

Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 7 月 23 日

这份笔记的目的是记录域上 Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理同调与上同调形式的叙述以及相关基础概念. Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理最早由 G. Hochschild(德国, 1915-2010), B. Kostant(美国, 1928-2017) 与 A. Rosenberg(德国, 1926-2007) 发现并证明 [HKR62]. Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理表明对域上本质有限型光滑的交换代数, 其 Hochschild(上) 同调代数分次代数同构于其 Kähler 微分模 (导子模) 决定的外代数. 特别地, 代数闭域上光滑仿射簇 X 的坐标环 $\mathbb{k}[X]$ 作为仿射光滑代数的 Hochschild 上同调与同调间有对偶 $H^n(\mathbb{k}[X], \mathbb{k}[X]) \cong H_n(\mathbb{k}[X], \mathbb{k}[X])^*$.

目录

1	Hochschild(上) 同调的代数结构	1
1.1	Shuffle 积与 Hochschild 同调代数	1
1.2	杯积与 Hochschild 上同调代数	3
2	Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理	4
2.1	同调形式	4
2.2	上同调形式	6

1 Hochschild(上) 同调的代数结构

1.1 Shuffle 积与 Hochschild 同调代数

设 A 是含幺交换环 K 上代数, 满足 A 是平坦 K -模, 则对任何 A - A 双模 M 下述 Hochschild 链复形的同调给出 A 系数在 M 中的 Hochschild 同调.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(A, M) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(A, M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(A, M) \xrightarrow{d_1} C_0(A, M) \longrightarrow 0$$

这里 $C_n(A, M) = A \otimes_K A \otimes_K \cdots \otimes_K A \otimes_K M = A^{\otimes n} \otimes_K M$, 微分 d_n 将每个形如 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x \in C_n(A, M)$ 的元素映至

$$(-1)^n a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n x + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \cdots \otimes a_n \otimes x + a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x a_1.$$

以下设 $M = A$ 且 A 是 K 上交换代数. 定义 K -双线性映射 $-\times -: C_n(A, A) \times C_m(A, A) \rightarrow C_{n+m}(A, A)$ 满足: 对 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \in C_n(A, A), a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m} \otimes a'_0 \in C_m(A, A)$, 有

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0) \times (a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m} \otimes a'_0) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma^{-1}(n+m)} \otimes a_0 a'_0.$$

称任意两个 Hochschild 链 $c \in C^n(A, A), c' \in C^m(A, A)$ 在上述双线性映射 $-\times -: C_n(A, A) \times C_m(A, A) \rightarrow C_{n+m}(A, A)$ 下的像 $c \times c'$ 为这两个链的 **shuffle 积**. 现记

$$C_*(A, A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n(A, A), H_*(A, A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n(A, A)$$

那么可以将 shuffle 积线性地扩充到 $C_*(A, A)$ 上, 通过直接地计算可知可得:

Lemma 1. 设 A 是 K 上交换代数满足 A 是平坦 K -模, 那么:

- (1) 分次 K -模 $C_*(A, A)$ 上 shuffle 积是结合的且 $(C_*(A, A), \times)$ 构成分次交换代数.
- (2) 对任何 Hochschild 链 $c \in C^n(A, A), c' \in C^m(A, A)$ 有 $d_{n+m}(c \times c') = d_n(c) \times c' + (-1)^n c \times d_m(c')$. 所以 shuffle 积可诱导 $H_*(A, A)$ 上, 使得 $(H_*(A, A), \times)$ 构成分次交换 K -代数, 称为 A 的 **Hochschild 同调代数**.

Proof. 该引理的计算验证可参见 [Lod13, p.123, Proposition 4.2.2] 或 [Wei94, p.321, Proposition 9.4.2]. \square

记 $\Omega(A)$ 是交换代数 A 的 Kähler 微分模, 以下总默认 A 是平坦 K -模, 那么在系数环上平坦的交换代数的 1 次 Hochschild 同调可由 $\Omega(A)$ 具体表示, 具体地, 有下述结果.

