有限群的经典表示论初步

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 12 月 9 日

在 2023 年秋季学期, 我担任复旦数院《现代代数学 II(H)》的课程助教, 课程内容主要由模论和有限群表示论构成. 趁此机会我将过去群表示论笔记中没有涉及到的内容和课程中部分优质习题以及一些新的体会与收获添加入这份笔记. 全文主要用结合代数观点简短有力地介绍有限群的经典表示论的基本概念和思想.

有限群表示论起源于 1896 年 Richard Dedekind(德国, 1831-1916) 和 Ferdinand Georg Frobenius(德国, 1849-1917) 的通信中, 由后者系统发展. 再由 Frobenius 的学生 Issai Schur(1875-1941) 显著地改进与简化了该理论. 这份笔记的正文主要分为以下两部分:

(1) 介绍群的表示的基本概念及其基本例子, 我们指出群的表示本质上就是群代数上的模结构, 等价的群表示对应同构的群代数上的模. 第一部分的主定理是 Maschke 定理, 它表明当有限群的表示的基域特征不整除该群的阶时, 任何表示都是一些不可约表示的直和, 所以这时要研究群的表示, 只需搞清楚不可约表示以及不可约表示间的联系即可. 用模的语言来说, 当基域的特征不整除群的阶时, 群代数是 Artin 半单环, 其上任何非零模完全可约, 于是只需搞清楚群代数上的不可约模以及不可约模之间的同态即可.

(2) 介绍群表示的特征标的概念和基本性质, 特征标作为精巧的数值不变量, 它不仅易计算把握, 且承载了充分多的表示信息. 例如, 我们会说明复数域上任意两个有限维表示等价当且仅当它们特征标一致 (见 [推论2.19]). 并且有限维复表示的不可约性可通过计算特征标复内积判别 (见 [推论2.20]), 这与第一部分提到的研究群复表示的根本任务是研究不可约表示以及不可约表示间的联系呼应. 并且用特征标理论不仅可证明对任给阶为两个不同素数正整数幂乘积的群不是单群 (见 [推论2.47]), 也可给出 Burnside 定理一个较为简单证明. 最后几节主要讨论诱导表示与限制表示的性质, 例如 Frobenius 互反律和 Mackey 不可约性判别准则.

此外, 我在一些章节末尾添加了一些主要结论在具体例子或是某些场景上的应用. 由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎指出, 谢谢.

目录

1 基本概念

在有限群的 Sylow 定理学习中我们看到群作用是强有力的工具, 通过把群作用到某个集合上就足以反映出很多信息. 在环的结构理论中, 任何一个含幺环 R 上的左 R-模 M 就是环 R 的一个表示对象, 模本来就可以看成把环作用到某个 Abel 群上的产物. 通过模论工具我们可以得到环的大量结构信息. 而接下来我们将介绍的群表示, 它是把群线性地作用到线性空间上, 当作用在有限维线性空间上时, 群表示会把每个群中元素对应到一个具体的矩阵, 使得我们可以用线性代数的工具去认识群.

1.1 群的表示

Definition 1.1 (群的表示)**.** 设 G 是群, V 是域 $\Bbbk$ 上线性空间, 称群同态 $\rho: G \to GL(V)$ 是**群 G 在 V 上的一个 $\Bbbk$-线性表示**, 简称为 G 在 $\Bbbk$ 上的**表示**, 其中 $GL(V)$ 表示 V 上可逆线性变换全体构成的群. 这里的线性空间 V 称为表示 ρ 的**表示空间**. 当 ${}_{\Bbbk}V$ 是有限维空间时, 称表示 ρ **有次数 $\mathbf{dim}_{\Bbbk}V$**, 这时也称 ρ 是 G 的**有限维表示**. 当 ${}_{\Bbbk}V$ 作为线性空间维数不是有限时, ρ 为 G 的**无限维表示**.

有了群表示的概念, 随之而来的第一个问题是其存在性问题. 下面的例子给出一个平凡的表示.

Example 1.2 (平凡表示)**.** 设 G 是群, V 是域 $\Bbbk$ 上线性空间, 我们总有平凡群同态 $\rho: G \to GL(V), g \mapsto \mathrm{id}_V$. 称该表示 ρ 为 G 的**平凡表示**.

任给域 $\Bbbk$ 上的代数 A 以及左 A-模 M, M 总有天然的 $\Bbbk$-线性结构并且我们都可以通过 $a \in A$ 在 M 上决定的左乘变换给出 M 上的 $\Bbbk$-线性变换. 现在我们把目光聚焦在群代数上的模的情形, 把群的表示和群代数上的模联系起来. 我们马上会看到, 有一个群表示本质上与有一个群代数上的模是一样的 (见 [定理1.12]).

Example 1.3. 设 G 是群, $\Bbbk G$ 是群代数, 那么对任何群代数 $\Bbbk G$ 上的左模 M, M 有自然的 $\Bbbk$-线性结构, 即对每个 $x \in M$ 与 $c \in \Bbbk$, 定义 $cx = (c1_G)x$. 并且每个 g 都给出了 M 上的可逆 $\Bbbk$-线性变换 $\rho(g): M \to M, x \mapsto gx$, 因此我们得到映射 $\rho: G \to GL(M), g \mapsto \rho(g)$, 它明显是群同态, 故 ρ 是群 G 的一个表示.

Remark 1.4. 如果群 G 是有限群, 那么 $\Bbbk G$ 可以和 $\mathcal{O}(G) = \{f : G \to \Bbbk | f\text{是映射}\}$ 视作等同.

Example 1.5. 设 G, H 是群, $\Bbbk$ 是域, 则有 $\Bbbk$-代数同构: $\Bbbk(G \times H) \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk} \Bbbk H$.

Proof. 首先有标准 $\Bbbk$-线性映射 $\psi: \Bbbk(G \times H) \to \Bbbk G \otimes_{\Bbbk} \Bbbk H, (g, h) \mapsto g \otimes h$, 不难看出 ψ 是 $\Bbbk$-代数同态. 其次, 通过 $\Bbbk$-平衡映射

$$\Bbbk G \times \Bbbk H \to \Bbbk(G \times H), (\sum_{g \in G} a_g g, \sum_{h \in H} b_h h) \mapsto \sum_{(g,h) \in G \times H} a_g b_h (g, h)$$

可诱导 $\Bbbk$-双线性映射 $\varphi: \Bbbk G \otimes_{\Bbbk} \Bbbk H \to \Bbbk(G \times H)$ 满足 $\varphi(g \otimes h) = (g, h)$, 易验证 ψ 与 φ 互为逆映射. □

Example 1.6. 设 G 是 n 阶循环群, 则有 $\Bbbk$-代数同构 $\Bbbk G \cong \Bbbk[x]/(x^n - 1)$.

Proof. 设 G 有生成元 g, 则 g 的阶为 n 且 $\varphi: \Bbbk[x] \to \Bbbk G, a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \mapsto a_0 1 + a_1 g + \cdots + a_m g^m$ 是定义合理的满 $\Bbbk$-代数同态. 注意到对任何自然数 $m \leq n-1$, $1, g, ..., g^m$ 作为 $\Bbbk G$ 中元素是 $\Bbbk$-线性无关的, 所以 $g \in \Bbbk G$ 在域 $\Bbbk$ 上最小多项式次数至少为 n. 于是由 $x^n - 1$ 是 g 的零化多项式可知 $\mathrm{Ker}\varphi = (x^n - 1)$. □

事实上, 如果我们有了群 G 在 $\Bbbk$ 上的一个表示 $\rho: G \to GL(V)$, V 有天然的左 $\Bbbk G$-模结构

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) v = \sum_{g \in G} a_g \rho(g)(v), \forall v \in V, \sum_{g \in G} a_g g \in \Bbbk G.$$

所以一个群 G 的 $\Bbbk$-线性表示所承载的信息和一个群代数 $\Bbbk G$ 上的左模所载有的信息一致. 群代数 $\Bbbk G$ 上的左模自然会反映群 G 本身的一些信息, 以 $\Bbbk G$ 本身为例：对有限群 G, 有 $\dim_{\Bbbk} \Bbbk G = |G|$. 当群 G 有非平凡挠元 $g \neq 1_G$ 时, 群代数 $\Bbbk G$ 会有零因子, 具体地, 设 g 有阶 t, 那么 $(1_G - g)(1_G + g + \cdots + g^{t-1}) = 1_G - g^t = 0$.

Definition 1.7 (忠实表示)**.** 设 G 是群, V 是域 $\Bbbk$ 上线性空间, 如果群的表示 $\rho: G \to GL(V)$ 满足 $\mathrm{Ker}\rho = \{1_G\}$, 即 ρ 是单同态, 则称该表示是**忠实的**. 忠实表示意味着对每个 $g \neq 1_G \in G$, g 在线性空间 V 上的作用一定会使 V 中某个元素变动.

对每个群的表示 $\rho: G \to GL(V)$, 它可天然诱导单群同态 $\overline{\rho}: G/\mathrm{Ker}\rho \to GL(V)$, 所以从每个群的表示出发都可以产生一个忠实表示 $\overline{\rho}: G/\mathrm{Ker}\rho \to GL(V)$. 对任何群我们也可以构造它的忠实表示.

Example 1.8 (正则表示)**.** 设 $V = \Bbbk G$ 是群代数, 则有忠实表示 $\rho: G \to GL(V), g \mapsto g_l$, 其中 g_l 指 g 决定的左乘变换. 我们把该表示 ρ 称为群 G 的**正则表示**.

Definition 1.9 (表示的等价性)**.** 设 G 是群, $\Bbbk$ 是域, $\rho: G \to GL(V)$ 和 $\rho': G \to GL(V')$ 均为群的表示, 如果存在线性同构 $f: V \to V'$ 使得下图对所有的 $g \in G$ 交换, 则称这两个表示是**等价的**.

$$\begin{CD} V @>{f}>> V' \\ @V{\rho(g)}VV @VV{\rho'(g)}V \\ V @>{f}>> V' \end{CD}$$

根据表示等价性的定义, 如果 $\rho: G \to GL(V)$ 和 $\rho': G \to GL(V')$ 这两个表示等价, 即存在线性同构 $f: V \to V'$ 使得 $f\rho(g) = \rho'(g)f, \forall g \in G$, 那么 $f: V \to V'$ 给出左 $\Bbbk G$-模同构. 反之, 如果我们有两个同构的左 $\Bbbk G$-模 V, V', 设 $f: V \to V'$ 是 $\Bbbk G$-模同构, $\rho: G \to GL(V)$ 是 V 上 $\Bbbk G$-模结构给出的表示, $\rho': G \to GL(V')$ 是 V' 上 $\Bbbk G$-模结构给出的表示, 那么 $f: V \to V'$ 是使得下图交换的线性同构.

$$\begin{CD} V @>{f}>> V' \\ @V{\rho(g)}VV @VV{\rho'(g)}V \\ V @>{f}>> V' \end{CD}$$

根据上面的讨论, 我们便看到下述命题成立.

Proposition 1.10. 设 G 是群, $\Bbbk$ 是域, $\rho: G \to GL(V)$ 和 $\rho': G \to GL(V')$ 均为群的表示. 那么这两个表示等价的充要条件是用 ρ, ρ' 分别赋予 V, V' 左 $\Bbbk G$-模结构后, 作为左 $\Bbbk G$-模有同构 $V \cong V'$.

在本节最后, 用范畴语言来更严格地叙述群的表示与群代数上的模本质上一样. 为此, 引入

Definition 1.11 (群表示范畴)**.** 给定群 G 以及域 $\Bbbk$, 通过如下方式来定义范畴 $\mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G)$: 定义对象类 $\mathrm{obRep}_{\Bbbk}(G)$ 为 G 在 $\Bbbk$ 上的线性表示 $\rho: G \to GL(V)$ 全体, 对任意两个群表示 $\rho: G \to GL(V)$ 和 $\rho': G \to GL(V')$, 若线性映射 $f: V \to V'$ 使得下图对所有的 $g \in G$ 交换, 则称 f 是**表示 ρ 到 ρ' 的态** (或**态射**).

$$\begin{CD} V @>{f}>> V' \\ @V{\rho(g)}VV @VV{\rho'(g)}V \\ V @>{f}>> V' \end{CD}$$

记 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G)}(\rho, \rho')$ 为 ρ 到 ρ' 的所有态构成的集合. 于是可天然地定义表示间态的合成. 进而可得范畴 $\mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G)$. 称为群 G 在 $\Bbbk$ 上的**表示范畴**. 记 $\mathrm{rep}_{\Bbbk}(G)$ 为群 G 在 $\Bbbk$ 上所有有限维表示构成的全子范畴.

Theorem 1.12. 给定群 G 以及域 $\Bbbk$, 那么有范畴同构 $\Bbbk G\text{-Mod} \cong \mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G)$.

Proof. 对每个左 $\Bbbk G$-模 V, 可在 [例1.3] 意义下得到表示 $\rho: G \to GL(V)$, 记之为 FV. 任意两个 $\Bbbk G$-模之间的模同态 $f: V \to V'$, 可对应表示之间的态 $f: V \to V'$, 记为 $F(f)$. 由此得到函子 $F: \Bbbk G\text{-Mod} \to \mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G)$. 对每个群的表示 $\rho: G \to GL(V)$, 根据之前的讨论, 可为 V 赋予天然的左 $\Bbbk G$-模结构, 记该左模为 $H(\rho)$. 表示间的态 f 明显给出群代数上左模之间的模同态 $H(f)$. 这定义出函子 $H: \mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G) \to \Bbbk G\text{-Mod}$. 于是可直接验证 F 和 H 满足 $FH = 1_{\Bbbk G\text{-Mod}}, HF = 1_{\mathrm{Rep}_{\Bbbk}(G)}$ □

1.2 群的矩阵表示

如果群 G 在域 $\Bbbk$-上有一个次数为 $n\geq 1$ 有限维表示 $\rho: G\to GL(V)$, 那么每个 $g\in G$ 它都会对应一个 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 中的可逆矩阵. 具体地, 取定 V 的基 $B=\{u_1,...,u_n\}$, 那么考虑每个 $\varphi\in\mathrm{End}_\Bbbk(V)$ 在这个基下表示矩阵 A, 即满足等式 $(\varphi(u_1),...,\varphi(u_n))=(u_1,...,u_n)A$ 的矩阵 A, 我们可以得到 $\Bbbk$-代数同构

$$T:\mathrm{End}_\Bbbk(V)\to\mathrm{M}_n(\Bbbk),\varphi\mapsto A,$$

那么 T 自然把可逆线性变换全体 $GL(V)$ 映至可逆阵全体 $GL_n(\Bbbk)$, 并且把 T 限制在 $GL(V)$ 上就给出了群同构 $GL(V)\cong GL_n(\Bbbk)$, 所以通过下述同态列的合成 $\rho_B=T|\rho: G\to GL_n(\Bbbk)$

$$G\xrightarrow{\ \ \rho\ \ }GL(V)\xrightarrow{\ \ T|\ \ }GL_n(\Bbbk)$$

我们便可把每个群中元素 g 对应到可逆矩阵 $\rho_B(g)$. 那么 $g\in G$ 在 V 上的线性作用可由可逆阵 $\rho_B(g)$ 在 $\Bbbk^n$ 上的数乘作用描述. 这就引出了矩阵表示的概念.

Definition 1.13 (矩阵表示)**.** 设 G 是群, $\Bbbk$ 是域, $n\geq 1$, 称群同态 $\rho: G\to GL_n(\Bbbk)$ 为群 G 的 n **次矩阵表示**.

Example 1.14. 设 G 是群, $\Bbbk$ 是域, $\rho: G\to GL_n(\Bbbk)$ 为群 G 的 n 次矩阵表示. 那么 $\varphi: G\to\Bbbk^*, g\mapsto\det\rho(g)$, 这里 $\det\rho(g)$ 指 n 阶矩阵 $\rho(g)$ 的行列式, 是 G 的 1 次表示.

根据有限维线性变换和它在一给定基下表示矩阵的关系, 我们看到

Lemma 1.15. 设群 G 在域 $\Bbbk$-上有一个次数为 $n\geq 1$ 有限维表示 $\rho: G\to GL(V)$, 取定 V 的基 $B=\{u_1,...,u_n\}$, 并设 $\eta_B: V\to\Bbbk^n$ 是满足 $\eta_B(u_i)=e_i, 1\leq i\leq n$ 的线性同构, 其中 $e_i\in\Bbbk^n$ 是第 i 个标准单位列向量, 那么对由 B 诱导的矩阵表示 $\rho_B: G\to GL_n(\Bbbk)$, 有下图对所有 $g\in G$ 交换.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "\eta_B"'] & V \arrow[d, "\eta_B"] \\ \Bbbk^n \arrow[r, "\rho_B(g)"] & \Bbbk^n \end{tikzcd}$$

线性代数中更一般的结果如下, 它的证明也是平凡的.

Lemma 1.16. 设 V 是域 $\Bbbk$ 上 n 维线性空间, V' 是域 $\Bbbk$ 上 m 维线性空间, 取定 V 的基 $B=\{u_1,...,u_n\}$, 并设 $\eta_B: V\to\Bbbk^n$ 是满足 $\eta_B(u_i)=e_i, 1\leq i\leq n$ 的线性同构, 其中 $e_i\in\Bbbk^n$ 是第 i 个标准单位列向量. 类似地, 取定 V' 的一个基 C, 可得线性同构 $\eta_C: V'\to\Bbbk^m$. 对任何线性映射 $\varphi: V\to V'$, 设 M_φ 是 φ 在基 B,C 下的表示矩阵, 那么下图交换

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_B"'] & V' \arrow[d, "\eta_C"] \\ \Bbbk^n \arrow[r, "M_\varphi"] & \Bbbk^m \end{tikzcd}$$

根据前面的讨论, 给定一个次数是 n 的有限维表示 $\rho: G\to GL(V)$, 通过取定 V 的一个基 $B=\{u_1,...,u_n\}$, 可产生一个群 G 的矩阵表示 $\rho_B: G\to GL_n(\Bbbk)$. 如果我们通过另一个 V 的基 $C=\{v_1,...,v_n\}$ 来产生矩阵表示 $\rho_C: G\to GL_n(\Bbbk)$, 设基 B 到 C 的过渡矩阵是 $P\in GL_n(\Bbbk)$, 即 $(v_1,...,v_n)=(u_1,...,u_n)P$, 那么 $\rho_C(g)=P^{-1}\rho_B(g)P,\forall g\in G$. 这时我们可以对所有的 $g\in G$ 找到一个公共的可逆阵 P 使得对 $\rho_B(g)$ 作用 P 决定的相似变换后得到矩阵 $\rho_C(g)$. 这就引出了两个矩阵表示等价的概念.

