仿射 Poisson 簇

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 12 月 17 日

1 仿射簇回顾

仿射簇是古典代数几何的主要研究对象, 本节我们简要回顾一些仿射簇的基本内容, 以便约定之后使用的记号. 固定域 $\Bbbk$, 称 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是**仿射簇**, 如果存在 $S \subseteq \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 使得 X 是 S 中所有多项式在 $\Bbbk^n$ 中的公共零点集 (将 S 的公共零点集记作 $V(S)$). 易知 $\Bbbk^n$ 中所有仿射簇构成的集合满足拓扑空间的闭集公理, 进而诱导出 $\Bbbk^n$ 上拓扑, 称之为 **Zariski 拓扑**. Zariski 拓扑一般不是 Hausdorff 的, 但满足单点集是闭集. 当将 $\Bbbk^n$ 视作带上 Zariski 拓扑的拓扑空间时, 将其称为 n **维仿射空间**. 对仿射空间 $\Bbbk^n$ 的子集 Z, 记 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 中所有可零化 Z 的多项式构成的理想为 $I(Z)$. 易验证 $V(I(Z))$ 就是 Z 关于 Zariski 拓扑的闭包, 从而 Z 是仿射簇当且仅当 $Z = V(I(Z))$. Hilbert 基定理告诉我们 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 是交换 Noether 环, 因此 $\Bbbk^n$ 以及任何赋予 Zariski 拓扑的子空间拓扑的仿射簇都是 Noether 空间. 所以任何非空仿射簇都可以分解为有限多个不可约闭子集之并, 并且若要求该分解是不可缩短的, 即若仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$ 可分解为 $X = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_r$, 其中每个 Y_k 是不可约闭子集且 $Y_i \not\subseteq Y_j, \forall i \neq j$, 那么 $\{Y_1, ..., Y_r\}$ 由 X 唯一确定. 因此对 X 的不可缩短的不可约闭子集分解 $X = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_r$, 称每个 Y_i 是 X 的**不可约分支**. 对仿射空间 $\Bbbk^n$ 内的任何仿射簇 X, 易验证 X 是不可约空间的充要条件是 $I(X)$ 为 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的素理想. 若 $\Bbbk$ 是代数闭域, 回忆下述 Hilbert 零点定理.

Hilbert's Nullstellensatz. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, J 是 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的理想, 则 $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

Remark 1.1. 若取 Hilbert 零点定理中的理想 J 为不可约多项式生成的主理想, 那么这一特殊情形表明代数闭域 $\Bbbk$ 上任意两个不可约多项式 $f, g \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$, 它们的零点集相同 (即 $V(f) = V(g)$) 的充要条件是存在 $c \in \Bbbk^*$ 使得 $f = cg$. 即不可约多项式在相伴意义下被零点集决定, 故称之为“零点定理”.

通过 Hilbert 零点定理, 我们看到当 $\Bbbk$ 是代数闭域时, 通过把仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$ 对应到 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的理想 $I(X)$, 可构建 $\Bbbk^n$ 中所有仿射簇构成的集合与多项式代数 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的根理想集间的双射. 该双射限制在不可约仿射簇集上给出 $\Bbbk^n$ 中所有不可约仿射簇构成的集合与 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的素理想集间的双射. 因为当 $\Bbbk$ 是代数闭域时, $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 中极大理想都形如 $(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$, 其中 $a_i \in \Bbbk$, 所以上述双射限制在 $\Bbbk^n$ 中单点集全体上给出仿射空间中的所有点和多项式代数的所有极大理想间的双射 (若进一步赋予 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的极大理想集上素谱的子空间拓扑, 即考虑多项式代数的极大谱 $\text{maxSpec}\Bbbk[x_1, ..., x_n]$, 那么该双射给出仿射空间与多项式代数极大谱间的同胚). 因此 Hilbert 零点定理使得我们能够构建仿射空间中几何对象与多项式代数中代

数对象间的对应. 回忆 Serre-Swan 定理说紧致 Hausdorff 拓扑流形 $\mathcal{M}$ 上向量丛范畴与连续函数环 $C(\mathcal{M})$ 上有限生成投射模范畴间有自然的范畴等价, 该范畴等价限制在平凡向量丛上对应于连续函数环上的自由模, 因此我们可以通过函数环 $C(\mathcal{M})$ 的表示来读出一些 $\mathcal{M}$ 的几何. 通过研究几何对象上的函数环的代数结构来认识几何对象一直是几何学科中的标准方法. 遵循这一想法, 我们也可以自然地考虑仿射簇的函数环. 给定仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$, 称 $\mathcal{O}(X) = \Bbbk[x_1, ..., x_n]/I(X)$ 为 X 的**坐标环**. 仿射簇的坐标环可视作成仿射簇上的多项式函数环. 因为仿射簇 X 对应的理想 $I(X)$ 是多项式代数的根理想, 所以坐标环总是**可约环** (即没有非零幂零元的含幺交换环) 若仿射簇间映射 $\varphi : X \to Y$ 是多项式函数的限制, 则称之为**正则映射**. 一般而言可逆的正则映射其逆映射未必仍正则. 如果仿射簇间正则映射 $\varphi : X \to Y$ 可逆且逆映射仍为正则映射, 则称 φ 是**正则同构**, 这时也称 X 与 Y 作为仿射簇同构. 考虑域 $\Bbbk$ 上所有仿射簇以及仿射簇间的正则映射可自然地得到一个范畴, 称为域 $\Bbbk$ 上**仿射簇范畴**. 因此一般把域上有限生成代数称为**仿射代数**. 域上交换仿射代数总是 Jacobson 环.

