辛流形上的 Poisson 结构

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 2 月 17 日

辛流形是 Hamilton 力学中自然产生的数学概念, 也是辛几何的主要研究对象. 这份笔记主要记录辛流形的基本概念以及光滑函数环有自然的 Poisson 代数结构的证明 ([定理2.1]), 主要参考文献是 [KZ19] 和 [Lee12].

1 辛流形

设 V 是域 $\Bbbk$ 上线性空间, 如果 $\Bbbk$-双线性型 $\omega : V \times V \to \Bbbk$ 满足对任何 $v \neq 0 \in V$, 存在 $w \in V$ 使得 $\omega(v, w) \neq 0$, 则称 ω 是**非退化的**. 我们马上会看到具有非退化交错双线性型的有限维空间必定是偶数维的.

Lemma 1.1. 设 K 是含幺交换环, $n \geq 1$ 是奇数, 则任何 K 上主对角线全为零的 n 阶反对称阵行列式为零.

Proof. 当 $n = 1$ 时结论直接成立, 下设 $n \geq 3$ 并设 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(K)$ 是主对角线全为零的反对称阵. 我们将通过分析 $\det A$ 的组合展开式 $\det A = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ 来得到 A 的行列式为零. 由 n 是奇数保证了每个阶为 2 的置换 $\sigma \in S_n$ 都必有不动点 (考察 σ 的不相交轮换分解, 每个轮换因子长度恰为 2), 进而知此时 $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} = 0$. 记 $X = \{\sigma \in S_n | \sigma \neq \sigma^{-1}\}$, 那么 X 含偶数个元素并且存在 X 的子集 X_1, X_2 使得 $X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \varnothing$ 且 $f : X_1 \to X_2, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ 是双射. 于是可如下计算 $\det A$.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in X} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in X_1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in X_1} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in X_1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma\in X_1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \sum_{\sigma\in X_1} \mathrm{sgn}(\sigma) (a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} - a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Remark. 条件中要求反对称阵的主对角线全为零是必要的, 例如 2 元域 $\mathbb{F}_2$ 上的单位阵就是反对称的.

Proposition 1.2. 设 V 是域 $\mathbb{k}$ 上有限维线性空间, 若存在 V 上非退化交错双线性型, 则 n 是偶数.

Proof. 设 $\omega : V \times V \to \mathbb{k}$ 是非退化的, 取定 V 的一个基 $\{v_1, ..., v_n\}$, 那么 ω 在该基下有度量矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \omega(v_1,v_1) & \omega(v_1,v_2) & \cdots & \omega(v_1,v_n) \\ \omega(v_2,v_1) & \omega(v_2,v_2) & \cdots & \omega(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega(v_n,v_1) & \omega(v_n,v_2) & \cdots & \omega(v_n,v_n) \end{pmatrix},$$

通过 ω 的交错性可知 B 是主对角线全为零的反对称阵. 因为 ω 是非退化的, 所以 B 作用任意非零 n 维列向量得到非零向量, 这说明 B 是可逆阵. 现在应用 [引理1.1] 可得 $n = \dim_{\mathbb{k}} V$ 是偶数. □

Definition 1.3. 设 $\mathcal{M}$ 是光滑流形, $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ 是闭形式, 如果对每个 $p \in \mathcal{M}$ 有 ω_p 是 $T_p\mathcal{M}$ 上的非退化双线性型, 则称 ω 是**辛形式**. 如果 ω 是 $\mathcal{M}$ 上辛形式, 则称 $(\mathcal{M}, \omega)$ 是**辛流形**.

Remark. 通过 [命题1.2] 立即看到辛流形在每点处切空间总是偶数维的, 所以辛流形都是偶数维流形.

