交错张量外积的等价定义

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 2 月 12 日

在纯代数中, 给定含幺交换环 K 上的模 M, 可借助 M 决定的外代数 $E_K(M)=\oplus_{r=0}^{\infty}\wedge_K^r M$ 来考虑 M 中元素的外积. 例如任给 $x_1,...,x_r\in M$, 对应 $x_1\wedge\cdots\wedge x_r\in\wedge^r M$, 满足 $x_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge x_{\sigma(r)}=(\mathrm{sgn}\sigma)x_1\wedge\cdots\wedge x_r$ 对任何 $\sigma\in S_r$ 成立. 在微分几何中, 人们用更具体的方式来构造实数域上有限维线性空间上的交错张量. 对任何 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间 V 上的交错 k-线性函数 ω 和交错 l-线性函数 η, 定义 $\omega\tilde{\wedge}\eta$ 为下述 $(k+l)$-重线性型:

$$(\omega\tilde{\wedge}\eta)(x_1,...,x_{k+l})=\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\sigma)\omega(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(k)})\eta(x_{\sigma(k+1)},...,x_{\sigma(k+l)}),$$

这份笔记将验证上述两种定义本质上是相同的, 具体地, 我们将说明当 K 是 $\mathbb{Z}1_K$ 均为可逆元的交换环时, 对任何有限生成投射 K-模 V, 使用上述方式定义出的 $\tilde{\wedge}:\mathrm{Hom}_K(\wedge^k V,K)\times\mathrm{Hom}_K(\wedge^l V,K)\to\mathrm{Hom}_K(\wedge^{k+l}V,K)$ 所诱导出的 K-分次代数 $(\oplus_{k=0}^{\infty}\mathrm{Hom}_K(\wedge^k V,K),\tilde{\wedge})$ 与对偶模的外代数 $E_K(\mathrm{Hom}_K(V,K))$ 间有自然的 K-分次代数同构. 关于外代数的基本构造可参见 [Jac09], 微分几何中定义的外积基本性质可参见 [Lee12].

1 外积定义的等价性

投射模的对偶基定理使得我们可以得到有限生成投射模取对偶与作外幂可交换.

Proposition 1.1. 设 V 是含幺交换环 K 上有限生成投射模, 那么对任何自然数 r, $\wedge^r V$ 也是有限生成投射 K-模. 并且有 K-模同构 $\wedge^r\mathrm{Hom}_K(V,K)\cong\mathrm{Hom}_K(\wedge^r V,K)$. 即对有限生成投射模取对偶和作外幂可交换.

Proof. 命 $\alpha:\wedge^r\mathrm{Hom}_K(V,K)\to\mathrm{Hom}_K(\wedge^r V,K)$ 满足对任何 $f_1,...,f_r\in V^*=\mathrm{Hom}_K(V,K)$ 有

$$\alpha(f_1\wedge\cdots\wedge f_r)(v_1\wedge\cdots\wedge v_r)=\sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)f_1(v_{\sigma(1)})f_2(v_{\sigma(2)})\cdots f_r(v_{\sigma(r)}).$$

因为 V 是有限生成投射模, 故有对偶基 $\{x_i\}_{i=1}^n\subseteq V$ 与 $\{x_i^*\}_{i=1}^n\subseteq V^*$, 于是可直接计算验证当 $r>n$ 时, $\wedge^r V=0$; 当 $0\le r\le n$ 时, $\{x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_r}|1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n\}$ 和 $\{\alpha(x_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge x_{i_r}^*)|1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n\}$ 给出 $\wedge^r V$ 的对偶基. 所以 $\wedge^r V$ 是有限生成投射模. 命

$$\beta:\mathrm{Hom}_K(\wedge^r V,K)\to\wedge^r\mathrm{Hom}_K(V,K),f\mapsto\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n}f(x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_r})x_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge x_{i_r}^*,$$

可以直接计算验证 α 与 β 互为逆映射. □

Remark. 因此对有限生成投射模 V, 取定对偶基 $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ 与 $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subseteq V^*$, 便有自然的 K-模同构

$$\theta : \{F : V^r \to K | f\text{是交错线性函数}\} \to \wedge^r \mathrm{Hom}_K(V,K), F \mapsto \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} F(x_{i_1},...,x_{i_r})x_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_r}^*.$$

为了区分外代数中的外积记号, 我们用其他的记号来表示微分几何中定义的外积.

