Morita 等价

戚天成

复旦大学 数学科学学院

2023 年 7 月 28 日

这份文件主要介绍模论中的 Morita 等价理论. 正如群表示论一样, 认识一个复杂抽象的数学对象的经典思想是通过把该数学对象表示为更简单熟悉的数学对象加以研究. 关于环, 我们也有环的表示——把环相容地作用到一个 Abel 群上, 便有了模的概念. 通过研究模来认识环无疑是有力的方法, 例如 N. Jacobson(美国, 1910-1999) 通过把模的观点带进环论建立了他的本原环理论, 其中的稠密性定理可以直接得到 Artin 单环结构定理. 并将原有的 Wedderburn-Artin 定理加以扩充. 可以说研究一个环的表示就是在研究这个环上的模范畴. 对两个含幺环 R, R', 作为环, 我们当然可以通过研究它们之间的保幺环同态全体 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, R')$ 来知道它们之间的联系, 但很明显对一般的两个环, 我们很难对它们之间的环同态说更多. K. Morita 提供了全新的思路：任何含幺环 R 都可以视作自身上的模, 所以环的结构信息当然可以从其模范畴中导出, 那么如果能够搞清楚模范畴 Mod-R 和 Mod-R' 之间的关系, 不就能够从更宽广的世界认识 R, R' 间的联系? Morita 等价理论就是要搞清楚 Mod-R 和 Mod-R' 何时范畴等价? 如果范畴等价, 这两个范畴间的等价函子在自然同构意义下如何实现? 模范畴函子 Mod-R 上的自等价函子长什么样? 下面我们来进入 Morita 的世界. 如无特别说明, 模范畴间的函子默认是共变加性的.

目录

1 Morita 等价

1.1 等价函子

本节我们回忆一下范畴等价的定义以及函子等价性之刻画.

Definition 1.1 (范畴等价)**.** 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是范畴, 如果 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 以及 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 满足自然等价 $FG\cong 1_{\mathcal{D}}, GF\cong 1_{\mathcal{C}}$, 则称 F,G 是范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 间的一对**等价函子**. 这时称范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 等价, 记作 $\mathcal{C}\cong\mathcal{D}$.

Lemma 1.2. 范畴的等价具有自反性、对称性和传递性.

Corollary 1.3. 设 R,S 是含幺环, 则 Mod-$R\cong$ Mod-S 的充要条件是 R^{op}-Mod $\cong S^{op}$-Mod.

关于等价函子我们有下述判别条件.

Proposition 1.4. 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是范畴, $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是函子. 那么存在函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 使得 F,G 是一对等价函子的充要条件是 F 是忠实的满函子且对任给 $A'\in\mathrm{ob}\mathcal{D}$, 存在对象 $A\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$ 以及使得 $A'\cong FA$.

Proof. 接下来用不到充分性, 所以这里仅验证必要性. 如果共变函子 F,G 是一对等价函子, 那么存在自然同构

$$\eta:\mathrm{ob}\mathcal{C}\to\bigcup_{A\in\mathrm{ob}\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,GFA)$$
$$A\mapsto\eta_A:A\to GFA$$

因为对任给态 $f:A\to B$ 有下图交换：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & GFA \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GFf} \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & GFB \end{array}$$

所以 $GFf=\eta_B f\eta_A^{-1}$. 因此如果态 $f_1,f_2:A\to B$ 满足 $Ff_1=Ff_2$, 那么 $GFf_1=GFf_2$, 于是 $f_1=f_2$, 这表明函子 F 是忠实的, 同理可知 G 也是忠实函子. 对任给态 $g:FA\to FB$, 因为态 $Gg:GFA\to GFB$ 满足 $Gg=GF(\eta_B^{-1}G(g)\eta_A)$, 所以由 G 的忠实性知 $g=F(\eta_B^{-1}G(g)\eta_A)$, 进而得到 F 是满函子. 任给 $A'\in\mathrm{ob}\mathcal{D}$, 因为 $A'\cong FGA'$, 故取 $A=GA'$ 知 $A'\cong FA$. □

1.2 Morita Context

本节介绍 Morita Context 的概念, 它是 Morita 等价理论的主要研究对象.

Definition 1.5 (Morita Context)**.** 设 R,R' 是含幺环, ${}_{R'}M_R, {}_RM'_{R'}$ 都是双模, $\tau:M'\otimes_{R'}M\to R$ 是 R-R 双模同态, $\mu:M\otimes_R M'\to R'$ 是 R'-R' 双模同态, 记 $\tau(x'\otimes x)=(x',x), \mu(x\otimes x')=[x,x']$, 若

$$[x,x']y=x(x',y),\forall x,y\in M,x'\in M'; y'[x,x']=(y',x)x',\forall x\in M,x',y'\in M',$$

则称 (R,R',M,M',τ,μ) 是一个 **Morita Context**.

Example 1.6. 设 R 是含幺环, 记 R' 为矩阵环 $\mathrm{M}_n(R)$, 那么对 $M=\{(a_1,a_2,...,a_n)^T|a_k\in R,\forall 1\le k\le n\}$ 是全体 R 上 n 元列向量构成的集合, 那么它是 R'-R 双模, $M'=\{(a_1,a_2,...,a_n)|a_k\in R,\forall 1\le k\le n\}$ 是 R 上全体 n 元行向量构成的集合, 其上有天然的 R-R' 双模结构. 记 $\tau: M'\otimes_{R'}M\to R$ 是由 R'-平衡映射 $M'\times M\to R,(\alpha^T,\beta)\mapsto\alpha^T\beta$ 诱导的加群同态, 易见它是 R-R 双模同态; 记 $\mu: M\otimes_R M'\to R'$ 是由 R-平衡映射 $M\times M'\to R',(\alpha,\beta^T)\mapsto\alpha\beta^T$ 诱导的加群同态, 易见它是 R'-R' 双模同态, 因为矩阵乘法满足结合律, 所以 $(R,R'=\mathrm{M}_n(R),M,M',\tau,\mu)$ 是一个 Morita Context.

Example 1.7 (标准 Morita Context)**.** 设 R 是含幺环, M 是右 R-模, 命 $R'=\mathrm{End}_R(M_R)$ 是自同态环, 当 M 是非零模时, R' 是含幺环, 以下默认 M 是非零模. 易见 ${}_{R'}M_R$ 是 R'-R 双模, 命 $M'=M^*=\mathrm{Hom}_R({}_{R'}M_R,{}_RR_R)$ 是 M 的对偶模, 易见其上有 R-R' 双模结构. 易见 $M\times M'\to R',(x,x^*)\mapsto[x,x^*]:M\to M,y\mapsto x\cdot x^*(y)$ 是定义合理的 R-平衡映射, 它导出加群同态 $\mu: M\otimes_R M'\to R'$, 直接验证知 μ 是 R'-R' 双模同态. 易见 $M'\times M\to R,(x^*,x)\mapsto x^*(x)$ 是 R'-平衡映射, 它导出的加群同态 $\tau: M'\otimes_{R'}M\to R$ 是 R-R 双模同态. 直接计算容易验证 $(R,R'=\mathrm{End}_R(M_R),M,M',\tau,\mu)$ 是一个 Morita Context, 称 $(R,R'=\mathrm{End}_R(M_R),M,M',\tau,\mu)$ 为由**右 R-模 M 决定的标准 Morita Context**.

1.3 模范畴的生成子

对任意右 R-模 M, 总可表示为 $M=\sum\limits_{x\in M}xR$, 为一些 R_R 的右 R-模同态像之和. 一般地, 有

Definition 1.8 (生成子)**.** 若右 R-模 X 满足对任给右 R-模 M, M 都是一些 X 的同态像的和, 即

$$M=\sum_{f\in\mathrm{Hom}_R(X,M)}f(X),$$

则称 X 是 Mod-R 中的**生成子**. 完全类似地可定义左模范畴的生成子.

Example 1.9. 设 R 是含幺环, 那么 R_R 是 Mod-R 中的生成子.

根据生成子的定义我们看到

Lemma 1.10. 设 R 是含幺环, X 是右 R-模, 则 X 是 Mod-R 中的一个生成子的充要条件是对任给右 R-模 M 存在非空指标集 I 使得存在 $\oplus_{i\in I}X$ 到 M 的满同态.

Proposition 1.11 (生成子刻画)**.** 设 R 是含幺环, X 是右 R-模, 则以下四条等价:
(1)X 是 Mod-R 中的一个生成子. (2)X 决定的共变 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ 是忠实的. (3)X 的**迹理想** $T(X)=(\{x^*(x)|x\in X,x^*\in X^*\})$ 恰好是 R. (4) 存在正整数 n 使得 X^n 到 R 有满同态.

特别地, 通过 (4) 可知生成子 X_R 满足 $\mathrm{Ann}_RX=\mathrm{Ann}_RX^n\subseteq\mathrm{Ann}_R(R)=0$, 故 X 忠实.

Proof. (1)⇒(2): 因为 Hom 函子是加性函子, 因此只需说明对任给模同态 $f:M\to N$, 如果 $f_*:\mathrm{Hom}_R(X,M)\to\mathrm{Hom}_R(X,N)$ 满足 $f_*=0$, 那么 $f=0$. 这时有 $fg=0,\forall g\in\mathrm{Hom}_R(X,M)$, 因为 X 是生成子, 所以 M 可表示为一些 X 的同态像之和, 进而 $f(M)=0$, 于是知 $f=0$. 故 $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ 是忠实函子.

(2)⇒(3): 命 $N=R/T(X)$, 把 N 视作右 R-模, $\pi:R\to N,r\mapsto r+T(X)$ 是自然投射, 要证明迹理想是 R 只需说明 $\pi=0$. 对任给模同态 $g:X\to R$, 因为 $g(X)\subseteq T(X)$, 所以 $\pi_*(g)=0$, 进而知 $\pi_*=0$. 由于函子 $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ 是忠实的, 所以 $\pi=0$.

(3)⇒(4): 设迹理想 $T(X)=R$, 那么存在 $x_1,x_2,...,x_n\in X, f_1,f_2,...,f_n\in X^*$ 使得 $1_R=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_k)$. 对每个正整数 $1\le k\le n$, 记 $i_k: X\to X^n$ 是标准嵌入, 则 $g: X^n\to R, \sum\limits_{k=1}^{n} i_k(x_k)\mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_k)$ 满.

(4)⇒(1): 因为 R 是生成子, 所以 X^n 是生成子, 由此易得 X 是生成子. □

如果模范畴的生成子 X 是投射模, 称 X 是**投射生成子**. 若投射生成子 X 是有限生成的, 称 X 是**有限生成投射生成子**. 例如 R_R 是有限生成投射生成子.

1.4 Morita I

下面的 Morita I 表明如果我们有一个 Morita Context$(R,R',{}_{R'}M_R,{}_RM'_{R'},\tau,\mu)$ 满足 τ,μ 都是满射, 那么可以得到 Mod-R 与 Mod-R' 的范畴等价以及 R-Mod 与 R'-Mod 间的范畴等价.

