Dixmier-Moeglin 等价

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 10 月 16 日

目录

1 背景知识

1.1 Dixmier-Moeglin 等价

代数表示论的一个基本目标是对给定的代数找出并分类该代数的所有不可约表示. 而对于许多无限维代数而言, 寻找它们的不可约表示似乎是不可能完成的任务. 因此, 法国数学家 J. Dixmier 提出了以下的替代方案：先找该代数所有的本原理想, 再对每个本原理想至少找到一个以该本原理想为零化子的不可约表示.

该方案的理论支撑来自两个基本观察：(1) 任何不可约表示的零化子都是某个本原理想; (2) 每个本原理想都是某个不可约表示的零化子. 一般地, 极大理想一定是本原理想, 本原理想一定是素理想, 但反之未必成立 (对于 PI 代数, Kaplansky 定理表明任何本原理想是极大理想, 所以 PI 代数的本原理想集就是极大理想集). 因此对于 Dixmier 方案的第一步, 寻找所有本原理想的任务可转化为判别哪些素理想是本原的.

Definition 1.1. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上右 Noether 代数, 称 A 的素理想 P 是**有理的**, 若域 $Z(Q(A/P))$ 在 $\Bbbk$ 上代数.

Remark 1.2. 根据 Goldie 定理, 右 Noether 素环的右局部化存在且为 Artin 单环, 故 $Z(Q(A/P))$ 确实是域.

Example 1.3. 域上的交换仿射代数的有理素理想集恰为极大理想集.

Proof. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上交换仿射代数, 那么由 Zariski 引理知对任何极大理想 $\mathfrak{m}$ 有 $A/\mathfrak{m}$ 是有限维 $\Bbbk$-代数, 这说明 $\mathfrak{m}$ 是有理素理想. 反之, 若 P 是 A 的有理素理想, 那么 $A/P \subseteq Q(A/P)$ 是 $\Bbbk$ 的整扩张, 故 A/P 是域. $\square$

回忆拓扑空间 X 的子集 L 被称为**局部闭集**, 如果 L 可表为 X 的一个开子集和一个闭子集之交. 若单点 $x \in X$ 满足 $\{x\}$ 是 X 的局部闭集, 则称 x 是 X 中**局部闭点** (等价地, 单点集 $\{x\}$ 为 x 某开领域的闭子集).

Basic Observation. 设 R 是含幺环, 那么 $P \in \mathrm{Spec}R$ 是素谱中的局部闭点的充要条件是所有真包含 P 的素理想之交仍是真包含 P 的理想.

Proof. 设 T 是所有真包含 P 的素理想之交. 必要性：设 P 是素谱内的局部闭点, 那么存在 R 的理想 I, J 使得 $\{P\} = V(I) - V(J)$, 从而对任何素理想 $Q \supsetneq P$, 有 $Q \in V(J)$. 所以 $T \supseteq J + P \supsetneq P$. 充分性：假设 $T \supsetneq P$, 那么 $\{P\} = V(P) - V(T)$, 这意味着 P 是素谱内的局部闭点. □

J. Dixmier[Dix77] 和 C. Moeglin[Mœg80] 证明了下述结果：

Theorem 1.4. 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维复 Lie 代数, 那么 $\mathfrak{g}$ 的包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的下述三个素理想子集相同：

$$\{U(\mathfrak{g})\text{的本原理想}\} = \{U(\mathfrak{g})\text{的局部素理想}\} = \{U(\mathfrak{g})\text{的有理素理想}\}.$$

Remark 1.5. 在 [IS80] 中 L.W. Small 和 R.S. Irving 将结论推广至特征为零的域上.

Definition 1.6 (Dixmier-Moeglin 等价)**.** 若域 $\Bbbk$ 上右 Noether 代数 A 满足其本原理想集、局部素理想集和有理素理想集相同, 则称 A 满足 **Dixmier-Moeglin 等价**. 对左 Noether 代数也有类似定义.

1.2 Jacobson 环

在 Hilbert 零点定理证明过程中, 域上的仿射代数满足任何素理想都可以表示为一些极大理想之交这一性质起到了至关重要的作用. 下面 Jacobson 环概念便是这一捕捉特性后的非交换推广.