Definition 1.17 (矩阵表示的等价)**.** 设 $\rho_1, \rho_2 : G \to GL_n(\Bbbk)$ 均为群 G 在 $\Bbbk$ 上的矩阵表示, 如果存在可逆阵 P 使得 $\rho_1(g) = P^{-1}\rho_2(g)P, \forall g \in G$, 称这两个矩阵表示是**等价的**, 记作 $\rho_1 \sim \rho_2$. 易知矩阵表示的等价作为群 G 在 $\Bbbk$ 上的矩阵表示全体构成的集合上的二元关系是等价关系.

从 [引理1.15] 以及 [引理1.16] 我们可以看到对任何两个群 G 在 $\Bbbk$ 上的有限维表示 $\rho : G \to GL(V)$ 和 $\rho' : G \to GL(V')$, 其中 $\dim_{\Bbbk} V = n, \dim_{\Bbbk} V' = m$, 只要 V 和 V' 之间有个左 $\Bbbk G$-模同态 $\varphi : V \to V'$, 就会产生下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, dashed] & & V' \arrow[dd, "\eta_C"] \\
V \arrow[ur, "\rho(g)"] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\eta_B"'] & & V' \arrow[ur, "\rho'(g)"] \arrow[dd] & \\
 & \Bbbk^n \arrow[rr, dashed, "M_\varphi"] & & \Bbbk^m \\
\Bbbk^n \arrow[ur, dashed, "\rho_B(g)"] \arrow[rr, "M_\varphi"'] & & \Bbbk^m \arrow[ur, "\rho'_C(g)"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 B 是 V 取定的基, C 是 V' 取定的基. 进而我们看到等价的有限维群表示它们在给定基下决定的矩阵表示也等价. 反过来, 如果两个有限维表示 $\rho : G \to GL(V)$ 和 $\rho' : G \to GL(V')$ 满足 $n = m$ 且它们在给定基下决定的矩阵表示等价, 我们仍可构造上述形式的交换图. 总结一下, 我们得到

Proposition 1.18. 给定群 G 在 $\Bbbk$ 上的有限维表示 $\rho : G \to GL(V)$ 和 $\rho' : G \to GL(V')$, 其中 $\dim_{\Bbbk} V = n, \dim_{\Bbbk} V' = m$, 取定 V 的基 B, V' 的基 C, 并设 $\rho_B : G \to GL_n(\Bbbk), \rho'_C : G \to GL_m(\Bbbk)$ 是相应矩阵表示. 那么 ρ 和 ρ' 是等价的群表示当且仅当 $n = m$ 且 ρ_B 和 ρ'_C 是等价的矩阵表示.

Example 1.19 (置换表示)**.** 给定群 G 在集合 $\{1, 2, ..., n\}$ 上的一个作用, 它诱导群同态 $\pi : G \to S_n$ 使得 $\pi(g)(i) = gi, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. 下面我们用群同态 $\pi : G \to S_n$ 来产生一个群 G 的有限维表示. 设 V 是域 $\Bbbk$ 上的 n 维线性空间, 取定 V 的基 $B = \{u_1, ..., u_n\}$. 那么对每个 $g \in G$, 通过定义 $\rho(g)(u_i) = u_{\pi(g)(i)} = u_{gi}$ 可唯一决定一可逆线性变换 $\rho(g) : V \to V$, 于是我们得到群同态 $\rho : G \to GL(V)$, 它给出群 G 一个次数为 n 的 $\Bbbk$-线性表示, 称为 G 的**置换表示**. 可以看到每个 $\rho(g)$ 在基 B 上的作用无非是把 $u_1, ..., u_n$ 进行重排, 因此 $\rho(g)$ 在 B 下的表示矩阵是置换矩阵.

Example 1.20 (表示的张量积)**.** 设群 G 有表示 $\rho : G \to GL(V)$ 和 $\rho' : G \to GL(V')$, 对每个 $g \in G$, 有线性同构 $\rho(g) : V \to V$ 以及 $\rho'(g) : V' \to V'$, 于是得到线性同构 $\rho(g) \otimes \rho'(g) : V \otimes_{\Bbbk} V' \to V \otimes_{\Bbbk} V'$. 通过定义 $\rho \otimes \rho' : G \to GL(V \otimes_{\Bbbk} V'), g \mapsto \rho(g) \otimes \rho'(g)$, 我们得到群同态 $\rho \otimes \rho'$, 称为**表示 ρ, ρ' 的张量积**. 如果 V 是 G 的 n 次表示, V' 是 G 的 m 次表示, 这里 n, m 是正整数, 那么表示的张量积 $\rho \otimes \rho'$ 是 nm 次表示. 若取定 V 的基 $B = \{u_1, ..., u_n\}$, V' 的基 $C = \{v_1, ..., v_m\}$, 设 $\rho(g)$ 在 B 下的表示矩阵是 $\rho_B(g)$, $\rho'(g)$ 在 C 下的表示矩阵是 $\rho_C(g)$, 那么 $(\rho \otimes \rho')(g)$ 在基 $\{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, ..., u_1 \otimes v_m, ..., u_n \otimes v_1, ..., u_n \otimes v_m\}$ 下的表示矩阵是矩阵 $\rho_B(g)$ 和 $\rho_C(g)$ 的 Kronecker 积 $\rho_B(g) \otimes \rho_C(g)$. 用模的语言来说, 表示的张量积对应的是对左 $\Bbbk G$-模 V, V', 在 $V \otimes_{\Bbbk} V'$ 上通过 $g(v \otimes v') = gv \otimes gv'$ 赋予 $V \otimes_{\Bbbk} V'$ 一个左 $\Bbbk G$-模结构.

Remark 1.21. 给定群族 $\{G_i | 1 \le i \le m\}$, V_i 是左 $\Bbbk G_i$-模, 那么 $V_1 \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} V_m$ 上有天然的左 $\Bbbk[G_1 \times \cdots \times G_m]$-模结构. 满足每个 $(g_1, ..., g_m)$ 数乘作用 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$ 得到 $g_1 v_1 \otimes \cdots \otimes g_m v_m$. 因此一旦对每个群 G_i 取定一个

$\Bbbk$-线性表示 $\rho_i : G \to GL(V_i)$, 便能产生一个群 $G_1 \times \cdots \times G_m$ 的表示 $\rho : G_1 \times \cdots \times G_m \to GL(V_1 \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} V_m)$ 满足 $\rho(g) = \rho_1(g) \otimes \cdots \rho_m(g)$. 若取定 $V_1, ..., V_m$ 的基, 那么 $\rho(g)$ 在这些基对应作张量积适当重排后得到 $V_1 \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} V_m$ 的基下表示矩阵依然是 $\rho_i(g)$ 在给定基下表示矩阵的 Kronecker 积. 特别地, 有

$$\mathrm{tr}\rho(g) = \mathrm{tr}\rho_1(g)\mathrm{tr}\rho_2(g) \cdots \mathrm{tr}\rho_m(g).$$

之后将用特征标理论来说明当 V_i 是不可约左 $\mathbb{C}G_i$-模时, $V_1 \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} V_m$ 是不可约左 $\mathbb{C}[G_1 \times \cdots \times G_m]$-模.

1.3 完全可约性

设 G 是群, 我们已经看到群 G 在域 $\Bbbk$ 上的表示 $\rho : G \to GL(V)$ 本质上就是一个群代数 $\Bbbk G$ 上的模结构. 那么我们可以把模论的观点与工具带进群表示论来研究群的表示.

Definition 1.22 (不变子空间)**.** 设 $\rho : G \to GL(V)$ 是群 G 在域 $\Bbbk$ 上的表示, 若 V 的线性子空间 U 满足 $\rho(g)U \subseteq U, \forall g \in G$, 称 U 是 V 的 $\rho(G)$**-不变子空间**或 G**-不变子空间**.

根据 $\rho(G)$-不变子空间的定义可以看到, 对群 G 在域 $\Bbbk$ 上的表示 $\rho : G \to GL(V)$, V 的子集 U 是 $\rho(G)$-不变子空间的充要条件是将 V 视作左 $\Bbbk G$-模后 U 是 V 的子模. 因为 $\rho(g)$ 是 V 上可逆线性变换, 因此 $\rho(g)|_U$ 一定是 U 上单线性变换, 而每个 $x \in U$ 满足 $x = \rho(g)\rho(g^{-1})x$, 其中 $\rho(g^{-1})x \in U$, 所以 $\rho(g)$ 限制在 U 上可得 U 上可逆线性变换. 我们通过 $\rho(G)$-不变子空间来引入子表示的概念.

Definition 1.23 (子表示)**.** 设 $\rho : G \to GL(V)$ 是群 G 在域 $\Bbbk$ 上的表示, 若 V 的线性子空间 U 是 $\rho(G)$-不变子空间, 那么每个 $\rho(g)|_U : U \to U$ 是可逆线性变换, 因此可得群同态 $\rho|_U : G \to GL(U), g \mapsto \rho(g)|_U$, 称 $\rho|_U : G \to GL(U)$ 是 ρ **的子表示**. 子表示本质上就是一个 $\Bbbk G$-子模结构.

子表示无非是通过群代数上模的子模去认识群的表示. 完全类似地我们可以用商模去研究群的表示.

Definition 1.24 (商表示)**.** 设 $\rho : G \to GL(V)$ 是群 G 在域 $\Bbbk$ 上的表示, 若 V 的线性子空间 U 是 $\rho(G)$-不变子空间, 即 U 是 V 作为左 $\Bbbk G$-模的子模, 那么我们得到商模 V/U, 于是得到表示 $\rho|_{V/U} : G \to GL(V/U), g \mapsto g_l$, 这里 g_l 表示 $g \in G$ 所决定的商模 V/U 上的左乘变换, 称表示 $\rho|_{V/U}$ 是 ρ 的**商表示**.

如果 $\rho : G \to GL(V)$ 是群 G 在域 $\Bbbk$ 上的有限维表示, $\dim_{\Bbbk} V = n$ 且有子表示 $\rho|_U : G \to GL(U)$. 设 U 有基 $\{u_1, ..., u_r\}$, 并将其扩充为 V 的一个基 $B = \{u_1, ..., u_n\}$, 那么 $\rho(g)$ 在基 B 下的表示矩阵 $\rho_B(g)$ 是具有下述形式的分块矩阵.

$$\rho_B(g) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}, M_{11} \in \mathrm{M}_r(\Bbbk), M_{12} \in \Bbbk^{r \times (n-r)}, M_{22} \in \mathrm{M}_{n-r}(\Bbbk).$$

特别地, 当 U 是 V 作为 $\Bbbk G$-模的一个直和因子, 即存在子模 U' 使得 $V = U \oplus U'$ 时, 取 U 的基 $\{u_1, ..., u_r\}$ 以及 U' 的基 $\{u_{r+1}, ..., u_n\}$ 来得到 V 的基 $B = \{u_1, ..., u_n\}$, 那么 $\rho(g)$ 在基 B 下的表示矩阵 $\rho_B(g)$ 是分块对角阵, 即上述分块矩阵的子矩阵 $M_{12} = 0$, 这样的矩阵具有更简单的形式. 因此我们可以把模的直和分解理论带进群表示论来把一个表示分解为一些尽可能简单的表示加以研究.

Definition 1.25 (表示的直和)**.** 设 $\rho : G \to GL(V)$ 是群 G 在域 $\Bbbk$ 上的表示, 若 V 作为左 $\Bbbk G$-模可以分解为有限个子模的直和, 设为 $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$, 记 $\rho_i = \rho|_{U_i}$ 是 ρ 的子表示, 我们称表示 ρ 是**子表示** $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ **的直和**, 记作 $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_m$.

根据表示直和的定义我们知道表示的直和分解对应于群代数上模的直和分解. 如果表示 $\rho: G \to GL(V)$ 对应的左 $\Bbbk G$-模 V 是不可约模, 称该表示是**不可约的**. 若 V 是完全可约左 $\Bbbk G$-模, 称该表示是**完全可约的**. 一般地, 即使有限 Abel 群在复数域上都可能不存在忠实的不可约表示 (见 [例2.12]).

下面的结果被称为 Maschke 定理. 该定理在复数域上的特殊情形由 H. Maschke(德国, 1853-1908), 这里呈现的版本由 L.E.Dickson(美国, 1874-1954) 先注意到.

Maschke's Theorem. 设 G 是有限群, 对任何域 $\Bbbk$, 只要 $\mathrm{char}\Bbbk \nmid |G|$, 那么 G 在域 $\Bbbk$ 上的表示 $\rho: G \to GL(V)(V \neq 0)$ 都是完全可约的. 特别地, 对满足 $\mathrm{char}\Bbbk \nmid |G|$ 的域 $\Bbbk$, 群代数 $\Bbbk G$ 是 Artin 半单代数.

Proof. 只需证任何左 $\Bbbk G$-模 V 的子模 U 是直和因子. 设 U_0 是 U 作为线性子空间的直和补, 即作为 $\Bbbk$-线性空间有直和分解 $V = U \oplus U_0$. 设 $p_0: V \to U$ 是 V 作为线性空间在子空间 U 上的标准投射, 命

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)^{-1} p_0 \rho(g),$$

则 $p: V \to U$ 是满左 $\Bbbk G$-模同态且 $p|_U = \mathrm{id}_U$, 故 U 作为 $\Bbbk G$-子模是直和因子. □

Corollary 1.26 (群代数的半单性)**.** 设 G 是有限群, $\Bbbk$ 是域, 那么群代数 $\Bbbk G$ 半单的充要条件是 $\mathrm{char}\Bbbk \nmid |G|$.

Proof. 充分性由 Maschke 定理即得. 必要性：如果 $\mathrm{char}\Bbbk$ 整除 $|G|$, 那么 $z = \sum\limits_{g \in G} g \neq 0$ 满足 $z^2 = |G|z = 0$ 以及 $zx = xz, \forall x \in G$, 因此 $z \in \mathrm{Jac}(\Bbbk G)$. 由 Wedderburn-Artin 定理知这说明 $\Bbbk G$ 不是 Artin 半单环. 但条件说群代数 $\Bbbk G$ 作为一个 Artin 环是半单的, 这就得到了矛盾. □

Remark 1.27. 让我们再更深入看一下当域 $\Bbbk$ 的特征整除 $|G|$ 时 $\Bbbk G$ 不会是半单代数的原因. 作

$$\varepsilon: \Bbbk G \to \Bbbk, \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g$$

将 $\Bbbk$ 视作平凡左 $\Bbbk G$-模, 那么 ε 是满左 $\Bbbk G$-模同态且 $\mathrm{Ker}\varepsilon$ 是 $\Bbbk G$ 唯一满足其商模同构于平凡模 $\Bbbk$ 的子模 (即 $\Bbbk G$ 的子模 T 满足 $\Bbbk G/T \cong \Bbbk$ 则必有 $T = \mathrm{Ker}\varepsilon$). 考虑 $t = \sum\limits_{g \in G} g$, 则 t 在 $\Bbbk G$ 中生成的 $\Bbbk$-子空间 I 是 $\Bbbk G$ 唯一同构于平凡模 $\Bbbk$ 的子模. 如果 $\Bbbk G$ 是半单代数, 则 I 作为 $\Bbbk G$ 的子模是直和因子, 设为 $\Bbbk G = I \oplus T$, 根据前面的讨论得到 $T = \mathrm{Ker}\varepsilon$. 而当 $\Bbbk$ 的特征整除 $|G|$ 时 t 明显在 I 与 $\mathrm{Ker}\varepsilon$ 之交中.

下面的推论表明有限群代数的半单性可由平凡模的投射性刻画.

Corollary 1.28. 设 G 是有限群, $\Bbbk$ 是域, 那么平凡 $\Bbbk G$-模 $\Bbbk$ 投射当且仅当 $\mathrm{char}\Bbbk \nmid |G|$.

Proof. 充分性由 Artin 半单环上的模均投射立即得到, 只需验证必要性. 这时

$$\varepsilon: \Bbbk G \to \Bbbk, \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g$$

是可裂满 $\Bbbk G$-模同态. 因此存在 $\Bbbk G$-模同态 $s: \Bbbk \to \Bbbk G$ 使得 $\varepsilon s = \mathrm{id}_\Bbbk$. 由 $\Bbbk$ 是平凡模, 存在 $c \in \Bbbk$ 使得 $\tau(1) = c \sum\limits_{g \in G} g$, 两边作用 ε 可知 $c|G| = 1$, 这说明 $\mathrm{char}\Bbbk \nmid |G|$. □

Maschke 定理的意义在于它告诉我们, 要研究有限群 G 在满足特征不整除 G 的阶的域上的表示, 只需要把不可约表示研究清楚即可, 因为完全可约模总可以分解为一些不可约模的直和.

Application 1.29 ($\mathbb{Z}G$ 半单)**.** 设 G 是有限群, 则 $\mathbb{Z}G$ 是 Artin 半单环.

Proof. 根据 Maschke 定理, 只要素数 p 不整除 $|G|$, 群代数 $\mathbb{F}_pG$ 半单, 其中 $\mathbb{F}_p$ 是 p 元有限域, 所以此时 $\mathrm{Jac}(\mathbb{F}_pG)=0$. 对任给素数 p, 都有自然的满环同态

$$\alpha_p:\mathbb{Z}G\to\mathbb{F}_pG,\sum_{g\in G}b_gg\mapsto\sum_{g\in G}\overline{b_g}g,$$

易知 $\alpha_p(\mathrm{Jac}\mathbb{Z}G)\subseteq\mathrm{Jac}(\mathbb{F}_pG)$, 当素数 p 不整除 $|G|$ 时, 上述包含关系右端是 0, 由此可知对每个 $x=\sum\limits_{g\in G}b_gg\in\mathrm{Jac}\mathbb{Z}G$, 并且每个系数 b_g 可以被无穷多素数整除, 这迫使 $x=0$. 所以 $\mathrm{Jac}\mathbb{Z}G=0$. 记 $m=|G|$, 那么 $\mathbb{Z}^m$ 到 $\mathbb{Z}G$ 有自然的满 $\mathbb{Z}$-模同态, 这表明 $\mathbb{Z}G$ 是左、右 Artin 环. 于是我们看到 $\mathbb{Z}G$ 是 Artin 半单环. □

在本节最后我们指出用上述 Maschke 定理证明过程中完全相同的方法可稍作推广.

Generalized Maschke's Theorem. 设 G 是有限群且有子群 H, 域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk\nmid[G:H]$. 如果左 $\Bbbk G$-模 V 的子模 W 满足存在 V 的一个 $\Bbbk H$-子模 T_0 使得 $V=W\oplus T_0$, 那么存在 V 的一个 $\Bbbk G$-子模 T 使得 $V=W\oplus T$. 特别地, 取 $H=\{1\}$, 便得到经典的 Maschke 定理.

