仿射簇的商簇

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 15 日

1 商簇

固定代数闭域 $\Bbbk$ 并设 $X \neq \varnothing \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 并设有限群 G 在 X 上有作用 $\rho : G \to \mathrm{Aut}X$(这里 $\mathrm{Aut}X$ 表示 X 作为仿射簇的自同构全体构成的群). 因为这里基域代数闭, 故下述 [定理1.1] 保证了 X 的坐标环与其正则函数环可视作等同. 于是每个 $g \in G$ 决定的正则映射 $g : X \to X$ 可逆变地诱导 $\Bbbk$-代数同构 $g^* : A(X) \to A(X), f \mapsto g^*(f)$, 其中 $g^*(f) : X \to \Bbbk, x \mapsto f(gx)$. 因此 ρ 可诱导正则函数环上的群作用 $\overline{\rho} : G \to \mathrm{Aut}_{\Bbbk}, g \mapsto (g^{-1})^*$. 该群作用对应不变子代数

$$A(X)^G = \{f \in A(X) | (g^{-1})^* f = f, \forall g \in G\} = \{f \in A(X) | g^*(f) = f, \forall g \in G\}.$$

这是经典不变量理论的主要研究对象. 下面我们将构造某个仿射簇以上述不变子代数为坐标环.

Theorem 1.1. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 如果 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 则任何 $f \in A(X)$ 是多项式函数.

Proof. 任取 $f \in A(X)$. Zarisiki 拓扑有拓扑基 $\{\mathcal{O}_f = \Bbbk^n - V(f) | f \in k[x_1, ..., x_n]\}$, 于是知存在有限个多项式 $f_1, ..., f_m$ 使得 $X = (X \cap \mathcal{O}_{f_1}) \cup (X \cap \mathcal{O}_{f_2}) \cup \cdots \cup (X \cap \mathcal{O}_{f_m})$ 满足在每个 $X \cap \mathcal{O}_{f_i}$ 上, f 可表示为 g_i/h_i 的形式, 这里 g_i, h_i 是多项式且 h_i 在 $\mathcal{O}_{f_i}$ 上取值处处非零. 所以对任何 $p \in V(h_i) \cap X$ 有 $f_i(p) = 0$, 即 $f_i \in I(V(h_i) \cap X)$. 由 Hilbert 零点定理 (这使用了代数闭域条件) 可得存在正整数 l 以及多项式 C_i 使得 $f_i^l - C_i h_i \in I(X)$, 这也说明 C_i 在 $X \cap \mathcal{O}_{f_i}$ 上取值处处非零, 所以由 $X \cap \mathcal{O}_{f_i} = X \cap \mathcal{O}_{C_i h_i}$ 可知我们可以不妨设 $h_i = f_i, 1 \leq i \leq m$. 即这时 $X = (X \cap \mathcal{O}_{f_1}) \cup (X \cap \mathcal{O}_{f_2}) \cup \cdots \cup (X \cap \mathcal{O}_{f_m})$ 满足 f 在每个 $X \cap \mathcal{O}_{f_i}$ 上可表示为 g_i/f_i 的形式. 因为在 $X \cap \mathcal{O}_{f_i f_j}$ 上总有 $g_i/f_i = g_j/f_j$ 成立, 所以由 $X = (X \cap \mathcal{O}_{f_i f_j}) \cup (X \cap V(f_i f_j))$ 可知作为 X 上函数有 $f_i f_j (g_i f_j - g_j f_i) = 0$. 现用 G_i 替换 $f_i g_i$, H_i 替换 f_i^2, 则 $X = (X \cap \mathcal{O}_{H_1}) \cup (X \cap \mathcal{O}_{H_2}) \cup \cdots \cup (X \cap \mathcal{O}_{H_m})$, 在每个 $X \cap \mathcal{O}_{H_i}$ 上 f 可表为 G_i/H_i, 并且在 X 上恒有 $G_i H_j = G_j H_i$. 因为 $H_1, ..., H_m$ 在 X 上没有公共零点, 所以再应用 Hilbert 零点定理得到存在多项式 $a_1, ..., a_m$ 使得 $\sum_{i=1}^m a_i H_i - 1 \in I(X)$. 构造多项式 $g = \sum_{i=1}^m a_i G_i$, 那么在每个 $X \cap \mathcal{O}_{H_i}$ 上有

$$H_i g = \sum_{j=1}^m a_j G_j H_i = \sum_{j=1}^m a_j G_i H_j \Rightarrow g = \frac{G_i}{H_i},$$

所以 f 作为 X 上正则函数可由多项式函数 g 给出. □

前面提到有限群 G 在仿射簇 X 上的作用可天然诱导 G 在 $A(X)$ 上作用得到不变子代数 $A(X)^G$, 下面的 [引理1.2] 表明仿射簇的正则函数环关于仿射簇群作用产生的不变子代数也是仿射代数.

