Zariski 切空间

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 12 月 2 日

1 Zariski 切空间

本节介绍仿射簇的 Zariski 切空间及其等价刻画, 首先从如下便于计算的定义开始:

Definition 1.1 (Zariski 切空间)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 对应理想为 $I(X)$, $p \in X$. 称 $T_pX = V(\{\sum_{i=1}^{n}(\partial F/\partial x_i)(p)x_i | F \in I(X)\}) \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇 X 在 p 处 **Zariski 切空间**.

Example 1.2. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是不可约多项式 $f \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的零点集, 那么 T_pX 即线性方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)x_n = 0$$

的解空间. 一般地, 若仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是不可约的且是 1 维的, 则称 X 是**仿射曲线**. 例如考虑仿射 (尖点) 曲线 $C = V(x^3 - y^2) \subseteq \Bbbk^2$, 它在 $p = (0, 0)$ 处的切空间 $T_pC = \Bbbk^2$(注意局部维数 $\dim_p C = 1$). 又例如我们有圆周曲线 $S = V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \Bbbk^2$, 它也是仿射曲线, 并且在每点 $p \in S$ 处的切空间 $T_pS \cong \Bbbk$.

Remark 1.3. 本例第一条曲线在某点处局部维数与切空间线性维数不同. 第二条 (圆周) 曲线每点局部维数与切空间的线性维数一致. 之后引入的光滑点与奇异点的概念 (见 [定义2.1]) 便区分了这两个几何对象.

Proposition 1.4. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $Y \subseteq X$ 是闭子簇且 $p \in Y$. 那么 $\dim_{\Bbbk} T_pY \leq \dim_{\Bbbk} T_pX$.

Proof. 设 $I(X)$ 可由 $f_1, ..., f_m \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 生成, 那么 $T_pX = V(\{\sum_{i=1}^{n}(\partial f_k/\partial x_i)(p)x_i | 1 \leq k \leq m\})$. 可设存在 $f_{m+1}, ..., f_t \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 使得 $Y = V(f_1, ..., f_m, f_{m+1}, ..., f_t)$, 那么明显有 $T_pY \subseteq T_pX$ 是 $\Bbbk$-线性子空间. □

Remark 1.5. 若取 $X = \Bbbk, Y = \{p\} \subseteq X$, 那么 $T_pY = 0 \subsetneq T_pX = \Bbbk$. 此时有严格不等式 $\dim_{\Bbbk} T_pY < \dim_{\Bbbk} T_pX$. 若取 $X = \Bbbk^2, Y = V(x^3 - y^2) \subseteq X$, 那么 $T_pY = T_pX = \Bbbk^2$, 此时 $\dim_{\Bbbk} T_pY = \dim_{\Bbbk} T_pX$.

光滑流形在一点处的切空间可由该流形光滑函数环在给定点的全体导子给出, 下面是仿射簇情形的概念.

Definition 1.6 (导子)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 称 $\Bbbk$-线性映射 $D : A(X) \to \Bbbk$ 是 X 在点 p 处的**导子**, 如果 $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f), \forall f, g \in A(X)$. 这里 $A(X)$ 表示仿射簇 X 的坐标环.

Remark 1.7. 如果 $\Bbbk$ 是代数闭域, $A(X)$ 到 X 上的正则函数环是标准嵌入是代数同构. 因此当我们考虑代数闭域上的仿射簇时, 常将该簇的正则函数环与坐标环视作等同.

仿射簇在一点处的切空间类似流形情形也可由在给定点处全体导子给出, 这是更自然的 (等价) 定义.

Lemma 1.8. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 那么 T_pX 与 X 在 p 点导子全体构成的线性空间 Ω_p 间有 $\Bbbk$-线性同构 $\varphi : T_pX \to \Omega_p, a = (a_1, ..., a_n) \mapsto D_a : A(X) \to \Bbbk$, 其中 $D_a : A(X) \to \Bbbk, f \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} (\partial f/\partial x_i)(p)a_i$ 是由多项式函数 f 在每个变量上的偏导数诱导的标准导子.

Proof. 首先可直接计算验证 $\varphi : T_pX \to \Omega_p, a = (a_1, ..., a_n) \mapsto D_a$ 是定义合理的 $\Bbbk$-线性映射. 若 $a, b \in T_pX$ 满足 $D_a = D_b$, 把这两个导子作用各坐标函数 $x_i : X \to \Bbbk$ 可得 $a = b$, 由此得到映射 φ 是单射. 对任何 p 处的 $\Bbbk$-导子 D, 命 $a_i = D(x_i)$ 得到点 $a = (a_1, ..., a_n) \in \Bbbk^n$, 直接验证可得该点满足 $D_a = D$, 故 φ 满. □

仍设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇并取定 X 内一点 p. 记 $\mathfrak{m}_p = \{f \in A(X) | f(p) = 0\}$ 是 p 所对应 $A(X)$ 的极大理想, 如果 D 是仿射簇 X 在点 p 处的导子, 那么 $D(\mathfrak{m}_p^2) = 0$. 所以每个导子 D 可天然诱导出 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 上的 $\Bbbk$-线性函数. 反之, 任给 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 上的 $\Bbbk$-线性函数 l, 通过定义 $D_l : A(X) \to k, f \mapsto l(\overline{f - f(p)})$ 可得到一导子, 可直接计算验证这给出 X 在 p 点导子全体与 $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ 间的 k-线性同构, 于是我们得到下述命题.