Proof. 设 $\{g_1,...,g_n\}$ 是群 G 关于子群 H 的一个右陪集分解代表元系, 其中 $n=[G:H]$. 由条件, 通过 $\Bbbk H$-子模直和分解 $V=W\oplus T_0$ 可定义出标准投射 $p_0:V\to W$ 使得 p_0 是左 $\Bbbk H$-模同态且固定 W 内每个点. 作

$$p(v)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g_i^{-1}p_0(g_iv),\forall v\in V,$$

则 $p:V\to W$ 是满左 $\Bbbk G$-模同态且 $p|_W=\mathrm{id}_W$, 故 W 作为 V 的 $\Bbbk G$-子模是直和因子. □

1.4 模论的应用

我们已经引入过将群 G 的表示 $\rho:G\to GL(V)$ 视作群代数 $\Bbbk G$ 上的模的观点. 因此我们可以把模论工具引入到群表示论中. 例如 Artin 半单代数的不可约模同构类只有有限多个, 转换成群表示的语言就是

Proposition 1.30. 设 G 是有限群, $\Bbbk$ 是域, 满足 $\mathrm{char}\Bbbk\nmid|G|$. 那么 G 的不可约表示等价类只有有限多个.

对 $\Bbbk$-代数 A 上的左模 V, Krull-Schmidt 定理告诉我们只要 V 有合成列 (例如 V 是非零有限维模), 那么 V 可分解为有限个不可分模的直和, 并且这样的直和分解在不计次序和同构意义下唯一. 具体地, 若 ${}_AV\neq0$ 有合成列, 则存在不可分子模 $V_1,...,V_m\neq0$ 使得 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$. 若还存在不可分子模 $W_1,...,W_s$ 使得 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$, 那么 $s=m$ 并且存在 $\sigma\in S_m$ 使得 $V_i\cong W_{\sigma(i)},\forall1\leq i\leq m$. 现在我们设 G 是有限群, 域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk\nmid|G|$, 那么 $A=\Bbbk G$ 是有限维半单代数, 对任何非零有限维模 ${}_AV$, 它可分解为有限个不可约子模的直和, 设为 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$, 其中每个 V_i 不可约, 由于不可约模一定不可分, 所以 ${}_AV$ 的不可约子模直和分解在不计次序和同构意义下唯一. 现在我们可以设有限维模 V 有不可约分解

$$V=V_1^{(1)}\oplus\cdots\oplus V_1^{(m_1)}\oplus V_2^{(1)}\oplus\cdots\oplus V_r^{(1)}\oplus\cdots\oplus V_r^{(m_r)},$$

其中每个 $V_i^{(k)}$ 是不可约模, 对每个 $1\leq i\leq r$, 有 $V_i^{(k)}\cong V_i^{(l)},\forall k,l\in\{1,2,...,m_i\}$, 只要 $i\neq j$, 就有 $V_i^{(k)}\ncong V_j^{(l)}$. 那么正整数序列 $m_1,...,m_r$ 和正整数序列 $\dim_{\Bbbk}V_1^{(1)},\dim_{\Bbbk}V_2^{(1)},...,\dim_{\Bbbk}V_r^{(1)}$ 被 V 唯一确定. 记左 A-模 V 给出

群 G 的有限维表示为 $\rho: G \to GL(V)$, ρ_i 为 $V_i^{(1)}$ 决定的不可约表示, 称 ρ_i 是 ρ 的**不可约成分**, m_i 是 ρ_i 的**重数**. 现在我们取 $V = \Bbbk G$, 那么一样可设它有不可约分解 $V = V_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(m_r)}$ 满足之前我们假定的条件, 记每个 $V_i^{(1)}$ 作为左 $\Bbbk G$-模的自同态环是 Δ_i, 那么 Δ_i 是域 $\Bbbk$ 上的可除代数并且当 $\Bbbk$ 是代数闭域时, 下面的引理表明有代数同构 $\Delta_i \cong \Bbbk$.

Lemma 1.31. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, A 是 $\Bbbk$-代数, ${}_AM$ 是有限维不可约模, 则有 $\Bbbk$-代数同构 $\mathrm{End}_A(M) \cong \Bbbk$.

Proof. 这时 $\mathrm{End}_A(M)$ 是有限维 $\Bbbk$-可除代数, 而 $\Bbbk$ 是代数闭域, 故每个 $\varphi \in \mathrm{End}_A(M)$ 在 $\Bbbk$ 上最小多项式是一次的, 设为 $x - \lambda_\varphi$, 那么 $\varphi = \lambda_\varphi \mathrm{id}_M$, 由此可见 $\Bbbk \mapsto \mathrm{End}_A(M), a \mapsto a\mathrm{id}_M$ 是 $\Bbbk$-代数同构. □

于是由反代数同构 $\Bbbk G \cong \mathrm{End}_{\Bbbk G}(\Bbbk G) = \mathrm{End}_{\Bbbk G}(V)$ 以及 $\Bbbk$-线性同构

$$\mathrm{End}_{\Bbbk G}(V) \cong \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^r \mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(V_i^{(1)}, V_j^{(1)})^{m_i m_j} \cong \prod_{i=1}^r \mathrm{End}_{\Bbbk G}(V_i^{(1)})^{m_i^2} = \prod_{i=1}^r \Delta_i^{m_i^2}$$

得到 $|G| = \dim_\Bbbk \Bbbk G = \sum_{i=1}^r m_i^2 \dim_\Bbbk \Delta_i$. 我们把上述讨论总结为下面的推论.

Corollary 1.32. 设 G 是有限群, 群代数 $\Bbbk G$ 半单, 并设 $V = \Bbbk G$ 作为左 $\Bbbk G$-模有不可约分解

$$\Bbbk G = V_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(m_r)},$$

其中每个 $V_i^{(k)}$ 是不可约模, 对每个 $1 \le i \le r$, 有 $V_i^{(k)} \cong V_i^{(l)}, \forall k, l \in \{1, 2, ..., m_i\}$, 只要 $i \ne j$, 就有 $V_i^{(k)} \ncong V_j^{(l)}$. 若记 $\Delta_i = \mathrm{End}_{\Bbbk G}(V_i^{(1)})$, 那么 $|G| = \dim_\Bbbk \Bbbk G = \sum_{i=1}^r m_i^2 \dim_\Bbbk \Delta_i$. 若进一步要求 $\Bbbk$ 是代数闭域, 则 $|G| = \sum_{i=1}^r m_i^2$.

我们再指出对上述不可约分解 $V = V_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(m_r)}$, 可直接验证 $\Bbbk$-代数同构 $\mathrm{End}_{\Bbbk G}(V) \cong \mathrm{End}_{\Bbbk G}((V_1^{(1)})^{m_1} \oplus \cdots (V_r^{(1)})^{m_r}) \cong \mathrm{End}_{\Bbbk G}(V_1^{(1)})^{m_1} \times \cdots \mathrm{End}_{\Bbbk G}(V_r^{(1)})^{m_r}$, 记 $\Delta_i = \mathrm{End}_{\Bbbk G} V_i^{(1)}$ 是域 $\Bbbk$ 上的有限维可除代数, 那么有 $\Bbbk$-代数同构

$$\mathrm{End}_{\Bbbk G}(V) \cong \mathrm{M}_{m_1}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathrm{M}_{m_r}(\Delta_r),$$

于是得到 $\Bbbk$-代数同构 $\Bbbk G \cong \mathrm{M}_{m_1}(\Delta_1^{op}) \times \cdots \times \mathrm{M}_r(\Delta_r^{op})$. 我们把刚刚的讨论总结为

Corollary 1.33. 设 G 是有限群, 群代数 $\Bbbk G$ 半单, 并设 $\Bbbk G$ 作为左 $\Bbbk G$-模有不可约分解

$$\Bbbk G = V_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(m_r)},$$

其中每个 $V_i^{(k)}$ 是不可约模, 对每个 $1 \le i \le r$, 有 $V_i^{(k)} \cong V_i^{(l)}, \forall k, l \in \{1, 2, ..., m_i\}$, 只要 $i \ne j$, 就有 $V_i^{(k)} \ncong V_j^{(l)}$. 若记 $\Delta_i = \mathrm{End}_{\Bbbk G}(V_i^{(1)})$, 那么有 $\Bbbk$-代数同构 $\Bbbk G \cong \mathrm{M}_{m_1}(\Delta_1^{op}) \times \cdots \times \mathrm{M}_{m_r}(\Delta_r^{op})$. 这时同样可得 $|G| = \sum_{i=1}^r m_i^2 \dim_\Bbbk \Delta_i$. 若进一步要求 $\Bbbk$ 是代数闭域, 则代数同构 $\Delta_i \cong \Bbbk$ 表明 $\Delta_i = \Delta_i^{op}$, 从而有代数同构

$$\Bbbk G \cong \mathrm{M}_{m_1}(\Bbbk) \times \cdots \times \mathrm{M}_{m_r}(\Bbbk).$$

下面再把有限群的共轭类和群代数的中心联系起来——有限群的共轭类数目就是群代数中心的线性维数.

Proposition 1.34. 设 G 是有限群, 共轭类全体是 $C_1 = \{1_G\}, C_2, ..., C_r$, 对每个 $1 \le i \le r$, 置 $c_i = \sum_{g \in C_i} g$, 那么 $\{c_1, ..., c_r\}$ 是群代数 $\Bbbk G$ 中心 $Z(\Bbbk G)$ 作为 $\Bbbk$-线性空间的一个基, 特别地, $\dim_\Bbbk Z(\Bbbk G) = r$ 为共轭类个数.

Proof. 易见 $\{c_1,...,c_r\}$ 是线性无关的, 只要证每个 $c_i \in Z(\Bbbk G)$ 以及任何 $c \in Z(\Bbbk G)$ 可被 $\{c_1,...,c_r\}$ 线性表出即可. 任取 $g \in G$, 有 $gc_ig^{-1} = \sum\limits_{g_i \in C_i} gg_ig^{-1} = c_i$, 所以 $c_i \in Z(\Bbbk G)$. 对每个 $c \in Z(\Bbbk G)$, 设

$$c = \sum_{g \in G} \alpha_g g, \alpha_g \in \Bbbk,$$

那么 $c = hch^{-1}, \forall h \in G$, 由此可见 $\alpha_{hgh^{-1}} = \alpha_g, \forall h \in G$. 这蕴含 c 可被 $\{c_1,...,c_r\}$ 线性表出. □

Remark 1.35. 同样设 G 是有限群, $\{c_1,...,c_r\}$ 同上, 则 $\mathbb{Z}c_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}c_r \subseteq \mathbb{C}G$ 是有限生成自由 $\mathbb{Z}$-模. 对任给 $1 \le i,j \le r$, $c_ic_j \in Z(\mathbb{C}G)$, 所以 $c_ic_j \in \mathbb{Z}c_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}c_r$. 于是知每个 c_i 满足 $\mathbb{Z}$ 上某个首一多项式.

若设 Artin 半单代数 A 的极小左理想分解为 $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_m$, 那么每个不可约左 A-模都同构于某个 I_k, 把这一观察和前面的讨论结合立即得到下述推论.

Corollary 1.36. 设 G 是有限群, $\Bbbk$ 是代数闭域且群代数 $\Bbbk G$ 半单, $V = \Bbbk G$ 作为左 $\Bbbk G$-模有不可约分解

$$V = V_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(m_r)},$$

其中每个 $V_i^{(k)}$ 是不可约模, 对每个 $1 \le i \le r$, 有 $V_i^{(k)} \cong V_i^{(l)}, \forall k,l \in \{1,2,...,m_i\}$, 只要 $i \ne j$, 就有 $V_i^{(k)} \ncong V_j^{(l)}$. 那么群 G 的共轭类总数 $\dim_{\Bbbk} Z(\Bbbk G) = r$ 就是 $\Bbbk G$ 上不可约模同构类总数.

Proof. 此时 $\Bbbk G \cong \mathrm{M}_{m_1}(\Bbbk) \times \cdots \times \mathrm{M}_r(\Bbbk)$, 再由 $Z(\Bbbk G) \cong Z(\mathrm{M}_{m_1}(\Bbbk)) \times \cdots \times Z(\mathrm{M}_{m_r}(\Bbbk))$ 便知. □

Example 1.37 (置换群 S_n 的不可约复表示和整数拆分)**.** 对有限群 G, [推论1.36] 说 $\mathbb{C}G$ 上不可约模同构类总数恰是 G 共轭类数目. 当我们取 $G = S_n$ 为 n 次对称群时, S_n 中两个元素共轭当且仅当它们有相同的型 (回忆置换 $\sigma \in S_n$ 的型如下定义：当 σ 分解为不相交轮换分解后, 记 $\{1,2,...,n\}$ 中被 σ 作用固定不同的元素数目是 α_1, 不相交轮换分解中长度为 $i(2 \le i \le n)$ 的轮换数目是 α_i, 称形式记号 $[1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots n^{\alpha_n}]$ 是置换 σ 的**型**), 而置换 $\sigma \in S_n$ 的型 $[1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots n^{\alpha_n}]$ 对应正整数 n 的拆分 $n = \alpha_1 1 + \alpha_2 2 + \cdots + \alpha_n n$(即把正整数 n 分解成一些正整数的和, 分解中数字 1 出现 α_1 次, 数字 $i(2 \le i \le n)$ 出现 α_i 次), 我们把正整数 n 的拆分数记作 $p(n)$(例如, $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5$), 那么 $p(n)$ 也就是 S_n 共轭类的数目. 所以 $\mathbb{C}S_n$ 不可约模同构类, 或者说 S_n 的不可约复表示等价类, 数目是 $p(n)$.

Example 1.38 (有限 Abel 群的不可约表示)**.** 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, G 是有限 Abel 群, 那么 $\Bbbk G$ 是交换代数. 考虑 $\Bbbk G$ 上任何不可约左模 M, 它是有限维模, 由 [引理1.31] 知 M 上任何一个自同态是 $\Bbbk$ 中元素决定的数乘作用. 而 $\Bbbk G$ 的交换性使得每个 $g \in G$ 决定的 M 上左乘变换是左 $\Bbbk G$-模同态, 于是 M 的左 $\Bbbk G$-子模等价于 M 的 $\Bbbk$-线性子空间. 这一观察意味着 M 作为不可约左 $\Bbbk G$-模是 1 维的. 故

有限 Abel 群在代数闭域上的不可约表示都是 1 次的.

在 [推论1.36] 中我们看到只要代数闭域 $\Bbbk$ 的特征不整除有限群的阶 $|G|$, 那么有限群 G 在代数闭域 $\Bbbk$ 上的不可约表示等价类数恰好就是 G 的共轭类总数. 当 G 是有限 Abel 群时, 它的共轭类数目恰好是 $|G|$, 因此

对有限 Abel 群 G 和代数闭域 $\Bbbk$, 只要 $\mathrm{char}\Bbbk \nmid G$, 那么 G 的不可约表示等价类恰好 $|G|$ 个.

Remark 1.39. 如果域 $\Bbbk$ 不是代数闭域, 那么有限 Abel 群在 $\Bbbk$ 上的不可约表示未必是 1 次的. 例如考虑 3 阶循环群 C_3 在 $\mathbb{Q}$ 上的表示 $M=\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$(通过 [例1.6] 中的代数同构 $\mathbb{Q}C_3\cong\mathbb{Q}[x]/(x^3-1)$ 赋予 M 自然的左 $\mathbb{Q}C_3$-模结构), 那么由 x^2+x+1 是 $\mathbb{Q}$ 上不可约多项式不难验证 M 是 C_3 在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约表示, 并注意到 $\dim_{\mathbb{Q}}M=2$. 反之, 对有限群 G 和域 $\Bbbk$, 只要 $\mathrm{char}\Bbbk\nmid G$ 且 G 在 $\Bbbk$ 上的不可约表示都是 1 次的, 那么 G 是 Abel 群. 原因是这时群代数 $\Bbbk G$ 作为左 $\Bbbk G$-模也是完全可约的, 进而存在不可约左 $\Bbbk G$-模 $M_1,...,M_t$ 使得 $\Bbbk G=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_t$(比较两边维数不难看出 $t=|G|$). 由 [引理1.31] 可知任意 $g,h\in G$, 作为 M_i 上 $\Bbbk G$-模自同态是域 $\Bbbk$ 中元素的数乘变换, 这一观察表明 g 和 h 所决定的 $\Bbbk G$ 上的左乘变换是可交换的. 因此 G 是 Abel 群. 结合前面的讨论可知, 如果 G 是有限群且 $\Bbbk$ 是特征不整除 $|G|$ 的代数闭域, 则 G 是 Abel 群的充要条件是 G 在 $\Bbbk$ 上的不可约表示都是 1 次的.

Example 1.40 (一般有限群的不可约表示构造)**.** 对含幺环 R,S 之间的保幺环同态 $\alpha:R\to S$, 我们可以使用 α 为每个左 S-模 M 赋予自然的左 R-模结构: $rx=\alpha(r)x,\forall r\in R,x\in M$. 如果 α 是满环同态, 易知 ${}_SM$ 是不可约模蕴含配备 α 诱导的 R-模 ${}_RM$ 也不可约. 应用这个观点于群的表示理论, 我们对每个有限群 G, 关于它的换位子群 $[G,G]$ 作商可得一有限 Abel 群 $\overline{G}=G/[G,G]$, 并且标准投射 $\pi:G\to\overline{G}$ 是满群同态, 它诱导满环同态 $\alpha:\Bbbk G\to\Bbbk\overline{G},\sum\limits_{g\in G}a_gg\mapsto\sum\limits_{g\in G}a_g\pi(g)$, 由此能够从每个不可约 $\Bbbk\overline{G}$-模产生不可约左 $\Bbbk G$-模结构. 用群表示的语言说, 我们可以从有限 Abel 群 $\overline{G}$ 的不可约表示出发构造有限群 G 的不可约表示.

Proposition 1.41. 设 G 是群, $\Bbbk$ 是域, 那么 G 在 $\Bbbk$ 上的 1 次表示等价类与 $G/[G,G]$ 在 $\Bbbk$ 上的 1 次表示等价类间有标准双射 (注意含幺环上有限生成模同构类全体构成集合, 故群的 1 次表示等价类全体也构成集合).

Proof. 任给群 G 的 1 次表示 $\rho:G\to GL(V)$, 其中 $\dim_{\Bbbk}V=1$, 则由 $GL(V)\cong\Bbbk^*$ 是交换群得到 $[G,G]\subseteq\mathrm{Ker}\rho$, 所以 ρ 可天然诱导 $G/[G,G]$ 的表示 $\tilde{\rho}:G/[G,G]\to GL(V),g[G,G]\mapsto\rho(g)$. 命

$$\eta:\{G\text{在域}\Bbbk\text{上的1次表示}\}\to\{G/[G,G]\text{在域}\Bbbk\text{上的1次表示}\},[\rho]\mapsto[\tilde{\rho}],$$

不难验证 η 是双射. □

2 特征标理论

虽然群的矩阵表示使得我们可以通过分析具体的对象结构来了解抽象的群, 但是对高阶群, 它的矩阵表示或是置换表示难以具体分析处理. 例如对充分大的正整数 n, 置换群 S_n 中每个元素的不相交轮换分解可能基本无法手算. 这时我们需要更精巧的数值不变量, 使得不通过复杂计算也能在一些具体处理问题的场合能为我们提供一些有用的信息. 大量实践经验表明特征标 (见 [定义2.1]) 所载有的表示信息在应用中卓有成效. 并且, 我们会说明对有限群的任意两个不可约复表示, 这两个复表示等价的充要条件是它们的特征标相同 (见 [推论2.19]). 并且有限维复表示的不可约性可通过计算特征标复内积判别 (见 [推论2.20]).

