

# PI 代数

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 4 月 12 日

这份笔记主要记录了我在 2022 年 10 月所学习的 PI 代数基础知识, 主要以 [1] 中 PI 代数的预备常识为主线, 一些细节上的处理主要参考了 [2]-[4]. 这份笔记中会在每个定义、定理前标明我主要参考的文献. 由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出!

## 目录

<b>1</b>	<b>引言</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>经典结果</b>	<b>3</b>
2.1	基本概念 . . . . .	3
2.2	Amitsur-Levitzki 定理 . . . . .	11
2.3	Köthe 猜想 . . . . .	14
2.4	Formanek 中心多项式 . . . . .	15
2.5	Kaplansky 定理 . . . . .	18
2.6	Posner 定理 . . . . .	25
2.7	Amitsur 定理 . . . . .	30
2.8	零次 Hochschild 同调的非零性 . . . . .	32
<b>3</b>	<b>一些 PI 环类</b>	<b>32</b>
3.1	Noether PI 环 . . . . .	32
3.2	仿射 PI 代数 . . . . .	34
3.3	Azumaya 代数 . . . . .	36
3.4	模有限代数 . . . . .	61

# 1 引言

PI 环的出现最早可以追溯到射影几何, 上个世纪 20 年代就有射影几何方面的文章中出现关于 PI 环的研究 (例如 [5]). 这里仅列出 PI 代数的部分发展历史 (更详尽的 PI 环早期发展历史可以参考 [6]):

- 1943 年, M. Hall 在文献 [7] 中证明了对域和四元数代数  $\mathbb{H}$ , 都满足多项式等式 (见 [例2.8])

$$(xy - yx)^2 z = z(xy - yx)^2.$$

- 1948 年, I. Kaplansky 在文献 [8] 中引入了 PI 环的概念, 并证明了本原 PI 环是其中心上有限维中心单代数, 这一结果被称为 Kaplansky 定理 (见 [定理2.67]).
- 1950 年, J. Levitzki 在文献 [9] 中证明了素 PI 环没有非零的诣零理想 (更一般的结论见 [推论2.49]).
- 1950 年, S. A. Amitsur 和 J. Levitzki 在文献 [10] 中证明了含幺交换环  $K$  上的  $n$  阶矩阵环  $M_n(K)$  满足标准等式  $s_{2n}$ , 这一结果被称为 Amitsur-Levitzki 定理 (见 [定理2.36]).
- 1952 年, S. A. Amitsur 在文献 [11] 中证明了任何 PI 环都满足某个偶数个变量的标准等式的幂  $s_{2m}^n$ , 在这份笔记中称为 Amitsur 定理 (见 [定理2.103]).
- 1956 年, S. A. Amitsur 在文献 [12] 中证明了没有非零诣零理想的含幺环  $R$  上的一元多项式环  $R[x]$  是半本原环 (见 [定理2.77]).
- 1960 年, Ed Posner 在文献 [13] 中使用 Goldie 定理证明了素 PI 环  $R$  关于中心正则元集  $S = Z(R) - \{0\}$  的右商环是其中心上的有限维中心单代数 (见 [定理2.84]).
- 1972 年, E. Formanek 在文献 [14] 中构造了域上  $n$  阶矩阵环  $M_n(F)$  的中心多项式 (见 [定理2.53]).
- 1973 年, Y.P. Razmyslov 独立于 Formanek 在文献 [15] 中构造了矩阵环  $M_n(F)$  的中心多项式.
- 1973 年, L.R. Rowen 在文献 [16] 中使用 Formanek 中心多项式证明了半素 PI 环  $R$  的任何非零理想  $J$  与中心之交非零, 即  $J \cap Z(R) \neq 0$ . 作为应用, 他加强了 Posner 定理 (见 [定理2.79]).
- 1976 年, S. Rosset 在文献 [17] 中使用外代数给出了 Amitsur-Levitzki 定理的简短证法.

这份笔记包含了以上列出的所有定理的证明, 其中 Amitsur-Levitzki 定理的证明采用了 Rosset 的方法, Kaplansky 定理的证明用到了本原环的稠密性定理, Posner 定理的证明采用了 Rowen 的方法. 我们将会看到, 域上的 PI 代数包含了交换代数与有限维代数 (见 [命题2.24]) 这两类代数. 因为 PI 环是交换环的推广 (见 [注记2.14]), 所以粗略地说, Kaplansky 定理就是把“交换本原环等价于域”推广为“PI 本原环等价于域上有限维单代数”, Posner 定理就是把“交换素环 (也就是整区) 关于中心正则元集的局部化 (也就是商域) 是自身上的 1 维单代数”推广为“PI 素环关于中心正则元集  $S$  的右局部化  $R_S$  是中心  $Z(R_S) = Z(R)_S$  上的有限维单代数”. Amitsur 定理表明“PI 代数作为环是 PI 环” (见 [定理2.103]). 利用 Posner 定理与 Goldie 理论的事实, 可以得到 FBN 环类包含了 Noether PI 环类 (见 [定理3.3]). 利用 Kaplansky 定理与 Goldie 定理, 可以证明域上仿射 PI 代数是满足零点定理的 Jacobson 环 (见 [推论3.10]). 我们也简要介绍了可分代数、Azumaya 代数的基本性质与刻画 (例如 [命题3.21] 和 [定理3.47]), 也包含域上代数的 (经典) 可分性与交换环上代数可分性定义的等价性 (见 [命题3.32] 和 [推论3.33])、Artin-Procesi 定理的叙述与证明 (见 [定理3.65] 和 [定理3.69]).

## 2 经典结果

### 2.1 基本概念

这部分主要介绍 PI 代数的定义和最基本的性质, 我们将证明任何 PI 代数都满足某个首一多重线性多项式 (见 [定理2.16]) 以及 PI 代数的中心扩张还是 PI 的 (见 [推论2.19]). 如无特别说明, 默认含幺环  $R$  的单位元  $1_R \neq 0$ , 含幺交换环  $K$  上的代数  $A$  默认有幺元  $1_A \neq 0$ , 考虑的所有环默认非零环.

**Definition 2.1** (多项式等式, [2],[4]). 设  $R$  是 (非零) 环, 如果存在  $f \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  使得  $f(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0, \forall c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ , 那么称  $R$  满足  $f$  且  $f$  是  $R$  的一个**多项式等式** (简称为 PI). 称  $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  中元素

$$s_n = s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, \text{ 这里 } \text{sgn}\sigma \text{ 表示置换 } \sigma \text{ 的符号}$$

为第  $n$  个**标准等式**. 若非零多项式  $f \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  满足所有最高次 (这里是指将  $f$  表示为有限个字的非零  $\mathbb{Z}$ -线性组合后, 系数非零的最长的字的长度) 项至少有一个系数为 1, 则称  $f$  是**首一多项式**. 称  $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  中形如

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, a_{\sigma} \in \mathbb{Z}$$

的元素为**多重线性多项式**.

**Remark 2.2.** 虽然我们把自由代数  $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  与多项式环  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  中元素都被称为多项式, 但它们是不同的概念, 前者变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  两两不交换而后者未定元两两可交换.

**Remark 2.3.** 类似地可以定义代数的多项式等式, 设  $K$  是含幺交换环,  $A$  是  $K$ -代数 (这里定义多项式等式的概念没有要求  $A$  必须有幺元), 如果自由代数  $K\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  中的元素  $f$  使得  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ , 则称  $A$  满足  $f$  且  $f$  是  $A$  的一个多项式等式. 将  $K\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  中形如

$$h = h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, b_{\sigma} \in K$$

的元素称为  $K$  上**多重线性多项式**. 因为环总可以视作  $\mathbb{Z}$ -代数, 所以这里的概念可以视作 [定义2.1] 的推广. 这里称  $h$  为“多重线性”的原因是, 对  $A$  中任意  $n+1$  个元素  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n$  以及任意  $c \in K$ , 有:

$$h(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = h(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) + h(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

$$h(a_1, \dots, a_{i-1}, ca_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = ch(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

**Remark 2.4.** 易见标准等式  $s_n$  是特殊多重线性多项式, 它是  $n$  次整系数多重线性多项式.

**Remark 2.5.** 设  $A$  是含幺交换环  $K$  上的代数,  $Z(A)$  是中心, 并设  $\mathcal{A}$  是将  $A$  视作  $Z(A)$ -模的一个生成元集. 如果多重线性多项式  $f \in K\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  满足  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ , 则  $A$  满足  $f$ .

**Remark 2.6.** 如果多重线性多项式  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \in K\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  满足对任给正整数  $1 \leq i < j \leq n$ , 有  $f(x_1, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$ , 则称  $f$  是  $K$  上**交错多重线性多项式**. 易见  $f(x_1, \dots, x_n)$  是交错多重线性多项式的充要条件是对任给正整数  $1 \leq i < j \leq n$ ,

有  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0$  (将  $f$  关于置换求和的展开式拆分成奇置换部分与偶置换部分之和, 考察每项系数可以发现对每个  $1 \leq i < j \leq n$ , 有  $b_\sigma = -b_{(ij)\sigma}, \forall \sigma \in S_n$ , 这里  $(ij) \in S_n$  是对换). 易见标准等式  $s_n$  是  $n$  次交错多重线性多项式. 因此, 对  $K$ -代数  $A$  中元素  $a_1, \dots, a_n$ , 只要有某个  $a_i = a_j (1 \leq i \neq j \leq n)$ , 就有  $s_n(a_1, \dots, a_n) = 0$ .

**Example 2.7.** 设  $R$  是交换环, 那么  $R$  满足第 2 个标准等式  $s_2 = x_1x_2 - x_2x_1$ , 因为  $ab - ba = 0, \forall a, b \in R$ .

**Example 2.8** (Hall 等式). 设  $K$  是含么交换环,  $R = M_2(K)$ , 易见  $(AB - BA)^2C = C(AB - BA)^2, \forall A, B, C \in R$ , 所以  $R$  满足  $(x_1x_2 - x_2x_1)^2x_3 - x_3(x_1x_2 - x_2x_1)^2$ , 称为 **Hall 等式** (事实上 W. Wagner 在 1937 年就给出了这一构造 [18]). 因为四元数环可以用二阶复方阵表示

$$\mathbb{H} \cong \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\},$$

所以域上二阶方阵满足 Hall 等式蕴含了  $\mathbb{H}$  满足  $(xy - yx)^2z - z(xy - yx)^2 \in \mathbb{Z}\langle x, y, z \rangle$ .

**Example 2.9.** 设  $K$  是特征为 2 的域, 那么可数个变量的自由代数  $A = K\langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$  满足多项式等式  $2x \in \mathbb{Z}\langle x \rangle$ , 但它不满足任何  $K$  上的非零多项式  $f \in K\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ .

*Proof.* 若不然, 设存在  $K$  上的非零多项式  $f \in K\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  使得  $f(g_1, \dots, g_n) = 0, \forall g_1, g_2, \dots, g_n \in A$ . 作代入  $g_i = x_i \in A$ , 我们得到  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  是零多项式, 矛盾.  $\square$

**Remark 2.10.** 证明过程中能够作代入  $g_i = x_i$  的原因是对每个  $K$ -代数  $B$ , 固定  $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ , 映射  $\varphi : K\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \rightarrow B, h(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto h(b_1, b_2, \dots, b_n)$  是  $K$ -代数同态, 以后不再说明.

**Definition 2.11** (PI 代数, [2], [4]). 设  $K$  是含么交换环, 若  $K$ -代数  $A$  (这里  $A$  可以没有  $1_A$ ) 满足某个  $K$  上首一多项式等式  $f \in K\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  (当  $A$  没有  $1_A$  时, 我们额外要求这里的多项式等式是常数项为零), 则称  $A$  是  $K$  上的**多项式等式代数**, 或简称为 **PI 代数**. 如果  $K = \mathbb{Z}$ , 称  $A$  是**多项式等式环**, 简称为 **PI 环**. 称 PI 代数满足的次数最低的首一多项式的次数为 **PI 代数的最小次数**.

**Remark 2.12.** 根据我们的定义立即得到任何  $K$  上的代数  $A$  如果作为环是 PI 的, 那么  $A$  当然是 PI 代数. 如果定义中将多项式等式的“首一”降低为“非零”, 就会出现 [例2.9] 这样病态的例子——作为环是 PI 的但作为代数不是 PI 的. 一个自然的反问题是: 如果  $K$ -代数  $A$  是 PI 代数, 那么它作为环是否是 PI 的呢 (即它是否满足某个首一整系数多项式)? 之后我们将会给出一个肯定的答复 (见定理2.103), 因此所有关于 PI 环的性质对于 PI 代数也是成立的.

**Remark 2.13.** 对 PI 代数引入最小次数的概念使证明一些关于 PI 代数的命题多了数学归纳法这一工具. 我们之后会对最小次数作归纳去证明非交换环论中的经典公开问题 Köthe 猜想在 PI 环层面是成立的.

**Remark 2.14.** 通过 [例2.7] 我们看到交换代数总是 PI 的, 通过 [例2.8] 我们看到域上的二阶矩阵环是 PI 的. 之后我们将会看到, 对含么交换环  $K$  上的任何矩阵环  $M_n(K)$ , 它是 PI 的, 并且最小次数是  $2n$ . 而 [例2.9] 也为我们提供了  $\mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$  这一不是 PI 环的例子.

从 PI 代数的定义出发容易证明下面的事实, 进而得到从一些 PI 代数出发构造新的 PI 代数的一些手段. 我们将会在证明任何 PI 代数作为环也是 PI 的这一事实时, 使用下面引理的 (3).

**Lemma 2.15** ([2]). 给定含么交换环  $K$ , 则

- (1) 设  $A$  是  $K$  上最小次数为  $d$  的 PI 代数, 若  $A'$  是  $A$  的子代数, 那么  $A'$  也是 PI 代数, 且  $A'$  的最小次数不超过  $d$ .
- (2) PI 代数的 (代数) 同态像还是 PI 的. 代数同构的 PI 代数满足相同的多项式等式.
- (3) 如果含么交换环  $K$  上的 PI 代数族  $\{A_i | i \in \Lambda\}$ , 指标集  $\Lambda$  非空, 满足所有的  $A_i$  满足  $K$  上一公共的多项式  $f$ , 那么  $\prod_{i \in \Lambda} A_i$  也满足  $f$ .

如果 PI 环  $R$  满足多项式等式  $h(x, y, z) = x^2y - yx - z^3 + z^{2022}$ , 那么我们总能从  $h$  出发得到  $R$  的一个首一多重线性多项式: 首先, 通过代入  $z = 0$  可以看到  $R$  有多项式等式  $h(x, y) = x^2y - yx$ , 再线性化处理多项式  $h$ :

$$g(x, y, w) = h(x + w, y) - h(x, y) - h(w, y) = xwy + wxy.$$

这就得到  $R$  所满足的一个多重线性多项式. 对一般的 PI 代数我们也可以用这种思想去说明它一定满足某个首一多重线性多项式, 这也是下面的定理所说的事实.

**Theorem 2.16** ([2]). 若含么交换环  $K$  上的代数  $A$  (可以没有  $1_A$ ) 满足  $K\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  中一个次数为  $d$  的首一多项式  $f$  (当  $A$  没有  $1_A$  时, 额外要求  $f$  的常数项是零), 那么存在某个  $K$  上次数不超过  $d$  的首一多重线性多项式  $g$  (这里  $g$  的变量个数可能超过  $n$ ) 使得  $g$  是  $A$  的一个多项式等式.

*Proof.* 证明分为下面两步, 先调整多项式  $f$  来得到一个每个单项式都包含  $x_1, \dots, x_m$  每个变量的首一多项式  $h(x_1, \dots, x_m)$  (这里的变量个数  $m$  不超过  $n$ ), 再从  $h$  出发通过“线性化”的想法将  $h$  扩充变量与降次, 来得到所需要的首一多重线性多项式  $g$ .

**Step1.** 我们先说明存在  $K\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$  (这里  $m$  是不超过  $n$  的一个正整数) 中一个次数不超过  $d$  的首一多项式  $h$  使得  $h$  的每个 (系数非零的) 单项式都含有  $x_1, x_2, \dots, x_m$  的每个变量并且它是  $A$  的一个多项式等式. 如果  $f$  的每个单项式都含有  $x_1, x_2, \dots, x_n$  每个变量, 取  $h = f$  即可. 否则, 存在某个变量  $x_i$  不在  $f$  的某个单项式中 (例如  $p(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3x_2 \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  中单项式  $x_1x_2$  不含变量  $x_3$ ), 设  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $f$  所有包含  $x_i$  的非零单项式之和 (如果不存在这样的非零单项式, 定义  $f_1 = 0$ ), 设  $f_2(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  是  $f$  所有不包含  $x_i$  的非零单项式之和 (如果不存在这样的非零单项式, 定义  $f_2 = 0$ ), 那么  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . 命  $a_i = 0$ , 则对任给  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$ , 有  $f_2(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0$ , 这说明  $f_2$  是  $A$  的一个多项式等式, 于是  $f_1$  也是  $A$  的一个多项式等式. 由于  $f$  是首一的所以  $f_1, f_2$  中至少有一个也是首一的, 选取  $f_1, f_2$  中首一的那个多项式  $f_j (j \in \{1, 2\})$ , 那么  $f_j$  是  $A$  的次数不超过  $d$  的首一多项式等式且  $f_j$  的每个单项式要么都含有变量  $x_i$ , 要么都不含变量  $x_i$ . 如果  $f_j$  每个单项式中出现的所有变量一致, 取  $h = f_j$ , 否则, 我们对  $f_j$  重复作上述讨论, 可在有限步内找到满足条件的  $h$ .

**Step2.** 设  $A$  有首一的多项式等式  $h(x_1, x_2, \dots, x_m) \in K\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$  满足次数不超过  $d$  且  $h$  每个单项式都包含  $x_1, x_2, \dots, x_m$  每个变量 (根据前面的讨论我们知道这样的  $h$  是存在的), 记  $l_i$  是  $x_i$  在  $h$  每个单项式中出现的次数 (或者说每个单项式关于变量  $x_i$  的次数) 的最大值,  $l = \max\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$  (为了之后叙述方便, 临时称  $l$  是  $h$  的变量最高次数), 我们对  $h$  的变量最高次数  $l \geq 1$  作归纳说明存在  $K$  上次数不超过  $d$  的首一多重线性多项式  $g$  使得  $g$  是  $A$  的一个多项式等式. 当  $l = 1$  时, 由  $h$  的定义知  $h$  每个单项式中变量  $x_1, \dots, x_m$  恰好出现一次, 故  $h$  自身是首一多重线性多项式, 取  $g = h$  即可. 假设结论对不超过  $l - 1 (l \geq 2)$  的情形成立,



那么可设  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq m$  是  $1, 2, \dots, m$  中所有使得  $l_i = l$  的指标  $i$ . 命  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) =$

$$h(\dots, x_{i_1-1}, x_{i_1} + x_{m+1}, x_{i_1+1}, \dots) - h(\dots, x_{i_1-1}, x_{i_1}, x_{i_1+1}, \dots) - h(\dots, x_{i_1-1}, x_{m+1}, x_{i_1+1}, \dots),$$

那么  $g_1$  是  $A$  的一个首一多项式等式, 次数不超过  $h$  的次数, 每项含有  $x_1, \dots, x_{m+1}$  的每个变量, 且变量  $x_{i_1}$  在  $g_1$  的每个单项式中次数不超过  $l-1$  (这里  $g_1$  的构造相当于是对  $g_1$  关于变量  $x_{i_1}$  作了“线性化”). 类似地我们定义满足单项式包含每个变量且首一的多项式  $g_2(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}) =$

$$g_1(\dots, x_{i_2-1}, x_{i_2} + x_{m+2}, x_{i_2+1}, \dots) - h(\dots, x_{i_2-1}, x_{i_2}, x_{i_2+1}, \dots) - h(\dots, x_{i_2-1}, x_{m+2}, x_{i_2+1}, \dots),$$

那么  $g_2$  是  $A$  的首一多项式等式, 次数不超过  $g_1$  的次数,  $g_2$  每个单项式关于变量  $x_{i_2}$  的出现次数不超过  $l-1$ . 重复上述过程, 可得  $K$  上多项式  $g_t(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+t})$  使得它是  $A$  的首一多项式等式, 次数不超过  $d$ ,  $g_t$  每个单项式都包含  $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+t}$  的每个变量,  $g_t$  的变量最高次数不超过  $l-1$ , 对  $g_t$  应用归纳假设即得多项式  $g$ .  $\square$

**Corollary 2.17** ([2]). 设  $A$  是含么交换环  $K$  上最小次数为  $d$  的 PI 代数, 那么存在  $d$  次首一多重线性多项式  $g(x_1, \dots, x_d) \in K\langle x_1, \dots, x_d \rangle$  使得  $g$  是  $A$  的一个多项式等式.

**Example 2.18.** 如果  $K$ -代数  $A$  交换, 那么  $A$  是  $K$  上最小次数为 2 的 PI 代数 (满足  $xy - yx \in \mathbb{Z}\langle x, y \rangle$ ). 如果  $K$ -代数  $A$  满足  $k \cdot 1_A \neq 0, \forall k \neq 0 \in K$ , 那么当  $A$  的最小次数是 2 时,  $A$  一定交换: 这时由 [定理2.16] 知存在  $k \in K$  使得  $A$  满足  $xy + kyx$ . 命  $x = y = 1_A$  便知  $(1+k)1_A = 0$ , 这迫使  $k = -1$ , 所以  $A$  是交换代数.

**Corollary 2.19** (PI 代数的中心扩张仍 PI, [2]). 如果  $K$ -代数  $B$  有子代数  $A$  满足  $B$  作为  $Z(B)$ -模有个生成元集是  $A$  (或等价地,  $A \cup Z(B)$  是  $B$  作为  $K$ -代数的一个生成元集), 则称  $B$  是  $A$  的**中心扩张**. 例如任意多个未定元的多项式环  $A[\{x_i\}_{i \in I}]$  (这里  $\{x_i\}_{i \in I}$  是  $A$  上以  $I$  为指标集的未定元集) 是  $A$  的中心扩张 (因为  $\{x_i\}_{i \in I}$  在多项式环  $A[\{x_i\}_{i \in I}]$  的中心里). 如果  $K$ -代数  $A$  是 PI 代数, 那么  $A$  的中心扩张也是 PI 代数. 更进一步, PI 代数与它的中心扩张满足相同的多重线性多项式 (所以也有相同的最小次数). 特别地, PI 代数  $A$  上的多项式代数  $A[\{x_i\}_{i \in I}]$  也是 PI 的 (所以  $K$ -代数  $A$  是 PI 代数当且仅当  $A[x]$  是 PI 代数).

*Proof.* 设  $A$  是 PI 代数,  $B \supseteq A$  是中心扩张. 由 [定理2.16] 可得存在某个首一多重线性多项式  $f \in K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  使得  $f$  是  $A$  的多项式等式. 而  $B$  中元素均可由  $A$  中有限个元素  $Z(B)$ -线性表出, 因而由  $f$  的多重线性性得到  $f$  也是  $B$  的多项式等式. 反过来,  $A$  作为  $B$  的子代数当然满足  $B$  在  $K$  上的任何多项式等式, 所以  $A$  与  $B$  满足相同的多重线性多项式.  $\square$

下面我们来说明域上有限维代数是 PI 的, 结论上会做得更一般些. 先做一些准备.

**Lemma 2.20** ([2]). 设  $R$  为含么环,  $M$  是有限生成右  $R$ -模, 可由  $n$  个元素生成, 那么存在矩阵环  $M_n(R)$  的 (含么) 子环  $S$  与满环同态  $\varphi: S \rightarrow \text{End}(M_R)$ .

*Proof.* 因为有环同构  $M_n(R) \cong \text{End}(R^n)$ , 所以只需证明自同态环  $\text{End}(R^n)$  有含么子环  $S$  以及  $S$  到  $\text{End}(M_R)$  的满环同态即可. 设  $M$  有一个生成元集是  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 置  $\pi: R^n \rightarrow M$  为标准同态 (把  $R^n$  中的第  $i$  个标准单位列向量映至  $x_i$ ), 并令  $S = \{\alpha \in \text{End}(R^n) | \alpha(\text{Ker}\pi) \subseteq \text{Ker}\pi\}$ , 那么  $S$  明显是  $\text{End}(R^n)$  的含么子环. 易

见对任给  $\alpha \in S$ , 存在唯一的模同态  $\alpha' \in \text{End}(M_R)$  使得  $\pi\alpha = \alpha'\pi$ , 即下图交换:

$$\begin{array}{ccc} R^n & \xrightarrow{\pi} & M \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ R^n & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

那么  $\varphi : S \rightarrow \text{End}(M_R), \alpha \mapsto \alpha'$  是定义合理的保么环同态. 只需验证  $\varphi$  是满射即可, 任取自同态  $f \in \text{End}(M_R)$ , 存在  $n$  阶矩阵  $A \in M_n(R)$  (未必唯一) 使得

$$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = (x_1, x_2, \dots, x_n)A,$$

通过矩阵  $A$  在  $R^n$  上的左乘可以导出  $R^n$  上的自同态  $\mathcal{A} : R^n \rightarrow R^n, v \mapsto Av$ , 可直接验证  $\mathcal{A} \in S$  且  $\varphi(\mathcal{A}) = f$ , 因此  $\varphi$  是满环同态.  $\square$

**Lemma 2.21** ([2]). 设  $R$  是含么环, 如果  $R$  作为  $Z(R)$ -模可由  $m$  个元素生成, 那么对任何正整数  $t \geq m+1$ ,  $R$  满足任何  $t$  次交错多重线性多项式 (例如  $s_t$ ). 特别地, 这时  $R$  是 PI 环.

*Proof.* 设  $R$  作为  $Z(R)$ -模有生成元集  $X = \{a_1, \dots, a_m\}$ , 根据 [注记2.6], 对任给  $t \geq m+1$  次交错多重线性多项式  $f$ , 有  $f(b_1, \dots, b_t) = 0, \forall b_1, \dots, b_t \in X$ . 再由  $f$  的多重线性性可得  $f$  是  $R$  的多项式等式.  $\square$

**Remark 2.22.** 因此  $R$  如果作为某个中心子环上的模是有限生成的, 则  $R$  是 PI 环.

**Example 2.23** (交换环上的矩阵环 PI, [2]). 设  $K$  是含么交换环,  $R = M_n(K)$  作为其中心上的模明显可以由  $n^2$  个基础矩阵  $E_{ij}$  生成, 所以  $R$  满足  $s_{n^2+1}$ , 特别地,  $R$  是 PI 环. 现在我们得到了  $M_n(K)$  是最小次数不超过  $n^2+1$  的 PI 环, 在证明完 Amitsur-Levitzki 定理过后, 我们将会看到  $M_n(K)$  的最小次数是  $2n$ .

**Proposition 2.24** ([2]). 设  $R$  是含么环,  $K$  是  $R$  的 (包含  $1_R$  的) 交换子环, 如果  $R$  是有限生成  $K$ -模, 则  $R$  是 PI 环. 特别地, 域上有限维代数作为环是 PI 环, 进而也是 PI 代数.

*Proof.* 设  $K$ -模  $R$  可由  $n$  个元素生成, 那么由 [引理2.20] 存在  $M_n(K)$  的含么子环  $S$  使得  $S$  到  $\text{End}(R_K)$  有满环同态, 所以由 [例2.23] 以及 [引理2.15] 可知  $\text{End}(R_K)$  是 PI 环. 而  $R$  到  $\text{End}(R_K)$  有嵌入:  $j : R \rightarrow \text{End}(R_K), a \mapsto a_l$ , 这里  $a_l$  是由元素  $a$  决定的左乘变换, 所以  $R$  是 PI 环.  $\square$

**Remark 2.25.** 与 [引理2.21] 不同的是这里交换子环  $K$  未必在  $Z(R)$  中, 该命题推广了 [引理2.21].

若含么交换环  $K$  上代数  $A$  是某个中心子代数  $Z$  上有限生成模, 称  $A$  是**模有限代数**. 从 [命题2.24] 中我们看到模有限代数都是 PI 代数. 下面介绍一个模有限代数类. 根据仿射代数几何中代数与几何的对应我们知道代数闭域上仿射簇范畴与交换仿射可约代数范畴间有标准的范畴对偶. 进而每个仿射簇在同构意义下都对应一个唯一的交换代数. 仿射空间  $\mathbb{k}^n$  对应多项式代数  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . 下面我们来看仿射空间的量子化, 单位根处的量子仿射空间也可以产生模有限代数. 首先是最简单的量子平面, 它来自俄罗斯数学家 Yuri Manin.

**Example 2.26** (量子平面, [1]). 设  $\mathbb{k}$  是域,  $q \in \mathbb{k}^*$ , 称  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2) = \mathbb{k}\langle x, y \rangle / (xy - qyx)$  为  $q$  处的**量子平面**. 如果  $q$  是  $m$  次单位根, 即  $q^m = 1$ . 那么  $\bar{x}^m, \bar{y}^m \in Z(\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2))$ , 这时  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  是中心子代数  $\mathbb{k}[\bar{x}^m, \bar{y}^m]$  上的有限生成模. 因此单位根处的量子平面是模有限仿射代数.

**Remark 2.27.** 设  $q \in \mathbb{k}^*$ , 则量子平面  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  作为  $\mathbb{k}$ -线性空间有基  $X = \{\bar{x}^i \bar{y}^j | i, j \in \mathbb{N}\}$ . 易见  $X$  可  $\mathbb{k}$ -线性张成  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$ . 要看到  $X$  的线性无关性, 如果存在有限个不全为零的元素  $c_{ij} \in \mathbb{k}$  使得  $\sum c_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j = 0$ , 那么存在  $\mathbb{k}\langle x, y \rangle$  中两两互异的非零多项式  $g_1, \dots, g_m, f_1, \dots, f_m$  使得  $\sum c_{ij} x^i y^j = \sum f_k(x, y)(xy - qyx)g_k(x, y)$ . 如果  $q = 1$  结论明显成立, 下设  $q \neq 1$ . 考察该式等号两边的最高次单项式便得矛盾. 因此  $X = \{\bar{x}^i \bar{y}^j | i, j \in \mathbb{N}\}$  是  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  作为线性空间的基. 下面我们利用 Ore 扩张的性质来说明量子平面是双边 Noether 整环. 首先回忆含么环  $R$  上关于一个给定环自同态  $\sigma : R \rightarrow R$  的加群同态  $\delta : R \rightarrow R$  被称为  $\sigma$ -导子, 如果  $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b, \forall a, b \in R$ . 在含么环  $R$  关于环自同态  $\sigma$  和  $\sigma$ -导子  $\delta$  的 Ore 扩张  $R[x; \sigma, \delta]$  中有  $xa = \sigma(a)x + \delta(a), \forall a \in R$ . 如果  $R$  是整环且  $\sigma$  是单射, 则  $R[x; \sigma, \delta]$  也是整环. 如果  $\sigma$  是满射且  $R$  是左 Noether 环 (那么  $\sigma$  是环自同构), 那么  $R[x; \sigma, \delta]$  也是左 Noether 环. 并且 Ore 扩张  $R[x; \sigma, \delta]$  满足下述泛性质: 对任给含么环  $S$ , 保么环同态  $\eta : R \rightarrow S$  以及满足  $y\eta(a) = \eta(\sigma(a)) + \eta(\delta(a)), \forall a \in R$  的元素  $y \in S$ , 总存在唯一的保么环自同态  $\bar{\eta} : R[x; \sigma, \delta] \rightarrow S$  使得  $\bar{\eta}(x) = y$  并且下图交换:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad} & R[x; \sigma, \delta] \\ & \searrow \eta & \swarrow \bar{\eta} \\ & S & \end{array}$$

现在取  $R = \mathbb{k}[x], \sigma : R \rightarrow R, f(x) \mapsto f(q^{-1}x), \delta = 0$  (易见  $\sigma$  是环自同构). 注意到在  $S = \mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  中总有  $\bar{y}x = q^{-1}x\bar{y}$ , 因此若置  $\eta : \mathbb{k}[x] \rightarrow \mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2), f(x) \mapsto f(\bar{x})$  是标准嵌入同态, 那么由  $\bar{y}\eta(f(x)) = \eta(\sigma(f(x)))\bar{y}$  知通过上述 Ore 扩张的泛性质存在唯一的保么环同态  $\bar{\eta} : \mathbb{k}[x][y; \sigma] \rightarrow \mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  使得  $\bar{\eta}(y) = \bar{y}$  并且  $\bar{\eta}(f(x)) = f(\bar{x}), \forall f(x) \in \mathbb{k}[x]$ . 由此可见  $\bar{\eta}$  一定是  $\mathbb{k}$ -代数同态, 它将  $\mathbb{k}[x][y; \sigma]$  的标准基映至量子平面的标准基, 故  $\bar{\eta}$  是代数同构. 上述讨论表明量子平面是域上一元多项式代数关于一个特殊代数自同构的 Ore 扩张. 特别地, 量子平面是整环并且是双边 Noether 环. 故单位根处量子平面是 Noether 仿射 PI 整环.

**Example 2.28** (量子仿射空间, [1]). 设  $\mathbb{k}$  是域,  $q = (q_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{k})$  满足下面的乘性反对称条件:

$$q_{ii} = 1, q_{ij}q_{ji} = 1, \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

称  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^n) = \mathbb{k}\langle x_1, \dots, x_n \rangle / (\{x_i x_j - q_{ij} x_j x_i | 1 \leq i, j \leq n\})$  为乘性反对称阵  $q$  处的 (多参数) 量子仿射  $n$ -空间. 这里要求矩阵  $q = (q_{ij})_{n \times n}$  是乘性反对称的原因是我们希望在  $x_i x_i = q_{ii} x_i x_i$  以及  $x_i x_j = q_{ij} q_{ji} x_j x_i$  的基础上排除  $x_i x_j = 0$  这种现象. 这迫使矩阵  $q$  的主对角线元素均为 1,  $(i, j)$  元与  $(j, i)$  元互为  $\mathbb{k}$  中乘法逆元. 如果  $q \in \mathbb{k}^*$ , 乘性反对称阵  $q = (q_{ij})_{n \times n}$  满足当  $i < j$  时有  $q_{ij} = q$ , 则记  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^n)$  为  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^n)$ , 称为  $q$  处 (单参数) 量子仿射  $n$ -空间. 由此可见量子平面是特殊的量子仿射 2-空间. 如果乘性反对称阵  $q$  满足每个元素都是单位根, 那么对每个  $1 \leq i \leq n$ , 存在正整数  $t_i$  使得  $\bar{x}_i^{t_i} \in Z(\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^n))$ . 因此存在正整数  $t$  使得  $\mathbb{k}[\bar{x}_1^t, \dots, \bar{x}_n^t] \subseteq Z(\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^n))$ . 由此可知元素均为单位根的乘性反对称阵处的  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^n)$  也是模有限代数.

类似于量子平面, Weyl 代数也是特殊的 Ore 扩张. 下面我们说明正特征的 Weyl 代数也是 PI 环.

**Example 2.29** (Weyl 代数, [2]). 固定域  $\mathbb{k}$ , 回忆  $n$  阶 Weyl 代数  $A_n(\mathbb{k})$  是由  $2n$  个生成元  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  和生成关系  $x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij}, x_i x_j - x_j x_i = y_i y_j - y_j y_i = 0$ , 这里  $1 \leq i, j \leq n$ , 定义出的  $\mathbb{k}$  仿射代数. Weyl 代数是量子力学中自然产生的非交换代数, 它也是仿射空间上的微分算子环. 当  $n = 1$  时, 将生成元写作  $x, y$ , 这时  $A_1(\mathbb{k}) = \mathbb{k}\langle x, y \rangle / (xy - yx - 1)$ . 考虑多项式代数  $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , 并作 Ore 扩张序列  $R_0 = R, R_1 = R_0[y_1; -\partial/\partial x_1], R_{i+1} = R_i[y_{i+1}; -\partial/\partial x_{i+1}]$ . 那么可直接验证  $R_n$  作为  $\mathbb{k}$ -代数由  $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$  生成并



且  $x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij}$ ,  $x_i x_j - x_j x_i = y_i y_j - y_j y_i = 0$ ,  $\forall 1 \leq i, j \leq n$ . 进而存在自然的代数同态  $\varphi: A_n(\mathbb{k}) \rightarrow R_n$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \rangle & \xrightarrow{\pi} & A_n(\mathbb{k}) \\ & \searrow & \swarrow \varphi \\ & R_n & \end{array}$$

易见  $\varphi$  是满射, 结合  $R_n$  作为  $\mathbb{k}$ -线性空间有基  $\{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} | k_1, \dots, k_n, j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}\}$  可知  $\varphi$  是单射. 因此我们得到  $\mathbb{k}$ -代数同构  $R_n \cong A_n(\mathbb{k})$ . 由 Ore 扩张的性质立即得到  $A_n(\mathbb{k})$  是双边 Noether 整区. 注意到 Weyl 代数有左理想降链  $A_n(\mathbb{k})y_n \supsetneq A_n(\mathbb{k})y_n^2 \supsetneq A_n(\mathbb{k})y_n^3 \supsetneq \cdots$  和右理想降链  $x_1 A_n(\mathbb{k}) \supsetneq x_1^2 A_n(\mathbb{k}) \supsetneq x_1^3 A_n(\mathbb{k}) \supsetneq \cdots$ . 所以 Weyl 代数既不是左 Artin 环也不是右 Artin 环. 可直接计算对任何  $f \in A_n(\mathbb{k})$  有

$$x_i f - f x_i = \partial f / \partial y_i, y_i f - f y_i = -\partial f / \partial x_i, \forall 1 \leq i \leq n.$$

由此可知当  $\text{char } \mathbb{k} = 0$  时, 任何  $Z(A_n(\mathbb{k})) = \mathbb{k}$ , 所以这时  $A_n(\mathbb{k})$  是无限维代数. 并且利用上式容易验证特征零的 Weyl 代数任何非零理想是整个代数, 这说明此时 Weyl 代数是双边 Noether 单整区. 之后我们将用 Kaplansky 定理 (见 [定理2.67]) 说明特征零的 Weyl 代数不是 PI 环. 下面我们考虑正特征的域上的 Weyl 代数, 设  $\text{char } \mathbb{k} = p$  为素数, 那么明显有  $x_i^p, y_i^p \in Z(A_n(\mathbb{k}))$ , 所以  $\mathbb{k}[x_1^p, \dots, x_n^p, y_1^p, \dots, y_n^p] \subseteq Z(A_n(\mathbb{k}))$ . 由此可知  $x_1^p A_n(\mathbb{k})$  是  $A_n(\mathbb{k})$  的非平凡理想, 因此正特征的 Weyl 代数不是单环. 对任给  $f \in Z(A_n(\mathbb{k}))$ , 由  $f$  关于每个变量的偏导数是零立即得到  $f \in \mathbb{k}[x_1^p, \dots, x_n^p, y_1^p, \dots, y_n^p]$ . 因此  $Z(A_n(\mathbb{k})) = \mathbb{k}[x_1^p, \dots, x_n^p, y_1^p, \dots, y_n^p]$ . 容易验证  $A_n(\mathbb{k})$  作为中心上的模可由  $\mathcal{B} = \{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} | 0 \leq k_1, \dots, k_n, j_1, \dots, j_n \leq p-1\}$  生成并且  $\mathcal{B}$  是  $Z(A_n(\mathbb{k}))$ -线性无关的, 即  $A_n(\mathbb{k})$  是中心上秩为  $p^{2n}$  的自由模. 特别地,  $A_n(\mathbb{k})$  是模有限代数.

为了之后引用方便, 我们记录下述公式.

**Lemma 2.30** ([2]). 任给正整数  $m$ , 有  $s_{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} x_i s_m(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+1})$ . 特别地, 如果一个 PI 代数  $A$  满足标准等式  $s_m$ , 那么  $A$  也满足  $s_t, \forall t \geq m$ .

**证明:** 记  $N(k_1, k_2, \dots, k_m)$  表示由  $m$  个正整数构成的排列  $k_1, k_2, \dots, k_m$  的逆序数, 那么对任何置换  $\sigma \in S_n$ , 有  $(-1)^{N(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))} = \text{sgn } \sigma$ . 于是

$$s_{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = \sum_{\sigma \in S_{m+1}} \text{sgn } \sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m+1)} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{\sigma(1)=i} \text{sgn } \sigma x_i x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m+1)}.$$

每项  $\text{sgn } \sigma x_i x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m+1)} = (-1)^{i-1} x_i (-1)^{N(\sigma(2), \dots, \sigma(n))} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m+1)}$ , 所以

$$s_{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} x_i \sum_{\sigma(1)=i} (-1)^{N(\sigma(2), \dots, \sigma(n))} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m+1)}.$$

上式右端就是  $\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} x_i s_m(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+1})$ . □

任何仿射交换代数都可以写成某个有限个变量的多项式代数的同态像, 下面在 PI 代数场景作类似讨论.

**Definition 2.31** (T-理想, [2]). 设  $K$  是含么交换环, 如果自由代数  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  的理想  $H$  满足对  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  上任何  $K$ -代数自同态  $\varphi$  有  $\varphi(H) \subseteq H$ , 则称  $H$  是 **T-理想**.

**Proposition 2.32** ([2]). 设  $A$  是含么交换环  $K$  上的 PI 代数, 那么  $A$  在  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  中所有的多项式等式构成的集合  $\mathcal{J}$  是  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  的一个  $T$ -理想, 并且  $\mathcal{J}$  就是所有  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  到  $A$  的代数同态的核之交.

*Proof.* 首先不难看出  $\mathcal{J}$  是  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  的理想. 任取  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  上代数自同态  $\varphi$  以及  $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{J}$ , 则有  $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ , 由此不难看出  $\varphi(f)$  也是  $A$  的多项式等式, 即  $\varphi(f) \in \mathcal{J}$ . 下面验证  $\mathcal{J}$  是所有  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  到  $A$  的代数同态的核之交. 因为任意取定  $A$  的有限多个元素都可以诱导出自由代数到  $A$  的赋值同态, 所以  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  到  $A$  的全体代数同态之交是  $A$  的多项式等式. 反之, 任取  $A$  的多项式等式  $f(x_1, \dots, x_n)$ , 对每个  $K$ -代数同态  $\varphi: K\langle x_1, x_2, \dots \rangle \rightarrow A$ , 记  $\varphi(x_i)$  为  $a_i (i \geq 1)$ . 那么  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , 即  $\varphi(f) = 0$ . 所以  $\mathcal{J}$  中元素均在所有  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  到  $A$  的代数同态的核之交中.  $\square$

根据  $T$ -理想的定义以及自由代数的子集诱导的赋值映射是代数自同态可知

**Proposition 2.33** ([2]). 设  $K$  是含么交换环, 真理想  $H$  是  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  的  $T$ -理想, 那么任何  $H$  中元素是  $K$ -代数  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle/H$  的多项式等式. 特别地, 当  $H$  包含一个首一多项式时,  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle/H$  是 PI 代数.

设  $A$  是交换环  $K$  上的 PI 代数, 如果  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  的真  $T$ -理想  $H$  中的元素都是  $A$  满足的多项式等式 ([命题2.32] 表明这样的  $T$ -理想存在), 那么有下述泛性质成立: 对任给映射  $\eta: \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow A$ , 存在唯一的  $K$ -代数同态  $\bar{\eta}: K\langle x_1, x_2, \dots \rangle/H \rightarrow A$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \{x_i\}_{i=1}^{\infty} & \xrightarrow{\iota} & K\langle x_1, x_2, \dots \rangle/H \\ & \searrow \eta & \downarrow \bar{\eta} \\ & & A \end{array}$$

其中  $\iota: \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow K\langle x_1, x_2, \dots \rangle/H$  是标准映射 (因为  $A$  不是零环, 所以  $\iota$  是单射). 如果  $A$  是仿射  $K$ -代数, 那么我们可以适当选取  $\eta$  使得  $\bar{\eta}$  成为满射. 最后记录 PI 代数的稳定多项式等式和基本性质来结束本节.

**Definition 2.34** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$  是 PI 代数,  $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  是  $A$  的多项式等式. 如果对任何  $K$ -交换代数  $L$  都有  $f(x_1, \dots, x_n)$  是  $A \otimes_K L$  的多项式等式, 则称  $f(x_1, \dots, x_n)$  是稳定的.

**Proposition 2.35** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$  是 PI 代数,  $\mathcal{I}$  是  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  中所有稳定多项式等式构成的集合, 则:

- (1)  $\mathcal{I}$  是  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  的  $T$ -理想.
- (2)  $\mathcal{I}$  包含  $A$  在  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  中所有的交错线性多项式等式.
- (3) 赋予  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  标准分次后,  $\mathcal{I}$  是分次理想.
- (4)  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle/\mathcal{I}$  满足  $\mathcal{I}$  中所有多项式等式.

*Proof.* 类似于 [命题2.32] 容易验证  $\mathcal{I}$  是  $T$ -理想, 并且明显是  $K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  的真理想, 因此 (1) 成立. 对任何  $K$ -交换代数  $L$ , 如果  $A$  满足交错多重线性多项式  $g(x_1, \dots, x_m)$ , 那么对  $A \otimes_K L$  中任意  $m$  个形如  $a \otimes \ell$  的元素, 有  $g(a_1 \otimes \ell_1, \dots, a_m \otimes \ell_m) = g(a_1, \dots, a_m) \otimes (\ell_1 \cdots \ell_m) = 0$ . 结合  $g$  的多重线性性便知  $g$  也是  $A \otimes_K L$  的多项式等式, 这证明了 (2). 现在证明 (3), 为此只需说明  $\mathcal{I}$  中任何多项式  $f$  如果作齐次元分解  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_t$  (这里每个  $f_k$  是  $k$  次齐次非交换多项式), 那么每个  $f_k \in \mathcal{I}$ . 由  $f$  的稳定性, 对每个  $K$ -交换代数  $L$ ,  $f$  也是  $A \otimes_K L[x] \cong (A \otimes_K L)[x]$  的多项式等式. 设  $f = f(x_1, \dots, x_s)$ , 则对任给  $T_1, \dots, T_s \in A \otimes_K L$ , 有  $f(T_1 x, T_2 x, \dots, T_s x) = \sum_{i=0}^t f_i(T_1, \dots, T_s) x^i = 0$ . 这说明每个  $f_i$  是  $A \otimes_K L$  的多项式等式, 于是  $f_i \in \mathcal{I}$ . 这证明了 (3). (1) 中已经说明  $\mathcal{I}$  是  $T$ -理想, 所以应用 [命题2.33] 便得 (4).  $\square$

## 2.2 Amitsur-Levitzki 定理

在 [例2.23] 中我们看到, 含么交换环  $K$  上的  $n$  阶矩阵环  $M_n(K)$  满足标准等式  $s_{n^2+1}$ , 进而知道  $M_n(K)$  的最小次数不超过  $n^2 + 1$ . 这节的目标是证明 Amitsur-Levitzki 定理——矩阵环  $M_n(K)$  满足  $s_{2n}$ , 并说明  $M_n(K)$  的最小次数就是  $2n$ . 本节的含么交换环默认有非零的么元.

**Theorem 2.36** (Amitsur-Levitzki, [3]). 设  $K$  是含么交换环, 那么矩阵环  $R = M_n(K)$  满足  $s_{2n}$ .

*Proof.* 只要证明任给  $A_1, A_2, \dots, A_{2n} \in R$  有  $\sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn} \sigma A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n)} = O$  即可. 该等式左边的矩阵每个元素都是关于  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  元素的整系数多元多项式, 因此我们只需要证明  $K = \mathbb{C}$  的情形就以足够 (利用整系数  $m$  元多项式如果作为  $\mathbb{C}^m$  上复值函数恒为零, 则该多项式必为零多项式). 现设  $R = M_n(\mathbb{C})$ ,  $V$  是  $2n$  维复线性空间, 有基  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$ , 证明分为下面两步.

**Step1.** 设  $E(V)$  是  $V$  决定的外代数, 考虑  $\alpha = \sum_{i=1}^{2n} A_i \otimes v_i \in R \otimes_{\mathbb{C}} E(V)$ , 直接的计算表明对每个正整数  $1 \leq r \leq 2n$ , 有  $\alpha^r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq 2n} s_r(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}) \otimes (v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_r})$ . 置  $\beta = \alpha^2$ , 那么  $\beta^n = s_{2n}(A_1, A_2, \dots, A_{2n}) \otimes (v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{2n})$ . 故要证  $s_{2n}(A_1, A_2, \dots, A_{2n}) = O$ , 只要证  $\beta^n = 0$ .