Proposition 2. 设 A 是含么交换环 K 上的交换代数, 满足 A 是平坦 K -模. 设 $\Omega(A)$ 是 A 的 Kähler 微分模, M 是 A -模, 将其天然视作 A - A 双模. 那么 A 系数在 M 中的 Hochschild 1 次同调 $H_1(A, M) \cong \Omega(A) \otimes_A M$ (这里 Hochschild 同调 $H_1(A, M)$ 的 A -模结构来自 M 上的 A -模结构). 特别地, 若取 $M = A$, 则 A 的 Kähler 微分模和 A 的 1 次 Hochschild 同调作为 A -模同构.

Proof. 考虑 A 系数在 M 中的 Hochschild 复形, 那么 1 次微分是零, 2 次微分为

$$\delta^2 : A \otimes_K A \otimes_K M \rightarrow A \otimes_K M, a \otimes b \otimes m \mapsto a \otimes bm - ab \otimes m + b \otimes ma,$$

所以作为 K -模, 有

$$H_1(A, M) \cong A \otimes_K M / (\{a \otimes bm - ab \otimes m + b \otimes ma \mid a, b \in R, m \in M\}),$$

易知存在唯一的 K -模同态 $\varphi : H_1(A, M) \rightarrow \Omega(A) \otimes_A M$ 使得 $\varphi(a \otimes m + B_1(A, M)) = da \otimes m$. 通过 Kähler 微分模的泛导子定义可天然构造 A -模同态 $\psi : \Omega(A) \otimes_A M \rightarrow H_1(A, M)$ 使得 $\psi(bda \otimes m) = a \otimes bm + B_1(A, M)$. 可直接验证 ψ 与 φ 是互逆的映射, 所以 $H_1(A, M) \cong \Omega(A) \otimes_A M$. \square

注意到 $\Omega(A)$ 与 $H_1(A, A)$ 的等同诱导了 $\Omega(A)$ 到 $H_*(A, A)$ 有标准 A -模同态 $\theta : \Omega(A) \rightarrow H_*(A, A), adb \mapsto \overline{b \otimes a}$. 可直接计算验证 $\theta(x)^2 = 0, \forall x \in \Omega(A)$, 因此外代数 $E_A(\Omega(A))$ 的泛性质诱导出 A -代数同态

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & E_A(\Omega(A)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n(A) \\ & \searrow \theta & \swarrow \psi \\ & H_*(A, A) & \end{array}$$

易见 ψ 是分次 A -代数同态, 并且

$$\psi(a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \overline{a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)} \otimes a_0}.$$

1.2 杯积与 Hochschild 上同调代数

本节我们介绍代数的 Hochschild 上同调上的代数结构. 考虑含么交换环 K 上代数 A , 并设 A 是投射 K -模. 对任何 A - A 双模 M , 若记 $C^0(A, M) = M, C^1(A, M) = \text{Hom}_K(A, M), C^n(A, M)$ 表示 A^n 到 M 的多重 K -线性映射全体. 对每个自然数 n , 记 $\delta^n : C^n(A, M) \rightarrow C^{n+1}(A, M)$ 为

$$\delta^n(f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1 f(x_2, \dots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_n) + (-1)^{n+1} f(x_1, \dots, x_n) x_{n+1},$$

其中 $\delta^0 : M \rightarrow C^1(A, M), u \mapsto \delta^0(u), \delta^0(u)(x) = xu - ux$, 那么便有助于计算 Hochschild 上同调的上链复形

$$0 \longrightarrow C^0(A, M) \xrightarrow{\delta^0} C^1(A, M) \xrightarrow{\delta^1} C^2(A, M) \xrightarrow{\delta^2} \cdots \longrightarrow C^n(A, M) \xrightarrow{\delta^n} \cdots,$$

如无特别说明, 以下讨论中出现的记号 δ 均表示 Hochschild 上链复形的微分.

