交换代数的同调光滑性

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 10 月 20 日

这份笔记的目的是记录特征为零的域上本质有限型交换代数的同调光滑性与光滑性等价的证明.

1 准备工作

Definition 1. 设 R 是含幺交换环 K 上的交换代数, 如果对任何 K-交换代数 S, S 中平方是零的理想 N 以及 K-代数同态 $u : R \to S/N$, 都存在 K-代数同态 $v : R \to S$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, dashed, "v"] \arrow[dr, "u"'] & & S \arrow[dl, "\pi"] \\ & S/N & \end{tikzcd}$$

其中 $\pi : S \to S/N$ 是标准投射, 则称 R 是**光滑代数**.

Definition 2. 若含幺交换 Noether 环 R 满足对任何素理想 P, R_P 是正则局部环, 则称 R 是**正则环**.

Remark 3. 可以证明正则环的整体维数总是等于 Krull 维数 [Lam12, Theorem 5.94].

Definition 4. 设 R 是含幺交换环 K 上代数, 若 R 作为左 $R^e = R \otimes_K R^{op}$-模有个有限长的有限生成投射分解, 则称 R 是**同调光滑的**.

Definition 5. 含幺交换环 K 上交换代数 A 被称为**本质有限型的**, 如果 A 作为 K-代数同构于某个 K 上交换仿射代数的局部化.

Remark 6. 一般而言本质有限型的代数不是仿射的 (但明显还是 Noether 环), 例如复数域 $\mathbb{C}$ 上有理函数域 $\mathbb{C}(x)$ 作为多项式代数 $\mathbb{C}[x]$ 的局部化就不是 $\mathbb{C}$-仿射代数 (通过反证法考察生成元集表出有理函数的分母容易推出矛盾). 对本质有限型交换代数可直接验证它一定是 Noether 代数.

Lemma 7. 设 R 是域 $\Bbbk$ 上交换 Noether 代数, 那么 R 光滑蕴含 R 正则.

Proof. 证明可参见 [Wei94, p.317 Proposition 9.3.13]. □

Lemma 8. 设域 $\Bbbk$ 特征为零, R 是域 $\Bbbk$ 上本质有限型代数, 那么 R 正则蕴含 R 光滑.

Proof. 证明参见 [vDdB]. $\square$

联系前面两个引理我们得到：

Corollary 9. 设 R 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上本质有限型交换代数, 则 R 光滑当且仅当 R 正则.

Lemma 10. 设 $\Bbbk$ 是域, R 是 $\Bbbk$-代数, 则 $\mathrm{l.gl.dim}R \le \mathrm{p.dim}_{R^e}R$.

Proof. 不妨设 $\mathrm{p.dim}_{R^e}R$ 有限. 如果 R 作为左 R^e-模的投射维数是 n, 可设左 R^e-模投射分解

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

该复形每项作为右 R-模投射, 所以作为右 R-模复形可裂正合, 进而对任何左 R-模 M 有正合列

$$0 \longrightarrow P_n \otimes_R M \xrightarrow{d_n\otimes 1} P_{n-1} \otimes_R M \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_R M \xrightarrow{d_1\otimes 1} P_0 \otimes_R M \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} R \otimes_R M \longrightarrow 0,$$

注意到双模同构 $(R \otimes_{\Bbbk} R^{op}) \otimes_R M \to R \otimes_{\Bbbk} M, a\otimes b\otimes x \mapsto a \otimes bx$, 并且 M 作为线性空间自然是自由 $\Bbbk$-模, 所以对任何投射左 R^e-模 Q, $Q \otimes_R M$ 是投射左 R-模. $\square$

Proposition 11. 设 A 是含幺交换环 K 上本质有限型交换代数, 那么对任何 K-交换代数 B, $A \otimes_K B$ 作为 B-代数也是本质有限型的. 特别地, 当 B 也是 Noether 代数时, $A \otimes_K B$ 是 Noether 环. 因此对任何本质有限型 K-交换代数 R, 其包络代数 $R^e = R \otimes_K R$ 是 Noether 环.