Proposition 1.2. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上交换仿射代数, 那么 A 的任何素理想是一些极大理想之交.

Proof. 通过 A 是仿射代数易知 $A[x]$ 的任何极大理想与 A 之交是 A 的极大理想. 反之, A 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$ 均为 $A[x]$ 某个极大理想 (取 $A[x]$ 中所有常数项在 $\mathfrak{m}$ 中的多项式构成的极大理想) 与 A 之交. 因此 A 的极大理想全体恰好是那些可以写成 $A[x]$ 的某个极大理想与 A 之交的理想. 下证 A 的任何理想 I 的根理想 $\sqrt{I}$ 就是所有含 I 的极大理想之交. 任取 $a \in A$ 满足 a 属于每个 A 的含 I 的极大理想. 设 J 是 $A[x]$ 中由 $I \cup \{ax-1\}$ 生成的理想, 断言 $J = A[x]$. 若不然, 则存在 $A[x]$ 的极大理想 M 使得 $J \subseteq M$, 所以 $I \subseteq J \cap A \subseteq M \cap A$, 于是根据前面的讨论知 $a \in M \cap A$. 结合 $ax - 1 \in M$ 得到 $1 \in M$, 矛盾. 所以 $J = A[x]$. 现设 $g_1, ..., g_m \in A[x], s_1, ..., s_m \in I$ 以及 $g \in A[x]$ 使得 $g_1(x)s_1 + \cdots + g_m(x)s_m + g(x)(ax - 1) = 1$. 通过嵌入 $A[x] \to A[x, x^{-1}], f(x) \mapsto f(x^{-1})$ 得到 $g_1(x^{-1})s_1 + \cdots + g_m(x^{-1})s_m + g(x^{-1})(ax^{-1} - 1) = 1$, 于是存在充分大的正整数 n 使得该式两边乘上 x^n 后存在 $A[x]$ 中多项式 $f_1(x), ..., f_m(x), h(x)$ 使得 $f_1(x)s_1 + \cdots + f_m(x)s_m + h(x)(a - x) = x^m$. 对等式作赋值 $x = a$ 立即得到 $a^m \in I$, 因此 $a \in \sqrt{I}$. 所以域上交换仿射代数的任何理想 I 是所有含 I 的极大理想之交. 特别地, 取 I 是 A 的素理想, 便得到 A 的素理想总是一些极大理想之交. □

Remark 1.3. 因此交换仿射代数 A 的极大谱 $\mathrm{maxSpec}A$ 可由素谱 $\mathrm{Spec}A$ 中一些素理想相交得到.

正则映射的概念可以对仿射簇的开子集 (通常称为**拟仿射簇**) 定义: 设 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是域 $\Bbbk$ 上拟仿射簇, $p \in X$. 称 X 上函数 $\varphi : X \to \Bbbk$ 在点 p 处**正则**, 如果存在 p 点的开邻域 U 以及多项式 $f, g \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 使得 $g(q) \neq 0, \forall q \in U$ 并且

$$\varphi(q) = \frac{f(q)}{g(q)}, \forall q \in U.$$

如果 X 上函数 $\varphi : X \to \Bbbk$ 在 X 内每点正则, 称 f 是 X 上**正则函数**, 可以验证正则函数关于 Zariski 拓扑的子空间拓扑是连续的. 如果 $\Bbbk$ 是代数闭域, 那么可以证明仿射簇作为拟仿射簇的正则函数总是多项式函数. 易见任给仿射簇间的正则映射 $\varphi : X \to Y, p \mapsto (F_1(p), ..., F_m(p))$(这里设 $X \subseteq \Bbbk^n, Y \subseteq \Bbbk^m$) 可逆变地诱导出坐标环间的代数同态 $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X), h + I(Y) \mapsto h(F_1, ..., F_m) + I(X)$, 可直接验证这给出域 $\Bbbk$ 上仿射簇范畴到有限生成可约交换代数范畴的逆变忠实满函子. 特别地, 域 $\Bbbk$ 上两个仿射簇同构的充要条件是它们的坐标环代数同构. 如果进一步要求 $\Bbbk$ 是代数闭域, 那么 Hilbert 零点定理保证了上述仿射簇范畴到有限生成可约交换代数范畴的逆变函子是本质满的, 进而知代数闭域上仿射簇范畴与有限生成交换可约代数范畴是范畴对偶的. 若限制在不可约仿射簇层面, 代数闭域上不可约仿射簇范畴与有限生成整区代数范畴间有范畴对偶. 对代数闭

域上给定的仿射簇 X, 坐标环 $\mathcal{O}(X)$ 的极大谱与 X 中点有自然的同胚; 坐标环 $\mathcal{O}(X)$ 的素谱与 X 的不可约闭子簇全体有双射.