设 V 是域 $\mathbb{k}$ 上 n 维线性空间, 有基 $v_1, ..., v_n$, 那么对任何 V 上线性函数 $f : V \to \mathbb{k}$, f 关于给定基的对偶基有线性表示 $f = f(v_1)v_1^* + \cdots + f(v_n)v_n^*$. 设 $\omega : V \times V \to \mathbb{k}$ 是非退化双线性型, 那么存在唯一的 $x \in V$ 使得 $f = \omega(x, -)$. 如果设 x 关于给定基有线性表示 $x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, 这里 $x_i \in \mathbb{k}$, 那么

$$\Big(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\Big) = \Big(x_1, x_2, ..., x_n\Big) \begin{pmatrix} \omega(v_1,v_1) & \omega(v_1,v_2) & \cdots & \omega(v_1,v_n) \\ \omega(v_2,v_1) & \omega(v_2,v_2) & \cdots & \omega(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega(v_n,v_1) & \omega(v_n,v_2) & \cdots & \omega(v_n,v_n) \end{pmatrix}.$$

因为 ω 是非退化的, 所以上式右边的 n 阶方阵是可逆的. 我们马上利用上述观察说明对辛流形 $(\mathcal{M}, \omega)$ 上任何光滑函数 f, 都存在唯一的光滑向量场 $X_f \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 使得 $df = \omega(X_f, -) = \iota_{X_f}(\omega)$, 这里 ι_{X_f} 表示 X_f 诱导的内乘法. 设 $\mathcal{M}$ 的维数为 n, 任取 $p \in \mathcal{M}$, 设含 p 光滑坐标卡 (U, φ) 有坐标表示 $(x_i)_{i=1}^n$. 首先, 因为 ω_p 是 $T_p\mathcal{M}$ 上非退化双线性型, 所以存在唯一的 $X_p \in T_p\mathcal{M}$ 使得 $(df)_p = \omega_p(X_p, -)$. 定义映射 $X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}, p \mapsto X_p$. 如果能够说明 X 是光滑映射, 那么 X 明显是光滑向量场并且 $df = \iota_X \omega$. 下面说明 X 是光滑的. 设

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \omega = \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{ij} dx_1 \wedge dx_j$$

是关于上述局部坐标的表示, 这里 $X^i : U \to \mathbb{R}, \omega_{ij} : U \to \mathbb{R}$ 分别为 X 和 ω 的分量函数. 因为 ω 是光滑 2-形式, 所以每个 ω_{ij} 是光滑的, 下面我们需要验证 X^i 的光滑性来得到 X 是光滑映射. 对 $q \in U$ 我们有

$$\Big((\partial f/\partial x_1)(q), ..., (\partial f/\partial x_n)(q)\Big) = \Big(X^1|_q, ..., X^n|_q\Big) \begin{pmatrix} \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_1}|_q, \frac{\partial}{\partial x_1}|_q) & \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_1}|_q, \frac{\partial}{\partial x_2}|_q) & \cdots & \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_1}|_q, \frac{\partial}{\partial x_n}|_q) \\ \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_2}|_q, \frac{\partial}{\partial x_1}|_q) & \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_2}|_q, \frac{\partial}{\partial x_2}|_q) & \cdots & \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_2}|_q, \frac{\partial}{\partial x_n}|_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_n}|_q, \frac{\partial}{\partial x_1}|_q) & \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_n}|_q, \frac{\partial}{\partial x_2}|_q) & \cdots & \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_n}|_q, \frac{\partial}{\partial x_n}|_q) \end{pmatrix}.$$

注意到 ω_q 在坐标基下度量矩阵诱导映射 $(\omega(\partial f/\partial x_i, \partial f/\partial x_j))_{n\times n} : U \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 由 f 的光滑性可知 $(\omega(\partial f/\partial x_i, \partial f/\partial x_j))_{n\times n}$ 的逆矩阵的每个分量在 U 上也光滑. 由此便知每个 X^i 在 U 上光滑, 因此 X 是光滑向量场. 由此产生了下述概念.

Definition 1.4. 设 f 是辛流形 $(\mathcal{M}, \omega)$ 上的光滑函数, 设 X_f 是由 $df = \iota_{X_f}\omega$ 唯一确定的光滑向量场, 其中 ι_{X_f} 表示 X_f 诱导的内乘法. 称光滑向量场 $X_f : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ 是 f 的 **Hamilton 向量场**.

