

# 群的自由积

戚天成 ☒

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 2 日

任给一族群  $\{G_i | i \in I\}$ ,  $I \neq \emptyset$  是指标集, 如果群  $P$  以及群同态族  $\{j_i : G_i \rightarrow P | i \in I\}$  满足对任给群同态族  $\{f_i : G_i \rightarrow G | i \in I\}$  存在唯一的群同态  $\hat{f} : P \rightarrow G$  使得  $\hat{f}j_i = f_i, \forall i \in I$ , 即下图交换:

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{j_i} & P \\ & \searrow f_i & \downarrow \hat{f} \\ & & G \end{array}$$

则称  $(P, \{j_i : G_i \rightarrow P | i \in I\})$  是群族  $\{G_i | i \in I\}$  的**自由积**. 用范畴的语言来说, 群族的自由积即为这族群的余积. 群范畴中任何群族的余积构造并不像积那样容易, 这份笔记的目的是记录群范畴中余积的具体构造.

**Theorem.** 任给群族  $\{A_i | i \in I\}$ ,  $I \neq \emptyset$ , 该群族的自由积  $(P, \{j_i : A_i \rightarrow P | i \in I\})$  存在且在同构意义下唯一.

*Proof.* 如果自由积存在, 我们说明每个  $j_i$  是单态: 任给  $k \in I$ , 当  $i \neq k$  时, 定义  $f_i$  为平凡同态, 对  $f_k$ , 定义为  $A_k$  上恒等态  $f_k = 1_{A_k}$ , 由自由积的定义存在群同态  $\hat{f} : P \rightarrow G$  使得  $\hat{f}j_i = f_i, \forall i \in I$ , 特别地, 由  $1_{A_k} = \hat{f}j_k$  知  $j_k$  是单射. 如果自由积存在, 不难证明其同构唯一性, 下面仅证明存在性. 对每个  $i \in I$ , 命  $A_i^\# = \{(x, i) | x \in A_i - \{1_{A_i}\}\}$ , 对  $a = (x, i), b = (y, i) \in A_i^\#$ , 如果  $xy \neq 1_{A_i}$ , 记  $ab = (xy, i)$  并记  $a^{-1} = (x^{-1}, i)$ ; 如果  $xy = 1_{A_i}$ , 称  $ab = 1_{A_i}$ , 那么  $\{A_i^\# | i \in I\}$  是不相交的集合族. 取集合  $\bigcup_{i \in I} A_i^\#$  外一个元素, 记为 1. 现在我们考虑集合  $S = (\bigcup_{i \in I} A_i^\#) \cup \{1\}$  上的序列全体  $\{f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow S\}$ , 如果  $f$  满足  $f(n) = s_n$ , 记  $f$  为  $(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$ .

如果序列  $(s_1, s_2, \dots)$  满足: (1) 对相邻的  $s_i, s_{i+1}$ , 如果都不为 1, 那么它们在不同的  $A_k^\#$  中; (2) 如果正整数  $i$  满足  $s_i = 1$ , 那么  $s_n = 1, \forall n \geq i$ , 则称序列  $(s_1, s_2, \dots)$  是  $S$  上一个**既约字**. 记  $P$  为所有既约字构成的集合, 称  $(1, 1, 1, \dots)$  为空字, 记作  $1_P$ , 对非空的既约字  $(a_1, a_2, \dots, a_m, 1, \dots)$  这里  $a_m \neq 1$ , 记为  $a_1 a_2 \cdots a_m$ . 根据上述记号, 易见对非空的既约字  $a_1 a_2 \cdots a_n$  与  $b_1 b_2 \cdots b_m$ ,  $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_m$  当且仅当  $n = m$  且  $a_k = b_k, \forall 1 \leq k \leq n$ . 现在在  $P$  上定义二元运算: 对任给  $x \in P$ , 定义  $1_P x = x 1_P = x$ . 对非空的既约字  $a_1 a_2 \cdots a_n, b_1 b_2 \cdots b_m \in P$ , 当  $n \leq m$  时, 如果  $a_n$  与  $b_1$  在不同的  $A_k^\#$  中, 那么  $a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$  是既约字, 此时定义  $(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_m) = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$ ; 如果  $a_n$  与  $b_1$  在同一个  $A_k^\#$  中且  $a_n b_1 \neq 1_{A_k}$ , 则  $a_1 a_2 \cdots (a_n b_1) b_2 \cdots b_m$  是既约字, 定义  $(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_m) = a_1 a_2 \cdots (a_n b_1) b_2 \cdots b_m$ . 如果  $a_1, b_n$  在同一个  $A_k^\#$  中且  $a_n b_1 = 1_{A_k}$ , 如下定义一个正整数  $l$ : 当存在  $1 \leq k \leq n$  使得  $a_{n+1-k}$  与  $b_k$  不在同一个  $A_j^\#$  中或  $a_{n+1-k} b_k$  在同一个  $A_j^\#$  且它们乘积不是单位元时, 定义  $l$  为满足上述性质的最小正整数, 否则定义  $l = n + 1$ .