回忆拓扑空间的维数是指它所有有限长不可约闭子集链长度的上确界, 记拓扑空间 X 的维数为 $\dim X$. 对固定的点 $p \in X$, 称 $\sup\{n \in \mathbb{N} | X_0 = \{p\} \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n\text{是不可约闭子集链}\}$ 为 X 在 p 点处的**局部维数**, 记为 $\dim_p X$, 易见 $\dim_p X \leq \dim X$. 例如含幺交换环的 Krull 维数和它的素谱作为拓扑空间的维数一致. 根据拓扑空间维数的定义, 可验证拓扑空间子空间的维数总不超过整个空间的维数; 维数有限的不可约空间的真闭子集维数一定严格小于整个空间的维数; 如果整个空间可分解为有限多个闭子集之并, 那么整个空间的维数就是这些闭子集维数中的上确界. 例如仿射簇的维数就是它所有不可约分支维数的最大值. 由此可见零维仿射簇是非空有限集. 易验证代数闭域上仿射簇的维数就是它坐标环的 Krull 维数. 通常称不可约 1 维仿射簇是**仿射曲线**. 例如圆周曲线 $S = V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \Bbbk^2$ 和尖点曲线 $C = V(x^3 - y^2) \subseteq \Bbbk^2$.

根据拟仿射簇上正则函数的定义, 可以对仿射簇 X 定义函数环层. 设仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$, 任何 X 的非空开子集 U 作为拟仿射簇都有正则函数环, 记作 $\mathcal{O}_X(U)$. 当 $U = \varnothing$ 时, 定义 $\mathcal{O}_X(U) = 0$. 那么对任何 X 的开子集 U, V, 只要 $V \subseteq U$, 就有自然的限制映射 $\mathrm{Res}_V^U : U \to V, \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V), \varphi \mapsto \varphi|_V$. 因为正则函数的定义是局部的, 因此拟仿射簇上的正则函数在更小的开子集上的限制是开子集上的正则函数. 如果记 X 所有开子集关于包含关系给出的偏序范畴是 $\mathcal{U}$(即 $\mathcal{U}$ 的对象类是 X 的开子集全体, 对任何 $V, W \in \mathrm{ob}\mathcal{U}$, 如果 $V \subseteq W$, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(V, W) = \{(V, W)\}$, 否则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(V, W) = \varnothing$, 同时终对象和始对象相同的两个态射集间有自然的合成映射, 由此给出范畴 $\mathcal{U}$), 那么这里的限制映射 $\mathrm{Res}_V^U : U \to V, \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V), \varphi \mapsto \varphi|_V$ 就是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(U, V)$ 中唯一的态射 (U, V) 所对应的保幺环同态. 因此通过定义 $\mathcal{O}_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(U, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X(V)), (U, V) \mapsto \mathrm{Res}_V^U$ 可以得到逆变函子 $\mathcal{O}_X : \mathcal{U} \to \mathbf{CRing}$, 其中 $\mathbf{CRing}$ 表示由所有含幺交换环和保幺环同态构成的含幺交换环范畴. 因此我们得到了拓扑空间 X 上的预层 $\mathcal{O}_X$. 因为正则性的定义是局部的, 故容易验证 $\mathcal{O}_X$ 满足层的粘接公理. 称含幺交换环层 $\mathcal{O}_X$ 为 X 上**正则函数环层**. 那么仿射簇 $\mathcal{O}_X$ 的正则函数环层在每点 $p \in X$ 处的茎可如下构造: 考虑集合 $T = \{(U, f) | p \in U\text{是开邻域且}f : U \to \Bbbk\text{正则函数}\}$, 定义 T 上二元关系 $(U, f) \sim (V, g)$ 当且仅当存在 p 的开邻域 $W \subseteq U \cap V$ 使得 $f|_W = g|_W$. 这是 T 上等价关系, 记商集为 $\mathcal{O}_{X,p}$. 可在 $\mathcal{O}_{X,p}$ 上天然赋予 $\Bbbk$-代数结构使之成为以

$$\{[(U, f)] \in \mathcal{O}_{X,p} | U\text{是}p\text{的开邻域且正则函数}f\text{满足}f(p) = 0\}$$

为唯一极大理想的交换局部代数, 那么 $\mathcal{O}_{X,p}$ 就是 $\mathcal{O}_X$ 在 p 点处的茎, 也称 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是**仿射簇 X 在 p 点处局部环**或者 X 在 p 点处的**正则函数芽环**. 如果记 $\mathfrak{m}_p$ 是点 p 对应坐标环 $\mathcal{O}(X)$ 的极大理想, 那么总有 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{O}_{X,p} \cong \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p}$. 正则函数芽环可反映仿射簇在一点处的局部性质. 例如当 $\Bbbk$ 是代数闭域时, X 在点 p 处的局部维数就是 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的 Krull 维数. 下面我们再回顾给定点处正则函数芽环和仿射簇在该点处光滑性的关系. 首先回忆仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$ 在一点 $p \in X$ 处的 **Zariski 切空间**是指 $T_p X = V(\{\sum\limits_{i=1}^{n} (\partial F / \partial x_i)(p) x_i | F \in I(X)\}) \subseteq \Bbbk^n$. 可直接验证仿射簇 X 在点 p 处的切空间 $T_p X$ 和 X 在点 p 处的导子 $D : \mathcal{O}(X) \to \Bbbk$(满足 Leibniz 等式) 全体构成的线性空间之间有自然的 $\Bbbk$-线性同构. 若记 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的极大理想, 则有 $\Bbbk$-线性同构 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* \cong T_p X$. 特别地, $\dim_{\Bbbk} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{\Bbbk} T_p X$. 于是 $\mathrm{k.dim} \mathcal{O}_{X,p} \leq \dim_{\Bbbk} T_p X$. 因此当 $\Bbbk$ 是代数闭域时, 仿射簇在一点处的局部维数总不超过该点切空间的线性维数. 如果仿射簇在给定点处局部维数就是该点切空间的线性维数, 则称该点是**光滑点**, 否则称为**奇异点**. 仿射簇 X 的奇异点全体构成的集合记作 $\mathrm{Sing} X$, 称为 X 的**奇异轨迹**, 可以证明 $\mathrm{Sing} X$ 总是 X 的闭子集. 因此由正则局部环的刻画立即看到代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇 X 在 $p \in X$ 处光滑的充要条件是 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是正则局部环. 回忆 1 维 Noether 整闭整区是正则局部环的充要条件是它是离散赋值环, 所

