Frobenius 代数

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 3 月 16 日

Frobenius 代数是表示论与非交换代数等领域具有良好对偶性质和同调性质的代数, 近年人们发现 Frobenius 代数与 2 维拓扑量子场论间有密切的联系. 这份笔记简要记录 Frobenius 代数的基本概念与性质.

1 Frobenius 代数

本节固定 K 是含幺交换环与 K-代数 A. 我们考虑的所有 A-模都赋予自然的对称 K-K 双模结构. 注意此时 $\mathrm{Hom}_K(A,K)$ 上有自然的 A-K 双模与 K-A 双模结构.

Lemma 1.1. 对 K-代数 A, 以下四条等价:
(1) 作为 K**-Mod** 到 A**-Mod** 的函子有自然同构 $A\otimes_K - \cong \mathrm{Hom}_K({}_KA_A,-)$.
(2) ${}_KA$ 是有限生成投射 K-模且作为 A-K 双模, 有同构 $A\cong \mathrm{Hom}_K({}_KA_A,K)$.
(3) ${}_KA$ 是有限生成投射 K-模且作为 K-A 双模, 有同构 $A\cong \mathrm{Hom}_K({}_AA_K,K)$.
(4) 存在 K-模同态 $\tau: A\to K$ 以及 A 中元素 $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n$ 使得

$$\sum_{i=1}^n x_i\tau(y_ia)=\sum_{i=1}^n \tau(ax_i)y_i=a,\forall a\in A.$$

如果 A 满足上述等价条件之一, 则称 A 是 K 上 **Frobenius 代数**.

Proof. (1)⇒(2): 设有自然同构 $\eta: A\otimes_K - \to \mathrm{Hom}_K(A,-)$. 将 η 作用 K 和 ${}_KA_A$, 我们得到左 A-模同构 $\eta_K: A\otimes_K K\to \mathrm{Hom}_K(A,K)$(由此得到 A-K 双模同构 $A\cong \mathrm{Hom}_K({}_KA_A,K)$) 以及 $\eta_A: A\otimes_K A\to \mathrm{Hom}_K({}_KA_A,{}_KA_A)$. 并注意任何 $b\in A$ 决定的右乘变换 $b_r: A\to A$ 作为 K-模同态满足 $\eta_Ab_r=b_r\eta_A$ 表明 η_A 是 A-A 双模同构. 现在我们有下面的 A-A 双模同构序列

$$\mathrm{Hom}_K({}_KA_A,K)\otimes_K A\xrightarrow{\eta_K\otimes \mathrm{id}_A} A\otimes_K K\otimes_K A\xrightarrow{\cong} A\otimes_K A\xrightarrow{\eta_A}\mathrm{End}_K A.$$

命 $\psi: \mathrm{Hom}_K(A,K)\otimes_K A\to \mathrm{End}_KA$ 是上述双模同构列的合成. 下面我们说明 $\psi(f\otimes a)(y)=f(y)a,\forall f\in \mathrm{Hom}_K(A,K), a\in A$ 来得到 A 是有限生成投射 K-模. 任给 $f\in \mathrm{Hom}_K(A,K)$, 设 $b\in A$ 满足 $\eta(b\otimes 1)=f$, 那么 $\psi(f\otimes a)=\eta_A(b\otimes a)=b\eta_A(1\otimes 1)a$. 记 $i:K\to A$ 是 K-代数 A 的结构映射, 那么由 η 的自然性得 $i_*\eta_K=\eta_A(\mathrm{id}_A\otimes i)$, 两边作用 $1\otimes 1\in A\otimes_K K$ 得到 $\eta_A(1\otimes 1)=i\eta_K(1\otimes 1)$. 注意到 i_* 是左 A-模同态, 于是

$$\psi(f\otimes a)=bi_*(\eta_K(1\otimes 1))a=i_*(\eta_K(b\otimes 1))a=(if)a.$$

因此 $\psi(f\otimes a)(y)=f(y)a,\forall f\in \mathrm{Hom}_K(A,K),a\in A$.

(2)⇒(3): 对 A-K 双模同构 $A\cong \mathrm{Hom}_K({}_KA_A,K)$ 作用对偶函子 $\mathrm{Hom}_K(-,K_K)$ 并结合 A 是有限生成投射 K-模具有自反性立即得到 K-A 双模同构 $A\cong \mathrm{Hom}_K({}_AA_K,K)$.