当  $l \leq n$  时, 如果  $a_{n+1-l}, b_l$  不在同一个  $A_k^\#$  中, 定义  $(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_m) = a_1 a_2 \cdots a_{n+1-l} b_l b_{l+1} \cdots b_m$ , 否则定义为  $(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_m) = a_1 a_2 \cdots (a_{n+1-l} b_l) b_{l+1} \cdots b_m$ , 当  $l = n+1$  时, 如果  $n = m$ , 定义  $(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_m) = 1_P$ , 否则定义  $(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_m) = b_{n+1} \cdots b_m$ , 类似可定义  $n < m$  的情形. 易见上述运算作为二元运算定义合理且有单位元  $1_P$ , 任意非空字  $a_1 a_2 \cdots a_n$ , 有逆元  $a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$ , 故要说明  $P$  关于上述二元运算构成群只需证明结合律成立. 对每个  $s \in S = (\bigcup_{i \in I} A_i^\#) \cup \{1\}$ , 记  $\sigma_s : P \rightarrow P$  是由  $s$  诱导的左乘变换, 即: 当  $s = 1$  时,  $\sigma_1$  是  $P$  上恒等映射, 当  $s \in \bigcup_{i \in I} A_i^\#$  时,  $\sigma_s$  满足  $\sigma_s(1_P) = s, \sigma_s(a_1 \cdots a_n) = (s)(a_1 \cdots a_n)$ , 等式右边是既约字的乘法. 记  $A(P)$  是集合  $\{\sigma_s | s \in S\}$  在  $P$  上对称群  $S(P)$  中生成的子群, 则有保持单位元与乘法的双射  $\varphi : P \rightarrow A(P)$  满足  $\varphi(a_1 a_2 \cdots a_n) = \sigma_{a_1} \sigma_{a_2} \cdots \sigma_{a_n}$ , 于是  $A(P)$  中的结合律保证了  $P$  中结合律, 故  $P$  关于既约字乘法构成群. 对每个  $i \in I$ , 定义  $j_i : A_i \rightarrow P$  满足  $j_i(1_{A_i}) = 1_P$ , 当  $x \neq 1_{A_i}$  时  $j_i(x)$  为  $a = (x, i) \in A_i^\#$  在  $P$  中对应的既约字  $a$ , 易见  $j_i$  是单群同态. 最后验证  $P$  以及单态族  $\{j_i : A_i \rightarrow P | i \in I\}$  是群族  $\{A_i | i \in I\}$  的自由积. 任给群同态族  $\{f_i : A_i \rightarrow G | i \in I\}$ , 命  $\hat{f} : P \rightarrow G$  为满足  $\hat{f}(1_P) = 1_G, \hat{f}(a_1 \cdots a_n) = f_{k_1}(x_1) \cdots f_{k_n}(x_n)$ , 其中  $a_t = (x_t, k_t) \in A_{k_t}^\#, 1 \leq t \leq n$ , 直接计算知  $\hat{f}$  是群同态且  $\hat{f} j_i = f_i, \forall i \in I$ , 如果还有群同态  $\hat{g} : P \rightarrow G$  使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{j_i} & P \\ & \searrow f_i & \downarrow \hat{g} \\ & & G \end{array}$$

那么对任一非空既约字  $a_1 \cdots a_n \in P, a_t \in A_{k_t}^\#, 1 \leq t \leq n$ , 有

$$\hat{g}(a_1 \cdots a_n) = \hat{g}(a_1) \hat{g}(a_2) \cdots \hat{g}(a_n) = f_{k_1}(a_1) \cdots f_{k_n}(a_n) = \hat{f}(a_1 \cdots a_n),$$

由此得到唯一性. 故  $(P, \{j_i : A_i \rightarrow P | i \in I\})$  是群族  $\{A_i | i \in I\}$  的自由积. □