交换代数续笔记

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 10 月 17 日

在 2022 年 12 月至 2023 年 3 月中下旬, 我使用 [BH98] 来学习 Cohen-Macaulay 环相关知识. 虽然交换代数并不是我的研究方向, 但不可避免需要查阅一些交换代数基本工具. 因此我通过这份文档来整理一些交换代数中的经典内容 (但不含交换代数的入门内容). 正文主要分为三部分:

(1) 正则序列理论介绍, 其中包含 Koszul 复形与 Koszul 同调的性质、Hilbert 合冲定理的证明.

(2)Cohen-Macaulay 环理论介绍, 并包含正则局部环与 Gorenstein 环的性质、Cohen-Macaulay 局部环的 canonical 模存在性与唯一性的讨论、局部上同调简介. 前两部分的主要参考文献是 [BH98].

(3) 零散地记录一些基础知识回顾与经典交换代数中一些结论的加强及非交换版本推广.

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎给我提出宝贵建议.

目录

1 正则序列与深度 **3**

1.1 正则序列 . . . 3
1.2 级与深度 . . . 7
1.3 模的 Krull 维数: 深度的上界 . . . 17
1.4 Auslander-Buchsbaum 公式 . . . 22
1.5 Koszul 复形: 基本性质 . . . 27
1.6 Koszul 复形: 同调与级 . . . 39
1.7 Koszul 复形: Hilbert 合冲定理 . . . 42

2 Cohen-Macaulay 环 **47**

2.1 Cohen-Macaulay 环与模 . . . 47
2.2 Universally catenary 环 . . . 54
2.3 正则局部环 . . . 56
2.4 Gorenstein 环 . . . 60
2.5 Matlis 理论初步 . . . 71
2.6 Canonical 模 . . . 78
2.7 局部上同调 . . . 87

3 附录：回顾与补充 **91**

3.1 域扩张的超越次数 . . . 91
3.2 Noether 正规化定理加强版 . . . 92
3.3 Schanuel 引理与投射等价 . . . 94
3.4 局部环上有限生成平坦模自由 . . . 96
3.5 平坦维数 . . . 97
3.6 整体维数 . . . 99
3.7 弱整体维数 . . . 102
3.8 Noether 环的同调维数 . . . 103
3.9 正则环与光滑簇 . . . 105
3.10 非交换环的素谱 . . . 108
3.11 Artin 半单环 . . . 110
3.12 Artin 环上不可约模 . . . 114
3.13 中心无限除环构造 . . . 115
3.14 Kähler 微分模与 de Rham 上链复形 . . . 117
3.15 微分代数与 Δ-Dixmier-Moeglin 等价 . . . 129
3.16 同调光滑与斜 Calabi-Yau 代数 . . . 133

1 正则序列与深度

本章主要介绍交换代数中正则序列理论, 正则序列是交换代数中的有力工具, 它引出的一个基本概念便是深度 (见 [定义1.26]). 关于深度, 我们会介绍 Auslander-Buchsbaum 公式 ([定理1.50]), 它联系起了模的投射维数与深度. 本章最后介绍 Koszul 复形及其基本性质, Koszul 复形的同调可用于判断交换 Noether 局部环中序列的是否正则 ([推论1.95]). Koszul 复形也可用于证明 Hilbert 合冲定理 (见 [定理1.98]).

1.1 正则序列

本节主要介绍正则序列的概念与基本性质.

Definition 1.1 (正则元, 零因子)**.** 设 R 是含幺交换环, M 是 R-模, 若 $a \in R$ 满足对任何 $x \neq 0 \in M$ 有 $ax \neq 0$, 则称 a 是一个 **M-正则元** (regular element), 否则称 a 是一个 **M-零因子**. 有时我们把 M 在 R 中全体零因子构成的集合记作 $Z(M)$.

Definition 1.2 (M-正则序列)**.** 设 R 是含幺交换环, M 是 R-模, 如果 R 中序列 $\{a_i\}_{i=1}^n$(有时也记为 $a_1, a_2, ..., a_n$) 满足 a_1 是 M-正则元, a_2 是 M/a_1M-正则元, ..., a_n 是 $M/(a_1, ..., a_n)M$-正则元, 则称 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 是**弱 M-正则序列** (weak M-regular sequence). 如果 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 是弱 M-正则序列且 $M/(a_1, ..., a_n)M \neq 0$, 则称 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 是 **M-正则序列** (M-regular sequence).

Remark. 如果理想 I 有 M-正则元 a, 并不意味着 a 给出一个含于 I 的 M-正则序列! 因为 M/aM 有可能是零模 (如取 $I = M = R$, $a = 1$). 所以验证序列的正则性不能忘记验证 $M/(a_1, ..., a_n)M \neq 0$.

如果有 R-模同构 $M \cong M'$, 容易证明序列 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是 M-正则序列等价于该序列是 M'-正则序列.

Example 1.3. 设 K 是含幺交换环, $R = K[x_1, ..., x_n]$ 是多项式环, 则 $x_1, ..., x_n$ 是 R-正则序列.

Proof. 明显 x_1 是 R-正则元, 下证 x_2 是 $R/(x_1)$-正则元: 如果 $g(x_1, ..., x_n) \in R$ 满足 $x_2 g(x_1, ..., x_n) \in (x_1)$, 则 $x_2 g(0, x_2, ..., x_n) = 0$, 从而 $g(0, x_2, ..., x_n) = 0$, 这蕴含着 $g(x_1, ..., x_n) \in (x_1)$. 一般地, 有 x_{k+1} 是 $R/(x_1, ..., x_k)$-正则元 (这里 $k \leq n-1$): 当 $h(x_1, ..., x_n) \in R$ 满足 $x_{k+1}h(x_1, ..., x_n) \in (x_1, ..., x_k)$ 时, 有 $h(0, ..., 0, x_{k+1}, ..., x_n) = 0$, 因为 $K[x_1, ..., x_n] = K[x_{k+1}, ..., x_n][x_1, ..., x_k]$, 可设

$$h(x_1, ..., x_n) = \sum_{j_1, ..., j_k} a_{j_1 \cdots j_k}(x_{k+1}, ..., x_n) x_1^{j_1} \cdots x_k^{j_k}, a_{j_1 \cdots j_k}(x_{k+1}, ..., x_n) \in K[x_{k+1}, ..., x_n].$$

对上式两边代入 $x_1 = \cdots = x_k = 0$ 得到当 $j_1 = j_2 = \cdots = j_k = 0$ 时 $a_{j_1 \cdots j_k}(x_{k+1}, ..., x_n)$ 是零多项式, 所以 $h(x_1, ..., x_n) \in (x_1, ..., x_k)$. 由此得 $x_1, ..., x_n$ 是弱 R-正则序列, 再由 $(x_1, ..., x_n)$ 是真理想即得结果. □

下面的例子说正则序列不一定每项都是正则元.

Example 1.4 (正则序列未必每项是正则元)**.** 设 k 是域, $R = k[x, y, z]/((x-1)z)$, 那么 $\overline{x}, \overline{(x-1)y}$ 是 R-正则序列, 但 $\overline{(x-1)y}$ 是零因子 (其他例子可参考 The Stacks project 例 10.68.3).

Proof. 因为 $\overline{(x-1)y}$ 是零因子是明显的, 这里仅验证 $\overline{x}, \overline{(x-1)y}$ 是 R-正则序列. 如果多项式 $f(x, y, z)$ 使得 $xf(x, y, z) \in ((x-1)z)$, 即存在多项式 $g(x, y, z)$ 使 $f(x, y, z) = (x-1)zg(x, y, z)$, 这里 $x-1$ 与 z 是

不相伴的不可约多项式, 所以由 $k[x,y,z]$ 是 U.F.D. 可知 $f(x,y,z)$ 能被 $(x-1)z$ 整除. 这就说明了 $\overline{x}$ 是 R-正则元. 还需说明 $\overline{(x-1)y}$ 是 $R/\overline{x}R$-正则元. 如果多项式 $f(x,y,z)$ 满足 $\overline{(x-1)y}\cdot\overline{f(x,y,z)}\in\overline{x}R$, 那么存在多项式 $g(x,y,z),h(x,y,z)$ 使得 $(x-1)yf(x,y,z)-xg(x,y,z)=(x-1)zh(x,y,z)$. 易知 $x-1$ 整除 $g(x,y,z)$, 所以可设 $g(x,y,z)=(x-1)g'(x,y,z)$, 进而得到 $yf(x,y,z)-xg'(x,y,z)=zh(x,y,z)$, 设 $f(x,y,z)=a_0(y,z)+a_1(y,z)x+\cdots+a_t(y,z)x^t$, 那么 $a_0(y,0)=0$, 这说明 z 整除 $a_0(y,z)$, 而 R 中 $\overline{z}=\overline{xz}$, 所以 $\overline{a_0(y,z)}$ 在 R 中可被 $\overline{x}$ 整除. 进而 $\overline{f(x,y,z)}$ 在 R 中可被 $\overline{x}$ 整除, 即 $\overline{f(x,y,z)}\in\overline{x}R$. 所以 $\overline{(x-1)y}$ 是 $R/\overline{x}R$-正则元. □

作为一个序列, 正则序列的重排一般来说未必能保持正则性.

Example 1.5 (正则序列的重排未必正则)**.** 设 K 是域, $R=K[x,y,z]$, 那么 $x,y(1-x),z(1-x)$ 是 R-正则序列, 但 $y(1-x),z(1-x),x$ 不是 R-正则序列.

Proof. $y(1-x),z(1-x),x$ 不是 R-正则序列以及 $x,y(1-x)$ 是 R-正则序列的验证是容易的. 这里仅验证 $z(1-x)$ 是 $R/(x,y(1-x))$-正则元. 注意到 $(x,y(1-x))=(x,y)$, 我们说明若 $z(1-x)f(x,y,z)\in(x,y)$, 则 $f(x,y,z)\in(x,y)$. $z(1-x)f(x,y,z)\in(x,y)$ 表明 $zf(0,0,z)=0$, 从而 $f(0,0,z)=0$, 设 $f(x,y,z)=a_0(x,y)+a_1(x,y)z+\cdots+a_s(x,y)z^s$, 那么在 $K[z]$ 中 $0=a_0(0,0)+a_1(0,0)z+\cdots+a_s(0,0)z^s$, 进而 $a_i(0,0)=0,\forall 0\le i\le s$, 这说明每个 $a_i(x,y)\in(x,y)$. 因此 $f(x,y,z)\in(x,y)$. □

在适当条件下正则序列的重排仍正则 (下述命题不会在之后的主要定理证明中用到).

Proposition 1.6. 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, M 是有限生成 R-模, 并给定 M-正则序列 $a_1,a_2,...,a_n$, 则对任何置换 $\sigma\in S_n$ 有 $a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},...,a_{\sigma(n)}$ 是 M-正则序列.