现取 $M = A$, 那么对任给 $f \in C^p(A, A)$ 以及 $g \in C^q(A, A)$, 定义

$$\cup : C^p(A, A) \times C^q(A, A) \rightarrow C^{p+q}(A, A), (f, g) \mapsto f \cup g$$

为 $(f \cup g)(a_1, \dots, a_{p+q}) = f(a_1, \dots, a_p)g(a_{p+1}, \dots, a_{p+q}), \forall a_1, \dots, a_{p+q} \in A$. 称 $f \cup g$ 为 f 与 g 的杯积. 若记

$$C^*(A, A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C^n(A, A),$$

那么可将 \cup 天然地 K -线性扩充为 $C^*(A, A)$ 上二元运算, 仍记作 \cup . 根据杯积的定义我们立即看到 $(C^*(A, A), \cup)$ 是 \mathbb{N} -分次代数. 并且对任何 $f \in C^p(A, A), g \in C^q(A, A)$, 可直接计算得 $\delta^{p+q}(f \cup g) = \delta f \cup g + (-1)^p f \cup \delta g$. 这一观察表明任意两个 Hochschild 上闭链的杯积还是 Hochschild 上闭链, 所以有

Proposition 3 (Hochschild 上同调环). 设 A 是 K -代数, 满足 A 是投射 K -模, 则上述定义的杯积诱导

$$H^*(A, A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(A, A)$$

上 K -双线性映射 $\cup : H^*(A, A) \times H^*(A, A) \rightarrow H^*(A, A)$ 使得 $(H^*(A, A), \cup)$ 成为 \mathbb{N} -分次代数. 称 $H^*(A, A)$ 为 A 的 **Hochschild 上同调代数**.

与交换代数的 Hochschild 同调代数一样, Hochschild 上同调代数也是分次交换的, 其计算验证也很复杂, 对 $f \in C^p(A, A), g \in C^q(A, A)$, 定义

$$f \bullet g : A^{p+q-1} \rightarrow A, (a_1, \dots, a_{p+q-1}) \mapsto \sum_{i=1}^p (-1)^{(q-1)(i-1)} f(a_1, \dots, a_{i-1}, g(a_i, \dots, a_{i+q-1}), a_{i+q}, \dots, a_{p+q-1}),$$

称之为 $f \bullet g$ 为 f 与 g 的圈积. 可直接计算验证

Lemma 4. 设 A 是 K -代数, 那么对任何 $f \in C^p(A, A), g \in C^q(A, A)$, 有

$$f \cup g - (-1)^{mn} g \cup f = \delta(g) \bullet f + (-1)^p \delta(g \bullet f) + (-1)^{p-1} g \bullet \delta(f).$$

Corollary 5. 设 K -代数 A 满足 A 是投射 K -模, 那么 Hochschild 上同调代数 $(H^*(A, A), \cup)$ 构成分次交换代数, 即对任何齐次元 $\bar{f} \in H^p(A, A), \bar{g} \in H^q(A, A)$, 有 $\bar{f} \cup \bar{g} = (-1)^{mn} \bar{g} \cup \bar{f}$.

2 Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理

2.1 同调形式

Hochschild-Kostant-Rosenberg Theorem (同调形式). 设 A 是域 \mathbb{k} 上交换代数, 设 $\psi : E_A(\Omega(A)) \rightarrow H_*(A, A)$ 是由标准 A -模同态 $\theta : \Omega(A) \rightarrow H_1(A, A), adb \mapsto \overline{b \otimes a}$ 经外代数泛性质诱导出的分次 A -代数同态, 即有

$$\psi(a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \overline{a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(n)} \otimes a_0}.$$

那么当 A 是本质有限型光滑代数时, ψ 时分次代数同构. 若 $\text{char } \mathbb{k} = 0$, 那么对 ψ 限制在指标为 n 的分次项上的同态 $\psi_n : \Omega^n(A) \rightarrow H_n(A, A)$ 有逆映射

$$\varepsilon_n : H_n(A, A) \rightarrow \Omega^n(A), \overline{a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_0} \mapsto \frac{1}{n!} a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n.$$