Definition 1.7. 称含幺环 R 是 **Jacobson 环**, 如果对任何素理想 P, P 总可以表示为一些本原理想之交.

Remark 1.8. 由此立即看到含幺交换环 R 是 Jacobson 环当且仅当每个素理想是一些极大理想之交.

Basic Observation. 设 R 是含幺环, 则 R 是 Jacobson 环的充要条件是对任何素理想 P, R/P 是半本原环.

Basic Observation. 设 R 是 Jacobson 环, 则 R 的 $\mathrm{Jac}R = N(R)$, 故 Jacobson 环的 Jacobson 根诣零.

Example 1.9. 域上的仿射交换代数是 Jacobson 环.

Proof. 这里证明更强的断言：设 A 是域 $\Bbbk$ 上仿射交换代数, 则任何理想 I 的根理想是所有包含 I 的极大理想之交. 记 A 的 Rabinowitsch 素谱是 $\mathrm{Spec}_{rab}A = \{P \in \mathrm{Spec}A | \text{存在极大理想}\mathfrak{m} \subseteq A[x]\text{使得}P = A \cap \mathfrak{m}\}$, 那么这时 $\mathrm{maxSpec}A = \mathrm{Spec}_{rab}A \subseteq \mathrm{Spec}A$, 故只需验证 $\sqrt{I}$ 包含 Rabinowitsch 素谱中所有含 I 素理想之交. 这里记 Rabinowitsch 素谱中所有含 I 素理想之交是 T, 那么对每个 $a \in T$, 有 $J = (I, ax-1) = A[x]$, 所以存在 $s_1, ..., s_m \in I, f_1(x), ..., f_m(x), g(x) \in A[x]$ 使得 $f_1(x)s_1 + \cdots + f_m(x)s_m + g(x)(ax-1) = 1$. 于是在 Laurent 多项式环 $A[x, x^{-1}]$ 中有

$$f_1(x^{-1})s_1 + \cdots + f_m(x^{-1})s_m + g(x^{-1})(ax^{-1}-1) = 1,$$

在上式两边适当乘上 x 的某个正整数幂后知存在 $g_1(x), ..., g_m(x), h(x) \in A[x], l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 使得 $g_1(x)s_1 + \cdots + g_m(x)s_m + h(x)(a-x) = x^l$, 所以 $a \in \sqrt{I}$, 进而 $T \subseteq \sqrt{I}$. □

Example 1.10. 设 $\Bbbk$ 是域, 则 $A = \Bbbk[x_1, x_2, ...]/(\{x_ix_j | i, j \geq 1\})$ 是非 Noether 的 Jacobson 局部环.

Proof. A 明显非 Noether. 注意到 A 唯一的素理想是 $(x_1, x_2, ...)/(\{x_i x_j | i, j \geq 1\})$, 故是 Jacobson 局部环. □

Example 1.11. 设 $\Bbbk$ 是域, 则交换 Noether 局部代数 $A = \Bbbk[[x]]$ 不是 Jacobson 环.

Proof. 注意到 A 唯一的极大理想是 (x), 而零理想是素理想, 所以 A 不是 Jacobson 环. □

Example 1.12. 任何单边 Artin 环是 Jacobson 环.

Proof. 只需注意到单边 Artin 的素理想集和极大理想集相同. □

Basic Observation. 设 R 是 Jacobson 环, 则 R 的局部闭素理想均为本原理想.

Proof. 如果 P 是局部闭素理想, 那么由 P 可以表为所有包含 P 的本原素理想之交可知一定存在某个本原素理想和 P 相同. 特别地, P 是本原理想. □

Proposition 1.13. 设 $\Bbbk$-代数 A 是右 (左)Noether 的, 且 $\dim_{\Bbbk} A < |k|$, 那么 A 是 Jacobson 环.