(3)⇒(4): 设有 K-A 双模同构 $\psi:A\to \mathrm{Hom}_K({}_AA_K,K)$ 并记 $\tau=\psi(1)$. 设 ${}_KA$ 作为有限生成投射模有对偶基 $\{x_1,...,x_n\}\subseteq A,\{x_1^*,...,x_n^*\}\subseteq \mathrm{Hom}_K(A,K)$, 那么存在 $y_1,...,y_n\in A$ 使得 $\psi(y_i)=x_i^*,\forall 1\le i\le n$. 于是 $x_i^*=\tau y_i,\forall 1\le i\le n$. 注意到对任何 $a\in A$ 有 $a=x_1^*(a)x_1+\cdots+x_n^*(a)x_n=\tau(y_1a)x_1+\cdots+\tau(y_na)x_n$. 下面我们需要说明对任何 $a\in A$ 有 $a=\tau(ax_1)y_1+\cdots+\tau(ax_n)y_n$. 考虑 A-A 双模同构序列

$$A\otimes_K A\xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes\psi} A\otimes_K \mathrm{Hom}_K({}_AA_K,K)\xrightarrow{\cong}\mathrm{End}_KA.$$

将上述映射序列的合成记作 $\varphi:A\otimes_K A\to \mathrm{End}_KA$, 那么可直接计算 $\psi(a\otimes b):A\to A,y\mapsto a\tau(by)$. 易见

$$\varphi^{-1}(h)=\sum_{i=1}^n h(x_i)\otimes x_i^*,\forall h\in \mathrm{End}_KA.$$

所以 $b\otimes a=\sum\limits_{i=1}^n b\tau(ax_i)\otimes y_i,\forall a,b\in A$. 固定 a, 由 b 的任意性得到 $a=\sum\limits_{i=1}^n\tau(ax_i)y_i$.

(4)⇒(1): 对每个 K-模 M, 定义 $\eta_M:A\otimes_K M\to \mathrm{Hom}_K(A,M),a\otimes m\mapsto (a\tau)m$. 这里 $(a\tau)m:A\to M,b\mapsto \tau(ba)m$. 可直接计算验证 η_M 是左 A-模同态并且

$$\zeta_M:\mathrm{Hom}_K(A,M)\to A\otimes_K M,f\mapsto \sum_{i=1}^n x_i\otimes f(y_i)$$

是 η_M 的逆映射. 因此 η_M 是左 A-模同构. 也容易直接验证对任何 K-模同态 $h:M\to N$, 下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A\otimes_K M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A\otimes h"'] & \mathrm{Hom}_K(A,M) \arrow[d, "h_*"] \\
A\otimes_K N \arrow[r, "\eta_N"] & \mathrm{Hom}_K(A,N)
\end{tikzcd}$$

因此定义 $\eta:\mathrm{ob}K\textbf{-Mod}\to \bigcup\limits_{M\in \mathrm{ob}K\textbf{-Mod}}\mathrm{Hom}_A(A\otimes_K M,\mathrm{Hom}_K(A,M)),M\mapsto \eta_M$ 给出自然同构. □

Remark 1.2. 根据 (4)⇒(1) 的证明过程, 如果 K-模同态 $\tau:A\to K$ 以及 A 中元素 $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n$ 满足 (4), 那么 η_K 诱导左 A-模同构 $A\to \mathrm{Hom}_K(A,K),a\mapsto a\tau$. 这时 $(\{x_i\}_{i=1}^n,\{\tau y_i\}_{i=1}^n)$ 和 $(\{y_i\}_{i=1}^n,\{x_i\tau\}_{i=1}^n)$ 均给出 A 作为有限生成投射 K-模的对偶基. 如果 K-代数 A 是 Frobenius 代数, 称满足 (4) 的 $(\tau,\{x_i\}_{i=1}^n,\{y_i\}_{i=1}^n)$ 为 **Frobenius 系**, τ 是 **Frobenius 同态 (型)**, $(\{x_i\}_{i=1}^n,\{\tau y_i\}_{i=1}^n)$ 是**对偶基**.

回忆 K-模 V 上的 K-双线性型 $\mu:V\times V\to K$ 被称为**非退化的**, 如果 $\mu(a,b)=0,\forall b\in V$ 蕴含 $a=0$ 且 $\mu(a,b)=0,\forall a\in V$ 蕴含 $b=0$. 如果 K 是域, 有限维 K-线性空间 V 上的双线性型 μ 是非退化的当且仅当 $\mu(a,b)=0,\forall b\in V$ 蕴含 $a=0$. 如果 K-代数 A 上双线性型 $\mu:A\times A\to K$ 满足 $\mu(ab,c)=\mu(a,bc),\forall a,b,c\in A$, 则称 μ 是**结合的**. 我们指出 Frobenius 代数上总存在非退化结合的双线性型.