Proof. 该定理的证明可参见 [Lod13, p.103, Theorem 3.4.4] 或 [Wei94, p.322, Theorem 9.4.7]. 这里仅说明当域 \mathbb{k} 的特征为零时, ψ 的逆映射 ε_n 将 $H_n(A, A)$ 中形如 $\overline{a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_0}$ 的元素映至

$$\frac{1}{n!} a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n.$$

首先定义 $e_n : C_n(A, A) \rightarrow \Omega^n(A)$ 为将每个形如 $a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_0$ 的元素映至 $(1/n!) a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n$ 的 A -模同态. 那么可得分次 A -模同态 $e : C_*(A, A) \rightarrow E_A(\Omega(A))$, 利用所有 (n, m) -shuffles 构成的集合 $S_{n,m}$ 中的元素数目是 C_{n+m}^n 可以直接验证 e 保持齐次元的乘法, 进而知 e 是分次 A -代数同态. 再直接计算验证 Hochschild 边缘链群 $B_n(A, A) \subseteq \text{Ker } e_n$, 因此 e 可诱导分次代数层面的代数同态 $\varepsilon : H_*(A, A) \rightarrow E_A(\Omega(A))$. 对每个自然数 n , 有

$$\varepsilon_n \psi(a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_0 da_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge da_{\sigma(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n.$$

而上式最后一个等号就是 $a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n$, 所以结论成立. \square

Remark 6. 从证明过程中我们看到, 只要基域特征为零, 我们总可以定义出 A -分次代数同态

$$\varepsilon : H_*(A, A) \rightarrow E_A(\Omega(A))$$

使得该分次代数同态在每个分次项上的作用为

$$\varepsilon_n : H_n(A, A) \rightarrow \Omega^n(A), \overline{a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0} \mapsto \frac{1}{n!} a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n.$$

并且 ε 与定理中的 ψ 满足 $\text{id} = \varepsilon\psi$ (见 [Wei94, p.322, Corollary 9.4.4]).

对 K 上本质有限型光滑代数 A , $\Omega(A)$ 是有限生成投射 A -模, 所以存在正整数 n 使得 $\Omega^\ell(A) = 0, \forall \ell \geq n$. 此时, 称

$$\ell = \max\{n \in \mathbb{N} | \Omega^n(A) \neq 0\}$$

为代数 A 的**光滑维数**. $\Omega^\ell(A)$ 被称为 A 的**典范丛**. 如果进一步 $\Omega^\ell(A) \cong A$, 则称 A 有平凡的典范丛, 这时称 $\Omega^\ell(R)$ 作为自由 R -模的生成元 η 为 R 的一个**体积形式**. 如果 P 是非零有限生成投射 A -模, 那么 P^* 是有限生成投射模且 $P \cong P^{**}$ 蕴含 $P^* \neq 0$. 所以一旦交换代数 A 满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模, 那么不仅各阶 Kähler 微分形式 $\Omega^r(A)$ 是有限生成投射模, 而且 $\wedge_A^r \text{Der}_K A \cong \mathfrak{X}^r(A)$ 都是有限生成投射 A -模 (其中 $\mathfrak{X}^r(A)$ 表示 A 上所有交错 r -重线性导子构成的 A -模). 这时, 我们也可以看到 $\wedge_A^r \text{Der}_K A \neq 0$ 当且仅当 $\Omega^r(A) \neq 0$. 进而这时交换代数 A 的光滑维数也可以由 $\ell = \max\{n \in \mathbb{N} | \wedge_A^n \text{Der}_K A \neq 0\}$ 给出.

由 A^e 是正则代数 (见 [Wei94, p.322 Proposition 9.4.6]) 知 $\text{p.dim}_{A^e} A < +\infty$, 故 A 是同调光滑代数. Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理表明对域 \mathbb{k} 上本质有限型光滑代数 A 有 A -模同构 $\Omega^n(A) \cong H_n(A, A)$. 特别地, $\text{Tor}_n^{A^e}(A, A)$ 对所有的自然数 n 都是有限生成投射 A -模, 于是 [HKR62, Lemma 4.1] 可证明

Corollary 7. 设 A 是域 \mathbb{k} 上本质有限型交换代数, 那么有分次 A -代数同构 $\rho : H^*(A, A) \rightarrow \mathfrak{X}^*(A)$, 这里 ρ 满足将每个 $f \in C^n(A, A)$ 所在等价类 $\bar{f} \in H^n(A, A)$ 映至下述交错 n -重线性导子

$$\begin{aligned} \rho(\bar{f}) : \wedge^n A &\rightarrow A \\ a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) f(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