Proof. 记 m 是 R 唯一的极大理想. 因为任何置换总可分解为有限个相邻对换乘积, 故只需证 $\sigma=(i\;i{+}1)$ 的情形即可. 下证 $a_1,...,a_{i-1},a_{i+1},a_i,a_{i+2},...,a_n$ 是 M-正则序列. 易见只需验证 a_{i+1} 是 $M/(a_1,...,a_{i-1})M$-正则元与 a_i 是 $M/(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1})M$-正则元即可. 即验证左乘变换 $(a_{i+1})_l:M/(a_1,...,a_{i-1})M\to M/(a_1,...,a_{i-1})M$ 与 $(a_i)_l:M/(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1})M\to M/(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1})M$ 都是单射. 下面证明左乘变换 $(a_{i+1})_l$ 的核是零. 我们断言 $\mathrm{Ker}(a_{i+1})_l=a_i\mathrm{Ker}(a_{i+1})_l$, 一旦证明该断言则由 $a_i\in m$ 以及 Nakayama 引理得到 $\mathrm{Ker}(a_{i+1})_l=0$. 设 $\overline{x}\in M/(a_1,...,a_{i-1})M$ 使得 $a_{i+1}x\in(a_1,...,a_{i-1})M$, 则 $x\in(a_1,...,a_i)M$, 可设 $x=\sum\limits_{l=1}^{i}a_ly_l$, 那么在 $M/(a_1,...,a_{i-1})M$ 中 $\overline{x}=a_i\overline{y_i}$, 易见 $\overline{y_i}\in\mathrm{Ker}(a_{i+1})_l$, 所以 $\mathrm{Ker}(a_{i+1})_l=a_i\mathrm{Ker}(a_{i+1})_l$, 断言得证. 最后我们通过证明 $\mathrm{Ker}(a_i)_l=a_{i+1}\mathrm{Ker}(a_i)_l$ 来说明 a_i 是 $M/(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1})M$-正则元. 设 $x\in M$ 使得 $a_ix\in(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1})M$, 可设 $a_ix=a_1y_1+\cdots+a_{i-1}y_{i-1}+a_{i+1}y_{i+1}$, 于是 $y_{i+1}\in(a_1,...,a_i)M$, 所以存在 $z\in M$ 使得 $a_i(x-a_{i+1}z)\in(a_1,...,a_{i-1})M$, 所以 $x-a_{i+1}z\in(a_1,...,a_{i-1})M$, 这也就是 $x\in(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1})M$, 所以 $\mathrm{Ker}(a_i)_l=0$, 即 $(a_i)_l$ 是单射. □

下面的引理用于证明 [推论1.8], 我们在以后会常应用 [推论1.8].

Lemma 1.7. 设 R,S 是含幺交换环, M 是 R-模, N 是 S-模, $\varphi:R\to S$ 是保幺环同态, 用 φ 给出 N 上 R-模结构. 如果 ${}_RN$ 平坦, 那么对任何弱 M-正则序列 $a_1,...,a_n$ 有 $\{a_i\}_{i=1}^n\subseteq R$ 是弱 $M\otimes_R N$-正则序列, $\{\varphi(a_i)\}_{i=1}^n\subseteq S$ 是弱 $M\otimes_R N$-正则序列.

Proof. 因为 $\varphi(a_i)$ 在 N 上的数乘作用与 a_i 在 N 上的数乘作用一致, 所以只要验证 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 是弱 $M\otimes_R N$-正则序列即可. 因为 a_1 是 M-正则元, 所以 a_1 诱导的左乘变换 $(a_1)_l: M\to M$ 是单 R-模同态, 于是由 ${}_RN$ 平坦可得单 R-模同态 $(a_1)_l\otimes 1_N: M\otimes_R N\to M\otimes_R N$. 所以 a_1 是 $M\otimes_R N$-正则元. 同理 $(a_2)_l\otimes 1_N: M/a_1M\otimes_R N\to M/a_1M\otimes_R N$ 是单 R-模同态, 利用自然同构 $(M/a_1M)\otimes_R N\cong(M\otimes_R N)/a_1(M\otimes_R N)$ 可知 a_2 是 $(M\otimes_R N)/a_1(M\otimes_R N)$-正则元. 如此继续讨论即可. □

Remark. 上述引理证明中的自然同构 $(M/a_1M)\otimes_R N\cong(M\otimes_R N)/a_1(M\otimes_R N)$ 并不依赖于 N 的平坦性. 它之所以成立本质上是因为：对含幺交换环 R 上的模 M,N 与理想 I, 我们总有短正合列

$$0\longrightarrow IM\longrightarrow M\longrightarrow M/IM\longrightarrow 0$$

借助张量函子 $-\otimes_R N$ 的右正合性得到正合列 $IM\otimes_R N\xrightarrow{j\otimes\mathrm{id}_N}M\otimes_R N\xrightarrow{p\otimes\mathrm{id}_N}(M/IM)\otimes_R N\longrightarrow 0$. 虽然 $IM\otimes_R N$ 与 $M\otimes_R N$ 本身没有 (包含) 关系, 但同态 $j\otimes\mathrm{id}_N$ 的像集恰好是 $I(M\otimes_R N)$.

回忆含幺交换环 R 上模 M 的**支集** (support) 是指 $\mathrm{Supp}M=\{P\in\mathrm{Spec}(R)|M_P\neq 0\}$, 易知 $M=0$ 的充要条件是 $\mathrm{Supp}M=\varnothing$. 回忆 $M=0$ 当且仅当对 R 的任何极大理想 m 有 $M_m=0$, 因此当 $M\neq 0$ 时, 支集 $\mathrm{Supp}M$ 中总含有 R 的极大理想. 当 M 是有限生成 R-模时, 可直接验证 $\mathrm{Supp}M=V(\mathrm{Ann}_RM)$, 也就是说当 M 有限生成时, $\mathrm{Supp}M$ 是闭集 (特别地, 将 R 视作 R-模总有 $\mathrm{Supp}R=\mathrm{Spec}R$). 下述推论说关于有限生成模支集中的素理想作局部化保持该素理想中正则序列的正则性.

Corollary 1.8. 设 R 是含幺交换环, M 是有限生成 R-模, $P\in\mathrm{Supp}M$, 那么对任何含于 P 的 M-正则序列 $x_1,x_2,...,x_n$, 有 $x_1/1,x_2/1,...,x_n/1$ 是 M_P-正则序列.

Proof. 因为 R_P 作为 R-模平坦, 所以 [引理1.7] 表明 $x_1/1,x_2/1,...,x_n/1$ 是弱 $M\otimes_R R_P$-正则序列. 利用 $M\otimes_R R_P\cong M_P$ 可得 $x_1/1,x_2/1,...,x_n/1$ 是弱 M_P-正则序列. 假设 $M_P/P_PM_P=0$, 由 Nakayama 引理得到 $M_P=0$, 矛盾. 所以 $M_P/P_PM_P\neq 0$, 特别地, 有 $M_P/(x_1/1,x_2/1,...,x_n/1)M_P\neq 0$. □

Proposition 1.9. 设 R 是含幺交换环, M 是 R-模, $a_1,a_2,...,a_n$ 是弱 M-正则序列, 那么对任何 R-模正合列 $M_2\xrightarrow{f}M_1\xrightarrow{g}M_0\xrightarrow{h}M\longrightarrow 0$, 有 R-模正合列

$$M_2/(a_1,...,a_n)M_2\xrightarrow{\tilde f}M_1/(a_1,...,a_n)M_1\xrightarrow{\tilde g}M_0/(a_1,...,a_n)M_0\xrightarrow{\tilde h}M/(a_1,...,a_n)M\longrightarrow 0.$$

Proof. 只要证 $n=1$ 的情形即可, 归纳地可得一般情形. 对每个 R-模 L, 命 $\eta_L: L/a_1L\to L\otimes_R R/(a_1),\overline{x}\mapsto x\otimes\overline{1}$, 且对任何 R-模同态 φ 有下图交换：

$$\begin{tikzcd}
L/a_1L \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[d, "\tilde\varphi"'] & L\otimes_R R/(a_1) \arrow[d, "\varphi\otimes\mathrm{id}_{R/(a_1)}"] \\
L'/a_1L' \arrow[r, "\eta_{L'}"] & L'\otimes_R R/(a_1)
\end{tikzcd}$$

于是得到交换图：

$$\begin{tikzcd}
M_2/a_1M_2 \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, "\eta_{M_2}"] & M_1/a_1M_1 \arrow[r, "\tilde g"] \arrow[d, "\eta_{M_1}"] & M_0/a_1M_0 \arrow[r, "\tilde h"] \arrow[d, "\eta_{M_0}"] & M/a_1M \arrow[r] \arrow[d, "\eta_M"] & 0 \\
M_2\otimes_R R/(a_1) \arrow[r, "f\otimes\mathrm{id}_{R/(a_1)}"'] & M_1\otimes_R R/(a_1) \arrow[r, "g\otimes\mathrm{id}_{R/(a_1)}"'] & M_0\otimes_R R/(a_1) \arrow[r, "h\otimes\mathrm{id}_{R/(a_1)}"'] & M\otimes_R R/(a_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为张量函子 $-\otimes_R R/(a_1)$ 右正合, 所以要证明 $n=1$ 时的结论只要验证 $\mathrm{Im}\tilde{f}=\mathrm{Ker}\tilde{g}$. $\mathrm{Im}\tilde{f}\subseteq\mathrm{Ker}\tilde{g}$ 由条件中的 $gf=0$ 直接得到, 最后验证 $\mathrm{Ker}\tilde{g}\subseteq\mathrm{Im}\tilde{f}$. 如果 $x_1+a_1M_1\in\mathrm{Ker}\tilde{g}$, 那么 $g(x_1)\in a_1M_0$. 可设 $x_0\in M_0$ 使得 $g(x_1)=a_1x_0$, 于是由 a_1 是 M-正则元得到 $h(x_0)=0$, 因此存在 $y_1\in M_1$ 使得 $g(y_1)=x_0$, 所以 $g(x_1-a_1y_1)=0$ 蕴含着存在 $x_2\in M_2$ 使得 $x_1-a_1y_1=f(x_2)$, 即 $x_1+a_1M_1\in\mathrm{Im}\tilde{f}$. □

要保持更长的正合列, 我们需要更强的条件. 下面的命题将会在为 Auslander-Buchsbaum 公式 ([定理1.50]) 的证明做准备时中用到.