**Step2.** 记  $E(V)$  所有偶数指标分次直和构成的子代数是  $L$ , 即  $L = E^{(0)}(V) \oplus E^{(2)}(V) \oplus \cdots \oplus E^{(2n)}(V)$ , 那么  $L$  是交换代数且  $\beta, \beta^2, \dots, \beta^n \in R \otimes_{\mathbb{C}} L$ . 记  $\Phi : R \otimes_{\mathbb{C}} L \rightarrow M_n(L)$  是标准  $\mathbb{C}$ -代数同构, 利用下面的 [引理2.38] 立即得到  $\Phi(\beta), \Phi(\beta^2) = \Phi(\beta)^2, \dots, \Phi(\beta^n) = \Phi(\beta)^n$  都是迹为零的矩阵 (注意对迹零复矩阵  $A$  与  $c \in L$ ,  $\Phi(A \otimes c)$  也迹零), 再由下面的 [推论2.41] 马上得到  $\Phi(\beta)^n = O$ , 从而  $\beta^n = 0$ .  $\square$

**Remark 2.37.** 根据 [引理2.30], 我们立即得到  $M_n(K)$  满足  $s_t, \forall t \geq 2n$ .

**Lemma 2.38** ([3]). 设  $R$  是含么交换环,  $A_1, A_2, \dots, A_{2r} \in M_n(R)$  是偶数个方阵, 则

$$\text{tr}(s_{2r}(A_1, A_2, \dots, A_{2r})) = \text{tr} \left( \sum_{\sigma \in S_{2r}} \text{sgn} \sigma A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2r)} \right) = 0.$$

*Proof.* 因为  $2r$  是偶数所以轮换  $(123 \cdots 2r) \in S_{2r}$  是奇置换. 我们把矩阵和式分成偶置换求和与奇置换求和两部分:

$$\sum_{\sigma \in S_{2r}} \text{sgn} \sigma A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(2r)} = \sum_{\sigma \in A_{2r}} \text{sgn} \sigma A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(2r)} + \sum_{\sigma \in A_{2r}} \text{sgn} \sigma (123 \cdots 2r) A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2r)} A_{\sigma(1)}.$$

由  $\text{sgn} \sigma (123 \cdots 2r) = -\text{sgn} \sigma$  以及矩阵  $A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(2r)}$  和  $A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2r)} A_{\sigma(1)}$  的迹相同即得.  $\square$

线性代数中我们熟知代数闭域  $F$  上的  $n$  阶方阵  $A$ , 如果  $\text{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, \dots, n$ , 那么  $A^n = O$ . 我们在 Amitsur-Levitzki 定理的证明细节中所需要的工具是对任何复数域上的交换代数  $L$ , 如果矩阵  $A \in M_n(L)$ , 只要  $\text{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, \dots, n$ , 也会有  $A^n = O$  成立. 下面的引理就是为了证明这一事实.

**Lemma 2.39** ([19]). 设  $R$  是含么交换环,  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(R)$ , 设  $B(x) = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1x + B_0 (B_j \in M_n(R))$  是  $xI_n - A$  在  $M_n(R[x])$  中的伴随矩阵,  $f(x) = \det(xI_n - A)$  是  $A$  的特征多项式, 则:

(1) (Cayley-Hamilton)  $f(A) = O$ .

(2) 当  $n \geq 2$  时, 若记  $A_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式, 则  $A_{ij} = \sum_{\sigma(i)=j} \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)}$ .

(3) 如果  $L$  是含么交换环  $K$  上的交换代数, 那么对  $L$  上的  $K$ -导子  $\delta: L \rightarrow L$ , 对任给  $C = (c_{ij})_{n \times n} \in M_n(L)$  的伴随矩阵  $C^*$ , 有  $\delta(\det C) = \text{tr}((\delta(c_{ij}))_{n \times n} \cdot C^*)$ .

(4)  $\frac{d}{dx} f(x) = \text{tr}(B(x))$ .

(5) 设  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ , 那么特征多项式的系数满足

$$\text{tr}(B_k) = (k+1)a_{k+1}, 0 \leq k \leq n-1,$$

其中  $a_n = 1$ .

*Proof.* (1) 因为  $B(x)$  是  $xI_n - A$  的伴随矩阵, 所以  $B(x)(xI_n - A) = f(x)I_n$ , 于是

$$B_{n-1}x^n + (B_{n-2} - B_{n-1}A)x^{n-1} + \cdots + (B_2 - B_1A)x^2 + (B_0 - B_1A)x - B_0A = f(x)I_n.$$

对比系数可得  $B_{n-1} = I_n, B_{n-2} - B_{n-1}A = a_{n-1}I_n, \dots, B_0 - B_1A = a_1I_n, -B_0A = a_0I_n$ . 所以

$$f(A) = A^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = A^n + \sum_{i=1}^{n-1} (B_{i-1} - B_i A) A^i + (-B_0 A) = O.$$

(2) 这可以由代数余子式的定义展开整理得到, 也可以使用下面的处理方式: 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为  $R$  上未定元,  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  是  $n$  元多项式, 对固定的正整数  $i$ , 作  $M_n(R[x_1, x_2, \dots, x_n])$  中矩阵

$$C(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

这里行向量  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在第  $i$  行. 将上面的矩阵行列数按组合展开可得它的行列式为

$$\det[C(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{\sigma(i)=j} \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)} \right) x_j,$$

同时, 将  $\det[C(x_1, x_2, \dots, x_n)]$  按第  $i$  行展开可得  $\sum_{l=1}^n A_{il} x_l = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{\sigma(i)=l} \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)} \right) x_l$ , 再比较该式  $x_j$  的系数即得.

(3) 直接计算知

$$\delta(\det C) = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=1}^n \delta(a_{k\sigma(k)}) \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma(k)=j} \delta(a_{kj}) \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \delta(a_{kj}) \left( \sum_{\sigma(k)=j} \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)} \right),$$

而  $\sum_{j=1}^n \delta(a_{kj}) \left( \sum_{\sigma(k)=j} \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)} \right)$  就是矩阵  $(\delta(c_{ij}))_{n \times n} \cdot C^*$  的  $k$  行  $k$  列元素, 故结论成立.

(4) 对  $R$ -交换代数  $R[x]$ , 求导算子  $\frac{d}{dx}: R[x] \rightarrow R[x]$  是  $R$ -导子, 所以对  $M_n(R[x])$  中矩阵  $xI_n - A$  应用 (3) 的结果, 我们得到  $\frac{d}{dx} f(x) = \text{tr}(I_n \cdot B(x)) = \text{tr}(B(x))$ .

对特征多项式  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$  作用求导算子  $\frac{d}{dx}$  并应用 (4), 我们得到

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = \text{tr}(B(x)) = \text{tr}(B_{n-1})x^{n-1} + \text{tr}(B_{n-2})x^{n-2} + \cdots + \text{tr}(B_1)x + \text{tr}(B_0).$$

再比较上式  $x^i (0 \leq i \leq n-1)$  的 (矩阵) 系数即得. □

**Proposition 2.40** (特征多项式系数刻画, [19]). 设  $R$  是含么交换环,  $A \in M_n(R)$ , 并设  $A$  的特征多项式为  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ , 那么对任给正整数  $1 \leq k \leq n$ , 有  $ka_{n-k} + \sum_{i=1}^k \text{tr}(A^i)a_{n-k+i} = 0$ . 特别地, 如果  $\text{tr}(A^i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 那么  $ka_{n-k} = 0, \forall 1 \leq k \leq n$ .

*Proof.* 设  $B(x) = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1x + B_0 (B_j \in M_n(R))$  是  $xI_n - A$  在  $M_n(R[x])$  中的伴随矩阵, 则  $B_{n-1} = I_n, B_{n-2} - B_{n-1}A = a_{n-1}I_n, \dots, B_0 - B_1A = a_1I_n, -B_0A = a_0I_n$ . 归纳地, 易知对每个  $0 \leq k \leq n-1$ , 有  $B_k = A^{n-1-k} + a_{n-1}A^{n-2-k} + \cdots + a_{k+2}A + a_{k+1}I_n$ , 两边取迹并应用 [引理2.39(5)] 即得.  $\square$

**Corollary 2.41** ([3]). 设  $L$  是  $\mathbb{C}$ -交换代数, 如果矩阵  $A \in M_n(L)$  满足  $\text{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, \dots, n$ , 那么  $A^n = O$ .

*Proof.* 由 [命题2.40],  $A$  的特征多项式  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$  满足  $ka_{n-k} = 0, \forall 1 \leq k \leq n$ . 因为对复数域上的代数而言,  $k1_L (1 \leq k \leq n)$  是  $L$  中可逆元, 所以  $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ , 那么  $f(x) = x^n$ . 于是, 由 Cayley-Hamilton 定理即得结果.  $\square$

**Proposition 2.42.** 设  $K$  是含么交换环,  $A$  是  $K$ -代数, 则不存在正整数  $t \leq 2n-1$  使得  $M_n(A)$  满足某个  $K$  上  $t$  次首一多项式, 即  $M_n(A)$  不满足任何次数严格低于  $2n$  的首一多项式. 特别地,  $M_n(A)$  的最小次数是  $2n$ .

*Proof.* 若不然, 由 [定理2.16], 存在  $t(\leq 2n-1)$  次首一多重线性多项式  $f(x_1, x_2, \dots, x_t) \in K\langle x_1, x_2, \dots, x_t \rangle$  使得  $f$  是  $M_n(A)$  的一个多项式等式, 不妨设  $x_1x_2 \cdots x_t$  的系数是 1, 即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_t) = x_1x_2 \cdots x_t + \sum_{\sigma \neq (1) \in S_t} a_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(t)},$$

取  $A_1, A_2, \dots, A_t$  为下述  $2n-1$  个基本矩阵中的前  $t$  个:

$$E_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{23}, E_{33}, \dots, E_{n-1, n-1}, E_{n-1, n}, E_{nn}.$$

则  $f(A_1, A_2, \dots, A_t) \neq O$ , 得到矛盾.  $\square$

**Example 2.43.** 固定正整数  $n$ , 考虑  $M_2(\mathbb{Z})$  的子环

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

那么  $R$  是最小次数为 4 的素 PI 环.

*Proof.* 根据 Amitsur-Levitzki 定理,  $R$  满足  $s_4$ , 因此  $R$  的最小次数不超过 4. 假设  $R$  的最小次数  $t$  严格小于 4, 那么 [定理2.16] 表明存在  $t(\leq 3)$  次首一多重线性多项式  $f(x_1, x_2, \dots, x_t) \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_t \rangle$  使得  $f$  是  $R$  的一个多项式等式. 同样可不妨设  $x_1x_2 \cdots x_t$  的系数是 1, 即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_t) = x_1x_2 \cdots x_t + \sum_{\sigma \neq (1) \in S_t} a_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(t)},$$

取  $A_1, \dots, A_t$  为  $E_{11}, nE_{12}, E_{22}$  这三个矩阵中的前  $t$  个便有  $f(A_1, A_2, \dots, A_t) \neq O$ , 得到矛盾. 因此  $R$  的最小次数是 4. 要看到零理想是  $R$  的素理想, 只需注意到  $R$  的任何非零理想  $I$  满足存在正整数  $a$  使得

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I.$$



假设存在  $R$  的理想  $I, J$  使得  $IJ = 0$  但  $I, J \neq 0$ , 则存在正整数  $a, b$  使得

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J.$$

由此得到  $IJ \neq 0$ , 矛盾. 因此  $R$  是素环. □

**Remark 2.44.** 如果  $n = p$  是素数, 那么

$$P = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

是  $R$  的极大理想, 原因是  $R/P \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  是域. 此时  $R/P$  作为 PI 环的最小次数是 2.

## 2.3 Köthe 猜想

本节先介绍 Köthe 猜想, 再说明它在 PI 环层面是成立的, 并且我们将看到半素 PI 代数不存在非零诣零理想. 这节中  $K$  指含么交换环, 考虑的所有环默认是非零环.

Gottfried Köthe(奥地利数学家, 1905-1989) 于 1930 年提出下述猜想:

**Conjecture 2.45** (Köthe 猜想). 如果含么环  $R$  没有非零诣零理想, 那么  $R$  没有非零诣零单边理想.

**Remark 2.46.** 容易证明一个含么环存在非零诣零左理想当且仅当存在非零诣零右理想. 目前上述猜想还是非交换环论领域的公开问题.

**Theorem 2.47** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$ (未必有  $1_A$ ) 是 PI 代数, 若  $A$  有非零诣零右理想, 则  $A$  有非零幂零理想.

*Proof.* 设  $m$  是 PI 代数  $A$  的最小次数, 那么由  $A \neq 0$  知  $m \geq 2$ , 我们对  $m \geq 2$  作归纳证明结论. 当  $m = 2$  时, 由 [定理2.16],  $A$  满足  $K$  上某个 2 次首一多重线性多项式, 所以存在  $k \in K$  使得  $ab = kba, \forall a, b \in A$ . 设  $A$  的非零诣零右理想为  $J$ , 那么存在  $b \neq 0 \in J$  使得  $b^2 = 0$ . 那么  $I = bA + Kb$  是  $A$  的非零幂零右理想, 从  $I$  出发构造  $AI + I$  便得到  $A$  的一个非零幂零理想. 所以当  $m = 2$  时, 结论成立.

现假设结论对最小次数不超过  $m - 1 (m \geq 3)$  的 PI 代数成立, 现在考虑最小次数为  $m$  的 PI 代数的情形. 设  $A$  满足  $m$  次首一多重线性多项式  $g(x_1, \dots, x_m) \in K\langle x_1, \dots, x_m \rangle$  并设字  $x_1 x_2 \cdots x_m$  的系数是 1, 那么存在  $m - 1$  次首一多重线性多项式  $g_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \in K\langle x_1, \dots, x_{m-1} \rangle$  以及多重线性多项式  $g_2(x_1, \dots, x_m) \in K\langle x_1, \dots, x_m \rangle$  使得  $g(x_1, \dots, x_m) = g_1(x_1, \dots, x_{m-1})x_m + g_2(x_1, \dots, x_m)$  (将所有不以  $x_m$  结尾的单项式之和记为  $g_2$ ). 设  $J$  是  $A$  的非零诣零右理想, 取  $b \neq 0 \in J$  使得  $b^2 = 0$ , 则  $bA \subseteq J$ . 如果  $bA = 0$ , 那么  $Kb$  是  $A$  的非零幂零右理想, 于是  $A$  有非零幂零理想, 下面我们设  $bA \neq 0$ . 对任给  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1} \in A$ , 明显有  $g_2(ba_1, ba_2, \dots, ba_{m-1}, b) = 0$ , 所以对任给  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1} \in A$  有  $g_1(ba_1, ba_2, \dots, ba_{m-1})b = 0$ . 置  $W = \{a \in bA \mid abA = 0\}$ , 那么  $W$  是  $K$ -代数  $bA$ (未必有么元) 的非零理想 (因为  $W$  含  $b$ ) 且  $W^2 = 0$ . 如果  $bA = W$ , 那么  $(bA)^2 = W^2 = 0$  表明  $bA$  是  $A$  的非零幂零右理想, 于是  $A$  也有非零幂零理想. 下设  $W \subsetneq bA$ , 那么商代数  $bA/W \neq 0$  且满足  $m - 1$  次首一多重线性多项式  $g_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ , 它自身就是自己的非零诣零右理想, 所以对代数  $bA/W$  应用归纳假设知  $bA/W$  存在非零幂零理想  $\hat{I}$ , 不妨设  $\hat{I}^2 = 0$ , 由理想对应定理, 存在  $bA$  的理想  $I \supsetneq W$  使得  $I/W = \hat{I}$ , 那么  $I^2 \subseteq W$ . 现在说明  $IbA$  是  $A$  的一个非零幂零右理想, 一旦验证完该断言立即得到  $A$  有非零幂零理想. 因为  $I \not\subseteq W$ , 所以  $IbA \neq 0$ . 并注意到  $(IbA)^2 = IbAIbA \subseteq I^2bA \subseteq WbA = 0$ , 这说明  $IbA$  是  $A$  的一个非零幂零右理想, 由此得到  $A$  有非零幂零理想. □

**Corollary 2.48** ([2]). 如果 PI 代数  $A$  没有非零诣零理想, 那么  $A$  也没有非零诣零单边理想. 特别地, Köthe 猜想对 PI 环成立.

**Corollary 2.49** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$  是半素 PI 的, 那么  $A$  不存在非零诣零单边理想.

证明: 由  $A$  半素等价于  $A$  没有非零幂零理想即得. □

## 2.4 Formanek 中心多项式

E. Formanek 在文献 [14] 中对域  $K$  上矩阵环  $M_n(K)$ , 构造了某个整系数多项式  $F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  使得它的常数项是零且对任给  $n+1$  个矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ , 有  $F_n(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$  是纯量矩阵, 并存在某组矩阵  $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$  代入  $F_n$  后得到的矩阵  $F_n(B_1, B_2, \dots, B_{n+1})$  的非零矩阵. 本节我们的主要目标就是验证 Formanek 所构造出的多项式  $F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  确实是域上矩阵环的中心多项式 (见 [定理2.53]), 它将用于 Posner 定理证明的准备工作中. 以下固定含么交换环  $K$ .

**Definition 2.50** (中心多项式, [4]). 设  $A$  是  $K$ -代数, 如果  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  满足:

- (1) 对任给  $r_1, r_2, \dots, r_n \in A$  有  $f(r_1, r_2, \dots, r_n) \in Z(A)$ ;
- (2) 存在  $r_1, r_2, \dots, r_n \in A$  使得  $f(r_1, r_2, \dots, r_n) \neq 0$ ;
- (3)  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的常数项为零,

则称  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $A$  的一个中心多项式.

在正式验证 Formanek 构造的多项式是中心多项式前, 先做一些准备. 若  $f, g$  是域  $K$  上多项式, 次数分别设为  $n, m \geq 1$ :  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m, a_0, b_0 \neq 0 \in K$ . 记  $f$  与  $g$  的结式为:

$$\text{Res}(f, g) \triangleq \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{m-1} & b_m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

在线性代数中我们熟知对域  $K$  上次数不低于 1 的多项式  $f, g$ , 它们在  $K$  的代数闭包  $\bar{K}$  上有公共零点的充要条件是  $\text{Res}(f, g) = 0$ . 应用结式可以证明下面的引理.

**Lemma 2.51** ([4]). 设  $R$  为含么环,  $R[x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn}]$  是  $R$  上  $n^2$  元多项式环, 称以  $x_{ij}$  为元素的矩阵  $(x_{ij})_{n \times n} \in M_n(R[x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn}])$  为  $R$  上泛矩阵. 现设  $A = (x_{ij})_{n \times n}$  是域  $K$  上泛矩阵, 域  $K(x_{ij}) = K(x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn})$  的代数闭包是  $E = \overline{K(x_{ij})}$ . 那么泛矩阵  $A = (x_{ij})_{n \times n}$  在  $M_n(E)$  中可对角化.

*Proof.* 我们断言  $A$  的特征多项式  $f(x) = \det(xI_n - A) \in K[x_{ij}][x]$  在  $E$  上没有重根, 一旦证明这一点立即得到  $A$  在  $E$  上可对角化. 若不然, 考虑  $f$  的形式导数  $f'$ , 那么  $f'$  与  $f$  作为  $K(x_{ij})[x]$  中多项式不互素, 这说明  $f'$  不可能是  $K(x_{ij})[x]$  中的零次多项式 (非零常数), 于是  $f' = 0$  或  $f'$  是  $K[x_{ij}][x]$  中次数不低于 1 的多项式. 现设  $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn} \in E$  是使得  $(a_{ij})_{n \times n}$  (即把  $a_{ij}$  代入  $x_{ij}$ ) 特征值互异的  $n^2$  个元素 (明显这样的元素组总存在), 记  $\text{ev} : K[x_{ij}][x] \rightarrow E[x]$  是标准映射 (把  $a_{ij}$  代入  $x_{ij}$ ), 那么  $\text{ev}$  是保么环同态, 于是知矩阵  $(a_{ij})_{n \times n}$  的特征多项式就是  $\text{ev}(f(x))$ , 它特征多项式关于未定元  $x$  的形式导数就是  $\text{ev}(f'(x))$ . 当  $f' = 0$  时,  $\text{ev}(f(x))$  与  $\text{ev}(f'(x))$  是  $E[x]$  中不互素的多项式, 所以矩阵  $(a_{ij})_{n \times n}$  的特征多项式在  $E$  中有重根, 这与  $a_{ij}$  的选取矛盾. 如果  $f'$  是  $K[x_{ij}][x]$  中次数不低于 1 的多项式, 那么  $f, f'$  作为  $K(x_{ij})[x]$  中的多项式结式为 0:  $\text{Res}(f, f') = 0 \in K[x_{ij}]$ , 于是  $\text{ev}(\text{Res}(f, f')) = \text{Res}(\text{ev}(f), \text{ev}(f')) = 0 \in E$ , 这说明  $(a_{ij})_{n \times n}$  的特征多项式与其形式导数在  $E$  中有公共零点, 即  $(a_{ij})_{n \times n}$  的特征多项式在  $E$  中有重根, 这与  $a_{ij}$  的选取矛盾. 故  $f$  在  $E$  上没有重根.  $\square$

设  $f(x) \in K[x]$  是域  $K$  上的非零多项式, 如果  $f$  在  $K$  的代数闭包  $\bar{K}$  中没有重根, 则称  $f$  是**可分多项式**. 我们在线性代数中熟知代数闭域  $F$  上的  $n$  阶方阵  $A$  可对角化当且仅当  $A$  在  $F$  上有一个没有重根的首一零化多项式. 特别地, 域  $K$  上的方阵  $A$  如果特征多项式是  $K$  上可分多项式, 那么  $A$  在  $A$  在  $\bar{K}$  上可对角化. 在给出 Formanek 多项式的构造前, 再做最后一个准备.

**Lemma 2.52.** 给定域  $K$  与正整数  $n$ , 则存在  $n$  阶矩阵  $A \in M_n(K)$ , 使得  $A$  的特征多项式是  $K$  上可分多项式, 特别地,  $A$  在  $\bar{K}$  上可对角化.

*Proof.* 我们只需要对正整数  $n$ , 构造  $K$  上  $n$  次首一可分多项式  $f(x)$  即可, 因为一旦构造出这样的多项式, 考虑它的友矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

即可. 若  $K$  的特征整除  $n$ , 构造  $f(x) = x^n - x$ , 它在  $\bar{K}$  中没有重根. 如果  $K$  的特征不整除  $n$ , 构造  $f(x) = x^n - 1$  即可.  $\square$

现在给出这节的主定理.

**Theorem 2.53 ([4]).** 任给正整数  $n$ , 存在整系数多项式  $F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$  (称证明过程中构造的多项式为 **Formanek 多项式**), 使得: (1)  $F_n$  是  $n^2$  次齐次多项式且每个非零项关于  $x$  的次数是  $n^2 - n$ , 关于  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是多重线性的; (2) 如果  $K$  是域, 那么  $F_n$  是矩阵环  $M_n(K)$  的中心多项式.

*Proof.* 当  $n = 1$  时, 取  $F_1 = y_1$  即可. 以下假设正整数  $n \geq 2$ . 设  $\mathbb{Z}[w_1, \dots, w_{n+1}]$  是整系数  $n+1$  元多项式环, 通过如下方式可定义出  $\mathbb{Z}[w_1, \dots, w_{n+1}]$  到自由代数  $\mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$  的一个  $\mathbb{Z}$ -模同态

$$\varphi : \mathbb{Z}[w_1, \dots, w_{n+1}] \rightarrow \mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, \dots, y_n \rangle.$$

对每个首一单项式  $w_1^{a_1} w_2^{a_2} \cdots w_n^{a_n}$ , 定义  $\varphi(w_1^{a_1} w_2^{a_2} \cdots w_n^{a_n}) = x^{a_1} y_1 x^{a_2} y_2 \cdots x^{a_n} y_n x^{a_{n+1}}$  (我们知道多项式环  $\mathbb{Z}[w_1, \dots, w_{n+1}]$  作为  $\mathbb{Z}$ -模有一个基是由全体首一单项式构成的集合). 考虑

$$g(w_1, w_2, \dots, w_{n+1}) = \prod_{i=2}^n (w_1 - w_i)(w_{n+1} - w_i) \prod_{2 \leq j < k \leq n} (w_j - w_k)^2,$$

那么  $g$  是  $n^2 - n$  次齐次整系数多项式. 命  $G(x, y_1, \dots, y_n) = \varphi(g(w_1, w_2, \dots, w_{n+1})) \in \mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ , 构造  $F_n(x, y_1, \dots, y_n) = G(x, y_1, \dots, y_n) + G(x, y_2, \dots, y_n, y_1) + \cdots + G(x, y_n, y_1, \dots, y_{n-1})$ , 那么它明显是  $n^2$  次齐次多项式, 且每个非零项关于  $x$  的次数是  $n^2 - n$ , 关于  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是多线性. 因此需要验证的只有对任给域  $K$  上  $n+1$  个  $n$  阶方阵  $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , 有  $F_n(X, Y_1, \dots, Y_n)$  是纯量矩阵并且在某组  $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  取值下, 矩阵  $F_n(X, Y_1, \dots, Y_n)$  是非零阵.

**Step1.** 设  $X = (x_{ij})_{n \times n}$  是域  $K$  上泛矩阵, 记域  $K(x_{ij})$  的代数闭包为  $E$ . 如果我们能够说明对任给  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in M_n(K)$  有  $F_n(X, Y_1, \dots, Y_n)$  是纯量矩阵, 那么当  $X$  是  $M_n(K)$  中数值矩阵时,  $F_n(X, Y_1, \dots, Y_n)$  也是纯量阵. 而要说明对任给  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in M_n(K)$  有  $F_n(X, Y_1, \dots, Y_n)$  是纯量矩阵, 我们只需要说明对  $E$  中任何对角阵  $Z$  与矩阵  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  有  $F_n(Z, Y_1, \dots, Y_n)$  是  $M_n(E)$  中纯量矩阵即可, 原因是 [引理2.51] 告诉我们泛矩阵  $X$  在  $E$  上可对角化, 设可逆阵  $P \in M_n(E)$  使得  $PXP^{-1} = Z$  是对角阵, 如果  $F_n(Z, Y_1, \dots, Y_n)$  对任何  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in M_n(E)$  都是纯量矩阵, 那么  $P^{-1}F_n(Z, Y_1, \dots, Y_n)P = F_n(P^{-1}ZP, P^{-1}Y_1P, \dots, P^{-1}Y_nP) = F_n(X, P^{-1}Y_1P, \dots, P^{-1}Y_nP)$  也是纯量矩阵, 于是由  $P$  可逆知道矩阵  $F_n(X, Y_1, \dots, Y_n)$  是纯量矩阵对  $M_n(E)$  中任意  $n$  个矩阵  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  成立. 所以根据前面的讨论, 我们只需要处理当  $Z$  是  $E$  上对角阵,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  是  $E$  中矩阵的情形即可. 而  $F_n$  的构造表明  $F_n$  是关于  $y_1, y_2, \dots, y_n$  多重线性的, 因此我们可以把问题再约化为: 证明对  $E$  中任何对角阵  $Z$  以及任意  $n$  个基础矩阵  $Y_1 = E_{i_1 j_1}, Y_2 = E_{i_2 j_2}, \dots, Y_n = E_{i_n j_n}$  时,  $F_n(Z, Y_1, \dots, Y_n)$  是纯量矩阵. 设  $Z = \sum_{l=1}^n v_l E_{i_l j_l}, v_l \in E, Y_1 = E_{i_1 j_1}, Y_2 = E_{i_2 j_2}, \dots, Y_n = E_{i_n j_n}$ , 注意到对任给自然数  $s$  有  $Z^s E_{ij} = v_i^s E_{ij}, E_{ij} Z^s = v_j^s E_{ij}$ , 因此对任意一组自然数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 有

$$Z^{a_1} Y_1 Z^{a_2} Y_2 \cdots Z^{a_n} Y_n Z^{a_{n+1}} = v_{i_1}^{a_1} \cdots v_{i_n}^{a_n} v_{j_n}^{a_{n+1}} E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_n j_n}.$$

于是, 由  $G$  的定义可得  $G(Z, E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_n j_n}) = g(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}, v_{j_n}) E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_n j_n}$ .

现在来看  $g(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{j_n})$ , 由  $g$  的定义知

$$g(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{j_n}) = \prod_{r=2}^n (v_{i_1} - v_{i_r})(v_{j_n} - v_{i_r}) \prod_{2 \leq s < t \leq n} (v_{i_s} - v_{i_t})^2,$$

于是知只有当  $i_1, \dots, i_n$  是正整数  $1, \dots, n$  的一个排列且  $i_1 = j_n$  时,  $g(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{j_n})$  才有可能非零, 而此时, 有  $g(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{j_n}) = \prod_{1 \leq s < t \leq n} (v_s - v_t)^2$ . 并注意到  $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_n j_n}$  只有当  $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{n-1} = i_n$  时才是非零矩阵  $E_{i_1 j_n}$ , 因此, 矩阵  $G(Z, E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_n j_n})$  如果非零, 只可能形如  $\prod_{1 \leq s < t \leq n} (v_s - v_t)^2 E_{i_1 j_n}$ . 这时

$F_n(Z, E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_n j_n}) = \sum_{l=1}^n \prod_{1 \leq s < t \leq n} (v_s - v_t)^2 E_{i_l i_l} = \prod_{1 \leq s < t \leq n} (v_s - v_t)^2 I_n$  (否则,  $F_n(Z, E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_n j_n})$  是零矩阵, 考察是否有  $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{n-1} = i_n$ ). 由此我们得到了对任给域  $K$  上  $n$  阶矩阵  $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , 有  $F_n(X, Y_1, \dots, Y_n)$  是纯量矩阵.

**Step2.** 我们说明存在域  $K$  上  $n$  阶矩阵  $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , 使得  $F_n(X, Y_1, \dots, Y_n)$  是非零矩阵. 事实上, 根据我们的构造方式, 取  $K$  上在  $E$  中有  $n$  个互异特征值的矩阵  $X$  ([引理2.52] 表明这样的  $X$  总是存在的), 并设  $E$

上可逆阵  $Q$  使得  $Z = QXQ^{-1}$  是主对角元两两互异的对角阵. 那么由前面的讨论 ( $F_n(Z, E_{i_1j_1}, \dots, E_{i_nj_n})$  是非零矩阵时等于  $\prod_{1 \leq s < t \leq n} (v_s - v_t)^2$ , 这里  $v_1, v_2, \dots, v_n$  是  $Z$  两两互异的那些主对角元) 知存在矩阵  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in M_n(E)$  使得  $F(QXQ^{-1}, QY_1Q^{-1}, \dots, QY_nQ^{-1})$  是非零矩阵, 于是  $F(X, Y_1, \dots, Y_n)$  是非零矩阵, 将每个  $Y_j$  展开成基础矩阵的  $E$ -线性组合可知存在某组基础矩阵选取方式  $E_{i_1j_1}, \dots, E_{i_nj_n}$  让  $F_n(X, E_{i_1j_1}, \dots, E_{i_nj_n})$  非零.  $\square$

## 2.5 Kaplansky 定理

一个本原环是交换的当且仅当它是域, 本节的主定理——Kaplansky 定理告诉我们, 一个本原环是 PI 的当且仅当它是域上的有限维单代数. 因此, 在本原层面上, PI 环的特性与交换环类似. 如无特别说明, 本节中  $K$  表示含么交换环,  $1_K \neq 0$ , 所有的含么环么元非零.

在证明 Kaplansky 定理前, 先做一些准备. Jacobson 本原环稠密性定理是我们抽象代数中熟知的结果, 这里需要用个更具体的形式.

**Lemma 2.54** (稠密性定理, [20]). 设  $A$  是本原  $K$ -代数, 设  ${}_A M$  是忠实的不可约左  $A$ -模,  $\Delta = \text{End}_A(M)$  是除环, 那么  $A$  代数同构于  $\text{End}(\Delta M)$  的某个稠密子代数 ( $\text{End}(\Delta M)$  上赋予自然的  $K$ -代数结构). 更具体地, 以下情形有且仅有一种成立:

- (1) 存在正整数  $n$  使得代数  $A$  和矩阵代数  $M_n(\Delta^{op})$  代数同构.
- (2) 对任给正整数  $n$ , 存在  $A$  的子代数  $A_n$  使得  $A_n$  到  $M_n(\Delta^{op})$  有满  $K$ -代数同态.

*Proof.* 命  $\rho : A \rightarrow \text{End}(\Delta M), a \mapsto a_l : M \rightarrow M$ , 这里  $a_l$  表示元素  $a$  决定的左乘变换, 那么  $\rho$  是  $K$ -代数同态, 且由  ${}_A M$  的忠实性得到  $\rho$  是单射. 再说明  $\rho(A)$  稠密, 即说明对任给  $M$  的  $\Delta$ -线性无关子集  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  以及子集  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , 都存在  $f \in \rho(A)$  使得  $f(x_k) = y_k, \forall 1 \leq k \leq n$ . 对上述给定的子集  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  以及  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , 存在线性变换  $h \in \text{End}(\Delta M)$  使得  $h(x_k) = y_k, \forall 1 \leq k \leq n$ . 因为  ${}_A M$  不可约, 特别地, 它作为左  $A$ -模完全可约, 于是由完全可约模的稠密性定理知对上述  $h \in \text{End}(\Delta M)$  以及  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 存在  $a \in A$  使得  $ax_k = h(x_k), \forall 1 \leq k \leq n$ , 于是取  $a_l \in \rho(A)$  立即得到  $\rho(A)$  的稠密性. 对于  $\Delta$ -线性空间  $\Delta M$ , 它的维数要么为正整数要么是无限的, 下面我们分这两种情况讨论, 来证明引理的后半部分.

(1) 如果  $\dim_{\Delta} M = n < +\infty$ , 那么  $\rho(A)$  作为  $\text{End}(\Delta M)$  的稠密子集必为  $\text{End}(\Delta M)$  本身, 即我们得到  $\rho$  是满射, 因此这时  $\rho$  给出了  $K$ -代数同构  $A \cong \text{End}(\Delta M)$ . 再由  $\text{End}(\Delta M) = \text{End}(M_{\Delta^{op}}) \cong M_n(\Delta^{op})$  便得到  $K$ -代数同构  $A \cong M_n(\Delta^{op})$ .

(2) 如果  $\dim_{\Delta} M$  不是有限的, 那么对任给正整数  $n$ , 取  $\Delta M$  作为  $\Delta$ -线性空间的  $n$  维子空间  $V_n$ , 并置  $A_n = \{a \in A | aV_n \subseteq V_n\}$ , 易见  $A_n$  是  $A$  的  $K$ -子代数, 并且  $\rho$  诱导  $K$ -代数同态  $\hat{\rho} : A_n \rightarrow \text{End}(\Delta V_n), x \mapsto \rho(x)|_{V_n}$ , 那么  $\hat{\rho}$  是满代数同态, 原因是对任给  $f \in \text{End}(\Delta V_n)$ , 都可以延拓为  $\Delta M$  上的  $\Delta$ -线性变换  $\hat{f}$ , 取定  $V_n$  的一个基  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 利用完全可约模的稠密性定理得到存在  $a \in A$  使得  $ax_k = \hat{f}(x_k)$ , 那么  $\rho(a)|_{V_n} = f$  且  $a \in A_n$ , 这就得到了  $\hat{\rho}$  是满的. 进而得到  $A$  有子代数  $A_n$  使得  $A_n$  到  $\text{End}(\Delta V_n)$  有满  $K$ -代数同态, 再结合代数同构  $\text{End}(\Delta V_n) = \text{End}((V_n)_{\Delta^{op}}) \cong M_n(\Delta^{op})$  即得.  $\square$

设  $\Delta$  是除环, 如果子域  $H$  满足不存在  $\Delta$  的子域  $E$  使得  $H \subsetneq E$ , 则称  $H$  是极大子域. 因为除环的中心是域, 故利用 Zorn 引理易验证任何除环总存在极大子域. 关于极大子域有下面的刻画.

**Lemma 2.55** (极大子域, [21]). 设  $\Delta$  是除环,  $K$  是  $\Delta$  的极大子域, 那么  $K = \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$ . 特别地,  $K \supseteq Z(\Delta)$ . 所以除环上任何极大子域都可视作除环中心上的代数.



*Proof.*  $K \subseteq \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$  是明显的, 现任取  $a \in \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$ , 则

$$K(a) = \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} \mid f, g \in K[x], g(a) \neq 0 \right\}$$

是  $\Delta$  的子域且包含  $K$ , 由  $K$  的极大性知  $K = K(a)$ , 于是  $a \in K$ , 从而  $\{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\} \subseteq K$ . 由此得到  $\{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\} = K$ .  $\square$

**Remark 2.56.** 反之, 如果除环  $\Delta$  的子域  $K$  满足  $K = \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$ , 则  $K$  明显是极大子域.

**Definition 2.57** (中心单代数, [20]). 若  $A$  是域  $k$  上的代数, 满足  $A$  是单环且  $Z(A) = k1_A$ , 则称  $A$  是域  $k$  上的**中心单代数**. 一些文献中要求中心单代数是有限维代数, 这里不做要求.

**Remark 2.58.** 设  $A$  是含么交换环  $K$  上的  $K$ -代数, 一般  $K$  和  $K1_A$  作为交换环未必同构. 例如  $K = \mathbb{Z}, A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  时,  $K1_A = A$  和  $\mathbb{Z}$  并不同构. 但当  $K$  是域时, 易见  $K \cong K1_A$ .

在进一步讨论中心单代数的基本性质前, 我们记录一个中心可除代数 (即在中心单代数的基础上进一步为可除代数) 的基本特性 (见 [定理2.61], 初次阅读可直接跳至 [引理2.62]). 回忆对域的代数扩张  $L \supseteq K, \alpha \in L$  称为  $K$  上**可分元**, 如果  $\alpha$  在  $K$  上的最小多项式无重根. 如果代数扩张  $L \supseteq K$  满足  $L$  中元素均为  $K$  上可分元, 则称  $L \supseteq K$  是**可分扩张**. 易见特征为零的域的任何代数扩张都是可分的. 本原元定理告诉我们有限可分扩张一定是单扩张. 反之, 如果有单扩张  $L = K(\alpha) \supseteq K$  满足  $\alpha$  是  $K$  上可分元, 作  $\alpha$  在  $K$  上最小多项式的分裂域  $E$ , 我们有  $E \supseteq L \supseteq K$ . 因为  $\alpha$  是可分元, 所以  $E \supseteq K$  是 Galois 扩张. 特别地,  $E$  是  $K$  的可分扩张, 所以  $L$  是  $K$  的可分扩张. 为了证明 [定理2.61], 我们需要下述域论中的经典结果.

**Lemma 2.59.** 给定域扩张  $L \supseteq K, \text{char}K = p > 0$ . 若  $\alpha \in L$  是  $K$  上代数元, 则存在自然数  $n$  使得  $\alpha^{p^n}$  是域  $K$  上的可分元.

*Proof.* 对  $\alpha$  在  $K$  上满足的最小多项式的次数  $\ell \geq 1$  作归纳. 如果  $\ell = 1$ , 则  $\alpha \in K$  结论成立. 假设结论对最小多项式次数不超过  $\ell - 1 (\ell \geq 2)$  的代数元成立, 那么对最小多项式次数为  $\ell$  的元素  $\alpha$ , 当  $\alpha$  是可分元时结论直接成立. 下设  $\alpha$  不是可分元. 因为  $\alpha$  在  $K$  上的最小多项式 (记作  $m(x)$ ) 有重根, 因此  $m(x)$  与  $m'(x)$  不互素, 这迫使  $m'(x) = 0$ . 于是存在多项式  $g(x) \in K[x]$  使  $m(x) = g(x^p)$ . 注意到这样的多项式  $g(x)$  次数严格低于  $\ell = \deg m(x)$ , 故  $\alpha^p$  是满足  $K$  上最小多项式次数严格低于  $\ell$  的代数元. 对  $\alpha^p$  应用归纳假设便得结论.  $\square$

通过 [引理2.59] 我们立即得到下面的命题.

**Proposition 2.60.** 设  $L \supseteq K$  域的代数扩张, 满足  $L - K$  中元素都是  $K$  上不可分元. 那么任何  $\alpha \in L$  满足存在自然数  $n$  使得  $\alpha^{p^n} \in K$ .

现在我们可以证明域上维数不低于 2 的中心可除代数一定存在中心以外的可分元.

**Theorem 2.61** (Jacobson-Noether 定理). 设  $D$  是域  $F$  上维数不低于 2 的中心可除代数 (即  $D$  不交换) 且  $D$  中每个元素是  $F$  上整元 (满足某个首一多项式). 那么存在  $\alpha \in D - F$  在  $F$  上是可分元.

*Proof.* 如果  $\text{char}F = 0$ , 那么任取  $\alpha \in D - F$  都满足  $F(\alpha)$  是  $F$  的有限可分扩张. 因此只需考虑  $\text{char}F = p > 0$  的情形. 我们用反证法证明结论, 假设  $D - F$  中所有的元素都是  $F$  上不可分元. 根据 [命题2.60] 可知  $D - F$

中所有的元素  $\alpha$  都满足存在自然数  $n$  使得  $\alpha^{p^n} \in F$ . 现在取定  $\alpha \in D - F$  和  $m \geq 1$  使得  $\alpha^{p^m} \in F$ . 考虑  $D$  上 ( $F$ -线性) 内导子  $\delta : D \rightarrow D, x \mapsto [a, x]$ , 注意到素数  $p$  总满足  $p$  整除  $C_{p^m}^i, \forall 2 \leq i \leq p^m - 1$  (利用组合数定义得到  $iC_{p^m}^i = p^m C_{p^m-1}^{i-1}$  便知), 因此由  $\text{char} F = p$  知  $\delta^{p^m}(x) = \alpha^{p^m}x - x\alpha^{p^m} = 0, \forall x \in D$ . 即  $\delta^{p^m} = 0$ . 注意  $\alpha \notin F = Z(D)$  表明  $\delta \neq 0$ , 因此可选取满足  $\delta^n \neq 0$  的最大正整数  $n$ . 于是存在  $b \in D$  使得  $\beta = \delta^n(b) \neq 0$  且  $\delta(\beta) = 0$ . 因此  $\beta \in D$  满足是与  $\alpha$  可交换的可逆元 (因为非零). 构造  $d = \beta^{-1}\alpha\delta^{n-1}(b)$ , 那么可直接验证  $\alpha d - d\alpha = \alpha$ , 改写为  $d = 1 + \alpha^{-1}d\alpha$ . 由 [命题2.60] 对  $d$  同样存在自然数  $r$  使得  $d^{p^r} \in F$ . 而

$$d^{p^r} = (1 + \alpha^{-1}d\alpha)^{p^r} = 1 + \alpha^{-1}d^{p^r}\alpha = 1 + d^{p^r},$$

这导出在  $D$  中  $0 = 1$ , 矛盾! □

**Lemma 2.62.** 设  $A$  是域  $F$  上中心单代数,  $B$  是域  $F$  上单代数, 则  $A \otimes_F B$  是域  $F$  上单代数. 特别地, 对域  $F$  上中心单代数  $A$  与  $F$  的域扩张  $E$ , 有  $A \otimes_F E$  是单代数.

*Proof.* 任取  $A \otimes_F B$  的非零理想  $U$ , 置

$$\{n \in \mathbb{Z}_{>0} | \text{存在 } a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0 \in A, b_1, b_2, \dots, b_n \in B \text{ 使得 } \{b_1, \dots, b_n\} \text{ 线性无关且 } \sum_{k=1}^n a_k \otimes b_k \text{ 是 } U \text{ 中非零元}\},$$

上述集合明显非空, 取该集合的最小元  $n$ , 并设  $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0 \in A, b_1, b_2, \dots, b_n \in B$  使得  $u = \sum_{k=1}^n a_k \otimes b_k$  是  $U$  中非零元, 这里  $\{b_1, \dots, b_n\}$  是  $F$ -线性无关的. 对  $a_1 \neq 0 \in A$ , 因为  $A$  是单环, 所以存在  $r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_n \in R$  使得  $\sum_{i=1}^n r_i a_i s_i = 1_A$ , 于是

$$u_1 = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n r_i a_k s_i \right) \otimes b_k = 1_A \otimes b_1 + \sum_{k=2}^n \left( \sum_{i=1}^n r_i a_k s_i \right) \otimes b_k \neq 0 \in U,$$

记  $\sum_{i=1}^n r_i a_k s_i$  为  $\alpha_k (k \geq 2)$ , 那么由  $n$  的选取方式知每个  $\alpha_k$  非零.

**Claim.**  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in Z(A)$ .

对每个  $a \in A$ , 易见  $(a \otimes 1_B)u_1 - u_1(a \otimes 1_B) \in U$ , 所以  $(a\alpha_2 - \alpha_2a) \otimes b_2 + (a\alpha_3 - \alpha_3a) \otimes b_3 + \dots + (a\alpha_n - \alpha_na) \otimes b_n \in U$ , 它必为零元, 进而  $a\alpha_2 - \alpha_2a = a\alpha_3 - \alpha_3a = \dots = a\alpha_n - \alpha_na = 0$ , 断言得证.

于是由  $A$  是中心代数知每个  $\alpha_k$  形如  $\alpha_k = c_k 1_A, c_k \in F$ . 进而  $u_1 = 1_A \otimes (b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n), b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n \neq 0 \in B$ . 这表明  $1_A \otimes_F B \subseteq U$ , 进而  $U = A \otimes_F B$ . □

**Lemma 2.63.** (1) 设  $R, R'$  是含么环, 有环同构  $f : R \rightarrow R'$ , 那么  $f(Z(R)) = Z(R')$ . 若更进一步  $Z(R')$  是域, 则  $Z(R)$  也是域, 将  $R$  视作  $Z(R)$ -线性空间,  $R'$  视作  $Z(R')$ -线性空间, 则  $\dim_{Z(R)} R = \dim_{Z(R')} R'$ .

(2) 设除环  $\Delta$  是其中心  $Z(\Delta)$  上  $m$  维线性空间, 则  $M_n(\Delta)$  作为其中心  $Z(M_n(\Delta)) = Z(\Delta)I_n$  上线性空间维数是  $mn^2$ . 例如四元数环  $\mathbb{H}$  的中心是  $\mathbb{R}$ , 是 4 维  $\mathbb{R}$ -代数, 且是除环, 那么四元数矩阵代数  $M_n(\mathbb{H})$  作为实线性空间维数是  $4n^2$ .

(3) 设  ${}_{\Delta}V$  是除环  $\Delta$  上的线性空间,  $\Delta'$  是  $\Delta$  的子除环, 则  $\dim_{\Delta'} V = (\dim_{\Delta} V)(\dim_{\Delta'} \Delta)$ .

*Proof.* (1) 直接验证易得  $f(Z(R)) = Z(R')$ , 所以环同构  $Z(R) \cong Z(R')$  保证了  $Z(R')$  是域当且仅当  $Z(R)$  是域. 现在设  $Z(R')$  是域, 则  $Z(R)$  也是域, 将  $R$  视作  $Z(R)$ -线性空间,  $R'$  视作  $Z(R')$ -线性空间, 设  $X$  是  $R$

作为  $Z(R)$ -线性空间的一个基, 则对任给  $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ , 我们说明  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)$  是  $Z(R')$ -线性无关的: 设  $r'_1, \dots, r'_m \in Z(R')$  使得  $\sum_{k=1}^m r'_k f(x_k) = 0$ , 则由  $f(Z(R)) = Z(R')$  知存在  $c_1, \dots, c_m \in Z(R)$  使得  $\sum_{k=1}^m f(c_k) f(x_k) = 0$ , 从而  $\sum_{k=1}^m c_k x_k = 0$ , 因此  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ , 于是  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)$  是  $Z(R')$ -线性无关的, 由此知  $f(X)$  线性无关, 故  $\dim_{Z(R)} R \leq \dim_{Z(R')} R'$ , 类似地可以证明  $\dim_{Z(R')} R' \leq \dim_{Z(R)} R$ .

(2) 设  $\Delta$  作为  $Z(\Delta)$ -线性空间有基  $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ , 可直接验证  $\{d_k E_{ij} | 1 \leq k \leq m, 1 \leq i, j \leq n\}$  是  $M_n(\Delta)$  作为  $Z(\Delta)I_n$ -线性空间的一个基.

(3) 不妨设  $V \neq 0$ , 设  $\{x_i | i \in I\}$  是  $V$  作为  $\Delta$ -线性空间的一个基,  $\{d_j | j \in J\}$  是  $\Delta$  作为  $\Delta'$ -线性空间的一个基, 容易验证  $\{d_j x_i | i \in I, j \in J\}$  是  ${}_{\Delta'} V$  的一个基. 所以  $\dim_{\Delta'} V = |I| \cdot |J| = (\dim_{\Delta} V)(\dim_{\Delta'} \Delta)$ .  $\square$

作为 [引理2.62] 的应用, 我们证明中心单代数的双重中心化子定理 (初次阅读可直接跳至 [引理2.65]):

**Theorem 2.64** (双重中心化子定理). 设  $A$  是域  $F$  上有限维中心单代数,  $B$  是  $A$  的单子代数, 对  $A$  的非空子集  $X$ , 记  $C_A(X) = \{a \in A | ax = xa, \forall x \in X\}$  是  $X$  在  $A$  中的中心化子. 那么  $C_A(C_A(B)) = B$ .

*Proof.* 注意到  $B \subseteq C_A(C_A(B))$  且  $A$  是有限维代数, 故只需证  $\dim_F B = \dim_F C_A(C_A(B))$ .

先证  $C_A(B)$  是单环且  $\dim_F C_A(B) \dim_F B = \dim_F A$ . 命  $R = A \otimes_F B^{op}$ , 那么 [引理2.62] 表明  $R$  是有限维单代数, 特别地, 任何有限维左  $R$ -模可分解为一些单模的直和, 并且  $R$  的单模同构类只有一个. 将  $A$  以自然的方式视作左  $R$ -模, 容易验证  $C_A(B) \rightarrow \text{End}_R A, c \mapsto c_r$ , 其中  $c_r$  表示元素  $c$  决定的右乘变换, 是反代数同构. 将  $A$  分解为有限多个不可约左  $R$ -模的直和: 设  $M$  是不可约左  $R$ -模, 则  $\Delta = \text{End}_R M$  是有限维除环且存在正整数  $n$  使得  $A \cong M^n$ . 于是由  $\text{End}_R A \cong \text{End}_R(M^n) \cong M_n(\Delta)$  可知  $C_A(B)$  是单环. 根据 [引理2.54(1)], 命  $m = \dim_{\Delta} M$ , 则有  $F$ -代数同构  $R \cong M_m(\Delta^{op})$ , 因此  $(\dim_F A)(\dim_F B) = m^2 \dim_F \Delta$ . 由  $A \cong M^n$  得  $\dim_F A = nm(\dim_F \Delta)$ . 同时, 也有  $\dim_F C_A(B) = n^2 \dim_F \Delta$ . 因此我们得到

$$(\dim_F A)(\dim_F B)(\dim_F C_A(B)) = (\dim_F A)^2,$$

两边消去  $\dim_F A$  便得到  $\dim_F C_A(B) \dim_F B = \dim_F A$ .