以仿射曲线 X 在点 $p\in X$ 处光滑当且仅当 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是离散赋值环. 除了局部光滑性, 自然可以考虑仿射簇的整体光滑性. 称仿射簇 X 是**光滑的**, 如果在每个点 $p\in X$ 处光滑. 因此仿射簇 X 是光滑簇当且仅当 $\mathcal{O}(X)$ 是正则环. 特别地, 仿射曲线 X 是光滑的当且仅当 $\mathcal{O}(X)$ 是 Dedekind 整区. 一般地, 代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射簇 X 若有不可约分解 $X=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_r$, 那么 $\mathrm{Sing}X\supseteq\mathrm{Sing}X_1\cup\cdots\cup\mathrm{Sing}X_r$. 事实上, 可以进一步证明任意两个不同的不可约分支的交集内的点全是奇异点, 并且 X 的奇异轨迹就是在 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_r$ 的基础上添加上所有不同的两个不可约分支的交点. 此外, 如果代数闭域上仿射簇 X 在点 p 处的正则函数芽环是 Cohen-Macaulay 局部环, 可以证明 X 任意两个穿过点 p 的不可约分支具有相同的维数.

下面我们回顾带有有限群作用的仿射簇的商簇. 以下固定 $\Bbbk$ 为代数闭域, 并设有限群 G 在 X 上有作用 $\rho: G\to\mathrm{Aut}X$(这里 $\mathrm{Aut}X$ 表示 X 作为仿射簇的自同构全体构成的群). 那么由 $\Bbbk$ 是代数闭域, 我们可将坐标环 $\mathcal{O}(X)$ 视作 X 上正则函数环, 于是每个 $g\in G$ 决定的正则映射 $g: X\to X$(为叙述方便, 这里将 $\rho(g)$ 简写为 g 的作用) 可逆变地诱导 $\Bbbk$-代数同构 $g^*:\mathcal{O}(X)\to\mathcal{O}(X), f\mapsto g^*(f)$, 其中 $g^*(f): X\to\Bbbk, x\mapsto f(gx)$. 因此 ρ 可诱导正则函数环上的群作用 $\overline{\rho}: G\to\mathrm{Aut}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X), g\mapsto(g^{-1})^*$. 该群作用对应不变子代数

$$\mathcal{O}(X)^G=\{f\in\mathcal{O}(X)|(g^{-1})^*f=f,\forall g\in G\}=\{f\in\mathcal{O}(X)|g^*(f)=f,\forall g\in G\}.$$

这是经典不变量理论的主要研究对象. 易见 $\mathcal{O}(X)$ 是 $\mathcal{O}(X)^G$ 的整扩张, 所以由 $\mathcal{O}(X)$ 是有限生成代数得到 $\mathcal{O}(X)$ 是有限生成 $\mathcal{O}(X)^G$-模. 于是由 Artin-Tate 引理, $\mathcal{O}(X)$ 的子代数 $\mathcal{O}(X)^G$ 也是有限生成代数. 前面提到代数闭域上有限生成可约交换代数范畴和仿射簇范畴间有范畴对偶, 因此由 $\mathcal{O}(X)^G$ 是有限生成可约交换代数知存在仿射簇 Y 使得 $\mathcal{O}(Y)\cong\mathcal{O}(X)^G$. 并且由 $\Bbbk$-代数的标准嵌入 $i:\mathcal{O}(Y)\cong\mathcal{O}(X)^G\to\mathcal{O}(X)$ 唯一决定正则函数 $\varphi: X\to Y$, 利用 Going-up 定理可验证 φ 是满射. 如果 $\mathrm{char}\Bbbk$ 不整除 $|G|$, 可进一步验证: 对 $x_1,x_2\in X$, $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$ 当且仅当 x_1,x_2 在同一个 G-轨道内. 因此 φ 诱导出 Y 与 X 关于群作用轨道空间之间的双射. 因此, 对特征不整除 $|G|$ 的代数闭域 $\Bbbk$, 有限群 G 作用在仿射簇 $X\neq\varnothing\subseteq\Bbbk^n$ 上. 称上述定义出的仿射簇 Y 为 X 关于群作用的**商簇**或**轨形**, 记为 X/G. 根据定义有 $\mathcal{O}(X/G)\cong\mathcal{O}(X)^G$. 在某些场景下有 Morita 等价 $\mathcal{O}(X)^G\approx\mathcal{O}(X)\#\Bbbk G$, 进而可研究斜群代数 $\mathcal{O}(X)\#\Bbbk G$ 的代数表示来认识商簇 X/G 的几何. 若 X 是不可约仿射簇 (需要坐标环是整区) 且 G 在 $\mathcal{O}(X)$ 上的作用是忠实的 (例如 G 在仿射簇 X 的作用是自由的, 即对 $g\in G$, 若存在 $x\in X$ 使得 $gx=x$, 那么 $g=1$), 便能保证 $Z(\mathcal{O}(X)\#\Bbbk G)=\mathcal{O}(X)^G\#1$.