Proposition 1.10. 设 R 是含幺交换环, (C,d) 是正合的 R-模正复形

$$\cdots\longrightarrow C_n\xrightarrow{d_n}C_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_2}C_1\xrightarrow{d_1}C_0\longrightarrow 0$$

那么对 R 中序列 $a_1,...,a_n$, 如果对每个自然数 k 它都是弱 C_k-正则序列, 那么有正合复形

$$\cdots\longrightarrow C_n/(a_1,...,a_n)C_n\xrightarrow{\tilde{d_n}}\cdots\xrightarrow{\tilde{d_2}}C_1/(a_1,...,a_n)C_1\xrightarrow{\tilde{d_1}}C_0/(a_1,...,a_n)C_0\longrightarrow 0$$

Proof. 只要证 $n=1$ 的情形即可, 归纳地可得一般情形. 根据 [命题1.9], 我们得到正合列

$$C_3/a_1C_3\xrightarrow{\tilde{d_3}}C_2/a_1C_2\xrightarrow{\tilde{d_2}}C_1/a_1C_1\xrightarrow{\tilde{d_1}}C_0/a_1C_0\longrightarrow 0.$$

下证对任何 $i\geq 2$, 模同态序列 $C_{i+1}/a_1C_{i+1}\xrightarrow{\tilde{d_{i+1}}}C_i/a_1C_i\xrightarrow{\tilde{d_i}}C_{i-1}/a_1C_{i-1}$ 正合. 事实上, 正合列

$$C_{i+1}\xrightarrow{d_{i+1}}C_i\xrightarrow{d_i}C_{i-1}\xrightarrow{d_{i-1}|}\mathrm{Im}d_{i-1}\longrightarrow 0$$

满足 a_1 也是 $\mathrm{Im}d_{i-1}$-正则元, 故由 [命题1.9] 便知 $C_{i+1}/a_1C_{i+1}\xrightarrow{\tilde{d_{i+1}}}C_i/a_1C_i\xrightarrow{\tilde{d_i}}C_{i-1}/a_1C_{i-1}$ 正合. □

下面简要回顾一下相伴分次环、模的概念. 对含幺环 R 的理想 I 以及一个左 R-模, 有天然降滤

$$R=I^0\supseteq I\supseteq I^2\supseteq\cdots\supseteq I^n\supseteq\cdots,M=I^0M\supseteq IM\supseteq\cdots\supseteq I^nM\supseteq\cdots.$$

置 $G_I(R)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}I^n/I^{n+1},G_I(M)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}I^nM/I^{n+1}M$. 易知 $G_I(R)$ and $G_I(M)$ 均为加群. 则可赋予 $G_I(R)$ 如下环结构. 定义

$$(\overline{a_n})_{n=0}^{\infty}\cdot(\overline{b_n})_{n=0}^{\infty}=(\sum_{i+j=n}\overline{a_ib_j})_{n=0}^{\infty},\forall(\overline{a_n})_{n=0}^{\infty},(\overline{b_n})_{n=0}^{\infty}\in G_I(R).$$

易验证上述运算定义合理且使 $G_I(R)$ 成为含幺环. 类似地, 可通过定义

$$G_I(R)\times G_I(M)\to G_I(M),((\overline{a_n})_{n=0}^{\infty},(\overline{x_n})_{n=0}^{\infty})\mapsto(\sum_{i+j=n}\overline{a_ix_j})_{n=0}^{\infty}$$

来使 $G_I(M)$ 成为左 $G_I(R)$-模. 分别称 $G_I(R)$ 和 $G_I(M)$ 为**相伴与理想 I 的分次环以及分次模**. 交换代数中一个经典结论便是当 R 是交换 Noether 环, I 是理想且 M 是有限生成 R-模时, 有 $G_I(R)$ 是 Noether 环且 $G_I(M)$ 是有限生成 $G_I(R)$-模. 我们以下述定理结束本节 (初次阅读可略过, 后续仅在 [定理2.33] 用到, 不会影响其余结论的证明阅读).

Theorem 1.11 (Rees)**.** 设 R 是含幺交换环, M 是 R-模, $I=(a_1,...,a_n)\subseteq R$, 这里 $a_1,...,a_n$ 是 M-正则序列, 那么对 d 次齐次多项式 $F\in M[x_1,...,x_n]$, 如果 $F(a_1,...,a_n)\in I^{d+1}M$, 则 F 的系数均在 IM 中.

Proof. 对正则序列 $a_1,...,a_n$ 的长度 n 作归纳. 当 $n=1$ 时, 如果 d 次齐次多项式 $F(x_1)\in M[x_1]$ 满足 $F(a_1)\in I^{d+1}M$, 设 $F(x_1)=mx_1^d$, 则 $ma_1^d\in I^{d+1}M$. 因为 $I=(a_1)$, 故有 $m'\in M$ 使得 $ma_1^d=a_1^{d+1}m'$, 利用 a_1 是 M-正则元得 $m=a_1m'\in IM$, 即 $n=1$ 时结论成立. 假设结论对 $n-1(n\geq 2)$ 的情形成立, 现断言:

Claim. 这时 a_n 是 $M/(a_1,...,a_{n-1})^kM$-正则元, 其中 k 是任意正整数.

当 $k=1$ 时, 条件即得结论. 假设结论对 $k-1(k\geq 2)$ 的情形成立, 为叙述方便, 固定记号 $J=(a_1,...,a_{k-1})$, 要证 a_n 是 M/J^kM-正则元. 任取 $y\in M$ 使得 $a_ny\in J^kM$, 由对 k 的归纳假设, 这时 $y\in J^{k-1}M$, 所以存在 $k-1$ 次齐次多项式 $g\in M[x_1,...,x_{n-1}]$ 使得 $y=g(a_1,...,a_{n-1})$. 那么 $\tilde{g}=a_ng$ 是 $k-1$ 次齐次多项式且 $\tilde{g}(a_1,...,a_{n-1})=0$. 对齐次多项式 $\tilde{g}$ 以及正则序列 $a_1,...,a_{n-1}$ 应用 $n-1$ 情形的归纳假设, 可得 $\tilde{g}$ 系数全在 JM 中. 于是由 a_n 是 M/JM-正则元立即得到 g 系数全在 JM 中. 所以 $y=g(a_1,...,a_{n-1})\in J^kM$, 进而 a_n 是 M/J^kM-正则元. 断言得证.

下面我们对齐次多项式 F 的次数 d 作归纳来证明当正则序列长度是 n 时结论成立. 当 $d=0$ 时, F 是常数多项式, 结论直接成立. 假设结论对次数为 $d-1(d\geq 1)$ 的齐次多项式成立, 我们来证明 F 次数为 d 时, 如果 $F(a_1,...,a_n)\in I^{d+1}M$, 则 F 的系数均在 IM 中. 事实上, 可以不妨设 $F(a_1,...,a_n)=0$(原因如下: 首先 $F(a_1,...,a_n)\in I^{d+1}M$ 说明存在 $d+1$ 次齐次多项式 $g(x_1,...,x_n)\in M[x_1,...,x_n]$ 使得 $F(a_1,...,a_n)=g(a_1,...,a_n)$, 设 $g=\sum\limits_{i=1}^n x_ig_i$, 这里 g_i 可能是零多项式, 那么 $F-\sum\limits_{i=1}^n a_ig_i$ 是零化点 $(a_1,...,a_n)$ 的 d 次齐次多项式, 若能说明它系数均在 IM 中, 则 F 各系数自然也在 IM 中). 故只要证 $F(a_1,...,a_n)=0$ 时结论成立即可. 设 $F(x_1,...,x_n)=G(x_1,...,x_{n-1})+x_nH(x_1,...,x_n)$, 其中 $G\in M[x_1,...,x_{n-1}]$ 是 d 次齐次多项式, H 是 $d-1$ 次齐次多项式, 那么 $G(a_1,...,a_{n-1})\in J^dM$. 于是由 a_n 是 M/J^dM-正则元 (前面断言证明的事实) 知 $H(a_1,...,a_n)\in J^dM$. 对 H 应用关于 d 作的归纳假设, H 各项系数在 IM 中. 还需说明 $G(x_1,...,x_{n-1})$ 的各项系数也在 IM 中. 为此, 注意存在 $H'(x_1,...,x_{n-1})\in M[x_1,...,x_{n-1}]$ 使得 $H(a_1,...,a_n)=H'(a_1,...,a_{n-1})$, 所以 $n-1$ 元 d 次齐次多项式 $G(x_1,...,x_{n-1})+a_nH'(x_1,...,x_{n-1})$ 在 $(a_1,...,a_{n-1})$ 处取值是零. 由 $n-1$ 情形归纳假设得到 $G(x_1,...,x_{n-1})$ 各项系数在 IM 中, 由此即得结果. □

1.2 级与深度

本节我们先定义极大正则序列, 再做一系列准备 (主要是 [引理1.20] 到 [引理1.22]) 后证明本节的主定理 [定理1.23], 进而导出含幺交换 Noether 环 R 的理想 I 在有限生成 R-模 M 上的级、含幺交换 Noether 局部环上有限生成模的深度的概念, 并简单介绍一些基本性质, 部分结论是为之后 Auslander-Buchsbaum 公式 (具体见 [定理1.50]) 的证明做准备的.

Definition 1.12 (极大正则序列)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 环, M 是 R-模, $a_1,a_2,...,a_n$ 是 M-正则序列, 如果不存在 $a_{n+1}\in R$ 使得 $a_1,a_2,...,a_{n+1}$ 是 M-正则序列, 则称 $a_1,a_2,...,a_n$ 是**极大 M-正则序列**. 若 I 是 R 的理想, $a_1,a_2,...,a_n$ 是 M-正则序列, $(a_1,a_2,...,a_n)\subseteq I$ 且不存在 $a_{n+1}\in I$ 使得 $a_1,a_2,...,a_{n+1}$ 是 M-正则序列, 则称 $a_1,a_2,...,a_n$ 是**含于理想 I 的极大 M-正则序列**.

根据极大正则序列的定义, 我们可以理解为它是“已经饱和的”并无法再扩充的正则序列, 之后我们将证明在适当条件下理想 I 包含的任何两个极大正则序列具有相同的长度 (参见 [定理1.23], 若 I 不包含任何 M-正则

元, 我们认为 I 包含的极大 M-正则序列长度是 0). 在进一步观察极大正则序列的特性前, 先说明在含幺交换 Noether 环中任何正则序列总可扩充为极大正则序列. 想法是朴素的:如果我们已经有了含于 I 的 M-正则序列 $a_1, a_2, ..., a_n$, 如果它本身是极大的, 我们不需要做任何事. 如果它不是极大的, 可添加一个 I 中 M-正则元 a_{n+1} 让 $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ 成为含于 I 的 M-正则序列, 于是得到理想严格升链 $(a_1, a_2, ..., a_n) \subsetneq (a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1})$. 如此继续讨论, 由 R 的 Noether 性保证了有限步后该讨论终止, 即 I 不再有 M-正则元来继续扩充序列, 那么也就得到了极大 M-正则序列, 我们把这一想法用严格的语言写下来就是下面的证明.

Proposition 1.13 (Noether 环中正则序列可扩充为极大正则序列)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 环, I 是理想, M 是 R-模, 那么对任何含于理想 I 的正则序列 $a_1, a_2, ..., a_n$, 总存在含于 I 的极大 M-正则序列 $b_1, b_2, ..., b_m$ 使得 $m \geq n$, $b_i = a_i, i = 1, 2, ..., n$.