现在用  $C_A(B)$  这一单子代数替换维数公式中的  $B$  我们得到  $\dim_F C_A(C_A(B)) \dim_F C_A(B) = \dim_F A$ . 结合前面得到的等式  $\dim_F C_A(B) \dim_F B = \dim_F A$  便得到  $\dim_F B = \dim_F C_A(C_A(B))$ .  $\square$

**Lemma 2.65** ([2]). 设  $K$ -代数  $R$  是最小次数为  $d$  的本原 PI 代数,  ${}_R M$  是忠实的不可约左  $R$ -模, 那么:

- (1)  $K$ -代数  $\Delta = \text{End}({}_R M)$  是除环,  ${}_{\Delta} M$  是有限维  $\Delta$ -线性空间;
- (2) 设  $n = \dim_{\Delta} M$ , 则有  $K$ -代数同构  $R \cong M_n(\Delta^{op})$ , 特别地,  $R$  是单代数且  $Z(R)$  是域;
- (3) 设  $H$  是  $\Delta^{op}$  的极大子域 (也为  $\Delta$  的极大子域, [引理2.55] 表明  $H \supseteq Z(\Delta)$ ), 那么  $M$  上有天然左  $R \otimes_{Z(R)} H$ -模结构, 满足  ${}_{R \otimes_{Z(R)} H} M$  是忠实不可约模,  $H = \text{End}({}_{R \otimes_{Z(R)} H} M)$  并且  $R \otimes_{Z(R)} H$  是单 PI 代数;
- (4)  ${}_H M$  是域  $H$  上有限维线性空间, 若设  $m = \dim_H M$ , 则有  $H$ -代数同构

$$R \otimes_{Z(R)} H \cong M_m(\text{End}({}_{R \otimes_{Z(R)} H} M)^{op}) = M_m(H^{op}) = M_m(H),$$

并且,  $\dim_{Z(\Delta^{op})} \Delta^{op} = (m/n)^2$ ,  $\dim_{Z(R)} R = m^2$ . 特别地, 本原 PI 代数  $R$  可嵌入某个域上的矩阵环  $M_m(H)$ .

*Proof.* (1) 因为  $M$  不可约, 所以 Schur 引理告诉我们  $\Delta$  是除环,  $M$  上的  $K$ -模结构给出  $\Delta$  上的  $K$ -代数结构. 现在我们说明  ${}_{\Delta} M$  是有限维  $\Delta$ -线性空间, 若不然, 由 [引理2.54] 得到对任给正整数  $n$ , 存在  $R$  的子代数  $R_n$

使得  $R_n$  到  $M_n(\Delta^{op})$  有满代数同态, 进而由 [命题2.42] 得到  $d \geq 2n$ , 由  $n$  的任意性得到矛盾. 所以  $\Delta M$  是有限维  $\Delta$ -线性空间.

(2) 设  $n = \dim_{\Delta} M$ , 由 [引理2.54] 得到  $K$ -代数同构  $R \cong M_n(\Delta^{op})$ , 易证单环的中心是域.

(3) 易见  $xf = f(x), \forall x \in M, f \in H \subseteq \Delta = \text{End}({}_R M)$  给出了  $M$  的右  $H$ -模结构, 从而  $M$  上有  $R$ - $H$  双模结构 (这两个模结构均与  $M$  上的  $K$ -模结构相容), 这也给出了  $M$  的左  $R \otimes_{Z(R)} H$ -模结构:  $(\sum_{k=1}^l r_k \otimes h_k)x = \sum_{k=1}^l r_k x h_k, \forall \sum_{k=1}^l r_k \otimes h_k \in R \otimes_{Z(R)} H, x \in M$ , 其中  $H$  的  $Z(R)$ -模结构以最自然的方式给出 (具体地,  $Z(R)$  中每个元素  $a$  决定的  $M$  上左乘变换  $a_l \in Z(\Delta) \subseteq H$ , 所以  $Z(R)$  可嵌入  $H$ ). 因为  ${}_R M$  是不可约模, 所以  $M$  作为左  $R \otimes_{Z(R)} H$ -模也不可约. 因为 (2) 表明  $R$  是  $Z(R)$  上的中心单代数, 所以 [引理2.62] 告诉我们  $R \otimes_{Z(R)} H$  是  $K$ -单代数, 于是由  $\text{Ann}_{R \otimes_{Z(R)} H}(M)$  是  $R \otimes_{Z(R)} H$  的真理想 (因为不含  $1_R \otimes 1_H$ ) 得到  ${}_{R \otimes_{Z(R)} H} M$  是忠实的模, 所以  ${}_{R \otimes_{Z(R)} H} M$  是忠实不可约模. 易见  $H = \text{End}({}_R M_H) = \text{End}({}_{R \otimes_{Z(R)} H} M)$ . 最后说明  $R \otimes_{Z(R)} H$  是 PI 代数 (前面已经说明它是单代数). 易知  $K$ -代数同构  $R \cong R \otimes_{Z(R)} 1_H \subseteq R \otimes_{Z(R)} H$ , 故  $R \otimes_{Z(R)} 1_H$  是 PI 代数且  $R \otimes_{Z(R)} H$  是  $R \otimes_{Z(R)} 1_H$  的中心扩张, 所以 [推论2.19] 表明  $R \otimes_{Z(R)} H$  也是 PI 代数.

(4) 先说明  ${}_H M$  是域  $H$  上有限维线性空间, 通过 (3) 我们知道  $H = \text{End}({}_{R \otimes_{Z(R)} H} M)$ , 所以要说明的即为  $\text{End}({}_{R \otimes_{Z(R)} H} M)M$  是有限维线性空间, 而我们已经看到  $R \otimes_{Z(R)} H$  是单 PI 代数, 特别地, 是本原 PI 代数, 进而使用 (1) 中完全相同的技术由 [引理2.54] 可知  $\text{End}({}_{R \otimes_{Z(R)} H} M)M$  是有限维线性空间. 这就得到了  ${}_H M$  是域  $H$  上有限维线性空间, 设  $m = \dim_H M$ . 由 [引理2.54] 知有  $H$ -代数同构

$$R \otimes_{Z(R)} H \cong M_m(\text{End}({}_{R \otimes_{Z(R)} H} M)^{op}) = M_m(H^{op}) = M_m(H),$$

故  $m^2 = \dim_H(R \otimes_{Z(R)} H) = \dim_{Z(R)} R = \dim_{Z(\Delta^{op})} M_n(\Delta^{op}) = n^2 \dim_{Z(\Delta^{op})} \Delta^{op}$  知  $\dim_{Z(\Delta^{op})} \Delta^{op} = (m/n)^2$  (这里  $\dim_H(R \otimes_{Z(R)} H) = \dim_{Z(R)} R$  的原因是若设  $\{x_i | i \in I\}$  为  $R$  作为  $Z(R)$ -线性空间的一个基, 可直接验证  $\{x_i \otimes 1_H | i \in I\}$  是  $R \otimes_{Z(R)} H$  作为  $H$ -线性空间的一个基).  $\square$

**Remark 2.66.** 如果  $R$  是域  $K$  上的有限维中心单代数, 那么忠实的不可约左  $R$ -模  $M$  是域  $K$  上有限维模, 因此这时除环  $\Delta$  和极大子域  $H$  均为有限维  $K$ -代数. 特别地, 该引理的 (4) 告诉我们对有限维中心单代数  $R$ , 总存在  $K$  的有限扩张  $H$  和正整数  $m$  使得有  $H$ -代数同构  $R \otimes_K H \cong M_m(H)$ , 并且  $m^2 = \dim_K R$ . 由此可见有限维中心单代数 (作为中心上线性空间) 的维数一定是平方数. 一般地, 只要  $K$  有域扩张  $H$  满足存在正整数  $m$  使得有  $H$ -代数同构  $R \otimes_K H \cong M_m(H)$ , 比较同构两边的  $H$ -线性维数便知  $m^2 = \dim_K R$ , 所以这里的正整数  $m$  不依赖于域扩张  $H$  的选取. 通常将满足  $R \otimes_K H \cong M_m(H)$  的域扩张  $H$  称为  $R$  的**分裂域**. 只要  $R$  是  $K$  上有限维中心单代数, 那么 [引理2.62] 表明  $K$  的代数闭域  $\bar{K}$  使  $R \otimes_K \bar{K}$  是代数闭域上有限维单代数. 于是由 Artin 单环结构定理知  $R \otimes_K \bar{K}$  同构于  $\bar{K}$  上的矩阵代数. 所以中心单代数的中心作为域的代数闭包总是给定中心单代数的分裂域. 而刚才的讨论表明总存在分裂域满足是中心 (作为域) 的有限扩张.

我们知道如果一个含么单环  $R$  满足  $R$  是  $Z(R)$  上的有限维单代数, 那么 [命题2.24] 告诉我们  $R$  是 PI 环. 一个自然的问题是搞清楚本原 PI 环的结构. 下面是 Kaplansky 给出的本原 PI 环结构定理.

**Theorem 2.67** (Kaplansky 定理, [4]). 设  $K$ -代数  $R$  是最小次数为  $d$  的本原 PI 代数, 则  $d$  是偶数,  $Z(R)$  是域且  $R$  是  $Z(R)$  上  $(d/2)^2$  维中心单代数.

*Proof.* 由 [引理2.65] 中的 (2),  $Z(R)$  是域且  $R$  是  $Z(R)$  上的中心单代数, 所以要证明的只有  $d$  是偶数以及  $R$  是  $Z(R)$  上  $(d/2)^2$  维中心单代数. 由 [引理2.65] 中 (4) 的证明过程,  $\dim_{Z(R)} R = m^2$ ,  $R \otimes_{Z(R)} H \cong M_m(H)$  有

最小次数  $2m$ , 且  $R \otimes_{Z(R)} H$  是  $R \otimes_{Z(R)} 1_H$  的中心扩张. 于是由 [推论2.19] 知  $d = 2m$ , 所以  $d$  是偶数且  $R$  是  $Z(R)$  上  $m^2 = (d/2)^2$  维中心单代数.  $\square$

**Remark 2.68.** Kaplansky 定理告诉我们 PI 代数的本原理想和极大理想等价, 这是交换环的经典特性.

**Corollary 2.69.** 设域  $\mathbb{k}$  满足  $\text{char } \mathbb{k} = 0$ , 那么 Weyl 代数  $A_n(\mathbb{k})$  (回忆 [例2.29]) 不是 PI 环.

*Proof.* 我们已经看到这时  $A_n(\mathbb{k})$  的中心是  $\mathbb{k}$  且  $A_n(\mathbb{k})$  是中心上的无限维代数. 假设  $A_n(\mathbb{k})$  是 PI 环, 那么 Kaplansky 定理说  $A_n(\mathbb{k})$  是  $\mathbb{k} = Z(A_n(\mathbb{k}))$  上有限维代数. 这导出矛盾.  $\square$

**Corollary 2.70.** 设  $K$ -代数  $R$  是 PI 代数, 那么不可约左  $R$ -模  $M, N$  同构的充要条件是  $\text{Ann}_R M = \text{Ann}_R N$ .

*Proof.* 只需验证充分性, 这时  $M, N$  均为本原 PI 代数  $R/\text{Ann}_R M$  上的不可约模. 而  $R/\text{Ann}_R M$  作为其中心上的有限维中心单代数是 Artin 单环, 故作为  $R/\text{Ann}_R M$ -模有  $M \cong N$ . 因此也有  $R$ -模同构  $M \cong N$ .  $\square$

**Remark 2.71.** 该推论表明 PI 代数的本原素谱 (就是极大谱) 与不可约表示等价类间有双射. 具体地, 记 PI 代数  $R$  的本原素谱为  $\text{Prim}(R)$ , 则有双射  $\theta: \{R \text{ 的不可约模等价类} \} \rightarrow \text{Prim}(R), [M] \mapsto \text{Ann}_R M$ .

**Corollary 2.72.** 设  $K$ -代数  $R$  是最小次数为  $d$  的本原 PI 代数, 那么  $d$  是偶数, 记  $m = d/2$ , 则存在域  $H$  使得  $R$  可 (保么地) 嵌入矩阵环  $M_m(H)$ .

**Corollary 2.73** ([4]).  $K$ -代数  $R$  是最小次数为  $d$  的本原 PI 代数, 对正整数  $t$ :

- (1) 如果  $d/2 = t$ , 那么 Formanek 多项式  $F_t(x, y_1, y_2, \dots, y_t)$  是  $R$  的中心多项式;
- (2) 如果  $d/2 < t$ , 那么 Formanek 多项式  $F_t(x, y_1, y_2, \dots, y_t)$  是  $R$  的一个多项式等式.

*Proof.* 我们沿用 [引理2.65] 以及 Kaplansky 定理证明过程中的记号, 由条件知  $R$  是  $Z(R)$  上的中心单代数, 且对  $\Delta = \text{End}_R(M)$ ,  $n = \dim_\Delta M$ ,  $H$  是  $\Delta^{\text{op}}$  的极大子域,  $m = \dim_H M$ , 我们有  $K$ -代数同构  $R \cong M_n(\Delta^{\text{op}})$  以及  $H$ -代数同构  $R \otimes_{Z(R)} H \cong M_m(H)$ , 正整数  $n$  整除  $m$ ,  $\dim_{Z(\Delta)} \Delta^{\text{op}} = (m/n)^2$ ,  $d = 2m$ . 下面开始原问题的证明, 主要利用 Formanek 多项式  $F_t$  是域上  $t$  阶矩阵代数的中心多项式.

(1) 首先我们有  $t = m$ . 如果  $Z(R)$  是有限的, 那么由环同构  $Z(R) \cong Z(\Delta)I_n \cong Z(\Delta)$  得到  $Z(\Delta)$  是有限集. 结合  $\dim_{Z(\Delta)} \Delta^{\text{op}} = (m/n)^2$  我们得到  $\Delta$  是有限集, Wedderburn 小定理 (见下面的 [引理2.74]) 表明  $\Delta$  是域, 所以  $m = n$  且得到  $K$ -代数同构  $R \cong M_n(Z(\Delta)) = M_m(Z(\Delta))$ , 于是知  $F_m$  是  $R$  的中心多项式. 下设  $Z(R)$  是无限域的情形, 这时  $R \otimes_{Z(R)} H \cong M_m(H)$  表明  $F_m$  是  $R \otimes_{Z(R)} H$  的中心多项式. 注意到对任何  $a \otimes 1_H \in Z(R \otimes_{Z(R)} H)$ , 都有  $a \in Z(R)$ , 所以对任给  $r_1, r_2, \dots, r_{m+1} \in R$ , 利用  $F_m(r_1 \otimes 1_H, \dots, r_{m+1} \otimes 1_H) = F_m(r_1, r_2, \dots, r_{m+1}) \otimes 1_H \in Z(R \otimes_{Z(R)} H)$ , 我们得到  $F_m(r_1 \otimes 1_H, \dots, r_{m+1} \otimes 1_H) \in Z(R)$ , 所以要说明  $F_m$  是  $R$  的中心多项式我们只需要再说明在  $R$  的某组元素  $r_1, r_2, \dots, r_{m+1}$  代入下  $F_m(r_1, r_2, \dots, r_{m+1}) \neq 0$ . 我们用反证法说明这一点: 若不然, 则  $F_m$  是  $R$  的一个多项式等式, 进而由  $Z(R)$  是无限域, 利用下面的 [引理2.75] 得到  $F_m$  也是  $R \otimes_{Z(R)} H$  的一个多项式等式, 但这与  $F_m$  是  $R \otimes_{Z(R)} H$  的中心多项式矛盾 (因为一定有一组  $R \otimes_{Z(R)} H$  中元素的代入使得  $F_m$  取值非零). 所以  $F_m$  是  $R$  的中心多项式.

(2) 此时  $m < t$ , 我们断言  $F_t$  是  $M_m(H)$  的一个多项式等式, 一旦证明这一断言, 利用环同构  $R \otimes_{Z(R)} H \cong M_m(H)$  我们得到  $R$  有多项式等式  $F_m$ . 现在证明上述断言, 考虑低阶矩阵环到高阶矩阵环的标准嵌入:

$$j: M_m(H) \rightarrow M_t(H), A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$



那么  $j$  是单环同态 (它并不保持么元). 对任意  $t+1$  个矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_{t+1} \in M_m(H)$ , 易见

$$j(F_t(A_1, \dots, A_{t+1})) = F_t(j(A_1), j(A_2), \dots, j(A_{t+1})),$$

而  $F_t$  是  $M_t(H)$  的中心多项式意味着  $j(F_t(A_1, \dots, A_{t+1}))$  是纯量矩阵, 但它的对角元中有零 (右下角的元素), 这迫使  $j(F_t(A_1, \dots, A_{t+1}))$  是零矩阵, 再由  $j$  是单射得到  $F_t(A_1, \dots, A_{t+1}) = O$ , 所以  $F_t$  是  $R$  的多项式等式.  $\square$

**Lemma 2.74** (Wedderburn 小定理). 设  $\Delta$  是有限除环, 则  $\Delta$  是域.

*Proof.* 记  $F = Z(\Delta)$ , 则  $F$  是域, 将  $\Delta$  视作域  $F$  上线性空间, 则为有限维线性空间, 设  $\dim_F \Delta = n$ . 下面通过反证法证明  $n = 1$ , 一旦证明  $n = 1$ , 利用  $\Delta = F$  可得  $\Delta$  是域. 假设  $n \geq 2$ , 设  $|F| = q \geq 2$  (注意有限域的阶是素数幂次, 所以至少为 2), 那么  $|\Delta^*| = q^n - 1$ , 将乘法群  $\Delta^*$  共轭作用到自身上, 根据轨道公式可得  $q^n - 1 = q - 1 + \sum_{a \in A} [\Delta^* : C(a)^*]$ , 其中  $A$  是所有元素个数至少为 2 的共轭类的一个代表元集. 因为  $C(a) \supseteq F$ , 所以  $C(a)$  也可以视作  $F$  上线性空间 ( $C(a)$  是除环, 未必交换), 注意到  $\dim_F \Delta = (\dim_{C(a)} \Delta)(\dim_F C(a))$ , 所以  $r_a = \dim_F C(a)$  是整除  $n$  的正整数, 且  $1 \leq r_a < n$ . 于是

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{a \in A} \frac{q^n - 1}{q^{r_a} - 1},$$

对每个  $a \in A$ , 注意到  $\Phi_n(x)(x^{r_a} - 1)$  是在  $\mathbb{Z}[x]$  中整除  $x^n - 1$  的整系数多项式 (这里  $\Phi_n(x)$  表示  $n$  次分圆多项式), 所以存在整系数多项式  $h(x)$  使得  $x^n - 1 = \Phi_n(x)(x^{r_a} - 1)h(x)$ , 这说明  $(q^n - 1)/(q^{r_a} - 1)$  是被  $\Phi_n(q)$  整除的正整数, 那么  $\Phi_n(q)$  整除  $q - 1$ , 于是

$$q - 1 \geq |\Phi_n(q)| = \prod_{\text{g.c.d}(k,n)=1} |q - e^{2ik\pi/n}|,$$

但对与  $n$  互素的正整数  $1 \leq k \leq n$ , 有  $|q - e^{2ik\pi/n}| > q - 1 \geq 1$ , 得到矛盾.  $\square$

**Lemma 2.75** ([4]). 设  $R, L$  是  $K$ -代数, 这里  $K$  是无限域,  $L$  是域, 那么  $R$  的任何一个  $K$  上的多项式等式  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  也是  $R \otimes_K L$  的一个多项式等式.

*Proof.* 设  $\{r_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$  是  $R$  作为  $K$ -线性空间的一个基. 我们知道  $R \otimes_K L$  中的任何一个元素都可以表示为有限和  $\sum_{\alpha \in \Lambda} r_\alpha \otimes l_\alpha$  的形式, 所以要证明  $f$  是  $R \otimes_K L$  的一个多项式等式, 我们只要验证对任给

$$r_{\alpha_{11}}, \dots, r_{\alpha_{1N_1}}, r_{\alpha_{21}}, \dots, r_{\alpha_{2N_2}}, \dots, r_{\alpha_{m1}}, \dots, r_{\alpha_{mN_m}} \in \{r_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$$

以及  $l_{11}, \dots, l_{1N_1}, \dots, l_{m1}, \dots, l_{mN_m} \in L$ , 有

$$f\left(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}} \otimes l_{1j}, \sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}} \otimes l_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}} \otimes l_{mj}\right) = 0$$

即可. 固定上面的  $r_{\alpha_{11}}, \dots, r_{\alpha_{1N_1}}, r_{\alpha_{21}}, \dots, r_{\alpha_{2N_2}}, \dots, r_{\alpha_{m1}}, \dots, r_{\alpha_{mN_m}} \in \{r_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ , 如果我们能够证明对  $L$  上的多项式环  $L[x_{ij}] = L[x_{11}, \dots, x_{1N_1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mN_m}]$ ,  $R \otimes_K L[x_{ij}]$  中的元素

$$f\left(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}} \otimes x_{1j}, \sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}} \otimes x_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}} \otimes x_{mj}\right) = 0,$$

那么我们将  $l_{ij}$  代入  $x_{ij}$  便得到了结果, 原因是赋值映射  $\text{ev} : R \otimes_K L[x_{ij}] \rightarrow R \otimes_K L, \sum_{k=1}^t r_k \otimes f_k(x_{ij}) \mapsto \sum_{k=1}^t r_k \otimes f_k(l_{ij})$  是环同态 (映射合理性容易验证, 这里赋值映射能够成为环同态是由  $L$  是交换环保证的), 所以

$$\text{ev}(f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}} \otimes x_{1j}, \sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}} \otimes x_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}} \otimes x_{mj})) = f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}} \otimes l_{1j}, \sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}} \otimes l_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}} \otimes l_{mj}) = 0.$$

下面我们说明  $f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}} \otimes x_{1j}, \sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}} \otimes x_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}} \otimes x_{mj}) = 0$ .

将  $f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}} \otimes x_{1j}, \sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}} \otimes x_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}} \otimes x_{mj})$  展开, 对每个形如  $r \otimes g(x_{ij}), g(x_{ij}) \in K[x_{ij}]$  的项全部把  $r$  用  $r_\alpha$  来  $K$ -线性表出, 可得存在有限个  $r_{\beta_1}, r_{\beta_2}, \dots, r_{\beta_s} \in \{r_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$  以及  $K$  上的多项式  $G_{\beta_1}[x_{ij}], \dots, G_{\beta_s}[x_{ij}] \in K[x_{ij}]$ , 使得

$$f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}} \otimes x_{1j}, \sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}} \otimes x_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}} \otimes x_{mj}) = \sum_{k=1}^s r_{\beta_k} \otimes G_{\beta_k}[x_{ij}].$$

下面说明  $G_{\beta_1}[x_{ij}], \dots, G_{\beta_s}[x_{ij}]$  全部都是零多项式 (一旦证明这一点, 便得到了结果). 任取域  $K$  中元素

$$c_{11}, \dots, c_{1N_1}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mN_m},$$

将  $c_{ij}1_L$  代入上式, 得  $\sum_{k=1}^s r_{\beta_k} \otimes G_{\beta_k}[c_{ij}1_L] = \sum_{k=1}^s r_{\beta_k} G_{\beta_k}[c_{ij}] \otimes 1_L = f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}} c_{1j} \otimes 1_L, \sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}} c_{2j} \otimes 1_L, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}} c_{mj} \otimes 1_L) = f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}} c_{1j}, \sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}} c_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}} c_{mj}) \otimes 1_L = 0$ . 于是由  $\sum_{k=1}^s r_{\beta_k} G_{\beta_k}[c_{ij}] \otimes 1_L = 0$  得到  $\sum_{k=1}^s G_{\beta_k}[c_{ij}] r_{\beta_k} = 0$ , 再由  $r_{\beta_k}$  的  $K$ -线性无关性迫使每个  $G_{\beta_k}[c_{ij}] = 0$ . 总结一下, 现在我们得到了每个  $G_{\beta_k}[x_{ij}]$  关于  $K$  中任意一组元素  $c_{ij}$  的代入是零, 而  $K$  是无限域, 这迫使  $G_{\beta_k}[x_{ij}]$  是零多项式.  $\square$

## 2.6 Posner 定理

在抽象代数中我们熟知整区可以关于它所有非零元构成的乘闭子集作局部化, 来得到商域. 素 PI 环作为整区的推广, 它也可以关于中心正则元集作 (非交换) 局部化, 本节的 Posner 定理告诉我们, 素 PI 环关于中心正则元集作右局部化得到的右商环, 是其中中心上有限维中心单代数, 这可以视作 “整区的商域是自身上的 1 维单代数” 这一事实的推广. 如无特别说明, 本节的含么环么元均非零,  $K$  表示含么交换环.

现在开始我们为 Posner 定理的证明做一些准备. 下面是我们在交换代数中熟知的结论.

**Lemma 2.76** ([22]). 设  $R$  是含么环,  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$  满足系数两两可交换, 那么  $f(x)$  在  $R[x]$  中可逆当且仅当  $a_0$  在  $R$  中可逆且  $a_1, a_2, \dots, a_n$  幂零.

*Proof.* 充分性是明显的, 这里仅验证必要性. 设  $f(x)$  的逆  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$  (设  $n, m \geq 1$ ). 首先  $a_0$  可逆是明显的, 因为  $b_0$  就是它的逆元. 下面说明  $a_1, a_2, \dots, a_n$  幂零. 由  $f(x)g(x) = 1$  我们马上得到  $a_nb_m = 0, a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} = 0$ , 进而  $a_n^2b_{m-1} = 0$ . 归纳地容易证明对每个自然数  $0 \leq r \leq m$ , 有  $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$ . 特别地,  $a_n^{m+1} = 0$ , 所以  $a_n$  幂零. 于是再由  $f(x) - a_nx^n$  可逆知  $a_{n-1}$  幂零, 重复上述讨论可得  $a_1, a_2, \dots, a_n$  幂零.  $\square$

下面的结果来自 Amitsur 于 1956 年的工作.

**Theorem 2.77** ([12]). 设含么环  $R$  没有非零的诣零理想 (例如半本原环), 那么  $R[x]$  是半本原环.

*Proof.* 我们通过反证法说明  $\text{Jac}(R[x])$  是零. 假设  $\text{Jac}(R[x]) \neq 0$ , 设  $\text{Jac}(R[x])$  里所有非零多项式中次数最低的多项式次数为  $n \geq 0$ , 那么

$$I = \{a_n \in R \mid \text{存在 } a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in R, \text{ 使得 } a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \text{Jac}(R[x])\}$$

是  $R$  的非零理想. 下证  $I$  是诣零的来得到矛盾. 任取  $a_n \in I$ , 并设  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in R$  使得  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \text{Jac}(R[x])$ , 那么  $a_nf(x) - f(x)a_n \in \text{Jac}(R[x])$  迫使  $a_na_j = a_ja_n, \forall 0 \leq j \leq n$ . 再利用  $a_{n-1}f(x) - f(x)a_{n-1} \in \text{Jac}(R[x])$  可得  $a_{n-1}a_j = a_ja_{n-1}, \forall 0 \leq j \leq n$ . 归纳地, 可得  $a_ia_j = a_ja_i, \forall 0 \leq i, j \leq n$ . 因此  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \text{Jac}(R[x])$  的系数两两可交换, 考虑多项式  $1 - xf(x)$ , 它在  $R[x]$  中可逆且系数两两可交换, 由前面的引理知系数  $a_0, a_1, \dots, a_n$  幂零, 于是知  $I$  中元素均幂零. 故  $I$  为诣零理想, 矛盾.  $\square$

**Remark 2.78.** 这一结果告诉我们半本原环  $R$  上的多项式环  $R[x]$  仍是半本原的. 但是反过来结论不一定成立, 例如取  $R$  是域  $F$  上形式幂级数环  $F[[x]]$ , 则  $R$  不是半本原环, 但  $R[x]$  是半本原的 (因为  $R$  是整区, 那么  $R$  不存在非零的诣零理想, 所以这里的定理对  $R$  适用).

**Theorem 2.79** ([4]). 设  $K$ -代数  $R$  是半素 PI 代数, 那么  $R$  的任何非零理想  $J$  满足  $J \cap Z(R) \neq 0$ .

*Proof.* 事实上我们只需要证明当  $R$  是半本原 PI 代数的情形结论成立就够了, 因为如果结论对半本原 PI 代数都成立, 那么对半素 PI 代数  $R$  上的多项式环  $R[x]$ , 因为  $R$  没有非零的诣零理想, 所以  $R[x]$  是半本原  $K$ -代数. 于是  $R[x]$  的非零理想  $J[x]$  与  $R[x]$  的中心  $Z(R[x]) = Z(R)[x]$  之交  $J[x] \cap Z(R)[x] = (J \cap Z(R))[x]$  非零, 这就蕴含了  $J \cap Z(R) \neq 0$ . 现在我们证明: 当  $R$  是半本原 PI 代数时, 对  $R$  的任何非零理想  $J$ , 有  $J \cap Z(R) \neq 0$ . 设  $R$  是本原代数族  $\{R_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$  的次直积, 即存在单代数同态  $j: R \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$ , 使得对每个标准投射  $p_\alpha: \prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha \rightarrow R_\alpha$ , 有  $p_\alpha j$  是满射. 因为  $R$  到每个  $R_\alpha$  有满代数同态, 所以每个  $R_\alpha$  是本原 PI 代数, 那么由 Kaplansky 定理知  $R_\alpha$  是单代数. 设  $R_\alpha$  有最小次数  $d_\alpha$ , 那么正整数集  $\{d_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$  有上界 (被  $R$  的最小次数控制). 记  $d_\alpha/2$  为  $m_\alpha$  并设正整数集  $\{m_\alpha \mid \alpha \in \Lambda, p_\alpha j(J) \neq 0\}$  的最大元为  $m$ . 设  $S$  是  $J$  中元素代入 Fromanek 多项式  $F_m$  后所有可能的取值构成的集合, 即  $S = \{F_m(r_1, \dots, r_{m+1}) \in R \mid r_1, \dots, r_{m+1} \in J\}$ , 那么  $S \subseteq J$ . 并且  $S$  中有非零元: 首先存在  $\alpha_0$  使得  $m_{\alpha_0} = m \in \{m_\alpha \mid \alpha \in \Lambda, p_\alpha j(J) \neq 0\}$ . 于是  $F_m$  是  $R_{\alpha_0}$  中心多项式 (见 [推论 2.73]) 保证了存在  $c_1, \dots, c_{m+1} \in R_{\alpha_0}$  使得  $F_m(c_1, \dots, c_{m+1}) \neq 0$ . 注意到这时  $p_{\alpha_0} j(J)$  作为  $R_{\alpha_0}$  这一单环的非零理想必为  $R_{\alpha_0}$  本身, 所以对每个  $c_k$  在  $J$  中找关于  $p_{\alpha_0} j$  的原像即可得到  $S$  中有非零元 (具体地, 对每个  $c_k$ , 设  $b_k \in J$  使得  $p_{\alpha_0} j(b_k) = c_k$ , 那么  $p_{\alpha_0} j(F_m(b_1, \dots, b_{m+1})) = F_m(c_1, \dots, c_{m+1}) \neq 0$  表明  $j(F_m(b_1, \dots, b_{m+1})) \neq 0$ , 于是由  $j$  是单射即得结果).

**Claim.** 对  $\alpha \in \Lambda$ , 有  $p_\alpha j(S) \subseteq Z(R_\alpha)$ . 一旦证明这一断言, 对任给  $b_1, \dots, b_{m+1} \in J$ , 由  $F_m(b_1, \dots, b_{m+1}) \in S$  知  $p_\alpha j(rF_m(b_1, \dots, b_{m+1})) = p_\alpha j(F_m(b_1, \dots, b_{m+1})r), \forall r \in R$ , 于是利用  $j$  是单射可得  $F_m(b_1, \dots, b_{m+1}) \in Z(R), \forall b_1, \dots, b_{m+1} \in J$ . 再由  $S \subseteq J$  便得  $S \subseteq J \cap Z(R)$ .

现在证明断言, 任给  $\alpha \in \Lambda$ , 如果  $m_\alpha < m$ , 那么  $F_m$  是  $R_\alpha$  的一个多项式等式, 特别地,  $p_\alpha j(S) = 0 \subseteq Z(R_\alpha)$ . 如果  $m_\alpha = m$ , 那么  $F_m$  是  $R_\alpha$  的一个中心多项式, 进而  $p_\alpha j(S) \subseteq Z(R_\alpha)$ . 如果  $m_\alpha > m$ , 那么由  $m$  的定义知  $p_\alpha j(J) = 0$ , 特别地,  $p_\alpha j(S) = 0 \subseteq Z(R_\alpha)$ . 断言得证.  $\square$

**Remark 2.80.** 因此半素 PI 代数  $R$  如果中心是域, 那么任何非零理想都包含可逆元. 进而知中心为域的半素 PI 代数是单 PI 代数, 于是由 Kaplansky 定理知  $R$  是其中心上的有限维中心单代数.

**Remark 2.81.** 证明过程表明对半本原 PI 代数  $R$  的任何非零理想  $J$ , 存在正整数  $m$ , 使得

$$0 \neq S = \{F_m(r_1, \dots, r_{m+1}) \in R \mid r_1, \dots, r_{m+1} \in J\} \subseteq J \cap Z(R).$$

当  $R$  是半素 PI 代数时, 因为  $R[x]$  是半本原 PI 代数, 所以对  $R$  的非零理想  $J$ , 存在正整数  $m$ , 使得  $J[x]$  中所有元素关于  $F_m(x, y_1, \dots, y_m)$  的代入得到的集合  $\hat{S}$  非零且含于  $J[x] \cap Z(R)[x]$ . 如果进一步假设  $R$  是无限域  $\mathbb{k}$  上的代数, 我们能够证明  $0 \neq S = \{F_m(r_1, \dots, r_{m+1}) \in R \mid r_1, \dots, r_{m+1} \in J\} \subseteq J \cap Z(R)$ . 首先需要

**Lemma 2.82.** 设  $\mathbb{k}$  是无限域,  $R$  是  $\mathbb{k}$ -代数, 如果  $f(x) \in R[x]$  满足  $f(c) = 0, \forall c \in \mathbb{k}$ , 则  $f = 0$ . 特别地, 如果  $I$  是  $R$  的理想且  $f(x) \in R[x]$  满足  $f(c) \in I, \forall c \in \mathbb{k}$ , 那么  $f \in I[x]$ .

*Proof.* 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , 取两两互异的  $c_1, \dots, c_{n+1} \in \mathbb{k}$ , 则有

$$\begin{pmatrix} c_1^n & c_1^{n-1} & \cdots & c_1 & 1 \\ c_2^n & c_2^{n-1} & \cdots & c_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n+1}^n & c_{n+1}^{n-1} & \cdots & c_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = 0.$$

等号左边的系数矩阵作为  $M_n(\mathbb{k})$  中 Vandermonde 矩阵易见有非零的行列式, 故左乘上此系数矩阵在  $M_n(\mathbb{k})$  中的逆矩阵立即得到  $a_0 = \dots = a_n = 0$ . 要说明第二个结论成立, 只需将第一个结论应用于  $\mathbb{k}$ -代数  $R/I$ .  $\square$

**Proposition 2.83.** 设  $R$  是无限域  $\mathbb{k}$  上的半素 PI 代数, 那么对任何  $R$  的非零理想  $J$ , 存在正整数  $m$  使得

$$0 \neq S = \{F_m(r_1, \dots, r_{m+1}) \in R \mid r_1, \dots, r_{m+1} \in J\} \subseteq J \cap Z(R).$$

*Proof.* 根据 [定理2.79] 的证明过程我们已经看到结论对本原 PI 代数成立. 现在对半素 PI 代数  $R$ ,  $R[x]$  的半本原 PI 代数, 进而由结论对本原 PI 情形成立可知存在正整数  $m$  使得

$$0 \neq \{F_m(f_1(x), \dots, f_{m+1}(x)) \in R[x] \mid f_1(x), \dots, f_{m+1}(x) \in J[x]\} \subseteq J[x] \cap (Z(R))[x].$$

特别地,  $S \subseteq J \cap Z(R)$ . 并且存在  $f_1(x), \dots, f_{m+1}(x) \in J[x]$  使得  $F_m(f_1(x), \dots, f_{m+1}(x))$  是  $R[x]$  中非零多项式. 现在应用 [引理2.82] 便知存在  $c \in \mathbb{k}$  使得  $F_m(f_1(c), \dots, f_{m+1}(c)) \neq 0$ .  $\square$

Ed Posner(美国数学家, 1933-1993) 给出了下面的 Posner 定理, 它表明最小次数为  $d$  的素 PI 环  $R$  在其中心正则元集  $S = Z(R) - \{0\}$  处的右局部分化  $R_S$  是其中心上维数为  $(d/2)^2$  的中心单代数.

**Theorem 2.84** (Posner 定理, [4]). 设  $K$ -代数  $R$  是最小次数为  $d$  的素 PI 代数, 记  $Z = Z(R), S = Z(R) - \{0\}$ , 那么右商环  $R_S$  存在且是其中心  $Z_S$  上的中心单代数,  $R_S$  与  $R$  满足  $K$  上相同的多重线性多项式, 特别地,  $d$  是偶数且  $R_S$  作为  $Z_S$  上的中心单代数维数是  $(d/2)^2$ . 一般称  $d/2$  是素 PI 代数  $R$  的 **PI 次数**, 记为  $\text{PI-deg}(R)$ .

*Proof.*  $R$  是素环保证了  $Z$  是整区,  $R_S$  存在,  $R_S$  的中心是  $Z$  的商域  $Z_S$  且  $R_S$  为素环. 如果我们能够证明  $R_S$  与  $R$  满足  $K$  上相同的多重线性多项式, 那么  $R_S$  是最小次数是  $d$  且为中心是域的 PI 素代数. 而半素 PI 代数的任何非零理想与中心的交非零, 所以  $R_S$  作为中心是域的素 PI 代数必为单代数. 进而  $R_S$  是最小次数为  $d$  的本原 PI 代数, 再由 Kaplansky 定理即得  $d$  是偶数且  $R_S$  是  $Z_S$  上的  $(d/2)^2$  维中心单代数. 因此, 要证明 Posner 定理, 只需要再验证  $R_S$  与  $R$  满足  $K$  上相同的多重线性多项式. 首先由  $R$  是素

环保证了右局部化  $(R_S, \lambda)$  中  $K$ -代数同态  $\lambda: R \rightarrow R_S$  是单射, 因此代数同构  $\lambda(R) \cong R$  保证了  $R_S$  满足的任何多项式等式  $f \in K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  也是  $R$  的多项式等式. 最后说明  $R$  满足的多重线性多项式也被  $R_S$  满足. 如果  $Z$  是有限集, 那么  $Z$  作为有限整区是域, 所以这时  $\lambda: R \rightarrow R_S$  是满射, 进而为代数同构, 于是知这时  $R$  的多项式等式也是  $R_S$  的多项式等式. 如果  $Z$  是无限集, 置  $\Lambda = \{\lambda(s)^{-1} | s \in S\}$ , 考虑  $\lambda(R)$  上以  $\Lambda$  为指标集的未定元集所定义的多项式环  $\lambda(R)[\{x_i\}_{i \in \Lambda}]$ , 那么  $Z_S$  子集  $\{\lambda(s)^{-1} | s \in S\}$  所决定的赋值映射  $\text{ev}: \lambda(R)[\{x_i\}_{i \in \Lambda}] \rightarrow R_S, f(\{x_i\}_{i \in \Lambda}) \mapsto f(\{c\}_{c \in \Lambda})$  是满  $K$ -代数同态, 这表明  $\lambda(R)[\{x_i\}_{i \in \Lambda}]$  满足的  $K$  上任何一个多项式等式都被  $R_S$  满足, 而  $\lambda(R)[\{x_i\}_{i \in \Lambda}]$  作为  $\lambda(R)$  的中心扩张与  $\lambda(R)$  满足相同的多重线性多项式, 故  $\lambda(R)$  满足的任何多重线性多项式都被  $R_S$  满足, 再由  $R \cong \lambda(R)$  得到  $R$  满足的任何多重线性多项式等式都被  $R_S$  满足. 于是我们证明了  $R_S$  与  $R$  满足  $K$  上相同的多重线性多项式.  $\square$

**Remark 2.85.** 上述证明来自 [4]. 也可以从中心扩张的角度更直接地得到素 PI 代数  $R$  与其在中心正则元集  $S$  处的局部化  $R_S$  满足相同的多重线性多项式: 我们已经指出局部化映射  $\lambda: R \rightarrow R_S$  这时是  $K$ -代数嵌入. 那么由  $R_S$  作为  $Z_S$ -模可由  $\lambda(R) \cong R$  生成便知  $R_S$  是  $R$  的中心扩张, 所以从 [推论2.19] 易见  $R$  与  $R_S$  在  $K$  上满足相同的多重线性多项式. 一般地, 如果  $R$  是 PI 代数且  $T$  是  $R$  的一些中心正则元构成的乘闭子集, 那么  $R_T$  存在且局部化映射  $\lambda_T: R \rightarrow R_T$  是代数嵌入. 进而同样的理由表明  $R$  和  $R_T$  满足相同的多重线性多项式.

**Remark 2.86.** 本原 PI 代数作为特殊的素 PI 代数, 其 PI 次数也是最小次数的一半. 所以本原 PI 代数作为其中心上中心单代数的维数就是 PI 次数的平方. 素 PI 代数  $R$  在中心正则元集  $S$  处的局部化  $R_S$  作为中心上中心单代数的维数也是  $R$  的 PI 次数的平方 (Posner 定理也表明  $R$  与  $R_S$  具有相同的 PI 次数). 注意到  $R_S$  作为  $Z_S$  上有限维线性空间的维数与  $K$  无关, 故素 PI 代数  $R$  在系数环上的最小次数不依赖于系数环的选取.

**Remark 2.87.** 素 PI 环可能有不在中心里的正则元, 例如正特征的 Weyl 代数 (回忆 [例2.29]). 对素 PI 环  $R$ , 因为中心  $Z$  中的非零元都是  $R$  中正则元, 所以  $R$  作为  $Z$ -模是无挠的. 特别地, 当  ${}_Z R$  是有限生成模且  $Z$  是 P.I.D. 时,  ${}_Z R$  是有限生成自由  $Z$ -模.

**Remark 2.88.** 事实上, 只要含么环  $R$  在中心  $Z$  上是有限生成模, 那么对任何  $Z$  的乘闭子集  $S$  就能够保证  $Z(R_S) = Z_S$  (见 [引理3.58]).

**Corollary 2.89.** 设  $R$  是素环, 且在中心  $Z$  上是有限生成自由模. 记  $n$  是  $R$  的 PI 次数, 那么  $\text{rank}_Z R = n^2$  且对任何  $Z$  的真理想  $\mathfrak{a}$ ,  $R/\mathfrak{a}R$  是  $Z/\mathfrak{a}$  上秩为  $n^2$  的自由模.

*Proof.* 设  $R$  是  $Z$  上秩为  $r$  的自由模, 记  $S$  是  $R$  的中心正则元集. 那么  $R_S$  是秩为  $r$  的自由  $Z_S$ -模, 由 Posner 定理得到  $r = n^2$ , 即  $\text{rank}_Z R = n^2$ . 现在设  $R = Za_1 \oplus \dots \oplus Za_r$ , 对  $Z$  的任何真理想  $\mathfrak{a}$ , 考虑标准投射  $\pi: R \rightarrow (Z/\mathfrak{a}Z)^r, z_1a_1 + \dots + z_ra_r \mapsto (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_r})$ , 这是满  $Z$ -模同态且  $\text{Ker} \pi = \mathfrak{a}R$ . 于是结论明显成立.  $\square$

**Example 2.90.** Posner 定理表明素 PI 环在中心正则元构成的乘闭子集处作局部化是单环. 一般地, 素环在中心正则元构成的乘闭子集处作局部化未必是单环. 例如考虑域  $\mathbb{k}$  上可数变量的自由代数  $R = \mathbb{k}\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ , 易验证  $Z(R) = \mathbb{k}$ , 这时  $R$  在  $S = Z(R) - \{0\}$  处作局部化同构于自身, 即  $R_S \cong R$ . 但  $R$  明显有非平凡的理想, 例如变量  $x_1$  生成的理想便是非零真理想. 所以  $R_S$  不是单环. 类似地, 利用 Posner 定理可得对域  $\mathbb{k}$  任何自由代数  $R = \mathbb{k}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ , 只要  $n \geq 2$ , 那么  $R$  不是 PI 环.

回忆一个含么环  $R$  称为右 Goldie 环, 如果  $R$  具有有限一致维数且满足右零化子升链条件. 一个右  $R$ -模  $M$  具有有限一致维数指它不含非零子模的无限直和. 如果含么环  $R$  有乘闭子集  $S$  满足  $S$  由一些正则元构成且  $Q = R_S$  存在, 可以证明  $Q$  是 Artin 单环蕴含  $R$  是素右 Goldie 环 (证明可参见 [2]).



**Corollary 2.91.** 设  $K$ -代数  $R$  是素 PI 代数, 那么  $R$  是素右 Goldie 环.

不难验证素 PI 代数在中心乘闭子集处的局部化依然是素代数. Posner 定理使我们能看到

**Corollary 2.92.** 设  $K$ -代数  $R$  是素 PI 代数,  $Z$  是中心,  $S = Z - \{0\}$ . 那么对任何乘闭子集  $T \subseteq S$ ,  $R_T$  也是素 PI 代数,  $R_T$  与  $R$  满足  $K$  上相同多重线性多项式并且  $\text{PI-deg} R = \text{PI-deg} R_S = \text{PI-deg} R_T$ .

*Proof.* 设  $\lambda_T : R \rightarrow R_T, \lambda_S : R \rightarrow R_S$  是局部化映射. 那么由  $\lambda_S(T)$  中元素均在  $R_S$  中可逆知存在唯一的  $K$ -代数同态  $\eta : R_T \rightarrow R_S$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\lambda_T} & R_T \\ & \searrow \lambda_S & \swarrow \eta \\ & R_S & \end{array}$$

不难验证  $\eta$  是单射. 所以  $R_T$  可嵌入  $R_S$ . 现在由 Posner 定理知  $R$  与  $R_S$  满足  $K$  上相同的多重线性多项式, 进而  $R_T$  也与它们满足相同的多重线性多项式. 这说明  $\text{PI-deg} R = \text{PI-deg} R_S = \text{PI-deg} R_T$ .  $\square$

**Corollary 2.93.** 设  $K$ -代数  $R$  是素 PI 代数并有  $\text{PI-deg} R = n$ , 那么对任何正整数  $t > n$ , Formanek 多项式  $F_t(x, y_1, \dots, y_t)$  是  $R$  的多项式等式.

*Proof.* 根据 [推论2.92],  $R$  关于中心正则元构成的乘闭子集  $S$  的局部化  $R_S$  的 PI 次数也是  $n$ . 故由 Posner 定理表明  $R_S$  是 PI 次数为  $n$  的本原 PI 代数. 现在应用 [推论2.73] 即可.  $\square$

**Corollary 2.94.** 设  $\mathbb{k}$  是无限域,  $\mathbb{k}$ -代数  $R$  是素 PI 代数并有  $\text{PI-deg} R = n$ , 那么  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$  是  $R$  的中心多项式.

*Proof.* 由 [推论2.92],  $R$  关于中心正则元构成的乘闭子集  $S$  的局部化  $R_S$  的 PI 次数也是  $n$ . 应用 [推论2.73] 知  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$  是  $R_S$  的中心多项式. 所以存在  $b, a_1, \dots, a_n \in R, s, s_1, \dots, s_n \in S$  使得

$$F_n(b/s, a_1/s_1, \dots, a_n/s_n) \neq 0 \in Z_S.$$

因为 Formanek 多项式关于变量  $y_1, \dots, y_n$  是线性的, 所以  $F_n(b/s, a_1, \dots, a_n) \neq 0$ . 作

$$h(x) = F_n(x, a_1, \dots, a_n) \in R[x],$$

那么  $h(x) \neq 0$  (否则  $h(b/s) = 0$ , 矛盾). 所以由  $\mathbb{k}$  是无限域, 应用 [引理2.82] 得到存在  $\alpha \in \mathbb{k}$  使得  $h(\alpha) \neq 0$ . 这一观察表明  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$  总存在一组关于  $R$  中元素的赋值非零. 我们还需验证 Formanek 多项式在任何一组  $R$  中元素的赋值下的像在  $Z(R)$  中. 只需注意到如果  $a \in R$  满足  $a/1 \in Z(R_S)$ , 那么由  $R$  到  $R_S$  的局部化映射是代数嵌入便可得到  $a \in Z(R)$ . 因此这时  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$  是  $R$  的中心多项式.  $\square$

对模有限的素代数, 我们可以更简洁地证明 Posner 定理的加强版本.

**Theorem 2.95.** 设  $K$ -代数  $R$  是最小次数为  $d$  的素 PI 代数并记  $Z$  是  $R$  的中心. 如果  $R$  存在中心子环  $C$  使得  $R$  是有限生成  $C$ -模, 那么对  $S = C - \{0\}$ ,  $R_S$  都是以  $Z_S$  为中心的有限维中心单代数, 且维数是  $(d/2)^2$ . 特别地, 当  $C = Z$  且  $S = Z - \{0\}$  时, 便得到模有限版本的 Posner 定理.

