PI 代数

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 3 月 2 日

这份笔记主要记录了我在 2022 年 10 月所学习的 PI 代数基础知识, 主要以 [1] 中 PI 代数的预备常识为主线, 一些细节上的处理主要参考了 [2]-[4]. 这份笔记中会在每个定义、定理前标明我主要参考的文献. 由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出!

目录

1 引言

PI 环的出现最早可以追溯到射影几何, 上个世纪 20 年代就有射影几何方面的文章中出现关于 PI 环的研究 (例如 [5]). 这里仅列出 PI 代数的部分发展历史 (更详尽的 PI 环早期发展历史可以参考 [6]):

• 1943 年, M. Hall 在文献 [7] 中证明了对域和四元数代数 $\mathbb{H}$, 都满足多项式等式 (见 [例2.8])

$$(xy-yx)^2z=z(xy-yx)^2.$$

• 1948 年, I. Kaplansky 在文献 [8] 中引入了 PI 环的概念, 并证明了本原 PI 环是其中心上有限维中心单代数, 这一结果被称为 Kaplansky 定理 (见 [定理2.54]).

• 1950 年, J. Levitzki 在文献 [9] 中证明了素 PI 环没有非零的诣零理想 (更一般的结论见 [推论2.43]).

• 1950 年, S. A. Amitsur 和 J. Levitzki 在文献 [10] 中证明了含幺交换环 K 上的 n 阶矩阵环 $\mathrm{M}_n(K)$ 满足标准等式 s_{2n}, 这一结果被称为 Amitsur-Levitzki 定理 (见 [定理2.30]).

• 1952 年, S. A. Amitsur 在文献 [11] 中证明了任何 PI 环都满足某个偶数个变量的标准等式的幂 s_{2m}^n, 在这份笔记中称为 Amitsur 定理 (见 [定理2.76]).

• 1956 年, S. A. Amitsur 在文献 [12] 中证明了没有非零诣零理想的含幺环 R 上的一元多项式环 $R[x]$ 是半本原环 (见 [定理2.64]).

• 1960 年, Ed Posner 在文献 [13] 中使用 Goldie 定理证明了素 PI 环 R 关于中心正则元集 $S=Z(R)-\{0\}$ 的右商环是其中心上的有限维中心单代数 (见 [定理2.68]).

• 1972 年, E. Formanek 在文献 [14] 中构造了域上 n 阶矩阵环 $\mathrm{M}_n(F)$ 的中心多项式 (见 [定理2.47]).

• 1973 年, Y.P. Razmyslov 独立于 Formanek 在文献 [15] 中构造了矩阵环 $\mathrm{M}_n(F)$ 的中心多项式.

• 1973 年, L.R. Rowen 在文献 [16] 中使用 Formanek 中心多项式证明了半素 PI 环 R 的任何非零理想 J 与中心之交非零, 即 $J\cap Z(R)\neq 0$. 作为应用, 他加强了 Posner 定理 (见 [定理2.66]).

• 1976 年, S. Rosset 在文献 [17] 中使用外代数给出了 Amitsur-Levitzki 定理的简短证法.

这份笔记包含了以上列出的所有定理的证明, 其中 Amitsur-Levitzki 定理的证明采用了 Rosset 的方法, Kaplansky 定理的证明用到了本原环的稠密性定理, Posner 定理的证明采用了 Rowen 的方法. 我们将会看到, 域上的 PI 代数包含了交换代数与有限维代数 (见 [命题2.23]) 这两类代数. 因为 PI 环是交换环的推广 (见 [注记2.14]), 所以粗略地说, Kaplansky 定理就是把"交换本原环等价于域"推广为"PI 本原环等价于域上有限维单代数", Posner 定理就是把"交换素环 (也就是整区) 关于中心正则元集的局部化 (也就是商域) 是自身上的 1 维单代数"推广为"PI 素环关于中心正则元集 S 的右局部化 R_S 是中心 $Z(R_S)=Z(R)_S$ 上的有限维单代数". Amitsur 定理表明"PI 代数作为环是 PI 环"(见 [定理2.76]). 利用 Posner 定理与 Goldie 理论的事实, 可以得到 FBN 环类包含了 Noether PI 环类 (见 [定理3.3]). 利用 Kaplansky 定理与 Godie 定理, 可以证明域上仿射 PI 代数是满足零点定理的 Jacobson 环 (见 [推论3.10]).

2 经典结果

2.1 基本概念

这部分主要介绍 PI 代数的定义和最基本的性质, 我们将证明任何 PI 代数都满足某个首一多重线性多项式 (见 [定理2.16]) 以及 PI 代数的中心扩张还是 PI 的 (见 [推论2.18]). 如无特别说明, 默认含幺环 R 的单位

元 $1_R \neq 0$, 含幺交换环 K 上的代数 A 默认有幺元 $1_A \neq 0$, 考虑的所有环默认非零环.

Definition 2.1 (多项式等式, [2],[4]). 设 R是 (非零) 环, 如果存在 $f \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 使得 $f(c_1, c_2, ..., c_n) = 0, \forall c_1, c_2, ..., c_n \in R$, 那么称 R 满足 f 且 f 是 R 的一个**多项式等式** (简称为 PI). 称 $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 中元素

$$s_n = s_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, \text{这里sgn}\sigma\text{表示置换}\sigma\text{的符号}$$

为第 n 个**标准等式**. 若非零多项式 $f \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 满足所有最高次 (这里是指将 f 表示为有限个字的非零 $\mathbb{Z}$-线性组合后, 系数非零的最长的字的长度) 项至少有一个系数为 1, 则称 f 是**首一多项式**. 称 $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 中形如

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, a_\sigma \in \mathbb{Z}$$

的元素为**多重线性多项式**.

Remark 2.2. 虽然我们把自由代数 $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 与多项式环 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, ..., x_n]$ 中元素都被称为多项式, 但它们是不同的概念, 前者变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 两两不交换而后者未定元两两可交换.

Remark 2.3. 类似地可以定义代数的多项式等式, 设 K 是含幺交换环, A 是 K-代数 (这里定义多项式等式的概念没有要求 A 必须有幺元), 如果自由代数 $K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 中的元素 f 使得 $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0, \forall a_1, a_2, ..., a_n \in A$, 则称 A 满足 f 且 f 是 A 的一个多项式等式. 将 $K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 中形如

$$h = h(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} b_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, b_\sigma \in K$$

的元素称为 K 上多重线性多项式. 因为环总可以视作 $\mathbb{Z}$-代数, 所以这里的概念可以视作 [定义2.1] 的推广. 这里称 h 为“多重线性”的原因是, 对 A 中任意 $n+1$ 个元素 $a_1, ..., a_{i-1}, a_i, b_i, a_{i+1}, ..., a_n$ 以及任意 $c \in K$, 有:

$$h(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, ..., a_n) = h(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n) + h(a_1, ..., a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, ..., a_n),$$

$$h(a_1, ..., a_{i-1}, ca_i, a_{i+1}, ..., a_n) = ch(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

Remark 2.4. 易见标准等式 s_n 是特殊多重线性多项式, 它是 n 次整系数多重线性多项式.

Remark 2.5. 设 A 是含幺交换环 K 上的代数, $Z(A)$是中心, 并设 $\mathcal{A}$ 是将 A 视作 $Z(A)$-模的一个生成元集. 如果多重线性多项式 $f \in K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 满足 $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0, \forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathcal{A}$, 则 A 满足 f.

Remark 2.6. 如果多重线性多项式 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} b_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \in K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$满足对任给正整数 $1 \leq i < j \leq n$, 有 $f(x_1, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, ..., x_n)$, 则称 f 是 K **上交错多重线性多项式**. 易见 $f(x_1, ..., x_n)$ 是交错多重线性多项式的充要条件是对任给正整数 $1 \leq i < j \leq n$, 有 $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, ..., x_n) = 0$(将 f 关于置换求和的展开式拆分成奇置换部分与偶置换部分之和, 考察每项系数可以发现对每个 $1 \leq i < j \leq n$, 有 $b_\sigma = -b_{(ij)\sigma}, \forall \sigma \in S_n$, 这里 $(ij) \in S_n$ 是对换). 易见标准等式 s_n 是 n 次交错多重线性多项式. 因此, 对 K-代数 A 中元素 $a_1, ..., a_n$, 只要有某个 $a_i = a_j (1 \leq i \neq j \leq n)$, 就有 $s_n(a_1, ..., a_n) = 0$.

Example 2.7. 设 R是交换环, 那么 R 满足第 2 个标准等式 $s_2 = x_1 x_2 - x_2 x_1$, 因为 $ab - ba = 0, \forall a, b \in R$.

Example 2.8 (Hall 等式)**.** 设 K是含幺交换环, $R = \mathrm{M}_2(K)$, 易见 $(AB-BA)^2C = C(AB-BA)^2, \forall A, B, C \in R$, 所以 R 满足 $(x_1x_2 - x_2x_1)^2x_3 - x_3(x_1x_2 - x_2x_1)^2$, 称为 **Hall 等式** (事实上 W. Wagner 在 1937 年就给出了这一构造 [18]). 因为四元数环可以用二阶复方阵表示

$$\mathbb{H} \cong \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \big| z, w \in \mathbb{C} \right\},$$

所以域上二阶方阵满足 Hall 等式蕴含了 $\mathbb{H}$ 满足 $(xy - yx)^2z - z(xy - yx)^2 \in \mathbb{Z}\langle x, y, z\rangle$.

Example 2.9. 设 K是特征为 2 的域, 那么可数个变量的自由代数 $A = K\langle x_1, ..., x_n, ...\rangle$ 满足多项式等式 $2x \in \mathbb{Z}\langle x\rangle$, 但它不满足任何 K 上的非零多项式 $f \in K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$.

Proof. 若不然, 设存在 K 上的非零多项式 $f \in K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 使得 $f(g_1, ..., g_n) = 0, \forall g_1, g_2, ..., g_n \in A$. 作代入 $g_i = x_i \in A$, 我们得到 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ 是零多项式, 矛盾. □

Remark 2.10. 证明过程中能够作代入 $g_i = x_i$ 的原因是对每个 K-代数 B, 固定 $b_1, b_2, ..., b_n \in B$, 映射 $\varphi : K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle \to B, h(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto h(b_1, b_2, ..., b_n)$ 是 K-代数同态, 以后不再说明.

Definition 2.11 (PI 代数,[2],[4])**.** 设 K 是含幺交换环, 若 K-代数 A(这里 A 可以没有 1_A) 满足某个 K 上首一多项式等式 $f \in K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$, 则称 A 是 K 上的**多项式等式代数**, 或简称为 **PI 代数**. 如果 $K = \mathbb{Z}$, 称 A 是**多项式等式环**, 简称为 **PI 环**. 称 PI 代数满足的次数最低的首一多项式的次数为 PI 代数的**最小次数**.

Remark 2.12. 根据我们的定义立即得到任何 K 上的代数 A 如果作为环是 PI 的, 那么 A 当然是 PI 代数. 如果定义中将多项式等式的“首一”降低为“非零”, 就会出现 [例2.9] 这样病态的例子——作为环是 PI 的但作为代数不是 PI 的. 一个自然的反问题是：如果 K-代数 A 是 PI 代数, 那么它作为环是否是 PI 的呢 (即它是否满足某个首一整系数多项式)? 之后我们将会给出一个肯定的答复 (见定理2.76), 因此所有关于 PI 环的性质对于 PI 代数也是成立的.

Remark 2.13. 对 PI 代数引入最小次数的概念使证明一些关于 PI 代数的命题多了数学归纳法这一工具. 我们之后会对最小次数作归纳去证明非交换环论中的经典公开问题 Köthe 猜想在 PI 环层面是成立的.

Remark 2.14. 通过 [例2.7] 我们看到交换代数总是 PI 的, 通过 [例2.8] 我们看到域上的二阶矩阵环是 PI 的. 之后我们将会看到, 对含幺交换环 K 上的任何矩阵环 $\mathrm{M}_n(K)$, 它是 PI 的, 并且最小次数是 $2n$. 而 [例2.9] 也为我们提供了 $\mathbb{Z}\langle x_1, ..., x_n, ...\rangle$ 这一不是 PI 环的例子.

从 PI 代数的定义出发容易证明下面的事实, 进而得到从一些 PI 代数出发构造新的 PI 代数的一些手段. 我们将会在证明任何 PI 代数作为环也是 PI 的这一事实时, 使用下面引理的 (3).

Lemma 2.15 ([2])**.** 给定含幺交换环 K, 则
(1) 设 A 是 K 上最小次数为 d 的 PI 代数, 若 A' 是 A 的子代数, 那么 A' 也是 PI 代数, 且 A' 的最小次数不超过 d.
(2)PI 代数的 (代数) 同态像还是 PI 的. 代数同构的的 PI 代数满足相同的多项式等式.
(3) 如果含幺交换环 K 上的 PI 代数族 $\{A_i | i \in \Lambda\}$, 指标集 Λ 非空, 满足所有的 A_i 满足 K 上一公共的多项式 f, 那么 $\prod\limits_{i\in\Lambda} A_i$ 也满足 f.

如果 PI 环 R 满足多项式等式 $h(x,y,z)=x^2y-yx-z^3+z^{2022}$, 那么我们总能从 h 出发得到 R 的一个首一多重线性多项式：首先, 通过代入 $z=0$ 可以看到 R 有多项式等式 $h(x,y)=x^2y-yx$, 再线性化处理多项式 h:

$$g(x,y,w)=h(x+w,y)-h(x,y)-h(w,y)=xwy+wxy.$$

这就得到 R 所满足的一个多重线性多项式. 对一般的 PI 代数我们也可以用这种思想去说明它一定满足某个首一多重线性多项式, 这也是下面的定理所说的事实.

Theorem 2.16 ([2]). 若含幺交换环 K 上的代数 A(可以没有 1_A) 满足 $K\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle$中一个次数为 d 的首一多项式 f, 那么存在某个 K 上次数不超过 d 的首一多重线性多项式 g(这里 g 的变量个数可能超过 n) 使得 g 是 A 的一个多项式等式.

Proof. 证明分为下面两步, 先调整多项式 f 来得到一个每个单项式都包含 $x_1,...,x_m$ 每个变量的首一多项式 $h(x_1,...,x_m)$(这里的变量个数 m 不超过 n), 再从 h 出发通过“线性化”的想法将 h 扩充变量与降次, 来得到所需要的首一多重线性多项式 g.

Step1. 我们先说明存在 $K\langle x_1,x_2,...,x_m\rangle$(这里 m 是不超过 n 的一个正整数) 中一个次数不超过 d 的首一多项式 h 使得 h 的每个 (系数非零的) 单项式都含有 $x_1,x_2,...,x_m$ 的每个变量并且它是 A 的一个多项式等式. 如果 f 的每个单项式都含有 $x_1,x_2,...,x_n$ 每个变量, 取 $h=f$ 即可. 否则, 存在某个变量 x_i 不在 f 的某个单项式中 (例如 $p(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3x_2\in\mathbb{Z}\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ 中单项式 x_1x_2 不含变量 x_3), 设 $f_1(x_1,x_2,...,x_n)$ 是 f 所有包含 x_i 的非零单项式之和 (如果不存在这样的非零单项式, 定义 $f_1=0$), 设 $f_2(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ 是 f 所有不包含 x_i 的非零单项式之和 (如果不存在这样的非零单项式, 定义 $f_2=0$), 那么 $f(x_1,x_2,...,x_n)=f_1(x_1,x_2,...,x_n)+f_2(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$. 命 $a_i=0$, 则对任给 $a_1,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_n\in A$, 有 $f_2(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_n)=0$, 这说明 f_2 是 A 的一个多项式等式, 于是 f_1 也是 A 的一个多项式等式. 由于 f 是首一的所以 f_1,f_2 中至少有一个也是首一的, 选取 f_1,f_2 中首一的那个多项式 $f_j(j\in\{1,2\})$, 那么 f_j 是 A 的次数不超过 d 的首一多项式等式且 f_j 的每个单项式要么都含有变量 x_i, 要么都不含变量 x_i. 如果 f_j 每个单项式中出现的所有变量一致, 取 $h=f_j$, 否则, 我们对 f_j 重复作上述讨论, 可在有限步内找到满足条件的 h.

Step2. 设 A 有首一的多项式等式 $h(x_1,x_2,...,x_m)\in K\langle x_1,x_2,...,x_m\rangle$ 满足次数不超过 d 且 h 每个单项式都包含 $x_1,x_2,...,x_m$ 每个变量 (根据前面的讨论我们知道这样的 h 是存在的), 记 l_i 是 x_i 在 h 每个单项式中出现的次数 (或者说每个单项式关于变量 x_i 的次数) 的最大值, $l=\max\{l_1,l_2,...,l_m\}$(为了之后叙述方便, 临时称 l 是 h 的**变量最高次数**), 我们对 h 的变量最高次数 $l\geq 1$ 作归纳说明存在 K 上次数不超过 d 的首一多重线性多项式 g 使得 g 是 A 的一个多项式等式. 当 $l=1$ 时, 由 h 的定义知 h 每个单项式中变量 $x_1,...,x_m$ 恰好出现一次, 故 h 自身是首一多重线性多项式, 取 $g=h$ 即可. 假设结论对不超过 $l-1(l\geq 2)$ 的情形成立, 那么可设 $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_t\leq m$ 是 $1,2,...,m$ 中所有使得 $l_i=l$ 的指标 i. 命 $g_1(x_1,x_2,...,x_{m+1})=$

$$h(...,x_{i_1-1},x_{i_1}+x_{m+1},x_{i_1+1},...)-h(...,x_{i_1-1},x_{i_1},x_{i_1+1},...)-h(...,x_{i_1-1},x_{m+1},x_{i_1+1},...),$$

那么 g_1 是 A 的一个首一多项式等式, 次数不超过 h 的次数, 每项含有 $x_1,...,x_{m+1}$ 的每个变量, 且变量 x_{i_1} 在 g_1 的每个单项式中次数不超过 $l-1$(这里 g_1 的构造相当于是对 g_1 关于变量 x_{i_1} 作了“线性化”). 类似地我们定义满足单项式包含每个变量且首一的多项式 $g_2(x_1,...,x_{m+1},x_{m+2})=$

$$g_1(...,x_{i_2-1},x_{i_2}+x_{m+2},x_{i_2+1},...)-h(...,x_{i_2-1},x_{i_2},x_{i_2+1},...)-h(...,x_{i_2-1},x_{m+2},x_{i_2+1},...),$$

那么 g_2 是 A 的首一多项式等式, 次数不超过 g_1 的次数, g_2 每个单项式关于变量 x_{i_2} 的出现次数不超过 $l-1$. 重复上述过程, 可得 K 上多项式 $g_t(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_{m+t})$ 使得它是 A 的首一多项式等式, 次数不超过 d, g_t 每个单项式都包含 $x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_{m+t}$ 的每个变量, g_t 的变量最高次数不超过 $l-1$, 对 g_t 应用归纳假设即得多项式 g. $\square$

Corollary 2.17 ([2]). 设 A 是含幺交换环 K 上最小次数为 d 的 PI 代数, 那么存在 d 次首一多重线性多项式 $g(x_1,...,x_d)\in K\langle x_1,...,x_d\rangle$ 使得 g 是 A 的一个多项式等式.

Corollary 2.18 (PI 代数的中心扩张仍 PI, [2]). 如果 K-代数 B 有子代数 A 满足 B 作为 $Z(B)$-模有个生成元集是 A(或等价地, $A\cup Z(B)$ 是 B 作为 K-代数的一个生成元集), 则称 B 是 A 的**中心扩张**. 例如任意多个未定元的多项式环 $A[\{x_i\}_{i\in I}]$(这里 $\{x_i\}_{i\in I}$ 是 A 上以 I 为指标集的未定元集) 是 A 的中心扩张 (因为 $\{x_i\}_{i\in I}$ 在多项式环 $A[\{x_i\}_{i\in I}]$ 的中心里). 如果 K-代数 A 是 PI 代数, 那么 A 的中心扩张也是 PI 代数. 更进一步, PI 代数与它的中心扩张满足相同的多重线性多项式 (所以也有相同的最小次数). 特别地, *PI* 代数 A 上的多项式代数 $A[\{x_i\}_{i\in I}]$也是 PI 的 (所以 K-代数 A 是 PI 代数当且仅当 $A[x]$ 是 PI 代数).

Proof. 设 A 是 PI 代数, $B\supseteq A$ 是中心扩张. 由 [定理2.16] 可得存在某个首一多重线性多项式 $f\in K\langle x_1,...,x_n\rangle$ 使得 f 是 A 的多项式等式. 而 B 中元素均可由 A 中有限个元素 $Z(B)$-线性表出, 因而由 f 的多重线性性得到 f 也是 B 的多项式等式. 反过来, A 作为 B 的子代数当然满足 B 在 K 上的任何多项式等式, 所以 A 与 B 满足相同的多重线性多项式. $\square$

下面我们来说明域上有限维代数是 PI 的, 结论上会做得更一般些. 先做一些准备.

Lemma 2.19 ([2]). 设 R 为含幺环, M 是有限生成右 R-模, 可由 n 个元素生成, 那么存在矩阵环 $\mathrm{M}_n(R)$ 的 (含幺) 子环 S 与满环同态 $\varphi: S\to \mathrm{End}(M_R)$.