2 Poisson 簇

辛流形是 Hamilton 经典力学中自然产生的几何对象, 其光滑函数环上会有天然的 Poisson 代数结构 (回忆含幺交换环 K 上的交换代数 R 上如果有 K-双线性映射 $\{-,-\}: R\times R\to R$ 使得 $(R,\{-,-\})$ 是 K-Lie 代数且在每个分量上有导子性质, 则称 $(R,\{-,-\})$ 是 **Poisson 代数**). 一般称光滑函数环上有 Poisson 代数结构的光滑流形为 **Poisson 流形**, 这是辛流形的推广. 下面我们在代数几何框架下考虑坐标环带有 Poisson 结构的仿射簇. 称仿射簇 $X\subseteq\Bbbk^n$ 是**仿射 Poisson 簇** (以下简称为 **Poisson 簇**), 如果坐标环 $\mathcal{O}(X)$ 上有 Poisson 代数结构. 通常将 Poisson 簇的坐标环上的 Poisson 括号称之为该簇上 **Poisson 结构**. 含幺交换环 K 上任何 Poisson 代数 $(R,\{-,-\})$ 作为 Poisson 代数有中心 $Z_P(R)=\{z\in R|\{z,a\}=0,\forall a\in R\}$, 若记 $HP^i(R)$ 是 R 系数在自身的 i 次 Poisson 上同调, 我们有 $HP^0(R)=Z_P(R)$, 它也是 R 的子代数 (也是 Poisson 理想), 称 $Z_P(R)$ 中元素为 R 的 **Casimir 元**. 对每个 $a\in R$, R 上 K-导子 $\{a,-\}: R\to R$ 被称为由 a 决定的 **Hamilton 导子**. 如果 $\mathcal{O}(X)$ 是 Poisson 簇的坐标环 (当基域是代数闭域时, 可和正则函数环视作等同), 那么

每个多项式函数 $f\in\mathcal{O}(X)$ 决定的 Hamilton 导子 $\{f,-\}:\mathcal{O}(X)\to\mathcal{O}(X)$ 也被称为关于 f 的 **Hamilton 向量场**. 如果 $f\in\mathcal{O}(X)$ 是 Casimir 元, 则称 f 是 X 上 **Casimir 函数**, X 上 Casimir 函数全体记作 $\mathrm{Cas}(X)$.

Example 2.1. 如果多项式代数 $R=\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 上有 Poisson 结构 $\{-,-\}$, 那么利用多项式代数的导子性质可知

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\{x_i,x_j\},\forall f,g\in R,$$

即其 Poisson 结构完全由 Poisson 括号在在未定元集 $\{x_1,...,x_n\}$ 上的作用决定. 特别地, $\Bbbk[x]$ 上 Poisson 结构总是平凡的, 那么仿射直线上的 Poisson 结构总是平凡的. 给定 $f_3,...,f_n,u\in R$. 对每个 $f,g\in R$, 定义 $\{f,g\}=J(f,g,f_3,...,f_n)u$, 其中 $J(f,g,f_3,...,f_n)$ 表示多项式 $f,g,f_3,...,f_n$ 的 Jacobian 行列式. 那么 $(R,\{-,-\})$ 是 Poisson 代数, 称该 Poisson 结构为由多项式 $f_3,...,f_n$ 和 u 给出的**广义 Jacobian Poisson 结构**. 当 $u=1$ 时, 称为 **Jacobian Poisson 结构**. 下面我们说明仿射平面 $\Bbbk^2$ 上的 Poisson 结构都是某个 $h\in\Bbbk[x,y]$ 决定的广义 Jacobian Poisson 结构. 若 $\Bbbk[x,y]$ 上有 Poisson 括号 $\{-,-\}$, 则对 $f,g\in\Bbbk[x,y]$ 有

$$\{f,g\}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\{x,y\}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\{y,x\}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\{x,y\}.$$

若记 $h=\{x,y\}$, 那么该 Poisson 结构就是由 h 决定的广义 Jacobian Poisson 结构.

仿射簇间的正则映射若诱导出坐标环间的代数同态还是 Poisson 代数同态, 就得到了 Poisson 映射的概念.

