Poisson 理想论初步

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 12 月 27 日

这份笔记用于记录 Poisson 代数的 Poisson 理想的概念与基本性质, 主要参考了 [Goo06] 和 [LWW21].

1 基本概念与性质

Poisson 结构是 Hamilton 经典力学中自然产生的结构, 任何辛流形的辛结构可通过 Hamilton 向量场诱导光滑函数环上的 Poisson 结构. 含幺交换环 K 上的交换代数 R 上如果有 K-双线性映射 $\{-,-\}: R\times R\to R$ 使得 $(R,\{-,-\})$ 是 K-Lie 代数且在每个分量上有导子性质, 则称 $(R,\{-,-\})$ 是 **Poisson 代数**, 这里的 K-双线性映射 $\{-,-\}: R\times R\to R$ 通常被称为 **Poisson 括号**. 如果 R 是光滑流形 $\mathcal{M}$ 的光滑函数环 $C^\infty(\mathcal{M})$ 或仿射簇 X, 那么称 R 上 Poisson 括号为 $\mathcal{M}$ 或 X 上的 **Poisson 结构**, 此时称 $(\mathcal{M},\{-,-\})$ 是 **Poisson 流形**, 称仿射簇 X 是 **Poisson 簇**. 下面是关于 Poisson 代数的一些基本概念.

Definition 1.1. 设 $(R,\{-,-\})$ 是含幺交换环 K 上 Poisson 代数, I 是 R 的理想.
(1) 称 I 是 **Poisson 理想**, 如果 $\{I,R\}\subseteq I$.
(2) 称 $\{a\in R|\{a,R\}=0\}$ 为 R 的 **Poisson 中心**, 记作 $Z_P(R)$, 其中元素称为 **Casimir 元**.
(3) 对每个 $a\in R$, 称 K-导子 $\{a,-\}: R\to R$ 是 a 决定的 **Hamilton 导子**.
(4) 称 I 是 **Poisson 素理想**, 如果对任何 Poisson 理想 A,B, $AB\subseteq I$ 蕴含 $A\subseteq I$ 或 $B\subseteq I$.

Remark 1.2. 任意一族 Poisson 理想的交或和仍为 Poisson 理想.

不难看出 Poisson 代数的 Poisson 中心既是子环也是 Poisson 理想. 特征零的域上的 Poisson 整区的 Poisson 中心会有整闭特性, 即 $Z_P(R)\subseteq R$ 是整闭扩张. 任取 $z\in Z_P(R)$, 设 z 在 $\Bbbk$ 上满足的最小多项式为 $x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$, 那么对任给 $b\in R$, 通过

$$\{b,\sum_{i=0}^n \alpha_i z^i\}=\sum_{i=0}^n \alpha_i(i-1)z^{i-1}\{b,z\}=0,$$

其中 $\alpha_n=1$, 由上述多项式的最小性可知 $\{b,z\}=0$, 因此 $z\in Z_P(R)$. 我们把刚刚的讨论总结为

Proposition 1.3. 设 $(R,\{-,-\})$ 是特征零的域 $\Bbbk$ 上的 Poisson 整区, 则 $Z_P(R)\subseteq R$ 是整闭扩张.

记含幺交换环 K 上 Poisson 代数 $(R,\{-,-\})$ 所有 Hamilton 导子构成的集合是 Δ, 那么对 R 的任何理想 I, 考虑 $\mathcal{P}(I)=\{a\in I|对任给\delta_1,...,\delta_n\in\Delta有\delta_1\delta_2\cdots\delta_n(a)\in I\}$, 易见 $\mathcal{P}(I)$ 是 I 所包含的 Poisson 理想且是 I 所包含的最大 Poisson 理想. 称 $\mathcal{P}(I)$ 是 R 的 **Poisson 核**. 称极大理想的 Poisson 核为 **Poisson 本原理想**. 事实上特征零的域上 Poisson 代数的任何素理想的 Poisson 核总是素理想.

Theorem 1.4. 设 $(R,\{-,-\})$ 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上的 Poisson 代数, 那么:
(1) 对任何素理想 P, $\mathcal{P}(P)$ 是 R 的素理想.
(2) 任何 Poisson 本原理想是素理想.
(3) 如果 P 是 Poisson 理想 I 上的极小素理想, 那么 P 是 Poisson 理想.
(4) 如果 R 是 Noether 的, 那么任何 Poisson 素理想是素理想.
(5) 如果 R 是交换仿射代数, 则任何 Poisson 素理想是一些 Poisson 本原理想之交.

Proof. 为叙述方便, 仍记 R 上 Hamilton 导子全体为 Δ.