Proof. 因为有环同构 $\mathrm{M}_n(R)\cong \mathrm{End}(R^n)$, 所以只需证明自同态环 $\mathrm{End}(R^n)$ 有含幺子环 S 以及 S 到 $\mathrm{End}(M_R)$ 的满环同态即可. 设 M 有一个生成元集是 $\{x_1,x_2,...,x_n\}$, 置 $\pi: R^n\to M$ 为标准同态 (把 R^n 中的第 i 个标准单位列向量映至 x_i), 并令 $S=\{\alpha\in \mathrm{End}(R^n)|\alpha(\mathrm{Ker}\pi)\subseteq \mathrm{Ker}\pi\}$, 那么 S 明显是 $\mathrm{End}(R^n)$ 的含幺子环. 易见对任给 $\alpha\in S$, 存在唯一的模同态 $\alpha'\in \mathrm{End}(M_R)$ 使得 $\pi\alpha=\alpha'\pi$, 即下图交换:

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[d, dashed, "\alpha'"] \\ R^n \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

那么 $\varphi: S\to \mathrm{End}(M_R), \alpha\mapsto\alpha'$ 是定义合理的保幺环同态. 只需验证 φ 是满射即可, 任取自同态 $f\in \mathrm{End}(M_R)$, 存在 n 阶矩阵 $A\in \mathrm{M}_n(R)$(未必唯一) 使得

$$(f(x_1),f(x_2),...,f(x_n))=(x_1,x_2,...,x_n)A,$$

通过矩阵 A 在 R^n 上的左乘可以导出 R^n 上的自同态 $\mathcal{A}: R^n\to R^n, v\mapsto Av$, 可直接验证 $\mathcal{A}\in S$ 且 $\varphi(\mathcal{A})=f$, 因此 φ 是满环同态. $\square$

Lemma 2.20 ([2]). 设 R 是含幺环, 如果 R 作为 $Z(R)$-模可由 m 个元素生成, 那么对任何正整数 $t\geq m+1$, R 满足任何 t 次交错多重线性多项式 (例如 s_t). 特别地, 这时 R 是 PI 环.

Proof. 设 R 作为 $Z(R)$-模有生成元集 $X=\{a_1,...,a_m\}$, 根据 [注记2.6], 对任给 $t\geq m+1$ 次交错多重线性多项式 f, 有 $f(b_1,...,b_t)=0,\forall b_1,...,b_t\in X$. 再由 f 的多重线性性可得 f 是 R 的多项式等式. □

Remark 2.21. 因此 R 如果作为某个中心子环上的模是有限生成的, 则 R 是 PI 环.

Example 2.22 (交换环上的矩阵环 PI, [2])**.** 设 K 是含幺交换环, $R=\mathrm{M}_n(K)$ 作为其中心上的模明显可以由 n^2 个基础矩阵 E_{ij} 生成, 所以 R 满足 s_{n^2+1}, 特别地, R 是 PI 环. 现在我们得到了 $\mathrm{M}_n(K)$ 是最小次数不超过 n^2+1 的 PI 环, 在证明完 Amitsur-Levitzki 定理过后, 我们将会看到 $\mathrm{M}_n(K)$ 的最小次数是 $2n$.

Proposition 2.23 ([2])**.** 设 R 是含幺环, K是 R 的 (包含 1_R 的) 交换子环, 如果 R 是有限生成 K-模, 则 R 是 PI 环. 特别地, 域上有限维代数作为环是 PI 环, 进而也是 PI 代数.

Proof. 设 K-模 R 可由 n 个元素生成, 那么由 [引理2.19] 存在 $\mathrm{M}_n(K)$ 的含幺子环 S 使得 S 到 $\mathrm{End}(R_K)$ 有满环同态, 所以由 [例2.22] 以及 [引理2.15] 可知 $\mathrm{End}(R_K)$ 是 PI 环. 而 R 到 $\mathrm{End}(R_K)$ 有嵌入: $j:R\to\mathrm{End}(R_K), a\mapsto a_l$, 这里 a_l 是由元素 a 决定的左乘变换, 所以 R 是 PI 环. □

Remark 2.24. 与 [引理2.20] 不同的是这里交换子环 K 未必在 $Z(R)$ 中, 该命题推广了 [引理2.20].

若含幺交换环 K 上代数 A 是某个中心子代数 Z 上有限生成模, 称 A 是**模有限代数**. 从 [命题2.23] 中我们看到模有限代数都是 PI 代数. 下面介绍一个模有限代数类. 根据仿射代数几何中代数与几何的对应我们知道代数闭域上仿射簇范畴与交换仿射可约代数范畴间有标准的范畴对偶. 进而每个仿射簇在同构意义下都对应一个唯一的交换代数. 仿射空间 $\Bbbk^n$ 对应多项式代数 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$. 下面我们来看仿射空间的量子化, 单位根处的量子仿射空间也可以产生模有限代数. 首先是最简单的量子平面, 它来自俄罗斯数学家 Yuri Manin.

Example 2.25 (量子平面, [1])**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $q\in\Bbbk^*$, 称 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)=\Bbbk\langle x,y\rangle/(xy-qyx)$ 为 q 处的**量子平面**. 如果 q 是 m 次单位根, 即 $q^m=1$. 那么 $\overline{x}^m,\overline{y}^m\in Z(\mathcal{O}_q(\Bbbk^2))$, 这时 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 是中心子代数 $\Bbbk[\overline{x}^m,\overline{y}^m]$ 上的有限生成模. 因此单位根处的量子平面是模有限仿射代数.

Remark 2.26. 设 $q\in\Bbbk^*$, 则量子平面 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $X=\{\overline{x}^i\overline{y}^j|i,j\in\mathbb{N}\}$. 易见 X 可 $\Bbbk$-线性张成 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$. 要看到 X 的线性无关性, 如果存在有限个不全为零的元素 $c_{ij}\in\Bbbk$ 使得 $\sum c_{ij}\overline{x}^i\overline{y}^j=0$, 那么存在 $\Bbbk\langle x,y\rangle$ 中两两互异的非零多项式 $g_1,...,g_m,f_1,...,f_m$ 使得 $\sum c_{ij}x^iy^j=\sum f_k(x,y)(xy-qyx)g_k(x,y)$. 如果 $q=1$ 结论明显成立, 下设 $q\neq1$. 考察该式等号两边的最高次单项式便得矛盾. 因此 $X=\{\overline{x}^i\overline{y}^j|i,j\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 作为线性空间的基. 下面我们利用 Ore 扩张的性质来说明量子平面是双边 Noether 整环. 首先回忆含幺环 R 上关于一个给定环自同态 $\sigma:R\to R$ 的加群同态 $\delta:R\to R$ 被称为 σ-导子, 如果 $\delta(ab)=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b,\forall a,b\in R$. 在含幺环 R 关于环自同态 σ 和 σ-导子 δ 的 Ore 扩张 $R[x;\sigma,\delta]$ 中有 $xa=\sigma(a)x+\delta(a),\forall a\in R$. 如果 R 是整环且 σ 是单射, 则 $R[x;\sigma,\delta]$ 也是整环. 如果 σ 是满射且 R 是左 Noether 环 (那么 σ 是环自同构), 那么 $R[x;\sigma,\delta]$ 也是左 Noether 环. 并且 Ore 扩张 $R[x;\sigma,\delta]$ 满足下述泛性质：对任给含幺环 S, 保幺环同态 $\eta:R\to S$ 以及满足 $y\eta(a)=\eta(\sigma(a))+\eta(\delta(a)),\forall a\in R$ 的元素 $y\in S$, 总存在唯一的保幺环自同态 $\overline{\eta}:R[x;\sigma,\delta]\to S$ 使得 $\overline{\eta}(x)=y$ 并且下图交换：

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr] \arrow[dr, "\eta"'] & & R[x;\sigma,\delta] \arrow[dl, dashed, "\overline{\eta}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

现在取 $R=\Bbbk[x]$, $\sigma: R\to R, f(x)\mapsto f(q^{-1}x), \delta=0$(易见 σ 是环自同构). 注意到在 $S=\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 中总有 $\overline{y}\overline{x}=q^{-1}\overline{x}\overline{y}$, 因此若置 $\eta:\Bbbk[x]\to\mathcal{O}_q(\Bbbk^2), f(x)\mapsto f(\overline{x})$ 是标准嵌入同态, 那么由 $\overline{y}\eta(f(x))=\eta(\sigma(f(x)))\overline{y}$ 知通过上述 Ore 扩张的泛性质存在唯一的保幺环同态 $\overline{\eta}:\Bbbk[x][y;\sigma]\to\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 使得 $\overline{\eta}(y)=\overline{y}$ 并且 $\overline{\eta}(f(x))=f(\overline{x}),\forall f(x)\in\Bbbk[x]$. 由此可见 $\overline{\eta}$ 一定是 $\Bbbk$-代数同态, 它将 $\Bbbk[x][y;\sigma]$ 的标准基映至量子平面的标准基, 故 $\overline{\eta}$ 是代数同构. 上述讨论表明量子平面是域上一元多项式代数关于一个特殊代数自同构的 Ore 扩张. 特别地, 量子平面是整环并且是双边 Noether 环. 故单位根处量子平面是 Noether 仿射 PI 整环.

Example 2.27 (量子仿射空间, [1]). 设 $\Bbbk$ 是域, $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}\in\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 满足下面的乘性反对称条件:

$$q_{ii}=1, q_{ij}q_{ji}=1, \forall 1\le i,j\le n.$$

称 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)=\Bbbk\langle x_1,...,x_n\rangle/(\{x_ix_j-q_{ij}x_jx_i|1\le i,j\le n\})$ 为乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}$ 处的 (多参数) **量子仿射 n-空间**. 这里要求矩阵 $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}$ 是乘性反对称的原因是我们希望在 $x_ix_i=q_{ii}x_ix_i$ 以及 $x_ix_j=q_{ij}q_{ji}x_ix_j$ 的基础上排除 $x_ix_j=0$ 这种现象. 这迫使矩阵 $\boldsymbol{q}$ 的主对角线元素均为 1, (i,j) 元与 (j,i) 元互为 $\Bbbk$ 中乘法逆元. 如果 $q\in\Bbbk^*$, 乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}$ 满足当 $i<j$ 时有 $q_{ij}=q$, 则记 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 为 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$, 称为 q 处 (单参数) **量子仿射 n-空间**. 由此可见量子平面是特殊的量子仿射 2-空间. 如果乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}$ 满足每个元素都是单位根, 那么对每个 $1\le i\le n$, 存在正整数 t_i 使得 $\overline{x_i}^{t_i}\in Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$. 因此存在正整数 t 使得 $\Bbbk[\overline{x_1}^t,...,\overline{x_n}^t]\subseteq Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$. 由此可知元素均为单位根的乘性反对称阵处的 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 也是模有限代数.

类似于量子平面, Weyl 代数也是特殊的 Ore 扩张. 下面我们说明正特征的 Weyl 代数也是 PI 环.

Example 2.28 (Weyl 代数, [2]). 固定域 $\Bbbk$, 回忆 n 阶 **Weyl 代数** $A_n(\Bbbk)$ 是由 $2n$ 个生成元 $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n$ 和生成关系 $x_iy_j-y_jx_i=\delta_{ij}, x_ix_j-x_jx_i=y_iy_j-y_jy_i=0$, 这里 $1\le i,j\le n$, 定义出的 $\Bbbk$ 仿射代数. Weyl 代数是量子力学中自然产生的非交换代数, 它也是仿射空间上的微分算子环. 当 $n=1$ 时, 将生成元写作 x,y, 这时 $A_1(\Bbbk)=\Bbbk\langle x,y\rangle/(xy-yx-1)$. 考虑多项式代数 $R=\Bbbk[x_1,...,x_n]$, 并作 Ore 扩张序列 $R_0=R, R_1=R_0[y_1;-\partial/\partial x_1], R_{i+1}=R_i[y_{i+1};-\partial/\partial x_{i+1}]$. 那么可直接验证 R_n 作为 $\Bbbk$-代数由 $\{x_1,...,x_n,y_1,...,y_n\}$ 生成并且 $x_iy_j-y_jx_i=\delta_{ij}, x_ix_j-x_jx_i=y_iy_j-y_jy_i=0,\forall 1\le i,j\le n$. 进而存在自然的代数同态 $\varphi: A_n(\Bbbk)\to R_n$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk\langle x_1,...,x_n,y_1,...,y_n\rangle \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr] & A_n(\Bbbk) \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
& R_n
\end{tikzcd}$$

易见 φ 是满射, 结合 R_n 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $\{x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}y_1^{j_1}\cdots y_n^{j_n}|k_1,...,k_n,j_1,...,j_n\in\mathbb{N}\}$ 可知 φ 是单射. 因此我们得到 $\Bbbk$-代数同构 $R_n\cong A_n(\Bbbk)$. 由 Ore 扩张的性质立即得到 $A_n(\Bbbk)$ 是双边 Noether 整区. 注意到 Weyl 代数有左理想降链 $A_n(\Bbbk)y_n\supsetneqq A_n(\Bbbk)y_n^2\supsetneqq A_n(\Bbbk)y_n^3\supsetneqq\cdots$ 和右理想降链 $x_1A_n(\Bbbk)\supsetneqq x_1^2A_n(\Bbbk)\supsetneqq x_1^3A_n(\Bbbk)\supsetneqq\cdots$. 所以 Weyl 代数既不是左 Artin 环也不是右 Artin 环. 可直接计算对任何 $f\in A_n(\Bbbk)$ 有

$$x_if-fx_i=\partial f/\partial y_i, y_if-fy_i=-\partial f/\partial x_i, \forall 1\le i\le n.$$

由此可知当 $\mathrm{char}\Bbbk=0$ 时, 任何 $Z(A_n(\Bbbk))=\Bbbk$, 所以这时 $A_n(\Bbbk)$ 是无限维代数. 并且利用上式容易验证特征零的 Weyl 代数任何非零理想是整个代数, 这说明此时 Weyl 代数是双边 Noether 单整区. 之后我们将用 Kaplansky 定理 (见 [定理2.54]) 说明特征零的 Weyl 代数不是 PI 环. 下面我们考虑正特征的域上的 Weyl 代

数, 设 $\mathrm{char}\Bbbk = p$ 为素数, 那么明显有 $x_i^p, y_i^p \in Z(A_n(\Bbbk))$, 所以 $\Bbbk[x_1^p, ..., x_n^p, y_1^p, ..., x_n^p] \subseteq Z(A_n(\Bbbk))$. 由此可知 $x_1^p A_n(\Bbbk)$ 是 $A_n(\Bbbk)$ 的非平凡理想, 因此正特征的 Weyl 代数不是单环. 对任给 $f \in Z(A_n(\Bbbk))$, 由 f 关于每个变量的偏导数是零立即得到 $f \in \Bbbk[x_1^p, ..., x_n^p, y_1^p, ..., x_n^p]$. 因此 $Z(A_n(\Bbbk)) = \Bbbk[x_1^p, ..., x_n^p, y_1^p, ..., x_n^p]$. 容易验证 $A_n(\Bbbk)$ 作为中心上的模可由 $\mathcal{B} = \{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} | 0 \le k_1, ..., k_n, j_1, ..., j_n \le p-1\}$ 生成并且 $\mathcal{B}$ 是 $Z(A_n(\Bbbk))$-线性无关的, 即 $A_n(\Bbbk)$ 是中心上秩为 p^{2n} 的自由模. 特别地, $A_n(\Bbbk)$ 是模有限代数.

Lemma 2.29 ([2]). 任给正整数 m, 有 $s_{m+1}(x_1, x_2, ..., x_{m+1}) = \sum\limits_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} x_i s_m(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m+1})$. 特别地, 如果一个 PI 代数 A 满足标准等式 s_m, 那么 A 也满足 $s_t, \forall t \ge m$.

证明: 记 $N(k_1, k_2, ..., k_m)$ 表示由 m 个正整数构成的排列 $k_1, k_2, ..., k_m$ 的逆序数, 那么对任何置换 $\sigma \in S_n$, 有 $(-1)^{N(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))} = \mathrm{sgn}\sigma$. 于是

$$s_{m+1}(x_1, x_2, ..., x_{m+1}) = \sum_{\sigma \in S_{m+1}} \mathrm{sgn}\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m+1)} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{\sigma(1)=i} \mathrm{sgn}\sigma x_i x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m+1)}.$$

每项 $\mathrm{sgn}\sigma x_i x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m+1)} = (-1)^{i-1} x_i (-1)^{N(\sigma(2), ..., \sigma(n))} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m+1)}$, 所以

$$s_{m+1}(x_1, x_2, ..., x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} x_i \sum_{\sigma(1)=i} (-1)^{N(\sigma(2), ..., \sigma(n))} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m+1)}.$$

上式右端就是 $\sum\limits_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} x_i s_m(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m+1})$. □

2.2 Amitsur-Levitzki 定理

在 [例2.22] 中我们看到, 含幺交换环 K 上的 n 阶矩阵环 $\mathrm{M}_n(K)$ 满足标准等式 s_{n^2+1}, 进而知道 $\mathrm{M}_n(K)$ 的最小次数不超过 n^2+1. 这节的目标是证明 Amitsur-Levitzki 定理——矩阵环 $\mathrm{M}_n(K)$ 满足 s_{2n}, 并说明 $\mathrm{M}_n(K)$ 的最小次数就是 $2n$. 本节的含幺交换环默认有非零的幺元.

Theorem 2.30 (Amitsur-Levitzki, [3]). 设 K 是含幺交换环, 那么矩阵环 $R = \mathrm{M}_n(K)$满足 s_{2n}.

Proof. 只要证明任给 $A_1, A_2, ..., A_{2n} \in R$ 有 $\sum\limits_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sgn}\sigma A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n)} = O$ 即可. 该等式左边的矩阵每个元素都是关于 $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ 元素的整系数多元多项式, 因此我们只需要证明 $K = \mathbb{C}$ 的情形就以足够 (利用整系数 m 元多项式如果作为 $\mathbb{C}^m$ 上复值函数恒为零, 则该多项式必为零多项式). 现设 $R = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, V 是 $2n$ 维复线性空间, 有基 $\{v_1, v_2, ..., v_{2n}\}$, 证明分为下面两步.

Step1. 设 $E(V)$ 是 V 决定的外代数, 考虑 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{2n} A_i \otimes v_i \in R \otimes_{\mathbb{C}} E(V)$, 直接的计算表明对每个正整数 $1 \le r \le 2n$, 有 $\alpha^r = \sum\limits_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le 2n} s_r(A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_r}) \otimes (v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_r})$. 置 $\beta = \alpha^2$, 那么 $\beta^n = s_{2n}(A_1, A_2, ..., A_{2n}) \otimes (v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{2n})$. 故要证 $s_{2n}(A_1, A_2, ..., A_{2n}) = O$, 只要证 $\beta^n = 0$.

Step2. 记 $E(V)$ 所有偶数指标分次直和构成的子代数是 L, 即 $L = E^{(0)}(V) \oplus E^{(2)}(V) \oplus \cdots \oplus E^{(2n)}(V)$, 那么 L 是交换代数且 $\beta, \beta^2, ..., \beta^n \in R \otimes_{\mathbb{C}} L$. 记 $\Phi : R \otimes_{\mathbb{C}} L \to \mathrm{M}_n(L)$ 是标准 $\mathbb{C}$-代数同构, 利用下面的 [引理2.32] 立即得到 $\Phi(\beta), \Phi(\beta^2) = \Phi(\beta)^2, ..., \Phi(\beta^n) = \Phi(\beta)^n$ 都是迹为零的矩阵 (注意对迹零复矩阵 A 与 $c \in L$, $\Phi(A \otimes c)$ 也迹零), 再由下面的 [推论2.35] 马上得到 $\Phi(\beta)^n = O$, 从而 $\beta^n = 0$. □

Remark 2.31. 根据 [引理2.29], 我们立即得到 $\mathrm{M}_n(K)$ 满足 $s_t, \forall t \geq 2n$.

Lemma 2.32 ([3])**.** 设 R是含幺交换环, $A_1, A_2, ..., A_{2r} \in \mathrm{M}_n(R)$是偶数个方阵, 则

$$\mathrm{tr}(s_{2r}(A_1, A_2, ..., A_{2r})) = \mathrm{tr}\left(\sum_{\sigma \in S_{2r}} \mathrm{sgn}\sigma A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2r)}\right) = 0.$$

Proof. 因为 $2r$ 是偶数所以轮换 $(123 \cdots 2r) \in S_{2r}$ 是奇置换. 我们把矩阵和式分成偶置换求和与奇置换求和两部分:

$$\sum_{\sigma \in S_{2r}} \mathrm{sgn}\sigma A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(2r)} = \sum_{\sigma \in A_{2r}} \mathrm{sgn}\sigma A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(2r)} + \sum_{\sigma \in A_{2r}} \mathrm{sgn}\sigma(123 \cdots 2r) A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2r)} A_{\sigma(1)}.$$

由 $\mathrm{sgn}\sigma(123 \cdots 2r) = -\mathrm{sgn}\sigma$ 以及矩阵 $A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(2r)}$ 和 $A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2r)} A_{\sigma(1)}$ 的迹相同即得. □

线性代数中我们熟知代数闭域 F 上的 n 阶方阵 A, 如果 $\mathrm{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, ..., n$, 那么 $A^n = O$. 我们在 Amitsur-Levitzki 定理的证明细节中所需要的工具是对任何复数域上的交换代数 L, 如果矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(L)$, 只要 $\mathrm{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, ..., n$, 也会有 $A^n = O$ 成立. 下面的引理就是为了证明这一事实.