Theorem 1.12 (Morita I)**.** 设 R,R' 是含幺环, $(R,R',{}_{R'}M_R,{}_RM'_{R'},\tau,\mu)$ 是一个 Morita Context 满足双模同态 τ,μ 都是满射, 则
(1)τ,μ 都是单射.
(2)M_R 是 Mod-R 中的有限生成投射生成子, $M'_{R'}$ 是 Mod-R' 中的有限生成投射生成子, ${}_RM'$ 是 R-Mod 中的有限生成投射生成子, ${}_{R'}M$ 是 R'-Mod 范畴中的有限生成投射生成子.
(3) 作为 R'-R 双模有同构 ${}_{R'}M_R\cong \mathrm{Hom}_R({}_RM'_{R'},{}_RR), {}_{R'}M_R\cong \mathrm{Hom}_{R'}({}_RM'_{R'},R'_{R'})$; 作为 R-R' 模有双模同构 ${}_RM'_{R'}\cong \mathrm{Hom}_{R'}({}_{R'}M_R,{}_{R'}R'), {}_RM'_{R'}\cong \mathrm{Hom}_R({}_{R'}M_R,R_R)$.
(4) 有环同构 $R\cong \mathrm{End}_{R'}(M'_{R'}), R'\cong \mathrm{End}_R(M_R)$ 以及反环同构 $R\cong \mathrm{End}_{R'}({}_{R'}M), R'\cong \mathrm{End}_R({}_RM')$.
(5) 函子 $-\otimes_R M'$ 与 $-\otimes_{R'} M$ 给出 Mod-R 与 Mod-R' 间的范畴等价, 函子 $M\otimes_R -$ 与 $M'\otimes_{R'} -$ 给出 R-Mod 与 R'-Mod 间的范畴等价.
(6) 记 $\mathscr{L}(R),\mathscr{L}(R')$ 是分别是 R,R' 的左理想全体,$\mathscr{R}(R),\mathscr{R}(R')$ 是分别是 R,R' 的右理想全体, 并记

$$\mathscr{S}({}_RM'),\mathscr{S}(M_R),\mathscr{S}({}_{R'}M),\mathscr{S}({}_RM')$$

指各个模的子模全体, 那么 $\mathscr{R}(R)$ 与 $\mathscr{S}(M'_{R'})$ 间存在偏序同构且导出 R 的理想全体与 M' 的 R-R' 子模全体存在偏序同构; $\mathscr{R}(R')$ 与 $\mathscr{S}(M_R)$ 间存在偏序同构且导出 R' 的理想全体与 M 的 R'-R 双模全体存在偏序同构; $\mathscr{L}(R)$ 与 $\mathscr{S}({}_{R'}M)$ 间存在偏序同构且导出 R 的理想全体与 M 的 R'-R 双模全体存在偏序同构; $\mathscr{L}(R')$ 与 $\mathscr{S}({}_RM')$ 间存在偏序同构且导出 R' 的理想全体与 M' 的 R-R' 子模全体存在偏序同构. 特别地, R 的理想格与 R' 的理想格偏序同构.
(7) 环 R 与 R' 的中心同构, 即 $C(R)\cong C(R')$.

Proof. 因为 τ,μ 都是满射, 所以存在 $u'_1,u'_2,...,u'_s,w'_1,...,w'_t\in M', v_1,v_2,...,v_s,q_1,...,q_t\in M$ 使得

$$1_R=\sum_{i=1}^{s}(u'_i,v_i), 1_{R'}=\sum_{j=1}^{t}[q_j,w'_j].$$

先证明 (1)**:** 如果 $\sum\limits_{\ell=1}^{m} x'_\ell\otimes x_\ell\in M'\otimes_{R'}M$ 使得 $\tau(\sum\limits_{\ell=1}^{m} x'_\ell\otimes x_\ell)=\sum\limits_{\ell=1}^{m}(x'_\ell,x_\ell)=0$, 那么 $\sum\limits_{\ell=1}^{m} x'_\ell\otimes x_\ell=\sum\limits_{\ell=1}^{m} x'_\ell\otimes x_\ell 1_R=\sum\limits_{\ell=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{s} x'_\ell\otimes x_\ell(u'_i,v_i)=\sum\limits_{\ell=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{s} x'_\ell\otimes[x_\ell,u'_i]v_i=\sum\limits_{\ell=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{s} x'_\ell[x_\ell,u'_i]\otimes v_i=\sum\limits_{\ell=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{s}(x'_\ell,x_\ell)u'_i\otimes v_i=\sum\limits_{i=1}^{s}(\sum\limits_{\ell=1}^{m}(x'_\ell,x_\ell))u'_i\otimes v_i=0$, 因此 τ 是单射. 同理可以证明 μ 也是单射.

(2) 的证明: 这里仅证明 ${}_RM'$ 是 R-Mod 范畴中的有限生成投射生成子, 其余情形的验证完全类似. 对每个 $y\in M$, 易见 $\lambda_y: M'\to R, x'\mapsto (x',y)$ 是左 R-模同态. 注意到 $x'=x'1_{R'}=x'\sum\limits_{j=1}^{t}[q_j,w'_j]=\sum\limits_{j=1}^{t}(x',q_j)w'_j, \forall x'\in M'$, 所以由对偶基引理知 M' 作为左 R-模是有限生成投射模. 由 $1_R=\sum\limits_{i=1}^{s}(u'_i,v_i)$ 知 $1_R\in T({}_RM')$, 所以 M' 是生成子, 进而得到 M' 是 R-Mod 中的有限生成投射生成子.

(3) 的证明: 这里以 ${}_{R'}M_R\cong \mathrm{Hom}_R({}_RM'_{R'},{}_RR)$ 为例, 其余情形类似可证. 命

$$\psi: M\to \mathrm{Hom}_R({}_RM'_{R'},{}_RR), x\mapsto (-,x): M'\to R, x'\mapsto (x',x)$$

易验证 ψ 是定义合理的 R'-R 双模同态. 如果 $x\in M$ 满足 $(y',x)=0, \forall y'\in M'$, 那么 $x=1_{R'}x=\sum\limits_{j=1}^{t}[q_j,w'_j]x=\sum\limits_{j=1}^{t}q_j(w'_j,x)=0$, 这说明 ψ 是单射. 对任给 $f\in \mathrm{Hom}_R({}_RM'_{R'},{}_RR)$, 那么 $f(x')=f(x'\sum\limits_{j=1}^{t}[q_j,w'_j])=(x',\sum\limits_{j=1}^{t}q_jf(w'_j))$, 因此 ψ 是满射. 这就证明了 ψ 是 R'-R 双模同构.

(4) 的证明: 这里仅验证环同构 $R\cong \mathrm{End}_{R'}(M'_{R'})$, 其余情况的验证完全类似. 命 $\psi: R\to \mathrm{End}_{R'}(M'_{R'}), r\mapsto \lambda_r: M'\to M', x'\mapsto rx'$, 易见 ψ 是定义合理的环同态. 如果 $r\in R$ 使得 $\psi(r)=0$, 那么 $rx'=0, \forall x'\in M'$, 注意到 $r=r1_R=r\sum\limits_{i=1}^{s}(u'_i,v_i)=\sum\limits_{i=1}^{s}(ru'_i,v_i)=0$, 所以 ψ 是单射. 对任给 $f\in \mathrm{End}_{R'}(M'_{R'}), x'\in M'$, 注意到 $f(x')=f(1_Rx')=f(\sum\limits_{i=1}^{s}(u'_i,v_i)x')=\sum\limits_{i=1}^{s}f(u_i)[v_i,x']=\sum\limits_{i=1}^{s}(f(u_i),v_i)x'$, 由此立即得到 ψ 是满射.

(5) 的证明: 由 (1) 知这时 τ,μ 都是双模同构, 所以有自然同构 $-\otimes_R(M'\otimes_{R'}M)\cong -\otimes_R R\cong 1_{\text{Mod-}R}, -\otimes_{R'}(M\otimes_R M')\cong -\otimes_{R'}R'\cong 1_{\text{Mod}-R'}$ 以及 $(M'\otimes_{R'}M)\otimes_R-\cong R\otimes_R-\cong 1_{R\text{-Mod}}, (M\otimes_R M')\otimes_{R'}-\cong R'\otimes_{R'}-\cong 1_{R'\text{-Mod}}$. 所以 $(-\otimes_R M')\otimes_{R'}M\cong -\otimes_R(M'\otimes_{R'}M)\cong 1_{\text{Mod-}R}, (-\otimes_{R'}M)\otimes_R M'\cong -\otimes_{R'}(M\otimes_R M')\cong 1_{\text{Mod}-R'}$ 表明函子 $-\otimes_R M'$ 与 $-\otimes_{R'}M$ 给出 Mod-R 与 Mod-R' 间的范畴等价; $M\otimes_R(M'\otimes_{R'}-)\cong (M\otimes_R M')\otimes_{R'}-\cong 1_{R'\text{-Mod}}, M'\otimes_{R'}(M\otimes_R-)\cong (M'\otimes_{R'}M)\otimes_R-\cong 1_{R\text{-Mod}}$ 表明函子 $M\otimes_R-$ 与 $M'\otimes_{R'}-$ 给出 R-Mod 与 R'-Mod 间的范畴等价.

(6) 的证明: 这里以 $\mathscr{R}(R)$ 与 $\mathscr{S}(M'_{R'})$ 间存在偏序同构且导出 R 的理想全体与 M' 的 R-R' 子模全体存在偏序同构为例验证, 其余情形类似. 对右 R'-模 M' 的每个子模 N', 记

$$(N',M)=\{\sum_{k=1}^{n}(n'_k,m_k)|n'_k\in N', m_k\in M, k\geq 1\},$$

易见 (N',M) 是 R 中右理想, 当 N' 是 R-R' 双模时, (N',M) 是 R 中理想. 命 $\psi: \mathscr{R}(R)\to \mathscr{S}(M'_{R'}), I\mapsto IM'$, 易见 ψ 是定义合理的偏序同态, 容易验证 $\varphi: \mathscr{S}(M'_{R'})\to \mathscr{R}(R), N'\mapsto (N',M)$ 是定义合理的偏序同态且为 ψ 的逆映射, 因此 ψ 是偏序同构. 当 I 是双边理想时, IM' 是 R-R' 双模, 所以上述 ψ 也导出了 R 的理想全体与 M' 的 R-R' 子模全体存在偏序同构.

(7) 的证明: 对每个 $r\in R$, 记 $\lambda_r: M'\to M', x'\mapsto rx', \delta_r: M\to M, x\mapsto xr$. 对每个 $r'\in R'$, 记 $\theta_{r'}: M'\to M', x'\mapsto x'r', \sigma_{r'}: M\to M, x\mapsto r'x$. 由 (4) 的证明过程可知 $\mathrm{End}_{R'}(M'_{R'})=\{\lambda_r|r\in R\}, \mathrm{End}_R(M_R)=\{\sigma_{r'}|r'\in R'\}, \mathrm{End}_{R'}({}_{R'}M)=\{\delta_r|r\in R\}, \mathrm{End}_R({}_RM')=\{\theta_{r'}|r'\in R'\}$. 由 (4) 的结果知

$$C(R)\cong C(\mathrm{End}_{R'}(M'_{R'}))=\mathrm{End}_{R'}(M'_{R'})\cap C_{\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M')}(\mathrm{End}_{R'}(M'_{R'}))=\mathrm{End}_{R'}(M'_{R'})\cap \mathrm{End}_R({}_RM'),$$

$$C(R')\cong C(\mathrm{End}_R({}_RM'))=\mathrm{End}_R({}_RM')\cap C_{\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M')}(\mathrm{End}_R({}_RM'))=\mathrm{End}_R({}_RM')\cap \mathrm{End}_{R'}(M'_{R'}),$$

所以有环中心同构 $C(R)\cong C(R')$. □

Remark 1.13. 如果 R,R' 均为域 $\Bbbk$ 上的代数, 那么当 Morita Context $(R,R',{}_{R'}M_R,{}_RM'_{R'},\tau,\mu)$ 中的模都是代数上的双模时 (注意, R 和 R' 所给出的 $\Bbbk$-线性结构这里要求一致), 上述双模同构也都是代数上的双模同构、Morita I 中的环同构也都是代数同构. 例如若对域 $\Bbbk$ 上代数 R,R', 有 Morita Context $(R,R',{}_{R'}M_R,{}_RM'_{R'},\tau,\mu)$ 使得 τ,μ 是满射, 那么有 $\Bbbk$-代数同构 $R\cong \mathrm{End}_{R'}(M'_{R'}),R'\cong \mathrm{End}_R(M_R)$ 以及反代数同构

$$R\cong \mathrm{End}_{R'}({}_{R'}M),R'\cong \mathrm{End}_R({}_RM').$$

Example 1.14. 在 [例1.6] 中我们得到了 Morita Context$(R,R'=\mathrm{M}_n(R),M,M',\tau,\mu)$, 并且双模同态 τ 和 μ 根据定义都是满的, 因此由 Morita I 我们马上得到 R-模范畴与 $\mathrm{M}_n(R)$-模范畴是范畴等价的.

Example 1.15. 如果非零模 P_R 是有限生成投射生成子, 考虑由 P_R 决定的标准 Morita Context, 因为 P 是有限生成投射模, 由对偶基引理, 存在 $x_1,x_2,...,x_n\in P,x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\in P^*$ 使得 $x=\sum\limits_{k=1}^{n}x_kx_k^*(x),\forall x\in P$, 这蕴含着 μ 是满射. 而 P 是生成子, 注意到 $\mathrm{Im}\tau$ 就是迹理想 $T(M)$, 所以 τ 也是满射, 从而可应用 Morita I. 所以对有限生成投射生成子 $P_R\neq 0$, 有 R-模范畴与 $\mathrm{End}_R(P_R)$-模范畴的范畴等价.

作为 Morita I 的应用, 我们给出单环的 Wedderburn-Artin 定理的一个证明.