(1) 为简化记号, 记 $\mathcal{P}(P)$ 为 Q. 设 $a,b\in R$ 满足 $ab\in Q$, 下证 a 与 b 中至少有一个在 Q 内.

Claim. 若 $\delta_1,...,\delta_p\in\Delta, m_1,...,m_p\in\mathbb{N}$ 使 $\delta_1^{m_1}\cdots\delta_p^{m_p}b\notin P$, 则 $\delta_1^{n_1}\cdots\delta_p^{n_p}a\in P,\forall n_1,...,n_p\in\mathbb{N}$.

如下赋予 $\mathbb{N}^p$ 一偏序 $\leq$: 对 $(i_1,...,i_p),(j_1,...,j_p)\in\mathbb{N}^p$, 如果 $i_1+\cdots+i_p<j_1+\cdots+j_p$, 那么 $(i_1,...,i_p)<(j_1,...,j_p)$; 如果 $i_1+\cdots+i_p=j_1+\cdots+j_p$, 通过字典序来定义 $(i_1,...,i_p)\leq(j_1,...,j_p)$. 则 $(\mathbb{N}^p,\leq)$ 良序. 下面通过对 $(\mathbb{N}^p,\leq)$ 作超限归纳证明断言. 先取在 $\mathbb{N}^p$ 中满足 $\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}b\notin P$ 的最小元 $(s_1,...,s_p)$. 对任给 $n_1,...,n_p\in\mathbb{N}$, 有

$$\delta_1^{n_1+s_1}\cdots\delta_p^{n_p+s_p}(ab)=\sum_{\substack{i_k+l_k=n_k+s_k\\1\leq k\leq p}}\alpha(i_1,l_1,...,i_p,l_p)\delta_1^{i_1}\delta_2^{i_2}\cdots\delta_p^{i_p}(a)\delta_1^{l_1}\delta_2^{l_2}\cdots\delta_p^{l_p}(b),$$

其中 $\alpha(i_1,l_1,...,i_p,l_p)\in\mathbb{Z}_{\geq1}$. 那么上式可整理为

$$\delta_1^{n_1+s_1}\cdots\delta_p^{n_p+s_p}(ab)=\delta_1^{n_1}\cdots\delta_p^{n_p}(a)\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}(b)+r,$$

这里 r 是一些形如 $\alpha(i_1,l_1,...,i_p,l_p)\delta_1^{i_1}\delta_2^{i_2}\cdots\delta_p^{i_p}(a)\delta_1^{l_1}\delta_2^{l_2}\cdots\delta_p^{l_p}(b)$ 的项的有限和, 其中 $(i_1,...,i_p)<(n_1,...,n_p)$ 或 $(l_1,...,l_p)<(s_1,...,s_p)$. 当 $(n_1,...,n_p)=(0,0,...,0)$ 时, 易见 $r\in P$, 故由 $ab\in Q$ 得 $a\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}(b)\in P$. 因此由 P 是素理想且 $\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}b\notin P$ 得到 $a\in P$(至此, 结论对 $(\mathbb{N}^p,\leq)$ 的最小元成立). 由归纳假设,

$$\delta_1^{i_1}\delta_2^{i_2}\cdots\delta_p^{i_p}(a)\in P,\forall(i_1,...,i_p)<(n_1,...,n_p).$$

从而利用 $ab\in Q$ 便知 $\alpha(n_1,s_1,...)\delta_1^{n_1}\cdots\delta_p^{n_p}(a)\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}(b)\in P$. 由 $\mathrm{char}\Bbbk=0$ 知 $\delta_1^{n_1}\cdots\delta_p^{n_p}(a)\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}(b)$ 也在 P 中. 再结合 $\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}b\notin P$ 得到 $\delta_1^{n_1}\cdots\delta_p^{n_p}(a)\in P$. 断言得证.

下面通过说明 $b\notin Q$ 蕴含 $a\in Q$ 来完成证明. 对 $\delta_1,...,\delta_p\in\Delta$, 要证 $\delta_1\cdots\delta_p(a)\in P$. 因为 $b\notin Q$, 故存在 $\delta_{p+1},...,\delta_t\in\Delta$ 使得 $\delta_1^0\cdots\delta_p^0\delta_{p+1}^1\cdots\delta_t^1(b)\notin P$. 应用断言知 $\delta_1^1\cdots\delta_p^1(a)=\delta_1^1\cdots\delta_p^1\delta_{p+1}^0\cdots\delta_t^0(a)\in P$.

(2) 和 (3) 由 (1) 立即得到. 下证 (4). 设 R 是 Noether 环且 P 是 Poisson 素理想, 那么存在 P 上极小素理想 $Q_1,...,Q_m$ 使得 $P\supseteq Q_1\cdots Q_m$. 由 (3) 知每个 Q_i 都是 Poisson 理想, 所以 P 就是某个 Q_i.