Definition 2.2 (Poisson 映射)**.** 设 $(X,\{-,-\}_1),(Y,\{-,-\}_2)$ 是域 $\Bbbk$ 上 Poisson 簇, 称正则映射 $\varphi:X\to Y$ 是 **Poisson 映射**, 如果 φ 诱导出的代数同态 $\varphi^*:\mathcal{O}(Y)\to\mathcal{O}(X)$ 满足 $\varphi^*(\{f,g\}_2)=\{\varphi^*(f),\varphi^*(g)\}_1,\forall f,g\in\mathcal{O}(Y)$. 如果 Poisson 映射 φ 进一步是正则同构, 称之为 Poisson 簇间的 **Poisson 同构**. 将仿射簇 X 的 Poisson 自同构群记为 $\mathrm{PAut}X$. 易见代数闭域上 Poisson 簇范畴与有限生成交换可约 Poisson 代数范畴是范畴对偶的.

回忆含幺交换环 K 上的 Poisson 代数 $(R,\{-,-\})$ 的理想 I 被称为 **Poisson 理想**, 如果 $\{A,I\}\subseteq I$. 例如任取 Poisson 中心的子集 $T\subseteq Z_P(R)$, T 在 R 中生成的理想总是 Poisson 理想. 下面我们考虑 Poisson 簇坐标环的 Poisson 理想的几何意义.

Proposition 2.3. 设 $X\subseteq\Bbbk^n$ 是域 $\Bbbk$ 上的 Poisson 簇, 坐标环 $\mathcal{O}(X)$ 上的 Poisson 结构记作 $\{-,-\}_X$. 设 Y 是 X 的闭子簇, 回忆 $I(Y)$ 表示 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 中所有零化 Y 的多项式构成的理想, 那么 Y 上存在 Poisson 结构使得 Y 到 X 是嵌入映射 $k:Y\to X$ 是 Poisson 映射的充要条件是 $I(Y)/I(X)$ 是 $\mathcal{O}(X)$ 的 Poisson 理想. 注意到 $j^*:\mathcal{O}(X)\to\mathcal{O}(Y)$ 是满射, 因此 Y 上使得 j^* 成为 Poisson 代数同态的 Poisson 结构必唯一.

Proof. 必要性：若 $\mathcal{O}(Y)$ 上存在 Poisson 结构 $\{-,-\}_Y$ 使得 $j^*:\mathcal{O}(X)\to\mathcal{O}(Y),f+I(X)\mapsto f+I(Y)$ 是 Poisson 代数同态, 下证 $\{\mathcal{O}(X),I(Y)/I(X)\}_X\subseteq I(Y)/I(X)$. 任取 $f\in\Bbbk[x_1,...,x_n],g\in I(Y)$, 有

$$0=\{f+I(Y),g+I(Y)\}_Y=\{j^*(f+I(X)),j^*(g+I(X))\}_Y=j^*(\{f+I(X),g+I(X)\}_X),$$

这说明 $\{f+I(X),g+I(X)\}_X\subseteq I(Y)/I(X)$, 因此 $\{\mathcal{O}(X),I(Y)/I(X)\}_X\subseteq I(Y)/I(X)$, 于是知此时 $I(Y)/I(X)$ 是 $\mathcal{O}(X)$ 的 Poisson 理想. 反之, 若 $I(Y)/I(X)$ 是 Poisson 理想, 对 $f,g\in\Bbbk[x_1,...,x_n]$, 定义 $\{f+I(Y),g+I(Y)\}_Y=j^*(\{f+I(X),g+I(X)\}_X)$, 那么根据 $I(Y)/I(X)$ 是 Poisson 理想可知 $\{-,-\}_Y:\mathcal{O}(Y)\times\mathcal{O}(Y)\to\mathcal{O}(Y)$ 是定义合理的 $\Bbbk$-线性映射. 由 j^* 是满射易知 $(\mathcal{O}(Y),\{-,-\}_Y)$ 是 Poisson 代数且 j 是 Poisson 映射. $\square$

Remark 2.4. 一般地, 若含幺交换环 K 上 Poisson 代数 $(R, \{-,-\})$ 有 Poisson 理想, 那么 R/I 上有自然的 Poisson 结构. 记 $\pi: R \to R/I$ 是标准投射, 那么通过定义 $\{a+I, b+I\}_{R/I} = \{a,b\}+I$ 可赋予 R/I 上定义合理的 K-双线性映射 $\{-,-\}_{R/I}: R/I \times R/I \to R/I$, 不难看出这给出 R/I 上 Poisson 结构. 任给 Poisson 代数 R 到交换 K-代数 S 的满代数同态 $\varphi: R \to S$, $\mathrm{Ker}\varphi$ 是 R 的 Poisson 理想的充要条件是 S 上存在 Poisson 代数结构使得 φ 成为 Poisson 代数同态. 若取 $R = \mathcal{O}(X), S = \mathcal{O}(Y)$, 那么由 $I(Y)/I(X) = \mathrm{Ker}j^*$ 便知上述命题为该结论的特殊情形. 该结论的验证与上述命题证明过程没有区别, 本质上是利用 $R/\mathrm{Ker}\varphi$ 上 Poisson 结构赋予与之同构的交换代数 S 上 Poisson 结构.