Proposition 1.9. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$, p 点对应 $A(X)$ 的极大理想记作 $\mathfrak{m}_p$. 则作为 $\Bbbk$-线性空间有同构 $T_pX \cong (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. 特别地, $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 也是有限维线性空间, 满足 $\dim_{\Bbbk} T_pX = \dim_{\Bbbk} \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$.

Remark 1.10. 正是因为该命题, 一些文献通过 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 的对偶空间来定义仿射簇在点 p 处的切空间, 相较于原先的定义而言这更内蕴. 一般也将 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 的对偶空间称为该簇在 p 点处的**余切空间**.

记 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是仿射簇 X 在点 $p \in X$ 处的局部环, $\mathfrak{m}_p$ 是点 p 对应的极大理想, 那么总有 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{O}_{X,p} \cong A(X)_{\mathfrak{m}_p}$. 若记 p 在 $A(X)$ 中对应的极大理想是 M_p, 那么可直接验证 $\Bbbk$-线性同构 $M_p/M_p^2 \cong (\mathfrak{m}_p)_{\mathfrak{m}_p}/(\mathfrak{m}_p^2)_{\mathfrak{m}_p}$(一般地, 对含幺交换环 K 上的交换代数 R, 若有极大理想 $\mathfrak{m}$, 那么有标准 K-模同构 $\theta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2, x + \mathfrak{m}^2 \mapsto x/1 + \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2$, θ 明显是单射, 要看到 θ 是满射, 对任给 $x/s \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$, 因为 $s \notin \mathfrak{m}$, 故存在 $a \in R$ 使得 $1 - sa \in \mathfrak{m}$, 于是 $x - xsa \in \mathfrak{m}^2$, 这意味着 $x/s + \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2 = xa/1 + \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2$, 所以 θ 是满射). 总之, 我们得到

Proposition 1.11. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$, $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 X 在 p 点处的局部环. 若记 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的极大理想, 则有 $\Bbbk$-线性同构 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* \cong T_pX$. 特别地, $\dim_{\Bbbk}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{\Bbbk} T_pX$. 并注意 $\Bbbk \cong \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}$ 是剩余域.

Remark 1.12. 对含幺交换局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 记 $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ 为 R 的剩余域. 称 $\Bbbk$-线性空间 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ 为 R 的**切空间**. 将 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 称为 R 的**余切空间**. 通过上述命题可知当 R 是仿射簇在一点处的局部环时, 退化为经典定义.

注意到 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是交换 Noether 局部环, 故有交换 Noether 局部环的维数特性立即得到:

Corollary 1.13. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 那么 $\mathrm{k.dim}\mathcal{O}_{X,p} \leq \dim_{\Bbbk} T_pX$.

Remark 1.14. 若进一步假设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 那么 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的 Krull 维数就是 X 在点 p 处的局部维数. 因此, 如果这时 Y 是仿射簇 X 含点 p 的闭子簇, 那么 $\mathrm{k.dim}\mathcal{O}_{Y,p} \leq \mathrm{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}$.

2 光滑点和奇异点

光滑点和奇异点研究代数几何中自然产生的概念. 在 [推论1.13] 中我们已经看到仿射簇在一点处局部环的 Krull 维数总不超过这点处 Zariski 切空间的线性维数. 当取到等号时, 就得到了光滑点的概念.

Definition 2.1 (光滑点, 奇异点)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 当 $\dim_{\Bbbk} T_pX = \dim_p X$ 时, 称 p 是 X 的**光滑点**, 否则称 p 是**奇异点**. 对簇 X, 若在每点都光滑, 则称该簇是**光滑簇**.

Remark 2.2. 一般称仿射簇 X 所有奇异点构成的集合为 X 的**奇异轨迹**, 记作 $\mathrm{Sing}X$.

Proposition 2.3. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是不可约仿射簇, 则 $\mathrm{Sing}X$ 是 X 的闭子集.

Proof. 设 $X = V(f_1, ..., f_m)$, 其中 $f_1, ..., f_m \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$. 因为 X 是不可约簇, 所以 $\dim X = \dim_p X, \forall p \in X$. 那么

$$\mathrm{Sing}X = \left\{ p \in X \middle| (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p))_{m\times n}\text{的秩严格小于}n - \dim X \right\}$$

就是多项式矩阵 $(\partial f_i/\partial x_j)_{m\times n}$ 所有阶不超过 $n - \dim X$ 的子式的公共零点集. □

根据正则局部环的定义以及 [推论1.13] 我们立即得到:

Theorem 2.4 (光滑性刻画)**.** 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 那么 X 在点 p 处的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是正则局部环的充要条件是 $p \in X$ 是光滑点.