Lemma 1.2. 设有限群 G 线性作用在域 $\Bbbk$ 上交换仿射代数 A 上, 那么不变子代数 $A^G=\{a\in A|ga=a,\forall g\in G\}$ 也是域 $\Bbbk$ 上仿射代数且 A 是有限生成 A^G-模.

Proof. 因为 G 是有限群, 所以 A 作为 A^G 的环扩张是整扩张: 具体地, 任给 $a\in A$ 满足 A^G 上首一多项式

$$f(x)=\prod_{g\in G}(x-ga)\in A^G[x].$$

进而由 A 是 $\Bbbk$ 上仿射代数知 A 是有限生成 A^G-模, 所以由 Artin-Tate 引理知 A^G 是 $\Bbbk$ 上仿射代数. $\square$

Remark 1.3. 一般地, Artin-Tate 引理表明对任何含幺环的环扩张 $A\subseteq B\subseteq C$ 满足 $B\subseteq Z(C)$, C 是有限生成 A-代数且 A 是 Noether 环, 那么 ${}_BC$ 是有限生成模蕴含 B 是仿射 A-代数. 例如设 C 作为 A-代数可由 $x_1,...,x_n$ 生成, ${}_BC$ 可由 $y_1,...,y_m$ 生成. 那么对每个 $1\leq i,j\leq n$, 存在 $b_{ij}^k\in B$ 使得 $x_ix_j=b_{ij}^1y_1+\cdots+b_{ij}^my_m$. 对每个 $1\leq t\leq n$, 可设 $x_t=b_{t1}y_1+\cdots+b_{tn}y_n, b_{tj}\in B$. 命 $B'=A[\{b_{ij}^k,b_{tj}\}]$, 则 B' 是交换 Noether 环且 C 是有限生成 B'-模. 那么 B 也是有限生成 B'-模, 于是结合 B' 的构造便知 B 是有限生成 A-代数.

由于 X 的坐标环 $A(X)$ 是交换仿射可约 $\Bbbk$-代数, 所以 $A(X)^G$ 作为子代数也是交换仿射可约代数. 这一观察表明存在仿射簇 Y 使得 $A(Y)\cong A(X)^G$, 因为代数闭域上交换仿射可约代数范畴与域上仿射簇范畴由仿射簇映至坐标环的对应给出两范畴间的范畴对偶, 所以上述仿射簇 Y 在同构意义下被 X 以及 G 在 X 上作用决定. 并且 $\Bbbk$-代数的标准嵌入 $i:A(Y)\cong A(X)^G\to A(X)$ 唯一决定正则函数 $\varphi:X\to Y$, 即这里 $i=\varphi^*$(一般得不到 φ 是满射, 只能得到 $\mathrm{Im}\varphi$ 在 Y 中稠密, 但稍后会证明这里确实为满射). 并注意到

Proposition 1.4. 设 $\mathrm{char}\Bbbk$ 不整除 $|G|$. 对 $x_1,x_2\in X$, $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$ 当且仅当 x_1,x_2 在同一个 G-轨道内.

Proof. 记 $\psi:A(Y)\to A(X)^G$ 是定义出正则函数 $\varphi:X\to Y$ 的代数同构. 充分性：如果存在 $g\in G$ 使得 $x_2=gx_1$, 那么对任何 $f\in A(X)^G$ 有 $f(x_1)=f(x_2)$. 由于每个 $f\in A(X)^G$ 都存在唯一的 $\tilde{f}\in A(Y)$ 使得 $\psi(\tilde{f})=f$, 所以 $\tilde{f}(\varphi(x_1))=\tilde{f}(\varphi(x_2)),\forall\tilde{f}\in A(Y)$. 进而 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$. 必要性：我们说明当 $x_2\neq gx_1,\forall g\in G$ 时有 $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$. 这时只要说明存在 $f\in A(X)^G$ 使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 即可. 首先下面的 [引理1.5] 保证了存在 $h\in A(X)$ 使得 $h(gx_1)=1,h(gx_2)=0,\forall g\in G$. 其次构造

$$f=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g^*f\in A(X)^G$$

便有 $f(x_1)=1\neq 0=f(x_2)$. $\square$

Lemma 1.5. 设 $\Bbbk$ 是域, 那么对任给互异的点 $p_1,...,p_m\in\Bbbk^n$ 以及 $\alpha_1,...,\alpha_m\in\Bbbk$, 存在 $f\in\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 使得

$$f(p_i)=\alpha_i,\forall 1\leq i\leq n.$$

Proof. 设 p_i 对应的仿射空间内的极大理想为 $\mathfrak{m}_i(1\leq i\leq m)$, 由中国剩余定理得到标准同构

$$\Phi:\Bbbk[x_1,...,x_n]/\mathfrak{m}_1\cdots\mathfrak{m}_m\to\Bbbk[x_1,...,x_n]/\mathfrak{m}_1\times\cdots\times\Bbbk[x_1,...,x_n]/\mathfrak{m}_m,\overline{f}\mapsto(f+\mathfrak{m}_1,...,f+\mathfrak{m}_m).$$