Proof. 设 $S = \{\{x_i\}_{i=1}^l | l \geq n, \{x_i\}_{i=1}^l 是含于I的M\text{-}正则序列且x_i = a_i, i = 1, 2, ..., n\}$, 那么 $\{a_i\}_{i=1}^n \in S$ 表明 S 非空. 在 S 上定义二元关系 $\{x_i\}_{i=1}^l \leq \{y_i\}_{i=1}^s \Leftrightarrow l \leq s$ 且 $x_i = y_i, i = 1, 2, ..., l$. 那么 $(S, \leq)$ 是非空偏序集. 假设 $(S, \leq)$ 不存在极大元, 那么可构造 $(S, \leq)$ 中关于二元关系的严格升链 $\{a_{1i}\}_{i=1}^{n_1} < \{a_{2i}\}_{i=1}^{n_2} < \{a_{3i}\}_{i=1}^{n_3} < \cdots$. 于是得到理想严格升链 $(a_{11}, ..., a_{1n_1}) \subsetneq (a_{21}, ..., a_{2n_2}) \subsetneq \cdots$, 这与 R 的 Noether 性矛盾. 于是得到 $(S, \leq)$ 有极大元 $\{b_i\}_{i=1}^m$, 它是含于 I 的极大 M-正则序列. □

Remark. 通过上述命题, 我们知道对含幺交换 Noether 环 R 的理想 I 与有 R-模 M, 只要 I 中含有某个 M-正则序列, I 就含有某个极大 M-正则序列, 需要指出, I 中任意两个极大 M-正则序列一般来说长度是不一样的 (见 [例1.25]), 但在适当条件下可以保证 I 中所有极大 M-正则序列有公共长, 这也是本节主定理 [定理1.23] 要说的事实. 关于极大正则序列我们有下面基本的观察.

Lemma 1.14. 设 R 是含幺交换环, $M \neq 0$ 是 R-模, $a_1, ..., a_n$是 M-正则序列. 那么对理想 $I = (a_1, ..., a_n)$, 序列 $a_1, ..., a_n$ 就是含于 I 的极大 M-正则序列.

Proof. 这时 M/IM 是非零模且 I 中任何元素都是 M/IM-零因子. □

Example 1.15. 设 K 是域, 那么多项式环 $R = K[x_1, ..., x_n]$ 中序列 $x_1, ..., x_n$ 是含于理想 $(x_1, ..., x_n)$ 的极大 R-正则序列 (该序列的 R-正则性见 [例1.3]).

回忆含幺交换环 R 上的模 M 的一个**相关素理想** P 是指可表示为 M 某个元素零化子的素理想, 具体地, 就是形如 $P = \mathrm{ann}_R(x), x \in M$ 的素理想. 我们把 M 全体相关素理想构成的集合记作 $\mathrm{Ass}_R(M)$ 或 $\mathrm{Ass}(M)$. 下面对相关素理想的一些基本性质进行简要回顾. 对相关素理想基本性质很熟悉的读者可跳过 [引理1.16] 与 [引理1.17]. 下面的引理是之后众多命题证明中所需基本工具.

Lemma 1.16. 设 R 是含幺交换 Noether 环, M 是非零有限生成 R-模, 记 $Z(M)$ 是 M 在 R 中的零因子集. 那么
(1) 集合 $\{\mathrm{ann}(x) | x \neq 0 \in M\}$ 中的任何一个零化子都含于该集合的某个极大元 (也是 M 的相关素理想) 中, 该集合的极大元是有限的, 并且 $Z(M)$ 就是这有限个极大零化子之并;
(2) 对任何理想 $I \subseteq Z(M)$, 存在 $P \in \mathrm{Ass}(M)$ 使得 $I \subseteq P$.

Proof. (1) 先说明对每个 $x \neq 0 \in M$, $\mathrm{ann}(x)$ 一定包含于集合 $\{\mathrm{ann}(x) | x \neq 0 \in M\}$ 的某个极大元中. 考虑集合 $\{\mathrm{ann}(y) | x \neq 0 \in M, \mathrm{ann}(x) \subseteq \mathrm{ann}(y)\}$, 那么它非空, 故由 R 是 Noether 环知该理想集有极大元, 这证明了

第一个结论. 易见 $Z(M) = \bigcup\limits_{x\neq 0\in M} \mathrm{ann}(x)$, 所以 $Z(M)$ 可表为 $\{\mathrm{ann}(x)|x\neq 0\in M\}$ 所有极大元之并 (容易验证每个极大元都是素理想, 故是 M 的相关素理想). 因此我们要验证的只有 $\{\mathrm{ann}(x)|x\neq 0\in M\}$ 的极大元数目有限. 若不然, 设 $\{\mathrm{ann}(x_i)|x_i\neq 0\in M, i\in\Lambda\}$ 是极大元全体, 其中指标集 Λ 是无限集. 考虑所有 x_i 生成的子模 N, 那么 N 作为 M 的子模是有限生成的, 设 N 可由 $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}$ 生成, 那么 $\mathrm{Ann}_R(N) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathrm{ann}(x_{i_k}) \subseteq \mathrm{ann}(y), \forall y\in N$. 取 $y = x_{i_{n+1}}, i_{n+1}\in\Lambda$ 使得 $x_{i_{n+1}} \neq x_{i_k}, k = 1, 2, ..., n$, 那么 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathrm{ann}(x_{i_k}) \subseteq \mathrm{ann}(x_{i_{n+1}})$, 于是由素理想性质知存在某个 k 使得 $\mathrm{ann}(x_{i_k}) \subseteq \mathrm{ann}(x_{i_{n+1}})$, 再由极大性得到 $\mathrm{ann}(x_{i_k}) = \mathrm{ann}(x_{i_{n+1}})$, 得到矛盾. 所以集合 $\{\mathrm{ann}(x)|x\neq 0\in M\}$ 中的极大元数目有限.

(2) 设 $\{\mathrm{ann}(x_1), ..., \mathrm{ann}(x_m)\}$ 是集合 $\{\mathrm{ann}(x)|x\neq 0\in M\}$ 的极大元全体, 那么

$$I \subseteq Z(M) = \mathrm{ann}(x_1)\cup\mathrm{ann}(x_2)\cup\cdots\cup\mathrm{ann}(x_m),$$

因为每个 $\mathrm{ann}(x_k)$ 是素理想, 所以存在某个 k_0 使得 $I\subseteq \mathrm{ann}(x_{k_0})$. □

证明过程还告诉我们更多：交换 Noether 环上模 M 的相关素理想集 $\mathrm{Ass}(M) = \varnothing \Leftrightarrow M = 0$.

如果 R 是含幺交换 Noether 环, S 是 R 的乘闭子集, M 是 R-模, 我们可以搞清楚 M_S 作为 R-模的相关素理想集与 M 的相关素理想集之间的关系. 并且相关素理想一定在支集内.

Lemma 1.17. 设 R 是含幺交换 Noether 环, S 是 R 的乘闭子集, M 是 R-模.
(1) 我们有 $\mathrm{Ass}_R(M_S) = \mathrm{Ass}_R(M)\cap\{P\in\mathrm{Spec}R|P\cap S=\varnothing\}$, 即局部化 M_S 的相关素理想集就是 M 相关素理想集中那些与 S 不相交的素理想全体.
(2) 对任意素理想 P, $P\in\mathrm{Ass}_R(M)$ 的充要条件是 $P_P\in\mathrm{Ass}_{R_P}(M_P)$.
(3)$\mathrm{Ass}M\subseteq\mathrm{Supp}M$ 且 $\mathrm{Supp}M$ 中的极小元都在 $\mathrm{Ass}M$ 中. 特别地, 当 $M=R$ 时, $\mathrm{Spec}(R)=\mathrm{Supp}R$ 中任何极小元, 也就是 R 的所有极小素理想, 都是 R 作为 R-模的相关素理想.
(4) 若 $M\neq 0$ 是有限生成模, 则存在形如 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_t = M$ 且每个 $M_{i+1}/M_i \cong R/P_i$, 其中 $P_i\in\mathrm{Supp}M$ 的子模链.
(5) 设有形如 $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ 的正合列, 那么 $\mathrm{Ass}M\subseteq\mathrm{Ass}M'\bigcup\mathrm{Ass}M''$.
(6) 设 M 是有限生成模, 那么 $\mathrm{Ass}M$ 是有限集.

Proof. (1) 这个结论的证明可直接验证得到. 具体地, 任取 $P\in\mathrm{Ass}_R(M_S)$, 可设 $x/s\in M_S$ 使得 $\mathrm{ann}(x/s) = P$, 易见 P 与 S 不交 (验证它). 下面说明 P 是 M 某个元素的零化子. 因为 P 是有限生成理想, 可设 $P = (p_1, ..., p_t)$, 对每个 p_i, 存在 $u_i\in S$ 使得 $u_ip_ix = 0$, 那么 $p_i\in\mathrm{ann}(u_1u_2\cdots u_tx), i = 1, ..., t$, 从而 $P = \mathrm{ann}(u_1u_2\cdots u_tx)$, 故 $P\in\mathrm{Ass}_R(M)$ 且与 S 不交. 另一方面, 如果 $P\in\mathrm{Ass}_R(M)$ 且与 S 不相交, 那么存在 $x\in M$ 使得 $\mathrm{ann}(x) = P$, 任取 $t\in S$, 有 $P = \mathrm{ann}(tx/t)$(验证它), 得证.

(2) 我们使用 (1) 所证明的等式来证明 (2). 必要性：由 $P\cap(R-P)=\varnothing$ 得 $P\in\mathrm{Ass}_R(M_P)$, 设 $P = \mathrm{ann}_R(x/s)$, 有 $P_P = \mathrm{ann}_{R_P}(x/s)$(验证它), 所以 $P_P\in\mathrm{Ass}_{R_P}(M_P)$. 充分性：如果 $P_P\in\mathrm{Ass}_{R_P}(M_P)$, 设 $P_P = \mathrm{ann}_{R_P}(x/s)$, 则 $P = \mathrm{ann}_R(x/s)$(验证它), 故 $P\in\mathrm{Ass}_R(M)$.

(3) 任取 $P\in\mathrm{Ass}M$, 则 M 有子模与 R/P 同构, 于是有正合列 $0 \longrightarrow R/P \xrightarrow{\alpha} M$, 因为 R_P 作为 R-模平坦, 所以有 R_P-模正合列 $0 \longrightarrow R_P\otimes_R R/P \xrightarrow{\mathrm{id}_{R_P}\otimes\alpha} R_P\otimes_R M$, 故得形如 $0 \longrightarrow R_P/P_P \longrightarrow M_P$ 的 R_P-模正合列, 由此知 $M_P\neq 0$, 于是 $\mathrm{Ass}M\subseteq\mathrm{Supp}M$.

下证 Supp$M$ 中的极小元 P 都在 Ass$M$ 中, 根据 (2) 知只要证 $P_P \in \mathrm{Ass}_{R_P}(M_P)$ 即可. 这时 $M_P \neq 0$ 且 P 的选取方式保证了对任何素理想 $Q \subsetneq P$ 有 $M_Q = 0$, 这导致 $(M_P)_{Q_P} = 0$(验证它), 于是知 $\mathrm{Supp}(M_P) = \{P_P\}$, 因此 $\mathrm{Ass}_{R_P}(M_P)$ 非空迫使 $\mathrm{Ass}_{R_P}(M_P) = \{P_P\}$, 得证.