Theorem 1.16 (单环结构定理)**.** 设 R 是含幺环, 则以下三条等价:
(1)R 是单环且有一个极小右理想 (极小右理想指 R 的非零右理想集的极小元).
(2) 存在除环 Δ 与正整数 n 使得有环同构 $R\cong \mathrm{M}_n(\Delta)$.
(3)R 是左右 Artin, 左右 Noether 的单环.
(4)R 是右 Artin 单环.

Proof. (1)⇒(2): 设 R 有极小右理想 I, 那么 I_R 是不可约模. 于是 $R=RI=\sum\limits_{a\in R}aI$ 是一些不可约子模的和, 这表明 R_R 是完全可约模, 进而 I 是 R 的直和因子, 所以 I 作为右 R-模是有限生成投射模. 因为 $0\neq I\subseteq T(I)$, 所以由 R 是单环知 $T(I)=R$, 从而 I_R 是有限生成投射生成子, 记 $\Delta=\mathrm{End}_R(I_R)$, 则由 Schur 引理知 Δ 是除环. 考虑由 I_R 决定的标准 Morita Context$(R,\Delta,{}_\Delta I_R,{}_RV_\Delta,\tau,\mu)$, 其中 $V=I^*\neq 0$. 由 Morita I, V_Δ 作为非零线性空间是有限生成的, 即维数有限, 设维数为 n, 并有环同构 $R\cong \mathrm{End}_\Delta(V_\Delta)\cong \mathrm{M}_n(\Delta)$.

(2)⇒(3): 因为 $\mathrm{M}_n(\Delta)$ 同构于某个 Δ 上 n 维线性空间 V_Δ 的自同态环, 所以我们只需证明当 $R=\mathrm{End}_\Delta(V_\Delta)$ 时, R 是左右 Artin, 左右 Noether 的单环即可. 因为有限维非零线性空间 V_Δ 是模范畴 Mod-Δ 中有限生成投射生成子, 所以对 V_Δ 决定的标准 Morita Context$(\Delta,R,{}_RV_\Delta,{}_\Delta V_R^*,\tau,\mu)$ 应用 Morita I, 可知 R 的理想格与 Δ 的理想格偏序同构, R_R 的子模格与 V_Δ 子模格偏序同构, ${}_RR$ 的子模格与 ${}_\Delta V^*$ 的子模格偏序同构. 利用 $\dim_\Delta V_\Delta=\dim_\Delta({}_\Delta V^*)=n$ 可知 R 是双边 Noether, 双边 Artin 环. 由除环是单环知 R 是单环.

(3)⇒(4) 和 (4)⇒(1) 是明显的. □

根据单环结构定理可以得到 Artin 单环不分左右.

Corollary 1.17. 设 R 是含幺单环, 那么 R 是左 Artin 环当且仅当 R 是右 Artin 环.

Proof. 只需验证必要性. 设 R 是左 Artin 环, 则 R^{op} 是右 Artin 环, 故存在除环 D 使得 $R^{op}\cong \mathrm{M}_n(D)$, 从而 $R\cong \mathrm{M}_n(D)^{op}\cong \mathrm{M}_n(D^{op})$, 其中 $\Delta=D^{op}$ 是除环, 故 R 是右 Artin 单环. □

1.5 模范畴间的等价函子

在 [命题1.4] 中我们看到, 范畴间的函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 如果是等价函子, 那么它一定是忠实的满函子. 现在我们来看一些 (易于导出的) 模范畴间的等价函子所保持的性质.

Lemma 1.18. 设 R,R' 是含幺环, $F:\text{Mod-}R\to\text{Mod-}R'$ 与 $G:\text{Mod-}R'\to\text{Mod-}R$ 是一对等价函子, 则
(1 对任何单同态 $f:M\to N$ 有 $Ff:FM\to FN$ 也是单同态. 即模范畴间等价函子保持 monic 态.
(2) 对任何满同态 $f:M\to N$ 有 $Ff:FM\to FN$ 也是满同态. 即模范畴间等价函子保持 epic 态.

Proof. (1) 只需说明对 Mod-R' 中的任意模同态 $h:K\to FM$, 如果 $F(f)h=0$, 那么 $h=0$. 设

$$\eta:\text{obMod-}R\to\bigcup_{M\in\text{obMod-}R}\text{Hom}_R(M,GFM),M\mapsto\eta_M$$

是自然同构, 那么下图交换：

$$\begin{tikzcd} GK \arrow[r, "Gh"] & GFM \arrow[r, "GFf"] & GFN \\ & M \arrow[u, "\eta_M"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "\eta_N"] \end{tikzcd}$$

由此得到 $f\eta_M^{-1}Gh=0$. 因为 f 是模范畴 Mod-R 中的 monic 态, 所以 $\eta_M^{-1}Gh=0$, 于是 $Gh=0$. 因为等价函子总是忠实的, 所以 $h=0$.

(2) 只需说明对 Mod-R' 中的任意模同态 $g:FN\to C$, 如果 $gF(f)=0$, 那么 $g=0$. 考虑自然同构

$$\eta:\text{obMod-}R\to\bigcup_{M\in\text{obMod-}R}\text{Hom}_R(M,GFM),M\mapsto\eta_M$$

由下图交换性得到 $g=0$.

$$\begin{tikzcd} GFM \arrow[r, "GFf"] & GFN \arrow[r, "g"] & C \\ M \arrow[u, "\eta_M"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "\eta_N"] & \end{tikzcd}$$

□

下面我们说明任何模的子模格与它在 (模范畴间) 等价函子作用下的像的子模格是同构的. 在此之前, 简要回顾一下范畴中子对象的概念. 对范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 A, 如果记 T 是全体以 A 为终对象的 monic 态构成的类, 即 $T=\bigcup_{B\in\text{ob}\mathcal{C}}\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$, 那么可在 T 上定义二元关系 $\leq$: 对任给 $f:B\to A,g:C\to A\in T$, 若存在态 $h:B\to C$ 使得 $gh=f$, 称 $f\leq g$, 易见 h 必定是唯一的, 且是 monic 态. 当 $f\leq g$ 时, 也记 $B\subseteq C$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

若 $f,g\in T$ 满足 $f\leq g,g\leq f$, 则称 $f\sim g$, 易见 $\sim$ 是 T 上一个等价关系. 称 $f\in T$ 所在的等价类 $[f]$ 是 A 的一个**子对象** (subobject). 因为每个子对象是个等价类, 等价类可以和每个代表元对应起来, 所以有时也称 A 的子对象 $[f]$ 的一个代表元 $f:B\to A$ 是 A 的一个子对象 (所以当我们提到对象 A 的子对象时, 需要联系语境

区分这时子对象指的是等价类还是某个 monic 态), 或者说我们有时用子对象的一个代表元来记该子对象. 那么根据前面的记号, 如果 A 的子对象 $f : B \to A$ 和 $g : C \to A$ 满足 $f \leq g$, 记 $B \subseteq C$.

现在我们说明模范畴 Mod-R 中 M 的子对象全体 $\mathcal{O}$(在 NBG 公理系统中, 真类不能是某个类的元素, 因此这里 $\mathcal{O}$ 不是类, 但我们可以把每个等价类用代表元替代来把 $\mathcal{O}$ 想象成类) 与 M 的子模 $\mathscr{S}$ 全体存在偏序同构, 其中 $\mathcal{O}$ 上的偏序结构由 $\leq$ 诱导：若对 $[f], [g] \in \mathcal{O}$ 有 $f \leq g$, 则称 $[f] \leq [g]$(容易验证这是定义合理的). 命 $\psi : \mathscr{S} \to \mathcal{O}, N \mapsto [i_N]$, 这里 N 表示子模 N 到 M 的标准嵌入. 我们先说明 ψ 是满射, 任给 $[j] \in \mathcal{O}$, 设 $j : P \to M$, 记 $N = j(P)$, 那么 $[j] = [i_N] = \psi(N)$, 所以 ψ 是满射. 再说明 ψ 是单射, 如果 $N, N' \in \mathscr{S}$ 满足 $[i_N] = [i_{N'}]$, 那么存在模同构 $h : N \to N'$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i_N"] \arrow[d, "h"'] & M \\ N' \arrow[ur, "i_{N'}"'] & \end{tikzcd}$$

利用上图交换性立即得到 $h(n) = n, \forall n \in N$, 所以 $N \subseteq N'$, 因为 h 是模同构, 因此同理可得 $N' \subseteq N$, 于是 $N' = N$, 这就得到了 ψ 是单射. 由此得到 ψ 是双射, 利用上面的交换图, 容易验证 ψ 是偏序同构, 因此 M 的子模格与子对象全体偏序同构. 现在我们可以证明

Proposition 1.19. 设 R, R' 是含幺环, $F : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R'$ 与 $G : \text{Mod-}R' \to \text{Mod-}R$ 是一对等价函子, 则对任给右 R-模 M, M 的子模格与 FM 的子模格偏序同构.

Proof. 要说明 M 的子模格与 FM 的子模格偏序同构只需说明 M 子对象全体与 FM 子对象全体偏序同构. 记 M 的子对象全体构成的集合是 $\mathcal{O}$, FM 全体子对象构成的集合是 $\mathcal{P}$, 置 $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{P}, [f] \mapsto [Ff]$, 因为 F 是等价函子, 故保持 monic 态, 进而知 φ 是定义合理的映射. 先说明 φ 是单射, 如果 $[f_1], [f_2]$ 满足 $[Ff_1] = [Ff_2]$, 并设 $f_1 : N_1 \to M, f_2 : N_2 \to N$, 那么存在右 R'-模同构 $h : FN_1 \to FN_2$ 使得 $Ff_2h = Ff_1$. 因为 F 是满函子, 所以存在模同态 $g : N_1 \to N_2$ 使得 $h = Fg$, 利用 F 的忠实性容易证明 g 是同构, 于是由 $f_2g = f_1$ 可知 $[f_1] = [f_2]$, 所以 φ 是单射. 下面说明 φ 是满射, 任取 $[h] \in \mathcal{P}$, 不妨设 $h : FGK \to FM$, 那么由 F 是满函子, 存在模同态 $\tilde{h} : GK \to M$ 使得 $h = F\tilde{h}$, 利用 F 是忠实函子以及 h 是 monic 态易证 $\tilde{h}$ 是 monic 态, 所以 $[h] = \varphi([\tilde{h}])$, 即 φ 是满射. 容易验证 φ 以及它的逆映射都是偏序同态, 所以 φ 是偏序同构. □

Corollary 1.20. 设 R, R' 是含幺环, $F : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R'$ 与 $G : \text{Mod-}R' \to \text{Mod-}R$ 是一对等价函子. 那么
(1) 若右 R-模 M 是 Noether 模, 则 FM 作为右 R'-模也是 Noether 模.
(2) 若右 R-模 M 是 Artin 模, 则 FM 作为右 R'-模也是 Artin 模.
(3) 若右 R-模 M 是不可约模, 则 FM 作为右 R'-模也是不可约模.

模范畴间的等价函子也保持

Proposition 1.21. 设 R, R' 是含幺环, 函子 $F : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R'$ 与 $G : \text{Mod-}R' \to \text{Mod-}R$ 是一对等价函子, 那么对右 R-模 M 有
(1) 如果 M 是生成子, 那么 FM 也是生成子.
(2) 如果 M 是投射模, 那么 FM 也是投射模.
(3) 如果 M 是内射模, 那么 FM 也是内射模.
(4) 如果 M 是有限生成模, 那么 FM 也是有限生成模.

特别地, 如果 M 是有限生成投射生成子, 那么 FM 也是有限生成投射生成子.

Proof. (1) 只需要证明 $\mathrm{Hom}_{R'}(FM,-)$ 是忠实函子, 而这只需证明对任何右 R'-模同态 $f':M'\to N'$, 如果 $f'_*=0$, 那么 $f'=0$. 设 $\zeta:\mathrm{obMod}\text{-}R'\to\bigcup\limits_{M'\in\mathrm{obMod}\text{-}R'}\mathrm{Hom}_{R'}(M',FGM'), M'\mapsto\zeta_{M'}$ 是 Mod-R' 上恒等函子到 FG 的自然同构, 那么对任给右 R'-模同态 $g':FM\to M'$ 有下图交换：

$$\begin{tikzcd}
FM \arrow[r, "g'"] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\zeta_{M'}"'] & N' \arrow[d, "\zeta_{N'}"] \\
& FGM' \arrow[r, "FGf'"] & FGN'
\end{tikzcd}$$

由 $\zeta_{M'}$ 可逆以及上图交换性可知对任何右 R-模同态 $g:M\to GM'$ 有 $(FGf')(Fg)=0$, 因此由 F 的忠实性可知任何右 R-模同态 $g:M\to GM'$ 有 $(Gf')g=0$, 进而由 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 是忠实函子知 $Gf'=0$, 再利用 G 的忠实性得到 $f'=0$. 这就证明了 FM 是生成子.