Lemma 2.33 ([19])**.** 设 R 是含幺交换环, $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathrm{M}_n(R)$, 设 $B(x) = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1 x + B_0 (B_j \in \mathrm{M}_n(R))$ 是 $xI_n - A$ 在 $\mathrm{M}_n(R[x])$ 中的伴随矩阵, $f(x) = \det(xI_n - A)$是 A 的特征多项式, 则:

(1)(Cayley-Hamilton)$f(A) = O$.

(2) 当 $n \geq 2$ 时, 若记 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 则 $A_{ij} = \sum\limits_{\sigma(i)=j} \prod\limits_{k \neq i} a_{k\sigma(k)}$.

(3) 如果 L 是含幺交换环 K 上的交换代数, 那么对 L 上的 K-导子 $\delta : L \to L$, 对任给 $C = (c_{ij})_{n \times n} \in \mathrm{M}_n(L)$ 的伴随矩阵 C^*, 有 $\delta(\det C) = \mathrm{tr}((\delta(c_{ij}))_{n \times n} \cdot C^*)$.

(4)$\frac{d}{dx} f(x) = \mathrm{tr}(B(x))$.

(5) 设 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 那么特征多项式的系数满足

$$\mathrm{tr}(B_k) = (k+1)a_{k+1}, 0 \leq k \leq n-1,$$

其中 $a_n = 1$.

Proof. (1) 因为 $B(x)$ 是 $xI_n - A$ 的伴随矩阵, 所以 $B(x)(xI_n - A) = f(x)I_n$, 于是

$$B_{n-1}x^n + (B_{n-2} - B_{n-1}A)x^{n-1} + \cdots + (B_2 - B_1 A)x^2 + (B_0 - B_1 A)x - B_0 A = f(x)I_n.$$

对比系数可得 $B_{n-1} = I_n, B_{n-2} - B_{n-1}A = a_{n-1}I_n, ..., B_0 - B_1 A = a_1 I_n, -B_0 A = a_0 I_n$. 所以

$$f(A) = A^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = A^n + \sum_{i=1}^{n-1} (B_{i-1} - B_i A)A^i + (-B_0 A) = O.$$

(2) 这可以由代数余子式的定义展开整理得到, 也可以使用下面的处理方式：设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 为 R 上未定元, $R[x_1, x_2, ..., x_n]$ 是 n 元多项式, 对固定的正整数 i, 作 $\mathrm{M}_n(R[x_1, x_2, ..., x_n])$ 中矩阵

$$C(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

这里行向量 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 在第 i 行. 将上面的矩阵行列数按组合展开可得它的行列式为

$$\det[C(x_1, x_2, ..., x_n)] = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{\sigma(i)=j} \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)}) x_j,$$

同时, 将 $\det[C(x_1, x_2, ..., x_n)]$ 按第 i 行展开可得

$$\sum_{l=1}^{n} A_{il} x_l = \sum_{l=1}^{n} (\sum_{\sigma(i)=l} \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)}) x_l,$$

比较上式 x_j 的系数即得.

(3) 直接计算知

$$\delta(\det C) = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=1}^{n} \delta(a_{k\sigma(k)}) \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma(k)=j} \delta(a_{kj}) \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta(a_{kj}) (\sum_{\sigma(k)=j} \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)}),$$

而 $\sum_{j=1}^{n} \delta(a_{kj}) (\sum_{\sigma(k)=j} \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)})$ 就是矩阵 $(\delta(c_{ij}))_{n \times n} \cdot C^*$ 的 k 行 k 列元素, 故结论成立.

(4) 对 R-交换代数 $R[x]$, 求导算子 $\frac{d}{dx} : R[x] \to R[x]$ 是 R-导子, 所以对 $\mathrm{M}_n(R[x])$ 中矩阵 $xI_n - A$ 应用 (3) 的结果, 我们得到 $\frac{d}{dx} f(x) = \mathrm{tr}(I_n \cdot B(x)) = \mathrm{tr}(B(x))$.

对特征多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 作用求导算子 $\frac{d}{dx}$ 并应用 (4), 我们得到

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = \mathrm{tr}(B(x)) = \mathrm{tr}(B_{n-1})x^{n-1} + \mathrm{tr}(B_{n-2})x^{n-2} + \cdots + \mathrm{tr}(B_1)x + \mathrm{tr}(B_0).$$

再比较上式 $x^i (0 \leq i \leq n-1)$ 的 (矩阵) 系数即得. □

Proposition 2.34 (特征多项式系数刻画, [19]). 设 R 是含幺交换环, $A \in \mathrm{M}_n(R)$, 并设 A 的特征多项式为 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 那么对任给正整数 $1 \leq k \leq n$, 有 $ka_{n-k} + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{tr}(A^i) a_{n-k+i} = 0$. 特别地, 如果 $\mathrm{tr}(A^i) = 0, i = 1, 2, ..., n$, 那么 $ka_{n-k} = 0, \forall 1 \leq k \leq n$.

Proof. 设 $B(x) = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1 x + B_0 (B_j \in \mathrm{M}_n(R))$ 是 $xI_n - A$ 在 $\mathrm{M}_n(R[x])$ 中的伴随矩阵, 则 $B_{n-1} = I_n, B_{n-2} - B_{n-1}A = a_{n-1}I_n, ..., B_0 - B_1 A = a_1 I_n, -B_0 A = a_0 I_n$. 归纳地, 易知对每个 $0 \leq k \leq n-1$, 有 $B_k = A^{n-1-k} + a_{n-1}A^{n-2-k} + \cdots + a_{k+2}A + a_{k+1}I_n$, 两边取迹并应用 [引理2.33(5)] 即得. □

Corollary 2.35 ([3]). 设 L 是 $\mathbb{C}$-交换代数, 如果矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(L)$ 满足 $\mathrm{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, ..., n$, 那么 $A^n = O$.

Proof. 由 [命题2.34], A 的特征多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 满足 $ka_{n-k} = 0, \forall 1 \leq k \leq n$. 因为对复数域上的代数而言, $k1_L (1 \leq k \leq n)$ 是 L 中可逆元, 所以 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, 那么 $f(x) = x^n$. 于是, 由 Cayley-Hamilton 定理即得结果. □

Proposition 2.36. 设 K 是含幺交换环, A 是 K-代数, 那么不存在正整数 $t \leq 2n-1$ 使得 $\mathrm{M}_n(A)$ 满足某个 K 上 t 次首一多项式, 即 $\mathrm{M}_n(A)$ 不满足任何次数严格低于 $2n$ 的首一多项式. 特别地, $\mathrm{M}_n(A)$ 的最小次数是 $2n$.

Proof. 若不然, 由 [定理2.16], 存在 $t(\leq 2n-1)$ 次首一多重线性多项式 $f(x_1,x_2,...,x_t)\in K\langle x_1,x_2,...,x_t\rangle$ 使得 f 是 $\mathrm{M}_n(A)$ 的一个多项式等式, 不妨设 $x_1x_2\cdots x_t$ 的系数是 1, 即

$$f(x_1,x_2,...,x_t)=x_1x_2\cdots x_t+\sum_{\sigma\neq(1)\in S_t}a_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(t)},$$

取 $A_1,A_2,...,A_t$ 为下述 $2n-1$ 个基本矩阵中的前 t 个:

$$E_{11},E_{12},E_{22},E_{23},E_{33},...,E_{n-1,n-1},E_{n-1,n},E_{nn}.$$

则 $f(A_1,A_2,...,A_t)\neq O$, 得到矛盾. □

Example 2.37. 固定正整数 n, 考虑 $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ 的子环

$$R=\begin{pmatrix}\mathbb{Z} & n\mathbb{Z}\\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z}\end{pmatrix},$$

那么 R 是最小次数为 4 的素 PI 环.

Proof. 根据 Amitsur-Levitzki 定理, R 满足 s_4, 因此 R 的最小次数不超过 4. 假设 R 的最小次数 t 严格小于 4, 那么 [定理2.16] 表明存在 $t(\leq 3)$ 次首一多重线性多项式 $f(x_1,x_2,...,x_t)\in\mathbb{Z}\langle x_1,x_2,...,x_t\rangle$ 使得 f 是 R 的一个多项式等式. 同样可不妨设 $x_1x_2\cdots x_t$ 的系数是 1, 即

$$f(x_1,x_2,...,x_t)=x_1x_2\cdots x_t+\sum_{\sigma\neq(1)\in S_t}a_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(t)},$$

取 $A_1,...,A_t$ 为 E_{11},nE_{12},E_{22} 这三个矩阵中的前 t 个便有 $f(A_1,A_2,...,A_t)\neq O$, 得到矛盾. 因此 R 的最小次数是 4. 要看到零理想是 R 的素理想, 只需注意到 R 的任何非零理想 I 满足存在正整数 a 使得

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in I.$$

假设存在 R 的理想 I,J 使得 $IJ=0$ 但 $I,J\neq 0$, 则存在正整数 a,b 使得

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in I,\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in J.$$

由此得到 $IJ\neq 0$, 矛盾. 因此 R 是素环. □

Remark 2.38. 如果 $n=p$ 是素数, 那么

$$P=\begin{pmatrix}p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z}\\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z}\end{pmatrix}$$

是 R 的极大理想, 原因是 $R/P\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是域. 此时 R/P 作为 PI 环的最小次数是 2.

2.3 Köthe 猜想

本节先介绍 Köthe 猜想, 再说明它在 PI 环层面是成立的, 并且我们将看到半素 PI 代数不存在非零诣零理想. 这节中 K 指含幺交换环, 考虑的所有环默认是非零环.

Gottfried Köthe(奥地利数学家, 1905-1989) 于 1930 年提出下述猜想：

Conjecture 2.39 (Köthe 猜想)**.** 如果含幺环 R 没有非零诣零理想, 那么 R 没有非零诣零单边理想.

Remark 2.40. 容易证明一个含幺环存在非零诣零左理想当且仅当存在非零诣零右理想. 目前上述猜想还是非交换环论领域的公开问题.

Theorem 2.41 ([2])**.** 设 K-代数 A(未必有 1_A) 是 PI 代数, 若 A 有非零诣零右理想, 则 A 有非零幂零理想.

Proof. 设 m 是 PI 代数 A 的最小次数, 那么由 $A \neq 0$ 知 $m \geq 2$, 我们对 $m \geq 2$ 作归纳证明结论. 当 $m = 2$ 时, 由 [定理2.16], A 满足 K 上某个 2 次首一多重线性多项式, 所以存在 $k \in K$ 使得 $ab = kba, \forall a, b \in A$. 设 A 的非零诣零右理想为 J, 那么存在 $b \neq 0 \in J$ 使得 $b^2 = 0$. 那么 $I = bA + Kb$ 是 A 的非零幂零右理想, 从 I 出发构造 $AI + I$ 便得到 A 的一个非零幂零理想. 所以当 $m = 2$ 时, 结论成立.

现假设结论对最小次数不超过 $m-1 (m \geq 3)$ 的 PI 代数成立, 现在考虑最小次数为 m 的 PI 代数的情形. 设 A 满足 m 次首一多重线性多项式 $g(x_1, ..., x_m) \in K\langle x_1, ..., x_m\rangle$ 并设字 $x_1x_2\cdots x_m$ 的系数是 1, 那么存在 $m-1$ 次首一多重线性多项式 $g_1(x_1, ..., x_{m-1}) \in K\langle x_1, ..., x_{m-1}\rangle$ 以及多重线性多项式 $g_2(x_1, ..., x_m) \in K\langle x_1, ..., x_m\rangle$ 使得 $g(x_1, ..., x_m) = g_1(x_1, ..., x_{m-1})x_m + g_2(x_1, ..., x_m)$(将所有不以 x_m 结尾的单项式之和记为 g_2). 设 J 是 A 的非零诣零右理想, 取 $b \neq 0 \in J$ 使得 $b^2 = 0$, 则 $bA \subseteq J$. 如果 $bA = 0$, 那么 Kb 是 A 的非零幂零右理想, 于是 A 有非零幂零理想, 下面我们设 $bA \neq 0$. 对任给 $a_1, a_2, ..., a_{m-1} \in A$, 明显有 $g_2(ba_1, ba_2, ..., ba_{m-1}, b) = 0$, 所以对任给 $a_1, a_2, ..., a_{m-1} \in A$ 有 $g_1(ba_1, ba_2, ..., ba_{m-1})b = 0$. 置 $W = \{a \in bA | abA = 0\}$, 那么 W 是 K-代数 bA(未必有幺元) 的非零理想 (因为 W 含 b) 且 $W^2 = 0$. 如果 $bA = W$, 那么 $(bA)^2 = W^2 = 0$ 表明 bA 是 A 的非零幂零右理想, 于是 A 也有非零幂零理想. 下设 $W \subsetneq bA$, 那么商代数 $bA/W \neq 0$ 且满足 $m-1$ 次首一多重线性多项式 $g_1(x_1, ..., x_{m-1})$, 它自身就是自己的非零诣零右理想, 所以对代数 bA/W 应用归纳假设知 bA/W 存在非零幂零理想 $\hat{I}$, 不妨设 $\hat{I}^2 = 0$, 由理想对应定理, 存在 bA 的理想 $I \supsetneq W$ 使得 $I/W = \hat{I}$, 那么 $I^2 \subseteq W$. 现在说明 IbA 是 A 的一个非零幂零右理想, 一旦验证完该断言立即得到 A 有非零幂零理想. 因为 $I \not\subseteq W$, 所以 $IbA \neq 0$. 并注意到 $(IbA)^2 = IbAIbA \subseteq I^2bA \subseteq WbA = 0$, 这说明 IbA 是 A 的一个非零幂零右理想, 由此得到 A 有非零幂零理想. □

Corollary 2.42 ([2])**.** 如果 PI 代数 A 没有非零诣零理想, 那么 A 也没有非零诣零单边理想. 特别地, Köthe 猜想对 PI 环成立.

Corollary 2.43 ([2])**.** 设 K-代数 A 是半素 PI 的, 那么 A不存在非零诣零单边理想.
证明：由 A 半素等价于 A 没有非零幂零理想即得. □

2.4 Formanek 中心多项式

E. Formanek 在文献 [14] 中对域 K 上矩阵环 $M_n(K)$, 构造了某个整系数多项式 $F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ 使得它的常数项是零且对任给 $n+1$ 个矩阵 $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$, 有 $F_n(A_1, A_2, ..., A_{n+1})$ 是纯量矩阵, 并存在某组

矩阵 $B_1, B_2, ..., B_{n+1}$ 代入 F_n 后得到的矩阵 $F_n(B_1, B_2, ..., B_{n+1})$ 的非零矩阵. 本节我们的主要目标就是验证 Formanek 所构造出的多项式 $F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ 确实是域上矩阵环的中心多项式 (见 [定理2.47]), 它将用于 Posner 定理证明的准备工作中.

Definition 2.44 (中心多项式, [4])**.** 设 K 是含幺交换环, A 是 K-代数, 如果 $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 满足:
(1) 对任给 $r_1, r_2, ..., r_n \in A$ 有 $f(r_1, r_2, ..., r_n) \in Z(A)$;
(2) 存在 $r_1, r_2, ..., r_n \in A$ 使得 $f(r_1, r_2, ..., r_n) \neq 0$;
(3)$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 的常数项为零,
则称 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 是 A 的一个**中心多项式**.

在正式验证 Formanek 构造的多项式是中心多项式前, 先做一些准备. 若 f, g 是域 K 上多项式, 次数分别设为 $n, m \geq 1$: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m, a_0, b_0 \neq 0 \in K$. 记 f 与 g 的结式为:

$$\operatorname{Res}(f,g) \triangleq \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{m-1} & b_m & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

在线性代数中我们熟知对域 K 上次数不低于 1 的多项式 f, g, 它们在 K 的代数闭包 $\overline{K}$ 上有公共零点的充要条件是 $\operatorname{Res}(f, g) = 0$. 应用结式可以证明下面的引理.

Lemma 2.45 ([4])**.** 设 R 为含幺环, $R[x_{11}, ..., x_{1n}, ..., x_{n1}, ..., x_{nn}]$ 是 R 上 n^2 元多项式环, 称以 x_{ij} 为元素的矩阵 $(x_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(R[x_{11}, ..., x_{1n}, ..., x_{n1}, ..., x_{nn}])$ 为 R 上**泛矩阵**. 现设 $A = (x_{ij})_{n\times n}$ 是域 K 上泛矩阵, 域 $K(x_{ij}) = K(x_{11}, ..., x_{1n}, ..., x_{n1}, ..., x_{nn})$ 的代数闭包是 $E = \overline{K(x_{ij})}$. 那么泛矩阵 $A = (x_{ij})_{n\times n}$ 在 $\mathrm{M}_n(E)$中可对角化.

Proof. 我们断言 A 的特征多项式 $f(x) = \det(xI_n - A) \in K[x_{ij}][x]$ 在 E 上没有重根, 一旦证明这一点立即得到 A 在 E 上可对角化. 若不然, 考虑 f 的形式导数 f', 那么 f' 与 f 作为 $K(x_{ij})[x]$ 中多项式不互素, 这说明 f' 不可能是 $K(x_{ij})[x]$ 中的零次多项式 (非零常数), 于是 $f' = 0$ 或 f' 是 $K[x_{ij}][x]$ 中次数不低于 1 的多项式. 现设 $a_{11}, ..., a_{1n}, ..., a_{n1}, ..., a_{nn} \in E$ 是使得 $(a_{ij})_{n\times n}$(即把 a_{ij} 代入 x_{ij}) 特征值互异的 n^2 个元素 (明显这样的元素组总存在), 记 $\mathrm{ev} : K[x_{ij}][x] \to E[x]$ 是标准映射 (把 a_{ij} 代入 x_{ij}), 那么 ev 是保幺环同态, 于是知矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式就是 $\mathrm{ev}(f(x))$, 它特征多项式关于未定元 x 的形式导数就是 $\mathrm{ev}(f'(x))$. 当 $f' = 0$ 时, $\mathrm{ev}(f(x))$ 与 $\mathrm{ev}(f'(x))$ 是 $E[x]$ 中不互素的多项式, 所以矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式在 E 中有重根, 这与 a_{ij} 的选取矛盾. 如果 f' 是 $K[x_{ij}][x]$ 中次数不低于 1 的多项式, 那么 f, f' 作为 $K(x_{ij})[x]$ 中的多项式结式为

零：$\mathrm{Res}(f,f')=0\in K[x_{ij}]$, 于是 $\mathrm{ev}(\mathrm{Res}(f,f'))=\mathrm{Res}(\mathrm{ev}(f),\mathrm{ev}(f'))=0\in E$, 这说明 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式与其形式导数在 E 中有公共零点, 即 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式在 E 中有重根, 这与 a_{ij} 的选取矛盾. 故 f 在 E 上没有重根. □

设 $f(x)\in K[x]$ 是域 K 上的非零多项式, 如果 f 在 K 的代数闭包 $\overline{K}$ 中没有重根, 则称 f 是**可分多项式**. 我们在线性代数中熟知代数闭域 F 上的 n 阶方阵 A 可对角化当且仅当 A 在 F 上有一个没有重根的首一零化多项式. 特别地, 域 K 上的方阵 A 如果特征多项式是 K 上可分多项式, 那么 A 在 A 在 $\overline{K}$ 上可对角化. 在给出 Formanek 多项式的构造前, 再做最后一个准备.

Lemma 2.46. 给定域 K 与正整数 n, 则存在 n 阶矩阵 $A\in \mathrm{M}_n(K)$, 使得 A 的特征多项式是 K 上可分多项式, 特别地, A 在 $\overline{K}$上可对角化.

Proof. 我们只需要对正整数 n, 构造 K 上 n 次首一可分多项式 $f(x)$ 即可, 因为一旦构造出这样的多项式, 考虑它的友矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(K)$$

即可. 若 K 的特征整除 n, 构造 $f(x)=x^n-x$, 它在 $\overline{K}$ 中没有重根. 如果 K 的特征不整除 n, 构造 $f(x)=x^n-1$ 即可. □

现在给出这节的主定理.

Theorem 2.47 ([4])**.** 任给正整数 n, 存在整系数多项式 $F_n(x,y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{Z}\langle x,y_1,y_2,...,y_n\rangle$(称证明过程中构造的多项式为 **Formanek 多项式**), 使得：(1)F_n 是 n^2 次齐次多项式且每个非零项关于 x 的次数是 n^2-n, 关于 $y_1,y_2,...,y_n$ 是多重线性的; (2) 如果 K 是域, 那么 F_n 是矩阵环 $\mathrm{M}_n(K)$的中心多项式.

Proof. 当 $n=1$ 时, 取 $F_1=y_1$ 即可. 以下假设正整数 $n\geq 2$. 设 $\mathbb{Z}[w_1,...,w_{n+1}]$ 是整系数 $n+1$ 元多项式环, 通过如下方式可定义出 $\mathbb{Z}[w_1,...,w_{n+1}]$ 到自由代数 $\mathbb{Z}\langle x,y_1,y_2,...,y_n\rangle$ 的一个 $\mathbb{Z}$-模同态

$$\varphi:\mathbb{Z}[w_1,...,w_{n+1}]\to\mathbb{Z}\langle x,y_1,y_2,...,y_n\rangle.$$

对每个首一单项式 $w_1^{a_1}w_2^{a_2}\cdots w_n^{a_n}$, 定义 $\varphi(w_1^{a_1}w_2^{a_2}\cdots w_n^{a_n})=x^{a_1}y_1x^{a_2}y_2\cdots x^{a_n}y_nx^{a_{n+1}}$(我们知道多项式环 $\mathbb{Z}[w_1,...,w_{n+1}]$ 作为 $\mathbb{Z}$-模有一个基是由全体首一单项式构成的集合). 考虑

$$g(w_1,w_2,...,w_{n+1})=\prod_{i=2}^{n}(w_1-w_i)(w_{n+1}-w_i)\prod_{2\leq j<k\leq n}(w_j-w_k)^2,$$

那么 g 是 n^2-n 次齐次整系数多项式. 命 $G(x,y_1,...,y_n)=\varphi(g(w_1,w_2,...,w_{n+1}))\in\mathbb{Z}\langle x,y_1,y_2,...,y_n\rangle$, 构造 $F_n(x,y_1,...,y_n)=G(x,y_1,...,y_n)+G(x,y_2,...,y_n,y_1)+\cdots+G(x,y_n,y_1,...,y_{n-1})$, 那么它明显是 n^2 次齐次多项式, 且每个非零项关于 x 的次数是 n^2-n, 关于 $y_1,y_2,...,y_n$ 是多重线性的. 因此需要验证的只有对任给域

K 上 $n+1$ 个 n 阶方阵 $X, Y_1, Y_2, ..., Y_n$, 有 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是纯量矩阵并且在某组 $X, Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 取值下, 矩阵 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是非零阵.