(4) 由条件 M 是非零 Noether 模, 首先 Ass$M \neq \varnothing$, 所以取 $P_0 \in \mathrm{Ass}M \subseteq \mathrm{Supp}M$, 则 $P_0 = \mathrm{ann}(x)$ 满足 $M_1 = Rx$ 是 M 的非零子模并且 $M_1/M_0 \cong R/P_0$. 如果 $M_1 = M$, 结论成立. 否则, M/M_1 是非零模, 取它的相关素理想 $P_1 = \mathrm{ann}(x_1 + M_1) \in \mathrm{Supp}M$, 那么 $M_2 = Rx_1 + M_1$ 满足 $M_2/M_1 \cong R/P_1$. 如此继续, 由 M 的 Noether 性知有限步后可得到满足条件的子模链.

(5) 设有正合列 $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$, 不妨设 $M \neq 0$, 可取 $P \in \mathrm{Ass}M$, 设 M 有子模 N 使得 $N \cong R/P$, 如果 $N \bigcap \alpha(M') = 0$, 那么 β 在 N 上的限制是单射, 从而 $P \in \mathrm{Ass}M''$. 如果 $N \bigcap \alpha(M') \neq 0$, 那么由 $\mathrm{Ass}(N \bigcap \alpha(M'))$ 是 $\mathrm{Ass}N = \{P\}$ 的非空子集得到 $P \in \mathrm{Ass}M'$.

(6) 不妨设 $M \neq 0$, 利用 (4), 得到子模链 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_t = M$, 满足每个 $M_{i+1}/M_i \cong R/P_i$, 其中 $P_i \in \mathrm{Supp}M$. 考察正合列 $0 \longrightarrow M_{t-1} \longrightarrow M_t \longrightarrow M_t/M_{t-1}$, 应用 (5) 可以看到 $\mathrm{Ass}M \subseteq \mathrm{Ass}M_{t-1} \bigcup \{P_{t-1}\}$, 再对 M_{t-1} 作相同的讨论, 如此继续, 得到 $\mathrm{Ass}M \subseteq \{P_0, P_1, ..., P_{t-1}\}$. □

回忆交换代数中对准素子模也有相关素理想的概念, 这和我们刚刚介绍的相关素理想是有关系的. 事实上很容易验证对含幺交换 Noether 环 R 上的有限生成模 M, 真子模 N 是以 Q 为相关素理想的准素子模当且仅当 $\mathrm{Ass}(M/N) = \{Q\}$: 必要性是明显的, 因为对每个 $x \notin N$, 有 $\sqrt{\mathrm{ann}(x+N)} = Q$, 而 $\mathrm{Ass}(M/N)$ 非空, 任何 $P \in \mathrm{Ass}(M/N)$ 满足 $P = \sqrt{P} = Q$. 充分性: 对每个 $x \in M - N$, 相关素理想集 $\mathrm{Ass}(R(x+N)) \neq \varnothing$, 故 $\mathrm{Ass}(R(x+N)) = \{Q\}$. 所以 $\mathrm{Supp}(R(x+N))$ 的极小元唯一, 就是 Q, 从而由 $\mathrm{Supp}(R(x+N)) = V(\mathrm{Ann}_R(R(x+N))) = V(\mathrm{ann}(x+N))$ 得到 $Q = \sqrt{\mathrm{ann}(x+N)}$. 即 $Q = \sqrt{\mathrm{ann}(x+N)}, \forall x \in M - N$, 于是由 M 是有限生成模得到 $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/N)} = Q$. 容易验证对每个 $a \in R$ 所诱导的 M/N 上左乘变换 $a_l : M/N \to M/N$ 不是单同态就是幂零同态, 故 N 是以 Q 为相关素理想的准素子模.

Example 1.18. 设含幺交换 Noether 环 R 有根理想 I, 则 $\mathrm{Ass}_R(R/I)$ 就是含 I 的极小素理想全体.

Proof. 不妨设 I 是真理想且 $P_1, ..., P_r$ 是全体含 I 极小素理想, 则对每个 P_i, 取 $x \in \bigcap_{j \neq i} P_j - P_i$, 易验证 $P_i = \mathrm{ann}_R(x+I) \in \mathrm{Ass}_R(R/I)$. 反之, 若 $Q = \mathrm{ann}_R(x+I)$ 是相关素理想, 那么 $x \notin I$, 于是存在 P_i 使得 $x \notin P_i$, 由此得到 $Q = \mathrm{ann}_R(x+I) \subseteq P_i$, 再由 P_i 的极小性迫使 $Q = \mathrm{ann}_R(x+I) = P_i$ 是极小素理想. □

这时可以给相关素理想一个几何解释. 设 k 是代数闭域, $X \neq \varnothing \subseteq \mathbb{A}_k^n$ 是仿射簇, 那么理想 $I(X)$ 是根理想并且多项式环 $R = k[x_1, ..., x_n]$ 中包含 $I(X)$ 的极小素理想全体对应 X 的不可约分支. 而前面的讨论我们看到, 坐标环 $A(X) = R/I(X)$ 作为 R-模的相关素理想集 $\mathrm{Ass}_R(A(X))$ 就是含 $I(X)$ 的极小素理想全体. 由此可见在这个背景下相关素理想对应了仿射簇的不可约分支. 所以在某种意义下我们可以把相关素理想集视作仿射簇不可约分支的推广. 在一些文献 (如 [Mat87]) 中, 对交换 Noether 环的理想 I, 把 $\mathrm{Ass}(R/I)$ 中元素称为 I 的 **prime divisors**. 关于相关素理想所需基本准备到此完成.

接下来 [引理1.20] 到 [引理1.22] 主要是为了本节主定理 [定理1.23] 的证明作准备. 其中 [引理1.20] 说含幺交换环上有有限表现的模 M 和任意 R-模 N 满足对 (M, N) 取 Hom 函子和取局部化函子是可交换的, 这里先回顾一下有限表现的定义. 对这部分内容很熟悉的读者可直接跳至 [引理1.21].

Definition 1.19 (自由表现, 有限表现)**.** 对含幺环 R 上的左 R-模 M, 称形如

$$\oplus_{j \in J} R \longrightarrow \oplus_{i \in I} R \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

的正合列为 M 的一个**自由表现**. 如果 M 有个自由表现满足 I,J 是有限 (非空) 指标集, 则称 M 是**有限表现的**. 故有有限表现的模 M 是指存在形如

$$\oplus_{j=1}^{m}R \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n}R \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

的正合列的模.

Lemma 1.20 (交换环上有限表现模取 Hom 与局部化可交换)**.** 设 R 是含幺交换环, S 是乘闭子集, M 是有限表现 R-模, 那么对任何 R-模 N, 有 R_S-模同构 $(\mathrm{Hom}_R(M,N))_S \cong \mathrm{Hom}_{R_S}(M_S,N_S)$.

Proof. 对任何 R-模 X,Y, 总能定义出下述定义合理的 R_S-模同态:

$$\eta_{X,Y}:(\mathrm{Hom}_R(X,Y))_S \to \mathrm{Hom}_{R_S}(X_S,Y_S), \frac{f}{s} \mapsto \eta_{X,Y}(\frac{f}{s}):X_S \to Y_S, x/t \mapsto f(x)/st.$$

且对任何正整数 l, 有 $\eta_{R^l,N}:(\mathrm{Hom}_R(R^l,N))_S \to \mathrm{Hom}_{R_S}(R^l_S,N_S)$ 是 R_S-模同构 (验证它). 现设 M 有自由表现 $R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$, 那么有下面的交换图 (验证该图确实交换):

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow (\mathrm{Hom}_R(M,N))_S & \xrightarrow{(\beta^*)_S} & (\mathrm{Hom}_R(R^n,N))_S & \xrightarrow{(\alpha^*)_S} & (\mathrm{Hom}_R(R^m,N))_S \\
\downarrow{\scriptstyle \eta_{M,N}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{R^n,N}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{R^m,N}} \\
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R_S}(M_S,N_S) & \xrightarrow[(\beta_S)^*]{} & \mathrm{Hom}_{R_S}((R^n)_S,N_S) & \xrightarrow[(\alpha_S)^*]{} & \mathrm{Hom}_{R_S}((R^m)_S,N_S)
\end{array}$$

上图上下两行正合, 再由 $\eta_{R^n,N}$ 与 $\eta_{R^m,N}$ 是同构可得 $\eta_{M,N}$ 是同构. □

Lemma 1.21. 设 R 是含幺交换 Noether 环, M,N 是有限生成 R-模, 如果 $\mathrm{Hom}_R(N,M)=0$, 那么 $\mathrm{Ann}(N)$包含 M-正则元.

Proof. 不妨设 N 是非零模. 我们说明当结论不成立时会导出 $\mathrm{Hom}_R(N,M)\neq 0$. 假设 $\mathrm{Ann}(N)$ 中元素都是 M-零因子, 即 $\mathrm{Ann}(N)\subseteq Z(M)$, 那么 [引理1.16(2)] 表明存在 $P\in\mathrm{Ass}(M)$, 使得 $\mathrm{Ann}(N)\subseteq P$. 于是 $P\in\mathrm{Supp}(N)$(回忆对有限生成模 N, 有 $V(\mathrm{Ann}(N))=\mathrm{Supp}(N)$), 故 N_P 是非零有限生成 R_P-模, 利用 Nakayama 引理得 N_P/P_PN_P 是非零 R_P-模, 它可视作域 R_P/P_P 上线性空间, 这说明 $\mathrm{Hom}_{R_P/P_P}(N_P/P_PN_P,R_P/P_P)\neq 0$, 于是

$$\mathrm{Hom}_{R_P}(N_P/P_PN_P,R_P/P_P)\neq 0,$$

进而 $\mathrm{Hom}_{R_P}(N_P,R_P/P_P)\neq 0$. 下面说明 $\mathrm{Hom}_{R_P}(N_P,M_P)\neq 0$, 因为 $P\in\mathrm{Ass}(M)$, 所以存在单 R-模同态 $j:R/P\to M$, 作局部化得单 R_P-模同态 $j_P:(R/P)_P\to M_P$, 结合 $R_P/P_P\cong(R/P)_P$ 知 $\mathrm{Hom}_{R_P}(N_P,M_P)\neq 0$. 而 N 是有限表现的, 故应用 [引理1.20] 得 $\mathrm{Hom}_{R_P}(N_P,M_P)\cong(\mathrm{Hom}_R(N,M))_P\neq 0$, 这也就说明 $\mathrm{Hom}_R(N,M)\neq 0$, 矛盾. □

Lemma 1.22. 设 R 是含幺交换环, M,N 是 R-模, 如果 $x_1,...,x_n$ 是包含在 $\mathrm{Ann}(N)$ 中的弱 M-正则序列, 那么有 R-模同构 $\mathrm{Hom}_R(N,M/(x_1,...,x_n)M)\cong\mathrm{Ext}^n_R(N,M)$.