2.1 基本性质

Definition 2.1 (类函数, 特征标)**.** 设 G 是群, $\Bbbk$ 是域.

- 若函数 $f:G\to\Bbbk$ 在群 G 的每个共轭类上取值是常值的, 即 $f(gxg^{-1})=f(x),\forall x,g\in G$, 则称 f 是一个**类函数**. 易见 G 的类函数全体关于通常加法和乘法构成含幺交换环, 称为 G 的**类函数环**.

- 若 $\rho: G \to GL(V)$ 是次数为 $n \geq 1$ 的有限维表示, 称 $\chi: G \to \Bbbk, g \mapsto \mathrm{tr}\rho(g)$ 为该表示的**特征标**. 不可约表示的特征称为**不可约特征标**. 称 ρ 的次数为该特征标的**次数**. 当 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 时, 称 χ 是**复特征标**.

有时为了突出 χ 是表示 ρ 的特征标, 我们会把特征标记作 χ_ρ. 从特征的定义可以看到群表示的特征标是群上一个类函数. 群 G 两个等价的有限维表示特征标一致. 下面是关于有限维表示特征标的一些简单事实.

Example 2.2 (平凡表示特征标)**.** 设 $\rho: G \to GL(V)$ 是群 G 的 n 次平凡表示, 则该表示的特征标

$$\chi(g) = n1_\Bbbk, \forall g \in G.$$

Example 2.3 (子表示直和特征标)**.** 设 $\rho: G \to GL(V)$ 是群 G 的 $n \geq 1$ 次表示, 如果 ρ 是子表示 $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ 的直和, 即 $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_m$, 若记 χ_i 是子表示 ρ_i 的特征标, 那么明显有 $\chi = \sum\limits_{i=1}^{m} \chi_i$.

Example 2.4 (商表示特征标)**.** 设 $\rho: G \to GL(V)$ 是群 G 的 $n \geq 1$ 次表示, 如果 U 是 V 的 $\Bbbk G$-子模, 设 ρ_U 和 $\rho_{V/U}$ 是相应子表示与商表示, 那么 $\chi_\rho = \chi_{\rho_U} + \chi_{\rho_{V/U}}$.

Example 2.5 (表示张量积的特征标)**.** 设群 G有有限维表示 $\rho: G \to GL(V)$ 和 $\rho': G \to GL(V')$, 它们次数均正. 在 [例1.20] 中我们已经看到若取定 V 的基 $B = \{u_1, ..., u_n\}$, V' 的基 $C = \{v_1, ..., v_m\}$, 设 $\rho(g)$ 在 B 下的表示矩阵是 $\rho_B(g)$, $\rho'(g)$ 在 C 下的表示矩阵是 $\rho_C(g)$, 那么 $(\rho \otimes \rho')(g)$ 在基 $\{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, ..., u_1 \otimes v_m, ..., u_n \otimes v_1, ..., u_n \otimes v_m\}$ 下的表示矩阵是矩阵 $\rho_B(g)$ 和 $\rho_C(g)$ 的 Kronecker 积 $\rho_B(g) \otimes \rho_C(g)$. 于是 $\chi_{\rho\otimes\rho'} = \chi_\rho \chi_{\rho'}$.

2.2 复特征标

实际应用中我们更感兴趣复特征标, 它性质丰富. 例如对有限群 G 的 n 次复表示 $\rho: G \to GL(V)$, 每个 $\rho(g)$ 的特征值总是单位根, 进而 $\chi_\rho(g)$ 为一些单位根之和. 现在我们来看一些复特征标的基本性质.

Lemma 2.6. 设 G 是有限群, 它的**指数**是 m, 即全体元素阶的最小公倍数是 m. 那么对任何一个群 G 的 n 次复表示 ρ, 对每个 $g \in G$, $\rho(g)$ 在某个基下表示矩阵是由一些 m 次本原单位根构成的对角阵. 即 $\rho(g)$ 在某个基下表示矩阵形如 $\mathrm{diag}\{\omega_1, ..., \omega_n\}$, 其中每个 ω_i 是某个 m 次本原单位根. 于是 $\chi_\rho(g) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i$.

Proof. 注意线性变换 $\rho(g)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的最小多项式整除 $x^m - 1$, 故其最小多项式无重根且特征值均为 m 次本原单位根, 这表明线性变换 $\rho(g)$ 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化且相似于一个主对角线都是 m 次本原单位根的对角阵. □

Remark 2.7. 上述引理表明对有限群 G 的任何有限维复表示 ρ, $\chi_\rho(g)$ 总是一些单位根的和, 而单位根总是代数整数 (回忆 $\alpha \in \mathbb{C}$ 被称为**代数数**, 如果 α 是某个首一整系数多项式的根, 即 $\mathbb{Z}$ 上整元), 而有限个代数整数的和仍是代数整数 (一般地, 对含幺交换环的扩环链 $R \subseteq E$, E 中所有在 R 上的整元, 即满足某个 R 上首一多项式的元素, 构成的集合总是 E 的子环, 称为 R 在 E 中的**整闭包**), 所以 $\chi_\rho(g)$ 是代数整数.

上述引理说有限群 G 它的任何 n 次复表示的特征标均是一些 m 次本原单位根的和, 这里 m 是 G 的指数. 于是对任何 n 次复表示 $\rho: G \to GL(V)$, 有 $|\chi_\rho(g)| \leq n$. 不等式中等号成立当且仅当存在 m 次本原单位根 ω 使得 $\rho(g) = \omega \mathrm{id}_V$. 充分性明显, 必要性: 设 $\rho(g)$ 在某个基下表示矩阵形如 $\mathrm{diag}\{\omega_1, ..., \omega_n\}$, 其中每个 ω_i 是某个 m 次本原单位根. 那么 $\chi_\rho(g) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i$ 且 $|\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i| = n$ 迫使所有 ω_i 具有相同方向, 即都相同, 设 ω_i 的公共值是 ω, 那么我们便得到 $\rho(g) = \omega \mathrm{id}_V$. 我们把刚刚的讨论总结为

Proposition 2.8. 设 G 是有限群, 它的指数是 m, $\rho: G \to GL(V)$ 是 n 次复表示. 那么对每个 $g \in G$, 有 $|\chi_\rho(g)| \leq n$. 等号成立当且仅当存在 m 次本原单位根 ω 使得 $\rho(g) = \omega \mathrm{id}_V$. 特别地, 如果 $\chi_\rho(g) = n$, 那么 $\rho(g) = \mathrm{id}_V$. 也就是说我们可以直接从有限群 G 的复特征标 χ 在元素 g 上的取值读出 $\rho(g)$ 是否是恒等映射!

根据上述命题, 对有限群 G 的 n 次复表示 $\rho: G \to GL(V)$, 那些满足 $|\chi_\rho(g)| = n$ 的元素 g 对应了某个 m(m 表示群的指数) 次本原单位根诱导的数乘变换 $\rho(g) = \omega \mathrm{id}_V$. 同时也看到 $\{g \in G | \chi_\rho(g) = n\} = \mathrm{Ker}\rho$, 也称 $\{g \in G | \chi_\rho(g) = n\}$ 为**该特征标的核**, 记作 $\mathrm{Ker}\chi_\rho$. 我们也引入

$$Z(\chi_\rho) = \{g \in G | \text{特征标} |\chi_\rho(g)| = n\} = \{g \in G | \text{存在} m \text{次本原单位根} \omega \text{使得} \rho(g) = \omega \mathrm{id}_V\}$$

这也是群 G 的正规子群, 并且包含 $\mathrm{Ker}\chi_\rho = \mathrm{Ker}\rho$. 通过满群同态 $Z(\chi_\rho) \to U(m), g \mapsto \omega$, 这里 $\rho(g) = \omega \mathrm{id}_V$, 我们看到 $Z(\chi_\rho)/\mathrm{Ker}\rho$ 是循环群.

Example 2.9 (对偶表示)**.** 设有限群 G有 n 次复表示 $\rho: G \to GL(X)$, 那么可如下在 $X^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$ 上赋予左 $\mathbb{C}G$-模结构: $g\varphi: X \to \mathbb{C}, x \mapsto \varphi(g^{-1}x)$, 于是得到 G 的表示 $\rho^*: G \to GL(X^*)$, 称为 G 关于 ρ 的**对偶表示**. 在 [引理2.6] 中我们看到对每个 $g \in G$, 可选取 X 的一个基 B 使得 $\rho(g)$ 在 B 下的表示矩阵形如 $\mathrm{diag}\{\omega_1, ..., \omega_n\}$, 其中每个 ω_i 是某个 m 次本原单位根, m 是 G 的指数, 考虑 B 对应的 X^* 中对偶基 B^*, 容易验证 $\rho^*(g)$ 在 B^* 下表示矩阵是 $\mathrm{diag}\{\overline{\omega_1}, ..., \overline{\omega_n}\}$, 所以 $\chi_\rho(g^{-1}) = \chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}, \forall g \in G$.

下面的结果表明有限群的忠实不可约复表示的特征标能够提供中心的结构信息.

Application 2.10. 设 G 是有限群, $\rho: G \to GL(V)$ 是 G 的忠实不可约复表示 (即 ρ 是单同态且 V 是不可约左 $\mathbb{C}G$-模), χ 是相应的复特征标. 若记 $n = \dim_{\mathbb{C}} V$, 则 $Z(G) = \{g \in G || \chi(g)| = n\}$ 且 $Z(G)$ 是循环群.

Proof. 从 [命题2.8] 我们看到对任何 $g \in G$, 只要 $\chi(g) = n$, $\rho(g)$ 就是由某个本原单位根诱导的数乘变换. 因此对任何 $g' \in G$ 以及满足 $\chi(g) = n$ 的元素 g, 总有 $\rho(g')\rho(g) = \rho(g)\rho(g')$. 结合 ρ 是单射可知 $g \in Z(G)$. 反之, 如果 $g \in Z(G)$, 那么 [引理1.31] 表明 g 所诱导的 V 上线性变换是 $\mathbb{C}$ 中某个元素 λ 的数乘变换. 并且若记 G 的指数是 m, 则 λ 一定是 m 次本原单位根. 进而 $|\chi(g)| = n|\lambda| = n$. 最后我们说明 $Z(G)$ 是循环群. 任取 $g, h \in Z(G)$, 那么存在 m 次本原单位根 λ, μ 使得 $\rho(g) = \lambda \mathrm{id}_V, \rho(h) = \mu \mathrm{id}_V$, 进而

$$\varphi: Z(G) \to \mathbb{C}^*, g \mapsto \frac{\chi(g)}{n}$$

是定义合理的群同态. 通过 ρ 是单射可知 φ 是单同态, 故 $Z(G) \cong \mathrm{Im}\varphi$ 是 $\mathbb{C}^*$ 的有限乘法子群, 为循环群. $\square$

Remark 2.11. 因此存在忠实不可约复表示的有限群的中心一定是循环群.

Example 2.12. 设 G 是有限 Abel 群, 且 G 不是循环群. 那么 G 不存在忠实不可约复表示.

2.3 第一正交关系

固定有限群 G, 设 $\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_r\}$ 是 G 在 $\mathbb{C}$ 上不可约表示等价类的一个代表元集, ρ_i 的表示空间是 W_i, χ_i 是 ρ_i 的特征标. 那么 $\{W_1, ..., W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$ 上所有不可约模同构类的一个代表元集. 对每个 G 的有限维表示 $\rho: G \to GL(V)$, 我们已经看到 V 作为完全可约左 $\mathbb{C}G$-模可分解为一些不可约模的直和, 可设

$$V = V_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(m_r)},$$

其中每个 $V_i^{(k)}$ 是不可约模, 对每个 $1 \le i \le r$, $V_i^\ell \cong W_i, \forall 1 \le \ell \le m_i$, 这里 $m_1, ..., m_r$ 由 V 决定. 进而得到 $\mathbb{C}G$-模同构 $V \cong W_1^{m_1} \oplus W_2^{m_2} \oplus \cdots \oplus W_r^{m_r}$. 从 [例2.3] 可知 $\chi_\rho = \sum\limits_{i=1}^{r} m_i \chi_i$. 接下来我们来说明 $\{\chi_1, ..., \chi_r\}$ 作为复线性空间 $\mathbb{C}^G = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ 的子集线性无关. 一旦说明这一点我们马上得到

有限群 G 的两个有限维复表示等价当且仅当它们有相同的特征标.

我们通过证明下面的定理来得到特征标集 $\{\chi_1, ..., \chi_r\}$ 的 $\mathbb{C}$-线性无关性.

Theorem 2.13 (第一正交关系)**.** 设 G是有限群, $\Bbbk$ 的特征零的代数闭域. $\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_r\}$ 是 G 在 $\Bbbk$ 上不可约表示等价类的一个代表元集, ρ_i 的表示空间是 W_i, χ_i 是 ρ_i 的特征标. 那么对每个 $g \in G$, 有

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\chi_j(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})\chi_j(g) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

为了看到上述定理成立, 对有限群 G 的有限维表示 $\rho : G \to GL(V), \dim_\Bbbk V = n$, 设线性作用的不动点集

$$V^G = \{x \in V | gx = x, \forall g \in G\},$$

易见 V^G 是 V 作为左 $\Bbbk G$-模的一个子模, 并且 char$\Bbbk$=0 使得可构造满 $\Bbbk G$-模同态

$$p : V \to V^G, x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gx$$

使得对标准嵌入 $i : V^G \to V$ 有 $pi = \mathrm{id}_{V^G}$, 因此 p 是 V 在直和因子 V^G 上的投射. 我们把 p 视作 V 上线性变换 $\tilde{p} : V \to V$ 并设 $\dim_\Bbbk V^G = t$, 那么可取 V 的一个基 B 使得 $\tilde{p} : V \to V$ 在 B 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\mathrm{tr}(\tilde{p}) = \dim_\Bbbk V^G$. 另一方面, 由 p 的定义可以看出 $\tilde{p} = (1/|G|) \sum\limits_{g \in G} \rho(g)$, 对该等式两边取迹得

$$\tilde{p} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g),$$

总结一下, 得到

Lemma 2.14. 对有限群 G 的有限维表示 $\rho : G \to GL(V), \dim_\Bbbk V = n$, 设线性作用的不动点集 $V^G = \{x \in V | gx = x, \forall g \in G\}$, 那么 $\dim_\Bbbk V^G = (1/|G|) \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$.

对群 G 上任意两个左 $\Bbbk G$-模 X, Y, 可如下赋予 $\mathrm{Hom}_\Bbbk(X, Y)$ 一个左 $\Bbbk G$-模结构：对每个 $g \in G$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(X, Y)$, 定义 $g\varphi : X \to Y, x \mapsto g\varphi(g^{-1}x)$. 那么 $\mathrm{Hom}_\Bbbk(X, Y)$ 给出群 G 的一个表示.

Example 2.15. 设 G 是群, X, Y 是左 $\Bbbk G$-模, 则 $\mathrm{Hom}_\Bbbk(X, Y)^G = \mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(X, Y)$.

通过取对偶基容易验证下述经典同构.

Lemma 2.16. 设 G 是群, X,Y 是左 $\Bbbk G$-模, 那么 $X\otimes_{\Bbbk}Y$ 上通过表示的张量积可知有一个左 $\Bbbk G$-模结构 (见 [例1.20]), 对 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X,Y), X^*=\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X,\Bbbk)$ 通过前面的方式赋予左 $\Bbbk G$-模结构 (其中 $\Bbbk$ 上左模结构平凡), 则当 X 或 Y 是有限维模时有左 $\Bbbk G$-模同构 $X^*\otimes_{\Bbbk}Y\cong\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X,Y)$.

现在我们把上述引理具体到有限维复表示的场景, 对有限维非零左 $\mathbb{C}G$-模 X,Y, 由模同构 $X^*\otimes_{\mathbb{C}}Y\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,Y)$ 知它们对应的表示有相同的特征标, 设 ρ_X,ρ_Y 分别是模 X,Y 对应的复表示. 从 [例2.5] 看到 $X^*\otimes_{\mathbb{C}}Y$ 的特征标由 $\chi_{\rho_X^*}\chi_{\rho_Y}$ 给出, 而 [例2.9] 中已说明 $\chi_{\rho_X^*}=\overline{\chi_{\rho_X}}$, 所以 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,Y)$ 对应的表示的特征标是 $\overline{\chi_{\rho_X}}\chi_{\rho_Y}$. 因此由 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,Y)^G=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(X,Y)$ 以及 $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,Y)^G=(1/|G|)\sum_{g\in G}\overline{\chi_{\rho_X}(g)}\chi_{\rho_Y}(g)$ 知

Proposition 2.17. 设有限群 G 有有限维复表示$\rho_X:G\to GL(X),\rho_Y:G\to GL(Y)$, 其中 $X,Y\neq 0$. 那么

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(X,Y)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_{\rho_X}(g)}\chi_{\rho_Y}(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\rho_X}(g^{-1})\chi_{\rho_Y}(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\rho_X}(g)\chi_{\rho_Y}(g^{-1}).$$

Remark 2.18. 如果 X 是不可约复表示, 则 $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(X,Y)$ 就是 Y 不可约分解中与 X 同构的不可约直和项数目. 如果 Y 是不可约表示, $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(X,Y)$ 是 X 不可约分解中与 Y 同构的不可约直和项数目.

现在我们可以给出 [定理2.13] 的证明：对不可约模同构类代表元集 $\{W_1,...,W_r\}$, 有

$$\dim_{\mathbb{C}G}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W_i,W_j)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_i(g)}\chi_j(g).$$

当 $i=j$ 时, [引理1.31] 说上式等号左边的维数是 1. 当 $i\neq j$ 时, 明显 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W_i,W_j)=0$, 证毕.

对有限群 G, 在复线性空间 $\mathbb{C}^G$ 上, 对每个 $\varphi,\psi\in\mathbb{C}^G$, 通过定义

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)}\psi(g),\forall g\in G,$$

可赋予 $\mathbb{C}^G$ 复内积结构. 那么 [定理2.13] 无非是说不可约特征标集 $\{\chi_1,...,\chi_r\}$ 是两两正交且长度是 1 的向量集, 这也是为什么我们称该定理体现的是“正交关系”. 特别地, 我们得到 $\{\chi_1,...,\chi_r\}$ 是 $\mathbb{C}$-线性无关的.

Corollary 2.19. 有限群 G 的两个有限维复表示等价当且仅当它们有相同的特征标.

