

# Poisson 理想论初步

戚天成 

复旦大学 数学科学学院

2024 年 1 月 2 日

这份笔记用于记录 Poisson 代数的 Poisson 理想的概念与基本性质, 主要参考了 [Goo06] 和 [LWW21].

## 1 基本概念与性质

Poisson 结构是 Hamilton 经典力学中自然产生的结构, 任何辛流形的辛结构可通过 Hamilton 向量场诱导光滑函数环上的 Poisson 结构. 含么交换环  $K$  上的交换代数  $R$  上如果有  $K$ -双线性映射  $\{-, -\} : R \times R \rightarrow R$  使得  $(R, \{-, -\})$  是  $K$ -Lie 代数且在每个分量上有导子性质, 则称  $(R, \{-, -\})$  是 **Poisson 代数**, 这里的  $K$ -双线性映射  $\{-, -\} : R \times R \rightarrow R$  通常被称为 **Poisson 括号**. 如果  $R$  是光滑流形  $\mathcal{M}$  的光滑函数环  $C^\infty(\mathcal{M})$  或仿射簇  $X$ , 那么称  $R$  上 Poisson 括号为  $\mathcal{M}$  或  $X$  上的 **Poisson 结构**, 此时称  $(\mathcal{M}, \{-, -\})$  是 **Poisson 流形**, 称仿射簇  $X$  是 **Poisson 簇**. 下面是关于 Poisson 代数的一些基本概念.

**Definition 1.1.** 设  $(R, \{-, -\})$  是含么交换环  $K$  上 Poisson 代数,  $I$  是  $R$  的理想.

- (1) 称  $I$  是 **Poisson 理想**, 如果  $\{I, R\} \subseteq I$ .
- (2) 称  $\{a \in R \mid \{a, R\} = 0\}$  为  $R$  的 **Poisson 中心**, 记作  $Z_P(R)$ , 其中元素称为 **Casimir 元**.
- (3) 对每个  $a \in R$ , 称  $K$ -导子  $\{a, -\} : R \rightarrow R$  是  $a$  决定的 **Hamilton 导子**.
- (4) 称 Poisson 真理想  $I$  是 **Poisson 素理想**, 如果对任何 Poisson 理想  $A, B$ ,  $AB \subseteq I$  蕴含  $A \subseteq I$  或  $B \subseteq I$ .

**Remark 1.2.** 任意一族 Poisson 理想的交或和仍为 Poisson 理想.

不难看出 Poisson 代数的 Poisson 中心既是子环也是 Poisson 理想. 特征零的域上的 Poisson 整区的 Poisson 中心会有整闭特性, 即  $Z_P(R) \subseteq R$  是整闭扩张. 任取  $z \in Z_P(R)$ , 设  $z$  在  $\mathbb{k}$  上满足的最小多项式为  $x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1x + \alpha_0$ , 那么对任给  $b \in R$ , 通过

$$\{b, \sum_{i=0}^n \alpha_i z^i\} = \sum_{i=0}^n \alpha_i (i-1) z^{i-1} \{b, z\} = 0,$$

其中  $\alpha_n = 1$ , 由上述多项式的最小性可知  $\{b, z\} = 0$ , 因此  $z \in Z_P(R)$ . 我们把刚刚的讨论总结为

**Proposition 1.3.** 设  $(R, \{-, -\})$  是特征零的域  $\mathbb{k}$  上的 Poisson 整区, 则  $Z_P(R) \subseteq R$  是整闭扩张.

记含么交换环  $K$  上 Poisson 代数  $(R, \{-, -\})$  所有 Hamilton 导子构成的集合是  $\Delta$ , 那么对  $R$  的任何理想  $I$ , 考虑  $\mathcal{P}(I) = \{a \in I \mid \text{对任给 } \delta_1, \dots, \delta_n \in \Delta \text{ 有 } \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n(a) \in I\}$ , 易见  $\mathcal{P}(I)$  是  $I$  所包含的 Poisson 理想且是  $I$  所包含的最大 Poisson 理想. 称  $\mathcal{P}(I)$  是  $R$  的 **Poisson 核**. 称极大理想的 Poisson 核为 **Poisson 本原理想**. 事实上特征零的域上 Poisson 代数的任何素理想的 Poisson 核总是素理想.

**Theorem 1.4.** 设  $(R, \{-, -\})$  是特征为零的域  $\mathbb{k}$  上的 Poisson 代数, 那么:

- (1) 对任何素理想  $P$ ,  $\mathcal{P}(P)$  是  $R$  的素理想.
- (2) 任何 Poisson 本原理想是素理想.
- (3) 如果  $P$  是 Poisson 理想  $I$  上的极小素理想, 那么  $P$  是 Poisson 理想.
- (4) 如果  $R$  是 Noether 的, 那么任何 Poisson 素理想是素理想.
- (5) 如果  $R$  是交换仿射代数, 则任何 Poisson 素理想是一些 Poisson 本原理想之交.

*Proof.* 为叙述方便, 仍记  $R$  上 Hamilton 导子全体为  $\Delta$ .

