Lie 代数初步

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2025 年 12 月 1 日

这是我学习 (特征零的代数闭域上) 有限维半单 Lie 代数分类理论的笔记, 主要参考文献是 [Hum72]. 由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎指出, 谢谢.

目录

1 基本概念

本章介绍 Lie 代数的经典例子和相关基本概念, 包含 Lie 代数的幂零性、可解性、半单性、表示与泛包络代数. 类似群论场景, 交换 Lie 代数是特殊的幂零 Lie 代数, 幂零 Lie 代数一定可解 (反之不然). 类似环论场景, 也有单 Lie 代数的概念, 但是单 Lie 代数除了要求没有非平凡 Lie 理想外, 也排除其上 Lie 括号是平凡的情况. 在结合代数场景, 与有限维半单代数 (更一般地, Artin 半单环) 总是有限多个有限维单代数 (Artin 单环) 的直和类似, 我们将看到, (特征零的代数闭域上) 有限维半单 Lie 代数就是一些单 Lie 代数的直和 (见 [定理1.111]), 并且该直和分解在不计次序意义下唯一. 所以研究有限维半单 Lie 代数的分类可归结为有限维单 Lie 代数的分类, 在下一章会看到 (特征零的代数闭域上非零) 有限维半单 Lie 代数诱导某个有限维实内积空间中具有某种对称性的有限子集 (根系, 抽象根系的定义见 [定义2.47]), 该子集可唯一决定某种有限图 (Dynkin 图, 允许有多重边并且顶点间的边可能是有向的). 下一章的主要目标就是证明每个 (保持前面的假定, 特征零的代数闭域上非零) 有限维半单 Lie 代数总能够唯一对应某个 Dynkin 图, 并且半单 Lie 代数的单性等价于对应的 Dynkin 图是连通的. 更进一步, 任意两个非零有限维半单 Lie 代数是同构的当且仅当它们对应相同的 Dynkin 图 (在同构意义下, 但这里不区分同构的图). 因此 Dynkin 图可分类有限维半单 Lie 代数. 更进一步, Serre 发现任何根系的 Dynkin 图都可以由某个非零有限维半单 Lie 代数诱导, 所以非零有限维半单 Lie 代数同构类与所有 Dynkin 图间有一一对应, 即 Dynkin 图可完全分类有限维半单 Lie 代数, 连通 Dynkin 图可完全分类有限维单 Lie 代数.

在有限维 Lie 代数场景, 还有一个重要的概念是 Killing 型 (见 [定义1.94]), 与群表示论中特征标的概念一样, 它的定义来自 (有限维线性空间上线性变换的) 迹. 在有限维结合代数场景 (更一般地, Cayley-Hamilton 代数, 例如见 [DCPRR05]), 迹映射 (有限维代数任何元素在自身上的左乘变换视作线性变换后便可取迹) 的非退化性能够反映原有代数的半单性 (相应地, 半素性). 与之类似地, 在非结合代数场景, 我们会看到有限维 Lie 代数的半单性等价于其上 Killing 型的非退化性. 接着, 本章我们再介绍 Lie 代数的表示的基本概念和性质, 类似于群表示的场景, 有不可约性、完全可约性的概念. 我们也介绍一些从已有表示出发得到新表示的经典构造 (例如, 对偶表示和表示的张量积). 类似于群表示论场景, 我们能够通过 Lie 代数在表示空间上的作用读取其上丰富的结构信息 (在下一章我们会深入剖析特殊线性 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$, 即域 $\Bbbk$ 上迹为零的二阶矩阵全体关于换位子构成的 Lie 代数, 的表示的结构, 这在有限维半单 Lie 代数分类理论中扮演重要角色).

在本章最后我们介绍 Lie 代数的泛包络代数的相关基本性质和应用, 包含 Poincaré–Birkhoff–Witt 定理 (以下简称 PBW 定理) 以及自由 Lie 代数的构造. Lie 代数的包络代数是结合代数, 它使我们能够用结合代数表示论去研究非结合代数表示论——Lie 代数的表示范畴与其包络代数的表示范畴有自然的范畴同构. 我们将应用泛包络代数给出自由 Lie 代数存在性的证明, 自由 Lie 代数将应用于 Serre 定理, 即任何根系的 Dynkin 图可由某个有限维半单 Lie 代数实现, 的证明. PBW 定理使我们能够从 (域上)Lie 代数作为线性空间的基出发给出其泛包络代数的基 (相应的基也被称为 PBW 基), 这为我们认识泛包络代数的结构提供了许多便利, 例如由 PBW 基容易验证非零 Lie 代数的泛包络代数不是 Artin 的. 在非交换代数领域, 受 PBW 定理启发, 人们引入 PBW 形变的概念, 考虑这种形变也能够使非交换代数与代数几何、数学物理等领域建立更多的联系. 例如, Etingof 与 Ginzburg 在 [EG02] 中考虑了适当条件下有限维复辛空间关于其辛群的有限子群的斜群代数的 PBW 形变, 相应的代数被称为辛反射代数, 它与辛奇点解消以及 Calogero-Moser 空间有密切的联系. 我们也介绍 Lie-Rinehart 代数 (见 [例1.117], 这是 Lie algebroid 的代数类似物, 可视作 Lie 代数、交换代数的导子模以及 Poisson 代数的 Kähler 微分模的统一推广) 的泛包络代数的构造 (见 [定理1.160]), 它推广了 Lie 代数的泛包络代数, 光滑流形的微分算子代数以及 Lie 代数关于交换代数上 Lie 表示的微分算子代数.

1.1 定义与基本例子

本节主要介绍 Lie 代数的定义以及相关基本概念. 通常的文献中考虑 Lie 代数往往是对域上有限维线性空间定义的, 考虑到 Lie 代数泛包络代数的构造 (见 [定理1.142]) 对交换环上的模仍成立, 这里使用的定义更一般些. 但大部分 Lie 代数的主要理论依然在域上发展 (甚至需要在特征为零的代数闭域场景).

Definition 1.1. 设 L 是含幺交换环 K 上的模, 若有 K-双线性映射 $[-,-]: L\times L\to L$ 使得
(1) 对任给 $x\in L$ 有 $[x,x]=0$, 即 $(L,[-,-])$ 满足交错性;
(2) 对任给 $x,y,z\in L$ 有 $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$, 即 $(L,[-,-])$ 满足 **Jacobi 恒等式**,
则称 $(L,[-,-])$ 是 K-**Lie 代数**. 其中 $[-,-]$ 被称为 L 上 **Lie 括号**或 **Lie 积**.

Remark 1.2. 若 Lie 代数 $(L,[-,-])$ 上的 Lie 括号明确, 在不引起混淆前提下常简记为 L(在大部分文献中, Lie 代数的常用记号是 $\mathfrak{g}$). Lie 理论主要包括 Lie 代数理论和 Lie 群理论, Lie 代数最早由 Sophus Lie(挪威, 1842-1899) 研究无穷小变换时引入. Lie 代数结构是微分几何 (以及代数几何) 中自然出现的——光滑流形上所有光滑向量场构成的线性空间上便有自然的 Lie 代数结构 (类似地, 仿射簇上所有多项式向量场构成的模也有自然的 Lie 代数结构). 这份笔记主要讨论纯代数性质, 因此涉及几何的例子也会限制在 (仿射) 代数几何.

Remark 1.3. 有限维实 Lie 代数都可以在 J. Pradines 在 [Pra67] 中引入的 Lie algebroid 框架下研究, 即将每个有限维实 Lie 代数视作单点流形上的光滑向量丛. Lie algebroid 在代数环境下的对应是 Lie-Rinehart 代数, 见 [Rin63](这里的命名来自 J. Huebschmann[Hue90]), 定义可见 [例1.117].

Definition 1.4. 如果 K-Lie 代数 $(L,[-,-])$ 满足 $[x,y]=0,\forall x,y\in L$, 称 L 是**交换的**.

现设 K-Lie 代数 $(L,[-,-])$ 满足 L 是有限秩的自由 K-模, 设 L 有 K-基 $\{x_1,...,x_n\}$, 那么对每个 $[x_i,x_j]$, 其关于 $\{x_1,...,x_n\}$ 的表示系数完全决定了 L 上 Lie 代数的结构. 故可写作

$$[x_i,x_j]=\sum_{k=1}^{n}a_{ij}^k x_k, a_{ij}^k\in K,$$

称上式中每个 a_{ij}^k 为 L 的**结构常数**. 于是可通过 Lie 代数的定义导出结构常数满足的约束, 例如 $a_{ii}^k=0$.

事实上从任何 (结合) 代数出发都能自然地构造出 Lie 代数, 这也是最基本的 Lie 代数构造.

Example 1.5. 设 A 是含幺交换环 K 上代数, 通过定义 $[a,b]=ab-ba$ 使得 $(A,[-,-])$ 成为 K-Lie 代数, 称之为 A 的**导出 Lie 代数**, 通常记作 A^-. 若 A 是域 $\Bbbk$ 上 n 维线性空间 V 的自同态代数 $\mathrm{End}_{\Bbbk}V$, 这时将其导出 Lie 代数称为 n 阶**一般线性 Lie 代数**, 记作 $\mathfrak{gl}(V)$. 若把 $\mathrm{End}_{\Bbbk}V$ 与 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 视作等同, 即这时在矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 上赋予导出 Lie 代数结果, 将此 Lie 代数记作 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. 易见 $\dim_{\Bbbk}\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)=n^2$.

Definition 1.6. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, 称 L 的子模 J 为 **Lie 子代数**, 若 $[x,y]\in J,\forall x,y\in J$.

Remark 1.7. 不难看出 Lie 代数 L 的 Lie 子代数的 Lie 子代数依然是 L 的 Lie 子代数.

Notation. 设 K-Lie 代数 $(L,[-,-])$ 有非空子集 X,Y. 记 $\{[x,y]\in L|x\in X,y\in Y\}$ 生成的子模为 $[X,Y]$.

Example 1.8. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, S 是 L 的子集, 称 $C_L(S)=\{x\in L|[x,S]=0\}$ 为 S 在 L 中的**中心化子**. 容易验证 $C_L(S)$ 是 L 的 Lie 子代数. 当 $S=\varnothing$ 时, $C_L(S)=L$.

类似于群的导群/换位子群, 可在 Lie 代数场景引入类似概念. 任何 Lie 代数 L 总有 Lie 子代数 $[L, L]$, 称为 L 的**导 Lie 代数**. 引入记号 $L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L, L]$. 递归地记 $L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}], i \geq 2$, 称之为 Lie 代数 L 的 i **次导 Lie 代数** (对正整数 i 容易归纳地证明 $L^{(i)}$ 是 L 的 Lie 子代数).

下面介绍几类重要且基本的矩阵 Lie 代数 (见 [例1.9], [例1.11], [例1.13] 和 [例1.14]), 称为**古典 Lie 代数**.

Example 1.9. 设 $n \geq 2$. 考虑域 $\mathbb{k}$ 上一般线性 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$的子空间 $\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k}) | \mathrm{tr}(A) = 0\}$, 易验证该子空间是 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ 的 Lie 子代数且维数是 $n^2 - 1$, 称为 n 阶**特殊线性 Lie 代数**, 记作 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$. 易见 $\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}) = n^2 - 1$. 如果记 E_{ij} 是第 (i, j) 位置为 1, 其余位置元素为零的基础矩阵, 那么 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ 作为 $\mathbb{k}$-线性空间有基

$$\{E_{11} - E_{22}, E_{22} - E_{33}, ..., E_{n-1,n-1} - E_{nn}, E_{ij}(1 \leq i \neq j \leq n)\}.$$

Remark 1.10. 类似地, 对域 $\mathbb{k}$ 上有限维线性空间 V, 定义所有迹为零的 V 上线性变换构成的线性空间 $\mathfrak{sl}(V)$. 易验证 $\mathfrak{sl}(V)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数. 称为 (V 决定的) **特殊线性 Lie 代数**.

Example 1.11. 设 n 是正整数, V 是域 $\mathbb{k}$ 上 $2n$ 维线性空间并固定基 $\{v_1, ..., v_{2n}\}$. $f : V \times V \to \mathbb{k}$ 是由矩阵

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

关于给定基定义出的 V 上 (非退化) 反对称双线性型. 即若设 $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{2n} v_{2n}, w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{2n} v_{2n}$, 这里 $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{k}$, 便有 $f(v, w) = (\alpha_1, ..., \alpha_{2n}) S (\beta_1, ..., \beta_{2n})^T$. 因为 S 是反对称阵, 所以 $f(v, w) = -f(w, v), \forall v, w \in V$, 即 f 确实是 V 上反对称双线性型. 并且 S 的主对角线均为零保证了 $f(v, v) = 0, \forall v \in V$. 定义

$$\mathfrak{sp}(V) = \{\varphi \in \mathfrak{gl}(V) | f(\varphi(v), w) = -f(v, \varphi(w)), \forall v, w \in V\}.$$

根据 f 的双线性性不难看到 $\mathfrak{sp}(V)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 $\mathbb{k}$-子空间. 可直接验证 $\mathfrak{sp}(V)$ 关于取换位子封闭, 即 $\mathfrak{sp}(V)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数, 称为 (V 决定的) **辛 Lie 代数**. 下面我们来计算 $\mathfrak{sp}(V)$ 的线性维数. 利用给定的基 $\{v_1, ..., v_{2n}\}$ 可将 $\mathfrak{gl}(V)$ 与 $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k})$ 视作等同. 因此我们能够把 $\mathfrak{sp}(V)$ 中的线性变换 φ 都对应到 $\mathbb{k}$ 上 $2n$ 阶矩阵. 设 φ 对应的 $2n$ 阶矩阵为 X, 我们把 X 作下述分块

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

其中每个 X_{ij} 是 n 阶矩阵. 那么通过直接计算知 $\varphi \in \mathfrak{sp}(V)$ 等价于 $X^T S = -SX$. 即有

$$\begin{pmatrix} -X_{21}^T & X_{11}^T \\ -X_{22}^T & X_{12}^T \end{pmatrix} = X^T S = -SX = \begin{pmatrix} -X_{21} & -X_{22} \\ X_{11} & X_{12} \end{pmatrix}.$$

于是 $\varphi \in \mathfrak{sp}(V)$ 等价于 $X_{11}^T = -X_{22}, X_{12}^T = X_{12}, X_{21}^T = X_{21}$. 于是由 n 阶对称阵全体的线性维数是 $n(n+1)/2$ 可直接算得 $\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{sp}(V) = 2n^2 + n$. 我们再指出 $X_{11}^T = -X_{22}$ 表明 $\mathrm{tr}(X) = 0$. 所以 $\mathfrak{sp}(V) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$. 当我们将 $\mathfrak{gl}(V)$ 与 $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{k})$ 视作等同时, 即这时将 $\mathfrak{sp}(V)$ 视作 $\mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{k})$ 的子空间时, 记 $\mathfrak{sp}(V)$ 为 $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$. 我们有

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{k}) \middle| X_{11}^T = -X_{22}, X_{12}^T = X_{12}, X_{21}^T = X_{21}, \text{ 其中} X_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k}) \right\}.$$

也可以将 $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$ 更简洁地表示为 $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) = \{X \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{k}) | SX + X^T S = 0\}$.

Remark 1.12. $\mathfrak{sp}(V)$ 是通过固定 V 的一个基来定义的, 引入 Lie 代数同构概念 (见 [定义1.32]) 后易知 $\mathfrak{sp}(V)$ 在同构意义下不依赖于基的选取. 并且有同构概念后, 对 $2n$ 维 $\Bbbk$-线性空间 V, 有 $\mathfrak{sp}_{2n}(\Bbbk)\cong\mathfrak{sp}(V)$.

Example 1.13. 设域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk\neq 2$, n 是正整数, V 是 $\Bbbk$ 上 $2n+1$ 维线性空间. 并固定 V 的基 $\{v_1,...,v_{2n+1}\}$. 定义 $f:V\times V\to\Bbbk$ 是由矩阵

$$S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_n\\0&I_n&0\end{pmatrix}$$

关于上述固定基定义出的 (非退化) 对称双线性型. 定义

$$\mathfrak{o}(V)=\{\varphi\in\mathfrak{gl}(V)|f(\varphi(v),w)=-f(v,\varphi(w)),\forall v,w\in V\}.$$

易验证 $\mathfrak{o}(V)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数, 称为 (V 决定的) **奇数维正交 Lie 代数**. 下面来计算 $\mathfrak{o}(V)$ 的线性维数. 类似于对辛 Lie 代数的讨论, 首先将 $\mathfrak{o}(V)$ 中元素通过固定的基视作 $2n+1$ 阶矩阵. 设 $\varphi\in\mathfrak{o}(V)$ 在固定基下对应的矩阵为 X, 对 X 作与 S 相同的分块

$$X=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}&X_{13}\\X_{21}&X_{22}&X_{23}\\X_{31}&X_{32}&X_{33}\end{pmatrix},$$

其中 $X_{11}\in\Bbbk, X_{12},X_{13}\in\Bbbk^{1\times n}, X_{21},X_{31}\in\Bbbk^{n\times 1}, X_{22},X_{23},X_{32},X_{33}\in\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 与辛 Lie 代数的情形一样容易得到 $\varphi\in\mathfrak{o}(V)$ 当且仅当 $X^TS=-SX$. 该等式等价于

$$X_{11}=0,X_{12}^T=-X_{31},X_{13}^T=-X_{21},X_{23}^T=-X_{23},X_{32}^T=-X_{32},X_{22}^T=-X_{33}.$$

上式中 $X_{11}=0$ 用到了 $\mathrm{char}\Bbbk\neq 2$. 由此结合 $\Bbbk$ 上 n 阶反对称阵全体的线性维数是 $n(n-1)/2$ 易算得 $\dim_{\Bbbk}\mathfrak{o}(V)=2n^2+n$. 并注意 $\mathfrak{o}(V)\subseteq\mathfrak{sl}(V)$. 当我们将 $\mathfrak{o}(V)$ 视作 $\mathfrak{gl}_{2n+1}(\Bbbk)$ 子空间时, 记其为 $\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk)$. 在此记号下, 我们有 $\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk)=\{X\in\mathrm{M}_{2n+1}(\Bbbk)|SX+X^TS=0\}$.

在 [例1.13] 中介绍了奇数维正交 Lie 代数, 类似可定义偶数维情形.

Example 1.14. 设域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk\neq 2$, n 是正整数, V 是 $2n$ 维线性空间并固定一个基. 考虑矩阵

$$S=\begin{pmatrix}0&I_n\\I_n&0\end{pmatrix},$$

那么可定义由 S 与给定基诱导的非退化对称双线性型 $f:V\times V\to\Bbbk$. 定义

$$\mathfrak{o}(V)=\{\varphi\in\mathfrak{gl}(V)|f(\varphi(v),w)=-f(v,\varphi(w)),\forall v,w\in V\}.$$

易知 $\mathfrak{o}(V)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数, 称为 (V 决定的) **偶数维正交 Lie 代数**. 类似于 [例1.13] 中的讨论, 可知当 $\varphi\in\mathfrak{o}(V)$ 关于给定基对应的矩阵 X 按照 S 作分块后, 记作

$$X=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix},$$

则 $\varphi\in\mathfrak{o}(V)$ 当且仅当 $X_{11}^T=-X_{22},X_{12}^T=-X_{12},X_{21}^T=-X_{21}$. 由此易得 $\dim_{\Bbbk}\mathfrak{o}(V)=2n^2-n$. 将 $\mathfrak{o}(V)$ 中元素等同于矩阵时, 记相应 Lie 代数为 $\mathfrak{o}_{2n}(\Bbbk)$. 我们有 $\mathfrak{o}_{2n}(\Bbbk)=\{X\in\mathrm{M}_{2n}(\Bbbk)|SX+X^TS=0\}$.

Remark 1.15. 易见 $\mathfrak{o}_2(\Bbbk)$ 是 1 维 Lie 代数, 其 Lie 括号平凡.

因为上三角阵的乘积依然是上三角阵, 严格上三角阵的乘积依然是严格上三角阵. 由此易知

Example 1.16. 设 $\Bbbk$ 是域, n 是正整数. 记 $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ 是 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 中所有上三角阵构成的集合, $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ 是 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 中所有严格上三角阵构成的集合, 那么 $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ 是 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 的 Lie 子代数. $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ 是 $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ 的 Lie 子代数. 再记 $\mathfrak{d}_n(\Bbbk)$ 是 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 中所有对角阵构成的集合, 那么 $\mathfrak{d}_n(\Bbbk)$ 明显是 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 的 Lie 子代数.

总结一下, 固定域 $\Bbbk$ 和正整数 n, 我们已经定义了 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 的 Lie 子代数 $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk), \mathfrak{t}_n(\Bbbk), \mathfrak{n}_n(\Bbbk), \mathfrak{d}_n(\Bbbk)$. $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathfrak{k})$ 的 Lie 子代数 $\mathfrak{o}_{2n}(\Bbbk)$(当 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$ 时) 以及 $\mathfrak{gl}_{2n+1}(\Bbbk)$ 的 Lie 子代数 $\mathfrak{sp}_{2n+1}(\Bbbk)$ 和 $\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk)$(当 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$ 时).

Example 1.17. 设 A 是 K-代数, 则 A 的自同态环 $L = \mathrm{End}_K A$ 上有导出 Lie 代数结构, 考虑 A 上 K-线性导子全体 $\mathrm{Der}_K A = \{\delta \in \mathrm{End}_K A | \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \forall a, b \in A\}$, 则 $\mathrm{Der}_K A$ 是 L 的 Lie 子代数.

Remark 1.18. 对于非结合代数, 可类似考虑导子的概念. 例如对 K-Lie 代数 $(L, [-,-])$, 称 $D \in \mathrm{End}_K L$ 是 K-导子, 如果 $D([a,b]) = [D(a), b] + [a, D(b)], \forall a, b \in L$. 仍记 $\mathrm{End}_K L$ 的 K-导子全体为 $\mathrm{Der}_K L$, 它关于换位子运算构成 Lie 代数, 我们将 $(\mathrm{Der}_K L, [-,-])$ 称为 L 上**导子 Lie 代数**. 对每个 $x \in L$, 易见 K-模自同态 $[x,-] : L \to L, y \mapsto [x,y]$ 是 L 上 K-导子, 称之为 x 决定的**伴随自同态**, 记作 ad_x. 通常也将伴随自同态称为 L 上**内导子**, L 上不是内导子的导子通常被称为**外导子**.

对 K-非结合代数 A, 记其上运算为 $\cdot : A \times A \to A, (a,b) \mapsto ab$. [注记1.18] 中指出这时也可以考虑 A 上 K-导子: K-模同态 $D : A \to A$ 被称为 K-导子, 如果 $D(ab) = aD(b) + D(a)b, \forall a, b \in A$. 现在考虑代数闭域 $\Bbbk$ 上有限维非结合代数 $A \neq 0$, 那么任何 A 上 $\Bbbk$-导子 D 作为 $\Bbbk$-线性空间上线性变换有 Jordan-Chevalley 分解: 存在 A 上可对角化的线性变换 D_s 和幂零变换 D_n 使得 $D = D_s + D_n$ 且 $D_s D_n = D_n D_s$. 现在我们说明

Lemma 1.19. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, A 是 $\Bbbk$-非结合代数, D 是 A 上 $\Bbbk$-导子 D, 并设有 Jordan-Chevalley 分解 $D = D_s + D_n$, 其中 D_s 是可对角化线性变换, D_n 是幂零线性变换. 那么 D_s, D_n 也是 A 上 $\Bbbk$-导子.

Proof. 设 D 的特征多项式 $f(x)$ 在 $\Bbbk$ 上的标准分解为 $f(x) = (x-\lambda_1)^{s_1} \cdots (x-\lambda_m)^{s_m}$, 其中 $\lambda_j \in \Bbbk, s_j \geq 1$, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ 两两互异. 那么 $A = \mathrm{Ker}(D - \lambda_1 \mathrm{id})^{s_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(D - \lambda_m \mathrm{id})^{s_m}$. 记 $A_{\lambda_j} = \mathrm{Ker}(D - \lambda_j \mathrm{id})^{s_j}$, 那么 D_s 在 A_{λ_j} 上的限制变换的特征值只有 λ_j. 考虑到 D_s 在 A_{λ_j} 上的限制变换依然可对角化, 因此 $D_s(x) = \lambda_j x, \forall x \in A_{\lambda_j}$. 下证任何 $a \in A_{\lambda_i}, b \in A_{\lambda_j}$ 满足 $D_s(ab) = (\lambda_i + \lambda_j)(ab)$. 一旦证明该断言, 利用 $D_s(a)b = \lambda_i ab, aD_s(b) = \lambda_j ab$ 以及 $A = A_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus A_{\lambda_m}$ 立即得到 D_s 是 A 上 $\Bbbk$-导子, 于是 $D_s = D - D_n$ 也是 $\Bbbk$-导子.

要看到 $D_s(ab) = (\lambda_i + \lambda_j)(ab), \forall a \in A_{\lambda_i}, b \in A_{\lambda_j}$, 可通过对正整数 n 作归纳证明

$$(D - (\lambda_i + \lambda_j)\mathrm{id})^n (ab) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i ((D - \lambda_i \mathrm{id})^{n-i}(a))((D - \lambda_j \mathrm{id})^i (b)).$$

于是通过选取 n 充分大得到 $(D - (\lambda_i + \lambda_j)\mathrm{id})^n (ab) = 0$, 这时 $ab \in \mathrm{Ker}(D - (\lambda_i + \lambda_j)\mathrm{id})^n$, 同样 D 在该子空间上的限制特征值只有 $\lambda_i + \lambda_j$, 结合 D_s 可对角化得到 D_s 在该子空间上的限制变换就是 $\lambda_i + \lambda_j$ 的数乘, 所以 $D_s(ab) = (\lambda_i + \lambda_j)(ab)$, 断言得证. □

Definition 1.20. 设 $(L, [-,-])$ 是 Lie 代数, 称 $Z(L) = \{x \in L | [L, x] = 0\}$ 为 L 的**中心**. 如果 Lie 代数的中心是零模, 则称该 Lie 代数是**交换的**. (结合) 代数 A 的导出 Lie 代数的交换性等价于 A 本身的交换性.

下面介绍一个无限维 Lie 代数的基本例子.

Example 1.21. 考虑域 $\Bbbk$ 上多项式代数 $\mathcal{O}(\Bbbk^2)=\Bbbk[x,y]$, 它是仿射平面 $\Bbbk^2$ 的正则函数环, 其上有

$$\{-,-\}:\mathcal{O}(\Bbbk^2)\times\mathcal{O}(\Bbbk^2)\to\mathcal{O}(\Bbbk^2),(f,g)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y},$$

易验证 $(\mathcal{O}(\Bbbk^2),\{-,-\})$ 是 Lie 代数. 如果 $\mathrm{char}\Bbbk=0$, 可直接验证 $Z(\mathcal{O}(\Bbbk^2))=\Bbbk$.

Example 1.22. 设 $\Bbbk$ 是域, n 阶对角阵构成的 Lie 代数 $\mathfrak{d}_n(\Bbbk)$ 是交换 Lie 代数.

1.2 Lie 理想与同态

类似于群的正规子群、环的理想, 对 Lie 代数也可以平行地发展理想理论. 以下固定含幺交换环 K.

Definition 1.23. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, 若 L 的 K-子模 I 满足 $[L,I]\subseteq I$, 则称 I 是 L 的 **Lie 理想**.

Remark 1.24. 根据定义, Lie 代数 L 的 Lie 理想自然是 L 的 Lie 子代数.

Remark 1.25. 从定义可看出 Lie 代数的中心总是 Lie 理想, 任何 Lie 代数的零子模和自身均为 Lie 理想. 如果 K-Lie 代数 L 有 Lie 理想 I, 那么 L 上 Lie 代数结构可自然地诱导商模 L/I 上 Lie 代数结构.

Example 1.26. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, 在 [注记1.18] 中我们看到每个 $x\in L$ 对应 L 上内导子 $\mathrm{ad}_x=[x,-]:L\to L$. 对任何 $D\in\mathrm{Der}_K L$, 即 D 满足 $D([x,y])=[D(x),y]+[x,D(y)],\forall x,y\in L$, 我们有

$$[D,\mathrm{ad}_x](y)=[D(x),y]=\mathrm{ad}_{D(x)}(y).$$

这说明 $\mathrm{ad}(L)=\{\mathrm{ad}_x|x\in L\}$ 是 $\mathrm{Der}_K L$ 的 Lie 理想.

Lemma 1.27. 对 Lie 代数 L 的任意一族 Lie 理想 $\{L_i\}_{i\in I}$, $\sum\limits_{i\in I}L_i$ 与 $\bigcap\limits_{i\in I}L_i$ 均为 Lie 理想.

Example 1.28. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, I 为 L 的 Lie 理想. 在商模 L/I 上定义 $[-,-]_q:L/I\times L/I\to L/I,(x+I,y+I)\mapsto[x,y]+I$, 那么 $(L/I,[-,-]_q)$ 也是 Lie 代数, 称为 L 关于 Lie 理想 I 的**商 Lie 代数**.

Remark 1.29. 设 I 是 L 的 Lie 理想, 那么归纳地易证 $(L/I)^{(k)}=(L^{(k)}+I)/I,\forall k\geq 0$.

Example 1.30. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, 在 [例1.26] 中看到 $\mathrm{ad}(L)$ 是 L 上导子 Lie 代数的 Lie 理想. 由此得到商 Lie 代数 $\mathrm{Der}_K L/\mathrm{ad}(L)$, 称为 L 上**外导子 Lie 代数**.

Example 1.31. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, 归纳地易证 i 次导 Lie 代数 $L^{(i)}$ 是 L 的 Lie 理想.

Definition 1.32. 若 K-Lie 代数 $(L_1,[-,-]_1),(L_2,[-,-]_2)$ 间 K-模同态 $f:L_1\to L_2$ 满足

$$f([a,b]_1)=[f(a),f(b)]_2,\forall a,b\in L_1,$$

则称 f 是 **Lie 代数同态**. 若 Lie 代数同态 $f:L_1\to L_2$ 是可逆映射, 则称 f 为 **Lie 代数同构**. 此时也称 Lie 代数 L_1 与 L_2 是**同构的**, 记作 $L_1\cong L_2$. 所有 K-Lie 代数及其同态构成的范畴 K-**Lie** 称为 K-**Lie 代数范畴**.

Remark 1.33. 易见 Lie 代数同态 $f:L_1\to L_2$ 的核总是 L_1 的 Lie 理想, 像总是 L_2 的 Lie 子代数.

Remark 1.34. 因为 Lie 代数同态 $f : L_1 \to L_2$ 的核是 L_1 的子模, 所以 f 是单射当且仅当 $\mathrm{Ker} f = 0$.

Example 1.35. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, 那么有 Lie 代数同构 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \cong \mathfrak{o}_3(\Bbbk) \cong \mathfrak{sp}_2(\Bbbk)$.

Proof. 根据 [例1.11], $\mathfrak{sp}_2(\Bbbk) = \mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. 根据 [例1.13], 有

$$\mathfrak{o}_3(\Bbbk) = \{\begin{pmatrix} 0 & x & -y \\ y & z & 0 \\ -x & 0 & -z \end{pmatrix} | x, y, z \in \Bbbk\},$$

现在定义 $X = 2^{1/2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = 2^{1/2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H = -2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 那么 $\{X, Y, H\}$ 是 $\mathfrak{o}_3(\Bbbk)$ 的 $\Bbbk$-基并且可直接计算验证 $[X, Y] = H, [H, X] = 2X.[H, Y] = -2Y$. 在 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 中, 命

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么 $\{X', Y', H'\}$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的 $\Bbbk$-基并且可直接计算验证 $[X', Y'] = H', [H', X'] = 2X'.[H', Y'] = -2Y'$. □

Example 1.36. 设 $(L, [-, -])$ 是 K-Lie 代数, 在 [例1.26] 中我们看到 $\mathrm{ad}(L) = \{\mathrm{ad}_x | x \in L\}$ 关于换位子也是 Lie 代数. 命 $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{ad}(L), x \mapsto \mathrm{ad}_x$. 可直接验证 $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y], \forall x, y \in L$, 即 ad 是 Lie 代数同态.

通过 Lie 理想和 Lie 代数同态的定义, 类似于模论中的基本同态定理, 容易验证下述结果.

Lemma 1.37. 设 L_1, L_2 均为 K-模, $(L_1, [-, -])$ 是 K-Lie 代数, $f : L_1 \to L_2$ 是满 K-模同态. 那么
(1) 若 L_2 上也有 Lie 代数结构且使得 f 是 Lie 代数同态, 则 $\mathrm{Ker} f$ 是 Lie 理想且有 Lie 代数同构 $L_1/\mathrm{Ker} f \cong L_2$.
(2) 核 $\mathrm{Ker} f$ 是 L_1 的 Lie 理想当且仅当 L_2 上存在使得 f 成为 Lie 代数同态的 Lie 代数结构.

Proposition 1.38. 设 K-Lie 代数 L 有 Lie 理想 I, J, 满足 $J \supseteq I$. 那么有 Lie 代数同构 $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.

Proof. 命 $\pi : L/I \to L/J, a + I \mapsto a + J$, 这明显是满 Lie 代数同态且核为 J/I, 现在应用 [引理1.37(1)]. □

Proposition 1.39. 设 K-Lie 代数 L 有 Lie 理想 I, J, 那么有 Lie 代数同构 $(I + J)/I \cong J/(I \cap J)$.

Proof. 命 $f : J \to (I + J)/I, x \mapsto x + I$, 这明显是满 Lie 代数同态且 $\mathrm{Ker} f = J \cap I$. 现在应用 [引理1.37(1)]. □

也容易验证在 Lie 代数场景也有理想对应定理:

Proposition 1.40. 设 K-Lie 代数 L 有 Lie 理想 I. 那么

$$\{J \subseteq L | J\text{是包含}I\text{的 Lie 理想}\} \to \{L/I\text{的 Lie 理想}\}, J \mapsto J/I$$

是 (关于集合包含关系的) 偏序同构.

Definition 1.41. 如果 Lie 代数 $(L, [-, -])$ 满足 $[L, L] \neq 0$, 且不存在非零真 Lie 理想, 则称 L 是**单 Lie 代数**.

Remark 1.42. 这里要求 $[L, L] \neq 0$ 的原因是排除平凡的情况, 否则 L 只要是循环模就满足条件.

Remark 1.43. 设 K-Lie 代数 $(L,[-,-])$ 是单 Lie 代数, 则 L 不是循环 K-模, $Z(L)=0$ 且 $[L,L]=L$.

Example 1.44. 设 $\Bbbk$ 是域且 $n\geq 2$. 则 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 有非平凡 Lie 理想 $\Bbbk I_n$. 故 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 不是单 Lie 代数. 如果 $n=1$, 那么 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)=\Bbbk$ 是交换 Lie 代数, 同样不是单 Lie 代数. 故对任何正整数 n, $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 不是单 Lie 代数.

Example 1.45. 设域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk\neq 2$. 那么 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 是单 Lie 代数.

Proof. 首先 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 作为 $\Bbbk$-线性空间有由下述 3 个矩阵构成的标准基:

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},Z=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

通过直接计算可知 $[X,Y]=2Y,[X,Z]=-2Z,[Y,Z]=X$. $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 中任何元素可表示为 $aX+bY+cZ,a,b,c\in\Bbbk$. 现在设 I 是 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的非零 Lie 理想, 并设 $aX+bY+cZ$ 是 I 中非零元素. 那么由 I 是 Lie 理想知 $-2aZ+bX=[aX+bY+cZ,Z]\in I,-2bZ=[Z,-2aZ+bX]\in I$. 所以 $bZ\in I$. 同时也有 $-2aY+cX=[Y,aX+bY+cZ]\in I,-2cY=[Y,-2aY+cX]\in I$. 因此 $cY\in I$. 如果 b,c 中有某个非零, 那么 I 包含 Y 或 Z. 进而明显有 $I=\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. 现在设 $b=c=0$, 那么 $a\neq 0$ 满足 $aX\in I$, 于是 $X\in I$. 易知 $I=\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. □

Remark 1.46. 如果 $\mathrm{char}\Bbbk=2$, 那么 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 包含非零真理想 $\mathfrak{d}_2(\Bbbk)$. 这时 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 不是单 Lie 代数.

下面以可解 Lie 代数与幂零 Lie 代数的概念结束本节. 回忆 Lie 代数 L 的各次导 Lie 代数给出降链

$$L=L^{(0)}\supseteq L^{(1)}\supseteq\cdots\supseteq L^{(n)}\supseteq L^{(n+1)}\supseteq\cdots.$$

Definition 1.47 (可解 Lie 代数)**.** 称 Lie 代数 L 是**可解的**, 如果存在正整数 n 使得 n 次导 Lie 代数 $L^{(n)}=0$.

Remark 1.48. 在 [例1.31] 中已经指出 L 的导 Lie 代数 $L^{(i)}$ 均为 L 的 Lie 理想.

Remark 1.49. 这里可解 Lie 代数是群论中可解群的自然类比. 回忆可解群的一个等价定义便是: 如果群 G 满足对充分大的正整数 n 有 G 的 n 次导群 $G^{(n)}=\{1\}$, 则称 G 是**可解群**. 群论中常用的可解群另一个原始定义为要求 G 满足存在一个商因子均为 Abel 群的正规列.

Example 1.50. 通过直接计算易知上三角 Lie 代数 $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$(回忆 [例1.16]) 是可解 Lie 代数.

Example 1.51. 设 $\mathcal{S}=\{X_i|i\in\Gamma\}\subseteq\mathrm{M}_n(K)$ 满足 $X_iX_j=X_jX_i,\forall i,j\in\Gamma$. 考虑 $\mathcal{S}$ 生成的 K-子模 L(视作 $\mathrm{M}_n(K)$ 的 Lie 子代数), 那么 $[L,L]=0$, 即 $L^{(1)}=0$. 因此 L 是可解 Lie 代数.

Example 1.52. 如果有 Lie 代数满同态 $f:L_1\to L_2$, 那么 $f(L_1^{(1)})=L_2^{(1)}$. 归纳地得到 $f(L_1^{(i)})=L_2^{(i)},\forall i\geq 1$. 特别地, 如果存在正整数 n 使得 $L_1^{(n)}=0$, 那么 $L_2^{(n)}=0$. 这说明可解 Lie 代数的同态像是可解的.

Example 1.53. 设 $(L,[-,-])$ 是可解 Lie 代数, 那么 L 的任何 Lie 子代数也可解. 事实上, 任取 L 的 Lie 子代数 L_1, 那么归纳地易证 $L_1^{(i)}\subseteq L^{(i)},\forall i\geq 1$. 所以 $L^{(n)}=0$ 蕴含 $(L_1)^{(n)}=0$.

交换 Lie 代数明显是可解 Lie 代数. 如果 Lie 代数 L 的 Lie 理想 I 作为 Lie 代数是可解 Lie 代数, 则称 I 是**可解 Lie 理想**. 类似于 [注记1.49] 中提到的可解群的刻画, 对 Lie 代数的可解性也有

Proposition 1.54. 设 L 是 K-Lie 代数. 那么 L 是可解 Lie 代数的充要条件是存在 L 的 Lie 子代数链 $L=L_1\supseteq L_2\supseteq\cdots\supseteq L_{s+1}=0$ 使得每个 L_{i+1} 是 L_i 的 Lie 理想且 L_i/L_{i+1} 交换.

Proof. 必要性: 设存在正整数 n 使得 $L^{(n)}=0$, 考虑 Lie 代数 L 的 Lie 子代数降链 $L=L^{(0)}\supseteq L^{(1)}\supseteq\cdots\supseteq L^{(n-1)}\supseteq L^{(n)}=0$. 根据导 Lie 代数的定义, 对每个正整数 $1\leq i\leq n$, $L^{(i)}=[L^{(i-1)},L^{(i-1)}]$, 这说明 $L^{(i-1)}/L^{(i)}$ 是交换 Lie 代数. 因为 $L^{(i-1)}$ 是 L 的 Lie 子代数, 所以 $L^{(i)}$ 自然是 $L^{(i-1)}$ 的 Lie 理想.

充分性: 由条件, L/L_2 是交换的, 那么 $L^{(1)}=[L,L]\subseteq L_2$. 同样地, 由 L_2/L_3 是交换的又能够得到 $L^{(2)}=[L^{(1)},L^{(1)}]\subseteq L_3$. 再递归地得到 $L^{(s)}\subseteq L_{s+1}=0$. □

Proposition 1.55. 设 K-Lie 代数 $(L,[-,-])$ 有 Lie 理想 J. 那么 L 是可解的当且仅当 L/J 与 J 可解.

Proof. 必要性由 [例1.52] 和 [例1.53] 立即得到. 下证充分性. 因为 L/J 可解, 所以存在正整数 t 使得 $L^{(t)}\subseteq J$. J 的可解性表明存在正整数 m 使得 $J^{(m)}=0$, 所以 $L^{(m+t)}=(L^{(t)})^{(m)}=0$. □

Corollary 1.56. 设 K-Lie 代数 $(L,[-,-])$ 有可解 Lie 理想 I,J, 那么 $I+J$ 也是可解 Lie 理想.

Proof. 根据 [命题1.55] 以及 [命题1.39], 只需说明 $J/(I\cap J)$ 是可解 Lie 代数. 这来自 J 是可解 Lie 代数. □

Corollary 1.57. 如果 K-Lie 代数 L 作为 K-模是 Noether 模 (例如 L 是域上有限维 Lie 代数), 那么 L 存在唯一的极大可解 Lie 理想, 即有可解 Lie 理想 $M\subseteq L$ 满足不存在 L 的可解 Lie 理想 I 满足 $I\supsetneq M$.

Proof. 考虑 L 所有可解 Lie 理想构成的集合 $\mathcal{S}$, 那么 $0\in\mathcal{S}$ 表明 $S\neq\varnothing$. 通过 L 的 Noether 性便知极大可解 Lie 理想的存在性. 假设有两个不同的极大可解 Lie 理想 M_1,M_2, 那么 [推论1.56] 表明 M_1+M_2 仍为可解 Lie 理想, 且严格包含 M_1 与 M_2, 这与 M_1,M_2 的极大性矛盾. 所以 L 的极大可解 Lie 理想存在且唯一. □

Remark 1.58. 同样的证明表明当 K-Lie 代数 L 作为 K-模是 Noether 模时, 任何可解 Lie 理想与唯一的极大可解 Lie 理想的和就是极大可解 Lie 理想. 所以 L 的极大可解 Lie 理想就是全体可解 Lie 理想之和.

Definition 1.59. 设 L 是域上有限维 Lie 代数, 称 L 唯一的极大可解 Lie 理想是 L 的**根**, 记作 $\mathrm{rad}L$.

Lemma 1.60. 设 L 是域上有限维 Lie 代数, 那么 L 的任何可解 Lie 理想 $I\subseteq\mathrm{rad}L$. 特别地, $\mathrm{rad}(L/\mathrm{rad}L)=0$.

Proof. 根据 [推论1.56], $I+\mathrm{rad}L$ 也是可解 Lie 理想. 再由 $\mathrm{rad}L$ 的极大性得到 $I+\mathrm{rad}L=\mathrm{rad}L$. 现在设 L 的 Lie 理想 $J\supseteq\mathrm{rad}L$ 满足 $J/\mathrm{rad}L=\mathrm{rad}(L/\mathrm{rad}L)$. 那么由 [命题1.55] 得到 J 是 L 的可解 Lie 理想. 于是由前面得到的结论, $J\subseteq\mathrm{rad}L$, 从而 $J=\mathrm{rad}L$. □

Remark 1.61. 特别地, 由于 $Z(L)$ 是 L 的可解 Lie 理想, 所以 L 是有限维半单 Lie 代数时, $Z(L)=0$. 这一观察表明域上有限维半单 Lie 代数 L 总满足 Lie 代数同构 $L\cong\mathrm{ad}(L)$: 考虑满 Lie 代数同态 $\mathrm{ad}:L\to\mathrm{ad}(L),x\mapsto\mathrm{ad}_x$, 该 Lie 代数同态的核 $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad})=Z(L)$. 现在应用 [引理1.37] 便得结论.

Definition 1.62. 设 L 是域上有限维 Lie 代数, 如果 $\mathrm{rad}L=0$, 则称 L 是**有限维半单 Lie 代数**.

Remark 1.63. 设 L 是有限维 Lie 代数, 那么 L 的交换 Lie 理想都是可解的, 所以 L 没有非零的交换 Lie 理想. 反之, 如果 L 没有非零交换 Lie 理想, 我们说明 $\mathrm{rad}L=0$: 否则, $\mathrm{rad}L\neq 0$, 则可设最小的正整数 t 使得 $(\mathrm{rad}L)^{(t)}=0$. 这说明 $(\mathrm{rad}L)^{(t-1)}$ 是交换的非零 Lie 理想.

Example 1.64. 有限维单 Lie 代数 (例如 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, 见 [例1.45]) 是半单 Lie 代数.

Proof. 设 L 是域 $\Bbbk$ 上有限维单 Lie 代数, 那么 L 的 Lie 理想只有零和自身以及 L 的非交换性迫使 L 不是可解 Lie 代数. 这说明 L 的极大可解 Lie 理想是 L 的真 Lie 理想, 因此 $\mathrm{rad}L=0$. □

Example 1.65. 设 $\Bbbk$ 是域, n 是正整数. 那么 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 不是半单 Lie 代数.

Proof. 先设 $n \geq 2$, 作为 Lie 代数, $Z(\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)) = \Bbbk I_n \neq 0$, 因此根据 [注记1.61] 知 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 非半单. 当 $n = 1$ 时, $\mathfrak{gl}_1(\Bbbk) = \Bbbk$, 明显有 $Z(\mathfrak{gl}_1(\Bbbk)) = \Bbbk \neq 0$, 所以 $\mathfrak{gl}_1(\Bbbk)$ 也不是半单 Lie 代数. □

如果 K-Lie 代数 L 有 Lie 理想 $I_1, I_2, ..., I_m$ 使得作为 K-模有 $L = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_m$, 则称 L 是 $I_1, I_2, ..., I_m$ 的 (内) **直和** (相应地, 对 K-Lie 代数 $L_1, ..., L_m$, 如果定义 $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_m$, 那么 L 上有自然的 Lie 代数结构, 即 $[(a_1, a_2, ..., a_m), (b_1, b_2, ..., b_m)] = ([a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_m, b_m])$, 这时称 L 是 $L_1, ..., L_m$ 的 (外) **直和**. 注意这时每个 L_i 标准嵌入 L 后成为 L 的 Lie 理想). 下面我们适当放宽 [例1.64] 的结果.

Proposition 1.66. 设 L 是域 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数, 如果存在半单 Lie 理想 $I_1, I_2, ..., I_m$ 使得 $L = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_m$, 则 L 是半单 Lie 代数. 特别地, 有限个有限维单 Lie 代数的直和是半单 Lie 代数.

Proof. 对每个 $1 \leq j \leq m$, 记 $\pi_j : L \to I_j$ 是第 j 分量的标准投射, 易见这是 Lie 代数同态. 所以 $\pi_j(\mathrm{rad}(L))$ 作为可解 Lie 代数的同态像依然是可解的, 这是 I_j 的可解 Lie 理想. 而 I_j 不存在非零可解 Lie 理想 ([引理1.60]), 所以 $\pi_j(\mathrm{rad}(L)) = 0$. 于是由 $1 \leq j \leq m$ 的任意性得到 $\mathrm{rad}(L) = 0$, 因此 L 是半单 Lie 代数. □

类似给定 Lie 代数的各次导 Lie 代数给出的 Lie 子代数降链, 对给定的 K-Lie 代数 $(L, [-,-])$, 可以定义出自然的 Lie 理想降链: 定义 $L^0 = L, L^1 = [L, L]$, 递归地, 对正整数 $k \geq 2$, 定义 $L^k = [L, L^{k-1}]$. 对自然数 k 作归纳易知每个 L^k 是 L 的 Lie 理想. 于是我们得到 L 的 Lie 理想降链 $L = L^0 \supseteq L^1 \supseteq L^2 \supseteq \cdots$, 称为 L 的**降中心列**. 对自然数 k 作归纳易证 k 次导 Lie 代数 $L^{(k)} \subseteq L^k$. 不难看出对 L 的任何 Lie 理想 I 和正整数 k 有 $(L/I)^k = (L^k + I)/I$. 现在我们可以给出幂零 Lie 代数的概念.

Definition 1.67. 如果 K-Lie 代数 $(L, [-,-])$ 的降中心列 $L = L^0 \supseteq L^1 \supseteq L^2 \supseteq \cdots$ 满足存在正整数 n 使得 $L^n = 0$, 那么称 L 是**幂零 Lie 代数**. 易见幂零 Lie 代数的 Lie 子代数和同态像都是幂零的.

Remark 1.68. 根据前面的讨论, 幂零 Lie 代数明显是可解的. 可解 Lie 代数一般不是幂零 Lie 代数. 例如在 [例1.50] 中指出 $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ 是可解 Lie 代数, 易算得 $L = \mathfrak{t}_2(\Bbbk)$ 满足 $L^k = L^1 \neq 0, \forall k \geq 1$, 不是幂零的. 之后我们会看到在特征零的代数闭域上非零有限维半单 Lie 代数场景, 总有某个可解 Lie 子代数不是幂零的 (见 [例2.129]).

Remark 1.69. 回忆 Lie 代数是交换的当且仅当 $L^1 = 0$. 因此幂零 Lie 代数可以理解为接近交换的 Lie 代数.

Remark 1.70. Lie 代数也有升中心列的概念. 设 $(L, [-,-])$ 是 K-Lie 代数, 回忆 L 的中心 $Z(L) = \{x \in L | [x, L] = 0\}$. 定义 $C_0(L) = 0, C_1(L) = Z(L)$. 由于 $C_1(L)$ 是 Lie 理想, 可以考虑商 Lie 代数 $L/C_1(L)$. 根据 [命题1.40], 存在 L 唯一的包含 $C_1(L)$ 的 Lie 理想 $C_2(L)$ 使得 $C_2(L)/C_1(L) = Z(L/C_1(L))$. 递归地, 如果对正整数 k 定义了 Lie 理想 $C_k(L)$, 那么存在唯一的 L 的包含 $C_k(L)$ 的 Lie 理想 $C_{k+1}(L)$ 使得 $C_{k+1}(L)/C_k(L) = Z(L/C_k(L))$. 由此我们递归地得到 L 的 Lie 理想升链

$$0 = C_0(L) \subseteq Z(L) = C_1(L) \subseteq C_2(L) \subseteq \cdots,$$

满足 $C_{k+1}(L)/C_k(L) = Z(L/C_k(L)), \forall k \geq 1$, 称为 L 的**升中心列**.

Example 1.71. 交换 Lie 代数是幂零 Lie 代数. 例如 $\Bbbk I_n \subseteq \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, 其中 $\Bbbk$ 是域.

Example 1.72. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数并且有子模 M, 那么有 L 的 K-子模

$$N_L(M)=\{x\in L|[x,M]\subseteq M\},$$

称为 M 在 L 中的**正规化子**. 利用 Jacobi 恒等式易见 $N_L(M)$ 是 L 的 Lie 子代数. 如果进一步 M 是 L 的 Lie 子代数, 那么 $N_L(M)\supseteq M$ 并且 M 是 K-Lie 代数 $N_L(M)$ 的 Lie 理想. 事实上, 当 M 是 L 的 Lie 子代数时, $N_L(M)$ 是 L 中包含 M 且以 M 为 Lie 理想的 Lie 子代数中最大的: 如果 L 的 Lie 子代数 $L'\supseteq M$ 满足 M 是 L' 的 Lie 理想, 那么任何 $x\in L'$ 满足 $[x,M]\subseteq M$, 即 $x\in N_L(M)$. 特别地, L 的 Lie 子代数 M 是 Lie 理想的充要条件是 $N_L(M)=L$. 因此正规化子的构造可衡量 Lie 子代数成为 Lie 理想的距离. 我们将在幂零 Lie 代数场景中的基本定理——Engel 定理的证明准备中使用正规化子的构造 (见 [命题1.81]).

1.3 幂零 Lie 代数

之前我们已经看到幂零 Lie 代数是特殊的可解 Lie 代数 (反之不然, 见 [注记1.68]). 在可解 Lie 代数场景已经介绍过一些可解性的刻画 (见 [命题1.54], [命题1.55]) 以及基本性质 (见 [例1.53], [命题1.56] 和 [推论1.56]). 本节我们主要感兴趣幂零 Lie 代数的基本性质和 Lie 代数幂零性的刻画. 尤其是下面的 Engel 定理:

Engel's Theorem. 设 $(L,[-,-])$ 是域上有限维 Lie 代数, 那么 L 是幂零 Lie 代数当且仅当对任何 $x\in L$, x 决定的伴随自同态 ad_x(回忆 [注记1.18]) 是有限维线性空间 L 上的幂零变换.

Remark 1.73. 该定理以 Friedrich Engel(德国, 1861-1941) 命名, 原因是其证明概要最早来自 Engel 与 Wilhelm Killing(德国, 1847-1923) 在 1890 年的某次通信中.

在正式介绍 Engel 定理的证明前我们需要对幂零 Lie 代数有进一步认识. 以下固定含幺交换环 K 和域 $\Bbbk$.

Lemma 1.74. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, 那么 L 是幂零 Lie 代数当且仅当存在正整数 n 使得

$$\mathrm{ad}_{x_1}\mathrm{ad}_{x_2}\cdots\mathrm{ad}_{x_n}=0,\forall x_1,...,x_n\in L.$$

Proof. 易见 $L^1=[L,L]=0$ 当且仅当 $\mathrm{ad}_x=0,\forall x\in L$. 一般地, 如果 $L^n=0$, 那么对任何 $x_1\in L$ 有 $\mathrm{ad}_{x_1}(L^{n-1})=0$, 进而对任何 $x_2\in L$ 有 $\mathrm{ad}_{x_1}\mathrm{ad}_{x_2}(L^{n-2})=0$. 以此类推得到 $\mathrm{ad}_{x_1}\mathrm{ad}_{x_2}\cdots\mathrm{ad}_{x_n}=0,\forall x_1,...,x_n\in L$. 反之, 设 $\mathrm{ad}_{x_1}\mathrm{ad}_{x_2}\cdots\mathrm{ad}_{x_n}=0,\forall x_1,...,x_n\in L$. 由 L^n 作为 K-模可由集合

$$\{\mathrm{ad}_{x_1}\mathrm{ad}_{x_2}\cdots\mathrm{ad}_{x_n}(x_{n+1})|x_1,...,x_{n+1}\in L\}$$

生成可得 $L^n=0$. 因此结合幂零 Lie 代数的定义便得该引理. □

Remark 1.75. 通过 [引理1.74], 幂零 Lie 代数 L 满足任何元素决定的伴随自同态是幂零的. 而 Engel 定理表明在有限维 Lie 代数场景该观察反之也成立: 所有元素决定的伴随自同态的幂零性蕴含 Lie 代数的幂零性.

Example 1.76. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数满足任何 $x\in L$ 有 ad_x 是幂零同态, 那么 L 的子代数与商代数满足任何元素决定的伴随自同态是幂零同态.

Proof. 对 L 的子代数 L', 任何 $x' \in L'$ 决定的 L' 上伴随自同态是 x' 决定 L 上伴随自同态的限制, 因此自然是幂零同态. 对 L 的 Lie 理想 I, 记 $\pi : L \to L/I$ 是 Lie 代数的标准投射, 记 $x \in L$ 对应的 $\overline{x} \in L/I$ 所决定的商 Lie 代数 L/I 上的伴随同态为 $\mathrm{ad}_{\overline{x}}$, 那么对每个 $x \in L$ 我们有交换图:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{ad}_x"'] & L/I \arrow[d, "\mathrm{ad}_{\overline{x}}"] \\ L \arrow[r, "\pi"] & L/I \end{tikzcd}$$

于是由 ad_x 是幂零变换知存在正整数 ℓ 使得 $(\mathrm{ad}_{\overline{x}})^\ell \pi = 0$, 于是 $(\mathrm{ad}_{\overline{x}})^\ell = 0$. □

Example 1.77. 设 M 是 K-模, $\varphi \in \mathrm{End}_K M$ 是幂零同态. 那么 $\mathrm{ad}_\varphi : \mathrm{End}_K M \to \mathrm{End}_K M, \psi \mapsto \varphi\psi - \psi\varphi$ 是自同态代数 $\mathrm{End}_K M$ 上的幂零同态. 特别地, 对域 $\Bbbk$ 上的线性空间 V, 任何一般线性 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 中的幂零元 x 决定的伴随自同态 ad_x 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的幂零变换.

Proof. 考虑 K-模同态 $\eta_1 : \mathrm{End}_K M \to \mathrm{End}_K M, \psi \mapsto \varphi\psi$ 和 $\eta_2 : \mathrm{End}_K M \to \mathrm{End}_K M, \psi \mapsto -\psi\varphi$, 那么 η_1, η_2 均为 $\mathrm{End}_K(\mathrm{End}_K M)$ 中的幂零元, 并且 η_1 与 η_2 可交换. 进而 $\mathrm{ad}_\varphi = \eta_1 + \eta_2$ 也是幂零元. □

Lemma 1.78. 设 $(L, [-,-])$ 是 K-Lie 代数. 如果 $L/Z(L)$ 是幂零 Lie 代数, 那么 L 也幂零.

Proof. 由条件, 存在正整数 k 使得 $(L/Z(L))^k = 0$. 这说明 $L^k \subseteq Z(L)$. 于是 $L^{k+1} \subseteq [L, Z(L)] = 0$. □

Theorem 1.79. 设 $(L, [-,-])$ 是域 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数, 那么以下等价:
(1) L 是幂零 Lie 代数.
(2) 存在 L 的 Lie 理想序列 $L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_s = 0$ 使得 $[L, L_j] \subseteq L_{j+1}, j = 0, 1, ..., s-1$.
(3) 存在 L 的 Lie 理想序列 $L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_s = 0$ 使得

$$[L, L_j] \subseteq L_{j+1}, \dim_\Bbbk L_j/L_{j+1} = 1, j = 0, 1, ..., s-1.$$

(4) 存在正整数 n 使得 $C_n(L) = L$, 这里 $C_n(L)$ 的定义参见 [注记1.70].

Proof. (1)⇒(2): 取 $L_i = L^i$, 那么由幂零 Lie 代数的定义便知当 i 充分大时 $L_i = 0$, 并且总有 $[L, L_i] \subseteq L_{i+1}$. (2)⇒(3): 设存在 L 的 Lie 理想序列 $L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_s = 0$ 使得 $[L, L_j] \subseteq L_{j+1}, j = 0, 1, ..., s-1$. 如果有某个 $L_i \supseteq L_{i+1}$ 满足 $\dim_\Bbbk L_i/L_{i+1} \geq 2$, 取 L_i 的包含 L_{i+1} 的子空间 J_i 满足 $\dim_\Bbbk L_{i+1} < \dim_\Bbbk J_i < \dim_\Bbbk L_i$, 那么 $[L, J_i] \subseteq [L, L_i] \subseteq L_{i+1} \subseteq J_i$. 一方面, 这说明 J_i 是 L 的 Lie 理想. 另一方面, 这时 L 的 Lie 理想序列 $L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_i \supseteq J_i \supseteq L_{i+1} \supseteq \cdots \supseteq L_s = 0$ 满足 (2) 的条件. 因此对满足 (2) 条件的 Lie 理想序列作有限多次扩充后可得到满足条件 (3) 的 Lie 理想序列. (3)⇒(4): 设 $L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_s = 0$ 是满足 (3) 的 Lie 理想序列, 那么 $L_s \subseteq C_0(L)$, $[L_{s-1}, L] = 0$ 蕴含 $L_{s-1} \subseteq C_1(L)$. 归纳地可得对每个自然数 $0 \leq j \leq s$ 有 $L_{s-j} \subseteq C_j(L)$. 特别地, $L = L_0 \subseteq C_s(L)$, 故取 $s = n$ 即可. 最后证明 (4)⇒(1) 来完成定理证明. 现在我们有 L 的升中心列 $0 = C_0(L) \subseteq C_1(L) \subseteq \cdots \subseteq C_{n-1}(L) \subseteq C_n(L) = L$. 归纳地可证对每个自然数 i 有 $C_i(L/Z(L)) = C_{i+1}(L)/Z(L)$. 因此 $C_{n-1}(L/Z(L)) = L/Z(L)$. 下面我们对正整数 n 作归纳证明: 如果 $C_n(L) = L$, 那么 L 是幂零 Lie 代数. 如果 $n = 1$, 那么由 $L = Z(L)$ 便知 L 幂零. 假设结论对 $n-1 (n \geq 2)$ 的场景成立, 现在设 $C_n(L) = L$. 那么根据前面的讨论, 有 $C_{n-1}(L/Z(L)) = L/Z(L)$. 由归纳假设, $L/Z(L)$ 是幂零 Lie 代数. 现在应用 [引理1.78] 得到 L 的幂零性. □

从 [引理1.74] 我们看到 Engel 定理的证明只需再说明充分性. 在给出充分性的证明前还需做些准备.

Lemma 1.80. 设域 $\Bbbk$ 上 Lie 代数 $(L,[-,-])$ 有极大真 Lie 子代数 I, 并且 I 是 Lie 理想. 那么 $\dim_{\Bbbk}L/I=1$.

Proof. 若不然, 即若有 $\dim_{\Bbbk}L/I\geq 2$, 那么 L/I 总有 1 维真 Lie 子代数 Q. 利用标准投射 $\pi:L\to L/I$ 可得到真包含 I 的 L 的 Lie 子代数 L' 满足 $\pi(L')=Q$. 并且 L' 也是 L 的真 Lie 子代数, 这与 I 是极大真 Lie 子代数矛盾. 因此 $\dim_{\Bbbk}L/I=1$. □

下面的命题表明域上非零有限维线性空间 V 的一般线性 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的任何由幂零变换构成的 Lie 子代数都在给定的线性空间中有公共特征向量. 这是一族两两可交换的幂零矩阵具有公共特征向量的推广.

Proposition 1.81. 设 V 是域 $\Bbbk$ 上有限维非零线性空间, L 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数. 如果 L 中元素均为 V 上幂零线性变换, 那么存在 V 中非零元 v 使得 $x(v)=0,\forall x\in L$. 即 L 中元素有公共特征向量.

Proof. 我们对 $\dim_{\Bbbk}L=n\in\mathbb{N}$ 作归纳证明结论. 如果 $n=0$, 那么 $L=0$ 结论明显成立. 如果 $n=1$, 那么只需证明对 $x\neq 0\in L$, 存在 $v\neq 0\in V$ 使得 $x(v)=0$. 设 ℓ 是满足 $x^{\ell}=0$ 的最小正整数, 那么 $\ell\geq 2$. 因为 $x^{\ell-1}\neq 0$, 所以存在 $w\neq 0$ 使得 $x^{\ell-1}(w)\neq 0$, 取 $v=x^{\ell-1}(w)$ 便得 $x(v)=0$. 所以当 $n=1$ 时结论成立.

现在假设结论对 $\mathfrak{gl}(V)$ 的线性维数不超过 $n-1(n\geq 2)$ 的 Lie 子代数都成立, 下面对 n 维 Lie 子代数 L 证明结论成立. 首先由 [例1.77] 知对每个 $x\in L$, ad_x 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上幂零变换. 取定 L 的真 Lie 子代数 L'(这里要求了 $n\geq 2$ 保证了 L' 的存在性), 下证 L 的 Lie 理想 $N_L(L')\supsetneq L'$(回忆 [例1.72]). 一旦证明此断言, 我们可选取 L' 是 L 维数最大的真 Lie 子代数 (因为要求了 L 是有限维 Lie 代数), 进而 L' 是 L 的极大真 Lie 子代数, 这迫使 $N_L(L')=L$, 即 L' 是 L 的 Lie 理想, 再应用 [引理1.80] 得到 $\dim_{\Bbbk}L/L'=1$, 我们将使用此观察和归纳假设完成证明. 现在我们证明前面的断言: 考察商空间 L/L'(这里 L' 是最开始取定的真 Lie 子代数), 那么对每个 $x\in L'$, 伴随变换 $\mathrm{ad}_x(L')\subseteq L'$ 保证了 ad_x 可诱导 L/L' 上幂零变换 (记作 $\overline{\mathrm{ad}_x}$). 现在对有限维非零线性空间 L/L' 和 $\mathfrak{gl}(L/L')$ 的 Lie 子代数 $\{\overline{\mathrm{ad}_x}|x\in L'\}$(可直接计算验证这是 Lie 子代数并且它作为 L' 的同态像线性维数不超过 $n-1$) 应用归纳假设, 存在 $x\in L-L'$ 使得 $\overline{\mathrm{ad}_y}(x+L')=0,\forall y\in L'$. 这说明 $[y,x]\in L',\forall y\in L'$, 即 $x\in N_L(L')$, 至此断言得证.

现在我们选取 L 的维数最大的真 Lie 子代数 L', 根据前面的讨论知 L' 是 L 的 Lie 理想并且 $\dim_{\Bbbk}L/L'=1$. 取定 $z\in L$ 满足 $L=L'+\Bbbk z$. 对有限维非零线性空间 V 和 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数 L' 应用归纳假设知 $V_1=\{v\in V|x(v)=0,\forall x\in L'\}$ 是 V 的非零子空间. 下证存在 $v\in V_1$ 满足 $z(v)=0$ 来完成命题证明.

对任给 $x\in L,y\in L'$ 以及 $w\in V_1$ 有 $yx(w)=xy(w)-[x,y](w)=x(0)-0=0$, 所以对任何 $x\in L,w\in V_1$ 有 $x(w)\in V_1$. 特别地, $z(V_1)\subseteq V_1$. 由于 L 中元素都是 V 上幂零变换, 所以 z 也是 V_1 上幂零变换, 进而由 $n=1$ 时的讨论便知存在 $v\neq 0\in V_1$ 使得 $z(v)=0$. 于是 $x(v)=0,\forall x\in L$. □

Remark 1.82. 作为该命题本身的应用, 我们说明域上两两可交换的幂零矩阵族具有公共特征向量. 如果 $V=\Bbbk^n$, 这时可将 $\mathfrak{gl}(V)$ 视作 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 那么 V 上幂零线性变换对应 $\Bbbk$ 上幂零矩阵. 设 $\mathcal{N}=\{X_i|i\in\Gamma\}$ 是一些幂零矩阵构成的非空集合 (其中指标集 Γ 可能是无限集), 并且对任何 $i,j\in\Gamma$ 有 $X_iX_j=X_jX_i$. 考虑 $\mathcal{N}$ 生成的 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 的子空间, 这明显是 Lie 子代数. 并且由 $\mathcal{N}$ 中元素的可交换性知 $\mathcal{N}$ 中矩阵均为幂零矩阵. 因此应用 [命题1.81]$\mathcal{N}$ 中所有矩阵有公共向量.

Remark 1.83. 该命题也可以应用于证明: 域 $\Bbbk$ 上的有限维幂零 Lie 代数 L 如果有 Lie 理想 $J\neq 0$, 那么 $J\cap Z(L)\neq 0$. 即有限维 Lie 代数的非零 Lie 理想有非零中心元. 将 L 中元素依伴随变换作用于 J 上, 由 L 的幂零

性知 L 中元素决定的伴随变换对应 J 上幂零变换, 那么应用 [命题1.81] 便知存在 $v \neq 0 \in J$ 使得 v 是所有伴随变换公共的零点, 即 $v \in Z(L)$. 所以 $J \cap Z(L) \neq 0$.

现在我们可以证明 Engel 定理的充分性, 它很依赖于 [命题1.81]:

Theorem 1.84 (Engel 定理)**.** 设 $(L, [-,-])$ 是域上有限维 Lie 代数, 满足对每个 $x \in L$ 有 ad_x 是 L 上幂零变换, 那么 L 是幂零 Lie 代数.

Proof. 对 $\dim_{\Bbbk} L = n \in \mathbb{N}$ 作归纳. 当 $n \leq 1$ 时明显有 $L^1 = 0$, 即 L 幂零. 假设结论对维数不超过 $n-1 (n \geq 2)$ 的 Lie 代数成立, 现在对 n 维 Lie 代数 L, 由条件知 $\mathfrak{gl}(L)$ 的 Lie 子代数 $\{\mathrm{ad}_x | x \in L\}$ 中元素均幂零. 由 [命题1.81], 存在 L 中非零元 y 使得 $\mathrm{ad}_x(y) = [x,y] = 0, \forall x \in L$. 特别地, $Z(L) \neq 0$. 这说明商 Lie 代数 $L/Z(L)$ 的维数不超过 $n-1$. 注意到条件保证对任何 $L/Z(L)$ 中元素决定的伴随变换都是幂零的, 所以对商 Lie 代数 $L/Z(L)$ 应用归纳假设可知 $L/Z(L)$ 是幂零 Lie 代数, 现在应用 [引理1.78]. □

Remark 1.85. 在实践中, 如果 V 是域 $\Bbbk$ 上有限维线性空间, $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 是 Lie 子代数. 通常要证明 L 的幂零性 (不妨设 $L \neq 0$), 首先说明每个 $x \in L$ 是 V 上幂零变换 (这只是充分条件, 例如取 $V = \Bbbk^n, L = \Bbbk I_n \subseteq \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, 那么 L 中元素未必是 V 上幂零变换, 但 L 作为交换 Lie 代数可解), 随后应用 [例1.77] 得到 ad_x 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上幂零变换, 特别地, 是 L 上幂零变换. 最后应用 Engel 定理得到 L 是幂零 Lie 代数.

1.4 可解 Lie 代数

在幂零 Lie 代数部分我们对 (有限维) 幂零 Lie 代数有了更深入的认识, 尤其是 Engel 定理表明有限维 Lie 代数的幂零性等价于“ad-幂零”性. 本节对有限维 Lie 代数的可解性作类似讨论, 本节的主要目标是证明

Lie's Theorem. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, V 是域 $\Bbbk$ 上非零有限维线性空间, 并设 L 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的可解 Lie 子代数, 那么存在 V 的某个基, 使得所有 L 中元素作为 V 上线性变换在此基下表示矩阵为上三角阵.

在 Engel 定理部分我们指出 Engel 定理成立很依赖于有限维空间的一般线性 Lie 代数的由幂零变换构成的 Lie 子代数总有公共特征向量. 在本节我们会对特征零的代数闭域上有限维线性空间的可解 Lie 子代数证明类似结论. 在证明 Lie 定理前, 我们先来看有限维 Lie 代数可解性的等价刻画, 这是 [命题1.54] 的加强:

Theorem 1.86. 设 $(L, [-,-])$ 是域 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数, 那么以下等价:
(1) L 是可解 Lie 代数.
(2) 存在 L 的 Lie 理想降链 $L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_s = 0$ 满足每个 L_i/L_{i+1} 是交换 Lie 代数.
(3) 存在 L 的 Lie 子代数降链 $L = L_0' \supseteq L_1' \supseteq \cdots \supseteq L_r' = 0$ 满足每个 L_{i+1}' 是 L_i' 的 Lie 理想且 L_i'/L_{i+1}' 交换.
(4) 有 L 的 Lie 子代数降链 $L = L_0'' \supseteq L_1'' \supseteq \cdots \supseteq L_t'' = 0$ 使每个 L_{i+1}'' 是 L_i'' 的 Lie 理想且 $\dim_{\Bbbk} L_i''/L_{i+1}'' = 1$.

Proof. 在 [例1.31] 中已经指出 L 的各次导 Lie 代数是 L 的 Lie 理想, 所以 (1)⇒(2) 来自可解 Lie 代数的定义. (2)⇒(3) 来自 Lie 理想是 Lie 子代数. 下面类似 [定理1.79] 中关于“(2)⇒(3)”的讨论证明 (3)⇒(4): 根据条件, 固定 Lie 子代数降链 $L = L_0' \supseteq L_1' \supseteq \cdots \supseteq L_r' = 0$ 满足每个 L_{i+1}' 是 L_i' 的 Lie 理想且 L_i'/L_{i+1}' 交换. 假设存在某个 $0 \leq i \leq r-1$ 满足 $\dim_{\Bbbk} L_i'/L_{i+1}' \geq 2$. 那么我们能够取 L_i' 的子空间 J_i' 满足 $L_{i+1}' \subsetneq J_i' \subsetneq L_i'$. 因为 L_i'/L_{i+1}' 是交换 Lie 代数, 所以 $[L_i', L_i'] \subseteq L_{i+1}'$. 现在 $[L_i', J_i'] \subseteq [L_i', L_i'] \subseteq L_{i+1}' \subseteq J_i'$. 所以 J_i' 是 L_i' 的包含 L_{i+1}' 的 Lie 理想. 同时, L_{i+1}' 也是 J_i' 的 Lie 理想. 并注意到 $\dim_{\Bbbk} L_i'/J_i', \dim_{\Bbbk} J_i'/L_{i+1}' < \dim_{\Bbbk} L_i'/L_{i+1}'$, 因此可不断对 Lie 子

代数降链作该讨论, 作有限多次扩充后可得到 Lie 子代数降链 $L = L''_0 \supseteq L''_1 \supseteq \cdots \supseteq L''_t = 0$ 使每个 L''_{i+1} 是 L''_i 的 Lie 理想且 $\dim_{\Bbbk} L''_i/L''_{i+1} = 1$. 最后证明 (4)⇒(1): 设有 L 的 Lie 子代数降链 $L = L''_0 \supseteq L''_1 \supseteq \cdots \supseteq L''_t = 0$ 满足 (4) 的条件, 这时 $\dim_{\Bbbk} L''_{t-1} = 1$ 表明 L''_{t-1} 是可解 Lie 代数. 现在 L''_{t-2}/L''_{t-1} 也是可解 Lie 代数, 所以应用 [命题1.55] 得到 L''_{t-2} 是可解 Lie 代数. 以此类推, 继续应用 [命题1.55] 可得 L 的可解性. □

回忆在线性代数中复数域上有限多个两两可交换的方阵有公共特征向量, Lie 定理的证明需要其推广形式:

Theorem 1.87. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, V 是 $\Bbbk$ 上有限维非零线性空间, L 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的可解 Lie 子代数, 那么存在 $v \neq 0 \in V$ 以及 $\Bbbk$-线性函数 $\lambda : L \to \Bbbk$ 满足 $x(v) = \lambda(x)v, \forall x \in L$.

Proof. 如果 $L = 0$ 结论直接成立, 下设 $L \neq 0$. 我们对 $n = \dim_{\Bbbk} L \geq 1$ 作归纳证明结论. 如果 $n = 1$, 那么取定 L 中任意非零元 x 后再命 v 是 x 的某个特征向量即可, 这时可自然得到线性函数 λ. 假设结论对线性维数不超过 $n-1 (n \geq 2)$ 的可解 Lie 子代数成立. 为了应用归纳假设, 先说明 L 存在余维数是 1 的 Lie 理想. 因为 L 是非零可解的, 所以 $L \neq [L, L]$. 那么可选取 L 的包含 $[L, L]$ 的余维数是 1 的子空间 J 便有 $[L, J] \subseteq [L, L] \subseteq J$. 因此 J 是 L 的 Lie 理想并且 J 的余维数是 1. 固定此 Lie 理想 J, 当 $\dim_{\Bbbk} J = 0$ 时, L 作为 1 维 Lie 代数结论自然成立. 当 $\dim_{\Bbbk} J \geq 1$ 时, 因为 J 可解 (回忆 [命题1.55]), 所以对 J 应用归纳假设, 存在 V 中非零元 v_1 和 J 上线性函数 $\lambda_1 : J \to \Bbbk$ 满足 $x(v_1) = \lambda_1(v_1), \forall x \in J$. 考虑 V 的 $\Bbbk$-子空间

$$W = \{w \in V | x(w) = \lambda_1(x)w, \forall x \in J\},$$

那么 $W \supseteq J$. 我们断言 $x(W) \subseteq W, \forall x \in L$. 一旦证明此断言, 取定 $z \neq 0 \in L$ 满足 $L = J \oplus \Bbbk z$, 那么 $z(W) \subseteq W$. 即 z 可限制为有限维非零线性空间 W 上的线性变换, 于是由 $\Bbbk$ 是代数闭域, z 在 W 中存在特征向量, 设 $v \neq 0 \in W$ 是 z 的属于特征值 μ 的特征向量. 命 $\lambda : J \oplus \Bbbk z \to \Bbbk, x + \alpha z \mapsto \lambda_1(x) + \alpha\mu$, 其中 $x \in J, \alpha \in \Bbbk$, 易见 λ 是定义合理的 $\Bbbk$-线性函数并且 $x(v) = \lambda(x)v, \forall x \in L$. 至此, 我们看到要完成该定理证明只需再证明 $x(W) \subseteq W, \forall x \in L$. 任给 $x \in L, w \in W, y \in J$, 有 $y(x(w)) = -[x, y]w + x(y(w)) = -\lambda_1([x, y])w + x(\lambda_1(y))$. 根据下面的 [引理1.89], 总有 $\lambda_1([x, y])w = 0$, 所以 $x(w) \in W$. □

Remark 1.88. 在 [定理1.87] 中取 $V = \Bbbk^n$ 并把 $\mathfrak{gl}(V)$ 和 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 视作等同, 设 $\mathcal{S} = \{X_i | i \in \Gamma\} \subseteq \mathrm{M}_n(\Bbbk)$(其中指标集 Γ 可能是无限集) 满足对任何 $i, j \in \Gamma$ 有 $X_iX_j = X_jX_i$. 我们用 [定理1.87] 说明 $\mathcal{S}$ 中所有矩阵有公共特征向量: 考虑 $\mathcal{S}$ 在 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 中生成的子空间, 记作 L, 那么 $[L, L] = 0$. 这说明 L 是可解 Lie 代数. 现在对可解 Lie 代数 L 应用 [定理1.87] 得到 L 中所有矩阵在 $\Bbbk^n$ 中有公共特征向量.