现在考察 $(\alpha_1+\mathfrak{m}_1,...,\alpha_m+\mathfrak{m}_m)$ 关于上述同构的原像 $f+\mathfrak{m}_1\cdots\mathfrak{m}_m$, f 明显满足条件. $\square$

由 [命题1.4] 我们看到正则函数 $\varphi: X \to Y$ 能够区分 X 关于群作用落在不同轨道内的点. 事实上 φ 是满射: 根据 φ 的定义知 $\varphi^*: A(Y) \to A(X)$ 是整扩张, 所以对每个 $p \in Y$, 记 $\mathfrak{m}_p$ 是点 p 对应在 $A(Y)$ 中的极大理想, 那么根据 Going-up 定理知存在 $A(X)$ 的极大理想 $\mathfrak{q}$ 使得 $\mathfrak{q}$ 关于 φ^* 的原像是 $\mathfrak{m}_p$. 因为 $\Bbbk$ 是代数闭域, 所以存在 X 内点 q 使得 q 对应于 $A(X)$ 的极大理想为 $\mathfrak{q}$, 进而 $\varphi(q) = p$. 由此可知 φ 诱导出 Y 与群作用轨道集间的双射, 现在可以给出仿射簇商空间的概念.

Definition 1.6 (商簇)**.** 设 $\Bbbk$ 是代数闭域且 $\mathrm{char}\Bbbk$ 不整除 $|G|$, 有限群 G 作用在仿射簇 $X \neq \varnothing \subseteq \Bbbk^n$ 上. 称上述定义出的仿射簇 Y 为 X 关于群作用的**商簇**或**商空间**, 记为 X/G. 根据定义有 $A(X/G) \cong A(X)^G$.

Remark 1.7. 在一些文献中也把商簇 X/G 称为 X 关于群作用的**轨形**. 轨形与轨形的奇点解消是代数和领域的经典课题. 人们可以通过研究仿射簇坐标环的不变子代数来认识轨形的几何结构.

2 斜群代数的 Morita 等价

在前一节我们看到有限群 G 作用于仿射簇 X 可产生坐标环 $A(X)$ 的不变子代数 $A(X)^G$. 不变子代数对应的仿射簇就是商簇 X/G. 本节我们回忆斜群代数的概念并介绍它与不变子代数间的联系.

设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 群 G 作用于 A, 即存在群同态 $\rho: G \to \mathrm{Aut}_{\Bbbk}A$, 这里 $\mathrm{Aut}_{\Bbbk}A$ 是 A 作为 $\Bbbk$-代数的自同构群. 考虑张量积 $A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$, 那么可通过定义 $(a \otimes g)(b \otimes h) = a(gb) \otimes gh$ 来赋予 $A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$ 上一个 $\Bbbk$-代数结构. 若取 ρ 为 G 在 A 上的平凡作用, 则 $A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$ 关于上述定义的代数结构同构于系数来自 A 的群代数 AG.

Definition 2.1 (斜群代数)**.** 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 群 G 作用于 A, 那么通过在 $A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$ 上定义 $(a \otimes g)(b \otimes h) = a(gb) \otimes gh, \forall a, b \in A, g, h \in G$ 可赋予 $A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$ 上 $\Bbbk$-代数结构, 记该 $\Bbbk$-代数为 $A\#\Bbbk G$, 称之为 G 在 A 上的**斜群代数**. 将 $A\#G$ 中形如 $a \otimes g$ 的元素记作 $a\#g$. 易见 $A^G\#1 \subseteq Z(A\#\Bbbk G)$.

下面的定理可推广至有限维 Hopf 代数情形, 证明可参见 [Mon93, p.54, Corollary 4.5.4].

Theorem 2.2. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 有限群 G 作用于 A, 记 $t = \sum\limits_{g \in G} g$. 如果 $(1\#t) = A\#G$ 且

$$\hat{t}: A \to A^G, a \mapsto ta = \sum_{g \in G} ga$$

是满射, 那么有模范畴的等价 $A\#\Bbbk G\text{-}\mathbf{Mod} \cong A^G\text{-}\mathbf{Mod}$. 即斜群代数 $A\#\Bbbk G$ 与不变子代数 A^GMorita 等价.

Remark 2.3. 如果 $\mathrm{char}\Bbbk$ 不整除 $|G|$, 那么对任何 $a \in A^G$, 有

$$a = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} ga = \hat{t}\left(\frac{a}{|G|}\right),$$

即 $\hat{t}$ 是满射. 一般而言不能保证 $1\#t$ 可生成 $A\#G$. 研究代数的表示就是研究该代数上的模范畴, 该定理表明在某些群作用下研究不动子代数 A^G 的表示与研究斜群代数 $A\#G$ 的表示本质上没有区别.

参考文献

[Mon93] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings.* American Mathematical Soc., 1993.

[Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1.* Springer Berlin, Heidelberg, 2013.