Step1. 设 $X = (x_{ij})_{n\times n}$ 是域 K 上泛矩阵, 记域 $K(x_{ij})$ 的代数闭包为 E. 如果我们能够说明对任给 $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in \mathrm{M}_n(K)$ 有 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是纯量矩阵, 那么当 X 是 $\mathrm{M}_n(K)$ 中数值矩阵时, $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 也是纯量阵. 而要说明对任给 $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in \mathrm{M}_n(K)$ 有 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是纯量矩阵, 我们只需要说明对 E 中任何对角阵 Z 与矩阵 $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 有 $F_n(Z, Y_1, ..., Y_n)$ 是 $\mathrm{M}_n(E)$ 中纯量矩阵即可, 原因是 [引理2.45] 告诉我们泛矩阵 X 在 E 上可对角化, 设可逆阵 $P \in \mathrm{M}_n(E)$ 使得 $PXP^{-1} = Z$ 是对角阵, 如果 $F_n(Z, Y_1, ..., Y_n)$ 对任何 $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in \mathrm{M}_n(E)$ 都是纯量矩阵, 那么 $P^{-1}F_n(Z, Y_1, ..., Y_n)P = F_n(P^{-1}ZP, P^{-1}Y_1P, ..., P^{-1}Y_nP) = F_n(X, P^{-1}Y_1P, ..., P^{-1}Y_nP)$ 也是纯量矩阵, 于是由 P 可逆知道矩阵 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是纯量矩阵对 $\mathrm{M}_n(E)$ 中任意 n 个矩阵 $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 成立. 所以根据前面的讨论, 我们只需要处理当 Z 是 E 上对角阵, $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 是 E 中矩阵的情形即可. 而 F_n 的构造表明 F_n 是关于 $y_1, y_2, ..., y_n$ 多重线性的, 因此我们可以把问题再约化为: 证明对 E 中任何对角阵 Z 以及任意 n 个基础矩阵 $Y_1 = E_{i_1j_1}, Y_2 = E_{i_2j_2}, ..., Y_n = E_{i_nj_n}$ 时, $F_n(Z, Y_1, ..., Y_n)$ 是纯量矩阵. 设 $Z = \sum\limits_{l=1}^{n} v_l E_{i_lj_l}, v_l \in E$, $Y_1 = E_{i_1j_1}, Y_2 = E_{i_2j_2}, ..., Y_n = E_{i_nj_n}$, 注意到对任给自然数 s 有 $Z^sE_{ij} = v_i^sE_{ij}, E_{ij}Z^s = v_j^sE_{ij}$, 因此对任意一组自然数 $a_1, a_2, ..., a_n$, 有

$$Z^{a_1}Y_1Z^{a_2}Y_2\cdots Z^{a_n}Y_nZ^{a_{n+1}} = v_{i_1}^{a_1}\cdots v_{i_n}^{a_n}v_{j_n}^{a_{n+1}}E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\cdots E_{i_nj_n}.$$

于是, 由 G 的定义可得 $G(Z, E_{i_1j_1}, ..., E_{i_nj_n}) = g(v_{i_1}, ..., v_{i_n}, v_{j_n})E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\cdots E_{i_nj_n}$.

现在我们来看 $g(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n}, v_{j_n})$, 由 g 的定义知

$$g(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n}, v_{j_n}) = \prod_{r=2}^{n}(v_{i_1} - v_{i_r})(v_{j_n} - v_{i_r})\prod_{2\le s<t\le n}(v_{i_s} - v_{i_t})^2,$$

于是知只有当 $i_1, ..., i_n$ 是正整数 $1, ..., n$ 的一个排列且 $i_1 = j_n$ 时, $g(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n}, v_{j_n})$ 才有可能非零, 而此时, 有 $g(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n}, v_{j_n}) = \prod\limits_{1\le s<t\le n}(v_s - v_t)^2$. 并注意到 $E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\cdots E_{i_nj_n}$ 只有当 $j_1 = i_2, j_2 = i_3, ..., j_{n-1} = i_n$ 时才是非零矩阵 $E_{i_1j_n}$, 因此, 矩阵 $G(Z, E_{i_1j_1}, ..., E_{i_nj_n})$ 如果非零, 只可能形如 $\prod\limits_{1\le s<t\le n}(v_s - v_t)^2E_{i_1i_1}$. 这时 $F_n(Z, E_{i_1j_1}, ..., E_{i_nj_n}) = \sum\limits_{l=1}^{n}\prod\limits_{1\le s<t\le n}(v_s - v_t)^2E_{i_li_l} = \prod\limits_{1\le s<t\le n}(v_s - v_t)^2I_n$(否则, $F_n(Z, E_{i_1j_1}, ..., E_{i_nj_n})$ 是零矩阵, 考察是否有 $j_1 = i_2, j_2 = i_3, ..., j_{n-1} = i_n$). 由此我们得到了对任给域 K 上 n 阶矩阵 $X, Y_1, Y_2, ..., Y_n$, 有 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是纯量矩阵.

Step2. 我们说明存在域 K 上 n 阶矩阵 $X, Y_1, Y_2, ..., Y_n$, 使得 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是非零矩阵. 事实上, 根据我们的构造方式, 取 K 上在 E 中有 n 个互异特征值的矩阵 X([引理2.46] 表明这样的 X 总是存在的), 并设 E 上可逆阵 Q 使得 $Z = QXQ^{-1}$ 是主对角元两两互异的对角阵. 那么由前面的讨论 ($F_n(Z, E_{i_1j_1}, ..., E_{i_nj_n})$ 是非零矩阵时等于 $\prod\limits_{1\le s<t\le n}(v_s - v_t)^2$, 这里 $v_1, v_2, ..., v_n$ 是 Z 两两互异的那些主对角元) 知存在矩阵 $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in \mathrm{M}_n(E)$ 使得 $F(QXQ^{-1}, QY_1Q^{-1}, ..., QY_nQ^{-1})$ 是非零矩阵, 于是 $F(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是非零矩阵, 将每个 Y_j 展开成基础矩阵的 E-线性组合可知存在某组基础矩阵选取方式 $E_{i_1j_1}, ..., E_{i_nj_n}$ 让 $F_n(X, E_{i_1j_1}, ..., E_{i_nj_n})$ 非零. □

2.5 Kaplansky 定理

一个本原环是交换的当且仅当它是域, 本节的主定理——Kaplansky 定理告诉我们, 一个本原环是 PI 的当且仅当它是域上的有限维单代数. 因此, 在本原层面上, PI 环的特性与交换环类似. 如无特别说明, 本节中

K 表示含幺交换环, $1_K \neq 0$, 所有的含幺环幺元非零.

在证明 Kaplansky 定理前, 先做一些准备. Jacobson 本原环稠密性定理是我们抽象代数中熟知的结果, 这里需要用一个更具体的形式.

Lemma 2.48 (稠密性定理, [20])**.** 设 A是本原 K-代数, 设 ${}_AM$ 是忠实的不可约左 A-模, $\Delta = \mathrm{End}_A(M)$ 是除环, 那么 A 代数同构于 $\mathrm{End}({}_\Delta M)$ 的某个稠密子代数 ($\mathrm{End}({}_\Delta M)$ 上赋予自然的 K-代数结构). 更具体地, 以下情形有且仅有一种成立：
(1) 存在正整数 n 使得代数 A 和矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 代数同构.
(2) 对任给正整数 n, 存在 A 的子代数 A_n 使得 A_n 到 $\mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 有满 K-代数同态.

Proof. 命 $\rho: A \to \mathrm{End}({}_\Delta M), a \mapsto a_l : M \to M$, 这里 a_l 表示元素 a 决定的左乘变换, 那么 ρ 是 K-代数同态, 且由 ${}_AM$ 的忠实性得到 ρ 是单射. 再说明 $\rho(A)$ 稠密, 即说明对任给 M 的 Δ-线性无关子集 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 以及子集 $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$, 都存在 $f \in \rho(A)$ 使得 $f(x_k) = y_k, \forall 1 \leq k \leq n$. 对上述给定的子集 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 以及 $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$, 存在线性变换 $h \in \mathrm{End}({}_\Delta M)$ 使得 $h(x_k) = y_k, \forall 1 \leq k \leq n$. 因为 ${}_AM$ 不可约, 特别地, 它作为左 A-模完全可约, 于是由完全可约模的稠密性定理知对上述 $h \in \mathrm{End}({}_\Delta M)$ 以及 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, 存在 $a \in A$ 使得 $ax_k = h(x_k), \forall 1 \leq k \leq n$, 于是取 $a_l \in \rho(A)$ 立即得到 $\rho(A)$ 的稠密性. 对于 Δ-线性空间 ${}_\Delta M$, 它的维数要么为正整数要么是无限的, 下面我们分这两种情况讨论, 来证明引理的后半部分.

(1) 如果 $\dim_\Delta M = n < +\infty$, 那么 $\rho(A)$ 作为 $\mathrm{End}({}_\Delta M)$ 的稠密子集必为 $\mathrm{End}({}_\Delta M)$ 本身, 即我们得到 ρ 是满射, 因此这时 ρ 给出了 K-代数同构 $A \cong \mathrm{End}({}_\Delta M)$. 再由 $\mathrm{End}({}_\Delta M) = \mathrm{End}(M_{\Delta^{op}}) \cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 便得到 K-代数同构 $A \cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$.

(2) 如果 $\dim_\Delta M$ 不是有限的, 那么对任给正整数 n, 取 ${}_\Delta M$ 作为 Δ-线性空间的 n 维子空间 V_n, 并置 $A_n = \{a \in A | aV_n \subseteq V_n\}$, 易见 A_n 是 A 的 K-子代数, 并且 ρ 诱导 K-代数同态 $\hat{\rho}: A_n \to \mathrm{End}({}_\Delta V_n), x \mapsto \rho(x)|_{V_n}$, 那么 $\hat{\rho}$ 是满代数同态, 原因是对任给 $f \in \mathrm{End}({}_\Delta V_n)$, 都可以延拓为 ${}_\Delta M$ 上的 Δ-线性变换 $\hat{f}$, 取定 V_n 的一个基 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, 利用完全可约模的稠密性定理得到存在 $a \in A$ 使得 $ax_k = \hat{f}(x_k)$, 那么 $\rho(a)|_{V_n} = f$ 且 $a \in A_n$, 这就得到了 $\hat{\rho}$ 是满的. 进而得到 A 有子代数 A_n 使得 A_n 到 $\mathrm{End}({}_\Delta V_n)$ 有满 K-代数同态, 再结合代数同构 $\mathrm{End}({}_\Delta V_n) = \mathrm{End}((V_n)_{\Delta^{op}}) \cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 即得. $\square$

设 Δ 是除环, 如果子域 H 满足不存在 Δ 的子域 E 使得 $H \subsetneq E$, 则称 H 是**极大子域**. 因为除环的中心是域, 故利用 Zorn 引理易验证任何除环总存在极大子域. 关于极大子域有下面的刻画.

Lemma 2.49 (极大子域, [21])**.** 设 Δ 是除环, K 是 Δ 的极大子域, 那么 $K = \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$. 特别地, $K \supseteq Z(\Delta)$. 所以除环上任何极大子域都可视作除环中心上的代数.

Proof. $K \subseteq \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$ 是明显的, 现任取 $a \in \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$, 则

$$K(a) = \{\frac{f(a)}{g(a)} | f, g \in K[x], g(a) \neq 0\}$$

是 Δ 的子域且包含 K, 由 K 的极大性知 $K = K(a)$, 于是 $a \in K$, 从而 $\{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\} \subseteq K$. 由此得到 $\{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\} = K$. $\square$

Definition 2.50 (中心单代数, [20])**.** 若 A 是域 k 上的代数, 满足 A 是单环且 $Z(A) = k1_A$, 则称 A 是域 k 上的**中心单代数**. 一些文献中要求中心单代数是有限维代数, 这里不做要求.

Lemma 2.51. 设 A 是域 F 上中心单代数, B 是域 F 上单代数, 则 $A\otimes_F B$ 是域 F 上单代数. 特别地, 对域 F 上中心单代数 A 与 F 的域扩张 E, 有 $A\otimes_F E$是单代数.

Proof. 任取 $A\otimes_F B$ 的非零理想 U, 置

$$\{n\in\mathbb{Z}_{>0}|\text{存在}a_1,a_2,...,a_n\neq 0\in A,b_1,b_2,...,b_n\in B\text{使得}\{b_1,...,b_n\}\text{线性无关且}\sum_{k=1}^{n}a_k\otimes b_k\text{是}U\text{中非零元}\},$$

上述集合明显非空, 取该集合的最小元 n, 并设 $a_1,a_2,...,a_n\neq 0\in A,b_1,b_2,...,b_n\in B$ 使得 $u=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\otimes b_k$ 是 U 中非零元, 这里 $\{b_1,...,b_n\}$ 是 F-线性无关的. 对 $a_1\neq 0\in A$, 因为 A 是单环, 所以存在 $r_1,r_2,...,r_n,s_1,s_2,...,s_n\in R$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_ia_1s_i=1_A$, 于是

$$u_1=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}r_ia_ks_i)\otimes b_k=1_A\otimes b_1+\sum_{k=2}^{n}(\sum_{i=1}^{n}r_ia_ks_i)\otimes b_k\neq 0\in U,$$

记 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_ia_ks_i$ 为 $\alpha_k(k\geq 2)$, 那么由 n 的选取方式知每个 α_k 非零.

Claim. $\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n\in Z(A)$.

对每个 $a\in A$, 易见 $(a\otimes 1_B)u_1-u_1(a\otimes 1_B)\in U$, 所以 $(a\alpha_2-\alpha_2a)\otimes b_2+(a\alpha_3-\alpha_3a)\otimes b_3+\cdots+(a\alpha_n-\alpha_na)\otimes b_n\in U$, 它必为零元, 进而 $a\alpha_2-\alpha_2a=a\alpha_3-\alpha_3a=\cdots=a\alpha_n-\alpha_na=0$, 断言得证.

于是由 A 是中心代数知每个 α_k 形如 $\alpha_k=c_k1_A,c_k\in F$. 进而 $u_1=1_A\otimes(b_1+c_2b_2+\cdots+c_nb_n),b_1+c_2b_2+\cdots+c_nb_n\neq 0\in B$. 这表明 $1_A\otimes_F B\subseteq U$, 进而 $U=A\otimes_F B$. □

Lemma 2.52. (1) 设 R,R' 是含幺环, 有环同构 $f:R\to R'$, 那么 $f(Z(R))=Z(R')$. 若更进一步 $Z(R')$ 是域, 则 $Z(R)$ 也是域, 将 R 视作 $Z(R)$-线性空间, R' 视作 $Z(R')$-线性空间, 则 $\dim_{Z(R)}R=\dim_{Z(R')}R'$.
(2) 设除环 Δ 是其中心 $Z(\Delta)$ 上 m 维线性空间, 则 $\mathrm{M}_n(\Delta)$ 作为其中心 $Z(M_n(\Delta))=Z(\Delta)I_n$ 上线性空间维数是 mn^2. 例如四元数环 $\mathbb{H}$ 的中心是 $\mathbb{R}$, 是 4 维 $\mathbb{R}$-代数, 且是除环, 那么四元数矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ 作为实线性空间维数是 $4n^2$.
(3) 设 ${}_\Delta V$ 是除环 Δ 上的线性空间, Δ' 是 Δ 的子除环, 则 $\dim_{\Delta'}V=(\dim_\Delta V)(\dim_{\Delta'}\Delta)$.

Proof. (1) 直接验证易得 $f(Z(R))=Z(R')$, 所以环同构 $Z(R)\cong Z(R')$ 保证了 $Z(R')$ 是域当且仅当 $Z(R)$ 是域. 现在设 $Z(R')$ 是域, 则 $Z(R)$ 也是域, 将 R 视作 $Z(R)$-线性空间, R' 视作 $Z(R')$-线性空间, 设 X 是 R 作为 $Z(R)$-线性空间的一个基, 则对任给 $x_1,x_2,...,x_m\in X$, 我们说明 $f(x_1),f(x_2),...,f(x_m)$ 是 $Z(R')$-线性无关的：设 $r_1',...,r_m'\in Z(R')$ 使得 $\sum\limits_{k=1}^{m}r_k'f(x_k)=0$, 则由 $f(Z(R))=Z(R')$ 知存在 $c_1,...,c_m\in Z(R)$ 使得 $\sum\limits_{k=1}^{m}f(c_k)f(x_k)=0$, 从而 $\sum\limits_{k=1}^{m}c_kx_k=0$, 因此 $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$, 于是 $f(x_1),f(x_2),...,f(x_m)$ 是 $Z(R')$-线性无关的, 由此知 $f(X)$ 线性无关, 故 $\dim_{Z(R)}R\leq\dim_{Z(R')}R'$, 类似地可以证明 $\dim_{Z(R')}R'\leq\dim_{Z(R)}R$, 这就证明了 (1).

(2) 设 Δ 作为 $Z(\Delta)$-线性空间有基 $\{d_1,d_2,...,d_m\}$, 可直接验证 $\{d_kE_{ij}|1\leq k\leq m,1\leq i,j\leq n\}$ 是 $\mathrm{M}_n(\Delta)$ 作为 $Z(\Delta)I_n$-线性空间的一个基.

(3) 不妨设 $V\neq 0$, 设 $\{x_i|i\in I\}$ 是 V 作为 Δ-线性空间的一个基, $\{d_j|j\in J\}$ 是 Δ 作为 Δ'-线性空间的一个基, 容易验证 $\{d_jx_i|i\in I,j\in J\}$ 是 ${}_{\Delta'}V$ 的一个基. 所以 $\dim_{\Delta'}V=|I|\cdot|J|=(\dim_\Delta V)(\dim_{\Delta'}\Delta)$. □

Lemma 2.53 ([2]). 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, ${}_RM$ 是忠实的不可约左 R-模, 那么:
(1)K-代数 $\Delta = \mathrm{End}({}_RM)$ 是除环, ${}_\Delta M$ 是有限维 Δ-线性空间;
(2) 设 $n = \dim_\Delta M$, 则有 K-代数同构 $R \cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$, 特别地, R 是单代数且 $Z(R)$ 是域;
(3) 设 H 是 Δ^{op} 的极大子域 (也为 Δ 的极大子域, [引理2.49] 表明 $H \supseteq Z(\Delta)$), 那么 M 上有天然左 $R\otimes_{Z(R)} H$-模结构, 满足 ${}_{R\otimes_{Z(R)}H}M$ 是忠实不可约模, $H = \mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)$ 并且 $R\otimes_{Z(R)} H$ 是单 PI 代数;
(4)${}_HM$ 是域 H 上有限维线性空间, 若设 $m = \dim_H M$, 则有 H-代数同构

$$R\otimes_{Z(R)} H \cong \mathrm{M}_m(\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)^{op}) = \mathrm{M}_m(H^{op}) = \mathrm{M}_m(H),$$

并且, $\dim_{Z(\Delta^{op})}\Delta^{op} = (m/n)^2, \dim_{Z(R)}R = m^2$. 特别地, 本原 PI 代数 R 可嵌入某个域上的矩阵环 $\mathrm{M}_m(H)$.

Proof. (1) 因为 M 不可约, 所以 Schur 引理告诉我们 Δ 是除环, M 上的 K-模结构给出 Δ 上的 K-代数结构. 现在我们说明 ${}_\Delta M$ 是有限维 Δ-线性空间, 若不然, 由 [引理2.48] 得到对任给正整数 n, 存在 R 的子代数 R_n 使得 R_n 到 $\mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 有满代数同态, 进而由 [命题2.36] 得到 $d \geq 2n$, 由 n 的任意性得到矛盾. 所以 ${}_\Delta M$ 是有限维 Δ-线性空间.

(2) 设 $n = \dim_\Delta M$, 由 [引理2.48] 得到 K-代数同构 $R \cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$, 易证单环的中心是域.