该推论表明有限群 G 的有限维复表示的特征标承载了复表示结构上的所有信息. 此外, 引入复内积语言后, 任何有限维表示的特征标在该复内积下的长度可由不可约分解中的“重数”表示. 具体地, 有

Corollary 2.20 (复表示的不可约性关于内积的判别)**.** 设有限群 G 有有限维复表示 $\rho:G\to GL(V)$, 并设有 $\mathbb{C}G$-模同构 $V\cong W_1^{m_1}\oplus W_2^{m_2}\oplus\cdots\oplus W_r^{m_r}(m_1,...,m_r$ 由 V 决定), 其中 $\{W_1,...,W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$-不可约模同构类代表元集, 它们对应的不可约表示特征标集设为 $\{\chi_1,...,\chi_r\}$. 我们有 $\chi_\rho=\sum\limits_{i=1}^{r}m_i\chi_i$, 并且 $\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle=\sum\limits_{i=1}^{r}m_i^2$. 特别地, ρ 是不可约复表示当且仅当 $\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle=1$. 若取 $V=\mathbb{C}G$, 那么 $\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle=|G|$(回忆 [推论1.32]).

Corollary 2.21. 给定有限群族 $\{G_i|1\leq i\leq m\}$, W_i 是不可约左 $\mathbb{C}G_i$-模, $\rho_i:G\to GL(W_i)$ 是 W_i 对应的不可约复表示. 则群 $G_1\times\cdots\times G_m$ 有天然的复表示 $\rho:G_1\times\cdots\times G_m\to GL(W_1\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}W_m)$ 满足 $\rho(g)=\rho_1(g)\otimes\cdots\rho_m(g)$. 那么 ρ 是 $G_1\times\cdots\times G_m$ 的不可约复表示.

Proof. 根据 [推论2.20], 只需验证上述表示 ρ 满足 $\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle=1$. 即要说明下式的值为 1:

$$\frac{1}{|G_1\times\cdots\times G_m|}\sum_{(g_1,...,g_m)}\chi_\rho(g_1,...,g_m)\overline{\chi_\rho(g_1,...,g_m)}=\frac{1}{|G_1|\cdots|G_m|}\sum_{(g_1,...,g_m)}|\chi_\rho(g_1,...,g_m)|^2.$$

结合每个 ρ_i 是不可约表示, 记其复特征标为 χ_i, 便有

$$\frac{1}{|G_1|\cdots|G_m|}\sum_{(g_1,...,g_m)}|\chi_\rho(g_1,...,g_m)|^2=\left(\frac{1}{|G_1|}\sum_{g_1\in G_1}|\chi_1(g_1)|^2\right)\cdots\left(\frac{1}{|G_1|}\sum_{g_m\in G_m}|\chi_m(g_m)|^2\right)=1.$$

□

因为有限维复表示 χ_ρ 关于自己的复内积由定义是

$$\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\rho(g)}\chi_\rho(g),\forall g\in G,$$

特征标相当于算有限维线性空间上线性变换的迹, 它的计算并不需要把线性变换所有特征值解出, 因此计算复特征标的复内积在实际计算中是可行的. 前面提到有限群的元素个数可通过计算 $\mathbb{C}G$ 对应的复表示特征标自身和自身的内积得到, 任何有限维复表示的不可约性判别也可由复特征标内积计算得到. 所以有限群的特征标理论不止步于理论本身的优美与重要研究意义, 也具有很高的应用价值. 若有限群 G 的共轭类全体是 $\{C_1,...,C_r\}$, $\{\chi_1,...,\chi_r\}$ 是不可约复表示等价类的一个代表元集 $\{\rho_1,...,\rho_r\}$ 所对应的复特征标 (我们已经从 [推论1.36] 中看到 r 就是 $\mathbb{C}G$ 上所有不可约模等价类的数目), 每个 χ_i 可视作共轭类上的函数, 于是得到下表

	C_1	C_2	$\cdots$	C_r
χ_1	$\chi_1(C_1)$	$\chi_1(C_2)$	$\cdots$	$\chi_1(C_r)$
χ_2	$\chi_2(C_1)$	$\chi_2(C_2)$	$\cdots$	$\chi_2(C_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
χ_r	$\chi_r(C_1)$	$\chi_r(C_2)$	$\cdots$	$\chi_r(C_r)$

称为群 G 的**复特征标表**. 设 $C_1=\{1_G\}$, 则特征标表 C_1 所在的列, 各元素 $\chi_i(C_1)$ 就是 ρ_i 的次数. 我们也指出特征标表实际上也给我们提供了一个复方阵

$$\begin{pmatrix}\chi_1(C_1)&\chi_1(C_2)&\cdots&\chi_1(C_r)\\\chi_2(C_1)&\chi_2(C_2)&\cdots&\chi_2(C_r)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\chi_r(C_1)&\chi_r(C_2)&\cdots&\chi_r(C_r)\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_r(\mathbb{C}).$$

下面应用特征标的复内积来导出有限群所有不可约复表示维数的平方和就是群的阶, 也就是说特征标表第一列的平方和, 即 $\sum\limits_{i=1}^{r}(\chi_i(C_1))^2(C_1=\{1_G\})$, 是 $|G|$.

在 [例1.8] 中引入了正则表示, 它相当于是对群 G 利用群代数上的模结构给出一个表示. 在 [推论1.32] 中我们也看到若有限群 G 与代数闭域 $\Bbbk$ 使 $\mathrm{char}k\nmid|G|$, 则考察正则表示对应的不可约模直和分解 $\Bbbk G\cong W_1^{m_1}\oplus W_2^{m_2}\oplus\cdots\oplus W_r^{m_r}$, 其中 $\{W_1,...,W_r\}$ 是 $\Bbbk G$-不可约模同构类代表元集, 会得到 $|G|=\sum\limits_{i=1}^{r}m_i^2$, 即正则

表示的不可约表示直和分解中所有重数平方和给出群的阶. 下面我们说明当 $\Bbbk=\mathbb{C}$ 时每个 $m_i=\dim_{\Bbbk}W_i$, 即有限群 G 的正则表示的不可约表示直和分解中, 每个 W_i 对应表示 ρ_i 的重数 m_i 恰是 W_i 作为复线性空间的维数, 进而知群的阶 $|G|$ 就是所有 W_i 作为复线性空间的维数平方和.

Lemma 2.22. 设 G 是有限群, $\{W_1,...,W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$-不可约模同构类代表元集, 并设有 $\mathbb{C}G$-模同构 $\Bbbk G\cong W_1^{m_1}\oplus W_2^{m_2}\oplus\cdots\oplus W_r^{m_r}$, 那么对每个 $1\le i\le r$, 有 $m_i=\dim_{\mathbb{C}}W_i$. 进而 $|G|=\sum\limits_{i=1}^{r}(\dim_{\mathbb{C}}W_i)^2$.

Proof. 记 W_i 对应的不可约表示为 ρ_i, 其特征标是 χ_i, 正则表示仍记为 $\rho:G\to GL(\mathbb{C}G)$. 那么 [推论2.20] 说 $\chi_\rho=\sum\limits_{i=1}^{r}m_i\chi_i$, 从而对每个 i 有 $\langle\chi_\rho,\chi_i\rangle=m_i$. 另一方面, 由正则表示的定义不难看到 $\chi_\rho(g)=0,\forall g\neq 1_G\in G$ 以及 $\chi_\rho(1_G)=|G|$. 所以

$$m_i=\langle\chi_\rho,\chi_i\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\rho(g)}\chi_i(g)=\frac{1}{|G|}\overline{\chi_\rho(1_G)}\chi_i(1_G)=\chi_i(1_G)=\dim_{\mathbb{C}}W_i.$$

□

Theorem 2.23. 设 G,H 是有限群, $\{W_1,...,W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$-不可约模同构类代表元集, $\{T_1,...,T_s\}$ 是 $\mathbb{C}H$-不可约模同构类代表元集. 那么 $\mathbb{C}G$ 与 $\mathbb{C}H$ 作为 $\mathbb{C}$ 上代数同构的充要条件是 $r=s$ 且经适当重排后有

$$\dim_{\mathbb{C}}W_i=\dim_{\mathbb{C}}T_i,i=1,2,...,r.$$

Proof. 必要性是明显的, 只证充分性. 通过 [引理2.22] 我们看到群在复数域上群代数作为 Artin 半单代数的结构完全由不可约表示等价类数目以及不可约表示的次数决定. □

在 [例1.38] 中我们看到有限 Abel 群 G 在代数闭域 $\Bbbk$ 上的不可约表示都是 1 次的, 所以群代数 $\Bbbk G$ 上的不可约模都是 1 维的. 下面我们用刚刚得到的事实给出一个有限群交换性的刻画.

Application 2.24 (有限群交换性刻画)**.** 设 G 是有限群, 则 G 交换的充要条件是任何不可约左 $\mathbb{C}G$-模都是 1 维的, 即任何不可约复表示都是 1 次的. 因此我们可以读特征标表第一列元素来判别有限群的交换性. 例如对称群 S_3 的共轭类总数是 $p(3)=3$(回忆 [例1.37]), 所以可设 S_3 的一个不可约复表示代表元集是 $\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}$, ρ_i 的次数是 m_i, 那么 $6=|S_3|=m_1^2+m_2^2+m_3^2$ 表明 S_3 存在次数高于 1 的不可约表示, 事实上求解上式的正整数解便知在等价意义下 S_3 有两个 1 次不可约表示和一个 2 次不可约表示. 这就反映了 S_3 是非交换的.

Proof. 只需说明充分性：如果任何不可约左 $\mathbb{C}G$-模都是 1 维的, 那么 [引理2.22] 表明 G 的共轭类总数就是 $|G|$, 这迫使群 G 每个元素所在的共轭类是单点集, 进而知 G 是交换群. □

2.4 第二正交关系

在 [定理2.13] 中我们得到了复特征标的第一正交关系, 本节我们介绍另一种正交关系, 它不仅指出复特征标表不同的列是正交的, 也为我们提供了用复特征标计算有限群中一给定元素所在共轭类元素数目的公式 (见 [定理2.25]).

对有限群 G, 设 G 的共轭类全体是 $\{C_1, ..., C_r\}$, $\{W_1, ..., W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$-不可约模同构类代表元集, 它们对应的不可约表示特征标集设为 $\{\chi_1, ..., \chi_r\}$. 我们有下述特征标表

	C_1	C_2	$\cdots$	C_r
χ_1	$\chi_1(C_1)$	$\chi_1(C_2)$	$\cdots$	$\chi_1(C_r)$
χ_2	$\chi_2(C_1)$	$\chi_2(C_2)$	$\cdots$	$\chi_2(C_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
χ_r	$\chi_r(C_1)$	$\chi_r(C_2)$	$\cdots$	$\chi_r(C_r)$

前面提到过我们可以把特征标表视作一个 r 阶复方阵

$$\begin{pmatrix} \chi_1(C_1) & \chi_1(C_2) & \cdots & \chi_1(C_r) \\ \chi_2(C_1) & \chi_2(C_2) & \cdots & \chi_2(C_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_r(C_1) & \chi_r(C_2) & \cdots & \chi_r(C_r) \end{pmatrix}.$$

回忆不可约特征标的第一正交关系 (见 [定理2.13]) 表明

$$\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{r}|C_k|\chi_i(C_k)\overline{\chi_j(C_k)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\chi_j(g^{-1}) = \begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}.$$

作复方阵

$$A = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\begin{pmatrix} \chi_1(C_1)\sqrt{|C_1|} & \chi_1(C_2)\sqrt{|C_2|} & \cdots & \chi_1(C_r)\sqrt{|C_r|} \\ \chi_2(C_1)\sqrt{|C_1|} & \chi_2(C_2)\sqrt{|C_2|} & \cdots & \chi_2(C_r)\sqrt{|C_r|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_r(C_1)\sqrt{|C_1|} & \chi_r(C_2)\sqrt{|C_2|} & \cdots & \chi_r(C_r)\sqrt{|C_r|} \end{pmatrix},$$

那么 A 的行向量是两两正交的单位复向量, 所以 A 是酉矩阵, 这说明 A 的列向量全体也是两两正交的单位向量. 于是我们得到了下述定理.

Theorem 2.25 (第二正交关系)**.** 设 G 是有限群, G 的共轭类全体是 $\{C_1, ..., C_r\}$, $\{W_1, ..., W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$-不可约模同构类代表元集, 它们对应的不可约表示特征标集设为 $\{\chi_1, ..., \chi_r\}$. 那么

(1) 对每个共轭类 C_k, 有 $\sum\limits_{i=1}^{r}\overline{\chi_i(g)}\chi_i(g) = |G|/|C_k|, \forall g\in C_k$. 特别地, 对任何 $g\in G$, g 所在的共轭类元素个数是 $|G|/(\sum\limits_{i=1}^{r}|\chi_i(g)|^2)$, 这给出了用特征标计算共轭类元素个数的公式.

(2) 设 $a, b\in G$ 是不共轭的两个元素, 那么 $\sum\limits_{i=1}^{r}\overline{\chi_i(a)}\chi_i(b) = 0$. 特别地, 复特征标表中任意两个不同的列作为 $\mathbb{C}^r$ 中列向量 (在标准复内积下) 正交.

Example 2.26 (S_3 的复特征标表)**.** 我们已经看到 S_3 的不可约复表示在等价意义下有三个, 其中两个是 1 次表示, 剩下一个是 2 次表示. 设 χ_1 是平凡表示的复特征标, χ_2 是非平凡的 1 次表示复特征标, χ_3 是不可约 2

次表示的复特征标. 记 $C_1=\{1\}$, C_2 是对换 (1 2) 所在的共轭类, C_3 是轮换 (1 2 3) 所在的共轭类. 则可设

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	x	y
χ_3	2	z	w

其中 $x,y,z,w\in\mathbb{C}$, 下面来确定 x,y,z,w. 注意到 χ_2 是 1 次表示的特征标, 因此 x,y 是单位根. 而 C_2 中元素的阶为 2 蕴含 x 满足 $x^2=1$, 类似地, $y^3=1$. 利用第一正交关系, 由 $|C_2|=3,|C_3|=2$ 可知 $1+3x+2y=0$, 因此由 x 是整数迫使 y 是有理数. 从而 $y=1,x=-1$. 于是上述特征标表变为

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	z	w

现在利用第二正交关系可得 $2z=0,1+1+2w=0$, 解得 $z=0,w=-1$. 由此得到 S_3 的复特征标表：

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

下面我们应用第二正交关系来提取 8 阶非交换群的不可约复表示信息.

Application 2.27. 设 G 是 8 阶非交换群 (例如四元数 8 元群 $Q_8=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}\subseteq\mathbb{H}$), 那么

(1) 中心 $Z(G)=[G,G]$ 且中心的阶为 2.

(2) 群 G 共有 5 个不可约复表示同构类, 其中 4 个次数为 1; 剩下的次数为 2, 以下将其特征标记作 χ.

(3) 若 $g\neq 1\in Z(G)$, 则 $\chi(g)=-2$; 若 $g\notin Z(G)$, 则 $\chi(g)=0$.

Proof. (1) 对任何素数 p, p-群的中心非平凡, 所以 $Z(G)$ 的阶只可能是 $2,4$. 如果 $|Z(G)|=4$, 那么由 $G/Z(G)$ 是循环群得到 G 是交换群, 矛盾. 因此 $Z(G)$ 是 2 阶群. 一方面, $G/Z(G)$ 作为 4 阶群必交换, 这说明 $[G,G]\subseteq Z(G)$. 另一方面, G 的非交换性表明 $[G,G]$ 非平凡, 所以 $[G,G]=Z(G)$.

(2) 根据 [命题1.41], 群 G 的 1 次不可约复表示同构类数目就是 $G/[G,G]=G/Z(G)$ 的 1 次不可约复表示同构类数目. 结合 [例1.38] 便知 G 的 1 次不可约复表示同构类数目是 $|G/[G,G]|=4$. 设 $\{W_1,...,W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$-不可约模同构类代表元集, 其中 $r\geq 4$ 且 W_1,W_2,W_3,W_4 是都是 1 次不可约复表示. 若设 W_i 的线性维数是 n_i, 则 [引理2.22] 告诉我们 $n_1^2+\cdots+n_r^2=|G|=8$. 由 $n_1=n_2=n_3=n_4=1$ 且 $n_j\geq 2(5\leq j\leq r)$ 知 $r=5$ 且 $n_5=2$. 因此群 G 共有 5 个不可约复表示同构类, 其中 4 个次数为 1; 剩下的次数为 2.

(3) 通过 [推论1.36] 我们看到 G 的共轭类总数是 5, 设 G 所有共轭类为

$$C_1=\{1\},C_2=Z(G)-C_1,C_3,C_4,C_5.$$

注意到 $|C_1|=|C_2|=1$, 因此由 $|C_3|,|C_4|,|C_5|\geq 2$ 迫使 $|C_3|=|C_4|=|C_5|=2$. 设 W_1,W_2,W_3,W_4 对应的不可约特征标是 $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4$, 并记 $\chi_5=\chi$. 如果 $g\neq 1\in Z(G)$, 则 $C_2=\{g\}$. 那么

$$\overline{\chi_1(1)}\chi_1(g)+\overline{\chi_2(1)}\chi_2(g)+\overline{\chi_3(1)}\chi_3(g)+\overline{\chi_4(1)}\chi_4(g)+\overline{\chi_5(1)}\chi_5(g)=0.$$

由此可知 $\chi_1(g)+\chi_2(g)+\chi_3(g)+\chi_4(g)+2\chi_5(g)=0$. 注意到 $g\in Z(G)=[G,G]$, 所以 g 诱导的 1 次不可约表示上的作用都是恒等的, 从而 $\chi_j(g)=1, 1\le j\le 4$. 由此解出 $\chi(g)=\chi_5(g)=-2$. 由第一正交关系得到

$$2^2+(-2)^2+2(|\chi(C_3)|^2+|\chi(C_4)|^2+|\chi(C_5)|^2)=\sum_{k=1}^{r}|C_k|\chi(C_k)\overline{\chi(C_k)}=|G|=8,$$

因此 $\chi(C_3)=\chi(C_4)=\chi(C_5)=0$. 即 $\chi(g)=0, \forall g\notin Z(G)$. □

Remark 2.28. 沿用前面的记号, 我们还可以计算上述 8 阶非交换群 G 的复特征标表. 可设

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	a_1	b_1	c_1	d_1
χ_3	1	a_2	b_2	c_2	d_2
χ_4	1	a_3	b_3	c_3	d_3
χ_5	2	-2	0	0	0

通过第二正交关系考察上述表的前两列可得 $a_1+a_2+a_3=3$. 注意到 $a_i^2=1(1\le i\le 3)$, 那么只可能 $a_1=a_2=a_3=1$. 因此由第一正交关系以及 $|C_3|=|C_4|=|C_5|=2$ 可得对每个 $1\le j\le 3$ 都有 $b_j+c_j+d_j=-1$. 因为 G 不是循环群, 因此 G 中元素的阶至多 4, 这蕴含 $b_j,c_j,d_j(1\le j\le 3)$ 均为 4 次单位根, 即 $a_j,b_j,c_j\in\{\pm1,\pm i\}$. 利用 $b_j+c_j+d_j=-1$ 以及第二至四行两两正交可通过反证法说明 $a_j,b_j,c_j=\pm1$. 在 [推论2.19] 中我们看到两个不等价的有限维复表示的特征标不同, 因此对固定的正整数 $1\le j\le 3$, $b_j+c_j+d_j=-1$ 迫使 b_j,c_j,d_j 中恰有两个是 -1, 剩余的是 1. 不妨设 $b_1=c_2=d_3=1$, 那么 G 的复特征标表为

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

通过比较元素的阶, 易验证正方形的二面体群 D_4 与四元数群 Q_8 是不同构的非交换群. 所以

不同构的有限群可能有相同的复特征标表.