(5) 在 (4) 中已经说明 Noether 的 Poisson 代数每 Poisson 素理想是素理想. 因为域上交换仿射代数是 Jacobson 环, 所以任何素理想是一些极大理想的交, 设 Poisson 素理想 $P=\bigcap\limits_{i\in I}Q_i$, 其中 Q_i 是极大理想. 那么

$$P=\bigcap_{i\in I}\mathcal{P}(Q_i).$$

□

Remark 1.5. 如果 $(R, \{-,-\})$ 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上 Noether 的 Poisson 代数, 那么上述定理表明所有的 Poisson 素理想构成的集合是 Spec$R$, 赋之以子空间拓扑得到的拓扑空间被称为 **Poisson 素谱**, 记作 P.Spec$R$. 如果 $(R, \{-,-\})$ 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上的 Poisson 代数, 那么所有 Poisson 本原理想构成的 Spec$R$ 的子集赋予素谱的子空间拓扑得到的拓扑空间被称为 R 的 **Poisson 本原素谱**, 记作 P.Prim$R$.

Corollary 1.6. 设 $(R, \{-,-\})$ 是特征零的域 $\Bbbk$ 上 Poisson 代数, 那么 R 的任何极小素理想都是 Poisson 理想. 特别地, 如果 R 进一步是 Noether 环, 那么 Spec$R$ 作为 Noether 空间的不可约分支分解 $V(P_1) \cup V(P_2) \cup \cdots \cup V(P_r)$, 每个分支对应的商环 R/P_i 均为 Poisson 代数.

Corollary 1.7. 设 $(R, \{-,-\})$ 是特征零的域 $\Bbbk$ 上 Poisson 代数, 那么任何 Poisson 理想的根理想仍 Poisson.

Proof. 设 I 是 R 的 Poisson 理想, 那么 I 上极小素理想均为 Poisson 理想. □

设 $(R, \{-,-\})$ 是 Poisson 代数, 对 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \text{maxSpec}R$, 定义 $\mathfrak{m} \sim \mathfrak{n}$ 当且仅当 $\mathcal{P}(\mathfrak{m}) = \mathcal{P}(\mathfrak{n})$, 即这两个极大理想具有相同的 Poisson 核. 称 $\mathfrak{m} \in \text{maxSpec}R$ 在上述等价关系下所在的等价类 $\mathscr{C}(\mathfrak{m})$ 为 $\mathfrak{m}$ 的**辛核**. 如果这时基域 $\Bbbk$ 的特征是零, 那么可以将极大谱 maxSpec$R$ 关于辛核的分解视作 maxSpec$R$ 关于

$$\pi_m : \text{maxSpec}R \to \text{P.Prim}R, \mathfrak{m} \mapsto \mathcal{P}(\mathfrak{m})$$

的非空纤维的分解. 根据 Poisson 本原素谱的定义, 易见 π_m 是满射. 下面说明 π_m 是连续映射. 任取 P.Prim$R$ 的非空闭子集 $W = V(I) \cap \text{P.Prim}R$, 其中 I 是 R 的理想, 我们总可不妨设 I 是 R 的 Poisson 理想 (否则用 $V(I) \cap \text{P.Prim}R$ 中所有 Poisson 本原理想之交替换 I), 那么由下式得到 π_m 是连续满射:

$$\pi_m^{-1}(W) = \{\mathfrak{m} \in \text{maxSpec}R | \mathcal{P}(\mathfrak{m}) \supseteq I\} = \{\mathfrak{m} \in \text{maxSpec}R | \mathfrak{m} \supseteq I\} = V(I) \cap \text{maxSpec}R.$$

参考文献

[BLSM17] Jason Bell, Stéphane Launois, Omar León Sánchez, and Rahim Moosa. Poisson algebras via model theory and differential-algebraic geometry. *Journal of the European Mathematical Society*, 19(7):2019–2049, 2017.

[BWY19] Jason P Bell, Xingting Wang, and Daniel Yee. The dixmier-moeglin equivalence, morita equivalence, and homeomorphism of spectra. *Journal of Algebra*, 534:228–244, 2019.

[GL11] Kenneth Ralph Goodearl and Stephane Launois. The dixmier-moeglin equivalence and a gel'fand-kirillov problem for poisson polynomial algebras. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 139(1):1–39, 2011.

[Goo06] Kenneth R Goodearl. A dixmier-moeglin equivalence for poisson algebras with torus actions. *Contemporary Mathematics*, 419:131, 2006.

[LWW21] Juan Luo, Xingting Wang, and Quanshui Wu. Poisson dixmier-moeglin equivalence from a topological point of view. *Israel Journal of Mathematics*, 243:103–139, 2021.