Lemma 1.89. 设 $\Bbbk$ 为特征零的域, V 是域 $\Bbbk$ 上非零有限维线性空间, L 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 是可解 Lie 子代数, J 是 L 的余维数为 1 的 Lie 理想, 并且 $w \neq 0 \in V$ 满足 $y(w) = \lambda_1(y)w, \forall y \in J$, 其中 $\lambda_1 : J \to \Bbbk$ 是 $\Bbbk$-线性函数. 那么对任何 $x \in L, w \in W, y \in J$, 有 $\lambda_1([x, y]) = 0$.

Proof. 任取 $x \in L$, 不妨设 $x \neq 0$, 因为 V 是有限维线性空间, 所以可选取正整数 ℓ 使 $\{w, x(w), x^2(w), ..., x^\ell(w)\}$ 是 $\Bbbk$-线性相关的且 ℓ 是满足该性质的最小正整数 (换言之, w 关于 x 的最小多项式是 $\ell - 1$ 次的). 记 $W_0 = 0$ 且对 $i \geq 1$, 记 W_i 是由 $\{w, x(w), ..., x^{i-1}(w)\}$ 所生成的 V 的 $\Bbbk$-子空间. 那么 $W_\ell = W_{\ell-1} = \cdots$ 且 $\dim_{\Bbbk} W_\ell = \ell$.

我们断言 W_i 是 J 中元素的公共不变子空间并且对每个 $y \in J$, y 在 W_ℓ 的基 $\{w, x(w), x^2(w), ..., x^{\ell-1}(w)\}$ 下的表示矩阵是对角线元素均为 $\lambda_1(y)$ 的上三角阵. 一旦证明该断言, 则对每个 $y \in J$, $y|_{W_\ell}$ 的迹为 $\ell\lambda_1(y)$. 由

J 是 L 的 Lie 理想知 $[x,y]\in J$, 所以利用 $[x,y]|_{W_\ell}$ 的迹为零便知 $\ell\lambda_1([x,y])=0$. 最后再利用 $\mathrm{char}\Bbbk=0$ 得到 $\lambda_1([x,y])=0$. 因此引理的证明转化为证明前面的断言. 而证明此断言只需说明

$$y(x^i(w))-\lambda_1(y)x^i(w)\in W_i,\forall 0\le i\le \ell, y\in J.$$

当 $i=0$ 时, 由条件 $y(w)-\lambda_1(y)w=0\in W_0$. 对 $i=1$ 的情形, $y(x(w))-\lambda_1(y)x(w)=x(y(w))-[x,y](w)-\lambda_1(y)x(w)=\lambda_1(y)x(w)-\lambda_1([x,y])w-\lambda_1(y)x(w)\in W_1$. 归纳地, 如果对正整数 $i-1(i\le\ell)$ 有

$$y(x^{i-1}(w))-\lambda_1(y)x^{i-1}(w)\in W_{i-1},\forall y\in J,$$

那么 $y(x^i(w))-\lambda_1(y)x^i(w)=x(y(x^{i-1}(w)))-[x,y](x^{i-1}(w))-\lambda_1(y)x^i(w)$. 根据假设, 现在 $y(x^{i-1}(w))-\lambda_1(y)x^{i-1}(w)\in W_{i-1}$, 所以 $x(W_{i-1})\subseteq W_i$ 表明 $x(y(x^{i-1}(w)))-\lambda_1(y)x^i(w)\in W_i$. 再注意到 $[x,y]\in J$ 表明

$$[x,y](x^{i-1}(w))-\lambda_1([x,y])x^{i-1}(w)\in W_{i-1},$$

所以 $[x,y](x^{i-1}(w))\in W_i$. 于是得到 $y(x^i(w))-\lambda_1(y)x^i(w)\in W_i$, 断言得证. □

现在我们来证明 Lie 定理: 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, V 是 $\Bbbk$ 上非零有限维线性空间, L 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的可解 Lie 子代数. 需要证明存在 V 的某个基, 使得所有 L 中元素作为 V 上线性变换在此基下表示矩阵为上三角阵. 记 $n=\dim_\Bbbk V$, 下面对正整数 n 作归纳证明结论. 如果 $n=1$, 那么由 1 阶矩阵是上三角阵直接得到结论. 假设结论对 $n-1(n\ge 2)$ 的情形成立, 现在对 n 维线性空间 V, 应用 [定理1.87] 得到存在 $v\ne 0\in V$ 以及 $\Bbbk$-线性函数 $\lambda:L\to\Bbbk$ 满足 $x(v)=\lambda(x)v,\forall x\in L$. 记 $V_1=\Bbbk v$, 那么 $x(V_1)\subseteq V_1,\forall x\in L$ 说明 $x\in L$ 可自然诱导 V/V_1 上线性变换 $\tilde{x}$. 现在考虑 $\tilde{L}=\{\tilde{x}\in\mathfrak{gl}(V/V_1)|x\in L\}$, $\tilde{L}$ 作为可解 Lie 代数 L 的同态像, [例1.52] 说明 $\tilde{L}$ 也是可解 Lie 代数. 对 $n-1$ 维线性空间 V/V_1 应用归纳假设, 对 $x\in L$, 存在 V/V_1 的基, 设为 $\{\tilde{\varepsilon}_2,\tilde{\varepsilon}_3,...,\tilde{\varepsilon}_n\}$ 使得 $\tilde{x}$ 在此基下的表示矩阵是上三角的. 取定 $\{\varepsilon_2,...,\varepsilon_n\}$ 使得 ε_j 对应 V/V_1 中元素为 $\tilde{\varepsilon}_j$. 现在命 $\varepsilon_1=v$, 那么 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n\}$ 明显是 V 的基, 并且 x 在此基下表示矩阵是上三角的. 至此证明了 Lie 定理.

Corollary 1.90. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数 L 是可解的 $\Leftrightarrow L^{(1)}=[L,L]$ 是幂零的.

Proof. 充分性: 因为 $L/[L,L]$ 是交换 Lie 代数, 所以 $L/[L,L]$ 可解. 如果 $[L,L]$ 是幂零 Lie 代数, 那么也可解. 现在应用 [命题1.55] 得到 L 是可解 Lie 代数. 必要性: 设 L 是可解 Lie 代数, 不妨设 $L\ne 0$. 注意 $\mathrm{ad}(L)$ 是 L 的同态像 ([例1.36]), 所以 $\mathrm{ad}(L)$ 也是可解的 ([例1.52]). 现在 $\mathrm{ad}L$ 作为非零有限维线性空间 L 的一般线性 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(L)$ 的可解 Lie 子代数, 由 Lie 定理知存在 L 的一个基使得所有的 $x\in L$, 伴随变换 ad_x 在此基下表示矩阵是上三角的. 于是对任何 $x,y\in L$, $\mathrm{ad}_{[x,y]}=[\mathrm{ad}_x,\mathrm{ad}_y]$ 在 Lie 定理给出的基下的表示矩阵是严格上三角阵. 特别地, $\mathrm{ad}_{[x,y]}$ 是 L 上的幂零变换. 类似地, 在此基下, 对任何 $x_1,...,x_t,y_1,...,y_t\in L$ 有

$$w=[x_1,y_1]+[x_2,y_2]+\cdots+[x_t,y_t]\in[L,L]$$

对应的伴随变换 ad_w 在 L 上是幂零变换. 特别地, 对任何 $w\in[L,L]$, ad_w 作为 $[L,L]$ 上线性变换依然是幂零的. 现在应用 Engel 定理得到 $[L,L]$ 是幂零 Lie 代数. □

Remark 1.91. 该推论的充分性不需要 $\Bbbk$ 是域以及 L 是有限维线性空间的假设.

Corollary 1.92. 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, L 是非零有限维幂零 Lie 代数, 那么存在 L 的 $\Bbbk$-基, 使得所有的 $x\in L$ 在此基下的表示矩阵均为严格上三角阵. 特别地, 对任何 $x,y\in L$ 有 $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y$ 是 L 上幂零变换.

Proof. 因为幂零 Lie 代数是可解 Lie 代数, 所以应用 Lie 定理得到存在 L 的某个基, 使得所有 $\mathfrak{gl}(L)$ 中元素作为 L 上线性变换在此基下表示矩阵为上三角阵. Engel 定理表明每个伴随变换 ad_x 是 L 上幂零变换, 所以 ad_x 在 Lie 定理给出的基下的表示矩阵是严格上三角阵. □

1.5 半单 Lie 代数

在 [定义1.62] 中已经引入有限维半单 Lie 代数的概念, 即根 (唯一的极大可解 Lie 理想) 为零的有限维 Lie 代数. 有限维单 Lie 代数 (例如 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$) 都是半单 Lie 代数 ([例1.64]). 本节我们进一步讨论有限维半单 Lie 代数的刻画与基本性质. 首先我们来看有限维 Lie 代数的半单性的关于交换 Lie 理想的一个基本刻画.

Lemma 1.93. 设 L 是域 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数, 那么 L 是半单 Lie 代数当且仅当 L 不含非零交换 Lie 理想.

Proof. 必要性: 设 L 是有限维半单 Lie 代数, 那么 L 的任何交换 Lie 理想都是可解的. 假设 L 存在非零交换 Lie 理想, 那么 L 的根不可能是零, 即 L 不是半单的, 矛盾. 充分性: 假设 L 不是半单的, 那么 $J = \mathrm{rad}L \neq 0$. 非零 Lie 理想 J 诱导 L 的 Lie 理想 $[J, J]$. 归纳地由 Jacobi 恒等式易验证对任何正整数 k, $J^{(k)}$ 是 L 的 Lie 理想. 现在由 J 的可解性得到存在正整数 ℓ 使得 $J^{(\ell)} = 0$ 而 $J^{(\ell-1)} \neq 0$. 所以 $J^{(\ell-1)}$ 是 L 的非零交换 Lie 理想. 因此 L 如果没有非零交换 Lie 理想, L 便是半单 Lie 代数. □

通常计算有限维 Lie 代数的根很困难, 因此有必要寻找易于计算的 Lie 代数半单性判别准则. 下面引入 Lie 代数的 Killing 型的概念, 它可提供 Lie 代数半单的一个充要条件.

Definition 1.94 (Killing 型)**.** 设 $(L, [-,-])$ 是域 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数, 记 $\mathrm{tr} : \mathrm{End}_{\Bbbk}L \to \Bbbk$ 是迹映射, 即每个 L 上线性变换 φ 的迹是 $\mathrm{tr}\varphi$. 对 $x, y \in L$, 定义 $\kappa(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y)$, 得到 $\Bbbk$-对称双线性函数

$$\kappa : L \times L \to \Bbbk, (x, y) \mapsto \kappa(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y),$$

称为 L 的 **Killing 型**或 **Cartan-Killing 型**. 当 $L = 0$ 时, 约定 $\kappa = 0$.

Remark 1.95. Killing 型以 W. Killing(德国, 1847-1923) 命名, 但最早由 E. Cartan(法国, 1869-1951) 引入.

Remark 1.96. 保持定义中的假设, Killing 型的一个基本特性是

$$\kappa([x, y], z) + \kappa(y, [x, z]) = 0, \forall x, y, z \in L.$$

上述性质被称为 Killing 型的**不变性**. 下面我们来计算验证 Killing 型的不变性:

$$\begin{aligned}
\kappa([x, y], z) + \kappa(y, [x, z]) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{[x,y]}\mathrm{ad}_z) + \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_{[x,z]}) \\
&= \mathrm{ad}([\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]\mathrm{ad}_z) + \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_y[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_z]) \\
&= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_z - \mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_z\mathrm{ad}_x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

类似地, 可直接计算得到 $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]), \forall x, y, z \in L$.

Remark 1.97. 设域 $\Bbbk$ 上有限维线性空间 V 有子空间 W 以及 V 上线性变换 φ, 如果 $\varphi(V) \subseteq V$, 那么取定 W 的基扩充为 V 的基后容易看到 $\mathrm{tr}(\varphi|_W) = \mathrm{tr}\varphi$. 现在设 L 是有限维 Lie 代数, I 是 Lie 理想, 那么任何 $x \in I$ 满足 $\mathrm{ad}_x(L) \subseteq I$. 所以对任何 $x, y \in I$ 有 $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y|_I) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y)$. 这一观察表明 L 上 Killing 型 $\kappa : L \times L \to \Bbbk$ 限制在 $I \times I$ 上便得到 I 作为 Lie 代数的 Killing 型.

Example 1.98. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上有限维幂零 Lie 代数, 则 Killing 型 $\kappa = 0$.

Proof. 当 $L = 0$ 时结论直接成立, 不妨设 $L \neq 0$. 现在应用 [推论1.92] 即可. □

(特征为零的代数闭域上的) 有限维 Lie 代数的可解性和半单性都可由 Killing 型刻画.

Theorem 1.99 (Cartan 准则, 可解性)**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, $(L, [-,-])$ 是 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数, 那么 L 是可解 Lie 代数的充要条件是 $\kappa(x, [y, z]) = 0, \forall x, y, z \in L$.

Proof. 当 $L = 0$ 时, 结论明显成立. 因此以下总假设 $L \neq 0$. 必要性: 设 L 是可解 Lie 代数, 与 [推论1.90] 的必要性证明类似, 这时 $\mathrm{ad}(L)$ 是 $\mathfrak{gl}(L)$ 的可解 Lie 子代数, 于是可应用 Lie 定理, 即 L 存在基使得所有 $x \in L$ 决定的伴随变换 ad_x 在此基下的表示矩阵都是上三角阵. 于是知对任何 $y, z \in L$, 伴随变换 $\mathrm{ad}_{[y,z]} = [\mathrm{ad}_y, \mathrm{ad}_z]$ 在 Lie 定理给出的基下的表示矩阵是严格上三角阵, 进而 $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_{[y,z]}$ 对任何 $x, y, z \in L$ 在 Lie 定理给出的基下的表示矩阵都是严格上三角阵. 特别地, 有 $\kappa(x, [y, z]) = 0, \forall x, y, z \in L$.

充分性: 现在设 $\kappa(x, [y, z]) = 0, \forall x, y, z \in L$. 我们断言 $\mathrm{ad}L$ 是可解 Lie 代数, 一旦证明此断言, 由 $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{ad}(L), x \mapsto \mathrm{ad}_x$ 是 Lie 代数满同态并且核 $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = Z(L)$ 得到 $L/Z(L)$(应 [引理1.37(1)]) 是可解 Lie 代数. 而 $Z(L)$ 作为交换 Lie 代数自然可解, 所以应用 [命题1.55] 可得 L 是可解 Lie 代数. 因此, 要完成定理证明只需再验证 $\mathrm{ad}(L)$ 可解. 对下面的 [引理1.100], 取 $V = L, \mathfrak{g} = \mathrm{ad}(L)$, 那么 $\kappa(x, [y, z]) = 0, \forall x, y, z \in L$ 表明 V 和 $\mathfrak{g}$ 满足引理条件, 于是应用 [引理1.100] 得到 $\mathrm{ad}(L)$ 可解. □

Lemma 1.100. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, V 是有限维 $\Bbbk$-线性空间, $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数, 如果对任何 $x, y, z \in \mathfrak{g}$ 有 $\mathrm{tr}(x[y, z]) = 0$, 那么 $\mathfrak{g}$ 是可解 Lie 代数.

Proof. 不妨设 $\mathfrak{g} \neq 0$. 根据 [推论1.90], 只要证 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是幂零 Lie 代数. 由 Engel 定理, 只需证明 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 中任何元素决定的 ($[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上) 伴随变换是幂零的, 而 [例1.77] 表明只需证明 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 中任何元素是 V 上幂零变换. 因此要完成引理证明, 只需要再说明 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 中元素均是 (V 上) 幂零变换. 下面我们证明更一般的断言:

给定特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上有限维线性空间 V 的一般线性 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子空间 $A \subseteq B$, 记 $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) | [x, B] \subseteq A\}$. 如果 $x \in M$ 满足 $\mathrm{tr}(xy) = 0, \forall y \in M$, 那么 x 是幂零变换.

一旦证明该断言, 那么将该断言应用于 $A = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], B = \mathfrak{g}$, 这时断言中的 M 明显包含 $\mathfrak{g}$, 并且对每个 $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 以及 $y \in M$, 有 $\mathrm{tr}(xy) = 0$: 设 $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m \in \mathfrak{g}$ 满足 $x = [a_1, b_1] + [a_2, b_2] + \cdots + [a_m, b_m]$, 那么

$$\mathrm{tr}(xy) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}([a_i, b_i]y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(a_ib_iy - b_ia_iy) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(a_ib_iy) - \mathrm{tr}(b_ia_iy) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(b_iya_i) - \mathrm{tr}(b_ia_iy).$$

最后一个表达式为 $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(b_i[y, a_i])$, 根据 $y \in M$ 有 $[y, a_i] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, 因此由条件得到 $\mathrm{tr}(xy) = 0$. 总结一下, 前面的讨论将原有引理的证明转换为证明上述断言. 现在回到断言的记号, 取定 $x \in M$ 满足 $\mathrm{tr}(xy) = 0, \forall y \in M$. 根据线性代数中的 (加性)Jordan-Chevalley 分解, 可将 x 分解为可对角化的线性变换 x_s 和幂零变换 x_n 的和并且满

足 $x_sx_n=x_nx_s$(这里不需要 char$\Bbbk=0$, 仅要求 $\Bbbk$ 是代数闭域), 并且 x_s 与 x_n 都可以表示为关于 x 的 $\Bbbk$ 上常数项为零的多项式. 现在设 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 是 x 在 $\Bbbk$ 上所有特征值 (计重根), 记 E 是 $\Bbbk$ 中由 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 生成的 $\mathbb{Q}$-子空间, 只需证 $E=0$ 来得到 x 是幂零变换 (这里用到了 x 总可上三角化, 所以 x 的幂零性明显等价于所有特征值为零. 将 $\Bbbk$ 视作 $\mathbb{Q}$-线性空间需要 char$\Bbbk=0$). 下证 $E^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{Q})$ 来得到 $E=0$. 设 $f\in E^*$.

现在设 x 在 V 的基 $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ 下的表示矩阵是以 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 为对角元的上三角阵, 且满足 x_s 在此基下表示矩阵是 diag$\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$, x_n 在此基下表示矩阵是严格上三角阵. 选取 V 上线性变换 y 使得 y 在 $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ 下的表示矩阵是 diag$\{f(\lambda_1),f(\lambda_2),...,f(\lambda_n)\}$. 通过基 $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ 可自然诱导 $\mathfrak{gl}(V)$ 的基: 对 $1\leq i,j\leq n$, 定义 $e_{ij}\in\mathfrak{gl}(V)$ 为 $e_{ij}(\varepsilon_j)=\varepsilon_i, e_{ij}(\varepsilon_k)=0,\forall 1\leq k\neq j\leq n$. 在此记号下, 对于在 $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ 下的表示矩阵是 $(a_{ij})_{n\times n}\in\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 的线性变换 θ, 易知 $\theta=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}e_{ij}$.

对前面构造的线性变换 y, 直接计算有 $\mathrm{ad}_y(e_{ij})=[y,e_{ij}]=(f(\lambda_i)-f(\lambda_j))e_{ij}$. 因此 ad_y 在 $\{e_{ij}|1\leq i,j\leq n\}$ 下表示矩阵是对角阵. 利用 Lagrange 插值, 可构造 $\Bbbk$ 上常数项为零的多项式 $g(x)$ 满足

$$g(\lambda_i-\lambda_j)=f(\lambda_i)-f(\lambda_j),\forall 1\leq i,j\leq n.$$

注意, 因为 f 保持加法, 所以如果有 $\lambda_i-\lambda_j=\lambda_s-\lambda_t$, 那么 $f(\lambda_i)-f(\lambda_j)=f(\lambda_s)-f(\lambda_t)$, 因此可合理构造 g. 根据 $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ 的选取, 可直接验证 $\mathrm{ad}_{x_s}(e_{ij})=(\lambda_i-\lambda_j)e_{ij},1\leq i,j\leq n$. 所以 $\mathrm{ad}_y=g(\mathrm{ad}_{x_s})$.

下面说明 $\mathrm{ad}_x=\mathrm{ad}_{x_s}+\mathrm{ad}_{x_n}$ 是 ad_x 的 Jordan-Chevalley 分解. 首先前面的讨论表明 ad_{x_s} 可对角化, [例1.77] 表明 ad_{x_n} 是幂零变换. 其次, $[x_s,x_n]=0$ 保证了 $[\mathrm{ad}_{x_s},\mathrm{ad}_{x_n}]=0$. 所以根据 Jordan-Chevalley 分解的唯一性便知 $\mathrm{ad}_x=\mathrm{ad}_{x_s}+\mathrm{ad}_{x_n}$ 是 ad_x 的 Jordan-Chevalley 分解. 进而 ad_{x_s} 可以表示为系数来自 $\Bbbk$ 的关于 x 的常数项为零的多项式. 于是得到 ad_y 能够表示为关于 ad_x 的常数项为零的多项式.

$x\in M$ 表明 $\mathrm{ad}_x(B)\subseteq A$, 进而由 ad_y 能表示为 ad_x 的多项式得到 $\mathrm{ad}_y(B)\subseteq A$, 即 $y\in M$. 因此由条件得到 $\mathrm{tr}(xy)=0$. 于是 $\lambda_1f(\lambda_1)+\cdots+\lambda_nf(\lambda_n)=0$. 再作用 f 得到 $f(\lambda_1)^2+\cdots+f(\lambda_n)^2=0$. 这迫使每个 $f(\lambda_i)=0$. 进而 $f=0$. 至此得到 $E^*=0$. □

为了之后引用方便, 我们把 [引理1.100] 的证明过程中得到的断言和观察记录为

Lemma 1.101. 给定特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上有限维线性空间 V 的一般线性 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子空间 $A\subseteq B$, 记 $M=\{x\in\mathfrak{gl}(V)|[x,B]\subseteq A\}$. 如果 $x\in M$ 满足 $\mathrm{tr}(xy)=0,\forall y\in M$, 那么 x 是幂零变换.

Lemma 1.102. 给定代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维线性空间 V 上线性变换 x, 设 $x=x_s+x_n$ 是 x 的 Jordan-Chevalley 分解, 其中 x_s 是可对角化线性变换, x_n 是幂零线性变换并满足 $x_sx_n=x_nx_s$. 那么 $\mathrm{ad}_x=\mathrm{ad}_{x_s}+\mathrm{ad}_{x_n}$ 是 ad_x 的 Jordan-Chevalley 分解, 其中 ad_{x_s} 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上可对角化的线性变换, ad_{x_n} 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上幂零变换.

Theorem 1.103 (Cartan 准则, 半单性)**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数, 那么 L 是半单 Lie 代数当且仅当 L 的 Killing 型 $\kappa:L\times L\to\Bbbk$ 是非退化的.

Proof. 必要性: 现在 $I=\{x\in L|\kappa(x,y)=0,\forall y\in L\}$ 明显是 L 的 Lie 理想, 并且对任何 $x,y,z\in I$ 有 $\kappa(x,[y,z])=0$. 因此应用 [定理1.99] 便知 I 是可解 Lie 理想. 于是 [引理1.60] 表明 $I\subseteq\mathrm{rad}L$. L 的半单性迫使 $I=0$. 因此 κ 是非退化对称双线性型. 充分性: 现在设 κ 是非退化双线性型, 根据 [引理1.93], 要证明 L 是半单 Lie 代数, 只需证明 L 不包含交换 Lie 理想. 假设 L 有非零交换 Lie 理想 J, 那么对任何 $x\in J,y,z\in L$ 有 $(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y)^2(z)=[x,[y,[x,[y,z]]]]$. 现在由 J 是 Lie 理想得到 $[y,[x,[y,z]]]\in J$. 于是由 J 的交换性得到

$(\text{ad}_x\text{ad}_y)^2(z)=0$. 由 $z\in L$ 的任意性得到 $(\text{ad}_x\text{ad}_y)^2=0$, 为幂零变换. 这说明 $\kappa(x,y)=\text{tr}(\text{ad}_x\text{ad}_y)=0$. 于是取 $x\neq 0\in J$ 得到 $\kappa(x,L)=0$, 这和 κ 的非退化性矛盾. □

下面我们进一步讨论有限维半单 Lie 代数的结构. 在 [命题1.66] 中我们看到有限个有限维单 Lie 代数的直和是半单 Lie 代数. 因此如果有限维 Lie 代数可分解为有限多个单 Lie 理想的直和, 该 Lie 代数是半单 Lie 代数. 下面我们说明 (对特征为零的代数闭域上的有限维 Lie 代数) 反之亦然. 设 L 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上有限维半单 Lie 代数, 不妨设 $L\neq 0$ 且 L 不是单 Lie 代数. 那么在此假设下 L 存在非平凡 Lie 理想 I, 作 $J=\{x\in L|\kappa(x,y)=0,\forall y\in I\}$, 容易验证 J 是 L 的 Lie 理想. 下证 $I\cap J$ 是可解 Lie 理想, 进而由 L 的半单性得到 $I\cap J=0$. 事实上, 对任何 $x,y,z\in I\cap J$, 明显有 $\kappa(x,[y,z])=0$. 因此由 Cartan 准则 ([定理1.99]) 以及 [注记1.97], $I\cap J$ 是可解 Lie 代数, 于是 $I\cap J=0$. 下证 $\dim_{\Bbbk}I+\dim_{\Bbbk}J=\dim_{\Bbbk}L$. 首先取定 I 的基 $\{x_1,...,x_r\}$, 并扩充为 L 的基 $\{x_1,...,x_r,x_{r+1},...,x_d\}$(这里 $d=\dim_{\Bbbk}L$). 因为 κ 是 L 上非退化对称双线性型, 所以下面的 [引理1.104], 对 L 的基 $\{x_1,...,x_d\}$, 存在 L 的基 $\{x_1^*,...,x_d^*\}$ 使得 $\kappa(x_i,x_j^*)=\delta_{ij}$.

Lemma 1.104. 设 V是域 $\Bbbk$ 上 $d\geq 1$ 维线性空间, $\langle -,-\rangle:V\times V\to\Bbbk$ 是非退化对称双线性型. 那么对 V 的任何 $\Bbbk$-基 $\{v_1,...,v_d\}$, 存在 $\Bbbk$-基 $\{v_1^*,...,v_d^*\}\subseteq V$ 使得 $\langle v_i,v_j^*\rangle=\delta_{ij},\forall 1\leq i,j\leq d$.

Proof. 由条件, 矩阵 $T=(\langle v_i,v_j\rangle)_{d\times d}$ 可逆. 于是可通过下述关系定义 $\{v_1^*,...,v_d^*\}\subseteq V$:

$$(v_1^*,v_2^*,...,v_d^*)T=(v_1,v_2,...,v_d).$$

可直接计算验证 $\langle v_i,v_j^*\rangle=\delta_{ij},\forall 1\leq i,j\leq d$. 并且利用该关系易见 $\{v_1^*,...,v_d^*\}$ 的线性无关性. □

现在明显有 $x_{r+1}^*,...,x_d^*\in J$. 任取 J 中元素, 表示为 $x_1^*,...,x_d^*$ 的 $\Bbbk$-线性组合后, 利用 $x_i(1\leq i\leq r)$ 和该元素在 κ 下取值为零可知 J 有 $\Bbbk$-基 $\{x_{r+1}^*,...,x_d^*\}$. 由此得到 $\dim_{\Bbbk}I+\dim_{\Bbbk}J=\dim_{\Bbbk}L$. 所以由 $I\cap J=0$ 得到 $L=I\oplus J$, 即 L 可分解为维数严格小于 L 的非零 Lie 理想的直和. 再指出上面的讨论也蕴含: 如果 $x\in L$ 满足 $\kappa(x,J)=0$, 那么 $x\in I$. 于是利用 $I\cap J$ 以及 [注记1.97] 得到 I 和 J 上的 Killing 型都是非退化的. 因此由 Cartan 准则 ([定理1.103]) 得到 I,J 均为有限维半单 Lie 代数. 总结一下, 我们得到对有限维半单 Lie 代数 L, 只要 $L\neq 0$ 且 L 不是单 Lie 代数, 那么 L 可分解为两个维数严格小于自身的 (非零) 半单 Lie 代数的直和. 考虑到 L 的维数有限, 上述分解在有限步后终止, 即 L 总能够分解为有限多个单 Lie 代数的直和. 总结一下, 我们得到半单 Lie 代数关于单 Lie 代数分解的存在性定理:

Theorem 1.105. 特征为零的代数闭域上有限维半单 Lie 代数总是有限多个单 Lie 理想的直和.

Remark 1.106. 如果特征为零的代数闭域上有限维半单 Lie 代数 L 有单 Lie 理想的直和分解 $L=I_1\oplus\cdots\oplus I_s$, 那么对不同的 $1\leq i\neq j\leq s$ 有 $[I_i,I_j]\subseteq I_i\cap I_j=0$.

[定理1.105] 的证明过程表明如果 L 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维半单 Lie 代数, 那么 L 的非平凡 Lie 理想 I 满足与 $J=\{x\in L|\kappa(x,y)=0,\forall y\in I\}$ 相交为零. 特别地, L 的 Killing 型限制在 I 上依然非退化, 所以实际上 [定理1.105] 的证明过程也告诉我们 (特征为零的代数闭域上) 有限维半单 Lie 代数的 Lie 理想依然是半单 Lie 代数. 并且在 [定理1.105] 的证明过程也看到 $L=I\oplus J$. 所以 L 的任何 Lie 理想 I 都满足存在 Lie 理想 J 使得 $L=I\oplus J$, 特别地, $L/I\cong J$ 也是半单 Lie 代数. 因此 [定理1.105] 的证明过程告诉我们更多:

Proposition 1.107. 特征为零的代数闭域上有限维半单 Lie 代数的 Lie 理想和同态像均为有限维半单 Lie 代数.

Corollary 1.108. 特征为零的代数闭域上有限维半单 Lie 代数 L 满足 $L = [L, L]$.

Proof. 不妨设 $L \neq 0$. 根据 [定理1.105], 存在单 Lie 理想的分解 $L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_s$. 那么对每个 $1 \leq j \leq s$ 都有 $I_j = [I_j, I_j]$. 于是利用 $[I_j, I_j] \subseteq [L, L]$ 得到 $I_j \subseteq [L, L]$. 故 $L \subseteq [L, L]$. □

Theorem 1.109. 特征为零的代数闭域上有限维半单 Lie 代数关于单 Lie 理想的分解式在不计次序下唯一.

Proof. 设 L 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维半单 Lie 代数, 不妨设 $L \neq 0$. 并设有单 Lie 理想的分解 $L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_s$. 现在设 J 是 L 的单 Lie 理想, 那么 $[J, L]$ 也是 L 的 Lie 理想, 并且非零 (回忆 [注记1.61] 已指出这时 $Z(L) = 0$). 进而由 J 是单 Lie 代数得到 $[J, L] = J$. 所以 $J = [J, L] = [J, I_1] \oplus \cdots \oplus [J, I_s]$. 特别地, 存在唯一的 $1 \leq i \leq s$ 使得 $J = [J, I_i] \subseteq I_i$. 于是 $J = I_i$. 现在设 L 还有单 Lie 理想的分解 $L = J_1 \oplus \cdots \oplus J_t$, 那么 $\{J_1, ..., J_t\} \subseteq \{I_1, ..., I_s\}$. 对称地, 也有 $\{I_1, ..., I_s\} \subseteq \{J_1, ..., J_t\}$. 于是知结论成立. □

Remark 1.110. 定理的证明过程也告诉我们给定特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数 L 关于单 Lie 理想的分解式 $L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_s$ 后, L 的任何 Lie 理想都能分解为一些 I_k 的直和: 设 J 是 L 的 Lie 理想, 不妨设 $J \neq 0$. 根据 [命题1.107], J 也是半单的. 所以应用 [推论1.108] 可知 $[J, J] = J$. 特别地, $[J, L] = L$. 于是 $J = [J, L] = [J, I_1] \oplus \cdots \oplus [J, I_s]$. 现在每个 $[J, I_k] \subseteq I_k$ 作为 L 的 Lie 理想也是 I_k 的 Lie 理想, 不是零就是 I_k.

现在我们把特征为零的代数闭域上有限维 Lie 代数的半单性刻画总结为

Theorem 1.111 (半单性刻画). 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数, 那么以下等价:
(1) L 是半单 Lie 代数.
(2) L 不含非零交换 Lie 理想.
(3) L 的 Killing 型 $\kappa : L \times L \to \Bbbk$ 非退化.
(4) L 可分解为有限个单 Lie 理想的直和.
并且当上述条件之一成立时, (4) 中 L 关于单 Lie 理想的分解在不计次序下唯一.

Proof. (1) 与 (2) 的等价性来自 [引理1.93], (1) 与 (3) 的等价性来自 [定理1.103], (1) 与 (4) 的等价性来自 [命题1.66] 和 [定理1.105]. 当 L 是有限维半单 Lie 代数时, 其关于单 Lie 理想分解的唯一性来自 [定理1.109]. □

利用 Killing 型关于 Lie 代数半单性的刻画我们也可以完全确定半单 Lie 代数的导子 Lie 代数 (回忆 [注记1.18], 并且在 [例1.26] 中看到, 对 $\Bbbk$-Lie 代数 L, $\mathrm{ad}(L)$ 是 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}L$ 的 Lie 理想且任何 $D \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}L$ 和 $x \in L$ 满足 $[D, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{D(x)}$). 依然设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上有限维半单 Lie 代数, 为叙述方便, 引入临时记号 $\mathfrak{a} = \mathrm{ad}(L), \mathfrak{d} = \mathrm{Der}_{\Bbbk}L$. 那么 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{d}$ 的 Lie 理想并且由 $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{a}, x \mapsto \mathrm{ad}_x$ 是 Lie 代数同构 (回忆 [注记1.61]) 得到 $\mathfrak{a}$ 具有非退化的 Killing 型 $\kappa_{\mathfrak{a}}$. 因为 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{d}$ 的 Lie 理想, 所以 $\kappa_{\mathfrak{a}}$ 是 $\mathfrak{d}$ 的 Killing 型 $\kappa_{\mathfrak{d}}$ 在 $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ 的限制 ([注记1.97]). 现在我们设 $\mathfrak{a}^{\perp} = \{D \in \mathfrak{d} | \kappa_{\mathfrak{d}}(D, \mathrm{ad}_x) = 0, \forall x \in L\}$, 这是 $\mathfrak{d}$ 的 Lie 理想, 并且 $\kappa_{\mathfrak{a}}$ 的半单性迫使 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$. 特别地, 由 $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}$ 是 $\mathfrak{d}$ 的 Lie 理想得到 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$, 因此 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}] = 0$. 下证 $\mathfrak{a}^{\perp} = 0$. 一旦证明该断言, 则有 $\kappa_{\mathfrak{d}}$ 非退化, 类似 [定理1.105] 的证明过程, 对 $\mathfrak{d}$ 应用 [引理1.104] 得到 $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$(前面已经说明 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$). 特别地, $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$. 下面证明断言. 任取 $D \in \mathfrak{a}^{\perp}$, 则 $[D, \mathrm{ad}_x] = 0, \forall x \in L$, 即 $\mathrm{ad}_{D(x)} = 0, \forall x \in L$. 这时 ad 作为单射迫使 $D(x) = 0, \forall x \in L$. 所以 $D = 0$, 进而 $\mathfrak{a}^{\perp} = 0$. 于是我们证明了

Theorem 1.112. 特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维半单 Lie 代数 L 满足 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}L = \mathrm{ad}(L)$.

1.6 Lie 代数的表示

研究代数结构的表示是基本且重要的课题, 并且是研究复杂对象的有力工具. 例如在有限群表示论中, 已知的不使用表示论工具证明 Burnside(可解性) 定理的方法要比使用表示论工具复杂得多. 本节我们学习 Lie 代数的表示的基本概念. 以下固定交换环 K, 如无特别说明, 考虑的 Lie 代数均为 K-模.

Definition 1.113. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, V 是 K-模, 考虑 $\mathrm{End}_K V$ 上导出 Lie 代数结构. 称 Lie 代数同态 $\rho: L\to \mathrm{End}_K V$ 为 Lie 代数 L 的一个**表示**. 如果有 K-双线性映射 $\{-,-\}: L\times V\to V, (a,x)\mapsto \{a,x\}$ 满足 $\{[a,b],x\}=\{a,\{b,x\}\}-\{b,\{a,x\}\},\forall a,b\in L, x\in V$, 则称 $(V,\{-,-\})$ 为 L 上的 (左)**Lie 模**. 如果 L 有表示 $\rho_1: L\to \mathrm{End}_K V_1, \rho_2: L\to \mathrm{End}_K V_2$, 称 K-模同态 $f: V_1\to V_2$ 是这两个表示间的**同态**, 如果对任意 $a\in L$, 有

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ {\scriptstyle \rho_1(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_2(a)} \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array}$$

交换. 如果表示间的同态是双射, 则称为表示间的**同构**. 称 L 上 Lie 模 $(V_1,\{-,-\}_1),(V_2,\{-,-\}_2)$ 间的 K-模同态 $f: V_1\to V_2$ 是 **Lie 模同态**, 如果 $f(\{a,x\}_1)=\{a,f(x)\}_2,\forall a\in L, x\in V_1$. 称可逆的 Lie 模同态为 **Lie 模同构**. 记 L(在 K 上) 的表示范畴为 $\mathbf{Rep}_K L$, L 上的 Lie 模范畴记作 L-**LieMod**.

Remark 1.114. 如果 $\rho: L\to \mathrm{End}_K V$ 为 Lie 代数 L 的表示, 那么定义 $\{-,-\}: L\times V\to V, (a,x)\mapsto \rho(a)(x)$ 便得到 Lie 模 $(V,\{-,-\})$. 反之, 若给定一 Lie 模 $(V,\{-,-\})$, 定义 $\rho: L\to \mathrm{End}_K V, a\mapsto \{a,-\}$ 可得 Lie 代数 L 的表示, 因此 Lie 代数上的 Lie 模和 Lie 代数的表示本质上没有区别. 根据上述讨论不难看出范畴同构 $\mathbf{Rep}_K L\cong$ L-**LieMod**. 因此研究 Lie 代数的表示本质上就是研究 Lie 模. 类似地可定义 Lie 代数 L 上右 Lie 模的概念: 若 K-模 V 满足存在 K-双线性映射 $\{-,-\}: V\times L\to V, (x,a)\mapsto\{x,a\}$ 满足 $\{x,[a,b]\}=\{\{x,a\},b\}-\{\{x,b\},a\}$, 则称 $(V,\{-,-\})$ 为 L 上**右 Lie 模**, 可类似定义右 Lie 模间同态. 如无特别说明, 以后考虑的 Lie 模都是左 Lie 模.

考虑到 Lie 代数的表示范畴与 Lie 代数上 Lie 模范畴的同构关系, 之后将自由地使用表示和 Lie 模的术语.

Example 1.115 (伴随表示)**.** 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, 每个 $x\in L$, 对应内导子 $\mathrm{ad}_x: L\to L, a\mapsto [x,a]$. 命 $\mathrm{ad}: L\to \mathrm{End}_K L, x\mapsto \mathrm{ad}_x$, 之前已经在 [例1.36] 中指出这是 Lie 代数同态, 所以 ad 是 L 在 K 上的表示, 称之为 L 的**伴随表示**. 该表示对应的 Lie 模就是 L 自身, Lie 模结构由 L 上 Lie 括号给出.

Example 1.116. 设 A 是 K-(结合) 代数, M 是左 A-模, 对应 K-代数同态 $\rho: A\to \mathrm{End}_K M, a\mapsto a_\ell$, 这里 a_ℓ 表示 a 在 M 上的左乘变换. 现在考虑 A 的导出 Lie 代数 A^-(回忆 [例1.5]), 那么 $\rho: A^-\to \mathrm{End}_K M$ 是 Lie 代数 A^- 的表示. 特别地, M 上有相应的 Lie 模结构.

Example 1.117 (Lie-Rinehart 代数)**.** 设 A 是 K-交换代数, L 是 A-模且有 K-Lie 代数结构 $(L,[-,-])$. 如果有 K-Lie 代数同态 $\rho: L\to \mathrm{Der}_K A$ 满足 ρ 是 A-模同态且 $[x,ay]=a[x,y]+(\rho(x)a)y,\forall x\in L, a\in A$, 则称 $(L,[-,-],\rho)$ 是 **Lie-Rinehart 代数**. 通常也简称 (A,L) 是 Lie-Rinehart 代数. 设 W 是 A-模, 如果 A-模同态 $\theta: L\to \mathrm{End}_K W$ 满足 $\theta(x)(aw)=a\theta(x)(w)+\rho(x)(a)w,\forall a\in A, x\in L, w\in W$, 则称 θ 是 W 上的 L-**联络**. 称 $L\times L\to \mathrm{End}_K W, (x,y)\mapsto \theta(x)\theta(y)-\theta(y)\theta(x)-\theta([x,y])$ 为 θ 的**曲率**. 曲率为零的 L-联络称为**平坦的**. 如果 $\theta: L\to \mathrm{End}_K W$ 是 W 上平坦联络, 称 (W,θ) 是 (A,L)-**模**.

类似于群表示的场景, Lie 代数的表示也有对偶表示以及表示的张量积构造.

Example 1.118 (对偶表示)**.** 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, $(V,\{-,-\})$ 是 L 上 Lie 模, 记 $V^* = \mathrm{Hom}_K(V,K)$ 是对偶模. 命 $\{-,-\}_{V^*}: L\times V^*\to V^*, (x,f)\mapsto \{x,f\}_{V^*}$, 其中 $\{x,f\}_{V^*}: V\to K, v\mapsto -f(\{x,v\})$. 那么 $\{x,f\}_{V^*}\in V^*$, $\{-,-\}_{V^*}$ 明显是双线性的. 任取 $x,y\in L, f\in V^*$, 有 $\{[x,y],f\}_{V^*}(v) = -f(\{[x,y],v\}), \forall v\in V$. 再由 $\{x,\{y,f\}_{V^*}\}_{V^*}(v)-\{y,\{x,f\}_{V^*}\}_{V^*}(v) = f(\{y,\{x,v\}\}) - f(\{x,\{y,v\}\}) = -f(\{[x,y],v\})$ 得到前面定义的 $(V^*,\{-,-\}_{V^*})$ 是 L 上 Lie 模, 称之为 V 的对偶 Lie 模. 与之相应的表示称为**对偶表示**.

Example 1.119 (表示的张量积)**.** 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, $(V,\{-,-\}_V),(W,\{-,-\}_W)$ 是 L 上 Lie 模. 任给 $x\in L$, 有 $V\otimes_K W$ 上 K-模同态 $\{x,-\}_V\otimes_K \mathrm{id}_W+\mathrm{id}_V\otimes\{x,-\}_W$, 记之为 $\{x,-\}_{V\otimes_K W}$. 则有 K-双线性映射

$$\{-,-\}_{V\otimes_K W}: L\times V\otimes_K W\to V\otimes_K W, (x,m)\mapsto \{x,m\}_{V\otimes_K W}.$$

现在任取 $x,y\in L, v\in V, w\in W$, 那么

$$\begin{aligned}\{[x,y],v\otimes w\}_{V\otimes_K W} &= \{[x,y],v\}_V\otimes w + v\otimes\{[x,y],w\}_W\\ &= \{x,\{y,v\}_V\}_V\otimes w - \{y,\{x,v\}_V\}_V\otimes w + v\otimes\{x,\{y,w\}_W\}_W - v\otimes\{y,\{x,w\}_W\}_W\\ &= \{x\{y,v\otimes w\}_{V\otimes_K W}\}_{V\otimes_K W} - \{y\{x,v\otimes w\}_{V\otimes_K W}\}_{V\otimes_K W}.\end{aligned}$$

所以 $(V\otimes_K W,\{-,-\}_{V\otimes_K W})$ 是 L 上 Lie 模, 称之为 V 和 W 的 (Lie 模) **张量积** (作为 K-模就是通常的张量积 $V\otimes_K W$). 称 Lie 模 $(V\otimes_K W,\{-,-\}_{V\otimes_K W})$ 对应的表示为 V 和 W 对应**表示的张量积**.

Example 1.120 (Lie 模的 Hom 集)**.** 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, $(V,\{-,-\}_V),(W,\{-,-\}_W)$ 是 L 上 Lie 模. 任给 $f\in\mathrm{Hom}_K(V,W)$ 以及 $x\in L$, 定义 $\{x,f\}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}: V\to W, v\mapsto \{x,f(v)\}_W - f(\{x,v\}_V)$. 下面说明 $(\mathrm{Hom}_K(V,W),\{-,-\}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)})$ 是 L 上 Lie 模. 首先明显上述定义的 $\{x,f\}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}\in\mathrm{Hom}_K(V,W)$. 并且 $\{-,-\}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}: L\times\mathrm{Hom}_K(V,W)\to\mathrm{Hom}_K(V,W)$ 是 K-双线性映射. 现在取定 $x,y\in L, f\in\mathrm{Hom}_K(V,W)$, 那么对任何 $v\in V$, 有

$$\begin{aligned}\{[x,y],f\}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}(v) &= \{[x,y],f(v)\}_W - f(\{[x,y],v\}_V)\\ &= \{x,\{y,f(v)\}_W\}_W - \{y,\{x,f(v)\}_W\}_W - f(\{x,\{y,v\}_V\}_V) + f(\{y,\{x,v\}_V\}_V)\\ &= \{x,\{y,f\}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}\}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}(v) - \{y,\{x,f\}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}\}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}(v).\end{aligned}$$

所以 $(\mathrm{Hom}_K(V,W),\{-,-\}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)})$ 是 L 上 Lie 模, 即 Lie 模的 (K-模同态)Hom 集上有自然的 Lie 模结构. 如果取 $W=K$, 并在 K 上赋予平凡的 Lie 模结构 $\{-,-\}_K: L\times K\to K, (x,\alpha)\mapsto 0$, 那么按照上述定义给出的 $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ 上 Lie 模结构与 [例1.118] 一致, 即退化为 Lie 模 V 给出的对偶表示.

Example 1.121 (半单 Lie 代数的 1 维表示平凡)**.** 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上有限维半单 Lie 代数, 那么任何 1 维表示 $\rho: L\to\mathrm{End}_{\Bbbk}V$ 是平凡的, 即 $\rho=0$.

Proof. 根据 [推论1.108], $L=[L,L]$, 所以 $\rho([L,L])=\rho(L)$. 设 V 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $\{v\}$, 根据 $\rho(L)=[\rho(L),\rho(L)]$ 可知任何 $x\in L$ 对应的 V 上线性变换的迹是零. 设 $x\in L$, 那么存在 $\lambda\in\Bbbk$ 使得 $\rho(x)(v)=\lambda v$. 于是由 $\mathrm{tr}(\rho(x))=\lambda$ 得到 $\lambda=0$. 因此 $\rho(x)=0,\forall x\in L$. □

Proposition 1.122. 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, $(L,[-,-])$ 是 $\Bbbk$ 上有限维半单 Lie 代数, $\rho: L\to\mathrm{End}_{\Bbbk}V$ 是 L 的非零有限维表示, 那么对 V 作为 L 上 Lie 模的任何 Lie 子模 W, 有 $\mathrm{tr}(\rho(x)|_W)=0,\forall x\in L$.

Proof. 因为 W 是 V 的 Lie 子模, 所以 $\rho(x)(W) \subseteq W, \forall x \in L$. 现在 [推论1.108] 表明 $L=[L,L]$, 因此任何 $x \in L$ 可表示为形如 $[x_i, x_i']$ 的有限和, 于是由 $\rho([x_i,x_i'])=[\rho(x_i),\rho(x_i')]$ 的迹为零得到结论. □

固定 K-Lie 代数 L. 称 L 上 Lie 模 $(V,\{-,-\})$ 的 K-子模 W 为 **Lie 子模**, 如果 $\{L,W\} \subseteq W$.

Example 1.123. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, V 是 L 上 Lie 模, 且 V 有 Lie 子模 V_1. 那么由 [例1.120], $\mathrm{Hom}_K(V,V_1)$ 上有自然的 Lie 模结构. 命

$$H_0=\{\tau \in \mathrm{Hom}_K(V,V_1) | \tau|_{V_1}=0\}, H_1=\{\tau \in \mathrm{Hom}_K(V,V_1) | \text{存在}\alpha \in K \text{ 使得}\tau|_{V_1}=\alpha \mathrm{id}_{V_1}\}.$$

那么 H_0 和 H_1 都是 Lie 模 $\mathrm{Hom}_K(V,V_1)$ 的 Lie 子模.

Proof. 取定 $x \in L, f \in H_0, g \in H_1, v_1 \in V_1$. 那么 $\{x,f\}_{\mathrm{Hom}_K(V,V_1)}(v_1)=\{x,f(v_1)\}_{V_1}-f(\{x,v_1\}_V)=0$. 所以由 $v_1 \in V_1$ 的任意性得到 H_0 是 $\mathrm{Hom}_K(V,V_1)$ 的 Lie 子模. 设 g 满足存在 $\alpha \in K$ 使得 $g|_{V_1}=\alpha\mathrm{id}_{V_1}$. 同样直接计算

$$\{x,g\}_{\mathrm{Hom}_K(V,V_1)}(v_1)=\{x,g(v_1)\}_{V_1}-g(\{x,v_1\}_{V_1})=\alpha\{x,v_1\}-\alpha\{x,v_1\}_{V_1}=0.$$

因此也有 $\{x,g\}_{\mathrm{Hom}_K(V,V_1)} \in H_1$. 所以 H_0 和 H_1 都是 Lie 模 $\mathrm{Hom}_K(V,V_1)$ 的 Lie 子模. □

易见 Lie 模任意一族 Lie 子模的和以及交均为 Lie 子模. 如果将 K-Lie 代数 L 视作自身上 Lie 模, 那么 Lie 理想等价于 L 的 Lie 子模. 任给一族 L 上 Lie 模 $\{(V_i,\{-,-\}_i)\}_{i\in I}$, 可通过定义 $\{-,-\}: L \times \prod\limits_{i\in I} V_i \to \prod\limits_{i \in I} V_i, (a,(x_i)_{i\in I}) \mapsto (\{a,x_i\}_i)_{i\in I}$ 来赋予这族 Lie 代数的直积上的 Lie 模结构, 类似可定义任意一族 Lie 模的直和. 易见

Lemma 1.124. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, $(V,\{-,-\})$ 是 L 上 Lie 模, 则 $\mathrm{Ann}_L V=\{x \in L | \{x,V\}=0\}$ 是 L 的 Lie 理想. 称 $\mathrm{Ann}_L V$ 为 Lie 模 V 的**零化子**. 如果 $\mathrm{Ann}_L V=0$, 称 V 是**忠实的** (相应的表示称为**忠实表示**).

Proof. 易见 $\mathrm{Ann}_L V$ 是 L 的 K-子模. 任取 $x \in \mathrm{Ann}_L V, y \in L$, 有 $\{[x,y],v\}=\{x,\{y,v\}\}-\{y,\{x,v\}\}, \forall v \in V$. 所以 $[x,y] \in \mathrm{Ann}_L V$. 这说明 $\mathrm{Ann}_L V=\{x \in L | \{x,V\}=0\}$ 是 L 的 Lie 理想. □

Remark 1.125. 设 $\rho: L \to \mathrm{End}_K V$ 是 Lie 代数 L 的表示, 那么 ρ 是忠实表示当且仅当 $\mathrm{Ker}\rho=0$.

Proposition 1.126. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, $(V,\{-,-\})$ 是 L 上 Lie 模 (对应的表示记作 $\rho: L \to \mathrm{End}_K V$), 那么 V 可自然视作 $L/\mathrm{Ann}_L V = L/\mathrm{Ker}\rho$ 上的 Lie 模: $\{x+\mathrm{Ann}_L V, v\}_1=\{x,v\}, \forall x \in L, v \in V$. 这对应 Lie 代数 $L/\mathrm{Ann}_L V$ 的表示 $\overline{\rho}: L/\mathrm{Ann}_L V \to \mathrm{End}_K V, x+\mathrm{Ann}_L V \to \rho(x)$.

Proof. 易见 $\mathrm{Ker}\rho=\mathrm{Ann}_L V$, [引理1.124] 表明这是 L 的 Lie 理想, 于是命题其他结论是明显的. □

Remark 1.127. 将 L 的表示 $\rho: L \to \mathrm{End}_K V$ 视作 $L/\mathrm{Ker}\rho$ 的表示 $\overline{\rho}: L/\mathrm{Ann}_L V \to \mathrm{End}_K V, x+\mathrm{Ann}_L V \to \rho(x)$ 后, 易见 V 是 L 上不可约 Lie 模当且仅当 V 是 $L/\mathrm{Ker}\rho$ 上不可约 Lie 模.

如果 X 是 Lie 代数 L 上 Lie 模 V 的 Lie 子模, 易见 V/X 上有自然的 L 上 Lie 模结构, 称为**商 Lie 模**.

Lemma 1.128. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, $(V,\{-,-\}_V),(W,\{-,-\}_W)$ 是 L 上的 Lie 模且 $f: V \to W$ 是 Lie 模同态. 那么 $\mathrm{Ker}f$ 是 V 的 Lie 子模, $\mathrm{Im}f$ 是 W 的 Lie 子模并且有 Lie 模同构 $V/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f$.

Proof. 任取 $v \in \mathrm{Ker}f, x \in L$, 有 $f(\{x,v\}_V) = \{x, f(v)\}_W = 0$, 所以 $\mathrm{Ker}f$ 是 V 的 Lie 子模. 也容易验证 $\mathrm{Im}f$ 是 W 的 Lie 子模. 不难看出 f 诱导 K-模同构 $V/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f$ 是 Lie 模同构. □

Definition 1.129. 设 L 是 K-Lie 代数, 称 L 上 Lie 模 $V \neq 0$ 是**不可约的**, 如果 V 的 Lie 子模只有 0 和 V. 将不可约 Lie 模对应的 Lie 代数的表示称为**不可约表示**. 称 L 上 Lie 模 V 是**完全可约的**, 如果 V 是一些不可约 Lie 子模的直和 (这时 L 作为 K-模也完全可约). 完全可约 Lie 模对应的表示称为**完全可约表示**.

Remark 1.130. Lie 代数的不可约表示明显是完全可约表示, 不可约 Lie 模总是完全可约 Lie 模.

Example 1.131. 设域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$, 那么 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 是自身上的不可约 Lie 模 (见 [例1.45]). 在 (结合) 代数的不可约场景, 不可约模的任何非零元生成整个模. 而在不可约 Lie 模场景, 例如取 $I_2 \in \mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$, $[\mathfrak{sl}_2(\Bbbk), I_2] = 0$.

Example 1.132. 设 $\Bbbk$ 是域, $\mathfrak{t}_2(\Bbbk)$([例1.16]) 中所有严格上三角阵构成的 Lie 理想为 I, 那么 I 是 1 维 Lie 模, 给出 $\mathfrak{t}_2(\Bbbk)$ 的不可约 Lie 模. 但 I 并不是单 Lie 理想.

Proposition 1.133 (Schur 引理)**.** 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, L 是 $\Bbbk$-Lie 代数, V 是 L 上有限维不可约 Lie 模. 那么对任何 Lie 模同态 $f: V \to V$, 存在唯一的 $\lambda \in \Bbbk$ 使得 $f = \lambda \mathrm{id}$.

Proof. 如果 $f = 0$, 结论直接成立. 下设 $f \neq 0$, 则 [引理1.128] 表明 f 是 Lie 模同构. 由此可知 V 上所有 Lie 模自同态环是 $\Bbbk$ 上有限维可除代数. 故由 f 在代数闭域 $\Bbbk$ 上的最小多项式作为不可约多项式次数为 1 得证. □

根据单 Lie 代数的定义, K-Lie 代数 L 是单 Lie 代数的充要条件是 L 不是交换的且 ${}_LL$ 是不可约 Lie 模. 通过 [定理1.111], 我们看到当 L 是特征零的代数闭域上的有限维 Lie 代数时, L 是半单 Lie 代数表明 L 是自身上的完全可约 Lie 模 (更一般地, 之后我们会证明这时 L 上任何有限维表示都是完全可约的). 类似与环上模的完全可约性刻画, 我们能够对 Lie 模作类似讨论 (见 [定理1.138]). 反之, L 作为 L 上 Lie 模的完全可约性并不能够保证 L 是半单的. 例如设 $L \neq 0$ 是非零有限维线性空间, 赋予平凡 Lie 括号, 那么 L 可分解为一些 1 维 Lie 理想的直和, 这说明 L 是自身上完全可约模, 但 $Z(L) = L \neq 0$ 意味着 L 不是半单的.

固定 K-Lie 代数 L 上 Lie 模 V, 如果 V 的 Lie 子模集 $\{V_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 满足对任何 $\beta \in \Gamma$ 有

$$V_\beta \cap \left(\sum_{\alpha \neq \beta \in \Gamma} V_\alpha \right) = 0,$$

则称 $\{V_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 是**独立的**, 即有 $\sum\limits_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha = \oplus_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha$. 下面我们做些准备后证明 Lie 模完全可约性的刻画.

Lemma 1.134. 给定 K-Lie 代数 L 以及 Lie 模 V. 如果 $\{V_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 是 V 的独立 Lie 子模集, X 是 V 的 Lie 子模满足

$$X \cap \sum_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha = 0,$$

那么 $\{V_\alpha | \alpha \in \Gamma\} \cup \{X\}$ 是 V 的独立 Lie 子模集.

Proof. 若不然, 则存在 $x \in X, \alpha_1, ..., \alpha_s \in \Gamma, y_1 \in V_{\alpha_1}, ..., y_s \in V_{\alpha_s}$ 使得 $x + y_1 + \cdots + y_s \neq 0$. 假设 $x = 0$, 那么 $y_1 + \cdots + y_s \neq 0$ 与 $\{V_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 的独立性矛盾. 所以 $x \neq 0 \in X \cap (V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_s})$, 与条件矛盾. □

Proposition 1.135. 给定 K-Lie 代数 L 和 Lie 模 V. 设 $\{V_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ 是 V 的不可约 Lie 子模集, 满足 $V=\sum\limits_{\alpha\in\Gamma}V_\alpha$. 那么任给 L 的 Lie 子模 X, 存在 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 使得 $\{V_\alpha|\alpha\in\Gamma'\}\cup\{X\}$ 独立且 $V=X\oplus(\oplus_{\alpha\in\Gamma'}V_\alpha)$. 特别地, 若 V 是 L 上完全可约 Lie 模, 则 V 的任何 Lie 子模 X 都是 Lie 模的直和因子 (即存在 V 的 Lie 子模 Y 使 $L=X\oplus Y$).

Proof. 考虑 V 的所有包含 X 的 $\{V_\alpha|\alpha\in\Gamma\}\cup\{X\}$ 的独立 Lie 子模集构成的集合 (由于 $\{X\}$ 是独立 Lie 子模集, 故该集合关于包含关系构成非空偏序集), 容易验证该集合的任何全序子集有上界, 因此应用 Zorn 引理可得有极大元, 设为 $\{V_\alpha|\alpha\in\Gamma'\}\cup\{X\}$. 记 $V'=X\oplus(\oplus_{\alpha\in\Gamma'}V_\alpha)$, 下证 $V=V'$. 任取 $V_\beta(\beta\in\Gamma)$, 如果 $V_\beta\cap V'=0$, 那么 [引理1.134] 表明 $\{V_\alpha|\alpha\in\Gamma'\}\cup\{X,V_\beta\}$ 是独立 Lie 子模集. 这和 $\{V_\alpha|\alpha\in\Gamma'\}\cup\{X\}$ 的极大性矛盾. 进而知对每个 $\alpha\in\Gamma$ 有 $V_\alpha\cap V'=V_\alpha$. 特别地, $V=V'$. □

Proposition 1.136. 给定 K-Lie 代数 L 和 Lie 模 V, 满足 V 的任何 Lie 子模是 Lie 模的直和因子. 那么对 V 的任何 Lie 子模 X, X 和 V/X 的每个 Lie 子模都是它们作为 Lie 模的直和因子.

Proof. 任取 X 的 Lie 子模 X', 那么存在 V 的 Lie 子模 Y 使得 $L=X'\oplus Y$. 特别地, $X=X'\oplus(Y\cap X)$, 这里 $Y\cap X$ 也是 X 的 Lie 子模. 现在 X 作为 V 的 Lie 子模满足存在 V 的 Lie 子模 V' 使得 $V=X\oplus V'$, 进而有 Lie 模同构 $V/X\cong V'$([引理1.128]). 于是由 V' 的任何 Lie 子模是 Lie 模直和因子得到 V/X 也具有此性质. □

Corollary 1.137. 给定 K-Lie 代数 L 和 Lie 模 $V\neq 0$. 如果 V 的任何 Lie 子模都是 V 作为 Lie 模的直和因子, 那么 V 存在不可约 Lie 子模.

Proof. 取定 $x\neq 0\in V$, 那么利用 Zorn 引理可得存在不含 x 的极大 Lie 子模 Y. 于是存在 V 的 Lie 子模 T 使得 $V=Y\oplus T$. 特别地, 有 Lie 模同构 $V/Y\cong T$. 因此由 Y 的极大性知 T 的任何两个非零 Lie 子模之交非零 (包含 $x+Y\in V/Y$ 所对应的 T 中非零元). 于是由 T 的任何 Lie 子模是直和因子 ([命题1.136]) 得到结论. □

Theorem 1.138. 设 L 是 K-Lie 代数, $V\neq 0$ 是 L 上 Lie 模, 那么以下等价:
(1) V 是完全可约 Lie 模.
(2) V 是一些不可约 Lie 子模的直和.
(3) V 的任何 Lie 子模是 V 的直和因子.

Proof. (1)⇒(2) 来自完全可约性的定义, (2)⇒(3) 来自 [命题1.135] 和 [命题1.136]. 现在证明 (3)⇒(1): 由 [推论1.137] 知 V 总存在不可约 Lie 子模, 记 X 是 V 所有不可约 Lie 子模的和 (根据 [命题1.135], X 是完全可约 Lie 模), 如果 $V/X\neq 0$, 那么由 [推论1.137] 得到与 X 相交为零的 (V 的) 不可约 Lie 子模, 矛盾. □

Corollary 1.139. 设 L 是 K-Lie 代数, V 是 L 上完全可约 Lie 模, 则 V 的 Lie 子模和商 Lie 模都是完全可约的.

1.7 古典 Lie 代数的半单性

在 [例1.9], [例1.11], [例1.13] 和 [例1.14] 中, 我们介绍了古典 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk),\mathfrak{sp}_{2n}(\Bbbk),\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk),\mathfrak{o}_{2n}(\Bbbk)$, 它们都可视作特殊线性 Lie 代数的 Lie 子代数. 本节的目标是证明下述定理, 初次阅读可跳过:

Theorem 1.140. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, n 是正整数. 那么:
(1) 对 $n\geq 2$, 特殊线性 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ 是 n^2-1 维半单 Lie 代数.
(2) 正交 Lie 代数 $\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk)$ 是 $2n^2+n$ 维半单 Lie 代数.

(3) 辛 Lie 代数 $\mathfrak{sp}_{2n}(\Bbbk)$ 是 $2n^2+n$ 维半单 Lie 代数.
(4) 当 $n\geq 2$ 时, 正交 Lie 代数 $\mathfrak{o}_{2n}(\Bbbk)$ 是 $2n^2-n$ 维半单 Lie 代数, $\mathfrak{o}_2(\Bbbk)$ 作为 1 维 Lie 代数不是半单的.

为证明 [定理1.140], 我们需要更具体的半单性判别引理:

Lemma 1.141. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, V 是非零有限维 $\Bbbk$-线性空间, $L\subseteq\mathfrak{gl}(V)$ 是非零 Lie 代数, 并且对标准嵌入给出的有限维表示 $\rho:L\to\mathrm{End}_{\Bbbk}V$, 如果 ρ 不可约, 那么 $Z(L)=\mathrm{rad}(L)$(这样的 Lie 代数被称为**约化 Lie 代数**, 见 [定义2.14]) 且 $\dim_{\Bbbk}Z(L)\leq 1$. 如果进一步 $L\subseteq\mathfrak{sl}(V)$, 则 L 是半单的.

Proof. 记 $S=\mathrm{rad}(L)$, 那么 $\rho(S)$ 是可解 Lie 代数, 应用 Lie 定理可知 $\rho(S)$ 中所有 V 上线性变换在 V 中有公共的特征向量, 设为 $v\neq 0$, 并记 $\rho(s)=\lambda(s)v,\forall s\in S$, 其中 $\lambda(s)\in\Bbbk$. 对每个 $x\in L$, 注意到 $[s,x]\in S,\forall s\in S$, 所以根据 V 是 L 上 Lie 模便知 $\rho(s)\rho(x)(v)=\lambda(s)\rho(x)(v)+\lambda([s,x])(v),\forall s\in S,x\in L$. 因为 V 是 L 上不可约 Lie 模, 所以任何 V 中元素可写作 v 被有限个 $\rho(x)$ 作用后有限和的形式, 于是可如下构造 V 的基 (设 $\dim_{\Bbbk}V=n$)$\{v_1=v,v_2,...,v_n\}$ 使得所有的 $\rho(s),s\in S$ 关于 $v_1,...,v_n$ 的表示矩阵是对角线上均为 $\lambda(s)$ 的上三角阵: 如果 $n=1$, 结论直接成立. 如果 $n\geq 2$, 那么 $\rho(L)(v)$ 中存在 $\Bbbk v$ 外的元素, 否则由 V 的不可约性得到 $V=\Bbbk v$, 与 $n\geq 2$ 矛盾. 所以可选取 $\rho(L)(v)$ 中元素 $v_2,...,v_{n_1}$ 使得 $v_1,v_2,...,v_{n_1}$ 给出 $\Bbbk v+\rho(L)(v)$ 的 $\Bbbk$-基. 易见 $\rho(s)$ 作用 $\Bbbk v+\rho(L)(v)$ 封闭. 如果 $n_1=n$, 那么结论成立. 否则, $\rho(L)\rho(L)(v)$ 中含有 $\Bbbk v+\rho(L)(v)$ 外的元素, 可选取 $\rho(L)\rho(L)(v)$ 中元素 $v_{n_1+1},...,v_{n_2}$ 使得 $v_1,...,v_{n_2}$ 构成 $\Bbbk v+\rho(L)(v)+\rho(L)\rho(L)(v)$ 的 $\Bbbk$-基, 利用 $\rho(S)$ 作用 $\Bbbk v+\rho(L)(v)$ 封闭可直接验证 $\rho(S)$ 作用 $\Bbbk v+\rho(L)(v)+\rho(L)\rho(L)(v)$ 也封闭. 因为 n 是已经给定的正整数, 因此至多有限步使我们能够构造 V 的基 $\{v_1=v,v_2,...,v_n\}$ 使得 $\rho(S)(\Bbbk v_1\oplus\cdots\oplus\Bbbk v_i)\subseteq\Bbbk v_1\oplus\cdots\oplus\Bbbk v_i,\forall 1\leq i\leq n$, 并且根据构造方式, $\Bbbk v_1\oplus\cdots\oplus\Bbbk v_i$ 就是 V 中所有能够表示为 v 经不超过 i 个 L 中元素作用后的有限和的元素构成的子空间. 根据 $\{v_1,...,v_n\}$ 的构造方式, 反复利用

$$\rho(s)\rho(y_1)\cdots\rho(y_t)(v)=\rho([s,y_1])\rho(y_2)\cdots\rho(y_t)(v)+\rho(y_1)\rho(s)\rho(y_2)\cdots\rho(y_t)(v),\forall s\in S,y_1,...,y_t\in V,t\geq 1$$

可知当 $\rho(s)(v_i)$ 表示为 $v_1,...,v_i$ 的 $\Bbbk$-线性组合时, 关于 v_i 的表出系数就是 $\lambda(s)$. 上面的讨论说明 $\rho(s)$ 关于构造的基下的表示矩阵是对角线上均为 $\lambda(s)$ 的上三角阵. 注意到 $\rho([s,x]),s\in S,x\in L$ 作为换位子的迹是零, 所以由 $\rho([s,x])$ 在前面构造的基下表示矩阵是以 $\lambda([s,x])$ 为对角元的上三角阵以及 $\mathrm{char}\Bbbk=0$ 便知 $\lambda([s,x])=0$. 这说明 $\rho(s)\rho(y_1)\cdots\rho(y_t)(v)=\lambda(s)\rho(y_1)\cdots\rho(y_t)(v),\forall y_1,...,y_t\in V,t\geq 1$. 于是 $\rho(s)(w)=\lambda(s)w,\forall w\in V,s\in S$. 现在我们得到 $S\subseteq Z(L)$, 由 $Z(L)$ 作为交换 Lie 代数可解以及 S 的极大性得到 $Z(L)=\mathrm{rad}(L)$, 并且易见 $\dim_{\Bbbk}S\leq 1$, 这证明了第一个结论. 现在进一步设 $L\subseteq\mathfrak{sl}(V)$, 那么由 $\mathfrak{sl}(V)$ 中线性变换迹为零便知 $S=0$. □

现在我们来证明 [定理1.140]: (1) 考虑 $V=\Bbbk^n$, 那么 V 可自然视作 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 上 Lie 模, 并且由 V 是不可约 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$-模可知 V 作为 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 上 Lie 模也不可约. 注意到 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 可写作 $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ 和数乘变换全体之和, 所以 V 作为 $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ 上 Lie 模也是不可约的, 现在应用 [引理1.141] 得到 $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ 是半单 Lie 代数.

(2) 取 $V=\Bbbk^{2n+1}$, 那么 V 是 $\mathfrak{gl}_{2n+1}(\Bbbk)$ 上不可约 Lie 模. 要证明 V 是 $\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk)$ 上不可约 Lie 模, 只需证明 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 中由 $\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk)$ 生成的 $\Bbbk$-(结合) 子代数 (记作 $\mathscr{A}$) 就是 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 考虑 [例1.13] 中给出 $\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk)$ 中元素的分块形式

$$\begin{pmatrix}0 & -X_{31}^T & -X_{21}^T\\ X_{21} & X_{22} & X_{23}\\ X_{31} & X_{32} & -X_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $X_{21}, X_{31} \in \Bbbk^{n\times 1}, X_{22}, X_{23}, X_{32}, X_{33} \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 利用 $\mathscr{A}$ 包含所有的纯量矩阵, 考虑 $\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk)$ 中所有对角阵 (与特殊纯量矩阵作差, 并与新得到的对角阵进行乘积, 数乘等运算) 不难得到 $\mathscr{A}$ 包含所有的对角阵 (注意上述分块矩阵左上角的零是 1 阶矩阵). 现在再考虑形如 E_{ii} 的基础矩阵 (前面已经得到在 $\mathscr{A}$ 中) 和 $\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk)$ 由部分基础矩阵之间作差或相加导出的标准基相乘 (以及交换两行两列的初等变换) 不难得到对每个 $1 \le i, j \le 2n+1$, 都存在 $E_{ij} \in \mathscr{A}$. 使用完全类似的讨论可得 $\mathfrak{sp}_{2n}(\Bbbk)$ 在 $\mathrm{M}_{2n}(\Bbbk)$ 中生成的 $\Bbbk$-(结合) 子代数是 $\mathrm{M}_{2n}(\Bbbk)$, 进而得到 (3). 当 $n \ge 2$ 时, 同样的方法适用于 $\mathfrak{o}_{2n}(\Bbbk)$(但明显 $\mathfrak{o}_2(\Bbbk)$ 所生成的 $\mathrm{M}_2(\Bbbk)$ 的结合子代数同构于 $\Bbbk \oplus \Bbbk$, 是 $\mathrm{M}_2(\Bbbk)$ 的真子代数), 所以 (4) 成立. □

1.8 泛包络代数

本节介绍 Lie 代数的泛包络代数的概念, 它的引入使得 Lie 代数 (非结合代数) 的表示可转化为其泛包络代数 (结合代数) 的表示 (见 [定理1.144]). 由此可将代数表示论的工具应用于 Lie 代数的研究. 固定交换环 K.

给定范畴间的函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 以及对象 $B \in \mathrm{ob}D$, 回忆对象 B 到函子 F 的**泛性**是指满足下述性质的二元组 (U, u): 对象 $U \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 与态 $u : B \to FU$ 满足对任给对象 $A \in \mathrm{ob}C$ 以及态 $f : B \to FA$, 存在唯一的态 $\tilde{f} : U \to A$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & FU \arrow[dl, dashed, "F(\tilde{f})"] \\ & FA & \end{tikzcd}$$

通过 [例1.5], 我们看到考虑代数的导出 Lie 代数可诱导 K-代数范畴 K-**Alg** 到 Lie 代数范畴 K-**Lie** 的标准函子 $F : K\text{-}\mathbf{Alg} \to K\text{-}\mathbf{Lie}$, 使得 $FA = A^-$ 是 K-代数 A 的导出 Lie 代数, 并且每个 K-代数同态 $f : A \to B$ 满足 $F(f) = f : A^- \to B^-$ 是 K-Lie 代数同态. 对每个 K-Lie 代数 L, 称 L 到该函子 $F : K\text{-}\mathbf{Alg} \to K\text{-}\mathbf{Lie}$ 的泛性质 $(\mathcal{U}(L), u)$ 为 L 的**泛包络代数**. 有时也简称 $\mathcal{U}(L)$ 是 L 的**泛包络代数**.

下面我们对含幺交换环 K 上的 Lie 代数 $(L, [-,-])$ 来构造其泛包络代数. 记 $T(L)$ 是 K-模 L 决定的张量代数, 并设 B 是 $T(L)$ 中由集合 $\{[x,y] - x\otimes y + y \otimes x | x, y \in L\}$ 生成的理想, 置 $\mathcal{U}(L) = T(L)/B$, 则有标准 K-模同态 $u : L \to \mathcal{U}(L), x \mapsto x + B$, 下面验证 $(\mathcal{U}(L), u)$ 为 L 到函子 F 的泛性质来说明 $\mathcal{U}(L)$ 是 L 的泛包络代数. 一旦证明泛包络代数的存在性, 由泛性质定义知其在同构意义下唯一. 为此, 我们需要验证对任何 K-代数 A 和 Lie 代数同态 $f : L \to A^-$, 存在唯一的 K-代数同态 $\tilde{f} : \mathcal{U}(L) \to A$ 使得 $\tilde{f}u = f$, 即下图交换:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{U}(L)^- \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ & A^- & \end{tikzcd}$$

记 $i : L \to T(L)$ 是标准映射, $\pi : T(L) \to \mathcal{U}(L)$ 是自然投射, 那么由张量代数之泛性得到存在唯一的 K-代数同态 $\overline{f} : T(L) \to A^-$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} & & & T(L) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[ddll, dashed, bend left, "\overline{f}"] \\ L \arrow[urrr, "i"] \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{U}(L)^- & \\ & A^- & & \end{tikzcd}$$

注意到对每个 $x,y\in L$, $\overline{f}([x,y]-x\otimes y+y\otimes x)=f(xy-yx)-f(x)f(y)+f(y)f(x)=0$, 所以 $B\subseteq\mathrm{Ker}\overline{f}$, 于是 $\overline{f}$ 导出 K-代数同态 $\tilde{f}:\mathcal{U}(L)\to A$ 使得 $\tilde{f}\pi=\overline{f}$, 由此得到下述交换图, 且易验证 $\tilde{f}$ 满足 $\tilde{f}u=f$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & T(L) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dll, dashed, bend left, "\overline{f}"] \\
L \arrow[urrr, "i"] \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{U}(L)^- \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] & \\
 & A^- & &
\end{tikzcd}$$

K-代数同态 $\tilde{f}$ 的唯一性由张量代数泛性的唯一性与 π 是满射即得. 因此我们证明了

Theorem 1.142. 设 $(L,[-,-])$ 是 K-Lie 代数, 若记 $T(L)$ 是 K-模 L 决定的张量代数, 并设 B 是 $T(L)$ 中由集合 $\{[x,y]-x\otimes y+y\otimes x|x,y\in L\}$ 生成的理想, 置 $\mathcal{U}(L)=T(L)/B$, 进而有标准 K-模同态 $u:L\to\mathcal{U}(L),x\mapsto x+B$. 那么 $(\mathcal{U}(L),u)$ 为 L 的泛包络代数且泛包络代数在同构意义下唯一. $\mathcal{U}(L)$ 作为 K-代数可由 L 生成.