*Proof.* 通过  $S$  中元素都是  $R$  中的中心正则元容易验证  $R_S$  是素环, 因此由  ${}_C R$  有限生成便知  $R_S$  是域  $C_S = \text{Frac} C$  上有限维素代数. 特别地,  $R_S$  是单边 Artin 素环, 故由下面的 [引理2.96] 知  $R_S$  是 Artin 单环. 由  ${}_C R$  是有限生成模容易验证  $Z(R_S) = Z_S$  (细节参见 [引理3.58]). 下面说明  $R$  和  $R_S$  满足  $K$  上相同多重线性多项式. 一旦证明该断言, 则  $R_S$  的最小次数也是  $d$ , 于是应用 Kaplansky 定理便知  $R_S$  是中心上的  $(d/2)^2$  维中心单代数. 由  $R$  可  $K$ -代数嵌入  $R_S$  知  $R_S$  满足的多项式等式  $R$  也满足. 反之, 如果  $K$  上多重线性多项式  $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  是  $R$  的多项式等式, 我们说明  $R_S$  也满足  $f(x_1, \dots, x_n)$ : 任取  $a_1/s_1, \dots, a_n/s_n \in R_S$ , 由  $1/s_1, \dots, 1/s_n \in Z(R_S)$  知有

$$f(a_1/s_1, \dots, a_n/s_n) = f(a_1/1, \dots, a_n/1)/(s_1 \cdots s_n) = f(a_1, \dots, a_n)/(s_1 \cdots s_n) = 0.$$

因此  $R_S$  和  $R$  在  $K$  上满足相同的多重线性多项式, 进而有相同的最小次数.  $\square$

**Lemma 2.96.** 设  $R$  是单边 Artin 环, 那么  $\max\text{Spec} R = \text{Spec} R$ .

*Proof.* 只需验证任何  $R$  的素理想是极大理想. 因为 Artin 环的极大理想只有有限多个, 故可设  $M_1, \dots, M_n$  是  $R$  所有的极大理想, 根据 Wedderburn-Artin 定理, 这也是  $R$  所有的本原理想. 因此  $\text{Jac} R = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ . 于是由  $R$  的 Jacobson 根是幂零理想知存在正整数  $k$  使得  $(M_1 \cdots M_n)^k = 0$ . 于是  $R$  的任何素理想  $P$  包含  $(M_1 \cdots M_n)^k = 0$ , 这说明  $P$  一定是某个极大理想  $M_{i_0}$ .  $\square$

## 2.7 Amitsur 定理

本节的主要目标是证明任何 PI 代数作为环是 PI 环, 本节中  $K$  表示含么交换环,  $1_K \neq 0$ .

**Lemma 2.97.** 设  $K$ -代数  $R$  是最小次数为  $d$  的本原 PI 代数, 那么  $R$  满足标准等式  $s_d$ . 特别地, 任何最小次数为  $d$  的半素  $K$ -PI 代数也满足  $s_d$ .

*Proof.* 由 [引理2.65] 中的 (4) 知有  $H$ -代数同构  $R \otimes_{Z(R)} H \cong M_m(H)$ , 这也是环同构, 所以 Amitsur-Levitzki 定理告诉我们  $R$  满足  $s_{2m}$ . Kaplansky 的证明过程表明  $d = 2m$ , 所以  $R$  满足标准等式  $s_{2m} = s_d$ . 现设  $K$ -代数  $R$  是最小次数为  $d$  的半素 PI 代数, 那么 [推论2.49] 表明  $R$  没有非零诣零理想, 所以 [定理2.77] 表明  $R[x]$  是半本原的. 因此  $R[x]$  是一些本原  $K$ -代数  $\{R_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$  的次直积,  $R[x]$  到每个  $R_\alpha$  有满代数同态, 所以每个  $R_\alpha$  的最小次数不超过  $d$ , 于是由 [引理2.30] 知每个  $R_\alpha$  满足  $s_d$ , 因此由 [引理2.15] 的 (3) 知  $\prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$  也满足  $s_d$ . 进而由  $R[x]$  可嵌入  $\prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$  知  $R[x]$  满足  $s_d$ , 特别地,  $R$  也满足  $s_d$ .  $\square$

**Corollary 2.98** ([1]). 设半素 PI 环族  $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  的中每个 PI 环的最小次数都不超过  $d$ , 那么  $\prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$  也是最小次数不超过  $d$  的半素 PI 环.

*Proof.* 根据 [引理2.97], 每个  $R_\alpha$  都满足标准等式  $s_d$ . 因此  $\prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$  也满足  $s_d$ .  $\square$

**Corollary 2.99.** 设  $R$  是最小次数为  $d$  的半素 PI 环, 那么存在交换环  $F$  与正整数  $n$  使得  $R$  可嵌入矩阵环  $M_n(F)$ . 特别地,  $M_t(R)$  也是半素 PI 环.

*Proof.* 与前面的引理证明过程类似, [推论2.49] 表明  $R$  没有非零诣零理想, 所以 [定理2.77] 表明  $R[x]$  是半本原的. 于是我们可不妨设  $R$  是最小次数为  $d$  的半本原 PI 环. 设  $R$  是一些本原环  $\{R_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$  的次

直积, 那么每个  $R_\alpha$  的最小次数  $d_\alpha$  不超过  $d$ . [推论2.72] 保证了每个  $R_\alpha$  可保么地嵌入域  $H_\alpha$  上的矩阵环  $M_{m_\alpha}(H_\alpha)$ ,  $m_\alpha = d_\alpha/2$ . 置  $n = (d/2)!$ , 则通过  $M_n(H_\alpha) \cong M_{n/m_\alpha}(M_{m_\alpha}(H_\alpha))$  (这里的同构来自分块矩阵角度) 可将每个  $M_{m_\alpha}(H_\alpha)$  保么地嵌入  $M_n(H_\alpha)$ . 所以  $\prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$  可嵌入  $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_n(H_\alpha) \cong M_n(\prod_{\alpha \in \Lambda} H_\alpha)$ . 故  $R$  可嵌入交换环  $F = \prod_{\alpha \in \Lambda} H_\alpha$  上的  $n$  阶矩阵环. 最后说明半素 PI 环上的矩阵环仍半素 PI. 半素是明显的, 因为矩阵环  $M_t(R)$  的素根就是  $M_t(N(R))$ . 要看到  $M_t(R)$  是 PI 的, 只需注意  $R$  嵌入  $M_n(F)$  蕴含  $M_t(R)$  嵌入  $M_{nt}(F)$ , 后者是 PI 环 (回忆 [例2.23]).  $\square$

**Remark 2.100.** R. S. Irving 在 [23] 中给出了仿射 PI 代数未必能嵌入含么交换环上矩阵环的例子.

**Remark 2.101.** 如果  $R$  是 PI 次数为  $n$  的素 PI 环, 那么存在域  $F$  使得  $R$  能够嵌入矩阵代数  $M_n(F)$  (当  $R$  是  $K$ -代数时, 这还是代数嵌入). 首先通过局部化映射, 由 Posner 定理,  $R$  可嵌入中心单代数  $R_S$ , 其中  $S = Z - \{0\}$ ,  $Z$  是  $R$  的中心. 在 [注记2.66] 中已经指出  $R_S$  的分裂域  $F$  总存在, 即满足存在  $F$ -代数同构  $R_S \otimes_{Z_S} F \cong M_n(F)$  的域  $F \supseteq Z_S$ . 所以  $R_S$  又可嵌入矩阵代数  $M_n(F)$ . 注意到  $R$  的最小次数是  $2n$ , 所以由 Amitsur-Levitzki 定理, 对任何正整数  $m < n$  以及任何含么交换环  $K$ ,  $R$  都无法嵌入  $M_m(K)$ .

因为交换环上的矩阵环具有 IBN 性质, 因此由半素 PI 代数的矩阵嵌入性质马上可知

**Proposition 2.102.** 设  $R$  是 PI 环, 那么  $R$  具有 IBN 性质. 特别地, 有限维代数具有 IBN 性质.

*Proof.* 考虑标准投射  $\pi : R \rightarrow R/N(R)$ , 其中  $N(R)$  是素根. 以及半素 PI 环  $R/N(R)$  的嵌入  $M_n(K)$ , 其中  $K$  是某个含么交换环. 因为  $M_n(K)$  具有 IBN 性质, 所以  $R/N(R)$  也有 IBN 性质. 从而  $R$  也有 IBN 性质.  $\square$

**Theorem 2.103** (Amitsur 定理, [4]). 设  $K$ -代数  $A$  是满足首一多项式  $f \in K\langle x_1, \dots, x_d \rangle$  的 PI 代数, 则存在正整数  $m, n$  使得  $A$  满足  $s_n^m$ . 特别地, 我们得到任何 PI 代数  $A$  作为环也是 PI 的.

*Proof.* 我们先说明对任给满足  $f$  的  $K$ -代数  $T$ , 存在正整数  $n$  使得  $s_n(a_1, \dots, a_n) \in N(T)$ ,  $\forall a_1, \dots, a_n \in T$ . 对  $T$  的任何素理想  $P$ , 有  $T/P$  是最小次数不超过  $f$  次数的素 PI 代数, 而前面的引理表明最小次数是  $q$  的素 PI 代数总满足  $s_q$ , 所以  $T/P$  满足  $s_n$ ,  $\forall P \in \text{Spec}(T)$ , 这里  $n$  是  $f$  的次数. 于是知  $s_n(a_1, \dots, a_n) \in N(T)$ ,  $\forall a_1, \dots, a_n \in T$ . 置指标集  $\Lambda = A^n$ ,  $A_\alpha = A$ ,  $S = \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ , 那么  $S$  满足  $f$  且由前面的讨论知存在正整数  $n$  使得对任给  $u_1, \dots, u_n \in S$  有  $s_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \in N(S)$ . 对每个  $1 \leq i \leq n$ , 命  $u_i$  为  $S$  中指标  $\alpha$  的元素是  $\alpha$  的第  $i$  分量构成的元素, 即若  $\alpha = (r_1, \dots, r_n) \in A^n$ , 那么  $u_i$  在指标  $\alpha$  处的分量是  $r_i$ . 那么由  $s_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \in N(S)$  知存在正整数  $m$  使得  $s_n(u_1, u_2, \dots, u_n)^m = 0$ . 对任给  $r_1, r_2, \dots, r_n \in A$ , 易见  $s_n(u_1, u_2, \dots, u_n)^m \in S$  在指标  $\alpha = (r_1, \dots, r_n)$  处的分量就是  $s_n(r_1, r_2, \dots, r_n)^m$ , 所以  $s_n(r_1, r_2, \dots, r_n)^m = 0, \forall r_1, r_2, \dots, r_n \in A$ .  $\square$

**Remark 2.104.** 因此, PI 代数就是作为环是 PI 环的代数, 任何 PI 环满足的性质 PI 代数也都满足.

事实上, 上述证明过程可以告诉我们更多

**Theorem 2.105** ([2]). 设  $R$  是 PI 环, 那么矩阵环  $M_s(R)$  满足某个标准等式的幂  $s_n^m$ , 故也是 PI 环.

*Proof.* 因为  $M_s(R/N(R)) \cong M_s(R)/M_s(N(R))$ , 所以 [推论2.99] 表明  $M_s(R)/M_s(N(R))$  是半素 PI 环, 进而存在正整数  $n$  使得  $s_n(A_1, \dots, A_n) \in N(M_s(R)) = M_s(N(R)), \forall A_1, \dots, A_n \in M_s(R)$ . 其余讨论与 [定理2.103] 完全相同. 我们可以得到存在正整数  $m$  使得  $s_n(A_1, A_2, \dots, A_n)^m = 0, \forall A_1, A_2, \dots, A_n \in M_s(R)$ .  $\square$

**Corollary 2.106** ([2]). 如果含么环  $R$  是 PI 环, 那么任何有限生成右  $R$ -模  $M_R$  的自同态环  $\text{End}(M_R)$  也是 PI 的. 特别地, 环的 PI 性质是 Morita 不变量.

*Proof.* 设  $M_R$  可由  $n$  个元素生成, 由 [引理2.20] 知存在矩阵环  $M_n(R)$  的 (含么) 子环  $S$  与满环同态  $\varphi: S \rightarrow \text{End}(M_R)$ .  $R$  是 PI 环保证了  $S$  是 PI 的, 因此  $\text{End}(M_R)$  也 PI. 对于后一结论, 根据 Morita I, 任何与  $R$  是 Morita 等价的环  $R'$ , 都同构于  $\text{End}(P_R)$ , 其中  $P_R$  是有限生成投射生成子, 所以  $R'$  也是 PI 环.  $\square$

**Corollary 2.107** ([2]). 如果含么环  $R$  是 PI 环,  $S$  是  $R$  的环扩张 ( $1_S \in R$ ) 满足  $S_R$  是有限生成模, 则  $S$  也是 PI 环. 这推广了 [命题2.24].

## 2.8 零次 Hochschild 同调的非零性

设  $A$  是  $K$ -代数, 其中  $K$  是交换环, 并要求  $A$  是平坦  $K$ -模. 记  $[A, A]$  是  $A$  所有换位子生成的加法子群 (也是  $A$  的  $K$ -子模). 那么  $A$  的 (系数在自身的) 0 次 Hochschild 同调  $H_0(A, A)$  就是  $A/[A, A]$ . 本节我们说明当  $A$  是 PI 代数时,  $H_0(A, A) \neq 0$ . 按照 [24] 的术语, 如果含么环  $R$  满足  $R = [R, R]$ , 则称  $R$  的换位子环. 根据换位子环的定义, 易见换位子环的同态像依然是换位子环. 如果交换环  $L$  是  $K$  的扩环, 那么当  $A$  是换位子环时,  $A \otimes_K L$  也是换位子环: 对形如  $a \otimes \ell$  ( $a \in A, \ell \in L$ ) 的元素, 设  $a = [x_1, y_1] + \cdots + [x_m, y_m]$ , 那么

$$a \otimes \ell = \sum_{k=1}^m [x_k, y_k] \otimes \ell = \sum_{k=1}^m [x_k \otimes \ell, y_k \otimes 1].$$

现在我们可以证明

**Proposition 2.108** ([24]). 设  $A$  是域  $K$  上有限维代数, 那么  $A \neq [A, A]$ .

*Proof.* 这里用反证法证明结论, 假设  $A$  是换位子环. 设  $\bar{K}$  是  $K$  的代数闭包, 那么  $A \otimes_K \bar{K}$  也是换位子环. 命  $R$  是  $A \otimes_K \bar{K}$  关于某个极大理想的商环, 那么  $R$  是代数闭域  $\bar{K}$  上的有限维单代数, 且为换位子环. 由 Artin 单环结构定理, 存在正整数  $n$  使得  $R \cong M_n(\bar{K})$ . 这说明  $M_n(\bar{K}) = [M_n(\bar{K}), M_n(\bar{K})]$ , 等式右边中的矩阵迹都是零, 即不可能有  $M_n(\bar{K}) = [M_n(\bar{K}), M_n(\bar{K})]$  成立, 得到矛盾.  $\square$

**Corollary 2.109** ([24]). 设  $R$  是 PI 环, 那么  $R \neq [R, R]$ . 特别地, 如果  $K$ -代数  $A$  是平坦  $K$ -模且是 PI 代数, 那么  $H_0(A, A) = A/[A, A] \neq 0$ .

*Proof.* 假设  $R = [R, R]$ , 那么任何本原 PI 环都是换位子环. 根据 Kaplansky 定理, 本原 PI 环都是某个域 (中心) 上的有限维代数, 所以本原 PI 环不可能是换位子环, 矛盾.  $\square$

**Remark 2.110.** 任何  $K$ -代数  $A$  的 0 次 Hochschild 上同调  $H^0(A, A) \cong Z(A) \neq 0$ .

## 3 一些 PI 环类

### 3.1 Noether PI 环

如果一个素环  $R$  的任何本质右理想都含有一个非零理想, 则称该素环是右有界的. 如果含么环  $R$  满足对任何素理想  $P$ , 商环  $R/P$  都是右有界环, 则称  $R$  是右全有界的. 类似可定义左有界素环与左全有界环的概念.

如果一个素环既是左有界的又是右有界的, 称该素环**有界**. 如果一个含么环既是右全有界环又是左全有界环, 称该环是**全有界的**. 将右全有界的右 Noether 环简称为**右 FBN 环**. 全有界的双边 Noether 环简称为**FBN 环**. FBN 环自然是特殊的右 FBN 环. 本节的目标是说明右 Noether PI 环是右 FBN 环. Posner 定理 (见 [定理2.84]) 说素 PI 环关于中心正则元集的右经典商环存在且为中心上有限维中心单代数, 特别地, 是 Artin 半单代数, 因此由 Goldie 理论的基本事实 (例如参见 [2, p.57, Proposition 3.1]) 知**素 PI 环是右 Goldie 环**. 进而可对素 PI 环应用 Goldie 定理: 素 PI 环的任何本质右理想都会含  $R$  的某个正则元. 回忆对含么环  $K$  上一个 PI 代数  $A$  (可以没有  $1_A$ ), 如果  $A$  满足某个次数为  $d \geq 1$  的首一多项式  $f \in K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , 那么  $A$  满足  $K$  上某个次数不超过  $d$  的首一多重线性多项式 (回忆 [定理2.16]). 我们利用这个工具先证明:

**Proposition 3.1.** 设含么环  $R$  是 PI 的,  $a \in R$ , 那么对充分大的正整数  $n$ , 右理想  $a^n R + \text{rann}(a^n)$  一定包含  $R$  的某个非零理想.

*Proof.* 考虑集合  $\mathcal{S} = \{l \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \text{存在某个 } l \text{ 次首一多重线性多项式使得对某个正整数 } k, a^k R \text{ 满足该多项式}\}$ , 因为  $R$  是 PI 环, 所以  $\mathcal{S}$  非空, 由良序原理, 存在  $\mathcal{S}$  中最小元  $l$ , 设它对应  $a^k R$  满足的首一多重线性多项式  $g(x_1, x_2, \dots, x_l) \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_l \rangle$ , 那么一方面, 由  $a^n R \subseteq a^k R, \forall n \geq k$  知对每个正整数  $n \geq k$ ,  $a^n R$  也满足  $g$ ; 另一方面, 根据  $l$  的选取, 任何  $a^n R (n \geq k)$  不会满足次数严格低于  $l$  的首一多重线性多项式. 不妨设  $g$  表达式中项  $x_1 \cdots x_l$  的系数是 1. 现在我们将  $g$  如下拆分:  $g(x_1, \dots, x_l) = x_1 g_1(x_2, \dots, x_l) + g_2(x_1, \dots, x_l)$ , 其中  $g_1$  是以  $x_2, \dots, x_l$  为变量的首一多重线性多项式,  $g_2$  是每项不以变量  $x_1$  为首的多重线性多项式 (在证明 Köthe 猜想在 PI 环层面成立时, 我们也用过这个技术). 那么对任何  $r_1, \dots, r_l \in R$ , 有

$$0 = g(a^n r_1, a^{2n} r_2, \dots, a^{2n} r_l) = (a^n r_1) g_1(a^{2n} r_2, \dots, a^{2n} r_l) + g_2(a^n r_1, \dots, a^{2n} r_l), \forall n \geq k.$$

根据前面的讨论,  $g_1$  作为次数严格低于  $l$  的首一多重线性多项式不能零化  $a^{2n} R$ , 故可选取适当  $r_2, \dots, r_l \in R$  使  $g_1(a^{2n} r_2, \dots, a^{2n} r_l) \neq 0$ . 记  $s = g_1(a^{2n} r_2, \dots, a^{2n} r_l) \neq 0, a^{2n} t = g_2(a^n r_1, \dots, a^{2n} r_l) \in R$  (这里  $s$  依赖于  $n$ ), 则

$$a^n r_1 s + a^{2n} t = 0 \Rightarrow a^n (r_1 s + a^n t) = 0, \forall r_1 \in R, n \geq k.$$

因此对充分大的正整数  $n$ ,  $Rs \subseteq a^n R + \text{rann}(a^n)$ , 因为包含关系右边也是右理想, 所以  $RsR \subseteq a^n R + \text{rann}(a^n)$ . 即对充分大的正整数  $n$ ,  $a^n R + \text{rann}(a^n)$  会包含一个非零理想  $RsR$ .  $\square$

**Corollary 3.2.** 设含么环  $R$  是 PI 环,  $a \in R$  满足  $\text{rann}(a) = 0$ , 那么  $aR$  包含某个非零理想.

*Proof.* 因为  $a$  的右零化子是平凡的, 所以对任何首一多重线性的多项式  $g \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_l \rangle$ ,  $aR$  满足  $g$  当且仅当对所有的  $k \geq 1$  有  $a^k R$  满足  $g$ . 这意味着在上一命题证明过程中所构造的集合  $\mathcal{S}$  的最小元  $l$  所对应的首一多重线性多项式  $g$  可以零化每个  $a^k R (k \geq 1)$ . 所以在上一命题证明过程中可取  $n = k = 1$  来得到  $aR$  会包含一个非零理想.  $\square$

现在我们已经做好了证明 “PI 环是右全有界环” 的所有准备.

**Theorem 3.3.** 设  $R$  是 PI 环, 那么对每个素理想  $P$ , 有  $R/P$  是右有界环, 即  $R/P$  任何本质右理想都包含一个非零理想. 从而知 PI 环是右全有界环. 特别地, 右 Noether PI 环是右 FBN 环.

*Proof.* 只要证素 PI 环是右有界环即可. Posner 定理告诉我们素 PI 环是右 Goldie 素环, 从而 Goldie 定理保证了素 PI 环的任何本质右理想会包含一个正则元, 于是 [推论3.2] 表明该正则元生成的右理想必定包含某个非零理想. 故素 PI 环的任何本质右理想会包含某个非零理想.  $\square$



**Example 3.4.** 设含么环  $R$  满足  $Z(R)$  是 Noether 环且  $R$  是有限生成  $Z(R)$ -模, 那么由 [命题2.24] 立即得到  $R$  是双边 Noether 的 PI 环. 因此中心 Noether 且在中心上有限的环都是右 FBN 的. 一般地, 若含么环  $R$  是  $Z(R)$  上的有限生成模, 则每个有限生成左  $R$ -模  $M$  会存在一个生成元集  $\{x_1, \dots, x_n\}$  使得

$$\text{Ann}_R M = \text{ann}_R(x_1) \cap \text{ann}_R(x_2) \cap \dots \cap \text{ann}_R(x_n).$$

上式等号左边明显是右边的子集, 现在我们选取一个使得等号成立的有限生成元集  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . 因为  $M$  这时也是有限生成  $Z(R)$ -模, 取  $\{x_1, \dots, x_n\}$  是  $M$  作为  $Z(R)$ -模的一个生成元集, 容易验证这时每个  $a \in \text{ann}_R(x_1) \cap \text{ann}_R(x_2) \cap \dots \cap \text{ann}_R(x_n)$  一定零化  $M$  中所有元素.

虽然非交换代数中的 Jacobson 猜想目前仍是公开问题, 我们还是可以问对 Noether 的 PI 环是否满足 Jacobson 猜想, A. V. Jategaonkar 于 1974 年证明了更一般的结果:

**Theorem 3.5** ([25]). 设  $R$  是 FBN 环 (例如 Noether 的 PI 环), 那么  $\bigcap_{n=0}^{\infty} (\text{Jac} R)^n = 0$ .

### 3.2 仿射 PI 代数

称含么环  $R$  有**根性质**, 如果对任何  $R$  的真理想  $I$ ,  $R/I$  的 Jacobson 根是诣零理想. 称域  $\mathbb{k}$  上代数  $A$  有**自同态性质**, 如果对每个不可约左  $A$ -模  $M$ ,  $M$  的自同态环在  $\mathbb{k}$  上代数. 称域  $\mathbb{k}$  上代数  $A$  满足**零点定理**, 如果  $A$  具有根性质和自同态性质. 易见域上仿射交换代数总满足零点定理. 回忆含么环  $R$  称为 **Jacobson 环**, 如果对任何  $R$  的素理想  $P$ ,  $P$  均可表示为一些本原理想之交. 因此, 含么交换环是 Jacobson 环当且仅当任何素理想可表示为一些极大理想之交. 同时, 不难看出含么环是 Jacobson 环的充要条件是对任何素理想  $P$  有  $R/P$  是半本原环. 一个基本的观察是:

**Proposition 3.6** ([2]). 设含么环  $R$  满足对每个素理想  $P$ ,  $R/P$  是右 Goldie 环 (例如  $R$  是右 Noether 环或 PI 环). 那么  $R$  是 Jacobson 环的充要条件是对  $R$  的任何真理想  $I$ ,  $\text{Jac}(R/I)$  是诣零理想.

*Proof.* 必要性: 如果  $R$  是 Jacobson 环, 那么对  $R$  的任何真理想  $I$ , 商环  $R/I$  也是 Jacobson 环, 因此  $\text{Jac}(R/I)$  诣零. 充分性: 对任何素理想  $P$ ,  $R/P$  是素右 Goldie 环, 故没有非零诣零理想, 这迫使  $\text{Jac}(R/P) = 0$ .  $\square$

**Remark 3.7.** 一般地, 对交换 Noether 代数  $R$ , 即便  $\text{Jac} R$  是诣零理想也未必能保证  $R$  关于素理想  $P$  的商环  $R/P$  满足  $\text{Jac}(R/P)$  诣零. 例如取  $S$  是域上形式幂级数环  $\mathbb{k}[[x]]$ , 它是交换 Noether 局部整环, 唯一的极大理想  $\mathfrak{m} = (x)$  每个非零元都不是幂零元. 根据 Amitsur 定理, 没有非零诣零理想的含么环上的一元多项式环半本原, 所以  $R = S[x]$  是交换 Noether 半本原环. 故  $\text{Jac} R = 0$ , 但是  $S \cong R/(x)$  有不诣零的 Jacobson 根.

本节的主要目标是证明域上的仿射 PI 代数满足零点定理且是 Jacobson 环. 为此, 我们需要:

**Lemma 3.8.** 设  $R$  是含么环,  $a \in R$ , 那么  $a$  是幂零元当且仅当  $(1 - ax)R[x] = R[x]$ .

*Proof.* 如果  $a$  是幂零元, 设  $a^{n+1} = 0$ , 进而  $(1 - ax)(1 + ax + a^2x^2 + \dots + a^nx^n) = 1$ , 必要性得证. 假设有多项式  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  使得  $(1 - ax)(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = 1$ , 直接计算得到  $a_0 = 1, a_1 = a, \dots, a_n = a^n, aa_n = 0$ , 所以  $a^{n+1} = 0$ . 类似地容易验证  $a$  是幂零元当且仅当  $R[x](1 - ax) = R[x]$ .  $\square$

**Proposition 3.9** ([2]). 设  $\mathbb{k}$ -代数  $A$  满足任何不可约左  $A[x]$ -模自同态环在  $\mathbb{k}$  上代数, 则  $A$  满足零点定理.



*Proof.* 此时  $A \cong A[x]/(x)$  以及  $A$  的任何商代数  $A/I$  也满足任何不可约模在  $\mathbb{k}$  上代数. 用  $A/I$  替换  $A$  知只需验证  $\text{Jac}A$  是诣零理想. 任取  $a \in \text{Jac}A$ , 假设  $a$  不是幂零元, 那么  $A[x](1-ax) \neq A[x]$ , 取  $A[x]$  的一个包含  $1-ax$  的极大左理想  $M$ , 那么  $A[x]/M$  作为不可约左  $A[x]$ -模在  $\mathbb{k}$  上代数. 考察  $x \in A[x]$  决定的左乘变换  $\theta = x_l \in \text{End}_{A[x]}(A[x]/M)$ , 那么  $\theta \neq 0$ , 所以由 Schur 引理知  $\theta^{-1}$  存在. 于是  $\theta^{-1}$  满足  $\mathbb{k}$  上某个首一多项式, 故存在  $g(x) \in \mathbb{k}[x]$  使得  $\theta = g(\theta^{-1})$ , 进而由  $\theta^{-1}(1+M) = a+M$  可知  $g(a)+M = x+M$ , 所以  $(1-g(a)a)x+M=0$ , 而  $1-g(a)x$  在  $R$  中可逆, 矛盾.  $\square$

**Corollary 3.10** ([2]). 设  $\mathbb{k}$ -代数  $A$  是仿射 PI 代数, 那么:

- (1) 任何不可约左  $A$ -模是有限维模;
- (2)  $A$  满足零点定理, 进而也是 Jacobson 环;
- (3) 若进一步  $A$  是 Artin 的, 则  $A$  是有限维代数.

*Proof.* (1) 任取不可约左  $A$ -模  $M$ , 那么  $A/\text{Ann}_A M$  是本原 PI 代数, 用  $A/\text{Ann}_A M$  替换  $A$  可不妨设  $A$  是本原的. 由 Kaplansky 定理知本原 PI 代数是其中心  $Z(A)$  上的有限维中心单代数. 对代数扩链  $\mathbb{k} \subseteq Z(A) \subseteq A$  应用 Artin-Tate 引理可得  $Z(A)$  是  $\mathbb{k}$  上仿射代数. 注意到此时  $Z(A)$  是域, 所以 Zariski 引理保证了  $Z(A)$  是有限维代数, 从而  $A$  是有限维代数 (注意这是在  $A$  本原的假定下), 从而  $M$  是有限维模.

(2) 这时  $A[x]$  作为  $A$  的中心扩张仍是仿射 PI 代数, 进而 [命题3.9] 保证了  $A$  满足零点定理. 特别地,  $A$  满足根性质, 因为  $A$  是 PI 代数, 所以由 [命题3.6] 得到  $A$  是 Jacobson 环.

(3) 此时  ${}_A A$  作为既 Noether 又 Artin 的左  $A$ -模存在合成列, 通过 (1) 知道  ${}_A A$  的每个合成因子是有限维模, 从而  $A$  也是有限维的.  $\square$

**Remark 3.11.** 交换代数中的经典结论是域上交换代数是 Artin 的当且仅当是有限维代数. 该推论说对仿射 PI 代数, 它是 Artin 的当且仅当它是有限维代数. 如果  $\mathbb{k}$  是代数闭域且  $A$  是素仿射 PI 代数, 那么根据上述推论第一个结论的证明过程, 任何不可约左  $A$ -模  $M$  的线性维数不超过  $A/\text{Ann}_A M$  的维数. 本原 PI 代数  $A/\text{Ann}_A M$  的 PI 次数不超过  $A$  的 PI 次数, 所以  $\bar{A} = A/\text{Ann}_A M$  作为其中心  $\bar{Z}$  上的中心单代数维数不超过  $(\text{PI-deg} A)^2$ . 因为  $\bar{A}$  也是仿射  $\mathbb{k}$ -代数, 所以利用 Artin-Tate 引理得到  $\bar{Z}$  是  $\mathbb{k}$  上仿射代数. 而  $\bar{Z}$  是域, 所以 Zariski 引理保证了  $\bar{Z} \supseteq \mathbb{k}$  是有限扩张, 结合  $\mathbb{k}$  是代数闭域迫使  $\bar{Z} = \mathbb{k}$ . 进而知

$$\dim_{\mathbb{k}} M \leq \dim_{\mathbb{k}} \bar{A} = \dim_{\bar{Z}} \bar{A} \leq (\text{PI-deg} A)^2.$$

因此代数闭域上素仿射 PI 代数  $A$  上的不可约模维数都被  $(\text{PI-deg} A)^2$  控制. 我们可以把不可约表示维数上界作进一步改进. 因为  $\bar{A}$  是  $\mathbb{k}$  上有限维代数, 故由 Artin 单环结构定理以及  $\mathbb{k}$  是代数闭域可知存在正整数  $d$  使得  $\bar{A} \cong M_d(\mathbb{k})$ . 因此  $d \leq \text{PI-deg} A$ , 从而  $\dim_{\mathbb{k}} M \leq \text{PI-deg} A$ . 所以代数闭域上素仿射 PI 代数的任何不可约表示维数不超过该代数的 PI 次数.

**Remark 3.12.** 虽然上述推论让我们看到域  $\mathbb{k}$  上仿射 PI 代数的不可约表示总是有限维的, 并且前面提到代数闭域上的仿射素 PI 代数的不可约表示维数有公共的上界, 但对一般域上仿射 PI 代数, 所有的不可约表示未必有公共的上界 (即使额外要求是素代数). 例如考虑  $\mathbb{Q}$ -仿射整区  $\mathbb{Q}[x]$ , 由 Eisenstein 判别法易知  $\mathbb{Q}[x]$  中存在任意正整数次数的不可约多项式 (例如  $x^n - p$ , 这里  $p$  是素数), 对任给正整数  $n$ , 设  $p_n(x)$  是  $\mathbb{Q}[x]$  中  $n$  次不可约多项式. 由  $\mathbb{Q}[x]$  是 P.I.D., 所以  $(p_n(x))$  是极大理想, 进而得到  $\mathbb{Q}[x]$  上线性维数为  $n$  的不可约表示  $\mathbb{Q}[x]/(p_n(x))$ . 该例表明域上仿射素 PI 代数的不可约表示可能没有公共的上界.

**Remark 3.13.** 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上代数, 通常称代数同态  $\chi : A \rightarrow \mathbb{k}$  为  $A$  上可乘线性泛函, 记  $A$  上可乘线性泛函全体为  $\mathcal{M}(A)$ . 根据 Zariski 引理, 如果  $A$  是代数闭域  $\mathbb{k}$  上交换仿射代数, 则  $\theta : \mathcal{M}(A) \rightarrow \max\text{Spec} A, \chi \mapsto \text{Ker} \chi$  是满射. 下面说明  $\theta$  也是单射. 如果  $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{M}(A)$  满足  $\text{Ker} \chi_1 = \text{Ker} \chi_2$ , 记  $\mathfrak{m} = \text{Ker} \chi_1$  为公共的极大理想, 那么对每个  $a \in A$ , 存在唯一的  $\alpha \in \mathbb{k}$  使得  $a - \alpha 1 \in \mathfrak{m}$ , 进而知  $\chi_1(a) = \chi_2(a) = \alpha$ . 所以  $\theta$  是双射, 它给出了  $A$  上可乘线性泛函全体与极大谱间的双射. 对代数闭域  $\mathbb{k}$  上交换仿射代数  $A$ , 由于  $A$  是 Jacobson 环, 这时  $A/\text{Jac} A = A/N(A)$  是约化环, 于是它在同构意义下决定唯一的  $\mathbb{k}$ -仿射簇  $X$ , 满足  $X \cong \max\text{Spec} A$ , 称仿射簇  $X$  为仿射交换代数  $A$  的相伴代数簇. 根据前面的讨论,  $X$  也和  $A$  上可乘线性泛函全体一一对应.

**Corollary 3.14.** 域上仿射 PI 代数的任何素理想是一些极大理想之交.

*Proof.* 根据 Kaplansky 定理, PI 环的本原理想就是极大理想, 现在应用 [推论3.10]. □

**Proposition 3.15.** 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上代数,  $Z$  是  $A$  的中心子代数且  ${}_Z A$  模有限. 那么  $Z$  是仿射  $\mathbb{k}$ -代数当且仅当  $A$  是仿射  $\mathbb{k}$ -代数.

*Proof.* 充分性来自 Artin-Tate 引理, 必要性是明显的. □

### 3.3 Azumaya 代数

本节主要介绍可分代数以及 Azumaya 代数的基本概念与相关性质. 域上的可分代数是域论中有限可分扩张的“结合代数推广”(见 [引理3.16] 与 [定义3.17]). 我们将讨论交换环上的可分代数并说明域上的可分代数的经典定义与交换环场景的定义是等价的 ([推论3.33]), 由此说明域上的代数是 (有限维) 中心单代数当且仅当它是以基域为中心的可分代数, 即域上的“中心可分代数”(见 [命题3.19] 以及 [命题3.32]). Azumaya 代数是交换环上的中心可分代数 (见 [定义3.36]), 即域上的代数是有限维中心单代数当且仅当它是 Azumaya 代数.

**Lemma 3.16.** 设  $K \subseteq L$  是域的有限扩张, 则  $K \subseteq L$  是可分扩张的充要条件是对任何域扩张  $F \supseteq K$  都有  $L \otimes_K F$  是 Artin 半单环.

*Proof.* 充分性: 假设  $K \subseteq L$  不是可分扩张, 那么存在  $\alpha \in L$  使得  $\alpha$  在  $K$  上的最小多项式  $m(x)$  有重根. 考虑  $K$  的代数闭包  $\overline{K}$ , 那么  $m(x)$  在  $\overline{K}$  上可表示为  $m(x) = (x - \beta)^2 g(x)$ , 这里  $\beta \in \overline{K}, g(x) \in \overline{K}[x]$ . 现考虑  $L \otimes_K \overline{K}$  的  $K$ -子代数  $K(\alpha) \otimes_K \overline{K}$ , 由于  $K$ -代数同构  $K(\alpha) \otimes_K \overline{K} \cong K[x]/(m(x)) \otimes_K \overline{K} \cong \overline{K}[x]/(m(x))$ . 注意到  $\overline{K}[x]/(m(x))$  有非零幂零元  $\overline{x - \beta}$ , 所以  $L \otimes_K \overline{K}$  不是 Artin 半单的. 必要性: 设  $K \subseteq L$  是有限可分扩张, 那么本原元定理表明存在  $\alpha \in L$  使得  $L = K(\alpha)$ . 设  $\alpha$  在  $K$  上最小多项式是  $m(x)$ , 则  $m(x)$  无重根, 所以对  $K$  的任何域扩张  $F[x]$ ,  $m(x)$  在  $F[x]$  中可分解为一些两两不相伴的不可约多项式的乘积, 设两两不相伴的首一不可约多项式  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_s(x) \in F[x]$  满足  $m(x) = p_1(x) \cdots p_s(x)$ . 于是由  $L \otimes_K F = K(\alpha) \otimes_K F$  以及  $K(\alpha) \cong K[x]/(m(x))$  可知有  $K$ -代数同构  $L \otimes_K F \cong F[x]/(m(x))$ . 应用中国剩余定理可知

$$L \otimes_K F \cong F[x]/(p_1(x)) \times F[x]/(p_2(x)) \times \cdots \times F[x]/(p_s(x)),$$

即  $L \otimes_K F$  同构于有限多个域的直积, 这说明  $L \otimes_K F$  是 Artin 半单环. □

从 [引理3.16] 可自然地导出域上可分代数的概念, 它是可分扩张的自然推广.

**Definition 3.17** ([4]). 设  $A$  是域  $K$  上有限维代数, 如果  $A$  满足对任何域扩张  $L \supseteq K$  有  $L$ -代数  $A \otimes_K L$  是 Artin 半单代数, 则称  $A$  是可分代数.

**Remark 3.18.** 之后会介绍交换环上的可分代数并证明域这里的定义等价 (见 [推论3.17]).

根据 [引理2.62], 域上任何有限维中心单代数都是可分代数. 反之, 如果域上 Artin 半单代数的中心就是基域, 那么将其分解为有限多个 Artin 单代数的直和观察中心便知该半单代数必定是单代数. 所以域上有限维可分代数如果中心就是基域, 那么该代数是中心单代数. 总结一下, 我们得到

**Proposition 3.19** ([4]). 设  $A$  是有限维代数, 那么  $A$  是中心单代数的充要条件是  $A$  是中心可分代数.

**Proposition 3.20** ([20]). 设  $F$  是域,  $A$  是可分  $F$ -代数, 则  $A^e$  是 Artin 半单代数.

*Proof.* 设  $E$  是  $F$  的代数闭包. 因为  $A$  是有限维  $F$ -代数, 故  $A \otimes_F E$  是域  $E$  上有限维代数. 因为  $A \otimes_F E$  是代数闭域上 Artin 半单代数, 所以存在矩阵环  $M_{n_1}(E), M_{n_2}(E), \dots, M_{n_s}(E)$  使得有  $E$ -代数同构  $A \otimes_F E \cong M_{n_1}(E) \oplus M_{n_2}(E) \oplus \dots \oplus M_{n_s}(E)$ . 于是有  $E$ -代数同构  $A^{op} \otimes_F E = (A \otimes_F E)^{op} \cong (M_{n_1}(E))^{op} \oplus (M_{n_2}(E))^{op} \oplus \dots \oplus (M_{n_s}(E))^{op} \cong M_{n_1}(E) \oplus M_{n_2}(E) \oplus \dots \oplus M_{n_s}(E)$ . 于是有  $E$ -代数同构  $A^e \otimes_F E = (A \otimes_F A^{op}) \otimes_F E \cong (A \otimes_F A^{op}) \otimes_F (E \otimes_E E) \cong A \otimes_F (E \otimes_E E) \otimes_F A^{op} \cong (A \otimes_F E) \otimes_E (E \otimes_F A^{op}) \cong (M_{n_1}(E) \oplus M_{n_2}(E) \oplus \dots \oplus M_{n_s}(E)) \otimes_E (M_{n_1}(E) \oplus M_{n_2}(E) \oplus \dots \oplus M_{n_s}(E)) \cong \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^s M_{n_i n_j}(E)$ , 所以  $A^e \otimes_F E$  是 Artin 半单代数. 命  $\varphi: A^e \rightarrow A^e \otimes_F E, x \mapsto x \otimes 1_F$ , 易见这是单  $F$ -代数同态. 由于  $A^e$  是有限维  $F$ -代数, 故只要再说明  $A^e$  的半单性. 假设  $A^e$  不是 Artin 半单代数, 则存在非零幂零理想, 进而由代数嵌入  $\varphi$  得到  $A^e \otimes_F E$  也有非零幂零理想. 这与  $A^e \otimes_F E$  是 Artin 半单代数矛盾.  $\square$

特别地, [命题3.20] 告诉我们有限维可分代数在包络代数上是 (有限生成) 投射的. 这个观察使人们将可分代数的概念进一步放宽: 设  $A$  是含么交换环  $K$  上的代数, 如果  $A$  作为左  $A^e$ -模是投射的, 那么称  $A$  是可分代数. 之后介绍的 Azumaya 代数 ([定义3.36]) 就是特殊的可分代数. 以下固定  $K$  是含么交换环.

**Proposition 3.21** ([4]). 设  $A$  是  $K$ -代数,  $\mu: A \otimes_K A \rightarrow A, a \otimes b \mapsto ab$  是乘法映射. 那么以下等价:

- (1)  $A$  是可分  $K$ -代数.
- (2) 左  $A^e$ -模正合列  $0 \longrightarrow \text{Ker}\mu \longrightarrow A \otimes_K A^{op} \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$  可裂.
- (3) 存在  $\xi \in A^e$  满足  $\mu(\xi) = 1$  且  $(\text{Ker}\mu)\xi = 0$ .

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2): 由  $A$  是投射左  $A^e$ -模便知. (2) $\Rightarrow$ (1): 这时  $A$  作为左  $A^e$ -模是  $A^e$  的直和因子, 所以  $A$  是投射左  $A^e$ -模. 下面说明 (2) 与 (3) 等价. (2) $\Rightarrow$ (3): 这时存在左  $A^e$ -模同态  $s: A \rightarrow A^e$  使得  $\mu s = \text{id}_A$ . 命  $\xi = s(1)$ , 那么  $\mu(\xi) = 1$  且对任何  $A^e$  中形如  $a \otimes 1 - 1 \otimes a$  的元素, 有  $a \otimes 1 - 1 \otimes a$  数乘  $1 \in A$  得到零. 因此

$$(a \otimes 1 - 1 \otimes a)\xi = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)s(1) = s((a \otimes 1 - 1 \otimes a) \cdot 1) = 0.$$

现在注意到  $\text{Ker}\mu$  作为  $A^e$  的左理想可由  $\{a \otimes 1 - 1 \otimes a | a \in A\}$  生成, 故  $(\text{Ker}\mu)\xi = 0$ .

(3) $\Rightarrow$ (2): 定义  $s: A \rightarrow A^e, a \mapsto (a \otimes 1)\xi$ . 由  $(\text{Ker}\mu)\xi = 0$  知对任何  $b \otimes c \in A^e$  有

$$s((b \otimes c)a) = s(bac) = (bac \otimes 1)\xi = (ba \otimes c)\xi = (b \otimes c)s(a), \forall a \in A.$$

上述观察表明  $s$  是左  $A^e$ -模同态, 再由  $\mu(\xi) = 1$  得到  $\mu s = \text{id}_A$ .  $\square$

**Remark 3.22.** 我们指出满足  $\mu(\xi) = 1$  且  $(\text{Ker}\mu)\xi = 0$  的元素  $\xi \in A^e$  一定是  $A^e$  中的幂等元. 只需注意到

$$\xi^2 - \xi = (\xi - 1 \otimes 1)\xi \in (\text{Ker}\mu)\xi = 0.$$

称满足上述条件的  $\xi$  为  $A$  的**可分幂等元** (注意  $\xi \in A^e$ ). 可分代数的可分幂等元一般不唯一. 例如考虑矩阵代数  $M_n(K)$ , 并记  $E_{ij}$  是  $(i, j)$  元为 1 其余分量元素为零的基础矩阵, 那么对任何正整数  $1 \leq j \leq n$ , 可直接验证

$$\sum_{i=1}^n E_{ij} \otimes E_{ji}$$

都是  $M_n(K)$  的可分幂等元. 特别地,  $M_n(K)$  是可分  $K$ -代数.

**Example 3.23.** 有理数域  $\mathbb{Q}$  作为  $\mathbb{Z}$ -代数是可分的, 但  $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$  不是有限生成的也不是投射的.

*Proof.* 因为任何  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  中元素可表示为  $q \otimes 1 (q \in \mathbb{Q})$  的形式, 故容易验证乘法映射  $\mu : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  是加群同构. 特别地,  $\text{Ker}\mu = 0$ . 由此易见  $\xi = 1 \otimes 1$  就是  $\mathbb{Q}$  的可分幂等元.  $\square$

$K$ -代数  $A$  系数在  $A$ - $A$  双模  $M$  的 0 次 Hochschild 上同调  $H^0(A, M) = \text{Ext}_{A^e}^0(A, M) = \text{Hom}_{A^e}(A, M)$ , 后者就是双模  $M$  的中心, 以下记作  $\mathcal{Z}_A(M)$ . 那么取双模中心诱导函子  $\mathcal{Z}_A : A^e\text{-Mod} \rightarrow K\text{-Mod}$ . 则

**Lemma 3.24** ([26]). 设  $A$  是  $K$ -代数. 对  $A$ - $A$  双模  $M$ , 定义  $\eta_M : \text{Hom}_{A^e}(A, M) \rightarrow \mathcal{Z}_A(M), \varphi \mapsto \varphi(1)$ . 那么

$$\eta : \text{ob } A^e\text{-Mod} \rightarrow \bigcup_{M \in \text{ob } A^e\text{-Mod}} \text{Hom}_K(\text{Hom}_{A^e}(A, M), \mathcal{Z}_A(M)), M \mapsto \eta_M$$

是  $\text{Hom}_{A^e}(A, -)$  到  $\mathcal{Z}_A(-)$  的自然同构. 特别地,  $\mathcal{Z}_A(-)$  是左正合函子.

**Example 3.25.** 设  $A$  是  $K$ -代数, 则有  $K$ -模同构  $\text{Hom}_{A^e}(A, A) \cong \mathcal{Z}_A(A)$ . 如果进一步  $A$  是可分  $K$ -代数, 那么 [命题3.21] 给出可裂左  $A^e$ -模短正合列  $0 \longrightarrow \text{Ker}\mu \longrightarrow A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$ , 于是由  $\text{Hom}_{A^e}(-, A^e)$  是加性函子可得可裂短正合列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{A^e}(A, A^e) \xrightarrow{\mu^*} \text{Hom}_{A^e}(A^e, A^e) \longrightarrow \text{Hom}_{A^e}(\text{Ker}\mu, A^e) \longrightarrow 0,$$

所以当  $A$  是可分代数时, 进一步有  $K$ -模同构  $\text{Hom}_{A^e}(A, A^e) \cong \mathcal{Z}_A(A) \cong \{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\}$  (易见这是  $A^e$  的右理想). 具体地, 这里的  $K$ -模同构可由  $\varphi : \text{Hom}_{A^e}(A, A^e) \rightarrow \{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\}, f \mapsto f(1)$  给出.

[引理3.24] 使我们能够用函子性质给出可分性的刻画.

**Proposition 3.26** ([26]). 设  $A$  是  $K$ -代数, 那么  $A$  是可分  $K$ -代数的充要条件是  $\mathcal{Z}_A(-)$  是右正合函子.

**Corollary 3.27** ([26]). 设  $A_1, A_2, Z_1, Z_2$  都是  $K$ -代数,  $Z_1, Z_2$  交换. 则当  $A_1$  是可分  $Z_1$ -代数,  $A_2$  是可分  $Z_2$ -代数且  $Z_1 \otimes_K Z_2, A_1 \otimes_K A_2 \neq 0$  时,  $A_1 \otimes_K A_2$  赋予下述  $Z_1 \otimes_K Z_2$ -模结构后成为的代数是可分  $(Z_1 \otimes_K Z_2)$ -代数:  $(z_1 \otimes z_2)(a_1 \otimes a_2) = z_1 a_1 \otimes z_2 a_2, \forall z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ .

*Proof.* 根据 [命题3.26], 只需验证  $(Z_1 \otimes_K Z_2)$ -代数  $A_1 \otimes_K A_2$  决定的双模中心函子  $\mathcal{Z}_{A_1 \otimes_K A_2}(-)$  右正合 (所以下面的包络代数  $(A_1 \otimes_K A_2)^e$  是在  $Z_1 \otimes_K Z_2$  上作张量积的). 结合其左正合性, 我们只需验证双模中心函子  $\mathcal{Z}_{A_1 \otimes_K A_2}(-)$  保持满同态. 任给满左  $(A_1 \otimes_K A_2)^e$ -模同态  $f : M \rightarrow N$ . 通过标准映射  $\ell_1 : A_1 \rightarrow A_1 \otimes_K A_2, a_1 \mapsto$

$a_1 \otimes 1$  (易见它是左  $Z_1$ -模同态) 可将  $M, N$  视作  $A_1$ - $A_1$  双模并使得  $f : M \rightarrow N$  成为左  $(A_1)^e$ -模同态 (这里  $A_1^e = A_1 \otimes_{Z_1} A_1^{op}$ ), 于是由  $A_1$  是可分  $Z_1$  代数可知  $\mathcal{Z}_{A_1}(f) : \mathcal{Z}_{A_1}(M) \rightarrow \mathcal{Z}_{A_1}(N)$  是满射. 再通过标准映射  $\ell_2 : A_2 \rightarrow A_1 \otimes_K A_2, a_2 \mapsto 1 \otimes a_2$  将  $M, N$  视作  $A_2$ - $A_2$  双模. 那么由  $\text{Im} \ell_1$  与  $\text{Im} \ell_2$  中元素可交换得到  $\mathcal{Z}_{A_1}(M)$  与  $\mathcal{Z}_{A_1}(N)$  都是  $A_2$ - $A_2$  双模. 进而由  $A_2$  是  $Z_2$ -可分代数知  $\mathcal{Z}_{A_2} \mathcal{Z}_{A_1}(f) : \mathcal{Z}_{A_2} \mathcal{Z}_{A_1}(M) \rightarrow \mathcal{Z}_{A_2} \mathcal{Z}_{A_1}(N)$  也是满射. 注意到  $\mathcal{Z}_{A_1 \otimes_K A_2} = \mathcal{Z}_{A_2}(-) \mathcal{Z}_{A_1}(-)$ , 所以  $\mathcal{Z}_{A_1 \otimes_K A_2}(f)$  是满射.  $\square$

**Remark 3.28.** 一般  $K$ -代数  $A, B$  的张量积代数  $A \otimes_K B$  可能是零环, 例如  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . 但是  $A \otimes_K A$  一定是非零的, 因为乘法映射  $\mu : A \otimes_K A \rightarrow A$  是满射.

通过上面的推论我们立即看到可分性不随“系数环的扩张”改变.

**Corollary 3.29** ([26]). 设  $A, S$  都是  $K$ -代数, 满足  $A$  是可分  $K$ -代数且  $S$  交换并设  $A \otimes_K S \neq 0$  (根据 [例3.23],  $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$  是可分代数, 但  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ ). 那么  $A \otimes_K S$  是可分  $S$ -代数.

*Proof.* 在 [推论3.27] 中取  $A_1 = A, A_2 = S, Z_1 = K, Z_2 = S$  便得结论.  $\square$

**Proposition 3.30** ([26]). 设  $K$ -代数  $A$  是可分代数,  $I$  是  $A$  的真理想. 那么  $A/I$  也是可分  $K$ -代数并且中心

$$Z(A/I) = (Z(A) + I)/I.$$

*Proof.* 任何  $(A/I)$ -( $A/I$ ) 双模  $M$  都可自然视作  $A$ - $A$  双模并且  $\mathcal{Z}_A(M) = \mathcal{Z}_{A/I}(M)$ . 现在由  $A$  是可分  $K$ -代数知  $\mathcal{Z}_A(-)$  是正合函子, 所以  $\mathcal{Z}_{A/I}(-)$  也是正合函子. 现在应用 [命题3.26] 便知  $A/I$  是可分  $K$ -代数. 考虑标准投射  $\pi : A \rightarrow A/I$ , 作用函子  $\mathcal{Z}_A(-)$  得到满同态  $\mathcal{Z}_A(\pi) : \mathcal{Z}_A(A) \rightarrow \mathcal{Z}_A(A/I)$ . 注意到  $\mathcal{Z}_A(A/I) = Z(A/I)$ , 所以  $Z(A/I)$  就是  $Z(A)$  在  $\pi$  下的像集, 得证.  $\square$

**Remark 3.31.** 同样地, 如果  $K$ -代数  $A$  是可分代数, 那么对  $K$  的任何真理想  $\mathfrak{a}$ ,  $A/\mathfrak{a}A$  是可分  $K/\mathfrak{a}$ -代数.

在 [例3.23] 中我们看到存在在系数环上非投射非有限生成的可分代数. 我们指出

**Proposition 3.32** ([26]). 设  $A$  是可分  $K$ -代数且  ${}_K A$  是投射模. 那么  $A$  是有限生成  $K$ -模.

*Proof.* 设  ${}_K A$  有对偶基  $\{x_i | i \in I\} \subseteq A, \{x_i^* | i \in I\} \subseteq A^*$ . 对每个  $i \in I$ , 定义  $A^e$  到  $A$  的左  $A$ -模同态

$$1 \otimes x_i^* : A^e \rightarrow A, a \otimes b \mapsto ax_i^*(b).$$

则对任何  $a \otimes b \in A^e$  有  $a \otimes b = \sum_{i \in I} ax_i^*(b) \otimes x_i = \sum_{i \in I} [(1 \otimes x_i^*)(a \otimes b)](1 \otimes x_i)$ . 故  $A^e$  作为左  $A$ -模有对偶基

$$\{1 \otimes x_i | i \in I\} \subseteq A^e, \{1 \otimes x_i^* | i \in I\} \subseteq \text{Hom}_A(A^e, A).$$

设  $\xi = \sum_{j=1}^n e_j \otimes e'_j$  是  $A$  的可分幂等元. 那么对任何  $a \in A$ , 考虑  $(a \otimes 1)\xi$  关于上述对偶基的表示

$$(a \otimes 1)\xi = \sum_{i \in I} [(1 \otimes x_i^*)((a \otimes 1)\xi)](1 \otimes x_i),$$

对上述等式两边作用乘法  $\mu$  并利用可分幂等元的性质 (回忆 [命题3.21]) 便知

$$a = (a \otimes 1)\mu(\xi) = \sum_{i \in I} [(1 \otimes x_i^*)((a \otimes 1)\xi)]x_i = \sum_{i \in I} (a \otimes 1)[(1 \otimes x_i^*)(\xi)]x_i.$$

根据对偶基的性质, 仅有有限多个指标  $i \in I$  使得  $(1 \otimes x_i^*)((a \otimes 1)\xi) \neq 0$ . 再注意到

$$(a \otimes 1)[(1 \otimes x_i^*)(\xi)]x_i = [(1 \otimes x_i^*)((a \otimes 1)\xi)]x_i = [(1 \otimes x_i^*)((1 \otimes a)\xi)]x_i = (1 \otimes x_i^*)(\sum_{j=1}^n e_j \otimes e'_j a)x_i = \sum_{j=1}^n e_j x_i^*(e'_j a),$$

所以存在有限多个  $e_j x_i$  可  $K$ -线性生成  $A$ . 这说明  ${}_K A$  有限生成.  $\square$

现在我们可以得到 [定义3.17] 给出的 (经典) 可分代数与交换环上可分代数的等价性.

**Corollary 3.33** ([26]). 设  $A$  是域  $K$  上代数, 那么  $A$  是投射左  $A^e$ -模当且仅当  $A$  是域  $K$  上有限维代数并且对任何域扩张  $L \supseteq K$  有  $A \otimes_K L$  是 Artin 半单代数.

*Proof.* 充分性来自 [命题3.20]. 根据 [命题3.32], 要证明必要性只需再验证对任何域扩张  $L \supseteq K$  有  $A \otimes_K L$  是 Artin 半单代数. 前面已经指出交换环上的矩阵代数总是其包络代数上的投射模, 特别地,  $L$  是  $L^e$ -投射模, 所以由 [推论3.27] 知  $A \otimes_K L$  是交换环  $L$  上的可分代数 (其为自身的包络代数上的投射模), 这一观察说明我们要完成推论的证明只需验证  $A$  是投射左  $A^e$ -模蕴含  $A$  是 Artin 半单环即可. 而这由下面的 [引理3.34] 便知.  $\square$

**Lemma 3.34.** 设  $\mathbb{k}$  是域,  $R$  是  $\mathbb{k}$ -代数, 则  $\text{l.gl.dim} R \leq \text{p.dim}_{R^e} R$ .

*Proof.* 不妨设  $\text{p.dim}_{R^e} R$  有限. 如果  $R$  作为左  $R^e$ -模的投射维数是  $n$ , 可设左  $R^e$ -模投射分解

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

该复形每项作为右  $R$ -模投射, 所以作为右  $R$ -模复形可裂正合, 进而对任何左  $R$ -模  $M$  有正合列

$$0 \longrightarrow P_n \otimes_R M \xrightarrow{d_n \otimes 1} P_{n-1} \otimes_R M \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_R M \xrightarrow{d_1 \otimes 1} P_0 \otimes_R M \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} R \otimes_R M \longrightarrow 0,$$

注意到双模同构  $(R \otimes_{\mathbb{k}} R^{op}) \otimes_R M \rightarrow R \otimes_{\mathbb{k}} M, a \otimes b \otimes x \mapsto a \otimes bx$ , 并且  $M$  作为线性空间自然是自由  $\mathbb{k}$ -模, 所以对任何投射左  $R^e$ -模  $Q$ ,  $Q \otimes_R M$  是投射左  $R$ -模. 于是任何左  $R$ -模  $M$  的投射维数不超过  $n$ .  $\square$

作为 [命题3.21] 和 [推论3.33] 的应用, 我们来证明有限可分扩张的有限可分扩张依然可分.

**Proposition 3.35.** 设  $K \subseteq L \subseteq E$  是域的有限扩张, 满足  $L \supseteq K, E \supseteq L$  均为可分, 则  $E \supseteq K$  也可分.

*Proof.* 根据 [命题3.21] 和 [推论3.33], 我们只需要证明  ${}_K E$  是可分代数. 依 [命题3.21],  ${}_L E$  和  ${}_K L$  作为可分代数存在可分幂等元

$$\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in E \otimes_L E, \sum_{j=1}^m c_j \otimes d_j \in L \otimes_K L.$$

命  $\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i c_j \otimes b_i d_j \in E \otimes_K E$ , 下面说明  $\xi$  是  $E$  作为  $K$ -代数的可分幂等元来完成证明. 记  $\mu: E \otimes_K E \rightarrow E$  是乘法映射, 那么由  $\xi$  的定义不难看到  $\mu(\xi) = 1$ , 故只需再验证对任何  $\alpha \in E$  有  $(\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha)\xi = 0$  即可. 为此, 作映射  $E \times E \rightarrow E \otimes_K E, (u, v) \mapsto (\sum_{j=1}^m c_j \otimes d_j)(u \otimes v)$ , 利用  $\sum_{j=1}^m c_j \otimes d_j$  是  $L$  作为  $K$ -可分代数的可分幂等元可直接验证该映射是  $L$ -平衡映射, 所以它诱导加群同态

$$\theta: E \otimes_L E \rightarrow E \otimes_K E, u \otimes v \mapsto \sum_{j=1}^m c_j u \otimes d_j v.$$



为了完成命题证明, 还需验证对任何  $\alpha \in E$  有  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha a_i c_j \otimes b_i d_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i c_j \otimes b_i d_j \alpha$  (在  $E \otimes_K E$  中).

因为  $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$  是  $E$  作为  $L$ -代数的可分幂等元, 所以对任何  $\alpha \in E$ , 在  $E \otimes_L E$  中有  $\sum_{i=1}^n \alpha a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \alpha$ , 现在对该等式两边同时左乘上  $\sum_{j=1}^m c_j \otimes d_j \in E \otimes_L E$  用加群同态  $\theta$  作用便得结论.  $\square$

特别地, 域上的代数是有限维中心单代数的充要条件是该代数的中心是基域且是中心上可分代数 (见 [命题3.19]). 下面我们考虑交换环上的“中心可分代数”——Azumaya 代数.

**Definition 3.36** ([4]). 设  $A$  是  $K$ -代数并设  $Z$  是  $A$  的中心. 如果  $A$  是  $Z$  上可分代数, 即  $A$  是投射左  $A \otimes_Z A^{op}$ -模, 那么称  $A$  是 **Azumaya 代数**. 一些文献中也称为**中心可分代数**.

**Remark 3.37.** 因为  $Z$  是  $A$  的含么子环, 所以  ${}_Z A$  是忠实模. 如果  $K$ -代数  $A$  作为左  $A \otimes_Z A^{op}$ -模是有限生成投射生成子, 那么根据定义便知  $A$  是 Azumaya 代数. 之后会说明反之亦然 (见 [定理3.47]).

**Example 3.38.** 域上的代数是有限维中心单代数当且仅当它是 Azumaya 代数.

**Example 3.39.** Kaplansky 定理表明本原 PI 环是中心上有限维中心单代数, 故是 Azumaya 代数.

**Example 3.40.** 交换环上的矩阵代数是 Azumaya 代数. 特别地, 交换环是自身上 Azumaya 代数.

*Proof.* 之前已经指出  $M_n(K)$  有可分幂等元  $\sum_{i=1}^n E_{ij} \otimes E_{ji}$ , 所以矩阵代数是  $K$ -可分代数. 再由  $Z(M_n(K)) = KI_n$  便知矩阵代数是中心可分代数, 即 Azumaya 代数.  $\square$

下面的引理会在证明 Artin-Procesi 定理 (见 [定理3.65]) 时用到, 初次阅读可跳过.

**Lemma 3.41** ([4]). 设  $K$ -代数  $A$  有中心  $Z$ . 若存在  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$  使得

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1 \text{ 且 } \sum_{i=1}^n a_i x b_i \in Z, \forall x \in A,$$

那么  $A$  是 Azumaya 代数.

*Proof.* 命  $\xi = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ , 那么  $\mu(\xi) = 1$  且  $\xi \cdot A \subseteq Z$ . 记  $J = \text{Ker} \mu$ , 那么  $(J\xi) \cdot A \subseteq J \cdot Z = 0$ . 考虑  $A^e$  在自身上的 (左模) 作用:

$$*_1 : A^e \times A^e \rightarrow A^e, (\zeta, a \otimes b) \mapsto (\zeta \cdot a) \otimes b, *_2 : A^e \times A^e \rightarrow A^e, (\zeta, a \otimes b) \mapsto a \otimes (\zeta \cdot b).$$

易见  $(A^e, *_1)$  和  $(A^e, *_2)$  是左  $A^e$ -模. 因为  $\xi \cdot A \subseteq Z$ , 所以  $a(\xi \zeta \cdot b) \otimes 1 = a \otimes (\xi \zeta \cdot b), \forall a, b \in A, \zeta \in A^e$ . 如果我们能够证明  $\xi$  在  $A^e$  中生成的理想就是  $A^e$ , 即  $A^e \xi A^e = A^e$ , 那么可以通过下述计算得到  $(A^e \xi A^e) *_2 \lambda \subseteq (\lambda *_1 A^e) A^e, \forall \lambda \in A^e$ : 对任何  $\eta, \zeta, \lambda \in A^e$ , 设  $\xi \zeta = \sum_{j=1}^m c_j \otimes d_j, \lambda = \sum_{k=1}^t g_k \otimes h_k$ , 并注意  $(\xi \zeta) \cdot A \subseteq Z$ , 我们有

$$(\eta \xi \zeta) *_2 \lambda = \sum_{k=1}^t g_k \otimes (\eta \xi \zeta) \cdot h_k = \sum_{k=1}^t g_k \otimes \eta \cdot ((\xi \zeta) \cdot h_k) = \sum_{k=1}^t g_k \otimes (\eta \cdot 1)((\xi \zeta) \cdot h_k) = \sum_{k=1}^t g_k((\xi \zeta) \cdot h_k) \otimes (\eta \cdot 1).$$

再代入  $\xi\zeta$  便知  $(\eta\xi\zeta) *_2 \lambda = \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^m g_k c_j h_k d_j \otimes (\eta \cdot 1) = \sum_{j=1}^t [\sum_{k=1}^m g_k c_j h_k \otimes (\eta \cdot 1)](d_j \otimes 1) \in (\lambda *_1 A^e)A^e$ . 而  $(J\xi) \cdot A = 0$  表明  $(J\xi) *_1 A^e = 0$ , 所以如果我们能够证明  $A^e \xi A^e = A^e$ , 便有

$$J\xi \subseteq A^e *_2 (J\xi) = (A^e \xi A^e) *_2 (J\xi) \subseteq (J\xi *_1 A^e)A^e \subseteq (J\xi) *_1 A^e = 0,$$

进而知  $\xi$  是  $A$  作为  $Z$ -代数的可分幂等元, 这保证了  $A$  是 Azumaya 代数. 下面我们说明  $A^e \xi A^e = A^e$  来完成该引理的证明. 命  $N = \{a \in A | a \otimes 1 \in A^e \xi A^e\}$ , 那么这是  $A$  的理想. 下证  $N = A$  来得到  $1 \otimes 1 \in A^e \xi A^e$ .

假设  $N$  是  $A$  的真理想, 那么存在  $A$  的极大理想  $M$  使得  $N \subseteq M$ . 进而有标准满环同态

$$p: A \otimes_Z A^{op} \rightarrow (A/M) \otimes_Z (A/M)^{op}, a \otimes b \mapsto \bar{a} \otimes \bar{b},$$

其中  $Z$  表示  $A/M$  的中心. 注意到  $A/M$  是单环, 所以  $A/M$  是  $Z$  上 (可能无限维) 中心单代数, 于是应用 [引理2.62] 可知  $(A/M) \otimes_Z (A/M)^{op}$  是单环. 类似地可在  $(A/M) \otimes_Z (A/M)^{op}$  上定义作用  $\bar{*}_2$ , 并容易验证对任何  $\zeta, \eta \in A^e$  有  $p(\zeta *_2 \eta) = p(\zeta) \bar{*}_2 p(\eta)$ . 现在  $0 \neq p(1 \otimes 1) = p(\xi *_2 (1 \otimes 1)) = p(\xi) \bar{*}_2 p(1 \otimes 1)$ . 特别地,  $p(\xi) \neq 0$ . 于是由  $(A/M)^e$  是单环得到  $p(A^e \xi A^e) = (A/M)^e p(\xi) (A/M)^e = (A/M)^e = p(A^e)$ . 那么

$$p(\xi) \bar{*}_2 p(A^e) = p(\xi) \bar{*}_2 p(A^e \xi A^e) = p(\xi *_2 (A^e \xi A^e)).$$

之前已经指出对任何  $a, b \in A$  有  $\xi *_2 (a \otimes b) = a(\xi \cdot b) \otimes 1$ , 所以  $\xi *_2 A^e$  中元素都形如  $r \otimes 1$ . 并且可通过直接 (形式上的) 计算得到  $A^e *_2 (A^e \xi A^e) \subseteq A^e \xi A^e$ . 现在  $\xi *_2 (A^e \xi A^e) \subseteq A^e \xi A^e$  且左边集合的元素都形如  $r \otimes 1$ . 所以  $\xi *_2 (A^e \xi A^e) \subseteq N \otimes_Z 1$  (形式记号). 于是  $p(\xi *_2 (A^e \xi A^e)) \subseteq \{\bar{n} \otimes \bar{1} \in (A/M)^e | n \in N\} = 0$ .  $\square$

下面的命题说 Azumaya 代数作为中心上的模, 中心总是该代数的直和因子.

**Proposition 3.42** ([26]). 设  $K$ -代数  $A$  是 Azumaya 代数并设有中心  $Z$ . 那么  $Z$  是  ${}_Z A$  的直和因子.

*Proof.* 首先有标准  $K$ -代数同态  $\theta: A^e \rightarrow \text{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$ , 这里  $\alpha_\ell$  表示  $\alpha$  决定的  $A$  上左乘变换. 取  $A$  作为可分  $Z$ -代数的可分幂等元  $\xi$ , 那么  $\theta(\xi)$  是  $\text{End}_Z A$  中幂等元. 记  $p = \theta(\xi)$ , 那么  $p^2 = p$  表明  $A$  有  $Z$ -模直和分解  $A = p(A) \oplus (\text{id}_A - p)(A)$ . 下面说明  $p(A) = Z$  来得到结论. 一方面,  $p(1) = \theta(\xi)(1) = \mu(\xi) = 1$ , 所以  $Z \subseteq p(A)$ . 另一方面, 固定  $a \in A$ , 对任何  $b \in A$  有  $p(a)b = (1 \otimes b)\theta(\xi)(a) = (1 \otimes b)(\xi \cdot a) = [(1 \otimes b)\xi] \cdot a = [(b \otimes 1)\xi] \cdot a$ , 这里最后一个等号用到了  $(\text{Ker } \mu)\xi = 0$ . 于是  $p(a)b = [(b \otimes 1)\xi] \cdot a = (b \otimes 1)(\xi \cdot a) = bp(a)$ . 这说明  $p(A) \subseteq Z$ .  $\square$

**Corollary 3.43** ([26]). 设  $K$ -代数  $A$  是 Azumaya 代数并设有中心  $Z$ . 那么对  $Z$  的任何理想  $\mathfrak{a}$  有  $\mathfrak{a}A \cap Z = \mathfrak{a}$ .

*Proof.* 只需验证  $\mathfrak{a}A \cap Z \subseteq \mathfrak{a}$ . 由 [命题3.42], 可设有  $A$  的  $Z$ -子模  $L$  使得  $A = L \oplus Z$ . 进而  $\mathfrak{a}A = \mathfrak{a}L \oplus \mathfrak{a}Z = \mathfrak{a}L \oplus \mathfrak{a}$ . 由此易见  $\mathfrak{a}A \cap Z \subseteq \mathfrak{a}$ .  $\square$

**Proposition 3.44** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$  是 Azumaya 代数并设有中心  $Z$ , 那么对  $Z$  的任何极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $A/\mathfrak{m}A$  也是 Azumaya 代数并且中心为  $(Z + \mathfrak{m}A)/\mathfrak{m}A \cong Z/(Z \cap \mathfrak{m}A) = Z/\mathfrak{m}$ , 即为域  $Z/\mathfrak{m}$  上的有限维中心单代数.

*Proof.* 之前我们已经从 [命题3.30] 看到对  $K$  的任何真理想  $\mathfrak{a}$ ,  $A/\mathfrak{a}A$  是可分  $K/\mathfrak{a}$ -代数. 取  $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$  便知  $A/\mathfrak{m}A$  是可分  $Z/\mathfrak{m}$ -代数. 现在应用 [命题3.30] 便知  $Z(A/\mathfrak{m}A) = (Z + \mathfrak{m}A)/\mathfrak{m}A$ , 再应用 [推论3.43] 即可.  $\square$

下面我们将做最后一个准备来证明 Azumaya 代数的刻画定理 (见 [定理3.47]).

**Proposition 3.45** ([26]). 设  $K$ -代数  $A, B$  是 Azumaya 代数, 中心均为  $Z$ . 那么  $A \otimes_Z B$  是 Azumaya 代数.

*Proof.* 由 [命题3.42] 知  $Z$  是  $A, B$  作为  $Z$ -模的直和因子, 故由  $Z \otimes_Z Z \cong Z \neq 0$  立即得到  $A \otimes_Z B \neq 0$ . 现在应用 [推论3.27] 可知  $A \otimes_Z B$  是可分  $Z \otimes_Z Z$ -代数. 下面我们需要说明  $A \otimes_Z B$  的中心就是  $Z \otimes_Z Z$  (注意  $Z$  作为  ${}_Z A, {}_Z B$  的直和因子可保证  $Z \otimes_Z Z$  到  $A \otimes_Z B$  的标准映射是单射). 因为  $A$  是有限生成投射左  $A^e$ -模,  $B$  是有限生成投射左  $B^e$ -模, 所以有  $K$ -代数同构

$$\varepsilon : \text{Hom}_{A^e}(A, A) \otimes_K \text{Hom}_{B^e}(B, B) \rightarrow \text{Hom}_{A^e \otimes_K B^e}(A \otimes_K B, A \otimes_K B), f \otimes g \mapsto \varepsilon(f \otimes g) = f \otimes g.$$

根据 [例3.25],  $\text{Hom}_{A^e}(A, A) \cong \mathcal{Z}_A(A) = Z, \text{Hom}_{B^e}(B, B) \cong \mathcal{Z}_B(B) = Z$  以及

$$\text{Hom}_{A^e \otimes_K B^e}(A \otimes_K B, A \otimes_K B) = \text{Hom}_{(A \otimes_K B)^e}(A \otimes_K B, A \otimes_K B) \cong \mathcal{Z}_{A \otimes_K B}(A \otimes_K B)$$

可知任何  $\mathcal{Z}_{A \otimes_K B}(A \otimes_K B)$  中元素决定的  $\text{Hom}_{(A \otimes_K B)^e}(A \otimes_K B, A \otimes_K B)$  中自同态都是由  $Z$  中两个元素的左乘变换作张量得到的, 因此  $Z(A \otimes_K B) = Z \otimes_K Z$ .  $\square$

**Remark 3.46.** 因为域上的中心可分代数就是有限维中心单代数, 所以该命题是 [引理2.62] 的中心单代数版本的“交换环”推广. 特别地, 域  $\mathbb{k}$  上任意两个有限维中心单代数关于  $\mathbb{k}$  作张量积得到的张量积代数依然是有限维中心单代数. 在命题使得人们能在交换环层面定义 Brauer 群.

**Theorem 3.47** ([26]). 设  $A$  是  $K$ -代数, 有中心  $Z$ . 那么以下等价:

- (1)  $A$  是 Azumaya 代数.
- (2)  $A$  作为左  $A^e$ -模是有限生成投射生成子.
- (3)  $A$  作为  $Z$ -模是有限生成投射生成子并且标准  $K$ -代数同态  $\theta : A^e \rightarrow \text{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$ , 这里  $\alpha_\ell$  表示  $\alpha$  决定的  $(A^e A)$  上左乘变换, 是  $K$ -代数同构 (易见也是  $Z$ -代数同构).

*Proof.* (2) $\Rightarrow$ (1) 由 Azumaya 代数的定义立即得到. 下面使用 Morita 理论证明 (2) $\Rightarrow$ (3): 这时有  $K$ -代数同态  $\psi : Z \rightarrow \text{End}_{A^e} A, z \mapsto z_\ell, \psi$  明显是单射. 现在说明  $\psi$  是满射, 只需注意对任何  $a \in A$  与  $f \in \text{End}_{A^e} A$  有

$$af(1) = (a \otimes 1)f(1) = f(a) = f(1)(1 \otimes a) = f(1)a.$$

所以  $f(1) \in Z(A) = Z$  且  $f$  是由中心元  $f(1)$  决定的左乘变换. 由  $\psi$  是满射以及  $A$  作为左  $A^e$ -模是有限投射生成子可知  $A$  作为  $Z$ -模也是有限生成投射生成子: 将  $A$  先视作  $A^e$  的反环  $(A^e)^{op}$  上的右模, 由对偶基定理知模  $A_{(A^e)^{op}}$  是有限生成投射模 (且为生成子). 注意这时  $\text{End}(A_{(A^e)^{op}}) = \text{End}_{A^e} A$ . 考虑有限生成投射生成子  $A_{(A^e)^{op}}$  决定的标准 Morita Context, 应用 Morita I 便知  $A$  作为左  $\text{End}_{A^e} A$ -模是有限生成投射生成子. 结合前面指出的  $\text{End}_{A^e} A$  在  $A$  上的作用就是  $Z$  中元素的左乘变换便知  ${}_Z A$  是有限生成投射生成子. 此外, Morita I 还给出  $(A^e)^{op}$  到  $\text{End}_Z A$  的反代数同构  $\lambda : (A^e)^{op} \rightarrow \text{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_r$ , 其中  $\alpha_r$  表示右乘变换. 由此得到代数同构  $(A^e)^{op} \rightarrow \text{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$ , 这恰好是  $\theta$ . 因此  $\theta$  是  $K$ -代数同构.

(3) $\Rightarrow$ (2): 考虑由  $A_Z$  决定的标准 Morita Context, 因为  $A_Z$  是有限生成投射生成子, 所以应用 Morita I 立即得到  $A$  作为左  $\text{End}_Z A$ -模是有限生成投射生成子. 现在利用  $\theta$  是同构便知  ${}_A A$  是有限生成投射生成子.

(1) $\Rightarrow$ (2): 根据 Azumaya 代数的定义只需验证  $A$  作为左  $A^e$ -模是生成子. 下面我们通过证明求值映射  $\psi : \text{Hom}_{A^e}(A, A^e) \otimes_Z A \rightarrow A^e, f \otimes a \mapsto f(a)$  是满射来说明  ${}_A A$  是生成子. 在 [例3.25] 中我们已经看到  $A$  的

$Z$ -可分性可保证我们有  $Z$ -模同构  $\varphi : \text{Hom}_{A^e}(A, A^e) \rightarrow \{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\}, f \mapsto f(1)$  (其逆映射将每个满足  $(\text{Ker}\mu)\zeta = 0$  的  $\zeta \in A^e$  映至左  $A^e$ -模同态  $\varphi^{-1}(\zeta) : A \rightarrow A^e, a \mapsto (a \otimes 1)\zeta$ ). 因此我们只需要说明

$$\{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\} \otimes_Z A \rightarrow A^e, \zeta \otimes b \mapsto (b \otimes 1)\zeta$$

是满射即可. 因为对满足  $(\text{Ker}\mu)\zeta = 0$  的  $\zeta \in A^e$  总有  $(b \otimes 1)\zeta = (1 \otimes b)\zeta$ , 因此上述映射的满射性等价于验证  $A^e\{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\} = A^e$ . 假设  $A^e\{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\} \subsetneq A^e$ , 则存在  $A^e$  的极大理想  $M$  使得  $A^e\{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\} \subseteq M$ . 注意  $A^e$  是以  $Z \otimes_Z Z$  为中心的 Azumaya 代数 ([命题3.45]), 故由下面的 [引理3.48], 存在  $Z \otimes_Z Z$  的理想  $\mathfrak{a}$  (因为  $Z \cong Z \otimes_Z Z$  所以不妨设  $\mathfrak{a}$  是  $Z$  的理想) 使得  $M = A^e\mathfrak{a}$ , 至此我们得到

$$A^e\{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\} \subsetneq A^e\mathfrak{a}.$$

对上式作用乘法映射  $\mu$  (它是左  $A^e$ -模同态) 可知  $A^e \cdot \mu(\{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\}) \subseteq A\mathfrak{a}$ . 注意到  $A$  的可分幂等元总在  $\{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\}$  中, 所以  $A^e \cdot \mu(\{\zeta \in A^e | (\text{Ker}\mu)\zeta = 0\}) = A$ . 于是  $A = A\mathfrak{a}$ . 结合  $M = A^e\mathfrak{a}$  我们得到  $M = A^e$ , 这和  $M$  是极大理想矛盾.  $\square$

**Lemma 3.48** ([26]). 设  $K$ -代数  $A$  是 Azumaya 代数, 有中心  $Z$ . 那么  $A$  的任何极大理想  $M$ , 都存在  $Z$  的某个理想  $\mathfrak{a}$  使得  $M = A\mathfrak{a}$ .

*Proof.* 命  $\mathfrak{a} = Z \cap M$ , 那么  $\mathfrak{a}$  是  $Z$  的理想, 下证  $M = A\mathfrak{a}$ . 首先易见  $M \supseteq A\mathfrak{a}$ . 由 [命题3.30], 这时  $A/M$  是以  $(Z + M)/M \cong Z/\mathfrak{a}$  为中心的  $Z$ -可分代数, 所以  $A/M$  也是 Azumaya 代数. 注意到  $A/M$  是单环, 所以  $Z/\mathfrak{a}$  作为单环的中心是域. 现在由 [推论3.43] 得到  $\mathfrak{a}A \cap Z = \mathfrak{a}$ , 所以再次应用 [命题3.30] 的注记得到  $A/\mathfrak{a}A$  是以  $(Z + \mathfrak{a}A)/\mathfrak{a}A \cong Z/\mathfrak{a}$  为中心的可分  $Z/\mathfrak{a}$ -代数. 即  $A/\mathfrak{a}A$  是域上的 Azumaya 代数. 在 [例3.38] 中我们看到域上的 Azumaya 代数就是有限维中心单代数, 因此  $A/\mathfrak{a}A$  是单环. 特别地,  $\mathfrak{a}A$  是  $A$  的极大理想. 故  $M = A\mathfrak{a}$ .  $\square$

[定理3.47] 表明 Azumaya 代数是中心上有限生成代数, 因此由 [命题2.24] 我们有

**Corollary 3.49** ([2]). Azumaya 代数是 PI 代数.

设  $A$  是  $K$ -代数, 那么  $A$  作为  $Z$ -模本身是忠实模, 再由

**Lemma 3.50** ([20]). 交换环上忠实的有限生成投射模是生成子.

*Proof.* 设  $M$  是交换环  $Z$  上忠实的有限生成投射模, 并记  $T(M)$  是  $M$  的迹理想. 那么利用对偶基定理可知  $M = T(M)M$ , 因此由  $M$  是有限生成模得到  $T(M) + \text{Ann}_Z M = Z$ . 现在结合  $\text{Ann}_Z M = 0$  便得结论.  $\square$

我们得到 Azumaya 代数相较 [定理3.47(3)] 更弱的等价刻画:

**Proposition 3.51** ([2]). 设  $A$  是  $K$ -代数并有中心  $Z$ . 那么  $A$  是 Azumaya 代数当且仅当  $A$  是有限生成投射  $Z$ -模且标准  $K$ -代数同态  $\theta : A^e \rightarrow \text{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$  是  $K$ -代数同构.

*Proof.* 必要性来自 [定理3.47], 充分性来自 [定理3.47] 和 [引理3.50].  $\square$

设  $K$ -代数  $A$  是中心为  $Z$  的 Azumaya 代数, 那么有标准代数同态  $\sigma : A \rightarrow \text{End}_Z A, a \mapsto a_l$ , 其中  $a_l$  表示  $a$  决定的左乘变换. 易见  $\sigma$  是单代数同态. 又注意到  ${}_Z A$  是有限生成投射生成子, 这启发我们问: Azumaya 代数与其中心是否 Morita 等价? 一般而言结论是否定的, 即便在中心单代数的情形, 例如

**Example 3.52.** 考虑四元数环  $\mathbb{H}$ , 它是  $\mathbb{R}$  上 4 维中心单代数, 并且不存在正整数  $n$  使环同构  $\mathbb{H} \cong M_n(\mathbb{R})$ .

但是类似于 Morita 等价保持的性质, Azumaya 代数和它的中心也有同构的理想格:

**Proposition 3.53** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$  是以  $Z$  为中心的 Azumaya 代数. 记  $Z$  的理想格为  $\mathcal{I}(Z)$ ,  $A$  的理想格为  $\mathcal{I}(A)$ , 那么有保序双射  $\nu : \mathcal{I}(Z) \rightarrow \mathcal{I}(A), \mathfrak{a} \mapsto A\mathfrak{a}$ , 其逆映射为  $\nu^{-1} : \mathcal{I}(A) \rightarrow \mathcal{I}(Z), I \mapsto I \cap Z$ .

*Proof.* 记  $\lambda : \mathcal{I}(A) \rightarrow \mathcal{I}(Z), I \mapsto I \cap Z$ , 那么  $\nu$  与  $\lambda$  都保持理想的包含关系. 下面验证  $\lambda$  和  $\nu$  互为逆映射来得到结论. 首先  $\lambda\nu = \text{id}_{\mathcal{I}(Z)}$  来自 [推论3.43]. 下面需要验证对任何  $A$  的理想  $I$  有  $A(I \cap Z) = I$  来得到  $\nu\lambda = \text{id}_{\mathcal{I}(A)}$ . 因为  ${}_ZA$  是有限生成投射模, 故可设有对偶基  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A, \{x_1^*, \dots, x_n^*\} \subseteq \text{Hom}_Z(A, Z)$ , 并且有  $\text{id}_A = \sum_{i=1}^n x_i^* \cdot x_i$ , 这里我们把  $x_i^*$  视作  $A$  上  $Z$ -模自同态  $x_i^* : A \rightarrow A, a \mapsto x_i^*(a)$  并把  $\text{End}_Z A$  视作  $Z$ - $A$  双模. 借助 Azumaya 代数的标准  $K$ -代数同构  $\theta : A^e \rightarrow \text{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$ , 可设每个  $x_i^*$  为

$$x_i^* = \theta\left(\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \otimes b_{ij}\right), a_{ij}, b_{ij} \in A.$$

对每个  $s \in I, s = \sum_{i=1}^n x_i^*(s)x_i$ , 而每个  $x_i^*(s) = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}sb_{ij} \in AIA \cap Z = I \cap Z$ , 故  $I \subseteq (I \cap Z)A = A(I \cap Z)$ .  $\square$

下面的推论表明 Azumaya 代数是满足其素谱和中心素谱 (保序) 同胚的 PI 代数.

**Corollary 3.54** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$  是以  $Z$  为中心的 Azumaya 代数. 那么 [命题3.53] 中的保序双射  $\nu : \mathcal{I}(Z) \rightarrow \mathcal{I}(A), \mathfrak{a} \mapsto A\mathfrak{a}$  可诱导素谱间的拓扑同胚  $\tilde{\nu} : \text{Spec} Z \rightarrow \text{Spec} A, \mathfrak{p} \mapsto A\mathfrak{p}$ . 特别地, 拓扑同胚保持闭点, 因此  $\nu$  也诱导极大谱间的拓扑同胚  $\tilde{\nu} : \max \text{Spec} Z \rightarrow \max \text{Spec} A, \mathfrak{m} \mapsto A\mathfrak{m}$ .

*Proof.* 我们先说明  $\tilde{\nu}$  作为映射定义合理且为双射, 再验证它和它的逆映射都是连续映射. 如果  $\mathfrak{p}$  是  $Z$  的素理想, 并设  $A$  的理想  $I, J$  满足  $IJ \subseteq A\mathfrak{p}$ , 可设  $I = Ai, J = Aj$ , 其中  $i, j$  是  $Z$  的理想, 我们有  $A(ij) \subseteq A\mathfrak{p}$ , 进而由  $\nu$  是偏序同构得到  $ij \subseteq \mathfrak{p}$ , 于是不难得到  $I, J$  中至少有一个是  $A\mathfrak{p}$  的子集. 故  $A\mathfrak{p}$  是素理想. 不难看出  $\tilde{\lambda} : \text{Spec} A \rightarrow \text{Spec} Z, I \mapsto I \cap Z$  是定义合理的映射并且和  $\tilde{\nu}$  互为逆映射. 至此我们证明了  $\tilde{\nu} : \text{Spec} Z \rightarrow \text{Spec} A$  是定义合理的双射. 通过  $\nu$  是偏序同构容易验证对  $A$  的任何理想  $I$  以及  $Z$  的任何理想  $\mathfrak{a}$  有

$$\tilde{\nu}^{-1}(V(I)) = V(I \cap Z), \tilde{\lambda}^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(A\mathfrak{a}),$$

因此  $\tilde{\nu}, \tilde{\lambda}$  均为连续映射. 从而  $\tilde{\nu}$  是拓扑同胚.  $\square$

**Remark 3.55.** 我们将在 [命题3.117] 对代数的素谱到其中心子代数素谱的标准连续映射作进一步讨论.

**Corollary 3.56** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$  是以  $Z$  为中心的 Azumaya 代数. 那么以下等价:

- (1)  $A$  满足理想升链条件.
- (2)  $A$  是双边 Noether 环.
- (3)  $Z$  是 Noether 环.

*Proof.* 通过 [命题3.53] 易知 (1) 与 (3) 等价. (2) 与 (3) 的等价性来自  $A$  是有限生成  $Z$ -模以及 [命题3.53].  $\square$

下面的命题说对在中心上有有限表现的代数而言, Azumaya 性质是局部性质.



**Proposition 3.57** ([1]). 设  $K$ -代数  $A$  作为中心  $Z$  上的模有有限表现, 那么  $A$  是 Azumaya 代数的充要条件是对  $Z$  的任何极大理想  $\mathfrak{m}$  有  $A_{\mathfrak{m}}$  是 Azumaya 代数 (这里必要性不需要有限表现的条件).

*Proof.* 必要性: 这时  $A$  是有限生成投射  $Z$ -模且标准环同态  $\theta : A^e \rightarrow \text{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$  是  $Z$ -代数同构. 那么对  $Z$  的任何极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $A_{\mathfrak{m}}$  是有限生成投射  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模. 并注意  ${}_Z A$  作为有限生成投射  $Z$ -模自然是有限表现的  $Z$ -模! 于是  $\theta_{\mathfrak{m}}$  可视为  $(A_{\mathfrak{m}})^e \cong (A^e)_{\mathfrak{m}}$  到  $\text{End}_{Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}} \cong (\text{End}_Z A)_{\mathfrak{m}}$  的  $Z_{\mathfrak{m}}$ -代数同构. 现在应用 [命题3.51] 并结合下面的 [引理3.58] 知  $A_{\mathfrak{m}}$  是以  $Z_{\mathfrak{m}}$  为中心的 Azumaya 代数.

充分性: 考虑  $\theta : A^e \rightarrow \text{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$ , 与充分性一样  $A$  是有有限表现的  $Z$ -模可保证对任何  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $\theta_{\mathfrak{m}}$  可诱导从  $(A_{\mathfrak{m}})^e$  到  $\text{End}_{Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}$  的环同态, 而  $A_{\mathfrak{m}}$  是 Azumaya 代数的条件保证了  $\theta_{\mathfrak{m}}$  诱导的环同态是同构, 因此  $\theta_{\mathfrak{m}}$  本身也是环同构. 于是由  $\theta$  是  $Z$ -模同态知  $\theta$  是同构. 现在  $A_{\mathfrak{m}}$  对所有的  $\mathfrak{m} \in \max \text{Spec } Z$  都有  $A_{\mathfrak{m}}$  是有限生成投射  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模. 所以  $A$  是平坦  $Z$ -模. 而有有限表现的模的平坦性与投射性等价, 所以  $A$  是投射  $Z$ -模. 于是由 [命题3.51] 得到  $A$  是 Azumaya 代数.  $\square$

**Lemma 3.58.** 设含么环  $R$  是中心  $Z$  上有限生成模. 则对任何  $Z$  的乘闭子集  $S$ ,  $R_S$  的中心是  $Z_S$ .

*Proof.* 易知  $Z_S \subseteq Z(R_S)$ . 任取  $a/s \in Z(R_S)$ , 设  $R = Zx_1 + \cdots + Zx_n$ . 那么对每个正整数  $1 \leq i \leq n$ , 在  $R_S$  中有  $(ax_i - x_i a)t/t = 0$ , 那么存在  $s_i \in S$  使得  $s_i(ax_i - x_i a) = 0$ . 作  $\hat{s} = s_1 \cdots s_n$ , 那么  $\hat{s}a \in Z$ . 所以有  $a/s = \hat{s}a/\hat{s}s \in Z_S$ . 即  $Z(R_S) \subseteq Z_S$ .  $\square$

下面我们将进一步讨论 Azumaya 代数作为 PI 代数的性质. 首先指出 Azumaya 代数的下述局部化性质.

**Lemma 3.59** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$  是 Azumaya 代数, 则对任何中心的极大理想  $\mathfrak{m}$  有  $K$ -代数同构

$$A/\mathfrak{m}A \cong A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}.$$

*Proof.* 首先我们有局部化映射  $\lambda_{\mathfrak{m}} : A/\mathfrak{m}A \rightarrow A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ , 它是  $K$ -代数同态. 在 [命题3.44] 中已指出  $A/\mathfrak{m}A$  是中心单代数, 故  $\lambda_{\mathfrak{m}}$  是单射. 最后说明  $\lambda_{\mathfrak{m}}$  是满射来完成证明. 为此只需说明任何  $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  中元素形如  $a/1 + \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ . 任给  $b/s + \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \in A/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ , 因为  $s \notin \mathfrak{m}$ , 所以存在  $z \in Z = Z(A)$  使得  $sz - 1 \in \mathfrak{m}$ . 注意到

$$b/s - bz/1 = b(1 - sz)/1 \in \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}},$$

所以  $b/s + \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} = bz/1 + \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ . 进而知  $\lambda_{\mathfrak{m}}$  是满射.  $\square$

在 [命题3.57] 中我们已经看到对 Azumaya 代数  $A$ , 它在中心的极大理想  $\mathfrak{m}$  处作局部化也是 Azumaya 代数. 所以 [引理3.59] 指出  $A/\mathfrak{m}A$  与  $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  作为同构的 Azumaya 代数, 中心也都是域, 进而是在各自中心上有相同维数的中心单代数. 我们把  $A$  的中心记作  $Z$ , 则有  $\dim_{Z/\mathfrak{m}} A/\mathfrak{m}A = \dim_{Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ . 根据 Kaplansky 定理我们知道该公共线性维数是某个正整数  $n$  的平方, 而  $2n$  便是相应 PI 代数的最小次数. 沿用 [定理2.84] 中的术语,  $A/\mathfrak{m}A$  和  $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  的 PI 次数都是  $n$ . 此外, 因为  $A$  是有限生成投射  $Z$ -模, 所以  $A_{\mathfrak{m}}$  是自由  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模, 根据经典的交换代数我们知道  $\text{rank}_{Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}} = \dim_{Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ . 总结一下, 我们有

**Proposition 3.60** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$  是 Azumaya 代数, 中心为  $Z$ ,  $\mathfrak{m}$  是  $Z$  的极大理想. 那么

$$\dim_{Z/\mathfrak{m}} A/\mathfrak{m}A = \dim_{Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} = \text{rank}_{Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}.$$



**Definition 3.61** ([2]). 设  $K$ -代数  $A$  是 Azumaya 代数, 中心为  $Z$ ,  $n$  是正整数. 如果  $n^2 = \dim_{Z/\mathfrak{m}} A/\mathfrak{m}A$  对  $Z$  所有的极大理想  $\mathfrak{m}$  成立, 我们称  $A$  是秩为  $n^2$  的 Azumaya 代数.

**Example 3.62.** 如果  $K$ -代数  $A$  是素 Azumaya 代数, 我们说明  $A$  一定是秩为  $n^2$  的 Azumaya 代数, 这里  $n = \text{PI-deg} A$ . 首先由 [命题3.60] 知对每个  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $A/\mathfrak{m}A$  作为  $Z/\mathfrak{m}$  上线性空间的维数就是  $\text{rank}_{Z/\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$ . 记  $P$  是  $Z$  的零理想, 那么  $P \cap (Z - \mathfrak{m}) = \emptyset$ , 因此可以进一步对  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模  $A_{\mathfrak{m}}$  关于  $P_{\mathfrak{m}}$  作局部化, 并且  $A_{\mathfrak{m}}$  关于  $P_{\mathfrak{m}}$  作局部化就是素 PI 环  $A_{\mathfrak{m}}$  在中心正则元集  $Z_{\mathfrak{m}} - \{0\}$  作局部化, 根据经典的交换代数我们知道  $A_{\mathfrak{m}} \otimes_{Z_{\mathfrak{m}}} \text{Frac} Z_{\mathfrak{m}} \cong A_P$ . 结合 Posner 定理便知这时必有  $\text{rank}_{Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}} = \dim_{Z_P} A_P = (\text{PI-deg} A)^2$ .

**Remark 3.63.** 该例表明 Azumaya 代数的秩在素 Azumaya 代数类上总存在.

如果  $R$  是素 PI 环, 那么对任何素理想  $P$ ,  $R/P$  依然是素 PI 环并且  $\text{PI-deg}(R/P) \leq \text{PI-deg}(R)$ . 如果该不等式等号成立, 便称素理想  $P$  是正则的. 例如零理想总是正则素理想. 存在非正则的素理想. 例如考虑

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

在 [例2.43] 中我们看到  $R$  是最小次数为 4 的素 PI 环. 由  $R/P \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  知  $P$  是  $R$  的素理想且  $\text{PI-deg}(R/P) = 1$ . 所以上述素理想并不是  $R$  的正则素理想. 我们将看到素 PI 环素理想的正则性与 Azumaya 性质有密切的联系 ([定理3.65]). 以下固定记号  $F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$  是 Formanek 多项式 ([定理2.53]). 根据 [推论2.73],  $F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  是所有 PI 次数为  $n$  的中心单代数的中心多项式.

**Proposition 3.64.** 设  $A$  是素 PI 环且 PI 次数是  $n$ ,  $M$  是极大理想. 那么  $P$  是正则极大理想当且仅当

$$\{F_n(a, b_1, b_2, \dots, b_n) | a, b_1, \dots, b_n \in A\} \not\subseteq M.$$

*Proof.* 必要性: 这时  $A/M$  是 PI 次数为  $n$  的本原 PI 环, 应用 [推论2.73] 可知  $F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  是  $A/M$  的中心多项式, 故一定有一组  $A$  中元素在 Formanek 多项式下赋值不在  $M$  中. 充分性: 若不然, 则  $A/M$  是 PI 次数严格小于  $n$  的本原 PI 环, 同样应用 [推论2.73] 便得结论.  $\square$

**Theorem 3.65** (Artin-Procesi 定理, [1]). 设  $A$  是以  $Z$  为中心的素环,  $n$  是正整数, 则以下等价:

- (1)  $A$  是秩为  $n^2$  的 Azumaya 代数.
- (2)  $A$  是满足所有素理想正则且 PI 次数为  $n$  的 PI 环.
- (3)  $A$  是满足所有极大理想正则且 PI 次数为  $n$  的 PI 环.

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2): 这时  $A$  是素 PI 环并且对任何  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $A_{\mathfrak{m}}$  是秩为  $n^2$  的自由  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模 ([命题3.60]). 在经典的交换代数中, 对交换环  $Z$  的任何乘闭子集  $T$ , 如果  $Z$  的素理想  $\mathfrak{p}$  满足  $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset$ , 那么有标准的环同构  $Z_{\mathfrak{p}} \cong (Z_T)_{\mathfrak{p}_T}$ . 类似地, 我们也有标准的环同构  $A_{\mathfrak{p}} \cong (A_T)_{\mathfrak{p}_T}$ . 现取  $T = Z - \mathfrak{m}$  ( $\mathfrak{m}$  是  $Z$  的任意极大理想),  $\mathfrak{p} = 0$ , 那么由局部化函子  $(-)_{\mathfrak{p}_T}$  保持  $A_{\mathfrak{m}}$  作为  $Z_{\mathfrak{m}}$ -自由模的自由秩以及 Posner 定理立即得到  $A$  在中心正则元集的局部化是中心上  $n^2$  维中心单代数. 特别地,  $A$  的 PI 次数是  $n$ . 现在由条件可知对  $Z$  的任何极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $A/\mathfrak{m}A$  是其中心  $Z/\mathfrak{m}$  上  $n^2$  维中心单代数. 特别地, Posner 定理表明  $A/\mathfrak{m}A$  是 PI 次数为  $n$  的 PI 环. 下面我们需要验证  $A$  的任何素理想  $P$  是正则的, 即  $\text{PI-deg}(A/P) = n$ . 根据 [推论3.54],  $A$  的任何极大理想形如  $\mathfrak{m}A$ , 其中  $\mathfrak{m}$  是  $Z$  的某个极大理想. 现在可设  $P$  含于  $A$  的极大理想  $\mathfrak{m}A$ , 那么

$$n = \text{PI-deg} A \geq \text{PI-deg} A/P \geq \text{PI-deg} A/\mathfrak{m}A = n,$$

这迫使  $\text{PI-deg} A/P = \text{PI-deg} A = n$ . 所以  $A$  所有的素理想都正则. (2) $\Rightarrow$ (3) 是明显的.