Definition 1.2. 设含幺交换环 K 满足任何 $n \in \mathbb{Z}$ 有 $n1_K$ 是可逆元, V 是 K-模. 对任何 Vk 重上交错 K-线性函数 ω 和 l 重交错 K-线性函数 η, 定义 $\omega\tilde{\wedge}\eta : V^{k+l} \to K$ 为下述 $(k+l)$-重线性型:

$$(\omega\tilde{\wedge}\eta)(x_1,...,x_{k+l}) = \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\sigma)\omega(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(k)})\eta(x_{\sigma(k+1)},...,x_{\sigma(k+l)}),$$

易见 $\omega\tilde{\wedge}\eta$ 是交错的且 $\tilde{\wedge} : \{V\text{上}k\text{-重交错线性型}\} \times \{V\text{上}l\text{-重交错线性型}\} \to \{V\text{上}(k+l)\text{-重交错线性型}\}$ 是 K-双线性映射. 现设 V 是有限生成投射 K-模并有对偶基 $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ 与 $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subseteq V^*$. 为叙述方便, 记 $\mathrm{Alt}^k(V)$ 是 V 上所有 k-重交错线性型构成的 K-模. 并记标准同构 $\mu_r : \wedge^r\mathrm{Hom}_K(V,K) \to \mathrm{Alt}^r(V)$ 满足

$$\mu_r(f_1\wedge\cdots\wedge f_r)(v_1,...,v_r) = \sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)f_1(v_{\sigma(1)})f_2(v_{\sigma(2)})\cdots f_r(v_{\sigma(r)}).$$

下面验证下图的交换性, 一旦说明该图交换, 则 $\tilde{\wedge}$ 满足结合律, 故可自然诱导分次代数 $(\oplus_{r=0}^\infty \mathrm{Alt}^r(V), \tilde{\wedge})$.

$$\begin{tikzcd}
\wedge^k\mathrm{Hom}_K(V,K) \times \wedge^l\mathrm{Hom}_K(V,K) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "(\mu_k,\mu_l)"'] & \wedge^{k+l}\mathrm{Hom}_K(V,K) \arrow[d, "\mu_{k+l}"] \\
\mathrm{Alt}^k(V) \times \mathrm{Alt}^l(V) \arrow[r, "\tilde{\wedge}"] & \mathrm{Alt}^{k+l}(V)
\end{tikzcd}$$

任取 $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V), \eta \in \mathrm{Alt}^l(V)$, 那么由每个 μ_r 是 K-模同构知只需验证对任何 $p_1,...,p_{k+l} \in V$ 有

$$\mu_{k+l} \wedge (\mu_k^{-1}(\omega) \wedge (\mu_l^{-1}(\eta)))(p_1,...,p_{k+l}) = (\omega\tilde{\wedge}\eta)(p_1,...,p_{k+l}).$$

左式为 $\sum\limits_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n,\\ 1\le j_1<j_2<\cdots<j_l\le n}} \omega(x_{i_1},...,x_{i_k})\eta(x_{j_1},...,x_{j_l}) \sum\limits_{\sigma\in S_{k+l}} x_{i_1}^*(p_{\sigma(1)})\cdots x_{i_k}^*(p_{\sigma(k)})x_{j_1}^*(p_{\sigma(k+1)})\cdots x_{j_l}^*(p_{\sigma(k+l)})$. 要证等式的右边为 $(\omega\tilde{\wedge}\eta)(p_1,...,p_{k+l}) = (k!l!)^{-1}\sum\limits_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\sigma)\omega(p_{\sigma(1)},...,p_{\sigma(k)})\eta(p_{\sigma(k+1)},...,p_{\sigma(k+l)})$, 利用对偶基的性质, 改写上式可得

$$\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\sigma)\sum_{i_1=1}^n\cdots\sum_{j_l=1}^n x_{i_1}^*(p_{\sigma(1)})\cdots x_{i_k}^*(p_{\sigma(k)})x_{j_1}^*(p_{\sigma(k+1)})\cdots x_{j_l}^*(p_{\sigma(k+l)})\omega(x_{i_1},...,x_{i_k})\eta(x_{j_1},...,x_{j_l}),$$

上述和式中, 对数组 $(i_1,...,i_k)$ 和 $(j_1,...,j_l)$, 如果出现重复的分量对应的项是零, 因此上式可改写为对所有分量互异的数组 $(i_1,...,i_k)$ 和 $(j_1,...,j_l)$ 求和. 这里写作

$$\sum_{\substack{i_1,...,i_k\\ j_1,...,j_l}}\frac{1}{k!l!}\omega(x_{i_1},...,x_{i_k})\eta(x_{j_1},...,x_{j_l})\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\sigma)x_{i_1}^*(p_{\sigma(1)})\cdots x_{i_k}^*(p_{\sigma(k)})x_{j_1}^*(p_{\sigma(k+1)})\cdots x_{j_l}^*(p_{\sigma(k+l)})$$