Remark 2.5. 因此由正则环的定义可知代数闭域上仿射簇光滑当且仅当该簇坐标环是正则环.

因此我们可以通过“可视化”的几何对象来构造一些代数例子. 回忆正则局部环的同调刻画:

Auslander-Buchsbaum-Serre Theorem. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是交换 Noether 局部环, 则以下五条等价:
(1) 环 R 是正则局部环.
(2) 整体维数 $\mathrm{gl.dim}R < +\infty$.
(3) 投射维数 $\mathrm{p.dim}_R k < +\infty$.
(4) 任何有限生成 R-模 M 有 $\mathrm{p.dim}_R M < +\infty$.
(5) 投射维数 $\mathrm{p.dim}_R \mathfrak{m} < +\infty$.

并且这时 $\mathrm{gl.dim}R = \mathrm{k.dim}R$.

因此仿射簇 X 上只要存在奇异点 p, 就能够产生一个整体维数无限的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$. 例如:

Example 2.6. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 考虑仿射曲线 $C = V(x^3 - y^2) \subseteq \Bbbk^2$, 它在 $p = (0, 0)$ 处的切空间 $T_pC = \Bbbk^2$. 而该曲线在 p 处局部环的 Krull 维数不可能超过 $A(C)$ 的 Krull 维数, 故 $\mathrm{k.dim}\mathcal{O}_{C,p} \le 1 < 2 = \dim_{\Bbbk} T_pC$(事实上 $A(C)$ 作为 1 维 Noether 整区它在极大理想处的局部化也是 1 维 Noether 整区). 故 p 是 C 的奇异点. 于是 $\mathrm{gl.dim}\mathcal{O}_{C,p} = +\infty$. 此时 Noether 局部环 $\mathcal{O}_{C,p}$ 的 Krull 维数有限而整体维数无限.

根据光滑点的刻画, 我们很容易建立起离散赋值环与 Dedekind 整区在仿射代数几何中对应的几何特性.

Example 2.7 (曲线的光滑性)**.** 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $C \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射曲线, $p \in C$. 则 C 在 p 点光滑当且仅当 $\mathcal{O}_{C,p}$ 是离散赋值环. C 是光滑曲线的充要条件是 $A(C)$ 是 Dedekind 整区.

Example 2.8. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 我们已经看到仿射曲线 $C = V(x^3 - y^2) \subseteq \Bbbk^2$ 的奇异轨迹 $\mathrm{Sing}C = \{(0,0)\}$. 因此对 $C \subseteq \Bbbk^2$ 有 $\mathrm{Sing}C \nsubseteq \mathrm{Sing}(\Bbbk^2)$. 一般地, 对仿射簇 X 的闭子簇 Y, 并没有 $\mathrm{Sing}Y \subseteq \mathrm{Sing}X$.

在同调环论领域人们也关注自内射维数无限的环. 我们知道正则局部环是 Gorenstein 局部环 (即自内射维数有限的交换 Noether 局部环), Gorenstein 局部环是特殊的 Cohen-Macaulay 局部环. 因此任何不是 Cohen-Macaulay 的交换 Noether 局部环都有无限的自内射维数. 而 Cohen-Macaulay 条件虽然没有等价地几何特性与之对应, 但它是介于局部光滑性 (前面提到正则局部环是 Cohen-Macaulay 局部环) 与局部等维性 (指穿过给定点的不可约分支具有统一的维数) 的代数概念. 具体而言, 我们有:

Proposition 2.9. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 如果仿射簇 X 在 p 点的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 Cohen-Macaulay 局部环, 那么 X 所有含 p 的不可约分支有相同的维数, 该维数是 $\mathrm{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}$.

Remark 2.10. 该命题说只要仿射簇在一点处的局部环是 Cohen-Macaulay 的, 则仿射簇所有穿过该点的不可约分支具有相同的维数. 因此如果仿射簇内有一点是两个不同维数的不可约分支的交点, 那么这点处的局部环不是 Cohen-Macaulay 环. 于是可以通过这种方式构造自内射维数无限的环例子. 而 Cohen-Macaulay 环的局部化总是 Cohen-Macaulay 的, 所以仿射簇 X 如果在某点 p 处满足 $\mathcal{O}_{X,p}$ 不是 Cohen-Macaulay 环, 那么坐标环 $A(X)$ 也不是 Cohen-Macaulay 环. 于是 $A(X)$ 更不可能有有限的自内射维数.

Example 2.11. 设 X 是代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射簇, $p \in X$ 满足 p 是 X 的两个维数不相同的不可约分支的交点, 那么自内射维数 $\mathrm{inj.dim}A(X) = +\infty$. 故 $A(X)$ 给出自内射维数无限的仿射交换代数例子. 例如考虑 2 维仿射簇 $X = V(xy, xz) = V(x) \cup V(y, z) \subseteq \Bbbk^3$, 那么不可约分支 $V(x)$ 和 $V(y, z)$ 的交点 $p = (0, 0, 0)$ 作为两个维数不同的不可约分支的交点满足 $\mathcal{O}_{X,p}$ 不是 Cohen-Macaulay 局部环. 因此 X 满足条件.