(3) $\Rightarrow$ (1): 现设对  $A$  的所有极大理想  $M$ ,  $\text{PI-deg} A/M = n$ , 于是  $A/M$  作为 PI 单环的最小次数是  $2n$  (也是 PI 次数为  $n$  的中心单代数). 根据 [推论2.73], Formanek 多项式  $F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  是  $A/M$  的中心多项式. 因为  $F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  关于  $y_n$  是线性的, 并且  $F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  不是  $A$  任何非零同态像的多项式等式 (否则, 存在某个  $A$  的极大理想  $M$  使得  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$  是  $A/M$  的多项式等式, 矛盾), 所以 Formanek 多项式满足下面 [引理3.67] 的条件, 进而由该引理可知存在  $a_1, \dots, a_m, b_{11}, \dots, b_{1n}, \dots, b_{m1}, \dots, b_{mn} \in A$  使得

$$1 = F_n(a_1, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}) + F_n(a_2, b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}) + \dots + F_n(a_m, b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mn}).$$

接下来我们将使用 [引理3.41] 说明  $A$  是 Azumaya 代数. 现在考虑  $F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  导出的多项式

$$F_n(x, y_1, \dots, y_n z) = \sum_{t=1}^{\ell} G_t(x, y_1, y_2, \dots, y_n) z H_t(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, \dots, y_n, z \rangle,$$

可以表达为上述形式依赖于  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$  关于  $y_n$  是线性的. 现在定义

$$c_{ti} = G_t(a_i, b_{i1}, \dots, b_{in}), d_{ti} = H_t(a_i, b_{i1}, \dots, b_{in}) \in A, 1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq \ell.$$

那么  $\sum_{t=1}^{\ell} \sum_{i=1}^n c_{ti} d_{ti} = 1, \sum_{t=1}^{\ell} \sum_{i=1}^n c_{ti} a d_{ti} \in Z, \forall a \in A$ . 于是由 [引理3.41] 知  $A$  是 Azumaya 代数. 最后, 对  $Z$  的任何极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{m}A$  作为  $A$  的极大理想是正则的, 所以  $\text{PI-deg} A/\mathfrak{m}A = n$  表明  $A/\mathfrak{m}A$  在中心上的维数是  $n^2$ , 故根据 [定义3.61] 便知  $A$  是秩为  $n^2$  的 Azumaya 代数.  $\square$

**Remark 3.66.** 该定理先由 M. Artin 对系数环是域的情形证明 [27], 再被 Procesi 推广至一般的交换环 [28].

**Lemma 3.67** ([4]). 设  $A$  是以  $Z$  为中心的环,  $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  如果满足

- (1)  $f$  是  $A$  的中心多项式 (回忆 [定义2.50]) 且关于  $x_n$  是线性的.
- (2)  $f$  不是  $A$  的任何非零同态像的多项式等式.

那么集合  $\{f(a_1, \dots, a_n) \in Z | a_1, \dots, a_n \in A\}$  在  $Z$  中生成的加法子群包含  $A$  的乘法单位元 1.

*Proof.* 记  $\{f(a_1, \dots, a_n) \in Z | a_1, \dots, a_n \in A\}$  在  $Z$  中生成的加法子群为  $\mathcal{F}$ . 假设  $1 \notin \mathcal{F}$ , 考虑集合

$$S = \{I \subseteq A | I \text{ 是 } A \text{ 的理想并满足 } 1 \notin \mathcal{F} + I\}.$$

因为零理想在  $S$  中, 所以  $(S, \subseteq)$  是非空偏序集. 易见  $S$  的任何全序子集有上界, 故应用 Zorn 引理得到  $S$  有极大元  $M$ . 下证  $M$  是素理想. 假设  $M$  不是素理想, 则存在严格包含  $M$  的理想  $I, J$  使得  $IJ \subseteq M$ . 进而由  $M$  的极大性可知  $1 \in \mathcal{F} + I, \mathcal{F} + J$ . 设  $s \in I, t \in J, z_1, z_2 \in \mathcal{F}$  满足  $1 = s + z_1 = t + z_2$ . 将 1 的两个表达式相乘得到  $st + sz_2 + z_1t + z_1z_2 = 1$ . 注意到  $s, t \in Z$ , 所以由  $f$  关于  $x_n$  是线性的可知  $sz_2 + z_1t + z_1z_2 \in \mathcal{F}$ . 那么由  $st \in M$  得到  $1 \in \mathcal{F} + M$ , 矛盾. 因此  $M$  是素理想. 现在考虑  $A$  的同态像  $A/M$ , 由条件知存在一组  $A/M$  中元素关于  $f$  的赋值非零. 即存在  $a_1, \dots, a_{n-1}, d \in A$  使得  $f(a_1, \dots, a_{n-1}, d) \notin M$ . 记  $\hat{z} = f(a_1, \dots, a_{n-1}, d)$ . 那么  $M$  的极大性蕴含  $1 \in \mathcal{F} + M + A\hat{z}$ . 于是存在  $z_0 \in \mathcal{F}, a_0 \in A$  使得在  $A/M$  中有  $\bar{1} = \bar{z}_0 + \bar{a}_0\bar{\hat{z}}$ . 因为  $A/M$  是素环, 非零中心元都是正则的, 所以  $\bar{a}_0 \in Z(A/M)$ . 那么由  $f$  个关于  $x_n$  的线性性可知在  $A/M$  中有

$$\bar{a}_0\bar{\hat{z}} = f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}, \bar{a}_0\bar{d}) \in \bar{\mathcal{F}}.$$

现在由前面得到的等式  $\bar{1} = \bar{z}_0 + \bar{a}_0\bar{\hat{z}}$  便知  $1 - z_0 \in M$ , 即  $1 \in \mathcal{F} + M$ , 矛盾.  $\square$

在 [定理3.47] 中我们看到 Azumaya 代数在中心上是有限生成投射模, 因此自然要问是否存在在中心上有限生成投射但不是 Azumaya 代数的例子. Artin-Procesi 定理使得我们容易验证这样的例子.

**Example 3.68.** 考虑 [例2.26] 中的量子平面  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$ , 这里  $q \in \mathbb{k}^*$  是  $\ell$  次本原单位根,  $\ell \geq 2$ . 那么  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  不是交换代数, 因此它的最小次数至少是 3 (见 [例2.18]), 结合  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  是素 PI 环知  $\text{PI-deg} \mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2) \geq 2$ . 任取  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  的一个包含  $x$  的素理想  $P$ , 那么  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)/P$  是交换的, 所以  $\text{PI-deg} \mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)/P = 1$ . 这说明  $P$  不是正则素理想. 由 [例3.62] 以及 Artin-Procesi 定理知  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  不是 Azumaya 代数. 而可直接验证  $Z(\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)) = \mathbb{k}[x^\ell, y^\ell]$  且  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  在中心上有限生成自由 (更一般地, 对任何偶数  $n$ ,  $Z(\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^n)) = \mathbb{k}[x_1^\ell, \dots, x_n^\ell]$ , 当  $n$  是奇数时中心可能会更大), 所以  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  是素 PI 代数, 在中心上有限生成自由, 但不是 Azumaya 代数的例子.

Artin-Procesi 定理也常被简称为 Artin 定理, M. Artin 给出的 (被 Procesi 优化的) 定理原始形式如下.

**Theorem 3.69** (Artin-Procesi 定理, [4]). 设  $n$  是正整数, 含幺环  $R$  的中心记作  $Z$ ,  $K$  是含幺交换环. 如果  $R$  满足矩阵环  $M_n(K)$  所有的多项式等式并且  $R$  的非零同态像都不满足  $M_{n-1}(K)$  所满足的次数最低的多项式等式, 那么  $R$  是中心  $Z$  上秩为  $n^2$  的 Azumaya 代数.

*Proof.* 任取  $R$  的极大理想  $M$ , 那么  $R/M$  是本原 PI 环. 因此 Kaplansky 定理表明  $R/M$  是其中心上有限维中心单代数, 设其维数为  $r^2$ , 那么  $R/M$  作为 PI 环的最小次数为  $2r$ . 因此由  $R/M$  是  $R$  的非零同态像,  $M_{n-1}(K)$  的最小次数为  $2n-2$  以及 [引理2.97] 和 [引理2.30] 可知  $2r \geq 2n-1$ . 而条件表明  $R$  满足标准等式  $s_{2n}$ , 所以  $r = n$ . 这说明对  $R$  的所有极大理想  $M$ ,  $R/M$  都是中心上维数为  $n^2$  的中心单代数. 如果我们能够证明  $R$  是 Azumaya 代数, 那么由 [推论3.54] 便知对  $Z$  所有的极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{m}R$  是  $R$  的极大理想并且  $R/\mathfrak{m}R$  是中心上  $n^2$  维中心单代数. 再应用 [命题3.44] 便知  $R$  是秩为  $n^2$  的 Azumaya 代数.

根据上面的讨论, 只需再说明  $R$  是 Azumaya 代数便可完成定理的证明. 之前已经指出  $R$  关于任何极大理想的商的最小次数为  $2n$  的本原 PI 环. 所以和 [定理3.65] 中 “(3) $\Rightarrow$ (1)” 作完全相同的讨论便可得到结论.  $\square$

**Remark 3.70.** 当  $R$  是以  $Z$  为中心且秩为  $n^2$  的 Azumaya 代数时, 对  $Z$  的任何极大理想  $\mathfrak{m}$  有  $R/\mathfrak{m}R$  是 PI 次数为  $n$  的中心单代数, 所以  $R$  的任何非零同态像都不满足交换环上  $n-1$  阶矩阵代数满足的最低次多项式等式. 特别地,  $R$  无法嵌入任何阶数严格低于  $n$  的 (交换环上) 矩阵代数.

**Remark 3.71.** 事实上, 从之前 Amitsur-Levitzki 定理的证明过程不难看出对任何含幺交换环  $K$ ,  $M_n(\mathbb{Z})$  (在  $\mathbb{Z}$  上) 的所有多项式等式都是  $M_n(K)$  的多项式等式. 如果  $f \in \mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_\ell \rangle$  是  $M_n(\mathbb{Z})$  满足的多项式等式, 那么  $f((a_{ij}^1)_{n \times n}, \dots, (a_{ij}^\ell)_{n \times n})$  是零矩阵, 其中  $a_{ij}^k \in \mathbb{Z}$ . 将  $f((x_{ij}^1)_{n \times n}, \dots, (x_{ij}^\ell)_{n \times n})$  的每个分量视作关于变量  $x_{11}^1, \dots, x_{nn}^\ell$  的整系数多项式, 那么该  $\ell n^2$  元整系数多项式对任意组整数代入都是零. 这说明  $M_n(\mathbb{Z}[\{x_{ij}^k | 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq \ell\}])$  中矩阵  $f((x_{ij}^1)_{n \times n}, \dots, (x_{ij}^\ell)_{n \times n})$  的每个分量是关于变量集  $\{x_{ij}^k | 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq \ell\}$  的零多项式. 于是该变量集对  $K$  中任意一组元素代入都是零, 这就证明了  $M_n(K)$  满足  $M_n(\mathbb{Z})$  的所有多项式等式. 反之, 只有当  $\mathbb{Z}$  可嵌入  $K$  时才能够保证  $M_n(\mathbb{Z})$  满足  $M_n(K)$  的所有多项式等式.

为之后引用方便 (见 [定理3.131] 前的讨论), 这里记录域上仿射 PI 代数的正则素 (极大) 理想的基本特性.

**Proposition 3.72** ([1]). 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上仿射素 PI 代数,  $P$  是  $A$  的素理想. 那么:

- (1)  $P$  不是一些正则极大理想的交就是一些非正则极大理想的交.
- (2)  $P$  是正则素理想的充要条件是  $P$  是一些正则极大理想的交.

- (3)  $P$  不是正则素理想的充要条件是  $P$  为一些非正则的极大理想之交.  
(4)  $A$  的所有正则素理想构成  $\text{Spec}A$  的真闭子集.  
(5)  $A$  的所有正则极大理想构成  $\max\text{Spec}A$  的真闭子集. 特别地, 正则极大理想存在.  
(6) 零理想是所有正则极大理想的交.

*Proof.* 在 [推论3.10] 中已经指出域上仿射 PI 代数总是 Jacobson 环, 因此任何素理想是一些极大理想 (Kaplansky 定理保证本原理想就是极大理想) 的交. 将  $P$  表示为一些极大理想的交后, 可设  $P = P_1 \cap P_2$ , 其中  $P_1$  是一些正则极大理想的交,  $P_2$  是一些非正则极大理想的交. 因为  $P$  是素理想, 所以  $P = P_1$  或  $P = P_2$ , 这证明了 (1). 如果  $P$  是一些非正则极大理想  $\{M_i\}_{i \in \Gamma}$  的交, 那么  $A/P$  可嵌入半素 PI 环  $\prod_{i \in \Gamma} A/M_i$ . 由 [推论2.98] 知  $A/P$  的 PI 次数也会严格小于  $A$  的 PI 次数, 于是  $P$  不是正则素理想. 如果  $P$  不是正则素理想, 那么任何包含  $P$  的极大理想也不会是正则素理想, 所以结合 (1) 便知 (3) 成立. 当  $P$  是一些正则极大理想的交时,  $P$  明显是正则的. 反之, 如果  $P$  是正则素理想, 由 (1) 和已经证明的 (3) 便知  $P$  是一些正则极大理想的交. 所以 (2) 也成立. 现在命  $I$  是  $A$  所有非正则素理想之交, 那么由零理想是正则素理想以及 (3) 可知  $0 \neq I$ . 类似 (3) 的讨论可知  $A/I$  的 PI 次数严格小于  $A$  的 PI 次数, 所以含  $I$  的素理想不是正则素理想. 从而知  $\{P \in \text{Spec}A | P \supseteq I\}$  就是素谱中所有非正则的素理想构成的集合. 这就证明了 (4). 因为零理想是正则素理想, 所以由 (2) 可知 (6) 成立. 最后证明 (5): 首先由 (4) 的证明过程可知所有正则极大理想构成  $\max\text{Spec}A$  的闭子集. 假设所有的极大理想都不是正则的, 那么所有正则极大理想的交是  $A$ , 这与 (6) 矛盾.  $\square$

关于 Azumaya 代数还有一个著名的结论是 Skolem-Noether 定理, 它可应用于定义有限维中心单代数的元素的约化特征多项式 (见 [定理3.84]), 进而可把矩阵的迹推广至中心单代数类.

**Theorem 3.73** (Skolem-Noether 定理, [3]). 设  $A$  是以  $Z$  为中心的 Azumaya 代数且  $Z$  是局部环. 那么任何  $A$  作为  $Z$ -代数的自同构都是内自同构, 即任何  $\theta \in \text{Aut}_Z A$  满足存在  $A$  中可逆元  $u$  使得  $\theta(a) = uau^{-1}, \forall a \in A$ .

*Proof.* 给定  $\theta \in \text{Aut}_Z A$ , 我们有两种自然的方式赋予  $A$  上  $A$ - $A$  双模结构: 第一种就是以  $A$  中元素在自身上的左乘与右乘赋予经典的双模  $A$ ; 第二种是右模结构使用原有的元素右乘赋予, 左模结构来自  $a \cdot b = \theta(a)b, \forall a, b \in A$ , 记此双模为  ${}^\theta A$ . 设  $\mathfrak{m}$  是  $Z$  唯一的极大理想, 我们已经在 [命题3.44] 中看到  $A/\mathfrak{m}A$  是以域  $Z/\mathfrak{m}$  为中心的 (有限维) 中心单代数. 于是由  $\bar{A} = A/\mathfrak{m}A$  和  $\bar{A}^{op} = A^{op}/\mathfrak{m}A^{op}$  是中心单代数以及 [命题3.45] 便知

$$(\bar{A})^e = (A/\mathfrak{m}A) \otimes_Z (A/\mathfrak{m}A)^{op}$$

是以  $\bar{Z} \otimes_{\bar{Z}} \bar{Z}$  为中心的中心单代数. 特别地,  $(\bar{A})^e$  作为 Artin 单环只有一个单模同构类. 注意到  $A/\mathfrak{m}A, {}^\theta A/\mathfrak{m}({}^\theta A)$  作为左  $(\bar{A})^e$ -模都是单模 (因为这时  $A/\mathfrak{m}$  是单环, 任何非零元生成的主理想便是整个环). 因此存在左  $(\bar{A})^e$ -模同构  $\varphi: A/\mathfrak{m}A \rightarrow {}^\theta A/\mathfrak{m}({}^\theta A)$ , 这也是左  $A^e$ -模同构. 记  $\pi_1: A \rightarrow A/\mathfrak{m}A, \pi_2: {}^\theta A \rightarrow {}^\theta A/\mathfrak{m}({}^\theta A)$  是标准投射, 因为  $A$  是投射左  $A^e$ -模, 所以存在左  $A^e$ -模同态  $\tilde{\varphi}: A \rightarrow {}^\theta A$  使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow \pi_1 & \\ & A/\mathfrak{m}A & \\ & \downarrow \varphi & \\ {}^\theta A & \xrightarrow{\pi_2} & {}^\theta A/\mathfrak{m}({}^\theta A) \end{array}$$

$\tilde{\varphi}$  (dashed arrow from  $A$  to  ${}^\theta A$ )

特别地, 我们有  $\tilde{\varphi}(A) + \mathfrak{m}({}^\theta A) = {}^\theta A$ . 将  $\tilde{\varphi}$  视作  $Z$ -模同态, 因为  ${}^\theta A$  是有限生成  $Z$ -模, 所以由 Nakayama 引理可知  $\tilde{\varphi}(A) = {}^\theta A$ , 即  $\tilde{\varphi}$  是满射. 现在命  $u = \tilde{\varphi}(1)$ , 我们说明  $u$  是可逆元并且  $\theta$  是  $u$  诱导的内自同构.

取  $b \in A$  使得  $\tilde{\varphi}(b) = 1$ , 那么  $1 = \tilde{\varphi}(1)b = \theta(b)\tilde{\varphi}(1)$ , 总之有  $u$  可逆. 任给  $a \in A$ , 有  $\tilde{\varphi}(a) = \theta(a)u = ua$ , 所以  $\theta(a) = uau^{-1}, \forall a \in A$ . 因此  $\theta$  是可逆元  $u$  诱导的内自同构.  $\square$

**Remark 3.74.** 上述定理 “ $Z$  是局部环” 的条件用在对等式  $\tilde{\varphi}(A) + \mathfrak{m}({}^\theta A) = {}^\theta A$  应用 Nakayama 引理上, 因为这时  $\text{Jac}Z = \mathfrak{m}$ . 该定理的原始形式是对域上有限维中心单代数阐述的, 由 T. Skolem(挪威, 1887-1963) 于 1927 年先发表, 再被 E. Noether 重新发现. 因此该定理也说明对域上的有限维中心单代数 (例如域上的矩阵代数或  $\mathbb{R}$ -(四元数) 代数  $\mathbb{H}$ ), 其代数自同构一定是某个内自同构.

前面指出 Skolem-Noether 定理的经典版本考虑的是域上有限维中心单代数场景, 这时可进一步加强为

**Theorem 3.75** (Skolem-Noether 定理, [20]). 设  $B$  是域  $\mathbb{k}$  上有限维中心单代数,  $A$  是  $B$  的单子代数. 那么任何  $A$  到  $B$  的代数同态可延拓为  $B$  上的 ( $\mathbb{k}$ -代数) 内自同构. 中心单代数版本的 [定理3.73] 可视作此直接推论.

*Proof.* 考虑  $E = \mathbb{k}$ -代数  $A \otimes_{\mathbb{k}} B^{\text{op}}$ , 根据 [引理2.62],  $E$  是域  $\mathbb{k}$  上有限维单代数. 特别地,  $E$  作为 Artin 单环, 任何  $E$  上的模都完全可约并且  $E$  的只有一个单模同构类. 特别地, 任意两个有限维左  $E$ -模只要有相同  $\mathbb{k}$ -线性维数便作为左  $E$ -模同构. 任给  $\mathbb{k}$ -代数同态  $\theta: A \rightarrow B$ , 可将  $B$  以两种方式视作有限维左  $E$ -模: 第一种便是标准  $A$ - $B$  双模结构, 第二种是标准的右  $B$ -模结构但左  $A$ -模结构来自  $a \cdot b = \theta(a)b, \forall a \in A, b \in B$ . 将赋予了第二种双模结构的  $B$  记作  ${}^\theta B$ . 根据前面的讨论, 我们有左  $E$ -模同构  $B \cong {}^\theta B$ . 所以有左  $E$ -模同构  $\ell: B \rightarrow {}^\theta B$  满足对任何  $a \in A, x, y \in B$  有  $\ell(ax) = \theta(a)x, \ell(xy) = \ell(x)y$ . 其中  $\ell(xy) = \ell(x)y, \forall x, y \in B$  表明若记  $u = \ell(1)$ , 则  $\ell(y) = uy, \forall y \in B$  且  $u$  在  $B$  中有右逆. 再考虑  $u$  在  $B$  上的右乘变换, 由  $u$  有右逆知该右乘变换是单射, 进而由  $B$  是有限维空间得到  $u$  诱导的右乘变换是满射. 于是知  $u$  在  $B$  中有左逆, 所以  $u$  是  $B$  中的可逆元. 总之, 我们得到  $\ell$  是  $B$  上由可逆元  $u$  诱导的左乘变换. 现在由  $\ell(ax) = \theta(a)\ell(x), \forall a \in A, x \in B$  可知  $uax = \theta(a)ux, \forall a \in A, x \in B$ . 命  $x = 1$  得到  $\theta(a) = uau^{-1}, \forall a \in A$ . 所以  $\theta$  可延拓由  $u$  决定的内自同构.  $\square$

下面我们给一个 [定理3.75] 的直接应用——(有限维) 中心单代数上的线性导子都是内导子.

**Corollary 3.76.** 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上中心单代数, 那么任何  $A$  上的  $\mathbb{k}$ -线性导子都是内导子. 即对任何  $\delta \in \text{Der}_{\mathbb{k}} A$ , 存在  $b \in A$  使得  $\delta(a) = [b, a] = ba - ab, \forall a \in A$ .

*Proof.* 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上中心单代数, 那么  $M_2(A)$  也是域  $\mathbb{k}$  上中心单代数. 任给  $\delta \in \text{Der}_{\mathbb{k}} A$ , 那么

$$\varphi: A \rightarrow M_2(A), a \mapsto \begin{pmatrix} a & \delta(a) \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

是单代数  $A$  到  $M_2(A)$  的  $\mathbb{k}$ -代数嵌入, 应用 [定理3.75] 便知存在可逆矩阵  $U \in M_2(A)$  使得

$$\varphi(a) = U(aI_2)U^{-1}, \forall a \in A.$$

现在设  $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}$ , 其中  $u_j \in A$ . 那么利用矩阵等式  $\varphi(a)U = U(aI_2)$  可解得  $u_3, u_4 \in Z(A)$  并且

$$\delta(a)u_3 = [u_1, a], \delta(a)u_4 = [u_2, a], \forall a \in A.$$

因为  $A$  是中心单代数, 所以  $u_3, u_4 \in \mathbb{k}$ . 结合  $U$  是可逆矩阵知  $u_3, u_4$  不全为零, 由此便知结论成立.  $\square$



**Example 3.77.** 域  $\mathbb{k}$  上矩阵代数上的  $\mathbb{k}$ -线性导子都是某个矩阵决定的内导子.

Skolem-Noether 定理的另一个应用是说明有限维中心可除代数总存在一个极大子域是中心的可分扩张.

**Theorem 3.78.** 设  $D$  是域  $\mathbb{k}$  上有限维中心可除代数, 那么存在  $D$  的极大子域满足是  $\mathbb{k}$  的有限可分扩张.

*Proof.* 考虑  $D$  所有是  $\mathbb{k}$  的可分扩张的子域构成的集合  $\mathcal{S}$ . 由  $\mathbb{k} \in \mathcal{S}$  知  $\mathcal{S}$  非空, 因此由  $\dim_{\mathbb{k}} D$  有限知  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  存在极大元, 记作  $H$ . 下证  $H$  是  $D$  的极大子域来完成证明. 考虑  $H$  在  $D$  中的中心化子  $C_D(H)$ , 我们用反证法说明  $C_D(H) = H$ , 由此便知  $H$  是  $D$  的极大子域. 假设  $C_D(H) \neq H$ , 即有  $C_D(H) \supsetneq H$ . 由双重中心化子定理 (见 [定理2.64]) 可知  $Z(C_D(H)) = C_D(C_D(H)) = H$ . 所以这时  $C_D(H)$  是  $H$  上维数至少为 2 的中心可除代数 (这也说明  $C_D(H)$  不交换). 现在应用 Jacobson-Noether 定理 (见 [定理2.61]), 存在  $\alpha \in C_D(H) - H$  使得  $\alpha$  是  $H$  上可分元. 于是  $H(\alpha) \supsetneq H$  是有限可分扩张. 根据  $H$  的选取,  $H \supseteq \mathbb{k}$  也是可分的, 所以由可分扩张的传递性 (可分代数角度的证明见 [命题3.35]) 得到  $H(\alpha) \supseteq \mathbb{k}$  是可分扩张. 而  $H(\alpha) \supsetneq H$  表明这与  $H$  的极大性矛盾. 因此我们得到  $C_D(H) = H$ . 这说明  $H$  是可除代数  $D$  的极大子域.  $\square$

**Remark 3.79.** 该定理指出有限维中心可除代数总存在可分极大子域.

**Corollary 3.80** ([29]). 设域  $\mathbb{k}$  上代数  $A$  是有限维中心单代数, 则存在  $A$  的分裂域满足是  $\mathbb{k}$  的有限可分扩张.

*Proof.* 根据 [引理2.65], 任取不可约左  $A$ -模  $M$  (由于这时  $M$  已经是  $A$  忠实的不可约表示所以满足 [引理2.65] 使用条件), 则  $\mathbb{k}$  上有限维可除代数  $\Delta$  的任何极大子域  $H$  都是  $A$  的分裂域, 即满足  $H$ -代数同构  $A \otimes_{\mathbb{k}} H \cong M_m(H)$ , 其中  $m^2 = \dim_{\mathbb{k}} A$ . 而 [定理3.78] 表明这样的极大子域  $H$  总可选取为  $\mathbb{k}$  的可分扩张.  $\square$

**Proposition 3.81.** 设  $D$  是域  $F$  上有限维可除代数, 记  $Z$  是  $D$  的中心并设  $\dim_Z D = h^2$ . 如果  $Z \supseteq F$  是  $p$  次可分扩张. 那么对任何正整数  $k$  有  $\bar{Z}$ -代数同构  $M_k(D) \otimes_F \bar{Z} \cong M_{hk}(\bar{Z})^p$ .

*Proof.* 首先  $M_k(D) \otimes_F \bar{Z} \cong (M_k(D) \otimes_F Z) \otimes_Z \bar{Z} \cong Z \otimes_F (M_k(D) \otimes_Z \bar{Z}) \cong Z \otimes_F M_k(D \otimes_Z \bar{Z})$ . 因为  $D$  是域  $Z$  上中心单代数,  $\bar{Z}$  是单环, 所以由 [引理2.62] 知  $D \otimes_Z \bar{Z}$  是  $\bar{Z}$  上  $h^2$  维单代数, 因此  $D \otimes_Z \bar{Z} \cong M_h(\bar{Z})$ . 这说明  $M_k(D \otimes_Z \bar{Z}) \cong M_{hk}(\bar{Z})$ . 最后说明  $Z \otimes_F M_{hk}(\bar{Z}) \cong M_{hk}(\bar{Z})^p$  来完成证明. 因为  $Z \supseteq F$  是有限可分扩张, 因此由本原元定理,  $Z \supseteq F$  是单扩张. 设  $Z = F(\alpha)$ ,  $\alpha$  在  $F$  上最小多项式记作  $m(x)$ , 那么  $m(x)$  在  $\bar{Z}$  上可分裂为互不相同的一次多项式乘积  $m(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_p)$ . 现在有

$$Z \otimes_F \bar{Z} = F(\alpha) \otimes_F \bar{Z} \cong F[x]/(m(x)) \otimes_F \bar{Z} \cong \bar{Z}[x]/(m(x)) \cong \prod_{i=1}^p \bar{Z}[x]/(x - \alpha_i) \cong \bar{Z}^p,$$

所以  $Z \otimes_F M_{hk}(\bar{Z}) \cong M_{hk}(Z \otimes_F \bar{Z}) \cong M_{hk}(\bar{Z}^p) \cong M_{hk}(\bar{Z})^p$ .  $\square$

Skolem-Noether 定理也能够让我们给出 (结合) 代数有限维表示间的等价性一个刻画.

**Proposition 3.82.** 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上代数,  $\rho_1 : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}} V$ ,  $\rho_2 : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}} W$  是  $A$  的两个有限维表示 (对一般的  $\mathbb{k}$ -代数未必存在非零的有限维表示, 例如特征为零的域上的 Weyl 代数). 那么  $\rho_1$  与  $\rho_2$  等价 (即  $V$  与  $W$  作为左  $A$ -模同构) 的充要条件是存在  $\mathbb{k}$ -代数同构  $\theta : \text{End}_{\mathbb{k}} V \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}} W$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho_1} & \text{End}_{\mathbb{k}} V \\ & \searrow \rho_2 & \downarrow \theta \\ & & \text{End}_{\mathbb{k}} W \end{array}$$

*Proof.* 必要性是明显的, 仅证充分性. 这时  $V$  与  $W$  是维数相同的线性空间, 可设有  $\mathbb{k}$ -线性同构  $h_1 : V \rightarrow \mathbb{k}^n, h_2 : W \rightarrow \mathbb{k}^n$ . 那么这诱导  $\mathbb{k}$ -代数同构  $c_1 : \text{End}_{\mathbb{k}} V \rightarrow M_n(\mathbb{k}), f \mapsto h_1 f h_1^{-1}, c_2 : \text{End}_{\mathbb{k}} W \rightarrow M_n(\mathbb{k}), g \mapsto h_2 g h_2^{-1}$ . 于是存在唯一的  $\mathbb{k}$ -代数同构  $\bar{\theta} : M_n(\mathbb{k}) \rightarrow M_n(\mathbb{k})$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\rho_1} & \text{End}_{\mathbb{k}} V & \xrightarrow{c_1} & M_n(\mathbb{k}) \\ & \searrow \rho_2 & \downarrow \theta & & \downarrow \bar{\theta} \\ & & \text{End}_{\mathbb{k}} W & \xrightarrow{c_2} & M_n(\mathbb{k}) \end{array}$$

根据 Skolem-Noether 定理, 存在可逆矩阵  $U$  使得  $\bar{\theta}(X) = U^{-1} X U, \forall X \in M_n(\mathbb{k})$ . 现在定义

$$V_2 \xrightarrow{h_2} \mathbb{k}^n \xrightarrow{U} \mathbb{k}^n \xrightarrow{h_1^{-1}} V_1$$

的合成映射  $\mu : V_2 \rightarrow V_1$ , 这是  $\mathbb{k}$ -线性同构. 下证这是左  $A$ -模同态, 这只需要验证对任何  $a \in A$  有

$$\rho_1(a) h_1^{-1} U h_2 = h_1^{-1} U h_2 \rho_2(a).$$

根据  $\bar{\theta}$  以及  $U$  的定义, 我们有  $U^{-1} c_1(\rho_1(a)) U = c_2(\rho_2(a))$ . 那么  $U^{-1} h_1 \rho_1(a) h_1^{-1} U = h_2 \rho_2(a) h_2^{-1}$ .  $\square$

有限维中心单代数分裂域的存在性 (见 [引理2.65] 的注记)、Skolem-Noether 定理和 [推论3.80] 使人们能够在中心单代数场景类似于矩阵代数去定义“迹”的概念. 以下固定域  $\mathbb{k}$  上有限维中心单代数  $A$ .

任取  $A$  的分裂域  $F$ , 即  $\mathbb{k}$  的满足有  $F$ -代数同构  $A \otimes_{\mathbb{k}} F \cong M_m(F)$ , 其中  $m^2 = \dim_{\mathbb{k}} A$ , 的域扩张  $F$ . 设  $h, g : A \otimes_{\mathbb{k}} F \rightarrow M_m(F)$  都是  $F$ -代数同构, 那么  $h g^{-1}$  是矩阵代数  $M_m(F)$  上的代数自同构, 根据 Skolem-Noether 定理,  $h g^{-1}$  一定是某个可逆阵决定的内自同构. 这一观察表明

**Lemma 3.83** ([29]). 对任何  $a \in A, a \otimes 1 \in A \otimes_{\mathbb{k}} F$  在代数同构  $h, g$  作用下的像有相同特征多项式.

*Proof.* 这时存在可逆阵  $U \in M_m(F)$  使得  $h g^{-1}(X) = U^{-1} X U, \forall X \in M_m(F)$ . 取  $X = g(a \otimes 1)$  即可.  $\square$

下面我们马上说明  $h(a \otimes 1) \in M_m(F)$  的特征多项式不仅系数在  $\mathbb{k}$  中, 也不依赖于分裂域  $F$  的选取.

**Theorem 3.84** ([29]). 任给  $a \in A$ , 对  $A$  的分裂域  $F$ , 记  $h(a \otimes 1) \in M_m(F)$  的特征多项式为  $\text{char.p}_F(a \otimes 1)$  (根据 [引理3.83], 该多项式不依赖于代数同构  $h$  的选取). 那么  $\text{char.p}_F(a \otimes 1) \in \mathbb{k}[x]$  并且  $\text{char.p}_F(a \otimes 1)$  不依赖于分裂域  $F$  的选取. 因此  $\text{char.p}_F(a \otimes 1)$  是仅依赖于  $a$  的多项式, 记作  $\text{red.p}(a)$ , 称为  $a$  的约化特征多项式.

*Proof.* 我们先证明  $\text{char.p}_F(a \otimes 1)$  不依赖于  $F$  的选取再说明它系数均在  $\mathbb{k}$  中. 任取  $A$  的分裂域  $E$ , 不妨设  $E \supseteq F$  (否则, 由下面的 [引理3.85], 可找  $\mathbb{k}$  的一个更大的域扩张包含  $E$  和  $F$ , 易见分裂域的域扩张依然是分裂域), 那么对  $F$ -代数同构  $h : A \otimes_{\mathbb{k}} F \rightarrow M_m(F)$ , 我们可以借助  $E$ -代数同构

$$(A \otimes_{\mathbb{k}} F) \otimes_F E \cong A \otimes_{\mathbb{k}} E, M_m(F) \otimes_F E \cong M_m(E)$$

从  $h$  出发得到  $A \otimes_{\mathbb{k}} E$  到  $M_m(E)$  的  $E$ -代数同构, 它把  $a \otimes 1$  映至  $h(a \otimes 1)$ . 在 [引理3.83] 中已经指出对固定的分裂域  $E$ , 不同的  $E$ -代数同构  $A \otimes_{\mathbb{k}} E \cong M_m(E)$  产生的  $a \otimes 1$  的特征多项式相同, 因此分裂域  $E$  产生的  $a \otimes 1$  的特征多项式就是分裂域  $F$  给出的特征多项式. 至此得到  $\text{char.p}_F(a \otimes 1)$  不依赖于分裂域的选取.

下面说明  $\text{char.p}_F(a \otimes 1) \in \mathbb{k}[x]$  来完成定理证明. 根据 [推论3.80], 我们可选取分裂域  $F$  是  $\mathbb{k}$  的有限可分扩张. 因为分裂域的扩域依然是分裂域, 所以我们不妨设  $F$  是  $\mathbb{k}$  的有限 Galois 扩张 (具体地, 通过本原元

定理我们知道存在  $\mathbb{k}$  上可分元  $\alpha \in F$  使得  $F = \mathbb{k}(\alpha)$ , 再考虑  $\alpha$  的最小多项式在  $\mathbb{k}$  上的分裂域  $L$ , 那么  $L$  是  $F$  的有限扩张并且是  $\mathbb{k}$  的有限 Galois 扩张, 取  $F = L$  即可). 考虑  $F \supseteq \mathbb{k}$  的 Galois 群  $G = \text{Aut}_{\mathbb{k}} F$ , 那么由 Galois 理论我们知道  $\mathbb{k} = F^G$ . 下面通过说明  $\text{char.p}_F(a \otimes 1) \in F[x]$  的系数在  $G$  作用下不动来得到结论. 先考虑一个更一般的场景: 对任何与  $F$  作为  $K$ -代数同构的  $K$  的域扩张  $F'$  和取定的  $K$ -代数同构  $\sigma : F \rightarrow F'$  (之后我们将局限回  $F' = F$  且  $\sigma \in G$  的场景), 那么存在唯一的  $F'$ -代数同构  $h' : A \otimes_{\mathbb{k}} F' \rightarrow M_m(F')$  使

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\mathbb{k}} F & \xrightarrow{\text{id} \otimes \sigma} & A \otimes_{\mathbb{k}} F' \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ M_m(F) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & M_m(F') \end{array}$$

交换, 其中  $\tilde{\sigma}$  是矩阵代数间由系数环同构诱导的自然环同构. 特别地, 我们有

$$\tilde{\sigma}(h(a \otimes 1)) = h'(a \otimes \sigma(1)) = h'(a \otimes 1),$$

这一观察表明  $a \otimes 1$  由分裂域  $F$  定义的特征多项式系数均作用  $\sigma$  后得到的特征多项式就是  $a \otimes 1$  由分裂域  $F'$  定义出的特征多项式. 现在取  $F' = F$ ,  $\sigma$  是  $G$  中任意元素, 那么  $\text{char.p}_F(a \otimes 1)$  关于  $G$  中任何元素作用不动. 因此由  $\mathbb{k} = F^G$  我们得到  $\text{char.p}_F(a \otimes 1) \in \mathbb{k}[x]$ .  $\square$

**Lemma 3.85** ([29]). 设域  $E, F$  是  $\mathbb{k}$  的域扩张, 那么存在域  $L$  使得  $E$  与  $F$  均可嵌入  $L$ .

*Proof.* 考虑  $\mathbb{k}$ -交换代数  $E \otimes_{\mathbb{k}} F$ , 并取其极大理想  $M$ , 作  $L = (E \otimes_{\mathbb{k}} F)/M$  即可.  $\square$

沿用 [定理3.84] 的记号, 前面的讨论表明任取有限维中心单代数  $A$  的分裂域  $F$ , 取  $F$ -代数同构  $h : A \otimes_{\mathbb{k}} F \rightarrow M_m(F)$ , 并记标准嵌入  $i : A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{k}} F, a \mapsto a \otimes 1$ , 考虑映射的合成

$$A \xrightarrow{i} A \otimes_{\mathbb{k}} F \xrightarrow{h} M_m(F) \xrightarrow{\text{tr}} F,$$

若记上述合成映射是  $\tau : A \rightarrow F$ , 那么 [定理3.84] 表明  $\tau$  的定义不依赖于  $F$  和  $h$  的选取并且  $\tau(A) = \mathbb{k}$ . 定义  $\text{tr}_{\text{red}} : A \rightarrow \mathbb{k}, a \mapsto \tau(a)$ , 这是  $\mathbb{k}$ -线性映射并且把每个  $a$  映至矩阵  $h(a \otimes 1)$  的迹. 对每个  $a \in A$ ,  $\text{tr}_{\text{red}}(a) \in \mathbb{k}$  是关于  $a$  的不变量, 进而映射  $\text{tr}_{\text{red}}$  是中心单代数  $A$  的不变量, 称为  $A$  的约化迹, 易见它是  $\mathbb{k}$ -线性映射.

根据约化迹的定义,  $\text{tr}_{\text{red}}(a)$  就是  $a$  的约化特征多项式  $\text{red.p}(a)$  次高次项系数的负元, 即若把约化特征多项式写作  $\text{red.p}(a) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + x^n$ , 那么  $\text{tr}_{\text{red}}(a) = -\alpha_{n-1}$ . 由矩阵的迹的性质易见

**Lemma 3.86.** 域  $\mathbb{k}$  上有限维中心单代数  $A$  的约化迹映射  $\text{tr}_{\text{red}} : A \rightarrow \mathbb{k}$  满足  $\text{tr}_{\text{red}}(ab) = \text{tr}_{\text{red}}(ba), \forall a, b \in \mathbb{k}$ .

**Remark 3.87.** 一般地, 如果含么环  $R$  有中心子环  $C$ , 称满足  $\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba), \forall a, b \in R$  的  $C$ -线性映射  $\text{tr} : R \rightarrow C$  是  $R$  到中心子环  $C$  的迹映射. 有限维中心单代数  $A$  到  $\mathbb{k}$  的约化迹映射是特殊的迹映射.

现设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上  $n^2$  维中心单代数 (由 Kaplansky 定理,  $A$  作为 PI 代数的最小次数是  $2n$ . 它的 PI 次数就是  $n$ ), 并设  $M$  是不可约左  $A$ -模, 那么这时对  $A$  的分裂域  $F$  (我们不妨设  $F$  为  $A$  的极大子域), 有  $F$ -代数同构  $A \otimes_{\mathbb{k}} F \cong M_n(F)$ . 由 [引理2.65(4)],  $n$  也是  $M$  作为  $F$ -线性空间的维数. 结合 [引理2.54] 的证明过程知  $F$ -代数同构  $A \otimes_{\mathbb{k}} F \cong M_n(F)$  可由  $A \otimes_{\mathbb{k}} F$  中元素在  $M$  上的左乘变换给出 (这里按照 [引理2.65(3)] 将  $M$  视作左  $A \otimes_{\mathbb{k}} F$ -模, 是不可约模, 并把  $M_n(F)$  和  $\text{End}_F M$  视作等同). 所以一个基本的观察是  $h(a \otimes 1)$  的特征多项式 (即  $\text{red.p}(a)$ ) 和  $a \otimes 1$  所决定的  $M$  上左乘变换 (作为  $F$ -线性变换) 的特征多项式一致. 因为

$A \otimes_{\mathbb{k}} F$  是 Artin 单环, 所以  $A \otimes_{\mathbb{k}} F$  作为自身左模是完全可约的, 恰好 (在同构意义下) 可分解为  $n$  个不可约左  $A \otimes_{\mathbb{k}} F$ -模  $M$  的直和. 由于准对角阵的特征多项式就是对角线上各个分块矩阵特征多项式的乘积, 所以对每个  $a \in A$ ,  $a \otimes 1$  所决定的  $A \otimes_{\mathbb{k}} F$  上左乘变换 (作为  $F$ -线性变换) 的特征多项式就是  $a \otimes 1$  所决定的  $M$  上左乘变换 (作为  $F$ -线性变换) 的特征多项式的  $n$  次方. 使用符号语言, 便是  $\text{char.p}(a \otimes 1)_{\ell} = (\text{red.p}(a))^n$ , 其中  $(a \otimes 1)_{\ell}$  表示  $a \otimes 1$  在  $A \otimes_{\mathbb{k}} F$  上的左乘变换. 通过取  $A$  具体的  $\mathbb{k}$ -基可直接验证  $\text{char.p}(a \otimes 1)_{\ell}$  与  $a$  诱导的  $A$  上左乘变换作为  $\mathbb{k}$ -线性变换的特征多项式一致. 通常, 对域  $\mathbb{k}$  上的有限维代数  $B$ , 我们都可以定义  $\mathbb{k}$ -线性映射  $\text{tr}_{\text{reg}} : B \rightarrow \mathbb{k}, b \mapsto \text{tr}(b_{\ell})$ , 其中  $b_{\ell}$  表示元素  $b$  在  $B$  上的左乘变换在  $\mathbb{k}$  中的迹. 称  $\text{tr}_{\text{reg}}$  是有限维代数的正则迹. 而我们刚刚的讨论证明了中心单代数上正则迹与约化迹的如下关系:

**Theorem 3.88** (中心单代数的约化迹与正则迹, [29]). 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上  $n^2$  维中心单代数,  $a \in A$ . 那么  $A$  上左乘变换  $a_{\ell}$  作为  $\mathbb{k}$ -线性变换的特征多项式就是  $(\text{red.p}(a))^n$ . 特别地, 我们有  $\text{tr}_{\text{reg}} = n \text{tr}_{\text{red}}$ .

**Remark 3.89.** 这里再指出中心单代数的约化迹一定是非零的. 沿用前面的记号, 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上  $n^2$  维中心单代数, 那么有分裂域  $F$  和  $F$ -代数同构  $h : A \otimes_{\mathbb{k}} F \rightarrow M_n(F)$ .  $\text{tr}_{\text{red}}(A)$  就是  $M_n(F)$  中所有矩阵的迹构成的集合. 无论  $\mathbb{k}$  是否有正特征, 总存在迹非零的矩阵 (例如基础矩阵  $E_{11}$ ). 因此  $\text{tr}_{\text{red}}(A) \neq 0$ . 而上述定理表明当  $\text{char } \mathbb{k}$  整除  $n$  时,  $\mathbb{k}$  上  $n^2$  维中心单代数的正则迹一定是零. 因此中心单代数的约化迹能获取更多信息.

如果含么环  $R$  到中心子环  $C$  有非零  $C$ -模同态  $\tau : R \rightarrow C$  满足  $\tau(ab) = \tau(ba), \forall a, b \in R$ , 那么  $R$  有真理想  $I = \{a \in R \mid \tau(aR) = 0\}$ . 该理想衡量  $\tau$  诱导的  $C$ -对称双线性型  $R \times R \rightarrow C, (a, b) \mapsto \tau(ab)$  的非退化性. 易见该对称双线性型非退化当且仅当上述理想  $I = 0$ . 特别地, 当  $R$  是单环时,  $I = 0$ . 所以我们得到

**Proposition 3.90** ([29]). 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上  $n^2$  维中心单代数, 那么约化迹  $\text{tr}_{\text{red}}$  诱导的对称双线性型

$$\langle -, - \rangle_{\text{tr}_{\text{red}}} : A \times A \rightarrow \mathbb{k}, (a, b) \mapsto \text{tr}_{\text{red}}(ab)$$

是非退化的.

**Example 3.91.** 考虑域  $\mathbb{k}$  上  $n$  阶矩阵代数  $A = M_n(\mathbb{k})$ , 这时  $\mathbb{k}$  就是  $A$  的分裂域. 因此根据约化迹的构造我们立即看到矩阵代数作为中心单代数的约化迹就是原有的经典迹映射.

如果  $R$  是 PI 次数为  $n$  的素 PI 环, 记其中心是  $Z$  且记  $S = Z - \{0\}$  是  $R$  的中心正则元集, 那么根据 Posner 定理可知  $R_S$  是  $Z_S = \text{Frac } Z$  上维数为  $n^2$  的中心单代数, 于是我们可以利用中心单代数  $R_S$  的约化迹去构造一个  $R$  到  $Z_S$  的“迹映射”. 具体地, 考虑局部化映射  $\lambda_S : R \rightarrow R_S$  并取  $R_S$  的分裂域  $F \supseteq \text{Frac } Z$ , 沿用前面的记号, 取定  $F$ -代数同构  $h : R_S \otimes_{Z_S} F \rightarrow M_n(F)$ , 考虑下述映射列的合成:

$$R \xrightarrow{\lambda_S} R_S \longrightarrow R_S \otimes_{Z_S} F \xrightarrow{h} M_n(F) \xrightarrow{\text{tr}} F,$$

其中  $\text{tr}$  表示矩阵代数上的经典迹. 易见上述映射列的合成就是  $\lambda_S$  与中心单代数  $R_S$  的约化迹的合成, 记上述映射列的合成  $\tau : R \rightarrow F$ , 那么 [定理3.84] 表明  $\tau(R) \subseteq Z_S$ . 结合中心单代数的约化迹总是非零的, 不难看出存在  $a \in R$  使得  $\tau(a) \neq 0$ . 所以我们改写  $\tau$  的陪域得到非零  $Z$ -线性映射  $\tau : R \rightarrow Z_S, a \mapsto \tau(a)$ , 它满足对所有的  $a, b \in A$  有  $\tau(ab) = \tau(ba)$ . 人们会把  $Z_S$  修改地更小些但始终包含  $\tau(R)$  来研究素 PI 环  $R$  的性质.

**Definition 3.92** (迹环, [30]). 设  $R$  是以  $Z$  为中心且 PI 次数为  $n$  的素 PI 环,  $S = Z - \{0\}$ ,  $\lambda_S : R \rightarrow R_S$  是局部化映射,  $F$  是  $R_S$  的分裂域并取定  $F$ -代数同构  $h : R_S \otimes_{Z_S} F \rightarrow M_n(F)$ . 对每个正整数  $1 \leq k \leq n$ , 记

$$\sigma_k : M_n(F) \rightarrow F, A \mapsto \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \cdots \lambda_{j_k}$$

是将每个方阵映至其特征值在第  $k$  个初等对称多项式下的取值, 这里  $\lambda_1, \dots, \lambda \in \overline{F}$  是  $A$  的特征值. 命

$$c_k : R \xrightarrow{\lambda_S} R_S \longrightarrow R_S \otimes_{Z_S} F \xrightarrow{h} M_n(F) \xrightarrow{\sigma_k} F,$$

根据 [定理3.84],  $c_k(R) \subseteq Z_S$  (注意到  $h(1 \otimes 1) = I_n$  的特征多项式是  $(x-1)^n$ , 所以  $c_n(1) = (-1)^n$ ). 定义  $T(R)$  为  $R \cup \{c_k(R) | 1 \leq k \leq n\}$  在  $R_S$  中生成的子环 (即  $\mathbb{Z}$ -子代数, 也可以等价地, 先定义  $\{c_k(R) | 1 \leq k \leq n\}$  在  $Z_S$  中生成的  $Z$ -子代数  $T$ , 再命  $T(R) = TR$ ), 那么  $T(R) \supseteq R$  是环扩张. 称  $T(R)$  是  $R$  的迹环或特征闭包.