(3) 易见 $xf = f(x), \forall x \in M, f \in H \subseteq \Delta = \mathrm{End}({}_RM)$ 给出了 M 的右 H-模结构, 从而 M 上有 R-H 双模结构 (这两个模结构均与 M 上的 K-模结构相容), 这也给出了 M 的左 $R\otimes_{Z(R)} H$-模结构: $(\sum\limits_{k=1}^{l} r_k\otimes h_k)x = \sum\limits_{k=1}^{l} r_kxh_k, \forall \sum\limits_{k=1}^{l} r_k\otimes h_k \in R\otimes_{Z(R)} H, x\in M$, 其中 H 的 $Z(R)$-模结构以最自然的方式给出 (具体地, $Z(R)$ 中每个元素 a 决定的 M 上左乘变换 $a_l \in Z(\Delta) \subseteq H$, 所以 $Z(R)$ 可嵌入 H). 因为 ${}_RM$ 是不可约模, 所以 M 作为左 $R\otimes_{Z(R)} H$-模也不可约. 因为 (2) 表明 R 是 $Z(R)$ 上的中心单代数, 所以 [引理2.51] 告诉我们 $R\otimes_{Z(R)} H$ 是 K-单代数, 于是由 $\mathrm{Ann}_{R\otimes_{Z(R)}H}(M)$ 是 $R\otimes_{Z(R)} H$ 的真理想 (因为不含 $1_R\otimes 1_H$) 得到 ${}_{R\otimes_{Z(R)}H}M$ 是忠实的模, 所以 ${}_{R\otimes_{Z(R)}H}M$ 是忠实不可约模. 易见 $H = \mathrm{End}({}_RM_H) = \mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)$. 最后说明 $R\otimes_{Z(R)} H$ 是 PI 代数 (前面已经说明它是单代数). 易知 K-代数同构 $R \cong R\otimes_{Z(R)} 1_H \subseteq R\otimes_{Z(R)} H$, 故 $R\otimes_{Z(R)} 1_H$ 是 PI 代数且 $R\otimes_{Z(R)} H$ 是 $R\otimes_{Z(R)} 1_H$ 的中心扩张, 所以 [推论2.18] 表明 $R\otimes_{Z(R)} H$ 也是 PI 代数.

(4) 先说明 ${}_HM$ 是域 H 上有限维线性空间, 通过 (3) 我们知道 $H = \mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)$, 所以要说明的即为 ${}_{\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)}M$ 是有限维线性空间, 而我们已经看到 $R\otimes_{Z(R)} H$ 是单 PI 代数, 特别地, 是本原 PI 代数, 进而使用 (1) 中完全相同的技术由 [引理2.48] 可知 ${}_{\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)}M$ 是有限维线性空间. 这就得到了 ${}_HM$ 是域 H 上有限维线性空间, 设 $m = \dim_H M$. 由 [引理2.48] 知有 H-代数同构

$$R\otimes_{Z(R)} H \cong \mathrm{M}_m(\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)^{op}) = \mathrm{M}_m(H^{op}) = \mathrm{M}_m(H),$$

故 $m^2 = \dim_H(R\otimes_{Z(R)} H) = \dim_{Z(R)}R = \dim_{Z(\Delta^{op})}\mathrm{M}_n(\Delta^{op}) = n^2\dim_{Z(\Delta^{op})}\Delta^{op}$ 知 $\dim_{Z(\Delta^{op})}\Delta^{op} = (m/n)^2$(这里 $\dim_H(R\otimes_{Z(R)} H) = \dim_{Z(R)}R$ 的原因是若设 $\{x_i | i\in I\}$ 为 R 作为 $Z(R)$-线性空间的一个基, 可直接验证 $\{x_i\otimes 1_H | i \in I\}$ 是 $R\otimes_{Z(R)} H$ 作为 H-线性空间的一个基). □

我们知道如果一个含幺单环 R 满足 R 是 $Z(R)$ 上的有限维单代数, 那么 [命题2.23] 告诉我们 R 是 PI 环. 一个自然的问题是搞清楚本原 PI 环的结构. 下面是 Kaplansky 给出的本原 PI 环结构定理.

Theorem 2.54 (Kaplansky 定理, [4]). 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, 则 d 是偶数, $Z(R)$ 是域且 R 是 $Z(R)$ 上 $(d/2)^2$维中心单代数.

Proof. 由 [引理2.53] 中的 (2), $Z(R)$ 是域且 R 是 $Z(R)$ 上的中心单代数, 所以要证明的只有 d 是偶数以及 R 是 $Z(R)$ 上 $(d/2)^2$ 维中心单代数. 由 [引理2.53] 中 (4) 的证明过程, $\dim_{Z(R)}R = m^2$, $R\otimes_{Z(R)} H \cong \mathrm{M}_m(H)$ 有最小次数 $2m$, 且 $R\otimes_{Z(R)} H$ 是 $R\otimes_{Z(R)} 1_H$ 的中心扩张. 于是由 [推论2.18] 知 $d = 2m$, 所以 d 是偶数且 R 是 $Z(R)$ 上 $m^2 = (d/2)^2$ 维中心单代数. □

Remark 2.55. Kaplansky 定理告诉我们 PI 代数的本原理想和极大理想等价, 这是交换环的经典特性.

Corollary 2.56. 设域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$, 那么 Weyl 代数 $A_n(\Bbbk)$(回忆 [例2.28]) 不是 PI 环.

Proof. 我们已经看到这时 $A_n(\Bbbk)$ 的中心是 $\Bbbk$ 且 $A_n(\Bbbk)$ 是中心上的无限维代数. 假设 $A_n(\Bbbk)$ 是 PI 环, 那么 Kaplansky 定理说 $A_n(\Bbbk)$ 是 $\Bbbk = Z(A_n(\Bbbk))$ 上有限维代数. 这导出矛盾. □

Corollary 2.57. 设 K-代数 R 是 PI 代数, 那么不可约左 R-模 M, N 同构的充要条件是 $\mathrm{Ann}_R M = \mathrm{Ann}_R N$.

Proof. 只需验证充分性, 这时 M, N 均为本原 PI 代数 $R/\mathrm{Ann}_R M$ 上的不可约模. 而 $R/\mathrm{Ann}_R M$ 作为其中心上的有限维中心单代数是 Artin 单环, 故作为 $R/\mathrm{Ann}_R M$-模有 $M \cong N$. 因此也有 R-模同构 $M \cong N$. □

Remark 2.58. 该推论表明 PI 代数的本原素谱 (就是极大谱) 与不可约表示等价类间有双射. 具体地, 记 PI 代数 R 的本原素谱为 $\mathrm{Prim}(R)$, 则有双射 $\theta: \{R\text{的不可约模等价类}\} \to \mathrm{Prim}(R), [M] \mapsto \mathrm{Ann}_R M$.

Corollary 2.59. 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, 那么 d 是偶数, 记 $m = d/2$, 则存在域 H 使得 R 可 (保幺地) 嵌入矩阵环 $\mathrm{M}_m(H)$.

Corollary 2.60 ([4])**.** K-代数 R 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, 对正整数 t:
(1) 如果 $d/2 = t$, 那么 Formanek 多项式 $F_t(x, y_1, y_2, ..., y_t)$ 是 R 的中心多项式;
(2) 如果 $d/2 < t$, 那么 Formanek 多项式 $F_t(x, y_1, y_2, ..., y_t)$ 是 R的一个多项式等式.

Proof. 我们沿用 [引理2.53] 以及 Kaplansky 定理证明过程中的记号, 由条件知 R 是 $Z(R)$ 上的中心单代数, 且对 $\Delta = \mathrm{End}({}_RM), n = \dim_\Delta M, H$ 是 Δ^{op} 的极大子域, $m = \dim_H M$, 我们有 K-代数同构 $R \cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 以及 H-代数同构 $R\otimes_{Z(R)} H \cong \mathrm{M}_m(H)$, 正整数 n 整除 m, $\dim_{Z(\Delta)}\Delta^{op} = (m/n)^2, d = 2m$. 下面开始原问题的证明, 主要利用 Formanek 多项式 F_t 是域上 t 阶矩阵代数的中心多项式.

(1) 首先我们有 $t = m$. 如果 $Z(R)$ 是有限的, 那么由环同构 $Z(R) \cong Z(\Delta)I_n \cong Z(\Delta)$ 得到 $Z(\Delta)$ 是有限集. 结合 $\dim_{Z(\Delta)}\Delta^{op} = (m/n)^2$ 我们得到 Δ 是有限集, Wedderburn 小定理 (见下面的 [引理2.61]) 表明 Δ 是域, 所以 $m = n$ 且得到 K-代数同构 $R \cong \mathrm{M}_n(Z(\Delta)) = \mathrm{M}_m(Z(\Delta))$, 于是知 F_m 是 R 的中心多项式. 下设 $Z(R)$ 是无限域的情形, 这时 $R\otimes_{Z(R)} H \cong \mathrm{M}_m(H)$ 表明 F_m 是 $R\otimes_{Z(R)} H$ 的中心多项式. 注意到对任何 $a\otimes 1_H \in Z(R\otimes_{Z(R)} H)$, 都有 $a \in Z(R)$, 所以对任给 $r_1, r_2, ..., r_{m+1} \in R$, 利用 $F_m(r_1\otimes 1_H, ..., r_{m+1}\otimes 1_H) = F_m(r_1, r_2, ..., r_{m+1})\otimes 1_H \in Z(R\otimes_{Z(R)} H)$, 我们得到 $F_m(r_1\otimes 1_H, ..., r_{m+1}\otimes 1_H) \in Z(R)$, 所以要说明 F_m 是 R 的中心多项式我们只需要再说明在 R 的某组元素 $r_1, r_2, ..., r_{m+1}$ 代入下 $F_m(r_1, r_2, ..., r_{m+1}) \neq 0$. 我们用反证法说明这一点：若不然, 则 F_m 是 R 的一个多项式等式, 进而由 $Z(R)$ 是无限域, 利用下面的 [引理2.62] 得到 F_m 也是 $R\otimes_{Z(R)} H$ 的一个多项式等式, 但这与 F_m 是 $R\otimes_{Z(R)} H$ 的中心多项式矛盾 (因为一定有一组 $R\otimes_{Z(R)} H$ 中元素的代入使得 F_m 取值非零). 所以 F_m 是 R 的中心多项式.

(2) 此时 $m<t$, 我们断言 F_t 是 $\mathrm{M}_m(H)$ 的一个多项式等式, 一旦证明这一断言, 利用环同构 $R\otimes_{Z(R)}H\cong\mathrm{M}_m(H)$ 我们得到 R 有多项式等式 F_m. 现在证明上述断言, 考虑低阶矩阵环到高阶矩阵环的标准嵌入:

$$j:\mathrm{M}_m(H)\to\mathrm{M}_t(H), A\mapsto\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

那么 j 是单环同态 (它并不保持幺元). 对任意 $t+1$ 个矩阵 $A_1,A_2,...,A_{t+1}\in\mathrm{M}_m(H)$, 易见

$$j(F_t(A_1,...,A_{t+1}))=F_t(j(A_1),j(A_2),...,j(A_{t+1})),$$

而 F_t 是 $\mathrm{M}_t(H)$ 的中心多项式意味着 $j(F_t(A_1,...,A_{t+1}))$ 是纯量矩阵, 但它的对角元中有零 (右下角的元素), 这迫使 $j(F_t(A_1,...,A_{t+1}))$ 是零矩阵, 再由 j 是单射得到 $F_t(A_1,...,A_{t+1})=O$, 所以 F_t 是 R 的多项式等式. □

Lemma 2.61 (Wedderburn 小定理)**.** 设 Δ 是有限除环, 则 Δ是域.

Proof. 记 $F=Z(\Delta)$, 则 F 是域, 将 Δ 视作域 F 上线性空间, 则为有限维线性空间, 设 $\dim_F\Delta=n$. 下面通过反证法证明 $n=1$, 一旦证明 $n=1$, 利用 $\Delta=F$ 可得 Δ 是域. 假设 $n\geq 2$, 设 $|F|=q\geq 2$(注意有限域的阶是素数幂次, 所以至少为 2), 那么 $|\Delta^*|=q^n-1$, 将乘法群 Δ^* 共轭作用到自身上, 根据轨道公式可得 $q^n-1=q-1+\sum\limits_{a\in A}[\Delta^*:C(a)^*]$, 其中 A 是所有元素个数至少为 2 的共轭类的一个代表元集. 因为 $C(a)\supseteq F$, 所以 $C(a)$ 也可以视作 F 上线性空间 ($C(a)$ 是除环, 未必交换), 注意到 $\dim_F\Delta=(\dim_{C(a)}\Delta)(\dim_F C(a))$, 所以 $r_a=\dim_F C(a)$ 是整除 n 的正整数, 且 $1\leq r_a<n$. 于是

$$q^n-1=q-1+\sum_{a\in A}\frac{q^n-1}{q^{r_a}-1},$$

对每个 $a\in A$, 注意到 $\Phi_n(x)(x^{r_a}-1)$ 是在 $\mathbb{Z}[x]$ 中整除 x^n-1 的整系数多项式 (这里 $\Phi_n(x)$ 表示 n 次分圆多项式), 所以存在整系数多项式 $h(x)$ 使得 $x^n-1=\Phi_n(x)(x^{r_a}-1)h(x)$, 这说明 $(q^n-1)/(q^{r_a}-1)$ 是被 $\Phi_n(q)$ 整除的正整数, 那么 $\Phi_n(q)$ 整除 $q-1$, 于是

$$q-1\geq|\Phi_n(q)|=\prod_{\mathrm{g.c.d}(k,n)=1}|q-e^{2ik\pi/n}|,$$

但对与 n 互素的正整数 $1\leq k\leq n$, 有 $|q-e^{2ik\pi/n}|>q-1\geq 1$, 得到矛盾. □

Lemma 2.62 ([4])**.** 设 R,L 是 K-代数, 这里 K 是无限域, L 是域, 那么 R 的任何一个 K 上的多项式等式 $f(x_1,x_2,...,x_m)$ 也是 $R\otimes_K L$的一个多项式等式.

Proof. 设 $\{r_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是 R 作为 K-线性空间的一个基. 我们知道 $R\otimes_K L$ 中的任何一个元素都可以表示为有限和 $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}r_\alpha\otimes l_\alpha$ 的形式, 所以要证明 f 是 $R\otimes_K L$ 的一个多项式等式, 我们只要验证对任给

$$r_{\alpha_{11}},...,r_{\alpha_{1N_1}},r_{\alpha_{21}},...,r_{\alpha_{2N_2}},...,r_{\alpha_{m1}},...,r_{\alpha_{mN_m}}\in\{r_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$$

以及 $l_{11},...,l_{1N_1},...,l_{m1},...,l_{mN_m}\in L$, 有

$$f(\sum_{j=1}^{N_1}r_{\alpha_{1j}}\otimes l_{1j},\sum_{j=1}^{N_2}r_{\alpha_{2j}}\otimes l_{2j},...,\sum_{j=1}^{N_m}r_{\alpha_{mj}}\otimes l_{mj})=0$$

即可. 固定上面的 $r_{\alpha_{11}},...,r_{\alpha_{1N_1}},r_{\alpha_{21}},...,r_{\alpha_{2N_2}},...,r_{\alpha_{m1}},...,r_{\alpha_{mN_m}}\in\{r_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$, 如果我们能够证明对 L 上的多项式环 $L[x_{ij}]=L[x_{11},...,x_{1N_1},...,x_{m1},...,x_{mN_m}]$, $R\otimes_K L[x_{ij}]$ 中的元素

$$f(\sum_{j=1}^{N_1}r_{\alpha_{1j}}\otimes x_{1j},\sum_{j=1}^{N_2}r_{\alpha_{2j}}\otimes x_{2j},...,\sum_{j=1}^{N_m}r_{\alpha_{mj}}\otimes x_{mj})=0,$$

那么我们将 l_{ij} 代入 x_{ij} 便得到了结果, 原因是赋值映射 $\mathrm{ev}:R\otimes_K L[x_{ij}]\to R\otimes_K L,\sum\limits_{k=1}^{t}r_k\otimes f_k(x_{ij})\mapsto\sum\limits_{k=1}^{t}r_k\otimes f_k(l_{ij})$ 是环同态 (映射合理性容易验证, 这里赋值映射能够成为环同态是由 L 是交换环保证的), 所以 $\mathrm{ev}(f(\sum\limits_{j=1}^{N_1}r_{\alpha_{1j}}\otimes x_{1j},\sum\limits_{j=1}^{N_2}r_{\alpha_{2j}}\otimes x_{2j},...,\sum\limits_{j=1}^{N_m}r_{\alpha_{mj}}\otimes x_{mj}))=f(\sum\limits_{j=1}^{N_1}r_{\alpha_{1j}}\otimes l_{1j},\sum\limits_{j=1}^{N_2}r_{\alpha_{2j}}\otimes l_{2j},...,\sum\limits_{j=1}^{N_m}r_{\alpha_{mj}}\otimes l_{mj})=0.$ 下面我们说明 $f(\sum\limits_{j=1}^{N_1}r_{\alpha_{1j}}\otimes x_{1j},\sum\limits_{j=1}^{N_2}r_{\alpha_{2j}}\otimes x_{2j},...,\sum\limits_{j=1}^{N_m}r_{\alpha_{mj}}\otimes x_{mj})=0.$

将 $f(\sum\limits_{j=1}^{N_1}r_{\alpha_{1j}}\otimes x_{1j},\sum\limits_{j=1}^{N_2}r_{\alpha_{2j}}\otimes x_{2j},...,\sum\limits_{j=1}^{N_m}r_{\alpha_{mj}}\otimes x_{mj})$ 展开, 对每个形如 $r\otimes g(x_{ij}),g(x_{ij})\in K[x_{ij}]$ 的项全部把 r 用 r_α 来 K-线性表出, 可得存在有限个 $r_{\beta_1},r_{\beta_2},...,r_{\beta_s}\in\{r_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 以及 K 上的多项式 $G_{\beta_1}[x_{ij}],...,G_{\beta_s}[x_{ij}]\in K[x_{ij}]$, 使得

$$f(\sum_{j=1}^{N_1}r_{\alpha_{1j}}\otimes x_{1j},\sum_{j=1}^{N_2}r_{\alpha_{2j}}\otimes x_{2j},...,\sum_{j=1}^{N_m}r_{\alpha_{mj}}\otimes x_{mj})=\sum_{k=1}^{s}r_{\beta_k}\otimes G_{\beta_k}[x_{ij}].$$

下面说明 $G_{\beta_1}[x_{ij}],...,G_{\beta_s}[x_{ij}]$ 全部都是零多项式 (一旦证明这一点, 便得到了结果). 任取域 K 中元素

$$c_{11},...,c_{1N_1},...,c_{m1},...,c_{mN_m},$$

将 $c_{ij}1_L$ 代入上式, 得 $\sum\limits_{k=1}^{s}r_{\beta_k}\otimes G_{\beta_k}[c_{ij}1_L]=\sum\limits_{k=1}^{s}r_{\beta_k}G_{\beta_k}[c_{ij}]\otimes 1_L=f(\sum\limits_{j=1}^{N_1}r_{\alpha_{1j}}c_{1j}\otimes 1_L,\sum\limits_{j=1}^{N_2}r_{\alpha_{2j}}c_{2j}\otimes 1_L,...,\sum\limits_{j=1}^{N_m}r_{\alpha_{mj}}c_{mj}\otimes 1_L)=f(\sum\limits_{j=1}^{N_1}r_{\alpha_{1j}}c_{1j},\sum\limits_{j=1}^{N_2}r_{\alpha_{2j}}c_{2j},...,\sum\limits_{j=1}^{N_m}r_{\alpha_{mj}}c_{mj})\otimes 1_L=0$. 于是由 $\sum\limits_{k=1}^{s}r_{\beta_k}G_{\beta_k}[c_{ij}]\otimes 1_L=0$ 得到 $\sum\limits_{k=1}^{s}G_{\beta_k}[c_{ij}]r_{\beta_k}=0$, 再由 r_{β_k} 的 K-线性无关性迫使每个 $G_{\beta_k}[c_{ij}]=0$. 总结一下, 现在我们得到了每个 $G_{\beta_k}[x_{ij}]$ 关于 K 中任意一组元素 c_{ij} 的代入是零, 而 K 是无限域, 这迫使 $G_{\beta_k}[x_{ij}]$ 是零多项式. □

2.6 Posner 定理

在抽象代数中我们熟知整区可以关于它所有非零元构成的乘闭子集作局部化, 来得到商域. 素 PI 环作为整区的推广, 它也可以关于中心正则元集作 (非交换) 局部化, 本节的 Posner 定理告诉我们, 素 PI 环关于中心正则元集作右局部化得到的右商环, 是其中心上有限维中心单代数, 这可以视作"整区的商域是自身上的 1 维单代数"这一事实的推广. 如无特别说明, 本节的含幺环幺元均非零, K 表示含幺交换环.

现在开始我们为 Posner 定理的证明做一些准备. 下面是我们在交换代数中熟知的结论.

Lemma 2.63 ([22]). 设 R 是含幺环, $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x]$ 满足系数两两可交换, 那么 $f(x)$ 在 $R[x]$ 中可逆当且仅当 a_0 在 R 中可逆且 $a_1,a_2,...,a_n$ 幂零.

Proof. 充分性是明显的, 这里仅验证必要性. 设 $f(x)$ 的逆 $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$(设 $n,m\geq 1$). 首先 a_0 可逆是明显的, 因为 b_0 就是它的逆元. 下面说明 $a_1,a_2,...,a_n$ 幂零. 由 $f(x)g(x)=1$ 我们马上得

到 $a_nb_m = 0, a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} = 0$, 进而 $a_n^2b_{m-1} = 0$. 归纳地容易证明对每个自然数 $0 \le r \le m$, 有 $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$. 特别地, $a_n^{m+1} = 0$, 所以 a_n 幂零. 于是再由 $f(x) - a_nx^n$ 可逆知 a_{n-1} 幂零, 重复上述讨论可得 $a_1, a_2, ..., a_n$ 幂零. □

下面的结果来自 Amitsur 于 1956 年的工作.