(2) 对任给满右 R'-模同态 $\varepsilon:M'\to N'$ 以及右 R'-模同态 $g':FM\to N'$, 我们说明存在右 R'-模同态 $h':FM\to M'$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
& FM \arrow[dl, dashed, "h'"'] \arrow[d, "g'"] & \\
M' \arrow[r, "\varepsilon"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

设 $\eta:\mathrm{obMod}\text{-}R\to\bigcup\limits_{M\in\mathrm{obMod}\text{-}R}\mathrm{Hom}_R(M,GFM), M\mapsto\eta_M$ 是自然同构, 注意 $G\varepsilon$ 是满射, 那么利用 M 是投射模可知存在右 R-模同态 $h:M\to GM'$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, dashed, "h"'] & GFM \arrow[d, "Gg'"] & \\
GM' \arrow[r, "G\varepsilon"] & GN' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, 因此 $G\varepsilon h\eta_M^{-1}=Gg'$, 因为 G 是满函子, 所以存在右 R'-模同态 $h':FM\to M'$ 使得 $G(h')=h\eta_M^{-1}$. 利用 G 的忠实性得到 $\varepsilon h'=g'$, 这就证明了 FM 是投射模.

(3) 对任给单右 R'-模同态 $\alpha:M'\to N'$, 需要说明对任给右 R'-模同态 $g':M'\to FM$, 存在右 R'-模同态 $h':N'\to FM$ 使下图交换.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g'"] & N' \arrow[dl, dashed, "h'"] \\
& FM &
\end{tikzcd}$$

对上图作用 G, 考虑自然同构 $\eta:\mathrm{obMod}\text{-}R\to\bigcup\limits_{M\in\mathrm{obMod}\text{-}R}\mathrm{Hom}_R(M,GFM), M\mapsto\eta_M$ 可得下图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & GM' \arrow[r, "G\alpha"] \arrow[d, "Gg'"] & GN' \\
& GFM \arrow[r, "\eta_M^{-1}"] & M
\end{tikzcd}$$

于是由 $G\alpha$ 是单射以及 M 是内射模可得 R-模同态 $h:GN'\to M$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & GM' \arrow[r, "G\alpha"] \arrow[d, "Gg'"] & GN' \arrow[d, dashed, "h"] \\
& GFM \arrow[r, "\eta_M^{-1}"] & M
\end{tikzcd}$$

由于 G 是满函子, 所以存在 R'-模同态 $h' : N' \to FM$ 使得 $G(h') = \eta_M h$. 最后由 $G(g') = G(h)G(\alpha)$ 以及 G 的忠实性得到结果.

(4) 我们知道 M 与 FM 的子模格偏序同构, 记 M 的子模全体为 $\mathscr{S}(M)$, FM 的子模全体为 $\mathscr{S}(FM)$, 那么有偏序同构 $\varphi : \mathscr{S}(M) \to \mathscr{S}(FM)$, 易见 φ 将真子模映到真子模, FM 的真子模关于 φ 的原像也是真子模. 我们断言对任何 M 的非空定向子模族 $\{N_i|i \in I\}$, 有 $\varphi(\bigcup\limits_{i\in I} N_i) = \bigcup\limits_{i\in I} \varphi(N_i)$(这里 $\bigcup\limits_{i\in I} N_i$ 是 M 的子模是由 $(\{N_i|i \in I\}, \subseteq)$ 是定向集保证的). 事实上由 φ 保持包含关系直接得到 $\varphi(\bigcup\limits_{i\in I} N_i) \supseteq \bigcup\limits_{i\in I} \varphi(N_i)$. 易见 $\{\varphi(N_i)|i \in I\}$ 是 FM 的非空定向子模族, 所以 $\varphi^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} \varphi(N_i)) \supseteq \bigcup\limits_{i\in I} \varphi^{-1}(\varphi(N_i))$, 于是 $\varphi(\bigcup\limits_{i\in I} N_i) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \varphi(N_i)$, 因此 $\varphi(\bigcup\limits_{i\in I} N_i) = \bigcup\limits_{i\in I} \varphi(N_i)$, 断言得证 (同理对 φ^{-1} 有类似性质). 假设 FM 不是有限生成模, 那么它可以表示成某个非空定向真子模集全体元素之并, 利用前面证明的断言, 可得 M 是某个非空定向真子模集全体元素之并, 这与 M 是有限生成模矛盾 (这里用了 M 是有限生成模当且仅当它不能表为一些真子模的直接并). □

因为模范畴间的范畴等价能够保持模的有限生成性, 所以通过将等价函子限制在有限生成模全子范畴上, 可以得到有限生成模全子范畴间的范畴等价, 为之后引用方便, 列为下述推论.

Corollary 1.22. 设 R, R' 是含幺环, 函子 $F : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R'$ 与 $G : \text{Mod-}R' \to \text{Mod-}R$ 是一对等价函子, 记 $\text{mod-}R$ 和 $\text{mod-}R'$ 是有限生成模构成的全子范畴, 那么通过将 F 限制为 $\text{mod-}R$ 到 $\text{mod-}R'$ 的函子 $\tilde{F} : \text{mod-}R \to \text{mod-}R'$, G 限制为 $\text{mod-}R'$ 到 $\text{mod-}R$ 的函子 $\tilde{G} : \text{mod-}R' \to \text{mod-}R$ 后, 可知 $\tilde{F}$ 和 $\tilde{G}$ 是 $\text{mod-}R$ 和 $\text{mod-}R'$ 间一对等价函子. 故范畴等价 $\text{Mod-}R \cong \text{Mod-}R'$ 蕴含等价 $\text{mod-}R \cong \text{mod-}R'$.

Remark 1.23. 之后在 [推论1.43] 中, 我们将看到范畴等价 $\text{mod-}R \cong \text{mod-}R'$ 也蕴含 $\text{Mod-}R \cong \text{Mod-}S$.

1.6 Morita II

本节主要介绍 Morita II(见 [定理1.25]) 以及它的一些应用. 首先需要下述引理.

Lemma 1.24. 设 R, R' 是含幺环, 如果 Morita Context$(R, R', {}_{R'}P_R, {}_R P'_{R'}, \tau, \mu)$ 满足 τ, μ 都是满射, 那么有函子的自然同构 $- \otimes_R P' \cong \text{Hom}_R(P_R, -)$. 类似地, 也有自然同构

$$- \otimes_{R'} P \cong \text{Hom}_{R'}(P', -), P \otimes_R - \cong \text{Hom}_R(P', -), P' \otimes_{R'} - \cong \text{Hom}_{R'}({}_{R'}P, -).$$

Proof. 沿用 Morita Context 的标准记号, 即 $\tau(x' \otimes x) = (x', x), \mu(x \otimes x') = [x, x']$, 易见对任给右 R-模 M, $M \times P' \to \text{Hom}_R(P_R, M_R), (m, p') \mapsto \theta_{(m,p')} : P \to M, p \mapsto m(p', p)$ 是定义合理的 R-平衡映射, 这导出加群同态 $\eta_M : M \otimes_R P' \to \text{Hom}_R(P_R, M_R)$ 满足 $\eta_M(m \otimes p') : P \to M, p \mapsto m(p', p)$, 易见这是右 R'-模同态. 先验证 η_M 是单射, 如果 $\sum\limits_{i=1}^{\ell} m_i \otimes p'_i \in M \otimes_R P'$ 满足 $\eta_M(\sum\limits_{i=1}^{\ell} m_i \otimes p'_i) = 0$, 那么对任给 $p \in P$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{\ell} m_i(p'_i, p) = 0$. 因为 μ 是满射, 设 $1_{R'} = \sum\limits_{j=1}^{t} [w_j, q'_j]$, 那么 $\sum\limits_{i=1}^{\ell} m_i \otimes p'_i = \sum\limits_{i=1}^{\ell} m_i \otimes p'_i 1_{R'} = \sum\limits_{i=1}^{\ell} m_i \otimes p'_i (\sum\limits_{j=1}^{t} [w_j, q'_j]) = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \sum\limits_{j=1}^{t} m_i \otimes p'_i [w_j, q'_j] = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \sum\limits_{j=1}^{t} m_i \otimes (p'_i, w_j) q'_j = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \sum\limits_{j=1}^{t} m_i(p'_i, w_j) \otimes q'_j = \sum\limits_{j=1}^{t} \sum\limits_{i=1}^{\ell} m_i(p'_i, w_j) \otimes q'_j = \sum\limits_{j=1}^{t} (\sum\limits_{i=1}^{\ell} m_i(p'_i, w_j)) \otimes q'_j = 0$, 由此得到 η_M 是单射. 再说明 η_M 是满射, 任给 $f \in \text{Hom}_R(P_R, M_R)$, 有 $f(p) = f(1_{R'} p) = f(\sum\limits_{j=1}^{t} [w_j, q'_j] p) = f(\sum\limits_{j=1}^{t} w_j (q'_j, p)) = \sum\limits_{j=1}^{t} f(w_j)(q'_j, p) = \eta_M(\sum\limits_{j=1}^{t} f(w_j) \otimes q'_j)(p), \forall p \in P$, 所以 $f = \eta_M(\sum\limits_{j=1}^{t} f(w_j) \otimes q'_j)$, 进而知 η_M 是

满射, 因此 η_M 是 R'-R' 双模同构. 下面验证 $\eta : \mathrm{obMod}\text{-}R \to \bigcup_{M\in\mathrm{obMod}\text{-}R} \mathrm{Hom}_R(M\otimes P', \mathrm{Hom}_R(P_R, M_R)), M \mapsto \eta_M$ 是自然同构. 任取右 R-模同态 $f : M \to N$, 只需说明下图交换：

$$\begin{array}{ccc} M\otimes_R P' & \xrightarrow{\eta_M} & \mathrm{Hom}_R(P,M) \\ {\scriptstyle f\otimes 1_{P'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ N\otimes_R P' & \xrightarrow{\eta_N} & \mathrm{Hom}_R(P,N) \end{array}$$

而这只需验证对任给 $m\otimes p' \in M\otimes_R P'$, 有 $f_*\eta_M(m\otimes p') = \eta_N(f\otimes 1_{P'})(m\otimes p')$. 对每个 $p\in P$, 有 $f_*\eta_M(m\otimes p')(p) = f(m(p',p)) = f(m)(p',p) = \eta_N(f\otimes 1_{P'})(m\otimes p')(p)$, 由此得到 η 的自然性, 因此 η 是张量函子 $-\otimes_R P'$ 到 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ 的自然同构. □

现在介绍 Morita II, 它不仅表明 Morita Context 可以作为联系模范畴间范畴等价的纽带, 也指出模范畴间的范畴等价在自然同构意义下由张量函子实现.