一般地, 若有限群 G 作用在域 $\Bbbk$ 上的仿射 Poisson 代数 $(A, \{-,-\})$ 上, 即有群同态 $\rho: G \to \mathrm{PAut}_\Bbbk A$, 其中 $\mathrm{PAut}_\Bbbk A$ 是 Poisson 代数的自同构群, 那么 $A^G = \{a \in A | ga = a, \forall g \in G\}$ 上继承天然的 Poisson 结构, 其上 Poisson 括号仍记作 $\{-,-\}$. 这时斜群代数 $A^G \cong A^G\#1$ 是 $A\#\Bbbk G$ 的中心子代数, 并且通过 A 是有限生成 A^G-模以及 G 的有限性不难看到 $A\#\Bbbk G$ 是中心子代数 $A^G\#1$ 上有限生成模. 并且可直接计算验证

$$D: A^G\#1 \to \mathrm{End}_\Bbbk(A\#\Bbbk G), a\#1 \mapsto D(a\#1),$$

其中 $D(a\#1): A\#\Bbbk G \to A\#\Bbbk G, b\#g \mapsto \{a,b\}\#g$ 是定义合理的 $\Bbbk$-线性映射并且 D 将中心子代数 $A^G\#1$ 中每个元素映至斜群代数 $A\#\Bbbk G$ 上的 $\Bbbk$-导子. 如果 A 是整区且群作用自由, 则 $Z(A\#\Bbbk G) = A^G\#1$.

现在设 A 是 Poisson 簇 X 的坐标环 $(\mathcal{O}(X), \{-,-\})$, 且有限群 G 作用于 X, 即有群同态 $\rho: G \to \mathrm{PAut}X$, 那么每个 $g \in G$ 逆变地诱导 Poisson 同构 $g^*: \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X), f \mapsto g^*(f)$, 因此 G 在 Poisson 簇 X 上的作用可自然地诱导 Poisson 代数 $\mathcal{O}(X)$ 上的作用, 故 $\mathcal{O}(X)\#\Bbbk G$ 在中心子代数 $\mathcal{O}(X)^G\#1$ 上有限生成且 $\mathcal{O}(X)^G\#1$ 到 $\mathcal{O}(X)\#\Bbbk G$ 有自然的线性映射将中心子代数中元素映至斜群代数上 $\Bbbk$-导子. 于是我们得到

Proposition 2.5. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上 Poisson 簇, 有限群 G 作用于 X. 那么 G 诱导出 $\mathcal{O}(X)$ 上的作用给出的斜群代数 $\mathcal{O}(X)\#\Bbbk G$ 在中心子代数上有限生成并且该中心子代数到斜群代数的导子空间有标准的线性映射. 若进一步 X 是不可约的, 则斜群代数的中心 $Z(\mathcal{O}(X)\#\Bbbk G) = \mathcal{O}(X)^G\#1$.

Remark 2.6. 如果 X 是代数闭域上带有有限群 G 作用的 Poisson 簇, 那么 $\mathcal{O}(X)^G$ 上有天然 Poisson 结构, 这说明若进一步基域的特征不整除 $|G|$, 便得到商簇 X/G 上的 Poisson 结构.

如果 $(R, \{-,-\})$ 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上的 Poisson 代数且为整区, 那么 $Z_P(R) \subseteq R$ 是整闭扩张. 任取 $z \in Z_P(R)$, 设 z 在 $\Bbbk$ 上满足的最小多项式为 $x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, 那么对任给 $b \in R$, 通过

$$\{b, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i z^i\} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (i-1) z^{i-1}\{b, z\} = 0,$$

其中 $\alpha_n = 1$, 由上述多项式的最小性可知 $\{b, z\} = 0$, 因此 $z \in Z_P(R)$. 转换成几何的语言就是

Proposition 2.7. 设 X 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上不可约 Poisson 簇, 那么 X 上 Casimir 函数全体构成的 $\mathcal{O}(X)$ 的子代数 $Z_P(\mathcal{O}(X)) = \mathrm{Cas}(X)$ 满足 $\mathrm{Cas}(X) \subseteq \mathcal{O}(X)$ 是整闭扩张.

Example 2.8. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, 考虑仿射平面 $\Bbbk^2$ 上的广义 Jacobian Poisson 结构

$$\{-,-\}: \mathcal{O}(\Bbbk^2) \times \mathcal{O}(\Bbbk^2) \to \mathcal{O}(\Bbbk^2), (f,g) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y},$$

那么对任给 $h \in \mathcal{O}(\Bbbk^2)$, h 关于 x 和 y 的偏导数均为零, 这迫使 $h \in \Bbbk$, 进而 $\mathrm{Cas}(\Bbbk^2) = \Bbbk$.