根据 Lie 代数的泛包络代数的构造, 不难看到

Example 1.143. 如果 K-Lie 代数 $(L,[-,-])$ 是交换的, 那么 $\mathcal{U}(L)$ 是 K-交换代数.

任给 K-Lie 代数上的 Lie 模 $(V,\{-,-\})$, 那么它对应 Lie 代数 L 的表示 $\rho:L\to\mathrm{End}_K V$, 根据泛包络代数的泛性质, 存在唯一的 K-代数同态 $f:\mathcal{U}(L)\to\mathrm{End}_K V$ 使得 $f^-u=\rho$, 其中 $f^-=f$. 因此任何 Lie 模 $(V,\{-,-\})$ 上有唯一的左 $\mathcal{U}(L)$-模结构使得 $u(a)x=\{a,x\},\forall a\in L,x\in A$. 由此对任何 Lie 模同态 $f:V\to W$, 将 V 与 W 按上述方式赋予左 $\mathcal{U}(L)$-模结构后, $f:V\to W$ 成为左 $U(L)$-模同态. 于是我们得到忠实函子 $H:L$-**LieMod** $\to\mathcal{U}(L)$-**Mod**. 任给左 $\mathcal{U}(L)$-模 V, 通过定义 $\{-,-\}:L\times V\to V,(a,x)\mapsto u(a)x$ 可使得 V 成为 L 上 Lie 模, 并且任何 $\mathcal{U}(L)$-模同态 $f:V\to W$ 在上述意义下都成为 Lie 模同态, 进而得到函子 $G:\mathcal{U}(L)$-**Mod** $\to L$-**LieMod**, 易见 G 和 H 是一对互逆的函子, 由此我们证明了

Theorem 1.144. 设 L 是 K-Lie 代数, 则有范畴同构 $\mathcal{U}(L)$-**Mod** $\cong L$-**LieMod**.

Remark 1.145. 由此可知研究 Lie 代数的表示可转化为其泛包络代数的表示予以研究, 或者说研究 $\mathcal{U}(L)$ 包含了 L 所有的表示理论. 我们也能够把 (结合) 代数的表示论的工具应用于 Lie 代数的表示. 例如, 根据 Krull-Schmidt 定理, 含幺环上具有合成列的模能够分解为有限多个不可约模的直和并且该分解方式 (在不计次序意义下) 唯一. 特别地, 对域 $\Bbbk$ 上代数 A 的有限维模 M, 如果 M 是完全可约的, 那么 M 关于不可约 A-模的分解在不计次序意义下唯一. 如果域 $\Bbbk$ 上 Lie 代数 L 上的有限维 Lie 模 V 是完全可约的 (例如, 之后我们会介绍 Weyl 定理——特征零的代数闭域上的有限维半单 Lie 代数的有限维表示总是完全可约的), 那么 V 自然视作 $\mathcal{U}(L)$-模后也是完全可约的, 并且作为有限维完全可约 $\mathcal{U}(L)$-模在不计次序下能够唯一地分解为有限多个不可约 $\mathcal{U}(L)$-模的直和. 这也说明这时 V 关于不可约 Lie 子模的直和分解在不计次序下唯一.

下面我们着眼于域 $\Bbbk$ 上 Lie 代数 L 的泛包络代数的结构. 我们将看到域上 Lie 代数的泛包络代数可由 Lie 代数的基提供自然的基 (见 [推论1.149]), Lie 代数到包络代数的标准映射是单射 (见 [推论1.147]), 以及 Lie 代数的泛包络代数上有 Hopf 代数结构 (见 [命题1.158] 以及后面的讨论). 根据 [定理1.142] 的证明过程, 如果记 B 是张量代数 $T(L)$ 中由 $\{x\otimes y-y\otimes x-[x,y]|x,y\in L\}$ 生成的理想, 那么 $\mathcal{U}(L)=T(L)/B$. 对每个自然数 m,

记 $T^{(m)}$ 是 $L^{\otimes m}$ 在 $T(L)$ 中的像集, 那么有 $T_m = T^{(0)} \oplus T^{(1)} \oplus \cdots \oplus T^{(m)}$. 于是我们得到 L 决定的张量代数上的滤 $\{T_m | m \in \mathbb{N}\}$. 记 $\pi : T(L) \to \mathcal{U}(L)$ 是标准投射, 对每个自然数 m, 引入记号 $\mathcal{U}_m = \pi(T_m)$. 那么我们同样得到 $\mathcal{U}(L)$ 上的滤 $\{\mathcal{U}_m | m \in \mathbb{N}\}$. 记该 $\mathcal{U}(L)$ 上的滤给出的相伴分次代数是 $\operatorname{gr}\mathcal{U}(L)$, 即

$$\operatorname{gr}\mathcal{U}(L) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}_m/\mathcal{U}_{m-1},$$

其中 $\mathcal{U}_{-1} = 0$. 对所有的自然数 m, $T^{(m)}$ 到 $\mathcal{U}_m$ 的标准投射诱导 $T(L)$ 到 $\operatorname{gr}\mathcal{U}(L)$ 的满 $\mathbb{k}$-线性映射, 记作 φ, 不难看出 φ 是满 $\mathbb{k}$-代数同态. 任给 $x, y \in L$, 有 $\varphi(x \otimes y - y \otimes x) = (x \otimes y - y \otimes x) + \mathcal{U}_1 = [x, y] + \mathcal{U}_1 = 0$. 记 C 是 $T(L)$ 的由 $\{x \otimes y - y \otimes x | x, y \in L\}$ 生成的理想, 那么 $T(L)/C$ 就是 L 决定的对称代数, 记作 $S(L)$, 对自然数 m, 把 $S(L)$ 作为 $\mathbb{N}$-分次代数在指标 m 处的直和项记作 $S^{(m)}$. 前面的讨论表明 $\varphi(C) = 0$, 所以 φ 诱导唯一的满分次代数同态 $\overline{\varphi} : S(L) \to \operatorname{gr}\mathcal{U}(L)$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
T(L) \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"'] & & S(L) \arrow[dl, dashed, "\overline{\varphi}"] \\
& \mathrm{gr}\mathcal{U}(L) &
\end{tikzcd}$$

接下来我们的目标是证明下述定理, 通常被简称为 **PBW 定理** (初次阅读可跳过这部分):

Poincaré–Birkhoff–Witt Theorem. 上述满分次代数同态 $\overline{\varphi} : S(L) \to \operatorname{gr}\mathcal{U}(L)$ 是 $\mathbb{k}$-代数同构.

在正式证明 PBW 定理之前, 我们来看些它的直接推论. 以下保持之前引入的记号.

Corollary 1.146. 设 m 是自然数, W 是 $T^{(m)}$ 的 $\mathbb{k}$-子空间满足 $T^{(m)}$ 到 $S^{(m)}$ 的标准映射限制在 W 上给出 $\mathbb{k}$-线性同构 $W \cong S^{(m)}$, 那么在 $\mathcal{U}_m$ 中, 有 $\mathcal{U}_m = \pi(W) \oplus \mathcal{U}_{m-1}$.

Proof. 记 $\overline{\varphi}$ 在 $S^{(m)}$ 上的限制是 $\overline{\varphi}_m$, 那么由 PBW 定理, $\overline{\varphi}_m : S^{(m)} \to \mathcal{U}_m/\mathcal{U}_{m-1}$ 是线性同构. 现在有交换图

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{U}_m \arrow[dr] & \\
T^{(m)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{U}_m/\mathcal{U}_{m-1} \\
& S^{(m)} \arrow[ur, "\overline{\varphi}_m"] &
\end{tikzcd}$$

于是由条件和 $\overline{\varphi}_m$ 是线性同构得到上图中给出的 $T^{(m)}$ 到 $\mathcal{U}_m/\mathcal{U}_{m-1}$ 的线性映射在 W 上的限制给出 $\mathbb{k}$-线性同构 $W \cong \mathcal{U}_m/\mathcal{U}_{m-1}$. 再由图中 $T^{(m)}$ 到 $\mathcal{U}_m$ 的标准映射来自 π 的限制可知 $\mathcal{U}_m = \pi(W) \oplus \mathcal{U}_{m-1}$. □

Corollary 1.147. 对 L 到泛包络代数 $\mathcal{U}(L)$ 的标准映射 $u : L \to \mathcal{U}(L)$, u 是单射.

Proof. 在 [推论1.146] 的条件中取 $m = 1, W = L = T^{(1)} \cong S^{(1)}$, 由 [推论1.146] 的证明过程中 $T^{(1)}$ 到 $\mathcal{U}_1$ 的标准映射就是 u 可知 u 与 $\mathcal{U}_1$ 到 $\mathcal{U}_1/\mathcal{U}_0$ 的标准投射的合成是线性同构, 所以 u 是单射. □

Remark 1.148. 因此域 $\mathbb{k}$ 上的 Lie 代数 L 含于其泛包络代数 $\mathcal{U}(L)$, 并且由泛包络代数的定义可知任何包含 L 且可由 L 生成的结合代数, 只要其上导出 Lie 代数结构与 L 相容, 就是 $\mathcal{U}(L)$ 的同态像.

Corollary 1.149. 设 $L \neq 0$ 作为 $\mathbb{k}$-线性空间有基 $\{x_i | i \in \Gamma\}$, 这里指标集 $\Gamma \neq \varnothing$(可能是无限集). 由良序原理, Γ 上存在二元关系 $\leq$ 使得 $(\Gamma, \leq)$ 是良序集. 那么 $\{u(x_{i_1})u(x_{i_2})\cdots u(x_{i_m}) | i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \in \Gamma, m \geq 1\} \cup \{1\}$ 是 $\mathcal{U}(L)$ 作为 $\mathbb{k}$-线性空间的基, 其中 $u : L \to \mathcal{U}(L)$ 是标准映射.

Proof. 对自然数 m, 命 W 是由 $T^{(m)}$ 中所有形如 $x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_m}, i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \in \Gamma$ 的元素生成的 $\mathbb{k}$-子空间 (当 $m = 0$ 时, $W = \mathbb{k}1$), 易见 $T^{(m)}$ 到 $S^{(m)}$ 的标准映射限制于 W 给出 $W \cong S^{(m)}$(因为 $S(L)$ 可自然同构于 $\mathbb{k}$ 上以 $\{x_i | i \in \Gamma\}$ 为未定元集的多项式代数), 于是应用 [推论1.146] 得到 $\mathcal{U}_m = \pi(W) \oplus \mathcal{U}_{m-1}$. 于是对自然数 m 作归纳可知 $\{u(x_{i_1})u(x_{i_2})\cdots u(x_{i_k}) | i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \in \Gamma, 0 \leq k \leq m\}$ 可 $\mathbb{k}$-线性生成 $\mathcal{U}_m$. 同样对 m 作归纳, 由 PBW 定理以及分次代数同构 $S(L) \cong \mathbb{k}[\{x_i\}_{i\in\Gamma}]$ 不难看到 $\{u(x_{i_1})u(x_{i_2})\cdots u(x_{i_m}) | i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \in \Gamma, m \geq 1\} \cup \{1\}$ 的 $\mathbb{k}$-线性无关性, 所以该集合也是 $\mathcal{U}(L)$ 作为 $\mathbb{k}$-线性空间的基. □

Remark 1.150. 通过 [推论1.149] 给出的泛包络代数的基通常也被简称为 **PBW 基**.

现在我们做一些准备后证明 PBW 定理, 以下设 $L \neq 0$ 有基 $\{x_i | i \in \Gamma\}$, 并由良序原理赋予指标集 Γ 上良序 $\leq$. 之前已经指出 $S(L)$ 可自然视作 $\mathbb{k}$ 上以 $\{x_i | i \in \Gamma\}$ 为未定元集的多项式代数, 为叙述方便, 下面把 $S(L)$ 中 $x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_m} (i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \in \Gamma)$ 写作 $x_{i_1} \cdots x_{i_m}$. 于是单项式 $x_{i_1} \cdots x_{i_m} (i_1 \leq \cdots \leq i_m)$ 对应有序组 $(i_1, i_2, ..., i_m)$. 所有次数不超过 m 的多项式构成的 $S(L)$ 的子空间记作 S_m. 只要有序组 $\Sigma = (i_1, ..., i_m)$ 满足 $i_1 \leq \cdots \leq i_m$, 称 Σ 是**递增的**. 任何分量来自 Γ 的有序组都唯一对应 $S(L)$ 中的 (首一) 单项式, 因为 $(\Gamma, \leq)$ 是全序的 (约定 $\varnothing$ 也可以视作分量来自 Γ 的有序组, 对应的单项式为 1). 以下把分量来自 Γ 的有序组 Σ 对应的首一单项式记作 z_Σ. 如果 $\lambda \in \Gamma$ 和有序组 Σ 满足 Σ 的每个分量 μ 有 $\lambda \leq \mu$, 便写作 $\lambda \leq \Sigma$. PBW 定理的证明需要

Lemma 1.151. 对每个自然数 m, 存在唯一的 $\mathbb{k}$-线性映射 $f_m : L \otimes_{\mathbb{k}} S_m \to S(L)$ 满足条件 (A_m), (B_m) 和 (C_m):
(A_m) 对任何 S_m 中单项式 z_Σ 和 Γ 中 $\lambda \leq \Sigma$ 有 $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma$.
(B_m) 对任何自然数 $k \leq m$ 和单项式 $z_\Sigma \in S_k$ 有 $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) - z_\lambda z_\Sigma \in S_k$.
(C_m) 对所有 $z_T \in S_{m-1}, \mu, \lambda \in \Gamma$, 有 $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) = f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) + f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_T)$.

并且上述 f_m 在 $L \otimes_{\mathbb{k}} S_{m-1}$ 上的限制与 f_{m-1} 一致 (当 $m = 0$ 时, $S_{m-1} = S_{-1} = 0$).

Proof. 首先指出一旦存在 $f_m : L \otimes_{\mathbb{k}} S_m \to S(L)$ 满足 (B_m), 那么对任何 $\mu, \lambda \in \Gamma$ 和 $z_T \in S_{m-1}$, 有 $f_m(x_\mu \otimes z_T), f_m(x_\lambda \otimes z_T) \in S_m$, 所以 (C_m) 中出现的项都定义合理. 其次, 如果引理的唯一性得到证明, 那么由 $S_m \supseteq S_{m-1}$, 不难看到 f_m 在 $L \otimes_{\mathbb{k}} S_{m-1}$ 上的限制满足 (A_{m-1}), (B_{m-1}) 和 (C_{m-1}), 所以引理的唯一性蕴含 f_m 在 $L \otimes_{\mathbb{k}} S_{m-1}$ 上的限制与 f_{m-1} 一致. 下面对 $m \geq 0$ 作归纳证明存在唯一的 $\mathbb{k}$-线性映射 $f_m : L \otimes_{\mathbb{k}} S_m \to S(L)$ 满足 (A_m), (B_m) 和 (C_m). 当 $m = 0$ 时, $S_0 = \mathbb{k}1$ 并且 S_0 中的首一多项式只有 1, 这时取 $f_0 : L \otimes_{\mathbb{k}} S_0 \to S(L), x \otimes c \mapsto cx$, 那么 f_0 是 $\mathbb{k}$-线性映射并且满足 (A_0), (B_0) 和 (C_0). f_0 的唯一性来自 (A_0) 和 f_0 的 $\mathbb{k}$-线性性. 现在假设对 $m - 1 (m \geq 1)$, 存在唯一的 $\mathbb{k}$-线性映射 $f_{m-1} : L \otimes_{\mathbb{k}} S_{m-1} \to S(L)$ 满足 (A_{m-1}), (B_{m-1}) 和 (C_{m-1}). 下面将 f_{m-1} 延拓为满足 (A_m), (B_m) 和 (C_m) 的 $\mathbb{k}$-线性映射 $f_m : L \otimes_{\mathbb{k}} S_m \to S(L)$. 因为 S_m 就是 S_{m-1} 直和上所有 (关于 $\{x_i\}_{i\in\Gamma}$ 的)m 次首一多项式, 并且每个 m 次首一多项式可由唯一的长度为 m 且分量来自 Γ 的递增有序组 Σ 给出, 即 z_Σ, 所以我们只需对每个 $\lambda \in \Gamma$ 和长度为 m 的递增有序组 Σ 定义 $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma)$ 的取值便能线性延拓 f_{m-1} 为 $L \otimes_{\mathbb{k}} S_m$ 到 $S(L)$ 的 $\mathbb{k}$-线性映射. 在继续讨论 f_m 的存在性证明前我们再指出满足 (A_m), (B_m) 和 (C_m) 的 f_m 必定是 f_{m-1} 的延拓, 原因就是这时 f_m 在 $L \otimes_{\mathbb{k}} S_{m-1}$ 上的限制满足 (A_{m-1}), (B_{m-1}) 和 (C_{m-1}), 于是由 f_{m-1} 的唯一性便知 f_m 是 f_{m-1} 的延拓.

如果长度为 m 的递增有序组 Σ 和 $\lambda \in \Gamma$ 满足 $\lambda \le \Sigma$, 要使得 (A_m) 成立必须定义 $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma$. 如果不满足 $\lambda \le \Sigma$, 那么递增有序组 Σ 的第一分量 $\mu < \lambda$. 把 Σ 后 $m-1$ 个分量按原有次序构成的长度为 $m-1$ 的递增有序组记作 T. 那么 $f_{m-1}(x_\lambda \otimes z_T)$ 已经定义好, 由于我们要定义的 f_m 是 f_{m-1} 的延拓, 所以必须定义 $f_m(x_\lambda \otimes z_T) = f_{m-1}(x_\lambda \otimes z_T)$, 根据 f_{m-1} 满足 (B_{m-1}) 可知 $f_m(x_\lambda \otimes z_T) \in S_m$ 并且 $f_m(x_\lambda \otimes z_T) - z_\lambda z_T \in S_{m-1}$ 表明 $f_m(x_\lambda \otimes z_T)$ 的 m 次项就是 $z_\lambda z_\Sigma$, 决定该单项式的递增有序组明显每个分量都大于等于 μ, 再结合 (C_m) 的等式左边就是 $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma)$ 可知要使得定义的 f_m 满足 (C_m), f_m 的表达由 (C_m) 等号右边给出. 至此我们得到满足条件 (A_m), (B_m) 和在 $\mu < \lambda, \mu \le T$ 限制下的 (C_m) 成立的 $\Bbbk$-线性映射 $f_m : L \otimes_\Bbbk S_m \to S(L)$. 并且刚刚的讨论以及之前指出满足 (A_m), (B_m) 和 (C_m) 的 f_m 必定是 f_{m-1} 的延拓表明满足条件 (A_m), (B_m) 和 (C_m) 的 f_m 一定唯一. 于是要完成引理的证明, 只需再对一般的 $\mu, \lambda \in \Gamma$ 和长度为 $m-1$ 的递增有序组 T 验证前面构造的 f_m 满足条件 (C_m) 即可. 前面我们看到对 $\mu < \lambda, \mu \le T$ 有 (C_m) 成立:

$$f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) - f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) = f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_T).$$

于是由 $[x_\lambda, x_\mu] = -[x_\mu, x_\lambda]$, 可将上式改写为

$$f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) - f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) = f_m([x_\mu, x_\lambda] \otimes z_T).$$

这说明条件 (C_m) 对 $\lambda < \mu, \lambda \le T$ 的情形也成立. 如果 $\lambda = \mu$, 那么 (C_m) 明显成立. 于是, 只要 $\mu \le T$ 或 $\lambda \le T$, 那么 (C_m) 就成立. 因此我们下面只需再说明当 $\mu \le T$ 和 $\lambda \le T$ 都不成立时, 有 (C_m) 成立, 便完成引理证明. 因为 T 是递增的, 所以若记 ν 是 T 的第一分量, Ψ 是 T 的后 $m-2$ 分量构成的递增有序组, 便有 $\nu \le \Psi$. 而这时 $\mu \le T$ 和 $\lambda \le T$ 都不成立说明 $\nu < \lambda$ 且 $\nu < \mu$. 现在由归纳假设和 f_m 的构造, 知

$$f_m(x_\mu \otimes z_T) = f_m(x_\mu \otimes f_{m-1}(x_\nu \otimes z_\Psi)) = f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) + f_m([x_\mu, x_\nu] \otimes z_\Psi).$$

并且由对 (B_{m-1}) 应用 $k = m-2$ 的情形得到存在 $w \in S_{m-2}$ 使得 $f_m(x_\mu \otimes z_\Psi) = z_\mu z_\Psi + w$. 现在 $\nu \le \Psi$ 且 $\nu < \mu$, 所以决定 $z_\mu z_\Psi$ 的长度为 $m-1$ 的递增有序组每个分量都大于等于 ν, 结合 $\nu < \lambda$ 可知该情形已经得到 (C_m) 成立, 即有

$$f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\nu \otimes z_\mu z_\Psi)) = f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_\mu z_\Psi)) + f_m([x_\lambda, x_\nu] \otimes z_\mu z_\Psi).$$

由 $w \in S_{m-2}$, 同样由归纳假设可知 (C_m) 的等号左边取 $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\nu \otimes w))$ 有相应等式成立, 再结合 $f_m(x_\mu \otimes z_\Psi) = z_\mu z_\Psi + w$ 所导出的等式 $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) = f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\nu \otimes z_\mu z_\Psi)) + f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\nu \otimes w))$ 使我们得到 (C_m) 等号左边取 $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi))$ 也成立, 进而得到等式

$$f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) = f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) + f_m([x_\lambda, x_\nu] \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)).$$

另一方面, 对 $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi))$ 表达式中的 $f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)$ 应用归纳假设可得

$$f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) = f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\nu \otimes z_\Psi)) + f_m(x_\lambda \otimes f_m([x_\nu, x_\mu] \otimes z_\Psi)).$$

综合上面两个关于 $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi))$ 的表达式得到

$$\begin{aligned} f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) = & f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) + f_m([x_\lambda, x_\nu] \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) \\ & + f_m(x_\lambda \otimes f_m([x_\mu, x_\nu] \otimes z_\Psi)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) + f_m([x_\lambda, x_\nu] \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) \\
&\quad + f_m([x_\mu, x_\nu] \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_\Psi)) + f_m([x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] \otimes z_\Psi).
\end{aligned}
$$

因为同样有 $\nu < \mu$, 所以上面的表达式交换 λ, μ 依然成立, 即有

$$
\begin{aligned}
f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) &= f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_\Psi)) + f_m([x_\mu, x_\nu] \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_\Psi)) \\
&\quad + f_m([x_\lambda, x_\nu] \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) + f_m([x_\mu, [x_\lambda, x_\nu]] \otimes z_\Psi).
\end{aligned}
$$

现在把 $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T))$ 的表达式和 $f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T))$ 的表达式作差可得

$$
\begin{aligned}
f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) - f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) &= f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) - f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_\Psi)) \\
&\quad + f_m([x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] \otimes z_\Psi) - f_m([x_\mu, [x_\lambda, x_\nu]] \otimes z_\Psi).
\end{aligned}
$$

其中 $f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\Psi)) - f_m(x_\nu \otimes f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_\Psi)) = f_m(x_\nu \otimes f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_\Psi))$. 于是

$f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) - f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) = f_m(x_\nu \otimes f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_\Psi)) + f_m([x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] \otimes z_\Psi) + f_m([x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]] \otimes z_\Psi)$.

再由 $f_m(x_\nu \otimes f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_\Psi)) = f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes f_m(x_\nu \otimes z_\Psi)) + f_m([x_\nu, [x_\lambda, x_\mu]] \otimes z_\Psi)$ 以及 Jacobi 恒等式便知

$$
f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) - f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) = f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes f_m(x_\nu \otimes z_\Psi)).
$$

即 (C_m) 成立, 于是 f_m 满足条件 (A_m), (B_m) 和 (C_m), 引理得证. □

Lemma 1.152. 存在 Lie 代数 L 在 $\Bbbk$ 上的表示 $\rho : L \to \mathrm{End}_\Bbbk S(L)$ 满足对任何 $\lambda \in \Gamma$ 和 Γ 上有序组 Σ 满足:
(1) 如果 $\lambda \leq \Sigma$, 那么 $\rho(x_\lambda)(z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma$.
(2) 当 Σ 的长度为 m 时, $\rho(x_\lambda)(z_\Sigma) - z_\lambda z_\Sigma \in S_m$.

Proof. 通过 [引理1.151], 我们能够定义 $\Bbbk$-线性映射 $f : L \otimes_\Bbbk S(L) \to S(L)$ 使得对每个自然搜索 m, f 在 $L \otimes_\Bbbk S_m$ 上的限制就是 [引理1.151] 中的 f_m. 于是由 (C_m) 对所有自然数 m 成立知 f 赋予 $S(L)$ 上 Lie 模结构, 于是我们得到表示 $\rho : L \to \mathrm{End}_\Bbbk S(L)$. 现在 (1) 来自 (A_m), (2) 来自 (B_m). □

回忆之前我们记张量代数 $T(L)$ 中由 $\{x \otimes y - y \otimes x | x, y \in L\}$ 生成的理想为 C.

Lemma 1.153. 对标准投射 $\pi : T(L) \to \mathcal{U}(L)$, 如果 $t \in T_m$ 满足 $\pi(t) = 0$, 那么 t 的 m 次部分在 C 中.

Proof. 考虑 [引理1.152] 给出的表示 $\rho : L \to \mathrm{End}_\Bbbk S(L)$, 那么由泛包络代数的泛性质, 存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\overline{\rho} : \mathcal{U}(L) \to S(L)$ 使得下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\rho"'] & & \mathcal{U}(L) \arrow[dl, dashed, "\overline{\rho}"] \\
& \mathrm{End}_\Bbbk S(L) &
\end{tikzcd}
$$

由此得到 $\Bbbk$-代数同态 $\rho' = \overline{\rho}\pi : T(L) \to \mathrm{End}_\Bbbk S(L)$. 明显有 $\mathrm{Ker}\pi \subseteq \mathrm{Ker}\rho'$, 于是 $\rho'(t) = 0$. 不妨设 t 的 m 次部分 $t_m \neq 0$ 且 $m \geq 1$, 那么存在 Γ 上 (未必递增的) 长度为 m 的有序组 $\Sigma_1, ..., \Sigma_r$(两两互异) 和 $\Bbbk$ 中非零元 $c_1, ..., c_r$ 使得 $t_m = c_1 x_{\Sigma_1} + \cdots + c_r x_{\Sigma_r}$, 这里 x_{Σ_j} 是指有序组 $\Sigma_j = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ 对应的 $x_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes x_{\lambda_m} \in T^{(m)}$. 考察 $\rho'(t)$ 在 1 上的作用, 由 [引理1.153] 可知 $\rho'(t)(1)$ 作为 $\{x_i\}_{i \in \Gamma}$ 上多项式的最高次项就是 $c_1 z_{\Sigma_1} + \cdots + c_r z_{\Sigma_r}$. 所以由 $\rho'(t)(1) = 0$ 得到 $c_1 z_{\Sigma_1} + \cdots + c_r z_{\Sigma_r} = 0$, 而这就是 t_m 在 $T(L)$ 到 $S(L)$ 的标准投射下的像, 所以 $t_m \in C$. □

现在我们能够证明 PBW 定理: 考虑到 $\overline{\varphi}: S(L) \to \mathrm{gr}\,\mathcal{U}(L)$ 是分次代数同态, 我们只需证明对自然数 m 和 $t \in T^{(m)}$, $\pi(t) \in \mathcal{U}_{m-1}$ 蕴含 $t \in C$. 现在 $\pi(t) \in \mathcal{U}_{m-1}$ 说明存在 $t' \in T_{m-1}$ 使得 $\pi(t') = \pi(t)$, 进而 $t - t' \in \mathrm{Ker}\pi$, 并且 $t - t'$ 的 m 次部分就是 t, 所以由 [引理1.153] 立即得到 $t \in C$. □

[推论1.149] 使我们能够总 Lie 代数 L 的 $\Bbbk$-基出发具体写出 $\mathcal{U}(L)$ 的基 (之前默认 $L \neq 0$, 当 $L = 0$ 时明显 $\mathcal{U}(L) = \Bbbk$). 特别地, 当 L 是非零有限维 Lie 代数时, 如果设 L 有 $\Bbbk$-基 $\{x_1, ..., x_m\}$, 那么 $\mathcal{U}(L)$ 有 $\Bbbk$-基

$$\{u(x_1)^{i_1}u(x_2)^{i_2}\cdots u(x_m)^{i_m}|i_1, ..., i_m \in \mathbb{N}\}.$$

[推论1.147] 表明 $u : L \to \mathcal{U}(L)$ 总是单射, 所以我们能够把 $x \in L$ 和 $u(x)$ 视作等同, 在此记号下, 上述以 $\{x_1, ..., x_m\}$ 为 $\Bbbk$-基的有限维 Lie 代数有基

$$\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m}|i_1, ..., i_m \in \mathbb{N}\},$$

需要注意这里 x_i 和 x_j 未必交换, 在 $\mathcal{U}(L)$ 中 $xy - yx = [x, y], \forall x, y \in L$.

Proposition 1.154. 设 $\Bbbk$ 是域, L_1, L_2 是 $\Bbbk$-Lie 代数, $L = L_1 \oplus L_2$. 那么任何 $x \in L$ 可唯一地分解为 $x = x_1 + x_2$, 这里 $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$. 于是导出 $\Bbbk$-Lie 代数同态 $f : L \to \mathcal{U}(L_1) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{U}(L_2), x \mapsto x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2$. 于是存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\eta : \mathcal{U}(L) \to \mathcal{U}(L_1) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{U}(L_2)$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{U}(L) \arrow[dl, dashed, "\eta"] \\
& \mathcal{U}(L_1) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{U}(L_2) &
\end{tikzcd}$$

那么 η 给出 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{U}(L) \cong \mathcal{U}(L_1) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{U}(L_2)$.

Proof. 记 $\iota_1 : \mathcal{U}(L_1) \to \mathcal{U}(L)$ 和 $\iota_2 : \mathcal{U}(L_2) \to \mathcal{U}(L)$ 是标准映射, 这给出 $\Bbbk$-线性映射 $\xi : \mathcal{U}(L_1) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{U}(L_2) \to \mathcal{U}(L), a \otimes b \mapsto \iota_1(a)\iota_2(b)$. 通过 $[L_1, L_2] = 0$ 看到 $\iota_1(a)\iota_2(b) = \iota_2(b)\iota_1(a), \forall a \in \mathcal{U}(L_1), b \in \mathcal{U}(L_2)$. 所以 ξ 也是代数同态, 并且易知 $\xi\eta$ 是恒等映射. 现在对任何 $x \in L_1, y \in L_2$ 有 $\eta(xy) = x \otimes y$, 所以 η 明显是满射. □

下面, 我们介绍自由 Lie 代数的概念, 并利用泛包络代数说明其存在性.

Definition 1.155. 设 $\Bbbk$ 是域, X 是集合, 如果 $\Bbbk$-Lie 代数 $L(X)$ 以 X 为 ($L(X)$-作为 Lie 代数的) 生成元集并且对任何 $\Bbbk$-Lie 代数 M 和映射 $f : X \to M$, 存在唯一的 Lie 代数同态 $\overline{f} : L(X) \to M$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & L(X) \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

其中 $i : X \to L(X)$ 是标准嵌入, 则称 $L(X)$ 是 X 上**自由 Lie 代数**.

Remark 1.156. 由于自由 Lie 代数是泛性质定义的, 所以容易看出 X 上自由 Lie 代数在同构意义下唯一. 如果 $X = \varnothing$, 明显零空间作为平凡 Lie 代数是空集上的自由 Lie 代数.

Proposition 1.157. 设 X 是集合, $\Bbbk$ 是域, 那么存在 X 上的自由 $\Bbbk$-Lie 代数.

Proof. 之前已经指出 $X=\varnothing$ 时结论成立, 下设 $X\neq\varnothing$, 命 V 是以 X 为 $\Bbbk$-基的线性空间, 考虑 V 决定的张量代数 $T(V)$, 那么 $T(V)$ 上的换位子赋予 $T(V)$ 的导出 Lie 代数结构 (回忆 [例1.5]). 现在设 $L(X)$ 是 $T(V)^-$ 的由 X 生成的 Lie 子代数. 任给 $\Bbbk$-Lie 代数 M 和映射 $f:X\to M$, f 可唯一地延拓为 V 到 M 的 $\Bbbk$-线性映射, 进而由张量代数的泛性质知存在唯一的 $\Bbbk$-线性映射 $f':T(V)\to\mathcal{U}(M)$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & T(V) \arrow[d, "f'"] \\ M \arrow[r, "u"] & \mathcal{U}(M) \end{tikzcd}$$

因为 $f'(V)\subseteq u(M)$, 所以 $f'(L(X))\subseteq u(M)$. [推论1.147] 说 u 是单射, 所以对每个 $y\in L(X)$, 存在唯一的 $\overline{f}(y)\in M$ 使得 $f'(y)=u\overline{f}(y)$. 于是我们得到 $\Bbbk$-线性映射 $\overline{f}:L(X)\to M$, 易见 $\overline{f}i=f$. 因为 $L(X)$ 作为 $\Bbbk$-Lie 代数由 X 生成, 所以使得 $\overline{f}i=f$ 成立的 Lie 代数同态 $\overline{f}$ 明显唯一. □

有了自由 Lie 代数的概念, 我们就能够类似结合代数场景使用生成元和生成关系来定义 Lie 代数. 具体地, 如果有非空集合 X 以及 $L(X)$ 中一些元素 $\{f_j\}_{j\in\Lambda}$, 记 R 是由 $\{f_j\}_{j\in\Lambda}$ 生成的 $L(X)$ 的 Lie 理想, 称 $L(X)/R$ 是**由生成元集 X 和关系 $f_j=0(j\in\Lambda)$ 决定的 $\Bbbk$-Lie 代数**.

在本节最后我们介绍 Lie 代数的泛包络代数上的 Hopf 代数结构, 初次阅读可跳过 (基本术语见 [Mon93]). 以下依然设 L 是域 $\Bbbk$ 上的 Lie 代数, $\mathcal{U}(L)$ 是 L 的泛包络代数, 有标准映射 $\mathrm{i}:L\to\mathcal{U}(L)$, 根据 [推论1.147], i 是单射. 于是对每个 $x\in L$ 我们可以将 $\mathrm{i}(x)$ 和 x 视作等同, 之后将混用记号.

Proposition 1.158. 设 L 是 $\Bbbk$ 上 Lie 代数, 那么存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\Delta:\mathcal{U}(L)\to\mathcal{U}(L)\otimes_{\Bbbk}\mathcal{U}(L)$ 和 $\Bbbk$-代数同态 $\varepsilon:\mathcal{U}(L)\to\Bbbk$ 使得 $(\mathcal{U}(L),\mu,u;\Delta,\varepsilon)$ 成为 $\Bbbk$-双代数, 这里 μ,u 分别是乘法映射和单位映射, 以及

$$\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x,\varepsilon(x)=0,\forall x\in L.$$

Proof. 考虑 $\Bbbk$-线性映射 $f:L\to\mathcal{U}(L)\otimes_{\Bbbk}\mathcal{U}(L),x\mapsto x\otimes 1+1\otimes x$. 如果考虑 $\mathcal{U}(L)\otimes_{\Bbbk}\mathcal{U}(L)$ 上的导出 Lie 代数结构, 那么 f 是 $\Bbbk$-Lie 代数同态. 因此根据包络代数的泛性质, 这诱导 $\Bbbk$-代数同态 $\Delta:\mathcal{U}(L)\to\mathcal{U}(L)\otimes_{\Bbbk}\mathcal{U}(L)$ 使得 $\Delta\mathrm{i}=f$. 因为 $\mathcal{U}(L)$ 视作 $\Bbbk$-代数可由 $\mathrm{i}(L)$ 生成, 所以满足 $\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x,\forall x\in L$ 的 $\Bbbk$-代数同态是唯一的, 同理满足条件的代数同态 $\varepsilon:\mathcal{U}(L)\to\Bbbk$ 一旦说明存在性便唯一. 命 $\nu:L\to\Bbbk,x\mapsto 0$, 将 $\Bbbk$ 视作平凡 Lie 代数, 那么 ν 是 $\Bbbk$-Lie 代数同态, 于是导出 $\Bbbk$-代数同态 $\varepsilon:\mathcal{U}(L)\to\Bbbk$ 使得 $\varepsilon(x)=0,\forall x\in L$. □

现在考虑 $\mathcal{U}(L)$ 的反代数 $\mathcal{U}(L)^{op}$, 那么 $\tau:L\to\mathcal{U}(L)^{op},x\mapsto -x$ 是 $\Bbbk$-Lie 代数同态, 这导出 $\Bbbk$-代数同态 $S:\mathcal{U}(L)\to\mathcal{U}(L)^{op}$, 或等价地, $\Bbbk$-反代数同态 $S:\mathcal{U}(L)\to\mathcal{U}(L)$ 满足 $S(x)=-x,\forall x\in L$. 那么对任何 $x\in L$, 有

$$(S*u\varepsilon)(x)=\mu(S\otimes u\varepsilon)\Delta(x)=S(x)+x=(u\varepsilon*S)(x).$$

这说明 $(\mathcal{U}(L),\mu,u;\Delta,\varepsilon)$ 是 $\Bbbk$ 上 Hopf 代数, 并有对极映射 S 满足 $S(x)=-x,\forall x\in L$.

设 $(H,\mu,u;\Delta,\varepsilon)$ 是 $\Bbbk$ 上 Hopf 代数, A 是 $\Bbbk$-代数. 如果 A 上有左 H-模结构满足

$$h(ab)=\sum_{(h)}(h_{(1)}a)(h_{(2)}b),\forall h\in H,a,b\in A,$$

以及 $h\cdot 1=\varepsilon(h)1$, 则称 A 是 (左)H-**模代数**. 如果 A 是左 H-模代数, 设 $\theta: H\otimes_{\Bbbk} A\to H$ 是 A 作为左 H-模的结构映射, 那么可通过下图定义出 $\Bbbk$-线性映射 $\mu_{A\otimes H}:(A\otimes_{\Bbbk} H)\otimes_{\Bbbk}(A\otimes_{\Bbbk} H)\to A\otimes_{\Bbbk} H$.

$$\begin{tikzcd}
 & (A\otimes_{\Bbbk} H)\otimes_{\Bbbk}(A\otimes_{\Bbbk} H) \arrow[r, "\mathrm{id}_A\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{A\otimes H}"] \arrow[dl, dashed, "\mu_{A\otimes H}"'] & A\otimes_{\Bbbk}(H\otimes_{\Bbbk} H)\otimes_{\Bbbk}(A\otimes_{\Bbbk} H) \arrow[d] \\
A\otimes_{\Bbbk} H & & A\otimes_{\Bbbk} H\otimes_{\Bbbk}(H\otimes_{\Bbbk} A)\otimes_{\Bbbk} H \arrow[d, "\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_H\otimes\tau\otimes\mathrm{id}_H"] \\
 & A\otimes_{\Bbbk} A\otimes_{\Bbbk} H \arrow[ul, "\mu_A\otimes\mathrm{id}_H"] & A\otimes_{\Bbbk}(H\otimes_{\Bbbk} A)\otimes_{\Bbbk}(H\otimes_{\Bbbk} H) \arrow[l, "\mathrm{id}_A\otimes\theta\otimes\mu_H"]
\end{tikzcd}$$

我们将 $A\otimes_{\Bbbk} H$ 记作 $A\#H$, 元素 $a\otimes h$ 记作 $a\#h$. 那么对任何 $a\#h, b\#k\in A\#H$ 有

$$(a\#h)(b\#k)=\sum_{(h)}a(h_{(1)}b)\#h_{(2)}k.$$

那么 $A\#H$ 关于 $\mu_{A\#H}$ 构成 $\Bbbk$-代数: 要看到满足结合律, 对 $a\#h, b\#k, c\#t\in A\#H$, 直接计算知

$$(a\#h\cdot b\#k)c\#t=\sum_{(h)(k)}a(h_{(1)}b)h_{(2)(1)}k_{(1)}(c)\#h_{(2)(2)}k_{(2)}t,$$

$$a\#h(b\#k\cdot c\#t)=\sum_{(h)(k)}a(h_{(1)(2)}b)h_{(1)(2)}k_{(1)}(c)\#h_{(2)}k_{(2)}t.$$

现在由 A 是左 H-模, $H\otimes_{\Bbbk} H\otimes_{\Bbbk} H$ 在 $H\otimes_{\Bbbk} A\otimes_{\Bbbk} H$ 上有自然的作用满足第一位置与第三位置是 H 中元素相乘, 第二位置是 H 在 A 上的数乘作用, 于是利用 Δ 的余结合律考察 h 在 Δ 下的两次打开对应的 $H\otimes_{\Bbbk} H\otimes_{\Bbbk} H$ 中的元素在

$$1\otimes\sum_{(k)}bk_{(1)(c)}\otimes k_{(2)}t\in H\otimes_{\Bbbk} A\otimes_{\Bbbk} H$$

上的作用不难看到 $(a\#h\cdot b\#k)c\#t=a\#h(b\#k\cdot c\#t)$. 称得到的 $\Bbbk$-代数 $A\#H$ 是**冲积代数**.

Example 1.159 (Lie-Rinehart 代数产生冲积代数). 回忆 [例1.117] 中域 $\Bbbk$ 上的 Lie-Rinehart 代数 (A,L) 是指 $\Bbbk$-交换代数 A 以及 $\Bbbk$-Lie 代数 $(L,[-,-])$ 满足 L 上有 A-模结构并且在 A 上有 Lie 作用 $\rho: L\to\mathrm{Der}_{\Bbbk}A$ 满足 ρ 是 A-模同态并且对任何 $x,y\in L, a\in A$ 有 $[x,ay]=a[x,y]+(\rho(x)a)y$. 现在考察域 $\Bbbk$ 上 Lie 代数 L 的包络代数 $\mathcal{U}(L)$, 其上有 Hopf 代数结构 $(\mathcal{U}(L),\mu,u;\Delta,\varepsilon)$ 以及对极映射 $S:\mathcal{U}(L)\to\mathcal{U}(L)$ 满足 $S(x)=-x,\forall x\in L$. 下面说明 A 可视作 Hopf 代数 $\mathcal{U}(L)$ 上的左模代数. 首先由 Lie 表示 ρ 诱导 A 上的左 $\mathcal{U}(L)$-模结构 $\overline{\rho}:\mathcal{U}(L)\to\mathrm{End}_{\Bbbk}A$ 满足 $\overline{\rho}(x)=\rho(x)$. 因为 $\overline{\rho},\Delta,\varepsilon$ 是 $\Bbbk$-代数同态并且 $\mathcal{U}(L)$ 作为 $\Bbbk$-代数可由 L 生成, 所以要验证 A 是左 $\mathcal{U}(L)$-模代数, 只需验证对任何 $x\in L$ 有 $x(ab)=x(a)b+ax(b),\forall a,b\in A$ 以及 $x(1)=0$, 而这由 L 中元素在 A 上的作用都是导子作用便知结论成立. 由此我们得到 A 是 Hopf 代数 $\mathcal{U}(L)$ 上的左模代数. 特别地, Lie-Rinehart 代数 (A,L) 产生冲积代数 $A\#\mathcal{U}(L)$. 满足对任何 $a\in A, x\in L$ 有 $(a\#1)(1\#x)=a\#x$ 以及 $(1\#x)(a\#1)=x(a)\#1+a\#x$. 在 [Hum72] 中, 也将 (A,L) 导出的冲积代数 $A\#\mathcal{U}(L)$ 称为 **Massey-Peterson 代数** [MP65].

现在设 (A,L) 是域 $\Bbbk$ 上的 Lie-Rinehart 代数, [例1.159] 说明 A 是 Hopf 代数 $\mathcal{U}(L)$ 上的左模代数, 并有冲积代数 $A\#\mathcal{U}(L)$. 于是有标准映射 $\iota_A': A\to A\#\mathcal{U}(L), a\mapsto a\#1$ 以及 $\iota_L': L\to A\#\mathcal{U}(L), x\mapsto 1\#x$. 易见 ι_A' 是 $\Bbbk$-代数同态而将 $A\#\mathcal{U}(L)$ 视作导出 Lie 代数后 ι_L' 是 $\Bbbk$-Lie 代数同态. 现在命 $\mathcal{I}$ 是 $A\#\mathcal{U}(L)$ 的子集

$$\{ab\#x-a\#bx|a,b\in A,x\in L\}$$

生成的右理想, 那么 $\mathcal{I}$ 也是左理想: 任取 $a,b,c\in A, x,y\in L$ 有

$$(c\#y)(ab\#x-a\#bx)=cay(b)\#x+cby(a)\#x+cab\#yx-cya\#bx-ca\#y(bx).$$

注意到 $cab\#yx-c\#abyx\in\mathcal{I}$, 所以只要说明 $c\#abyx+cay(b)\#x+cby(a)\#x-cy(a)\#bx-ca\#y(bx)\in\mathcal{I}$. 结合 $cay(b)\#x-c\#ay(b)x\in\mathcal{I}$, 转化成说明

$$c\#abyx+c\#ay(b)x+cby(a)\#x-cy(a)\#bx-ca\#y(bx)\in\mathcal{I}.$$

因为 $cby(a)\#x-cy(a)\#bx\in\mathcal{I}$, 所以又化归为说明 $c\#abyx+c\#ay(b)x-ca\#y(bx)\in\mathcal{I}$. 下面说明

$$c\#abyx+c\#ay(b)x-c\#ay(bx)\in\mathcal{I}$$

来得到 $\mathcal{I}$ 是双边理想. 现在 $c\#abyx+c\#ay(b)x-c\#ay(bx)=c\#ab[y,x]+c\#abxy+c\#ay(b)x-c\#ay(bx)$. 结合

$$c\#a[y,bx]=c\#ay(bx)-c\#abxy$$

得到只需说明 $c\#ab[y,x]-c\#a[y,bx]+c\#ay(b)x\in\mathcal{I}$ 而根据 Lie-Rinehart 代数的定义有

$$c\#ab[y,x]-c\#a[y,bx]+c\#ay(b)x=c\#a([y,bx]-[y,bx])=0.$$

所以上述讨论证明了 $\mathcal{I}$ 是双边理想 (并且任取 L 的 $\Bbbk$-基, 从 $\mathcal{U}(L)$ 关于给定基的 PBW 基不难看出 $\mathcal{I}$ 是真理想). 现在定义 $\mathcal{U}(A,L)=A\#\mathcal{U}(L)/\mathcal{I}$. 那么得到 $\Bbbk$-代数同态 $\iota_A:A\to\mathcal{U}(A,L)$ 以及 Lie 代数同态 $\iota_L:L\to\mathcal{U}(A,L)$, 满足 $\iota_A(a)\iota_L(x)=(a\#1)(1\#x)+\mathcal{I}=a\#x+\mathcal{I}=1\#ax+\mathcal{I}=\iota_L(ax),\forall x\in L,a\in A$ 以及

$$\iota_L(x)\iota_A(a)-\iota_A(a)\iota_L(x)=x(a)\#1+\mathcal{I}=\iota_A(x(a)),\forall x\in L,a\in A.$$

不难看到在 $A\#\mathcal{U}(L)$ 中也有 $\iota_L'(x)\iota_A(a)-\iota_A'(a)\iota_L'(x)=\iota_L'(x(a)),\forall x\in L,a\in A$.

Theorem 1.160. 设 (A,L) 是域 $\Bbbk$ 上的 Lie-Rinehart 代数, 那么上述构造的 $(\mathcal{U}(A,L),\iota_A,\iota_L)$ 满足下述泛性质: 对任何 $\Bbbk$-代数 $\mathscr{B}$, $\Bbbk$-代数同态 $\phi_A:A\to\mathscr{B}$ 以及 $\Bbbk$-Lie 代数同态 $\phi_L:L\to\mathscr{B}$(这里将 $\mathscr{B}$ 视作导出 Lie 代数), 只要满足对任何 $x\in L,a\in A$ 有 $\phi_A(a)\phi_L(x)=\phi_L(ax)$ 以及 $\phi_L(x)\phi_A(a)-\phi_A(a)\phi_L(x)=\phi_A(x(a))$, 就存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\Phi:\mathcal{U}(A,L)\to\mathscr{B}$ 使得 $\phi_A=\Phi\iota_A$ 以及 $\phi_L=\Phi\iota_L$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "\phi_A"'] & \mathcal{U}(A,L) \arrow[d, dashed, "\Phi"] & L \arrow[l, "\iota_L"'] \arrow[dl, "\phi_L"] \\ & \mathscr{B} & \end{tikzcd}$$

称满足上述泛性质的 $(\mathcal{U}(A,L),\iota_A,\iota_L)$ 为 Lie-Rinehart 代数 (A,L) 的**泛包络代数** (在 [Jac62] 中也被称为 L 在 A 中的表示 $\rho:L\to\mathrm{Der}_{\Bbbk}A$ 的**微分算子代数**. 原因是如果 A 是光滑流形的光滑函数环且 L 是给定流形上光滑向量场全体, 那么对应的泛包络代数同构于光滑流形上的微分算子代数, 见 [Hue90]). 易见 (A,L) 的泛包络代数在同构意义下唯一. 并且 ι_A 是单射: 取 $\mathscr{B}=\mathrm{End}_{\Bbbk}A$, 命 $\phi_A:A\to\mathscr{B},a\mapsto a_l$ 以及 $\phi_L:L\to\mathscr{B},x\mapsto\rho(x)$, 那么根据 Lie-Rinehart 代数的定义明显对任何 $x\in L,a\in A$ 有

$$\phi_A(a)\phi_L(x)=\phi_L(ax) \text{ 以及 } \phi_L(x)\phi_A(a)-\phi_A(a)\phi_L(x)=\phi_A(x(a)),$$

因此根据 $(\mathcal{U}(A,L),\iota_A,\iota_L)$ 的泛性质, 存在代数同态 Φ 使得 $\Phi\iota_A=\phi_A$, 于是由 ϕ_A 是单射导出 ι_A 也是单射.

Proof. 设 $\Bbbk$-代数 $\mathscr{B}$, $\Bbbk$-代数同态 $\phi_A : A \to \mathscr{B}$ 以及 $\Bbbk$-Lie 代数同态 $\phi_L : L \to \mathscr{B}$ 满足对任何 $x \in L, a \in A$ 有 $\phi_A(a)\phi_L(x) = \phi_L(ax)$ 以及 $\phi_L(x)\phi_A(a) - \phi_A(a)\phi_L(x) = \phi_A(x(a))$. 那么根据 $\mathcal{U}(L)$ 的泛性质, 存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\eta : \mathcal{U}(L) \to \mathscr{B}$ 使得 $\eta(x) = \phi_L(x), \forall x \in L$. 命 $\theta : A \times \mathcal{U}(L) \to \mathscr{B}, (a,h) \mapsto \phi_A(a)\eta(h)$. 这明显是 $\Bbbk$-双线性映射, 于是诱导 $\Bbbk$-线性映射 $\Theta : A\#\mathcal{U}(L) \to \mathscr{B}$ 满足 $\Theta(a\#h) = \phi_A(a)\eta(h), \forall a \in A, h \in \mathcal{U}(L)$. 要验证 Θ 是 $\Bbbk$-代数同态, 根据 Θ 的 $\Bbbk$-线性性, 只需验证 h_1, h_2 形如 $\iota'_L(x_1)\cdots\iota'_L(x_m), x_1, ..., x_m \in L$ 时, $\Theta(a\#h_1)\Theta(b\#h_2) = \Theta((a\#h_1)(a\#h_2))$ 即可. 不难看出这可以化归为对 h 形如 $\iota'_L(x_1)\cdots\iota'_L(x_m)$ 时, 验证 $\Theta((a\#h)(b\#1)) = \Theta(a\#h)\Theta(b\#1)$. $(a\#h)(b\#1)$ 可写作 $\iota'_A(a)\iota'_L(x_1)\iota'_L(x_2)\cdots\iota'_L(x_m)\iota'_A(b)$, 反复利用 ι'_L 与 ι'_A 满足的关系, 而 ϕ_L 和 ϕ_A 也满足相同形式的关系, 由此可知 $\Theta((a\#h)(b\#1)) = \Theta(a\#h)\Theta(b\#1)$.

至此得到 $\Bbbk$-代数同态 $\Theta : A\#\mathcal{U}(L) \to \mathscr{B}$. 注意到对任何 $a, b \in A, x \in L$ 有

$$\Theta(ab\#x - a\#bx) = \phi_A(ab)\phi_L(x) - \phi_A(a)\phi_L(bx) = \phi_L(abx) - \phi_L(abx) = 0,$$

因此 Θ 诱导 $\Bbbk$-代数同态 $\Phi : \mathcal{U}(A,L) \to \mathscr{B}$ 使得 $\phi_A = \Phi\iota_A$ 以及 $\phi_L = \Phi\iota_L$. 满足 $\phi_A = \Phi\iota_A$ 以及 $\phi_L = \Phi\iota_L$ 的代数同态 Φ 的唯一性来自 $\mathcal{U}(A,L)$ 作为 $\Bbbk$-代数可由 $\iota_A(A), \iota_L(L)$ 生成. $\square$

Example 1.161. 任何 $\Bbbk$-Lie 代数产生 Lie-Rinehart 代数 $(\Bbbk, L)$(即将交换代数 A 取作 $\Bbbk$), 这时 $(\Bbbk, L)$ 的泛包络代数就是 L 的泛包络代数 $\mathcal{U}(L)$(也可以从 $\mathcal{U}(A,L)$ 的构造中看出).

在 [Rin63] 中, Rinehart 对 (A,L) 的泛包络代数给出如下等价构造. 首先在 $\Bbbk$-线性空间 $A \oplus L$ 上定义

$$[(a,x),(b,y)] = [(x(b) - y(a), [x,y])], \forall x, y \in L, a, b \in A.$$

可直接计算验证 $(A \oplus L, [-,-])$ 是 $\Bbbk$-Lie 代数. 考虑 $A \oplus L$ 作为 $\Bbbk$-Lie 代数的泛包络代数 $\mathcal{U}(A \oplus L)$, 设 $\mathcal{U}^+$ 是 $A \oplus L$ 在 $\mathcal{U}(A \oplus L)$ 中生成的无幺 $\Bbbk$-子代数, 考虑商空间 $\mathcal{V}(A,L) = \mathcal{U}^+/\mathcal{J}$, 这里 $\mathcal{J}$ 是由

$$\{(a,0)(b,0) - (ab,0), (a,0)(0,x) - (0,ax) | a, b \in A, x \in L\}$$

所生成的无幺 $\Bbbk$-代数 $\mathcal{U}^+$ 的理想, 那么 $\mathcal{V}(A,L)$ 作为 $\Bbbk$-代数有幺元 $(1,0) + \mathcal{J}$. 并且有标准映射 $j_A : A \to \mathcal{V}(A,L), a \mapsto (a,0) + \mathcal{J}$ 以及 $j_L : L \to \mathcal{V}(A,L), x \mapsto (0,x) + \mathcal{J}$, 根据 $\mathcal{J}$ 的构造和 $A \oplus L$ 上 Lie 括号的定义可知 j_A 是代数同态而 j_L 是 Lie 代数同态. 根据 $\mathcal{V}(A,L)$ 的构造易知

$$j_A(a)j_L(x) = j_L(ax), j_L(x)j_A(a) - j_A(a)j_L(x) = j_A(x(a)), \forall a \in A, x \in L.$$

因此根据 [定理1.160], 存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\Phi : \mathcal{U}(A,L) \to \mathcal{V}(A,L)$ 使得

$$\Phi(\iota_A(a)) = j_A(a), \Phi(\iota_L(x)) = j_L(x), \forall a \in A, x \in L.$$

下面通过构造 Φ 的逆映射来得到 Φ 是代数同构. 命 $\sigma : A \oplus L \to \mathcal{U}(A,L), (a,x) \mapsto \iota_A(a) + \iota_L(x)$, 可直接计算验证这是 $\Bbbk$-Lie 代数同态, 于是根据 $\mathcal{U}(A,L)$ 的泛性质, 存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\Theta : \mathcal{U}(A \oplus L) \to \mathcal{U}(A,L)$ 使得

$$\begin{tikzcd}
A \oplus L \arrow[rr] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \mathcal{U}(A \oplus L) \arrow[dl, dashed, "\Theta"] \\
& \mathcal{U}(A,L) &
\end{tikzcd}$$

交换. 于是由 ι_A 是代数同态以及 $\iota_A(a)\iota_L(x)=\iota_L(ax)$ 得到 $\mathcal{J}$ 的生成元在 Θ 作用下是零. 因此导出 $\Bbbk$-代数同态 $\Psi:\mathcal{V}(A,L)\to\mathcal{U}(A,L)$ 满足 $\Psi j_A=\iota_A,\Psi j_L=\iota_L$. 现在由 $\mathcal{U}(A,L)$ 的泛性质以及 $\mathcal{V}(A,L)$ 作为 $\Bbbk$-代数可由 $j_A(A)$ 以及 $j_L(L)$ 生成便知 Φ 与 Ψ 互为逆映射. 因此 $(\mathcal{V}(A,L),j_A,j_L)$ 也是 (A,L) 的泛包络代数, 这两种构造的等价性在 [Hue90] 中被阐述. 类似于 Lie 代数的泛包络代数的表示范畴与 Lie 代数的表示范畴同构, 也有

Theorem 1.162. 设 (A,L) 是 $\Bbbk$ 上 Lie-Rinehart 代数, $(\mathcal{U}(A,L),\iota_A,\iota_L)$ 是其泛包络代数. 那么对任何 (A,L)-模 (W,θ)(回忆 [例1.117]), 其上有唯一的左 $\mathcal{U}(A,L)$-模结构使得 $\iota_A(a)w=aw$ 以及 $\iota_L(x)w=\theta(x)w$.

Proof. 现在考虑自同态代数 $\mathrm{End}_\Bbbk W$, 有左乘变换诱导的 $\Bbbk$-代数同态 $\phi_A:A\to\mathrm{End}_\Bbbk W, a\mapsto a_l$ 以及 $\Bbbk$-Lie 代数同态 $\phi_L=\theta$, 那么根据平坦 L-联络的定义, 有 $\phi_A(a)\phi_L(x)=\phi_L(ax)$ 以及

$$\phi_L(x)\phi_A(a)=\phi_A(a)\phi_L(x)+\phi_A(x(a)),\forall a\in A,x\in L,$$

所以存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 Φ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "\phi_A"'] & \mathcal{U}(A,L) \arrow[d, dashed, "\Phi"] & L \arrow[l, "\iota_L"'] \arrow[dl, "\phi_L"] \\
& \mathrm{End}_\Bbbk W &
\end{tikzcd}$$

进而对应的 W 上左 $\mathcal{U}(A,L)$-模结构满足要求. 唯一性来自 $\mathcal{U}(A,L)$ 可由 $\iota_A(A),\iota_L(L)$ 生成. □

Example 1.163. 设 (A,L) 是 $\Bbbk$ 上 Lie-Rinehart 代数, 那么 A 自然可视作 (A,L)-模, 所以 A 可视作左 $\mathcal{U}(A,L)$-模满足任何 $a\in A$, $\iota_A(a)\in\mathcal{U}(A,L)$ 在 A 上的作用对应元素 a 在 A 上的左乘变换; 任何 $x\in L$, $\iota_L(x)\in\mathcal{U}(A,L)$ 在 A 上的作用对应 $\rho(x)\in\mathrm{Der}_\Bbbk A$ 在 A 上的导子作用.

反之, 如果有左 $\mathcal{U}(A,L)$-模 W, 那么利用 ι_A 可赋予 W 上 A-模结构以及 $\theta=\iota_L$ 给出 Lie 代数同态 $\theta:L\to\mathrm{End}_\Bbbk W$, 根据 ι_A 和 ι_L 所满足的关系可知 W 是 (A,L)-模. 由此我们得到对 $\Bbbk$-线性空间 W,

$$W \text{ 上所有 } (A,L)\text{-模结构与左 } \mathcal{U}(A,L)\text{-模结构一一对应.}$$

在 [Hue99] 中, Huebschmann 把 [例1.117] 讨论的 (A,L)-模进一步称为**左 (A,L)-模**. 而**右 (A,L)-模**则定义为带有满足下述条件的作用的 A-模 W: 记 L 上 Lie 括号为 $[-,-]$, 有 $\Bbbk$-线性映射 $L\to\mathrm{End}_\Bbbk W, x\mapsto\{-,x\}_W$ 使
(1) 任何 $w\in W,x,y\in L$ 都有 $\{w,[x,y]\}_W=\{\{w,x\}_W,y\}_W-\{\{w,y\}_W,x\}_W$;
(2) 任何 $w\in W,a\in A,x\in L$ 有 $\{aw,x\}_W=a\{w,x\}_W-(\rho(x)a)w$;
(3) 任何 $w\in W,a\in A,x\in L$ 有 $\{w,ax\}_W=a\{w,x\}_W-(\rho(x)a)w$.

上述定义从形式上看并不与左 (A,L)-模平行. 但可以从右 $\mathcal{U}(A,L)$-模出发看出右 (A,L)-模定义的需求是自然的: 如果 W 是右 $\mathcal{U}(A,L)$-模, 定义 L 中元素在 W 上的作用为 $\{w,x\}_W=w\iota_L(x)$, A-模结构依然使用 ι_A 定义, 并且左右 A-模结构一致, 即 $aw=wa=w\iota_A(a),\forall a\in A,w\in W$. 那么
(1) 任何 $\{w,[x,y]\}_W=w\iota_L([x,y])=\{\{w,x\}_W,y\}_W-\{\{w,y\}_W,x\}_W$.
(2) 任何 $w\in W,a\in A,x\in L$ 有 $\{aw,x\}_W=(aw)\iota_L(x)=w\iota_A(a)\iota_L(x)=w\iota_L(x)\iota_A(a)-w(\rho(x)a)$.
(3) 任何 $w\in W,a\in A,x\in L$ 有 $\{w,ax\}_W=w\iota_L(ax)=w\iota_A(a)\iota_L(x)=w\iota_L(x)\iota_A(a)-w(\rho(x)a)$.

上述讨论表明 W 上右 (A,L)-模结构可从右 $\mathcal{U}(A,L)$-模结构自然导出. 反之, 如果有右 (A,L)-模 W, 这里将 $\{w,x\}_W$ 简记为 wx. 考虑 $\mathrm{End}_\Bbbk W$ 的反代数 $(\mathrm{End}_\Bbbk W)^{op}$, 命 $\phi_A:A\to(\mathrm{End}_\Bbbk W)^{op}$ 是右乘变换诱导的映射,

由 A 的交换性, 这是 $\Bbbk$-代数同态. 命 $\phi_L : L \to (\mathrm{End}_{\Bbbk} W)^{op}, x \mapsto x_r$, 这里 x_r 表示 x 决定的 W 上右乘变换, 因为考虑的自同态代数的反代数, 因此这时也有 ϕ_L 是 Lie 代数同态. 并且根据右 (A, L)-模的定义可直接计算验证对任何 $x \in L, a \in A$ 有 $\phi_A(a)\phi_L(x) = \phi_L(ax)$ 以及 $\phi_L(x)\phi_A(a) - \phi_A(a)\phi_L(x) = \phi_A(x(a))$. 所以根据 $\mathcal{U}(A, L)$ 的泛性质, 存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\Phi : \mathcal{U}(A, L) \to (\mathrm{End}_{\Bbbk} W)^{op}$ 使得 $\Phi\iota_A = \phi_A$ 以及 $\Phi\iota_L = \phi_L$. 于是通过定义

$$W \times \mathcal{U}(A, L) \to W, (w, h) \mapsto \Phi(h)(w)$$

便可赋予 W 上右 $\mathcal{U}(A, L)$-模结构. 满足 $\iota_A(A)$ 中元素在 W 上的右乘作用就是 W 上本身的 A 的右乘变换. $\iota_L(L)$ 中元素在 W 上的右乘作用就是 W 上右 (A, L)-模结构 L 中元素的右作用. 所以上面的讨论表明 W 上右 (A, L)-模结构与右 $\mathcal{U}(A, L)$-模结构一一对应.

2 有限维半单 Lie 代数的分类

本章我们介绍 (特征零的代数闭域上非零) 有限维半单 Lie 代数的分类理论, 主线是在做一些有限半单 Lie 代数表示相关的基本准备 (主要是说明有限维半单 Lie 代数上的有限维表示都完全可约以及分析 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 有限维表示的结构) 后, 说明有限维半单 Lie 代数关于某类特殊的 Lie 子代数 (极大的环面 Lie 子代数, 环面 Lie 子代数是指每个元素诱导的伴随变换是可对角化线性变换的 Lie 子代数. 对于非零有限维半单 Lie 代数, 我们会说明极大环面 Lie 子代数的存在性. 例如, 在 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 中所有对角阵构成 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的极大环面 Lie 子代数) 具有"根子空间分解", 由此产生根系的概念, 根系. 再把有限维半单 Lie 代数关于给定极大环面 Lie 子代数产生的根系具有的特性提取后加以抽象, 得到 (抽象) 根系的概念, 这是某个非零有限维实内积空间的由有限多个非零向量构成的具有某种对称性的子集. 于是在抽象根系层面研究根系的性质, 并说明根系能够唯一决定某种 (允许带多重边以及部分边可能有方向的) 图, 即 Dynkin 图. 随后研究 Dynkin 图的性质并说明 Dynkin 图可完全分类有限维半单 Lie 代数. 为了更好地阐述本章主线之后的发展, 我们引入些记号.

设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, H 是 L 的极大环面 Lie 子代数. 我们会在 [命题2.28] 中说明 H 是交换 Lie 代数, 于是 $\{\mathrm{ad}_h|h\in H\}$ 是 L 上一族 (无限多个) 两两可交换的可对角化线性变换. 根据线性代数理论, L 能够分解为一些 $\{\mathrm{ad}_h|h\in H\}$ 的公共特征向量的直和. 对每个 $\alpha\in H^*=\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H,\Bbbk)$, 定义 $L_\alpha=\{x\in L|[h,x]=\alpha(h)x,\forall h\in H\}$. 记 $\Phi=\{\alpha\in H^*|\alpha\neq 0且L_\alpha\neq 0\}$. 我们会看到 Φ 是非空有限集 (称为 L 关于 H 的根系, Φ 中的元素简称为根), 可 $\Bbbk$-线性生成 H^*, $L_0=H$ 并且有 L 的 $\Bbbk$-子空间分解 (称为根子空间分解):

$$L=H\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi}L_\alpha\right).$$

借助一些 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的表示理论, 使我们能够对上述分解有进一步认识, 例如 $\dim_{\Bbbk}L_\alpha=1,\forall\alpha\in\Phi$. 并且我们能够把 Φ 嵌入某个有限维实内积空间: 记 $\kappa:L\times L\to\Bbbk$ 是 Killing 型, 根据 Cartan 准则 ([定理1.103]), κ 是非退化对称双线性型. 进而对每个 $\alpha\in H^*$, 存在唯一的 $t_\alpha\in H$ 使得 $\kappa(t_\alpha,h)=\alpha(h),\forall h\in H$. 于是对 $\alpha,\beta\in H^*$, 我们能够用 $(-,-):H^*\times H^*\to\Bbbk,(\alpha,\beta)\mapsto\kappa(t_\alpha,t_\beta)$ 定义出 H 上对称双线性型, 并且会说明它是非退化的以及对所有的 $\alpha,\beta\in\Phi$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}$. 于是通过取定 H^* 的 $\Bbbk$-基 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}\subseteq\Phi$(因为 Φ 是可 $\Bbbk$-线性生成 H^* 的非空有限集), 把 Φ 自然嵌入到以 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 为 $\mathbb{R}$-基的线性空间 E, 再自然延拓 (α_i,α_j) 赋予 E 上 $\mathbb{R}$-对称双线性型 $(-,-)$, 我们会看到该双线性型是对称正定的, 使得 $(E,(-,-))$ 成为实内积空间. 如果 Φ 无法分解为两个非空且互相正交的真子集的并, 称 Φ 不可约. 我们会证明 L 关于 H 的根系 Φ 不可约当且仅当 L 是单 Lie 代数.

通过提取 Φ 在 E 中具有的一些性质, 我们能够把 Φ 加以抽象研究根系理论. 如果 Φ 的子集 Δ 是 E 的 $\mathbb{R}$-基且 Φ 中任何元素由 Δ 线性表示的表出系数不是同时为非负整数就是同时为非正整数, 则称 Δ 是 Φ 的基. 我们会说明根系 Φ 的基总存在. 记 $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 是 Φ 的基以及 $a_{ij}=2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j),1\leq i,j\leq\ell$, 得到的 ℓ 阶整数矩阵 $(a_{ij})_{\ell\times\ell}$ 称为 Φ 关于 Δ 的 Cartan 矩阵. Φ 关于 Δ 的 Dynkin 图如下定义: 顶点集与 Δ 一一对应, 任意两个顶点间的边数定义为 $a_{ij}a_{ji}$, 如果 α_i 和 α_j(作为 E 中向量) 长度不同, 那么 α_i 与 α_j 对应的顶点间添加由长根指向短根的箭头. 之后会证明 Φ 不可约当且仅当相应 Dynkin 图是连通的, 因此有限维单 Lie 代数的分类与连通 Dynkin 图密切相关. 随后我们会对 Φ 关于 Δ 的 Cartan 矩阵和 Dynkin 图做些基本讨论, 来完全确定连通 Dynkin 图的所有可能 (见 [定理2.84]).

现在回到有限维半单 Lie 代数 L 的讨论. 对固定的极大环面 Lie 子代数 H, 前面指出 L 关于 H 产生根系 Φ, 固定 Φ 的任何基 Δ, 我们能够产生 Dynkin 图. 本章剩下的主要目标就是在 [推论2.135] 证明产生的 Dynkin

图与 H 的选取, Δ 的选取都无关!(固定 H, Dynkin 图与 Δ 的选取无关的证明涉及根系的 Weyl 群理论; Dynkin 图与 H 选取无关来自半单 Lie 代数场景 Cartan 子代数等价于极大环面 Lie 子代数和 Cartan 子代数的共轭定理). 进而 L 能够唯一决定一个 Dynkin 图 (这里不区分同构的图), 我们也会说明同构的有限维半单 Lie 代数对应相同的 Dynkin 图 ([推论2.137]). 反之, 如果两个有限维半单 Lie 代数对应的 Dynkin 图相同, 那么也有 Lie 代数间存在同构 ([定理2.138]). 至此, $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数同构类能够被 Dynkin 图完全分类. 最后, 我们介绍 Serre 定理——任何根系的 Dynkin 图都由某个有限维半单 Lie 代数导出. 于是 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数同构类和根系的 Dynkin 图全体一一对应. 特别地, 我们也得到了有限维复半单 Lie 代数的分类理论.

2.1 表示的 Casimir 元

本节固定特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 以及 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数 L, $\rho: L \to \mathrm{End}_{\Bbbk}V$ 是 L 的有限维表示. 对任何 $x, y \in L$, 有 V 上线性变换 $\rho(x), \rho(y)$, 可类似 Killing 型定义 L 上对称双线性函数 $\beta: L \times L \to \Bbbk, (x, y) \mapsto \mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y))$. 当 $V = 0$ 时, 约定 $\beta = 0$. 特别地, 如果 $\rho = \mathrm{ad}$ 是 L 的伴随表示 ([例1.115], 那么当 L 是有限维半单 Lie 代数时, ad 是忠实表示, 见 [注记1.61]), 那么这里定义的对称双线性型 β 就是 L 的 Killing 型. 类似于 Killing 型, 容易计算验证这里定义的双线性型 β 也具有不变性: $\beta([x, y], z) = \beta(x, [y, z]), \forall x, y, z \in L$. 所以

Lemma 2.1. 对 L 的有限维表示 $\rho: L \to \mathrm{End}_{\Bbbk}V$, J 是 Lie 理想. $I = \{x \in L | \beta(x, y) = 0, \forall y \in J\}$ 也是 Lie 理想.

Proof. 易见 I 是 L 的 K-子模, 如果 $x \in I, y \in L$, 那么 $\beta([x, y], z) = \beta(x, [y, z]) = 0, \forall z \in J$. 故 $[x, y] \in I$. □

Cartan 准则 ([定理1.103]) 表明 $\rho = \mathrm{ad}$ 时 (L 已经假设了半单性), $\beta = \kappa$ 非退化. 一般地, 有

Lemma 2.2. 如果 $\rho: L \to \mathrm{End}_{\Bbbk}V$ 是有限维半单 Lie 代数 L 的忠实有限维表示, 那么双线性型 β 非退化.

Proof. 如果 $L = 0$, 结论直接成立. 下设 $L \neq 0$. 命 $S = \{x \in L | \beta(x, y) = 0, \forall y \in L\}$, 那么 [引理2.1] 表明 S 是 L 的 Lie 理想. 如果能够证明 $\rho(S)$ 是可解 Lie 代数, 那么由 ρ 是单 Lie 代数同态得到 S 是 L 的可解 Lie 理想 ([命题1.55]), 再由 L 的半单性得到 $S = 0$([引理1.60]), 于是知 β 是非退化的. 下证 $\rho(S)$ 是可解 Lie 代数. 因为 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, 所以 [推论1.90] 表明只需证 $[\rho(S), \rho(S)] = \rho([S, S])$ 是幂零 Lie 代数. 我们断言 $\rho([S, S])$ 中所有元素是 V 上幂零变换, 一旦证明该断言, 应用 [例1.77] 得到 $\rho([S, S])$ 中所有元素决定的伴随变换是 $\rho([S, S])$ 上幂零变换, 于是应用 Engel 定理得到 $\rho([S, S])$ 是幂零 Lie 代数. 因此要完成引理证明只需证明断言. 下面使用 [引理1.101] 证明断言. 命 $A = \rho([S, S]), B = \rho(S)$, 那么 $A \subseteq B \subseteq \mathfrak{gl}(V)$. 命

$$M = \{\sigma \in \mathfrak{gl}(V) | [\sigma, B] \subseteq A\},$$

任取 $\theta = \sum_{i=1}^{t} \rho([s_i, s_i']) \in A$(这里 $s_i, s_i' \in S$), 对 $\tau \in M$, 明显有

$$\mathrm{tr}(\theta\tau) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{tr}(\rho([s_i, s_i'])\tau) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{tr}([\rho(s_i), \rho(s_i')]\tau) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{tr}(\rho(s_i)[\rho(s_i'), \tau]).$$

根据 M 的定义, 每个 $[\rho(s_i'), \tau] \in A$, 所以根据 S 的定义得到 $\mathrm{tr}(\theta\tau) = 0$. 现在应用 [引理1.101] 即可. □

设 L 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的非零有限维半单 Lie 代数, 并且有忠实的有限维表示 $\rho: L \to \mathrm{End}_{\Bbbk}V$, 根据 [引理2.2], 有非退化对称双线性型 $\beta: L \times L \to \Bbbk, (x, y) \mapsto \mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y))$. 因此根据 [引理1.104], 对 L 的任

何 $\Bbbk$-基 $\{x_1,...,x_d\}$(这里 $d=\dim_\Bbbk L$), 存在 $\Bbbk$-基 $\{y_1,...,y_d\}$ 使得 $\beta(x_i,y_j)=\delta_{ij}$. 命

$$c_\rho=\sum_{i=1}^{d}\rho(x_i)\rho(y_i)\in \mathrm{End}_\Bbbk V.$$

我们说明上述 (V 上) 线性变换 c_ρ 的定义不依赖于 $\{x_1,...,x_d\}$ 和 $\{y_1,...,y_d\}$ 的选取. 如果还有 L 的基 $\{x'_1,...,x'_d\}$ 和 $\{y'_1,...,y'_d\}$ 满足 $\beta(x'_i,y'_j)=\delta_{ij},\forall 1\le i,j\le d$. 设可逆矩阵 $A,B\in \mathrm{M}_d(\Bbbk)$ 满足

$$(x_1,...,x_d)=(x'_1,...,x'_d)A,(y_1,...,y_d)=(y'_1,...,y'_d)B.$$

那么可直接验证 $(\beta(x_i,y_j))_{d\times d}=A^T(\beta(x'_i,y'_j))_{d\times d}B$. 进而 $A^TB=I_d$. 现在 $(\rho(x_1),...,\rho(x_d))=(\rho(x'_1),...,\rho(x'_d))A$ 并且 $(\rho(y_1),...,\rho(y_d))=(\rho(y'_1),...,\rho(y'_d))B$, 由此立即得到

$$c_\rho=\sum_{i=1}^{d}\rho(x_i)\rho(y_i)=(\rho(x_1),...,\rho(x_d))\begin{pmatrix}\rho(y_1)\\ \vdots\\ \rho(y_d)\end{pmatrix}=(\rho(x'_1),...,\rho(x'_d))AB^T\begin{pmatrix}\rho(y'_1)\\ \vdots\\ \rho(y'_d)\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{d}\rho(x'_i)\rho(y'_i).$$

所以 c_ρ 是仅依赖于 L 和 $\rho:L\to \mathrm{End}_\Bbbk V$ 的不变量, 称为 (特征为零的代数闭域上的) 非零有限维半单 Lie 代数 L 的有限维忠实表示 ρ 的 **Casimir 元**. 下面进一步来看 c_ρ 承载的结构信息.