(1) 为简化记号, 记  $\mathcal{P}(P)$  为  $Q$ . 设  $a, b \in R$  满足  $ab \in Q$ , 下证  $a$  与  $b$  中至少有一个在  $Q$  内.

**Claim.** 若  $\delta_1, \dots, \delta_p \in \Delta, m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$  使  $\delta_1^{m_1} \cdots \delta_p^{m_p} b \notin P$ , 则  $\delta_1^{n_1} \cdots \delta_p^{n_p} a \in P, \forall n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$ .

如下赋予  $\mathbb{N}^p$  一偏序  $\leq$ : 对  $(i_1, \dots, i_p), (j_1, \dots, j_p) \in \mathbb{N}^p$ , 如果  $i_1 + \cdots + i_p < j_1 + \cdots + j_p$ , 那么  $(i_1, \dots, i_p) < (j_1, \dots, j_p)$ ; 如果  $i_1 + \cdots + i_p = j_1 + \cdots + j_p$ , 通过字典序来定义  $(i_1, \dots, i_p) \leq (j_1, \dots, j_p)$ . 则  $(\mathbb{N}^p, \leq)$  良序. 下面通过对  $(\mathbb{N}^p, \leq)$  作超限归纳证明断言. 先取在  $\mathbb{N}^p$  中满足  $\delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p} b \notin P$  的最小元  $(s_1, \dots, s_p)$ . 对任给  $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$ , 有

$$\delta_1^{n_1+s_1} \cdots \delta_p^{n_p+s_p}(ab) = \sum_{\substack{i_k+l_k=n_k+s_k \\ 1 \leq k \leq p}} \alpha(i_1, l_1, \dots, i_p, l_p) \delta_1^{i_1} \delta_2^{i_2} \cdots \delta_p^{i_p}(a) \delta_1^{l_1} \delta_2^{l_2} \cdots \delta_p^{l_p}(b),$$

其中  $\alpha(i_1, l_1, \dots, i_p, l_p) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . 那么上式可整理为

$$\delta_1^{n_1+s_1} \cdots \delta_p^{n_p+s_p}(ab) = \alpha(n_1, s_1, \dots, n_p, s_p) \delta_1^{n_1} \cdots \delta_p^{n_p}(a) \delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p}(b) + r,$$

这里  $r$  是一些形如  $\alpha(i_1, l_1, \dots, i_p, l_p) \delta_1^{i_1} \delta_2^{i_2} \cdots \delta_p^{i_p}(a) \delta_1^{l_1} \delta_2^{l_2} \cdots \delta_p^{l_p}(b)$  的项的有限和, 其中  $(i_1, \dots, i_p) < (n_1, \dots, n_p)$  或  $(l_1, \dots, l_p) < (s_1, \dots, s_p)$ . 当  $(n_1, \dots, n_p) = (0, 0, \dots, 0)$  时, 易见  $r \in P$ , 故由  $ab \in Q$  得  $a \delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p}(b) \in P$ . 故由  $P$  是素理想,  $\text{char } \mathbb{k} = 0$  且  $\delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p} b \notin P$  得到  $a \in P$  (至此, 结论对  $(\mathbb{N}^p, \leq)$  的最小元成立). 由归纳假设,

$$\delta_1^{i_1} \delta_2^{i_2} \cdots \delta_p^{i_p}(a) \in P, \forall (i_1, \dots, i_p) < (n_1, \dots, n_p).$$

从而利用  $ab \in Q$  便知  $\alpha(n_1, s_1, \dots, n_p, s_p) \delta_1^{n_1} \cdots \delta_p^{n_p}(a) \delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p}(b) \in P$ . 由  $\text{char } \mathbb{k} = 0$  知  $\delta_1^{n_1} \cdots \delta_p^{n_p}(a) \delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p}(b)$  也在  $P$  中. 再结合  $\delta_1^{s_1} \cdots \delta_p^{s_p} b \notin P$  得到  $\delta_1^{n_1} \cdots \delta_p^{n_p}(a) \in P$ . 断言得证.

下面通过说明  $b \notin Q$  蕴含  $a \in Q$  来完成证明. 对  $\delta_1, \dots, \delta_p \in \Delta$ , 要证  $\delta_1 \cdots \delta_p(a) \in P$ . 因为  $b \notin Q$ , 故存在  $\delta_{p+1}, \dots, \delta_t \in \Delta$  使得  $\delta_1^0 \cdots \delta_p^0 \delta_{p+1}^1 \cdots \delta_t^1(b) \notin P$ . 应用断言知  $\delta_1^1 \cdots \delta_p^1(a) = \delta_1^1 \cdots \delta_p^1 \delta_{p+1}^0 \cdots \delta_t^0(a) \in P$ .

(2) 和 (3) 由 (1) 立即得到. 下证 (4). 设  $R$  是 Noether 环且  $P$  是 Poisson 素理想, 那么存在  $P$  上极小素理想  $Q_1, \dots, Q_m$  使得  $P \supseteq Q_1 \cdots Q_m$ . 由 (3) 知每个  $Q_i$  都是 Poisson 理想, 所以  $P$  就是某个  $Q_i$ .