Theorem 1.25 (Morita II)**.** 设 R, R' 是含幺环, 共变加性函子 $F : \mathrm{Mod}\text{-}R \to \mathrm{Mod}\text{-}R'$ 与 $G : \mathrm{Mod}\text{-}R' \to \mathrm{Mod}\text{-}R$ 是一对等价函子, 那么存在 Morita Context$(R, R', {}_{R'}P_R, {}_RP'_{R'}, \tau, \mu)$ 满足 τ, μ 都是满射, 即可应用 Morita I, 且有自然同构 $F \cong -\otimes_R P', G \cong -\otimes_{R'} P$.

$$\mathrm{Mod}\text{-}R \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}\text{-}R'$$

Proof. 命 $P = GR', P' = FR$, 那么 P_R 是 Mod-R 中的有限生成投射生成子, $P'_{R'}$ 是 Mod-R' 中的有限生成投射生成子. 对含幺环 R', 我们有标准的环同构 $\varphi : R' \to \mathrm{End}_{R'}(R'_{R'}), r' \mapsto l_{r'}$, 这里 $l_{r'} : R' \to R', x \mapsto r'x$ 是由 r' 诱导的左乘映射. 因为 G 是忠实的满函子, 所以映射 $G : \mathrm{End}_{R'}(R'_{R'}) = \mathrm{Hom}_{R'}(R', R') \to \mathrm{Hom}_R(P_R, P_R) = \mathrm{End}_R(P_R), h \mapsto Gh$ 是环同构. 这就得到了环同构 $R' \to \mathrm{End}_R(P_R)$, 具体地, 有环同构 $R' \to \mathrm{End}_R(P_R), r' \mapsto G(l_{r'})$. 因此我们可以给 P_R 赋予左 R'-模结构：$r'p = G(l_{r'})p, \forall p \in P, r' \in R'$(因为 $G(l_{r'})$ 是右 R-模同态, 因此我们得到 P 具有 R'-R 双模结构). 类似地, 标准环同构 $R \to \mathrm{End}_R(R_R), r \mapsto l_r$ 导出环同构 $R \to \mathrm{End}_{R'}(P'_{R'}), r \mapsto F(l_r)$, 因此可以在 $P'_{R'}$ 上赋予左 R-模结构. 因此我们得到了双模 ${}_{R'}P_R, {}_RP'_{R'}$. 下面我们说明有 R-R' 双模同构 ${}_RP'_{R'} \cong \mathrm{Hom}_R({}_{R'}P_R, {}_RR_R)$. 设 $\zeta : \mathrm{obMod}\text{-}R \to \bigcup_{M\in\mathrm{obMod}\text{-}R} \mathrm{Hom}_R(GFM, M), M \mapsto \zeta_M$ 是函子 GF 到恒等函子 $1_{\mathrm{Mod}\text{-}R}$ 的自然同构, 那么对每个 $r \in R$, 下图交换：

$$\begin{array}{ccc} GFR & \xrightarrow{\zeta_R} & R \\ {\scriptstyle GF(l_r)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_r} \\ GFR & \xrightarrow{\zeta_R} & R \end{array}$$

我们在 GFR 上赋予左 R-模结构：$rx = GF(l_r)x, \forall r \in R, x \in GLR$, 由 G, F 均为加性函子可知这是定义合理的. 注意到 $GF(l_r)$ 是右 R-模同态, 因此 GFR 是 R-R 双模. ζ_R 诱导加群同构 $(\zeta_R)_* : \mathrm{Hom}_R({}_{R'}P_R, {}_R(GFR)_R) \to \mathrm{Hom}_R({}_{R'}P_R, {}_RR_R), h \mapsto \zeta_R h$, 现验证这是 R-R' 双模同构, 对任给 $r \in R, r' \in R'$, 有 $(\zeta_R)_*(rh) = \zeta_R GF(l_r)h = l_r\zeta_R h = r(\zeta_R)_*(h)$, 因此 $(\zeta_R)_*$ 是左 R-模同态. $(\zeta_R)_*(hr') = \zeta_R(hl_{r'}) = (\zeta_R h)l_{r'} = (\zeta_R)_*(h)r'$, 因此 $(\zeta_R)_*$ 是右 R'-模同态. 这就验证了 $(\zeta_R)_*$ 是 R-R' 双模同构. 记 $\sigma : P' \to \mathrm{Hom}_{R'}(R'_{R'}, P'_{R'}), p' \mapsto \sigma(p') : R' \to P', r' \mapsto p'r'$ 是标准同构, 易见这是 R-R' 双模同构. 函子 G 导出加群同构：$G : \mathrm{Hom}_{R'}({}_{R'}R'_{R'}, {}_RP'_{R'}) \to$

$\mathrm{Hom}_R({}_{R'}P_R, {}_R(GFR)_R), f \mapsto G(f)$, 事实上这也是 R-R' 双模同构：对任给 $r \in R, r' \in R'$, 有 $G(rf) = G(F(l_r)f) = GF(l_r)G(f) = rG(f)$, $G(fr') = G(fl_{r'}) = G(f)G(l_{r'}) = G(f)r'$. 考虑 R-R' 双模同构链：

$$P' \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Hom}_{R'}(R'_{R'}, P'_{R'}) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}_R({}_{R'}P_R, {}_R(GFR)_R) \xrightarrow{(\zeta_R)_*} \mathrm{Hom}_R({}_{R'}P_R, {}_RR_R)$$

这给出了 R-R' 双模同构 $P' \cong \mathrm{Hom}_R({}_{R'}P_R, {}_RR_R)$. 记 $R'' = \mathrm{End}_R(P_R)$, 那么得到环同构 $\delta : R' \to R'', r' \mapsto G(l_{r'})$. 考虑由有限生成投射生成子 P_R 决定的标准 Morita Context$(R, R'', {}_{R''}P_R, {}_RP^*_{R''}, \tau_1, \mu_1)$, 我们说明它可以诱导出一个 Morita Context$(R, R', {}_{R'}P_R, {}_RP'_{R'}, \tau, \mu)$ 使得 τ, μ 都是满射.

利用环同构 $\delta : R' \to R''$ 可将单边 R''-模视作 R'-模, 将单边 R'-模视作 R''-模. 易见 $\gamma : P^* \times P \to P^* \otimes_{R''} P, (x, x^*) \mapsto x \otimes x^*$ 是定义合理的 R'-平衡映射 (对任给 $r' \in R', p^* \in P^*, p \in P$, 有 $\gamma(p^*r', p) = p^*G(l_{r'}) \otimes p = p^* \otimes G(l_{r'})p = \gamma(p^*, r'p)$), 这导出加群同态 $\alpha : P^* \otimes_{R'} P \to P^* \otimes_{R''} P$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} P^* \times P \arrow[r, "\otimes_{R'}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & P^* \otimes_{R'} P \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\ & P^* \otimes_{R''} P \end{tikzcd}$$

易见 α 是 R-R 双模同态. 同理可构造加群同态 $\alpha' : P^* \otimes_{R''} P \to P^* \otimes_{R'} P$ 使得 $\alpha'(p^* \otimes p) = p^* \otimes p$, 易见 α 与 α' 互为逆映射, 所以 α 是 R-R 双模同构. 于是 $\tau = \tau_1\alpha : P^* \otimes_{R'} P \to R$ 是 R-R 双模同构. 命 $\mu = \delta^{-1}\mu_1 : P \otimes_R P^* \to R'$, 易见这是 R'-R' 双模同构. 记 P^* 为 P', 容易验证 $(R, R', {}_{R'}P_R, {}_RP'_{R'}, \tau, \mu)$ 是 Morita Context 且 τ, μ 均为满射.

最后验证自然同构 $F \cong - \otimes_R P', G \cong - \otimes_{R'} P$. 根据 [引理1.24] 可知有自然同构

$$F \cong \mathrm{Hom}_{R'}(R'_{R'}, F-) \cong \mathrm{Hom}_R(P_R, GF-) \cong \mathrm{Hom}_R(P_R, -) \cong - \otimes_R P',$$

$$G \cong \mathrm{Hom}_R(R_R, G-) \cong \mathrm{Hom}_{R'}(P'_{R'}, FG-) \cong \mathrm{Hom}_{R'}(P'_{R'}, -) \cong - \otimes_{R'} P.$$

□

Remark 1.26. 证明过程也说明对模范畴间的一对等价函子 $F : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R'$ 与 $G : \text{Mod-}R' \to \text{Mod-}R$, 存在 R'-R 双模 P 使得 P_R 与 ${}_{R'}P$ 均为相应范畴内的有限生成投射生成子, 并且等价函子可实现为 $F \cong \mathrm{Hom}_R(P_R, -), G \cong - \otimes_{R'} P$, 它们同时也给出范畴等价 $\text{mod-}R \cong \text{mod-}R'$

作为 Morita II 的应用, 我们说明模范畴间的等价函子一定是正合的, 并且保持模的平坦性和有限生成性.

Corollary 1.27. 模范畴间的 (共变加性) 等价函子是正合函子.

Proof. 先说明右模范畴的情形. 设共变加性函子 $F : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R'$ 与 $G : \text{Mod-}R' \to \text{Mod-}R$ 是一对等价函子, 那么 Morita II 表明存在 Morita Context$(R, R', {}_{R'}P_R, {}_RP'_{R'}, \tau, \mu)$ 满足 τ, μ 都是满射, 且 $F \cong - \otimes_R P'$. 由 Morita I 知 ${}_RP'$ 是有限生成投射生成子, 所以 F 是正合函子. 对左模范畴的情形, 如果 $F : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ 是范畴等价, 那么 F 诱导 $\text{Mod-}R^{op}$ 到 $\text{Mod-}S^{op}$ 间的范畴等价, 故应用右模范畴情形的结论即得. □

Corollary 1.28. 设 R, R' 是含幺环, 函子 $F : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R'$ 与 $G : \text{Mod-}R' \to \text{Mod-}R$ 是一对等价函子, $M \in \mathrm{obMod}\text{-}R$, 那么 $\mathrm{p.dim}_R M = \mathrm{p.dim}_{R'} FM, \mathrm{inj.dim}_R M = \mathrm{inj.dim}_{R'} FM$.

Proof. 我们已经看到了 F 是正合函子, 再利用 F 保持投射模和内射模即得. □

Corollary 1.29. 设 R, R' 是含幺环, 函子 $F: \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R'$ 与 $G: \text{Mod-}R' \to \text{Mod-}R$ 是一对等价函子, 那么对平坦右 R-模 M 有 FM 是平坦右 R'-模.

Proof. 由 Morita II, 存在 Morita Context$(R, R', {}_{R'}P_R, {}_RP'_{R'}, \tau, \mu)$ 满足 τ, μ 都是满射, 且 $F \cong - \otimes_R P'$. 并且 Morita I 说 ${}_RP'$ 是有限生成投射生成子. 于是 $FM \otimes_{R'} - \cong (M \otimes_R P') \otimes_{R'} - \cong M \otimes_R (P' \otimes_{R'} -) = (M \otimes_R -)(P' \otimes_{R'} -)$ 是正合函子, 所以 FM 是平坦模. □

在 [推论1.3] 中我们看到 $\text{Mod-}R \cong \text{Mod-}S$ 的充要条件是 $R^{op}\text{-Mod} \cong S^{op}\text{-Mod}$, 由此可得

Corollary 1.30. 设 R, R' 是含幺环, 那么 $\text{Mod-}R \cong \text{Mod-}R'$ 的充要条件是 $R\text{-Mod} \cong R'\text{-Mod}$.

Proof. 必要性：由 Morita II, 存在 Morita Context$(R, R', {}_{R'}P_R, {}_RP'_{R'}, \tau, \mu)$ 满足 τ, μ 都是满射. 于是由 Morita I 即得结论. 充分性：这时有范畴等价 $\text{Mod-}R^{op} \cong \text{Mod-}(R')^{op}$, 于是应用必要性证明的结果得范畴等价 $R^{op}\text{-Mod} \cong (R')^{op}\text{-Mod}$, 故有 $\text{Mod-}R \cong \text{Mod-}R'$. □

任何含幺环 R 总可视作自身上的模, 通过引入环 R 上的模 (或者说 R 的表示), 我们能够得到环丰富的结构信息. 对单个环 R 的研究我们常在 R-模范畴中工作, 现在让我们用更广阔的视野来研究两个环之间的关系.

Definition 1.31 (Morita 等价)**.** 设 R, R' 是含幺环, 如果有范畴等价 $\text{Mod-}R \cong \text{Mod-}R'$(或等价地, $R\text{-Mod} \cong R'\text{-Mod}$), 称 R 和 R' 是 **Morita 等价的**, 记作 $R \approx S$. 同构的环明显 Morita 等价.

Corollary 1.32. 设 R, R' 是含幺环, 那么当 $R \approx R'$ 时, R 是左 (右)Artin 环当且仅当 R' 是左 (右)Artin 环. R 是左 (右)Noether 环当且仅当 R' 是左 (右)Noether 环.

Proof. 仅验证 R 是右 Artin(Noether) 环时, R' 也是右 Artin(Noether) 环. 这时存在右 R-模 M 使得 $FM \cong R'$, 故 FM 是有限生成右 R'-模, 再两边作用 G 可得 M 也是有限生成的. 所以当 R 是右 Artin(Noether) 环时, M 是右 Artin(Noether) 模, 于是 $R' \cong FM$ 也是右 Artin(Noether) 模. □

通过 Morita 等价定义出含幺环全体 ob**Ring** 上的等价关系, 每个含幺环 R 都可以考虑它的 Morita 等价类. [例1.14] 表明矩阵环 $\text{M}_n(R)$ 总在 R 的 Morita 等价类中.

Proposition 1.33. 设 R, R' 是含幺交换环, 那么 $R \cong R'$ 当且仅当 $R \approx R'$.