Theorem 2.64 ([12])**.** 设含幺环 R 没有非零的诣零理想 (例如半本原环), 那么 $R[x]$是半本原环.

Proof. 我们通过反证法说明 $\mathrm{Jac}(R[x])$ 是零. 假设 $\mathrm{Jac}(R[x]) \neq 0$, 设 $\mathrm{Jac}(R[x])$ 里所有非零多项式中次数最低的多项式次数为 $n \ge 0$, 那么

$$I = \{a_n \in R | \text{存在} a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in R, \text{使得} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathrm{Jac}(R[x])\}$$

是 R 的非零理想. 下证 I 是诣零的来得到矛盾. 任取 $a_n \in I$, 并设 $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in R$ 使得 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathrm{Jac}(R[x])$, 那么 $a_nf(x) - f(x)a_n \in \mathrm{Jac}(R[x])$ 迫使 $a_na_j = a_ja_n, \forall 0 \le j \le n$. 再利用 $a_{n-1}f(x) - f(x)a_{n-1} \in \mathrm{Jac}(R[x])$ 可得 $a_{n-1}a_j = a_ja_{n-1}, \forall 0 \le j \le n$. 归纳地, 可得 $a_ia_j = a_ja_i, \forall 0 \le i, j \le n$. 因此 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathrm{Jac}(R[x])$ 的系数两两可交换, 考虑多项式 $1 - xf(x)$, 它在 $R[x]$ 中可逆且系数两两可交换, 由前面的引理知系数 $a_0, a_1, ..., a_n$ 幂零, 于是知 I 中元素均幂零. 故 I 为诣零理想, 矛盾. □

Remark 2.65. 这一结果告诉我们半本原环 R 上的多项式环 $R[x]$ 仍是半本原的. 但是反过来结论不一定成立, 例如取 R 是域 F 上形式幂级数环 $F[[x]]$, 则 R 不是半本原环, 但 $R[x]$ 是半本原的 (因为 R 是整区, 那么 R 不存在非零的诣零理想, 所以这里的定理对 R 适用).

Theorem 2.66 ([4])**.** 设 K-代数 R 是半素 PI 代数, 那么 R 的任何非零理想 J 满足 $J \cap Z(R) \neq 0$.

Proof. 事实上我们只需要证明当 R 是半本原 PI 代数的情形结论成立就够了, 因为如果结论对半本原 PI 代数都成立, 那么对半素 PI 代数 R 上的多项式环 $R[x]$, 因为 R 没有非零的诣零理想, 所以 $R[x]$ 是半本原 K-代数. 于是 $R[x]$ 的非零理想 $J[x]$ 与 $R[x]$ 的中心 $Z(R[x]) = Z(R)[x]$ 之交 $J[x] \cap Z(R)[x] = (J \cap Z(R))$ 非零, 这就蕴含了 $J \cap Z(R) \neq 0$. 现在我们证明：当 R 是半本原 PI 代数时, 对 R 的任何非零理想 J, 有 $J \cap Z(R) \neq 0$. 设 R 是本原代数族 $\{R_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 的次直积, 即存在单代数同态 $j : R \to \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$, 使得对每个标准投射 $p_\alpha : \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha \to R_\alpha$, 有 $p_\alpha j$ 是满射. 因为 R 到每个 R_α 有满代数同态, 所以每个 R_α 是本原 PI 代数, 那么由 Kaplansky 定理知 R_α 是单代数. 设 R_α 有最小次数 d_α, 那么正整数集 $\{d_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 有上界 (被 R 的最小次数控制). 记 $d_\alpha/2$ 为 m_α 并设正整数集 $\{m_\alpha | \alpha \in \Lambda, p_\alpha j(J) \neq 0\}$ 的最大元为 m. 设 S 是 J 中元素代入 Fromanek 多项式 F_m 后所有可能的取值构成的集合, 即 $S = \{F_m(r_1, ..., r_{m+1}) \in R | r_1, ..., r_{m+1} \in J\}$, 那么 $S \subseteq J$. 并且 S 中有非零元：首先存在 α_0 使得 $m_{\alpha_0} = m \in \{m_\alpha | \alpha \in \Lambda, p_\alpha j(J) \neq 0\}$. 于是 F_m 是 R_{α_0} 中心多项式 (见 [推论2.60]) 保证了存在 $c_1, ..., c_{m+1} \in R_{\alpha_0}$ 使得 $F_m(c_1, ..., c_{m+1}) \neq 0$. 注意到这时 $p_{\alpha_0} j(J)$ 作为 R_{α_0} 这一单环的非零理想必为 R_{α_0} 本身, 所以对每个 c_k 在 J 中找关于 $p_{\alpha_0} j$ 的原像即可得到 S 中有非零元 (具体地, 对每个 c_k, 设 $b_k \in J$ 使得 $p_{\alpha_0} j(b_k) = c_k$, 那么 $p_{\alpha_0} j(F_m(b_1, ..., b_{m+1})) = F_m(c_1, ..., c_{m+1}) \neq 0$ 表明 $j(F_m(b_1, ..., b_{m+1})) \neq 0$, 于是由 j 是单射即得结果).

Claim. 对 $\alpha \in \Lambda$, 有 $p_\alpha j(S) \subseteq Z(R_\alpha)$. 一旦证明这一断言, 对任给 $b_1, ..., b_{m+1} \in J$, 由 $F_m(b_1, ..., b_{m+1}) \in S$ 知 $p_\alpha j(rF_m(b_1, ..., b_{m+1})) = p_\alpha j(F_m(b_1, ..., b_{m+1})r), \forall r \in R$, 于是利用 j 是单射可得 $F_m(b_1, ..., b_{m+1}) \in Z(R), \forall b_1, ..., b_{m+1} \in J$. 再由 $S \subseteq J \cap Z(R)$ 便得结果.

现在证明断言, 任给 $\alpha \in \Lambda$, 如果 $m_\alpha < m$, 那么 F_m 是 R_α 的一个多项式等式, 特别地, $p_\alpha j(S) = 0 \subseteq Z(R_\alpha)$. 如果 $m_\alpha = m$, 那么 F_m 是 R_α 的一个中心多项式, 进而 $p_\alpha j(S) \subseteq Z(R_\alpha)$. 如果 $m_\alpha > m$, 那么由 m 的定义知 $p_\alpha j(J) = 0$, 特别地, $p_\alpha j(S) = 0 \subseteq Z(R_\alpha)$. 断言得证. □

Remark 2.67. 因此半素 PI 代数 R 如果中心是域, 那么任何非零理想都包含可逆元. 进而知中心为域的半素 PI 代数是单 PI 代数, 于是由 Kaplansky 定理知 R 是其中心上的有限维中心单代数.

Ed Posner(美国数学家, 1933-1993) 给出了下面的 Posner 定理, 它表明最小次数为 d 的素 PI 环 R 在其中心正则元集 $S = Z(R) - \{0\}$ 处的右局部化 R_S 是其中心上维数为 $(d/2)^2$ 的中心单代数.

Theorem 2.68 (Posner 定理, [4])**.** 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的素 PI 代数, 记 $Z = Z(R), S = Z(R) - \{0\}$, 那么右商环 R_S 存在且是其中心 Z_S 上的中心单代数, R_S 与 R 满足 K 上相同的多重线性多项式, 特别地, d 是偶数且 R_S 作为 Z_S 上的中心单代数维数是 $(d/2)^2$. 一般称 $d/2$ 是素 PI 代数 R 的 **PI 次数**, 记为 PI-deg(R).

Proof. R 是素环保证了 Z 是整区, R_S 存在, R_S 的中心是 Z 的商域 Z_S 且 R_S 为素环. 如果我们能够证明 R_S 与 R 满足 K 上相同的多重线性多项式, 那么 R_S 是最小次数是 d 且为中心是域的 PI 素代数. 而半素 PI 代数的任何非零理想与中心的交非零, 所以 R_S 作为中心是域的素 PI 代数必为单代数. 进而 R_S 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, 再由 Kaplansky 定理即得 d 是偶数且 R_S 是 Z_S 上的 $(d/2)^2$ 维中心单代数. 因此, 要证明 Posner 定理, 只需要再验证 R_S 与 R 满足 K 上相同的多重线性多项式. 首先由 R 是素环保证了右局部化 (R_S, λ) 中 K-代数同态 $\lambda : R \to R_S$ 是单射, 因此代数同构 $\lambda(R) \cong R$ 保证了 R_S 满足的任何多项式等式 $f \in K\langle x_1, ..., x_n\rangle$ 也是 R 的多项式等式. 最后说明 R 满足的多重线性多项式也被 R_S 满足. 如果 Z 是有限集, 那么 Z 作为有限整区是域, 所以这时 $\lambda : R \to R_S$ 是满射, 进而为代数同构, 于是知这时 R 的多项式等式也是 R_S 的多项式等式. 如果 Z 是无限集, 置 $\Lambda = \{\lambda(s)^{-1} | s \in S\}$, 考虑 $\lambda(R)$ 上以 Λ 为指标集的未定元集所定义的多项式环 $\lambda(R)[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$, 那么 Z_S 子集 $\{\lambda(s)^{-1}|s \in S\}$ 所决定的赋值映射 $\mathrm{ev} : \lambda(R)[\{x_i\}_{i\in\Lambda}] \to R_S, f(\{x_i\}_{i\in\Lambda}) \mapsto f(\{c\}_{c\in\Lambda})$ 是满 K-代数同态, 这表明 $\lambda(R)[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ 满足的 K 上任何一个多项式等式都被 R_S 满足, 而 $\lambda(R)[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ 作为 $\lambda(R)$ 的中心扩张与 $\lambda(R)$ 满足相同的多重线性多项式, 故 $\lambda(R)$ 满足的任何多重线性多项式都被 R_S 满足, 再由 $R \cong \lambda(R)$ 得到 R 满足的任何多项式等式都被 R_S 满足. 于是我们证明了 R_S 与 R 满足 K 上相同的多重线性多项式. □

Remark 2.69. 本原 PI 代数作为特殊的素 PI 代数, 其 PI 次数也是最小次数的一半. 所以本原 PI 代数作为其中心上中心单代数的维数就是 PI 次数的平方. 素 PI 代数 R 在中心正则元集 S 处的局部化 R_S 作为中心上中心单代数的维数也是 R 的 PI 次数的平方 (Posner 定理也表明 R 与 R_S 具有相同的 PI 次数).

Example 2.70. Posner 定理表明素 PI 环在中心正则元构成的乘闭子集处作局部化是单环. 一般地, 素环在中心正则元构成的乘闭子集处作局部化未必是单环. 例如考虑域 $\Bbbk$ 上可数变量的自由代数 $R = \Bbbk\langle x_1, x_2, ...\rangle$, 易验证 $Z(R) = \Bbbk$, 这时 R 在 $S = Z(R) - \{0\}$ 处作局部化同构于自身, 即 $R_S \cong R$. 但 R 明显有非平凡的理想, 例如变量 x_1 生成的理想便是非零真理想. 所以 R_S 不是单环. 类似地, 利用 Posner 定理可得对域 $\Bbbk$ 任何自由代数 $R = \Bbbk\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$, 只要 $n \geq 2$, 那么 R 不是 PI 环.

回忆一个含幺环 R 称为**右 Goldie 环**, 如果 R 具有有限一致维数且满足右零化子升链条件. 一个右 R-模 M 具有有限一致维数指它不含非零子模的无限直和. 如果含幺环 R 有乘闭子集 S 满足 S 由一些正则元构成且 $Q = R_S$ 存在, 可以证明 Q 是 Artin 单环蕴含 R 是素右 Goldie 环 (证明可参见 [2]).

Corollary 2.71. 设 K-代数 R 是素 PI 代数, 那么 R 是素右 Goldie 环.

2.7 Amitsur 定理

本节的主要目标是证明任何 PI 代数作为环是 PI 环, 本节中 K 表示含幺交换环, $1_K \neq 0$.

Lemma 2.72. 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, 那么 R 满足标准等式 s_d. 特别地, 任何最小次数为 d 的半素 K-PI 代数也满足 s_d.

Proof. 由 [引理2.53] 中的 (4) 知有 H-代数同构 $R \otimes_{Z(R)} H \cong \mathrm{M}_m(H)$, 这也是环同构, 所以 Amitsur-Levitzki 定理告诉我们 R 满足 s_{2m}. Kaplansky 的证明过程表明 $d = 2m$, 所以 R 满足标准等式 $s_{2m} = s_d$. 现设 K-代数 R 是最小次数为 d 的半素 PI 代数, 那么 [推论2.43] 表明 R 没有非零诣零理想, 所以 [定理2.64] 表明 $R[x]$ 是半本原的. 因此 $R[x]$ 是一些本原 K-代数 $\{R_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$ 的次直积, $R[x]$ 到每个 R_α 有满代数同态, 所以每个 R_α 的最小次数不超过 d, 于是由 [引理2.29] 知每个 R_α 满足 s_d, 因此由 [引理2.15] 的 (3) 知 $\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ 也满足 s_d. 进而由 $R[x]$ 可嵌入 $\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ 知 $R[x]$ 满足 s_d, 特别地, R 也满足 s_d. □

Corollary 2.73. 设 R 是最小次数为 d 的半素 PI 环, 那么存在交换环 F 与正整数 n 使得 R 可嵌入矩阵环 $\mathrm{M}_n(F)$. 特别地, $\mathrm{M}_t(R)$ 也是半素 PI 环.

Proof. 与前面的引理证明过程类似, [推论2.43] 表明 R 没有非零诣零理想, 所以 [定理2.64] 表明 $R[x]$ 是半本原的. 于是我们可不妨设 R 是最小次数为 d 的半本原 PI 环. 设 R 是一些本原环 $\{R_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$ 的次直积, 那么每个 R_α 的最小次数 d_α 不超过 d. [推论2.59] 保证了每个 R_α 可保幺地嵌入域 H_α 上的矩阵环 $\mathrm{M}_{m_\alpha}(H_\alpha), m_\alpha = d_\alpha/2$. 置 $n = (d/2)!$, 则通过 $\mathrm{M}_n(H_\alpha) \cong \mathrm{M}_{n/m_\alpha}(M_{m_\alpha}(H_\alpha))$(这里的同构来自分块矩阵角度) 可将每个 $\mathrm{M}_{m_\alpha}(H_\alpha)$ 保幺地嵌入 $\mathrm{M}_n(H_\alpha)$. 所以 $\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ 可嵌入 $\prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{M}_n(H_\alpha) \cong \mathrm{M}_n(\prod_{\alpha\in\Lambda} H_\alpha)$. 故 R 可嵌入交换环 $F = \prod_{\alpha\in\Lambda} H_\alpha$ 上的 n 阶矩阵环. 最后说明半素 PI 环上的矩阵环仍半素 PI. 半素是明显的, 因为矩阵环 $\mathrm{M}_t(R)$ 的素根就是 $\mathrm{M}_t(N(R))$. 要看到 $\mathrm{M}_t(R)$ 是 PI 的, 只需注意 R 嵌入 $\mathrm{M}_n(F)$ 蕴含 $\mathrm{M}_t(R)$ 嵌入 $\mathrm{M}_{nt}(F)$, 后者是 PI 环 (回忆 [例2.22]). □

Remark 2.74. R. S. Irving 在 [23] 中给出了仿射 PI 代数未必能嵌入含幺交换环上矩阵环的例子.

因为交换环上的矩阵环具有 IBN 性质, 因此由半素 PI 代数的矩阵嵌入性质马上可知

Proposition 2.75. 设 R 是 PI 环, 那么 R 具有 IBN 性质. 特别地, 有限维代数具有 IBN 性质.

Proof. 考虑标准投射 $\pi : R \to R/N(R)$, 其中 $N(R)$ 是素根. 以及半素 PI 环 $R/N(R)$ 的嵌入 $\mathrm{M}_n(K)$, 其中 K 是某个含幺交换环. 因为 $\mathrm{M}_n(K)$ 具有 IBN 性质, 所以 $R/N(R)$ 也有 IBN 性质. 从而 R 也有 IBN 性质. □

Theorem 2.76 (Amitsur 定理,[4])**.** 设 K-代数 A 是满足首一多项式 $f \in K\langle x_1, ..., x_d\rangle$ 的 PI 代数, 则存在正整数 m, n 使得 A 满足 s_n^m. 特别地, 我们得到任何 PI 代数 A作为环也是 PI 的.

Proof. 我们先说明对任给满足 f 的 K-代数 T, 存在正整数 n 使得 $s_n(a_1, ..., a_n) \in N(T), \forall a_1, ..., a_n \in T$. 对 T 的任何素理想 P, 有 T/P 是最小次数不超过 f 次数的素 PI 代数, 而前面的引理表明最小次数是 q 的素 PI 代数总满足 s_q, 所以 T/P 满足 $s_n, \forall P \in \mathrm{Spec}(T)$, 这里 n 是 f 的次数. 于是知 $s_n(a_1, ..., a_n) \in N(T), \forall a_1, ..., a_n \in T$. 置指标集 $\Lambda = A^n, A_\alpha = A, S = \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 那么 S 满足 f 且由前面的讨论知存在正整数 n 使得对任给 $u_1, ..., u_n \in S$ 有 $s_n(u_1, u_2, ..., u_n) \in N(S)$. 对每个 $1 \leq i \leq n$, 命 u_i 为 S 中指标 α 的元素是 α 的第 i 分量

构成的元素, 即若 $\alpha=(r_1,...,r_n)\in A^n$, 那么 u_i 在指标 α 处的分量是 r_i. 那么由 $s_n(u_1,u_2,...,u_n)\in N(S)$ 知存在正整数 m 使得 $s_n(u_1,u_2,...,u_n)^m=0$. 对任给 $r_1,r_2,...,r_n\in A$, 易见 $s_n(u_1,u_2,...,u_n)^m\in S$ 在指标 $\alpha=(r_1,...,r_n)$ 处的分量就是 $s_n(r_1,r_2,...,r_n)^m$, 所以 $s_n(r_1,r_2,...,r_n)^m=0,\forall r_1,r_2,...,r_n\in A$. □

Remark 2.77. 因此, PI 代数就是作为环是 PI 环的代数, 任何 PI 环满足的性质 PI 代数也都满足.

事实上, 上述证明过程可以告诉我们更多

Theorem 2.78 ([2])**.** 设 R 是 PI 环, 那么矩阵环 $\mathrm{M}_s(R)$ 满足某个标准等式的幂 s_n^m, 故也是 PI 环.

Proof. 因为 $\mathrm{M}_s(R/N(R))\cong\mathrm{M}_s(R)/\mathrm{M}_s(N(R))$, 所以 [推论2.73] 表明 $\mathrm{M}_s(R)/\mathrm{M}_s(N(R))$ 是半素 PI 环, 进而存在正整数 n 使得 $s_n(A_1,...,A_n)\in N(\mathrm{M}_s(R))=\mathrm{M}_s(N(R)),\forall A_1,...,A_n\in\mathrm{M}_s(R)$. 其余讨论与 [定理2.76] 完全相同. 我们可以得到存在正整数 m 使得 $s_n(A_1,A_2,...,A_n)^m=0,\forall A_1,A_2,...,A_n\in\mathrm{M}_s(R)$. □

Corollary 2.79 ([2])**.** 如果含幺环 R 是 PI 环, 那么任何有限生成右 R-模 M_R 的自同态环 $\mathrm{End}(M_R)$ 也是 PI 的. 特别地, 环的 PI 性质是 Morita 不变量.

Proof. 设 M_R 可由 n 个元素生成, 由 [引理2.19] 知存在矩阵环 $\mathrm{M}_n(R)$ 的 (含幺) 子环 S 与满环同态 $\varphi:S\to\mathrm{End}(M_R)$. R 是 PI 环保证了 S 是 PI 的, 因此 $\mathrm{End}(M_R)$ 也 PI. 对于后一结论, 根据 Morita I, 任何与 R 是 Morita 等价的环 R', 都同构于 $\mathrm{End}(P_R)$, 其中 P_R 是有限生成投射生成子, 所以 R' 也是 PI 环. □

Corollary 2.80 ([2])**.** 如果含幺环 R 是 PI 环, S 是 R 的环扩张 $(1_S\in R)$ 满足 S_R 是有限生成模, 则 S 也是 PI 环. 这推广了 [命题2.23].

3 一些 PI 环类

3.1 Noether PI 环

如果一个素环 R 的任何本质右理想都含有一个非零理想, 则称该素环是**右有界的**. 如果含幺环 R 满足对任何素理想 P, 商环 R/P 都是右有界环, 则称 R 是**右全有界的**. 类似可定义**左有界素环**与**左全有界环**的概念. 如果一个素环既是左有界的又是右有界的, 称该素环**有界**. 如果一个含幺环既是右全有界环又是左全有界环, 称该环是**全有界的**. 将右全有界的右 Noether 环简称为**右 FBN 环**. 全有界的双边 Noether 环简称为 **FBN 环**. FBN 环自然是特殊的右 FBN 环. 本节的目标是说明右 Noether PI 环是右 FBN 环. Posner 定理 (见 [定理2.68]) 说素 PI 环关于中心正则元集的右经典商环存在且为中心上有限维中心单代数, 特别地, 是 Artin 半单代数, 因此由 Goldie 理论的基本事实 (例如参见 [2, p.57, Proposition 3.1]) 知**素 PI 环是右 Goldie 环**. 进而可对素 PI 环应用 Goldie 定理：素 PI 环的任何本质右理想都会含 R 的某个正则元. 回忆对含幺环 K 上一个 PI 代数 A(可以没有 1_A), 如果 A 满足某个次数为 $d\geq 1$ 的首一多项式 $f\in K\langle x_1,...,x_n\rangle$, 那么 A 满足 K 上某个次数不超过 d 的首一多重线性多项式 (回忆 [定理2.16]). 我们利用这个工具先证明：

Proposition 3.1. 设含幺环 R 是 PI 的, $a\in R$, 那么对充分大的正整数 n, 右理想 $a^nR+\mathrm{rann}(a^n)$ 一定包含 R 的某个非零理想.