对固定的数组 $(i_1,...,i_k)$ 和 $(j_1,...,j_l)$, 记它们的递增排列为 $(i_1',...,i_k')$ 和 $(j_1',...,j_l')$, 这诱导 $\{1,...,k\}$ 上的双射 τ 和 $\{k+1,...,k+l\}$ 上的双射 δ, 使用 $\sigma\tau\delta$ 替换和式中的 σ 可得

$$\sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_k\le n\\ 1\le j_1<\cdots<j_l\le n}}\omega(x_{i_1},...,x_{i_k})\eta(x_{j_1},...,x_{j_l})\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\sigma)x_{i_1}^*(p_{\sigma(1)})\cdots x_{i_k}^*(p_{\sigma(k)})x_{j_1}^*(p_{\sigma(k+1)})\cdots x_{j_l}^*(p_{\sigma(k+l)}),$$

上式缺少 $(k!l!)^{-1}$ 的原因是对固定的递增排列 $(i_1',...,i_k')$, 有 $k!$ 个排列 $(i_1,...,i_k)$ 的递增调整会得到 $(i_1',...,i_k')$, 同样有 $l!$ 个排列 $(j_1,...,j_l)$ 的递增调整会得到递增排列 $(j_1',...,j_l')$, 并且 $\mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\delta)$ 可与调整数组顺序前的 $\omega(x_{i_1},...,x_{i_k})\eta(x_{j_1},...,x_{j_l})$ 合并来得到 $\omega(x_{i_1'},...,x_{i_k'})\eta(x_{j_1'},...,x_{j_l'})$. 由此我们证明了下图的交换性.

$$\begin{tikzcd}
\wedge^k\mathrm{Hom}_K(V,K)\times\wedge^l\mathrm{Hom}_K(V,K) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "{(\mu_k,\mu_l)}"'] & \wedge^{k+l}\mathrm{Hom}_K(V,K) \arrow[d, "\mu_{k+l}"] \\
\mathrm{Alt}^k(V)\times\mathrm{Alt}^l(V) \arrow[r, "\tilde{\wedge}"] & \mathrm{Alt}^{k+l}(V)
\end{tikzcd}$$

注意到任何 $\omega\in\mathrm{Alt}^k(V)$ 满足 $\omega\tilde{\wedge}\omega=0$, 所以存在唯一的 K-代数同态 $\mu:E_K(V^*)\to\oplus_{r=0}^{\infty}\mathrm{Alt}^r(V)$ 使得

$$\begin{tikzcd}
V^* \arrow[r, "i_{V^*}"] \arrow[dr, "j_{V^*}"'] & E_K(V^*) \arrow[d, dashed, "\mu"] \\
& \oplus_{r=0}^{\infty}\mathrm{Alt}^r(V)
\end{tikzcd}$$

交换, 这里 i_{V^*} 和 j_{V^*} 都表示标准嵌入. 归纳地可得 μ 是分次代数同态并且 μ 在 $E_K(V^*)$ 的指标 r 处直和项 $\wedge^r\mathrm{Hom}_K(V,K)$ 上的限制是 μ_r, 因此 μ 是分次代数同构, 这就得到下述结果.

Theorem 1.3. 设含幺交换环 K 满足任何 $n\in\mathbb{Z}$ 有 $n1_K$ 是可逆元, V 是有限生成投射 K-模. 设 $(\oplus_{r=0}^{\infty}\mathrm{Alt}^r(V),\tilde{\wedge})$ 是前面定义的交错线性型上的外积诱导的分次代数, 那么对标准嵌入 $j_V^*:V^*\to\oplus_{r=0}^{\infty}\mathrm{Alt}^r(V)$, 外代数泛性质所诱导出的使下图交换的代数同态 $\mu:E_K(V^*)\to\oplus_{r=0}^{\infty}\mathrm{Alt}^r(V)$ 是分次代数同构并且在每个分次上的限制就是 K-模同构 $\mu_r:\wedge^r\mathrm{Hom}_K(V,K)\to\mathrm{Alt}^r(V)$, 这里

$$\mu_r(f_1\wedge\cdots\wedge f_r)(v_1,...,v_r)=\sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)f_1(v_{\sigma(1)})f_2(v_{\sigma(2)})\cdots f_r(v_{\sigma(r)}).$$

参考文献

[Jac09] N. Jacobson. *Basic algebra II.* Dover Publications, 2nd edition, 2009.

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[Nes03] J. Nestruev. *Smooth manifolds and observables*, volume 220. Springer, 2003.