Proof. 该推论的证明过程可参见 [WZ21, Proposition 3.5]. □

回忆对含么交换环 K 上交换代数 A , 只要 $\Omega(A)$ 是有限生成投射 A -模, 那么 $\text{Der}_K A$ 到 $\mathfrak{X}^*(A)$ 的自然嵌入 $\theta : \text{Der}_K A \rightarrow \mathfrak{X}^*(A), \delta \mapsto \delta$ 由外代数泛性质诱导出的分次代数同态 $\Theta : E_A(\text{Der}_K A) \rightarrow \mathfrak{X}^*(A)$ 是分次代数同构, 并且 Θ 限制在指标 r 处给出的 A -模同构为

$$\Theta(\delta^1 \wedge \delta^2 \wedge \cdots \wedge \delta^r)(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r) = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) \delta_1(a_{\sigma(1)}) \delta_2(a_{\sigma(2)}) \cdots \delta_r(a_{\sigma(r)}).$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_K A & \xrightarrow{i} & E_A(\text{Der}_K A) \\ & \searrow \theta & \downarrow \Theta \\ & & \mathfrak{X}^*(A) \end{array}$$

因此我们立即得到

Corollary 8. 设 A 是域 \mathbb{k} 上本质有限型交换代数, 那么存在 A -分次代数同构 $H^*(A, A) \cong E_A(\text{Der}_{\mathbb{k}} A)$.

2.2 上同调形式

设域 \mathbb{k} 的特征为零且 A 是 \mathbb{k} 上本质有限型的光滑交换代数, 那么 [推论7] 中的分次代数同构 ρ 的逆映射可具体求出. 具体地, 若记 $H^1(A, A) = Z^1(A, A)/B^1(A, A)$, 那么标准嵌入 $\ell : \text{Der}_K A \rightarrow H^*(A, A), D \mapsto D + B^1(Z, Z)$ 满足 $\ell(D)^2 = 0$ 且由外代数泛性质所诱导出的 A -代数同态 $\Phi : E_A(\text{Der}_K A) \rightarrow H^*(A, A)$ 满足 $\Phi(D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n) = \theta + B^n(A, A)$, 其中

$$\theta : A^n \rightarrow A, (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto D_1(a_1)D_2(a_2) \cdots D_n(a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) D_1(a_{\sigma(1)}) D_2(a_{\sigma(2)}) \cdots D_n(a_{\sigma(n)}).$$

与标准分次 A -代数同构 $\Theta : E_A(\text{Der}_K A) \rightarrow \mathfrak{X}^*(A)$ 合成可得分次 A -代数同构

$$\xi : \mathfrak{X}^*(A) \rightarrow H^*(A, A), D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n \mapsto \overline{\zeta(D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n)},$$

其中 $\zeta(D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)(a_1, \dots, a_n) = (1/n!) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) D_1(a_{\sigma(1)}) D_2(a_{\sigma(2)}) \cdots D_n(a_{\sigma(n)})$, 可直接计算验证 $\rho\xi = \text{id}$, 因此上述 A -代数同态 Φ 是分次代数同构, 由此得到上同调形式的 Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理.

Hochschild-Kostant-Rosenberg Theorem (上同调形式). 设域 \mathbb{k} 的特征为零且 A 是 \mathbb{k} 上本质有限型的光滑交换代数, 设 $\Phi : E_A(\text{Der}_K A) \rightarrow H^*(A, A)$ 是由标准 A -模同态 $\ell : \text{Der}_K A \rightarrow H^*(A, A), D \mapsto \bar{D}$ 经外代数泛性质所诱导出的分次 A -代数同态, 那么 Φ 是分次 A -代数同构且满足 $\Phi(D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n) = \theta + B^n(A, A)$, 其中

$$\theta : A^n \rightarrow A, (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto D_1(a_1)D_2(a_2) \cdots D_n(a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) D_1(a_{\sigma(1)}) D_2(a_{\sigma(2)}) \cdots D_n(a_{\sigma(n)}).$$

Remark 9. 对比同调形式的 Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理我们看到上同调形式对基域的特征有要求.