Theorem 2.3. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, 并给定 L 的有限维忠实表示 $\rho:L\to \mathrm{End}_\Bbbk V$. 那么 $c_\rho\rho(x)=\rho(x)c_\rho,\forall x\in L$ 并且 $\mathrm{tr}(c_\rho)=\dim_\Bbbk L$. 特别地, 如果 ρ 是不可约 Lie 表示, 则

$$c_\rho=\frac{\dim_\Bbbk L}{\dim_\Bbbk V}\mathrm{id}_V.$$

Proof. 沿用之前的记号, 设 L 的基 $\{x'_1,...,x'_d\}$ 和 $\{y'_1,...,y'_d\}$ 满足 $\beta(x'_i,y'_j)=\delta_{ij},\forall 1\le i,j\le d$, 其中 $d=\dim_\Bbbk L$. 对任何 $x\in L$, 存在 $(a_{ij})_{d\times d},(b_{ij})_{d\times d}\in \mathrm{M}_d(\Bbbk)$ 使得

$$[x,x_i]=\sum_{j=1}^{d}a_{ij}x_j,[x,y_i]=\sum_{j=1}^{d}b_{ij}y_j.$$

现在由 β 的不变性, $\beta([x_i,x],y_j)=\beta(x_i,[x,y_j])$, 进而 $-a_{ij}=b_{ji},\forall 1\le i,j\le d$. 现在计算

$$\begin{aligned}[\rho(x),c_\rho]=&\sum_{i=1}^{d}[\rho(x),\rho(x_i)\rho(y_i)]\\ =&\sum_{i=1}^{d}\rho(x_i)[\rho(x),\rho(y_i)]+[\rho(x),\rho(x_i)]\rho(y_i)\\ =&\sum_{i=1}^{d}\rho(x_i)\rho([x,y_i])+\rho([x,x_i])\rho(y_i)\\ =&\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}b_{ij}\rho(x_i)\rho(y_j)+\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}a_{ij}\rho(x_j)\rho(y_i)\\ =&0.\end{aligned}$$

于是 $c_\rho\rho(x)=\rho(x)c_\rho,\forall x\in L$. 注意到 $\mathrm{tr}(c_\rho)=\sum\limits_{i=1}^{d}\beta(x_i,y_i)=d$. 因此 $\mathrm{tr}(c_\rho)=\dim_\Bbbk L$. 如果 ρ 进一步是不可约 Lie 表示, 根据 Schur 引理 ([命题1.133]) 得到存在 $\lambda\in\Bbbk$ 使得 $c_\rho=\lambda\mathrm{id}_V$, 两边取迹结合 $\mathrm{char}\Bbbk=0$ 即可. □

Remark 2.4. 实际分析 (特征零的代数闭域上的) 有限维半单 Lie 代数的有限维表示时都可以不妨设该表示是忠实的. 例如设 $\mathbb{k}$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\mathbb{k}$ 上有限维半单 Lie 代数, 并有有限维表示 $\rho : L \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}V$, 那么得到 Lie 代数 $L/\mathrm{Ker}\rho$ 的忠实有限维表示 $\overline{\rho} : L/\mathrm{Ker}\rho \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}V$. 根据 [命题1.107], $L/\mathrm{Ker}\rho$ 也是有限维半单 Lie 代数. 所以可将 V 视作半单 Lie 代数 $L/\mathrm{Ker}\rho$ 的忠实表示来获取 V 的信息.

Corollary 2.5. 设 $\mathbb{k}$ 是特征为零的代数闭域, $L \neq 0$ 是 $\mathbb{k}$ 上有限维半单 Lie 代数, 并给定 L 的有限维忠实表示 $\rho : L \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}V$. 则 ρ 的 Casimir 元 $c_\rho : V \to V$ 是 V 作为 Lie 模的自同态. 特别地, $\mathrm{Ker}c_\rho$ 是 V 的 Lie 子模.

Proof. 在 [定理2.3] 中得到 $c_\rho\rho(x) = \rho(x)c_\rho, \forall x \in L$, 于是便知 c_ρ 是 Lie 模同态. 再由 [引理1.128] 完成证明. □

2.2 Weyl 定理

本节的主要目标是证明下述 Weyl 关于有限维半单 Lie 代数的有限维表示完全可约性的定理.

Weyl's Theorem. 设 $\mathbb{k}$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\mathbb{k}$ 上有限维半单 Lie 代数. 则 L 的有限维表示均完全可约.

Proof. 设 V 的 L 的有限维表示, 不妨设 $V \neq 0$ 且 V 是可约的. 那么 V 存在非平凡 Lie 子模 V_1, 命

$$H_0 = \{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, V_1) | \tau|_{V_1} = 0\}, H_1 = \{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, V_1) | \text{存在}\alpha \in \mathbb{k} \text{ 使得}\tau|_{V_1} = \alpha\mathrm{id}_{V_1}\}.$$

那么在 [例1.120] 的意义下, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, V_1)$ 上有自然的 Lie 模结构, 并且 [例1.123] 表明 H_0, H_1 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, V_1)$ 的 Lie 子模. 更进一步, 从 [例1.123] 的证明过程可知 $\{L, H_1\}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,V_1)} \subseteq H_0$. 下面断言 $\dim_{\mathbb{k}}H_1/H_0 = 1$.

要看到 $\dim_{\mathbb{k}}H_1/H_0 = 1$, 首先取 V_1 作为 V 的 $\mathbb{k}$-子空间的补空间 V_1', 并定义 $\pi_1 : V \to V_1$ 是 V 在 V_1 上的标准投射, 那么 $\pi_1 \in H_1 - H_0$, 这说明 $H_1 \supsetneq H_0$. 现在任取 $f \in H_1$, 进而存在 $\alpha \in \mathbb{k}$ 使得 $f|_{V_1} = \alpha\mathrm{id}_{V_1}$, 于是 $f - \alpha\pi_1 \in H_0$, 这说明 $\dim_{\mathbb{k}}H_1/H_0 = 1$, 断言得证. 根据下面的 [引理2.7], H_0 作为有限维 Lie 模 H_1 的余维数是 1 的 Lie 子模, 存在 H_1 的 Lie 子模 H_0' 使得 $H_1 = H_0 \oplus H_0'$. 那么可选取 H_0' 的 $\mathbb{k}$-基 $\{g\}$ 使得 $g|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}$. 之前已经指出对 $x \in L$ 有 $\{x, g\}_{H_0'} = \{x, g\}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,V_1)} \in H_0$, 所以由 $H_0 \cap H_0' = 0$ 得到 $\{x, g\}_{H_0'} = 0$. 下证 $\mathrm{Ker}g$ 是 V 的 Lie 子模, 再验证 $V = V_1 \oplus \mathrm{Ker}g$ 后, 利用 [定理1.138] 得到结论. 对 $x \in L, v \in \mathrm{Ker}g$, 注意

$$g(\{x, v\}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,V_1)}) = \{x, g(v)\}_{V_1} - \{x, g\}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,V_1)}(v) = 0,$$

所以 $\{x, v\}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,V_1)} \in \mathrm{Ker}g$ 表明 $\mathrm{Ker}g$ 是 V 的 Lie 子模. 最后验证 $V = V_1 \oplus \mathrm{Ker}g$. 根据 g 的选取, $g(v_1) = v_1, \forall v_1 \in V_1$, 所以 g 作为 $\mathbb{k}$-线性满射是可裂的, 由此易见 $V = V_1 \oplus \mathrm{Ker}g$. □

Remark 2.6. 根据 [注记1.145], 如果 L 是特征为零的代数闭域上有限维半单 Lie 代数, 那么其泛包络代数 $\mathcal{U}(L)$ 上的有限维表示都是完全可约的 (但从 [推论1.149] 知 $\mathcal{U}(L)$ 不是 Artin 半单代数!).

Lemma 2.7. 设 $\mathbb{k}$ 是特征为零的代数闭域, $(L, [-,-])$ 是 $\mathbb{k}$ 上有限维半单 Lie 代数, $(V, \{-,-\})$ 是 L 上有限维非零 Lie 模, W 是 V 的 Lie 子模并满足 $\dim_{\mathbb{k}}W = \dim_{\mathbb{k}}V - 1$. 则存在 V 的 Lie 子模 W' 使得 $V = W \oplus W'$.

Proof. 不妨设 $W \neq 0$, 否则结论直接成立. 证明分两步, 先对 W 是不可约 Lie 子模的场景证明结论, 再对 $n = \dim_{\mathbb{k}}W \geq 1$ 作归纳证明一般结论. 我们先设 W 是 V 的不可约 Lie 子模, 并注意可不妨设 V 是忠实的且 $L \neq 0$(否则, 根据 [注记1.127], 用 $L/\mathrm{Ann}_L V$ 替代 L, 结合 [命题1.107], $L/\mathrm{Ann}_L V$ 依然是半单 Lie 代数. 如果 $L/\mathrm{Ann}_L V = 0$, 即 V 是 L 上平凡 Lie 模, 结论直接成立. 所以可不妨设 $L/\mathrm{Ann}_L V \neq 0$). 因此现在我们有不可

约 Lie 模 W 是忠实 Lie 模 V 的子模并满足 $\dim_{\Bbbk}V/W = 1$. 由于 V/W 是 L 上 1 维 Lie 模, 故由 [例1.121] 得到 $\{L, V\} \subseteq W$. 特别地, 若设 c 是忠实有限表示 V 的 Casimir 元, 那么 $c(V) \subseteq W$. 特别地, c 自然诱导的 V/W 上线性变换是零映射. 由 [推论2.5], c 是 V 上 Lie 模自同态, 并且前面的讨论表明 c 可限制为 W 上 Lie 模自同态. 应用 Schur 引理 ([命题1.133]), 存在 $\lambda \in \Bbbk$ 使得 $c|_W = \lambda \mathrm{id}_W$. 那么 $\lambda \neq 0$: 否则, 利用 $c(V) \subseteq W$ 以及 $\dim_{\Bbbk}V/W = 1$ 得到 $\mathrm{tr}(c) = 0$, 这与 [定理2.3] 中 $\mathrm{tr}(c) = \dim_{\Bbbk}L$ 的事实矛盾. 因此 $\lambda \neq 0$. 于是知 $\mathrm{Ker}c \cap W = 0$ 以及 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ker}c \leq 1$(并注意 $\mathrm{Ker}c$ 是 V 的 Lie 子模, 见 [推论2.5]). 事实上, 这时 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ker}c = 1$. 假设 $\mathrm{Ker}c = 0$, 那么 c 是 V 上 $\Bbbk$-线性同构. 设 $z \neq 0 \in V$ 满足作为 $\Bbbk$-线性空间, $V = W \oplus \Bbbk z$. 进而由 $c(W) = W$ 以及 $c(V) \subseteq W$ 得 $c(z) = 0$, 矛盾. 所以 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Ker}c = 1$, 于是 V 有 Lie 子模分解 $V = W \oplus \mathrm{Ker}c$.

根据前面的讨论, 我们得到当 W 是 V 的不可约 Lie 子模时, 引理结论成立. 现在我们对 $n = \dim_{\Bbbk}W \geq 1$ 作归纳证明引理结论. 当 $n = 1$ 时, $\dim_{\Bbbk}V = 2$, 于是 W 和 V/W 作为 L 上 1 维 Lie 模都平凡 ([例1.121]). 于是 $\{L, V\} \subseteq W$ 且 $\{L, W\} = 0$, 特别地, $\{L, \{L, V\}\} = 0$, 所以 $\{[L, L], V\} = 0$. 现在 L 是有限维半单 Lie 代数表明 $L = [L, L]$([推论1.108]), 所以 $\{L, V\} = 0$ 说明 V 是平凡 Lie 模, 于是结论明显成立. 现在假设结论对 $\dim_{\Bbbk}W \leq n-1 (n \geq 2)$ 的情形成立, 下面考虑 $\dim_{\Bbbk}W = n$ 的情形. 根据之前的讨论, 当 W 是不可约 Lie 模时结论直接成立. 因此下面设 W 是可约 Lie 模. 这时总可选取 W 的不可约 Lie 子模 W_1(例如选取 W 维数最小的 Lie 子模), 于是 $1 \leq \dim_{\Bbbk}W_1 \leq n-1$. 现在商 Lie 模 V/W_1 有 Lie 子模 W/W_1 满足 $\dim_{\Bbbk}W/W_1 \leq n-1$. 并且 $\dim_{\Bbbk}W/W_1 = \dim_{\Bbbk}V/W_1 - 1$. 于是可应用归纳假设, 得到存在 V/W_1 的 Lie 子模 V_1/W_1(这里 V_1 是 V 的包含 W_1 的 Lie 子模) 使得 $V/W_1 = W/W_1 \oplus V_1/W_1$, 注意这时 $\dim_{\Bbbk}V_1/W_1 = 1$. 所以对 L 上 Lie 模 V 的 (维数不超过 $n-1$ 的)Lie 子模 W_1 应用归纳假设得到存在 V_1 的 Lie 子模 W_2 使得 $V_1 = W_1 \oplus W_2$. 我们断言 $V = W \oplus W_2$. 首先由 $W_1 \subseteq W$ 不难看出 $V = W + W_2$. 如果 $w_2 \in W \cap W_2$, 那么 $w_2 + W_1 \in (W/W_1) \cap (V_1/W_1)$. 所以 $w_2 \in W_1$. 最后利用 $W_1 \cap W_2 = 0$ 得到 $w_2 = 0$. 所以 $V = W \oplus W_2$. □

Corollary 2.8. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, V 是 $\Bbbk$ 上有限维线性空间, L 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数, 并设 L 是非零半单 Lie 代数. 对 $x \in L$, 设 x 作为 V 上线性变换的 Jordan-Chevalley 分解是 $x = x_s + x_n$, 其中 x_s 是可对角化的线性变换, x_n 是幂零线性变换, 并满足 $[x_s, x_n] = 0$. 那么 $x_s, x_n \in L$.

Proof. 因为 L 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数, 因此 V 可自然视作 L 上 Lie 模, $\{x, v\} = x(v), \forall x \in L, v \in V$. 现在任给 V 作为 L 上 Lie 模的 Lie 子模 W, 考虑 $L_W = \{y \in \mathfrak{gl}(V) | y(W) \subseteq W, \mathrm{tr}(y|_W) = 0\}$, 易见 L_W 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数. 由于 L 是半单的, 所以根据 [命题1.122] 可知 L 是 L_W 的 Lie 子代数. 特别地, L_W 可自然视作 L 上 Lie 模. 现在把 V 的所有 (作为 L 上 Lie 模) 的 Lie 子模构成的集合记作 $\mathcal{S}$, 并设 $N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$ 是 L 在 $\mathfrak{gl}(V)$ 中的正规化子 ([例1.72]), 这也是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数且满足 L 是 $N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$ 的 Lie 理想. 考虑 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数

$$L' = N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) \cap \left(\bigcap_{W \in \mathcal{S}} L_W \right),$$

那么 L 是 L' 的 Lie 子代数, 于是 L' 可自然视作 L 上 Lie 模. 现在设 $x \in L$ 作为 V 上线性变换的 Jordan-Chevalley 分解是 $x = x_s + x_n$, 其中 x_s 是可对角化的线性变换, x_n 是幂零线性变换, 并满足 $[x_s, x_n] = 0$. 根据 [引理1.102], ad_x 作为 $\mathfrak{gl}(V)$ 上线性变换有 Jordan-Chevalley 分解 $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$, 其中 ad_{x_s} 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上可对角化的线性变换, ad_{x_n} 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上幂零变换, 并且 Jordan-Chevalley 分解的性质保证了 ad_{x_s} 和 ad_{x_n} 都可以表示为关于 ad_x 的常数项为零的 $\Bbbk$ 上多项式. 于是由 L 关于 ad_x 的作用封闭可得 L 也关于 ad_{x_s} 和 ad_{x_n} 的作用封闭. 特别地, $x_s, x_n \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$. 下面说明 $x_s, x_n \in L'$. 事实上, 对 V 的任何 Lie 子模 W, 由 x_n 可表示

为 x 的 $\Bbbk$ 上多项式以及 $x(W)\subseteq W$ 可得 $x_n(W)\subseteq W$, 进而由 x_n 是幂零变换得到 $x_n\in L_W$. 之前已经指出 $L\subseteq L'\subseteq L_W$, 特别地, $x\in L_W$. 因此立即得到 $x_s\in L_W,\forall W\in\mathcal{S}$. 于是 $x_s,x_n\in L'$.

现在 L' 作为 L 上有限维 Lie 模, 根据 Weyl 定理, L' 完全可约. 特别地, L' 的 Lie 子模 L 是 Lie 模的直和因子. 所以存在 L' 的 Lie 子模 M 使得 $L'=L\oplus M$. 下证 $M=0$ 来说明 $x_s,x_n\in L$. 现在 $L\neq 0$ 已保证 $V\neq 0$. 因为 V 是 L 上非零有限维 Lie 模, 应用 Weyl 定理得到存在 V 的完全可约 Lie 子模 $W_1,...,W_m$ 使得 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_m$. 由于 $[L,M]\subseteq M$ 且 $M\subseteq N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$ 表明 $[L,M]\subseteq L$, 所以 $L\cap M=0$ 蕴含 $[L,M]=0$. 这一观察说明任何 V(作为 L 上 Lie 模) 的 Lie 子模 W, 以及 $y\in M\subseteq L_W$, W 上线性变换 $y|_W:W\to W$ 是 W 作为 L 上 Lie 模的自同态. 于是对任何 $y\in M$, Schur 引理保证 $y|_W$ 作为每个不可约 Lie 模 W_i 上 Lie 模自同态一定形如 $\lambda\mathrm{id}_W$, 其中 $\lambda\in\Bbbk$. 结合 $\mathrm{tr}(y|_{W_i})=0$ 得到 $\lambda=0$. 因此 $y|_{W_i}=0$, 这说明 y 作为 V 上线性变换是零映射, 进而 $y=0$. 所以由 $y\in M$ 的任意性得到 $M=0$. □

[推论2.8] 表明对特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上有限维线性空间 V 的一般线性 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的半单 Lie 子代数 L, 总存在 L 中元素 x_s,x_n 满足 ad_{x_n} 是 L 上可对角化线性变换 (一方面, [引理1.102] 表明作为 $\mathfrak{gl}(V)$ 上线性变换, ad_x 可表示为关于 ad_{x_s} 的 $\Bbbk$ 上多项式得到 ad_{x_s} 可视作 L 上线性变换. 另一方面, ad_{x_s} 作为 $\mathfrak{gl}(V)$ 上可对角化的线性变换, 存在 $\Bbbk$ 上无重根的零化多项式, 这保证了 ad_{x_s} 作为 L 上线性变换依然可对角化), ad_{x_n} 是 L 上幂零线性变换 ([例1.77]), 并使得 $[x_s,x_n]=0$. 一般地, 可以定义抽象 Jordan-Chevalley 分解的概念:

Definition 2.9. 设 $\Bbbk$ 是域, $(L,[-,-])$ 是 $\Bbbk$ 上非零有限维 Lie 代数, $x\in L$. 如果存在 $s,n\in L$ 使得 $x=s+n$, $[s,n]=0$ 并且 ad_s 是 L 上可对角化线性变换, ad_n 是 L 上幂零变换, 则称分解 $x=s+n$ 是 x 的**抽象 Jordan-Chevalley 分解**, 其中 s 被称为 x 的**半单部分**, n 被称为 x 的**幂零部分**.

Remark 2.10. 根据前面的讨论, [推论2.8] 表明在特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上有限维非零半单 Lie 代数 $L\subseteq\mathfrak{gl}(V)$, 其中 V 是非零有限维线性空间, L 中每个元素总存在抽象 Jordan-Chevalley 分解. 特别地, 当 $V=\Bbbk^n$, $L=\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 时, 结论退化到 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 中矩阵的 Jordan-Chevalley 分解.

现在我们来考虑有限维半单 Lie 代数的元素的抽象 Jordan-Chevalley 分解的存在唯一性问题.

Proposition 2.11. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是非零有限维半单 Lie 代数, 那么 L 中元素的抽象 Jordan-Chevalley 分解总存在, 并且分解形式唯一.

Proof. 任取 $x\in L$, 那么 ad_x 作为 L 上线性变换有 Jordan-Chevalley 分解 $\mathrm{ad}_x=(\mathrm{ad}_x)_s+(\mathrm{ad}_x)_n$, 其中 $(\mathrm{ad}_x)_s$ 是可对角化的线性变换, $(\mathrm{ad}_x)_n$ 是幂零变换. 根据 [引理1.19], $(\mathrm{ad}_x)_s,(\mathrm{ad}_x)_n$ 均为 L 上 $\Bbbk$-导子, 所以应用 [定理1.112] 得到存在 $s,n\in L$ 使得 $(\mathrm{ad}_x)_s=\mathrm{ad}_s,(\mathrm{ad}_x)_n=\mathrm{ad}_n$. 于是 $\mathrm{ad}_{x-s-n}=0$, 现在利用 $Z(L)=0$(回忆 [注记1.61]) 得到 $x=s+n$. 再由 $\mathrm{ad}_{[s,n]}=[\mathrm{ad}_s,\mathrm{ad}_n]=0$ 得到 $[s,n]=0$. 由此得到 x 的抽象 Jordan-Chevalley 分解的存在性. 最后说明唯一性. 如果 x 还有抽象 Jordan-Chevalley 分解 $x=s'+n'$, 那么 $\mathrm{ad}_x=\mathrm{ad}_{s'}+\mathrm{ad}_{n'}$ 是 ad_x 的 Jordan-Chevalley 分解. 于是由经典 Jordan-Chevalley 分解的唯一性知 $\mathrm{ad}_s=\mathrm{ad}_{s'},\mathrm{ad}_n=\mathrm{ad}_{n'}$, 现在再利用 $Z(L)=0$ 得到 $s=s',n=n'$. □

Remark 2.12. 之前从 [推论2.8] 出发, 我们看到特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上有限维非零半单 Lie 代数 $L\subseteq\mathfrak{gl}(V)$ 中元素作为 V 上线性变换的 Jordan-Chevalley 分解给出其作为半单 Lie 代数 L 中元素的抽象 Jordan-Chevalley 分解, 于是由 [命题2.11] 所证明的抽象 Jordan-Chevalley 分解的一致性知这时两个分解相同.

Corollary 2.13. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维 Lie 代数, 并设 $x \in L$ 有抽象 Jordan-Chevalley 分解 $x = s + n$, 其中 s 是半单部分, n 是幂零部分. 现在设 $\rho: L \to \mathrm{End}_{\Bbbk}V$ 是 L 的非零有限维表示, 那么 $\rho(x) = \rho(s) + \rho(n)$ 是 V 上线性变换 $\rho(x)$ 的 Jordan-Chevalley 分解.

Proof. 因为 ρ 是 Lie 代数同态, 所以 [命题1.107] 表明 $\rho(L)$ 也是半单 Lie 代数. 如果 $\rho(L) = 0$, 那么结论明显成立, 下设 $\rho(L) \neq 0$. 于是 $\rho(L)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的非零有限维半单 Lie 代数, 应用 [命题2.8] 和 [注记2.12] 可知要证明 $\rho(x) = \rho(s) + \rho(n)$ 是 V 上线性变换 $\rho(x)$ 的 Jordan-Chevalley 分解, 只需验证这是 $\rho(x) \in \rho(L)$ 的抽象 Jordan-Chevalley 分解, 即 $\mathrm{ad}_{\rho(x)} = \mathrm{ad}_{\rho(s)} + \mathrm{ad}_{\rho(n)}$ 是 $\mathrm{ad}_{\rho(x)}$ 作为 $\rho(L)$ 上线性变换的 Jordan-Chevalley 分解. 首先 $[\mathrm{ad}_{\rho(s)}, \mathrm{ad}_{\rho(n)}] = \mathrm{ad}_{[\rho(s),\rho(n)]} = \mathrm{ad}_{\rho([s,n])} = 0$, 因此还需验证 $\mathrm{ad}_{\rho(s)}$ 是可对角化的且 $\mathrm{ad}_{\rho(n)}$ 是幂零的.

现在验证 $\mathrm{ad}_{\rho(s)}$ 是可对角化的. 首先由 ad_s 是 L 上可对角化线性变换知若记 $\lambda_1, ..., \lambda_t$ 是 ad_s 所有不同的特征值, L_{λ_j} 是 L 中相应特征子空间, 则有直和分解 $L = L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_t}$. 于是对每个 $y \in L_{\lambda_i}$ 有 $[s, y] = \lambda_i y$, 故 $\mathrm{ad}_{\rho(s)}(\rho(y)) = \lambda_i \rho(y)$. 这一观察说明 $\rho(L)$ 作为线性空间可由 $\mathrm{ad}_{\rho(s)}$ 的特征向量张成. 特别地, 取 $\mathrm{ad}_{\rho(s)}$ 的特征向量集的极大 $\Bbbk$-线性无关组得到 $\mathrm{ad}_{\rho(s)}$ 是 $\rho(L)$ 上可对角化线性变换. 最后说明 $\mathrm{ad}_{\rho(n)}$ 是 $\rho(L)$ 上幂零变换. 由于 ad_n 是 L 上幂零变换, 故存在正整数 ℓ 使得 $(\mathrm{ad}_n)^\ell = 0$. 现在利用 ρ 是 Lie 代数同态得到 $(\mathrm{ad}_{\rho(n)})^\ell = 0$. □

在本节最后介绍约化 Lie 代数的概念及其关于伴随表示完全可约性的刻画 (见 [命题2.16]).

Definition 2.14. 设 $\Bbbk$ 是域, L 是 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数. 如果 $Z(L) = \mathrm{rad}L$, 则称 L 是**约化的**.

Remark 2.15. 由于有限维半单 Lie 代数 L 总满足 $Z(L) = \mathrm{rad}L = 0$(见 [注记1.61]), 故约化 Lie 代数是有限维半单 Lie 代数的推广. 根据 [引理1.60], 只要 L 是有限维 Lie 代数, 总有 $L/\mathrm{rad}L$ 半单. 所以当 L 是约化 Lie 代数时, 得到 $L/Z(L)$ 是半单 Lie 代数. 于是由 Lie 代数同构 $L/Z(L) \cong \mathrm{ad}(L)$ 得到 $\mathrm{ad}(L)$ 也是半单 Lie 代数. 由于 $\mathrm{ad}(L)$ 是有限维半单 Lie 代数, 所以应用 Weyl 定理立即得到 L 作为 $\mathrm{ad}(L)$ 上有限维 Lie 模是完全可约的.

将 Lie 代数 L 视作 $\mathrm{ad}L$ 上 Lie 模后, L 的 Lie 子模就是 L 的 Lie 理想. 所以当 L 是完全可约的 $\mathrm{ad}(L)$ 上 Lie 模时, L 的任何 Lie 理想是 L 的直和因子. 我们断言这时 L 的任何交换 Lie 理想含于 $Z(L)$: 如果 I 是 L 的交换 Lie 理想, 设 L 有 Lie 理想 J 使得 $L = I \oplus J$. 那么 $[I, L] \subseteq [I, I] + [I, J] \subseteq I \cap J = 0$. 所以 $I \subseteq Z(L)$. 于是我们能够证明当 L 是有限维 Lie 代数并且满足 L 作为 $\mathrm{ad}(L)$ 上 Lie 模完全可约时, L 是约化 Lie 代数.

Proposition 2.16. 设 $\Bbbk$ 域, 有限维 $\Bbbk$-Lie 代数 L 满足 L 作为 $\mathrm{ad}(L)$ 上 Lie 模完全可约. 那么 L 约化. 特别地, 当 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域时, 有限维 Lie 代数 L 是约化的当且仅当 L 作为 $\mathrm{ad}(L)$ 上 Lie 模完全可约.

Proof. 只需验证 $\mathrm{rad}(L) \subseteq Z(L)$. 根据前面的讨论, 这时 L 的任何交换 Lie 理想含于 $Z(L)$. L 作为 $\mathrm{ad}(L)$ 上 Lie 模完全可约, 故存在 L 的 Lie 理想 $L_1, ..., L_m$ 使得 $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$, 这里每个 L_j 是不可约 $\mathrm{ad}(L)$-模. 我们断言当 $\mathrm{rad}L \cap L_i = L_i$ 时, $L_i \subseteq Z(L)$. 一旦证明该断言, 对任何 $x \in \mathrm{rad}L$ 以及 $y_i \in L_i$, 有 $[x, y_i] = 0$(如果指标 i 满足 $\mathrm{rad}L \cap L_i \neq L_i$, 则 $\mathrm{rad}L \cap L_i = 0$). 于是 $[\mathrm{rad}L, L] = 0$, 这说明 $\mathrm{rad}L \subseteq Z(L)$. 现在证明断言来完成命题证明. 如果 $\mathrm{rad}L \cap L_i = L_i$, 那么 $L_i \subseteq \mathrm{rad}L$ 蕴含 L_i 是可解 Lie 理想 ([命题1.55]). 如果 $[L_i, L_i] \neq 0$, 那么由 L_i 的不可约性得到 $[L_i, L_i] = L_i$, 这与 L_i 的可解性矛盾. 所以 L_i 是交换 Lie 理想, 进而 $L_i \subseteq Z(L)$. 因此当 L 作为 $\mathrm{ad}(L)$ 上 Lie 模完全可约时, L 是约化 Lie 代数. 第二个结论来自 [注记2.15]. □

Proposition 2.17. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, 有限维 $\Bbbk$-Lie 代数 L 是约化 Lie 代数, 那么 L 有 Lie 理想的直和分解 $L = Z(L) \oplus [L, L]$. 特别地, $[L, L] \cong L/Z(L)$ 是有限维半单 Lie 代数 ([引理1.60]).

Proof. 根据 [注记2.15], 这时 L 作为 $\mathrm{ad}(L)$ 上 Lie 模完全可约, 所以 $Z(L)$ 作为 L 的 Lie 子模是直和因子, 从而存在 L 的 Lie 理想 J 使得 $L = J \oplus Z(L)$. 因为 $[L, L] + Z(L)$ 是包含 $Z(L)$ 的 Lie 理想, 故由 $L/Z(L)$ 的半单性, 应用 [推论1.108] 得到 $L = [L, L] + Z(L)$. 现在 $[L, L] = [J \oplus Z(L), J \oplus Z(L)] \subseteq J$, 所以 $J = [L, L]$. □

2.3 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的有限维表示

设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, 在 [例1.45] 中我们已经看到这时 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 是有限维单 Lie 代数. 特别地, 作为半单 Lie 代数, Weyl 定理保证了 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的有限维表示都完全可约. 因此要研究 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的有限维表示, 只需研究其有限维不可约表示. 本节我们讨论 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的有限维不可约表示的结构与分类 ([定理2.24]). 首先固定些记号, 记

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

通过直接计算知 $[H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y, [X, Y] = H$. 注意到 $[H, -]$ 作为 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 上线性变换可对角化, 所以对 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的任何非零有限维表示 $\rho : \mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \to \mathrm{End}_{\Bbbk} V$, [推论2.13] 表明 $\rho(H)$ 是 V 上可对角化的线性变换. 于是可设 $\rho(H)$ 的所有特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$, 并记 V_{λ_j} 是 λ_j 的特征子空间, 则有 $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$. 这里每个 $V_{\lambda_j} \neq 0$, 称 λ_j 为表示 $\rho : \mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \to \mathrm{End}_{\Bbbk} V$ 的**权** (或 H 在 V 中的**权**), 并把 V_{λ_j} 称为属于权 λ_j 的**权空间**. 对一般的 $\lambda \in \Bbbk$, 依然可引入记号 $V_\lambda = \{v \in V | \rho(H)(v) = \lambda v\}$, 但当 λ 不是 ρ 的权时, $V_\lambda = 0$.

Lemma 2.18. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, $\rho : \mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \to \mathrm{End}_{\Bbbk} V$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的非零有限维表示. 如果 $\lambda \in \Bbbk$ 和 $v \in V$ 满足 $v \in V_\lambda$(这里 V_λ 可能为零), 那么 $\rho(X)(v) \in V_{\lambda+2}, \rho(Y)(v) \in V_{\lambda-2}$.

Proof. 直接计算 $\rho(H)(\rho(X)(v)) = \rho([H, X])(v) + \rho(X)(\rho(H)(v)) = 2\rho(X)(v) + \lambda\rho(X)(v)$. 所以 $\rho(X)(v) \in V_{\lambda+2}$. 类似地, $\rho(H)(\rho(Y)(v)) = \rho([H, Y])(v) + \rho(Y)(\rho(H)(v)) = (\lambda - 2)\rho(Y)(v)$. □

Remark 2.19. 因为 $\rho : \mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \to \mathrm{End}_{\Bbbk} V$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的非零有限维表示, 故利用 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$ 可知存在 $\lambda \in \Bbbk$ 使得 $V_\lambda \neq 0$ 且 $V_{\lambda+2} = 0$. 对权空间 V_λ 应用 [引理2.18] 得到对任何 $v \in V_\lambda$ 有 $\rho(X)(v) = 0$.

Definition 2.20. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, $\rho : \mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \to \mathrm{End}_{\Bbbk} V$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的非零有限维表示. 如果权空间 V_λ 中的非零元 v 满足 $\rho(X)(v) = 0$, 则称 v 是 (权 λ 的) **极大向量**.

Remark 2.21. 通过 [注记2.19] 可知非零有限维表示 $\rho : \mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \to \mathrm{End}_{\Bbbk} V$ 总存在极大向量.

Lemma 2.22. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, $\rho : \mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \to \mathrm{End}_{\Bbbk} V$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的有限维不可约表示, 取定极大向量 $v_0 \in V_\lambda$(根据定义, $V_\lambda \neq 0$ 是权空间), 命 $v_{-1} = 0, v_i = (1/i!)(\rho(Y))^i(v_0), i \in \mathbb{N}$. 则有:
(1) $\rho(H)(v_i) = (\lambda - 2i)v_i$.
(2) $\rho(Y)(v_i) = (i + 1)v_{i+1}$.
(3) $\rho(X)(v_i) = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$.
(4) 存在整数 t 使得 $v_t \neq 0$ 且 $v_{t+1} = 0$. 如果记 m 是满足 $v_m \neq 0$ 且 $v_{m+1} = 0$ 的最小整数, 那么 $m \in \mathbb{N}$ 且 $\{v_0, v_1, ..., v_m\}$ 是 V 作为 $\Bbbk$-线性空间的基. 并且进一步还有 $\lambda = m$. 故极大向量 v_0 对应的权是 $m = \dim_{\Bbbk} V - 1$.

Proof. 根据条件, $v_0 \in V_\lambda$ 且 $\rho(X)(v_0) = 0$, 所以通过 [引理2.18] 得到 $\rho(Y)(v_0) \in V_{\lambda-2}$, 反复应用 [引理2.18] 便知对每个自然数 i 有 $\rho(Y)^i(v_0) \in V_{\lambda-2i}$. 特别地, $v_i \in V_{\lambda-2i}$, 这就得到 (1). 而 (2) 来自直接计算:

$$\rho(Y)(v_i) = \frac{\rho(Y)^{i+1}(v_0)}{i!} = (i + 1)\frac{\rho(Y)^{i+1}(v_0)}{(i + 1)!} = (i + 1)v_{i+1}.$$

现在对自然数 i 作归纳证明 (3). 当 $i=0$ 时, 由极大向量的定义便得结论. 假设结论对 $i-1(i\geq 1)$ 的情形成立, 即 $\rho(X)(v_{i-1})=(\lambda-i+2)v_{i-2}$. 则 $i\rho(X)(v_i)=\rho(X)\rho(Y)(v_{i-1})=[\rho(X),\rho(Y)](v_{i-1})+\rho(Y)\rho(X)(v_{i-1})$. 现在代入假设以及 $[X,Y]=H$, 得 $i\rho(X)(v_i)=\rho(H)(v_{i-1})+(\lambda-i+2)\rho(Y)(v_{i-2})$. 再应用 (1) 和 (2) 得到

$$i\rho(X)(v_i)=(\lambda-2i+2)v_{i-1}+(\lambda-i+2)(i-1)v_{i-1}=i(\lambda-i+1)v_{i-1}.$$

对上式两边约去 i 便得到 (3). 最后证明 (4), 因为 $\rho(H)(v_i)=(\lambda-2i)v_i$, 所以一旦 $v_i\neq 0$, 那么 v_i 是关于线性变换 $\rho(H)$ 属于特征值 $\lambda-2i$ 的特征向量. 由于属于不同特征值的特征向量线性无关, 所以至多有限个 $v_i\neq 0$(这样的整数 i 存在, 例如 $i=0$). 选取整数 m 是满足 $v_m\neq 0$ 的最大整数, 那么 $m\in\mathbb{N}$ 并且根据 m 的选取立即得到 $v_{m+1}=0$. 因为 $v_0,...,v_m$ 是关于 $\rho(H)$ 属于不同特征值的特征向量, 所以 $\{v_0,v_1,...,v_m\}$ 是 $\Bbbk$-线性无关集. 考虑 V 的由 $\{v_0,v_1,...,v_m\}$ 生成的 $\Bbbk$-子空间 V', 那么由前面得到的结论知 V' 是 V 作为 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 上 Lie 模的非零 Lie 子模, 结合 V 的不可约性得到 $V=V'$, 即 $\{v_0,v_1,...,v_m\}$ 是 V 作为 $\Bbbk$-线性空间的基. 最后对 (3) 中结论取 $i=m+1$, 得到 $0=\rho(X)(v_{m+1})=(\lambda-m)v_m$. 结合 $v_m\neq 0$ 得到 $\lambda=m$. □

Remark 2.23. 根据 [引理2.22(4)], 极大向量对应的权是自然数 $\dim_{\Bbbk}V-1$, 称为 V 的**最高权**. 该命名的缘由如下: 依然保持 [引理2.22] 的记号, 这时 $m=\dim_{\Bbbk}V-1$. 根据证明过程知 $\{v_0,v_1,...,v_m\}$ 是 V 作为 $\Bbbk$-线性空间的基, 并且对每个自然数 $0\leq i\leq m$ 有 $\rho(H)(v_i)=(m-2i)v_i$, 所以每个 $v_i(0\leq i\leq m)$ 都是关于线性变换 $\rho(H)$(属于特征值 $m-2i$) 的特征向量, 于是 $V_{m-2i}=\Bbbk v_i$. 进而 $V=V_{-m}\oplus V_{-m+2}\oplus\cdots\oplus V_{m-2}\oplus V_m$. 因此 H 在 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的有限维不可约表示 $\rho:\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)\to\mathrm{End}_{\Bbbk}V$ 中所有的权为 $-m,-m+2,...,m-2,m$(均为整数), 最大值为 m, 所以称相应的自然数 $\dim_{\Bbbk}V-1$ 为 H 在 V 中的最高权.

反之, 任给特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 和正整数 d, 由 [注记2.23], 若记 $m=d-1$, 命 V 是 d 维线性空间且有基 $\{v_0,v_1,...,v_m\}$, 对每个自然数 $0\leq i\leq m$, 通过定义

$$\rho(H)(v_i)=(m-2i)v_i,\rho(Y)(v_i)=(i+1)v_{i+1},\rho(X)(v_i)=(m-i+1)v_{i-1}$$

并 $\Bbbk$-线性延拓 $\Bbbk$-线性映射 $\rho:\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)\to\mathrm{End}_{\Bbbk}V$, 可直接验证 ρ 是 Lie 代数同态, 进而得到 V 的 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 上 Lie 模结构, 不难看出 V 作为 Lie 模不可约. 所以任给正整数 d, 都可以构造出 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 上 d 维不可约 Lie 模, 再根据 [引理2.22] 可知 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 上 d 维不可约 Lie 模在同构意义下唯一. 总结一下, 我们得到

Theorem 2.24 ($\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的有限维不可约表示的结构)**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, d 是正整数, 那么 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 总存在 d 维不可约表示 $\rho:\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)\to\mathrm{End}_{\Bbbk}V$, 并且在同构意义下唯一. 记 $m=d-1$, 则 H 在 V 中的所有权为 $-m,-m+2,...,m-2,m$, 最高权为 m, 若记属于最高权的极大向量为 v_0, 那么通过定义 $v_i=(1/i!)(\rho(Y))^i(v_0)$ 可得 V 作为 $\Bbbk$-线性空间的基 $\{v_0,v_1,...,v_m\}$. 设 $0\leq i\leq m$, H 在 V 中属于权 $m-2i$ 的权空间就是 $\Bbbk v_i$. 特别地, V 的极大向量在相差一非零常数意义下唯一并且 V 有关于 H 的权空间直和分解 $V=\Bbbk v_0\oplus\cdots\oplus\Bbbk v_m$.

Weyl 定理使我们能够把有限维单 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的有限维表示研究转化为有限维不可约表示的研究, 于是通过 [定理2.24] 给出的 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的有限维不可约表示的结构可知

Corollary 2.25. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, $\rho:\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)\to\mathrm{End}_{\Bbbk}V$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的非零有限维表示, 那么 $\rho(H)$ 作为 V 上线性变换的特征值均为整数, 每个特征值的相反数依然是特征值, 且 $\rho(H)$ 可对角化. 设 $\lambda\in\Bbbk$, 那么 $\dim_{\Bbbk}V_{\lambda}=\dim_{\Bbbk}V_{-\lambda}$. 并且若记 t 是 V 分解为有限维不可约表示的直和项数目, 则 $t=\dim_{\Bbbk}V_0+\dim_{\Bbbk}V_1$.

Proof. 根据 Weyl 定理, V 可分解为有限多个不可约 Lie 模的直和, 根据 [定理2.24], $\dim_{\Bbbk} V_0$ 就是直和项中奇数维不可约表示的数目, $\dim_{\Bbbk} V_1$ 就是直和项中偶数维不可约表示的数目. 其余结论直接来自 [定理2.24]. □

Remark 2.26. 根据 [注记1.145], V 关于不可约 Lie 表示的直和分解在不计次序下唯一, 故 t 定义合理.

2.4 根子空间分解

设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, $\Bbbk$-Lie 代数 L 是非零有限维半单 Lie 代数, 在 [命题2.11] 中我们看到 L 中每个元素的抽象 Jordan-Chevalley 分解存在且唯一. 我们先说明总存在 $x \in L$ 使得其半单部分非零: 假设对所有的 $x \in L$, 有 x 的半单部分为零, 那么 ad_x 是 L 上幂零变换. 应用 Engel 定理得到 L 是幂零 Lie 代数. 而 [推论1.108] 表明非零有限维半单 Lie 代数不可能是幂零的, 得到矛盾. 所以总存在 $x \in L$ 使得其半单部分非零. 因此 L 总存在非零 Lie 子代数使得该 Lie 子代数每个元素决定的伴随变换是可对角化的 (例如, 任取半单部分非零的元素的半单部分 s, 考虑 s 生成的 $\Bbbk$-子空间). 一般地, 对特征为零的代数闭域上的非零有限维半单 Lie 代数 L, 如果 H 是非零 Lie 子代数满足 H 的所有元素决定的 L 上伴随变换是可对角化的, 则称 H 是 L 的**环面 Lie 子代数**. 如果 L 的环面子代数 H 满足不存在环面子代数 H' 使得 $H' \supsetneq H$, 则称 H 是**极大环面 Lie 子代数**. 因为 L 是非零有限维半单 Lie 代数, 故由环面 Lie 子代数的存在性便保证了极大环面 Lie 子代数的存在性.

Example 2.27. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 中所有 (迹为零的) 对角阵构成 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的环面 Lie 子代数.

Proposition 2.28. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数. 则 L 的环面 Lie 子代数都交换.

Proof. 设 H 是 L 的环面 Lie 子代数, 并取定 $h \in H$, 只要证 $\mathrm{ad}_h(H) = 0$. 因为 ad_h 作为 L 上线性变换可对角化, 所以限制在 H 上依然可对角化. 任取 ad_h 作为 H 上线性变换的特征值 λ 和特征向量 h', 则 $(\mathrm{ad}_{h'})^2(h) = 0$. 现在由 H 是环面 Lie 子代数知 $\mathrm{ad}_{h'}$ 是 H 上可对角化的线性变换 (它是不可逆的, 因为 0 和 h' 在 $\mathrm{ad}_{h'}$ 的作用下均为零), 于是可设 H 关于 $\mathrm{ad}_{h'}$ 有特征子空间分解 $V = V_0 \oplus V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$, 其中 $\lambda_1, ..., \lambda_k$ 是所有非零特征值. 下证 $h \in V_0$. 事实上, 若设 $h_0 \in V_0, h_j \in V_{\lambda_j}$ 满足 $h = h_0 + \cdots + h_k$, 用 $(\mathrm{ad}_{h'})^2$ 作用 h 得到

$$0 = (\mathrm{ad}_{h'})^2(h) = \lambda_1^2 h_1 + \lambda_2^2 h_2 + \cdots + \lambda_k^2 h_k,$$

因此 $h_1 = \cdots = h_k = 0$, 于是 $h = h_0 \in V_0$, 进而 $\mathrm{ad}_{h'}(h) = 0$. 现在由 H 中任何元素都可以表示为一些 ad_h 的特征向量的和可知 $\mathrm{ad}_h(H) = 0$. □

Example 2.29. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 中所有对角阵构成 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的极大环面 Lie 子代数.

Proof. 记 D 是 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 中所有对角阵构成的环面 Lie 子代数. 如果有环面 Lie 子代数 $T \supsetneq D$, 那么 T 中含非零严格上三角阵或非零严格下三角阵. 结合 $D \subseteq T$ 可得 T 不是交换 Lie 代数, 与 [命题2.28] 矛盾. □

在 [定理1.140] 我们看到古典 Lie 代数除了 $\mathfrak{o}_2(\Bbbk)$ 都是半单的. 现在我们证明比 [例2.29] 更一般的结果:

Example 2.30. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, 那么 $\Bbbk$ 上所有的半单古典 Lie 代数 ($\mathfrak{sl}_{n+1}(\Bbbk), \mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk), \mathfrak{sp}_{2n}(\Bbbk)$ 以及 $\mathfrak{o}_{2n+2}(\Bbbk)$, 这里 $n \geq 1$) 包含的所有对角阵构成该 Lie 代数的极大环面 Lie 子代数.

Proof. 设 L 是 $\Bbbk$ 上半单古典 Lie 代数, 记 D 是 L 中所有对角阵构成的 Lie 子代数, 那么 D 中元素所决定 L 所在的矩阵代数上的伴随变换明显是可对角化的, 因此 D 中元素所对应的 L 上伴随变换依然是可对角化的, 这说明 D 是环面 Lie 子代数. 如果 $H \supseteq D$ 是 L 的环面 Lie 子代数, 那么 H 作为交换 Lie 代数有 $[H, D] = 0$. 于是再由 D 包含了 L 中所有的对角阵可得 H 中矩阵都是对角阵, 这说明 $H = D$. 故 D 是 L 的极大环面 Lie 子代数. □

Remark 2.31. 保持 [例2.30] 的假设, $\mathfrak{sl}_{n+1}(\Bbbk)$ 所有对角阵构成的极大环面 Lie 子代数的, $\mathfrak{o}_{2n+1}(\Bbbk)$ 的全体对角阵构成的极大环面 Lie 子代数, $\mathfrak{sp}_{2n}(\Bbbk)$ 中所有对角阵构成的极大环面 Lie 子代数, $\mathfrak{o}_{2n}(\Bbbk)(n \geq 2)$ 中所有对角阵构成的极大环面 Lie 子代数的 $\Bbbk$-线性维数都是 n.

设 $(L, [-,-])$ 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, 固定 L 的极大环面 Lie 子代数 H. 那么由 [命题2.28] 知对任何 $h_1, h_2 \in H$ 有 ad_{h_1} 和 ad_{h_2} 是 L 上可交换并且可对角化的线性变换. 特别地, $\{\mathrm{ad}_h\}_{h\in H}$ 是 L 上一族两两可交换且可对角化的线性变换. 因此存在 L 的一个基使得该基中每个元素都是 $\{\mathrm{ad}_h\}_{h\in H}$ 的公共特征向量. 如果 $x \neq 0 \in L$ 是 $\{\mathrm{ad}_h\}_{h\in H}$ 的公共特征向量, 那么存在唯一的 $\Bbbk$-线性函数 $\alpha \in H^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, \Bbbk)$ 使得 $[h,x] = \alpha(h)x, \forall h \in H$. 对每个 $\alpha \in H^*$, 命 $L_\alpha = \{x \in L | [h,x] = \alpha(h)x, \forall h \in H\}$, 那么

$$L = \sum_{\alpha \in H^*} L_\alpha,$$

并且 $L_0 = \{x \in L | [H,x] = 0\}$ 就是 H 在 L 中的中心化子 ([例1.8]), 我们有 $L_0 = C_L(H) \supseteq H$. 之后我们会证明 $L_0 = C_L(H) = H$. 如果 $\alpha \neq 0 \in H^*$ 满足 $L_\alpha \neq 0$, 则称 α 是 L 关于极大环面 Lie 子代数 H 的**根**. 记所有 L 关于 H 的根构成的集合 $\{\alpha | \alpha \neq 0 \in H^*, L_\alpha \neq 0\}$ 为 Φ, 称为 L 关于 H 的**根系**. 根系中不同的根仅有有限多个: 设 H 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $\{h_1, ..., h_s\}$, 那么 $\alpha \in \Phi$ 由 $\alpha(h_1), ..., \alpha(h_s)$ 决定, 并且每个 $\alpha(h_j)$ 都是 L 上线性变换 ad_{h_j} 的特征值, 仅有有限种可能. 所以 Φ 是有限集. 事实上, $\sum\limits_{\alpha \in H^*} L_\alpha$ 是直和: 任取两两不同的 $\alpha_1, ..., \alpha_n \in H^*$ 以及 $x_{\alpha_j} \in L_{\alpha_j}, 1 \leq j \leq n$. 下面对正整数 n 作归纳证明 $x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_n} = 0$ 蕴含 $x_{\alpha_j} = 0, \forall 1 \leq j \leq n$ 来得到断言. 当 $n = 1$ 时结论明显成立. 假设结论对 $n-1 (n \geq 2)$ 的场景成立, 那么对 n 的情形, 因为 $\mathrm{Ker}(\alpha_1 - \alpha_2), ..., \mathrm{Ker}(\alpha_1 - \alpha_n)$ 是 H 的有限多个真子空间, 所以由 $\Bbbk$ 是无限域知存在 $h \in H$ 使得

$$h \notin \mathrm{Ker}(\alpha_1 - \alpha_j), \forall 2 \leq j \leq n.$$

于是对等式 $x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_n} = 0$ 两边作用 ad_h 得到 $\alpha_1(h)x_{\alpha_1} + \cdots + \alpha_n(h)x_{\alpha_n} = 0$. 再对之前的等式两边同乘 $\alpha_1(h)$, 对得到的式子作差得到 $(\alpha_2(h) - \alpha_1(h))x_{\alpha_2} + \cdots + (\alpha_n(h) - \alpha_1(h))x_{\alpha_n} = 0$, 利用归纳假设便得 $x_{\alpha_2} = \cdots = x_{\alpha_n} = 0$. 因此 $x_{\alpha_1} = 0$. 总结一下, 我们得到

Proposition 2.32. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, H 是极大环面 Lie 子代数. 那么 L 关于 H 的根系 Φ 是有限集并且

$$L = \sum_{\alpha \in H^*} L_\alpha = L_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \right).$$

Remark 2.33. 稍后我们将证明对非零有限维半单 Lie 代数 L 的极大环面 Lie 子代数 H 总有 $L_0 = C_L(H) = H$, 进而知 $\Phi \neq \varnothing$: 否则, $L = H$ 是交换的, 这与 [推论1.108] 矛盾. 进而由 [命题2.32] 得到下述“根子空间分解”:

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \right).$$

在正式证明对非零有限维半单 Lie 代数 L 的极大环面 Lie 子代数 H 总有 $L_0 = C_L(H) = H$ 前, 我们需要

Lemma 2.34. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, H 是极大环面 Lie 子代数, $\alpha, \beta \in H^*$.
(1) 总有 $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$.
(2) 如果 $\alpha \neq 0$, 那么任何 $x \in L_\alpha$ 决定的 L 上伴随变换是幂零的.

(3) 如果 $\alpha+\beta\neq 0$, 那么 L_α 中元素与 L_β 中元素关于 Killing 型正交, 即 $\kappa(x,y)=0,\forall x\in L_\alpha, y\in L_\beta$.
(4)Killing 型 $\kappa: L\times L\to \Bbbk$ 在 L_0 上的限制和 H 上的限制都是非退化的且 $L_0=C_L(H)$ 是幂零 Lie 代数.

Proof. (1) 任给 $x\in L_\alpha, y\in L_\beta, h\in H$, 有 $[h,[x,y]]+[x,[y,h]]+[y,[h,x]]=[h,[x,y]]-\beta(h)[x,y]-\alpha(h)[x,y]$. 由此立即得到 $[x,y]\in L_{\alpha+\beta}$. 现在说明 (2): 如果 $\alpha\neq 0$, 取定 $x\in L_\alpha$. 那么对固定的 β, 有 $(\mathrm{ad}_x)^n(L_\beta)\subseteq L_{\beta+n\alpha}$. 因为 Φ 是有限集, 所以当 n 充分大时, $\beta+n\alpha\neq 0$ 且 $\beta+n\alpha\notin\Phi$. 这说明当 n 充分大时, $(\mathrm{ad}_x)^n(L_\beta)=0$. 根据 [命题2.32], L 可表示为有限个 L_β 的直和, 因此 ad_x 是 L 上幂零变换. 再证明 (3): 由 $\alpha+\beta\neq 0$ 得到存在 $h\in H$ 使得 $\alpha(h)+\beta(h)\neq 0$, 现在由 Killing 型的结合律, 对任何 $x\in L_\alpha, y\in L_\beta, h\in H$ 有

$$-\alpha(h)\kappa(x,y)=\kappa([x,h],y)=\kappa(x,[h,y])=\beta(h)\kappa(x,y),$$

整理得到 $(\alpha(h)+\beta(h))\kappa(x,y)=0$. 于是, $\kappa(x,y)=0$. (4) 的第一部分是 (3) 和 Cartan 准则的直接推论: 如果 $x\in L_0$ 满足 $\kappa(x,L_0)=0$, 那么由 κ 的双线性性和 (3) 得到 $\kappa(x,L)=0$. 现在应用 [定理1.103] 得到 $x=0$. 下证 $C_L(H)$ 是幂零 Lie 代数. 任取 $x\in C_L(H)$, 并设 $x\in L$ 有抽象 Jordan-Chevalley 分解 $x=s+n$, 其中 s 是半单部分, n 是幂零部分. 由 [推论2.13], $\mathrm{ad}_x=\mathrm{ad}_s+\mathrm{ad}_n$ 是 ad_x 的 Jordan-Chevalley 分解, 所以由 ad_s 与 ad_n 能够表示为 ad_x 的 $\Bbbk$ 上多项式立即知 $\mathrm{ad}_x(H)=0$ 蕴含 $\mathrm{ad}_s(H)=\mathrm{ad}_n(H)=0$. 这说明 $s,n\in C_L(H)$. 现在由 ad_s 是 L 上可对角化的线性变换以及 $[s,H]=0$ 可知 $\Bbbk s+H$ 中每个元素决定的 L 上伴随变换依然可对角化. 特别地, $\Bbbk s+H$ 是 L 的环面 Lie 子代数. 于是由 H 的极大性迫使 $s\in H$. 所以 ad_x 作为 $C_L(H)$ 上线性变换就是 ad_n 的限制, 特别地, ad_x 在 $C_L(H)$ 上的限制映射是幂零变换. 应用 Engel 定理得到 $C_L(H)$ 是幂零 Lie 代数. 最后证明 κ 在 H 上的限制非退化. 假设 $h\in H$ 满足 $\kappa(h,h')=0,\forall h'\in H$, 那么对任何 $x\in C_L(H)$, 设有抽象 Jordan-Chevalley 分解 $x=s+n$, 有 $[h,n]=0$. 进而 $\mathrm{ad}_h\mathrm{ad}_n$ 依然幂零. 所以 $\kappa(h,n)=0$. 而之前的讨论表明 $s\in H$, 所以我们得到 $\kappa(h,x)=0$. 现在 $\kappa(h,x)=0,\forall x\in C_L(H)=L_0$. 所以由 $h\in L_0$ 以及 κ 限制在 L_0 上非退化得到 $h=0$. 至此得到 κ 限制在 H 上是非退化的. □

Remark 2.35. 因为 L 的 Killing 型 κ 限制在 H 上是非退化的, 所以有 $\Bbbk$-线性同构 $H\to H^*, h\mapsto\kappa(h,-)$. 特别地, 对任何 $\beta\in H^*$, 存在唯一的 $t_\beta\in H$ 使得 $\kappa(t_\beta,h)=\beta(h),\forall h\in H$.

Theorem 2.36. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, H 是极大环面 Lie 子代数, 那么

$$L_0=C_L(H)=H.$$

Proof. 根据 [引理2.34(4)] 的证明过程知 $C_L(H)$ 中任何元素作为 L 中元素的抽象 Jordan-Chevalley 分解的半单部分总在 H 中, 因此如果能够证明 $C_L(H)$ 中任何元素的幂零部分为零, 便得到结论. 下面证明任何 $x\in C_L(H)$ 的抽象 Jordan-Chevalley 分解 $x=s+n$ 满足 $n=0$. 我们断言 $C_L(H)$ 是交换的, 一旦证明该断言, 则由 $[n,y]=0,\forall y\in C_L(H)$ 以及 ad_n 是幂零变换得到 $\kappa(n,y)=0,\forall y\in C_L(H)$. 再应用 κ 在 $C_L(H)$ 上的限制非退化 ([引理2.34(4)]) 得到 $n=0$. 因此要完成定理的证明只需再说明 $C_L(H)$ 是交换的 (根据 [引理2.34(4)] 已经知道这是幂零 Lie 代数). 我们先指出这时 $H\cap[C_L(H),C_L(H)]=0$: 通过 Killing 型的不变性, 对任何 $h\in H, x_1,x_2\in C_L(H)$, 有 $\kappa(h,[x_1,x_2])=\kappa([h,x_1],x_2)=0$, 进而 $\kappa(h,[C_L(H),C_L(H)])=0$. 现在由 κ 限制在 H 上非退化便知 $H\cap[C_L(H),C_L(H)]=0$. 下面用反证法证明之前的断言. 假设 $[C_L(H),C_L(H)]\neq 0$, 那么由 [注记1.83] 知非零 Lie 理想 $[C_L(H),C_L(H)]$ 含有 $Z(C_L(H))$ 中非零元. 取 $0\neq c\in[C_L(H),C_L(H)]\cap Z(C_L(H))$, 并设 c 有抽象 Jordan-Chevalley 分解 $c=c_s+c_n$. 由 [引理2.34(4)] 的证明过程, $c_s\in H$, 所以 $c_n\in C_L(H)$. 并且 $c_n\neq 0$: 否则, $c=c_s\in[C_L(H),C_L(H)]\cap H$, 与 $H\cap[C_L(H),C_L(H)]=0$ 矛盾. 所以 $c_n\neq 0\in Z(C_L(H))$.

现在由 $[c_n, y] = 0, \forall y \in C_L(H)$ 以及 c_n 是 L 上幂零变换, 我们得到 $\kappa(c_n, y) = 0$. 再利用 κ 在 $C_L(H)$ 上的限制非退化得到 $c_n = 0$, 矛盾. 因此 $[C_L(H), C_L(H)] = 0$. $\square$

综合 [命题2.32] 和 [定理2.36], 我们得到: 对特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的非零有限维半单 Lie 代数 L, 固定极大环面 Lie 子代数 H, 记 Φ 是 L 关于 H 的根系. 则 Φ 是非空有限集且 L 有直和分解

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \right).$$

称为 L 关于极大环面 Lie 子代数 H 的**根子空间分解**.

下面我们进一步研究有限维半单 Lie 代数关于固定的极大环面 Lie 子代数的根子空间分解.

Lemma 2.37. 设 $(L, [-,-])$ 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, H 是 L 的极大环面 Lie 子代数, Φ 是 L 关于 H 的根系, 对每个 $\beta \in H^*$, 记 $t_\beta \in H$ 是使得 $\kappa(t_\beta, h) = \beta(h), \forall h \in H$ 唯一的元素 ([注记2.35]).
(1) 根系 Φ 可 $\Bbbk$-线性生成 H^*.
(2) 若 $\alpha \in \Phi$, 则 $-\alpha \in \Phi$, 且 $\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.
(3) 若 $\alpha \in \Phi, x \in L_\alpha, y \in L_{-\alpha}$, 则 $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$ 且 $\dim_\Bbbk [L_\alpha, L_{-\alpha}] = 1$, $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ 有基 $\{t_\alpha\}$.
(4) 若 $\alpha \in \Phi, x_\alpha \neq 0 \in L_\alpha$, 那么存在 $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ 使得由 $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ 生成的 L 的子空间是 3 维单 Lie 子代数 S_α, 并且存在 $\Bbbk$-Lie 代数同构 $\theta : S_\alpha \to \mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 满足

$$\theta(x_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \theta(y_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \theta(h_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(5) 在 (4) 的记号下, $h_\alpha = -h_{-\alpha} = 2t_\alpha / \kappa(t_\alpha, t_\alpha)$. 事实上, 总有 $t_\alpha = -t_{-\alpha}$.

Proof. (1) 假设 Φ 生成的 $\Bbbk$-子空间是 H^* 的真子空间, 那么存在 $h \neq 0 \in H$ 使得 $\alpha(h) = 0, \forall \alpha \in \Phi$. 由此得到 $[h, L_\alpha] = 0, \forall \alpha \in \Phi$. 结合 H 可交换 ([命题2.28]) 可知 $[h, L_0] = [h, H] = 0$. 于是由 [命题2.32] 得到 $h \in Z(L)$. 但 L 作为有限维半单 Lie 代数必有 $Z(L) = 0$(回忆 [注记1.61]), 得到矛盾.

(2) 设 $\alpha \in \Phi$, 如果 $-\alpha \notin \Phi$, 那么 $L_{-\alpha} = 0$. 于是结合 [引理2.34(3)] 得到 $\kappa(L_\alpha, L_\beta) = 0, \forall \beta \in H^*$. 应用 [命题2.32] 便知 $\kappa(L_\alpha, L) = 0$. 进而由 κ 的非退化性得到 $L_\alpha = 0$, 矛盾. 所以 $-\alpha \in \Phi$. 根据 t_α 的定义知 $\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha)$. 假设 $\alpha(t_\alpha) = 0$, 那么根据 Φ 的定义知 $[t_\alpha, x] = 0 = [t_\alpha, y], \forall x \in L_\alpha, y \in L_{-\alpha}$. 注意到 $\kappa(L_\alpha, L_{-\alpha}) \neq 0$(否则同样可得 $\kappa(L_\alpha, L) = 0$), 所以可选取 $x \in L_\alpha, y \in L_{-\alpha}$ 满足 $\kappa(x, y) = 1$. 那么对 $h \in H$, 有

$$\kappa(h, [x, y]) = \kappa([h, x], y) = \alpha(h)\kappa(x, y) = \kappa(t_\alpha, h)\kappa(x, y) = \kappa(h, \kappa(x, y)t_\alpha),$$

于是由 κ 在 H 上的限制非退化以及 $[x, y] \in L_0 = H$(见 [引理2.34(1)]) 得到 $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$(注意这里已经证明了 (3) 的第一个结论). 于是 $[x, y] = t_\alpha$. 结合 $[t_\alpha, x] = 0 = [t_\alpha, y]$ 可知由 $\{x, y, t_\alpha\}$ 所生成的 L 的子空间是 Lie 子代数 S 并且是 3 维可解 Lie 代数 (这里 $\alpha \neq 0$ 保证 $t_\alpha \neq 0$, 容易验证 $\{x, y, t_\alpha\}$ 的线性无关性). 因为 $t_\alpha = [x, y] \in S$, 所以将 S 中元素决定的 L 上伴随变换全体视作 $\mathfrak{gl}(L)$ 的可解 Lie 子代数 (因为 $\{\mathrm{ad}_s | s \in S\}$ 作为 S 的同态像依然可解) 后应用 Lie 定理, 可知 t_α 决定的 S 上伴随变换在 L 的某个基下的表示矩阵作为两个上三角阵的换位子是严格上三角阵. 特别地, t_α 决定的 L 上伴随变换是幂零的. 又因为 H 是环面 Lie 子代数, t_α 决定的 L 上伴随变换是可对角化的, 所以 $t_\alpha \in Z(L)$, 这与 L 是半单 Lie 代数矛盾 ([注记1.61]). 故 $\alpha(t_\alpha) \neq 0$.

(3) 在 (2) 中已经证明若 $\alpha\in\Phi$, $x\in L_\alpha, y\in L_{-\alpha}$, 则 $[x,y]=\kappa(x,y)t_\alpha$, 并且根据 (2) 的证明过程知 $\kappa(L_\alpha,L_{-\alpha})\neq 0$. 因此由 $t_\alpha\neq 0$ 知 $[L_\alpha,L_{-\alpha}]$ 有 $\Bbbk$-基 $\{t_\alpha\}$. 特别地, $\dim_{\Bbbk}[L_\alpha,L_{-\alpha}]=1$.

(4) 类似 (2) 的证明过程, 对固定 $x_\alpha\neq 0\in L_\alpha$, 如果 $\kappa(x_\alpha,L_\alpha)=0$, 那么应用 [命题2.32] 便知 $\kappa(x_\alpha,L)=0$. 结合 κ 非退化得到 $x_\alpha=0$, 矛盾. 所以必有 $\kappa(x_\alpha,L_\alpha)\neq 0$. 于是由 (2) 可选取 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$ 使得

$$\kappa(x_\alpha,y_\alpha)=\frac{2}{\kappa(t_\alpha,t_\alpha)}.$$

现在 $h_\alpha=[x_\alpha,y_\alpha]=\kappa(x_\alpha,y_\alpha)t_\alpha=2t_\alpha/\kappa(t_\alpha,t_\alpha).$, 并且直接计算

$$[h_\alpha,x_\alpha]=\frac{2}{\kappa(t_\alpha,t_\alpha)}[t_\alpha,x_\alpha]=\frac{2}{\alpha(t_\alpha)}\alpha(t_\alpha)x_\alpha=2x_\alpha.$$

$$[h_\alpha,y_\alpha]=\frac{2}{\kappa(t_\alpha,t_\alpha)}[t_\alpha,y_\alpha]=-\frac{2}{\alpha(t_\alpha)}\alpha(t_\alpha)y_\alpha=-2y_\alpha.$$

现在我们考虑由 $\{x_\alpha,y_\alpha,h_\alpha\}$ 生成的 L 的 $\Bbbk$-子空间 S_α, 通过 $[x_\alpha,y_\alpha]=h_\alpha,[h_\alpha,x_\alpha]=2x_\alpha,[h_\alpha,y_\alpha]=-2y_\alpha$ 以及 $\{x_\alpha,y_\alpha\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性 (因为 $\alpha\neq-\alpha, x_\alpha\in L_\alpha, y_\alpha\in L_{-\alpha}$) 可知 $\{x_\alpha,y_\alpha,h_\alpha\}$ 是 $\Bbbk$-线性无关集, 进而知 S_α 是 3 维 Lie 代数. 对 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$, 记

$$\mathcal{X}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{Y}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\mathcal{H}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

那么 $[\mathcal{H},\mathcal{X}]=2\mathcal{X},[\mathcal{H},\mathcal{Y}]=-2\mathcal{Y},[\mathcal{X},\mathcal{Y}]=\mathcal{H}$. 命 $\Bbbk$-线性映射 $\theta:S_\alpha\to\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 满足 $\theta(x_\alpha)=\mathcal{X},\theta(y_\alpha)=\mathcal{Y}$ 以及 $\theta(h_\alpha)=\mathcal{H}$, 那么 θ 明显是 $\Bbbk$-线性同构, 并且由 S_α 的生成元集 $\{x_\alpha,y_\alpha,h_\alpha\}$ 和 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的生成元集 $\{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{H}\}$ 关于相应 Lie 括号具有相同形式关系式便知 θ 是 Lie 代数同构, 特别地, S_α 是单 Lie 代数.

(5) 设 $\alpha\in\Phi$, 如果对固定的 $x_\alpha\neq 0\in L_\alpha$, 有 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$ 以及 $h_\alpha=[x_\alpha,y_\alpha]$ 满足 (4) 的结论, 由 $[h_\alpha,x_\alpha]=2x_\alpha$ 得到 $\alpha(h_\alpha)x_\alpha=2x_\alpha$, 进而由 $x_\alpha\neq 0$ 得到 $\alpha(h_\alpha)=2$. 现在对 $h_\alpha=[x_\alpha,y_\alpha]$ 应用 (3) 知 $\kappa(x_\alpha,y_\alpha)t_\alpha=h_\alpha$, 两边作用 α 得到 $\kappa(t_\alpha,t_\alpha)=\alpha(t_\alpha)=2/\kappa(x_\alpha,y_\alpha)$. 于是知 $h_\alpha=[x_\alpha,y_\alpha]=\kappa(x_\alpha,y_\alpha)t_\alpha=2t_\alpha/\kappa(t_\alpha,t_\alpha)$. 现在, 由 $\alpha(h)=\kappa(t_\alpha,h),\forall h\in H$ 立即得到 $t_\alpha=-t_{-\alpha}$, 于是 $h_\alpha=-h_{-\alpha}$. □

Remark 2.38. 该引理表明非零有限维半单 Lie 代数 L, 对每个 $\alpha\in\Phi$, L 总存在基 $\{x_\alpha,y_\alpha,h_\alpha\}$ 使得 $x_\alpha\in L_\alpha,y_\alpha\in L_{-\alpha},h_\alpha=[x_\alpha,y_\alpha]$ 并且 $[x_\alpha,y_\alpha]=h_\alpha,[h_\alpha,x_\alpha]=2x_\alpha,[h_\alpha,y_\alpha]=-2y_\alpha$. 进而知 L 有 (由 $\{x_\alpha,y_\alpha,h_\alpha\}$ 张成的)3 维单 Lie 子代数 $S_\alpha\cong\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$, 这使得利用 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的表示理论研究 L 的表示理论成为可能.

下面将应用 [引理2.37] 获取有限维半单 Lie 代数关于固定极大环面 Lie 子代数的根系的进一步信息. 之前已经提到, 有限维半单 Lie 代数的表示理论极有可能通过 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的表示理论研究, 下面将应用 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的表示理论来研究根系的性质. 首先回忆些 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的有限维 Lie 表示的性质. 以下 $\Bbbk$ 默认是特征为零的代数闭域. 根据 [推论2.25], 如果非零有限维半单 Lie 代数 L 关于极大环面 Lie 子代数的根系记作 Φ, 那么对每个 $\alpha\in\Phi$, [引理2.37(3)] 得到的单 Lie 代数 $S_\alpha\cong\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 并且对任何 S_α 上有限维 Lie 模 V, h_α 对应的 V 上线性变换的特征值均为整数, 并且每个特征值的相反数依然是特征值. 根据 [定理2.24], 如果 V 有奇数维不可约 Lie 子模, 那么 h_α 对应 V 上线性变换一定有零特征值; 如果 V 有偶数维不可约 Lie 子模, 那么 1 一定是 h_α 的特征值.

Proposition 2.39. 设 L 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的非零有限维半单 Lie 代数, H 是极大环面 Lie 子代数, Φ 是 L 关于 H 的根系, $\alpha\in\Phi$. 那么对 $c\in\Bbbk$, $c\alpha\in\Phi$ 当且仅当 $c=\pm 1$. 并且总有 $\dim_{\Bbbk}L_\alpha=1$.

Proof. 沿用 [引理2.37] 的记号, 现在 L 有 3 维单 Lie 子代数 $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$, S_α 有 $\Bbbk$-基 $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ 使得 $x_\alpha \in L_\alpha, y_\alpha \in L_{-\alpha}, h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ 并且 $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha, [h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$. 通过考虑 S_α 中元素决定的伴随变换可自然将 L 视作 S_α 上有限维 Lie 模. 现在考虑 L 的 Lie 子模 $M = H \oplus (\oplus_{c\in\Bbbk^\times} L_{c\alpha})$. 如果 $x \neq 0 \in M$ 满足 x 是关于 h_α 对应的 M 上线性变换的特征向量, 那么利用 $\alpha(h_\alpha) = 2$(见 [引理2.37(5)] 的证明过程) 可知存在唯一的 $c \in \Bbbk$(c 可能是零) 使得 $x \in L_{c\alpha}$. 因此 h_α 对应的 M 上的线性变换特征值不是零就形如 $c\alpha(h_\alpha) = 2c, c \in \Bbbk^\times$. 由 [推论2.25], 如果 $c \in \Bbbk^\times$ 使得 $2c$ 是特征值, 那么 $2c$ 是整数. 因此如果 $c \in \Bbbk^\times$ 满足 $c\alpha \in \Phi$, 必有 $2c \in \mathbb{Z}$. 根据 M 的构造, h_α 对应 M 上线性变换的零特征值的特征子空间就是 H, 所以由 $\mathrm{Ker}\alpha \oplus S_\alpha$(首先 $H = \mathrm{Ker}\alpha \oplus \Bbbk h_\alpha$, 再利用 $S_\alpha = \Bbbk h_\alpha \oplus \Bbbk x_\alpha \oplus \Bbbk y_\alpha$) 是 M 作为 S_α 上 Lie 模的 Lie 子模, S_α 作为单 Lie 代数是 S_α 的不可约表示以及 $\mathrm{Ker}\alpha$ 是 $\dim_\Bbbk \mathrm{Ker}\alpha = \dim_\Bbbk H - 1$ 个 1 维不可约表示的直和可知 h_α 对应 $\mathrm{Ker}\alpha \oplus S_\alpha$ 上线性变换在 $\mathrm{Ker}\alpha \oplus S_\alpha$ 中属于特征值零的特征子空间维数是 $\dim_\Bbbk H$. 这说明 h_α 对应 M 上线性变换属于特征值零的特征子空间含于 $\mathrm{Ker}\alpha \oplus S_\alpha$. 因此由 [定理2.24] 知 h_α 对应 M 上线性变换的所有偶数特征值只可能是 $0, \pm 2$(因为 S_α 是 3 维不可约表示) 以及 M 的奇数维不可约 Lie 子模都含于 $\mathrm{Ker}\alpha \oplus S_\alpha$. 这说明 $2\alpha \notin \Phi$: 若不然, 则由 $L_{2\alpha} \neq 0$ 知 h_α 对应 M 上线性变换有特征值 4, 矛盾. 特别地, 前面的讨论表明如果 $\alpha \in \Phi$, 那么 $2\alpha \notin \Phi$. 那么由 $\alpha \in \Phi$ 知 $\alpha/2 \notin \Phi$. 所以 $L_{\alpha/2} = 0$, 这说明 h_α 对应 M 上线性变换的特征值不可能是 1. 于是由 [定理2.24] 可知 M 的不可约 Lie 子模都是奇数维的. 由此可知 $M = \mathrm{Ker}\alpha \oplus S_\alpha$. 于是由 $\mathrm{Ker}\alpha \subseteq H, S_\alpha \subseteq \Bbbk h_\alpha \oplus L_\alpha \oplus L_{-\alpha}$ 可知对 $c \in \Bbbk, c\alpha \in \Phi$ 当且仅当 $c = \pm 1$. 并且由 $\dim_\Bbbk S_\alpha = 3$ 迫使 $L_\alpha = \Bbbk x_\alpha$ 以及 $L_{-\alpha} = \Bbbk y_\alpha$. 特别地, $\dim_\Bbbk L_\alpha = 1$. □

Remark 2.40. 根据 [定理2.36], 对极大环面 Lie 子代数 H 有 $C_L(H) = H$, 所以对 $\alpha \in \Phi$ 总有 $[H, L_\alpha] \neq 0$. 结合 $[H, L_\alpha] \subseteq L_\alpha$(见 [引理2.34]) 以及 $\dim_\Bbbk L_\alpha = 1$ 便知 $[H, L_\alpha] = L_\alpha$.