任取代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$, 考虑 X 的正则函数环 $\mathcal{O}(X)$, 任取其子代数 A, 那么对每个点 $x \in X$, A 有素理想 $\mathfrak{p}_x = \{f \in A | f(x) = 0\}$, 由此得到映射 $\pi_A : X \to \mathrm{Spec}A, x \mapsto \mathfrak{p}_x$. 注意到标准同胚 $X \cong \mathrm{maxSpec}\mathcal{O}(X)$, 故可将 π_A 分解为 X 到极大谱 $\mathrm{maxSpec}\mathcal{O}(X)$ 的标准同胚以及由 A 到 $\mathcal{O}(X)$ 的代数嵌入诱导的连续映射 $\varphi : \mathrm{Spec}\mathcal{O}(X) \to \mathrm{Spec}A, \mathfrak{m} \mapsto A \cap \mathfrak{m}$ 在极大谱 $\mathrm{maxSpec}\mathcal{O}(X)$ 上限制映射的合成. 这一观察表明 $\pi_A : X \to \mathrm{Spec}A$ 是连续映射, 进而利用 $\mathrm{Spec}A$ 中点关于 π_A 的非空纤维全体可给出 X 的一个划分. 并且 $\pi_A : X \to \mathrm{Spec}A$ 关于 $\mathrm{Spec}A$ 内每点 $\mathfrak{p}$ 的纤维均是闭集. 如果 $\pi_A^{-1}(\mathfrak{p}) = \varnothing$, 结论直接成立. 下设 $\pi_A^{-1}(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$, 设 $\mathfrak{p} = \pi_A(x_0)$, 那么 $\mathfrak{p} = \{f \in A | f(x_0) = 0\}$. 对每个 $p \in \Bbbk^n$, $p \in \pi_A^{-1}(\mathfrak{p})$ 的充要条件是 $p \in X$ 且 $f(p) = f(x_0), \forall f \in A$(后者原因是此时 $\{f - f(p) | f \in A\} = \{f - f(x_0) | f \in A\}$, 前者是 A 中所有在 p 处取值为零的正则函数全体, 后者是在 x_0 处取值为零的正则函数全体, 进而对所有的 $f \in A$, 正则函数 $f - f(p)$ 有零点 x_0). 因此这时 $\pi_A^{-1}(\mathfrak{p}) = X \cap V(\{f - f(x_0) | f\text{满足}f + I(X) \in A\})$ 是 X 的闭子集. 于是知 X 可分解为一些两两不相交的非空纤维, 每个非空纤维均为 X 的闭子簇. 设 $x_0 \in X$ 所在的纤维是 $\pi_A^{-1}(\mathfrak{p})$, 即 $\mathfrak{p} = \{f - f(x_0) | f \in A\}$, 那么纤维作为 X 的闭子簇, $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 中所有零化 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 的多项式构成的理想是

$$I(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) = \sqrt{(\{f - f(x_0) | f\text{满足}f + I(X) \in A\})},$$

它对应 $\mathcal{O}(X)$ 的理想 $I(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))/I(X) = \sqrt{(\{f - f(x_0) | f \in A\})}$. 现取 $A = \mathrm{Cas}(X)$. 注意到 $(\{f - f(x_0) | f \in A\})$ 是 $\mathcal{O}(X)$ 的 Poisson 理想, 所以当 $\Bbbk$ 的特征为零, $I(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))/I(X)$ 也是 $\mathcal{O}(X)$ 的 Poisson 理想, 进而由 [命题2.3] 知 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 是 X 的 Poisson 子簇. 于是得到下述 Poisson 簇的分解定理.

Casimir Decomposition. 设 X 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的 Poisson 簇, Poisson 结构为 $\{-,-\} : \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$. 设 $\pi_{\mathrm{Cas}(X)} : X \to \mathrm{maxSpec}(\mathrm{Cas}(X)), x_0 \mapsto \{f - f(x_0) | f \in \mathrm{Cas}(X)\}$ 是 X 到其上 Casimir 函数全体的标准连续映射, 那么任何非空纤维 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 都是 X 的 Poisson 子簇, 因此可通过 Casmir 函数环的极大谱赋予 X 一个关于非空纤维的 Poisson 子簇分解.

我们再指出若 A 的素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $\pi_A^{-1}(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p}$ 必是 A 的极大理想. 即满足纤维非空的素理想

Lemma 2.9. 设 $\Bbbk$ 是域, $f : A \to B$ 是 $\Bbbk$-交换代数间的代数同态, 其中 B 是 $\Bbbk$ 上仿射代数, 则任何 B 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 关于 f 的原像仍为 A 的极大理想.

Proof. Noether 正规化定理表明 $B/\mathfrak{m}$ 是域 $\Bbbk$ 的有限域扩张, 进而由 $A/(A \cap \mathfrak{m}) \subseteq B/\mathfrak{m}$ 是整扩张即得. $\square$

Example 2.10. 设 R 是域 $\Bbbk$ 上仿射 Poisson 代数, 赋予平凡 Poisson 结构. 这时 Poisson 中心就是 R, 进而标准投射 $\pi : \mathrm{maxSpec}R \to \mathrm{maxSpec}Z_P(R)$ 是恒等映射. 所以对带有平凡 Poisson 结构的 Poisson 簇, 其 Casimir 分解并不能够提供更多有用的信息. 并且该例表明 Casimir 分解可能由无穷多个非空纤维构成.

Example 2.11. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, 考虑仿射平面 $\Bbbk^2$ 上的广义 Jacobian Poisson 结构

$$\{-,-\} : \mathcal{O}(\Bbbk^2) \times \mathcal{O}(\Bbbk^2) \to \mathcal{O}(\Bbbk^2), (f, g) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y},$$

我们已经在 [例2.8] 中看到 $\mathrm{Cas}(\Bbbk^2) = \Bbbk$. 因此上述 Poisson 平面的 Casimir 分解只有 $\Bbbk^2$ 本身.