Proof. 只需说明充分性. 若 $R \approx R'$, 由 Morita II, 存在 Morita Context$(R, R', {}_{R'}P_R, {}_RP'_{R'}, \tau, \mu)$ 满足 τ, μ 都是满射, 进而由 Morita I 得中心同构 $C(R) \cong C(R')$. 而 R, R' 交换意味着 $R = C(R) \cong C(R') = R'$. □

上述命题表明含幺环 R 所在的 Morita 等价类仅有 R 非交换的时候才比较有趣, 含幺交换环的 Morita 等价类恰是它的同构类. 并且, 这也说明在交换的世界里, 交换环和其模范畴“本质上”是对应好的. 注意 Morita II 也告诉我们当 $R \approx R'$ 时, 存在 Mod-R 中的有限生成投射生成子 P_R 使得 $R' \cong \text{End}_R(P_R)$, 所以

Corollary 1.34. 设 R 满足任何有限生成投射 R-模都是自由模, 那么 R 满足: 对任何含幺环 R', $R \approx R'$ 的充要条件是存在正整数 n 使得 $R' \cong \text{M}_n(R)$.

Proof. 只需说明必要性, 这时存在 Mod-R 中的有限生成投射生成子 P_R 使得 $R' \cong \text{End}_R(P_R)$, 于是由 P_R 是自由模知存在正整数 n 使得 $\text{End}_R(P_R) \cong \text{M}_n(R)$. □

在 [推论1.28] 中我们看到模范畴间的等价函子保持模的投射维数与内射维数, 因此

Corollary 1.35. 设 R, R' 是含幺环, 那么当 $R \approx R'$ 时, $\mathrm{l.gl.dim}R = \mathrm{l.gl.dim}R'$ 且 $\mathrm{r.gl.dim}R = \mathrm{r.gl.dim}R'$.

一般地, 一个环论性质 $\mathcal{P}$ 如果满足: 当 R 满足 $\mathcal{P}$ 时, 任何与 R 是 Morita 等价的环 R' 也满足 $\mathcal{P}$, 则称性质 $\mathcal{P}$ 是 **Morita 不变量**. 通过前面的讨论, 我们看到: 左/右 Noether 性、左/右 Artin 性、整体维数都是 Morita 不变量.

Proposition 1.36. 含幺环的单性是 Morita 不变量. 即若含幺环 $R \approx R'$, 那么 R 是单环时, R' 也是单环.

Proof. 若 $R \approx R'$, 由 Morita II, 存在 Morita Context$(R, R', {}_{R'}P_R, {}_RP'_{R'}, \tau, \mu)$ 满足 τ, μ 都是满射, 进而由 Morita I 得 R 与 R' 两者的理想格同构. 从而 R 是单环时, R' 也是单环. □

1.7 Morita 等价的刻画

本节我们介绍两个 Morita 等价的刻画, 并搞清楚与一个给定含幺环 R 是 Morita 等价的环 R'(同构意义下) 具有何种形式. 第一个刻画的准备已经全部做好.

Proposition 1.37. 设 R, R' 是含幺环, 则 $R \approx R'$ 的充要条件是存在 Mod-R 中的有限生成投射生成子 P_R 使得 $R' \cong \mathrm{End}_R(P_R)$.

Proof. 必要性由 Morita II 立即得到. 充分性来自 [例1.15]. □

Remark 1.38. 如果 R, R' 是 Morita 等价的 $\Bbbk$-代数 (这里要求模范畴间的等价函子所诱导的 Hom 集之间的加群同构是 $\Bbbk$-线性的), 那么也有相应 Morita II 成立. 于是存在 Mod-R' 中的有限生成投射生成子 $P'_{R'}$ 使 $R \cong \mathrm{End}_{R'}(P'_{R'})$(作为 $\Bbbk$-代数). 反之, 根据上述命题, 只要有环同构 $R \cong \mathrm{End}_{R'}(P'_{R'})$ 就可保证 $R \approx R'$.

称含幺环 R 的一个幂等元 e 是**完全幂等元**, 如果 $ReR = R$. 我们要证的第二个刻画是

Theorem 1.39. 设 R, R' 是含幺环, 则 $R \approx R'$ 的充要条件是存在正整数 n 和矩阵环 $\mathrm{M}_n(R)$ 的完全幂等元 e 使得 $R' \cong e\mathrm{M}_n(R)e$.

为了证明上述定理, 我们需要下面的引理.

Lemma 1.40. 设 R 是含幺环, e 是 R 的一个幂等元, 则
(1) 对任何右 R-模 N, 有加群同构 $\theta : \mathrm{Hom}_R(eR, N) \to Ne, f \mapsto f(e)$. 当 $N = eR$ 时, θ 是环同构.
(2) 右 R-模 eR 的迹理想 (回忆 [命题1.11(3)])$T(eR) = ReR$. 故 eR 是生成子当且仅当 e 是完全幂等元.
(3) 对右 R-模 M, M 是循环投射生成子的充要条件是存在完全幂等元 f 使得 $M \cong fR$.
(4) 设右 R-模 M 有直和分解 $M = M_1 \oplus M_2$, $e_i \in \mathrm{End}_R(M_R)$ 是 M 在 M_i 上标准投射决定的幂等变换, 则有环同构 $\mathrm{End}_R(M_i) \cong e_i(\mathrm{End}_R M)e_i, i = 1, 2$.

Proof. (1) 是容易验证的, 它也指出 $\mathrm{Hom}_R(eR, N)$ 中任何右模同态由 Ne 中某个元素决定 (具体地, 对每个 $f \in \mathrm{Hom}_R(eR, N)$, 存在唯一的 $x \in Ne$ 使得 $f(ea) = xa, \forall a \in R$). 根据 (1), 当 $N = R$ 时, 每个 $f \in \mathrm{Hom}_R(eR, R)$ 的值域都在 ReR 中, 故 $T(eR) \subseteq ReR$, 再注意到 $e \in T(eR)$, 所以 (2) 成立. (2) 告诉我们对幂等元 f, fR 是生成子的充要条件是 f 是完全幂等元. 而一个右 R-模 M 是循环投射模当且仅当 M 同构

于 R_R 的某个直和因子, 而 R_R 的直和因子总是右某个幂等元生成的循环模, 由此可看出 (3) 成立. 最后证明 (4), 以 $i=1$ 为例. 作 $\varphi: e_1(\mathrm{End}_R M)e_1 \to \mathrm{End}_R M_1, e_1\eta e_1 \mapsto (e_1\eta e_1)|_{M_1}$, 它明显定义合理且由每个 $e_1\eta e_1$ 在 M_2 上取值是零可得 φ 单, 容易验证 φ 是满环同态. □

现在我们可以证明 [定理1.39]: 先说明充分性, 如果有正整数 n 和矩阵环 $\mathrm{M}_n(R)$ 的完全幂等元 e 使得 $R' \cong e\mathrm{M}_n(R)e$, 我们需要说明 $e\mathrm{M}_n(R)e \approx R$. 由 [引理1.40(1)] 得环同构 $\mathrm{End}_{\mathrm{M}_n(R)}(e\mathrm{M}_n(R)) \cong e\mathrm{M}_n(R)e$, 同时, [引理1.40(2)] 表明这时 $e\mathrm{M}_n(R)$ 是 $\mathrm{M}_n(R)$-Mod 中的有限生成投射生成子, 故应用 [命题1.37] 即得

$$e\mathrm{M}_n(R)e \cong \mathrm{End}_{\mathrm{M}_n(R)}(e\mathrm{M}_n(R)) \approx \mathrm{M}_n(R) \approx R.$$

必要性: 如果 $R \approx R'$, 同样 [命题1.37] 表明存在 Mod-R 中的有限生成投射生成子 P_R 使得 $R' \cong \mathrm{End}_R(P_R)$, P 作为有限生成投射模一定同构于某个 R^n(秩 n 列向量全体) 的直和因子, 不妨设 P 就是 R^n 的直和因子且是生成子. 设 e 是 R^n 在 P 上的投射, 则由 [引理1.40(4)] 得 $\mathrm{End}P_R \cong e(\mathrm{End}R^n)e$. 因为环同构 $\mathrm{End}R^n \cong \mathrm{M}_n(R)$, 仍记 e 对应在矩阵环中的幂等矩阵是 e(于是 eR^n 无论把 e 视作模同态或是幂等矩阵, 都是 P_R), 那么有环同构 $R' \cong e\mathrm{M}_n(R)e$. 还需说明这里的幂等矩阵 e 是 $\mathrm{M}_n(R)$ 的完全幂等元, 只需说明 e 生成的理想是整个矩阵环. 由 [引理1.40(2)], 仅需验证 eR^n 的迹理想是 R. 因为 eR^n 是 R^n 的直和因子, 所以每个 $f \in \mathrm{Hom}_R(eR^n, R)$ 均为某个 $g: \mathrm{Hom}_R(R^n, R)$ 在 eR^n 上限制得到. 有了这一观察, 注意到 $1 \in T(P_R) = T(eR^n) = (\{\alpha^T e\beta | \alpha, \beta \in R^n\})$, 因此存在 $A, B \in \mathrm{M}_n(R)$ 使得 $AeB = E_{11}$, 其中 E_{11} 表示 $(1,1)$ 元为 1, 其余位置是零的基础矩阵. 从而 e 在 $\mathrm{M}_n(R)$ 中生成的理想是 $\mathrm{M}_n(R)$. 由此得到 e 是完全幂等元, 证毕.

Remark 1.41. 如果 R, R' 是域 $\Bbbk$ 上的代数, 那么前面的所有同构都是 $\Bbbk$-线性的, 进而当 $R \approx R'$(作为 $\Bbbk$-代数) 时, 存在正整数 n 和矩阵代数 $\mathrm{M}_n(R)$ 的完全幂等元 e 使得 $R' \cong e\mathrm{M}_n(R)e$(作为 $\Bbbk$-代数).

总结一下, 对含幺环 R, R', 以下三条等价:

- $R \approx R'$.
- 存在 Mod-R 中的有限生成投射生成子 P_R 使得 $R' \cong \mathrm{End}_R(P_R)$.
- 存在正整数 n 和矩阵环 $\mathrm{M}_n(R)$ 的完全幂等元 e 使得 $R' \cong e\mathrm{M}_n(R)e$.

其中第三条是与 R 有关的具体环. 我们也得到下述推论.

Corollary 1.42. 设 $\mathcal{P}$ 是一个环论性质, 则 $\mathcal{P}$ 是 Morita 不变量的充要条件是只要含幺环 R 满足 $\mathcal{P}$, 则对 R 的任何完全幂等元 e 以及任何正整数 n, eRe 和 $\mathrm{M}_n(R)$ 也满足 $\mathcal{P}$.

Corollary 1.43. 设 R, R' 是含幺环, 则 $R \approx R'$ 的充要条件是有限生成模范畴 mod-$R \cong$ mod-R'.

Proof. 必要性在 [推论1.22] 中已证. 为了说明充分性, 只需证明存在有限生成投射生成子 P_R 使得 $R' \cong \mathrm{End}(P_R)$. 设 $F:$ mod-$R \to$ mod-R' 和 $G:$ mod-$R' \to$ mod-R 是一对等价函子. 那么 GR' 是有限生成右 R-模. 下面说明 GR' 是 Mod-R 中的有限生成投射生成子, 一旦证明该断言, 由环同构 $\mathrm{End}_R(GR') \cong \mathrm{End}_{R'}(R'_{R'}) \cong R'$ 可得 Morita 等价 $R \approx R'$. 根据 [命题1.11], 要说明 GR' 是生成子只需说明存在正整数 m 使得 $(GR')^m$ 到 R 有满同态. 注意到 FR 是有限生成模, 故存在正整数 m 使得 $(R')^m$ 到 FR 有满模同态, 对此模同态作用 (加性函子)G 可得 $(GR')^m$ 到 R 有 epic 态. 而 mod-R 中 epic 态和满模同态等价, 所以 $(GR')^m$ 到 R 有满同

态. 这就证明了 GR' 是有限生成的生成子. 最后需要验证 GR' 是投射右 R-模. 因为首先存在正整数 t 使得 R^t 到 GR' 有满同态 $\beta : R^t \to GR'$. 作用 F 可得满同态 $F\beta : F(R^t) \to FGR'$, 注意到 $FGR' \cong R'$ 是投射模, 故存在模同态 $h : FGR' \to F(R^t)$ 使得 $(F\beta)h = \mathrm{id}_{F(GR')}$. 因为 F 是忠实的满函子, 所以存在唯一的模同态 $\alpha : GR' \to R^t$ 使得 $h = F\alpha$, 进而 $\beta\alpha = \mathrm{id}_{R'}$. 由此得到 GR' 是 R^t 的直和因子, 这说明 GR' 是投射右 R-模. 由此得到 GR' 是 Mod-R 中的有限生成投射生成子. □

Remark 1.44. 根据 Morita 等价的定义, 对含幺环 R, R', 有: mod-$R \cong$ mod-$R' \Leftrightarrow$ Mod-$R \cong$ Mod-R'. 并且我们看到, 如果 mod-$R \cong$ mod-R', 那么存在 R'-R 双模 P 使得 P_R 与 ${}_{R'}P$ 均为相应范畴内的有限生成投射生成子, 并且 $\mathrm{Hom}_R(P_R, -)$ 和 $- \otimes_{R'} P$ 具体给出范畴等价 mod-$R \cong$ mod-R'.