Remark 2.41. 沿用 [引理2.37] 和 [命题2.39] 的假设和记号, 证明过程表明 $S_\alpha = [L_\alpha, L_{-\alpha}] \oplus L_\alpha \oplus L_{-\alpha}$. 这里

$$L_\alpha = \Bbbk x_\alpha, L_{-\alpha} = \Bbbk y_\alpha, [L_\alpha, L_{-\alpha}] = \Bbbk h_\alpha = \Bbbk t_\alpha.$$

设 L 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的非零有限维半单 Lie 代数, H 是极大环面 Lie 子代数, Φ 是 L 关于 H 的根系, $\alpha, \beta \in \Phi$ 满足 $\beta \neq \pm\alpha$. 沿用 [引理2.37] 和 [命题2.39] 的假设和记号, 考察 S_α 上 Lie 模 L 的 $\Bbbk$-子空间

$$N = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} L_{\beta + \ell\alpha},$$

由 $S_\alpha = \Bbbk h_\alpha \oplus \Bbbk x_\alpha \oplus \Bbbk y_\alpha$ 和 [引理2.34(1)] 知 N 是 L 作为 S_α 上 Lie 模的 Lie 子模 (S_α 中元素通过伴随变换作用于 N). 注意到 h_α 对应的 N 上线性变换的特征值形如 $\beta(h_\alpha) + 2\ell$(回忆 $\alpha(h_\alpha) = 2$), 具有相同的奇偶性, 所以由 [定理2.24] 知 N 的不可约 Lie 子模要么均为奇数维要么均为偶数维. 如果整数 ℓ 使得 $\beta + \ell\alpha = 0$, 那么由 [命题2.39] 可知 $\ell\alpha \in \Phi$, 即 $\ell = \pm 1$, 这和 $\beta \neq \pm\alpha$ 的假定矛盾. 该观察表明 N 的不可约子模只有偶数维不可约 Lie 子模, 并且 h_α 所对应的 N 上线性变换属于特征值 1 的子空间是 1 维的 (因为对所有的 $\alpha \in \Phi$ 都有 $\dim_\Bbbk L_\alpha = 1$), 进而应用 [推论2.25] 便知 N 作为 S_α 上有限维完全可约 Lie 模关于不可约 Lie 模直和分解项数恰好为 1, 即 N 自身是 S_α 上不可约 Lie 模! 于是应用 [定理2.24] 可知 $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$. 现在设整数 q 是满足 $\beta + q\alpha \in \Phi$ 的最大整数 (因为 $\alpha \neq 0$ 且 Φ 是有限集, 所以这样的 q 存在), 同样可设整数 r 是满足 $\beta - r\alpha \in \Phi$ 的最大整数, 那么由 $\beta \in \Phi$ 知 $-r \leq 0 \leq q$, 这就得到 Φ 中所有具有形式"$\beta + \ell\alpha(\ell \in \mathbb{Z})$"的根为

$$\beta - r\alpha, \beta - (r-1)\alpha, ..., \beta, \beta + \alpha, ..., \beta + q\alpha.$$

根据 S_α 的有限维不可约表示的权的对称性 (见 [定理2.24]), $(\beta-r\alpha)(h_\alpha)=-(\beta+q\alpha)(h_\alpha)$, 进而由 $\alpha(h_\alpha)=2$ 可知 $\beta(h_\alpha)=r-q$. 于是知 S_α 在 N 中的所有权是 $-q-r,-q-r+2,...,-q+r,-q+r+2,...,q+r$(之前已经说明这列整数均非零). 于是由 [引理2.22(3)] 以及 $x_\alpha\in L_\alpha$ 可知 $[L_\alpha,L_\beta]\neq 0$. 特别地, 当 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Phi$ 时 (注意这时已经有 $\beta\neq\pm\alpha$), 由 [引理2.34(1)] 和 $\dim_{\Bbbk}L_{\alpha+\beta}=1$ 知 $[L_\alpha,L_\beta]=L_{\alpha+\beta}$. 现在把前面的讨论总结为

Proposition 2.42. 设 L 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的非零有限维半单 Lie 代数, H 是极大环面 Lie 子代数, Φ 是 L 关于 H 的根系, $\alpha,\beta\in\Phi$, 并沿用 [引理2.37] 的记号. 那么
(1) 总有 $\beta(h_\alpha)\in\mathbb{Z}$, 称为 **Cartan 整数** (当 $\beta=\alpha$ 时, $\beta(h_\alpha)=2$; 当 $\beta=-\alpha$ 时, $\beta(h_\alpha)=-2$).
(2) 如果 $\beta\neq\pm\alpha$, 并且以整数 r,q 表示满足 $\beta-r\alpha,\beta+q\alpha\in\Phi$ 的最大整数, 那么 $-r\leq 0\leq q$ 并且对任何整数 $-r\leq\ell\leq q$ 有 $\beta+\ell\alpha\in\Phi$, $\beta(h_\alpha)=r-q$. 特别地, $\beta-\beta(h_\alpha)\alpha\in\Phi$.
(3) 如果 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Phi$, 那么 $[L_\alpha,L_\beta]=L_{\alpha+\beta}$.

2.5 有限维半单 Lie 代数的根系

设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, 并固定 L 的极大环面 Lie 子代数 H. 根据 [命题2.32] 和 [定理2.36], L 的根系 $\Phi=\{\alpha\neq 0\in H^*|L_\alpha\neq 0\}$ 是非空有限集, 其中 $L_\alpha=\{x\in L|\alpha(h)x=[h,x],\forall h\in H\}$, 并且有下述 L 关于 H 的根子空间分解:

$$L=H\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi}L_\alpha\right).$$

对每个 $\alpha\in\Phi$, [命题2.39] 表明 $\dim_{\Bbbk}L_\alpha=1$. 本节将进一步研究根系的结构与性质并加以抽象 (见 [定义2.47]).

沿用前面的记号与假设, 定义 H^* 上 $\Bbbk$-双线性型 $(\gamma,\delta)=\kappa(t_\gamma,t_\delta),\forall\gamma,\delta\in H^*$(回忆对 $\alpha\in H^*$, $t_\alpha\in H$ 表示 H 中唯一满足 $\alpha(h)=\kappa(t_\alpha,h),\forall h\in H$ 的元素). 易见 $(-,-):H^*\times H^*\to\Bbbk$ 是对称的, 下面说明它是非退化的: 如果 $\delta\in H^*$ 满足 $(\delta,\gamma)=0,\forall\gamma\in H^*$, 那么 $\delta(t_\gamma)=0,\forall\delta\in H^*$, 这迫使 $t_\gamma=0$, 于是 $\gamma=0$. 现在沿用 [引理2.37] 的记号, 对 $\alpha,\beta\in\Phi$, $h_\beta=2t_\beta/\kappa(t_\beta,t_\beta)$, 所以 $\alpha(h_\beta)=2\kappa(t_\alpha,t_\beta)/\kappa(t_\beta,t_\beta)=2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)$. 由 [命题2.42], $\alpha(h_\beta)\in\mathbb{Z}$, 所以 $2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)\in\mathbb{Z},\forall\alpha,\beta\in\Phi$. 结合 [命题2.42(2)], 刚刚的讨论使我们看到

Proposition 2.43. 设 L 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, H 是 L 的极大环面 Lie 子代数, Φ 是 L 关于 H 的根系, $(-,-)$ 是上述由 Killing 型定义的 H^* 上对称双线性型. 那么对任何 $\alpha,\beta\in\Phi$(当 $\beta\neq\pm\alpha$ 时, 以整数 r,q 表示满足 $\alpha-r\beta,\alpha+q\beta\in\Phi$ 的最大整数), 则

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=\alpha(h_\beta)=\begin{cases}r-q, & \alpha\neq\pm\beta\\ 2, & \alpha=\beta\\ -2, & \alpha=-\beta.\end{cases}$$

Remark 2.44. 该命题表明一旦有限维半单 Lie 代数关于极大环面 Lie 子代数的根系确定, 不需要直接计算出 Killing 型就能从根系直接读出所有的 Cartan 整数 ([命题2.42(1)]).

根据 [引理2.37(1)], Φ 可 $\Bbbk$-线性生成 H^*, 所以可选取 H^* 的 $\Bbbk$-基 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}\subseteq\Phi$. 任取 $\beta\in\Phi$, 存在 $c_1,...,c_\ell\in\Bbbk$ 使得 $\beta=c_1\alpha_1+\cdots+c_\ell\alpha_\ell$. 我们断言每个 $c_j\in\mathbb{Q}$. 由此立即得到对每个 $1\leq i\leq\ell$ 有

$$\frac{2(\beta,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=\sum_{j=1}^{\ell}\frac{2(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}c_j.$$

因此 $(c_1,...,c_\ell)^T$ 是以整数矩阵 $(2(\alpha_j,\alpha_i)/(\alpha_i,\alpha_i))_{\ell\times\ell}$ 为系数矩阵的某个线性方程组的解. 现在由对称双线性型 $(-,-)$ 的非退化性以及 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性容易验证 $(2(\alpha_j,\alpha_i)/(\alpha_i,\alpha_i))_{\ell\times\ell}$ 可逆, 所以 $(c_1,...,c_\ell)^T$ 作为某个整系数线性方程组的唯一解各分量一定是有理数. 因此 Φ 含于由 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 生成的 $\mathbb{Q}$-子空间.

下面我们说明对 $\beta\in\Phi$ 总有 $(\beta,\beta)\in\mathbb{Q}$. 首先我们需要

Lemma 2.45. 设 $\lambda,\mu\in H^*$, 那么 $(\lambda,\mu)=\sum\limits_{\alpha\in\Phi}\alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu)$.

Proof. 由于 $t_\lambda,t_\mu\in H$, 故由 H 是 L 的 Lie 子代数知 H 是关于 L 上线性变换 $\mathrm{ad}_{t_\lambda},\mathrm{ad}_{t_\mu}$ 的不变子空间, 同样地, 由 [引理2.34(1)] 知 $\oplus_{\alpha\in\Phi}L_\alpha$ 也是线性变换 $\mathrm{ad}_{t_\lambda},\mathrm{ad}_{t_\mu}$ 的不变子空间. 所以根据 Killing 型的定义,

$$(\lambda,\mu)=\kappa(t_\lambda,t_\mu)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu})=\mathrm{tr}|_H(\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu})+\mathrm{tr}|_{\oplus_{\alpha\in\Phi}L_\alpha}(\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu}).$$

因为 H 是交换 Lie 代数 (回忆 [命题2.28]), 所以 $\mathrm{tr}|_H(\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu})=0$. 现在对每个 $x\neq 0\in L_\alpha(\alpha\in\Phi)$, 有

$$\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu}(x)=\mathrm{ad}_{t_\lambda}(\alpha(t_\mu)x)=\alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu)x.$$

所以由每个 $\alpha\in\Phi$ 对应的根空间 L_α 是 1 维的 ([命题2.39]) 便知 $\mathrm{tr}|_{\oplus_{\alpha\in\Phi}L_\alpha}(\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu})=\sum\limits_{\alpha\in\Phi}\alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu)$. □

在 [引理2.45] 中取 $\lambda=\mu=\beta\in\Phi$ 便知 $(\beta,\beta)=\sum\limits_{\alpha\in\Phi}(\alpha,\beta)^2$, 两边同时除以 $(\beta,\beta)^2$ 再由之前说明的 $2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)\in\mathbb{Z}$ 可知 $(\beta,\beta)\in\mathbb{Q}$. 进而也有 $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q},\forall\alpha,\beta\in\Phi$. 并注意到 $(\beta,\beta)=0$ 当且仅当对所有的 $\alpha\in\Phi$ 有 $(\alpha,\beta)=0$. 所以如果作 E 是以 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 为 $\mathbb{R}$-基的线性空间, 并将 Φ 到 E 的标准嵌入 (之前已经说明 Φ 含于 H^* 的由 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 生成的 $\mathbb{Q}$-子空间) 视作等同, 那么把 H^* 上双线性型 $(-,-)$ 通过 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 自然扩充到 E 上后 (依然记作 $(-,-)$), 对 $\mathbb{Q}\alpha_1\oplus\mathbb{Q}\alpha_2\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}\alpha_\ell$ 中任意两个元素在 $(-,-)$ 下的像都是有理数. 并且如果 $\lambda\in\mathbb{Q}\alpha_1\oplus\mathbb{Q}\alpha_2\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}\alpha_\ell\subseteq H^*$, 那么对每个 $\alpha\in\Phi$ 有 $\alpha(t_\lambda)\in\mathbb{Q}$, 于是同样由 [引理2.45] 可知

$$(\lambda,\lambda)=\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha(t_\lambda)^2$$

作为一些有理数的平方和为零当且仅当 $\alpha(t_\lambda)=0,\forall\alpha\in\Phi$. 所以通过 Φ 可 $\Bbbk$-线性张成 H^* 知 $(\lambda,\lambda)=0$ 当且仅当 $t_\lambda=0$. 所以 $(\lambda,\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda=0$. 于是知 $\mathbb{Q}$ 上的对称矩阵 $X=((\alpha_i,\alpha_j))_{\ell\times\ell}$ 满足对任何 $\mathbb{Q}^\ell$ 中的列向量 v 有 $v^TXv\geq 0$ 且等号成立当且仅当 $v=0$. 将 X 在 $\mathbb{Q}$ 上合同于对角阵, 那么对角阵是可逆的并且对角线上的元素都是正有理数. 故存在 $\mathbb{Q}$ 上可逆的 ℓ 阶矩阵 Y 使得 $X=Y^TY$, 这说明 X 是正定矩阵. 于是知 E 上对称 $\mathbb{R}$-双线性型 $(-,-)$ 是对称正定的, 于是 $(E,(-,-))$ 是 $\mathbb{R}$ 上 ℓ 维实内积空间. 我们把刚刚的讨论总结为

Proposition 2.46. 对任何 $\alpha,\beta\in\Phi$, 有 $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}$ 且 $(E,(-,-))$ 是 $\mathbb{R}$ 上 ℓ 维实内积空间.

因此, 对特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的非零有限维半单 Lie 代数 L 和极大环面 Lie 子代数 H, 如果记 Φ 是 L 关于 H 的根系, E 是由 Φ 所包含的 H^* 的 $\Bbbk$-基作为 $\mathbb{R}$-基生成的实线性空间 (特别地, $\Phi\subseteq E$), 并带上 H^* 上自然对称双线性映射诱导的实内积 $(-,-)$ 成为有限维实内积空间 $(E,(-,-))$. 则 Φ 在 $(E,(-,-))$ 中满足:

(1) 作为 $\mathbb{R}$-线性空间, Φ 可线性生成 E(见 [引理2.37(1)] 和 E 的构造).

(2) 如果 $\alpha\in\Phi$, 那么 $-\alpha\in\Phi$ 并且如果 $c\in\mathbb{R}$ 满足 $c\alpha\in\Phi$, 则 $c=\pm1$(见 [引理2.37(2)] 和 [命题2.39]).

(3) 如果 $\alpha,\beta\in\Phi$, 那么 $\beta-2(\beta,\alpha)\alpha/(\alpha,\alpha)\in\Phi$(见 [命题2.42(2)] 和之前得到的 $\beta(h_\alpha)=2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)$).

(4) 如果 $\alpha,\beta\in\Phi$, 则有 $2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Z}$(来自 [命题2.42(1)] 和 $\beta(h_\alpha)=2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)$).

现在我们将有限维半单 Lie 代数关于给定极大环面 Lie 子代数的根系所具有的特性加以抽象:

Definition 2.47 (抽象根系)**.** 设 $(E,(-,-))$ 是非零有限维实内积空间, 称 $\Phi\subseteq E$ 是 $(E,(-,-))$ 中 (抽象) **根系** (将 Φ 中的元素称之为**根**), 如果
(R1)Φ 是 (非空) 有限集, $0\notin\Phi$ 并且 Φ 可 $\mathbb{R}$-线性张成 E.
(R2) 如果 $\alpha\in\Phi$, 那么 $-\alpha\in\Phi$ 并且如果 $c\in\mathbb{R}$ 满足 $c\alpha\in\Phi$, 则 $c=\pm1$.
(R3) 如果 $\alpha\in\Phi$, 那么 α 决定的镜面反射 $\sigma_\alpha: E\to E, x\mapsto x-2(x,\alpha)\alpha/(\alpha,\alpha)$ 满足 $\sigma_\alpha(\Phi)=\Phi$.
(R4) 对 $\alpha,\beta\in\Phi$, 有 $2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Z}$.

Remark 2.48. 回忆 E 上镜面反射是指 (逐点) 固定某个余 1 维子空间 W 并把 W 的正交补中的向量映至负向量的线性变换. 由此不难看出 E 上镜面反射是保持内积的可逆线性变换. 如果设 σ 是 E 上镜面反射, 并且固定余 1 维子空间 W, 设 W 有正交补 $\mathbb{R}v$, 那么不难看出 $\sigma(x)=x-2(x,v)/(v,v),\forall x\in E$ 以及 $\sigma^2=\mathrm{id}_E$. 之前我们已经看到特征零的代数闭域上非零有限维半单 Lie 代数 L 关于极大环面 Lie 子代数 H 的根系 Φ 具有的基本性质, 之前已经明确指出 Φ 满足 (R1), (R2) 和 (R3). 要看到 Φ 满足 (R3), 只需注意到对任何 $\alpha\in\Phi$ 有 $\sigma_\alpha(\Phi)\subseteq\Phi$ 并且 σ_α 的逆映射就是自身, 所以 $\sigma_\alpha(\Phi)=\Phi$. 因此从有限维半单 Lie 代数产生的根系满足 [定义2.47].

Remark 2.49. 设 $a>0\in\mathbb{R}$, 那么 $(E,a(-,-))$ 依然是内积空间. 若 Φ 是 $(E,(-,-))$ 中的根系, 那么由根系的定义不难看到当 E 带有新的内积 $a(-,-)$ 时, Φ 依然是空间 $(E,a(-,-))$ 中的根系.

Remark 2.50. 设非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中非零元素 α,β 决定的镜面反射 σ_α 与 σ_β 满足 $\sigma_\alpha=\sigma_\beta$, 我们说明 $\alpha=\mathbb{R}^\times\beta$: 这时对任何 $x\in E$, 有 $2(x,\alpha)\alpha/(\alpha,\alpha)=2(x,\beta)\beta/(\beta,\beta)$, 所以取 $x=\alpha$ 得到 $\alpha=(\alpha,\beta)\beta/(\beta,\beta)$. 由此得到 $\alpha=\mathbb{R}^\times\beta$. 特别地, 如果 α,β 都在同一个根系中, 那么 $\alpha=\pm\beta$.

Proposition 2.51. 设 $(E,(-,-))$ 是非零有限维实内积空间, Φ 是 E 中根系. 如果 V 的子空间 U 的正交补 $U^\perp$ 满足 $\Psi=\Phi\cap U^\perp$ 非空, 那么 Ψ 是内积空间 $\mathrm{Span}(\Psi)$ 中的根系.

Proof. 由条件, Ψ 非空, 由有限多个非零向量构成, 且生成 $\mathrm{Span}(\Psi)$，[定义2.47] 中其余条件明显满足. □

从 [注记2.48] 知有限维半单 Lie 代数关于给定极大环面 Lie 子代数的根系满足 [定义2.47], 下面我们先在抽象层面研究根系的性质, 再应用于有限维半单 Lie 代数的研究. 例如可利用根系的性质刻画有限维半单 Lie 代数的单性 (见 [命题2.64]). 首先我们引入一些术语. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系. 如果 Φ 不能表示为两个 (在给定内积意义下) 互相正交的非空真子集的并, 则称 Φ 是**不可约的**. 如果根系 Φ 的子集 Δ 满足 Δ 是 E 的 $\mathbb{R}$-基并且任何 $\beta\in\Phi$ 关于 Δ 中元素的 $\mathbb{R}$-线性表出系数是同时非正或同时非负的整数, 则称 Δ 是 Φ 的**基**. 随之而来的基本问题是根系的基的存在性. 在证明该存在性前 (见 [命题2.56]), 我们再引入

Definition 2.52. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系. 对每个 $\alpha\in\Phi$, 记 $P_\alpha=\{x\in E|(x,\alpha)=0\}$(即 α 决定的镜面反射 σ_α 所固定的余 1 维子空间). 如果 $\gamma\in E$ 满足 $\gamma\notin P_\alpha,\forall\alpha\in\Phi$, 则称 γ 是**正则元**.

Remark 2.53. 由于 E 作为无限域上有限维线性空间无法表示为有限多个真子空间之并, 正则元必存在.

Remark 2.54. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, a 是正实数, 那么在 [注记2.49] 中已经指出 Φ 依然是 $(E,a(-,-))$ 中的根系. 由于 E 的 $\mathbb{R}$-线性结构没有改变, Φ 的基 Δ 在 $(E,a(-,-))$ 中依然是 Φ 的基.

Remark 2.55. 设 γ 是 E 中正则元, 定义 $\Phi^+(\gamma)=\{\alpha\in\Phi|(\gamma,\alpha)>0\}$, 相应地, 定义

$$\Phi^-(\gamma)=\{\alpha\in\Phi|(\gamma,\alpha)<0\}=-\Phi^+(\gamma).$$

那么由 γ 是正则元, $\Phi=\Phi^+(\gamma)\cup\Phi^-(\gamma)$. 如果 $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ 满足存在 $\beta_1,\beta_2\in\Phi^+(\gamma)$ 使得 $\alpha=\beta_1+\beta_2$, 则称 α 是**可分解的**, 否则称 α 是**不可分解的**. 记 $\Delta(\gamma)$ 是 $\Phi^+(\gamma)$ 中不可分解的根全体. 我们指出 $\Delta(\gamma)$ 是非空有限集: 由于 $\Delta(\gamma)\subseteq\Phi$, 所以 $\Delta(\gamma)$ 是有限集. 要看到 $\Delta(\gamma)\neq\varnothing$, 只需注意 $\Phi^+(\gamma)$ 是非空有限集, 因此可选取 $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ 使 (γ,α) 最小. 我们断言这样选取的 α 是不可分解的. 若不然, 则存在 $\beta_1,\beta_2\in\Phi^+(\gamma)$ 使得 $\alpha=\beta_1+\beta_2$, 于是

$$(\gamma,\alpha)=(\gamma,\beta_1)+(\gamma,\beta_2)>(\gamma,\beta_1),$$

这与 α 的选取矛盾. 所以 $\alpha\in\Delta(\gamma)$. 特别地, $\Delta(\gamma)$ 非空. 由于实内积空间可引入夹角的概念 (对 $x,y\in E$, 回忆 x 与 y 的夹角是 $\arccos(x,y)/|x||y|\in[0,\pi]$, 其中 $|x|=\sqrt{(x,x)},|y|=\sqrt{(y,y)}$ 分别表示 x,y 的长度), 因此 $\Phi^+(\gamma)$ 就是 Φ 中与 γ 夹角在 $[0,\pi/2)$ 中的根, $\Phi^-(\gamma)$ 是 Φ 中与 γ 夹角在 $(\pi/2,\pi]$ 中的根. 而 $\Delta(\gamma)$ 就是 Φ 中与 γ 夹角在 $[0,\pi/2)$ 中且不可分解的根全体, 前面的讨论表明这样的根总存在.

Proposition 2.56. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系. 那么对正则元 γ, $\Delta(\gamma)$ 是 Φ 的基.

Proof. 在 [注记2.55] 中已经指出 $\Delta(\gamma)$ 是非空有限集. 下面先证明 $\Phi^+(\gamma)$ 中的根都是 $\Delta(\gamma)$ 中根的非负整数线性组合 (于是 $\Phi^-(\gamma)$ 中根都是 $\Delta(\gamma)$ 中根的非正整数线性组合), 再验证 $\Delta(\gamma)$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关集, 于是结合 Φ 可 $\mathbb{R}$-线性生成 E 便知 $\Delta(\gamma)$ 是根系 Φ 的基. 假设 $\Phi^+(\gamma)$ 中存在不能够表示为 $\Delta(\gamma)$ 中根的非负整数线性组合的元素, 置非空有限集 $S=\{\alpha\in\Phi^+(\gamma)|\alpha\text{无法表示为}\Delta(\gamma)\text{中根的非负整数线性组合}\}$, 可选取 $\alpha\in S$ 使得 (γ,α) 最小, 那么 $\alpha\notin\Delta(\gamma)$. 于是知存在 $\beta_1,\beta_2\in\Phi^+(\gamma)$ 使得 $\alpha=\beta_1+\beta_2$, 现在由 $(\gamma,\beta_1),(\gamma,\beta_2)<(\gamma,\alpha)$ 以及 α 的选取得到 $\beta_1,\beta_2\notin S$. 于是 β_1,β_2 能够表示为一些 $\Delta(\gamma)$ 中元素的非负整数线性组合, 从而 $\alpha\notin S$, 矛盾.

下面证明 $\Delta(\gamma)$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关集来完成命题证明. 我们断言对 $\alpha\neq\beta\in\Delta(\gamma)$ 有 $(\alpha,\beta)\leq 0$. 一旦证明该断言, 假设存在 $\Delta(\gamma)$ 中有限多个根的非零 (实数) 线性组合是零, 那么由此可导出存在两两互异的 $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,...,\beta_m\in\Delta(\gamma)$ 以及正实数 $r_1,...,r_n,s_1,...,s_m$ 使得 $r_1\alpha_1+\cdots+r_n\alpha_n=s_1\beta_1+\cdots+s_m\beta_m$. 进而由

$$0\leq\left(\sum_{i=1}^n r_i\alpha_i,\sum_{i=1}^n r_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_is_j(\alpha_i,\beta_j)\leq 0$$

得到 $r_1\alpha_1+\cdots+r_n\alpha_n=0$, 从而由 $\Delta(\gamma)\subseteq\Phi^+(\gamma)$ 以及每个 $r_i>0$ 导出与下式的矛盾:

$$0=\left(\gamma,\sum_{i=1}^n r_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^n r_i(\gamma,\alpha_i).$$

因此要证明 $\Delta(\gamma)$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关集只需再说明对 $\alpha\neq\beta\in\Delta(\gamma)$ 有 $(\alpha,\beta)\leq 0$. 若不然, 即 $(\alpha,\beta)>0$, 那么 $\{\alpha,\beta\}$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关的, 于是由 Cauchy 不等式的取等条件知

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\cdot\frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}<4,$$

根据根系的定义, 这里 $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ 和 $2(\beta,\alpha)/(\beta,\beta)$ 都是整数, 所以由 $(\alpha,\beta)>0$ 的假定知均为正整数, 从而 $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ 和 $2(\beta,\alpha)/(\beta,\beta)$ 中至少有一个为 1. 不妨设 $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)=1$. 记 σ_α 是 α 决定的镜面反射, 则 $\sigma_\alpha(\beta)=\beta-\alpha\in\Phi$. 特别地, 也有 $\alpha-\beta\in\Phi$. 如果 $\alpha-\beta\in\Phi^+(\gamma)$, 那么由 $\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$ 得到 $\alpha\notin\Delta(\gamma)$, 矛盾. 如果 $\alpha-\beta\in\Phi^-(\gamma)$, 那么由 $\beta-\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ 以及 $\beta=(\beta-\alpha)+\alpha$ 得到 $\beta\notin\Delta(\gamma)$, 矛盾. □

Remark 2.57. 证明过程也表明如果 $\alpha,\beta\in\Phi$ 满足 $\mathbb{R}$-线性无关. 则当 $(\alpha,\beta)>0$ 时, $\beta-\alpha,\alpha-\beta\in\Phi$. 特别地, 当 $(\alpha,\beta)<0$ 时, $\alpha+\beta,-\alpha-\beta\in\Phi$.

更进一步, 我们证明根系的基总是某个正则元在 [命题2.56] 意义下给出的.

Proposition 2.58. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系. 则任何 Φ 的基 Δ(通过 [命题2.56] 知 Δ 存在) 都满足存在正则元 $\gamma\in E$ 使得 $\Delta=\Delta(\gamma)$. 事实上, 只要 $\gamma\in E$ 满足 $(\gamma,\alpha)>0,\forall\alpha\in\Delta$, 就有 $\Delta=\Delta(\gamma)$.

Proof. 我们断言存在 $\gamma\in E$ 使得 $(\gamma,\alpha)>0,\forall\alpha\in\Delta$, 一旦证明该断言, 则由 Φ 中元素均可表示为 Δ 中元素的非负整数线性组合或非正整数线性组合知 $(\gamma,\alpha)\neq 0,\forall\alpha\in\Phi$, 自然有 γ 是正则元. 并且 Φ 中任何可以表示为 Δ 中非负整数线性组合的元素都在 $\Phi^+(\gamma)$ 中; Φ 中任何可以表示为 Δ 中非正整数线性组合的元素在 $\Phi^-(\gamma)$ 中. 该观察迫使 $\Phi^+(\gamma)$ 就是 Φ 中所有可以表示为 Δ 中非负整数线性组合的根构成的集合, $\Phi^-(\gamma)$ 是 Φ 中所有可以表示为 Δ 中非正整数线性组合的根构成的集合. 由此易验证 $\Delta\subseteq\Delta(\gamma)$, 故由 Δ 和 $\Delta(\gamma)$ 是有相同元素数目的有限集知 $\Delta=\Delta(\gamma)$. 所以根据前面的讨论知要完成命题证明, 只需再证断言: 存在 $\gamma\in E$ 使得 $(\gamma,\alpha)>0,\forall\alpha\in\Delta$. 设 $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\ell\}$, 这是 E 的 $\mathbb{R}$-基. 当 $\ell=1$ 时, 取 $\gamma=\alpha_1$ 即可. 下设 $\ell\geq 2$, 对每个 $1\leq i\leq\ell$, 考虑由 $\{\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},...,\alpha_\ell\}$ 生成的 $\mathbb{R}$-子空间的正交补空间 $\mathbb{R}\beta_i$. 考虑 α_i 在 β_i 上的投影

$$\delta_i=\frac{(\beta_i,\alpha_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i,$$

那么 $\delta_i\neq 0$, 否则 α_i 能够被 Δ 中其余元素 $\mathbb{R}$-线性表出. 于是 $\gamma=\delta_1+\cdots+\delta_\ell$ 满足 $(\gamma,\alpha)>0,\forall\alpha\in\Delta$. □

总结一下, 通过 [命题2.56] 和 [命题2.58], 我们看到根系 Φ 的基总存在并且总是由某个正则元诱导. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, Δ 是 Φ 的基, 我们称 Δ 中的根为**单根**. 任何 $\beta\in\Phi$ 可唯一地表示为 Δ 中一些元素的整数线性组合, 设为

$$\beta=\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha\alpha,k_\alpha\in\mathbb{Z},$$

称 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta}k_\alpha$ 是 β 的**高度**, 记作 $\mathrm{ht}\beta$. 当 $\mathrm{ht}\beta>0$ 时, 称 β 是**正根**; 当 $\mathrm{ht}\beta<0$ 时, 称 β 是**负根**.

我们把所有正根构成的集合记作 Φ^+, 所有负根构成的集合记作 Φ^-(注意根的正负性依赖于 Δ 的选取). 根据 [命题2.58] 的证明过程, 如果选取 $\gamma\in E$ 满足 $(\gamma,\alpha)>0,\forall\alpha\in\Delta$, 则 $\Delta=\Delta(\gamma)$ 且 $\Phi^+=\Phi^+(\gamma),\Phi^-=\Phi^-(\gamma)$. 结合 [注记2.55], 我们得到:

Proposition 2.59. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, Δ 是 Φ 的基. 那么

$$\Delta=\{\alpha\in\Phi^+\mid \text{不存在}\beta_1,\beta_2\in\Phi^+\text{使得 }\alpha=\beta_1+\beta_2\}.$$

Corollary 2.60. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, Δ 是 Φ 的基. 那么对任何 $\alpha\neq\beta\in\Delta$ 都满足 $(\alpha,\beta)\leq 0$. 特别地, 如果 $\alpha\in\Phi^+$ 满足 $\alpha\notin\Delta$, 那么存在 $\beta\in\Delta$ 使得 $(\alpha,\beta)>0$.

Proof. 由 [命题2.58] 的证明过程, 存在正则元 $\gamma\in E$ 使得 $\Delta=\Delta(\gamma)$ 且 $\Phi^+=\Phi^+(\gamma),\Phi^-=\Phi^-(\gamma)$. 现在由 [命题2.56] 的证明过程便得第一个结论. 现在设根 $\alpha\notin\Delta$, 如果对所有的 $\beta\in\Delta$ 有 $(\alpha,\beta)\leq 0$, 那么集合 $\Pi=\Delta\cup\{\alpha\}$ 中任意两个不同的根作内积都是非正实数. 并且由 $\alpha\in\Phi^+$ 知 $\Pi\subseteq\Phi^+(\gamma)$. 于是对 Π 重复 [命题2.56] 证明过程中关于 $\Delta(\gamma)$ 的 $\mathbb{R}$-线性无关性的讨论可得 Π 是 $\mathbb{R}$-线性无关集, 这与 Δ 是 E 的 $\mathbb{R}$-基矛盾. □

Proposition 2.61. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, Δ 是 Φ 的基. 如果 $\alpha\in\Phi^+$ 满足 $\alpha\notin\Delta$, 那么存在 $\beta\in\Delta$ 使得 $\alpha-\beta\in\Phi^+$.

Proof. 由 [推论2.60], 存在 $\beta \in \Delta$ 使得 $(\alpha, \beta) > 0$, 再应用 [注记2.57] 即得 $\alpha - \beta \in \Phi$. 由于 $\alpha \in \Phi^+$, α 是 Δ 中一些根的正整数线性组合. 再由 $\alpha \notin \Delta$ 得到 $\mathrm{ht}\alpha \geq 2$. 所以 $\mathrm{ht}(\alpha - \beta) \geq 1$, 即 $\alpha - \beta \in \Phi^+$. □

Remark 2.62. 根据 Φ 的基 Δ 以及正根集 Φ^+ 的定义, Φ^+ 中根均能够表示为一些 Δ 中根之和. 由该命题不难看到对任何 $\beta \in \Phi^+$, 总存在 $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Delta$ 使得 $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ 使得对任何 $1 \leq i \leq k$ 使得 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i \in \Phi^+$: 对 $\mathrm{ht}\beta$ 作归纳, 当 $\mathrm{ht}\beta = 1$ 时, $\beta \in \Delta$, 结论明显成立. 假设结论对高度为 $\mathrm{ht}\beta - 1(\mathrm{ht}\beta \geq 2)$ 的正根成立, 那么应用 [命题2.61] 可知存在 $\alpha_0 \in \Delta$ 使得 $\beta - \alpha_0 \in \Phi^+$. 由于 $\mathrm{ht}(\beta - \alpha_0) = \mathrm{ht}\beta - 1$, 故对 $\beta - \alpha_0$ 应用归纳假设即可.

设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E, (-,-))$ 中的根系, Δ 是 Φ 的基, 并记 Φ^+ 是所有关于 Δ 的正根构成的集合. 那么我们能够利用 Δ 赋予 E 上的偏序结构: 对 $\alpha, \beta \in E$, 如果 $\beta - \alpha$ 表示为 Δ 中元素的 $\mathbb{R}$-线性组合恰好是一些单根的和, 则定义 $\alpha < \beta$. 对 $\alpha, \beta \in E$, 定义 $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ 或 $\alpha < \beta$. 特别地, $\alpha \in \Phi$ 满足 $\alpha \in \Phi^+$ 当且仅当 $\alpha > 0$. 易见 $(E, \leq)$ 是 (非空) 偏序集. 当 Φ 是不可约根系时, 我们有

Proposition 2.63. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E, (-,-))$ 中的不可约根系, E 上偏序关系 $\leq$ 如上定义, 于是 $(\Phi, \leq)$ 也是偏序集. 这时 $(\Phi, \leq)$ 存在唯一的极大元 β, 并且 β 满足:
(1) 任给 $\alpha \neq \beta \in \Phi$, 那么 $\mathrm{ht}\alpha < \mathrm{ht}\beta$.
(2) 对所有 $\alpha \in \Phi$ 有 $(\beta, \alpha) \geq 0$.
(3) 如果 β 关于 Δ 的 $\mathbb{Z}$-线性组合表示为 $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, 那么所有的系数 k_α 是正整数.

Proof. 设 β 是 $(\Phi, \leq)$ 中的极大元, 以及 β 关于 Δ 的 $\mathbb{Z}$-线性组合表示为 $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$. 命

$$\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha > 0\}, \Delta_2 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha = 0\}.$$

因为 β 关于 $\leq$ 极大, 所以 β 是正根. 进而 $\Delta_1 \neq \varnothing$ 且 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, 下证 $\Delta_2 = \varnothing$ 来得到 (3). 假设 Δ_2 非空, 那么 [推论2.60] 表明 $(\beta, \alpha) \leq 0, \forall \alpha \in \Delta_2$. 由于 Φ 是不可约的, 所以有一定存在 $\alpha_2 \in \Delta_2, \alpha_1 \in \Delta_1$ 使得 $(\alpha_2, \alpha_1) < 0$, 于是应用 [推论2.60] 得到 $(\beta, \alpha_2) < 0$. 由于 $\beta, \alpha_2 \in \Phi$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关的, 所以 [注记2.57] 表明 $\alpha_2 + \beta \in \Phi$, 这与 β 的极大性矛盾. 于是 $\Delta_2 = \varnothing$, 因此 $k_\alpha > 0, \forall \alpha \in \Delta$. 特别地, 对每个 $\alpha \in \Delta$, 如果 $\Delta = \{\alpha\}$, 这时结论明显成立. 所以不妨设 $|\Delta| \geq 2$, 这时由 β 与 α 的 $\mathbb{R}$-线性无关性以及 [注记2.57] 得到 $(\alpha, \beta) \geq 0$(否则, $\alpha + \beta \in \Phi$, 与 β 的极大性矛盾), 这得到了 (2). 并且一定存在某个 $\overline{\alpha} \in \Delta$ 使得 $(\beta, \overline{\alpha}) > 0$: 否则, β 与 Δ 中每个元素的内积是零得到 β 与 E 中所有元素的内积为零, 这迫使 $\beta = 0$, 与 $0 \notin \Phi$ 矛盾. 现在证明极大元 β 的唯一性. 如果还有 β' 是极大元, 那么由 β 与 Δ 中某些元素内积为正以及 (3) 得到 $(\beta, \beta') > 0$. 如果 $\beta \neq \beta'$, 那么由它们均为正根自然也 $\mathbb{R}$-线性无关, 所以利用 [注记2.57] 得到 $\beta - \beta'$ 是根, 这时 $\beta < \beta'$ 或 $\beta' < \beta$, 得到矛盾. (1) 直接来自 β 的唯一性: 如果有某个 $\alpha_0 \neq \beta \in \Phi$ 满足 $\mathrm{ht}\alpha \geq \mathrm{ht}\beta$, 可选取极大元 $\beta' \geq \alpha$, 那么 $\mathrm{ht}\beta > \mathrm{ht}\alpha$ 蕴含 $\beta \neq \beta'$. □

Proposition 2.64. 设 L 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的非零有限维半单 Lie 代数, Φ 是 L 关于固定的极大环面 Lie 子代数 H 的根系. 那么 L 是单 Lie 代数当且仅当 Φ 是不可约根系.

Proof. 必要性: 如果 Φ 不是不可约的, 那么存在 Φ 的非空真闭子集 Φ_1, Φ_2 使得 $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ 并且 $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$(特别地, 这时 $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$). 对 $i = 1, 2$, 命 H_i 是由 $\{t_\alpha | \alpha \in \Phi_i\}$ 生成的 H 的 $\Bbbk$-子空间, 再定义 L 的 $\Bbbk$-子空间

$$L_i = H_i \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi_i} L_\alpha \right).$$

因为 Φ 可 $\Bbbk$-线性张成 H^*([引理2.37(1)]), 所以 $H=H_1\oplus H_2$, 再结合 Φ 是 Φ_1,Φ_2 的无交并得 $L=L_1\oplus L_2$(并注意 Φ_1,Φ_2 非空蕴含 $H_1,H_2\neq 0$). 下面我们说明 L_1,L_2 都是 Lie 理想来得到 L 有非平凡 Lie 理想, 进而 L 不是单 Lie 代数. 如果我们能够证明: (1) 对任何 $\alpha,\beta\in\Phi_i,\alpha+\beta\in\Phi$ 蕴含 $\alpha+\beta\in\Phi_i$. (2) 对任何 $\alpha\in\Phi_1,\beta\in\Phi_2$, 有 $\alpha+\beta\notin\Phi$, 那么由 H 是交换 Lie 代数以及 [引理2.34(1)] 便知 L_1,L_2 都是 L 的 Lie 理想. 现在设 $\alpha,\beta\in\Phi_i$ 满足 $\alpha+\beta\in\Phi$. 不妨设 $i=1$, 如果 $\alpha+\beta\notin\Phi_1$, 那么 $\alpha+\beta\in\Phi_2$. 所以利用 $(\Phi_1,\Phi_2)=0$ 可知 $(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=0$. 这迫使 $\alpha+\beta=0$, 这和 $0\notin\Phi$ 矛盾. 所以 $\alpha+\beta\in\Phi_1$. 现在再设 $\alpha\in\Phi_1,\beta\in\Phi_2$. 如果 $\alpha+\beta\in\Phi$, 那么利用 $(\Phi_1,\Phi_2)=0$ 可知 $(\alpha,\alpha+\beta)$ 与 $(\beta,\alpha+\beta)$ 中至少有一个为零. 不妨设 $(\alpha,\alpha+\beta)=0$, 那么由 $(\alpha,\beta)=0$ 得到 $(\alpha,\alpha)=0$, 进而 $\alpha=0\in\Phi$, 矛盾. 因此 L 不是单 Lie 代数, 矛盾.

充分性: 假设 L 不是单 Lie 代数, 那么 L 有非平凡真 Lie 理想, 结合 L 是自身上完全可约 Lie 模 (回忆 [定理1.111]), 由 [定理1.138] 可知 L 能够分解为两个非零 Lie 理想的直和, 设为 $L=L_1\oplus L_2$. 先说明 $H=(H\cap L_1)\oplus(H\cap L_2)$: 任取 $x\in H$, 并设 $x=x_1+x_2$, 其中 $x_i\in L_i$, 则由 $[x,h]=0,\forall h\in H$ 可得 $[x_1,h]=[x_2,h]=0$. 注意 $[x_1,L_2]=[x_2,L_1]=0$, 所以如果取定 L_1 和 L_2 的 $\Bbbk$-基来得到 L 的基, 那么以 x_1 决定的 L_1 上伴随变换的表示矩阵和 x_2 决定的 L_2 上的伴随变换为对角块的分块对角阵就是 ad_x 的表示矩阵. 于是由 $x\in H$ 以及 H 是环面 Lie 子代数知 x_1,x_2 决定的 L 上伴随变换都可对角化. 下证 $x_1,x_2\in H$. 考察 x_1,x_2 和 H 生成的 L 的 $\Bbbk$-子空间 H', 那么由 $[x_1,H]=[x_2,H]=0,[x_1,x_2]=0$ 立即得到 H' 是 Lie 子代数并且 H' 中元素对应的 L 上伴随变换都可对角化 (这里用到了任意一族两两可交换的可对角化线性变换可同时对角化), 那么 H' 是环面 Lie 子代数. 现在由 H 的极大性迫使 $H=H'$, 所以 $x_1,x_2\in H$. 至此证明了 $H=(H\cap L_1)\oplus(H\cap L_2)$.

现在考虑 L_1 和 L_2 作为非零有限维半单 Lie 代数 (见 [命题1.107]) 分别有极大环面 Lie 子代数 $H_1=H\cap L_1$ 和 $H_2=H\cap L_2$(易见 H_i 中元素决定的 L_i 上伴随变换都可对角化, 所以 H_i 是 L_i 的环面 Lie 子代数, H_i 的极大性来自 $H=H_1\oplus H_2$, 否则可构造严格包含 H 的环面 Lie 子代数), 于是可考虑相应根子空间分解:

$$L_1=H_1\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi_1}(L_1)_\alpha\right), L_2=H_2\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi_2}(L_2)_\alpha\right),$$

其中 Φ_i 是 L_i 关于 H_i 的根系. 对 $\alpha\in\Phi_1,\beta\in\Phi_2$, 定义 $\alpha'\in H^*$ 是在 L_1 上取值与 α 一致, 在 L_2 上取值为零的线性函数; $\beta'\in H^*$ 是在 L_2 上取值与 β 一致, 在 L_1 上取值为零的线性函数. 并作

$$\Phi_1'=\{\alpha'|\alpha\in\Phi_1\},\Phi_2'=\{\beta'|\beta\in\Phi_2\}.$$

对每个 $\alpha\in\Phi_1$, 有 $(L_1)_\alpha=L_{\alpha'}$(这里 $L_{\alpha'}\subseteq L_1$ 的原因是如果 $x\in L_{\alpha'}$, 取 $h_1\in H_1$ 使得 $\alpha(h_1)\neq 0$, 则 $[h_1,x]=\alpha(h_1)x$, 等号左边在 L_1 中, 所以 $x\in L_1$), 类似地, 对每个 $\beta\in\Phi_2$, 有 $(L_2)_\beta=L_{\beta'}$. 所以, 如果记 $\Phi=\Phi_1'\cup\Phi_2'$(注意到 $\Phi_1'\cap\Phi_2'=\varnothing$), 那么用 L_1,L_2 的根子空间分解得到 L 的根子空间分解后不难看到 Φ 就是 L 关于 H 的根系. 注意到 $(\Phi_1,\Phi_2)=0$: 对 $\alpha'\in\Phi_1',\beta'\in\Phi_2'$, 回忆 [引理2.37(3)(5)] 知 $h_{\beta'}\in H_2$, 所以 $\alpha'(h_{\beta'})=0$. 那么由 $\alpha'(h_{\beta'})=2(\alpha',\beta')/(\beta',\beta')$ 得到 $(\alpha',\beta')=0$. 所以 Φ 能够表示为两个互相正交的非空真子集之并, 这说明 Φ 不是不可约根系, 矛盾. 所以 L 是单 Lie 代数. □

[命题2.64] 将有限维半单 Lie 代数的单性与其关于给定极大环面 Lie 子代数的根系的不可约性联系起来, 所以给出不可约根系的分类与实现便是基本且重要的问题. 对一般的特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数 L, 根据 [定理1.111], L 在不计次序下可唯一地分解为一些有限维单 Lie 理想的直和, 设为 $L=L_1\oplus\cdots\oplus L_m$, 并固定 L 的极大环面 Lie 子代数 H. 对每个正整数 $1\leq i\leq m$, 记 $H_i=H\cap L_i$. 下面我们说明

每个 H_i 是 L_i 的极大环面 Lie 子代数并且如果设 L_i 关于 H_i 有根子空间分解

$$L_i = H_i \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi_i} (L_i)_\alpha \right),$$

其中 Φ_i 是 L_i 关于 H_i 的极大环面 Lie 子代数, 那么类似 [命题2.64], L 关于 H 的根系就是所有的 Φ_i' 的并. 首先对 $m \geq 1$ 作归纳证明 $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$. 当 $m = 1$ 时结论明显成立, 当 $m = 2$ 时, 在 [命题2.64] 的证明过程中已经证明结论成立. 假设结论对 $m-1$ 的情形成立, 对非零有限维半单 Lie 代数 $L_1 \oplus \cdots \oplus L_{m-1}$, 根据 [命题2.64] 的证明过程, $L_1 \oplus \cdots \oplus L_{m-1}$ 有极大环面 Lie 子代数 $H \cap (L_1 \oplus \cdots \oplus L_{m-1})$, L_m 有极大环面 Lie 子代数 $H_m = L_m \cap H$, 并且 H 是 $H \cap (L_1 \oplus \cdots \oplus L_{m-1})$ 和 H_m 的直和. 现在对 $L_1 \oplus \cdots \oplus L_{m-1}$ 应用归纳假设得到

$$H \cap (L_1 \oplus \cdots \oplus L_{m-1}) = H_1 \oplus \cdots \oplus H_{m-1}.$$

所以 $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$. 再由每个 H_i 中元素决定的 L 上伴随变换在 $L_j (j \neq i)$ 上作用为零得到 H_i 中元素决定的 L_i 上伴随变换都可对角化, 所以每个 H_i 是 L_i 的环面 Lie 子代数. 于是由每个 L_i 满足 $[L_i, L_j] = 0, \forall 1 \leq j \neq i \leq m$ 以及 H 的极大性不难看到 H_i 是 L_i 的极大环面 Lie 子代数. 现在我们设 Φ_i 是 L_i 关于 H_i 的根系, 并对每个 $\alpha_i \in \Phi_i$, 定义 $\alpha_i' \in H^*$ 是在 H_i 上取值与 α_i 一致, 在其余 $H_j (j \neq i)$ 上取值为零的 $\Bbbk$-线性函数, 命

$$\Phi_i' = \{\alpha_i' \in H^* | \alpha_i \in \Phi_i\}, i = 1, 2, ..., m.$$

与 [命题2.64] 的证明过程一样, 对每个 $1 \leq i \leq m$, 有 $(L_i)_{\alpha_i} = L_{\alpha_i'}$, 并记 Φ 是所有 Φ_i 之并 (由 [命题2.64] 的证明过程, 对 $1 \leq i \neq j \leq m$ 有 $(\Phi_i, \Phi_j) = 0$). 通过 L_i 关于 H_i 的根子空间分解得到 L 关于 H 的根子空间分解

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha' \in \Phi'} L_{\alpha'} \right),$$

由此不难看到 Φ' 就是 L 关于 H 的根系. 我们把刚刚的讨论总结为

Theorem 2.65. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的非零有限维半单 Lie 代数, 有单 Lie 理想直和分解 $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$ 以及极大环面 Lie 子代数 H. 则对每个 $1 \leq i \leq m$, $H_i = H \cap L_i$ 是 L_i 的极大环面 Lie 子代数, 满足 $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$. 并且若设

$$L_i = H_i \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi_i} (L_i)_\alpha \right)$$

是 L_i 关于 H_i 的根子空间分解, 并将 Φ_i 自然视作 H^* 的子集 Φ_i', 那么 $(\Phi_i', \Phi_j') = 0, \forall 1 \leq i \neq j \leq m$, $\Phi = \Phi_1' \cup \cdots \cup \Phi_m'$ 是 L 关于 H 的根系.

在本节最后, 我们指出根系 Φ 的基 Δ 的定义只需要 Δ 是 E 的 $\mathbb{R}$-基且 Φ 关于 Δ 的 $\mathbb{R}$-线性表出系数同时为非负实数或同时为非正实数即可: 首先 E 上内积的正定性保证了矩阵 $C = (a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 是可逆矩阵, 其中

$$a_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j).$$

现在设 $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_\ell\}$ 满足是 E 的 $\mathbb{R}$-基且 Φ 中任何元素关于 Δ 的线性表出系数不是全部非负就是全部非正. 如果有 $\beta \in \Phi$ 满足 $\beta = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$ 且每个 k_i 是非负实数, 某个 k_{i_0} 不是整数. 那么 $\beta \notin \Delta$. 注意到一定要某个 j_0 使得 $(\beta, \alpha_{j_0}) > 0$, 否则, β 满足 $(\beta, \alpha_j) \leq 0$ 对所有 j 成立, 蕴含 $(\beta, \beta) \leq 0$. 导致 $\beta = 0$, 矛盾. 于是 $\sigma_{\alpha_0}(\beta)$ 也在 Φ 中且其关于 Δ 线性表出的系数之和比 β 的系数之和严格小某个正整数, $\sigma_{\alpha_0}(\beta)$ 的线性表出系数也有非整数的项, 线性表出系数都非负. 再对 $\sigma_{\alpha_0}(\beta)$ 应用前面的讨论我们会得到 Φ 含有无限多个元素, 得到矛盾.

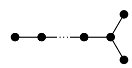
2.6 Dynkin 图

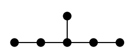
之前我们已经指出 (特征零的代数闭域上非零) 有限维半单 Lie 代数关于给定极大环面 Lie 子代数可自然产生某个实内积空间中的根系 (见 [命题2.46] 和 [注记2.48]), 并且当该 Lie 代数进一步是单 Lie 代数时, 对应的根系是不可约的 (见 [命题2.64]). 因此研究不可约根系与研究有限维单 Lie 代数的结构密切相关. 本节介绍根系关于给定基的 Dynkin 图的概念 (它部分顶点间的边可能带有箭头, Dynkin 图对应的无向图被称为 Coxeter 图), 把每个根系对应到某个有限图, 并说明不可约根系对应的 Dynkin 图只可能属于下列之一 ([定理2.82]):

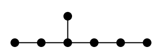
$A_\ell(\ell \geq 1)$:

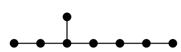
$B_\ell(\ell \geq 2)$:

$C_\ell(\ell \geq 3)$:

$D_\ell(\ell \geq 4)$: 

E_6 : 

E_7 : 

E_8 : 

F_4 :

G_2 :

对于上面的每个图, 我们给出实内积空间中某个具体根系使之导出的 Dynkin 图就是给定的图 (见 [定理2.85]).

Definition 2.66. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E, (-,-))$ 中的根系, 取定 Φ 的基 $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_\ell\}$, 称

$$\left(\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}\right)_{\ell\times\ell} \in \mathrm{M}_\ell(\mathbb{Z})$$

为 Φ 关于 Δ 的 **Cartan 矩阵**, 该矩阵的分量依然称为 **Cartan 整数**.

Remark 2.67. 在给定根系 Φ 的基 Δ 的前提下, Cartan 矩阵在相差某个置换矩阵的合同变换下唯一. 如果 Δ 中元素重排为 $\alpha_{\sigma(1)}, ..., \alpha_{\sigma(\ell)}$, 这里 $\sigma \in S_\ell$. 若设原有次序下的 Cartan 矩阵是 $C = (a_{ij})_{\ell\times\ell}$, 那么经 $\alpha_{\sigma(1)}, ..., \alpha_{\sigma(\ell)}$ 得到的 Cartan 矩阵是 $C_\sigma = (a_{\sigma(i),\sigma(j)})_{\ell\times\ell}$. 如果记 e_i 是 $\mathrm{M}_\ell(\mathbb{R})$ 中第 i 个标准单位列向量, $P = (e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(\ell)})$ 是相应置换矩阵, 则有 $C_\sigma = P^T C P$.

Remark 2.68. 在有限维半单 Lie 代数场景, 当 Lie 代数关于给定的极大环面 Lie 子代数的根系已经确定时, 可使用 [命题2.43] 来计算根系关于给定基的 Cartan 矩阵.

Example 2.69. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 有极大环面 Lie 子代数 $H = \Bbbk(E_{11} - E_{22})$(回忆 [命题2.29]), 这时 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 关于 H 的根系 Φ 由 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ 构成, 其中 $\varepsilon_1 : H \to \Bbbk, (a_{ij})_{2\times 2} \mapsto a_{11}, \varepsilon_2 : H \to \Bbbk, (a_{ij})_{2\times 2} \mapsto a_{22}$. 所以根系 Φ 的基是单点集, 于是相应的 Cartan 矩阵是 1 阶矩阵 (2).

Definition 2.70. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, 取定 Φ 的基 $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$, 并记 $C=(a_{ij})_{\ell\times\ell}$ 是 Φ 关于 Δ 的 Cartan 矩阵. 根系 Φ 关于基 Δ 的 **Dynkin 图**由以下三部分构成:
(1) 顶点集, 共有 ℓ 个顶点, 第 $i(1\le i\le\ell)$ 个顶点对应 α_i.
(2) 边集, 设 $1\le i\ne j\le\ell$, 第 i 个顶点与第 j 个顶点之间用 $a_{ij}a_{ji}$ 条线段相连.
(3) 箭头集, 对存在边的相邻顶点, 添加由长根指向短根的箭头.

Remark 2.71. 若在 Dynkin 图的定义中仅考虑顶点集和边集, 相应的 (无向) 图称为 Φ 关于 Δ 的 **Coxeter 图**.

Remark 2.72. 根据 [注记2.67] 不难看到重排 Δ 中元素顺序所得到的 Dynkin 图相同. 如果 $\mathscr{T}:E\to E$ 是正交变换, 满足 $\mathscr{T}(\Phi)=\Phi$, 那么 $\mathscr{T}(\Delta)$ 也是 Φ 作为根系的基并且 Φ 关于 Δ 的 Dynkin 图与 Φ 关于 $\mathscr{T}(\Delta)$ 的 Dynkin 图是相同的: 设 $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$, 那么由 $\mathscr{T}$ 是 $\mathbb{R}$-线性同构知 $\mathscr{T}(\Delta)$ 也是 E 的 $\mathbb{R}$-基. 由于 Φ 中任何元素关于 Δ 的 $\mathbb{R}$-线性表出系数要么同时为非负整数要么为非负整数, 所以由 $\Phi=\mathscr{T}(\Phi)$ 知 Φ 关于 $\mathscr{T}(\Delta)$ 的 $\mathbb{R}$-线性表出系数也满足此性质. 所以 $\mathscr{T}(\Delta)$ 是 Φ 作为根系的基. 现在由 Φ 保持内积便知由 Δ 给出的 Dynkin 图和 $\mathscr{T}(\Delta)=\{\mathscr{T}(\alpha_1),...,\mathscr{T}(\alpha_\ell)\}$ 给出的 Cartan 矩阵相同, 进而 Dynkin 图一致. 事实上, 对根系 Φ 的任何基 Δ_1,Δ_2, 总存在某个正交变换 $\mathscr{T}$ 满足 $\mathscr{T}(\Phi)=\Phi$ 并且 $\mathscr{T}(\Delta_1)=\Delta_2$, 之后我们将引入 Weyl 群的概念 (见 [定义2.87]) 来证明这一事实 (见 [命题2.95]), 进而得到根系关于基的 Dynkin 图与基的选取无关!

Remark 2.73. 回忆一个图被称为**连通图**, 如果任意两个顶点间有道路相连. 因此对特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的非零有限维半单 Lie 代数 L 关于极大环面 Lie 子代数 H 的根系 Φ(在 [命题2.46] 的意义下有自然的实内积空间 $E\supseteq\Phi$ 使得 Φ 是 E 中的根系, 见 [注记2.48]). 为了丰富不可约根系的动机, 这里应用些 Weyl 群的理论证明: Φ 是不可约的当且仅当相应的 Coxeter 图是连通的. 我们所应用的 Weyl 群工具之后的证明只涉及根系方面的工具, 不涉及与连通 Coxeter 图的性质. 固定 Φ 的基 $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$. 首先如果 Φ 是可约根系, 那么存在 Φ 的非空真子集 Φ_1,Φ_2 满足 $(\Phi_1,\Phi_2)=0$ 且 $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$. 我们说明不可能有 $\Delta\subseteq\Phi_1$ 或 $\Delta\subseteq\Phi_2$. 若不然, 不妨设 $\Delta\subseteq\Phi_1$, 那么由 Δ 是 E 的 $\mathbb{R}$-基得到 Φ_2 和 E 中元素都正交, 这迫使 $\Phi_2=\{0\}$, 矛盾. 所以 $\Delta\cap\Phi_1,\Delta\cap\Phi_2\ne\varnothing$. 结合 $\Phi_1\cap\Phi_2=\varnothing$ 知 Φ 关于 Δ 的 Coxeter 图不连通. 反之, 设 Φ 是不可约根系, 我们说明 Δ 无法分解为两个互相正交的非空真子集的并来得到 Coxeter 图的连通性. 假设 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ 能够分解为两个非空互相正交的子集的并, 根据 [注记2.97], 每个 Φ 中元素可表示为 $w(\alpha_i),w\in\mathscr{W}$ 的形式, 其中 $\mathscr{W}$ 是 Φ 的 Weyl 群 (并且 $\mathscr{W}(\Phi)=\Phi$). 记 $\Phi_1=\mathscr{W}(\Delta_1),\Phi_2=\mathscr{W}(\Delta_2)$, 那么 $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$ 并且由 $\mathscr{W}$ 可由 $\{\sigma_{\alpha_i}|1\le i\le\ell\}$ 生成 (见 [定理2.98]) 以及镜面反射的定义可知 Φ_1 含于 Δ_1 生成的 E 的 $\mathbb{R}$-子空间, Φ_2 含于 Δ_2 生成的 E 的 $\mathbb{R}$-子空间. 这说明 $(\Phi_1,\Phi_2)=0$. 于是 Φ 是可约根系, 与条件矛盾. 因此 Φ 是不可约的当且仅当相应的 Coxeter 图是连通的. 结合 [命题2.64], 我们看到 L 作为 Lie 代数的单性能够被相应 Coxeter 图的连通性刻画.

从根系的基本性质出发不难看到根系关于基的 Cartan 矩阵具有如下性质.

Proposition 2.74. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, 取定 Φ 的基 $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$, 并记 $C=(a_{ij})_{\ell\times\ell}$ 是 Φ 关于 Δ 的 Cartan 矩阵. 那么:
(1) 对每个 $1\le i\le\ell$, $a_{ii}=2$.
(2) 对 $1\le i\ne j\le\ell$, $a_{ij}\in\{0,-1,-2,-3\}$ 且 Φ 关于 Δ 的 Coxeter 图中任意两个顶点间的边不超过 3 条.
(3) 对 $1\le i\ne j\le\ell$, $a_{ij}=0$ 当且仅当 $a_{ji}=0$.
(4) 存在正整数 $d_1,...,d_\ell$ 使得 $d_ia_{ij}=d_ja_{ji},\forall 1\le i,j\le\ell$, 即 $(d_ia_{ij})_{\ell\times\ell}$ 是整数对称矩阵. 如果选取到的 $d_1,...,d_\ell$ 是整体互素的, 那么使得 $(d_ia_{ij})_{\ell\times\ell}$ 成为对称矩阵且满足整体互素的正整数组 $d_1,...,d_\ell$ 唯一.

Proof. (1) 和 (3) 来自 Cartan 整数的定义. 现在说明 (2): 对 $1 \le i \neq j \le \ell$, 由 [推论2.60] 知 $a_{ij} \le 0$. 并且由 Cauchy 不等式的取等条件知

$$a_{ij}a_{ji} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \cdot \frac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = |a_{ij}a_{ji}| < 4,$$

结合 $a_{ij} \le 0$ 迫使 $a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$. 对于 (4), 取 $d_i = (\alpha_i, \alpha_i), 1 \le i \le \ell$ 便得到存在性. 下面说明当选取到的正整数 $d_1, ..., d_\ell$ 整体互素时的唯一性. 如果还有正整数组 $d'_1, d'_2, ..., d'_\ell$ 使得对所有的正整数 $1 \le i, j \le \ell$ 有 $d'_i a_{ij} = d'_j a_{ij}$, 那么对所有的正整数 $1 \le i, j \le \ell$ 有 $d_i/d_j = d'_i/d'_j$, 改写为 $d_i d'_j = d_j d'_i$. 特别地, 得到 d_i 整除 $d_j d'_i$. 固定 i, 由 j 的任意性以及 $d_1, ..., d_\ell$ 整体互素得到 d_i 整除 d'_i. 所以如果进一步 $d'_1, d'_2, ..., d'_\ell$ 也整体互素便有 $d_i = d'_i, \forall 1 \le i \le \ell$, 这就证明了唯一性. □

Remark 2.75. 根据 (4) 的构造, 对 Φ 关于 Δ 的 Cartan 矩阵 $C = (a_{ij})_{\ell \times \ell}$, 总存在整体互素的正整数 $d_1, ..., d_\ell$ 使得 $(d_i a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 是对称正定矩阵. 记 $d'_i = (\alpha_i, \alpha_i)$, 那么 $(d'_i a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 是对称正定的. 记 d 是所有 d'_i 的最大公因数, 命 $d_i = d'_i/d$, 那么 $(d_i a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 作为某个对称正定矩阵的正实数倍依然是对称正定的. 这里再指出 Φ 关于 Δ 的 Cartan 矩阵 C 一定是可逆的: 原因是 C 乘上某个对角线都是正整数的对角阵能够得到对称正定矩阵.

Remark 2.76. 一般地, 如果整数矩阵 $C = (a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 满足 $a_{ii} = 2, \forall 1 \le i \le \ell$; $a_{ij} \le 0, \forall 1 \le i \neq j \le \ell$ 并且 $a_{ij} = 0$ 蕴含 $a_{ji} = 0$, 则称 C 是**广义 Cartan 矩阵**. 广义 Cartan 矩阵 $C = (a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 如果进一步满足存在正实数 $r_1, ..., r_\ell$ 满足 $(r_i a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 是对称矩阵, 则称 C 是**可对称化的**. 如果 $C = (a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 是可对称化的广义 Cartan 矩阵, 那么我们总可选取定义中的 $r_1, ..., r_\ell$ 是正整数: 先设正实数 $r_1, ..., r_\ell$ 满足 $(r_i a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 是对称矩阵, 那么对所有正整数 $1 \le i, j \le \ell$, 有 $r_i a_{ij} = r_j a_{ji}$. 进而 $r_i/r_j \in \mathbb{Q}, 1 \le i, j \le \ell$. 选取正实数 a 满足 ar_1 是正整数, 那么所有的 $ar_i a_{ij}$ 都是正有理数, 因此我们可选取充分大的正整数 d 使得所有的 $dar_i a_{ij}$ 都是正整数. 所以前面关于可对称化的 Cartan 矩阵的定义中也可以把 $r_1, ..., r_\ell$ 修改为正整数. 并且由 (4) 的证明同样可得到对于可对称化的广义 Cartan 矩阵 $(a_{ij})_{\ell \times \ell}$, 存在唯一的整体互素的正整数组 $d_1, ..., d_\ell$ 使得 $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}, \forall 1 \le i, j \le \ell$. 对于广义 Cartan 矩阵, 自然也能够定义对应的 Dynkin 图. 根据 [命题2.74], 由有限维实内积空间的根系产生的 Cartan 矩阵 $(a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 不仅是正定的, 还满足 $a_{ij}a_{ji} \le 4, \forall 1 \le i, j \le \ell$. 可以证明不可分 (即无法关于某个置换矩阵合同于两个非零方阵给出的准对角阵) 的可对称化广义 Cartan 矩阵的对称化是正定的当且仅当它是某个有限维复单 Lie 代数产生的根系给出的 Cartan 矩阵, 见 [Kac90, Proposition 4.9]. 如果 $P = (e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(\ell)})$ 是置换矩阵, 这里 $\sigma \in S_\ell$, 那么可直接计算验证 $A = (a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 关于 P 的合同矩阵 $P^T A P = (a_{\sigma(i),\sigma(j)})_{\ell \times \ell}$, 于是知当 A 是广义 Cartan 矩阵时, $P^T A P$ 也是广义 Cartan 矩阵. 易见 A 可对称化当且仅当 $P^T A P$ 可对称化. 由此可见任何可对称化的广义 Cartan 矩阵都可以合同于有限多个不可分可对称化广义 Cartan 矩阵给出的准对角阵. 设可对称化的广义 Cartan 矩阵 A 可表示为不可分可对称化广义 Cartan 矩阵 $A_1, ..., A_s$ 给出的准对角阵, 那么 A 的对称化正定当且仅当所有 A_j 的对称化也是正定的. 可对称化的 Cartan 矩阵 A 如果其对称化后的矩阵是正定的, 则称 A 是**有限型的**. 如果 $A = (a_{ij})_{\ell \times \ell}$ 的对称化是半正定的且秩为 $\ell - 1$, 称 A 是**仿射型的**. 从 [定理2.65] 和前面指出有限型不可分广义 Cartan 矩阵的根系实现可知, 可对称化的广义 Cartan 矩阵有正定的对称化矩阵当且仅当它是某个根系产生的 Cartan 矩阵. 之后会介绍广义 Cartan 矩阵对应的 Lie 代数, 见 [定理2.150] 后面的讨论.

现在我们进一步讨论根系关于基的 Coxeter 图的基本特性, 尤其是不可约根系场景 (见 [命题2.64]). 根据 [注记2.73], 根系的不可约性对应 Coxeter 图的连通性. 现在我们证明

Lemma 2.77. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, 取定 Φ 的基 $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$. 那么 Φ 关于 Δ 的 Coxeter 图满足图中任何 k 个点, 点之间有边相接的 (无序) 点对不超过 $k-1$ 对. 特别地, 的 Coxeter 图不存在至少由 3 个点构成的环路 (即起点与终点一致的道路).

Proof. 由 Coxeter 图的定义, 图中第 i 个点对应 α_i. 任给 Δ 的 k 元子集 $\{\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_k}\}$(不妨设 $k\geq 2$), 若能证明

$$\sum_{1\leq j<l\leq k}\frac{2(\alpha_{i_j},\alpha_{i_l})}{|\alpha_{i_j}||\alpha_{i_l}|}\leq k-1$$

那么由 $(\alpha,\beta)\leq 0,\forall\alpha\neq\beta\in\Delta$(回忆 [推论2.60]) 以及每个非零的 $2(\alpha_{i_j},\alpha_{i_l})/|\alpha_{i_j}||\alpha_{i_l}|$ 绝对值至少为 1(见 [命题2.74(2)]) 可知上面的不等式左边非零项不超过 $k-1$ 项, 进而得到引理结论. 现在证明前面的不等式, 由

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_{i_j}}{|\alpha_{i_j}|}\neq 0\Rightarrow\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_{i_j}}{|\alpha_{i_j}|},\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_{i_j}}{|\alpha_{i_j}|}\right)=k+\sum_{1\leq j<l\leq k}\frac{2(\alpha_{i_j},\alpha_{i_l})}{|\alpha_{i_j}||\alpha_{i_l}|}>0$$

立即得到之前断言的不等式, 这就得到 Coxeter 图中任何 k 个点间有边相接的点对不超过 $k-1$. 假设 Coxeter 图中存在至少由 $k\geq 3$ 个点构成的环路, 那么该环路至少有 k 个有边相连的点对, 矛盾. □

Lemma 2.78. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, 取定 Φ 的基 Δ. 那么 Φ 关于 Δ 的 Coxeter 图满足: 固定图中一个顶点, 以该点为端点的边至多三条.

Proof. 取定 $\alpha\in\Delta$, 并设 $\alpha_1,...,\alpha_k$ 是 Δ 中所有与 α 有边相接的点. 由 Coxeter 图的定义, 只需证明

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{4(\alpha,\alpha_i)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha,\alpha)}<4.$$

根据 [引理2.77], 对 $1\leq i\neq j\leq k$, α_i 与 α_j 没有边相接 (否则产生环路), 故 $(\alpha_i,\alpha_j)=0,\forall 1\leq i\neq j\leq k$. 命

$$\alpha_0=\alpha-\sum_{i=1}^{k}\frac{(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i\neq 0,$$

如果设 $c_0,c_1,...,c_k$ 满足 $\alpha=c_0\alpha_0+c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k$, 那么两边与 α_0 作内积便知 $c_0(\alpha_0,\alpha_0)=(\alpha,\alpha_0)$, 于是 $c_0=(\alpha,\alpha_0)/(\alpha_0,\alpha_0)$. 由于 α 和每个 α_i 相连, 所以 $(\alpha,\alpha_i)\neq 0$, 于是由每个 $c_i=(\alpha,\alpha_i)/(\alpha_i,\alpha_i)$ 以及 α 无法由 $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ 来 $\mathbb{R}$-线性表出知 $c_0\neq 0$. 特别地, 现在我们有

$$(\alpha,\alpha_0)\neq 0,\alpha=\sum_{i=0}^{k}\frac{(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i.$$

现在我们有估计

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{4(\alpha,\alpha_i)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha,\alpha)}<\sum_{i=0}^{k}\frac{4(\alpha,\alpha_i)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha,\alpha)}=\frac{4}{(\alpha,\alpha)}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{(\alpha,\alpha_i)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)}\right)=\frac{4}{(\alpha,\alpha)}\cdot(\alpha,\alpha)=4.$$

□

Corollary 2.79. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, 取定 Φ 的基 Δ. 那么 Φ 关于 Δ 的 Cartan 矩阵和 Dynkin 图互相决定.

Proof. 根据 Dynkin 图的定义便知在给定 Δ 的前提下, Cartan 矩阵决定了 Dynkin 图. 反之, 设 $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_\ell\}$, 相应 Cartan 矩阵设为 $C = (a_{ij})_{\ell\times\ell}$, 那么根据 [引理2.78] 可知对 $1 \le i \ne j \le \ell$ 有 $a_{ij}a_{ji} \in \{0,1,2,3\}$. 当 $a_{ij}a_{ji} = 0$ 时, $a_{ij} = a_{ji} = 0$. 当 $a_{ij}a_{ji} = 1$ 时, 结合 [命题2.74(2)] 可知 $a_{ij} = a_{ji} = -1$. 当 $a_{ij}a_{ji} = 2$ 时, a_{ij} 和 a_{ji} 其中一个为 -1, 另一个为 -2, 由 Dynkin 图的箭头可知 $|a_{ij}|$ 与 $|a_{ji}|$ 的大小关系, 进而确定 a_{ij} 和 a_{ji}. 类似地, 当 $a_{ij}a_{ji} = 3$ 时, a_{ij} 和 a_{ji} 其中一个为 -1, 另一个为 -3, 再结合 Dynkin 图的箭头便知. □

设 Φ 是非零有限维实内积空间中的根系, 取定 Φ 的基 Δ, 那么根据 [引理2.77], Φ 关于 Δ 的 Coxeter 图不含至少 3 个点的环路, 并且更进一步, 图中任给 k 个点, 存在边相接的 (无序) 点对不超过 $k-1$ 对. 在 [引理2.78] 中我们看到 Coxeter 图中每个点至多是 3 条边的端点. 基于这些观察不难看到对**连通的 Coxeter 图**有:

- 如果 Coxeter 图中有两个顶点间有 3 条边, 那么该图的顶点集仅由这两点构成.

事实上, 还能够进一步说明连通 Coxeter 图中有两个顶点间有 2 条边, 那么其余顶点间至多 1 条边; 如果存在“三岔点”, 那么这是该图中唯一的“三岔点”. 并且连通 Coxeter 图不可能同时出现包含“三岔点”且有两个顶点间有 2 条边的情况. 而这些观察的证明都依赖于 [引理2.77] 和 [引理2.78] 的加强.

依然设 Φ 是非零有限维实内积空间中的根系, 取定 Φ 的基 Δ, 并且 $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subseteq \Delta (k \ge 1)$ 满足每个 α_i 仅与 α_{i+1} 有边相接, 且 α_i 和 α_{i+1} 之间恰好只有 1 条边, 即 Φ 关于 Δ 的 Coxeter 图有子图:

$$\alpha_1 \text{ —— } \alpha_2 \text{ —— } \cdots \text{ —— } \alpha_{k-1} \text{ —— } \alpha_k$$

根据 [引理2.77] 和 [引理2.78], 该子图外任何顶点至多与子图内一个顶点有边相接; 如果子图外有两个顶点与子图中的点相连, 那么子图外的这两个点间不存在边相连. 命 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, 并作 $\Delta' = \Delta \cup \{\alpha\} - \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$. 我们类似 Coxeter 图的定义赋予 Δ' 对应的图 (以下记作 $\mathscr{G}$): $\mathscr{G}$ 的顶点集定义为 Δ', 对任何 $\alpha, \beta \in \Delta'$, 这两个顶点间有 $4(\alpha,\beta)^2/(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$ 条边相连. 对每个 $\beta \in \Delta - \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$, 如果 β 与某个 $\alpha_i (1 \le i \le k)$ 间有边相接 (之前已经指出这样的正整数 i 一旦存在必唯一), 那么在 $\mathscr{G}$ 中, β 和 α 间也有边相连, 并且相连的边数

$$4\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} = 4\frac{(\alpha_i,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \cdot \frac{(\beta,\alpha_i)}{(\beta,\beta)} \le 4\frac{(\alpha_i,\beta)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\beta,\beta)},$$

即不超过 Φ 关于 Δ 的 Coxeter 图中 β 和 α_i 间边数. 特别地, 由 β 和 α_i 在 Coxeter 图中两点间的边数是 1 知在 $\mathscr{G}$ 中, α 和 β 见的边数也是 1. 因此 $\mathscr{G}$ 就是将 Φ 关于 Δ 的 Coxeter 图将由 $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ 给出的子图视作单点 α 并保持与其他 Δ 中顶点的连边关系得到的图. 根据 α 的构造, 依然有 Δ' 是 $\mathbb{R}$-线性无关集并且 $(\lambda,\gamma) \le 0, \forall \lambda, \gamma \in \Delta'$, 所以重复 [引理2.77] 的证明过程便知对 Δ' 中任何 k 个点, 点之间有边相接的 (无序) 点对不超过 $k-1$ 对. 进而再重复 [引理2.78] 的讨论便知 Δ' 中任何顶点所在的边不超过三条. 于是利用 Δ' 具有的类似特性便知:

- 如果连通 Coxeter 图中有两个顶点间有 2 条边, 那么该图的其余顶点间至多 1 条边.
- 如果连通 Coxeter 图中存在“三岔点”, 那么这是该图中仅有的“三岔点”.
- 连通 Coxeter 图中不可能同时包含出现“三岔点”并且存在两个顶点间有 2 条边的情况.

由于不可约根系对应的 Coxeter 图是连通的, 我们把之前得到的连通 Coxeter 图的特性总结为:

Proposition 2.80. 非零有限维内积空间中的不可约根系关于基的 Dynkin 图满足:
(1) 如果该图中有两个顶点间有 3 条边, 那么该图的顶点集仅由这两点构成.
(2) 如果该图中有两个顶点间有 2 条边, 那么该图的其余顶点间至多 1 条边.
(3) 如果该图中存在“三岔点”, 那么这是该图中仅有的“三岔点”.
(4) 该图 r 图中不可能同时包含出现“三岔点”并且存在两个顶点间有 2 条边的情况.