不过 [定理2.23] 告诉我们两个有限群只要有相同的复特征标表, 至少它们在复数域上群代数同构.

2.5 一些算术性质

本节我们着眼于不可约复特征标的一些算术性质. [引理1.31] 表明代数闭域 $\Bbbk$ 上代数上的有限维不可约表示的自同态都是基域内某个元素的数乘, 因此对有限群 G 的不可约表示 $\rho_1,...,\rho_r$(设对应的不可约 $\Bbbk G$ 模分别为 $W_1,...,W_r$) 内固定的 ρ_i, 只要 $c\in Z(\Bbbk G)$, c 决定的左乘变换对应 W_i 上模自同态. 这一观察使我们看到:

Lemma 2.29. 设 G 是有限群, $c \in Z(\mathbb{C}G)$, 那么对任何 G 的不可约复表示 $\rho : G \to GL(V)$ 有

$$\tilde{\rho}(c) = \frac{\tilde{\chi}_\rho(c)}{\dim_{\mathbb{C}} V}\mathrm{id}_V,$$

这里 $\tilde{\rho} : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}V$ 的 ρ 的线性延拓, $\tilde{\chi}_\rho : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ 是 χ_ρ 的线性延拓.

下述观察是之后证明 Burnside 定理所需必要准备.

Corollary 2.30. 设 G 是有限群, 设 G 的共轭类全体是 $\{C_1, ..., C_r\}, C_1 = \{1\}$, $\{W_1, ..., W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$-不可约模同构类代表元集, 它们对应的不可约表示特征标集设为 $\{\chi_1, ..., \chi_r\}$. 那么对任给 $g_j \in C_j$ 与特征标 χ_i 有

$$\frac{|C_j|\chi_i(g_j)}{\chi_i(1)} = \frac{|C_j|\chi_i(g_j)}{\dim_{\mathbb{C}} W_i}$$

是代数整数.

Proof. 沿用 [命题1.34] 中的记号, 对每个 $1 \leq i \leq r$, 置 c_i 是共轭类 c_i 中所有元素的和, 那么 $\{c_1, ..., c_r\}$ 是 $Z(\mathbb{C}G)$ 的一个基, 那么对任给正整数 $1 \leq s, t \leq r$, 存在整数 $m_{stl}(1 \leq l \leq r)$ 使得

$$c_s c_t = \sum_{l=1}^{r} m_{stl} c_l,$$

两边作用 W_i 对应不可约表示的线性延拓 $\tilde{\rho}_i : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ 和 χ_i 的线性延拓 $\tilde{\chi}_i : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ 可得

$$\frac{|C_s|\chi_i(g_s)}{\chi_i(1)}\frac{|C_t|\chi_i(g_t)}{\chi_i(1)} = \left(\sum_{l=1}^{r} m_{stl}|C_l|\chi_i(g_l)\right)/\chi_i(1).$$

对条件中固定的指标 i 和每个正整数 $1 \leq j \leq r$, 记 $u_j = |C_j|\chi_i(g_j)/\chi_i(1)$, 补充定义 $u_0 = 1$ 并作考虑 $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模的子模 $M = \mathbb{Z}u_0 + \mathbb{Z}u_1 + \cdots + \mathbb{Z}u_r$, 那么 M 是有限生成 $\mathbb{Z}$-模且对每个 u_j 有 $u_j M \subseteq M$. □

于是结合特征标的正交关系我们可以证明有限群的不可约复表示的次数总整除群的阶.

Corollary 2.31. 设 G 是有限群, 设 G 的共轭类全体是 $\{C_1, ..., C_r\}, C_1 = \{1\}$, $\{W_1, ..., W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$-不可约模同构类代表元集, 它们对应的不可约表示特征标集设为 $\{\chi_1, ..., \chi_r\}$. 那么对每个 $1 \leq i \leq r$ 有 $\chi_i(1)$ 整除 $|G|$.

Proof. 下面说明有理数 $|G|/\chi_i(1)$ 是 $\mathbb{Z}$ 上整元来得到 $\chi_i(1)$ 整除 $|G|$. 根据第一正交关系 (回忆 [定理2.13]) 有

$$\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{r}|C_k|\chi_i(C_k)\overline{\chi_j(C_k)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\chi_i(g)\chi_j(g^{-1}) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

现取 $j = i$, 则 $|G| = \sum\limits_{k=1}^{r}|C_k|\chi_i(C_k)\overline{\chi_i(C_k)}$. 由此得到

$$\frac{|G|}{\chi_i(1)} = \sum_{k=1}^{r}\frac{|C_k|\chi_i(C_k)}{\chi_i(1)}\overline{\chi_i(C_k)}.$$

[推论2.30] 表明 $|C_k|\chi_i(C_k)/\chi_i(1)$ 是代数整数, 因此由 $\chi_i(g) = \overline{\chi_i(g^{-1})}, \forall g \in G$(见 [例2.9]) 也是代数整数便知 $|G|/\chi_i(1)$ 是 $\mathbb{Z}$ 上整元. 因为 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ 是整闭扩张, 所以 $\chi_i(1)$ 整除 $|G|$. □

上述推论可以进一步加强为有限群的不可约复表示的次数可以整除中心在有限群中的指数.

Theorem 2.32. 设 G 是有限群, $\rho_i : G \to GL(W_i)$ 是不可约复表示, 则特征标 $\chi_i(1)$ 整除 $[G : Z(G)]$.

Proof. 根据 [推论2.21] 得到群 $G^m = G \times \cdots \times G$ 的不可约复表示 $\rho = \rho_i \otimes \cdots \otimes \rho_i : G^m \to GL(W_i \otimes_{\mathbb{C}} W_i \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} W_i)$(以下为叙述方便将 $W_i \otimes_{\mathbb{C}} W_i \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} W_i$ 记作 X). 因为每个 $c \in Z(G)$ 满足 $\rho(c)$ 是 W_i 上 $\mathbb{C}G$-模自同构, 所以 [引理1.31] 表明存在唯一的 $\gamma_i(c) \in \mathbb{C}^*$ 使得 $\rho(c) = \gamma_i(c)\mathrm{id}_{W_i}$. 于是得到群同态 $\gamma_i : Z(G) \to \mathbb{C}^*$, 易见 $\rho(1, ..., 1, c, 1, ..., 1) = \gamma_i(c)\mathrm{id}_X$. 所以对任给 $c_1, ..., c_m \in Z(G)$ 有 $\rho(c_1, ..., c_m) = \gamma_i(c_1 \cdots c_m)\mathrm{id}_X$. 因此

$$D = \{(c_1, ..., c_m) \in G^m | c_j \in Z, c_1 \cdots c_m = 1\}$$

不仅是 G^m 的正规子群还含于 $\mathrm{Ker}\rho$(不难看出 D 的阶为 $|Z(G)|^{m-1}$). 由此得到 G^m/D 的一个不可约复表示 $\overline{\rho} : G^m/D \to GL(X)$. 应用 [推论2.31], 可知 $\chi_i(1)^m$ 整除 $|G|^m/|Z(G)|^{m-1}$. 特别地, 对任何正整数 m 有

$$\left(\frac{|G|}{|Z(G)|\chi_i(1)}\right)^m \in \mathbb{Z}\frac{1}{|Z(G)|} \subseteq \mathbb{Q}.$$

进而得到 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 的有限生成 $\mathbb{Z}$-子模

$$M = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{Z}\left(\frac{|G|}{|Z(G)|\chi_i(1)}\right)^m.$$

若记 $u = [G : Z(G)]/\chi_i(1)$, 那么 $uM \subseteq M$ 且 $1 \in M$. 这说明有理数 u 是 $\mathbb{Z}$ 上整元, 于是 $u \in \mathbb{Z}$. □

Application 2.33. 设 p, q 是素数满足 $p > q$, G 是 pq 阶非交换群. 那么 q 整除 $p-1$, $[G, G]$ 的元素数目是 p, G 有 q 个 1 次不可约复表示等价类和 $(p-1)/q$ 个 q 次不可约复表示等价类.

Proof. 因为 G 非交换, 所以 $[G : G] \neq 1$. 依 Sylow 定理, $p > q$ 蕴含 G 有唯一的 Sylow p-子群 P, 从而 P 是正规子群. 于是由 G/P 是交换群得 $[G, G] \subseteq P$, 结合 $[G, G]$ 非平凡得到 $[G, G] = P$ 为 p 阶群. 由 [命题1.41], G 的 1 次不可约复表示等价类数与 q 阶循环群 $G/[G, G]$ 的 1 次不可约复表示等价类数一致. 因此 G 恰有 q 个 1 次不可约复表示等价类. 在 [推论2.31] 中我们看到有限群不可约复表示的次数总整除群的阶, 所以若设 $\mathbb{C}G$ 上不可约模等价类的一个代表元集是 $\{W_1, ..., W_q, W_{q+1}, ..., W_{q+k}\}$, 其中 $W_1, ..., W_q$ 均为 1 维模, 则对每个 $q+1 \leq j \leq q+k$ 有 $\dim_{\mathbb{C}} W_j$ 整除 $|G|$. 再利用 [引理2.22] 可得 $(\dim_{\mathbb{C}} W_{q+1})^2 + (\dim_{\mathbb{C}} W_{q+2})^2 + \cdots + (\dim_{\mathbb{C}} W_{q+k})^2 = (p-1)q$, 因此 $p > q$ 迫使对每个 $q+1 \leq j \leq q+k$ 有 $\dim_{\mathbb{C}} W_j = q$. 于是可得 q 整除 $p-1$ 且 $k = (p-1)/q$. □

2.6 Burnside 定理

W. Burnside(英国, 1852-1927) 于 1904 年利用有限群表示论的工具证明了下述定理.

Burnside's Theorem. 设 p, q 是素数, $a, b \in \mathbb{N}$, 那么阶为 $p^a q^b$ 的群是可解群.

本节的目标是证明上述定理, 首先我们回顾可解群的基本概念与性质. 若群 G 存在正规列

$$G = G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq G_3 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_s \trianglerighteq G_{s+1} = \{1_G\}$$

满足每个商因子 G_i/G_{i+1} 是 Abel 群, 则称 G 是**可解群**. 否则称该群**不可解**. 可解群的“可解”一词来源便是它在多项式根式求解问题上起到至关重要的作用——特征为零的域 F 上次数不低于 1 的多项式方程 $f(x) = 0$ 可根式求解的充要条件是该多项式的 Galois 群是可解群. 让我们来回顾一些可解群的基本例子.

Example 2.34. 若单群 G 是可解群, 则 G 是 Abel 群. 故交错群 $A_n(n\geq 5)$ 不可解.

Remark 2.35. 这一观察表明 Burnside 定理成立意味着非交换有限单群的阶至少被三个不同的素数整除.

Example 2.36. 设 n 是正整数, 则当 $n\leq 4$ 时对称群 S_n 可解, 当 $n\geq 5$ 时对称群 S_n 不可解.

Proof. S_1 与 S_2 的可解性是明显的. S_3 有正规列 $S_3\trianglerighteq A_3\trianglerighteq \{(1)\}$, 它的两个商因子都是 Abel 群, 所以 S_3 也是可解群. 当 $n=4$ 时, 记 $K=\{(1),(12)(34),(14)(23),(24)(13)\}$, 可直接验证 K 是 S_4 的正规子群(注意 4 阶群都交换, K 是 Abel 群), 所以 S_4 有正规列 $S_4\trianglerighteq A_4\trianglerighteq K\trianglerighteq\{(1)\}$, 它每个商因子都是 Abel 群, 所以 S_4 是可解群. 最后我们来看 $n\geq 5$ 的情形, 假设 S_n 可解, 那么有商因子都是 Abel 群的正规列 $S_n\trianglerighteq G_2\trianglerighteq G_3\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq G_s\trianglerighteq\{(1)\}$, 那么存在正整数 $i\geq 2$ 使得 $G_i\neq S_n$, 设 l 是使得 $G_l\neq S_n$ 的最小正整数, 因为 $n\geq 5$ 时 S_n 的正规子群只有 $S_n,A_n,\{(1)\}$, 所以 $G_l=A_n$ 或 $\{(1)\}$, 但 G_{l-1}/G_l 是交换群, 所以 $G_l=A_n$. 因为 A_n 不是交换群, 所以存在正整数 $l+1\leq t\leq s$ 使得 $G_t\neq A_n$, 设 t 是满足条件的最小正整数, 那么由 A_n 是单群知 $G_t=\{(1)\}$, 于是 $G_{t-1}/G_t\cong A_n$ 非交换, 矛盾. 所以当 $n\geq 5$ 时 S_n 不是可解群. □

Remark 2.37. 这里关于 $n\geq 5$ 时 S_n 的正规子群只有 $S_n,A_n,\{(1)\}$ 可如下证明: 设 N 是 S_n 的一个正规子群, 如果 $N\subseteq A_n$, 那么由 A_n 是单群知 $N=\{(1)\}$ 或 A_n. 下设 $N\not\subseteq A_n$. 首先 $N\cap A_n=\{(1)\}$ 或 A_n, 如果 $A_n\subseteq N$, 那么由 $N\neq A_n$ 知 $N=S_n$. 如果 $N\cap A_n=\{(1)\}$, 那么由 $|N|>1$ 知 $NA_n=S_n$, 从而 $|N|=2$, 但当 $n\geq 5$ 时, S_n 不存在阶为 2 的正规子群, 矛盾.

Example 2.38. 称群 G 是**幂零群**, 如果群 G 存在中心正规列, 即有正规列

$$G=G_1\trianglerighteq G_2\trianglerighteq G_3\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq G_s\trianglerighteq G_{s+1}=\{1_G\}$$

满足每个商因子 $G_i/G_{i+1}\subseteq Z(G/G_{i+1})$. 从该定义立即看到幂零群是可解群且任何 Abel 群是幂零群.

对群 G, 我们也将 G 的换位子群记作 G' 或 $G^{(1)}$, 将 G' 的换位子群记作 G'' 或 $G^{(2)}$, 递归地可以定义 $G^{(k)}=(G^{(k-1)})',k\geq 2$, 称 $G^{(k)}$ 为 G 的 k **次导群**. G 的零次导群定义为 G 本身. 下面是可解群的一个等价刻画, 我们将使用它去证明任何一个可解群的商群还是可解群.

Proposition 2.39. 给定群 G, 那么 G 可解的充要条件是存在正整数 k 使得 $G^{(k)}=\{1_G\}$.

Proof. 充分性：如果存在正整数 k 使得 $G^{(k)}=\{1_G\}$, 那么 G 有正规列 $G=G^{(0)}\trianglerighteq G^{(1)}\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq G^{(k-1)}\trianglerighteq G^{(k)}=\{1_G\}$, 且该正规列每个商因子是交换群, 所以 G 可解. 必要性：假设 G 可解, 即有正规列 $G=G_1\trianglerighteq G_2\trianglerighteq G_3\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq G_s\trianglerighteq G_{s+1}=\{1_G\}$. 如果 $s=1$, 结论直接成立, 下设 $s\geq 2$. 因为 G/G_2 是交换群, 所以 $G_2\supseteq G^{(1)}$. 假设对正整数 $1\leq i\leq s-1$ 有 $G_{i+1}\supseteq G^{(i)}$, 那么 G_{i+1}/G_{i+2} 为交换群表明 $G_{i+2}\supseteq G'_{i+1}\supseteq (G^{(i)})'=G^{(i+1)}$, 故归纳地我们得到 $G_{s+1}\supseteq G^{(s)}$, 因此取 $k=s$ 得到 $G^{(k)}=\{1_G\}$. □

Remark 2.40. 通过该命题立即得到可解群的子群都可解. 事实上也可以得到可解群的同态像都可解. 具体地, 给定可解群 G, 如果群 K 满足存在 G 到 K 的满群同态 $f:G\to K$, 那么 K 也是可解群. 我们断言对任何满群同态 $f:G\to K$ 必有 $f(G^{(i)})=K^{(i)},\forall i\geq 1$, 下面对正整数 i 作归纳. 当 $i=1$ 时, 群同态 f 将任何一个 G 的换位子映为 K 的一个换位子, 所以 $G^{(1)}\subseteq f^{-1}(K^{(1)})$, 于是 $f(G^{(1)})\subseteq K^{(1)}$. 反之, 因为 f 是满射, 所以 $f(G^{(1)})$ 包含任何一个 K 的换位子, 于是 $f(G^{(1)})\supseteq K^{(1)}$, 从而 $f(G^{(1)})=K^{(1)}$, 所以 $i=1$ 时结论成立. 假设结论对正整数 i 成立, 即 $f(G^{(i)})=K^{(i)}$, 那么对满群同态 $\tilde{f}:G^{(i)}\to K^{(i)},x\mapsto f(x)$ 应用 $i=1$ 时已证明的

结论可得 $f(G^{(i+1)})=f((G^{(i)})')=(K^i)'=K^{(i+1)}$. 故由数学归纳原理知断言成立. 当 G 是可解群时, 由可解性的导群刻画知存在正整数 s 使得 $G^{(s)}=\{1_G\}$, 所以 $K^s=\{1_K\}$, 这说明 K 也是可解群. 特别地, 我们得到对可解群 G 的任何正规子群 N, G/N 也是可解群.

Corollary 2.41. 设 G 是群, 且有正规子群 N, 那么 G 是可解群的充要条件是 G/N 与 N 可解.

Proof. 根据前面的讨论, 只需再验证充分性. 由条件, N 有正规列 $N=N_1\trianglerighteq N_2\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq N_s\trianglerighteq\{1_G\}$ 满足每个商因子是 Abel 群, G/N 有正规列 $G/N=\overline{G_1}\trianglerighteq\overline{G_2}\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq\overline{G_t}\trianglerighteq\overline{1_G}$ 满足每个商因子是 Abel 群. 由子群对应定理, 存在 G 的子群 $G_i\supseteq N$ 使得 $G_i/N=\overline{G_i},\forall 1\le i\le t$. 易见子群列 $G=G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_t\supseteq N\supseteq N_2\supseteq\cdots\supseteq N_s\supseteq\{1_G\}$ 是正规列且每个商因子是 Abel 群, 故 G 是可解群. □

Example 2.42. 设 p 是素数, 那么 p-群是可解群.