Proposition 1.3. 设 K-代数 A 是 Frobenius 代数, 那么 A 上存在非退化结合的双线性型.

Proof. 这时 A 是有限生成投射 K-模且有左 A-模同构 $\theta:A\to \mathrm{Hom}_K(A,K)$, 定义

$$\langle -,-\rangle:A\times A\to K,(a,b)\mapsto \theta(b)(a),$$

易见这是 K-双线性型. 并且若 $a\in A$ 满足 $\langle a,b\rangle=0,\forall b\in A$, 则 $f(a)=0,\forall f\in \mathrm{Hom}_K(A,K)$. 那么用 ${}_KA$ 的对偶基作用 a 易知 $a=0$. 如果 $a\in A$ 满足 $\langle b,a\rangle=0,\forall b\in A$, 那么 $\theta(a)=0$, 再结合 θ 是同构得到 $a=0$. □

Remark 1.4. 如果记左模过程中左 A-模同构 θ 在 1 上的作用为 τ, 那么过程中所构造的双线性型满足

$$\tau(a)=\langle a,1\rangle,\forall a\in A.$$

反之, 对在系数环上有限生成自由的代数, 其上存在结合的非退化双线性型并不意味着是 Frobenius 代数.

Example 1.5 (朱瑞鹏)**.** 考虑 $K=\mathbb{C}[x]$ 上 3 阶矩阵代数的子代数

$$\Lambda=\left\{\left.\begin{pmatrix} f(x) & xh(x) & xg(x)\\ xg(x) & f(x) & xh(x)\\ xh(x) & xg(x) & f(x)\end{pmatrix}\right| f(x),g(x),h(x)\in\mathbb{C}[x]\right\}\subseteq \mathrm{M}_3(\mathbb{C}[x]).$$

容易验证 Λ 确实是 $\mathrm{M}_3(K)$ 的 K-子代数, 它作为 P.I.D. 上自由模的子模自然是自由的. 具体地, Λ 有 K-基

$$\left\{I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},X_1=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&x\\x&0&0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}\right\}.$$

可直接验证矩阵的经典迹诱导的双线性型 $\langle -,-\rangle:\Lambda\times\Lambda\to K,(A,B)\mapsto \mathrm{tr}(AB)$ 是非退化的. 下面说明不存在 Λ 到 $\mathrm{Hom}_K(\Lambda,K)$ 的左 Λ-模同构. 假设有左 Λ-模同构 $\varphi:\Lambda\to\mathrm{Hom}_K(\Lambda,K)$, 那么 $\varphi(1)$ 是 $\mathrm{Hom}_K(\Lambda,K)$ 作为左 Λ-模的生成元. 设 $\varphi(1)$ 在 I_3,X_1,X_2 上的作用分别为 $a(x),b(x),c(x)\in K$. 那么

$$\varphi\begin{pmatrix} f(x) & xh(x) & xg(x)\\ xg(x) & f(x) & xh(x)\\ xh(x) & xg(x) & f(x)\end{pmatrix}(I_3)=f(x)a(x)+g(x)b(x)+c(x)h(x),$$

$$\varphi\begin{pmatrix} f(x) & xh(x) & xg(x)\\ xg(x) & f(x) & xh(x)\\ xh(x) & xg(x) & f(x)\end{pmatrix}(X_1)=x^2h(x)a(x)+f(x)b(x)+xg(x)c(x),$$

$$\varphi\begin{pmatrix} f(x) & xh(x) & xg(x)\\ xg(x) & f(x) & xh(x)\\ xh(x) & xg(x) & f(x)\end{pmatrix}(X_2)=x^2g(x)a(x)+xh(x)b(x)+f(x)c(x).$$

因为 φ 是满射, 所以 x 不整除 $b(x),c(x)$. 那么总存在 $z_1,z_2\in\mathbb{C}\subseteq K$ 使得 x 也不整除 $z_1b(x)-z_2c(x)$. 现在定义 Λ 到 K 的 K-模同态 δ 满足 $\delta(I_3)=1,\delta(X_1)=z_2,\delta(X_2)=z_1$. 注意到 x 整除 $\delta(c(x)X_1-b(x)X_2)$, 所以这时我们看到 x 也整除 $z_2c(x)-z_1b(x)$, 矛盾. 因此 Λ 不是 K 上 Frobenius 代数.

虽然 [例1.5] 表明即使是在系数环上有限生成自由的代数具有非退化双线性型也未必是 Frobenius 代数. 但当系数环是域时, 明显有

Lemma 1.6. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 则 A 是 Frobenius 代数 $\Leftrightarrow$ A 有限维且 A 上有非退化结合双线性型.