Proof. 因为 A 是本质有限型的, 所以存在 K-仿射交换代数 R 以及 R 的乘闭子集使得 $A \cong R_S$, 那么有 B-代数同构 $A\otimes_K B \cong R_S \otimes_R (R\otimes_K B)$. 记 T 是 S 在 $R\otimes_K B$ 中的像集, 即乘闭子集 $S\otimes 1_B \subseteq R\otimes_K B$. 下面说明 $R_S \otimes_R (R\otimes_K B)$ 是 B-仿射交换代数 $R\otimes_K B$ 关于乘闭子集 T 的局部化. 作标准映射 $\lambda_T : R\otimes_K B \to R_S \otimes_R (R\otimes_K B)$, 那么这是 B-模同态且每个 T 中元素在 λ_T 作用下变为 $R_S \otimes_R (R\otimes_K B)$ 中可逆元. 现在任取含幺交换环 Q 以及保幺环同态 $f : R\otimes_K B \to Q$ 满足 $f(t)$ 在 Q 中可逆对任何 $t \in T$ 成立. 下面说明存在唯一的环同态 $\overline{f} : R_S \otimes_R (R\otimes_K B) \to Q$ 使得 $\overline{f}\lambda_T = f$. 作 $R_S \times (R\otimes_K B) \to Q, (a/s, x) \mapsto f(s\otimes 1)^{-1}f(ax)$, 可直接验证这是定义合理的 R-平衡映射, 于是诱导加群同态 $\overline{f} : R_S \otimes_R (R\otimes_K B) \to Q$ 使得 $\overline{f}\lambda_T = f$. 容易验证 $\overline{f}$ 是环同态, 因此 $R_S \otimes_R (R\otimes_K B)$ 是 $R\otimes_K B$ 的局部化. 这说明 $A\otimes_K B$ 是本质有限型 B-代数. $\square$

Lemma 12. 设 $\Bbbk$ 是域, R 是 $\Bbbk$ 上本质有限型交换代数, 那么当 R 光滑时, R^e 正则.

Proof. 证明可参见 [Wei94, p.322 Proposition 9.4.6]. $\square$

2 定理的叙述与证明

Theorem 13. 设域 $\Bbbk$ 特征为零, R 是域 $\Bbbk$ 上本质有限型交换代数, 则以下六条等价：

(1) R 是光滑代数.
(2) R 是正则代数.
(3) R 的整体维数有限.
(4) R^e 的整体维数有限.
(5) $\mathrm{p.dim}_{R^e}R < +\infty$.
(6) R 是同调光滑代数.

Proof. 在 [推论9] 中已说明 (1) 与 (2) 等价. 由 R 的是本质有限型交换代数可直接看到 (2) 与 (3) 等价. [命题11] 告诉我们 R^e 作为 R 上代数是本质有限型的, 故由 R 是 Krull 维数有限的交换 Noether 环知 R^e 具有有限的 Krull 维数. 因此 (4) 等价于 R^e 是正则代数. 于是 [引理12] 给出了 (1)⇒(4). (4)⇒(5)⇒(6) 是明显的. 接下来只需说明 (6)⇒(3): 此时 $\mathrm{p.dim}_{R^e} R < +\infty$, 故由 [引理10] 知 R 的整体维数有限. □

Remark 14. 论文写作时要用该结论可直接引 [WZ21, Lemma 1.5].

参考文献

[Lam12] Tsit-Yuen Lam. *Lectures on modules and rings*, volume 189. Springer Science & Business Media, 2012.

[Mat70] Hideyuki Matsumura. *Commutative algebra*, volume 120. WA Benjamin New York, 1970.

[MRS01] John C McConnell, James Christopher Robson, and Lance W Small. *Noncommutative noetherian rings*, volume 30. American Mathematical Soc., 2001.

[Sta23] The Stacks project authors. The stacks project. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2023.

[vDdB] R. van Dobben de Bruyn. Regular ring is smooth when the field is perfect. MathOverflow. URL:https://mathoverflow.net/q/438156 (version: 2023-01-09).

[Wei94] Charles A Weibel. *An introduction to homological algebra*. Number 38. Cambridge university press, 1994.

[WZ21] Quanshui Wu and Ruipeng Zhu. Nakayama automorphisms and modular derivations in filtered deformations. *Journal of Algebra*, 572:381–421, 2021.