Proof. 对弱 M-正则序列的长度 n 作归纳来证明结论. 当 $n=1$ 时, 有正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x_1} M \xrightarrow{p} M/x_1M \longrightarrow 0,$$

其中 x_1 指 x_1 所决定的 M 上左乘变换, 这下面的导出 Ext 群长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,M) \xrightarrow{(x_1)_*} \mathrm{Hom}_R(N,M) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_R(N,M/x_1M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(N,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(N,M) \longrightarrow \cdots$$

易见 $\mathrm{Hom}_R(N,M)=0$(验证它), 并且 $\mathrm{Ext}^1_R(N,x_1):\mathrm{Ext}^1_R(N,M)\to\mathrm{Ext}^1_R(N,M)$ 就是 N 上左乘 x_1 的变换经 $\mathrm{Ext}^1_R(-,M)$ 作用所得同调模间的同态, 进而 $x_1\in\mathrm{Ann}(N)$ 表明 $\mathrm{Ext}^1_R(N,x_1)$ 是零同态, 故由 R-模同构:

$$\mathrm{Hom}_R(N,M/x_1M)\cong\mathrm{Ext}^1_R(N,M),$$

故 $n=1$ 时结论成立. 假设结论对 $n-1(n\geq 2)$ 的情形成立, 即有模同构 $\mathrm{Hom}_R(N,M/(x_1,...,x_{n-1})M)\cong\mathrm{Ext}^{n-1}_R(N,M)$, 那么利用 x_n 是 $M/(x_1,...,x_{n-1})M$-正则元知 $\mathrm{Ext}^{n-1}_R(N,M)=0$, 于是有长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_R(N,M/x_1M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(N,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(N,M) \longrightarrow \cdots,$$

并注意到 $\mathrm{Ext}^n_R(N,x_1)=0$, 所以有 R-模同构 $\mathrm{Ext}^{n-1}_R(N,M/x_1M)\cong\mathrm{Ext}^n_R(N,M)$.

现在对 $\mathrm{Ext}^{n-1}_R(N,M/x_1M)$ 以及弱 M/x_1M-正则序列 $x_2,...,x_n$ 应用 $n-1$ 情形归纳假设知

$$\mathrm{Ext}^{n-1}_R(N,M/x_1M)\cong\mathrm{Hom}_R(N,(M/x_1M)/((x_1,...,x_n)M/x_1M)).$$

最后再利用模的同构定理可知 $\mathrm{Hom}_R(N,M/(x_1,...,x_n)M)\cong\mathrm{Ext}^n_R(N,M)$. □

上述引理证明中 x_1 决定 M 上的左乘变换经 Ext 函子 $\mathrm{Ext}^1_R(N,-)$ 作用后得到的同态就是由 N 上左乘 x_1 的变换经 $\mathrm{Ext}^1_R(-,M)$ 作用所得同态的细节如下：取定 N 的投射分解

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} N \longrightarrow 0,$$

那么同态 $\mathrm{Ext}^1_R(N,x_1)$ 是由下述复形间的链映射所诱导的：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_0,M) \arrow[r] \arrow[d, "(x_1)_*"] & \mathrm{Hom}_R(C_1,M) \arrow[r] \arrow[d, "(x_1)_*"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_{n-1},M) \arrow[r] \arrow[d, "(x_1)_*"] & \mathrm{Hom}_R(C_n,M) \arrow[r] \arrow[d, "(x_1)_*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_0,M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_1,M) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_{n-1},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_n,M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

而同态 $\mathrm{Ext}^1_R(x_1,M)$ 可由下述复形间的链映射诱导：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_0,M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_1,M) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_{n-1},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_n,M) \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_0,M) \arrow[r] \arrow[u, "(x_1)^*"] & \mathrm{Hom}_R(C_1,M) \arrow[r] \arrow[u, "(x_1)^*"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_{n-1},M) \arrow[r] \arrow[u, "(x_1)^*"] & \mathrm{Hom}_R(C_n,M) \arrow[r] \arrow[u, "(x_1)^*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

而这两个链映射是相同的, 故导出同调间的同态也一致.

下面给出本节主定理及其证明, 我们将从它的结论自然引出“级”的概念 (参见 [定义1.26]).

Theorem 1.23 (Rees)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模, I 是 R 的理想满足 $IM\neq M$, $x_1,...,x_n$ 是包含在 I 中的极大 M-正则序列, 那么 $n=\min\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\mathrm{Ext}^i_R(R/I,M)\neq 0\}$. 所以在该定理条件下包含在 I 中的所有极大 M-正则序列长度相同.

Proof. 我们分 $n=0$(即理想 I 不含任何 M-正则元) 与 $n\geq 1$ 两种情况处理.

Case1. 当 $n\geq 1$ 时, 对每个 $0\leq i\leq n-1$, 由 [引理1.22] 我们得到 R-模同构

$$\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)\cong \mathrm{Hom}_R(R/I,M/(x_1,...,x_i)M),$$

而 I 有 $M/(x_1,...,x_i)M$-正则元 $x_{i+1}\in I=\mathrm{Ann}_R(R/I)$, 因此 $\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)=0,\forall 0\leq i\leq n-1$. 因为 $x_1,...,x_n$ 是包含在 I 中的极大 M-正则序列且 $M\neq IM$, 所以 I 中元素均为 $M/(x_1,...,x_n)M$-零因子 (注意, 如果 $IM=M$, 那么 $x_1,...,x_n$ 是含于 I 的极大 M-正则序列并不意味着 I 没有 $M/(x_1,...,x_n)M$-正则元, 因为这时我们总能说不存在 $x_{n+1}\in I$ 使得 $x_1,...,x_n,x_{n+1}$ 是 M-正则序列, 但有可能会发生 I 中有元素 x_{n+1} 使得 $x_1,...,x_n,x_{n+1}$ 是弱 M-正则序列的情况), 因此 [引理1.21] 表明 $\mathrm{Hom}_R(R/I,M/(x_1,...,x_n)M)\neq 0$, 那么

$$\mathrm{Ext}_R^n(R/I,M)\cong \mathrm{Hom}_R(R/I,M/(x_1,...,x_n)M)\neq 0.$$

这也说明了这时 $n=\min\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)\neq 0\}$.

Case2. 当 $n=0$ 时, I 中元素均是 M-零因子, 从而 [引理1.21] 表明 $\mathrm{Hom}_R(R/I,M)\neq 0$, 即 $\mathrm{Ext}_R^0(R/I,M)\neq 0$, 所以这时也有 $\min\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)\neq 0\}=0=n$. □

Example 1.24. 若含幺交换 Noether 环 R 上的有限生成模 M 以及 R 的理想 I 满足 $IM=M$, Rees 定理失效, $\min\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)\neq 0\}$ 并不能给出含于 I 的极大 M-正则序列的长度. 例如取 $R=k[x_1,...,x_n]$ 是域 k 上多项式环, $M=I=R$, 则 $IM=M$, $x_1,...,x_n$ 自然是含于 I 的 R-正则序列, 并且是极大 R-正则序列. 但这时对每个自然数 $i\geq 0$, $\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)=\mathrm{Ext}_R^i(0,M)=0$. 一般地, 只要 $IM=M$ 就有 $\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)=0,\forall i\in\mathbb{N}$. 见 [命题1.27].

Example 1.25 ($IM=M$ 时极大正则序列长度可能不同)**.** 设 k 是域, $K=k[[x]]$ 是形式幂级数环, 考虑多项式环 $R=K[y]=k[[x]][y]$, 因为 $k[[x]]$ 是 Noether 环, 所以 R 也是 Noether 环. 取 $I=M=R$, 那么 $IM=M$. 这时 x,y 与 $xy-1$ 都是含于 I 的极大 R-正则序列, 具有不同的长度.

Proof. 可直接验证 x,y 是 R-正则序列, 再由 $R/(x,y)\cong k$ 得到 (x,y) 是 R 的极大理想, 所以 x,y 是极大 R-正则序列. 而 $k[[x]]$ 在乘闭子集 $S=\{1,x,x^2,...\}$ 处的局部化 $k[[x]]_S$ 同构于 $k[[x]][y]/(xy-1)$(一般地, 若 A 是含幺交换环, $s\in S$, 则 A 在乘闭子集 $S=\{1,s,s^2,...\}$ 处的局部化总同构于 $A[y]/(sy-1)$), 这里 $k[[x]]_S$ 的素理想只有零理想, 所以 $k[[x]][y]/(xy-1)$ 是域, 进而得到 $(xy-1)$ 是 $R=k[[x]][y]$ 的极大理想, 故 $xy-1$ 是极大 R-正则序列. 这样我们就得到了两个含于 $I=R$ 但长度不同的极大 R-正则序列. □

总结一下, Rees 定理告诉我们对交换 Noether 环 R 上的任何有限生成模 M 以及理想 I, 只要 $IM\neq M$, 就有含于 I 的任何两个极大 M-正则序列具有相同的长度. $IM\neq M$ 保证了任何两个极大正则序列长度不仅相同并且由 $\min\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)\neq 0\}$ 给出. 于是当 $IM\neq M$ 时自然可引入下述概念.

Definition 1.26 (级)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 环, I 是 R 的理想, M 是有限生成 R-模, 如果 $IM\neq M$, 定义 $\mathrm{grade}(I,M)=\min\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)\neq 0\}$, 否则定义 $\mathrm{grade}(I,M)=+\infty$. 称 $\mathrm{grade}(I,M)$ 为 **I 在 M 上的级**(grade). 在一些文献中称 $\mathrm{grade}(I,M)$ 是 I 在 M 上的**深度**.

当 $IM\neq M$ 时, 我们已经知道 $\mathrm{grade}(I,M)$ 的实际意义是 I 所含所有极大 M-正则序列的公共长. 那么当 $IM=M$ 时, 为什么定义 $\mathrm{grade}(I,M)=+\infty$? 下面我们将说明当 $IM=M$ 时, 对所有的自然数 i 有

$\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)=0$, 即集合 $\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)\neq 0\}$ 是空集, 于是集合 $\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)\neq 0\}$ 不论 IM 与 M 是否相同, 在 $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\cup\{\pm\infty\}$ 中取下确界都能与我们定义的 $\mathrm{grade}(I,M)$ 一致. 所以我们在 $IM=M$ 时定义 $\mathrm{grade}(I,M)=+\infty$ 就可保证下述等式总成立：

$$\mathrm{grade}(I,M)=\inf\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)\neq 0\}.$$

Proposition 1.27. 设 R 是含幺交换 Noether 环, I 是理想, M 是有限生成 R-模, 那么当 $IM=M$ 时, 有 $\mathrm{Ext}_R^i(R/I,M)=0,\forall i\in\mathbb{N}$.

该命题的证明依赖于下面两个引理 (熟悉的读者可直接跳过 [引理2.4] 与 [引理1.29] 的证明).