Proof. 设该群的阶 $|G|=p^n$, 我们对正整数 n 作归纳. 当 $n=1$ 时, G 是 p 阶循环群, 有正规列 $G\trianglerighteq\{1_G\}$, 该正规列唯一的商因子交换, 结论成立. 下设结论对不超过 n 的正整数成立, 现考虑 p^{n+1} 阶群 G, 因为 p-群的中心非平凡, 所以 $Z(G)$ 也是 p-群, 设 $|Z(G)|=p^m,1\le m\le n+1$, 当 $m=n+1$ 时, 有 $Z(G)=G$, 即 G 是交换群, 此时有正规列 $G\trianglerighteq\{1_G\}$, 商因子同构于 G 为交换群. 如果 $1\le m\le n$, 那么 $G/Z(G)$ 与 $Z(G)$ 都是 p-群, 由归纳假设可知它们都是可解群, 所以 G 可解. □

接下来回到 Burnside 定理的准备中, 首先我们需要:

Lemma 2.43. 设 χ 是有限群 G 的某个不可约复表示 $\rho: G\to GL(V)$ 的特征标. 那么 G 的共轭类 C 满足 $|C|$ 与 $\chi(1)=\dim_{\mathbb{C}}V$ 互素, 那么对任给 $g\in C$ 有 $\chi(g)=0$ 或 $\rho(g)\in\mathbb{C}\mathrm{id}_V$.

Proof. 由条件知存在整数 m,l 使得 $m\chi(1)+l|C|=1$, 所以等式两边同时除以 $\chi(1)$ 并乘上 $\chi(g)$ 可得等式

$$\frac{\chi(g)}{\chi(1)}=l|C|\frac{\chi(g)}{\chi(1)}+m\chi(g),g\in C.$$

在 [推论2.30] 中我们看到对 $g\in C$ 有 $|C|\chi(g)/\chi(1)$ 是代数整数, 因此由 $\chi(g)$ 本身也是代数整数立即得到 $\chi(g)/\chi(1)$ 是代数整数. 设 $\chi(g)=\omega_1+\cdots+\omega_n$ 是 n 个 ℓ 次本原单位根的和 (回忆 [引理2.6]), 考虑 ℓ 次本原单位根 $\zeta_n=e^{2\pi i/\ell}$ 生成的 ℓ 次分圆域 $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$, 那么有有限扩张 $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)\supseteq\mathbb{Q}$, 并且它是 Galois 扩张 (原因是 ζ_ℓ 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式在 $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ 上分裂). 考虑该域扩张的 Galois 群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\zeta_\ell)=\{\sigma\in\mathrm{Aut}\mathbb{Q}(\zeta_\ell)|\sigma(q)=q,\forall q\in\mathbb{Q}\}$. 注意到 $\chi(g)/\chi(1)\in\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$, 并且对任何 $\sigma\in\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ 总有 $\sigma(\chi(g))$ 是 n 个 ℓ 次本原单位根的和. 现作

$$N=\prod_{\sigma\in\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\zeta_\ell)}\sigma\left(\frac{\chi(g)}{\chi(1)}\right),$$

那么 $\tau(N)=N,\forall\tau\in\mathrm{Aut}\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$. 前面提到分圆域 $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ 是 $\mathbb{Q}$ 的有限 Galois 扩张, 因此 $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ 中关于 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ 中所有元素作用不动的元素在 $\mathbb{Q}$ 中, 于是上面构造的 N 在 $\mathbb{Q}$ 中. N 作为有限个代数整数之积依然是代数整数, 结合它是有理数以及 $\mathbb{Q}\supseteq\mathbb{Z}$ 是整闭扩张可得 $N\in\mathbb{Z}$. 注意到对每个 $\sigma\in\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ 有 $\sigma(\chi(g)/\chi(1))$ 是模长不超过 1 非复数, 所以 $|N|=0$ 或 1. 如果 $N=0$, 那么 $\chi(g)=0$. 如果 $|N|=1$, 那么 [命题2.8] 表明存在 ℓ 次本原单位根 ω 使得 $\rho(g)=\omega\mathrm{id}_V$. 因此对固定的 $g\in C$ 有 $\chi(g)=0$ 或 $\rho(g)\in\mathbb{C}\mathrm{id}_V$. □

Remark 2.44. 这里回忆证明过程中涉及到的 Galois 理论的概念和相关性质. 对有限扩张 $E \supseteq F$, 总有 $|\mathrm{Aut}_F E| \leq [E:F]$. 如果等号成立, 则称该域扩张 $E \supseteq F$ 为 **Galois 扩张**. 设域扩张 $E \supseteq F$ 是有限扩张, 那么该域扩张 Galois 扩张的充要条件是对任给 $c \in E - F$, 存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}_F E$ 使得 $\sigma(c) \neq c$. 设域扩张 $E \supseteq F$ 是有限扩张, 那么 $E \supseteq F$ 是 Galois 扩张的充要条件是存在 $\alpha \in E$ 使得 $E = F[\alpha]$ 且 α 在 F 上的首一最小多项式在 $E[x]$ 中可以分解为两两互异的一次多项式乘积, 即能够在 E 上分裂且没有重根.

Theorem 2.45. 设 G 是有限单群, 那么不存在 G 的共轭类 C 使得 $|C|$ 为某个素数的正整数幂.

Proof. 如果 G 是 Abel 群, 结论明显成立. 下设 G 非交换, 我们用反证法证明结论. 假设存在素数 p 与 G 的共轭类 C 使得 $|C| = p^\ell$, 其中 ℓ 是某个正整数. 设 G 有不可约复表示 $\{\rho_1, ..., \rho_r\}$, 对应特征标集 $\{\chi_1, ..., \chi_r\}$, 并记 $\rho_i(1) = n_i$. 我们不妨设 ρ_1 是平凡表示 $\rho_1 : G \to GL(\mathbb{C}), g \mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, 那么 $n_1 = 1$ 且 $\chi_1(g) = 1, \forall g \in G$.

Claim. 存在正整数 $2 \leq j \leq r$ 使得 p 整除 n_j.

若不然, 只要正整数 i 满足 p 不整除 n_i, 那么 $|C|$ 与 $\chi_i(1)$ 互素, 于是应用 [引理2.43] 得到对 $g \in C$ 有 $\chi_i(g) = 0$ 或 $\rho_i(g) \in \mathbb{C}\mathrm{id}$. 假设存在 $g \in C$ 使得 $\chi_i(g) \neq 0$, 那么 $N = \{g \in G | \rho_i(g) \in \mathbb{C}\mathrm{id}\}$ 是 G 的非平凡正规子群, 由 G 是单群迫使 $N = G$, 所以 $G \cong \rho_i(G)$ 为 Abel 群, 这与条件矛盾, 所以 $\chi_i(g) = 0, \forall g \in C$. 由特征标理论的第二正交关系 (回忆 [定理2.25]), 对 $g \in C$ 与 1 这两个不共轭的元素有

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \overline{\chi_i(1)} \chi_i(g) = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi_i(g) = \chi_1(1) = 1,$$

矛盾. 断言得证, 即有某个 n_j 能够被素数 p 整除. 依然考虑第二正交关系导出的等式

$$1 + \sum_{i=2}^{r} n_i \chi_i(g) = 0, g \in C.$$

通过前面证明断言的讨论我们知道上式那些满足 p 不整除 n_i 的项满足 $\chi_i(g) = 0$, 因此由每个 $\chi_i(g)$ 是代数整数知上式蕴含 $1/p$ 是代数整数. 这与 $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$ 是整闭扩张矛盾. $\square$

Application 2.46. 设 G 是有限非交换单群, 则 G 的任何 Abel 子群 H 满足 $[G:H]$ 不是素数的自然数幂.

Proof. 假设存在素数 p 与自然数 m 使得 $[G:H] = p^m$, 那么由 G 非交换知 $m \geq 1$. 并且由 G 是非交换单群知 $H \neq 1$, 否则 $|G| = p^m$ 表明 G 不是单群或 G 是交换群. 故可取 $h \neq 1 \in H$, 那么中心化子 $C(h) \supseteq H$. 由 $Z(G)$ 平凡知 $C(h) \subsetneq G$. 于是 $[G:C(h)]$ 作为 $[G:H]$ 的因子是 p 的正整数幂. 而 $[G:H]$ 就是 h 在 G 中共轭类的元素数目, 所以 G 存在共轭类 C 使得 $|C|$ 为 p 的正整数幂, 这与 [定理2.45] 矛盾. $\square$

Corollary 2.47. 设 p, q 是不同的素数, $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, 那么阶为 $p^a q^b$ 的群不是单群.

Proof. 设 G 是满足条件的有限群, 取 G 的一个 Sylow p-子群 P, 那么由 P 是 p-群知其中心 $Z = Z(P)$ 非平凡, 取 $z \neq 1 \in Z$, 那么 z 在群 G 中的中心化子 $C(z) \supseteq P$, 这意味着指数 $[G:C(z)]$(也是元素 z 所在的共轭类元素数目) 是素数 q 的幂次. 如果 $[G:C(z)] > 1$, 那么由 [定理2.45] 知 G 不是单群. 如果 $[G:C(z)] = 1$, 那么 $z \in Z(G)$, 于是 $Z(G) \neq 1$. 如果 $Z(G) \neq G$, 那么由 $Z(G)$ 是 G 的非平凡正规子群知 G 不是单群. 如果 $Z(G) = G$, 那么 G 作为阶不是素数正整数幂的 Abel 群自然不是单群. $\square$

Remark 2.48. 该推论的意义是要寻找非交换的有限单群, 只需从阶至少含三个不同素因子的群里找.

现在我们可以正式地给出 Burnside 定理的证明: 对 $n = |G|$ 作归纳, 当 $n = 1$ 时结论直接成立. 假设结论对阶不超过 $n-1(n \geq 1)$ 的群成立, 那么对 $n = p^a q^b$ 的有限群 G, 如果 a 与 b 中有一个为零, 那么 [例2.42] 保证了 G 可解. 下设 a, b 均不为零, 这时 [推论2.47] 保证了 G 存在正规子群 N 满足 $1 \subsetneq N \subsetneq G$, N 与 G/N 的阶都具备一个素数的自然数幂乘上一个素数的自然数幂的形式, 并且阶严格小于 n, 故对 N 和 G/N 应用归纳假设得到 $N, G/N$ 是可解群. 最后应用 [推论2.41] 得到 G 是可解群.

之前已经提到, Bernside 定理在有限单群分类问题中的基本意义是它告诉我们要寻找非交换有限单群只需从阶至少有三个不同素因子的群中找. 下述定理是有限单群分类问题中里程碑式的成果.

Feit-Thompson Theorem. 奇数阶单群可解, 因此任何奇数阶单群同构于奇素数阶循环群.

该定理由 W. Feit(美国, 1930-2004) 与 J. G. Thompson(美国, 1932-) 于 1963 年证明, 论文长达 255 页.

2.7 诱导表示

如果含幺环 R, S 间有保幺环同态 $\alpha : R \to S$, 可以通过 α 将每个 S-模视作 R-模. 设 $\Bbbk$ 是域, 考虑到群 G 的任何子群 H 决定的群代数 $\Bbbk H$ 到 $\Bbbk G$ 有标准嵌入 $j : \Bbbk H \to \Bbbk G$, 所以任何左 $\Bbbk G$-模都可以视作左 $\Bbbk H$-模.

Definition 2.49 (限制模)**.** 设 G 是群, 有子群 H 且 $\Bbbk$ 是域. 那么任何左 $\Bbbk G$-模 M 可天然视作左 $\Bbbk H$-模, 将左 $\Bbbk H$-模 M 记作 $\mathrm{Res}_H^G M$, 称为 M 的**限制模**. 因此任何群 G 的表示可限制为子群 H 的表示.

Remark 2.50. 给定保幺环同态 $\alpha : R \to S$, M 是左 S-模, 那么通过 α 赋予 M 左 R-模结构后, 有天然的左 R-模同构 ${}_R M \cong \mathrm{Hom}_S({}_S S_R, {}_S T)$. 因此左 $\Bbbk G$-模 M 满足左 $\Bbbk H$-模同构 $\mathrm{Res}_H^G M \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(\Bbbk G, M)$. 根据限制模的定义不难看出限制模的概念给出共变函子 $\mathrm{Res}_H^G(-) : \Bbbk G\text{-Mod} \to \Bbbk H\text{-Mod}$, 称为**限制函子**. 根据前面的讨论容易验证自然同构 $\mathrm{Res}_H^G(-) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(\Bbbk G, -)$.

Example 2.51. 设 G 是有限群, H 是子群且 $\Bbbk$ 是域. 那么 $\Bbbk G$ 作为 $\Bbbk H$-$\Bbbk H$ 双模在单边均自由. 以右模情形为例, 若设 $\{g_1 H, g_2 H, ..., g_n H\}$ 是群 G 关于 H 的一个左陪集分解, 则 $\{g_1, ..., g_n\}$ 是 $\Bbbk G$ 作为右 $\Bbbk H$-模的基.

前面提到通过保幺环同态 $\alpha : R \to S$ 可将任何 S-模视作 R-模, 那么 S-模作为 R-模的结构仍可反映原先作为 S-模的一些结构信息. 例如 S-模 M 如果有非零真子模那么 M 作为 R-模也有非零真子模. 进而知 ${}_R M$ 是不可约模蕴含 ${}_S M$ 也是不可约模. 翻译成群表示的语言, 我们得到

Proposition 2.52. 设 G 是群, 有子群 H 且 $\Bbbk$ 是域. 如果线性表示 $\rho : G \to GL(V)$ 满足将该表示限制于子群 H 得到的表示 $\rho_H : H \to GL(V)$ 是不可约表示, 那么 ρ 也是不可约表示.

如果有限群 G 存在性质好的子群, 我们也可以该子群的信息得到一些不可约表示的信息.

Proposition 2.53. 设有限群 G 有 Abel 子群 H, 则 G 在特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上任何不可约表示次数不超过子群 H 在 G 中的指数 $[G : H]$.

Proof. 设 $\rho : G \to GL(V)$ 是群 G 在域 $\Bbbk$ 上的一个不可约表示, 那么它可自然限制为 H 的不可约表示. 根据 Maschke 定理, V 作为左 $\Bbbk H$-模可分解为一些不可约左 $\Bbbk H$-模的直和, 而 [例1.38] 说有限 Abel 群在代数闭域上的不可约表示都是 1 次的, 所以 V 可以分解为一些 1 维左 $\Bbbk H$-模的直和. 总之, V 存在 1 维左 $\Bbbk H$-子模 W, 考虑 V 作为左 $\Bbbk G$-模的子模

$$V' = \sum_{g \in G} gW,$$

那么由 $V'=V$ 且集合 $\{gW|g\in G\}$ 的元素数目不超过 $[G:H]$ 知结论成立. $\square$

Remark 2.54. 若取有限群 G 的平凡子群 $H=\{1\}$, 那么上述命题给出的不可约表示维数上界是平凡的.

Example 2.55. 设 D_n 是正 n 边形的二面体群, 记 r 为将正 n 边形中心置于平面原点绕原点逆时针旋转 $2\pi/n$ 对应的旋转变换, 那么 $\langle r\rangle$ 是 D_n 的指数为 2 的 Abel 子群. 故 D_n 的不可约复表示次数为 1 或 2.

前面我们看到有了整个群的表示可以通过取限制模的手段得到子群的表示. 反之, 也可以从小群的表示出发构造大群的表示. 保幺环同态 $\alpha:R\to S$ 赋予 S 天然的 R-R 双模结构, 于是任何左 R-模 M 可产生左 S-模 $S\otimes_R M$. 类似于限制模的情形, 对群 G 的子群 H, 考虑群代数的嵌入 $j:\Bbbk H\to\Bbbk G$, 便可得到诱导模的概念.

Definition 2.56 (诱导模)**.** 设 G 是群, 有子群 H 且 $\Bbbk$ 是域. 那么任何左 $\Bbbk H$-模 M 可诱导左 $\Bbbk G$-模 $\Bbbk G\otimes_{\Bbbk H}M$, 记作 $\mathrm{Ind}_H^G M$, 称为 M 的**诱导模**. 若记 $\rho:H\to GL(M)$ 是左 $\Bbbk H$-模 M 对应的表示, 则称左 $\Bbbk G$-模 $\mathrm{Ind}_H^G M$ 对应的表示为 ρ 的**诱导表示**. 这给出共变函子 $\mathrm{Ind}_H^G(-):\Bbbk H\text{-Mod}\to\Bbbk G\text{-Mod}$, 称为**诱导函子**.

Remark 2.57. 对保幺环同态 $\alpha:R\to S,\beta:S\to T$, 任何左 R-模 M 可经这两个环同态视作左 S-模以及左 T-模. 并且有左 T-模同构 $T\otimes_S(S\otimes_R M)\cong T\otimes_R M$. 因此, 如果群 G 有子群链 $N\subseteq H\subseteq G$, 那么对任何 N 的线性表示 M 有左 $\Bbbk G$-模同构 $\mathrm{Ind}_N^G M\cong\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Ind}_N^H M)$, 因此诱导表示具有传递性.

在 [例2.51] 中我们看到若 H 是 G 的子群, 则 $\Bbbk G$ 是 $\Bbbk H$ 上的自由右模, 并且存在一个基由 G 关于 H 左陪集分解的代表元集构成. 现考虑子群 H 的表示 M, 那么作为 $\Bbbk$-线性空间, 诱导模 $\Bbbk G\otimes_{\Bbbk H}M\cong M^{[G:H]}$. 所以若 M 是有限维表示, 设 M 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $\{x_1,...,x_n\}$, G 关于子群 H 的左陪集分解有代表元集 $\{g_1,...,g_m\}$, 那么 $\{g_i\otimes x_j|1\leq i\leq n,1\leq j\leq m\}$ 是 $\mathrm{Ind}_H^G M$ 作为 $\Bbbk$-线性空间的基. 我们把刚刚的讨论总结为:

Proposition 2.58. 设 G 是有限群, H 是子群, M 是 H 在域 $\Bbbk$ 上的有限维表示, 那么线性维数 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ind}_H^G M=[G:H]\dim_{\Bbbk}M$. 若设 M 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $\{x_1,...,x_n\}$, G 关于子群 H 的左陪集分解有代表元集 $\{g_1,...,g_m\}$, 那么 $\{g_i\otimes x_j|1\leq i\leq n,1\leq j\leq m\}$ 是 $\mathrm{Ind}_H^G M$ 作为 $\Bbbk$-线性空间的基.

Remark 2.59. 该命题表明有限群子群的有限维表示产生的诱导表示的维数是给定表示维数的指数倍.

除了诱导表示与给定表示之间的维数关系, 我们也关心诱导表示的特征标. 首先可直接验证下述结果.