Proof. 考虑集合 $\mathcal{S}=\{l\in\mathbb{Z}_{\geq 1}|\text{存在某个}l\text{次首一多重线性多项式使得对某个正整数}k,a^kR\text{满足该多项式}\}$, 因为 R 是 PI 环, 所以 $\mathcal{S}$ 非空, 由良序原理, 存在 $\mathcal{S}$ 中最小元 l, 设它对应 a^kR 满足的首一多重线性多项式 $g(x_1,x_2,...,x_l)\in\mathbb{Z}\langle x_1,x_2,...,x_l\rangle$, 那么一方面, 由 $a^nR\subseteq a^kR,\forall n\geq k$ 知对每个正整数 $n\geq k$, a^nR 也满足 g; 另一方面, 根据 l 的选取, 任何 $a^nR(n\geq k)$ 不会满足次数严格低于 l 的首一多重线性多项式. 不妨设 g 表达式中项 $x_1\cdots x_l$ 的系数是 1. 现在我们将 g 如下拆分：$g(x_1,...,x_l)=x_1g_1(x_2,...,x_l)+g_2(x_1,...,x_l)$, 其中 g_1 是以 $x_2,...,x_l$ 为变量的首一多重线性多项式, g_2 是每项不以变量 x_1 为首的多重线性多项式 (在证明 Köthe 猜想在 PI 环层面成立时, 我们也用过这个技术). 那么对任何 $r_1,...,r_l\in R$, 有

$$0=g(a^nr_1,a^{2n}r_2,...,a^{2n}r_l)=(a^nr_1)g_1(a^{2n}r_2,...,a^{2n}r_l)+g_2(a^nr_1,...,a^{2n}r_l),\forall n\geq k.$$

根据前面的讨论, g_1 作为次数严格低于 l 的首一多重线性多项式不能零化 $a^{2n}R$, 故可选取适当 $r_2,...,r_l\in R$ 使 $g_1(a^{2n}r_2,...,a^{2n}r_l)\neq 0$. 记 $s=g_1(a^{2n}r_2,...,a^{2n}r_l)\neq 0,a^{2n}t=g_2(a^nr_1,...,a^{2n}r_l)\in R$(这里 s 依赖于 n), 则

$$a^nr_1s+a^{2n}t=0\Rightarrow a^n(r_1s+a^nt)=0,\forall r_1\in R,n\geq k.$$

因此对充分大的正整数 n, $Rs\subseteq a^nR+\mathrm{rann}(a^n)$, 因为包含关系右边也是右理想, 所以 $RsR\subseteq a^nR+\mathrm{rann}(a^n)$. 即对充分大的正整数 n, $a^nR+\mathrm{rann}(a^n)$ 会包含一个非零理想 RsR. □

Corollary 3.2. 设含幺环 R 是 PI 环, $a\in R$ 满足 $\mathrm{rann}(a)=0$, 那么 aR 包含某个非零理想.

Proof. 因为 a 的右零化子是平凡的, 所以对任何首一多重线性的多项式 $g\in\mathbb{Z}\langle x_1,x_2,...,x_l\rangle$, aR 满足 g 当且仅当对所有的 $k\geq 1$ 有 a^kR 满足 g. 这意味着在前一命题证明过程中所构造的集合 $\mathcal{S}$ 的最小元 l 所对应的首一多重线性多项式 g 可以零化每个 $a^kR(k\geq 1)$. 所以在前一命题证明过程中可取 $n=k=1$ 来得到 aR 会包含一个非零理想. □

现在我们已经做好了证明“PI 环是右全有界环”的所有准备.

Theorem 3.3. 设 R 是 PI 环, 那么对每个素理想 P, 有 R/P 是右有界环, 即 R/P 任何本质右理想都包含一个非零理想. 从而知 PI 环是右全有界环. 特别地, 右 Noether PI 环是右 FBN 环.

Proof. 只要证素 PI 环是右有界环即可. Posner 定理告诉我们素 PI 环是右 Goldie 素环, 从而 Goldie 定理保证了素 PI 环的任何本质右理想会包含一个正则元, 于是 [推论3.2] 表明该正则元生成的右理想必定包含某个非零理想. 故素 PI 环的任何本质右理想会包含某个非零理想. □

Example 3.4. 设含幺环 R 满足 $Z(R)$ 是 Noether 环且 R 是有限生成 $Z(R)$-模, 那么由 [命题2.23] 立即得到 R 是双边 Noether 的 PI 环. 因此中心 Noether 且在中心上有限的环都是右 FBN 的. 一般地, 若含幺环 R 是 $Z(R)$ 上的有限生成模, 则每个有限生成左 R-模 M 会存在一个生成元集 $\{x_1,...,x_n\}$ 使得

$$\mathrm{Ann}_RM=\mathrm{ann}_R(x_1)\cap\mathrm{ann}_R(x_2)\cap\cdots\cap\mathrm{ann}_R(x_n).$$

上式等号左边明显是右边的子集, 现在我们选取一个使得等号成立的有限生成元集 $\{x_1,...,x_n\}$. 因为 M 这时也是有限生成 $Z(R)$-模, 取 $\{x_1,...,x_n\}$ 是 M 作为 $Z(R)$-模的一个生成元集, 容易验证这时每个 $a\in\mathrm{ann}_R(x_1)\cap\mathrm{ann}_R(x_2)\cap\cdots\cap\mathrm{ann}_R(x_n)$ 一定零化 M 中所有元素.

虽然非交换代数中的 Jacobson 猜想目前仍是公开问题, 我们还是可以问对 Noether 的 PI 环是否满足 Jacobson 猜想, A. V. Jategaonkar 于 1974 年证明了更一般的结果:

Theorem 3.5 ([24]). 设 R 是 FBN 环 (例如 Noether 的 PI 环), 那么 $\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Jac}R)^n=0$.

3.2 仿射 PI 代数

称含幺环 R 有**根性质**, 如果对任何 R 的真理想 I, R/I 的 Jacobson 根是诣零理想. 称域 $\Bbbk$ 上代数 A 有**自同态性质**, 如果对每个不可约左 A-模 M, M 的自同态环在 $\Bbbk$ 上代数. 称域 $\Bbbk$ 上代数 A 满足**零点定理**, 如果 A 具有根性质和自同态性质. 易见域上仿射交换代数总满足零点定理. 回忆含幺环 R 称为 **Jacobson 环**, 如果对任何 R 的素理想 P, P 均可表示为一些本原理想之交. 因此, 含幺交换环是 Jacobson 环当且仅当任何素理想可表示为一些极大理想之交. 同时, 不难看出含幺环是 Jacobson 环的充要条件是对任何素理想 P 有 R/P 是半本原环. 一个基本的观察是:

Proposition 3.6 ([2]). 设含幺环 R 满足对每个素理想 P, R/P 是右 Goldie 环 (例如 R 是右 Noether 环或 PI 环). 那么 R 是 Jacobson 环的充要条件是对 R 的任何真理想 I, $\mathrm{Jac}(R/I)$ 是诣零理想.

Proof. 必要性: 如果 R 是 Jacobson 环, 那么对 R 的任何真理想 I, 商环 R/I 也是 Jacobson 环, 因此 $\mathrm{Jac}(R/I)$ 诣零. 充分性: 对任何素理想 P, R/P 是素右 Goldie 环, 故没有非零诣零理想, 这迫使 $\mathrm{Jac}(R/P)=0$. □

Remark 3.7. 一般地, 对交换 Noether 代数 R, 即便 $\mathrm{Jac}R$ 是诣零理想也未必能保证 R 关于素理想 P 的商环 R/P 满足 $\mathrm{Jac}(R/P)$ 诣零. 例如取 S 是域上形式幂级数环 $\Bbbk[[x]]$, 它是交换 Noether 局部整环, 唯一的极大理想 $\mathfrak{m}=(x)$ 每个非零元都不是幂零元. 根据 Amitsur 定理, 没有非零诣零理想的含幺环上的一元多项式环半本原, 所以 $R=S[x]$ 是交换 Noether 半本原环. 故 $\mathrm{Jac}R=0$, 但是 $S\cong R/(x)$ 有不诣零的 Jacobson 根.

本节的主要目标是证明域上的仿射 PI 代数满足零点定理且是 Jacobson 环. 为此, 我们需要:

Lemma 3.8. 设 R 是含幺环, $a\in R$, 那么 a 是幂零元当且仅当 $(1-ax)R[x]=R[x]$.

Proof. 如果 a 是幂零元, 设 $a^{n+1}=0$, 进而 $(1-ax)(1+ax+a^2x^2+\cdots+a^nx^n)=1$, 必要性得证. 假设有多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 使得 $(1-ax)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=1$, 直接计算得到 $a_0=1,a_1=a,...,a_n=a^n,aa_n=0$, 所以 $a^{n+1}=0$. 类似地容易验证 a 是幂零元当且仅当 $R[x](1-ax)=R[x]$. □

Proposition 3.9 ([2]). 设 $\Bbbk$-代数 A 满足任何不可约左 $A[x]$-模自同态环在 $\Bbbk$ 上代数, 则 A 满足零点定理.

Proof. 此时 $A\cong A[x]/(x)$ 以及 A 的任何商代数 A/I 也满足任何不可约模在 $\Bbbk$ 上代数. 用 A/I 替换 A 知只需验证 $\mathrm{Jac}A$ 是诣零理想. 任取 $a\in\mathrm{Jac}A$, 假设 a 不是幂零元, 那么 $A[x](1-ax)\neq A[x]$, 取 $A[x]$ 的一个包含 $1-ax$ 的极大左理想 M, 那么 $A[x]/M$ 作为不可约左 $A[x]$-模在 $\Bbbk$ 上代数. 考察 $x\in A[x]$ 决定的左乘变换 $\theta=x_l\in\mathrm{End}_{A[x]}(A[x]/M)$, 那么 $\theta\neq 0$, 所以由 Schur 引理知 θ^{-1} 存在. 于是 θ^{-1} 满足 $\Bbbk$ 上某个首一多项式, 故存在 $g(x)\in\Bbbk[x]$ 使得 $\theta=g(\theta^{-1})$, 进而由 $\theta^{-1}(1+M)=a+M$ 可知 $g(a)+M=x+M$, 所以 $(1-g(a)a)x+M=0$, 而 $1-g(a)x$ 在 R 中可逆, 矛盾. □

Corollary 3.10 ([2]). 设 $\Bbbk$-代数 A 是仿射 PI 代数, 那么:
(1) 任何不可约左 A-模是有限维模;

(2) A 满足零点定理, 进而也是 Jacobson 环;
(3) 若进一步 A 是 Artin 的, 则 A 是有限维代数.

Proof. (1) 任取不可约左 A-模 M, 那么 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 是本原 PI 代数, 用 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 替换 A 可不妨设 A 是本原的. 由 Kaplansky 定理知本原 PI 代数是其中心 $Z(A)$ 上的有限维中心单代数. 对代数扩链 $\Bbbk \subseteq Z(A) \subseteq A$ 应用 Artin-Tate 引理可得 $Z(A)$ 是 $\Bbbk$ 上仿射代数. 注意到此时 $Z(A)$ 是域, 所以 Zariski 引理保证了 $Z(A)$ 是有限维代数, 从而 A 是有限维代数 (注意这是在 A 本原的假定下), 从而 M 是有限维模.

(2) 这时 $A[x]$ 作为 A 的中心扩张仍是仿射 PI 代数, 进而 [命题3.9] 保证了 A 满足零点定理. 特别地, A 满足根性质, 因为 A 是 PI 代数, 所以由 [命题3.6] 得到 A 是 Jacobson 环.

(3) 此时 ${}_AA$ 作为既 Noether 又 Artin 的左 A-模存在合成列, 通过 (1) 知道 ${}_AA$ 的每个合成因子是有限维模, 从而 A 也是有限维的. □

Remark 3.11. 交换代数中的经典结论是域上交换代数是 Artin 的当且仅当是有限维代数. 该推论说对仿射 PI 代数, 它是 Artin 的当且仅当它是有限维代数. 如果 $\Bbbk$ 是代数闭域且 A 是素仿射 PI 代数, 那么根据上述推论第一个结论的证明过程, 任何不可约左 A-模 M 的线性维数不超过 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 的维数. 本原 PI 代数 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 的 PI 次数不超过 A 的 PI 次数, 所以 $\overline{A} = A/\mathrm{Ann}_A M$ 作为其中心 $\overline{Z}$ 上的中心单代数维数不超过 $(\text{PI-deg}A)^2$. 因为 $\overline{A}$ 也是仿射 $\Bbbk$-代数, 所以利用 Artin-Tate 引理得到 $\overline{Z}$ 是 $\Bbbk$ 上仿射代数. 而 $\overline{Z}$ 是域, 所以 Zariski 引理保证了 $\overline{Z} \supseteq \Bbbk$ 是有限扩张, 结合 $\Bbbk$ 是代数闭域迫使 $\overline{Z} = \Bbbk$. 进而知

$$\dim_{\Bbbk} M \leq \dim_{\Bbbk} \overline{A} = \dim_{\overline{Z}} \overline{A} \leq (\text{PI-deg}A)^2.$$

因此代数闭域上素仿射 PI 代数 A 上的不可约模维数都被 $(\text{PI-deg}A)^2$ 控制. 我们可以把不可约表示维数上界作进一步改进. 因为 $\overline{A}$ 是 $\Bbbk$ 上有限维代数, 故由 Artin 单环结构定理以及 $\Bbbk$ 是代数闭域可知存在正整数 d 使得 $\overline{A} \cong \mathrm{M}_d(\Bbbk)$. 因此 $d \leq \text{PI-deg}A$, 从而 $\dim_{\Bbbk} M \leq \text{PI-deg}A$. 所以代数闭域上素仿射 PI 代数的任何不可约表示维数不超过该代数的 PI 次数.

Remark 3.12. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 通常称代数同态 $\chi : A \to \Bbbk$ 为 A 上**可乘线性泛函**, 记 A 上可乘线性泛函全体为 $\mathcal{M}(A)$. 根据 Zariski 引理, 如果 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上交换仿射代数, 则 $\theta : \mathcal{M}(A) \to \mathrm{maxSpec}A, \chi \mapsto \mathrm{Ker}\chi$ 是满射. 下面说明 θ 也是单射. 如果 $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{M}(A)$ 满足 $\mathrm{Ker}\chi_1 = \mathrm{Ker}\chi_2$, 记 $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}\chi_1$ 为公共的极大理想, 那么对每个 $a \in A$, 存在唯一的 $\alpha \in \Bbbk$ 使得 $a - \alpha 1 \in \mathfrak{m}$, 进而知 $\chi_1(a) = \chi_2(a) = \alpha$. 所以 θ 是双射, 它给出了 A 上可乘线性泛函全体与极大谱间的双射.

3.3 模有限代数

在 [命题2.23] 中我们看到模有限代数是特殊的 PI 代数. 除了有限维代数外, 模有限代数包含了许多单位根处的量子群. 例如单位根 $q \in \Bbbk^*$ 处量子仿射 n-空间 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 就是模有限代数 (见 [例2.27]). 任何正特征的域上的 Weyl 代数都是模有限代数 (见 [例2.28]), 并且在中心上是有限生成自由模.

下面我们来讨论模有限代数的素谱性质, 首先一个基本的观察是:

Lemma 3.13 ([2])**.** 设 R 是含幺环, Z 是 R 的中心子环 (即含幺子环 $Z \subseteq Z(R)$). 如果 R_Z 是有限生成模, 那么 R 是 Z 上仿射代数且 R 中任何元素是 Z 上整元 (即满足 Z 上某个首一多项式). 如果 $\mathfrak{p}$ 是 Z 的理想, P 是 $\mathfrak{p}$ 在 R 中生成的理想, 则对任何 $p \in P$, 存在 $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathfrak{p}$ 使得 $p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$.

Proof. 首先回忆交换代数中的一个经典结果是对含幺交换环 Z 上任何有限生成模 M 以及理想 I, 如果 $\varphi \in \mathrm{End}_Z M$ 满足 $\varphi(M) \subseteq IM$, 那么存在正整数 n 和 $a_0, ..., a_{n-1} \in I$ 使得 $\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 \mathrm{id}_M = 0$(这通过取定 M 的有限生成元集利用 Cayley-Hamilton 定理不难得到). 现在回到该引理的证明. R_Z 是有限生成模已经说明了 R 作为 Z-代数的仿射性. 因此只需验证 R 中任何元素 b 满足 Z 上某个首一多项式. 考虑左乘变换 $\varphi = b_l : R \to R, x \mapsto bx$, 则 $\varphi \in \mathrm{End}_Z R$. 在上述结果中取 $I = Z$, 则存在 Z 上首一多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in Z[x]$ 使得 $\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 \mathrm{id}_R = 0$. 即 $(b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0)R = 0$. 因此 $f(b) = 0$. 类似地, 注意到 $pR \subseteq \mathfrak{p}R$, 同理可证第二个结论. $\square$

如果含幺环 R 有中心子环 Z, 那么标准嵌入 $j : Z \to R$ 诱导出连续映射 $\varphi : \mathrm{Spec}R \to \mathrm{Spec}Z, P \mapsto P \cap Z$: 任取 R 的素理想 P, 如果 $a, b \in Z$ 满足 $ab \in P \cap Z$, 那么 $aRb \subseteq P$, 从而 a 与 b 中至少有一个在 P 中, 这说明 $P \cap Z$ 是 Z 的素理想. $\mathrm{Spec}Z$ 的任何闭子集形如 $V(\mathfrak{b})$, 其中 $\mathfrak{b}$ 是 Z 的理想. 若记 $\mathfrak{b}$ 在 R 中生成的理想是 B, 易验证 $V(B) = \varphi^{-1}(V(\mathfrak{b}))$, 这说明 $\varphi : \mathrm{Spec}R \to \mathrm{Spec}Z$ 是连续映射.

Proposition 3.14 ([25])**.** 设 R 是含幺环, Z 是 R 的中心子环满足 R_Z 是有限生成模, $\varphi : \mathrm{Spec}R \to \mathrm{Spec}Z$ 是标准嵌入 $j : Z \to R$ 诱导出的连续映射, 那么

(1) 对任给 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}Z$, 存在 $P \in \mathrm{Spec}R$ 使得 $P \cap Z = \mathfrak{p}$, 即映射 φ 是满射.

(2) 如果 R 的素理想和 Z 的素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $P \cap Z = \mathfrak{p}$, 则对任何 Z 的素理想 $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$, 存在 R 的素理想 $Q \supseteq P$ 使得 $Q \cap Z = \mathfrak{q}$. 即 Going-up 性质成立.

(3) 如果 R 的素理想 P, Q 满足 $P \subsetneq Q$, 那么 $P \cap Z \subsetneq Q \cap Z$.

(4) 如果 P 是 R 的本原理想 (就是极大理想), 那么 $P \cap Z$ 是 Z 的极大理想.

(5) 如果 R 的素理想 P 满足 $P \cap Z$ 是 Z 的极大理想, 那么 P 是极大理想.

(6) 若记 R, Z 的 Jacobson 根为 $\mathrm{Jac}R, \mathrm{Jac}Z$, 那么 $\mathrm{Jac}Z = Z \cap \mathrm{Jac}R$ 且 $N(Z) = Z \cap N(R)$.

(7) 固定 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}Z$, 则 $R_\mathfrak{p}$ 的极大谱是 $\{Q_\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R_\mathfrak{p} | Q \in \mathrm{Spec}R, Q \cap Z = \mathfrak{p}\}$, 与 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 等势.

(8) 固定 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}Z$, 则 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 与 $\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p}/(\mathfrak{p}R)_\mathfrak{p})$ 间有自然双射且 $R_\mathfrak{p}/(\mathfrak{p}R)_\mathfrak{p}$ 是 Artin 环, 因此 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 是有限集. 若进一步设 ${}_Z R$ 可由 t 个元素生成, 那么 $|\varphi^{-1}(\mathfrak{p})| \leq t$.

Proof. (1) 根据 [引理3.13], 任何 $b \in \mathfrak{p}R$ 满足存在 $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathfrak{p}$ 使得 $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = 0$, 所以 $b^n \in \mathfrak{p}$. 因此 $\mathfrak{p}R \cap Z = \mathfrak{p}$. 这说明 $\mathcal{S} = \{I \subseteq R | I\text{为}R\text{的理想且满足}I \cap Z = \mathfrak{p}\}$ 是关于包含关系的非空偏序集. 易验证 $(\mathcal{S}, \subseteq)$ 的任何全序子集有上界, 所以 Zorn 引理保证了 $\mathcal{S}$ 中有极大元 P, P 满足 $P \cap Z = \mathfrak{p}$. 下面验证 P 是 R 的素理想. 假设存在 $a \in R - P, b \in R - P$ 满足 $aRb \subseteq P$, 那么 P 的极大性保证了 $(a) + P$ 与 $(b) + P$ 都含有 $Z - \mathfrak{p}$ 内的元素. 设 $x \in (a) + P, y \in (b) + P$ 满足 $x, y \in Z - \mathfrak{p}$, 那么 $xy \in Z - \mathfrak{p}$, 从而 $xy \notin P$. 这与 $xy \in P$ 矛盾. 因此 P 是 R 的素理想且 $P \cap Z = \mathfrak{p}$.