[引理1.6] 使得我们能够构造出许多 Frobenius 代数的例子. 例如域上有限维矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 上的经典迹诱导的双线性型 $\langle -,-\rangle_{\mathrm{tr}}:\mathrm{M}_n(\Bbbk)\times\mathrm{M}_n(\Bbbk)\to\Bbbk,(A,B)\mapsto\mathrm{tr}(AB)$ 既是非退化的也是结合的, 所以域上矩阵代数是 Frobenius 的. 有限群 G 在域 $\Bbbk$ 上的群代数 $\Bbbk G$ 上有非退化结合的双线性型

$$\langle -,-\rangle:\Bbbk G\times\Bbbk G\to\Bbbk,(\sum_{g\in G}a_g g,\sum_{h\in G}a_h h)\mapsto\sum_{gh=1}a_g b_h,$$

因此 $\Bbbk G$ 也是 Frobenius 代数. 在 Hopf 代数场景, 可以用有限维 Hopf 代数上的非零积分构造其上非退化结合双线性型来看到有限维 Hopf 代数均是 Frobenius 代数 [Mon93, p.18, Theorem 2.1.3].

2 Nakayama 自同构

本节仍固定含幺交换环 K, 并设 K-代数 A 是 Frobenius 代数. 设 $(\tau,\{x_i\}_{i=1}^n,\{y_i\}_{i=1}^n)$ 是 A 的 Frobenius 系, 即 $\tau:A\to K$ 是 K-模同态且 $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n\in A$ 满足

$$\sum_{i=1}^n x_i\tau(y_i a)=\sum_{i=1}^n\tau(ax_i)y_i=a,\forall a\in A.$$

根据 Frobenius 等价定义的证明过程, 我们已经看到 $\Theta:A\to\mathrm{Hom}_K(A,K),a\mapsto a\tau$ 是左 A-模同构. 利用 $(\{x_i\}_{i=1}^n,\{\tau y_i\}_{i=1}^n)$ 也是 A 作为有限生成投射 K-模的对偶基易知 $A\to\mathrm{Hom}_K(A,K),a\mapsto\tau a$ 是右 A-模同构.

对每个 $a\in A$, 因为 $\tau a\in\mathrm{Hom}_K(A,K)$, 所以存在唯一的 $\mu(a)\in A$ 使得 $\mu(a)\tau=\tau a$. 由此得到映射 $\mu:A\to A,a\mapsto\mu(a)$, 易知这是 K-代数同态. 如果 $a\in A$ 满足 $\mu(a)=0$, 那么 $\tau(xa)=0,\forall x\in A$. 这说明 $a=0$, 于是知 μ 是单射. 任给 $b\in A$, 存在 $a\in A$ 使得 $b\tau=\tau a$, 所以 $b=\mu(a)$. 这产生下述概念.

Definition 2.1. 设 $(\tau,\{x_i\}_{i=1}^n,\{y_i\}_{i=1}^n)$ 是 Frobenius 代数 A 的 Frobenius 系. 称由 $\mu(a)\tau=\tau a,\forall a\in A$(即 $\tau(b\mu(a))=\tau(ab),\forall a,b\in A$) 确定的代数自同构 μ 为 A 上的 Nakayama 自同构.

Remark 2.2. 如果 $(\tau',\{x_i'\}_{i=1}^n,\{y_i'\}_{i=1}^n)$ 是 Frobenius 代数 A 的另外的 Frobenius 系, 那么同样有 Nakayama 自同构 μ'. 我们说明这时 μ 和 μ' 相差某个 A 中可逆元决定的内自同构. 首先注意到 A 中元素决定的右乘变换诱导标准 K-反代数同构 $A\cong\mathrm{End}({}_AA_K)$, 所以任何 A 上左 A-模自同构都是由 A 中某个可逆元的右乘变换决定的. 现在 $\tau:A\to\mathrm{Hom}_K(A,K)$ 和 $\tau':A\to\mathrm{Hom}_K(A,K)$ 的逆映射的合成给出 A 上左 A-模自同构, 因此存在 A 中可逆元 d 使得 $\tau=\tau'd_r$, 这里 d_r 是右乘变换. 换句话说我们得到 $\tau=d\tau'$. 因此对每个 $a\in A$, 有

$$\mu(a)d\tau'=\mu(a)\tau=\tau a=d\tau'a=d\mu'(a)\tau',$$

这说明 $\mu'(a)=d^{-1}\mu(a)d,\forall a\in A$. 所以不同的 Frobenius 系产生的 Nakayama 自同构相差一内自同构.