Lemma 2.60. 设 G 是有限群, H 是子群, $\rho:G\to GL(M)$ 是 H 在域 $\Bbbk$ 上的有限维表示, M 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $B=\{x_1,...,x_n\}$, G 关于子群 H 的左陪集分解有代表元集 $\{g_1,...,g_m\}$. 取定 $\mathrm{Ind}_H^G M$ 作为 $\Bbbk$-线性空间的基 $C=\{g_i\otimes x_j|1\leq i\leq n,1\leq j\leq m\}$(根据 [命题2.58] 这确实是诱导表示的基). 如果记表示 ρ 关于基 B 的矩阵表示为 $\rho_B:H\to GL_n(\Bbbk)$, 那么诱导表示 $\tau:G\to GL(\mathrm{Ind}_H^G M)$ 在基 C 下的矩阵表示 $\tau_C:G\to GL_\ell(\Bbbk),g\mapsto\tau_C(g)$(这里 $\ell=\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ind}_H^G M=[G:H]\dim_{\Bbbk}M=mn$) 满足

$$\tau_C(g)=\begin{pmatrix}\dot{\rho_B}(g_1^{-1}gg_1) & \dot{\rho_B}(g_1^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\rho_B}(g_1^{-1}gg_m)\\ \dot{\rho_B}(g_2^{-1}gg_1) & \dot{\rho_B}(g_2^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\rho_B}(g_2^{-1}gg_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dot{\rho_B}(g_m^{-1}gg_1) & \dot{\rho_B}(g_m^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\rho_B}(g_m^{-1}gg_m)\end{pmatrix},$$

其中 $\dot{\rho_B}(g)$ 满足当 $g\in H$ 时 $\dot{\rho_B}(g)=\rho_B(g)$, 当 $g\notin H$ 时 $\dot{\rho_B}(g)=O$.

通过上述引理中诱导表示的矩阵表示, 便可导出诱导表示与给定表示特征标的关系.

Proposition 2.61. 设 G 是有限群, H 是子群, $\rho : G \to GL(M)$ 是 H 在域 $\Bbbk$ 上的有限维表示, 对应特征标 $\chi : G \to \Bbbk$, G 关于子群 H 的左陪集分解有代表元集 $\{g_1, ..., g_m\}$. 那么诱导表示 $\tau : G \to GL(\mathrm{Ind}_H^G M)$ 的特征标 $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ 满足 $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)(g) = \sum\limits_{i=1}^{m} \dot{\chi}(g_i^{-1} g g_i) = (1/|H|) \sum\limits_{a \in G} \dot{\chi}(a^{-1} g a)$, 其中

$$\dot{\chi}(x) = \begin{cases} \chi(x), & x \in H \\ 0, & x \notin H \end{cases}.$$

Proof. 在 [引理2.61] 中我们已经看到了取定 M 的一个基 B 后诱导表示关于 B 诱导的基 C 下的矩阵表示 $\tau_C : G \to GL_\ell(\Bbbk), g \mapsto \tau_C(g)$ 所具有的形式, 其中 $\ell = \dim_{\Bbbk} \mathrm{Ind}_H^G M$. 于是由特征标的定义便知结论成立. □

2.8 Frobenius 互反律

如果群 G 有子群 H, 那么有限制函子 $\mathrm{Res}_H^G(-) : \Bbbk G\text{-Mod} \to \Bbbk H\text{-Mod}$ 和诱导函子 $\mathrm{Ind}_H^G(-) : \Bbbk H\text{-Mod} \to \Bbbk G\text{-Mod}$. 我们已经看到自然同构 $\mathrm{Res}_H^G(-) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(\Bbbk G, -)$ 以及 $\mathrm{Ind}_H^G(-) = \Bbbk G \otimes_{\Bbbk H} -$, 因此由 Hom 函子和张量函子的伴随性质便知诱导函子 $\mathrm{Ind}_H^G(-)$ 是限制函子 $\mathrm{Res}_H^G(-)$ 的左伴随函子. 特别地, 我们有

Proposition 2.62. 设群 G 有子群 H, $\Bbbk$ 是域, 则对任何左 $\Bbbk H$-模 X, 左 $\Bbbk G$-模 Y 有标准 $\Bbbk$-线性同构

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(\mathrm{Ind}_H^G X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk H}(X, \mathrm{Res}_H^G Y).$$

Remark 2.63. 若 $\Bbbk$ 是代数闭域且 $\mathrm{char}\Bbbk$ 不整除 $|G|$, 那么任何 H 在 $\Bbbk$ 上的有限维表示 X 和 G 在 $\Bbbk$ 上的有限维表示 Y 都可在不计次序与同构意义下唯一地分解为有限个不可约模的直和. 而上述命题表明在此条件下 (例如 $\Bbbk = \mathbb{C}$), 如果进一步 Y 是 G 的不可约表示, 那么 $\dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\Bbbk H}(X, \mathrm{Res}_H^G Y)$ 就是 $\mathrm{Ind}_H^G X$ 作为 $\Bbbk G$-模的不可约分解式中与 Y 同构的不可约直和项项数.

在 [命题2.17] 中我们看到对有限群 G 的任何有限维复表示 $\rho_X : G \to GL(X), \rho_Y : G \to GL(Y)$, 其中 $X, Y \neq 0$, 有

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(X, Y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\rho_X}(g)} \chi_{\rho_Y}(g) = \langle \chi_{\rho_X}, \chi_{\rho_Y} \rangle.$$

所以此时对 [命题2.62] 中的线性同构两边取线性维数便可得下面的 Frobenius 互反律.

Frobenius Reciprocity. 设有限群 G 有子群 H, χ 是 H 的一个复特征标, ψ 是 G 的一个复特征标, 则

$$\langle \mathrm{Ind}_H^G(\chi), \psi \rangle_G = \langle \chi, \mathrm{Res}_H^G(\psi) \rangle_H,$$

其中 $\langle -, - \rangle_H, \langle -, - \rangle_G$ 分别表示 $\mathbb{C}^H$ 和 $\mathbb{C}^G$ 上之前定义的复内积.

Remark 2.64. Frobenius 互反律反映了有限群复特征标的限制特征与其子群复特征标的诱导特征间的某种对偶性. 根据前面的讨论我们看到 Frobenius 互反律成立的本质原因是 Hom 函子与张量函子间的伴随性质.

通过 Frobenius 互反律我们可以看到有限群与其子群的最高次不可约复表示的次数间的关系.

Application 2.65. 设 G 是有限群, 有子群 H, 那么 $\mathcal{M}_H \le \mathcal{M}_G \le [G:H]\mathcal{M}_H$, 其中 $\mathcal{M}_H$ 表示 H 所有不可约复表示的次数中最大者、$\mathcal{M}_G$ 表示 G 所有不可约复表示的次数中最大者.

Proof. 设 H 有不可约复特征标 χ 使得 $\chi(1) = \mathcal{M}_H$. 那么诱导特征标 $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ 对应的表示一定会包含 H 的某个不可约复表示, 记该复表示对应的不可约复特征标为 ψ, 那么 $\langle \chi, \mathrm{Res}_H^G(\psi)\rangle_H = \langle \mathrm{Ind}_H^G(\chi), \psi\rangle_G \ge 1$, 这意味着限制特征标 $\mathrm{Res}_H^G(\psi)$ 对应的限制表示会包含一个同构于 χ 对应不可约表示的直和因子. 特别地, $\mathcal{M}_H$ 不超过限制特征标 $\mathrm{Res}_H^G(\psi)$ 对应的限制表示的次数, 该次数就是 $\psi(1)$, 因此由 $\psi(1) \le \mathcal{M}_G$ 可得 $\mathcal{M}_H \le \mathcal{M}_G$.

下面证明 $\mathcal{M}_G \le [G:H]\mathcal{M}_H$. 取 G 的不可约复表示 ψ 满足 $\psi(1) = \mathcal{M}_G$, 那么限制特征标 $\mathrm{Res}_H^G(\psi)$ 对应的限制表示会包含 H 的某个不可约复表示, 设该复表示对应的特征标是 χ. 那么通过 $\langle \mathrm{Ind}_H^G(\chi), \psi\rangle_G = \langle \chi, \mathrm{Res}_H^G(\psi)\rangle_H \ge 1$ 可知 $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ 对应的诱导表示存在同构于 ψ 对应不可约复表示的直和项, 这说明 $\psi(1) = \mathcal{M}_G$ 不超过 $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ 对应诱导表示的次数, 根据 [命题2.58] 立即得到 $\mathcal{M}_G \le [G:H]\chi(1) \le [G:H]\mathcal{M}_H$. □

Remark 2.66. 若 H 是 Abel 子群, 那么 $\mathcal{M}_H = 1$, 进而 $\mathcal{M}_G \le [G:H]$, 这就是 [命题2.53] 的结果.

2.9 Mackey 不可约性判别

诱导表示作为通过子群表示构造大群表示的手段, 我们自然关心诱导表示何时是不可约的. 设 H 是有限群 G 的子群, 并有有限维复表示 $\rho: H \to GL(W)$, ρ 对应的特征标记作 χ. 根据 [推论2.20], $\mathrm{Ind}_H^G W$ 是不可约 $\mathbb{C}G$-模的充要条件是 $\langle \mathrm{Ind}_H^G(\chi), \mathrm{Ind}_H^G(\chi)\rangle_G = 1$. 因此需要挖掘使得 $\langle \mathrm{Ind}_H^G(\chi), \mathrm{Ind}_H^G(\chi)\rangle_G = 1$ 成立的条件. 由 Frobenius 互反律, 诱导特征标 $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ 满足 $\langle \mathrm{Ind}_H^G(\chi), \mathrm{Ind}_H^G(\chi)\rangle_G = \langle \chi, \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(\chi))\rangle_H$, 所以要研究诱导模 $\mathrm{Ind}_H^G W$ 的不可约性, 需要进一步认识 $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G W) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(\Bbbk G, \Bbbk G \otimes_{\Bbbk H} W)$ 的结构来计算 $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(\chi))$. 让我们先来考虑更一般的场景. 给定群 G 的子群 H, L, 通过对 $x, y \in G$ 定义 $x \sim y \Leftrightarrow$ 存在 $l \in L, h \in H$ 使得 $y = lxh$. 可赋予集合 G 上等价关系 $\sim$, $g \in G$ 关于该等价关系所在的等价类为 LgH, 称 G 中具有该形式的子集为关于子群对 (L, H) 的**双陪集**. 一旦 G 是有限集, 则存在双陪集代表元集 $\{s_1, ..., s_m\}$ 使得 G 有不相交双陪集分解 $G = Ls_1H \cup Ls_2H \cup \cdots \cup Ls_mH$. 对每个正整数 $1 \le i \le m$, 记 $L_i = L \cap s_iHs_i^{-1}$, 那么可直接验证若 $\{b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{ij_i}\} \subseteq L$ 是 L 关于子群 L_i 左陪集分解的一个代表元集, 则

$$\{b_{11}s_1, b_{12}s_1, ..., b_{1j_1}s_1, ..., b_{m1}s_m, ..., b_{mj_m}s_m\} \subseteq G$$

是 G 关于子群 H 的一个左陪集分解代表元集, 并且 $Ls_iH = b_{i1}s_iH \cup b_{i2}s_iH \cup \cdots \cup b_{ij_i}s_iH, \forall 1 \le i \le m$.

现设 G 有限. 通过 [命题2.58], 我们看到作为域 $\Bbbk$ 上线性空间, 任何左 $\Bbbk H$-模 W 的诱导模 $\mathrm{Ind}_H^G W$ 与

$$\bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{k=1}^{j_i} b_{ik}s_i \otimes_{\Bbbk H} W$$

同构. 并且对每个正整数 $1 \le i \le m$, L 可天然作用在 $\{b_{i1}s_iH, b_{i2}s_iH, ..., b_{ij_i}s_iH\}$ 上, 这说明

$$\mathcal{U}_i = \bigoplus_{k=1}^{j_i} b_{ik}s_i \otimes_{\Bbbk H} W$$

上有自然的左 $\Bbbk L$-模结构. 不难看出左 $\Bbbk L$-模同构 $\bigoplus\limits_{i=1}^{m}\mathcal{U}_i \cong \mathrm{Res}_L^G(\mathrm{Ind}_H^G W)$.

对每个 $g \in G$, 线性表示 $\rho: H \to GL(W)$ 可产生共轭子群的线性表示 $\rho^g: gHg^{-1} \to GL(W), x \mapsto \rho(g^{-1}xg)$, 即可通过群同构 $gHg^{-1} \cong H$ 自然地给出 W 上左 $\Bbbk[gHg^{-1}]$-模结构, 为不引起混淆, 之后将 W 视作

左 $\Bbbk[gHg^{-1}]$-模时, 记作 W^g. 于是 W^{s_i} 的限制模 $\mathrm{Res}_{L_i}^{s_iHs_i^{-1}}(W^{s_i})$ 是左 $\Bbbk L_i$-模. 现在我们设 $\rho: H \to GL(W)$ 是有限群 G 的子群 H 在 $\Bbbk$ 上的有限维表示, 则有如下左 $\Bbbk L$-模同构:

$$\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathrm{Ind}_{L_i}^{L}(\mathrm{Res}_{L_i}^{s_iHs_i^{-1}}(W^{s_i})), b_{ik}s_i \otimes w \mapsto b_{ik} \otimes w.$$

φ_i 是通过 $\mathcal{U}_i$ 具体的基直接构造的 $\Bbbk$-线性映射, 因为 $\{b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{ij_i}\} \subseteq L$ 是 L 关于子群 L_i 左陪集分解的一个代表元集所以 φ_i 是满射. 于是由 $\dim_{\Bbbk}\mathcal{U}_i = \dim_{\Bbbk}\mathrm{Ind}_{L_i}^{L}(\mathrm{Res}_{L_i}^{s_iHs_i^{-1}}(W^{s_i}))$ 知 φ_i 是线性同构. 要看到 φ_i 是左 $\Bbbk L$-模同态, 只需验证 φ_i 保持 L 中每个元素的作用. 任取 $l \in L$, 并设 $lb_{ik}s_i = b_{it}s_ih$, 其中 $t \in \{1, 2, ..., j_i\}$, 那么 $\varphi_i(lb_{ik}s_i \otimes w) = b_{it} \otimes hw$. 而 $l\varphi_i(b_{ik}s_i \otimes w) = lb_{ik} \otimes w = b_{it}s_ihs_i^{-1} \otimes w = b_{it} \otimes hw = \varphi_i(lb_{ik}s_i \otimes w)$, 所以 φ_i 是左 $\Bbbk L$-模同构. 上述讨论证明了下面的 Mackey 分解定理.

Mackey's Decomposition Theorem. 设群 G 是有限群, $L.H$ 是子群. 设 $\{s_1, ..., s_m\}$ 是群 G 关于子群对 (L, H) 的双陪集分解的一个代表元集, 并记 $L_i = L \cap s_iHs_i^{-1}, i = 1, 2, ..., m$. 那么对 H 在域 $\Bbbk$ 上的任何有限维表示 $\rho : H \to GL(W)$, 有左 $\Bbbk L$-模同构

$$\mathrm{Res}_L^G(\mathrm{Ind}_H^G W) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ind}_{L_i}^{L}(\mathrm{Res}_{L_i}^{s_iHs_i^{-1}}(W^{s_i})),$$

其中 W^{s_i} 是同构群同构 $s_iHs_i^{-1} \cong H$ 给出 W 上自然的左 $\Bbbk[s_iHs_i^{-1}]$-模结构.

现在我们可以证明下面的 Mackey 不可约性判别准则.

Mackey's Irreducibility Criterion. 设 G 是有限群, 有子群 H, $\rho : H \to GL(W)$ 是 H 的一个有限维复表示, 对应的复特征标记为 χ. 那么诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G\rho$ 是不可约复表示的充要条件是 ρ 为 H 的不可约表示且对任何 $t \in G - H$, $\mathrm{Res}_{H_t}^{H}W$ 和 $\mathrm{Res}_{H_t}^{tHt^{-1}}(W^t)$ 作为左 $\mathbb{C}H_t$-模没有同构的不可约子模, 其中 $H_t = H \cap tHt^{-1}$.

Proof. 根据 [推论2.20], $\mathrm{Ind}_H^G W$ 是不可约 $\mathbb{C}G$-模的充要条件是 $\langle \mathrm{Ind}_H^G(\chi), \mathrm{Ind}_H^G(\chi)\rangle_G = 1$. 结合 Frobenius 互反律知 $\mathrm{Ind}_H^G\rho$ 是不可约复表示当且仅当 $\langle \chi, \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(\chi))\rangle_H = 1$. 现在将 Mackey 分解定理中的子群 L 取为 H, 那么由 $\langle \chi, \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(\chi))\rangle_H = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(W, \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(W)))$, 立即得到

$$\langle \chi, \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(\chi))\rangle_H = \sum_{i=1}^{m} \langle \chi, \mathrm{Ind}_{H_i}^{H}(\mathrm{Res}_{H_i}^{s_iHs_i^{-1}}(W^{s_i}))\rangle_H,$$

其中 $\{s_1, ..., s_m\}$ 是群 G 关于子群对 (H, H) 的双陪集分解的一个代表元集, $H_i = H \cap s_iHs_i^{-1}$. 不妨设 $s_1 = 1$, 那么 $H_1 = H$, 因此 $\langle \chi, \mathrm{Ind}_{H_1}^{L}(\mathrm{Res}_{H_1}^{s_1Hs_1^{-1}}(W^{s_1}))\rangle_H = \langle \chi, \chi\rangle_H$(只要 $W \neq 0$ 便有 $\langle \mathrm{Ind}_H^G(\chi), \mathrm{Ind}_H^G(\chi)\rangle_H \geq 1$). 现在我们把 $\langle \chi, \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(\chi))\rangle_H$ 表示为

$$\langle \chi, \chi\rangle_H + \sum_{i=2}^{m} \langle \chi, \mathrm{Ind}_{H_i}^{H}(\mathrm{Res}_{H_i}^{s_iHs_i^{-1}}(W^{s_i}))\rangle_H,$$

那么由上式每一项均为自然数且当 $W \neq 0$ 时第一项至少为 1 可知 $\mathrm{Ind}_H^G\rho$ 不可约的充要条件是 ρ 不可约且

$$\langle \chi, \mathrm{Ind}_{H_i}^{H}(\mathrm{Res}_{H_i}^{s_iHs_i^{-1}}(W^{s_i}))\rangle_H = 0, \forall 2 \leq i \leq m.$$

根据 Frobenius 互反律, 后者等价于 $\langle \mathrm{Res}_{H_i}^{H}\chi, \mathrm{Res}_{H_i}^{s_iHs_i^{-1}}(W^{s_i})\rangle_{H_i} = 0, \forall 2 \leq i \leq m$. 由此立即看到充分性成立. 必要性来自任何 $t \in G - H$ 均可作为 G 关于 (H, H) 双陪集分解的一个代表元. $\square$