Proof. 如果 $\Bbbk$ 是有限域, 那么 A 是有限集, 进而是 Artin 代数, 所以这时 A 是 Jacobson 环. 下设 $\Bbbk$ 是无限域, 此时 $|\Bbbk| = |\Bbbk^\times|$. 下面断言 $\mathrm{Jac}A$ 是诣零理想, 一旦证明该断言立即得到对每个 A 的素理想 P, A/P 是半本原代数, 原因是如果 $\mathrm{Jac}(A/P) \neq 0$, 由 A/P 是右 Noether 素环知 $\mathrm{Jac}(A/P)$ 作为本质右理想总存在正则元, 这将与 $\mathrm{Jac}(A/P)$ 是诣零理想矛盾. 下面证明 $\mathrm{Jac}A$ 是诣零理想. 任取 $c \in \mathrm{Jac}A$, 我们有 $|k^\times|$ 个不同的元素 $c - \alpha, \alpha \in \Bbbk$, 并且由 $c - \alpha = -\alpha(1 - \alpha^{-1}c)$ 知这些元素都可逆, 注意到此时 $\{(c-\alpha)^{-1} | \alpha \in \Bbbk^\times\}$ 是 $\Bbbk$-线性相关的, 所以 c 是 $\Bbbk$ 上代数元. 设 c 满足 $\Bbbk$ 上首一多项式 $x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 (\alpha_i \in \Bbbk)$, 因为 c 不可逆所以 $\alpha_0 = 0$, 不妨设 $m \geq 2$. 从而 $c^m + \alpha_{m-1}c^{m-1} + \cdots + \alpha_1 c = 0$. 设 $l \geq 1$ 是满足 $\alpha_l \neq 0$ 的最小正整数, 则 $(1 + \alpha_l^{-1}c^{m-l} + \cdots + \alpha_l^{-1}\alpha_{l+1}c)c^l = 0$, 注意 $1 + \alpha_l^{-1}c^{m-l} + \cdots + \alpha_l^{-1}\alpha_{l+1}c$ 是 A 中可逆元, 故 c 幂零. □

Remark 1.14. 该命题的证明技术告诉我们对线性维数严格小于 $\Bbbk$ 基数的可除代数 A 一定在 $\Bbbk$ 上代数.

Corollary 1.15. 设域 $\Bbbk$ 不可数, 那么任何右 Noether 仿射 $\Bbbk$-代数是 Jacobson 环.

一般地, 右 Noether 环的 Jacobson 性质有如下环论刻画.

Proposition 1.16. 设含幺环 R 满足对每个素理想 P, R/P 是右 Goldie 环 (例如 R 是右 Noether 环或 PI 环). 那么 R 是 Jacobson 环的充要条件是对 R 的任何真理想 I, $\mathrm{Jac}(R/I)$ 是诣零理想.

Proof. 必要性: 如果 R 是 Jacobson 环, 那么对 R 的任何真理想 I, 商环 R/I 也是 Jacobson 环, 因此 $\mathrm{Jac}(R/I)$ 诣零. 充分性: 对任何素理想 P, R/P 是素右 Goldie 环, 故没有非零诣零理想, 这迫使 $\mathrm{Jac}(R/P) = 0$. □

Remark 1.17. 一般地, 对交换 Noether 代数 R, 即便 $\mathrm{Jac}R$ 是诣零理想也未必能保证 R 关于素理想 P 的商环 R/P 满足 $\mathrm{Jac}(R/P)$ 诣零. 例如取 S 是域上形式幂级数环 $\Bbbk[[x]]$, 它是交换 Noether 局部整环, 唯一的极大理想 $\mathfrak{m} = (x)$ 每个非零元都不是幂零元. 根据 Amitsur 定理, 没有非零诣零理想的含幺环上的一元多项式环半本原, 所以 $R = S[x]$ 是交换 Noether 半本原环. 故 $\mathrm{Jac}R = 0$, 但是 $S \cong R/(x)$ 有不诣零的 Jacobson 根.

事实上, 之前验证满足线性维数严格小于基域基数的 Noether 代数是 Jacobson 环本质上就是利用了满足"线性维数严格小于基域基数"的 Noether 代数有诣零的 Jacobson 根.

