \to K, \beta \mapsto \psi_n(\alpha \wedge \beta)$ 决定的 K-模同态, 那么每个 ψ_i 是同构. 特别地, 我们得到 K-模同构 $\wedge^i V \cong (\wedge^{n-i} V)^*, \forall 0 \leq i \leq n$.

Proof. 根据 [命题3.4], 我们已经知道每个外幂 $\wedge^i V$ 有基 $\{v_{s_1}\wedge\cdots\wedge v_{s_i}|1\le s_1<\cdots<s_i\le n\}$. 对偶模 $(\wedge^{n-i}V)^*$ 也是自由 K-模, 秩为 $n-i$, 它的基可以用 $\wedge^{n-i}V$ 的基构造对偶基给出. 为说明每个 ψ_i 是同构, 我们说明 ψ_i 将外幂的标准基 $\{v_{s_1}\wedge\cdots\wedge v_{s_i}|1\le s_1<\cdots<s_i\le n\}$ 映射到 $(\wedge^{n-i}V)^*$ 的某个基. 任取正整数序列 $1\le s_1<\cdots<s_i\le n$, 设 $\{1,2,...,n\}-\{s_1,...,s_i\}$ 中 $n-i$ 个数从小到大排是 $t_1,...,t_{n-i}$, 记 $\sigma_{(s_1,...,s_n)}$ 是把 1 到 i 分别映为 s_1 到 s_i, $i+1$ 到 n 分别映为 $t_1,...,t_{n-i}$ 的置换, 即有 $\sigma_{(s_1,...,s_n)}\in S_n$. 那么 $\psi_i(v_{s_1}\wedge\cdots\wedge v_{s_i})$ 作为 $\wedge^{n-i}V$ 上的 K-线性函数, 在基 $\{v_{q_1}\wedge\cdots\wedge v_{q_{n-i}}|1\le q_1<\cdots<q_{n-i}\le n\}$ 上的作用如下：如果正整数序列 $q_1<\cdots<q_{n-i}$ 中有 $s_1,...,s_i$ 中某个数, 则 $\psi_i(v_{s_1}\wedge\cdots\wedge v_{s_i})$ 作用 $v_{q_1}\wedge\cdots\wedge v_{q_{n-i}}$ 得到零. 否则, 即正整数序列 $q_1,...,q_{n-i}$ 恰好对应 $t_1,...,t_{n-i}$, 这时 $\psi_i(v_{s_1}\wedge\cdots\wedge v_{s_i})$ 作用 $v_{q_1}\wedge\cdots\wedge v_{q_{n-i}}$ 得到 $\mathrm{sgn}\sigma_{(s_1,...,s_n)}1_K$(虽然表达式看起来复杂, 但总是 1_K 与 -1_K 中的某个). 由此易验证

$$\{\psi_i(v_{s_1}\wedge\cdots\wedge v_{s_i})|1\le s_1<\cdots<s_i\le n\}$$

是 $(\wedge^{n-i}V)^*$ 的一个基. □

参考文献

[Jac09] N. Jacobson. *Basic algebra II.* Dover Publications, 2nd edition, 2009.