Lemma 1.28 (交换 Noether 环上有限生成模取 Ext 与局部化可交换)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 环, S 是 R 的乘闭子集, 那么对任何有限生成 R-模 M 与 R-模 N, 有 R_S-模同构

$$(\mathrm{Ext}_R^n(M,N))_S\cong\mathrm{Ext}_{R_S}^n(M_S,N_S).$$

Proof. 设 $\cdots\xrightarrow{d_2}F_1\xrightarrow{d_1}F_0\xrightarrow{\varepsilon}M\longrightarrow 0$, 是 M 的 R-自由表示, 每个 F_i 是有限生成模 (递归地不难构造这样的自由表示), 要证明的只有下述 R_S-模复形的 n 次上同调是 $\mathrm{Ext}_{R_S}^n(M_S,N_S)$, 原因是对 R-模同态序列 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$, 只要 $gf=0$, 就有 $\mathrm{Ker}g_S/\mathrm{Im}f_S\cong(\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f)_S$(验证它).

$$0\longrightarrow(\mathrm{Hom}_R(F_0,N))_S\xrightarrow{(d_1^*)_S}(\mathrm{Hom}_R(F_1,N))_S\xrightarrow{(d_2^*)_S}(\mathrm{Hom}_R(F_2,N))_S\longrightarrow\cdots$$

对任何 R-模 X,Y, 作下述 R_S-模同态：

$$\eta_{X,Y}:(\mathrm{Hom}_R(X,Y))_S\to\mathrm{Hom}_{R_S}(X_S,Y_S),\frac{f}{s}\mapsto\eta_{X,Y}:X_S\to Y_S,x/t\mapsto f(x)/st.$$

由 [引理1.20] 知当 X 有有限表现时 $\eta_{X,Y}$ 是同构. 对取定的 M 的自由表示 (F,d,ε) 作用局部化函子 $(-)_S$, 得到 M_S 的 R_S-自由表示： $\cdots\xrightarrow{(d_2)_S}(F_1)_S\xrightarrow{(d_1)_S}(F_0)_S\xrightarrow{\varepsilon_S}M_S\longrightarrow 0$, 故得 R_S-模复形：

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_{R_S}((F_0)_S,N_S)\xrightarrow{(d_1)_S^*}\mathrm{Hom}_{R_S}((F_1)_S,N_S)\xrightarrow{(d_2)_S^*}\mathrm{Hom}_{R_S}((F_2)_S,N_S)\longrightarrow\cdots$$

可直接验证下图交换：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathrm{Hom}_R(F_0,N))_S \arrow[r, "(d_1^*)_S"] \arrow[d, "\eta_{F_0,N}"'] & (\mathrm{Hom}_R(F_1,N))_S \arrow[r, "(d_2^*)_S"] \arrow[d, "\eta_{F_1,N}"'] & (\mathrm{Hom}_R(F_2,N))_S \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{F_2,N}"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R_S}((F_0)_S,N_S) \arrow[r, "(d_1)_S^*"] & \mathrm{Hom}_{R_S}((F_1)_S,N_S) \arrow[r, "(d_2)_S^*"] & \mathrm{Hom}_{R_S}((F_2)_S,N_S) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

即 $\eta_{F,N}$ 给出复形 $((\mathrm{Hom}_R(F,N))_S,(d^*)_S)$ 到 $(\mathrm{Hom}_{R_S}(F_S,N_S),d_S^*)$ 的链映射. 因为 F_i 是 Noether 环 R 上的有限生成模, 所以 F_i 有有限表现, 从而每个 $\eta_{F_i,N}$ 是同构. 于是我们得到 $((\mathrm{Hom}_R(F,N))_S,(d^*)_S)$ 的 n 次上同调作为 R_S-模同构于 $\mathrm{Ext}_{R_S}^n(M_S,N_S)$. □

Remark. 事实上这个结论也告诉我们对含幺交换 Noether 环 R 上的内射模 Q 与 R 的乘闭子集 S, Q_S 作为 R_S-模总是内射的, 即此时内射性关于局部化封闭. 证明如下：对任给 R 的理想 I, 有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,Q)=0$, 那么 $\mathrm{Ext}_{R_S}^1(R_S/I_S,Q_S)=0$, 考察短正合列 $0\longrightarrow I_S\longrightarrow R_S\longrightarrow R_S/I_S\longrightarrow 0$, 它导出 Ext 群长正合列, 由此可得短正合列 $0\longrightarrow\mathrm{Hom}_{R_S}(R_S/I_S,Q_S)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{R_S}(R_S,Q_S)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{R_S}(I_S,Q_S)\longrightarrow 0$, 通过 Baer 判别法可知 Q_S 是内射 R_S-模. 当 R 不是 Noether 环时, 该结论未必成立.

Lemma 1.29. 设 R 是含幺交换环, I 是理想, M 是有限生成 R-模. 如果 $IM = M$, 那么

$$\mathrm{Supp}(R/I) \cap \mathrm{Supp}M = \varnothing.$$

Proof. 假设存在素理想 $P \in \mathrm{Supp}(R/I) \cap \mathrm{Supp}M$, 那么 I_P 是 R_P 的真理想且 M_P 是非零有限生成 R_P-模, 满足 $I_P M_P = M_P$. 利用 Nakayama 引理立即得到矛盾. $\square$

现在我们给出 [命题1.27] 的证明, 即说明对含幺交换 Noether 环 R 及其理想 I, 如果有限生成模 M 满足 $IM = M$ 时, 则 $\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) = 0, \forall i \in \mathbb{N}$.

Proof. 根据 [引理2.4], 对任何素理想 P, 有 R_P-模同构 $(\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M))_P \cong \mathrm{Ext}_{R_P}^i((R/I)_P, M_P)$, 所以有

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M)) \subseteq \mathrm{Supp}M \cap \mathrm{Supp}(R/I) = \varnothing.$$

这说明 $\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) = 0$. $\square$

综上讨论, 我们可把交换 Noether 环 R 的理想 I 在有限生成模 M 上的级等价地定义为

$$\mathrm{grade}(I, M) = \inf\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

不过我们还需牢记当 $IM \neq M$ 时, 级 $\mathrm{grade}(I, M)$ 是含于 I 的极大 M-正则序列的公共长, 这种视角能让我们在处理级时更好地想象. 例如当理想 $I \subseteq J$ 时, 可马上看到 $\mathrm{grade}(I, M) \leq \mathrm{grade}(J, M)$.

当我们考虑的级局限在下述特殊情形, 我们称之为深度.

Definition 1.30 (深度)**.** 设 (R, m) 是含幺交换 Noether 局部环, 剩余类域记作 $k = R/m$, 那么对有限生成 R-模 M, 称 $\mathrm{grade}(m, M)$ 为 M 的**深度** (depth), 并记作 $\mathrm{depth}M$.

使用 [定理1.23] 完全相同证明方法, 可以得到：

Corollary 1.31. 设 R 是含幺交换 Noether 环, M, N 是有限生成 R 模. 如果 $\mathrm{Ann}_R N$ 满足 $\mathrm{Ann}_R(N)M \neq M$, 那么 $\min\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \mathrm{Ext}_R^i(N, M) \neq 0\}$ 就是含于 $\mathrm{Ann}_R N$ 的极大 M-正则序列的公共长. 当 $\mathrm{Ann}_R(N)M = M$(或等价地, $\mathrm{Ann}_R N + \mathrm{Ann}_R M = R$) 时, 有 $\mathrm{Ext}_R^n(N, M) = 0, \forall n \geq 0$. 总之我们有 $\mathrm{grade}(\mathrm{Ann}_R N, M) = \inf\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \mathrm{Ext}_R^i(N, M) \neq 0\}$. Rees 最早用 $\mathrm{grade}(\mathrm{Ann}_R M, R)$ 来定义 M 的级.

Proof. 设 $\mathrm{Ann}_R(N)M \neq M$ 并给定含于 $\mathrm{Ann}_R N$ 的极大 M-正则序列 $x_1, ..., x_n$. 当 $n = 0$ 时, $\mathrm{Ann}_R N$ 中元素均是 M-零因子, 所以 [引理1.21] 表明 $\mathrm{Hom}_R(N, M) \neq 0$, 即 $\mathrm{Ext}_R^0(N, M) \neq 0$, 所以当 $n = 0$ 时结论成立. 当 $n \geq 1$ 时, 应用 [引理1.22] 我们得到 R-模同构 $\mathrm{Ext}_R^i(N, M) \cong \mathrm{Hom}_R(N, M/(x_1, ..., x_i)M)$, 这里 $0 \leq i \leq n-1$. 再结合 $\mathrm{Ann}_R(N)$ 有 $M/(x_1, ..., x_i)M$-正则元得到 $\mathrm{Ext}_R^i(N, M) = 0, \forall 0 \leq i \leq n-1$. 下面说明 $\mathrm{Ext}_R^n(N, M) \neq 0$. 由 $x_1, ..., x_n$ 的极大性迫使 $\mathrm{Ann}_R N$ 中的元素都是 $M/(x_1, ..., x_n)M$-零因子, 所以再次应用 [引理1.21] 得到 $\mathrm{Ext}_R^n(N, M) \cong \mathrm{Hom}_R(N, M/(x_1, ..., x_n)M) \neq 0$.

现在处理 $\mathrm{Ann}_R(N)M = M$ 的情形, 这时存在 $a \in \mathrm{Ann}_R N, b \in \mathrm{Ann}_R M$ 使得 $1 = a + b$, 所以由 $a\mathrm{Ext}_R^n(M, N) = b\mathrm{Ext}_R^n(M, N) = 0$(验证它) 即得 $\mathrm{Ext}_R^n(M, N) = 0$. $\square$

注意到当 $M \neq 0$ 时, Nakayama 引理保证了 $mM \neq M$, 所以含幺交换 Noether 局部环上的非零有限生成模的深度总是有限的. 下面是含幺交换 Noether 环上有限生成模短正合列中模的级之间的关系, 我们以后将应用它证明 Auslander-Buchsbaum 公式 (见 [定理1.50]).

Proposition 1.32 (短正合列中模的级)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 环, I 是 R 的理想,

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

是有限生成 R-模短正合列, 则有
• $\mathrm{grade}(I, M) \geq \min\{\mathrm{grade}(I, M'), \mathrm{grade}(I, M'')\}$.
• $\mathrm{grade}(I, M') \geq \min\{\mathrm{grade}(I, M), \mathrm{grade}(I, M'') + 1\}$.
• $\mathrm{grade}(I, M'') \geq \min\{\mathrm{grade}(I, M') - 1, \mathrm{grade}(I, M)\}$.

Proof. 条件的短正合列导出 Ext 群长正合列:

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{i-1}(R/I, M') \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{i-1}(R/I, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{i-1}(R/I, M'') \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{i}(R/I, M') \longrightarrow$$

仅验证第一个不等式. 当 $\mathrm{grade}(I, M') = +\infty$ 时, $\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M') = 0, \forall i \geq 0$. 所以 $\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) \cong \mathrm{Ext}_R^i(R/I, M''), \forall i \geq 0$, 所以 $\mathrm{grade}(I, M) = \mathrm{grade}(I, M'')$, 结论成立. 同理可证当 $\mathrm{grade}(I, M'') = +\infty$ 的情形. 现设 $\mathrm{grade}(I, M'), \mathrm{grade}(I, M'')$ 都有限, 如果 $\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M') = 0$ 且 $\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M'') = 0$, 那么必有 $\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M) = 0$, 由此得到 $\mathrm{grade}(I, M) \geq \min\{\mathrm{grade}(I, M'), \mathrm{grade}(I, M'')\}$. □

下面是关于级的一些基本事实, 我们也会在 [定理1.50] 的证明中使用它.

