# U.F.D. 上矩阵代数的自同构

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 5 月 30 日

Skolem-Noether 定理说中心是交换局部环的 Azumaya 代数作为中心上代数的代数自同构都是内自同构. 特别地, 域上的矩阵代数上的代数自同构都是内自同构. 所以一个基本的问题是对交换环上矩阵代数的代数自同构, 距离内自同构有多远? Isaacs 在 [Isa80] 中对这一问题作了详尽的讨论. 例如任何交换环 $C$ 上矩阵代数 $\mathrm{M}_n(C)$ 上任何 $C$-代数自同构的 $n$ 次幂一定是内自同构. 如果进一步 $C$ 是 U.F.D., 那么 $\mathrm{M}_n(C)$ 上的 $C$-代数自同构均为内自同构 (存任何交换局部环也满足此结论, 见 [Kov73, p.163]. 因此可构造非 U.F.D. 的整区 $C$ 使得 $\mathrm{M}_n(C)$ 上的 $C$-代数自同构均为内自同构). 当对一般的整区, 例如 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, 其上矩阵代数存在非内自同构的代数自同构. 关于矩阵代数上环自同构与内自同构的差距更一般的讨论可参见 [BHKV18]. 这份笔记的目的是记录黄逸敏关于 U.F.D. 上矩阵代数的代数自同构是内自同构所给出的初等证明.

**Proposition 0.1** ([Isa80])**.** 设 $C$ 是 U.F.D., 那么 $\mathrm{M}_n(C)$ 上的 $C$-代数自同构均为内自同构.

*Proof.* 记 $K = \mathrm{Frac}C$, 对 $\mathrm{M}_n(C)$ 上任何 $C$-代数自同构 $\theta$, 可自然延拓为 $\mathrm{M}_n(K)$ 上 $K$-代数自同构. 现在由 Skolem-Noether 定理, $\theta$ 延拓为 $\mathrm{M}_n(K)$ 上 $K$-代数自同构后是内自同构. 于是知存在 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(C)$ 满足 $\theta(X) = A^{-1}XA, \forall X \in \mathrm{M}_n(C)$. 注意 $C$ 是 U.F.D., 所以我们可以设所有的 $a_{ij}$ 没有公共的素因子. 由下面的 [引理0.2] 知 $\det A$ 整除 $A_{jk}a_{\ell t}, \forall 1 \le j,k,t,\ell \le n$. 我们断言 $\det A$ 在 $C$ 中整除所有的 $A_{jk}$. 设 $\det A$ 有素元分解 $\det A = p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_m^{s_m}$(这里 $s_j \ge 1$, 不同的 $p_i$ 和 $p_j$ 不相伴, $m$ 可能是零). 那么对每个 $p_j^{s_j}$, 存在 $a_{\ell_0 t_0}$ 没有素因子 $p$, 因此 $p_j^{s_j}$ 整除每个 $A_{jk}$. 于是知每个 $A_{jk}$ 能够被 $p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_m^{s_m} = \det A$ 整除.

至此得到 $A^{-1} = (\det A)^{-1}A^* \in \mathrm{M}_n(C)$, 所以 $\theta$ 是由 $C$ 上可逆矩阵 $A$ 决定的内自同构. □

**Lemma 0.2** (黄的观察)**.** 设 $C$ 是整区, $K = \mathrm{Frac}C$. 如果 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(C)$ 满足在 $\mathrm{M}_n(K)$ 中可逆且 $\theta : \mathrm{M}_n(C) \to \mathrm{M}_n(C), X \mapsto A^{-1}XA$ 是定义合理的 $C$-代数同态, 那么若记 $a_{ij}$ 是代数余子式为 $A_{ij}$, 则有

$$\det A \big| A_{jk}a_{\ell t}, \forall 1 \le j,k,t,\ell \le n.$$

*Proof.* 由条件, 对任何正整数 $1 \le k,\ell \le n$ 有 $A^{-1}E_{k\ell}A \in \mathrm{M}_n(C)$, 即 $\det A$ 整除 $A^*XA$ 的每个元素, 其中 $A^*$ 表示 $A$ 的伴随矩阵. 现在把 $A^*$ 写作 $A_{ji}E_{ji}$ 的和, 把 $A$ 写作 $a_{st}E_{st}$ 的和, 那么 $A^*E_{k\ell}$ 的第 $j$ 行第 $t$ 列位置处的元素就是 $A_{jk}a_{\ell t}$. 因此 $\det A$ 整除 $A_{jk}a_{\ell t}$. □

**Example 0.3** (整区上矩阵代数的代数自同构未必是内自同构, [Isa80]). 命 $C=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, 以及

$$A=\begin{pmatrix}1+\sqrt{-5} & 2\\ 2 & 1-\sqrt{-5}\end{pmatrix},$$

那么 $\det A=2$ 且明显有 $\det A\big|A_{jk}a_{\ell t},\forall 1\leq j,k,t,\ell\leq n$. 于是由 [引理0.2] 的证明过程知 $\theta:\mathrm{M}_n(C)\to\mathrm{M}_n(C),X\mapsto A^{-1}XA$ 是定义合理的 $C$-代数自同态以及对每个 $1\leq i,j\leq n$, $(\det A)^{-1}AE_{ij}A^*\in\mathrm{M}_n(C)$. 所以 $\theta$ 是 $C$-代数自同构. 下证 $\theta$ 不是内自同构. 否则, 存在 $\mathrm{M}_n(C)$ 中可逆矩阵 $U$ 使得 $UXU^{-1}=A^{-1}XA,\forall X\in\mathrm{M}_n(C)$. 这说明存在 $c\in C$ 使得 $AU=cI_2$. 特别地, $2\det U=c^2$. 因为 2 是不可约元, 所以 2 不可能相伴于某个不可逆元的平方. 而 2 也不是 $C$ 中可逆元, 所以得到矛盾. 故 $\theta$ 是 $\mathrm{M}_n(C)$ 上非内自同构的 $C$-代数自同构.

**Remark 0.4.** 对任何正整数 $n$, 总存在 Dedekind 整区 $C$ 使得 $\mathrm{M}_n(C)$ 上存在非内自同构的 $C$-代数自同构.

# 参考文献


[BHKV18] Matej Brešar, Christoph Hanselka, Igor Klep, and Jurij Volčič. Skolem-Noether algebras. *J. Algebra*, 498:294–314, 2018.

[Isa80] I. M. Isaacs. Automorphisms of matrix algebras over commutative rings. *Linear Algebra Appl.*, 31:215–231, 1980.

[Kov73] Amos Kovacs. Homomorphisms of matrix rings into matrix rings. *Pacific J. Math.*, 49:161–170, 1973.