Example 1.45. 如果 R 是 PI 环, 那么 $\mathrm{M}_n(R)$ 也是 PI 环. 对任何幂等元 $e \in R$, eRe 也是 PI 的 (作为 R 的子环). 因此环的 PI 性质也是 Morita 不变量.

1.8 Morita III

根据 Morita II 我们知道模范畴间的等价在自然同构意义下可由张量函子实现, 本节所介绍的 Morita III 将使我们对范畴等价的模范畴间的等价函子自然同构类有更进一步认识.

如果有含幺环的 Morita 等价 $R \approx R'$, 那么 Morita II 说有 Morita Context$(R, R', {}_{R'}P_R, {}_RP'_{R'}, \tau, \mu)$ 满足 τ, μ 都是满射, 结合 Morita I 我们知道 τ, μ 均为双模同构, 即给出 R-R 双模同构 $P' \otimes_{R'} P \cong R$ 以及 R'-R' 双模同构 $P \otimes_R P' \cong R'$. 反之, 如果 R'-R 双模 P 和 R-R' 双模 P' 给出双模同构 $P' \otimes_{R'} P \cong R, P \otimes_R P' \cong R'$, 那么张量函子 $- \otimes_R P'$ 以及 $- \otimes_{R'} P$ 给出 Mod-R 与 Mod-R' 间的范畴等价, 于是 $R \approx R'$.

Definition 1.46 (可逆双模)**.** 设 R, R' 是含幺环, 如果双模 ${}_{R'}P_R$ 满足存在双模 ${}_RP'_{R'}$ 使得有双模同构 $P' \otimes_{R'} P \cong R, P \otimes_R P' \cong R'$, 则称 ${}_{R'}P_R$ 是**可逆双模**.

Theorem 1.47 (Morita III)**.** 设 R, R' 是含幺环且 $R \approx R'$, 则
(1) 可逆 R'-R 双模同构类全体与 Mod-R' 到 Mod-R 的等价函子自然同构类全体有双射

$$\alpha_{(R',R)} : \{\text{可逆}R'\text{-}R\text{双模同构类}\} \to \{\text{Mod-}R'\text{到Mod-}R\text{的等价函子自然同构类}\}, [{}_{R'}P_R] \mapsto [- \otimes_{R'} P]$$

(2) 若还有含幺环 R'' 使 $R \approx R' \approx R''$, 则对范畴等价 $F : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R', F' : \text{Mod-}R' \to \text{Mod-}R''$, 设 ${}_RP'_{R'}$ 是等价函子 F 关于上述对应的一个可逆双模 (从等价类中取出代表元), ${}_{R'}Q'_{R''}$ 是等价函子 F' 关于上述对应的一个可逆双模, 那么等价函子 $F'F : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R''$ 关于上述对应, 对应于可逆双模同构类 $[P' \otimes_{R'} Q']$.

Proof. (1) 根据可逆双模的定义可以看到映射 $\alpha_{(R',R)}$ 是定义合理的. Morita II 说模范畴间的等价函子在自然同构意义下可由张量函子实现, 根据上面的讨论知模范畴间的等价函子一定自然同构于某可逆双模决定的张量函子, 进而知 $\alpha_{(R',R)}$ 是满射. 所以只需要再验证 $\alpha_{(R',R)}$ 是单射. 为此, 需要说明当可逆 R'-R 双模 P_1, P_2 满足自然同构 $- \otimes_{R'} P_1 \cong - \otimes_{R'} P_2$ 时, 有 R'-R 双模同构 $P_1 \cong P_2$. 设

$$\eta : \text{obMod-}R' \to \bigcup_{M' \in \text{obMod-}R'} \mathrm{Hom}_R(M' \otimes_{R'} P_1, M' \otimes_{R'} P_2), M' \mapsto \eta_{M'}$$

是函子 $-\otimes_{R'} P_1$ 到恒等函子 $-\otimes_{R'} P_2$ 的自然同构, 则对每个 $b'\in R'$, 下图交换

$$\begin{tikzcd}
R'\otimes_{R'} P_1 \arrow[r, "\eta_{R'}"] \arrow[d, "(b')_l\otimes \mathrm{id}_{P_1}"'] & R'\otimes_{R'} P_2 \arrow[d, "(b')_l\otimes \mathrm{id}_{P_2}"] \\
R'\otimes_{R'} P_1 \arrow[r, "\eta_{R'}"] & R'\otimes_{R'} P_2
\end{tikzcd}$$

由此得到 $\eta_{R'}$ 是 $R'\otimes_{R'} P_1$ 与 $R'\otimes_{R'} P_2$ 间的 R'-R 双模同构, 从而有 R'-R 双模同构 $P_1\cong P_2$.

(2) 由条件, 我们有自然同构 $F\cong -\otimes_R P'$ 以及 $F'\cong -\otimes_{R'} Q'$, 故有自然同构 $F'F\cong(-\otimes_R P'_{R'})\otimes_{R'} Q'\cong -\otimes_R ({}_RP'_{R'}\otimes_{R'} {}_{R'}Q'_{R''})$. 因此 $F'F$ 对应可逆双模同构类 $[P'\otimes_{R'} Q']$. □

特别地, 当 $R=R'$ 时, 我们得到 Mod-R 的自等价函子自然同构类对应于可逆 R-R 双模同构类.

Definition 1.48 (Picard 群)**.** 设 R 是含幺环, 记所有可逆 R-R 双模同构类所构成的类是 $\mathrm{Pic}(R)$, 它是集合: $\psi:\mathrm{Pic}(R)\to \text{mod-}R\times R\text{-mod}, [{}_RM_R]\mapsto([M_R],[{}_RM])$, 其中 mod-$R$, R-mod 表示有限生成模范畴, 易见 ψ 是定义合理的单射, 因此由有限生成左 (右) 模同构类全体是集合以及替换公理得到 $\mathrm{Pic}(R)$ 是集合. 下面我们在 $\mathrm{Pic}(R)$ 上定义二元运算: $[{}_RM_R][{}_RN_R]=[{}_RM_R\otimes_R {}_RN_R]$, 容易验证这是定义合理的二元运算且 $\mathrm{Pic}(R)$ 关于该二元运算构成群, 单位元是 $[{}_RR_R]$, 每个元素 $[{}_RM_R]$ 有逆元 $[{}_RM'_R]$. 称 $\mathrm{Pic}(R)$ 是环 R 的 **Picard 群**, 以 C. E. Picard(法国, 1856-1941) 命名. 特别地, 模范畴 Mod-R 上自等价函子同构类构成群.

1.9 Smash 积与不动环的 Morita Context

本节固定 $(H,\pi,u;\Delta,\varepsilon)$ 是域 $\Bbbk$ 上有限维 Hopf 代数, 有对极映射 S, 其 **twisted 对极映射**记作 $\overline{S}$(回忆有限维 Hopf 代数的对极映射必可逆, 故这里 $\overline{S}=S^{-1}$). 并设 A 是个左 H-模代数, 那么可定义出**冲积代数** $A\#H$ 和**不动环** $A^H=\{a\in A|ha=\varepsilon(h)a,\forall h\in H\}$. 因为 H 是有限维 Hopf 代数, 所以它的左右积分空间都是 1 维的, 分别记为 $\int_H^l$ 和 $\int_H^r$. 对 $t\neq 0\in\int_H^l$, 记 t 决定的**迹函数**是 $\hat{t}:A\to A^H, a\mapsto ta$, 它是 A^H-A^H 双模同态. 并且由 Maschke 定理, 当 H 是有限维半单 Hopf 代数时, 迹函数 $\hat{t}$ 一定是满射 (因为这时 $\varepsilon(t)\neq 0$, 不妨设 $\varepsilon(t)=1$, 进而 $\hat{t}(1)=\varepsilon(t)1=1$). 在经典不变量理论中, 人们感兴趣带有群 G 作用的结合代数 A 与不动子代数 A^G 之间的关系. 例如, 在交换代数中, 一个经典结论是如果有限群 G 作用在 $\Bbbk$-交换仿射代数 A 上, 那么 A^G 也是仿射代数. 本节的主要目标是说明: 对任何有限维 Hopf 代数 H 和左 H-模代数 A, 取定 $0\neq t\in\int_H^l$, A 上有 A^H-$A\#H$ 双模结构 ${}_{A^H}A_{A\#H}$ 以及 $A\#H$-A^H 双模结构 ${}_{A\#H}A_{A^H}$, 有双模同态 $\mu:A\otimes_{A\#H}A\to A^H, a\otimes b\mapsto \hat{t}(ab)$ 以及 $\tau:A\otimes_{A^H}A\to A\#H, a\otimes b\mapsto(a\#1)(1\#t)(b\#1)$(之后会说明定义合理), 它们给出一个 Morita Context$(A\#H, A^H, {}_{A^H}A_{A\#H}, {}_{A\#H}A_{A^H},\tau,\mu)$. 并且当迹函数 $\hat{t}$ 是满射且 $(1\#t)=A\#H$ 时, 有 Morita 等价 $A\#H\approx A^H$.

我们先来看看 $1\#t$ 在冲积代数 $A\#H$ 中所生成理想的形式. 回忆对 $t\in\int_H^l$, $th\in\int_H^l,\forall h\in H$. 故由积分空间是 1 维的, 存在 $\alpha\in H^*$ 使得 $th=\alpha(h)t,\forall h\in H$. 易验证 α 是 H^* 中群样元, 称 $\alpha\in G(H^*)$ 是 **distinguished 群样元**.

Lemma 1.49. 设 H 是有限维 Hopf 代数, 作用于 $\Bbbk$-代数 A 上, 取定 $0\neq t\in\int_H^l, a\in A, h\in H$, 我们有
$(1) a\#h=\sum\limits_{(h)}(1\#h_{(2)})(\overline{S}h_{(1)}a\#1)$.
$(2) (1\#h)(a\#t)=ha\#t$ 且 $(1\#t)(a\#h)=(1\#t)\left(\bar{S}\left(h^{\alpha}\right)\cdot a\#1\right)$, 其中 $\alpha\in H^*$ 是 distinguished 群样元, $h^{\alpha}=$

$\alpha \rightharpoonup h$.

(3)$(1\#t)=(A\#1)(1\#t)(A\#1)$.

Proof. (1) 直接计算有

$$\sum_{(h)}(1\#h_{(2)})(\overline{S}h_{(1)}a\#1)=\sum_{(h)}h_{(2)}\overline{S}h_{(1)}a\#h_{(3)}1=\sum_{(h)}h_{(2)}\overline{S}h_{(1)}a\#\varepsilon(h_{(3)})1=\sum_{(h)}h_{(2)}\overline{S}h_{(1)}a\#1=\varepsilon(h)a\#1.$$

而 $\varepsilon(h)a\#1=a\#\varepsilon(h)1=a\#h$.