下面我们来应用 [命题2.80] 来证明 [定理2.82]. 根据 [命题2.80], 如果连通 Coxeter 图存在两个顶点间有三条边, 那么这就是整个 Coxeter 图. 另一方面, 该图的两个顶点对应的根长度一定不同: 若不然, 设 $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, 并满足 $(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2)$, 那么这两个顶点之间的边数一定是完全平方数, 矛盾. 这证明了

Proposition 2.81. 如果非零有限维内积空间中的不可约根系关于基的 Dynkin 图存在两个顶点间有三条边, 那么该图形如 , 记该图为 G_2. 若不可约根系的 Dynkin 图存在两个顶点至少两条边, 那么对应根的长度不同.

接下来只需考虑不存在顶点间有 3 条边的连通 Dynkin 图, 现在设不可约根系关于基 $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_\ell\}$ 的 (连通)Dynkin 图存在两个顶点间有 2 条边, 那么根据 [命题2.80(2)], 相应 Dynkin 图可设为

$$\alpha_1 \text{ —— } \alpha_2 \text{ —— } \cdots \text{ —— } \alpha_{p-1} \text{ —— } \alpha_p \Longrightarrow \beta_q \text{ —— } \beta_{q-1} \text{ —— } \cdots \text{ —— } \beta_1$$

这里假设了 α_p 对应的根比 β_q 对应的根长, $p, q \geq 1$. 命 $\alpha = \sum_{i=1}^{p} i\alpha_i/|\alpha_i|, \beta = \sum_{j=1}^{q} j\beta_j/|\beta_j|$, 因为 α, β 是 $\mathbb{R}$-线性无关的, 所以根据 Cauchy 不等式取等条件, 有 $(\alpha, \beta)^2 < (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$. 下面我们将说明 $(p-1)(q-1) < 2$.

首先根据 Dynkin 图的假设, 对每个正整数 $1 \leq i \leq p-1$, α_i 和 α_{i+1} 对应的顶点间恰有一条边, 所以

$$4\frac{(\alpha_i, \alpha_{i+1})^2}{(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_{i+1}, \alpha_{i+1})} = 1,$$

从而 $2(\alpha_i/|\alpha_i|, \alpha_{i+1}/|\alpha_{i+1}|) = \pm 1$, 结合 [推论2.60] 得到 $(\alpha_i/|\alpha_i|, \alpha_{i+1}/|\alpha_{i+1}|) = -1/2$. 类似地, 有

$$(\beta_j/|\beta_j|, \beta_{j+1}/|\beta_{j+1}|) = -1/2, \forall 1 \leq j \leq q-1.$$

如果 $1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq q-1$, 明显有 $(\alpha_i, \beta_j) = 0$. 再由 α_p 和 β_q 对应的顶点间恰有 2 条边得到

$$(\alpha_p/|\alpha_p|, \beta_q/|\beta_q|) = -\sqrt{2}/2.$$

现在 $(\alpha, \beta)^2 = p^2q^2/2$. $(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=2}^{p} i(i-1) = p(p+1)/2$, 类似地有 $(\beta, \beta) = q(q+1)/2$. 所以

$$(\alpha, \beta)^2 < (\alpha, \alpha)(\beta, \beta) \Rightarrow \frac{p^2q^2}{2} < \frac{pq(p+1)(q+1)}{4} \Rightarrow (p-1)(q-1) < 2.$$

结合 $p, q \geq 1$, 可分为下述三种情况:
(1) $p = 1, q \geq 1$, 这时记对应的 Dynkin 图为 $C_\ell(\ell = p + q \geq 2)$.
(2) $q = 1, p \geq 1$, 这时记对应的 Dynkin 图为 $B_\ell(\ell \geq 2)$.
(3) $p = q = 2$, 这时记对应的 Dynkin 图为 $F_4(\ell = 4)$.

根据前面的记号, 不难看到 C_2 和 B_2 本质上是同一图 . 因此下面我们只需再讨论 (连通)Dynkin 图中任意两个顶点至多 1 条边的情形. 在该假设下, 如果该 Dynkin 图进一步存在“三岔点”, 根据 [命题2.80(3)],

此时 Dynkin 图中的“三岔点”唯一, 于是可将考虑的 Dynkin 图设为

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \beta_1 & & & & & & \\
 & & & & & & | & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & | & & & & & & \\
 & & & & & & \beta_q & & & & & & \\
 & & & & & & | & & & & & & \\
\alpha_1 & — & \cdots & — & \alpha_p & — & \delta & — & \gamma_r & — & \cdots & — & \gamma_1
\end{array}
$$

其中 $p,q,r \geq 1(\ell = p+q+r+1)$. 命

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} i\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}, \beta = \sum_{j=1}^{q} j\frac{\beta_j}{|\beta_j|}, \gamma = \sum_{k=1}^{r} k\frac{\gamma_k}{|\gamma_k|}.$$

那么 $(\alpha,\beta) = (\beta,\gamma) = (\alpha,\gamma) = 0$. 下面我们将类似 [引理2.78] 的证明过程先来说明

$$\frac{(\delta,\alpha)^2}{(\delta,\delta)(\alpha,\alpha)} + \frac{(\delta,\beta)^2}{(\delta,\delta)(\beta,\beta)} + \frac{(\delta,\gamma)^2}{(\delta,\delta)(\gamma,\gamma)} < 1,$$

再应用此不等式证明 $1/(p+1) + 1/(q+1) + 1/(r+1) > 1$ 以限制 p,q,r 的可能取值. 命

$$\delta_0 = \delta - \frac{(\delta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha - \frac{(\delta,\beta)}{(\beta,\alpha)}\beta - \frac{(\delta,\gamma)}{(\gamma,\gamma)}\gamma,$$

那么由 $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ 的 $\mathbb{R}$-线性无关性易知 $\delta \neq 0$. 再利用 α,β,γ 间 (关于 $(-,-)$ 的) 正交性可知 $\alpha,\beta,\gamma,\delta_0$ 两两正交. 由此不难验证 $(\delta,\delta_0) \neq 0$ 以及

$$\delta = \frac{(\delta,\delta_0)}{(\delta_0,\delta_0)}\delta_0 + \frac{(\delta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha + \frac{(\delta,\beta)}{(\beta,\alpha)}\beta + \frac{(\delta,\gamma)}{(\gamma,\gamma)}\gamma.$$

于是

$$
\begin{aligned}
\frac{(\delta,\alpha)^2}{(\delta,\delta)(\alpha,\alpha)} + \frac{(\delta,\beta)^2}{(\delta,\delta)(\beta,\beta)} + \frac{(\delta,\gamma)^2}{(\delta,\delta)(\gamma,\gamma)} &< \frac{(\delta,\delta_0)^2}{(\delta,\delta)(\delta_0,\delta_0)} + \frac{(\delta,\alpha)^2}{(\delta,\delta)(\alpha,\alpha)} + \frac{(\delta,\beta)^2}{(\delta,\delta)(\beta,\beta)} + \frac{(\delta,\gamma)^2}{(\delta,\delta)(\gamma,\gamma)} \\
&= \frac{1}{(\delta,\delta)}\left(\frac{(\delta,\delta_0)^2}{(\delta_0,\delta_0)} + \frac{(\delta,\alpha)^2}{(\alpha,\alpha)} + \frac{(\delta,\beta)^2}{(\beta,\beta)} + \frac{(\delta,\gamma)^2}{(\gamma,\gamma)}\right) \\
&= \frac{1}{(\delta,\delta)} \cdot (\delta,\delta) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

下面我们来计算 $(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma),(\delta,\alpha),(\delta,\beta)$ 以及 (δ,γ). 根据现在 Dynkin 图的假设,

$$(\alpha_i/|\alpha_i|, \alpha_{i+1}/|\alpha_{i+1}|) = -1/2, \forall 1 \leq i \leq p-1.$$

$$(\beta_j/|\beta_j|, \beta_{j+1}/|\beta_{j+1}|) = -1/2, \forall 1 \leq j \leq q-1.$$

$$(\gamma_k/|\gamma_k|, \gamma_{k+1}/|\gamma_{k+1}|) = -1/2, \forall 1 \leq k \leq r-1.$$

$$(\alpha_p/|\alpha_p|, \delta/|\delta|) = (\beta_q/|\beta_q|, \delta/|\delta|) = (\gamma_r/|\gamma_r|, \delta/|\delta|) = -1/2.$$

于是由 α, β, γ 的定义, 直接计算得到 $(\alpha, \alpha) = p(p+1)/2, (\beta, \beta) = q(q+1)/2, (\gamma, \gamma) = r(r+1)/2$, 并有

$$(\delta, \alpha)^2/(\delta, \delta) = p^2/4, (\delta, \beta)^2/(\delta, \delta) = q^2/4, (\delta, \gamma)^2/(\delta, \delta) = r^2/4.$$

由此我们得到不等式 $p/2(p+1) + q/2(q+1) + r/2(r+1) < 1$. 将该不等式可改写为

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(p+1)}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(q+1)}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(r+1)}\right) < 1.$$

由此得到 $1/(p+1) + 1/(q+1) + 1/(r+1) > 1$. 结合 $p, q, r \geq 1$(不妨设 $p \geq q \geq r \geq 1$), 可分为下述 4 种情况:
(1) 当 $r = 1, q = 1, p \geq 1$ 时, 记相应 Dynkin 图为 $D_{p+3}(\ell = p+3 \geq 4)$.
(2) 当 $r = 1, q = 2, p = 2$ 时, 记相应 Dynkin 图为 E_6.
(3) 当 $r = 1, q = 2, p = 3$ 时, 记相应 Dynkin 图为 E_7.
(4) 当 $r = 1, q = 2, p = 4$ 时, 记相应 Dynkin 图为 E_8.

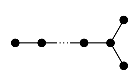
如果连通 Dynkin 图既不存在某两个顶点间存在至少条边, 也不存在“三岔点”, 我们记相应 Dynkin 图为 A_ℓ(回忆 ℓ 是根系的基的元素数目). 总结一下, 我们证明了不可约根系的 Dynkin 图分类的第一步:

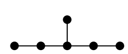
Theorem 2.82. 非零有限维内积空间中的不可约根系关于基 (有 ℓ 个元素) 的 Dynkin 图是下列图之一:

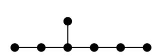
$A_\ell(\ell \geq 1)$:

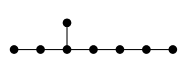
$B_\ell(\ell \geq 2)$:

$C_\ell(\ell \geq 3)$:

$D_\ell(\ell \geq 4)$: 

E_6 : 

E_7 : 

E_8 : 

F_4 :

G_2 :

Remark 2.83. 注意到上述不可约根系的基中如果存在长度不同的根, 那么根的长度只有两种.

一个基本问题是对 [定理2.82] 中出现的所有图是否总是某个根系关于基的 Dynkin 图? 下面我们直接对 [定理2.82] 中出现的所有图构造某个实内积空间中的根系使得每个图能由某个根系导出, 进而给上述问题一个肯定的回答. 先固定些记号: 对正整数 n, $\mathbb{R}^n$ 上固定标准内积 $(-,-)$, 并且用 $e_1, ..., e_n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中标准单位列向量. 记 $\mathcal{I}$ 是由 $e_1, ..., e_n$ 的所有整数线性组合构成的集合.

(1)$A_\ell(\ell \geq 1)$ 的情形: 在 $\mathbb{R}^{\ell+1}$ 中考虑 $\varepsilon = e_1 + \cdots + e_{\ell+1}$, 命 E 是 $\mathbb{R}\varepsilon$ 的正交补空间, 则 $\dim_{\mathbb{R}} E = \ell$. 考虑 $\Phi = \{\alpha \in E \cap \mathcal{I} | (\alpha, \alpha) = 2\}$, 那么容易计算验证 $\Phi = \{e_i - e_j | 1 \leq i \neq j \leq \ell + 1\}$ 以及 E 作为 $\mathbb{R}$-线性空间有基

$$\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, ..., e_\ell - e_{\ell+1}\} \subseteq \Phi,$$

不难看出 Φ 中元素总可表示为 Δ 中一些元素的非负整数线性组合或非正整数线性组合, 因此一旦能够证明 Φ 是 E 中的根系, 便知 Δ 是 Φ 作为根系的基. 现在我们证明 Φ 是 E 中的根系 (回忆 [定义2.47]). 之前已经指出 Φ 满足 (R1), 不难看出 Φ 也满足 (R2). 因为任何 $\alpha \in \Phi$ 满足 $(\alpha, \alpha) = 2$, 所以 (R4) 也明显成立. 最后说明 Φ 满足 (R3). 因为任何 $\alpha \in \Phi$ 作为非零向量决定的镜面反射 σ_α 是可逆的, 并且 Φ 是有限集, 所以我们只需验证 $\sigma_\alpha(\Phi) \subseteq \Phi, \forall \alpha \in \Phi$ 即可. 再注意到 $\sigma_\alpha = \sigma_{-\alpha}, \Phi = -\Phi$, 我们只需对 $[1, \ell+1]$ 中所有满足 $i < j, k < s$ 的正整数, 验证 $e_i - e_j$ 决定的镜面反射作用 $e_k - e_s$ 依然在 Φ 中即可, 对 i, j, k, s 之间所有的取等情况计算验证便知 Φ 是根系. 现在我们已经知道 Δ 是 Φ 的基, 对每个 $1 \leq i \leq \ell$, 记 $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$, 那么 Φ 关于 Δ 的 Dynkin 图就是

$$\alpha_1 \;\text{——}\; \alpha_2 \;\text{——}\; \cdots \;\text{——}\; \alpha_\ell$$

因此我们构造了对应 A_ℓ 的根系 Φ 与基 Δ. Dynkin 图 A_ℓ 对应的 Cartan 矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)$B_\ell(\ell \geq 2)$ 的情形: 考虑 $E = \mathbb{R}^\ell$, 命 $\Phi = \{\alpha \in \mathcal{I} | (\alpha, \alpha) = 1, 2\}$, 那么可直接计算知 $\Phi = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j | 1 \leq i \neq j \leq \ell\}$. 不难看出 Φ 的子集 $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, ..., e_{\ell-1} - e_\ell, e_\ell\}$ 是 E 的 $\mathbb{R}$-基, 并且 Φ 中元素都可以表示为 Δ 中元素的非负整数线性组合或非正整数线性组合, 所以如果能够说明 Φ 是 E 中的根系, 那么记 $\alpha_1 = e_1 - e_2, ..., \alpha_{\ell-1} = e_{\ell-1} - e_\ell, \alpha_\ell = e_\ell$, 可直接验证对应的 Dynkin 图是 (这里顶点从左到右依次对应 $\alpha_1, ..., \alpha_\ell$). 于是我们可直接计算出相应 Cartan 矩阵:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ & & \ddots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3)$C_\ell(\ell \geq 3)$ 的情形: 在 $E = \mathbb{R}^\ell$ 中命 $\Phi = \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j | 1 \leq i \neq j \leq \ell\}$, 可计算验证 Φ 是 E 中根系并且 Φ 有基 $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, ..., e_{\ell-1} - e_\ell, 2e_\ell\}$. 记 $\alpha_1 = e_1 - e_2, ..., \alpha_{\ell-1} = e_{\ell-1} - e_\ell, \alpha_\ell = 2e_\ell$. 设对应的 Dynkin 图

顶点从左到右对应的根是 $\alpha_1, ..., \alpha_\ell$, 那么相应 Dynkin 图就是 , 它对应的 Cartan 矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \cdots & & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4)$D_\ell(\ell \geq 4)$ 的情形: 在 $E = \mathbb{R}^\ell$ 中考虑 $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j | 1 \leq i \neq j \leq \ell\}$, 可直接验证 Φ 是根系并且有基 $\Delta = \{e_1 - e_2, ..., e_{\ell-1} - e_\ell, e_{\ell-1} + e_\ell\}$, 记 $\alpha_1 = e_1 - e_2, ..., \alpha_{\ell-1} = e_{\ell-1} - e_\ell, \alpha_\ell = e_{\ell-1} + e_\ell$, 并设对应的 Dynkin 图水平位置顶点从左到右对应的根是 $\alpha_1, ..., \alpha_{\ell-2}$, 右上角对应 $\alpha_{\ell-1}$, 右下角对应 α_ℓ, 则 Φ 关于 Δ 的 Dynkin 图就是 D_ℓ, 并且对应的 Cartan 矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5)E_6, E_7, E_8 的情形: 这里仅列出 E_8 的根系与相应基的构造, 关于 $E6, E_7$ 的显示构造可参见 [FH91, p.332-333]. 命 $E = \mathbb{R}^8, S_1 = \{\pm e_i \pm e_j | 1 \leq i \neq j \leq 8\}$ 以及 $S_2 = \{\sum\limits_{i=1}^{8}(-1)^{\varepsilon_i} e_i | \text{这里} \varepsilon_i = 0, 1 \text{且满足} \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_8 \text{是偶数}\}$. 取 $\Phi = S_1 \cup S_2, \Delta = \{e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_3 - e_2, ..., e_7 - e_6, (e_1 + e_8 - e_2 - \cdots - e_7)/2\}$, 命 $\alpha_1 = (e_1 + e_8 - e_2 - \cdots - e_7)/2, \alpha_3 = e_2 - e_1, \alpha_2 = e_1 + e_2$. 对 $4 \leq i \leq 8$, 命 $\alpha_i = e_{i-1} - e_{i-2}$, 则 Φ 关于 Δ 的 Dynkin 图就是 E_8 :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & \alpha_2 & & & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & & & \\ \alpha_1 & \text{——} & \alpha_3 & \text{——} & \alpha_4 & \text{——} & \alpha_5 & \text{——} & \cdots & \text{——} & \alpha_8 \end{array}$$

相应的 Cartan 矩阵为 (E_6 和 E_7 的 Cartan 矩阵分别为下述矩阵左上角的 6 阶子矩阵和 7 阶子矩阵):

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(6)F_4 的情形: 现在设 $E=\mathbb{R}^4, \Phi=\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j, \pm(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)/2 | 1 \leq i \neq j \leq 4\}$, 则 Φ 是 E 中根系并且有基 $\Delta=\{e_2-e_3, e_3-e_4, e_4, (e_1-e_2-e_3-e_4)/2\}$. 命 $\alpha_1=e_2-e_3, \alpha_2=e_3-e_4, \alpha_3=e_4, \alpha_4=(e_1-e_2-e_3-e_4)/2$, 那么得到的 Dynkin 图就是 F_4. 相应的 Cartan 矩阵是

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(7)G_2 的情形: 在 $\mathbb{R}^3$ 设 E 是 $e_1+e_2+e_3$ 的正交补空间, 定义 $\Phi=\{\pm(e_1-e_2), \pm(e_2-e_3), \pm(e_1-e_3), \pm(2e_1-e_2-e_3), \pm(2e_2-e_1-e_3), \pm(2e_3-e_1-e_2)\}$, 那么 Φ 是 E 中的根系并且 Φ 有基 $\Delta=\{e_1-e_2, -2e_1+e_2+e_3\}$. 命 $\alpha_1=-2e_1+e_2+e_3, \alpha_2=e_1-e_2$ 便得到 G_2. 相应 Cartan 矩阵是

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

至此我们对 [定理2.82] 结论中的图都给出了某个根系与基使之导出的 Dynkin 图就是给定的图. 所以

Theorem 2.84. 非零实内积空间中的不可约根系关于基的 Dynkin 图只可能属于 $A_\ell(\ell \geq 1), B_\ell(\ell \geq 2), C_\ell(\ell \geq 3), D_\ell(\ell \geq 4)$ 以及 E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. 并且这里每个图都由某个不可约根系导出.

根据前面对不可约根系的 Dynkin 图相应的 Cartan 矩阵的讨论, 我们能够对 [命题2.74(4)] 说更多:

Proposition 2.85. 设 Φ 是非零实内积空间中的不可约根系, 取定 Φ 的基 $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$, 并记 $C=(a_{ij})_{\ell\times\ell}$ 是 Φ 关于 Δ 的 Cartan 矩阵. 那么存在正整数 $d_1,...,d_\ell \in \{1,2,3\}$ 使得 $(d_i a_{ij})_{\ell\times\ell}$ 是整数对称阵.

Remark 2.86. 由 [命题2.74(4)], 能选取到 $d_1,...,d_\ell \in \{1,2,3\}$ 整体互素, 则使结论成立的 $d_1,...,d_\ell$ 唯一.

一个素数 p 被称为不可约根系 Φ 的**好素数**, 如果 p 和 Φ 的最高根关于单根表示的系数都互素并且和 [命题2.85] 下的整体互素正整数 d_j 都互素. 否则称 p 是不可约根系 Φ 的**坏素数**. 不可约根系 B_n, C_n, D_n 的坏素数只有 2; E_6, E_7, F_4, G_2 的坏素数有 $2,3$; E_8 的坏素数有 $2,3,5$.

2.7 Weyl 群

本节我们介绍根系的 Weyl 群的概念, 并应用 Weyl 群说明根系的 Dynkin 图和根系的基的选取无关.

Definition 2.87. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 的根系, 记 $\alpha \in \Phi$ 对应的 E 上镜面反射为 σ_α. 称由 $\{\sigma_\alpha | \alpha \in \Phi\}$ 所生成的 E 的正交群的子群为 Φ 的 **Weyl 群**, 记作 $\mathscr{W}_\Phi$(常简写为 $\mathscr{W}$).

Remark 2.88. 根据根系定义中的 (R3), Φ 的 Weyl 群中的每个元素 $w \in \mathscr{W}$ 满足 $w(\Phi)=\Phi$. 于是结合 Φ 包含 E 的 $\mathbb{R}$-基便知 $\mathscr{W}$ 可嵌入 Φ 作为集合的置换群. 因此 $\mathscr{W}$ 是由 E 上正交变换构成的有限群. 现在应用 [注记2.72] 可知如果 Δ 是 Φ 的基, 那么对任何 $w \in \mathscr{W}$ 有 $w(\Delta)$ 也是 Φ 的基. 事实上, 我们会进一步看到对任何 Φ 的基 Δ_1, Δ_2, 总存在 $w \in \mathscr{W}$ 使得 $w(\Delta_1)=\Delta_2$, 于是由 [注记2.72] 知 Φ 关于 Δ 对应的 Dynkin 图与 Δ 的选取无关!

Remark 2.89. 设 Φ 是 E 中的根系, 有 Weyl 群 W, $w \in W$. 如果 E 有真子空间 U 满足 w 固定 U 中每个向量, 那么 U 的正交补 $U^{\perp}$ 关于 w 作用稳定: 只要证任何 $t \in U^{\perp}$ 有 $(w(t), U) = 0$. 任取 $u \in U$, 有 $(w(t), u) = (w(t), w(w^{-1}(u)))$, 因为 $w(u) = u$, 所以前式等于 $(t, w^{-1}(u)) = (t, u) = 0$.

Remark 2.90. 设根系 Φ 有 Weyl 群 $\mathscr{W}$, 记 Φ^+, Φ^- 分别是 Φ 关于基 Δ 的正根集和负根集. 我们说明如果 $w \in \mathscr{W}$ 满足 $w(\Phi^+) = \Phi^-$, 那么 $w(\Delta) = -\Delta$: 由条件, 易验证

$$\begin{aligned} w(\{\alpha \in \Phi^+ \mid \text{不存在 } \beta_1, \beta_2 \in \Phi^+ \text{使得 } \alpha = \beta_1 + \beta_2\}) =& \{\alpha \in \Phi^- \mid \text{不存在 } \beta_1, \beta_2 \in \Phi^- \text{使得 } \alpha = \beta_1 + \beta_2\} \\ =& -\{\alpha \in \Phi^+ \mid \text{不存在 } \beta_1, \beta_2 \in \Phi^+ \text{使得 } \alpha = \beta_1 + \beta_2\}. \end{aligned}$$

现在应用 [命题2.59] 得到 $w(\Delta) = -\Delta$. 同样的讨论可知 $w \in \mathscr{W}$ 满足 $w(\Phi^+) = \Phi^+ \Leftrightarrow w(\Delta) = \Delta$.

设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E, (-,-))$ 的根系, $\alpha \in \Phi$ 对应 E 上镜面反射 σ_α 诱导超平面:

$$P_\alpha = \{x \in E | \sigma_\alpha(x) = x\} = \{x \in E | (\alpha, x) = 0\}.$$

之前已经指出由 Φ 是有限集以及 E 是无限域上有限维线性空间可得

$$E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha \neq \varnothing,$$

其中的元素被称为正则元. 因为 E 上的内积使 E 自然成为度量空间, 故 E 可赋予相应度量拓扑成为拓扑空间. 我们把 $E - \cup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ 的连通分支称为 Φ 的 **Weyl 房**. 每个正则元属于唯一的 Weyl 房. 若记 $\Phi = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$, 则

$$E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \Phi} (E - P_\alpha) = (E - P_{\alpha_1}) \cap (E - P_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap (E - P_{\alpha_m}).$$

对每个 $\alpha \in \Phi$, 如果记 $P_\alpha^+ = \{x \in E | (\alpha, x) > 0\}, P_\alpha^- = \{x \in E | (\alpha, x) < 0\}$, 那么 $E - P_\alpha = P_\alpha^+ \cup P_\alpha^-$, 即 $E - P_\alpha$ 可经 α 分为“上半平面” P_α^+ 与“下半平面” P_α^-. 注意这里 P_α^+ 和 P_α^- 都是 E 的凸开子集. 对 $\alpha \in \Phi$, 记 $\mathscr{H}_\alpha = \{P_\alpha^+, P_\alpha^-\}$, 从每个 $\mathscr{H}_\alpha$ 中选择一个“半平面”再关于 $\alpha \in \Phi$ 取交, 只要非空 (易见是道路连通的), 便得到一个 Weyl 房. 易见每个 Weyl 房都是一些“半平面”之交, 即对每个 $\alpha \in \Phi$, 存在 $X_\alpha \in \mathscr{H}_\alpha$ 使得该 Weyl 房能够表示为 $\cap_{\alpha \in \Phi} X_\alpha$. 因此 Φ 的每个 Weyl 房都是 E 的凸开子集, 并且由 Φ 给出的 Weyl 房只有有限个. 下面说明 Φ 的 Weyl 房与 (Φ 作为根系的) 基的对应关系.

Lemma 2.91. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E, (-,-))$ 的根系, 对 Φ 的每个 Weyl 房 $\mathfrak{C}$, 任取 $\gamma \in \mathfrak{C}$, 根据 [命题2.56], γ 作为正则元给出 Φ 的基 $\Delta(\gamma)$. 那么这时 $\Delta(\gamma)$ 与 $\gamma \in \mathfrak{C}$ 的选取无关, 并且若记 $\Delta(\gamma)$ 为 $\Delta(\mathfrak{C})$, 则 $\{\Phi\text{的 Weyl 房}\} \to \{\Phi\text{作为根系的基}\}, \mathfrak{C} \mapsto \Delta(\mathfrak{C})$ 是双射. 之后把基 Δ 对应的 Weyl 房记作 $\mathfrak{C}(\Delta)$.

Proof. 首先我们说明 $\Delta(\gamma)$ 与 $\gamma \in \mathfrak{C}$ 的选取无关来得到映射 $\{\Phi\text{的 Weyl 房}\} \to \{\Phi\text{作为根系的基}\}, \mathfrak{C} \mapsto \Delta(\mathfrak{C})$ 是定义合理的. 对正则元 γ, 回忆 $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi | (\gamma, \alpha) > 0\}$. 现在任取 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{C}$, 并取定 $\alpha \in \Phi^+(\gamma_1)$, 这时 $(\gamma_2, \alpha) > 0$. 假设 $(\gamma_2, \alpha) < 0$, 考虑 E 中以 γ_1 和 γ_2 为端点的线段, 这是 $\mathfrak{C}$ 的子集. 由连续函数介值定理知 γ_1 和 γ_2 的连线段中存在 γ_3 使得 $(\gamma_3, \alpha) = 0$, 这和 $\gamma_3 \in \mathfrak{C}$ 矛盾. 上面的讨论说明 $\Phi^+(\gamma_1) \subseteq \Phi^+(\gamma_2)$. 对称地, 得到 $\Phi^+(\gamma_2) \subseteq \Phi^+(\gamma_1)$. 进而 $\Phi^+(\gamma_1) = \Phi^+(\gamma_2)$ 中的不可分解根也相同, 即 $\Delta(\gamma_1) = \Delta(\gamma_2)$. 根据 [命题2.58], Φ 的任何基都是某个正则元 γ 经 $\Delta(\gamma)$ 给出, 所以 $\{\Phi\text{的 Weyl 房}\} \to \{\Phi\text{作为根系的基}\}, \mathfrak{C} \mapsto \Delta(\mathfrak{C})$ 是满射. 现在设 Weyl 房 $\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}_2$, 任取 $\gamma_1 \in \mathfrak{C}_1, \gamma_2 \in \mathfrak{C}_2$, 那么存在 $\alpha \in \Phi$ 使得 $(\gamma_1, \alpha)(\gamma_2, \alpha) < 0$. 事实上, 总能够选取到

$\alpha\in\Phi$ 使得 α 是不可分的: 不妨设 $(\gamma_1,\alpha)>0$ 且 $(\gamma_2,\alpha)<0$, 如果 α 可分解, 那么存在 $\alpha_1,\alpha_2\in\Phi^+(\gamma_1)$ 使得 $(\gamma_1,\alpha)>(\gamma_1,\alpha_1),(\gamma_1,\alpha_2)>0$. 根据 Weyl 房的定义, 这时也有这说明 $(\gamma_2,\alpha_1),(\gamma_2,\alpha_2)<0$, 于是可用 α_1 替换 α, 因为 Φ 是有限集, 因此经有限步后能够得到满足 $(\gamma_1,\alpha)>0,(\gamma_2,\alpha)<0$ 的不可分根 α. 所以 $\alpha\in\Phi^+(\gamma_1)$ 但 $\alpha\notin\Phi^+(\gamma_2)$. 进而 $\alpha\in\Delta(\gamma_1)$ 但 $\alpha\notin\Delta(\gamma_2)$, 于是 $\Delta(\gamma_1)\neq\Delta(\gamma_2)$. 故 $\Delta(\mathfrak{C}_1)\neq\Delta(\mathfrak{C}_2)$. □

设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 的根系, $\mathscr{W}$ 是 Φ 的 Weyl 群. 对 $\alpha,\beta\in\Phi$, 易见 α 决定的镜面反射 σ_α 作用 β 对应的超平面 P_β 就是 $\sigma_\alpha(\beta)$ 对应的超平面. 所以任何 $w\in\mathscr{W}$ 满足

$$w\left(\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha,$$

更进一步, 对任何 $w\in\mathscr{W}$, w 给出 $\{P_\alpha|\alpha\in\Phi\}$ 上的置换, 满足 $w(P_\alpha)=P_{w(\alpha)}$. 由此可知 w 给出 $\{\Phi$的 Weyl 房$\}$ 上的置换. 取定 Weyl 房 $\mathfrak{C}$ 中的元素 γ, 那么 $w(\gamma)\in w(\mathfrak{C})$. 易见 $w(\Phi^+(\gamma))=\Phi^+(w(\gamma))$, 并且 $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ 是可分解的根当且仅当 $w(\alpha)\in\Phi^+(w(\gamma))$ 是可分解的根. 所以 $\Delta(w(\gamma))=w(\Phi^+(\gamma))$. 因此对任何 Weyl 房 $\mathfrak{C}$ 和 $w\in\mathscr{W}$ 有 $w(\Delta(\mathfrak{C}))=\Delta(w(\mathfrak{C}))$. 下面我们证明 W 在 Weyl 房上的作用是传递的 (见 [命题2.95]), 进而结合 [引理2.91] 便知 W 在 Φ(作为根系) 的所有基构成的集合上的作用也是传递的.

Lemma 2.92. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 的根系, $\mathscr{W}$ 是 Φ 的 Weyl 群, Δ 是 Φ 的基. 那么对任何 E 中正则元 γ, 存在 $w\in\mathscr{W}$ 使得 $(w(\gamma),\alpha)>0,\forall\alpha\in\Delta$.

Proof. 事实上我们能够说明: 记 $\mathscr{W}$ 中由 Δ 生成的子群为 $\mathscr{W}'$, 则存在 $w\in\mathscr{W}'$ 使得 $(w(\gamma),\alpha)>0,\forall\alpha\in\Delta$. 记由 Δ 决定的正根全体构成的集合为 $\Phi^+(\Delta)$, 我们先说明对任何 $\alpha\in\Delta$ 有 $\sigma_\alpha(\Phi^+(\Delta)-\{\alpha\})\subseteq\Phi^+(\Delta)$, 进而 σ_α 给出 $\Phi^+(\Delta)-\{\alpha\}$ 上的置换. 任取 $\beta\neq\alpha\in\Phi^+(\Delta)$, 可设对每个 $\delta\in\Delta$ 对应自然数 n_δ 使得

$$\beta=\sum_{\delta\in\Delta}n_\delta\delta,$$

因为 Φ 中 α 的倍数只有 $\pm\alpha$, 所以由 $\beta\neq\alpha$ 可知存在 $\delta\neq\alpha\in\Delta$ 使得 $n_\delta>0$. 于是

$$\sigma_\alpha(\beta)=\beta-\frac{2(\alpha,\beta)\alpha}{(\alpha,\alpha)}$$

表示为 Δ 中元素的整数线性组合后, 关于 δ 的表出系数依然是正的, 这说明 $\sigma_\alpha(\beta)$ 关于 Δ 也是正根. 因此由前面的讨论可知每个 $\alpha\in\Delta$ 对应的镜面反射 σ_α 给出集合 $\Phi^+(\Delta)-\{\alpha\}$ 上的置换. 特别地, 对

$$\delta_0=\sum_{\beta\in\Phi^+(\Delta)}\beta/2,$$

有 $\sigma_\alpha(\delta_0)=\delta_0-\alpha,\forall\alpha\in\Delta$. 对上述 δ_0, 由 $\mathscr{W}'$ 是有限群, 总存在 $w\in\mathscr{W}'$ 使得 $(w(\gamma),\delta_0)$ 最大. 根据 $\mathscr{W}'$ 的定义, 对每个 $\alpha\in\Delta$ 有 $\sigma_\alpha w\in\mathscr{W}'$, 这说明 $(\sigma_\alpha w(\gamma),\delta_0)\leq(w(\gamma),\delta_0),\forall\alpha\in\Delta$. 现在由 $\sigma_\alpha^2=\mathrm{id}_E$ 知

$$(\sigma_\alpha w(\gamma),\delta_0)=(w(\gamma),\sigma_\alpha(\delta_0))=(w(\gamma),\delta_0-\alpha)=(w(\gamma),\delta_0)-(w(\gamma),\alpha),\forall\alpha\in\Delta.$$

所以 $(w(\gamma),\alpha)\geq0,\forall\alpha\in\Delta$. 结合 $w(\gamma)$ 依然是正则元便知 $(w(\gamma),\alpha)>0,\forall\alpha\in\Delta$. □

Remark 2.93. 作为该引理的应用, 我们证明: 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 的根系, 且 $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 是 Φ 的基, $\mathscr{W}$ 是 Φ 的 Weyl 群. 设 $\lambda=k_1\alpha_1+\cdots+k_\ell\alpha_\ell\in E$, 这里所有的 k_j 不是同时非负整

数就是同时非正整数. 那么如果 λ 不是某个根的倍数, 就存在 $w \in \mathscr{W}$ 使得 $w(\lambda) = k_1'\alpha_1 + \cdots + k_\ell'\alpha_\ell$, 这里存在某些 $k_i' > 0$ 也存在某些 $k_j' < 0$. 设 λ 不是任何根的倍数, 特别地, $\lambda \neq 0$. 记 $P_\lambda = \{x \in E | (x, \lambda)\} = 0$, 我们断言

$$P_\lambda \subsetneq \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha.$$

若不然, 首先由 λ 不是任何 $\alpha \in \Phi$ 的倍数知 $P_\alpha \neq P_\lambda, \forall \alpha \in \Phi$. 于是 $P_\lambda \cap P_\alpha (\alpha \in \Phi)$ 是 P_λ 的真子空间. 于是 P_α 作为无限域上的有限维线性空间能够被有限多个真子空间 $P_\alpha \cap P_\lambda$ 覆盖, 矛盾. 所以存在正则元 $\mu \in P_\lambda$. 根据 [引理2.92], 存在 $w \in \mathscr{W}$ 使得 $(w(\mu), \alpha_i) > 0, \forall 1 \leq i \leq \ell$. 现在设 $w(\lambda) = k_1'\alpha_1 + \cdots + k_\ell'\alpha_\ell$, 因为 $w(\alpha_i) \in \Phi$ 所以每个 k_i' 是整数. 现在

$$0 = (\lambda, \mu) = (w(\lambda), w(\mu)) = \sum_{i=1}^{\ell} k_i'(\alpha_i, w(\mu)).$$

因为每个 $(\alpha_i, w(\mu)) > 0$, 所以存在某些 $k_i' > 0$ 也存在某些 $k_j' < 0$.

Remark 2.94. 一般地, 固定 Φ 的基 Δ 的非空子集 Δ', 我们能够考虑 Φ 中那些被 Δ 线性表出非零系数项都是 Δ' 中项的子集 Φ'(那么 $\Phi' \supseteq P$) 以及 $\mathscr{W}$ 的由所有 $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta'\}$ 生成的子群 $\mathscr{W}_{\Delta'}$. 可记 $(\Phi')^+ = \Phi' \cap \Phi^+$, 那么根据 [引理2.92] 的证明过程可知任何 $\alpha \in \Phi'$ 决定的镜面反射 σ_α 都给出 $\Phi^+ - (\Phi')^+$ 这个集合上的置换 (特别地, 如果取 Δ' 是由一个单根 α 给出的单点集, 那么这说明 σ_α 给出 $\Phi^+ - \{\alpha\}$ 上的置换). 于是我们得到 $\mathscr{W}_{\Delta'}$ 中元素都给出 $\Phi^+ - (\Phi')^+$ 这个集合上的置换 [Ste68, p.9]. 因此 $\mathscr{W}_{\Delta'}$ 中元素也给出 $\Phi - \Phi'$ 上置换. 此外, 记 E' 是 E 的由 Φ' 或 Δ' 生成的子空间, 可直接验证 Φ' 构成 E' 中的根系 [Ste68, p.8].

Proposition 2.95. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E, (-,-))$ 的根系, $\mathscr{W}$ 是 Φ 的 Weyl 群. 那么对任何 Weyl 房 $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$, 存在 $w \in \mathscr{W}$ 使得 $w(\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{C}_2$. 特别地, $\mathscr{W}$ 在集合 $\{\Phi$作为根系的基$\}$ 上的作用是传递的.

Proof. 取定 $\gamma \in \mathfrak{C}_1$, 并设 $\Delta = \Delta(\mathfrak{C}_2)$ 是 $\mathfrak{C}_2$ 对应的 Φ 的基. 应用 [引理2.92] 可知存在 $w \in \mathscr{W}$ 使得 $(w(\gamma), \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta$. 于是由 [命题2.58] 知 $\Delta(\gamma) = \Delta = \Delta(\mathfrak{C}_2)$. 故由 $\Delta(\gamma) = \Delta(\mathfrak{C}_1)$ 和 [引理2.91] 得到结论. □

总结一下, 目前我们证明了根系的基在 Weyl 群的作用下是传递的, 在 [注记2.72] 中我们已经看到有限维实内积空间中保持根系的正交变换作用根系的基得到的基与原有的基导出的 Dynkin 图相同, 因此由 Weyl 群中元素都是保持根系的正交变换便知根系关于任何基导出的 Dynkin 图都相同, 即根系的 Dynkin 图与基的选取无关. 在 (特征零的代数闭域上的非零) 有限维半单 Lie 代数场景, 我们已经看到它关于给定的极大环面 Lie 子代数可自然地产生根系 (回忆 [注记2.48]), 进而该根系可唯一地决定 Dynkin 图. 在本节最后我们再介绍一些 Weyl 群的基本性质, 尤其是其在根系的所有基构成集合上的"单传递性"(见 [命题2.104]). 首先我们需要

Proposition 2.96. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E, (-,-))$ 的根系, 则任何 $\alpha \in \Phi$ 满足存在基 Δ 使得 $\alpha \in \Delta$.

Proof. 当 $\dim_{\mathbb{R}} E = 1$ 时, 结论明显成立. 因此只需考虑 $\dim_{\mathbb{R}} E = n \geq 2$ 的情况. 对 $\beta_1 \neq \pm\beta_2 \in \Phi$, 有 $P_{\beta_1} \neq P_{\beta_2}$. 于是由 $\dim_{\mathbb{R}} P_\beta = n - 1, \forall \beta \in \Phi$ 知 $\dim_{\mathbb{R}} P_{\beta_1} \cap P_{\beta_2} < n - 1$. 这一观察说明

$$\bigcup_{\beta \neq \pm\alpha \in \Phi} P_\beta \cap P_\alpha \subsetneq P_\alpha,$$

于是可选取 $\gamma_1 \in P_\alpha$ 使得对任何 $\beta \neq \pm\alpha \in \Phi$ 有 $(\gamma_1, \beta) \neq 0$. 取正实数 M 满足

$$M \geq |(\gamma_1, \beta)| + |(\alpha, \beta)| + |(\alpha, \alpha)| + 1, \forall \beta \neq \pm\alpha \in \Phi,$$

并设 N 是所有 $|(\gamma_1,\beta)|,\beta\neq\pm\alpha$ 中的最小值. 则 $\gamma_2=\gamma_1+N\alpha/3M$ 满足 $(\gamma_2,\alpha)>0$ 并且

$$(\gamma_2,\alpha)<|(\gamma_2,\beta)|,\forall\beta\neq\pm\alpha\in\Phi.$$

这一构造表明 γ_2 是 E 中正则元并且 $\alpha\in\Phi^+(\gamma_2)$ 还是不可分解根. 故 $\alpha\in\Delta(\gamma_2)$. □

Remark 2.97. 由此可知给定 Φ 的基 Δ, 并设 Φ 的 Weyl 群是 $\mathscr{W}$, 那么任何 $\beta\in\Phi$ 都满足存在 $\alpha\in\Delta,w\in\mathscr{W}$ 使得 $w(\alpha)=\beta$: 根据 [命题2.96], 可存在 Φ 的基 Δ' 满足 $\beta\in\Delta'$. 现在应用 [命题2.95] 得到存在 $w\in\mathscr{W}$ 使得 $w(\Delta)=\Delta'$. 特别地, 有某个 $\alpha\in\Delta$ 使得 $w(\alpha)=\beta$. 这也说明 $\Phi=\mathscr{W}(\Delta)$.

Theorem 2.98. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 的根系, Δ 是 Φ 的基, $\mathscr{W}$ 是 Φ 的 Weyl 群. 那么所有镜面反射 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 构成的集合是 $\mathscr{W}$ 作为群的一个生成元集.

Proof. 记由所有 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 所生成的 $\mathscr{W}$ 的子群为 $\mathscr{W}'$, 下证任何 $\beta\in\Phi$ 满足 $\sigma_\beta\in\mathscr{W}'$ 来得到结论. 任给 $\beta\in\Phi$, 根据 [命题2.96], 存在 Φ 的基 Δ_β 使得 $\beta\in\Delta_\beta$. 由 [引理2.92] 和 [命题2.95] 的证明过程知存在 $w\in\mathscr{W}'$ 可知存在 $w\in\mathscr{W}'$ 使得 $w(\Delta_\beta)=\Delta$. 特别地, $w(\beta)\in\Delta$, 记 $w(\beta)$ 为 γ. 现在可直接计算验证 $\sigma_\gamma=w\sigma_\beta w^{-1}$, 所以由 $w,\sigma_\gamma\in\mathscr{W}'$ 可知 $\sigma_\beta\in\mathscr{W}'$. 于是由 β 的任意性得到结论. □

Remark 2.99. 对 E 上的正交变换 τ 以及 $\alpha\neq0\in E$. 如果设 $\beta=\tau(\alpha)$, 可直接验证 $\sigma_\beta=\tau\sigma_\alpha\tau^{-1}$.

在 [注记2.73] 中我们用前面发展的 Weyl 群工具证明了根系的不可性等价于对应 Dynkin 图的连通性, 使用类似的方法能够证明固定不可约根系的一个根, Weyl 群在该根上的所有作用能够线性生成整个内积空间.

Corollary 2.100. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的不可约根系, $\mathscr{W}$ 是 Φ 的 Weyl 群, $\alpha\in\Phi$. 那么 $\mathscr{W}(\alpha)$ 可 $\mathbb{R}$-线性生成 E.

Proof. 记 E_1 是由 $\mathscr{W}(\alpha)$ 在 E 中 $\mathbb{R}$-线性生成的子空间. 假设 $E_1\neq E$, 那么存在 $\gamma\in\Phi$ 使得 $\gamma\notin E_1$(因为 Φ 可 $\mathbb{R}$-线性生成 E). 注意到 E_1 在 $\mathscr{W}$ 作用下封闭, 所以 $\sigma_\delta(E_1)\subseteq E_1,\forall\delta\in\Phi-E_1$. 特别地, 对所有 $x\in\Phi\cap E_1$, 有 $\sigma_\delta(x)\in E_1,\forall\delta\in\Phi-E_1$. 于是由 $\delta\notin E_1$ 迫使 $(x,\delta)=0$. 因此如果记 $\Phi_1=E_1\cap\Phi,\Phi_2=\Phi-\Phi_1$, 那么 $(\Phi_1,\Phi_2)=0$ 且 $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$, 这与 Φ 的不可约性矛盾. □

Remark 2.101. 在 [定理2.82] 中我们看到不可约根系 Φ 至多两种长度不同的根. 也可以通过 [注记2.100] 证明该观察. 设 $\alpha,\beta\in\Phi$ 且 $(\alpha,\alpha)\geq(\beta,\beta)$, 先指出 $(\alpha,\alpha)/(\beta,\beta)\in\{1,2,3\}$: 因为 $\beta\neq0$, 所以由 $\mathscr{W}(\alpha)$ 可 $\mathbb{R}$-线性生成 E 迫使存在 $w\in\mathscr{W}$ 使得 $(w(\alpha),\beta)\neq0$. 如果 $w(\alpha),\beta$ 是 $\mathbb{R}$-线性相关的, 即 $w(\alpha)=\pm\beta$, 那么 $(w(\alpha),w(\alpha))/(\beta,\beta)=1$, 断言成立. 如果 $w(\alpha),\beta$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关的, 由 Cauchy 不等式取等条件, $(w(\alpha),\beta)^2<(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$. 现在由 $2(w(\alpha),\beta)(\beta,\beta)$ 和 $2(w(\alpha),\beta)/(w(\alpha),w(\alpha))$ 都是非零整数 (根系的定义), 乘积严格小于 4, 以及 $(\alpha,\alpha)\geq(\beta,\beta)$ 可得

$$(w(\alpha),w(\alpha))/(\beta,\beta)\in\{1,2,3\}.$$

特别地, $(\alpha,\alpha)/(\beta,\beta)\in\{1,2,3\}$. 现在假设不可约根系 Φ 中至少三种长度不同的根, 设 $\alpha,\beta,\gamma\in\Phi$ 满足 $(\alpha,\alpha)>(\beta,\beta)>(\gamma,\gamma)$, 那么根据前面证明的断言得到 $(\alpha,\alpha)/(\gamma,\gamma)=3,(\beta,\beta)/(\gamma,\gamma)=2$. 这导出 $(\alpha,\alpha)/(\beta,\beta)=3/2$, 与前面的断言矛盾. 所以不可约根系至多两种长度不同的根.

这里再给出一个 [注记2.97] 和 [定理2.98] 的简单应用, 初次阅读可跳过.

Proposition 2.102. 设 $(E_1,(-,-)_1),(E_2,(-,-)_2)$ 是非零有限维实内积空间, Φ_1,Φ_2 分别是 E_1,E_2 中的根系, Δ_1,Δ_2 分别是 Φ_1,Φ_2 的基. 如果存在双射 $\varphi:\Delta_1\to\Delta_2$ 满足

$$\frac{2(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))_2}{(\varphi(\beta),\varphi(\beta))_2}=\frac{2(\alpha,\beta)_1}{(\beta,\beta)_1},\forall\alpha,\beta\in\Delta_1$$

那么存在唯一的 $\mathbb{R}$-线性同构 $\hat{\varphi}:E_1\to E_2$ 满足 $\hat{\varphi}(\Phi_1)=\Phi_2,\hat{\varphi}|_{\Delta_1}=\varphi$ 并且

$$\frac{2(\hat{\varphi}(\alpha),\hat{\varphi}(\beta))_2}{(\hat{\varphi}(\beta),\hat{\varphi}(\beta))_2}=\frac{2(\alpha,\beta)_1}{(\beta,\beta)_1},\forall\alpha,\beta\in\Phi_1.$$

Proof. 为叙述方便, 对 $\alpha,\beta\neq 0\in E_1$, 记 $\langle\alpha,\beta\rangle_2=2(\alpha,\beta)_1/(\beta,\beta)_1$. 类似可对 $\delta,\gamma\neq 0\in E_2$ 引入记号 $\langle\delta,\gamma\rangle_2$. 我们把 Φ_1,Φ_2 的 Weyl 群分别记作 $\mathscr{W}_1,\mathscr{W}_2$. 因为 Δ_1 是 E 的 $\mathbb{R}$-基, 所以可把 φ 自然地 $\mathbb{R}$-线性延拓为 $\hat{\varphi}:E_1\to E_2$ 满足 $\hat{\varphi}|_{\Delta_1}=\varphi$. 特别地, 由 Δ_2 是 E_2 的 $\mathbb{R}$-基得到 $\hat{\varphi}$ 是 $\mathbb{R}$-线性同构并且对任给 $\alpha\in\Delta_1,\beta\in E_1$ 总有 $\langle\alpha,\beta\rangle_1=\langle\hat{\varphi}(\alpha),\hat{\varphi}(\beta)\rangle_2$. 由条件, 任取 $\beta_0\in\Delta_1$, 如果记 $c=(\varphi(\beta_0),\varphi(\beta_0))_2/(\beta_0,\beta_0)_1$, 那么 $c>0$ 并且

$$(\hat{\varphi}(\alpha),\hat{\varphi}(\beta))=c(\alpha,\beta)_1,\forall\alpha,\beta\in E_1.$$

上式表命 $c^{-1}\hat{\varphi}$ 是保持内积的. 对任何 $\gamma\in\Phi_1$, 根据 [注记2.97], 总存在 $\alpha\in\Delta_1$ 和 $w\in\mathscr{W}_1$ 使得 $\gamma=w(\alpha)$. 对任何 $\delta\in\Delta_1$, 由 $c^{-1}\hat{\varphi}$ 保持内积容易验证 $\hat{\varphi}\sigma_{\alpha_0}\hat{\varphi}^{-1}=\sigma_{\varphi(\alpha_0)}$. 特别地, 根据 [定理2.98], 对上述 $w\in\mathscr{W}_1$ 有 $\hat{\varphi}w\hat{\varphi}^{-1}\in\mathscr{W}_2$. 所以如果记 $w_2=\hat{\varphi}w\hat{\varphi}^{-1}$, 那么 $\hat{\varphi}(\gamma)=w_2\hat{\varphi}(\alpha)=w_2\varphi(\alpha)$, 这里 $\varphi(\alpha)\in\Delta_2$. 继续应用 [注记2.97] 便得 $\varphi(\Phi_1)\subseteq\Phi_2$. 对称地, 用 φ^{-1} 替换 φ 以及 $\hat{\varphi}^{-1}=\hat{\varphi^{-1}}$ 不难看到 $\varphi(\Phi_1)\supseteq\Phi_2$. 于是 $\hat{\varphi}(\Phi_1)=\Phi_2$. 最后

$$\langle\varphi(\gamma),\hat{\varphi}(\beta)\rangle_2=\langle w_2(\varphi(\alpha),\hat{\varphi}(\beta)\rangle_2=\langle\hat{\varphi}^{-1}w_2\hat{\varphi}(\alpha),\hat{\varphi}^{-1}\hat{\varphi}(\beta)\rangle_1=\langle w(\alpha),\beta\rangle_1=\langle\gamma,\beta\rangle_1,\forall\beta\in E_1.$$

所以 $\hat{\varphi}$ 满足要求, 其唯一性来自 Δ_1 是 E_1 的 $\mathbb{R}$-基. □

根据 [引理2.92] 的证明过程我们看到对 Φ 的基 Δ(记正根集为 $\Phi^+(\Delta)$, 负根集为 $\Phi^-(\Delta)$), 每个 $\alpha\in\Delta$ 对应的镜面反射 σ_α 给出集合 $\Phi^+(\Delta)-\{\alpha\}$ 上的置换. 利用这个观察, 我们说明

Lemma 2.103. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 的根系, Δ 是 Φ 的基. 由 [定理2.98], $\mathscr{W}$ 中任何元素可表示为有限多个 Δ 中元素决定的镜面反射的乘积. 现在设 $w\neq 1\in\mathscr{W}$ 关于 Δ 中元素决定的镜面反射的乘积表示中乘积长度最小的表示为 $w=\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_t}$, 这里 $t\geq 1,\alpha_j\in\Delta$. 那么 $w(\alpha_t)\in\Phi^-(\Delta)$.

Proof. 假设 $w(\alpha_t)\notin\Phi^-(\Delta)$, 那么由 $w(\alpha_t)\in\Phi$ 知 $w(\alpha_t)\in\Phi^+(\Delta)$. 于是由 $\sigma_{\alpha_t}(\alpha_t)=-\alpha_t$ 可知 $\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)\in\Phi^-(\Delta)$. 于是我们得到 Φ 中序列 $\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t),\sigma_{\alpha_2}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t),...,\sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t),\alpha_t$. 该序列第一项在 $\Phi^-(\Delta)$ 中, 最后一项在 $\Phi^+(\Delta)$ 中. 所以可选取该序列中属于 $\Phi^+(\Delta)$ 的项中项数最小者, 即有正整数 $1\leq s\leq t-1$ 满足 $\sigma_{\alpha_{s+1}}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)\in\Phi^+(\Delta)$ 但是 $\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t),...,\sigma_{\alpha_s}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)\in\Phi^-(\Delta)$(这里当 $s=t-1$ 时, $\sigma_{\alpha_{s+1}}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)=\alpha_t$). 所以镜面反射 σ_{α_s} 将正根 $\sigma_{\alpha_{s+1}}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)$ 映至负根. 从 [引理2.92] 的证明过程我们看到 σ_{α_s} 给出集合 $\Phi^+(\Delta)-\{\alpha_s\}$ 上的置换, 所以正根 $\sigma_{\alpha_{s+1}}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)$ 就是 α_s. 记 $w_0=\sigma_{\alpha_{s+1}}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}\in\mathscr{W}$, 那么 $w_0(\alpha_t)=\alpha_s$. 由此可直接验证 $\sigma_{\alpha_s}=w_0\sigma_{\alpha_t}(w_0)^{-1}$, 即 $\sigma_{\alpha_s}\cdots\sigma_{\alpha_{t-1}}=w_0\sigma_{\alpha_t}$. 对该式等号两边同乘上 $\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_{s-1}}$ 可知 $w=\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_{s-1}}\sigma_{\alpha_{s+1}}\cdots\sigma_{\alpha_t}$, 这与 t 的选取矛盾. □

Proposition 2.104. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 的根系, Δ 是 Φ 的基, $\mathscr{W}$ 是 Φ 的 Weyl 群, $w\in\mathscr{W}$. 那么 $w(\Delta)=\Delta$ 当且仅当 $w=\mathrm{id}_E$. 特别地, 对 Φ 的基 Δ_1,Δ_2, 存在唯一的 $w\in\mathscr{W}$ 使得 $w(\Delta_1)=\Delta_2$.

Proof. 只需要证明第一个结论, 第二个结论来自 [命题2.95] 与第一个结论. 设 $w \in \mathscr{W}$ 满足 $w(\Delta) = \Delta$. 假设 $w \neq \mathrm{id}_E$, 那么由 [引理2.103], 存在 $\alpha \in \Delta$ 使得 $w(\alpha) \in \Phi^-(\Delta)$. 特别地, $w(\alpha) \notin \Delta$, 与 $w(\Delta) = \Delta$ 矛盾. □

Corollary 2.105. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E, (-,-))$ 的根系, Δ 是 Φ 的基, $\mathscr{W}$ 是 Φ 的 Weyl 群. 那么存在唯一的 $w_0 \in \mathscr{W}$ 使得 $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$.

Proof. 元素 w_0 的存在性来自 [命题2.104] 指出存在 $w_0 \in \mathscr{W}$ 使得 $w_0(\Delta) = -\Delta$, 进而 $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$. 下面说明唯一性. 如果有 $w \in \mathscr{W}$ 满足 $w(\Phi^+) = \Phi^-$, 那么 [注记2.90] 说明 $w(\Delta) = -\Delta$. 现在应用 [命题2.104] 即可. □

现在固定 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E, (-,-))$ 的根系, $\mathscr{W}$ 是 Weyl 群, $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ 是 Φ 的基. 将镜面反射 σ_{α_i} 记为 s_i. 由 [定理2.98], $\mathscr{W}$ 任何元素都能写成有限多个 s_i 的乘积 (注意到 $s_i^2 = 1$). 于是对每个 $w \in \mathscr{W}$, 可记 $\ell(w)$ 是 w 所有关于 s_i 乘积表示中的最小长度 (以 $\ell(w)$ 为长度的 w 关于 s_i 的乘积表示被称为 **reduced 表示**). 那么 $\ell(1) = 0, \ell(s_i) = 1, \forall 1 \leq i \leq n$. 称 $\ell : \mathscr{W} \to \mathbb{N}$ 为 $\mathscr{W}$ 关于 Δ 的**长度函数**.

Proposition 2.106. 对每个 $w \in \mathscr{W}$, 记 $n(w)$ 为集合 $\{\alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) \in \Phi^-\}$ 的元素数目. 则 $\ell(w) = n(w)$. 特别地, 如果 $w \in \mathscr{W}$ 将所有单根都作用为正根, 那么 $n(w) = 0$, 于是 w 是单位元.

Proof. 对 $\ell(w) \in \mathbb{N}$ 作归纳. 当 $\ell(w) = 0$ 时, $w = 1$ 明显满足 $n(w) = 0$. 当 $\ell(w) = 1$ 时, w 就是某个单根决定的镜面反射 s_i, 这时 s_i 定义了 $\Phi^+ - \{\alpha_i\}$ 上的置换, 回忆 [引理2.92] 的证明过程. 所以 $n(w) = 1$. 设 $\ell(w) \geq 1$, 假设结论对长度不超过 $\ell(w) - 1$ 的 Weyl 群中元素都成立, 设 w 关于 $t = \ell(w)$ 有 reduced 表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_t}$, 那么 $\ell(ws_{i_t}) = \ell(w) - 1$ 且 ws_{i_t} 作用 α_{i_t} 得到正根, $\Phi^+ - \{\alpha_{i_t}\}$ 中在 ws_{i_t} 作用下为负根的元素数目就是 $\Phi^+ - \{\alpha_{i_t}\}$ 中被 w 作用得到负根的元素数目. 注意到 α_{i_t} 在 w 作用下是负根, [引理2.103], 因此 $n(ws_{i_t}) = n(w) - 1$. 现在由归纳假设, $\ell(ws_{i_t}) = n(ws_{i_t})$, 于是得到 $\ell(w) = n(w)$. □

Remark 2.107. 设 Φ 是非零有限维实内积空间中的根系, 有基 $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ 并记 Φ^+, Φ^- 分别为 Φ 关于 Δ 的正根集和负根集. 根据 [命题2.106] 可知对任何 $w \in \mathscr{W}$ 以及单根 α_i 决定的镜面反射 $s_i = \sigma_{\alpha_i}$, 有

$$\ell(ws_i) = \begin{cases} \ell(w) + 1, & w(\alpha_i) \in \Phi^+ \\ \ell(w) - 1, & w(\alpha_i) \in \Phi^-. \end{cases}$$

下面沿用 [注记2.94] 的记号: Δ' 是 Δ 取定的子集, 那么有 $\mathscr{W}$ 的子群 $\mathscr{W}_{\Delta'}$. 并考虑 $\mathscr{W}$ 的子集:

$$\overline{\mathscr{W}_{\Delta'}} = \{w \in \mathscr{W} \mid w(\Delta') \subseteq \Phi^+\}.$$

我们说明任何 $\mathscr{W}$ 中元素 w 有唯一的满足下面条件的分解：

$$w = w'w'',\ w' \in \overline{\mathscr{W}_{\Delta'}}, w'' \in \mathscr{W}_{\Delta'} \text{且 } \ell(w) = \ell(w') + \ell(w''). \tag{2.1}$$

先说明存在性. 命 w' 是 $w\mathscr{W}_{\Delta'}$ 中满足 $\ell(w')$ 是 $\ell(w\mathscr{W}_{\Delta'})$ 的最小元. 那么必定有 $w'(\Delta') \subseteq \Phi^+$(否则, 我们能够利用 Δ' 中元素的单反射给出长度更小的 $w\mathscr{W}_{\Delta'}$ 中元素). 这说明 $w' \in \overline{\mathscr{W}_{\Delta'}}$. 进而 $w \in \overline{\mathscr{W}_{\Delta'}}\mathscr{W}_{\Delta'}$, 并且 w 的选取方式迫使 $\ell(w) = \ell(w') + \ell(w'')$. 这得到分解(2.1)的存在性. 下面证明唯一性, 如果还有满足条件的分解 $w = v'v''$. 则 $w'w''(v'')^{-1} = v' \in \overline{\mathscr{W}_{\Delta'}}$. 结合 $w' \in \overline{\mathscr{W}_{\Delta'}}$ 得到 $w''(v'')^{-1} \in \overline{\mathscr{W}_{\Delta'}}$. 所以 $w''(v'')^{-1}(\Delta') \subseteq \Phi^+$, 并且结合 [注记2.94] 得到 $w''(v'')^{-1}(\Delta') \subseteq (\Phi')^+ = \Phi' \cap \Phi^+$. 此外, $w''(v'')^{-1}(\Delta')$ 也是 Φ^+ 所包含的唯一单根集 Δ(唯一性来自 [命题2.59]) 的子集, 这逼迫 $w''(v'')^{-1}(\Delta') = \Delta'$. 所以我们利用 [注记2.94] 和 [命题2.104] 可知 $w''(v'')^{-1}$ 是 $\mathscr{W}_{\Delta'}$ 中的单位元, 这导出分解(2.1)的唯一性.

Proposition 2.108. 根系 Φ 的 Weyl 群 $\mathscr{W}$ 中长度最长的元素 w_0 唯一, 且满足 $w_0(\Phi^+)=\Phi^-$ 以及 $\ell(w_0)=|\Phi^+|$.

Proof. 根据 [命题2.106], $\mathscr{W}$ 中元素长度都不超过 $|\Phi^+|$. 而 [推论2.105] 说明存在唯一的元素使得 $n(w_0)=|\Phi^+|$. 所以 [命题2.106] 说明存在唯一的元素 $w_0\in\mathscr{W}$ 使得 $\ell(w_0)=|\Phi^+|$ 以及 $w_0(\Phi^+)=\Phi^-$. □

Remark 2.109. 保持前面的记号和假设, 固定 $w\in\mathscr{W}$. 我们利用 [注记2.107] 说明 w 的 reduced 表示 $w=s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ 总可加长为 $\mathscr{W}$ 的最长元, 即存在 $w'=s_{i_{r+1}}\cdots s_{i_N}$ (其中 $N=|\Phi^+|$) 使得 $w_0=ww'$. 如果 $\ell(w)=N$, 那么结论直接成立. 如果 $\ell(w)\leq N-1$, 那么总存在 $\alpha_i\in\Delta$ 使得 $w(\alpha_i)\in\Phi^+$: 若不然, 则 $w(\Delta)\subseteq\Phi^-$ 蕴含 $w(\Phi^+)=\Phi^-$, 应用 [命题2.106] 导出 $\ell(w)=N$, 矛盾. 于是 [注记2.107] 说明 $\ell(ws_i)=\ell(w)+1$. 现在重复上述讨论便可将 $w=s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ 加长为 $\mathscr{W}$ 中的最长元.

Remark 2.110. 对 Weyl 群 $\mathscr{W}$ 的最长元 w_0 还有 $w_0^2=1$: 根据 [命题2.108] 得到 $w_0^2(\Phi^+)=\Phi^+$. 于是应用 [注记2.90] 得到 $w_0^2(\Delta)=\Delta$. 于是 [命题2.104] 迫使 $w_0^2=1$.

现在记 $N\coloneqq|\Phi^+|$, 设 $w_0\in\mathscr{W}$ 满足 $\ell(w_0)=N$, 并设 w_0 有 reduced 表示 $w_0=s_{i_1}\cdots s_{i_N}$. 我们定义

$$\beta_1\coloneqq\alpha_{i_1},\ \beta_2\coloneqq s_{i_1}(\alpha_{i_2}),\ \beta_3\coloneqq s_{i_1}s_{i_2}(\alpha_{i_3}),\ ...,\ \beta_N\coloneqq s_{i_1}\cdots s_{i_{N-1}}(\alpha_{i_N}).$$

如果我们能够说明每个 $\beta_j\in\Phi^+$ 且两两不同, 那么 $\Phi^+=\{\beta_1,...,\beta_N\}$. 因为 $s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}(k\leq N)$ 满足长度是 $k-1$, 所以应用 [注记2.107] 给出的 $\ell(ws_i)$ 公式 (应用于 $w=s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}$ 以及 s_{i_k}) 可知 β_k 是正根. 我们还需要说明不同的指标 j 对应不同的 β_j. 如果有 $\beta_t=\beta_q, t<q\leq N$, 那么 $s_{i_t}\cdots s_{i_{q-1}}(\alpha_{i_q})=\alpha_{i_t}$. 两边作用 s_{i_t} 得到

$$s_{i_{t+1}}\cdots s_{i_{q-1}}(\alpha_{i_q})=-\alpha_{i_t}\in\Phi^-.$$

结合 [注记2.107] 给出的 $\ell(ws_i)$ 公式得到 $s_{i_{t+1}}\cdots s_{i_{q-1}}$ 的长度比 $s_{i_{t+1}}\cdots s_{i_{q-1}}s_{i_q}$ 多 1, 这和 $w_0=s_{i_1}\cdots s_{i_N}$ 是 reduced 表示矛盾! 前面的讨论证明了下述命题:

Proposition 2.111. 设 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 的根系, $\mathscr{W}$ 是 Weyl 群, $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ 是 Φ 的基, $\mathscr{W}$ 关于 Δ 的长度最长的元素 w_0 有 reduced 表示 $w_0=s_{i_1}\cdots s_{i_N}$, $N=|\Phi^+|$, 其中 $s_k=\sigma_{\alpha_k}$. 那么

$$\beta_1\coloneqq\alpha_{i_1},\ \beta_2\coloneqq s_{i_1}(\alpha_{i_2}),\ \beta_3\coloneqq s_{i_1}s_{i_2}(\alpha_{i_3}),\ ...,\ \beta_N\coloneqq s_{i_1}\cdots s_{i_{N-1}}(\alpha_{i_N})$$

定义了 Φ 关于 Δ 的正根集 Φ^+.

Remark 2.112. 固定 Weyl 群元素 w 关于 $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ 的 reduced 表示 $w=s_{i_1}\cdots s_{i_k}$, 那么 $\ell(w)=k$. 注意到 $\Phi^+\cap w(\Phi^-)$ 和 $\Phi^-\cap w^{-1}(\Phi^+)$ 有自然的双射 (来自 w^{-1} 和 w), 所以 $|\Phi^+\cap w(\Phi^-)|=\ell(w^{-1})=k$. 重复 [命题2.111] 的证明 (利用 [注记2.107] 给出的 $\ell(ws_i)$ 公式) 可验证 $\beta_1,...,\beta_k$ 在 w^{-1} 作用下都是负根, 即 $\beta_1,...,\beta_k\in w(\Phi^-)$. 而前面我们看到 $|\Phi^+\cap w(\Phi^-)|$ 的元素数目就是 k, 因此 $\{\beta_1,...,\beta_k\}=\Phi^+\cap w(\Phi^-)$. 对特征零的代数闭域上有限维半单 Lie 代数 L 关于极大环面 Lie 子代数 H 的根子空间分解, $w\in\mathscr{W}$ 可作用于每个根空间 $L_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 上得到 $L_{w(\alpha)}$. 我们指出 $\oplus_{\alpha\in\Phi^+\cap w(\Phi^-)}L_\alpha$ 是 L 的 Lie 子代数: 根据 [引理2.34(1)], 我们总有 $[L_\alpha,L_\beta]\subseteq L_{\alpha+\beta},\forall\alpha,\beta\in H^*$. 所以我们只需说明, 对 $\alpha,\beta\in\Phi^+\cap w(\Phi^-)$, 如果 $\alpha+\beta\in\Phi$, 那么 $\alpha+\beta\in\Phi^+\cap w(\Phi^-)$ 即可. 这时 α,β 是正根保证了 $\alpha+\beta\in\Phi$ 蕴含 $\alpha+\beta\in\Phi^+$. 结合这时 $w^{-1}(\alpha+\beta)\in\Phi$ 便知 $w^{-1}(\alpha+\beta)\in\Phi^-$, 所以 $\oplus_{\alpha\in\Phi^+\cap w(\Phi^-)}L_\alpha$ 是 Lie 子代数.

我们指出 Weyl 群上长度函数依赖于基的选取: 前一节前面看到 $A_\ell(\ell \geq 1)$ 型 Dynkin 图可以由 $\mathbb{R}^{\ell+1}$ 中根系 $\Phi = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq \ell+1\}$ 诱导. 取 $\ell = 3$, 那么这时 Φ 有 12 个元素构成:

$$e_1 - e_2,\ e_1 - e_3,\ e_1 - e_4,\ e_2 - e_3,\ e_2 - e_4,\ e_3 - e_4,$$

$$e_2 - e_1,\ e_3 - e_1,\ e_4 - e_1,\ e_3 - e_2,\ e_4 - e_2,\ e_4 - e_3.$$

可直接验证 $\Delta_1 = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_3 - e_1, \alpha_3 = e_4 - e_3\}$ 和 $\Delta_2 = \{\alpha_1' = e_3 - e_2, \alpha_2' = e_1 - e_3, \alpha_3' = e_2 - e_4\}$ 都是 Φ 的基, s_{α_1} 作为 Weyl 群中元素关于 Δ_1 给出的长度为 1, 但关于 Δ_2 给出的长度严格大于 1.

2.8 Cartan 子代数

本节的目标是介绍 Cartan 子代数的概念, 并说明在 (特征零的代数闭域上的非零) 有限维半单 Lie 代数场景, Cartan 子代数与极大环面 Lie 子代数是等价的概念 (见 [定理2.119]).

Definition 2.113. 设 L 是域 $\Bbbk$ 上 Lie 代数, 如果 L 的 Lie 子代数 H 满足 H 是幂零的并且 $N_L(H) = H$(回忆 [定义1.72]), 则称 H 是 L 的 **Cartan 子代数**.

Remark 2.114. 这里的定义没有直接保证 Cartan 子代数的存在性. 但至少在特征零的代数闭域上的非零有限维半单 Lie 代数层面, 我们能够说明 Cartan 子代数的存在性: 设设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, 下证 L 的极大环面 Lie 子代数 H 是 Cartan 子代数. 事实上, 考虑 L 关于 H 的根子空间分解

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \right),$$

这里 Φ 是 L 关于 H 的根系. 那么对每个 $\alpha \in \Phi$ 有 $[H, L_\alpha] = L_\alpha$(回忆 [注记2.40]), 所以 $N_L(H) = H$. H 作为环面 Lie 子代数本身是交换的, 所以也是幂零 Lie 代数, 进而知 H 是 Cartan 子代数.

Remark 2.115. 如果 L 是幂零 Lie 代数, 那么由 $N_L(L) = L$ 知 L 是自身的 Cartan 子代数. 如果 H 是 L 的 Cartan 子代数并且 L 的 Lie 子代数 $T \supseteq H$, 那么 H 也是 T 的 Cartan 子代数.

现在设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维 Lie 代数. 回忆对 $\Bbbk$ 上 n 维有限维线性空间 V, 任何 V 上 $\Bbbk$-线性变换 T 的特征多项式 $f(x)$ 有标准分解 $f(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_s)^{n_s}$, 这里 $\lambda_1, ..., \lambda_s$ 是 T 在 $\Bbbk$ 中 (两两互异的) 所有特征根, $n_1, ..., n_s$ 是正整数满足 $n_1 + \cdots + n_s = n$. 那么 V 有 $\Bbbk$-子空间直和分解

$$V = \mathrm{Ker}(\lambda_1 \mathrm{id}_V - T)^{n_1} \oplus \mathrm{Ker}(\lambda_2 \mathrm{id}_V - T)^{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\lambda_s \mathrm{id}_V - T)^{n_s},$$

对每个 λ_j, 引入记号 $V_{\lambda_j} = \mathrm{Ker}(\lambda_j \mathrm{id}_V - T)^{n_j}$, 那么 T 在 V_{λ_j} 上的作用就是数乘变换 $\lambda_j \mathrm{id}_{V_j}$ 与幂零变换 $T - \lambda_j \mathrm{id}_{V_j}$ 之和. 现在取 $V = L$, 对固定的 $x \in L$, 取 $T = \mathrm{ad}_x$, 那么 $L = L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_s}$. 当 $x \neq 0$ 时, 由 $[x, x] = 0$ 便知 ad_x 有零特征值. 所以总有某个 $\lambda_j = 0$, 不妨设 $\lambda_1 = 0$. 为了突出上述子空间分解与 x 相关, 记 L_0 为 $L_0(\mathrm{ad}_x)$, 其余 $L_\lambda(\lambda \neq 0)$ 记作 $L_\lambda(\mathrm{ad}_x)$, 所有 $L_\lambda(\mathrm{ad}_x)(\lambda \neq 0)$ 的直和记作 $L_\star(\mathrm{ad}_x)$. 对 L 一般的 Lie 子代数 J, 只要 $[x, J] \in J$(即 $x \in N_L(J)$), 依然能够考虑相应直和分解 $J = J_0(\mathrm{ad}_x) \oplus J_\star(\mathrm{ad}_x)$.

现在固定 $x \in L$, 将 [引理1.19] 的证明过程应用于 L 上 $\Bbbk$-导子 ad_x 便知

$$[L_\lambda(\mathrm{ad}_x), L_\mu(\mathrm{ad}_x)] \subseteq L_{\lambda+\mu}(\mathrm{ad}_x), \forall \lambda, \mu \in \Bbbk.$$

(这里当 $\alpha \in \Bbbk$ 不是 ad_x 的特征值时, $L_\alpha(\mathrm{ad}_x) = 0$) 特别地, $L_0(\mathrm{ad}_x)$ 是 L 的 Lie 子代数. 并且当 $\lambda \neq 0 \in \Bbbk$ 时, $L_\lambda(\mathrm{ad}_x)$ 中元素决定的 L 上伴随变换是幂零的. 由于 $L_0(\mathrm{ad}_x)$ 是 L 的 Lie 子代数, 便有了如下概念.

Definition 2.116. 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维 Lie 代数, $x \in L$. 称 $L_0(\mathrm{ad}_x)$ 是 **Engel 子代数**.

Remark 2.117. 即对有限维 Lie 代数 L 中元素 x, ad_x 在 L 中所有属于特征值零的特征向量构成 Lie 子代数.

Lemma 2.118. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的非零有限维 Lie 代数, 有 Lie 子代数 J. 那么:
(1) 取 $z \in J$ 满足 $L_0(\mathrm{ad}_z)$ 是所有 $L_0(\mathrm{ad}_x)(x \in J)$ 中极小元 (由 L 是有限维线性空间保证存在性). 如果 $J \subseteq L_0(\mathrm{ad}_z)$, 那么 $L_0(\mathrm{ad}_z) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x), \forall x \in J$.
(2) 如果 J 包含某个 Engel 子代数, 则 $N_L(J) = J$(称为**自正规的**). 特别地, 任何 Engel 子代数也是自正规的.