1.3 非交换零点定理

Lemma 1.18. 设 R 是左 Noether 环, P 是某个不可约左 R-模 M 的零化子, 那么存在 $Z(Q(R/P))$ 到 $Z(\mathrm{End}_R M)$ 的 $Z(R/P)$-代数嵌入. 特别地, 若 R 是域 $\Bbbk$ 上代数, 则该嵌入是 $\Bbbk$-代数嵌入.

Proof. 由条件知 P 是本原理想, 用 R/P 替换 R 可知不妨设 R 是左 Noether 本原环且 M 是忠实的不可约模. 只需要验证这时存在 $Z(Q(R))$ 到 $Z(\mathrm{End}_R M)$ 的 $Z(R)$-代数嵌入, 证明分四步:

Step 1. 记 S 是 R 所有正则元构成的乘闭子集, 现在说明对任何 $s^{-1}r \in Z(Q(R))$ 有 $sar = ras, \forall a \in R$. 此时在 $Q(R)$ 内对任何 $a \in R$ 有 $(sas)(s^{-1}r) = s(s^{-1}r)as$, 故 $sar = ras, \forall a \in R$.

Step 2. 对给 $s^{-1}r \in Z(Q(R))$, 存在唯一的 R-模同态 $f: M \to M$ 使得 $f(sm) = rm, \forall m \in M$. 因为 M 是忠实的, 所以对正则元 s, 存在 $m_0 \in M$ 使得 $sm_0 \neq 0$. 如果能够说明 $\mathrm{ann}_R(sm_0) \subseteq \mathrm{ann}_R(rm_0)$, 那么存在唯一的 R-模同态 $f: M \to M$ 使得 $f(sm_0) = rm_0$. 再利用 sm_0 生成不可约模 M 可知 $f(sm) = rm, \forall m \in M$. 现在用反证法说明 $\mathrm{ann}_R(sm_0) \subseteq \mathrm{ann}_R(rm_0)$. 假设存在 $a \in R$ 使得 $asm_0 = 0$ 但 $arm_0 \neq 0$. 于是存在 $b \in R$ 使得 $barm_0 = m_0$, 同时也有 $basm_0 = 0$, 进而 $sm_0 = 0$, 矛盾. 因此 $\mathrm{ann}_R(sm_0) \subseteq \mathrm{ann}_R(rm_0)$.

Step 3. 如果 $s^{-1}r = t^{-1}q$, 并设 R-模同态 $f, g: M \to M$ 满足 $f(sm) = rm, g(tm) = qm, \forall m \in M$, 则 $f = g$. 注意这时 $sr = rs$, 所以在 $Q(R)$ 内有 $s^{-1}r = rs^{-1}$, 进而 $tr = qs$. 于是 $f(tsm) = g(tsm), \forall m \in M$. 因为 ts 是正则元, 所以存在 M 中元素在 ts 作用下非零, 再结合 M 是不可约模可得 $f = g$.

Step 4. 置 $\varphi: Z(Q(R)) \to Z(\mathrm{End}_R M), s^{-1}r \mapsto f$, 其中 f 满足 $f(sm) = rm, \forall m \in M$. 那么 φ 是定义合理的 $Z(R)$-模同态, 可直接计算验证 φ 是 $Z(R)$-代数同态. 根据 Goldie 定理, R 作为左 Noether 素环的左局部化 $Q(R)$ 是 Artin 单环, 所以 $Z(Q(R))$ 是域, 这说明 φ 是 $Z(R)$-代数嵌入.

□

Definition 1.19. 若 $\Bbbk$ 上左 Noether 代数 A 是 Jacobson 环且任何不可约左 A-模的自同态环在 $\Bbbk$ 上代数, 则称 A 满足**零点定理**. 易见代数闭域上仿射交换代数都满足零点定理 (事实上这里代数闭域条件可以去掉).