(5) 在 (4) 中已经说明 Noether 的 Poisson 代数每 Poisson 素理想是素理想. 因为域上交换仿射代数是 Jacobson 环, 所以任何素理想是一些极大理想的交, 设 Poisson 素理想  $P = \bigcap_{i \in I} Q_i$ , 其中  $Q_i$  是极大理想. 那么

$$P = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(Q_i).$$

□

**Remark 1.5.** 如果  $(R, \{-, -\})$  是特征为零的域  $\mathbb{k}$  上 Noether 的 Poisson 代数, 那么上述定理表明所有的 Poisson 素理想构成的集合是  $\text{Spec}R$ , 赋之以子空间拓扑得到的拓扑空间被称为 **Poisson 素谱**, 记作  $\text{P.Spec}R$ . 如果  $(R, \{-, -\})$  是特征为零的域  $\mathbb{k}$  上的 Poisson 代数, 那么所有 Poisson 本原理想构成的  $\text{Spec}R$  的子集赋予素谱的子空间拓扑得到的拓扑空间被称为  $R$  的 **Poisson 本原素谱**, 记作  $\text{P.Prim}R$ .

**Corollary 1.6.** 设  $(R, \{-, -\})$  是特征零的域  $\mathbb{k}$  上 Poisson 代数, 那么  $R$  的任何极小素理想都是 Poisson 理想. 特别地, 如果  $R$  进一步是 Noether 环, 那么  $\text{Spec}R$  作为 Noether 空间的不可约分支分解  $V(P_1) \cup V(P_2) \cup \dots \cup V(P_r)$ , 每个分支对应的商环  $R/P_i$  均为 Poisson 代数.

**Corollary 1.7.** 设  $(R, \{-, -\})$  是特征零的域  $\mathbb{k}$  上 Poisson 代数, 那么任何 Poisson 理想的根理想仍 Poisson.

*Proof.* 设  $I$  是  $R$  的 Poisson 理想, 那么  $I$  上极小素理想均为 Poisson 理想. □

设  $(R, \{-, -\})$  是 Poisson 代数, 对  $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \max\text{Spec}R$ , 定义  $\mathfrak{m} \sim \mathfrak{n}$  当且仅当  $\mathcal{P}(\mathfrak{m}) = \mathcal{P}(\mathfrak{n})$ , 即这两个极大理想具有相同的 Poisson 核. 称  $\mathfrak{m} \in \max\text{Spec}R$  在上述等价关系下所在的等价类  $\mathcal{C}(\mathfrak{m})$  为  $\mathfrak{m}$  的**辛核**. 如果这时基域  $\mathbb{k}$  的特征是零, 那么可以将极大谱  $\max\text{Spec}R$  关于辛核的分解视作  $\max\text{Spec}R$  关于

$$\pi_m : \max\text{Spec}R \rightarrow \text{P.Prim}R, \mathfrak{m} \mapsto \mathcal{P}(\mathfrak{m})$$

的非空纤维的分解. 根据 Poisson 本原素谱的定义, 易见  $\pi_m$  是满射. 下面说明  $\pi_m$  是连续映射. 任取  $\text{P.Prim}R$  的非空闭子集  $W = V(I) \cap \text{P.Prim}R$ , 其中  $I$  是  $R$  的理想, 我们总可不妨设  $I$  是  $R$  的 Poisson 理想 (否则用  $V(I) \cap \text{P.Prim}R$  中所有 Poisson 本原理想之交替换  $I$ ), 那么由下式得到  $\pi_m$  是连续满射:

$$\pi_m^{-1}(W) = \{\mathfrak{m} \in \max\text{Spec}R \mid \mathcal{P}(\mathfrak{m}) \supseteq I\} = \{\mathfrak{m} \in \max\text{Spec}R \mid \mathfrak{m} \supseteq I\} = V(I) \cap \max\text{Spec}R.$$

## 参考文献

- [BLSM17] Jason Bell, Stéphane Launois, Omar León Sánchez, and Rahim Moosa. Poisson algebras via model theory and differential-algebraic geometry. *Journal of the European Mathematical Society*, 19(7):2019–2049, 2017.
- [BWY19] Jason P Bell, Xingting Wang, and Daniel Yee. The dixmier-moeglin equivalence, morita equivalence, and homeomorphism of spectra. *Journal of Algebra*, 534:228–244, 2019.
- [GL11] Kenneth Ralph Goodearl and Stéphane Launois. The dixmier-moeglin equivalence and a gel'fand-kirillov problem for poisson polynomial algebras. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 139(1):1–39, 2011.
- [Goo06] Kenneth R Goodearl. A dixmier-moeglin equivalence for poisson algebras with torus actions. *Contemporary Mathematics*, 419:131, 2006.
- [LWW21] Juan Luo, Xingting Wang, and Quanshui Wu. Poisson dixmier-moeglin equivalence from a topological point of view. *Israel Journal of Mathematics*, 243:103–139, 2021.