Proof. (1) 简记 $L_0(\mathrm{ad}_z)$ 为 Z, 那么 $J \subseteq Z$. 现在取定 $x \in J, \mu \in \Bbbk$, 那么由 $z + \mu x \in J \subseteq Z$ 知 $[z + \mu x, Z] \subseteq Z$. 于是 $z + \mu x$ 决定的 L 上伴随变换 $\mathrm{ad}_{z+\mu x}$ 可视作商空间 L/Z 上线性变换. 设 $\dim_\Bbbk Z = r, \dim_\Bbbk L = n$(不妨设 $1 \leq r \leq n-1$, 首先易见 $r \geq 1$. 如果 $r = n$, 即 $Z = L$, 那么由 Z 的定义便知结论成立). 现在伴随变换 $\mathrm{ad}_{z+\mu x}$ 诱导 Z 和 L/Z 上线性变换, 分别设线性变换的特征多项式为

$$f_\mu(t) = t^r + a_1(\mu)t^{r-1} + a_2(\mu)t^{r-2} + \cdots + a_r(\mu),$$

$$g_\mu(t) = t^{n-r} + b_1(\mu)t^{n-r-1} + \cdots + b_{n-r}(\mu),$$

其中每个 $a_i(t), b_j(t) \in \Bbbk[x]$ 并且满足 $\deg a_i(t) \leq i, \deg b_j(t) \leq j$(利用特征多项式系数关于矩阵幂次迹的描述不难看到 $a_i(t), b_j(t)$ 的存在性). 并注意 $\mathrm{ad}_{z+\mu x}$ 作为 L 上线性变换的特征多项式就是 $f_\mu(t)g_\mu(t)$(先取定 Z 的基, L/Z 的基在 L 中的代表元集后可给出 L 的基, 考察 $\mathrm{ad}_{z+\mu x}$ 在此基下的表示矩阵即可). 因为 ad_z 在 L 中属于零特征值的特征向量都在 Z 中, 所以 $g_0(t)$(即取 $\mu = 0$ 时) 的根都非零, 于是 $b_{n-r}(0) \neq 0$. 特别地, $b_{n-r}(t)$ 作为非零多项式, 由 $\Bbbk$ 是无限域, 总可选取 (两两互异的)$\mu_1, ..., \mu_{r+1}$ 使得 $b_{n-r}(\mu_j) \neq 0, \forall 1 \leq j \leq r+1$. 所以对每个 $1 \leq j \leq r+1$, $\mathrm{ad}_{z+\mu_j x}$ 在 L 中属于零特征值的特征向量总在 Z 中. 即 $L_0(\mathrm{ad}_{z+\mu_j x}) \subseteq Z$. 现在由 Z 的极小性, $L_0(\mathrm{ad}_{z+\mu_j x}) = Z = L_0(\mathrm{ad}_z), \forall 1 \leq j \leq r+1$. 特别地, 每个 $\mathrm{ad}_{z+\mu_j x}$ 在 Z 上只有零特征值, 进而 μ_j 对应的多项式 $f_{\mu_j}(t) = t^r$. 于是 $a_1(t), ..., a_r(t)$ 具有 $r+1$ 个不同的零点, 结合它们的次数都不超过 r 知 $a_1(t) = a_2(t) = \cdots = a_r(t) = 0$. 至此得到 $f_\mu(t) = t^r, \forall \mu \in \Bbbk$. 所以对任何 $\mu \in \Bbbk$, $\mathrm{ad}_{z+\mu x}$ 在 Z 上只有零特征值, 这说明 $Z \subseteq L_0(\mathrm{ad}_{z+\mu x}), \forall \mu \in \Bbbk$. 现在用 $x - z$ 替换 x, $\mu = 1$, 便得到结论.

(2) 设 J 包含 Engel 子代数 $L_0(\mathrm{ad}_y)$, 其中 $y \in L$. 那么 $y \in L_0(\mathrm{ad}_y) \subseteq J$ 表明 $y \in N_L(J)$. 即 ad_y 可视作 J 和 $N_L(J)/J$ 上线性变换. 假设 $N_L(J) \supsetneq J$, 由 $L_0(\mathrm{ad}_y)$ 的定义知 ad_y 作为 $N_L(J)/J$ 上线性变换没有零特征值, 但 $y \in J$ 又说明 ad_y 作为 $N_L(J)/J$ 上线性变换是零映射, 矛盾. 因此 $N_L(J) = J$. □

在 [注记2.114] 中我们指出在 (特征零的代数闭域上的非零) 有限维半单 Lie 代数场景, 极大环面 Lie 子代数就是 Cartan 子代数. 进而保证这时 Cartan 子代数的存在性. 事实上, 更进一步, 我们有

Theorem 2.119. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, H 是 L 的 Lie 子代数, 则以下等价:
(1)H 是极小 Engel 子代数.
(2)H 是 Cartan 子代数.
(3)H 是极大环面 Lie 子代数.

Proof. 在 [注记2.114] 中已经证明 (3)⇒(2), 下面先证明 (1)⇔(2) 再证明 (2)⇒(3). 如果 H 是极小 Engel 子代数, 设 $z \in L$ 满足 $H = L_0(\mathrm{ad}_z)$, 那么由 [引理2.118(2)] 知 $N_L(H) = H$. 并对 [引理2.118(1)] 取 $J = H$ 可得 $H = L_0(\mathrm{ad}_z) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x), \forall x \in H$. 特别地, 每个 $x \in H$ 决定的 H 上伴随变换是幂零的. 现在由 Engel 定理可知 H 是幂零 Lie 代数, 所以 H 是 Cartan 子代数, 这证明了 (1)⇒(2). 反之, 如果 H 是 Cartan 子代数, 由 H 的幂零性, 每个 $x \in H$ 满足 $H \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x)$. 我们证明存在 $x \in H$ 使得 $H = L_0(\mathrm{ad}_x)$ 来得到 H 是极小 Engel 子代数. 若不然, 则对所有 $x \in H$ 有 $H \subsetneq L_0(\mathrm{ad}_x)$. 取 $z \in H$ 是所有 $L_0(\mathrm{ad}_x)(x \in H)$ 中的极小元, 那么对 [引理2.118(1)] 取 $J = H$ 可得 $H = L_0(\mathrm{ad}_z) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x), \forall x \in H$. 这一观察说明任何 $x \in H$ 决定的 $L_0(\mathrm{ad}_z)$ 上伴随变换只有零特征值, 于是每个 $x \in H$ 的伴随变换诱导的非零线性空间 $L_0(\mathrm{ad}_z)/H$ 上的线性变换是幂零的. 注意到 H 作为幂零 Lie 代数是可解的, 所以由 Lie 定理, 线性空间 $L_0(\mathrm{ad}_z)/H$ 中存在所有 $\mathrm{ad}_x(x \in H)$ 对应其上线性变换的公共特征向量, 设为 $x_0 + H, x_0 \in L_0(\mathrm{ad}_z) - H$. 由该特征向量属于的特征值是零知 $[x_0, H] \subseteq H$, 因此 $x_0 \in N_L(H) - H$, 这和 H 是 Cartan 子代数矛盾. 因此 H 是极小 Engel 子代数, (2)⇒(1) 成立.

最后证明 (2)⇒(3): 设 H 是 Cartan 子代数, 因为 (2)⇒(1) 已经证明, 所以 H 也是极小 Engel 子代数. 现在考虑 $x \in L$ 作为有限维半单 Lie 代数 L 中元素的抽象 Jordan-Chevalley 分解 (回忆 [命题2.11]): $x = x_s + x_n$, 其中 x_s 是半单部分, x_n 是幂零部分. 由 x_n 决定的 L 上伴随变换幂零以及 $[x_s, x_n] = 0$ 知 $L_0(\mathrm{ad}_{x_s}) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x)$. 并注意当 ad_x 是 L 上可对角化的线性变换时, $x_s = x$, 这时 ad_x 作为 $L_0(\mathrm{ad}_x)$ 上可对角化的幂零变换, 在 $L_0(\mathrm{ad}_x)$ 上就是零映射, 这说明 $C_L(x) = L_0(\mathrm{ad}_x)$. 现在回到 Cartan 子代数 H, 这时 H 作为极小 Engel 子代数, 存在 $x \in L$ 使得 $H = L_0(\mathrm{ad}_x)$, 并且由 $L_0(\mathrm{ad}_{x_s}) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x)$ 和 H 的极小性可知 $H = L_0(\mathrm{ad}_{x_s}) = C_L(x_s)$. 设 T 是含于 $C_L(x_s)$ 的所有极大环面 Lie 子代数 (由 x_s 决定的伴随变换半单知存在性) 中的极大元, 那么 T 也一定是 L 中极大环面 Lie 子代数: 如果环面 Lie 子代数 $T' \supseteq T$, 由 T' 交换知 $T' \subseteq C_L(x_s)$, 这迫使 $T = T'$. 因此 H 包含 L 的一个极大环面 Lie 子代数 T, 之前已经证明 (3)⇒(2)⇒(1), 所以 T 是极小 Engel 子代数, 现在由 H 也是极小 Engel 子代数迫使 $H = T$, 即 H 是极大环面 Lie 子代数, 至此证明了 (2)⇒(3). □

Remark 2.120. 在 [定理2.119] 关于 (1)⇔(2) 的证明中并没有用到 L 是半单 Lie 代数的条件. 因此对特征零的代数闭域上的 (非零) 有限维 Lie 代数而言, 极小 Engel 子代数和 Cartan 子代数总是等价的概念.

Corollary 2.121. 设 $\varphi : L \to L'$ 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维 Lie 代数间的满 Lie 代数同态, 那么:
(1) 如果 H 是 L 的 Cartan 子代数, 那么 $\varphi(H)$ 是 L' 的 Cartan 子代数.
(2) 如果 H' 是 L' 的 Cartan 子代数, 则 $\varphi^{-1}(H')$ 的 Cartan 子代数也是 L 的 Cartan 子代数.

Proof. (1) 由 Cartan 子代数是幂零 Lie 代数, 存在正整数 k 使得 $H^k = 0$(回忆 [定义1.67] 中的记号). 所以由 φ 是 Lie 代数同态可知 $\varphi(H)^k = 0$, 这说明 $\varphi(H)$ 是幂零 Lie 代数, 下证 $N_{L'}(\varphi(H)) = \varphi(H)$ 来说明 $\varphi(H)$ 是 L' 的 Cartan 子代数. 任取 $x' \in N_{L'}(\varphi(H))$, 那么由 φ 是满射可设 $x \in L$ 满足 $\varphi(x) = x'$, 进而 $[x, H + \mathrm{Ker}\varphi] \subseteq H + \mathrm{Ker}\varphi$, [定理2.119] 表明 H 是 L 的 Engel 子代数. 所以由 $H + \mathrm{Ker}\varphi$ 是 L 的包含 H 的 Lie 子代数, 应用 [引理2.118(2)] 得到 $x \in H + \mathrm{Ker}\varphi$, 这说明 $x' = \varphi(x) \in \varphi(H)$. 因此 $N_{L'}(\varphi(H)) = \varphi(H)$.

(2) 设 H 是 $\varphi^{-1}(H')$ 的 Cartan 子代数, 那么将 (1) 应用于 φ 诱导的 $\varphi'(H')$ 到 H' 的标准映射 (为满射) 得到 $\varphi(H)$ 是 H' 的 Cartan 子代数. 事实上, $\varphi(H) = H'$: 由条件, H' 是幂零 Lie 代数, 在 [注记2.115] 中已经指出这时 H' 是自身的 Cartan 子代数. 于是 [定理2.119] 表明 H' 和 $\varphi(H)$ 都是 H' 的极小 Engel 子代数, 这迫使 $H' = \varphi(H)$. 根据 H 的条件, H 已经是幂零 Lie 代数, 下证 $N_L(H) = H$ 来完成推论证明. 任取 $x \in N_L(H)$, 则由 φ 是满射知 $\varphi(x) \in N_L'(\varphi(H)) = N_{L'}(H') = H'$, 所以 $x \in \varphi^{-1}(H')$. 现由 H 是 $\varphi^{-1}(H')$ 的 Cartan 子代数知

$$N_{\varphi^{-1}(H')}(H) = H.$$

于是 $x \in H$. 因此 $N_L(H) = H$, H 是 L 的 Cartan 子代数. □

2.9 共轭定理

之前我们介绍了 Lie 代数的 Cartan 子代数的概念并且看到在 (特征零的代数闭域上非零) 有限维半单 Lie 代数场景, Cartan 子代数, 极小 Engel 子代数和极大环面 Lie 子代数是等价的概念 (回忆 [定理2.119]). 因此有限维半单 Lie 代数对固定的 Cartan 子代数 (即极大环面 Lie 子代数) 对应某个 Dynkin 图, 本节的目标是通过证明有限维 Lie 代数关于 Cartan 子代数的共轭定理 (见 [定理2.126]) 说明该 Dynkin 图和 Cartan 子代数的选取无关 (回忆根系的 Weyl 群在根系所有基上作用的传递性, 见 [命题2.95], 已经保证了根系关于基对应的 Dynkin 图和基的选取无关), 见 [推论2.135]. 本节先介绍些关于 Lie 代数内自同构的基本知识再讨论共轭定理的证明.

设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上 (非零) 有限维 Lie 代数, 回忆任何 $x \in L$ 决定的伴随变换 ad_x 作为 L 上的 $\Bbbk$-线性变换如果特征多项式 $f(x)$ 有标准分解 $f(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_s)^{n_s}$, 这里 $\lambda_1,...,\lambda_s$ 是 T 在 $\Bbbk$ 中 (两两互异的) 所有特征根, $n_1,...,n_s$ 是正整数满足 $n_1+\cdots+n_s = n$. 那么 L 有 $\Bbbk$-子空间直和分解

$$L = L_{\lambda_1}(\mathrm{ad}_x) \oplus L_{\lambda_2}(\mathrm{ad}_x) \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_s}(\mathrm{ad}_x),$$

其中 $L_{\lambda_j}(\mathrm{ad}_x) = \{y \in L | (\mathrm{ad}_x - \lambda_j \mathrm{id}_L)^{n_j}(y) = 0\}, j = 1,2,...,s$. 易见对每个 $1 \leq j \leq s$, 都有

$$L_{\lambda_j}(\mathrm{ad}_x) = \{y \in L | 存在正整数m使得(\mathrm{ad}_x - \lambda_j \mathrm{id}_L)^m(y) = 0\}.$$

因此对 $\mu \in \Bbbk$, 可以引入记号 $L_\mu(\mathrm{ad}_x) = \{y \in L | 存在正整数m使得(\mathrm{ad}_x - \mu\mathrm{id}_L)^m(y) = 0\}$. 当 μ 不是 ad_x 的特征值时, $L_\mu(\mathrm{ad}_x) = 0$. 之前在引入 Engel 子代数的概念时已经指出从 [引理1.19] 的证明过程知

$$[L_\lambda(\mathrm{ad}_x), L_\mu(\mathrm{ad}_x)] \subseteq L_{\lambda+\mu}(\mathrm{ad}_x), \forall \lambda, \mu \in \Bbbk.$$

进而对任何 $\lambda \neq 0 \in \Bbbk$, $L_\lambda(\mathrm{ad}_x)$ 中元素决定的伴随变换都是幂零的. 如果 $x \in L$ 满足存在 $y \in L$ 和 ad_y 的非零特征值 λ 使得 $x \in L_\lambda(\mathrm{ad}_y)$, 则称 x 是**强 ad-幂零元**. 如果 $x \in L$ 满足 ad_x 是幂零变换, 则称 x 是 **ad-幂零元**. Engel 定理表明 L 的幂零性等价于所有元素 ad-幂零. 而前面的讨论表明

Lemma 2.122. 设 L 是特征零的代数闭域上非零有限维 Lie 代数, 则 L 中强 ad-幂零元是 ad-幂零的.

在讨论有限维 Lie 代数关于 Cartan 子代数的共轭定理前, 我们需要介绍 Lie 代数上内自同构的概念. 这里先考虑更一般些的设置: 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, L 是 $\Bbbk$-Lie 代数, $\delta \in \mathrm{Der}_{\Bbbk} L$ 是 $\Bbbk$-导子. 如果 δ 满足对任何 $x \in L$, 都存在正整数 n 使得 $\delta^n(x) = 0$, 则称 δ 是 L 上**局部幂零导子**. 例如, L 中 ad-幂零元决定的伴随变换就是局部幂零导子. 所以对 L 上局部幂零导子 δ, 我们能够定义 L 上映射

$$e^\delta : L \to L, y \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n(y)}{n!},$$

对每个 $y \in L$, $e^\delta(y)$ 作为有限和, e^δ 是定义合理的 $\Bbbk$-线性映射. 对任何 $x, y \in L, n \in \mathbb{N}$, 易见

$$\delta^n([x,y]) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i [\delta^i(x), \delta^{n-i}(y)],$$

由此我们能够说明对任何 $x, y \in L$ 有 $[e^{\delta}(x), e^{\delta}(y)] = e^{\delta}([x, y])$, 具体计算如下: 选取正整数 n 使得 $\delta^n(x) = \delta^n(y) = 0$, 于是 $\delta^k([x, y]) = 0, \forall k \geq 2n+1$. 进而

$$\begin{aligned}
[e^{\delta}(x), e^{\delta}(y)] =& \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}[\frac{\delta^i(x)}{i!}, \frac{\delta^j(y)}{j!}] \\
=& \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i+j=k}\frac{[\delta^i(x), \delta^j(y)]}{i!j!} \\
=& \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{[\delta^i(x), \delta^{k-i}(x)]}{k!} \\
=& \sum_{k=0}^{2n}\frac{\delta^k([x, y])}{k!} \\
=& e^{\delta}([x, y]).
\end{aligned}$$

这一观察表明 L 上局部幂零导子 δ 产生 L 作为 $\Bbbk$-Lie 代数的自同态 e^{δ}. 记 $\eta = e^{\delta} - 1$, 可直接验证 $1 - \eta + \eta^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\eta^m + \cdots$ (这是 L 上定义合理的 $\Bbbk$-线性变换, 因为每个 $x \in L$, 都存在正整数 m 使得 $\eta^m(x) = 0$) 就是 $e^{\delta} = 1 + \eta$ 的逆映射. 所以当 δ 是 L 上幂零导子时, e^{δ} 是 L 上 Lie 代数自同构. 我们把刚刚的讨论记录为

Lemma 2.123. 设域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$, L 是 $\Bbbk$-Lie 代数, δ 是 L 上局部幂零 $\Bbbk$-导子. 那么

$$e^{\delta} : L \to L, y \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^n(y)}{n!}$$

是定义合理的 $\Bbbk$-线性映射并且是 Lie 代数自同构.

Remark 2.124. 当 $\delta = 0$ 时, $e^{\delta} = e^0$ 就是 L 上恒等映射.

根据 [引理2.123], $\Bbbk$-Lie 代数 L 中任何 ad-幂零元 x 的伴随变换 ad_x 给出 Lie 代数自同构 e^{ad_x}, 将 Lie 代数自同构群 $\mathrm{Aut}_{\Bbbk}L$ 中所有这样的元素生成的子群称为 L 的**内自同构群**, 记作 $\mathrm{Int}(L)$, 其中的元素称为 L 上**内自同构**. 任给 L 中 ad-幂零元 x, 易见 $\varphi\mathrm{ad}_x\varphi^{-1} = \mathrm{ad}_{\varphi(x)}, \forall\varphi \in \mathrm{Aut}_{\Bbbk}L$(特别地, x 在 Lie 代数自同构下的像依然是 ad-幂零元), 所以 $\varphi e^{\mathrm{ad}_x}\varphi^{-1} = e^{\mathrm{ad}_{\varphi(x)}}, \forall\varphi \in \mathrm{Aut}_{\Bbbk}L$. 这一观察说明 $\mathrm{Int}(L)$ 是 $\mathrm{Aut}_{\Bbbk}L$ 的正规子群.

Example 2.125. 设 $\Bbbk$-Lie 代数 L 有 ad-幂零元 x, y, 满足 $[x, y] = 0$. 则由 $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ 立即得到伴随变换 ad_x 和 ad_y 也交换. 由此易验证 $e^{\mathrm{ad}_x}e^{\mathrm{ad}_y} = e^{\mathrm{ad}_y}e^{\mathrm{ad}_x} = e^{\mathrm{ad}_x+\mathrm{ad}_y}$. 归纳地易知: 对任何正整数 $n \geq 2$, 如果 $x_1, ..., x_n$ 是 L 中两两可交换的 ad-幂零元, 那么 $e^{\mathrm{ad}_{x_1}}, ..., e^{\mathrm{ad}_{x_n}}$ 两两可交换并且

$$e^{\mathrm{ad}_{x_1}+\cdots+\mathrm{ad}_{x_n}} = \prod_{i=1}^{n}e^{\mathrm{ad}_{x_i}}.$$

现在我们设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的 (非零) 有限维半单 Lie 代数, $x \in L$ 是强 ad-幂零元. 那么根据强 ad-幂零元的定义不难看到任何 L 上 Lie 代数自同构作用 x 依然得到强 ad-幂零元, 于是知 $\mathrm{Aut}_{\Bbbk}L$ 中所有由强 ad-幂零元 x 的伴随变换对应的 (Lie 代数) 内自同构 e^{ad_x} 所生成的子群为 $\mathrm{Aut}_{\Bbbk}L$ 的正规子群, 记作 $\mathscr{E}(L)$. 我们把 L 中所有强 ad-幂零元构成的集合记作 $\mathscr{N}(L)$(那么对 L 的任何 Lie 子代数 J, 易见 $\mathscr{N}(J) \subseteq \mathscr{N}(L)$. 在此记号下, 易见 $\mathscr{E}(J)$ 中任何元素都是 $\mathscr{N}(J)$ 中元素决定的 L 上伴随变换对应的内自同构在 J 上的限制). 如果 L

的非空子集 H_1, H_2 在 L 中相差某个内自同构, 即存在 $\sigma \in \mathrm{Int}L$ 使得 $\sigma(H_1) = H_2$, 则称 H_1 和 H_2 在 L 中**共轭**. 如果 L 的非空子集 H_1, H_2 在 L 中相差某个 $\mathscr{E}(L)$ 中的内自同构, 则称 H_1 和 H_2 **在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭**. 本节的主要目标是证明下述定理 (也参见 [推论2.134]):

Theorem 2.126 (共轭定理)**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维 Lie 代数. 那么 L 中任意两个 Cartan 子代数在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 特别地, 任意两个 Cartan 子代数具有相同的 $\Bbbk$-线性维数.

下面我们先做一些准备后证明有限维可解 Lie 代数场景的共轭定理 (见 [定理2.128]), 再对有限维 Lie 代数的极大可解 Lie 子代数证明共轭定理 (见 [定理2.133]), 最后再过渡到 [定理2.126] 的证明 (见 [推论2.134]). 可解情形的共轭定理的证明需要

Lemma 2.127. 设 $\varphi : L \to L'$ 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维 Lie 代数间的满 Lie 代数同态, 那么对任何 $\sigma' \in \mathscr{E}(L')$, 都存在 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\varphi} & L' \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma'} \\ L & \xrightarrow{\varphi} & L' \end{array}$$

Proof. 首先说明 φ 是满 Lie 代数同态能够保证对任何 $\lambda \in \Bbbk, y \in L$ 有 $\varphi(L_\lambda(\mathrm{ad}_y)) = L'_\lambda(\mathrm{ad}_{\varphi(y)})$. 注意到 φ 是 Lie 代数同态保证了 $\varphi\mathrm{ad}_y = \mathrm{ad}_{\varphi(y)}\varphi$, 所以容易验证 $\varphi(L_\lambda(\mathrm{ad}_y)) \subseteq L'_\lambda(\mathrm{ad}_{\varphi(y)})$. 固定 $y \in L$, 那么 L 能够写为一些 $L_\lambda(\mathrm{ad}_y))$ 的直和, 如果存在某个 $\lambda_0 \in \Bbbk$ 使得 $\varphi(L_{\lambda_0}(\mathrm{ad}_y)) \subsetneq L'_{\lambda_0}(\mathrm{ad}_{\varphi(y)})$, 那么由 L' 可以表示为一些 $L'_\mu(\mathrm{ad}_{\varphi(y)})$ 的直和可得 $\varphi(L) \subsetneq L'$, 这与 φ 是满射矛盾. 特别地, 由 φ 是满射可知 $\varphi(\mathscr{N}(L)) = \mathscr{N}(L')$. 根据 $\mathscr{E}(L')$ 的定义, 只需证明 σ' 是 $\mathscr{N}(L')$ 中元素决定的伴随变换对应的内自同构的情形即可. 任取 $x' \in \mathscr{N}(L')$, 可选取 $x \in L$ 使得 $\varphi(x) = x'$. 注意到 $e^{\mathrm{ad}_{x'}}\varphi = \varphi e^{\mathrm{ad}_x}$, 所以取 $\sigma = e^{\mathrm{ad}_x}$ 即可. □

现在我们能够对有限维可解 Lie 代数证明相应的共轭定理.

Theorem 2.128. 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维可解 Lie 代数, 那么 L 中任意两个 Cartan 子代数在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭.

Proof. 对正整数 $n = \dim_\Bbbk L$ 作归纳证明定理. 当 $n = 1$ 时, L 的 Cartan 子代数只有 L 自身, 结论直接成立. 现在假设结论对维数严格小于 n 的非零有限维 Lie 代数结论都成立. 不妨设 L 不是幂零的, 否则 L 依然是自身的 Cartan 子代数, 于是由 Cartan 子代数等价于极小 Engel 子代数迫使 L 的 Cartan 子代数只有自身, 结论成立. 所以下面我们可以假设 L 不是幂零 Lie 代数. 现在 L 是可解 Lie 代数, 所以存在正整数 k 使得 $L^{(k)} = 0$, 不妨设 k 是满足该条件最小的正整数, 那么由 L 不是幂零的知 $k \geq 2$. 于是 $L^{(k-1)}$ 是 L 的非零交换 Lie 理想. 于是我们可选取 L 的 $\Bbbk$-线性维数最小的交换 Lie 理想 A(由于 L 不是幂零的, 所以 $A \subsetneq L$). 记 $\pi : L \to L/A$ 是标准投射, 那么由 π 是满 Lie 代数同态, 可应用 [推论2.121(1)] 知对 L 的任何 Cartan 子代数 H_1, H_2(因为 L 非零, 故自然有 $H_1, H_2 \neq 0$) 有 $\pi(H_1), \pi(H_2)$ 是 L/A 的 Cartan 子代数. 因为 $\dim_\Bbbk L/A < n$ 并且 L/A 是 (非零) 可解 Lie 代数, 所以对 $L' = L/A$(相应地, 记 $\pi(H_1), \pi(H_2)$ 为 H'_1, H'_2) 应用归纳假设可知存在 $\sigma' \in \mathscr{E}(L/A)$ 使得 $\sigma'(H'_1) = H'_2$. 现在应用 [引理2.127], 存在 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\varphi} & L' \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma'} \\ L & \xrightarrow{\varphi} & L' \end{array}$$

记 $J_1=\pi^{-1}(H_1'),J_2=\pi^{-1}(H_2')$(那么由 [注记2.115], H_1 是 J_1 的 Cartan 子代数, H_2 是 J_2 的 Cartan 子代数. 此外, [例1.53] 表明 J_1,J_2 也是可解 Lie 代数), 易见 Lie 代数自同构 σ 给出 J_1 到 J_2 的 Lie 代数同构. 再注意到 $\sigma(H_1)\subseteq\sigma(J_1)=J_2$, 所以由 [推论2.121(1)] 可知 $\sigma(H_1)$ 也是 J_2 的 Cartan 子代数. 如果 $\dim_{\Bbbk}J_2<n$, 那么由 J_2 是非零有限维可解 Lie 代数, 对 J_2 和它的 Cartan 子代数 $\sigma(H_1),H_2$ 应用归纳假设可知存在 $\tau'\in\mathscr{E}(J_2)$ 使得 $\tau'\sigma(H_1)=H_2$. 而之前我们已经指出 $\mathscr{N}(J_2)\subseteq\mathscr{N}(L)$ 并且 $\mathscr{E}(J_2)$ 中元素都是 $\mathscr{E}(L)$ 中某个元素在 J_2 上的限制, 所以可选取 $\tau\in\mathscr{E}(L)$ 使 $\tau|_{J_2}=\tau'$. 于是 $\tau\sigma(H_1)=H_2$, 再由 $\tau\sigma\in\mathscr{E}(L)$ 得到结论.

根据前面的讨论, 要完成定理证明, 还需说明当 $\dim_{\Bbbk}J_2=n$ 时, H_1,H_2 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 这时我们有 $L=J_2$. 结合 $\sigma(J_1)=J_2$ 知也有 $L=J_1$. 那么由 $J_1=\pi^{-1}(H_1'),J_2=\pi^{-1}(H_2')$, 我们也看到 $L=H_1+A=H_2+A$. 因为 H_2 是 L 的 Cartan 子代数, 所以由 [定理2.119], 存在 $x\in L$ 使得 $H_2=L_0(\mathrm{ad}_x)$ 是极小 Engel 子代数. 现在 A 作为 L 的 Lie 理想可将 ad_x 限制于 A 上, 得到直和分解 $A=A_0(\mathrm{ad}_x)\oplus A_\star(\mathrm{ad}_x)$, 其中 $A_\star(\mathrm{ad}_x)$ 表示所有 $A_\lambda(\mathrm{ad}_x),\lambda\neq 0$ 的直和. 下面证明 $A_\star(\mathrm{ad}_x)=L_\star(\mathrm{ad}_x)$ 后再构造 $\sigma\in\mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma(H_2)=H_1$.

因为 $H_2=L_0(\mathrm{ad}_x)$, 故由 $[H_2,A_0(\mathrm{ad}_x)]\subseteq L_0(\mathrm{ad}_x)\cap A=A_0(\mathrm{ad}_x)$ 以及 A 是交换 Lie 代数可知 $[L,A_0(\mathrm{ad}_x)]=[H_2+A,A_0(\mathrm{ad}_x)]\subseteq A_0(\mathrm{ad}_x)$, 这说明 $A_0(\mathrm{ad}_x)$ 是 L 的 Lie 理想, 进而 $A_\star$ 也是 L 的 Lie 理想, 它们都是交换 Lie 理想. 根据 A 的选取, 必有 $A=A_0(\mathrm{ad}_x)$ 或 $A=A_\star(\mathrm{ad}_x)$. 假设 $A=A_0(\mathrm{ad}_x)\subseteq L_0(\mathrm{ad}_x)=H_2$, 则由 $L=A+H_2=H_2$ 得到 L 是幂零 Lie 代数, 与之前的假设矛盾. 所以这时 $A=A_\star(\mathrm{ad}_x)$. 现在通过

$$L=L_0(\mathrm{ad}_x)\oplus L_\star(\mathrm{ad}_x)=H_2\oplus L_\star(\mathrm{ad}_x)=H_2\oplus A_\star(\mathrm{ad}_x),A_\star(\mathrm{ad}_x)\subseteq L_\star(\mathrm{ad}_x)$$

迫使 $A_\star(\mathrm{ad}_x)=L_\star(\mathrm{ad}_x)$, 断言得证. 因为 $L=H_1+A$, 故由前面证明的 $A_\star(\mathrm{ad}_x)=L_\star(\mathrm{ad}_x)$ 可设 $x=h_1+x_\star$, 其中 $h_1\in H_1,x_\star\in A_\star(\mathrm{ad}_x)$. 注意到 ad_x 在 $L_\star(\mathrm{ad}_x)$ 上的限制没有零特征值, 即是可逆映射 (回忆 $[L_\lambda(\mathrm{ad}_x),L_\mu(\mathrm{ad}_x)]\subseteq L_{\lambda+\mu}(\mathrm{ad}_x),\forall\lambda,\mu\in\Bbbk$), 可选取 $y_\star\in L_\star(\mathrm{ad}_x)=A_\star(\mathrm{ad}_x)$ 使得 $x_\star=[x,y_\star]$. 现在由 A 是交换 Lie 理想知 $(\mathrm{ad}_{y_\star})^2=0$(作为 L 上线性变换), 所以 $e^{\mathrm{ad}_{y_\star}}=\mathrm{id}_L+\mathrm{ad}_{y_\star}$, 这里 $y_\star$ 是一些两两可交换的强 ad-幂零元的和, 根据 [例2.125], $e^{\mathrm{ad}_{y_\star}}\in\mathscr{E}(L)$, 记作 σ. 下面我们说明 $\sigma(H_2)=H_1$ 来完成定理证明.

根据 σ 的构造, $\sigma(x)=x+[y_\star,x]=x-x_\star=h_1\in H_1$, 所以由 H_1 是幂零 Lie 代数可知 $H_1\subseteq L_0(\mathrm{ad}_{h_1})=L_0(\mathrm{ad}_{\sigma(x)})$. 在 [引理2.127] 证明过程中已经指出 $L_0(\mathrm{ad}_{\sigma(x)})=\sigma(L_0(\mathrm{ad}_x))$, 这说明 $H_1\subseteq\sigma(H_2)$. 现在 H_1 和 $\sigma(H_2)$ 都是 L 的极小 Engel 子代数 ([注记2.120] 和 [推论2.121(1)]), 所以 $H_1=\sigma(H_2)$. □

[定理2.128] 在有限维可解 Lie 代数场景证明了共轭定理, 对一般情形, 我们需要对有限维 Lie 代数的极大可解 Lie 子代数作分析. 对域 $\Bbbk$ 上有限维 Lie 代数的极大可解 Lie 子代数, 称为该 Lie 代数的 **Borel 子代数**.

Example 2.129 (正根集产生的 Borel 子代数). 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, 有 Cartan 子代数 H. 设 Φ 是 L 关于 H 的根系, Δ 是 Φ 的基. $\Phi^+(\Delta)$ 是正根集. 那么

$$\mathfrak{b}(\Delta)=H\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+(\Delta)}L_\alpha\right)$$

是 L 的 Borel 子代数. $\mathfrak{b}(\Delta)$ 明显不是幂零的, 因为 $[H,L_\alpha]=L_\alpha,\forall\alpha\in\Phi$(回忆 [注记2.40]).

Proof. 由 [引理2.34] 知 $\mathfrak{b}(\Delta)$ 是 L 的 Lie 子代数. $\mathfrak{b}(\Delta)$ 的可解性来自 $[H,H]=0$ 以及 $\Phi^+(\Delta)$ 是有限集. 如果 $S\supseteq\mathfrak{b}(\Delta)$ 也是 L 的可解 Lie 子代数, 那么由 H 中元素决定的 B 上伴随变换两两可交换且可对角化可知存在 Φ

的子集 Θ(由 $S \supseteq \mathfrak{b}(\Delta)$, Θ 是非空的) 使得

$$S = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Theta} L_\alpha\right),$$

由此得到 $\Theta \supseteq \Phi^+(\Delta)$. 如果 $\beta \in \Theta$ 满足 $-\beta \in \Theta$, 那么由 $S \supseteq H \oplus L_\beta \oplus L_{-\beta}$, 利用 [引理2.37(4)] 得到 S 有 3 维单 Lie 子代数, 于是由可解 Lie 代数的 Lie 子代数可解得到该单 Lie 子代数可解, 这与 [推论1.108] 矛盾. 这一观察迫使 $\Theta = \Phi^+(\Delta)$. 所以 $S = \mathfrak{b}(\Delta)$, $\mathfrak{b}(\Delta)$ 是 Borel 子代数. □

Remark 2.130. 我们把该例得到的 Borel 子代数称为 (L 关于 H 的) **标准 Borel 子代数**. 因为 $\Phi^+(\Delta) = -\Phi^-(\Delta)$, 所以由 $H \neq 0$ 可知 L 关于 H 的标准子代数的 $\Bbbk$-线性维数严格大于 $\dim_\Bbbk L/2$. 对 Φ 的基 Δ, 如果记

$$\mathfrak{n}(\Delta) = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+(\Delta)} L_\alpha,$$

那么 $\mathfrak{n}(\Delta)$ 是幂零 Lie 代数: 任取 $\alpha \in \Phi^+(\Delta)$, 那么 $[L_\alpha, L_\beta] = 0$ 或 $\alpha+\beta \in \Phi^+(\Delta)$ 且 $\alpha+\beta$ 的高度严格大于 β 的高度 (利用 [引理2.34(1)] 和 [命题2.42]). 于是由 $\Phi^+(\Delta)$ 是有限集可知存在正整数 m 使得 $\mathfrak{n}(\Delta)^m = 0$, 即 $\mathfrak{n}(\Delta)$ 是含于标准 Borel 子代数 $\mathfrak{b}(\Delta)$ 中的幂零 Lie 代数. 因为 H 中元素决定的 $\mathfrak{b}(\Delta)$ 上伴随变换是可对角化的, 所以利用 [命题2.11] 可知 $\mathfrak{b}(\Delta)$ 中的 ad-幂零元在 $\mathfrak{n}(\Delta)$ 中. 因为 $[H, L_\alpha] = L_\alpha, \forall \alpha \in \Phi$ 以及 $[H, H] = 0$, 所以不难看到 $[\mathfrak{b}(\Delta), \mathfrak{b}(\Delta)] = \mathfrak{n}(\Delta)$, 所以也可以通过 [推论1.90] 和 $\mathfrak{b}(\Delta)$ 的可解性导出 $\mathfrak{n}(\Delta)$ 的幂零性. 并再指出 $\mathfrak{n}(\Delta)$ 中元素所给出的 L 上伴随变换都是幂零的, 这由 [引理2.34(1)] 和 Φ 的有限性可直接得到.

在 [例2.129] 的条件和记号下, $-\Delta$ 也是 Φ 的基, 所以我们从 [注记2.130] 也得到

$$\mathfrak{n}^-(\Delta) = \mathfrak{n}(-\Delta) = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^-(\Delta)} L_\alpha,$$

也是幂零 Lie 代数. 从 [例2.129] 也看到 $\mathfrak{b}^-(\Delta) = \mathfrak{b}(-\Delta)$ 也是给定有限维半单 Lie 代数的 Borel 子代数. 称

$$\mathfrak{b}^+(\Delta) = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+(\Delta)} L_\alpha\right), \mathfrak{b}^-(\Delta) = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi^-(\Delta)} L_\alpha\right)$$

为有限维半单 Lie 代数 L 关于 Cartan 子代数 H 的**正 Borel 子代数**和**负 Borel 子代数**. 并把

$$L = \mathfrak{n}^+(\Delta) \oplus H \oplus \mathfrak{n}^-(\Delta)$$

称为 L 关于 H 的**三角分解**. 根据 [命题1.154], 有标准 $\Bbbk$-代数同构:

$$\mathcal{U}(L) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+(\Delta)) \otimes_\Bbbk \mathcal{U}(H) \otimes_\Bbbk \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-(\Delta)).$$

Lemma 2.131. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维 Lie 代数, B 是 L 的 Borel 子代数. 那么:
(1) B 是自正规的, 即 $N_L(B) = B$.
(2) L 的 Borel 子代数都包含 $\mathrm{rad}L$ 并且 L 的 Borel 子代数全体与有限维半单 Lie 代数 $L/\mathrm{rad}L$ 的 Borel 子代数全体有标准双射.
(3) 设 L 是有限维半单 Lie 代数, H 是 Cartan 子代数, 那么 L 关于 H 所有的标准 Borel 子代数 (在 [例2.129] 的意义下) 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭.

Proof. (1) 设 $x \in N_L(B)$, 那么由 $[x, B] \in B$ 可知 $B + \Bbbk x$ 是 L 的 Lie 子代数, 并且由 $[B + \Bbbk x, B + \Bbbk x] \subseteq B$ 得到 $B + \Bbbk x$ 是可解 Lie 代数. 这迫使 $B = B + \Bbbk x$, 进而 $x \in B$.

(2) 因为 $\mathrm{rad}L$ 是 L 的可解 Lie 理想, 所以任何 L 的 Borel 子代数 B 满足 $B + \mathrm{rad}L$ 是可解 Lie 子代数 (利用 $(B + \mathrm{rad}L)/\mathrm{rad}L$ 也可解以及 [命题1.55]), 于是 $B \supseteq \mathrm{rad}L$. 如果 L 是可解的, 那么 L 的 Borel 子代数和 $L/\mathrm{rad}L$ 的 Borel 子代数只有零. 下设 L 不可解, 即 $L/\mathrm{rad}L \neq 0$, 那么不难看出 $L/\mathrm{rad}L$ 的可解 Lie 子代数都形如某个 L 的包含 $\mathrm{rad}L$ 的可解 Lie 子代数关于 $\mathrm{rad}L$ 的商. 由此易见 $\{L$的 Borel 子代数$\} \to \{L/\mathrm{rad}L$的 Borel 子代数$\}, B \mapsto B/\mathrm{rad}L$ 是双射.

(3) 设 L 关于 H 有基 Δ_1, Δ_2, 根据 [例2.129], 它们决定标准 Borel 子代数 $\mathfrak{b}(\Delta_1), \mathfrak{b}(\Delta_2)$, 记 $\Phi^+(\Delta_1), \Phi^+(\Delta_2)$ 是相应正根系, 应用 [命题2.95] 得到存在 $w \in \mathscr{W}$ 使得 $w(\Delta_1) = \Delta_2$. 这一观察说明 $w(\Phi^+(\Delta_1)) = \Phi^+(\Delta_2)$. 现在应用下面的 [引理2.132](并沿用其中的记号) 得到存在 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma|_{\mathfrak{t}(\Phi)} = \mathfrak{t}w\mathfrak{t}^{-1}|_{\mathfrak{t}(\Phi)}$(任何基 Δ 可 $\mathbb{Q}$-线性生成 Φ), 于是 $w(t_\alpha) = t_{w(\alpha)}, \forall \alpha \in \Phi$. 由此易见 $\sigma(H) = H$. 下面说明 σ 作用 $\mathfrak{b}(\Delta_1)$ 得到 $\mathfrak{b}(\Delta_2)$.

任取 $\alpha \in \Phi^+(\Delta_1)$ 以及 $x_\alpha \neq 0 \in L_\alpha$, 有 $\sigma(t_\alpha) = t_{w(\alpha)}$, 这里 $w(\alpha) \in \Phi^+(\Delta_2)$. 现在考虑 $x = \sigma(x_\alpha)$, 并对 $h \in H$, 记 $h' = \sigma^{-1}(h)$, 那么直接计算得到 $[h, x] = \sigma([h', x_\alpha]) = \alpha(h')\sigma(x_\alpha) = \kappa(t_\alpha, h')\sigma(x_\alpha)$. 现在由 σ 是 Lie 代数自同构得到 $\kappa(t_\alpha, h') = \kappa(\sigma(t_\alpha), \sigma(h'))$, 所以 $[h, x] = w(\alpha)(h)x$. 这说明 $x \in L_{w(\alpha)}$. 现在由 $L_\alpha = \Bbbk x_\alpha$ 得到 $\sigma(L_\alpha) \subseteq L_{w(\alpha)}$. 结合前面的 $\sigma(H) = H$ 得到 $\sigma(\mathfrak{b}(\Delta_1)) \subseteq \mathfrak{b}(\Delta_2)$. 把前面关于 σ 的讨论改为 σ^{-1} 便可证得 $\sigma^{-1}(\mathfrak{b}(\Delta_2)) \subseteq \mathfrak{b}(\Delta_1)$. 于是得到 $\sigma(\mathfrak{b}(\Delta_1)) = \mathfrak{b}(\Delta_2)$. □

Lemma 2.132. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, H 是 Cartan 子代数, Φ 是 L 关于 H 的根系, E 表示 Φ 在 [命题2.46] 意义下 Φ 生成的实内积空间, $\mathscr{W}$ 是 Φ(作为 E 中根系) 的 Weyl 群. 设 L 上 Killing 型 κ 给出的 $\Bbbk$-线性同构将 H^* 中元素 α 对应到 $t_\alpha \in H$. 记作 $\mathfrak{t}: H^* \to H, \alpha \mapsto t_\alpha$. 设 Δ 是 Φ 的基, $\beta \in \Delta$. 那么镜面反射 $\sigma_\beta: E \to E$ 满足存在 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma|_{\mathfrak{t}(\Delta)} = \mathfrak{t}\sigma_\beta\mathfrak{t}^{-1}|_{\mathfrak{t}(\Delta)}$(注意 $\mathfrak{t}\sigma_\beta\mathfrak{t}^{-1}$ 给出 $\mathfrak{t}(\Phi)$ 上双射). 特别地, 任何 $w \in \mathscr{W}$ 都满足存在 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma|_{\mathfrak{t}(\Delta)} = \mathfrak{t}w\mathfrak{t}^{-1}|_{\mathfrak{t}(\Delta)}$, 并且这时有 $\sigma(H) = H$.

Proof. 取定 $\beta \in \Delta$, $x_\beta \neq 0 \in L_\beta$, 根据 [引理2.37(4)(5)], 存在 $y_\beta \in L_{-\beta}$ 使得 $h_\beta = [x_\beta, y_\beta] \in H$ 满足 $h_\beta = 2t_\beta/\kappa(t_\beta, t_\beta)$. 注意这里 x_β, y_β 都是强 ad-幂零元, 所以 $\sigma = e^{\mathrm{ad}_{x_\beta}}e^{-\mathrm{ad}_{y_\beta}}e^{\mathrm{ad}_{x_\beta}} \in \mathscr{E}(L)$. 现在把 H 写作 $\mathrm{Ker}\beta \oplus \Bbbk t_\beta$(回忆 [命题2.39] 的证明过程), 那么由 x_β, y_β 的选取可知 $[x_\beta, h] = [y_\beta, h] = 0, \forall h \in \mathrm{Ker}\beta$. 现在设 D 是 $\mathfrak{t}(\Delta)$ 所生成的 H 的 $\mathbb{Q}$-子空间, 那么 $D \supseteq \Phi$ 并且可把 β 视作 D 上 $\mathbb{Q}$ 线性函数后把 D 分解为 $D = (\mathrm{Ker}\beta \cap D) \oplus \mathbb{Q}t_\beta$. 从而 $\sigma(h) = h = \mathfrak{t}\sigma_\beta\mathfrak{t}^{-1}(h), \forall h \in \mathrm{Ker}\beta \cap D$(回忆 $\kappa(h, t_\beta) = \beta(h), \forall h \in H$). 并且利用 [注记2.38] 中指出的且 $[x_\beta, y_\beta] = h_\beta, [h_\beta, x_\beta] = 2x_\beta, [h_\beta, y_\beta] = -2y_\beta$. 可直接计算得到 $\sigma(t_\beta) = -t_\beta$. 另一方面, 明显有 $\mathfrak{t}\sigma_\beta\mathfrak{t}^{-1}(t_\beta) = -t_\beta$, 因此 $\mathfrak{t}\sigma_\beta\mathfrak{t}^{-1}$ 和 σ 在 D 上的限制相同. 特别地, 也在 $\mathfrak{t}(\Delta)$ 上的限制相同. 现在应用 [定理2.98] 可知任何 $w \in \mathscr{W}$ 都满足存在 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma|_{\mathfrak{t}(\Delta)} = \mathfrak{t}w\mathfrak{t}^{-1}|_{\mathfrak{t}(\Delta)}$. 特别地, 对 Φ 的基 Δ 有 $\sigma(\mathfrak{t}(\Delta)) = \mathfrak{t}(w(\Delta))$. 所以由 $w(\Delta)$ 也是 Φ 的基以及 Δ 可 $\Bbbk$-线性生成 H 得到 $\sigma(H) = H$. □

现在我们使用 [引理2.131] 来证明关于 Borel 子代数的共轭定理.

Theorem 2.133. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维 Lie 代数, 那么 L 的任意两个 Borel 子代数在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭.

Proof. 对 $n = \dim_{\Bbbk} L \geq 1$ 作归纳证明结论. 当 $n = 1$ 时, L 的 Borel 子代数便是 L 自身, 结论直接成立. 现在设结论对维数不超过 $n - 1 (n \geq 2)$ 的 Lie 代数成立. 当 L 不是半单 Lie 代数时, $\dim_{\Bbbk} L/\mathrm{rad}L < n$, 于是由归纳假设, $L' = L/\mathrm{rad}L$ 中任意两个 Borel 子代数共轭. 任给 L 的两个 Borel 子代数 B_1, B_2, 由 [引理2.131(2)], 它们对应

$L/\mathrm{rad}L$ 中的 Borel 子代数 $B_1/\mathrm{rad}L$ 和 $B_2/\mathrm{rad}L$, 之前提到归纳假设保证存在 $\sigma' \in \mathscr{E}(L')$ 使得 $\sigma'(B_1/\mathrm{rad}L) = B_2/\mathrm{rad}L$. 因此把 [引理2.127] 应用于标准投射 $\pi: L \to L'$ 得到的内自同构 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$ 满足 $\sigma(B_1) \subseteq B_2$. 注意到 $\sigma(B_2)$ 也是 L 的 Borel 子代数, 所以 $\sigma(B_1) = B_2$. 这说明当 L 不是有限维半单 Lie 代数时结论成立. 以下可设 L 是有限维半单 Lie 代数. 因为 ($\mathscr{E}(L)$ 的作用下的) 共轭关系是传递的, 并且 [引理2.131(3)] 表明 L 关于给定的 Cartan 子代数 H 的所有标准 Borel 子代数 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭是共轭的, 所以我们只需证明: 固定 L 的 Cartan 子代数 H, 并设 B 是关于 H 的一个标准 Borel 子代数, 那么 L 的任何 Borel 子代数和 B 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭即可. 任给 L 的 Borel 子代数 B', 那么 $B \cap B'$ 是 L 的可解 Lie 子代数并且 $\Bbbk$-线性维数不超过 $\dim_{\Bbbk} B$. 如果 $\dim_{\Bbbk} B \cap B' = \dim_{\Bbbk} B$, 即 $B \cap B' = B$, 那么由 B 的极大性得到 $B = B'$, 结论成立. 下面对自然数 $\ell = \dim_{\Bbbk} B - \dim_{\Bbbk} B \cap B'$ 作归纳证明 Borel 子代数 B' 和 B 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 前面指出 $\ell = 0$ 时结论成立. 现在假设结论对满足 $\dim_{\Bbbk} B \cap B'' > \dim_{\Bbbk} B \cap B'$ 的 Borel 子代数 B'' 成立, 即这时 B'' 与 B 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭, 我们需要证明 B 和 B' 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 先考虑 $B \cap B' \neq 0$ 的情形:

Case 1. 当 $B \cap B' \neq 0$ 且 $B \cap B'$ 中存在 $x \neq 0$ 使得 ad_x 是幂零变换时, 记 $N' = \{x \in B \cap B' | \mathrm{ad}_x \text{是} L \text{上幂零变换}\}$, 由 $N' \subseteq B$, 根据 [注记2.130] 可知 N' 是 B 的 $\Bbbk$-子空间 (如果设 Δ 是定义 B 的根系的基, 即 $B = \mathfrak{b}(\Delta)$, 那么 $N' \subseteq \mathfrak{n}(\Delta)$) 并且 $[B \cap B', B \cap B']$ 中元素决定的 L 上伴随变换都是幂零的 (依然由 [注记2.130], 沿用前面的记号, 当 $B = \mathfrak{b}(\Delta)$ 时, $[B \cap B', B \cap B'] \subseteq \mathfrak{n}(\Delta)$), 根据 N' 的定义便知 $[N', B \cap B'] \subseteq B \cap B'$, 即 N' 是 $B \cap B'$ 的 Lie 理想. 但 N' 不是 L 的 Lie 理想, 若不然, 则 $[N', L] \subseteq N' \subseteq B$. 如果 $B = \mathfrak{b}(\Delta)$, 利用 $\Phi = \Phi^+(\Delta) \cup \Phi^-(\Delta)$, 沿用 [注记2.130] 的记号: 对任何 $x \neq 0 \in N' \subseteq \mathfrak{n}(\Delta)$, 设 x 表示为一些 $L_\alpha (\alpha \in \Phi^+(\Delta))$ 中非零元素的和后, β 是表达式中关于 Δ 高度最小的正根的指标对应的根, 那么 $\beta \in \Delta$ 并且任取 $L_{-\beta}$ 中非零元 y, $[x, y]$ 作为 B 中元素, 在 [例2.129] 中标准 Borel 子代数直和分解下, 关于直和项 H 的标准投射非零. 这和 $N' \subseteq \mathfrak{n}(\Delta)$ 矛盾. 所以 N' 不是 L 的 Lie 理想. 特别地, 正规化子 $N_L(N')$ 是 L 的真 Lie 子代数, 以下记 $K = N_L(N') \supseteq N' \neq 0$. 前面提到 $K \subsetneq L$, 这里再指出 N' 作为 $B \cap B'$ 的 Lie 理想表明 $B \cap B' \subseteq B \cap K, B' \cap K$.

下面说明 $B \cap B'$ 是 $B \cap K$ 和 $B' \cap K$ 的真子集, 一旦证明该断言, 注意到 $B \cap K$ 和 $B' \cap K$ 都是 K 的可解 Lie 子代数 (因为这时 B 可解, 再应用 [例1.53]), 于是可选取 K 的 Borel 子代数 C, C' 满足 $C \supseteq B \cap K, C' \supseteq B \cap K'$. 因为 $K \subsetneq L$, 所以由归纳假设, 存在 $\sigma \in \mathscr{E}(K)$ 使得 $\sigma(C') = C$. K 作为 L 的 Lie 子代数, σ 可自然视作 $\mathscr{E}(L)$ 中某个元素的限制映射 (见 [定理2.126] 之前的讨论), 所以可不妨设 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$. 如果我们能够证明前面的断言, 那么这时 $B \cap B'$ 是 C 和 C' 的 (非零) 真 Lie 子代数. 因此如果取定一个 L 中包含可解 Lie 子代数 $\sigma(C') = C$ 的 Borel 子代数 B'', 那么 $B'' \cap B \supsetneq B \cap K \supsetneq B \cap B'$, 进而对 Borel 子代数 B'' 应用对 $\dim_{\Bbbk} B \cap B'$ 作的归纳假设可知存在 $\tau \in \mathscr{E}(L)$ 使得 $\tau(B'') = B$. 特别地, $\tau\sigma(C') \subseteq B$. 所以利用 $B \cap \tau\sigma(B') \supseteq \tau\sigma(C') \cap \tau\sigma(B') \supseteq \tau\sigma(B' \cap K) \supsetneq \tau\sigma(B \cap B')$ 知可对 Borel 子代数 $\tau\sigma(B')$ 应用归纳假设, 于是得到存在 $\theta \in \mathscr{E}(L)$ 满足 $\theta\tau\sigma(B') = B$, 这说明 B 和 B' 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 于是知我们只要能够证明前面的断言, 便能得到 $B \cap B', N' \neq 0$ 时 B 和 B' 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 现在证明断言, 即 $B \cap B'$ 是 $B \cap K$ 和 $B' \cap K$ 的真子集. 由于 N' 是 $B \cap B'$ 的 Lie 理想, N' 可通过伴随变换诱导 $B/(B \cap B')$ 和 $B'/(B \cap B')$ 上的幂零线性变换. 以 $B/(B \cap B')$ 的情形为例, 对 Lie 定理取 $V = B/(B \cap B')$(根据假设, 这时 $V \neq 0$, 否则 $B = B'$), 相应的 $\mathfrak{gl}(V)$ 的可解 Lie 子代数取为 N' 中所有元素由伴随变换对应的 V 上线性变换全体, 由 N' 的幂零性保证了可解性, 故可应用 Lie 定理得到 N' 中所有元素对应的 $B/(B \cap B')$ 上幂零线性变换有公共特征向量. 因此可设 B 中元素 $y \notin B \cap B'$ 满足 $[N', y] \subseteq B \cap B'$. 再注意到 $[N', y] \subseteq [B, B]$, B 的可解性保证 $[B, B]$ 是幂零 Lie 代数 (回忆 [推论1.90]), 故 $[N', y] \subseteq N'$. 于是 $y \in N_B(N') = K \cap B$. 因此由 $B \cap B' \subseteq B \cap K$ 可知 $B \cap B'$ 是 $B \cap K$ 的真子集. 前面关于 $B \cap B' \subsetneq B \cap K$ 的

讨论对 B 只用到了 B 的可解性, 所以对 B' 使用完全类似的讨论便可得到 $B\cap B'\subsetneq B'\cap K$.

Case 2. 现在设 $B\cap B'\neq 0$ 并且 $B\cap B'$ 中非零元素诱导的 L 上伴随变换都不是幂零变换. 任取 L 的 Borel 子代数 $\hat{B}$, 我们说明 $\hat{B}$ 中任何元素的半单部分和幂零部分都在 $\hat{B}$ 中 (回忆前面我们已经假设了 L 是半单的). 设 $x\in\hat{B}$ 的半单部分是 x_s, 幂零部分是 x_n. 因为 $\mathrm{ad}_x(B)\subseteq B$, 所以由 $\mathrm{ad}_{x_s},\mathrm{ad}_{x_n}$ 能够表示为关于 ad_x 的 $\Bbbk$ 上常数项为零的多项式 (回忆 [推论2.13]), 所以 $x_s,x_n\in N_L(\hat{B})$, 那么通过 [引理2.131] 可知 $x_s,x_n\in\hat{B}$. 于是 $B\cap B'$ 中非零元素 x 诱导的伴随变换就是半单部分诱导的伴随变换, 即 $T=B\cap B'$ 是 L 的环面 Lie 子代数. 现在设 B 是 L 关于 H 的根系 Δ 的基 Δ 给出的标准 Borel 子代数, $B=\mathfrak{b}(\Delta)$, 沿用 [注记2.130] 中的记号, B 有幂零 Lie 子代数 $N=\mathfrak{n}(\Delta)=[B,B]$ 满足 $B=H\oplus N$. 特别地, $B\cap N=0$ 表明 $T\cap N=0$. 所以如果 $x\in B$ 满足 $[x,T]\subseteq T$, 那么由 $[x,T]\subseteq[B,B]=N$ 得到 $[x,T]=0$. 这一观察说明 $N_B(T)=C_B(T)$. 设 C 是 $C_B(T)$ 的 Cartan 子代数, 则 C 是幂零 Lie 代数并且 $N_{C_B(T)}(C)=C$. 由 $T\subseteq B$ 和 $T\subseteq C_B(T)$(因为 T 作为 L 的环面 Lie 子代数是交换的) 得到 $T\subseteq N_{C_B(T)}(C)=C$. 下面说明 $N_B(C)=N_{C_B(T)}(C)=C$: 首先由 C 是 $C_B(T)$ 的 Cartan 子代数我们已经看到 $N_{C_B(T)}(C)=C\subseteq N_B(C)$. 下面通过说明 $N_B(C)\subseteq C_B(T)$, 再利用 C 是 $C_B(T)$ 的 Cartan 子代数来得到 $N_B(C)\subseteq N_{C_B(T)}(C)=C$. 任取 $n\in N_B(C)$ 和 $t\in T\subseteq C$, 那么 $[n,t]\in C$. 于是由 C 是幂零 Lie 代数知 ad_t 作为 C 上线性变换是幂零的, 从而存在正整数 l 使得 $(\mathrm{ad}_t)^l(n)=0$. 现在 $t\in T$ 是环面 Lie 子代数中的元素表明 ad_t 作为 L 上线性变换可对角化, 所以 ad_t 作为 C 上线性变换依然可对角化, 于是由 $(\mathrm{ad}_t)^l(n)=0$ 可得 $\mathrm{ad}_t(n)=0$(取定 C 的基后转化为可对角化矩阵的正整数幂数乘 n 对应的坐标向量为零, 例如设 ad_t 的表示矩阵是 X, n 对应的坐标向量是 v, 那么 $X^lv=0$. 设可逆矩阵 P 满足 $P^{-1}XP$ 是对角阵, 第 i 个对角元记作 μ_i. 那么 $(P^{-1}X^lP)(P^{-1}v)=0$, 考察等式右边的第 j 分量得到 μ_j^l 数乘 $P^{-1}v$ 的第 j 分量是零. 所以 $\mu_j=0$ 或 $P^{-1}v$ 的第 j 分量是零. 由此看到总有 $Xv=0$, 进而 $[t,n]=0$). 于是 $[t,n]=0$ 以及 T 的任意性说明 $N_B(C)\subseteq C_B(T)$. 所以根据前面的讨论, 我们得到 $N_B(C)=N_{C_B(T)}(C)=C$. 特别地, 由 C 是幂零 Lie 代数和 $N_B(C)=C$ 得到 C 也是 B 的 Cartan 子代数, 并且前面已经看到 $C\supseteq T$. 因为 B 是可解的, 所以我们可以应用 [定理2.128] 得到 C 和 H(注意 H 作为 L 的 Cartan 子代数也是 B 的 Cartan 子代数, 回忆 [注记2.115]) 在 $\mathscr{E}(B)$ 的作用下共轭, 同样 $\mathscr{E}(B)$ 中元素可视作 $\mathscr{E}(L)$ 中元素在 B 中的限制可推得存在 $\theta\in\mathscr{E}(L)$ 使得 $\theta(C)=H$ 且 $\theta(B)=B$. 于是 $B\cap\theta(B')=\theta(B)\cap\theta(B')=\theta(T)\subseteq\theta(C)=H$. 这说明我们可不妨设 $T\subseteq H$: 一旦对 $T\subseteq H$ 的情形证明相应 B' 和 B 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭, 那么对一般情形, 将 $T\subseteq H$ 时得到的结论应用于 Borel 子代数 $\theta(B')$ 可知 B 和 $\theta(B')$ 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 因此下面我们设 $T\subseteq H$ 来证明这时 B 和 B' 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 当 $T=H$ 时, 由 $T=B\cap B'$ 知 $B'\supseteq H$, 而 B' 是极大可解 Lie 子代数迫使 $B'\supsetneq H$(否则 $B'=H\subsetneq B$, 矛盾). 考虑 L 关于 Cartan 子代数 H 的根子空间分解, 由 $B'\supsetneq H$ 可知存在 $\alpha\in\Phi^-(\Delta)$ 使得 $B'\supseteq L_\alpha$(原因是 H 中的元素决定的 B' 上伴随变换是两两可交换的线性变换, 依然能考虑 B' 关于 H 的根子空间分解. 如果该子空间分解直和项中的根空间都是由 $\Phi^+(\Delta)$ 中的根给出的, 那么 $B'\subseteq B$, 得到 $B=B'$, 与假设矛盾). 将 [引理2.132] 应用于 $\alpha\in\Phi^-(\Delta)$, 可得存在 $\tau_\alpha\in\mathscr{E}(L)$ 使得 $\tau_\alpha(t_\beta)=t_{\sigma_\alpha(\beta)},\forall\beta\in\Phi$, 并且 $\tau_\alpha(H)=H$. 特别地, $\tau_\alpha(t_\alpha)=t_{-\alpha}$, 我们说明 $\tau_\alpha(L_\alpha)=L_{-\alpha}$: 取定 $x\neq 0\in L_\alpha$, 则 $[x,h]=\alpha(h)x=\kappa(t_\alpha,h),\forall h\in H$. 两边同时作用 τ_α 利用 $\tau_\alpha(t_\alpha)=t_{-\alpha}$ 便知 $\tau_\alpha(x)\in L_{-\alpha}$. 由 [命题2.39] 易见 $\tau_\alpha(L_\alpha)=L_{-\alpha}$. 现在 $\tau_\alpha\in\mathscr{E}(L)$ 将 B' 映至的 (L 的)Borel 子代数 B'' 满足 $B''\cap B\supseteq H\oplus L_{-\alpha}$, 所以 $\dim_\Bbbk B''\cap B>\dim_\Bbbk B'\cap B$, 由归纳假设得到 $B''=\tau_\alpha(B')$ 和 B 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭, 进而 B 和 B' 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭.

总结一下, 前面在 $T\subseteq H$ 的假设下, 对 $T=H$ 的情形证明了 B 和 B' 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 现在我们考虑 $T\subsetneq H$ 的场景. 因为 L 是半单的, [注记1.61] 指出 $Z(L)=0$, 所以 $T\neq 0$ 表明 $C_L(T)$ 是 L 的真 Lie 子代

数. 下面分 $B' \subseteq C_L(T)$ 和 $B' \nsubseteq C_L(T)$ 两种情况讨论. 当 $B' \subseteq C_L(T)$ 时, 由于 $C_L(T)$ 是 L 的真 Lie 子代数且 B' 是 $C_L(T)$ 的 Borel 子代数, 所以可对 (非零) 有限维 Lie 代数 $C_L(T)$ 和 $C_L(T)$ 中包含 H(因为 $[H,H]=0$ 且 $T \subseteq H$) 的 Borel 子代数 B'' 应用最开始的归纳假设得到存在 $\sigma \in \mathscr{E}(C_L(T))$(它可视作 $\mathscr{E}(L)$ 中某个内自同构在 $C_L(T)$ 上的限制) 使得 $\sigma(B') = B''$. 于是由 $B'' \cap B \supsetneq T = B \cap B'$, 知 $\dim_{\Bbbk} B'' \cap B > \dim_{\Bbbk} B' \cap B$, 进而由第二个归纳假设得到 $B'' = \sigma(B')$ 和 B 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭, 于是 B 和 B' 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 现在我们考虑 $B' \nsubseteq C_L(T)$ 的情形. 由 T 中元素决定的 L 上伴随变换都可对角化 (回忆前面已经看到 T 是环面 Lie 子代数) 可知 T 中元素决定的 B' 上伴随变换也可对角化, 于是由 $B' \nsubseteq C_L(T)$ 可知 B' 中总存在 $x \neq 0$ 使得 x 是 T 中所有元素决定的 B' 上伴随变换的公共特征向量并且存在某个 $t_0 \in T$ 使得 $[t_0, x] \neq 0$. 于是可选取 $t \in T$ 使得存在正有理数 q 满足 $[t,x] = qx$(例如选取 $t_0 \in T$ 满足 $[t_0, x] = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, 两边乘上适当 $1/\lambda$ 后选取 $t = t_0/\lambda$). 设 $\Gamma = \{\alpha \in \Phi | \alpha(t) \in \mathbb{Q}^+\}$. 那么前面的讨论表明 Γ 非空, 作 L 的 $\Bbbk$-子空间

$$S = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Gamma} L_\alpha \right),$$

那么由 [引理2.34(1)] 易见 S 是 L 的 Lie 子代数并且由 [引理2.34(1)], [注记2.40] 和 $[H,H]=0$ 易知 $[S,S]$ 就是所有 $L_\alpha (\alpha \in \Gamma)$ 的直和, 再利用 Φ 是有限集和 Γ 的构造可知 $[S,S]$ 是幂零 Lie 代数. 所以 [推论1.90] 表明 S 是可解 Lie 代数. 并且注意前面选取的 x, t 满足 $[t,x] = qx$ 蕴含 $x \in S$(注意 $q, x \neq 0$ 也说明 $x \notin T$, 回忆 T 是交换 Lie 代数). 现在任取 L 的包含 S 的 Borel 子代数 B'', 那么由 $T \subseteq H$, $B'' \supseteq T + \Bbbk x = T \oplus \Bbbk x$. 结合 $B' \supseteq T \oplus \Bbbk x$ 便知 $B'' \cap B' \supsetneq T = B' \cap B$. 同样地, 由 $B'' \supseteq S \supseteq H$ 可知 $B \cap B'' \supseteq H \supsetneq T$, 特别地, $\dim_{\Bbbk} B \cap B'' > \dim_{\Bbbk} B' \cap B$. 由第二个归纳假设, 得到 B'' 和 B 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 设有 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$ 满足 $\sigma(B'') = B$. 对 $B'' \cap B' \supsetneq B' \cap B$ 两边作用 σ 得到 $B \cap \sigma(B') \supsetneq \sigma(B' \cap B)$. 这说明 $\dim_{\Bbbk} B \cap \sigma(B') > \dim_{\Bbbk} B' \cap B$. 由 $\sigma(B')$ 是 L 的 Borel 子代数以及第二个归纳假设便知 B' 和 B 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭.

前面的讨论证明了在归纳假设下, 当 $B \cap B' \neq 0$ 时, B' 和 B 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 现在考察 $B \cap B' = 0$ 的情形, 我们将用反证法说明不可能有 $B \cap B' = 0$. 这时 $\dim_{\Bbbk} L \geq \dim_{\Bbbk} B + \dim_{\Bbbk} B'$, 进而由 [注记2.130] 中指出的 $\dim_{\Bbbk} B > (\dim_{\Bbbk} L)/2$ 得到 $\dim_{\Bbbk} B' < (\dim_{\Bbbk} L)/2$. 现在设 T 是 B' 所包含的 L 的环面 Lie 子代数中的极大元. 当 $T = 0$ 时, B' 中元素决定的 B' 上伴随变换都是幂零的 (因为前面的证明过程中已经看到 Borel 子代数中元素的半单部分和幂零部分依然在该 Borel 子代数内), 进而由 Engel 定理导出 B' 是幂零 Lie 代数. 结合 $N_L(B') = B'$(应用 [引理2.131(1)]) 可知 B' 是 L 的 Cartan 子代数. 但现在 L 是半单的, [定理2.119] 表明 B' 是 L 的极大环面 Lie 子代数, 这与 $T = 0$ 矛盾. 如果 $T \neq 0$, 因为 T 是 L 的环面 Lie 子代数, 所以可选取 L 的极大环面 Lie 子代数 $H_0 \supseteq T$, 那么任何关于 L 的 Cartan 子代数 H_0 的标准 Borel 子代数 B'' 都和 B' 相交非零. 应用前面 $B \cap B' \neq 0$ 情形证明的结论, B'' 和 B' 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭. 特别地, 根据 [注记2.130], $\dim_{\Bbbk} B' = \dim_{\Bbbk} B'' > (\dim_{\Bbbk} L)/2$. 这与前面指出的 $\dim_{\Bbbk} B' < (\dim_{\Bbbk} L)/2$ 矛盾. 所以必有 $B \cap B' \neq 0$. $\square$

现在我们应用 Borel 子代数的共轭定理来证明有限维 Lie 代数的任意两个 Cartan 子代数共轭:

Corollary 2.134. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上非零有限维 Lie 代数, 那么 L 的任意两个 Cartan 子代数在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下共轭.

Proof. 设 L 有 Cartan 子代数 H_1, H_2, 它们作为幂零 Lie 代数都是可解的. 因此存在 L 的 Borel 子代数 B_1, B_2 使得 $B_1 \supseteq H_1, B_2 \supseteq H_2$. 在 [注记2.115] 中已经指出这时 H_1, H_2 分别也是 B_1, B_2 的 Cartan 子代数. 首先应用 [定

理2.133] 得到存在 $\sigma_1 \in \mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma_1(B_1) = B_2$, 于是由 H_1 是 B_1 的 Cartan 子代数以及 [推论2.121(1)] 得到 $\sigma_1(H_1)$ 和 H_2 都是 B_2 的 Cartan 子代数. 现在应用 [定理2.128] 得到存在 $\sigma_2 \in \mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma_2\sigma_1(H_1) = H_2$. □

Corollary 2.135. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, 那么 L 关于极大环面 Lie 子代数的根系确定的 Dynkin 图 (在同构意义下) 不依赖于极大环面 Lie 子代数和根系的选取.

Proof. 设 L 有极大环面 Lie 子代数 H_1, H_2, 根据 [定理2.119], 这也是 L 的两个 Cartan 子代数. 设 Φ_1, Φ_2 分别是 L 关于 Cartan 子代数 H_1, H_2 的根系. 根据 [推论2.134], 存在 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma(H_1) = H_2$. 任取 $\alpha \in \Phi_1$, 用 $\alpha\sigma^{-1}$ 表示 α 所诱导的 H_2 上 $\Bbbk$-线性函数. 那么对任何 $\alpha \in \Phi_1$ 有 $\alpha\sigma^{-1} \in \Phi_2$: 如果 $x \in L_\alpha$, 那么

$$[h_1, x] = \alpha(h_1)x, \forall h_1 \in H_1,$$

两边作用 σ 得到 $[h_2, \sigma(x)] = \alpha\sigma^{-1}(h_2)\sigma(x), \forall h_2 \in H_2$. 于是 $\sigma(L_\alpha)$ 就是 L 关于 $\alpha\sigma^{-1} \in \Phi_2$ 的根子空间. 易见 $\Phi_2 = \{\alpha\sigma^{-1} | \alpha \in \Phi_1\}$. 如果记 Δ_1 是 Φ_1 的基, 那么 $\Delta_2 = \{\alpha\sigma^{-1} | \alpha \in \Phi_1\}$ 就是 Φ_2 的基. 之前我们已经通过 Weyl 群在根系的全体基上作用的传递性看到根线关于基的 Dynkin 图 (在同构意义下) 和基的选取无关, 所以可使用 Δ_1 和 Δ_2 分别给出 L 关于 H_1 的根系 Φ_1 和 L 关于 H_2 的根系 Φ_2 的 Dynkin 图, 根据 Δ_2 的构造, 它和 Δ_1 有自然的双射关系, 并且该双射对应的 Dynkin 图间的顶点集对应明显是保持边数的, 这来自 σ^{-1} 作为 Lie 代数自同构保持 Killing 型和 L 的 Cartan 子代数的 $\Bbbk$-对偶空间上内积的定义 (这里再指出不难验证 $\sigma(t_\alpha) = t_{\alpha\sigma^{-1}}, \forall \alpha \in H_1^*$, 如果记 E_1 和 E_2 分别是 Φ_1 和 Φ_2 在 [命题2.46] 意义下所在的实内积空间, 那么 Δ_1 和 Δ_2 间的自然双射诱导 E_1 和 E_2 之间保持实内积的线性同构). □

Remark 2.136. 从证明过程我们看到 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数 L 关于 Cartan 子代数 H_1, H_2 的根系 Φ_1, Φ_2 所在的实内积空间 E_1, E_2 可经 Δ_1 和 Δ_2 间的自然双射诱导保持内积的线性同构, 于是由 [定理2.98] 容易验证 Φ_1 的 Weyl 群和 Φ_2 的 Weyl 群间有自然的群同构. 因此 Weyl 群也是有限维半单代数的不变量.

Corollary 2.137. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, 那么同构的 (非零) 有限维半单 Lie 代数对应相同的 Dynkin 图.

Proof. 设 $\varphi : L \to L'$ 是 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数间的 Lie 代数同构, H 是 L 的 Cartan 子代数, 那么 [推论2.121(1)] 表明 $\varphi(H)$ 是 L' 的 Cartan 子代数. 如果记 κ, κ' 分别是 L 和 L' 的 Killing 型, 那么由 φ 是 Lie 代数同构知 $\kappa(x, y) = \kappa'(\varphi(x), \varphi(y)), \forall x, y \in L$. 类似 [推论2.135] 的证明过程 (并沿用其中的记号) 可知如果记 Φ 是 L 关于 H 的根系, 那么 $\Phi' = \{\alpha\sigma^{-1} | \alpha \in \Phi\}$ 是 L' 关于 $H' = \varphi(H)$ 的根系. 取定 Φ 的基 Δ 后可自然对应 Φ' 的基 $\Delta' = \{\alpha\sigma^{-1} | \alpha \in \Phi\}$. 现在 Δ 和 Δ' 间有自然的双射, 再结合 φ 保持 Killing 型蕴含该双射对应顶点间的边数一致. 因此由 Δ 得到的 L 的 Dynkin 图和 Δ' 得到的 L' 的 Dynkin 图相同. 再由 [推论2.135] 得到结论. □

2.10 同构定理

给定特征零的代数闭域上的 (非零) 有限维半单 Lie 代数 L, 并固定 L 的 Cartan 子代数 H, 那么 L 关于 H 有根系 Φ 的基 Δ 能够决定某个 Dynkin 图. 之前我们看到对应的 Dynkin 图与 H, Φ 以及 Δ 的选取无关 (见 [命题2.95] 和 [推论2.135]). 因此 Dynkin 图由 L 唯一决定. 在 [推论2.137] 中我们也看到同构的有限维半单 Lie 代数对应相同的 Dynkin 图. 本节的主要目标是证明其逆命题也成立:

Theorem 2.138. 特征零的代数闭域上两个 (非零) 有限维半单 Lie 代数同构当且仅当它们的 Dynkin 图相同.

[定理2.138] 表明 (特征零的代数闭域上非零) 有限维半单 Lie 代数同构类由对应的 Dynkin 图唯一决定, 即 Dynkin 图可用于完全分类有限维半单 Lie 代数. 并注意 [命题2.64] 指出有限维半单 Lie 代数是单 Lie 代数当且仅当对应的 Dynkin 图是连通的 (也见 [注记2.73]), 有限维半单 Lie 代数分解为单 Lie 代数直和后, 半单 Lie 代数的 Dynkin 图就是这些单 Lie 代数直和项对应的 Dynkin 图的并 (回忆 [定理2.65]), 不同单 Lie 代数直和项对应的 Dynkin 图间不存在边相连. 所以由 [定理2.65], [定理2.138] 的证明可化归为证明有限维单 Lie 代数的情形. 在正式证明有限维单 Lie 代数的 Dynkin 图完全决定 Lie 代数结构前, 我们记录

Proposition 2.139. 设 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维半单 Lie 代数, H 是 Cartan 子代数, Φ 是 L 关于 H 的根系, Δ 是 Φ 的基. 那么 L 作为 Lie 代数有生成元集 $\{x_\alpha \neq 0 \in L_\alpha, y_\alpha \neq 0 \in L_{-\alpha} | \alpha \in \Delta\}$. 对 $\alpha \in \Delta$, 记 $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$, 称 $\{x_\alpha \neq 0 \in L_\alpha, y_\alpha \neq 0 \in L_{-\alpha}, h_\alpha \in H | \alpha \in \Delta\}$ 是 L(关于 Δ) 的**标准生成元集**.