**Remark 3.93.** 如果域  $Z_S$  的特征  $\text{char} Z_S \notin [1, n]$ , 那么对任何正整数  $1 \leq k \leq n$ ,  $k!$  是  $Z_S$  中可逆元. 那么也是中心单代数  $R_S$  的分裂域  $F$  中的可逆元. 于是由下面的 [引理3.96(3)], 每个  $c_k(a), a \in R$ , 作为矩阵  $h(a \otimes 1)$  的特征多项式的系数, 可由矩阵  $h(a \otimes 1)$  的正整数幂的迹生成. 这时  $Z_S$  的  $Z$ -子代数  $T$  含于  $Z_S$  的由  $\{\text{tr}(h(a \otimes 1)) = \text{tr}_{\text{red}}(a) | a \in R\}$  生成的含么子环 (由  $\text{tr}_{\text{red}}$  的  $Z$ -线性性知这也是  $Z$ -子代数) 中, 其中  $\text{tr}_{\text{red}}$  表示中心单代数  $R_S$  的约化迹. 因此  $T$  就是由  $\{\text{tr}_{\text{red}}(a) | a \in R\}$  在  $Z_S$  中生成的含么子环. 这是迹环命名之由.

**Remark 3.94.** 对每个  $a \in R$ , 由  $(-1)^k c_k(a)$  就是矩阵  $h(a \otimes 1)$  的特征多项式中  $x^{n-k}$  的系数可知若定义

$$\chi_{a,n}(x) = x^n - c_1(a)x^{n-1} + c_2(a)x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}c_{n-1}(a)x + (-1)^n c_n(a) \in T[x] \subseteq Z_S[x],$$

则  $\chi_{a,n}(a) \otimes 1 = \chi_{a,n}(a \otimes 1) = \chi_{a,n}(h(a \otimes 1)) = 0$ . 结合  $Z_S$  是域知  $\chi_{a,n}(a) = 0$ . 并指出  $\text{tr}_{\text{red}}(1) = n$ .

**Remark 3.95.** 这里使用的迹环定义与一些文献中采用的定义不同 (例如 [2]). 这里的迹环比 [2] 中的大.

下面我们回顾线性代数中 Newton 公式以及对称多项式与幂和间的基本关系.

**Lemma 3.96** (Newton 公式). 设  $\mathbb{k}$  是域且  $n$  是固定的正整数, 对每个正整数  $1 \leq k \leq n$ , 记

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

是多项式代数  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  中第  $k$  个初等对称多项式, 并记  $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$  是第  $k$  个 (Newton) 幂和 (当  $k = 0$  时,  $s_0 = n$ ). 那么对固定的正整数  $k$ , 有

- (1)(Newton) 如果  $k \leq n-1$ , 那么  $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 + \dots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0$ .
- (2)(Newton) 当  $k \geq n$  时, 有  $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 + \dots + (-1)^{n-1}s_{k-n+1}\sigma_{n-1} + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0$ .
- (3) 如果正整数  $k \in [1, n]$  但  $\text{char} \mathbb{k} \notin [1, k]$ , 那么有

$$\sigma_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \dots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}.$$

特别地, 对域  $\mathbb{k}$  上任何  $n$  阶方阵  $M$ ,  $M$  的特征多项式的系数都在  $\{\text{tr}(M^i) | 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbb{k}$  生成的子环中.

(4) 设  $\text{char} \mathbb{k} \notin [1, n]$ , 记  $\mathbb{I}$  是  $\mathbb{k}$  的素域, 即

$$\mathbb{I} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{char} \mathbb{k} = 0 \\ \mathbb{F}_p, & \text{char} \mathbb{k} = p, \end{cases}$$



其中  $p$  是素数,  $\mathbb{F}_p$  表示  $p$  元域. 那么对任何  $\mathbb{I}$  上  $n$  元对称多项式  $h$ , 存在唯一的  $n$  元多项式  $p \in \mathbb{I}[x_1, \dots, x_n]$  使得  $h = p(s_1, \dots, s_n)$ . 并且, 对每个正整数  $1 \leq k \leq n$ , 存在唯一的  $k$  元多项式  $p_k \in \mathbb{Z}[(k!)^{-1}][x_1, \dots, x_k]$  使得

$$\sigma_k = p_k(s_1, \dots, s_k).$$

根据 (3) 的结论, 我们可以如下显式地写出  $p_k$  的表达式:

$$p_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & x_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k-1} & x_{k-2} & x_{k-3} & \cdots & k-1 \\ x_k & x_{k-1} & x_{k-2} & \cdots & x_1 \end{vmatrix}.$$

*Proof.* 对多项式代数  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  添加变量  $x$  得到  $n+1$  元多项式代数  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n, x]$ , 在证明引理前我们先说明对  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} x + (-1)^n \sigma_n$ , 有

$$x^{k+1} f'(x) = (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_k) f(x) + g(x),$$

其中  $g(x)$  作为  $x$  的多项式次数严格小于  $n$ . 首先根据多项式求导的定义立即看到

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{f(x)}{x - x_i}.$$

所以对每个正整数  $k$ , 有

$$x^{k+1} f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x^{k+1} f(x)}{x - x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{(x^{k+1} - x_i^{k+1}) f(x)}{x - x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1} f(x)}{x - x_i},$$

易见最后一个表达式的第一个和式就是  $(s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_k) f(x)$ , 记第二个表达式对应的多项式为  $g(x)$ , 它关于  $x$  的次数明显严格低于  $n$ . 现在对  $f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} x + (-1)^n \sigma_n$  对  $x$  求导再乘上  $x^{k+1}$ , 我们得到  $x^{k+1} f'(x) = n x^{n+k} - (n-1) \sigma_1 x^{n+k-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} x^{k+1}$ . 由前面的讨论, 还有

$$\begin{aligned} x^{k+1} f'(x) &= (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_k) f(x) + g(x) \\ &= (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_k) (x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} x + (-1)^n \sigma_n) + g(x). \end{aligned}$$

当  $k \leq n-1$  时, 最后一个表达式关于  $x^n$  系数为  $s_k - s_{k-1} \sigma_1 + s_{k-2} \sigma_2 + \cdots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k n \sigma_k$ . 因此比较该系数与  $x^{k+1} f'(x) = n x^{n+k} - (n-1) \sigma_1 x^{n+k-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} x^{k+1}$  中  $x^n$  的系数可得

$$s_k - s_{k-1} \sigma_1 + s_{k-2} \sigma_2 + \cdots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k n \sigma_k = (-1)^k (n-k) \sigma_k,$$

整理上式便知  $s_k - s_{k-1} \sigma_1 + s_{k-2} \sigma_2 + \cdots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0$ , 这证明了 (1).

如果  $k \geq n$ , 那么之前得到  $(s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_k) f(x) + g(x)$  的表达式中关于  $x^n$  的系数便是

$$s_k - s_{k-1} \sigma_1 + s_{k-2} \sigma_2 + \cdots + (-1)^{n-1} s_{k-n+1} \sigma_{n-1} + (-1)^n s_{k-n} \sigma_n,$$

这时  $x^{k+1}f'(x) = nx^{n+k} - (n-1)\sigma_1x^{n+k-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x^{k+1}$  中  $x^n$  的系数是 0, 这说明

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 + \cdots + (-1)^{n-1}s_{k-n+1}\sigma_{n-1} + (-1)^ns_{k-n}\sigma_n = 0,$$

于是知 (2) 也成立. 下面证明 (3). 根据前面得到的 Newton 公式, 我们有  $k$  个等式:

$$\sigma_1 = s_1, s_1\sigma_1 - 2\sigma_2 = s_2, \dots, s_{k-1}\sigma_1 - s_{k-2}\sigma_2 + \cdots + (-1)^{k-1}k\sigma_k = s_k.$$

这些等式可视为关于  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  的线性方程组 (将  $\sigma_i$  视作变量, 视方程组为系数在有理函数域  $\mathbb{k}(x_1, \dots, x_n, x)$  中的线性方程组), 该关于  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  的线性方程组的系数矩阵 (这里记该  $k$  阶矩阵为  $M$ ) 的行列式为

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & -s_1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-2} & -s_{k-3} & s_{k-4} & \cdots & 0 \\ s_{k-1} & -s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & (-1)^{k-1}k \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+\cdots+(k-1)}k!.$$

记  $M_k$  是将  $M$  的第  $k$  列更换为  $(s_1, s_2, \dots, s_k)^T$ , 其余列保持不变的  $k$  阶矩阵. 注意到  $\det M$  是  $\mathbb{k}$  中可逆元 (这里用到了  $\text{char } \mathbb{k} \notin [1, k]$  的条件), 因此由 Cramer 法则,  $\sigma_k = \det M_k / \det M$ . 下面我们计算  $\det M_k$ .

将  $M_k$  的最后一列经  $k-1$  次相邻对换转移到第一列后, 对每个  $3 \leq i \leq k$ , 将新矩阵的第  $i$  列乘上  $(-1)^{i-2}$ , 我们得到

$$\det M_k = (-1)^{(k-1)+(1+2+3+\cdots+k-2)} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & \cdots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}.$$

现在我们的不难看到  $\sigma_k = \det M_k / \det M$  就是 (3) 中要证结论中的表达式.

最后证明 (4). 根据对称多项式基本定理, 对  $\mathbb{I}$  上任何  $n$  元对称多项式, 总可唯一地表示为初等对称多项式  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  的多项式. 因此应用 (3) 可知 (这时  $\text{char } \mathbb{k} \notin [1, k], \forall 1 \leq k \leq n$ )  $\mathbb{I}$  上  $n$  元对称多项式均可表示为关于  $s_1, \dots, s_n$  的多项式. 因此我们想要证明对称多项式关于  $s_1, \dots, s_n$  的多项式表示的唯一性, 我们必须验证  $\{s_1, \dots, s_n\}$  是  $\mathbb{I}$  代数无关的. 下面用反证法证明该断言. 首先注意  $\mathbb{I}[s_1, \dots, s_n]$  就是  $\mathbb{I}$  上对称多项式代数, 故由  $\mathbb{I}[x_1, \dots, x_n] \supseteq \mathbb{I}[x_1, \dots, x_n]^{S_n} = \mathbb{I}[s_1, \dots, s_n]$  (这里将对称群  $S_n$  通过置换多项式变量的方式自然地作用到多项式代数上) 是整扩张知  $k \cdot \dim \mathbb{I}[s_1, \dots, s_n] = n$ . 于是由下面的 [引理 3.98] 得到  $\{s_1, \dots, s_n\}$  在  $\mathbb{I}$  上代数无关. 下面我们说明对每个正整数  $1 \leq k \leq n$ , 存在唯一的  $k$  元多项式  $p_k \in \mathbb{Z}[(k!)^{-1}][x_1, \dots, x_k]$  使得  $\sigma_k = p_k(s_1, \dots, s_k)$ . 首先,  $k$  元多项式  $p_k$  的存在性由 (3) 保证. 其次, 注意到  $\mathbb{Z}[(k!)^{-1}][x_1, \dots, x_k] \subseteq \mathbb{I}[x_1, \dots, x_n]$ , 所以  $p_k$  的唯一性来自  $\{s_1, \dots, s_n\}$  的  $\mathbb{I}$ -代数无关性. 至此, (4) 的证明已完整.  $\square$

**Remark 3.97.** 根据证明过程不难看到结论对  $\mathbb{k}$  是整区的情形也成立 (或者直接把整区嵌入商域应用引理).

**Lemma 3.98.** 设  $\mathbb{I}$  是域,  $A$  是  $\mathbb{I}$  上可由子集  $S$  生成的交换代数. 那么

$$\text{k.dim} A \leq \sup\{|T| \mid T \text{ 是 } S \text{ 的有限子集且 } \mathbb{I}\text{-代数无关}\}.$$

特别地, 若取  $A = \mathbb{I}[x_1, \dots, x_n], S = \{x_1, \dots, x_n\}$ , 那么  $\text{k.dim} \mathbb{I}[x_1, \dots, x_n] = n$  是上述不等式的直接推论.

*Proof.* 如果  $S = \emptyset$ , 那么  $A = \mathbb{I}$  是域. 于是  $\text{k.dim} A \leq 0 = \sup\{|T| \mid T = \emptyset\}$ . 因此只需讨论  $S \neq \emptyset$  并且  $\sup\{|T| \mid T \text{ 是 } S \text{ 有限子集且代数无关}\}$  是自然数 (记为  $n \in \mathbb{N}$ ) 的情形. 下面对  $n$  作归纳证明: 若  $A$  是域  $\mathbb{I}$  上交换代数,  $S$  是  $A$  非空生成元集, 则  $\text{k.dim} A \leq \sup\{|T| \mid T \text{ 是 } S \text{ 有限子集且代数无关}\}$ . 如果  $n = 0$ , 那么  $S$  中任何元素都是  $\mathbb{I}$  上代数元, 那么  $A$  中所有元素都是  $\mathbb{I}$  上代数元. 任取  $A$  的素理想链  $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_s$ , 那么整区  $A/P_0$  有长度为  $s$  的素理想链  $\{0\} \subsetneq P_1/P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_s/P_0$ . 因为  $A$  中任何元素在  $\mathbb{I}$  上代数, 所以整区  $A/P_0$  中任何元素也在  $\mathbb{I}$  上代数 (即  $A/P_0 \supseteq \mathbb{I}$  是整扩张), 由此得到  $A/P_0$  是域, 所以  $s = 0$ , 这说明  $\text{k.dim} A = 0 \leq n$ , 结论成立. 假设结论对不超过  $n-1$  ( $n \geq 1$ ) 的情形成立, 那么对  $n$  的情形, 我们分两步证明结论.

**Step1.** 若  $A$  是整区, 任取  $A$  的素理想链  $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_s$  (不妨设  $s \geq 1$ , 否则结论直接成立), 可得  $A/P_1$  的长度为  $s-1$  的素理想链  $\{0\} \subsetneq P_2/P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_s/P_1$ , 下面证明  $A/P_1$  的生成元集  $\{a + P_1 \mid a \in S\}$  的任何一个有限代数无关子集  $T$  都有  $|T| \leq n-1$ , 一旦证明该断言, 对  $A/P_1$  作归纳假设可知  $s-1 \leq n-1$ , 进而可得  $\text{k.dim} A \leq n$ . 假设  $\{a + P_1 \mid a \in S\}$  有一个代数无关子集有  $n$  个元素, 设为  $\{a_1 + P_1, a_2 + P_1, \dots, a_n + P_1\}$ , 那么  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  是  $S$  的代数无关子集. 于是对任何  $a \in S$ , 都存在  $\mathbb{I}[a_1, a_2, \dots, a_n][x]$  中的非零多项式  $h(x)$  使得  $h(a) = 0$ . 由此可得  $A \subsetneq \text{Frac} A$  是  $\text{Frac} \mathbb{I}[a_1, a_2, \dots, a_n]$  的整扩张. 故任给  $a \neq 0 \in P_1$ , 均存在以  $\mathbb{I}[a_1, a_2, \dots, a_n]$  中元为系数 (未必首一) 的非零多项式  $\varphi(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_\ell x^\ell$  使  $\varphi(a) = 0$ . 因为  $a \neq 0$ , 所以可设  $c_0 \neq 0$ , 于是存在  $\mathbb{I}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  中非零多项式  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  使得  $g(a_1, a_2, \dots, a_n) = c_0 \in P_1$ , 这与  $\{a_1 + P_1, a_2 + P_1, \dots, a_n + P_1\}$  代数无关矛盾. 断言得证, 于是知当  $A$  是整区时,  $\text{k.dim} A \leq n$ .

**Step2.** 对一般的情形, 任取  $A$  的素理想链  $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_s$ , 可得整区  $A/P_0$  有长度为  $s$  的素理想链  $\{0\} \subsetneq P_1/P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_s/P_0$ . 易见

$$\sup\{|T| \mid T \text{ 是 } \{a + P_0 \mid a \in S\} \text{ 有限子集且代数无关}\} \leq \sup\{|T| \mid T \text{ 是 } S \text{ 有限子集且代数无关}\} = n,$$

故对整区  $A/P_0$  应用第一步证明的结果知  $s \leq n$ , 进而  $\text{k.dim} A \leq \sup\{|T| \mid T \text{ 是 } S \text{ 有限子集且代数无关}\}$ .  $\square$

**Example 3.99.** 设  $n$  是正整数并给定域  $\mathbb{k}$  满足  $\text{char} \mathbb{k} \notin [1, n]$ . 下面我们说明任何  $\mathbb{k}$ -交换代数  $C$  上的  $n$  阶方阵  $M$  的特征多项式  $f(x) = x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}c_{n-1}x + (-1)^nc_n$  的系数满足

$$c_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} \text{tr}(M) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \text{tr}(M^2) & \text{tr}(M) & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{tr}(M^{k-1}) & \text{tr}(M^{k-2}) & \text{tr}(M^{k-3}) & \dots & k-1 \\ \text{tr}(M^k) & \text{tr}(M^{k-1}) & \text{tr}(M^{k-2}) & \dots & \text{tr}(M) \end{vmatrix}, \forall 1 \leq k \leq n.$$

根据 [命题2.40], 我们有  $k(-1)^kc_k + \sum_{i=1}^k \text{tr}(M^i)(-1)^{k-i}c_{k-i} = 0, \forall 1 \leq k \leq n$ , 这里约定  $c_0 = 1$ . 因此对固定的正整数  $k \leq n$ , 我们得到  $k$  个等式:

$$c_1 = \text{tr}(M), \text{tr}(M)c_1 - 2c_2 = \text{tr}(M^2), \dots, \text{tr}(M^{k-1})c_1 - \text{tr}(M^{k-2})c_2 + \dots + (-1)^{k-2}\text{tr}(M)c_{k-1} + (-1)^{k-1}kc_k = \text{tr}(M^k).$$

将上述  $k$  个等式视作以  $c_1, \dots, c_k$  为变量的  $k$  元线性方程组. 与 [引理3.96(3)] 作相同讨论便得结论.

**Example 3.100** ([30]). 如果 PI 次数为  $n$  且以  $Z$  为中心的素 PI 环  $R$  的中心  $Z$  是整闭整区并且  $R$  中元素均是  $Z$  上整元 (之后会在 [引理3.113] 中看到当  ${}_Z R$  是有限生成模时会满足该性质), 我们说明  $T(R) = R$ . 沿用 [定义3.92] 中的记号, 记  $S = Z - \{0\}$ , 设  $F$  是中心单代数  $R_S$  的分裂域, 并固定  $F$ -代数同构  $h: R_S \otimes_{Z_S} F \rightarrow M_n(F)$ . 对每个正整数  $1 \leq k \leq n$ , 记

$$\sigma_k: M_n(F) \rightarrow F, A \mapsto \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \cdots \lambda_{j_k}$$

是将每个方阵映至其特征值在第  $k$  个初等对称多项式下的取值, 这里  $\lambda_1, \dots, \lambda \in \bar{F}$  是  $A$  的特征值. 命

$$c_k: R \xrightarrow{\lambda_S} R_S \longrightarrow R_S \otimes_{Z_S} F \xrightarrow{h} M_n(F) \xrightarrow{\sigma_k} F,$$

并设  $T$  是  $Z_S$  中由  $\{c_k(R) | 1 \leq k \leq n\}$  生成的  $Z$ -子代数. 这时每个  $a \in R$  对应的矩阵  $h(a \otimes 1)$  都是  $Z$  上的整元, 所以由下面的 [引理3.102] 知每个  $(-1)^k c_k(a) \in Z_S$  作为  $h(a \otimes 1)$  的特征多项式的系数都是  $Z$  上整元. 根据条件,  $Z$  是整闭整区迫使  $c_k(a) \in Z$ , 所以  $T \subseteq Z$ . 于是  $T(R) = ZR = R$ .

**Remark 3.101.** 一般地, 对以  $Z$  为中心的素 PI 环  $R$ , 如果  $T(R) = R$ , 必有  $T = Z$ : 因为这时  $T \subseteq R$  且  $T$  中元素与  $R$  中所有元素都可交换. 特别地, 对  $a \in R$ , 矩阵  $h(a \otimes 1)$  的特征多项式系数均在  $Z$  中.

**Lemma 3.102** ([2]). 给定域  $\mathbb{k}$  上  $n$  阶矩阵  $X$  以及  $\mathbb{k}$  的子环  $C$ . 如果  $X$  是  $C$  上整元, 那么矩阵  $X$  在  $\mathbb{k}$  上的最小多项式与特征多项式的系数均为  $C$  上整元. 如果  $X$  是一些在  $C$  上整的矩阵的  $C$ -线性组合, 那么  $\text{tr}(X)$  是  $C$  上整元.

*Proof.* 设  $X$  满足  $C$  上首一多项式  $g(x) \in C[x]$ , 并设  $m(x) \in \mathbb{k}[x]$  是  $X$  在  $\mathbb{k}$  上的最小多项式. 那么在  $\mathbb{k}[x]$  中有  $m(x)$  整除  $g(x)$ . 这说明  $m(x)$  在  $\bar{\mathbb{k}}$  中的根都是  $C$  上整元. 根据 Vieta 定理,  $m(x)$  的系数均为  $C$  上整元. 因为  $X$  的特征多项式与  $m(x)$  在  $\bar{\mathbb{k}}$  中有相同的根, 所以特征多项式的系数也都是  $C$  上整元.

现在设矩阵  $X$  是一些在  $C$  上整的矩阵的  $C$ -线性组合, 下面说明  $\text{tr}(X)$  是  $C$  上整元. 根据  $\text{tr}$  的  $C$ -线性性, 只需证明  $X$  在  $C$  上整的情形即可. 而这时  $-\text{tr}(X)$  是  $X$  的特征多项式的系数, 故是  $C$  上整元.  $\square$

根据约化迹和迹环的定义, 我们立即看到

**Proposition 3.103** (素 PI 环的约化迹, [30]). 设  $R$  是 PI 次数为  $n$  且中心为  $Z$  的素 PI 环, 满足  $T(R) = R$ . 记  $S = Z - \{0\}$ , 这时中心单代数  $R_S$  上的约化迹  $\text{tr}_{\text{red}}: R_S \rightarrow Z_S$  可限制为  $R$  到  $Z$  的迹映射 (见 [注记3.101]), 将该映射依然记作  $\text{tr}_{\text{red}}: R \rightarrow Z$ , 称为素 PI 环  $R$  的约化迹. 这时对每个  $a \in R$ ,  $a$  满足下述  $Z$  上首一多项式

$$\chi_{a,n}(x) = x^n - c_1(a)x^{n-1} + c_2(a)x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}(a)x + (-1)^n c_n(a) \in Z[x],$$

其中  $c_1(a), \dots, c_n(a)$  的定义来自 [定义3.92]. 特别地,  $R$  是  $Z$  的整扩张. 易见  $\text{tr}_{\text{red}}(1) = n$ .

**Remark 3.104.** 依 [引理3.96(4)], 当域  $\mathbb{k}$  满足  $\text{char } \mathbb{k} \notin [1, n]$  时, 对每个正整数  $1 \leq k \leq n$ , 存在唯一的  $k$  元多项式  $p_k \in \mathbb{Z}[(k!)^{-1}][x_1, \dots, x_k]$  使  $\sigma_k = p_k(s_1, \dots, s_k)$ . 结合 [例3.99] 不难看到在命题条件下, 如果这时  $R$  是  $\mathbb{k}$ -代数, 那么有  $c_k(a) = p_k(\text{tr}_{\text{red}}(a), \text{tr}_{\text{red}}(a^2), \dots, \text{tr}_{\text{red}}(a^k))$ .

**Remark 3.105.** 设  $R$  是 PI 次数为  $n$  且中心为  $Z$  的素 PI 环, 那么  $T(R) = R \Leftrightarrow T = Z(T \text{ 来自 [定义3.92]}).$

最后我们以 Procesi 在 [31] 中引入的 Cayley-Hamilton 代数的概念与基本例子结束本节.

**Definition 3.106** (Cayley-Hamilton 代数, [31]). 设  $n$  是正整数, 域  $\mathbb{k}$  满足  $\text{char } \mathbb{k} \notin [1, n]$ . 对每个正整数  $1 \leq k \leq n$ , 记  $\sigma_k$  是  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  中第  $k$  个初等对称多项式,  $s_k = x_1^k + \dots + x_n^k$  是第  $k$  个幂和. 根据 [引理3.96(4)], 对每个正整数  $1 \leq k \leq n$ , 存在唯一的  $k$  元多项式  $p_k \in \mathbb{Z}[(k!)^{-1}][x_1, \dots, x_k]$  使  $\sigma_k = p_k(s_1, \dots, s_k)$ . 现再设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上代数并有中心子代数  $C$ ,  $\text{tr} : A \rightarrow C$  是迹映射 (见 [注记3.87]). 对  $a \in A$ , 称

$$\chi_{n,a}(x) = x^n - c_1(a)x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}c_{n-1}(a)x + (-1)^n c_n(a) \in C[x],$$

其中  $c_k(a) = p_k(\text{tr}(a), \text{tr}(a^2), \dots, \text{tr}(a^k))$ ,  $1 \leq k \leq n$ , 为  $a$  的 (形式) $n$ -特征多项式或  $n$  次特征多项式. 如果  $(A, C, \text{tr})$  满足对任何  $a \in A$  有  $\chi_{n,a}(a) = 0$  并且  $\text{tr}(1) = n$ , 那么称三元组  $(A, C, \text{tr})$  是  $n$ -Cayley-Hamilton 代数或  $n$  次 Cayley-Hamilton 代数. 易见 Cayley-Hamilton 代数  $(A, C, \text{tr})$  总满足  $A \supseteq C$  是整扩张.

**Remark 3.107.** Procesi 引入 Cayley-Hamilton 代数的主要动机是含么环关于交换环上矩阵代数的嵌入问题.

**Remark 3.108.** 可以证明仿射 Cayley-Hamilton 代数  $A$  是有限生成  $C$ -模, 见 [2, p.510, Corollary 8.9].

**Remark 3.109.** 设  $n$  是正整数且域  $\mathbb{k}$  满足  $\text{char } \mathbb{k} \notin [1, n]$ ,  $(A, C, \text{tr})$  是  $n$  次 Cayley-Hamilton 代数. 那么对任何  $A$  的包含  $C$  的  $\mathbb{k}$ -子代数  $B$ ,  $(B, C, \text{tr}|_B)$  也是  $n$  次 Cayley-Hamilton 代数.

**Example 3.110.** 设域  $\mathbb{k}$  满足  $\text{char } \mathbb{k} \notin [1, n]$ ,  $C$  是交换  $\mathbb{k}$ -代数并设  $\text{tr} : M_n(C) \rightarrow C$  是矩阵求迹映射. 根据 [例3.99], 我们看到矩阵代数带上经典迹映射得到的三元组  $(M_n(C), C, \text{tr})$  是  $n$  次 Cayley-Hamilton 代数.

**Remark 3.111.** 设域  $\mathbb{k}$  满足  $\text{char } \mathbb{k} \notin [1, n]$ ,  $\mathbb{k}$ -代数  $A$  有中心子代数  $C$  满足  $A$  是有限生成自由  $C$ -模 (记  $n$  是自由模  ${}_C A$  的秩), 那么有  $C$ -代数同构  $\text{End}_C A \cong M_n(C)$ . 记  $\text{tr} : M_n(C) \rightarrow C$  是矩阵代数上的经典迹, 并设  $\ell : A \rightarrow \text{End}_C A, a \mapsto \ell_a$  是由  $A$  中元素的左乘变换 (其中  $\ell_a$  表示  $a$  在  $A$  上的左乘变换) 诱导的  $C$ -代数嵌入. 利用自同态代数与矩阵代数的代数嵌入可将矩阵代数上的迹  $\text{tr}$  视作  $\text{End}_C A$  到  $C$  的迹映射 (依然记作  $\text{tr}$ , 它将每个  ${}_C A$  的自同态映至该同态在给定基下表示矩阵的迹). 考虑下述映射列的合成

$$A \xrightarrow{\ell} \text{End}_C A \xrightarrow{\text{tr}} C,$$

将上述合成映射记作  $\text{tr}_{\text{reg}}$ , 称为  $A$  的正则迹. 依 [注记3.109],  $(A, C, \text{tr}_{\text{reg}})$  是  $n$  次 Cayley-Hamilton 代数.

**Example 3.112** ([30]). 设  $n$  是正整数, 域  $\mathbb{k}$  满足  $\text{char } \mathbb{k} \notin [1, n]$ ,  $R$  是  $\mathbb{k}$  上满足  $T(R) = R$  且 PI 次数是  $n$  的素 PI 代数并设其中心为  $Z$ ,  $\text{tr}_{\text{red}} : R \rightarrow Z$  是 [命题3.103] 中定义的约化迹. 则 [命题3.103] 表明  $(R, Z, \text{tr}_{\text{red}})$  是  $n$  次 Cayley-Hamilton 代数. 特别地, 如果  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上  $n^2$  维中心单代数 (由 [例3.100],  $\mathbb{k}$  作为正规整区自然有  $T(A) = A$ ), 那么  $(A, \mathbb{k}, \text{tr}_{\text{red}})$  是  $n$  次 Cayley-Hamilton 代数.

### 3.4 模有限代数

在 [命题2.24] 中我们看到模有限代数是特殊的 PI 代数. 除了有限维代数以及 Azumaya 代数外, 模有限代数包含了许多单位根处的量子群. 例如单位根  $q \in \mathbb{k}^*$  处量子仿射  $n$ -空间  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^n)$  就是模有限代数 (见 [例2.28]). 任何正特征的域上的 Weyl 代数都是模有限代数 (见 [例2.29]), 并且在中心上是有限生成自由模.

下面我们来讨论模有限代数的素谱性质, 首先一个基本的观察是:

**Lemma 3.113** ([2]). 设  $R$  是含么环,  $Z$  是  $R$  的中心子环 (即含么子环  $Z \subseteq Z(R)$ ). 如果  $R_Z$  是有限生成模, 那么  $R$  是  $Z$  上仿射代数且  $R$  中任何元素是  $Z$  上整元 (即满足  $Z$  上某个首一多项式). 如果  $\mathfrak{p}$  是  $Z$  的理想,  $P$  是  $\mathfrak{p}$  在  $R$  中生成的理想, 则对任何  $p \in P$ , 存在  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{p}$  使得  $p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0 = 0$ .



*Proof.* 首先回忆交换代数中的一个经典结果是对含么交换环  $Z$  上任何有限生成模  $M$  以及理想  $I$ , 如果  $\varphi \in \text{End}_Z M$  满足  $\varphi(M) \subseteq IM$ , 那么存在正整数  $n$  和  $a_0, \dots, a_{n-1} \in I$  使得  $\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_1\varphi + a_0\text{id}_M = 0$  (这通过取定  $M$  的有限生成元集利用 Cayley-Hamilton 定理不难得到). 现在回到该引理的证明.  $R_Z$  是有限生成模已经说明了  $R$  作为  $Z$ -代数的仿射性. 因此只需验证  $R$  中任何元素  $b$  满足  $Z$  上某个首一多项式. 考虑左乘变换  $\varphi = b_l : R \rightarrow R, x \mapsto bx$ , 则  $\varphi \in \text{End}_Z R$ . 在上述结果中取  $I = Z$ , 则存在  $Z$  上首一多项式  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in Z[x]$  使得  $\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_1\varphi + a_0\text{id}_R = 0$ . 即  $(b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0)R = 0$ . 因此  $f(b) = 0$ . 类似地, 注意到  $pR \subseteq \mathfrak{p}R$ , 同理可证第二个结论.  $\square$

**Remark 3.114.** 由证明过程, 若  ${}_Z R$  可由  $n$  个元素生成, 则  $R$  中元素都满足某个  $Z$  上  $n$  次首一多项式.

**Corollary 3.115.** 设含么环  $R$  是素环且在中心子环  $C$  上模有限. 那么  $R$  的任何非零理想与  $C$  相交非零.

*Proof.* 设  $I$  是  $R$  的非零理想, 由 [定理2.79] 知  $I$  与  $R$  的中心  $Z$  相交非零, 取  $b \neq 0 \in I \cap Z$ . 那么由 [引理3.113] 知道  $b$  是  $C$  上整元. 不难验证  $b$  在  $C$  上最小多项式的常数项就是  $I \cap C$  中的非零元.  $\square$

如果含么环  $R$  中元素  $a$  满足  $aR = Ra$ , 则称  $a$  是  $R$  中**正规元**. 例如中心元总是正规的. 如果  $a$  是  $R$  中的正规正则元, 那么对任给  $x \in R$ , 存在唯一的  $x' \in R$  使得  $ax' = xa$ , 这时把  $x'$  记作  $a^{-1}xa$ .

**Proposition 3.116** ([32]). 设  $R$  是整环, 满足  $R$  在中心  $Z = Z(R)$  上是有限生成模. 并设  $R$  的非零正规元  $a, b$  满足  $a^{-1}xa = b^{-1}xb, \forall x \in R$ . 那么存在  $z_1, z_2 \in Z$  使得  $z_1b = z_2a$ .

*Proof.* 记  $S = \{R \text{ 中非零正规元}\}$ , 由  $R$  是整环, 易验证  $S$  是乘闭子集并且  $S$  满足右 Ore 条件. 故我们有右局部化  $R_S$ , 设局部化映射为  $\lambda_S : R \rightarrow R_S$ . 再记  $T = Z - \{0\}$  是  $R$  的中心正则元集. 因为  $R$  是素 PI 环, 所以由 Posner 定理知  $R_T$  是单环且  $Z(R_T) = Z_T$ . 设  $\lambda_T : R \rightarrow R_T$  是局部化映射, 因为  $T \subseteq S$ , 所以存在唯一的环同态  $\theta : R_T \rightarrow R_S$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\lambda_T} & R_T \\ & \searrow \lambda_S & \swarrow \theta \\ & R_S & \end{array}$$

因为  $R_T$  是单环, 故  $\theta$  是单射. 由条件知  $ba^{-1} \in R_S$  满足  $ba^{-1}x = xba^{-1}, \forall x \in R$  (特别地,  $ab = ba$ ), 这蕴含  $ba^{-1} \in Z(R_S)$ . 如果能够证明  $ba^{-1} \in \text{Im}\theta$ , 即存在  $y \in R, t \neq 0 \in Z$  使得在  $R_S$  中有  $ba^{-1} = yt^{-1}$ , 那么利用  $Z(R_T) = Z_T$  立即得到结论. 下面我们构造满足条件的  $y \in R, t \neq 0 \in Z$  来完成命题证明. 因为  ${}_Z R$  是有限生成模, 所以 [引理3.113] 表明  $R$  中元素均为  $Z$  上整元. 因为  $ba \neq 0$ , 所以由  $R$  是整环可知  $ba$  在  $Z$  上最小多项式常数项非零. 设  $m(x) = x^n + z_{n-1}x^{n-1} + \dots + z_1x + z_0$  是  $ba$  在  $Z$  上最小多项式, 对该多项式代入  $x = ba$ , 再由  $ba = ab$  可知非零中心元  $z_0 \in bR \cap Ra$ . 设  $d \in R$  满足  $da = z_0$ . 因为  $z_0$  与  $a$  在  $R_S$  中都可逆, 所以  $d$  也是  $R_S$  中可逆元. 现在对  $a^{-1}d^{-1} = z_0^{-1}$  两边左乘上  $b$  得到  $(ba^{-1})d^{-1} = bz_0^{-1}$ . 两边再右乘上  $d$  得到  $ba^{-1} = bz_0^{-1}d$ . 因为  $z_0 \in Z$ , 所以  $ba^{-1} = bdz_0^{-1}$ . 命  $y = bd \in R, t = z_0 \neq 0 \in Z$ , 便得  $ba^{-1} = yt^{-1}$ .  $\square$

如果含么环  $R$  有中心子环  $Z$ , 那么标准嵌入  $j : Z \rightarrow R$  诱导出连续映射  $\varphi : \text{Spec} R \rightarrow \text{Spec} Z, P \mapsto P \cap Z$ : 任取  $R$  的素理想  $P$ , 如果  $a, b \in Z$  满足  $ab \in P \cap Z$ , 那么  $aRb \subseteq P$ , 从而  $a$  与  $b$  中至少有一个在  $P$  中, 这说明  $P \cap Z$  是  $Z$  的素理想.  $\text{Spec} Z$  的任何闭子集形如  $V(\mathfrak{b})$ , 其中  $\mathfrak{b}$  是  $Z$  的理想. 若记  $\mathfrak{b}$  在  $R$  中生成的理想是  $B$ , 易验证  $V(B) = \varphi^{-1}(V(\mathfrak{b}))$ , 这说明  $\varphi : \text{Spec} R \rightarrow \text{Spec} Z$  是连续映射.

**Proposition 3.117** ([33]). 设  $R$  是含么环,  $Z$  是  $R$  的中心子环满足  $R_Z$  是有限生成模,  $\varphi: \text{Spec}R \rightarrow \text{Spec}Z$  是标准嵌入  $j: Z \rightarrow R$  诱导出的连续映射, 那么

- (1) 对任给  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}Z$ , 存在  $P \in \text{Spec}R$  使得  $P \cap Z = \mathfrak{p}$ , 即映射  $\varphi$  是满射.
- (2) 如果  $R$  的素理想和  $Z$  的素理想  $\mathfrak{p}$  满足  $P \cap Z = \mathfrak{p}$ , 则对任何  $Z$  的素理想  $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ , 存在  $R$  的素理想  $Q \supseteq P$  使得  $Q \cap Z = \mathfrak{q}$ . 即 Going-up 性质成立.
- (3) 如果  $R$  的素理想  $P, Q$  满足  $P \subsetneq Q$ , 那么  $P \cap Z \subsetneq Q \cap Z$ .
- (4) 如果  $P$  是  $R$  的本原理想 (就是极大理想), 那么  $P \cap Z$  是  $Z$  的极大理想.
- (5) 如果  $R$  的素理想  $P$  满足  $P \cap Z$  是  $Z$  的极大理想, 那么  $P$  是极大理想.
- (6) 若记  $R, Z$  的 Jacobson 根为  $\text{Jac}R, \text{Jac}Z$ , 那么  $\text{Jac}Z = Z \cap \text{Jac}R$  且  $N(Z) = Z \cap N(R)$ .
- (7) 固定  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}Z$ , 则  $R_{\mathfrak{p}}$  的极大谱是  $\{Q_{\mathfrak{p}} \in \text{Spec}R_{\mathfrak{p}} | Q \in \text{Spec}R, Q \cap Z = \mathfrak{p}\}$ , 与  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$  等势.
- (8) 固定  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}Z$ , 则  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$  与  $\text{Spec}(R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}})$  间有自然双射且  $R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$  是 Artin 环, 因此  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$  是有限集. 若进一步设  $zR$  可由  $t$  个元素生成, 那么  $|\varphi^{-1}(\mathfrak{p})| \leq t$ .

*Proof.* (1) 根据 [引理3.113], 任何  $b \in \mathfrak{p}R$  满足存在  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{p}$  使得  $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 = 0$ , 所以  $b^n \in \mathfrak{p}$ . 因此  $\mathfrak{p}R \cap Z = \mathfrak{p}$ . 这说明  $\mathcal{S} = \{I \subseteq R | I \text{ 为 } R \text{ 的理想且满足 } I \cap Z = \mathfrak{p}\}$  是关于包含关系的非空偏序集. 易验证  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  的任何全序子集有上界, 所以 Zorn 引理保证了  $\mathcal{S}$  中有极大元  $P$ ,  $P$  满足  $P \cap Z = \mathfrak{p}$ . 下面验证  $P$  是  $R$  的素理想. 假设存在  $a \in R - P, b \in R - P$  满足  $aRb \subseteq P$ , 那么  $P$  的极大性保证了  $(a) + P$  与  $(b) + P$  都含有  $Z - \mathfrak{p}$  内的元素. 设  $x \in (a) + P, y \in (b) + P$  满足  $x, y \in Z - \mathfrak{p}$ , 那么  $xy \in Z - \mathfrak{p}$ , 从而  $xy \notin P$ . 这与  $xy \in P$  矛盾. 因此  $P$  是  $R$  的素理想且  $P \cap Z = \mathfrak{p}$ .

(2) 这时  $Z/\mathfrak{p}$  是  $R/P$  的中心子代数且  $R/P$  是有限生成  $Z/(Z \cap P)$ -模. 应用 (1) 的结果可知  $Z/Z \cap P$  的素理想  $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$  关于连续映射  $\varphi: \text{Spec}(R/P) \rightarrow \text{Spec}(Z/\mathfrak{p})$  有原像. 取  $R$  的素理想  $Q \supseteq P$  使得  $\varphi(Q/P) = \mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ . 那么可直接验证  $Q \cap Z = \mathfrak{q}$ , 因此  $Q \supseteq P$  便是满足条件的素理想.

(3) 通过用  $R/P$  替换  $R$ ,  $Z/\mathfrak{p}$  替换  $Z$ , 可不妨设  $P = 0$ , 这时  $P \cap Z = 0$ . 因此只需验证  $R$  的任何非零素理想  $Q$  满足  $Q \cap Z \neq 0$  即可. 因为这时  $R$  是素 PI 环, 所以 [定理2.79] 保证了  $Q \cap Z(R) \neq 0$  (注意  $Z$  是  $Z(R)$  的子环), 取  $c \neq 0 \in Q \cap Z(R)$ , 由  $R$  是素环知  $c$  是正则元, 所以  $c$  在  $Z$  上满足的最小多项式  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in Z[x]$  满足  $a_0 \neq 0$ , 于是  $a_0 \neq 0 \in Q \cap Z$ .

(4) 这时  $R/P$  是本原 PI 环, 有中心子环  $Z/(P \cap Z)$ , 根据 Kaplansky 定理,  $Z(R/P)$  是域, 所以  $Z(R/P)$  作为  $Z/(P \cap Z)$  的整扩张保证了  $Z/(P \cap Z)$  也是域. 这说明  $P \cap Z$  是  $Z$  的极大理想.

(5) 通过 (3) 立即可知  $P \cap Z$  是极大理想迫使  $P$  是  $R$  的极大理想.

(6) 将  $\text{Jac}R$  表示为  $R$  所有本原理想之交, 由 (4) 得到  $\text{Jac}Z \subseteq Z \cap \text{Jac}R$ . 将  $\text{Jac}Z$  表示为  $Z$  所有极大理想之交, 由 (1) 和 (5) 得到  $\text{Jac}Z \supseteq Z \cap \text{Jac}R$ . 因此  $\text{Jac}Z = Z \cap \text{Jac}R$ . 类似地可验证  $N(Z) = Z \cap N(R)$ .

(7) 通过下面的 [命题3.120] 可知  $\text{Spec}R_{\mathfrak{p}}$  与  $\{Q \in \text{Spec}R | Q \cap (Z - \mathfrak{p}) = \emptyset\}$  间有标准双射. 而  $Q \cap (Z - \mathfrak{p}) = \emptyset$  等价于  $Q \cap Z \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以 (3) 蕴含  $\{Q_{\mathfrak{p}} \in \text{Spec}R_{\mathfrak{p}} | Q \in \text{Spec}R, Q \cap Z = \mathfrak{p}\}$  中任何素理想是  $R_{\mathfrak{p}}$  的极大理想. 任取  $R_{\mathfrak{p}}$  的极大理想  $Q_{\mathfrak{p}}$ , 这里  $Q$  是满足  $Q \cap Z \subseteq \mathfrak{p}$  的素理想, 下证  $Q \cap Z = \mathfrak{p}$ . 如果  $Q \cap Z \subsetneq \mathfrak{p}$ , 通过 (2), 存在  $R$  的素理想  $T \supsetneq Q$  使得  $T \cap Z = \mathfrak{p}$ . 进而  $T_{\mathfrak{p}}$  是  $R_{\mathfrak{p}}$  中真包含  $Q_{\mathfrak{p}}$  的理想, 这与  $Q_{\mathfrak{p}}$  是极大理想矛盾.

(8) 根据 [命题3.117(7)],  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$  与  $R_{\mathfrak{p}}$  的极大谱  $\{Q_{\mathfrak{p}} \in \text{Spec}R_{\mathfrak{p}} | Q \in \text{Spec}R, Q \cap Z = \mathfrak{p}\}$  等势. 并且有

$$\{Q_{\mathfrak{p}} \in \text{Spec}R_{\mathfrak{p}} | Q \in \text{Spec}R, Q \cap Z = \mathfrak{p}\} = \{Q_{\mathfrak{p}} \in \text{Spec}R_{\mathfrak{p}} | Q \in \text{Spec}R, Q \cap (Z - \mathfrak{p}) = \emptyset, Q \supseteq R\mathfrak{p}\}.$$

而 [命题3.117(3)] 表明对任何  $R$  不同的素理想  $P, Q$  如果  $P \cap Z = Q \cap Z = \mathfrak{p}$ , 那么  $P \not\subseteq Q$  或  $Q \not\subseteq P$ . 因此

$R_{\mathfrak{p}}$  的极大谱与  $\text{Spec}(R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}})$  间有双射. 在 (1) 中我们看到  $\mathfrak{p}R \cap Z = \mathfrak{p}$ , 因此域  $Z_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$  是  $R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$  的中心子环且  $R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$  是域  $Z_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$  上有限维线性空间. 因此由有限维代数的素理想数目不超过其线性维数 (见 [引理3.121]) 可知  $|\text{Spec}(R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}})| \leq \dim_{Z_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}} R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$ . 于是当  $Z$  可由  $t$  个元素生成时,  $|\varphi^{-1}(\mathfrak{p})| \leq t$ .  $\square$

**Remark 3.118.** 该命题表明要研究  $R$  上的不可约模只需研究所有  $R/\mathfrak{m}R$  上的不可约模, 其中  $\mathfrak{m}$  遍历中心子环  $Z$  的极大理想. 原因是 [推论2.70] 让我们看到  $R$  上任意两个不可约模  $M, N$  同构的充要条件是  $\text{Ann}_R M = \text{Ann}_R N$ . 记本原理想  $\text{Ann}_R M$  与  $Z$  之交是  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$ , 则  $R$  上的每个不可约模  $M$  都给出  $R/\mathfrak{m}R$  上的不可约模  $M$ . 反之, 取定  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$ , 每个  $R/\mathfrak{m}R$  上的不可约模  $M$  自然是  $R$  上的不可约模. 并注意到对任给  $Z$  的两个极大理想  $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ , 只要  $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$ , 那么  $R/\mathfrak{m}R$  上任何不可约模  $M$  与  $R/\mathfrak{m}'R$  上任何不可约模  $M'$  作为不可约  $R$ -模必不同构. 对  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $R/\mathfrak{m}R$  所产生的不可约  $R$ -模的零化子在  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  中.

**Remark 3.119.** 对结构更丰富的代数类, 我们能够对命题中的连续映射说更多. 之后我们会说明当  $R$  是代数闭域上仿射模有限素代数且  $Z$  是  $R$  的中心时,  $\varphi$  限制在  $R$  的维数最大的不可约表示等价类对应的极大理想集 (事实上恰好是  $R$  所有的正则极大理想) 上是单射, 并给出  $R$  的正则极大理想集与  $R$  的 Azumaya 轨迹间的双射 (见 [定理3.131], [定义3.137] 和 [命题3.145]).

**Proposition 3.120** ([33]). 设  $R$  是含么环, 若乘闭子集  $S \subseteq Z(R)$ , 那么有双射

$$\varphi : \{P \in \text{Spec} R | P \cap S = \emptyset\} \rightarrow \text{Spec} R_S, P \mapsto P_S,$$

其中  $P_S = \{\lambda(p)\lambda(s)^{-1} | p \in P, s \in S\}$ , 这里  $\lambda : R \rightarrow R_S$  是局部化映射.  $\varphi$  的逆映射将每个  $R_S$  的素理想  $\mathfrak{q}$  映至  $\{a \in R | \text{存在 } s \in S \text{ 使得 } \lambda(a)\lambda(s)^{-1} \in \mathfrak{q}\}$ . 如果赋予  $\{P \in \text{Spec} R | P \cap S = \emptyset\}$  素谱  $\text{Spec} R$  上 Zariski 拓扑的子空间拓扑、 $\text{Spec} R_S$  上 Zariski 拓扑, 则双射  $\varphi$  给出同胚.