Remark 1.20. 对一般的 $\Bbbk$-代数 A, 也可以定义满足零点定理的概念. 称 A 具有**根性质**, 如果 A 关于每个真理想的商环有诣零的 Jacobson 根. 在 [命题1.16] 中已说明单边 Noether 代数具有根性质当且仅当它是 Jacobson 环. 称 $\Bbbk$-代数 A **满足零点定理**, 如果 A 具有根性质且任何不可约左 A-模的自同态环在 $\Bbbk$ 上代数.

Example 1.21. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上交换仿射代数, 则每个不可约 A-模有限维. 特别地, A 满足零点定理.

Proof. 设 $_AM$ 不可约, 那么 $\mathrm{Ann}_A M$ 是 A 的极大理想, 所以 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 是仿射 $\Bbbk$-域, 进而是有限维代数. 由此易见 M 是有限维模. □

Basic Observation. 若 $\Bbbk$-代数 A 满足任何不可约左 A-模的自同态环在 $\Bbbk$ 上代数, 则 A 关于任何真理想 I 的商代数 A/I 也满足该性质.

Remark 1.22. 更一般地, 之后会说明仿射 PI 代数都满足零点定理.

Corollary 1.23. 若 $\Bbbk$ 上左 Noether 代数 A 满足零点定理, 则在 $\mathrm{Spec}A$ 内有下述蕴含关系:

$$\text{局部闭素理想} \Rightarrow \text{本原理想} \Rightarrow \text{有理素理想}.$$

Remark 1.24. 上述三个蕴含关系反过来都有例子表明不一定成立.

Corollary 1.25. 设 $\Bbbk$-代数 A 是左 Noether 的, 且 $\dim_{\Bbbk} A < |k|$, 那么 A 满足零点定理.

Proof. 之前已经说明该条件下 A 是 Jacobson 环, 还需说明任何不可约左 A-模 M 的自同态环在 $\Bbbk$ 上代数. 注意到这时 $\mathrm{End}_A M$ 是 $\Bbbk$ 上可除代数且 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{End}_A M \le \dim_{\Bbbk} M \le \dim_{\Bbbk} A < |k|$, 故 $\mathrm{End}_A M$ 在 $\Bbbk$ 上代数. □

下面说明对未必 Noether 的 $\Bbbk$-代数 A, 如果 $A[x]$ 上不可约模的自同态环在 $\Bbbk$ 上代数, 那么 A 满足零点定理. 作为推论, 将说明仿射 PI 代数也满足零点定理. 首先需要下面的基本观察.

Basic Observation. 设 R 是含幺环, $a \in R$, 那么 a 是幂零元当且仅当 $(1-ax)R[x] = R[x]$.

Proof. 如果 a 是幂零元, 设 $a^{n+1} = 0$, 进而 $(1-ax)(1+ax+a^2x^2+\cdots+a^nx^n) = 1$, 必要性得证. 假设有多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 使得 $(1-ax)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n) = 1$, 直接计算得到 $a_0 = 1, a_1 = a, ..., a_n = a^n, aa_n = 0$, 所以 $a^{n+1} = 0$. 类似地容易验证 a 是幂零元当且仅当 $R[x](1-ax) = R[x]$. □

Proposition 1.26. 设 $\Bbbk$-代数 A 满足任何不可约左 $A[x]$-模的自同态环在 $\Bbbk$ 上代数, 那么 A 满足零点定理.

Proof. 此时 $A \cong A[x]/(x)$ 以及 A 的任何商代数 A/I 也满足任何不可约模在 $\Bbbk$ 上代数. 用 A/I 替换 A 知只需验证 $\mathrm{Jac}A$ 是诣零理想. 任取 $a \in \mathrm{Jac}A$, 假设 a 不是幂零元, 那么 $A[x](1-ax) \neq A[x]$, 取 $A[x]$ 的一个包含 $1-ax$ 的极大左理想 M, 那么 $A[x]/M$ 作为不可约左 $A[x]$-模在 $\Bbbk$ 上代数. 考察 $x \in A[x]$ 决定的左乘变换 $\theta = x_l \in \mathrm{End}_{A[x]}(A[x]/M)$, 那么 $\theta \neq 0$, 所以由 Schur 引理知 θ^{-1} 存在. 于是 θ^{-1} 满足 $\Bbbk$ 上某个首一多项式, 故存在 $g(x) \in \Bbbk[x]$ 使得 $\theta = g(\theta^{-1})$, 进而由 $\theta^{-1}(1+M) = a+M$ 可知 $g(a)+M = x+M$, 所以 $(1-g(a)a)x+M = 0$, 而 $1-g(a)x$ 在 R 中可逆, 矛盾. □