Proof. 任给 $\beta \in \Phi^+(\Delta)$, 由 [注记2.62], 存在 $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Delta$ 使得 $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ 使得对任何 $1 \leq i \leq k$ 使得 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i \in \Phi^+(\Delta)$, 于是由 [命题2.42] 可知 L_β 含于 $\{x_\alpha \neq 0 \in L_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ 生成的 Lie 代数. 类似地, $L_{-\beta}$ 含于 $\{y_\alpha \neq 0 \in L_{-\alpha} | \alpha \in \Delta\}$ 生成的 Lie 代数. 由 [引理2.37(3)] 以及 H 可由 $\{t_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ 来 $\Bbbk$-线性生成可知 H 含于 $\{x_\alpha \neq 0 \in L_\alpha, y_\alpha \neq 0 \in L_{-\alpha} | \alpha \in \Delta\}$ 生成的 Lie 代数. □

Remark 2.140. 设 Δ 是 Φ 的基, 如果对 $\alpha \in \Phi$, 选取 $x_\alpha \in L_\alpha, y_\alpha \in L_{-\alpha}$ 满足 $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 2/\kappa(t_\alpha, t_\alpha)$, 那么 [引理2.37(4)(5)] 表明这时 $\Bbbk h_\alpha \oplus \Bbbk x_\alpha \oplus \Bbbk y_\alpha$ 是 3 维单 Lie 代数, 同构于 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$, 且 $\alpha(h_\alpha) = 2$.

之前我们已经指出 [定理2.138] 可经 [定理2.65] 视作下述定理的直接推论:

Theorem 2.141 (有限维单 Lie 代数的同构定理)**.** 设 L, L' 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维单 Lie 代数, 满足对应相同的 Dynkin 图. 那么 L 和 L' 作为 $\Bbbk$-Lie 代数同构.

Proof. 先引入些记号, 设 L 和 L' 分别有 Cartan 子代数 H, H', Φ 是 L 关于 H 的根系, Φ' 是 L' 关于 H' 的根系. 由 [命题2.64], Φ 和 Φ' 都是不可约根系. Δ 和 Δ' 分别是 Φ 和 Φ' 作为根系的基. 根据 [推论2.135], L 和 L' 的 Dynkin 图分别可由 Δ 和 Δ' 诱导. 如果 L 和 L' 具有 (同构意义下) 相同的 Dynkin 图, 则由 [推论2.79], 存在双射 $\varphi : \Delta \to \Delta'$ 使得对任何 $\alpha, \beta \in \Delta$ 有

$$\frac{2(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))}{(\varphi(\beta), \varphi(\beta))} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}.$$

设 E, E' 分别是在 [命题2.46] 意义下 Φ 和 Φ' 所在的内积空间, 为叙述方便, 这里不区别 E, E' 的内积记号, 并且对 $\alpha, \beta \in \Phi$, 记 $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$, 类似对 Φ_2 中根对应的 Cartan 整数引入此记号. 现在由 [命题2.102], φ 可 $\mathbb{R}$-线性延拓为 $\mathbb{R}$-线性同构 $\hat{\varphi} : E \to E'$ 使得 $\hat{\varphi}(\Phi) = \Phi'$, $\hat{\varphi}|_\Delta = \varphi$ 并且

$$\langle \hat{\varphi}(\alpha), \hat{\varphi}(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle, \forall \alpha, \beta \in \Phi.$$

在 [命题2.102] 的证明过程中已经指出存在正实数 c 使得 $c^{-1}\hat{\varphi}$ 是保持内积的. 对 Killing 型诱导的标准 $\Bbbk$-线性同构 $H^* \cong H$, 保持之前的记号, 把 $\alpha \in H^*$ 对应的 H 中元素记作 t_α; 在 H' 情形, 把 $\alpha' \in (H')^*$ 对应的元素记作 $t'_{\alpha'} \in H'$. 那么有唯一的 $\Bbbk$-线性同构 $H \to H'$ 把 $t_\alpha (\alpha \in \Delta)$ 对应到 $t'_{\varphi(\alpha)}$. 进而该同构把 $t_\alpha (\alpha \in \Phi_1)$ 对应到 $t'_{\hat{\varphi}(\alpha)}$. 对每个 $\alpha \in \Phi$, 记 $\hat{\varphi}(\alpha) \in \Phi'$ 为 α'. 在此记号下, 如果 $\beta \in \Phi$ 是 [命题2.63] 意义下的极大元, 那么对应的 β' 便是 Φ' 中的极大元. 根据 [注记2.140], 我们能够对每个 $\alpha \in \Phi$, 选取 $x_\alpha \in L_\alpha, y_\alpha \in L_{-\alpha}$ 满足

$\kappa(x_\alpha,y_\alpha)=2/\kappa(t_\alpha,t_\alpha)$, 进而 $h_\alpha=[x_\alpha,y_\alpha]=2t_\alpha/\kappa(t_\alpha,t_\alpha)=2t_\alpha/(\alpha,\alpha)$. 类似地, 在 L' 场景, 对 $\alpha'\in\Phi'$ 选取 $x'_{\alpha'}\in L'_{\alpha'},y'_{\alpha'}\in L'_{-\alpha'}$ 满足 $h_{\alpha'}=[x'_{\alpha'},y'_{\alpha'}]=2t'_{\alpha'}/(\alpha',\alpha')$. 对 $\alpha\in\Phi$, 记

$$\overline{x_\alpha}=(x_\alpha,x'_{\alpha'}),\overline{y_\alpha}=(y_\alpha,y'_{\alpha'}),\overline{h_\alpha}=(h_\alpha,h'_{\alpha'})\in L\oplus L'.$$

现在我们开始证明定理, 考虑 $L\oplus L'$ 的由 $\{\overline{x_\alpha},\overline{y_\alpha},\overline{h_\alpha}|\alpha\in\Delta\}$ 生成的 Lie 子代数 D. 记 $p:D\to L,p':D\to L'$ 是标准投射. 由 [命题2.139], p 与 p' 都是满 Lie 代数同态. 下面证明 D 是 $L\oplus L'$ 的真 Lie 子代数, 一旦证明该断言, 便可由 L,L' 的单性说明 p,p' 都是 Lie 代数同构: 假设 p 不是单射, 那么存在 $z'\neq 0\in L'$ 使得 $p(0,z')=0$. 命 K' 是由 z' 经所有 $x'_{\alpha'},y'_{\alpha'}$ 有限次伴随变换作用再求和得到的 L' 的 $\Bbbk$-子空间, 由 [命题2.139] 可知 K' 是 L' 的 Lie 理想. 于是由 $K'\neq 0$ 且 L' 是单 Lie 代数得到 $K'=L'$, 进而 $D\supseteq 0\oplus L'$. 由 D 的构造, 再次应用 [命题2.139] 可知 $D\supseteq L\oplus 0$, 于是 $D=L\oplus L'$, 与 D 是真 Lie 子代数矛盾. 所以根据前面的讨论, 只要再说明 D 是 $L\oplus L'$ 的真 Lie 子代数就能够完成定理证明. 现在考虑 Φ 中 [命题2.63] 意义下的极大元 β, 前面已经指出 β' 就是 Φ' 中的极大元. 现在 $\overline{x}_\beta=(x_\beta,x'_{\beta'})$ 满足任何伴随变换序列 $\mathrm{ad}_{\overline{y_{\alpha_1}}},...,\mathrm{ad}_{\overline{y_{\alpha_s}}}$(这里每个 $\alpha_j\in\Delta$, 允许重复) 作用 $\overline{x}$ 后落在

$$L_{\beta-\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i}\oplus L'_{\beta'-\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha'_i}$$

中. 所以如果设 M 是 $L\oplus L'$ 中所有由形如 $\mathrm{ad}_{\overline{y_{\alpha_1}}},...,\mathrm{ad}_{\overline{y_{\alpha_s}}}(\overline{x})$ 的元素生成的子空间, $M\cap(L_\beta\oplus L'_{\beta'})$ 就是 $\overline{x_\beta}$ 生成的 1 维 $\Bbbk$-线性空间, 这说明 M 是 $L\oplus L'$ 是非零真子空间. 下面说明 D 中任何元素决定的伴随变换作用 M 封闭. 一旦证明此断言, 则 D 只能是 L 的真 Lie 子代数: 否则, M 是 $L\oplus L'$ 的非零真理想, 根据 [注记1.110], M 只能是 $0\oplus L'$ 或 $L\oplus 0$, 这明显不可能发生, 矛盾. 所以最后我们通过说明 D 中任何元素决定的伴随变换作用 M 封闭来完成定理证明. 根据 D 的定义, 只需证明任何 $\alpha\in\Delta$ 对应的 $\overline{x_\alpha},\overline{y_\alpha},\overline{h_\alpha}$ 决定的 $L\oplus L'$ 上伴随变换作用 M 封闭即可. 根据 M 的定义, 所有的 $\mathrm{ad}_{\overline{y_\alpha}}(\alpha\in\Delta)$ 自然作用 M 封闭. 由 [引理2.34(1)] 以及 [命题2.39] 可知 $[\overline{h_\alpha},\overline{y_\delta}]$ 总是 $\overline{y_\delta}$ 的倍数 ($\overline{x_\beta}$ 同理), 所以所有的 $\mathrm{ad}_{\overline{h_\alpha}}(\alpha\in\Delta)$ 作用 M 也封闭. 最后考察 $\mathrm{ad}_{\overline{x_\alpha}}(\alpha\in\Delta)$, 当 $\delta\neq\alpha\in\Delta$, 由根系的基的定义知 $\delta-\alpha\notin\Phi$, 所以这时 $[\overline{x_\alpha},\overline{y_\delta}]=0$. 当 $\delta=\alpha$ 时, $[\overline{x_\alpha},\overline{y_\delta}]=\overline{h_\alpha}$. 因此 $\mathrm{ad}_{\overline{x_\alpha}}$ 和 $\mathrm{ad}_{\overline{y_\delta}}$ 不是交换的就是交换后产生 $\mathrm{ad}_{\overline{h_\alpha}}$, 所以由 M 关于 $\mathrm{ad}_{\overline{h_\alpha}}$ 的作用封闭以及 $\mathrm{ad}_{x_\alpha}(\overline{x_\beta})=0$(因为由 β,β' 的极大性, $\alpha+\beta\notin\Phi,\alpha'+\beta'\notin\Phi',\forall\alpha\in\Delta$) 可知所有的 $\mathrm{ad}_{\overline{x_\alpha}}(\alpha\in\Delta)$ 自然作用 M 封闭. □

根据前面的讨论, [定理2.138] 是 [定理2.141] 的直接推论, 因此 (特征零的代数闭域上非零) 有限维半单 Lie 代数同构类被对应的 Dynkin 图完全分类. 并且有限维单 Lie 代数对应那些连通的 Dynkin 图. 虽然在 [定理2.84] 我们看到 (非零) 有限维实内积空间的不可约根系如果基由 ℓ 个元素构成, 那么对应的 Dynkin 图只可能属于 $A_\ell(\ell\geq 1),B_\ell(\ell\geq 2),C_\ell(\ell\geq 3),D_\ell(\ell\geq 4)$ 以及 E_6,E_7,E_8,F_4,G_2 中的一种. 虽然这些图都能够由某个不可约根系实现, 但我们还没证明是否这些图都由某个有限维单 Lie 代数给出. 下一节我们将介绍的 Serre 定理会给出这一问题的肯定回答: 任何有限维实内积空间中的根系都能够由某个有限维半单 Lie 代数实现.

2.11 Serre 定理

固定特征零的代数闭域 $\Bbbk$. 本节的目标是说明任何有限维实内积空间中的根系都可以由某个 $\Bbbk$ 上 (非零) 有限维半单 Lie 代数实现 (被称为 **Serre 定理**), 进而 [定理2.84] 所列出的不可约根系所有可能的 Dynkin 图 $A_\ell(\ell\geq 1),B_\ell(\ell\geq 2),C_\ell(\ell\geq 3),D_\ell(\ell\geq 4)$ 以及 E_6,E_7,E_8,F_4,G_2 完全分类了 $\Bbbk$ 上有限维单 Lie 代数同构类,

回忆 [命题2.64] 和 [定理2.138]. 在正式证明 Serre 定理前, 我们先来看有限维半单 Lie 代数关于给定 Cartan 子代数的根子空间分解所给出的生成元集 ([命题2.139]) 间的关系.

设 L 是 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数, H 是 L 的 Cartan 子代数, Φ 是 L 关于 H 的根系, $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 是 Φ 的基. 记 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)$. 由 [引理2.37], 对每个 α_i, 可选取 $x_i\in L_{\alpha_i},y_i\in L_{-\alpha_i}$, 并置 $h_i=[x_i,y_i]\in H$, 使得 $h_i=2t_{\alpha_i}/\kappa(t_{\alpha_i},t_{\alpha_i})$. 根据 [引理2.139], $\{x_i,y_i,h_i|1\le i\le\ell\}$ 是 L 作为 Lie 代数的生成元集, 并且有 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\alpha_i(h_j)$. 在此记号下, 我们说明

$(S1)$ $[h_i,h_j]=0,\forall 1\le i,j\le\ell$.

$(S2)$ $[x_i,y_i]=h_i,[x_i,y_j]=0,\forall 1\le i\ne j\le\ell$.

$(S3)$ $[h_i,x_j]=\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle x_j,[h_i,y_j]=-\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle y_j,\forall 1\le i,j\le\ell$.

(S_{ij}^+) $(\mathrm{ad}_{x_i})^{-\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle+1}(x_j)=0,\forall 1\le i\ne j\le\ell$.

(S_{ij}^-) $(\mathrm{ad}_{y_i})^{-\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle+1}(y_j)=0,\forall 1\le i\ne j\le\ell$.

Proof. (S1) 来自 H 的交换性. (S2) 来自 h_i 的定义以及对不同的 i,j, $\alpha_i-\alpha_j\notin\Phi$(并回忆 [引理2.34(1)]). 因为 $\alpha_j(h_i)=\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle$, 所以 $[h_i,x_j]=\alpha_j(h_i)x_j=\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle x_j$. 类似地有 $[h_i,y_j]=-\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle y_j$. 下面说明 (S_{ij}^+), 对称地可知 (S_{ij}^-). 设 $i\ne j$, $\alpha_i-m\alpha_j(m\ge1)$ 都不是 Φ 的根, 所以如果设整数 r,q 是满足 r,q 表示满足 $\alpha_j-r\alpha_i,\alpha_j+q\alpha_i\in\Phi$ 的最大整数, 那么 $r=0$, 现在 Φ 中所有形如 $\alpha_j+m\alpha_i(m\in\mathbb{Z})$ 的根为 $\alpha_j,\alpha_j+\alpha_i,...,\alpha_j+q\alpha_i$. 根据 [命题2.42(2)], $q=-\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle$. 所以由 [引理2.34(1)] 可知 $(\mathrm{ad}_{x_i})^{-\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle+1}(x_j)=0$. □

Remark 2.142. 对非零有限维半单 Lie 代数 L 以及 L 的 Cartan 子代数 H, 总有 $\dim_\Bbbk H=|\Delta|\le|\Phi^+|$.

注意上面的关系 $(S1),(S2),(S3)$ 和 $(S_{ij}^+),(S_{ij}^-)$ 的表达式中出现的的系数都只依赖于根系, Serre 发现

Serre's Theorem. 设 Φ 是 (某个非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的) 根系, $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 是 Φ 的基, 记 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)$, $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域. 那么由生成元集 $\{x_i,y_i,h_i|1\le i\le\ell\}$ 和关系 $(S1),(S2),(S3),(S_{ij}^+),(S_{ij}^-)$ 决定的 $\Bbbk$-Lie 代数 L 是非零有限维半单的, 记 H 是由 $\{h_1,...,h_\ell\}$ 生成的 Lie 子代数, 那么 H 是 L 的 Cartan 子代数并且 L 关于 H 的根系的 Dynkin 图与 Φ 关于 Δ 的 Dynkin 图一致.

为证明 Serre 定理我们需做些准备, 以下固定 Φ 是非零有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 是 Φ 的基, 记 $c_{ij}=\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)$, $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域.

下面先研究 $\Bbbk$ 上由生成元集 $\{x_i,y_i,h_i|1\le i\le\ell\}$ 和 $(S1),(S2),(S3)$ 定义出的 $\Bbbk$-Lie 代数 L_0(那么 Serre 定理中的 Lie 代数 L 是 L_0 的同态像) 的基本性质, 再讨论 L. 命 $\hat{L}$ 是集合 $\{\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{h}_i|1\le i\le\ell\}$ 上自由 $\Bbbk$-Lie 代数, $\hat{K}$ 是 $\hat{L}$ 的由所有 $[\hat{h}_i,\hat{h}_j],[\hat{x}_i,\hat{y}_j]-\delta_{ij}\hat{h}_i,[\hat{h}_i,\hat{x}_j]-c_{ji}\hat{x}_j,[\hat{h}_i,\hat{y}_j]+c_{ji}\hat{y}_j$ 生成的 Lie 理想, 那么 $L_0=\hat{L}/\hat{K}$ 就是由生成元集 $\{x_i,y_i,h_i|1\le i\le\ell\}$ 和 $(S1),(S2),(S3)$ 定义出的 $\Bbbk$-Lie 代数 (我们把 $\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{h}_i$ 在 L_0 中的像分别记作 $\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{h}_i$). 下面我们构造一个 L_0 作为 Lie 代数的无限维表示来获取一些 L_0 的结构信息.

考虑 $\Bbbk$ 上 ℓ 维线性空间 $V=\Bbbk v_1\oplus\cdots\oplus\Bbbk v_\ell$ 决定的张量代数 $T(V)$, 下面我们把 $w_1\otimes\cdots\otimes w_m\in V^{(m)}$ 简记为 $w_1\cdots w_m$. 那么 $V^{(m)}$ 有 $\Bbbk$-基 $\{v_{i_1}\cdots v_{i_m}|1\le i_1,...,i_m\le\ell\}$. 对每个 $1\le j\le\ell$, 分别定义 $\hat{\varphi}(h_j),\hat{\varphi}(x_j),\hat{\varphi}(y_j)$ 是如下给出的 $T(V)$ 上的 $\Bbbk$-线性自同态:

$$\hat{\varphi}(\hat{h}_j)(1)=0,\hat{\varphi}(\hat{h}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})=-(c_{i_1,j}+\cdots+c_{i_t,j})v_{i_1}\cdots v_{i_t}.$$

$$\hat{\varphi}(\hat{y}_j)(1)=v_j,\hat{\varphi}(\hat{y}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})=v_jv_{i_1}\cdots v_{i_t}.$$

$$\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(1)=\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_i)=0, \hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})=v_{i_1}\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})-\delta_{i_1 j}(c_{i_2 j}+\cdots+c_{i_t j})v_{i_2}\cdots v_{i_t}.$$

于是由 $\hat{L}$ 在 $\{\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{h}_i|1\leq i\leq \ell\}$ 上的自由性, 可把 $\hat{\varphi}$ 延拓为 (依然记作 $\hat{\varphi}$)$\hat{L}$ 到 $\mathfrak{gl}(T(V))$ 的 Lie 代数同态 $\hat{\varphi}:\hat{L}\to\mathfrak{gl}(T(V))$. 下面我们说明 $\hat{K}\subseteq\mathrm{Ker}\hat{\varphi}$ 来得到 $\hat{\varphi}$ 能够诱导 L_0 到 $\mathfrak{gl}(T(V))$ 的 Lie 代数同态.

Lemma 2.143. 保持前面的记号, 有 $\hat{K}\subseteq\mathrm{Ker}\hat{\varphi}$, 所以 $\hat{\varphi}$ 使得 $T(V)$ 可视作 L_0 上 Lie 模.

Proof. 下面对 $\hat{K}$ 的生成元 $[\hat{h}_i,\hat{h}_j],[\hat{x}_i,\hat{y}_j]-\delta_{ij}\hat{h}_i,[\hat{h}_i,\hat{x}_j]-c_{ji}\hat{x}_j,[\hat{h}_i,\hat{y}_j]+c_{ji}\hat{y}_j$ 验证在 $\hat{\varphi}$ 下的取值为零. 以下我们使用的 $T(V)$ 的基就是 $\{v_1,...,v_\ell\}$ 诱导的标准基 $\mathfrak{B}=\{v_{i_1}\cdots v_{i_m}|1\leq i_1,...,i_m\leq\ell,m\in\mathbb{N}\}$. 对每个自然数 m, $\hat{\varphi}(\hat{h}_j)$ 在 $T^{(m)}$ 上限制的线性变换在 $\mathfrak{B}\cap T^{(m)}$ 下的表示矩阵是对角阵, 所以 $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)$ 和 $\hat{\varphi}(\hat{h}_j)$ 在每个 $T^{(m)}$ 上可交换, 再由自然数 m 的任意性得到 $[\hat{h}_i,\hat{h}_j]\in\mathrm{Ker}\hat{\varphi}$.

现在考察 $[\hat{x}_i,\hat{y}_j]-\delta_{ij}\hat{h}_i$ 在 $\hat{\varphi}$ 下的作用. 现在在下式中将 i_1 取作 j

$$\hat{\varphi}(\hat{x}_i)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})=v_{i_1}\hat{\varphi}(\hat{x}_i)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})-\delta_{i_1 i}(c_{i_2 i}+\cdots+c_{i_t i})v_{i_2}\cdots v_{i_t},$$

我们立即得到 $\hat{\varphi}(\hat{x}_i)\hat{\varphi}(\hat{y}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})-\hat{\varphi}(\hat{y}_j)\hat{\varphi}(\hat{x}_i)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})=-\delta_{ij}(c_{i_2 i}+\cdots+c_{i_t i})v_{i_2}\cdots v_{i_t}$, 而这就是 $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)$ 在 $v_{i_2}\cdots v_{i_t}$ 上的取值. 再注意到 $[\hat{\varphi}(\hat{x}_i),\hat{\varphi}(\hat{y}_j)](1)=0$ 便知 $[\hat{x}_i,\hat{y}_j]-\delta_{ij}\hat{h}_i\in\mathrm{Ker}\hat{\varphi}$.

下面验证 $[\hat{h}_i,\hat{y}_j]+c_{ji}\hat{y}_j\in\mathrm{Ker}\hat{\varphi}$. 直接计算 $\hat{\varphi}([\hat{h}_i,\hat{y}_j])(1)=-c_{ji}v_j$ 所以 $\hat{\varphi}([\hat{h}_i,\hat{y}_j]+c_{ji}\hat{y}_j)(1)=0$. 并有

$$\hat{\varphi}([\hat{h}_i,\hat{y}_j])(v_{i_1}\cdots v_{i_t})=-c_{ji}v_j v_{i_1}\cdots v_{i_t}=-c_{ji}\hat{\varphi}(\hat{y}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t}).$$

所以 $[\hat{h}_i,\hat{y}_j]+c_{ji}\hat{y}_j\in\mathrm{Ker}\hat{\varphi}$. 最后我们证明 $[\hat{h}_i,\hat{x}_j]-c_{ji}\hat{x}_j\in\mathrm{Ker}\hat{\varphi}$. 先对 $t\in\mathbb{N}$ 作归纳证明

$$\hat{\varphi}(\hat{h}_i)\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})=-(c_{i_1 i}+\cdots+c_{i_t i}-c_{ji})\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t}).$$

一旦证明该断言, 由 $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(1)-\hat{\varphi}(\hat{x}_j)\hat{\varphi}(\hat{h}_i)(1)=0$ 以及 $\hat{\varphi}([\hat{h}_i,\hat{x}_j])(v_{i_1}\cdots v_{i_t})=-(c_{i_1 i}+\cdots+c_{i_t i}-c_{ji})\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})+\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(-(c_{i_1 i}+\cdots+c_{i_t i})v_{i_1}\cdots v_{i_t})=c_{ji}\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})$ 便完成引理证明.

现在我们对 $t\geq 0$ 作归纳证明前面的断言. 当 $t=0$ 时, 等号左右两边都是零, 结论成立. 假设结论对 $t-1(t\geq 1)$ 情形成立, 这时应用归纳假设有 $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})=-(c_{i_2 i}+\cdots+c_{i_t i}-c_{ji})\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})$. 将 $\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})$ 用 $\mathfrak{B}$ 中元素 $\mathbb{k}$-线性表出后, 由 $\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})$ 在 $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)$ 的作用就是数乘 $-(c_{i_2 i}+\cdots+c_{i_t i}-c_{ji})$ 可知 $\mathfrak{B}$ 中线性表出 $\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})$ 的元素在 $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)$ 的作用也是数乘 $-(c_{i_2 i}+\cdots+c_{i_t i}-c_{ji})$. 于是由 $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)$ 的定义可知 $v_{i_1}\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})$ 在 $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)$ 的作用下变为

$$-(c_{i_1 i}c_{i_2 i}+\cdots+c_{i_t i}-c_{ji})v_{i_1}\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t}).$$

现在对 $\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})=v_{i_1}\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})-\delta_{i_1 j}(c_{i_2 j}+\cdots+c_{i_t j})v_{i_2}\cdots v_{i_t}$ 两边作用 $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)$ 得到

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\hat{h}_i)\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})=&-(c_{i_1 i}c_{i_2 i}+\cdots+c_{i_t i}-c_{ji})v_{i_1}\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_2}\cdots v_{i_t})\\&+\delta_{i_1 j}(c_{i_2 j}+\cdots+c_{i_t j})(c_{i_2 i}+\cdots+c_{i_t i})v_{i_2}\cdots v_{i_t}.\end{aligned}$$

无论 $j=i_1$ 或 $j\neq i_1$, 都有 $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})=-(c_{i_1 i}+\cdots+c_{i_t i}-c_{ji})\hat{\varphi}(\hat{x}_j)(v_{i_1}\cdots v_{i_t})$, 断言得证. □

根据 [引理2.143], Lie 代数同态 $\hat{\varphi}:\hat{L}\to\mathfrak{gl}(T(V))$ 能够诱导 $L_0=\hat{L}/\hat{K}$ 的表示 $\varphi:L_0\to\mathfrak{gl}(T(V))$ 满足 $\varphi(x_i)=\hat{\varphi}(\hat{x}_i),\varphi(y_i)=\hat{\varphi}(\hat{y}_i),\varphi(h_i)=\hat{\varphi}(\hat{h}_i),1\leq i\leq\ell$. 现在对由 $(S1)$-$(S3)$ 给出的 Lie 代数 L_0 能够证明

Theorem 2.144. 在 L_0 中 $\{h_i|1\le i\le \ell\}$ 是 $\Bbbk$-线性无关的, 并且如果记 $H=\Bbbk h_1\oplus\cdots\oplus\Bbbk h_\ell$, X,Y 分别是由 $\{x_i|1\le i\le\ell\}$ 和 $\{y_i|1\le i\le\ell\}$ 生成的 L_0 的 Lie 子代数, 那么 H 是 L_0 的 ℓ 维交换 Lie 子代数, $\hat{L}$ 到 L_0 的标准投射在 $\{\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{h}_i|1\le i\le\ell\}$ 生成的 $\Bbbk$-子空间上的限制给出该子空间和 L_0 的 $\Bbbk$-线性同构并且 L_0 作为 $\Bbbk$-线性空间有直和分解 $L_0=H\oplus X\oplus Y$. 对每个 $\alpha_i\in\Delta$, 通过 $\alpha_i(h_j)=\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=c_{ij},j=1,2,...,\ell$ 将其视作 H 上 $\Bbbk$-线性函数, 那么对 $1\le i\ne j\le\ell,\alpha_i,\alpha_j$ 是 H 上不同的 $\Bbbk$-线性函数并且 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 是 H^* 的 $\Bbbk$-基.

对 $\Bbbk$-线性函数 $\lambda:H\to\Bbbk$, 记 $(L_0)_\lambda=\{t\in L_0|[h,t]=\lambda(h)t,\forall h\in H\}$, 那么 $(L_0)_0=H$ 并且如果 $\lambda\ne0\in H^*$ 满足 $(L_0)_\lambda\ne0$, 那么 λ 不是一些 α_i 的非负整数线性组合就是一些 α_i 的非正线性组合. 当 $\lambda\in H^*$ 满足 $\lambda\ne0,(L_0)_\lambda\ne0$ 且为一些 α_i 的非负整数线性组合时, 记 $\lambda\succ0$. 如果 $\lambda\ne0,(L_0)_\lambda\ne0$ 且为一些 α_i 的非正整数线性组合时, 记作 $\lambda\prec0$. 在此记号下, 有

$$X=\sum_{\lambda\succ0}(L_0)_\lambda,Y=\sum_{\lambda\prec0}(L_0)_\lambda.$$

Proof. 设 $\varphi:L_0\to\mathfrak{gl}(T(V))$ 是由 $\hat{\varphi}:\hat{L}\to\mathfrak{gl}(T(V))$ 诱导的表示. 先证明 $\{h_i|1\le i\le\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性.

这里证明更强的断言: 如果有 $a_1,...,a_\ell\in\Bbbk$ 使得 $a_1\hat{h}_1+\cdots+a_\ell\hat{h}_\ell\in\mathrm{Ker}\hat{\varphi}$, 那么 $a_1=\cdots=a_\ell=0$. 一旦证明该断言, 如果在 L_0 中有 $b_1h_1+\cdots+b_\ell h_\ell=0$, 通过 [引理2.143] 自然也有 $b_1\hat{h}_1+\cdots+b_\ell\hat{h}_\ell\in\mathrm{Ker}\hat{\varphi}$, 进而由该断言便能导出 $\{h_i|1\le i\le\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性. 现在设 $a_1\hat{h}_1+\cdots+a_\ell\hat{h}_\ell\in\mathrm{Ker}\hat{\varphi}$. 将每个 $\hat{\varphi}(\hat{h}_j)$ 限制在 $T^{(1)}=V$ 上视作 V 上线性变换, 那么每个 $\hat{\varphi}(\hat{h}_j)$ 在 $\{v_1,...,v_\ell\}$ 下的表示矩阵是 $\mathrm{diag}\{-c_{1j},-c_{2j},...,-c_{\ell j}\}$, 进而作为 V 上线性变换, $\hat{\varphi}(a_1\hat{h}_1+\cdots+a_\ell\hat{h}_\ell)$ 有特征值

$$\sum_{j=1}^{\ell}-c_{1j}a_j,\sum_{j=1}^{\ell}-c_{2j}a_j,...,\sum_{j=1}^{\ell}-c_{\ell j}a_j.$$

但由假设, 这些特征值均为零, 所以由 Cartan 矩阵 $(c_{ij})_{\ell\times\ell}$ 是可逆矩阵 (回忆 [注记2.75]) 得到每个 $a_j=0$.

现在由 $\{h_i|1\le i\le\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性得到 $H=\Bbbk h_1\oplus\cdots\oplus\Bbbk h_\ell$, 再由在 L_0 中 $[h_i,h_j]=0$ 可知 H 是 L_0 的 ℓ 维交换 Lie 子代数. 下面记 $\hat{\pi}:\hat{L}\to L_0$ 是标准投射, 我们说明 $\hat{\pi}$ 在 $\{\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{h}_i|1\le i\le\ell\}$ 生成的 $\hat{L}$ 的 $\Bbbk$-子空间上的限制给出该子空间和 L_0 的 $\Bbbk$-线性同构. 对固定的 $1\le i\le\ell$, $(S2)$ 说明 $[x_i,y_i]=h_i,[h_i,x_i]=2x_i,[h_i,y_i]=-2y_i$, 因此 $\Bbbk x_i+\Bbbk y_i+\Bbbk h_i$ 是 L_0 的 Lie 子代数并且是单 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$(回忆 [例1.45]) 的同态像, 于是由 $h_i\ne0$ 可知 $\Bbbk x_i+\Bbbk y_i+\Bbbk h_i$ 作为 Lie 代数和 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 有自然的同构, 特别地, 对固定的 $1\le i\le\ell$, 我们得到 $\{x_i,y_i,h_i\}$ 是 $\Bbbk$-线性无关的. 下面我们说明 $\{x_i,y_i,h_i|1\le i\le\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性. 首先说明 $\{x_i|1\le i\le\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性: 如果有 $b_1,...,b_\ell\in\Bbbk$ 使得 $b_1x_1+\cdots+b_\ell x_\ell=0$, 用 ad_{y_i} 作用之, 利用 $(S2)$ 得到 $b_i=0$. 因此 $\{x_i|1\le i\le\ell\}$ 是 $\Bbbk$-线性无关的, 类似地, $\{y_i|1\le i\le\ell\}$ 也是 $\Bbbk$-线性无关的. 假设有 $\Bbbk$ 中不全为零的元素

$$a_1,...,a_\ell,b_1,...,b_\ell,c_1,...,c_\ell$$

满足 $\sum\limits_{i=1}^{\ell}a_ix_i+b_iy_i+c_ih_i=0$, 那么由 $\{h_i|1\le i\le\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性, $\{a_i,b_i|1\le i\le\ell\}$ 不全为零. 不妨设 $a_{i_1}\ne0$, 并设 $a_{i_1},...,a_{i_r}(r\ge1)$ 是 $\{a_i|1\le i\le\ell\}$ 中所有非零元, 那么用考察前面的等式关于 $\mathrm{ad}_{h_{i_1}}$ 的作用得到 $a_{i_1}c_{i_1i_1}x_{i_1}+a_{i_2}c_{i_2i_1}x_{i_2}+\cdots+a_{i_r}c_{i_ri_1}x_{i_r}+b_1c_{1i_1}y_1+\cdots+b_\ell c_{\ell i_1}y_\ell=0$. 这里 $a_{i_1}c_{i_1i_1}=2a_{i_1}\ne0$, 所以由 $\{x_i|1\le i\le\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性可知一定有某个 $b_jc_{ji_1}\ne0$. 上面的讨论说明 $W=\Bbbk x_{i_1}\oplus\cdots\oplus\Bbbk x_{i_r}\cap\Bbbk y_1\oplus\cdots\oplus\Bbbk y_\ell\ne0$. 所以要证明 $\{x_i,y_i,h_i|1\le i\le\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性, 只需再证明 $\{x_i,y_i|1\le i\le\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性. 现在设 $a_1,...,a_\ell,b_1,...,b_\ell\in\Bbbk$ 满足 $a_1x_1+\cdots+a_\ell x_\ell+b_1y_1+\cdots+b_\ell y_\ell=0$, 作用 φ, 得到 $T(V)$ 上线性变换

$a_1\varphi(x_1)+\cdots+a_\ell\varphi(x_\ell)+b_1\varphi(y_1)+\cdots+b_\ell\varphi(y_\ell)=0$. 考察两边在 $1\in T(V)$ 上的取值得到 $b_1v_1+\cdots+b_\ell v_\ell=0$. 这迫使 $b_1=\cdots=b_\ell=0$, 于是由 $\{x_i|1\le i\le\ell\}$ 的 $\mathbb{k}$-线性无关性可知 $a_1=\cdots=a_\ell=0$. 所以 $\{x_i,y_i|1\le i\le\ell\}$ 是 $\mathbb{k}$-线性无关的, 结合前面的讨论得到 $\{x_i,y_i,h_i\}$ 是 $\mathbb{k}$-线性无关的. 于是由 $\hat{\pi}:\hat{L}\to L_0$ 的 $\mathbb{k}$-线性性得到 $\{\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{h}_i|1\le i\le\ell\}$ 是 $\mathbb{k}$-线性无关的. 因此 $\hat{\pi}$ 限制在 $\{\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{h}_i|1\le i\le\ell\}$ 生成的 $\hat{L}$ 的 $\mathbb{k}$-子空间给出与 L_0 的 $\mathbb{k}$-线性同构. 下面证明 $H+Y+X$ 是 L_0 的 Lie 子代数以及 $H=H\oplus Y\oplus X$.

为简化记号, 对 $x_{i_1},...,x_{i_t},1\le i_1,...,i_t\le\ell$, 记 $[x_{i_1}\cdots x_{i_t}]=\mathrm{ad}_{x_{i_1}}\mathrm{ad}_{x_{i_2}}\cdots\mathrm{ad}_{x_{i_{t-1}}}(x_{i_t})$, 类似引入记号 $[y_{i_1},...,y_{i_t}]$. 下面归纳地证明 $[h_j,[x_{i_1}\cdots x_{i_t}]]=(c_{i_1j}+\cdots+c_{i_tj})[x_{i_1}\cdots x_{i_t}]$. 当 $t=1$ 时, 这就是 $(S3)$. 假设结论对 $t-1(t\ge2)$ 的情形成立, 那么 $[h_j,[x_{i_2}\cdots x_{i_t}]]=(c_{i_2j}+\cdots+c_{i_tj})[x_{i_2}\cdots x_{i_t}]$, 两边作用 $[x_{i_1},-]$ 得到

$$[x_{i_1},[h_j,[x_{i_2}\cdots x_{i_t}]]]=(c_{i_2j}+\cdots+c_{i_tj})[x_{i_1}\cdots x_{i_t}].$$

由 Jacobi 恒等式, $[x_{i_1},[h_j,[x_{i_2}\cdots x_{i_t}]]]=-[h_j,[[x_{i_2}\cdots x_{i_t}],x_{i_1}]]-[[x_{i_2}\cdots x_{i_t}],[x_{i_1},h_j]]=[h_j,[x_{i_1}\cdots x_{i_t}]]+c_{i_1j}[[x_{i_2}\cdots x_{i_t}],x_{i_1}]$. 将该表达式代入 $[x_{i_1},[h_j,[x_{i_2}\cdots x_{i_t}]]]=(c_{i_2j}+\cdots+c_{i_tj})[x_{i_1}\cdots x_{i_t}]$ 便得结论. 类似地, 对 $t\ge1$ 作归纳可证 $[h_j,[y_{i_1}\cdots y_{i_t}]]=-(c_{i_1j}+\cdots+c_{i_tj})[y_{i_1}\cdots y_{i_t}]$.

利用 $(S2)$, 对 $t\ge2$ 作归纳容易验证 $[y_j,[x_{i_1}\cdots x_{i_t}]]\in X$ 以及 $[x_j,[y_{i_1}\cdots x_{i_t}]]\in Y$. 于是结合前面的讨论得到 $H+X+Y$ 是 L_0 的 Lie 子代数. 再结合 $H+X+Y$ 包含 L_0 作为 Lie 代数的生成元集 $\{x_i,y_i,h_i|1\le i\le\ell\}$ 得到 $L_0=H+X+Y$. 记 $\mathfrak{B}_X$ 是 $\{[x_{i_1},...,x_{i_t}]|t\ge1\}$ 的极大线性无关子集, $\mathfrak{B}_Y$ 是 $\{[y_{i_1},...,y_{i_t}]|t\ge1\}$ 的极大线性无关子集, 那么 $\mathfrak{B}_X$ 是 X 的 $\mathbb{k}$-基, $\mathfrak{B}_Y$ 是 Y 的 $\mathbb{k}$-基. 根据前面的讨论知 $\mathfrak{B}_X$ 和 $\mathfrak{B}_Y$ 中的元素关于所有的 $\mathrm{ad}_h(h\in H)$ 都是特征向量 (虽然这里可能是无限维空间). 对每个 $\mathbb{k}$-线性函数 $\lambda:H\to\mathbb{k}$, 命 $(L_0)_\lambda=\{t\in L_0|[h,t]=\lambda(h)t,\forall h\in H\}$. 那么 $H\subseteq(L_0)_0$. 任何 $\mathfrak{B}_X$ 或 $\mathfrak{B}_Y$ 中元素, 设为 t_0, 由 $[h,t_0]=\lambda(h)t_0$ 决定的线性函数 λ 都在某个 h_i 处取值非零: 否则, 例如当 $t_0=[x_{i_1}\cdots x_{i_n}]\in\mathfrak{B}_X$, 那么当 $[h_j,t_0]=0,\forall1\le j\le\ell$. 这说明 $c_{i_1j}+c_{i_2j}+\cdots+c_{i_nj}=0,1\le j\le\ell$. 取 ε 是 ℓ 维列向量并且在 $i_1,i_2,...,i_n$ 处分量是 1, 其余分量为零, 我们得到 $\varepsilon^TC=0$, 这和 Cartan 矩阵可逆 ([注记2.75]) 矛盾. 因此对每个 $t\in\mathcal{B}_X$, 总存在某个 h_j 使得相应 $\lambda(h_j)\neq0$. 类似地, $\mathfrak{B}_Y$ 中元素也具有此性质. 更进一步, 从之前对 $[h_j,-]$ 在形如 $[x_{i_1}\cdots x_{i_n}]$ 和 $[y_{i_1}\cdots x_{i_n}]$ 的元素上作用的讨论可知, 任何 $t\in\mathfrak{B}_X$ 对应的 $\lambda\in H^*$ 满足 $\lambda(h_j)=c_{i_1j}+\cdots+c_{i_nj}=\alpha_{i_1}(h_j)+\cdots+\alpha_{i_n}(h_j),\forall1\le j\le\ell$(这里再指出由 Cartan 矩阵 C 是可逆矩阵通过考察 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 作为 H^* 上线性函数在每个 h_j 下的取值容易证明 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 是 H^* 的 $\mathbb{k}$-基). 故

$$X\subseteq\sum_{\lambda\succ0}(L_0)_\lambda.$$

类似地, 也有 $Y\subseteq\sum\limits_{\lambda\prec0}(L_0)_\lambda$. 下面说明 $(L_0)_0+\sum\limits_{\lambda\succ0}(L_0)_\lambda+\sum\limits_{\lambda\prec0}(L_0)_\lambda$ 是直和, 进而由

$$L_0=H+X+Y\subseteq(L_0)_0\oplus\left(\bigoplus_{\lambda\succ0}(L_0)_\lambda\right)\oplus\left(\bigoplus_{\lambda\prec0}(L_0)_\lambda\right)\subseteq L_0$$

可知 $L_0=H\oplus X\oplus Y$ 且 $X=\sum\limits_{\lambda\succ0}(L_0)_\lambda,Y=\sum\limits_{\lambda\prec0}(L_0)_\lambda,H=(L_0)_0$. 由此不难看到如果 $\lambda\neq0\in H^*$ 满足 $(L_0)_\lambda\neq0$, 那么 λ 不是一些 α_i 的非负整数线性组合就是一些 α_i 的非正线性组合.

现在我们说明 $(L_0)_0+\sum\limits_{\lambda\succ0}(L_0)_\lambda+\sum\limits_{\lambda\prec0}(L_0)_\lambda$ 是直和来完成定理证明. 为此只需证明:

如果 $\lambda_1,...,\lambda_m\in H^*$ 两两不同, 那么 $\sum\limits_{i=1}^m(L_0)_{\lambda_j}=\bigoplus\limits_{i=1}^m(L_0)_{\lambda_j}$.

现在我们对正整数 m 作归纳证明结论. 当 $m=1$ 时结论直接成立. 假设结论对 $m-1(m\geq 2)$ 的情形成立, 现在设 $x_j\in (L_0)_{\lambda_j}$ 满足 $x_1+\cdots+x_m=0$. 因为 $\lambda_1,...,\lambda_m$ 两两互异, 所以 $\mathrm{Ker}(\lambda_1-\lambda_2),...,\mathrm{Ker}(\lambda_1-\lambda_m)$ 是 H 的有限多个真子空间, 于是由 H 是无限域上有限维线性空间无法被有限多个真子空间覆盖可知存在 $h\in H$ 满足 $\lambda_1(h)\neq\lambda_j(h), j=2,...,m$. 用 $[h,-]$ 作用 $x_1+\cdots+x_m=0$ 得到

$$\lambda_1(h)x_1+\lambda_2(h)x_2+\cdots+\lambda_m(h)x_m=0.$$

同时也有 $\lambda_1(h)x_1+\lambda_1(h)x_2+\cdots+\lambda_1(h)x_m=0$. 将两式作差并利用归纳假设便知 $x_2=\cdots=x_m=0$. □

Remark 2.145. 除了把 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 嵌入 [定理2.144] 中的 H^* 成为其 $\Bbbk$-基外, 我们能够利用 Φ 中元素都可以唯一地表示成 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 的整数线性组合将 Φ 也嵌入 H^*(这里依然保持记号 Φ). 设 $\mathscr{W}$ 是 Φ 关于 Δ 的 Weyl 群, 那么对每个 $w\in\mathscr{W}$, 由 $w(\Phi)=\Phi$ 知存在可逆整数矩阵 W 使得 $w(\alpha_1,...,\alpha_\ell)=(\alpha_1,...,\alpha_\ell)W$, 于是每个 $w\in\mathscr{W}$ 都可以自然地作用在 H^* 上: 如果 $\lambda\in H^*$ 满足存在 $k_1,...,k_\ell\in\Bbbk$ 使得 $\lambda=c_1\alpha_1+\cdots+c_\ell w_\ell$, 那么定义

$$w(\lambda)=(\alpha_1,...,\alpha_\ell)W\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_\ell\end{pmatrix}.$$

在 [定理2.144] 中我们深入讨论了由 $\{x_i,y_i,h_i|1\leq i\leq\ell\}$ 生成且满足关系 $(S1)$-$(S2)$ 的 Lie 代数 L_0 的结构. 为了从 L_0 过渡到 Serre 定理中额外满足生成关系 (S_{ij}^+), (S_{ij}^-) 的 Lie 代数 L, 我们记 K 是 L_0 中由

$$x_{ij}=\mathrm{ad}_{x_i}^{-c_{ji}+1}(x_j), y_{ij}=(\mathrm{ad}_{y_i})^{-c_{ji}+1}(y_j), 1\leq i\neq j\leq\ell$$

生成的 Lie 理想, 那么 (在 Lie 代数同构意义下)L 就是 L_0/K. 保持 [定理2.144] 的记号, 记 I 是 X 的由所有 $x_{ij}(i\neq j)$ 生成的 Lie 理想, J 是 Y 的由所有 $y_{ij}(i\neq j)$ 生成的 Lie 理想. 那么有

Lemma 2.146. 保持前面的记号. 在 L_0 中, 对任何 $1\leq i\neq j\leq\ell, 1\leq k\leq\ell$ 有 $\mathrm{ad}_{x_k}(y_{ij})=0, \mathrm{ad}_{y_k}(x_{ij})=0$. I,J 都是 L_0 的 Lie 理想并且 $K=I\oplus J$.

Proof. 先证明第一个结论, 以 $\mathrm{ad}_{x_k}(y_{ij})=0$ 为例, $\mathrm{ad}_{y_k}(x_{ij})=0$ 可类似验证. 分两种情况讨论:

Case 1. 当 $k\neq i$ 时, $(S2)$ 表明 $[x_k,y_i]=0$, 所以 ad_{x_k} 与 ad_{y_i} 可交换, 于是 $\mathrm{ad}_{x_k}(y_{ij})=(\mathrm{ad}_{y_i})^{-c_{ji}+1}\mathrm{ad}_{x_k}(y_j)$. 如果这时 $k=j$, 那么 $\mathrm{ad}_{x_k}(y_j)=h_j$, 因此 $\mathrm{ad}_{x_k}(y_{ij})=(\mathrm{ad}_{y_i})^{-c_{ji}+1}(h_j)$, 再应用 $(S3)$ 知 $\mathrm{ad}_{y_i}(h_j)=c_{ij}y_i$. 当 $c_{ij}=0$ 时, 结论直接成立. 当 $c_{ij}\neq 0$ 时, $-c_{ij}+1\geq 2$(回忆 [命题2.74(2)]), 于是 $(\mathrm{ad}_{y_i})^{-c_{ji}+1}(h_j)$, 结论成立. 再看 $k\neq j$ 的情形, 这时 $(S2)$ 说明 $[x_k,y_j]=0$, 结论依然成立.

Case 2. 当 $k=i$ 时. 这时 [定理2.144] 的证明过程表明 $S=\Bbbk x_i\oplus\Bbbk y_i\oplus\Bbbk h_i$ 是 L_0 的同构于 $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ 的单 Lie 子代数, 并注意 $[x_i,y_j]=0(i\neq j)$. 所以将 S 通过伴随变换赋予 L_0 上 Lie 模结构后, 由 $[h_i,y_j]=-c_{ji}y_j$, 把 [引理2.22(3)] 中关于极大向量 v_0 的讨论替换成 y_j(相应地, [引理2.22] 中 λ 改为 $-c_{ji}$) 可证得 $\mathrm{ad}_{x_i}(\mathrm{ad}_{y_i})^t(y_j)=t(-c_{ji}-t+1)(\mathrm{ad}_{y_i})^{t-1}(y_j), \forall t\geq 1$. 取 $t=-c_{ji}+1\geq 2$ 即得结论.

前面的讨论证明了 $\mathrm{ad}_{x_k}(y_{ij})=0$. 现在我们证明 I,J 是 K 的 Lie 理想, 以 I 为例, J 的验证类似. 先说明 $x_{ij}(i\neq j)$ 满足对任何 $1\leq k\leq\ell$ 有 $\mathrm{ad}_{h_k}(x_{ij})=(c_{jk}+(-c_{ji}+1)c_{ik})x_{ij}$. 从 $(S3)$ 知 $[h_k,x_i]=c_{ik}x_i, [h_k,x_j]=c_{jk}x_j$, 因此 $\mathrm{ad}_{h_k}\mathrm{ad}_{x_i}=\mathrm{ad}_{x_i}\mathrm{ad}_{h_k}+c_{ik}\mathrm{ad}_{x_i}$. 因此当把 $\mathrm{ad}_{h_k}(x_{ij})=\mathrm{ad}_{h_k}(\mathrm{ad}_{x_i})^{-c_{ji}+1}(x_i)$ 中 ad_{h_k} 移动至 ad_{x_i} 右

侧时, 会多产生一项来自 $c_{ik}\mathrm{ad}_{x_i}$ 的作用, 由此可直接验证 $\mathrm{ad}_{h_k}(x_{ij}) = (c_{jk} + (-c_{ji}+1)c_{ik})x_{ij}$. 特别地, I 关于 ad_{h_k} 的作用封闭. 再由前面说明的 $\mathrm{ad}_{y_k}(x_{ij}) = 0$ 以及 $\{x_i, y_i, h_i | 1 \le i \le \ell\}$ 是 L_0 作为 $\Bbbk$-Lie 代数的生成元集可知 I 是 L_0 的理想. J 的情形类似可证, 最后说明 $K = I \oplus J$. 因为 $I + J$ 是 L_0 的 Lie 理想, 所以由 $I + J$ 包含了 K 作为 Lie 理想的生成元可知 $K = I + J$. 再由 $I \subseteq X, J \subseteq Y$ 以及 [定理2.144] 得到 $I + J = I \oplus J$. □

现在我们来证明 Serre 定理: 这时 $L = L_0/K$, 于是由 $L_0 = H \oplus X \oplus Y$([定理2.144]) 和 $K = I \oplus J \subseteq X \oplus Y$([引理2.146]) 得到 L 作为 $\Bbbk$-线性空间有同构 $L \cong H \oplus X/I \oplus Y/J$. 所以我们能够通过该线性同构将 Lie 代数 L 和 $H \oplus X/I \oplus Y/J$ 视作等同, 进而标准投射 $\pi_0 : L_0 \to L = H \oplus X/I \oplus Y/J$ 满足 $\pi_0(x_i) = \overline{x_i} \in X/I$, $\pi_0(y_i) = \overline{y_i} \in Y/J$ 以及 $\pi_0(h) = h, \forall h \in H$. 这时在 L 中依然有 $[\overline{x_i}, \overline{y_j}] = 0, i \ne j$ 以及 $[\overline{x_i}, \overline{y_i}] = 0$. 所以由 π_0 限制在 H 上可视作等同映射, 重复 [定理2.144] 中关于 $\{x_1, ..., x_\ell\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性的证明, 便可得到 $\{\overline{x_1}, ..., \overline{x_\ell}\}$ 和 $\{\overline{y_1}, ..., \overline{y_\ell}\}$ 的 $\Bbbk$-线性无关性. 由此可知标准投射 $\pi_0 : L_0 \to L$ 在 $\Bbbk x_1 \oplus \cdots \oplus \Bbbk x_\ell \oplus \Bbbk y_1 \oplus \cdots \oplus \Bbbk y_\ell \oplus \Bbbk h_1 \oplus \cdots \oplus \Bbbk h_\ell$ 上的限制是单射, 于是我们能够把 $\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{h_i}$ 和 x_i, y_i, h_i 视作等同. 因为标准投射 π_0 在 H 上的限制在恒等映射, 所以由 L_0 中

$$X = \sum_{\lambda \succ 0} (L_0)_\lambda, Y = \sum_{\lambda \prec 0} (L_0)_\lambda, H = (L_0)_0.$$

得到在 L 中也有 $X/I \subseteq \sum\limits_{\lambda \succ 0} (L)_\lambda, Y/J \subseteq \sum\limits_{\lambda \prec 0} (L)_\lambda, H \subseteq L_0$. 由 H 的 $\Bbbk$-线性维数有限, 使用 [定理2.144] 证明过程中关于 $(L_0)_0 + \sum\limits_{\lambda \succ 0} (L_0)_\lambda + \sum\limits_{\lambda \prec 0} (L_0)_\lambda$ 是直和同样的讨论可得

$$\sum_{\lambda \succ 0} L_\lambda + \sum_{\lambda \prec 0} L_\lambda + L_0 = \left(\bigoplus_{\lambda \succ 0} L_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \prec 0} L_\lambda \right) \oplus L_0.$$

这说明

$$X/I = \sum_{\lambda \succ 0} L_\lambda = \bigoplus_{\lambda \succ 0} L_\lambda, Y/J = \sum_{\lambda \prec 0} L_\lambda = \bigoplus_{\lambda \prec 0} L_\lambda, H = L_0.$$

注意这里 $H = L_0 = \{t \in L | [h, t] = 0, \forall h \in H\}$, 与前面满足 $(S1)$-$(S3)$ 的 Lie 代数 L_0 记号重复, 所以之后的讨论中仅适用记号 H. 现在说明对每个 $\lambda \in H^*$ 有 $\dim_\Bbbk L_\lambda$ 有限. 事实上, 任取 $t_1, t_2 \in L_\lambda$, 都有 $t_1 - t_2 \in H$. 所以如果有某个 $\lambda \in H^*$ 满足 $\dim_\Bbbk L_\lambda$ 无限, 将导致 $\dim_\Bbbk H$ 无限, 矛盾.

下面我们说明对每个 $1 \le i \le \ell$, ad_{x_i} 和 ad_{y_i} 是局部幂零同态, 以 ad_{x_i} 为例, ad_{y_i} 类似可证. 以下固定 x_i. 设 $M = \{t \in L | \text{存在正整数} m \text{使得} (\mathrm{ad}_{x_i})^m(t) = 0\}$, 那么 M 是 L 的 $\Bbbk$-子空间. 现在由 [引理1.19] 的证明过程可知 M 还是 Lie 子代数, 下面说明 M 包含所有的 $x_k, y_k (1 \le k \le \ell)$ 来说明 $M = L$. $x_k \in M$ 来自 (S_{ij}^+), $y_k \in M$ 来自 $(S2)$ 和 $(S3)$. 因此 $M = L$. 于是 $\mathrm{ad}_{x_i}, \mathrm{ad}_{y_i}$ 是 L 上局部幂零导子, 我们能够定义 $e^{\mathrm{ad}_{x_i}}, e^{\mathrm{ad}_{y_i}}$([引理2.123]). 命 $\tau_i = e^{\mathrm{ad}_{x_i}} e^{\mathrm{ad}_{-y_i}} e^{\mathrm{ad}_{x_i}}, 1 \le i \le \ell$, 那么 [引理2.123] 保证了 τ_i 是 Lie 代数自同构.

记 Φ 关于 Δ 的 Weyl 群是 $\mathscr{W}$, 对每个 α_i 决定的镜面反射 $\sigma_{\alpha_i} \in \mathscr{W}$ 在 [注记2.145] 意义下能够作用在 H^* 上, 设 $\lambda, \mu \in H^*$ 满足 $\sigma_{\alpha_i}(\lambda) = \mu$, 因为 $\alpha_i(h_i) = \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2$, 可以重复 [引理2.132] 和 [引理2.131(3)] 的证明过程来验证 $\tau_i(L_\lambda) = L_\mu$. 因为 $\mathscr{W}$ 可由 $\{\sigma_{\alpha_i} | 1 \le i \le \ell\}$ 生成 ([定理2.98]) 可知任何 $\lambda, \mu \in H^*$, 只要存在 $w \in \mathscr{W}$ 满足 $w(\lambda) = \mu$, 那么 $\dim_\Bbbk L_\lambda = \dim_\Bbbk L_\mu$. 由 [定理2.144] 证明过程中对 $[h_j, -]$ 作用 $\mathfrak{B}_X$ 和 $\mathfrak{B}_Y$ 的讨论可直接验证 $L_{\alpha_i} \subseteq X$ 以及对整数 $k \ne -1, 0, 1$ 有 $L_{k\alpha_i} = 0$, 进而得到 $L_{\alpha_i} = \Bbbk x_i, 1 \le i \le \ell$. 根据 [注记2.97], $\Phi = \mathscr{W}(\Delta)$, 所以由前面说明的: 只要存在 $w \in \mathscr{W}$ 满足 $w(\lambda) = \mu$, 那么 $\dim_\Bbbk L_\lambda = \dim_\Bbbk L_\mu$. 以及 $\dim_\Bbbk L_{\alpha_i} = 1$, 可知 $\dim_\Bbbk L_\alpha = 1, \forall \alpha \in \Phi$. 同样地, 当整数 $k \ne -1, 0, 1$ 时, $L_{k\alpha} = 0, \alpha \in \Phi$.

现在说明如果 $\lambda\in H^*$ 满足 $L_\lambda\neq 0$, 那么 $\lambda=0$ 或 $\lambda\in\Phi$. 首先由 $L_\lambda\neq 0$ 以及 [定理2.144] 可知当 $\lambda\neq 0$ 时, λ 不是一些 α_i 的非负整数线性组合就是一些非正整数线性组合. 现在由 [注记2.93], 假设 λ 不是某个根的倍数, 则存在 $w\in\mathscr{W}$ 使得 $w(\lambda)$ 能够表示为 α_i 的含有正整数和负整数系数的线性组合, 于是 $L_{w(\lambda)}=0$, 这和 $\dim_{\Bbbk}L_\lambda=\dim_{\Bbbk}L_{w(\lambda)}$ 矛盾. 所以 $\lambda\neq 0$ 时 λ 一定是 Φ 中元素的整数倍. 结合当整数 $k\neq -1,0,1$ 时, $L_{k\alpha}=0,\alpha\in\Phi$, 可知 $\lambda\neq 0$ 时一定在 Φ 中.

现在由前面得到的 L 的直和分解

$$L=H\oplus\left(\sum_{\lambda\succ 0}L_\lambda\right)\oplus\left(\bigoplus_{\lambda\prec 0}L_\lambda\right),$$

$\lambda\neq 0\in H^*$ 如果满足 $L_\lambda\neq 0$ 则 $\lambda\in\Phi$, 以及每个 $\alpha\in\Phi$ 满足 $\dim_{\Bbbk}L_\alpha=1$, 便知 L 是有限维 $\Bbbk$-Lie 代数.

下面说明 L 是有限维半单 Lie 代数. 根据 [引理1.93], 只需证明 L 任何交换 Lie 理想 $A=0$. 因为 A 是 Lie 理想, 所以 H 中元素决定的 L 上伴随变换作用 A 封闭. 前面我们已经看到

$$L=H\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi}L_\alpha\right)$$

并且 $\dim_{\Bbbk}L_\alpha=1,\forall\alpha\in\Phi$, 所以由 L_α 的定义, H 中元素决定的 L 上伴随变换可对角化, 即 $\{\mathrm{ad}_h|h\in H\}$ 可视作 A 上一族两两可交换的可对角化线性变换, 所以 A 可写为一些关于 $\{\mathrm{ad}_h|h\in H\}$ 的公共特征向量之和, 进而

$$A=(H\cap A)\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi}L_\alpha\cap A\right).$$

下面说明对每个 $\alpha\in\Phi$, $A\cap L_\alpha=0$. 否则, 由 $\dim_{\Bbbk}L_\alpha=1$, $L_\alpha\subseteq A$, 进而由 A 是 L 的 Lie 理想得到 $[L_{-\alpha},L_\alpha]\subseteq A$. 前面指出对 $\lambda\in H^*$, 总有 $\tau_i(L_\lambda)=L_{\sigma_{\alpha_i}(\lambda)}$. 特别地, 对任何 Weyl 群中元素 w 生成 ([定理2.98]), 总有 $\sigma\in\mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma(L_\lambda)=L_{w(\lambda)}$. 所以如果取 $w\in\mathscr{W}$ 和 α_i 满足 $w(\alpha_i)=\lambda$([注记2.97] 保证存在性), 那么 σ 给出由 $L_\alpha\oplus L_{-\alpha}\oplus[L_\alpha,L_{-\alpha}]$ 和 $\Bbbk x_i\oplus\Bbbk y_i\oplus\Bbbk h_i$ 的 $\Bbbk$-Lie 代数同构, 而由 [定理2.144] 的证明过程使我们看到 $\Bbbk x_i\oplus\Bbbk y_i\oplus\Bbbk h_i\cong\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$, 这和 A 交换矛盾. 因此前面的讨论说明对每个 $\alpha\in\Phi$, $A\cap L_\alpha=0$. 于是 $A=H\cap A\subseteq H$. 特别地, 由 A 是 Lie 理想得到 $[A,L_\alpha]\subseteq L_\alpha\cap A=0$. 所以对每个 $1\leq i\leq\ell, a\in A$, $0=[a,x_i]=\alpha_i(a)x_i$. 这说明 $\alpha_i(a)=0,\forall 1\leq i\leq\ell$. 于是 $a=0$, 即 $A=0$. 至此我们证明了 L 是有限维半单 Lie 代数.

前面我们已经看到 H 中元素决定的 L 上伴随变换都可对角化, 所以由 L 是半单 Lie 代数, 知 H 是环面 Lie 子代数. 并且通过

$$L=H\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi}L_\alpha\right)$$

以及 $0\notin\Phi$ 可知任何严格包含 H 的 Lie 子代数不可能交换. 于是由 [命题2.28], H 是极大环面 Lie 子代数, 进而是 L 的 Cartan 子代数 ([定理2.119]), 并且上述直和分解表明 Φ 就是 L 关于 H 的根系 (注意这里的 Φ 是指在 [注记2.145] 意义下 H^* 中的嵌入). 最后说明这里 L 关于 H 的根系关于 $\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}\subseteq H^*$ 对应的 Cartan 矩阵是 $(c_{ij})_{\ell\times\ell}$, 进而由 [推论2.79] 便完成定理证明. 而这由引入的记号 $\alpha_i(h_j)=c_{ij}$ 和 [命题2.43] 便知. □

Remark 2.147. 对 Cartan 矩阵 $C=(c_{ij})_{\ell\times\ell}$, 许多文献 (例如 [Kac90]) 会把 Serre 关系 $(S3),(S_{ij}^+),(S_{ij}^-)$ 写作

$$[h_i,x_j]=c_{ij}x_j,[h_i,y_j]=-c_{ij}y_j,\forall 1\leq i,j\leq\ell.$$

$$(\mathrm{ad}_{x_i})^{-c_{ij}+1}(x_j)=0,\forall 1\leq i\neq j\leq \ell.$$

$$(\mathrm{ad}_{y_i})^{-c_{ij}+1}(y_j)=0,\forall 1\leq i\neq j\leq \ell.$$

这里生成关系中出现的 Cartan 矩阵系数和之前的系数相差一个转置 (原因是不同文献对根系关于基的 Cartan 矩阵定义可能相差一个转置). 下面我们说明 Cartan 矩阵的转置依然是某个根系导出的 Cartan 矩阵. 设上述 Cartan 矩阵 C 由根系 $\Phi\subseteq E$ 关于基 $\Delta=\{\alpha_1,...,\alpha_\ell\}$ 导出. 对每个 $\alpha\in\Phi$, 定义 $\check{\alpha}=2\alpha/(\alpha,\alpha)$, 命 $\check{\Phi}=\{\check{\alpha}|\alpha\in\Phi\}$, 则可直接验证 $\check{\Phi}$ 依然是 E 中的根系 (称为 Φ 的**对偶根系**) 并且

$$(\check{\alpha},\check{\beta})=\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)},\forall\alpha,\beta\in\Phi.$$

所以对偶根系 $\check{\Phi}$ 有基 $\check{\Delta}=\{\check{\alpha}|\alpha\in\Phi\}$ 并且 $\hat{\Phi}$ 关于 $\hat{\Delta}$(按照原有 Δ 定义 C 的次序产生) 的 Cartan 矩阵为 C^T.

由同构定理 [定理2.138] 和 Serre 定理便知特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上 (非零) 有限维半单 Lie 代数全体和根系的 Dynkin 图 (注意这里我们不区分同构的图) 全体有自然的双射. 当把该双射限制于有限维单 Lie 代数同构类全体时, 对应连通 Dynkin 图全体, 根据 [定理2.84], ℓ 个顶点的连通 Dynkin 图全体是 $A_\ell(\ell\geq 1),B_\ell(\ell\geq 2),C_\ell(\ell\geq 3),D_\ell(\ell\geq 4)$ 以及 E_6,E_7,E_8,F_4,G_2. 这对应所有的 $\Bbbk$ 上有限维单 Lie 代数同构类. 回忆 [推论2.79] 中我们已经指出根系关于基的 Dynkin 图与 Cartan 矩阵互相决定 (但对给定的根系的基, 基排序的不同会导致产生的 Cartan 矩阵相差某个置换矩阵的合同, [注记2.67]). 所以 $\Bbbk$ 上非零有限维半单 Lie 代数同构类全体也对应“Cartan 矩阵关于置换矩阵的合同等价类”全体 (严格地说, 如果 C_1 是根系 Φ_1 关于基 Δ_1 产生的 Cartan 矩阵, C_2 是根系 Φ_2 关于基 Δ_2 产生的 Cartan 矩阵, 定义 $C_1\sim C_2$ 当且仅当它们有相同的阶数且相差某个置换矩阵的合同变换). 由 [注记2.49], 如果 Φ 是有限维实内积空间 $(E,(-,-))$ 中的根系, 有基 Δ, 那么在将 $(-,-)$ 乘上任何正实数倍得到的 E 上新内积下, Φ 依然是根系, Δ 也依然是 Φ 的基. 并且注意对任何正实数 $a>0$, 内积 $a(-,-)$ 下的 Φ 关于 Δ 产生的 Cartan 矩阵和 $(-,-)$ 下的 Φ 关于 Δ 产生的 Cartan 矩阵在固定 Δ 元素排序下相同. 因此当讨论 Cartan 矩阵时, 通常人们也会设根系的最短根 α 满足 $(\alpha,\alpha)=2$.

之前对域 $\Bbbk$ 上的 Lie 代数 $(L,[-,-])$ 我们介绍了其泛包络代数 $\mathcal{U}(L)$(回忆 [定理1.142]), 并且根据其构造方式可知如果 L 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $\{x_1,...,x_n\}$, 那么 $\mathcal{U}(L)$ 可表示为由生成元 $\{x_1,...,x_n\}$ 和生成关系

$$x_ix_j-x_jx_i-[x_i,x_j],\ (i\neq j)$$

决定的 $\Bbbk$-代数. 下面我们说明对特征零的代数闭域上非零有限维半单 Lie 代数的泛包络代数, 其生成关系可由 Serre 关系描述. 首先我们需要下述形式上运算的结果.

Lemma 2.148. 设 $\Bbbk$ 是域, $n,m\geq 1$, 将 $\Bbbk\langle x_1,...,x_n\rangle$ 赋予导出 Lie 代数结构, 其中元素 x_i 决定的伴随变换也记作 ad_{x_i}. 那么在 $\Bbbk\langle x_1,...,x_n\rangle$ 中总有

$$\mathrm{ad}_{x_i}^m(x_j)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_m^kx_i^{m-k}x_jx_i^k,\forall 1\leq i\neq j\leq n.$$

Proof. 对正整数 m 作归纳, 当 $m=1$ 时来自导出 Lie 代数元素的 Lie 括号由换位子定义. 假设结论对 $m-1(m\geq 2)$ 的情形成立, 利用 $m-1$ 情形的归纳假设, 对 $1\leq i\neq j\leq n$, 我们计算

$$\mathrm{ad}_{x_i}^m(x_j)=x_i\left(\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^kC_{m-1}^kx_i^{m-1-k}x_jx_i^k\right)-\left(\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^kC_{m-1}^kx_i^{m-1-k}x_jx_i^k\right)x_i$$

$$
\begin{aligned}
&=x_i^m x_j + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k C_{m-1}^k x_i^{m-k} x_j x_i^k + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k C_{m-1}^{k-1} x_i^{m-k} x_j x_i^k \\
&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k x_i^{m-k} x_j x_i^k.
\end{aligned}
$$

□

现在设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是由 Cartan 矩阵 $C=(c_{ij})_{\ell\times\ell}$ 依 Serre 定理给出的有限维半单 Lie 代数, 即由 $\{x_i, h_i, y_i|1\le i\le \ell\}$ 生成并且满足关系 $(S1)$-$(S3)$, (S_{ij}^+), (S_{ij}^-) 的 $\Bbbk$-Lie 代数. 命 $\mathcal{U}$ 是由 $\{x_i, h_i, y_i|1\le i\le \ell\}$ 生成并且满足关系

$$
h_ih_j-h_jh_i=0, x_iy_i-y_ix_i=h_i, x_iy_j-y_jx_i=0\ (i\neq j),
$$

$$
\begin{gathered}
h_ix_j-x_jh_i=c_{ji}x_j, h_iy_j-y_jh_i=-c_{ji}y_j,\\
\sum_{k=0}^{1-c_{ji}}(-1)^k C_{1-c_{ji}}^k x_i^{1-c_{ji}-k}x_jx_i^k=0,\\
\sum_{k=0}^{1-c_{ji}}(-1)^k C_{1-c_{ji}}^k y_i^{1-c_{ji}-k}y_jy_i^k=0,
\end{gathered}
$$

的 $\Bbbk$-代数. 那么根据 L 满足 Serre 关系, $\mathcal{U}$ 到泛包络代数 $\mathcal{U}(L)$ 有标准代数同态 $\theta:\mathcal{U}\to\mathcal{U}(L)$ 满足

$$
\theta(x_i)=u(x_i), \theta(y_i)=u(y_i), \theta(h_i)=u(h_i), 1\le i\le \ell.
$$

现在考虑 $\mathcal{U}$ 上导出 Lie 代数结构, 那么 L 到 $\mathcal{U}^-$ 有自然的 $\Bbbk$-Lie 代数同态 $\tau: L\to\mathcal{U}^-$ 使得

$$
\tau(x_i)=x_i, \tau(y_i)=y_i, \tau(h_i)=h_i, 1\le i\le \ell.
$$

因此由泛包络代数的泛性质, 存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\overline{\tau}:\mathcal{U}(L)\to\mathcal{U}$ 使得 $\overline{\tau}u=\tau$. 易见 θ 和 $\overline{\tau}$ 互为逆映射, 因此我们得到 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{U}\cong\mathcal{U}(L)$. 总结一下, 上面的讨论表明

Theorem 2.149. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, L 是由 Cartan 矩阵 $C=(c_{ij})_{\ell\times\ell}$ 依 Serre 定理给出的有限维半单 Lie 代数. 那么 L 的泛包络代数 $\mathcal{U}(L)$ 就是由生成元 $\{x_i, h_i, y_i|1\le i\le \ell\}$ 和关系

$$
h_ih_j-h_jh_i=0, x_iy_i-y_ix_i=h_i, x_iy_j-y_jx_i=0\ (i\neq j),
$$

$$
\begin{gathered}
h_ix_j-x_jh_i=c_{ji}x_j, h_iy_j-y_jh_i=-c_{ji}y_j,\\
\sum_{k=0}^{1-c_{ji}}(-1)^k C_{1-c_{ji}}^k x_i^{1-c_{ji}-k}x_jx_i^k=0\ (i\neq j),\\
\sum_{k=0}^{1-c_{ji}}(-1)^k C_{1-c_{ji}}^k y_i^{1-c_{ji}-k}y_jy_i^k=0\ (i\neq j)
\end{gathered}
$$

决定的 $\Bbbk$-代数.

最后我们介绍 Kac-Moody Lie 代数的定义结束本节. 由 Serre 定理, 固定根系 Φ 的基 Δ, 并记对应的 Cartan 矩阵 $C=(c_{ij})_{\ell\times\ell}$. 下面使用更通用的记号 (把 Serre 定理中的 x_i, y_i 分别换作 e_i, f_i). 如果定义 L 是特征零的代数闭域 $\Bbbk$ 上由 $\{e_i, f_i, h_i | 1\le i\le \ell\}$ 生成, 满足关系

$$[h_i,h_j]=0,[e_i,f_i]=h_i,[e_i,f_j]=0(i\neq j),$$

$$[h_i,e_j]=c_{ij}e_j,[h_i,f_j]=-c_{ij}f_j,$$
$$\mathrm{ad}_{e_i}^{1-c_{ij}}(e_j)=0,\mathrm{ad}_{f_i}^{1-c_{ij}}(f_j)=0,i\neq j,$$

那么根据 [注记2.147], L 就是 $\check{\Phi}$ 依 Serre 定理产生的有限维半单 Lie 代数. 当 C 遍历所有根系的 Cartan 矩阵时, L 的同构类遍历所有 (非零) 有限维半单 Lie 代数同构类.

现在设 $\mathbb{F}$ 是域, $C=(c_{ij})_{\ell\times\ell}$ 是广义 Cartan 矩阵 (见 [注记2.76]), 称由 $\{e_i, f_i, h_i | 1\le i\le \ell\}$ 生成, 满足上面所有关系的 $\mathbb{F}$-Lie 代数为 **Kac-Moody Lie 代数**. 由 Serre 定理和前面的讨论, 这是有限维半单 Lie 代数的推广. 根据泛包络代数的构造, $\mathbb{F}$ 上由 C 决定的 Kac-Moody Lie 代数 L 的泛包络代数作为 $\mathbb{F}$-代数可由 $\{u(e_i),u(f_i),u(h_i)|1\le i\le\ell\}$ 生成, 结合 [引理2.148], 在 $\mathcal{U}(L)$ 中有

$$u(h_i)u(h_j)-u(h_j)u(h_i)=0,u(e_i)u(f_i)-u(f_i)u(e_i)=u(h_i),u(e_i)u(f_j)-u(f_j)u(e_i)=0\ (i\neq j),$$

$$u(h_i)u(e_j)-u(e_j)u(h_i)=c_{ij}u(e_j),u(h_i)u(f_j)-u(f_j)u(h_i)=-c_{ij}u(f_j),$$
$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}}(-1)^k C_{1-c_{ij}}^k u(e_i)^{1-c_{ij}-k}u(e_j)u(e_i)^k=0\ (i\neq j),$$
$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}}(-1)^k C_{1-c_{ij}}^k u(f_i)^{1-c_{ij}-k}u(f_j)u(f_i)^k=0\ (i\neq j).$$

与 [定理2.150] 的证明作完全类似的讨论便能够证明

Theorem 2.150. 设 $\mathbb{F}$ 是域, L 是由广义 Cartan 矩阵 $C=(c_{ij})_{\ell\times\ell}$ 决定的 Kac-Moody Lie 代数. 那么 L 的泛包络代数 $\mathcal{U}(L)$ 就是由生成元 $\{e_i,h_i,f_i|1\le i\le\ell\}$ 和关系

$$h_ih_j-h_jh_i=0,e_if_i-f_ie_i=h_i,e_if_j-f_je_i=0\ (i\neq j),$$

$$h_ie_j-e_jh_i=c_{ij}e_j,h_if_j-f_jh_i=-c_{ij}f_j,$$
$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}}(-1)^k C_{1-c_{ij}}^k e_i^{1-c_{ij}-k}e_je_i^k=0\ (i\neq j),$$
$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}}(-1)^k C_{1-c_{ij}}^k f_i^{1-c_{ji}-k}f_jf_i^k=0\ (i\neq j)$$

决定的 $\Bbbk$-代数.

参考文献

[DCPRR05] C. De Concini, C. Procesi, N. Reshetikhin, and M. Rosso. Hopf algebras with trace and representations. *Invent. Math.*, 161(1):1–44, 2005.

[EG02] Pavel Etingof and Victor Ginzburg. Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism. *Invent. Math.*, 147(2):243–348, 2002.

[FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[Hue90] Johannes Huebschmann. Poisson cohomology and quantization. *J. Reine Angew. Math.*, 408:57–113, 1990.

[Hue99] Johannes Huebschmann. Duality for Lie-Rinehart algebras and the modular class. *J. Reine Angew. Math.*, 510:103–159, 1999.

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume Vol. 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

[Jac62] Nathan Jacobson. *Lie algebras*, volume No. 10 of *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*. Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London, 1962.

[Kac90] Victor G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

[Mon93] Susan Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[MP65] W. S. Massey and F. P. Peterson. The cohomology structure of certain fibre spaces. I. *Topology*, 4:47–65, 1965.

[Pra67] Jean Pradines. Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Calcul différenetiel dans la catégorie des groupoïdes infinitésimaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 264:A245–A248, 1967.

[Pro07] Claudio Procesi. *Lie groups*. Universitext. Springer, New York, 2007. An approach through invariants and representations.

[Rin63] George S. Rinehart. Differential forms on general commutative algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:195–222, 1963.

[Ste68] Robert Steinberg. *Endomorphisms of linear algebraic groups*, volume No. 80 of *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.

[TY05] Patrice Tauvel and Rupert W. T. Yu. *Lie algebras and algebraic groups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.