*Proof.* 任取  $R$  的素理想  $P$ , 并设  $P \cap S = \emptyset$ . 易验证  $P_S$  是  $R_S$  的理想, 下证  $P_S$  是真理想. 如果存在  $p \in P, s \in S$  使得  $\lambda(1) = \lambda(p)\lambda(s)^{-1}$ , 那么存在  $u \in S$  使得  $(p-s)u = 0$ . 进而  $us \in P$ , 这和  $P \cap S = \emptyset$  矛盾. 再说明  $P_S$  是  $R_S$  的素理想. 任何  $R_S$  中理想都具备  $I_S$  的形式, 这里  $I$  是  $R$  的理想, 所以只需验证若  $R$  的理想  $I, J$  满足  $I_S J_S \subseteq P_S$ , 则  $IJ \subseteq P$  即可. 利用  $S \subseteq Z(R)$  易验证任何  $a \in IJ$  满足存在  $s \in S$  使得  $as \in P$ . 于是  $aRs \subseteq P$ , 因此  $P$  是素理想以及  $s \notin P$  蕴含  $a \in P$ , 这说明  $IJ \subseteq P$ . 以上讨论表明  $\varphi$  是定义合理的映射. 如果  $R$  的素理想  $P, Q$  满足均与  $S$  不相交以及  $P_S = Q_S$ , 那么易验证任何  $p \in P$  满足存在  $u \in S$  使得  $pu \in Q$ , 类似前面的讨论由  $pRu \subseteq Q$  得到  $p \in Q$ . 于是  $P \subseteq Q$ , 类似可验证  $Q \subseteq P$ , 因此  $\varphi$  是单射. 任取  $R_S$  的素理想  $\mathfrak{q}$ , 定义  $Q = \{a \in R | \text{存在 } s \in S \text{ 使得 } \lambda(a)\lambda(s)^{-1} \in \mathfrak{q}\}$ , 那么  $Q$  是  $R$  的理想且  $Q_S = \mathfrak{q}$ . 通过  $\mathfrak{q}$  是真理想易见  $Q \cap S = \emptyset$ . 如果  $R$  的理想  $I, J$  满足  $IJ \subseteq Q$ , 则  $I_S J_S \subseteq Q_S = \mathfrak{q}$ . 故  $I_S \subseteq Q_S$  或  $J_S \subseteq Q_S$ . 不妨设  $I_S \subseteq Q_S = \mathfrak{q}$ , 那么根据  $Q$  的定义得到  $I \subseteq Q$ . 所以  $Q$  是素理想, 这说明  $\varphi$  是单射.

最后说明  $\varphi$  是同胚. 任何  $\text{Spec} R_S$  中闭集形如  $V(I_S)$  的形式,  $I$  是  $R$  的理想. 不妨设  $I \cap S = \emptyset$ , 那么可直接验证  $\varphi^{-1}(V(I_S)) = V(I) \cap \{P \in \text{Spec} R | P \cap S = \emptyset\}$ , 所以  $\varphi$  是连续映射. 再说明  $\varphi$  是闭映射. 不妨设  $I$  是  $R$  的与  $S$  不相交的理想, 则有  $\varphi(V(I) \cap \{P \in \text{Spec} R | P \cap S = \emptyset\}) = V(I_S)$ , 因此  $\varphi$  是闭映射.  $\square$

**Lemma 3.121.** 设  $\mathbb{k}$  是域, 那么对任何有限维  $\mathbb{k}$ -代数  $A$ ,  $|\text{Spec} A| \leq \dim_{\mathbb{k}} A$ .

*Proof.* 首先回忆任给左 Artin 环  $R$ , 若  $\text{Jac} R$  为  $R$  的 Jacobson 根, 那么  $R$  的任何极大理想都包含  $\text{Jac} R$ , 由此不难看出  $R$  的极大谱与 Artin 半单环  $\bar{R} = R/\text{Jac} R$  的极大谱间有双射. 根据 Wedderburn-Artin 定理,  $\bar{R}$

可分解为有限多个 Artin 单环  $R_k$  的积:  $\bar{R} \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_m$ . 因此  $\bar{R}$  的极大理想数目恰好  $m$  个. 现取  $R = A$  是域  $\mathbb{k}$  上有限维代数, 那么  $m$  自然不超过  $R/\text{Jac}R$  的  $\mathbb{k}$ -线性维数. 因此  $A$  的极大理想数目不超过  $\dim_{\mathbb{k}} A$ . 故  $A$  的素谱、极大谱以及本原素谱的元素数目都不超过  $A$  的线性维数.  $\square$

**Remark 3.122.** 该引理也告诉我们有限维  $\mathbb{k}$ -代数  $A$  的不可约表示等价类数目不超过  $\dim_{\mathbb{k}} A$ .

总结一下, 如果  $R$  是某个中心子环  $Z$  上的有限生成模, 那么有天然的满连续映射  $\varphi: \text{Spec}R \rightarrow \text{Spec}Z, P \mapsto P \cap Z$ . 对每个  $P \in \text{Spec}R$ ,  $P$  是  $R$  的极大理想当且仅当  $\varphi(P) = P \cap Z$  是  $Z$  的极大理想. 因此  $Z$  的极大理想可将  $R$  的极大谱 (也是本原素谱) 划分为若干不相交的纤维, 并且每个纤维都是有限集.

$$\max\text{Spec}R = \bigcup_{\mathfrak{m} \in \max\text{Spec}Z} \varphi^{-1}(\mathfrak{m}).$$

对固定的  $\mathfrak{m} \in \max\text{Spec}Z$ , 易见  $R/\mathfrak{m}R$  是域  $Z/\mathfrak{m}$  上有限维代数且  $R/\mathfrak{m}R$  上不可约模同构类全体与

$$\{R \text{ 上零化子在 } \varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \text{ 中的不可约模同构类} \} = \{R \text{ 上可以被 } \mathfrak{m} \text{ 零化的不可约模同构类} \}$$

间有自然的双射, 因此  $R/\mathfrak{m}R$  上不可约模同构类数目就是  $|\varphi^{-1}(\mathfrak{m})|$ , 它不超过  $R$  作为有限生成  $Z$ -模的生成元数目. 若进一步假设  $R$  是域  $\mathbb{k}$  上仿射代数, 下面的 [引理3.123] 表明  $R/\mathfrak{m}R$  是  $\mathbb{k}$  上有限维代数. 于是研究  $R$  的不可约表示可转化为研究所有形如  $R/\mathfrak{m}R(\mathfrak{m} \text{ 遍历 } Z \text{ 的极大理想})$  的有限维代数的不可约表示.

**Lemma 3.123** ([1]). 当  $R$  是域上仿射模有限代数时, 对  $Z$  的任何极大理想  $\mathfrak{m}$  都有  $R/\mathfrak{m}R$  是有限维代数.

*Proof.* 在 [推论3.10] 中我们已经看到域上仿射本原 PI 代数都是有限维的. 对  $R$  模有限的中心子代数  $Z$  以及  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$ , 取  $R$  的极大理想  $P$  使得  $P \cap Z = \mathfrak{m}$ . 那么  $Z/\mathfrak{m}$  与  $R/P$  都是有限维代数. 注意到  $R/\mathfrak{m}R$  是有限维代数  $Z/\mathfrak{m}$  上的有限生成模, 所以  $R/\mathfrak{m}R$  也是有限维代数.  $\square$

**Example 3.124.** 如果  $R$  是域  $\mathbb{k}$  上有限维单代数并记  $Z = \mathbb{k}$ , 那么  $\max\text{Spec}R$  和  $\max\text{Spec}Z$  都是由相应零理想构成的单点集. 这时 [命题3.117] 中的连续满射  $\varphi: \max\text{Spec}R \rightarrow \max\text{Spec}Z, M \mapsto M \cap Z$  是拓扑同胚.

**Example 3.125.** 考虑域  $\mathbb{k}$  上有限维半单代数  $R = M_2(\mathbb{k}) \oplus M_3(\mathbb{k})$  并考虑  $A$  的中心  $Z = \mathbb{k} \oplus \mathbb{k}$ . 那么  $Z$  共有两个极大理想  $\mathfrak{m}_1 = \mathbb{k} \oplus 0, \mathfrak{m}_2 = 0 \oplus \mathbb{k}$ , 这两个极大理想关于 [命题3.117] 中的连续满射  $\varphi: \max\text{Spec}R \rightarrow \max\text{Spec}Z, M \mapsto M \cap Z$  的原像分别为  $M_1 = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_1) = M_2(\mathbb{k}) \oplus 0$  和  $M_2 = 0 \oplus M_3(\mathbb{k})$ .  $M_1$  对应  $R$  在  $\mathbb{k}$  上的 2 维不可约表示,  $M_2$  对应 3 维不可约表示. 可直接计算有  $\mathbb{k}$ -代数同构  $R_{\mathfrak{m}_1} \cong M_3(\mathbb{k})$  和  $R_{\mathfrak{m}_2} \cong M_2(\mathbb{k})$ .

**Example 3.126.** 依然考虑 [例3.125] 中域  $\mathbb{k}$  上有限维半单代数  $R = M_2(\mathbb{k}) \oplus M_3(\mathbb{k})$ , 取  $Z = \mathbb{k}(I_2, I_3) \cong \mathbb{k}$ , 那么  $R$  是域  $Z$  上模有限仿射代数. 前面指出中心  $\mathcal{Z}(R) = \mathbb{k} \oplus \mathbb{k}$  并且  $R$  在中心每个极大理想处的局部化都是 Azumaya 代数, 因此由 [命题3.57] 可知  $R$  是 Azumaya 代数. 这说明  $R$  在  $Z - \{0\} = \mathbb{k} - \{0\}$  处作局部化依然是 Azumaya 代数. 所以  $\max\text{Spec}Z$  中极大理想  $\mathfrak{m}$  均使得  $R_{\mathfrak{m}}$  是 Azumaya 代数. 而零理想关于 [命题3.117] 中的连续满射  $\varphi: \max\text{Spec}R \rightarrow \max\text{Spec}Z$  的原像集为由  $M_1 = M_2(\mathbb{k}) \oplus 0$  和  $M_2 = 0 \oplus M_3(\mathbb{k})$ , 它们分别对应  $R$  在  $\mathbb{k}$  上的 2 次不可约表示和 3 次不可约表示.

**Example 3.127.** 考虑域  $\mathbb{k}$  上的二阶上三角矩阵代数  $R$ , 那么  $R$  的中心  $Z = \mathbb{k}I_2$ . 因为  $R$  是 Artin 环, 所以  $\max\text{Spec}R = \text{Spec}R$ , 容易计算验证  $\max\text{Spec}R$  由下述两个元素构成:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{k} & \mathbb{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{k} \\ 0 & \mathbb{k} \end{pmatrix}.$$



并且  $M_1 \cap Z = M_2 \cap Z = 0$ . 这时 [命题3.117] 中的连续满射  $\varphi : \max\text{Spec} R \rightarrow \max\text{Spec} Z, M \mapsto M \cap Z$  是常值映射. 注意  $M_1, M_2$  所对应的  $R$  在域  $\mathbb{k}$  上的不可约表示 (等价类) 都是 1 维的.  $\dim_{\mathbb{k}} \text{Jac} R = 1$ . 这时 0 作为  $Z$  唯一的极大理想关于  $\varphi$  的原像集的元素数目为  $2 < \dim_Z R$ . 注意到  $R$  作为域  $\mathbb{k}$  上有限维代数不是单的, 所以 [推论3.33] 表明  $R$  不是  $Z$ -可分代数, 进而也不是 Azumaya 代数.

设  $R$  是中心子环  $Z$  上有限生成模, 取定  $\mathfrak{m} \in \max\text{Spec} Z$ , 那么有标准双射  $\theta : \{Q \in \max\text{Spec} R | Q \cap Z = \mathfrak{m}\} \rightarrow \max\text{Spec} R_{\mathfrak{m}}, Q \mapsto Q_{\mathfrak{m}}$ . 若记  $\varphi : \text{Spec} R \rightarrow \text{Spec} Z, P \mapsto P \cap Z$  是素谱间的标准连续映射, 那么有  $\{Q \in \max\text{Spec} R | Q \cap Z = \mathfrak{m}\} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ . 记含幺环  $S$  上不可约模同构类集为  $\text{Irr}(S)$ . 那么根据前面的讨论, 有标准双射  $\eta : \{[_R M] \in \text{Irr}(R) | \mathfrak{m}M = 0\} \rightarrow \max\text{Spec} R_{\mathfrak{m}}, [M] \mapsto (\text{Ann}_R M)_{\mathfrak{m}}$ . 注意到  $R_{\mathfrak{m}}$  是中心子代数  $Z_{\mathfrak{m}}$  上的有限生成模, 因此有标准同构  $\xi : \text{Irr}(R_{\mathfrak{m}}) \rightarrow \max\text{Spec} R_{\mathfrak{m}}, [_{R_{\mathfrak{m}}} X] \mapsto \text{Ann}_{R_{\mathfrak{m}}} X$ . 现在任取不可约左  $R$ -模  $M$  满足  $\mathfrak{m}M = 0$ , 简记  $\text{Ann}_R M$  为  $Q$ . 那么  $M_{\mathfrak{m}}$  作为  $R_{\mathfrak{m}}$  上的模零化子包含  $Q_{\mathfrak{m}}$ . 下证  $M_{\mathfrak{m}} \neq 0$ , 进而可知  $\text{Ann}_{R_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} = Q_{\mathfrak{m}}$ . 设  $M = Rx$ , 假设  $x1^{-1} \in M_{\mathfrak{m}}$  为零, 那么存在  $s \in Z - \mathfrak{m}$  使得  $sx = 0$ , 于是  $sRx = 0$  迫使  $s \in Q$ . 结合  $s \in Z$  可知  $s \in \mathfrak{m}$ , 矛盾. 因此  $M_{\mathfrak{m}} \neq 0$ . 那么下面的引理保证了  $M_{\mathfrak{m}}$  是不可约  $R_{\mathfrak{m}}$ -模.

**Lemma 3.128.** 设含幺环  $R$  有中心乘闭子集  $S$ , 若不可约  $R$ -模  $M$  满足  $M_S \neq 0$ , 那么  $M_S$  是不可约  $R_S$ -模.

*Proof.* 任取  $M_S$  的非零  $R_S$ -子模  $X$ , 定义  $N = \{x \in M | \text{存在 } s \in S \text{ 使得 } xs^{-1} \in X\}$ , 那么  $N$  是  $M$  的非零  $R$ -子模, 故  $N = M$ , 进而  $X = M_S$ . 因此  $M_S$  是不可约  $R_S$ -模.  $\square$

**Remark 3.129.** 有可能产生  $M_S = 0$  的情况, 例如考虑  $\mathbb{Z}$ -模  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  在素理想  $3\mathbb{Z}$  处作局部化.

通过局部化函子立即得到定义合理的映射  $\psi : \{[_R M] \in \text{Irr}(R) | \mathfrak{m}M = 0\} \rightarrow \text{Irr}(R_{\mathfrak{m}}), [_R M] \mapsto [M_{\mathfrak{m}}]$ . 注意到对不可约  $R$ -模  $M$ , 若记  $Q = \text{Ann}_R M$ , 那么  $Q_{\mathfrak{m}} = \text{Ann}_{R_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}}$ , 所以有下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \{Q \in \max\text{Spec} R | Q \cap Z = \mathfrak{m}\} & \xrightarrow{\theta} & \max\text{Spec} R_{\mathfrak{m}} \\ \uparrow & & \uparrow \xi \\ \{[_R M] \in \text{Irr}(R) | \mathfrak{m}M = 0\} & \xrightarrow{\psi} & \text{Irr}(R_{\mathfrak{m}}) \end{array}$$

因此  $\psi : \{[_R M] \in \text{Irr}(R) | \mathfrak{m}M = 0\} \rightarrow \text{Irr}(R_{\mathfrak{m}}), [_R M] \mapsto [M_{\mathfrak{m}}]$  也是双射. 注意到  $Z_{\mathfrak{m}}$  是局部环 (如果  $R$  进一步是域上仿射代数, 那么  $Z$  也是仿射的, 进而  $Z_{\mathfrak{m}}$  是交换 Noether 局部环), 因此研究  $R$  的不可约表示也可以拆分为对每个  $\mathfrak{m} \in \max\text{Spec} Z$ , 研究  $R_{\mathfrak{m}}$  (在其中心子代数  $Z_{\mathfrak{m}}$  上是有限生成模) 的不可约表示,  $R_{\mathfrak{m}}$  的不可约模同构类  $\text{Irr}(R_{\mathfrak{m}})$  对应于  $\text{Irr}(R)$  中能够被  $\mathfrak{m}$  零化的不可约模同构类构成的子集.

下面进一步讨论代数闭域上仿射模有限代数的不可约表示与正则极大理想之间的关系. 首先我们需要

**Proposition 3.130** ([1]). 设  $R$  是含幺环,  $Z$  是  $R$  的中心子环满足  $R_Z$  是有限生成模,  $\varphi : \text{Spec} R \rightarrow \text{Spec} Z$  是标准嵌入  $j : Z \rightarrow R$  诱导出的连续映射, 即  $\varphi : \text{Spec} R \rightarrow \text{Spec} Z, P \mapsto P \cap Z$ . 根据 [命题3.117],  $\varphi$  是满连续映射并且限制在极大谱层面有满连续映射  $\varphi' : \max\text{Spec} R \rightarrow \max\text{Spec} Z, M \mapsto M \cap Z$ . 如果  $Z$  是 Noether 环 (例如当  $R$  是域上仿射代数), 那么  $\varphi$  与  $\varphi'$  均为闭映射 (即把闭集映至闭集).

*Proof.* 先说明  $\varphi$  是闭映射, 任取  $\text{Spec} R$  的闭子集  $\mathcal{V} = V(I)$ , 可不妨设  $I$  是半素理想 (否则用所有含  $I$  素理想之交替换  $I$ ), 我们断言  $\varphi(\mathcal{V}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec} Z | I \cap Z \subseteq \mathfrak{p}\} = V(I \cap Z)$ . 一旦证明此断言立即得到  $\varphi$  是闭映射.

记  $\mathcal{W} = V(I \cap Z)$ , 明显  $\varphi(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{W}$ . 反之, 如果  $\mathfrak{p} \in \mathcal{W}$ , 即  $I \cap Z \subseteq \mathfrak{p}$ . 注意到  $R$  作为有限生成  $Z$ -模一定是双边 Noether 环, 故  $R$  中包含  $I$  的极小素理想只有有限多个, 设为  $P_1, \dots, P_t$ . 现在由  $I$  的半素性知



$I = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_t$ . 所以存在某个  $I$  上极小素理想  $P_k$  使得  $Z \cap P_k \subseteq \mathfrak{p}$ . 应用 [命题3.117(2)] 便知存在  $R$  的素理想  $Q \supseteq P_k$  使得  $\varphi(Q) = \mathfrak{p}$ . 特别地,  $Q \supseteq I$ , 因此  $Q \in \mathcal{V}$ . 由此得到  $\varphi(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$ .

还需要证明  $\varphi'$  也是闭映射. 设  $\mathcal{V}'$  是  $R$  中所有包含半素理想  $I$  的极大理想构成的集合. 记  $\mathcal{W}'$  是  $Z$  中所有包含  $I \cap Z$  的极大理想构成的集合. 我们通过说明  $\varphi'(\mathcal{V}') = \mathcal{W}'$  来得到  $\varphi'$  是闭映射. 而这由 [命题3.117(4)], [命题3.117(5)] 以及前面关于  $\varphi$  的讨论知结论明显成立.  $\square$

在 [推论3.10] 中我们看到域上仿射 PI 代数的不可约表示总是有限维的. 如果进一步考虑代数闭域场景, 代数闭域上素仿射 PI 代数的不可约表示维数都被该代数的 PI 次数控制, 即所有的不可约表示维数具有公共的上界. 下面的定理表明代数闭域上模有限仿射素代数总有不可约表示的维数恰是 PI 次数 (注意 [命题3.72] 表明域上仿射素 PI 代数总存在正则极大理想, 所以满足下述定理结论的极大理想总存在).

**Theorem 3.131** ([1]). 设  $\mathbb{k}$  是代数闭域,  $A$  是仿射模有限素  $\mathbb{k}$ -代数,  $Z$  是  $A$  的中心,  $n$  是  $A$  的 PI 次数. 那对任给  $A$  的极大理想  $M$ , 并记  $\mathfrak{m} = M \cap Z$ , 以下五条等价:

- (1)  $M$  是  $A$  的正则极大理想.
- (2)  $A_{\mathfrak{m}}$  是以  $Z_{\mathfrak{m}}$  为中心的 Azumaya 代数.
- (3)  $M = \mathfrak{m}A$ .
- (4) 极大理想  $M$  所对应的不可约左  $A$ -模 (回忆 [推论2.70]) 是  $\mathbb{k}$ -线性维数是  $n$ .
- (5) 作为  $\mathbb{k}$ -代数,  $A/M \cong M_n(\mathbb{k})$ .

*Proof.* 在正式证明前我们再回顾一下定理条件下的基本结论. 设极大理想  $M$  对应  $A$  的不可约表示  $X$  (即有  $\text{Ann}_A X = M$ ), 那么  $\dim_{\mathbb{k}} X \leq \dim_{\mathbb{k}} A/\text{Ann}_A X$  (利用 Kaplansky 定理和 Zariski 引理可知右边确实是有限维代数). 并且由  $A/\text{Ann}_A X$  的 PI 次数不超过  $A$  的 PI 次数以及 Kaplansky 定理可知  $A/\text{Ann}_A X$  作为中心上的线性空间维数不超过  $(\text{PI-deg } A)^2$ . 注意到  $A/\text{Ann}_A X$  的中心是  $\mathbb{k}$  的有限扩张, 所以  $\mathbb{k}$  是代数闭域迫使  $Z(A/\text{Ann}_A X) = \mathbb{k}$ . 由此可知  $\dim_{\mathbb{k}} X \leq \dim_{\mathbb{k}} A/\text{Ann}_A X \leq (\text{PI-deg } A)^2 = n^2$ . 注意到  $A/\text{Ann}_A X$  是代数闭域  $\mathbb{k}$  上有限维单代数, 故由 Wedderburn-Artin 定理知存在正整数  $1 \leq d \leq n$  使得  $A/\text{Ann}_A X = A/M \cong M_d(\mathbb{k})$ . 这时利用矩阵代数的不可约表示特性以及  $X$  可自然视作  $A/\text{Ann}_A X$  上模易见  $\dim_{\mathbb{k}} X = d$ . 即这时有

$$\dim_{\mathbb{k}} X = \text{PI-deg } A/M = d, A/M \cong M_d(\mathbb{k}).$$

其中  $\text{PI-deg } A/M = d$  来自 Amitsur-Levitzki 定理. 下面开始证明本定理.

根据前面的讨论, (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) 的等价性是明显的. 下面证明 (2), (3) 和 (5) 之间的等价性.

(2) $\Rightarrow$ (3): 注意到  $M_{\mathfrak{m}} \cap Z_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$ , 所以当  $A_{\mathfrak{m}}$  是 Azumaya 代数时, 由 [命题3.53] 便知  $M_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ . 由此易知对任何  $b \in M$  存在  $u \in Z - \mathfrak{m}$  使得  $ub \in \mathfrak{m}A$ . 而存在  $z \in Z$  使得  $uz - 1 \in \mathfrak{m}$ , 故  $b \in \mathfrak{m}A$ .

(3) $\Rightarrow$ (5): 根据前面的讨论, 只需要说明  $\dim_{\mathbb{k}} A/M = n^2$  即可. 首先前面已经指出  $\dim_{\mathbb{k}} A/M \leq n^2$ , 所以只要验证  $\dim_{\mathbb{k}} A/M \geq n^2$ . 这时  $A/M = A/\mathfrak{m}A$  作为  $Z/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$  上线性空间维数至少是  $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  作为域  $Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$  上线性空间的维数, 利用 Nakayama 引理我们看到这就是  $A_{\mathfrak{m}}$  作为有限生成  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模的最小生成元集数目. 记  $Z$  的零理想为  $Q$ , 现在有  $A_Q \cong (A_{\mathfrak{m}})_{Q_{\mathfrak{m}}}$ , 因此  $A_{\mathfrak{m}}$  作为有限生成  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模的最小生成元集数目至少是  $\dim_{Z_Q} A_Q$ . 由 Posner 定理,  $\dim_{Z_Q} A_Q = n^2$ , 所以  $\dim_{\mathbb{k}} A/M \geq n^2$ .

(5) $\Rightarrow$ (2): 由 Amitsur-Levitzki 定理, 这时  $\text{PI-deg } A/M = n$ , 所以  $M$  是正则极大理想. 并注意到  $A_{\mathfrak{m}}/M_{\mathfrak{m}} \cong (A/M)_{\overline{\mathfrak{m}}} \cong A/M$  表明  $A_{\mathfrak{m}}/M_{\mathfrak{m}}$  也是 PI 次数为  $n$  的中心单代数. 而根据 [推论2.92],  $A_{\mathfrak{m}}$  的 PI 次数也是  $n$ , 因此  $M_{\mathfrak{m}}$  是  $A_{\mathfrak{m}}$  的正则极大理想. 于是由 [命题3.64] 可知存在某组  $A_{\mathfrak{m}}$  的元素在  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$  下的值非零. 因

为  $\mathbb{k}$  是无限域, 故应用 [推论2.94] 知  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$  是  $A_{\mathfrak{m}}$  的中心多项式, 即  $A_{\mathfrak{m}}$  中元素代入  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$  后得到的值总在  $Z_{\mathfrak{m}}$  中. 故存在  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n \in A_{\mathfrak{m}}$  使得  $F_n(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n) \in Z_{\mathfrak{m}} - M_{\mathfrak{m}}$ . 特别地,  $F_n(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n)$  是  $Z_{\mathfrak{m}}$  中可逆元 (因为表示成分式后分子在  $Z - \mathfrak{m}$  中). 假设  $A_{\mathfrak{m}}$  存在非正则的极大理想  $\mathcal{N}$ , 那么由 [推论2.93] 知  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$  是  $A_{\mathfrak{m}}/\mathcal{N}$  的多项式等式. 因此  $F_n(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathcal{N}$ . 这说明  $\mathcal{N}$  包含  $A_{\mathfrak{m}}$  中的可逆元, 这与  $\mathcal{N}$  是真理想矛盾. 所以  $A_{\mathfrak{m}}$  的所有极大理想都正则. 故由 Artin-Procesi 定理便知  $A_{\mathfrak{m}}$  是 Azumaya 代数.  $\square$

**Remark 3.132.** 该定理的分次版本最早在 [34] 中由层论工具证明. 这里的非分次版本来自 [35]. 如果  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$  使  $A_{\mathfrak{m}}$  是 Azumaya 代数, 那么由  $\text{PI-deg } A_{\mathfrak{m}} = n$  以及 [例3.62] 立即得到  $A_{\mathfrak{m}}$  是秩为  $n^2$  的 Azumaya 代数. 如果  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}$  满足  $A_{\mathfrak{m}}, A_{\mathfrak{n}}$  都是 Azumaya 代数, 那么  $A/\mathfrak{m}A \cong M_n(\mathbb{k}) \cong A/\mathfrak{n}A$ .

**Remark 3.133.** 在 (2) $\Rightarrow$ (3) 过程中, 我们看到  $M_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  蕴含  $M = \mathfrak{m}A$ . 一般地, 对含么环  $R$  和中心子环  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$ , 如果  $R$  的理想  $I, J \supseteq \mathfrak{m}$  且  $I_{\mathfrak{m}} = J_{\mathfrak{m}}$ , 用同样的技术我们可以说明  $I = J$ : 任取  $c \in I$ , 那么存在  $s, t \in Z - \mathfrak{m}$  和  $d \in J$  使得  $c/s = d/t$ , 由此可知存在  $u \in Z - \mathfrak{m}$  使得  $uc \in J$ . 因为  $u \notin \mathfrak{m}$ , 所以存在  $z \in Z$  使得  $uz - 1 \in \mathfrak{m} \subseteq J$ , 于是  $uzc - c \in J$ , 因此  $c \in J$ . 这说明  $I \subseteq J$ . 对称地得到  $J \subseteq I$ . 对中心子环的素理想一般不成立. 即当  $R$  的理想  $I, J$  满足包含中心子环  $Z$  的素理想  $\mathfrak{p}$  且  $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$  时未必有  $I = J$ . 例如考虑  $R = Z = \mathbb{Z}, \mathfrak{p} = 0$ . 取  $I = 2\mathbb{Z}, J = 3\mathbb{Z}$ , 那么  $I_{\mathfrak{p}}, J_{\mathfrak{p}}$  作为  $\mathbb{Q} = R_{\mathfrak{p}}$  的非零理想都是  $\mathbb{Q}$ . 利用这个观察, 我们可以看到如果  $K$ -代数  $A$  在中心子代数  $Z$  上模有限且  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$  满足  $A_{\mathfrak{m}}$  是 (以  $Z_{\mathfrak{m}}$  为中心的) Azumaya 代数, 那么对任何  $A$  的满足  $M \cap Z = \mathfrak{m}$  的极大理想  $M$ , 依然能够证明  $M = \mathfrak{m}A$ . 这时可直接验证  $M_{\mathfrak{m}} \cap Z_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$ . 应用 [命题3.53] 得到  $M_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ . 现在由  $M, \mathfrak{m}A$  都是  $A$  的包含  $\mathfrak{m}$  的理想可知  $M = \mathfrak{m}A$ . 因此, 只要  $\mathfrak{m} \in \max \text{Spec } Z$  满足  $A_{\mathfrak{m}}$  是 Azumaya 代数, 就能够保证  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) = (\varphi')^{-1}(\mathfrak{m})$  是单点集 (这里第一个等号来自 [命题3.117]). 按照之后引入的术语 (见 [定义3.137]), 模有限代数的 Azumaya 轨迹中的点关于代数素谱到中心子代数素谱间连续映射的原像集总是单点集 (由  $M = \mathfrak{m}A$  表明  $M$  被  $\mathfrak{m}$  唯一确定).

**Remark 3.134.** 我们指出 [定理3.131] 中要求代数是素环的要求是必要的. 在 [例3.125] 中我们看到有限维半单代数  $A$  的中心的极大谱可能每个点  $\mathfrak{m}$  都满足  $A_{\mathfrak{m}}$  是 Azumaya 代数, 但  $\mathfrak{m}$  关于 [命题3.117] 中的连续满射  $\varphi: \max \text{Spec } R \rightarrow \max \text{Spec } Z, M \mapsto M \cap Z$  的原像对应的不可约表示具有不同的维数. 按照 [定义3.137] 的术语, 这表明对代数闭域上仿射模有限半素代数  $A$  而言, Azumaya 轨迹中的点生成的  $A$  的极大理想可能不再对应最大维数的不可约表示, 并注意 [例3.125] 中的代数  $A$  关于中心的任意极大理想  $\mathfrak{m}$  生成的理想作商后,  $A/\mathfrak{m}A$  是有限维单代数. 而 [例3.126] 表明对代数闭域上有限维半单代数  $A$  如果在某个中心子代数  $Z$  (也是整区) 上模有限,  $Z$  中使得  $A_{\mathfrak{m}}$  是 Azumaya 代数的极大理想  $\mathfrak{m}$  关于  $\varphi$  的原像集可能不是单点集, 并且不同的 ( $A$  的) 极大理想对应  $A$  不同维数的不可约表示. 再指出 [例3.126] 考虑的代数  $A$  关于相应中心子代数  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$  诱导的代数  $A/\mathfrak{m}A$  是有限维半单代数, 但不是单环.

下面我们来总结理解一下 [定理3.131] 的意义. 固定代数闭域  $\mathbb{k}$  上 PI 次数为  $n$  的模有限仿射素代数  $A$  并记其中心为  $Z$ . 对  $A$  在  $\mathbb{k}$  上的任何不可约表示  $X$ , 总有  $\dim_{\mathbb{k}} X \leq n$ . 该定理说  $\dim_{\mathbb{k}} X = n$  的充要条件是极大理想  $\text{Ann}_A X$  是  $A$  的正则极大理想. 而 [命题3.72] 告诉我们  $A$  的正则极大理想总存在, 所以  $A$  所有不可约表示的线性维数不仅被  $n$  控制,  $n$  这个上界还是“可达”的.  $A$  维数最大的不可约表示, 即线性维数为  $n$  的不可约表示, 恰好对应所有的正则极大理想. 因此我们从 [定理3.131] 读出

**Corollary 3.135.** 考虑代数闭域  $\mathbb{k}$  上 PI 次数为  $n$  的模有限仿射素代数  $A$  并记其中心为  $Z$ . 那么有双射

$$\varepsilon: \{X | X \text{ 是不可约左 } A\text{-模且 } \dim_{\mathbb{k}} X = n\} \rightarrow \{M \in \max \text{Spec } A | M \text{ 是正则极大理想}\}, X \mapsto \text{Ann}_A X.$$

**Remark 3.136.** 因此素 PI 代数极大理想的正则性捕捉了不可约表示维数的最大性这一信息.

而  $A$  的极大理想  $M$  是正则的当且仅当  $A_{\mathfrak{m}}$  是 Azumaya 代数, 其中  $\mathfrak{m} = Z \cap M$ , 启发我们定义

**Definition 3.137** (Azumaya 轨迹, [1]). 设  $R$  是含么环,  $Z$  是  $R$  的中心且  ${}_Z R$  是有限生成模. 称

$$\mathcal{A}(R) = \{\mathfrak{m} \in \max\text{Spec} Z \mid R_{\mathfrak{m}} \text{ 是 (以 } Z_{\mathfrak{m}} \text{ 为中心的) Azumaya 代数}\}$$

是  $R$  的 **Azumaya 轨迹**. 注意模有限的条件保证了  $R_{\mathfrak{m}}$  的中心就是  $Z_{\mathfrak{m}}$  ([引理3.58]).

**Proposition 3.138.** 设  $A$  是代数闭域上仿射模有限素代数, 那么  $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A)} \mathfrak{m}A = 0$ .

*Proof.* 根据 [定理3.131], 所有  $\mathfrak{m}A$  ( $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A)$ ) 之交就是  $A$  的所有正则极大理想之交, 再应用 [命题3.72(6)].  $\square$

因为现在  $A$  是仿射素 PI 代数, 所以总存在正则极大理想 (回忆 [命题3.72]). 于是由 [定理3.131] 知总存在  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$  (即取一个  $A$  的正则极大理想与  $Z$  的交) 使得  $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A)$ . 所以代数闭域上模有限仿射素代数的 Azumaya 轨迹总是非空的. 事实上, 我们还有

**Theorem 3.139** ([1]). 设  $A$  是代数闭域  $\mathbb{k}$  上的模有限仿射素代数并设其中心为  $Z$ , 那么  $A$  的 Azumaya 轨迹  $\mathcal{A}(A)$  是  $\max\text{Spec} Z$  的非空稠密开子集.

*Proof.*  $\mathcal{A}(A) \neq \emptyset$  来自 [定理3.131] 和 [命题3.72]. 记  $\mathcal{S}$  是  $A$  所有非正则的极大理想构成的集合, 那么根据 [命题3.72] 知  $\mathcal{S}$  是  $\max\text{Spec} A$  的真闭子集. 设  $\varphi' : \max\text{Spec} R \rightarrow \max\text{Spec} Z, M \mapsto M \cap Z$  是标准映射, 因为  $Z$  是 Noether 环, 所以 [命题3.130] 表明  $\varphi'$  是连续满的闭映射. 根据 [定理3.131] 可知  $\max\text{Spec} Z - \mathcal{A}(A) = \varphi'(\mathcal{S})$ . 于是知  $\mathcal{A}(A)$  是  $\max\text{Spec} Z$  的非空开子集. 因为  $Z$  是域  $\mathbb{k}$  上仿射交换代数, 所以  $Z$  是 Jacobson 环, 于是结合  $Z$  是整区知  $\text{Jac} Z = N(Z) = 0$ . 现在应用下面的 [引理3.140] 便知  $\mathcal{A}(A)$  是稠密开子集.  $\square$

**Lemma 3.140.** 设  $Z$  是含么交换环, 则  $\max\text{Spec} Z$  是不可约空间的充要条件是  $\text{Jac} Z$  是素理想.

在 [命题3.57] 中我们看到 Azumaya 代数在中心的任何极大理想处作局部化依然是 Azumaya 的, 所以

**Example 3.141.** 设  $A$  是以  $Z$  为中心的 Azumaya 代数, 那么  $\mathcal{A}(A) = \max\text{Spec} Z$ .

**Remark 3.142.** 反之, 如果  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上仿射模有限代数并设其中心为  $Z$ . 那么这时  $A$  作为 Noether 环  $Z$  上的有限生成模自然是有有限表现的. 因此应用 [命题3.57] 便知  $\mathcal{A}(A) = \max\text{Spec} Z$  蕴含  $A$  是 Azumaya 代数.

**Example 3.143.** 对代数闭域上模有限仿射代数, 其 Azumaya 轨迹可能是空集. 例如考虑 [例3.127] 中的二阶上三角阵代数, 记为  $A$ . 其中心的极大谱是以零理想为元素的单点集, 因此  $A$  不是 Azumaya 代数表明  $\mathcal{A}(A) = \emptyset$ .

**Example 3.144.** 在 [例3.68] 中我们看到如果  $q \in \mathbb{k}^*$  是域  $\mathbb{k}$  中的  $\ell$  次本原单位根且  $\ell \geq 2$ , 那么  $q$  处的量子平面  $\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)$  作为域上仿射 Noether 整区且在中心上有限生成自由的代数不是 Azumaya 的. 因此这时 Azumaya 轨迹  $\mathcal{A}(\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^2)) \subsetneq \max\text{Spec} Z$ . 故可用 Azumaya 轨迹来衡量仿射模有限代数与 “Azumaya 代数” 的距离.

依然设  $A$  是代数闭域  $\mathbb{k}$  上 PI 次数为  $n$  的模有限仿射素代数, 那么从 [定理3.139] 的证明过程中我们看到  $\mathcal{A}(A)$  就是  $A$  的正则极大理想集在连续满射  $\varphi' : \max\text{Spec} R \rightarrow \max\text{Spec} Z, M \mapsto M \cap Z$  下的像集. 结合 [命题3.117], 我们看到  $\mathcal{A}(A)$  中点关于  $\varphi$  的纤维给出  $A$  的正则极大理想集的不相交分解. 不过 [定理3.131] 告诉我们所有的纤维代数  $A/\mathfrak{m}A$  ( $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A)$ ) 都同构于  $M_n(\mathbb{k})$ , 所以  $A/\mathfrak{m}A$  的不可约表示等价类只有一个. 因此

**Proposition 3.145.** 设  $A$  是代数闭域  $\mathbb{k}$  上 PI 次数为  $n$  的模有限仿射素代数且中心为  $Z$ . 那么  $\mathcal{A}(A)$ ,  $A$  的正则极大理想集以及  $A$  的  $\mathbb{k}$ -线性维数为  $n$  的不可约表示等价类集之间有如下双射:

$$\{[{}_A X] | X \text{ 是线性维数为 } n \text{ 的不可约左 } A\text{-模}\} \xrightarrow{\text{Ann}_A} \{M \in \text{Spec} A | M \text{ 是正则极大理想}\} \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{A}(A)$$

这里  $\text{Ann}_A$  是取零化子映射,  $\varphi' : \max\text{Spec} A \rightarrow \max\text{Spec} Z, M \mapsto M \cap Z$  是标准连续满射.

特别地, Azumaya 轨迹中的点关于  $\varphi$  的原像集是单点集.

**Remark 3.146.** 该定理也可以看作是 [定理3.131] 的直接推论,  $\text{Ann}_A$  是双射来自 [定理3.131] 中 (1) 与 (4) 的等价性,  $\varphi'$  是单射来自 (1) 蕴含 (3),  $\varphi'$  是满射来自 (2) 蕴含 (1).

**Remark 3.147.** 考虑到代数闭域上仿射模有限素代数的 Azumaya 轨迹中点与最大维数不可约表示间的对应关系, Azumaya 轨迹的计算基本且重要——本质上在确定所有最大维数的不可约表示.

**Remark 3.148.** 在代数闭域上模有限仿射素代数场景, 我们看到 Azumaya 轨迹中点的原像集是单点集, 对应给定代数维数最大的不可约表示. 并且 Azumaya 轨迹中的点生成的代数中的理想是极大理想. 反之, 如果代数闭域  $\mathbb{k}$  上模有限仿射素代数  $A$  的中心  $Z$  的极大理想  $\mathfrak{m}$  满足  $\mathfrak{m}A$  是  $A$  的极大理想, 由  $\mathfrak{m}A \cap Z \supseteq \mathfrak{m}$  以及 [命题3.117(4)] 可知  $\mathfrak{m}A \cap Z = \mathfrak{m}$ , 再对  $M = \mathfrak{m}A$  应用 [定理3.131] 可知  $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A)$ . 所以当  $A$  是代数闭域上模有限仿射素代数时,  $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A) \Leftrightarrow \mathfrak{m}A \in \max\text{Spec} A \Leftrightarrow A/\mathfrak{m}A$  是 Artin 单代数.

**Remark 3.149.** 一般地, 对代数闭域  $\mathbb{k}$  上有限维代数  $A$  以及中心子代数  $Z$ , 如果  $\mathfrak{m} \in \max\text{Spec} Z$  满足  $\mathfrak{m}$  关于连续映射  $\varphi' : \max\text{Spec} A \rightarrow \max\text{Spec} Z, M \mapsto M \cap Z$  的原像集是单点集, 也不能保证  $\mathfrak{m}$  在  $A$  中生成的理想是极大理想. 例如考虑域  $\mathbb{k}$  上有限维代数  $A = \mathbb{k}[x]/(x^2)$ , 并取中心子代数  $Z = \mathbb{k}$  以及  $\mathfrak{m} = 0$ . 那么  $(\varphi')^{-1}(\mathfrak{m}) = \{(x)/(x^2)\}$  是  $A$  唯一的极大理想 (也是唯一的素理想, 注意  $A$  是 Artin 环). 但  $\mathfrak{m}A = 0$  不是  $A$  的极大理想, 这时  $(\varphi')^{-1}(\mathfrak{m}) \supsetneq \mathfrak{m}A$ . 并此例也说明对代数闭域上有限维代数  $A$ ,  $(\varphi')^{-1}(\mathfrak{m})$  是单点集不足以蕴含  $\mathfrak{m}A$  是极大理想. 换句话说, 即便  $\mathfrak{m}A$  不是  $A$  的极大理想, 有可能有  $(\varphi')^{-1}(\mathfrak{m})$  是单点集. 反之, 当  $\mathfrak{m}A$  是极大理想时,  $(\varphi')^{-1}(\mathfrak{m})$  明显是单点集.

前面在 [定理3.139] 中我们看到代数闭域上模有限仿射素代数的 Azumaya 轨迹总是中心的极大谱的非空稠密开子集. 我们马上说明 Azumaya 轨迹中的点在某种意义上是“光滑的”.

固定代数闭域  $\mathbb{k}$ , 记仿射簇  $X$  的坐标环是  $\mathcal{O}(X)$ . 在古典代数几何中我们知道  $X$  与  $\max\text{Spec} \mathcal{O}(X)$  间有标准的同胚, 记  $p \in X$  在该同胚下对应的极大理想是  $\mathfrak{m}_p$ . 那么  $p$  是  $X$  的光滑点当且仅当  $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p}$  是正则局部环. 根据 Auslander-Buchsbaum-Serre 定理, 交换 Noether 局部环  $(R, \mathfrak{m}, k = R/\mathfrak{m})$  是正则局部环当且仅当  $\text{gl.dim} R < +\infty$  也当且仅当  $\text{p.dim}_R k < +\infty$ . 由此看到  $p$  是仿射簇  $X$  的光滑点当且仅当  $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p}$  的整体维数有限. 一般地, 我们可以在交换 Noether 环场景定义“光滑点”与“奇异点”的概念.

**Definition 3.150** ([1]). 设  $R$  是交换 Noether 环,  $\mathfrak{m} \in \max\text{Spec} R$ . 如果  $\text{gl.dim} R_{\mathfrak{m}} < +\infty$ , 则称  $\mathfrak{m}$  是  $R$  的**光滑点**. 如果  $\text{gl.dim} R_{\mathfrak{m}} = +\infty$ , 则称  $\mathfrak{m}$  是  $R$  的**奇异点**. 将所有光滑点构成的集合记作  $\mathcal{R}(R)$ , 称为  $R$  的**光滑轨迹**; 将所有奇异点构成的集合记作  $\mathcal{S}(R)$ , 称为  $R$  的**奇异轨迹**.

**Proposition 3.151** ([1]). 设  $A$  是域  $\mathbb{k}$  上模有限仿射代数,  $Z$  是  $A$  的中心. 如果整体维数  $\text{gl.dim} A < +\infty$ , 那么  $\mathcal{A}(A) \subseteq \mathcal{R}(Z)$ , 即  $A$  的 Azumaya 轨迹中的点全部是  $Z$  的光滑点.

*Proof.* 任取  $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A)$ , 即  $A_{\mathfrak{m}}$  是以  $Z_{\mathfrak{m}}$  为中心的 Azumaya 代数, 于是  $A_{\mathfrak{m}}$  是有限生成投射  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模. 特别地, 任何任何投射  $A_{\mathfrak{m}}$ -模视作  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模也投射. 由  $A_{\mathfrak{m}}$  是非零有限生成  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模以及 Nakayama 引理可知  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \neq A_{\mathfrak{m}}$ . 于是非零模  $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  作为  $A_{\mathfrak{m}}$ -模的任何投射分解也是作为  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模的投射分解. 因此由  $A$  的整体维数有限可知  $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  作为  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模的投射维数有限. 根据 [推论3.44], 由  $\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$  是  $Z_{\mathfrak{m}}$  的极大理想可知  $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  也是 Azumaya 代数. 并且其中心同构于  $Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$ . 现在应用 [命题3.42], 我们看到  $Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$  可视作  $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  作为  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模的直和因子, 因此  $Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$  作为  $Z_{\mathfrak{m}}$ -模有有限的投射维数. 根据 Auslander-Buchsbaum-Serre 定理,  $Z_{\mathfrak{m}}$  作为交换 Noether 局部环是正则局部环, 因此  $\mathfrak{m}$  是  $Z$  的光滑点.  $\square$

**Remark 3.152.** 该命题结论中的包含关系一般可能是严格的, 但在许多场景下被证明是可以取等的. 能保证 Azumaya 轨迹与光滑轨迹相同的较为一般的同调条件可参见 [1, p.303, III Theorem 8.1] 或 [35, Theorem 3.8].

**Example 3.153.** 如果  $A$  是整体维数有限的交换仿射  $\mathbb{k}$ -代数, 即  $A = Z$ , 那么由  $Z_{\mathfrak{m}}$  总是自身上的 Azumaya 代数可知  $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(Z) = \max\text{Spec}Z$ . 这时由  $\text{gl.dim}Z < +\infty$  我们也总有  $\mathcal{R}(Z) = \max\text{Spec}Z$ .



## 参考文献

- [1] Ken A. Brown, Ken R. Goodearl, Lectures on Algebraic Quantum Groups, Springer Basel AG(2002).
- [2] J. C. McConnell, J. C. Robson, Noncommutative Noetherian Rings, American Mathematical Society(1987).
- [3] Michael Artin, Noncommutative Rings, class notes(1999).
- [4] Vesselin Drensky, Edward Formanek, Polynomial Identity Rings, Springer Basel AG(2004).
- [5] M. Dehn, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme, Math. Ann. 85 (1922), 184-193.
- [6] Amitsur, S.A. Polynomial identities. Israel J. Math. 19(1974), 183-199.
- [7] M. Hall, Projective planes, Trans. Amer. Math. Soc. 54(1943), 229-277.
- [8] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc. 54(1948), 575-580.
- [9] J. Levitzki, A theorem on polynomial identities, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 334-341.
- [10] S.A. Amitsur, J. Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 2(1950), 449-463.
- [11] S.A. Amitsur, The identities of PI-rings, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 27-34.
- [12] S.A. Amitsur, Radicals of polynomial rings, Canadian J. Math. 8 (1956), 355-361.
- [13] E.C. Posner, Prime rings satisfying a polynomial identity, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 180-184.
- [14] E. Formanek, Central polynomials for matrix rings, J. Algebra 23 (1972), 129-132.
- [15] On a problem of Kaplansky, Izv. Akad. Nauk SSSR 37 (1973), 483-501.
- [16] L. H. Rowen, Some results on the center of a ring with polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 219-223.
- [17] S. Rosset, A new proof of the Amitsur-Levitski identity, Israel J. Math. 23 (1976), 187-188.
- [18] W. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme, Math. Z. 113 (1937), 528-567.
- [19] Darij Grinberg, Notes on the combinatorial fundamentals of algebra(2022).
- [20] Nathan Jacobson, Basic Algebra II, Dover Publications(1980).
- [21] I. N. Herstein, Noncommutative Rings, The Mathematical Association of America(2005).
- [22] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company(1969).

- [23] R. S. Irving, Affine PI algebras not embeddable in matrix rings, *J. Algebra* 82 (1983), 94-101.
- [24] Z. Mesyan, Commutator rings, *Bull. Austral. Math. Soc.* 74 (2006), 279-288.
- [25] A. V. Jategaonkar, Jacobson's conjecture and modules over fully bounded Noetherian rings, *J. Algebra* 30 (1974), 103-121.
- [26] De Meyer, F., Ingraham, E., *Separable algebras over commutative rings*, Springer (2006).
- [27] M. Artin, On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings, *Journal of Algebra* 11(1969), 532-563.
- [28] C. Procesi, On a theorem of M. Artin, *Journal of Algebra* 22(1972), 309-315.
- [29] I. Reiner, *Maximal Orders*, London Mathematical Society Monographs (2003).
- [30] K.A. Brown, M.T. Yakimov, Azumaya loci and discriminant ideals of PI algebras, *Advances in Mathematics* 340 (2018), 1219-1255.
- [31] C. Procesi, A formal inverse to the Cayley-Hamilton theorem, *Journal of Algebra* 107(1987), 63-74.
- [32] K. Chan, J. Gaddis, R. Won and Zhang, J. J., Ozone groups of Artin-Schelter regular algebras satisfying a polynomial identity, *arXiv preprint arXiv:2312.13014*(2023).
- [33] Wu Quanshui, Zhu Ruipeng, Derived equivalences for a class of PI algebras, *Algebr. Represent. Theory* 26 (2023), 753-762.
- [34] L. Bruyn L, M. V. den Bergh, F. V. Oystaeyen, *Graded orders*, Birkhäuser Boston, 1988
- [35] K.A. Brown, K. R. Goodearl, Homological aspects of Noetherian PI Hopf algebras and irreducible modules of maximal dimension, *Journal of algebra* 198 (1997), 240-265.