Corollary 1.27. 设 $\Bbbk$-代数 A 是仿射 PI 代数, 那么：
(1) 任何不可约左 A-模是有限维模;
(2) A 满足零点定理, 进而也是 Jacobson 环;
(3) 若进一步 A 是 Artin 的, 则 A 是有限维代数.

Proof. (1) 任取不可约左 A-模 M, 那么 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 是本原 PI 代数, 用 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 替换 A 可不妨设 A 是本原的. 由 Kaplansky 定理知本原 PI 代数是其中心 $Z(A)$ 上的有限维中心单代数. 对代数扩链 $\Bbbk \subseteq Z(A) \subseteq A$ 应用 Artin-Tate 引理可得 $Z(A)$ 是 $\Bbbk$ 上仿射代数. 注意到此时 $Z(A)$ 是域, 所以 Zariski 引理保证了 $Z(A)$ 是有限维代数, 从而 A 是有限维代数 (注意这是在 A 本原的假定下), 从而 M 是有限维模.

(2) 这时 $A[x]$ 作为 A 的中心扩张仍是仿射 PI 代数, 进而 [命题1.26] 保证了 A 满足零点定理. 特别地, A 满足根性质, 因为 A 是 PI 代数, 所以由 [命题1.16] 得到 A 是 Jacobson 环.

(3) 此时 ${}_AA$ 作为既 Noether 又 Artin 的左 A-模存在合成列, 通过 (1) 知道 ${}_AA$ 的每个合成因子是有限维模, 从而 A 也是有限维的. □

Remark 1.28. 交换代数中的经典结论是域上交换代数是 Artin 的当且仅当是有限维代数. 该推论说对仿射 PI 代数, 它是 Artin 的当且仅当它是有限维代数.

参考文献

[BG03] Kenneth A Brown and Iain Gordon. Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory. 2003.

[BG12] Ken Brown and Ken R Goodearl. *Lectures on algebraic quantum groups*. Birkhäuser, 2012.

[BLSM17] Jason Bell, Stéphane Launois, Omar León Sánchez, and Rahim Moosa. Poisson algebras via model theory and differential-algebraic geometry. *Journal of the European Mathematical Society*, 19(7):2019–2049, 2017.

[BWY19] Jason P Bell, Xingting Wang, and Daniel Yee. The dixmier-moeglin equivalence, morita equivalence, and homeomorphism of spectra. *Journal of Algebra*, 534:228–244, 2019.

[Dix77] J. Dixmier. Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes. *Journal of algebra*, 48(1):96–112, 1977.

[GL11] Kenneth Ralph Goodearl and Stephane Launois. The dixmier-moeglin equivalence and a gel'fand-kirillov problem for poisson polynomial algebras. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 139(1):1–39, 2011.

[Goo06] Kenneth R Goodearl. A dixmier-moeglin equivalence for poisson algebras with torus actions. *Contemporary Mathematics*, 419:131, 2006.

[IS80] R.S. Irving and L.W. Small. On the characterization of primitive ideals in enveloping algebras. *Mathematische Zeitschrift*, 173:217–221, 1980.

[Lam01] T. Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2001.

[LWW21] Juan Luo, Xingting Wang, and Quanshui Wu. Poisson dixmier-moeglin equivalence from a topological point of view. *Israel Journal of Mathematics*, 243:103–139, 2021.

[Mœg80] C. Mœglin. Idéaux bilateres des algebres enveloppantes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 108:143–186, 1980.

[MR87] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. American Mathematical Society, 1987.

[Oh99] Sei-Qwon Oh. Symplectic ideals of poisson algebras and the poisson structure associated to quantum matrices. *Communications in Algebra*, 27(5):2163–2180, 1999.