(2) 由冲积代数中乘法定义, $(1\#h)(a\#t)=\sum\limits_{(h)}h_{(1)}a\#h_{(2)}t=\sum\limits_{(h)}h_{(1)}a\#\varepsilon(h_{(2)})t=ha\#t$. 对于第二个等式, 根据 twisted 对极映射的基本性质有

$$\begin{aligned}
(1\#t)(a\#h)&=\sum_{(t)}t_{(1)}a\#t_{(2)}h\\
&=\sum_{(t)}\sum_{(h)}\left(t_{(1)}\varepsilon\left(h_{(1)}\right)\right)\cdot a\#t_{(2)}h_{(2)}\\
&=\sum_{(t)}\sum_{(h)}\left(t_{(1)}h_{(2)}\overline{S}\left(h_{(1)}\right)\right)\cdot a\#t_{(2)}h_{(3)}\\
&=\sum_{(h)}\left(\left(th_{(2)}\right)_{(1)}\overline{S}\left(h_{(1)}\right)\right)\cdot a\#\left(th_{(2)}\right)_{(2)}\\
&=\sum_{(h)}\left(\left(\alpha(h_{(2)})t\right)_{(1)}\overline{S}\left(h_{(1)}\right)\right)\cdot a\#\left(\alpha(h_{(2)})t\right)_{(2)}\\
&=\sum_{(t)}\sum_{(h)}\alpha\left(h_{(2)}\right)t_{(1)}\overline{S}\left(h_{(1)}\right)\cdot a\#t_{(2)}\\
&=\sum_{(t)}t_{(1)}\overline{S}\left(h^{\alpha}\right)\cdot a\#t_{(2)}\\
&=(1\#t)\left(\bar{S}\left(h^{\alpha}\right)\cdot a\#1\right).
\end{aligned}$$

(3) 由 (2) 即得. □

下面我们来赋予任何有限维 Hopf 代数 H 和左 H-模代数 A 上的双模结构, 即给出 A 上有 A^H-$A\#H$ 双模结构 ${}_{A^H}A_{A\#H}$ 以及 $A\#H$-A^H 双模结构 ${}_{A\#H}A_{A^H}$. 因为 A^H 是 A 的子代数, 故 A^H 中元素的左乘与右乘天然地给出 A 上单边 A^H-模结构. 还需给出 A 上的单边 $A\#H$-模结构. 取定 $0\neq t\in\int_H^l$.

A 上的左 $A\#H$-模结构可由 $(a\#h)b=a(hb),\forall a,b\in A,h\in H$, 容易验证这确实是模结构. 直接计算表明 A 上的左 $A\#H$-模结构和自然的右 A^H-模结构使得 A 成为 $A\#H$-A^H 双模.

我们使用 H 的 twisted 对极映射 $\overline{S}$ 和 $t\in\int_H^l$ 决定的 distinguish 群样元 $\alpha\in G(H^*)$ 来赋予 A 上的右 $A\#H$-模结构. 具体地, A 上的右 $A\#H$-模结构由 $a(b\#h)=\overline{S}h^{\alpha}(ab),\forall h\in H,a,b\in A$ 给出 (这里 $\overline{S}=S^{-1}$). 这里的模结构合理性验证并不容易, 这里详细记录计算过程. 只需验证对 $b\#h,c\#g\in A\#H$ 以及 $a\in A$ 有 $[a(b\#h)](c\#g)=a[(b\#h)(c\#g)]$ 即可. 对每个 $x\in H$, 回忆公式 $\Delta(S^{-1}(x))=\sum\limits_{(x)}S^{-1}(x_{(2)})\otimes S^{-1}(x_{(1)})$(利用 $\Delta S=\tau(S\otimes S)\Delta$ 来说明, 其中 τ 是 twist 同构). 现在我们开始验证 $[a(b\#h)](c\#g)=a[(b\#h)(c\#g)]$.

$$a[(b\#h)(c\#g)]=a\sum_{(h)}(bh_{(1)}c\#h_{(2)}g)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(h)} S^{-1}((h_{(2)}g)^{\alpha})(ab(h_{(1)}c)) \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(g)} S^{-1}(\alpha(h_{(3)}g_{(2)})h_{(2)}g_{(1)})(ab(h_{(1)}c)) \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(g)} \alpha(h_{(3)}g_{(2)})S^{-1}(g_{(1)})S^{-1}(h_{(2)})(ab(h_{(1)}c)) \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(g)} \alpha(h_{(4)}g_{(2)})S^{-1}(g_{(1)})(S^{-1}(h_{(3)})(ab)S^{-1}(h_{(2)})(h_{(1)}c)) \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(g)} \alpha(h_{(3)}g_{(2)})S^{-1}(g_{(1)})(S^{-1}(h_{(2)})(ab)\varepsilon(h_{(1)})c)) \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(g)} \alpha(h_{(2)}g_{(2)})S^{-1}(g_{(1)})(S^{-1}(h_{(1)})(ab)c)) \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(g)} \alpha(h_{(2)})\alpha(g_{(2)})S^{-1}(g_{(1)})(S^{-1}(h_{(1)})(ab)c)).
\end{aligned}
$$

最后一个等号成立是因为 α 是 H^* 中群样元. 另一方面, 有

$$
\begin{aligned}
[a(b\#h)](c\#g) &= \overline{S}(h^{\alpha})(ab)(c\#g) \\
&= \sum_{(h)}(\alpha(h_{(2}S^{-1}(h_{(1)})(ab))(c\#g) \\
&= \sum_{(h)} S^{-1}(g^{\alpha})[(\alpha(h_{(2}S^{-1}(h_{(1)})(ab))c] \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(g)} \alpha(g_{(2)})S^{-1}(g_{(1)})\alpha(h_{(2}(S^{-1}(h_{(1)})(ab)c) \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(g)} \alpha(h_{(2)})\alpha(g_{(2)})S^{-1}(g_{(1)})(S^{-1}(h_{(1)})(ab)c)).
\end{aligned}
$$

所以上述右作用确实给出了 A 上右 $A\#H$-模结构. 再说明该右 $A\#H$-模结构与 A 上左 A^H-模结构相容. 对每个 $d \in A^H$, 有 $(da)(b\#h) = S(h^{\alpha})(dab) = \sum_{S(h_{\alpha})}(\varepsilon(S(h^{\alpha})_{(1)})d)(S(h^{\alpha})_{(2)}(ab)) = dS(h^{\alpha})(ab) = d[a(b\#h)]$. 故 ${}_{A^H}A_{A\#H}$ 确实是双模. 总结一下, 我们给出 A 上的 A^H-$A\#H$ 双模结构 ${}_{A^H}A_{A\#H}$ 以及 $A\#H$-A^H 双模结构 ${}_{A\#H}A_{A^H}$. 前面我们提到映射

$$
\mu : A \otimes_{A\#H} A \to A^H, a \otimes b \mapsto \hat{t}(ab)
$$

$$
\tau : A \otimes_{A^H} A \to A\#H, a \otimes b \mapsto (a\#1)(1\#t)(b\#1)
$$

现在来验证它们的合理性. 要说明 μ 的合理性, 只需验证对每个 $c\#h \in A\#H$ 有 $\hat{t}([a(c\#h)]b) = \hat{t}(a[(c\#h)b])$. 直接计算知 $\hat{t}([a(c\#h)]b) = \sum_{(h)} th_{(2)}(S^{-1}(h_{(1)})(ac)b) = \sum_{(h)} t(h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)})(ac)h_{(3)}b) = \sum_{(h)} t(\varepsilon(h_{(1)})(ac)h_{(2)}b) = \hat{t}((ac)(hb)) = \hat{t}(a[(c\#h)b])$. μ 是 A^H-A^H 双模同构的验证是容易的. 下面我们看 τ 的合理性. 只要验证对任何 $c \in A^H$ 有 $(ac\#1)(1\#t)(b\#1) = (a\#1)(1\#t)(cb\#1)$. 直接计算知

$$
\begin{aligned}
(ac\#1)(1\#t)(b\#1) &= (a\#1)(c\#t)(b\#1) \\
&= \sum_{(t)}(a\#1)(ct_{(1)}b\#t_{(2)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(t)} (a\#1)(\varepsilon(t_{(1)})ct_{(2)}b\#t_{(3)}) \\
&= \sum_{(t)} (a\#1)(t_{(1)}(cb)\#t_{(2)}) \\
&= (a\#1)(1\#t)(cb\#1).
\end{aligned}
$$

所以 τ 也定义合理, τ 是左 $A\#H$-模同态的验证是容易的, 但它是右 $A\#H$-模同态的验证有一些技术性. 我们来验证 τ 是右 $A\#H$-模同态. 只需验证对每个 $c\#h \in A\#H$, 有

$$(a\#1)(1\#t)(b\#1)(c\#h) = (a\#1)(1\#t)(b(c\#h)\#1).$$

等式的左边是 $\sum\limits_{(t)}(a\#1)(t_{(1)}(bc)\#t_{(2)}h)$. 我们来计算右边的 $(1\#t)(b(c\#h)\#1)$.

$$
\begin{aligned}
(1\#t)(b(c\#h)\#1) &= (1\#t)(\sum_{(h)} \alpha(h_{(2)})S^{-1}(h_{(1)})(bc)\#1) \\
&= \sum_{(h)} (1\#t)(\alpha(h_{(1)})1_A\#1)(S^{-1}(h_{(1)})(bc)\#1) \\
&= \sum_{(h)} (1\#th_{(2)})(S^{-1}(h_{(1)})(bc)\#1) \\
&= \sum_{(h)} t_{(1)}h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)})(bc)\#t_{(2)}h_{(3)} \\
&= \sum_{(h)} t_{(1)}\varepsilon(h_1)1_H(bc)\#t_{(2)}h_{(2)} \\
&= \sum_{(h)} t_{(1)}(bc)\#t_{(2)}h.
\end{aligned}
$$

至此我们得到了 τ, μ 都是双模同态. 我们还需要承认下面的引理.

Lemma 1.50. [Rad76] 设 H 是有限维 Hopf 代数, $t \neq 0 \in \int_H^l$ 且 α 是左积分 t 决定的 distinguished 群样元. 则 $s(t) = t^\alpha = \sum\limits_{(t)} \alpha(t_{(2)})t_{(1)}$.

现在我们可以给出

Proposition 1.51. 设 H 是有限维 Hopf 代数, 作用在 $\Bbbk$-代数 A 上, $t \neq 0 \in \int_H^l$, α 是左积分 t 决定的 distinguished 群样元, $\hat{t}: A \to A^H$ 是迹函数. 通过如上方式赋予 A 双模结构, 并定义

$$\tau : A \otimes_{A^H} A \to A\#H, a \otimes b \mapsto (a\#1)(1\#t)(b\#1)$$

$$\mu : A \otimes_{A\#H} A \to A^H, a \otimes b \mapsto \hat{t}(ab)$$

得到 6 元组 $(A\#H, A^H, {}_{A^H}A_{A\#H}, {}_{A\#H}A_{A^H}, \tau, \mu)$, 那么该 6 元组是一个 Morita Context.

Proof. 先引入 Morita Context 的标准记号, 记 $\tau(x' \otimes x)$ 为 (x', x), $\mu(x \otimes x')$ 为 $[x, x']$. 那么需要验证的是

$$c[a, b] = (c, a)b, [a, b]c = a(b, c), \forall a, b, c \in A.$$

第一个等式的验证：$c[a,b] = ct(ab) = (c\#1)(1\#t)(a\#1)b = \tau(c \otimes a)b = (c,a)b$.
第二个等式的验证：一方面, $[a,b]c = \hat{abc} = t(ab)c$. 另一方面, $a(b,c) = a(b\#1)(1\#t)(c\#1) = (ab)(1\#t)(c\#1) = \overline{S}(t^{\alpha})(ab)c$. 由 [引理1.50], $\overline{S}(t^{\alpha}) = S^{-1}(t^{\alpha}) = t$, 所以 $a(b,c) = t(ab)c$, 得证. □

根据上述 Morita Context 的定义, 易见 $\mathrm{Im}\mu = \mathrm{Im}\hat{t}$, 同时 [引理1.49(3)] 说 $\mathrm{Im}\tau = (A\#1)(1\#t)(A\#1) = (1\#t)$. 因此, 由 Morita I, 可知

Corollary 1.52. H 是有限维 Hopf 代数, 作用在 $\Bbbk$-代数 A 上, $t \neq 0 \in \int_H^l$, α 是左积分 t 决定的 distinguished 群样元, $\hat{t}: A \to A^H$ 是迹函数. 那么当迹函数 $\hat{t}$ 是满射且 $(1\#t) = A\#H$ 时, Morita Context $(A\#H, A^H, {}_{A^H}A_{A\#H}, {}_{A\#H}A_{A^H}, \tau, \mu)$ 中映射 τ, μ 都是满射, 从而可应用 Morita I. 特别地, 有 Morita 等价

$$A\#H \approx A^H.$$

参考文献

[Lam99] T. Y. Lam. *Lectures on Modules and Rings*. Springer-Verlag, 1999.

[Lam01] T. Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2001.

[Mon93] Susan Montgomery. *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*. American Mathematical Society, 1993.

[MR87] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. American Mathematical Society, 1987.

[Rad76] David E. Radford. The order of the antipode of a finite dimensional hopf algebra is finite. *American Journal of Mathematics*, 98(2):333–355, 1976.