Remark. 根据之前的讨论, 辛流形 $(\mathcal{M}, \omega)$ 上有自然的 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同态 $\hat{\omega} : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \to \Omega^1(\mathcal{M}), X \mapsto \iota_X\omega$. 因为任何恰当 1-形式都是某个 Hamilton 向量场在 $\hat{\omega}$ 下的像, 所以由 $\Omega^1(\mathcal{M})$ 可由恰当形式生成得到 $\hat{\omega}$ 是满同态. 另一方面, ω 在每个 $p \in \mathcal{M}$ 对应 $T_p\mathcal{M}$ 上非退化双线性型保证了 $\hat{\omega}$ 是单射. 因此辛形式 ω 诱导模同构 $\hat{\omega}$.

2 Poisson 括号

设 K 是含幺交换环, K-代数 A 是交换代数. 如果 K-双线性映射 $\{-,-\} : A \times A \to A$ 使得 $(A, \{-,-\})$ 是 K-Lie 代数且 $\{-,-\}$ 在每个分量上满足导子性质, 则称 $(A, \{-,-\})$ 是 **Poisson 代数**. 我们马上说明辛流形的光滑函数环上有 Poisson 结构. 设 $(\mathcal{M}, \omega)$ 是辛流形, 对每个光滑函数 f, 记 X_f 是其 Hamilton 向量场.

定义 $\{-,-\} : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}), (f, g) \mapsto X_f(g)$, 易见 $\{-,-\}$ 是 $\mathbb{R}$-双线性映射. 根据 Hamilton 向量场的定义, $\{f, g\} = X_g(f) = df(X_g) = \omega(X_f, X_g)$. 由此可知 $\{f, f\} = 0, \forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$. 特别地, $\{f, g\} = -\{g, f\}, \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$. 由于每个光滑向量场可自然视作光滑函数环上 $\mathbb{R}$-导子, 所以 $\{-,-\}$ 在每个分量上满足导子性质. 最后我们说明 $(C^\infty(\mathcal{M}), \{-,-\})$ 是 $\mathbb{R}$-Lie 代数来得到 $(C^\infty(\mathcal{M}), \{-,-\})$ 是 Poisson 代数. 下面说明对任何 $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ 有 $X_{\{f,g\}} + [X_f, X_g] = 0$. 一旦证明此断言, 则对任何 $h \in C^\infty(\mathcal{M})$ 有

$$\{\{f, g\}, h\} = -X_{\{f,g\}}h = [X_f, X_g]h = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = -\{\{g, h\}, f\} - \{\{h, f\}, g\}.$$

而上式表明 $(C^\infty(\mathcal{M}), \{-,-\})$ 是 Lie 代数, 现在验证 $X_{\{f,g\}} + [X_f, X_g] = 0$. 通过 Cartan 公式易见 $\mathcal{L}_{X_g}\omega = 0$, 所以 $X_g\omega(X_f, Y) - \omega([X_g, X_f], Y) - \omega(X_f, [X_g, Y]) = 0, \forall Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. 现在计算

$$X_g\omega(X_f, Y) = X_g(Yf), \omega(X_f, [X_g, Y]) = [X_g, Y]f = X_g(Yf) - YX_gf, \omega(X_{\{f,g\}}, Y) = Y\{f, g\} = YX_gf,$$

所以 $\omega(X_{\{f,g\}}, Y) + \omega([X_f, X_g], Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. 利用 ω 的非退化性可知 $X_{\{f,g\}} + [X_f, X_g] = 0$. 所以

Theorem 2.1. 设 $(\mathcal{M}, \omega)$ 是辛流形, 定义 $\{f, g\} = X_gf, \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ 可得 Poisson 代数 $(C^\infty(\mathcal{M}), \{-,-\})$.

Remark. 更一般地, 如果光滑流形 $\mathcal{M}$ 的光滑函数环 $C^\infty(\mathcal{M})$ 上有 Poisson 代数结构 $(C^\infty(\mathcal{M}), \{-,-\})$, 则称 $(\mathcal{M}, \{-,-\})$ 是 **Poisson 流形**, 这是 Poisson 几何的主要研究对象. 辛流形是特殊的 Poisson 流形.

参考文献

[CG97] N. Chriss and V. Ginzburg. *Representation theory and complex geometry*, volume 42. Springer, 1997.

[KZ19] J.L. Koszul and Y.M. Zou. *Introduction to symplectic geometry*. Springer, 2019.

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[Nes03] J. Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220. Springer, 2003.