Remark 2.3. 设 $\mu:A\to A$ 是 Frobenius 系 $(\tau,\{x_i\}_{i=1}^n,\{y_i\}_{i=1}^n)$ 确定的 Nakayama 自同构, 那么可赋予 A 上新的右 A-模结构: $A\times A\to A,(a,b)\mapsto a\mu(b)$. 我们把 A 视作具有标准左 A-模结构与 Nakayama 自同构给出的右 A-模结构的 A-A 双模, 记作 A^μ. 可直接验证这时左 A-模同构 $\Theta:A^\mu\to\mathrm{Hom}_K(A,K),a\mapsto a\tau$ 成为 A-A 双模同构. 因此 Nakayama 自同构可将 Frobenius 代数与对偶模的单边模同构“修正”成双模同构.

Remark 2.4. 对 Frobenius 系 $(\tau,\{x_i\}_{i=1}^n,\{y_i\}_{i=1}^n)$, 同样可借助右 A-模同构 $\Psi:A\to\mathrm{Hom}_K(A,K),a\mapsto\tau a$ 来定义 Nakayama 自同构的概念. 这时定义的 Nakayama 自同构与前面的定义产生的自同构互为逆映射. 并且此时 Ψ 确定的 Nakayama 自同构 μ 给出 A 上新的左模结构使得 Ψ 给出双模同构 ${}^\mu A\cong\mathrm{Hom}_K(A,K)$.

3 对称 Frobenius 代数

本节固定含幺交换环 K 上的代数 A 并设 A 是有限生成投射 K-模.

Definition 3.1. 如果 A 满足存在 A-A 双模同构 $A \cong \mathrm{Hom}_K(A, K)$, 则称 A 是**对称 Frobenius 代数**.

Remark 3.2. 对称 Frobenius 代数是特殊的 Frobenius 代数. 并注意 A-A 双模同构 $\Theta : A \to \mathrm{Hom}_K(A, K)$ 产生的 K-模同态 $\tau = \Theta(1)$ 是 A 到 K 的非退化迹映射. 在 [例1.5] 中我们看到存在某个 P.I.D., 记作 K, 上的代数 A 是 K 上有限生成自由模并且存在 A 到 K 的非退化迹映射但 A 不是 K 上 Frobenius 代数.

对有限维代数, 我们仍能用非退化双线性型来刻画对称 Frobenius 代数.

Proposition 3.3. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 那么 A 是对称 Frobenius 代数 $\Leftrightarrow$ A 是有限维代数并且 A 上存在对称的非退化结合双线性型. 这也是对称 Frobenius 代数命名之由.

Proof. 必要性由 A-A 双模同构 $\Theta : A \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk)$ 诱导的 $\Bbbk$-双线性型 $\langle a, b\rangle = \Theta(b)(a) = (\Theta(1)b)(a) = (b\Theta(1))(a)$ 对称结合非退化便知. 充分性: 如果 A 上存在非退化对称结合双线性型 $\langle -, -\rangle : A \times A \to \Bbbk$, 那么

$$\Theta : A \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk), a \mapsto \langle a, -\rangle$$

给出 A 到 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk)$ 的 A-A 双模同构. $\square$

Remark 3.4. 对任何 K-代数 A(不需要有限生成投射), A 到 K 的任何迹映射 $\mathrm{tr} : A \to K$ 诱导标准的对称双线性型 $\langle -, -\rangle_{\mathrm{tr}} : A \times A \to K, (a, b) \mapsto \mathrm{tr}(ab)$. 因此如果域 $\Bbbk$ 上有限维代数上有 (诱导的双线性型) 非退化的迹映射, 那么 A 是对称 Frobenius 代数. 这一观察使我们立即看到域上矩阵代数和有限群决定的群代数均为对称 Frobenius 代数. J. E. Humphreys 在 [Hum78] 中证明了有限维 Hopf 代数如果是对称 Frobenius 代数, 那么一定是 unimodular 的. 因此存在非对称 Frobenius 的有限维 Hopf 代数.

参考文献

[Hum78] J.E. Humphreys. Symmetry for finite dimensional hopf algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 68(2):143–146, 1978.

[Kad99] L. Kadison. *New examples of Frobenius extensions*. Number 14. American Mathematical Soc., 1999.

[Mon93] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*. Number 82. American Mathematical Soc., 1993.

[Ren18] Wei Ren. Gorenstein projective modules and frobenius extensions. *Science China Mathematics*, 61:1175–1186, 2018.

[Zhu22] Ruipeng Zhu. A note on the discriminant of reflection hopf algebras. *Journal of Algebra*, 604:1–27, 2022.