设域 \mathbb{k} 特征为零, A 是域 \mathbb{k} 上交换代数, 并赋予平凡的 Poisson 结构. 那么这时由 Poisson 上链复形的定义可知 Poisson 上链复形中的微分全为零, 即 A 的 Poisson 上链复形为

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{0} \mathfrak{X}^1(A) \xrightarrow{0} \cdots \longrightarrow \mathfrak{X}^r(A) \xrightarrow{0} \mathfrak{X}^{r+1}(A) \xrightarrow{0} \cdots$$

对每个自然数 n , 定义 $\phi^n : \mathfrak{X}^n(A) \rightarrow C^n(A, A), F \mapsto \phi^n(F)$ 为

$$\phi^n(F)(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n!} F(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n).$$

下面说明 $\phi^n(F) \in Z^n(A, A)$. 通过直接计算有

$$\begin{aligned} \delta^n(n! \phi^n(F))(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) &= a_1 F(a_2 \wedge a_3 \wedge \cdots \wedge a_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_i a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) a_{n+1} \\ &= a_1 F(a_2 \wedge a_3 \wedge \cdots \wedge a_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_{i+1} F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_i \wedge a_{i+2} \wedge \cdots \wedge a_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{n+1} F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) a_{n+1} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

因此 $\phi^n(F) \in Z^n(A, A)$. 进而知 $\phi^\bullet = \{\phi^i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 给出 A 的 Poisson 上链复形到 A 的 Hochschild 上链复形间的链映射, 并诱导出 A 的 Poisson 上同调与 Hochschild 上同调间的 \mathbb{k} -线性映射族 Φ^\bullet (也是 A -模同态族).

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{0} & \mathfrak{X}^1(A) & \xrightarrow{0} & \cdots \longrightarrow \mathfrak{X}^r(A) \xrightarrow{0} \mathfrak{X}^{r+1}(A) \xrightarrow{0} \cdots \\
& & \downarrow \phi^0 & & \downarrow \phi^1 & & \downarrow \phi^r & & \downarrow \phi^{r+1} \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C^1(A, A) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow C^r(A, A) \longrightarrow C^{r+1}(A, A) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

现设 A 是本质有限型的光滑 \mathbb{k} -代数, 那么 ϕ^\bullet 诱导 n 次上同调间的 A -模同态为 $\xi_n : \mathfrak{X}^n(A) \rightarrow H^n(A, A)$, $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n \mapsto \overline{\zeta(D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n)}$, 其中

$$\zeta(D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) D_1(a_{\sigma(1)}) D_2(a_{\sigma(2)}) \cdots D_n(a_{\sigma(n)}).$$

上式表明 $\xi_n(D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) = (1/n!)(D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n)$, $\forall a_1, \dots, a_n \in A$. 由此得到 $\xi_n(F) = H(\phi^n)$. 所以上同调形式的 Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理可以上升到复形的链映射层面 (即本质上是平凡 Poisson 结构对应的 Poisson 上链复形到 Hochschild 上链复形间某个特殊的链映射是拟同构), 我们把刚刚的讨论总结为下述推论.

Corollary 10. 设 \mathbb{k} 是特征为零的域, A 是 \mathbb{k} 上本质有限型光滑代数, 那么对 A 上平凡 Poisson 结构决定的 Poisson 上链复形 $(\mathfrak{X}^\bullet(A), 0)$ 和 A 的 Hochschild 上链复形 $(C^\bullet(A, A), \delta)$ 间有拟同构 $\phi^\bullet : (\mathfrak{X}^\bullet(A), 0) \rightarrow (C^\bullet(A, A), \delta)$, 其中 $\phi^n : \mathfrak{X}^n(A) \rightarrow C^n(A, A)$, $F \mapsto \phi^n(F)$ 为

$$\phi^n(F)(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n!} F(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n).$$

参考文献

- [HKR62] G. Hochschild, B. Kostant, and A. Rosenberg. Differential forms on regular affine algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 102(3):383–408, 1962.
- [Lod13] J.L. Loday. *Cyclic homology*, volume 301. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Wei94] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge university press, 1994.
- [WZ21] Quanshui Wu and Ruipeng Zhu. Nakayama automorphisms and modular derivations in filtered deformations. *Journal of Algebra*, 572:381–421, 2021.