(2) 这时 $Z/\mathfrak{p}$ 是 R/P 的中心子代数且 R/P 是有限生成 $Z/(Z \cap P)$-模. 应用 (1) 的结果可知 $Z/Z \cap P$ 的素理想 $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ 关于连续映射 $\varphi : \mathrm{Spec}(R/P) \to \mathrm{Spec}(Z/\mathfrak{p})$ 有原像. 取 R 的素理想 $Q \supseteq P$ 使得 $\varphi(Q/P) = \mathfrak{q}/\mathfrak{p}$. 那么可直接验证 $Q \cap Z = \mathfrak{q}$, 因此 $Q \supseteq P$ 便是满足条件的素理想.

(3) 通过用 R/P 替换 R, $Z/\mathfrak{p}$ 替换 Z, 可不妨设 $P = 0$, 这时 $P \cap Z = 0$. 因此只需验证 R 的任何非零素理想 Q 满足 $Q \cap Z \neq 0$ 即可. 因为这时 R 是素 PI 环, 所以 [定理2.66] 保证了 $Q \cap Z(R) \neq 0$(注意 Z 是 $Z(R)$ 的子环), 取 $c \neq 0 \in Q \cap Z(R)$, 由 R 是素环知 c 是正则元, 所以 c 在 Z 上满足的最小多项式 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in Z[x]$ 满足 $a_0 \neq 0$, 于是 $a_0 \neq 0 \in Q \cap Z$.

(4) 这时 R/P 是本原 PI 环, 有中心子环 $Z/(P\cap Z)$, 根据 Kaplansky 定理, $Z(R/P)$ 是域, 所以 $Z(R/P)$ 作为 $Z/(P\cap Z)$ 的整扩张保证了 $Z/(P\cap Z)$ 也是域. 这说明 $P\cap Z$ 是 Z 的极大理想.

(5) 通过 (3) 立即可知 $P\cap Z$ 是极大理想迫使 P 是 R 的极大理想.

(6) 将 $\mathrm{Jac}R$ 表示为 R 所有本原理想之交, 由 (4) 得到 $\mathrm{Jac}Z\subseteq Z\cap\mathrm{Jac}R$. 将 $\mathrm{Jac}Z$ 表示为 Z 所有极大理想之交, 由 (1) 和 (5) 得到 $\mathrm{Jac}Z\supseteq Z\cap\mathrm{Jac}R$. 因此 $\mathrm{Jac}Z=Z\cap\mathrm{Jac}R$. 类似地可验证 $N(Z)=Z\cap N(R)$.

(7) 通过下面的 [命题3.16] 可知 $\mathrm{Spec}R_{\mathfrak{p}}$ 与 $\{Q\in\mathrm{Spec}R|Q\cap(Z-\mathfrak{p})=\varnothing\}$ 间有标准双射. 而 $Q\cap(Z-\mathfrak{p})=\varnothing$ 等价于 $Q\cap Z\subseteq\mathfrak{p}$, 所以 (3) 蕴含 $\{Q_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Spec}R_{\mathfrak{p}}|Q\in\mathrm{Spec}R,Q\cap Z=\mathfrak{p}\}$ 中任何素理想是 $R_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想. 任取 $R_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想 $Q_{\mathfrak{p}}$, 这里 Q 是满足 $Q\cap Z\subseteq\mathfrak{p}$ 的素理想, 下证 $Q\cap Z=\mathfrak{p}$. 如果 $Q\cap Z\subsetneq\mathfrak{p}$, 通过 (2), 存在 R 的素理想 $T\supsetneq Q$ 使得 $T\cap Z=\mathfrak{p}$. 进而 $T_{\mathfrak{p}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$ 中真包含 $Q_{\mathfrak{p}}$ 的理想, 这与 $Q_{\mathfrak{p}}$ 是极大理想矛盾.

(8) 根据 [命题3.14(7)], $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 与 $R_{\mathfrak{p}}$ 的极大谱 $\{Q_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Spec}R_{\mathfrak{p}}|Q\in\mathrm{Spec}R,Q\cap Z=\mathfrak{p}\}$ 等势. 并且有

$$\{Q_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Spec}R_{\mathfrak{p}}|Q\in\mathrm{Spec}R,Q\cap Z=\mathfrak{p}\}=\{Q_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Spec}R_{\mathfrak{p}}|Q\in\mathrm{Spec}R,Q\cap(Z-\mathfrak{p})=\varnothing,Q\supseteq R\mathfrak{p}\}.$$

而 [命题3.14(3)] 表明对任何 R 不同的素理想 P,Q 如果 $P\cap Z=Q\cap Z=\mathfrak{p}$, 那么 $P\nsubseteq Q$ 或 $Q\nsubseteq P$. 因此 $R_{\mathfrak{p}}$ 的极大谱与 $\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}})$ 间有双射. 在 (1) 中我们看到 $\mathfrak{p}R\cap Z=\mathfrak{p}$, 因此域 $Z_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$ 的中心子环且 $R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$ 是域 $Z_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ 上有限维线性空间. 因此由有限维代数的素理想数目不超过其线性维数 (见 [引理3.17]) 可知 $|\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}})|\leq\dim_{Z_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}}R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$. 于是当 ${}_ZR$ 可由 t 个元素生成时, $|\varphi^{-1}(\mathfrak{p})|\leq t$. □

Remark 3.15. 该命题表明要研究 R 上的不可约模只需研究所有 $R/\mathfrak{m}R$ 上的不可约模, 其中 $\mathfrak{m}$ 遍历中心子环 Z 的极大理想. 原因是 [推论2.57] 让我们看到 R 上任意两个不可约模 M,N 同构的充要条件是 $\mathrm{Ann}_RM=\mathrm{Ann}_RN$. 记本原理想 Ann_RM 与 Z 之交是 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 则 R 上的每个不可约模 M 都给出 $R/\mathfrak{m}R$ 上的不可约模 M. 反之, 取定 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 每个 $R/\mathfrak{m}R$ 上的不可约模 M 自然是 R 上的不可约模. 并注意到对任给 Z 的两个极大理想 $\mathfrak{m},\mathfrak{m}'$, 只要 $\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}'$, 那么 $R/\mathfrak{m}R$ 上任何不可约模 M 与 $R/\mathfrak{m}'R$ 上任何不可约模 M' 作为不可约 R-模必不同构. 对 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, $R/\mathfrak{m}R$ 所产生的不可约 R-模的零化子在 $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ 中.

Proposition 3.16 ([25])**.** 设 R 是含幺环, 若乘闭子集 $S\subseteq Z(R)$, 那么有双射

$$\varphi:\{P\in\mathrm{Spec}R|P\cap S=\varnothing\}\to\mathrm{Spec}R_S,P\mapsto P_S,$$

其中 $P_S=\{\lambda(p)\lambda(s)^{-1}|p\in P,s\in S\}$, 这里 $\lambda:R\to R_S$ 是局部化映射. φ 的逆映射将每个 R_S 的素理想 $\mathfrak{q}$ 映至 $\{a\in R|\text{存在}s\in S\text{使得}\lambda(a)\lambda(s)^{-1}\in\mathfrak{q}\}$. 如果赋予 $\{P\in\mathrm{Spec}R|P\cap S=\varnothing\}$ 素谱 $\mathrm{Spec}R$ 上 Zariski 拓扑的子空间拓扑、$\mathrm{Spec}R_S$ 上 Zariski 拓扑, 则双射 φ 给出同胚.

Proof. 任取 R 的素理想 P, 并设 $P\cap S=\varnothing$. 易验证 P_S 是 R_S 的理想, 下证 P_S 是真理想. 如果存在 $p\in P,s\in S$ 使得 $\lambda(1)=\lambda(p)\lambda(s)^{-1}$, 那么存在 $u\in S$ 使得 $(p-s)u=0$. 进而 $us\in P$, 这和 $P\cap S=\varnothing$ 矛盾. 再说明 P_S 是 R_S 的素理想. 任何 R_S 中理想都具备 I_S 的形式, 这里 I 是 R 的理想, 所以只需验证若 R 的理想 I,J 满足 $I_SJ_S\subseteq P_S$, 则 $IJ\subseteq P$ 即可. 利用 $S\subseteq Z(R)$ 易验证任何 $a\in IJ$ 满足存在 $s\in S$ 使得 $as\in P$. 于是 $aRs\subseteq P$, 因此 P 是素理想以及 $s\notin P$ 蕴含 $a\in P$, 这说明 $IJ\subseteq P$. 以上讨论表明 φ 是定义合理的映射. 如果 R 的素理想 P,Q 满足均与 S 不相交以及 $P_S=Q_S$, 那么易验证任何 $p\in P$ 满足存在 $u\in S$ 使得 $pu\in Q$, 类似前面的讨论由 $pRu\subseteq Q$ 得到 $p\in Q$. 于是 $P\subseteq Q$, 类似可验证 $Q\subseteq P$, 因此 φ 是单射. 任取 R_S 的素理想 $\mathfrak{q}$, 定义 $Q=\{a\in R|\text{存在}s\in S\text{使得}\lambda(a)\lambda(s)^{-1}\in\mathfrak{q}\}$, 那么 Q 是 R 的理想且 $Q_S=\mathfrak{q}$. 通过 $\mathfrak{q}$ 是真理

想易见 $Q\cap S=\varnothing$. 如果 R 的理想 I,J 满足 $IJ\subseteq Q$, 则 $I_SJ_S\subseteq Q_S=\mathfrak{q}$. 故 $I_S\subseteq Q_S$ 或 $J_S\subseteq Q_S$. 不妨设 $I_S\subseteq Q_S=\mathfrak{q}$, 那么根据 Q 的定义得到 $I\subseteq Q$. 所以 Q 是素理想, 这说明 φ 是单射.

最后说明 φ 是同胚. 任何 $\mathrm{Spec}R_S$ 中闭集形如 $V(I_S)$ 的形式, I 是 R 的理想. 不妨设 $I\cap S=\varnothing$, 那么可直接验证 $\varphi^{-1}(V(I_S))=V(I)\cap\{P\in\mathrm{Spec}R|P\cap S=\varnothing\}$, 所以 φ 是连续映射. 再说明 φ 是闭映射. 不妨设 I 是 R 的与 S 不相交的理想, 则有 $\varphi(V(I)\cap\{P\in\mathrm{Spec}R|P\cap S=\varnothing\})=V(I_S)$, 因此 φ 是闭映射. □

Lemma 3.17. 设 $\Bbbk$ 是域, 那么对任何有限维 $\Bbbk$-代数 A, $|\mathrm{Spec}A|\leq\dim_{\Bbbk}A$.

Proof. 首先回忆任给左 Artin 环 R, 若 $\mathrm{Jac}R$ 为 R 的 Jacobson 根, 那么 R 的任何极大理想都包含 $\mathrm{Jac}R$, 由此不难看出 R 的极大谱与 Artin 半单环 $\overline{R}=R/\mathrm{Jac}R$ 的极大谱间有双射. 根据 Wedderburn-Artin 定理, $\overline{R}$ 可分解为有限多个 Artin 单环 R_k 的积：$\overline{R}\cong R_1\times R_2\times\cdots\times R_m$. 因此 $\overline{R}$ 的极大理想数目恰好 m 个. 现取 $R=A$ 是域 $\Bbbk$ 上有限维代数, 那么 m 自然不超过 $R/\mathrm{Jac}R$ 的 $\Bbbk$-线性维数. 因此 A 的极大理想数目不超过 $\dim_{\Bbbk}A$. 故 A 的素谱、极大谱以及本原素谱的元素数目都不超过 A 的线性维数. □

Remark 3.18. 该引理也告诉我们有限维 $\Bbbk$-代数 A 的不可约表示等价类数目不超过 $\dim_{\Bbbk}A$.

总结一下, 如果 R 是某个中心子环 Z 上的有限生成模, 那么有天然的满连续映射 $\varphi:\mathrm{Spec}R\to\mathrm{Spec}Z, P\mapsto P\cap Z$. 对每个 $P\in\mathrm{Spec}R$, P 是 R 的极大理想当且仅当 $\varphi(P)=P\cap Z$ 是 Z 的极大理想. 因此 Z 的极大理想可将 R 的极大谱 (也是本原素谱) 划分为若干不相交的纤维, 并且每个纤维都是有限集.

$$\mathrm{maxSpec}R=\bigcup_{\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}Z}\varphi^{-1}(\mathfrak{m}).$$

对固定的 $\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}Z$, 易见 $R/\mathfrak{m}R$ 是域 $Z/\mathfrak{m}$ 上有限维代数且 $R/\mathfrak{m}R$ 上不可约模同构类全体与

$$\{R\text{上零化子在}\varphi^{-1}(\mathfrak{m})\text{中的不可约模同构类}\}=\{R\text{上可以被}\mathfrak{m}\text{零化的不可约模同构类}\}$$

间有自然的双射, 因此 $R/\mathfrak{m}R$ 上不可约模同构类数目就是 $|\varphi^{-1}(\mathfrak{m})|$, 它不超过 R 作为有限生成 Z-模的生成元数目. 若进一步假设 R 是域 $\Bbbk$ 上仿射代数, 下面的 [引理3.19] 表明 $R/\mathfrak{m}R$ 是 $\Bbbk$ 上有限维代数. 于是研究 R 的不可约表示可转化为研究所有形如 $R/\mathfrak{m}R$($\mathfrak{m}$ 遍历 Z 的极大理想) 的有限维代数的不可约表示.

Lemma 3.19. 当 R 是域上仿射模有限代数时, 对 Z 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$ 都有 $R/\mathfrak{m}R$ 是有限维代数.

Proof. 在 [推论3.10] 中我们已经看到域上仿射本原 PI 代数都是有限维的. 对 R 模有限的中心子代数 Z 以及 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 取 R 的极大理想 P 使得 $P\cap Z=\mathfrak{m}$. 那么 $Z/\mathfrak{m}$ 与 R/P 都是有限维代数. 注意到 $R/\mathfrak{m}R$ 是有限维代数 $Z/\mathfrak{m}$ 上的有限生成模, 所以 $R/\mathfrak{m}R$ 也是有限维代数. □

设 R 是中心子环 Z 上有限生成模, 取定 $\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}Z$, 那么有标准双射 $\theta:\{Q\in\mathrm{maxSpec}R|Q\cap Z=\mathfrak{m}\}\to\mathrm{maxSpec}R_{\mathfrak{m}}, Q\mapsto Q_{\mathfrak{m}}$. 若记 $\varphi:\mathrm{Spec}R\to\mathrm{Spec}Z, P\mapsto P\cap Z$ 是素谱间的标准连续映射, 那么有 $\{Q\in\mathrm{maxSpec}R|Q\cap Z=\mathfrak{m}\}=\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$. 记含幺环 S 上不可约模同构类集为 $\mathrm{Irr}(S)$. 那么根据前面的讨论, 有标准双射 $\eta:\{[{}_RM]\in\mathrm{Irr}(R)|\mathfrak{m}M=0\}\to\mathrm{maxSpec}R_{\mathfrak{m}}, [M]\mapsto(\mathrm{Ann}_RM)_{\mathfrak{m}}$. 注意到 $R_{\mathfrak{m}}$ 是中心子代数 $Z_{\mathfrak{m}}$ 上的有限生成模, 因此有标准同构 $\xi:\mathrm{Irr}(R_{\mathfrak{m}})\to\mathrm{maxSpec}R_{\mathfrak{m}}, [{}_{R_{\mathfrak{m}}}X]\mapsto\mathrm{Ann}_{R_{\mathfrak{m}}}X$. 现在任取不可约左 R-模 M 满足 $\mathfrak{m}M=0$, 简记 Ann_RM 为 Q. 那么 $M_{\mathfrak{m}}$ 作为 $R_{\mathfrak{m}}$ 上的模零化子包含 $Q_{\mathfrak{m}}$. 下证 $M_{\mathfrak{m}}\neq0$, 进而可知 $\mathrm{Ann}_{R_{\mathfrak{m}}}M_{\mathfrak{m}}=Q_{\mathfrak{m}}$. 设 $M=Rx$, 假设 $x1^{-1}\in M_{\mathfrak{m}}$ 为零, 那么存在 $s\in Z-\mathfrak{m}$ 使得 $sx=0$, 于是 $sRx=0$ 迫使 $s\in Q$. 结合 $s\in Z$ 可知 $s\in\mathfrak{m}$, 矛盾. 因此 $M_{\mathfrak{m}}\neq0$. 那么下面的引理保证了 $M_{\mathfrak{m}}$ 是不可约 $R_{\mathfrak{m}}$-模.

Lemma 3.20. 设含幺环 R 有中心乘闭子集 S, 若不可约 R-模 M 满足 $M_S \neq 0$, 那么 M_S 是不可约 R_S-模.

Proof. 任取 M_S 的非零 R_S-子模 X, 定义 $N = \{x \in M | 存在s \in S使得xs^{-1} \in X\}$, 那么 N 是 M 的非零 R-子模, 故 $N = M$, 进而 $X = M_S$. 因此 M_S 是不可约 R_S-模. □

Remark 3.21. 有可能产生 $M_S = 0$ 的情况, 例如考虑 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在素理想 $3\mathbb{Z}$ 处作局部化.

通过局部化函子立即得到定义合理的映射 $\psi : \{[_RM] \in \mathrm{Irr}(R) | \mathfrak{m}M = 0\} \to \mathrm{Irr}(R_\mathfrak{m}), [_RM] \mapsto [M_\mathfrak{m}]$. 注意到对不可约 R-模 M, 若记 $Q = \mathrm{Ann}_R M$, 那么 $Q_\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}$, 所以有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\{Q \in \mathrm{maxSpec}R | Q \cap Z = \mathfrak{m}\} \arrow[r, "\theta"] & \mathrm{maxSpec}R_\mathfrak{m} \\
\{[_RM] \in \mathrm{Irr}(R) | \mathfrak{m}M = 0\} \arrow[r, "\psi"] \arrow[u] & \mathrm{Irr}(R_\mathfrak{m}) \arrow[u, "\xi"']
\end{tikzcd}$$

因此 $\psi : \{[_RM] \in \mathrm{Irr}(R) | \mathfrak{m}M = 0\} \to \mathrm{Irr}(R_\mathfrak{m}), [_RM] \mapsto [M_\mathfrak{m}]$ 也是双射. 注意到 $Z_\mathfrak{m}$ 是局部环 (如果 R 进一步是域上仿射代数, 那么 Z 也是仿射的, 进而 $Z_\mathfrak{m}$ 是交换 Noether 局部环), 因此研究 R 的不可约表示也可以拆分为对每个 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}Z$, 研究 $R_\mathfrak{m}$(在其中心子代数 $Z_\mathfrak{m}$ 上是有限生成模) 的不可约表示, $R_\mathfrak{m}$ 的不可约模同构类 $\mathrm{Irr}(R_\mathfrak{m})$ 对应于 $\mathrm{Irr}(R)$ 中能够被 $\mathfrak{m}$ 零化的不可约模同构类构成的子集.

参考文献

[1] Ken A. Brown, Ken R. Goodearl, Lectures on Algebraic Quantum Groups, Springer Basel AG(2002).

[2] J. C. McConnell, J. C. Robson, Noncommutative Noetherian Rings, American Mathematical Society(1987).

[3] Michael Artin, Noncommutative Rings, class notes(1999).

[4] Vesselin Drensky, Edward Formanek, Polynomial Identity Rings, Springer Basel AG(2004).

[5] M. Dehn, Uber die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme, Math. Ann. 85 (1922), 184-193.

[6] Amitsur, S.A. Polynomial identities. Israel J. Math. 19(1974), 183-199.

[7] M. Hall, Projective planes, Trans. Amer. Math. Soc. 54(1943), 229-277.

[8] I. Kaplansky, Rings with a polunomial identity, Bull. Amer. Math. Soc. 54(1948),575-580.

[9] J. Levitzki, A theorem on polynomial identities, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 334-34l.

[10] S.A. Amitsur, J. Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 2(1950),449-463.

[11] S.A. Amitsur, The identities of PI-rings, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 27-34.

[12] S.A. Amitsur, Radicals of polynomial rings, Canadian J. Math. 8 (1956), 355-361.

[13] E.C. Posner, Prime rings satisfying a polynomial identity, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 180-184.

[14] E. Formanek, Central polynomials for matrix rings, J. Algebra 23 (1972), 129-132.

[15] On a problem of Kaplansky, Izv. Akad. Nauk SSSR 37 (1973), 483-501.

[16] L. H. Rowen, Some results on the center of a ring with polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 219-223.

[17] S. Rosset, A new proof of the Amitsur-Levitski identity, Israel J. Math. 23 (1976), 187-188.

[18] W. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme, Math. Z. 113 (1937), 528-567.

[19] Darij Grinberg, Notes on the combinatorial fundamentals of algebra(2022).

[20] Nathan Jacobson, Basic Algebra II, Dover Publications(1980).

[21] I. N. Herstein, Noncommutative Rings, The Mathematical Association of America(2005).

[22] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company(1969).

[23] R. S. Irving, Affine PI algebras not embeddable in matrix rings, J. Algebra 82 (1983), 94-101.

[24] A. V. Jategaonkar, Jacobson's conjecture and modules over fully bounded Noetherian rings, J. Algebra 30 (1974), 103-121.

[25] Wu Quanshui, Zhu Ruipeng, Derived equivalences for a class of PI algebras, Algebr. Represent. Theory 26 (2023), 753–762.