Lemma 1.33. 设 R 是含幺交换 Noether 环, I 是理想, M 是有限生成 R-模, 那么
(1)$\mathrm{grade}(I, M) = \inf\{\mathrm{depth} M_P | P \in V(I)\}$. 特别地, $\mathrm{grade}(I, M) = \mathrm{grade}(\sqrt{I}, M)$.
(2) 如果 $a_1, ..., a_n$ 是含于 I 的 M-正则序列, 那么

$$\mathrm{grade}(I/(a_1, ..., a_n), M/(a_1, ..., a_n)M) = \mathrm{grade}(I, M/(a_1, ..., a_n)M) = \mathrm{grade}(I, M) - n.$$

(3) 如果 N 是有限生成 R-模且 $\mathrm{Supp} N = V(I)$, 那么 $\mathrm{grade}(I, M) = \inf\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^i(N, M) \neq 0\}$. 特别地, 当 $I = \mathrm{Ann}_R N$ 时, $\mathrm{grade}(\mathrm{Ann}_R N, M) = \inf\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^i(N, M) \neq 0\}$.

Proof. (1) 不妨设 $V(I) \neq \varnothing$, 否则结论直接成立 (回忆空集在扩张实数系 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 中取上确界是 $+\infty$). 我们的证明分为两步, 先说明不等式 $\mathrm{grade}(I, M) \leq \mathrm{grade}(P, M) \leq \mathrm{depth} M_P, \forall P \in V(I)$ 来得到 $\mathrm{grade}(I, M) \leq \inf\{\mathrm{depth} M_P | P \in V(I)\}$. 再分 $IM = M$ 与 $IM \neq M$ 两种情形证明结论.

Step1. 现在要说明的是 $\mathrm{grade}(I, M) \leq \mathrm{grade}(P, M) \leq \mathrm{depth} M_P, \forall P \in V(I)$. 如果 $PM = M$, 那么由 Nakayama 引理可得 $M_P = 0$. 所以这时不等式明显成立. 下设 $PM \neq M$, 那么 $IM \neq M$. 这时 $\mathrm{grade}(I, M)$ 就是含于 I 的极大 M-正则序列的长度, 该正则序列也含于 P, 所以 $\mathrm{grade}(I, M) \leq \mathrm{grade}(P, M)$. 因为当 $P \in \mathrm{Supp} M$ 时, 含于 P 的 M-正则序列 $x_1, x_2, ..., x_n$ 可以保证 $x_1/1, x_2/1, ..., x_n/1$ 是 M_P-正则序列 (回忆 [推论1.8]), 因此我们有 $\mathrm{grade}(P, M) \leq \mathrm{depth} M_P$(当 $P \notin \mathrm{Supp} M$ 时, 不等式右边是 $+\infty$, 直接成立). 故 $\mathrm{grade}(I, M) \leq \mathrm{depth} M_P, \forall P \in V(I)$.

Step2. 下面说明 $\mathrm{grade}(I, M) = \inf\{\mathrm{depth} M_P | P \in V(I)\}$. 如果 $IM = M$, 那么对任何 $P \in V(I)$, 有 $PM = M$, 进而 $M_P = 0$, 所以 $\mathrm{grade}(I, M) = \inf\{\mathrm{depth} M_P | P \in V(I)\} = +\infty$. 下设 $IM \neq M$ 以及 $n = \mathrm{grade}(I, M)$. 对含于 I 的极大 M-正则序列 $a_1, ..., a_n$, 有 I 中元素均为 $M/(a_1, ..., a_n)M$-零因子, 所以 [引理1.16(2)] 表明存在 $P \in \mathrm{Ass}(M/(a_1, ..., a_n)M)$ 使得 $I \subseteq P$. 故 [引理1.17(2)] 表明 $P_P \in \mathrm{Ass}(M/(a_1, ..., a_n)M)_P$. 结合 R_P-模同构 $(M/(a_1, ..., a_n)M)_P \cong M_P/(a_1, ..., a_n)M_P$ 得到 P_P 中的元素都是

$M_P/(a_1/1,...,a_n/1)M_P$-零因子并且 $P\in \mathrm{Supp}M$. 通过 [推论1.8] 我们知道 $a_1,...,a_n$ 作为含于 P 的 M-正则序列保证了序列 $a_1/1,a_2/1,...,a_n/1$ 是含于 P_P 的 M_P-正则序列. 因此, 前面的讨论告诉我们 $a_1/1,a_2/1,...,a_n/1$ 是含于 P_P 的极大 M_P-正则序列, 这也说明了 $n=\mathrm{depth}M_P$. 故 $\mathrm{grade}(I,M)=\inf\{\mathrm{depth}M_P|P\in V(I)\}$.

(2) 记 $\overline{I}=I/(a_1,...,a_n),\overline{M}=M/(a_1,...,a_n)M$, 容易验证 $IM=M\Leftrightarrow I\overline{M}=\overline{M}\Leftrightarrow \overline{I}\cdot\overline{M}=\overline{M}$ 以及 $b_1,...,b_m$ 是含于 I 的 $\overline{M}$-正则序列当且仅当 $\overline{b_1},...,\overline{b_m}$ 是含于 $\overline{I}$ 的 $\overline{M}$-正则序列. 因此

$$\mathrm{grade}(I/(a_1,...,a_n),M/(a_1,...,a_n)M)=\mathrm{grade}(I,M/(a_1,...,a_n)M).$$

下证最后一个等号. 易见 $\mathrm{grade}(I,M/(a_1,...,a_n)M)=+\infty$ 等价于 $\mathrm{grade}(I,M)=+\infty$. 以下设

$$\mathrm{grade}(I,M/(a_1,...,a_n)M)=l<+\infty,$$

则有含于 I 的极大 $\overline{M}$-正则序列 $b_1,...,b_l$, 从而 $a_1,...,a_n,b_1,...,b_l$ 是含于 I 的极大 M-正则序列, 所以

$$\mathrm{grade}(I,M)=n+l.$$

(3) 这时 $\sqrt{I}=\sqrt{\mathrm{Ann}_RN}$, 所以由 (2) 可不妨设 $I=\mathrm{Ann}_RN$. 这就是 [推论1.31] 阐述的事实. $\square$

1.3 模的 Krull 维数: 深度的上界

这节我们先介绍模的 Krull 维数, 交换 Noether 局部环上非零有限生成模的参数系的概念. 再介绍两个交换 Noether 局部环上非零有限生成模深度的上界性质 (见 [推论1.47],[命题1.48]). 下面介绍的内容在本章之后的小节中不会用到. 下面是模的 Krull 维数.

Definition 1.34 (模的 Krull 维数)**.** 设 R 是含幺交换环, M 是 R-模, 称 $\mathrm{k.dim}\ R/\mathrm{Ann}_RM$ 是 M 的 **Krull 维数** (以下简称为维数), 记作 $\mathrm{k.dim}M$.

回忆拓扑空间 X 的 **Krull 维数** (以下简称为维数) 是指 X 全体有限长不可约闭子集降链长度上确界, 即

$$\dim X=\sup\{n\in\mathbb{N}|X_0\subsetneq X_1\subsetneq\cdots\subsetneq X_n\text{是不可约闭子集链}\}.$$

对点 $p\in X$, 称 $\dim_pX=\sup\{n\in\mathbb{N}|X_0=\{p\}\subsetneq X_1\subsetneq\cdots\subsetneq X_n\text{是不可约闭子集链}\}$ 为 p **点的局部维数**. 设 k 是代数闭域, Hilbert 零点定理告诉我们仿射空间 $\mathbb{A}_k^n$ 中的仿射簇与多项式环 $k[x_1,...,x_n]$ 的根理想全体一一对应, 把该对应局限在不可约仿射簇层面我们可以得到不可约仿射簇全体与多项式环的素理想全体一一对应, 由此容易得到任何仿射簇 X 作为拓扑空间的维数就是其**正则函数环** (同构于**坐标环**, 以后时常视作等同)$A(X)$ 作为环的 Krull 维数. 仿射簇 X 在一点 p 处的局部维数对应局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的 Krull 维数, 即 $\dim_pX=\mathrm{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}$, 其中 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 X 在 p 点处的**正则函数芽环** (记 m_p 是点 p 所对应的 $A(X)$ 的极大理想, 则 $\mathcal{O}_{X,p}\cong(A(X))_{m_p}$), 一般也称 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 X **在** p **点处的局部环**. 在之后的讨论班中, 我们会看到当 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 Cohen-Macaulay 环时, 仿射簇 X 所有经过点 p 的不可约分支具有相同的维数.

Example 1.35. 设 k 是代数闭域, $R=k[x_1,...,x_n]$, $X\subseteq\mathbb{A}_k^n$ 是仿射簇, 那么 X 作为拓扑空间的维数就是坐标环 $A(X)$ 的 Krull 维数, 并且将 $A(X)$ 视作 R-模我们得到 $\mathrm{k.dim}_RA(X)=\mathrm{k.dim}R/I(X)$, 这也就是坐标环 $A(X)$ 的 Krull 维数.

再回顾一下交换 Noether 局部环的维数刻画以及正则局部环的相关概念.

Theorem 1.36 (交换 Noether 局部环的维数)**.** 设 (R,m) 是含幺交换 Noether 局部环, 我们知道它的 Krull 维数总是有限的, 并且以下三个整数相等:

- $d = \mathrm{k.dim} R$
- $\min\{t \in \mathbb{N} | \text{存在} m\text{-准素理想可由} t \text{个元素生成}\}$
- R 关于任意 m-准素理想 Q 的特征多项式次数 $\deg \chi_Q^R$

Definition 1.37 (参数系, 正则局部环, 正则参数系)**.** 设 R 是 d 维含幺交换 Noether 局部环, 唯一的极大理想记作 m. 如果 R 的 d 个元素 $x_1, ..., x_d$ 生成的理想是 m-准素的, 那么称 $\{x_1, ..., x_d\}$ 是 R 的**参数系**. 根据 R 的维数刻画, 我们看到它唯一的极大理想 m 至少由 d 个元素生成, 如果 m 可由 d 个元素生成, 那么称 R 是**正则局部环**. 如果 R 是 d 维正则局部环, 唯一的极大理想 m 的任何一个由 d 个元素构成的生成元集称为 R 的一个**正则参数系**.

根据模 Krull 维数的定义以及 Noether 局部环的维数刻画, 容易看出交换 Noether 局部环上的非零有限生成模总有有限的 Krull 维数, 并且容易得到下述刻画.

Corollary 1.38 (交换 Noether 局部环上非零有限生成模的 Krull 维数)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, 唯一的极大理想是 m, M 是非零有限生成 R-模, 记 $d = \mathrm{k.dim} M$, 则 $d = \min\{t \in \mathbb{N} | \exists x_1, ..., x_t \in m \text{使得} (x_1, ..., x_t) + \mathrm{Ann}_R M \text{是} m\text{-准素理想}\}$. 特别地, 当 $M = R$ 时, 结论退化为 Noether 局部环的维数刻画 (见 [定理1.36]).

Proof. 根据 $\mathrm{k.dim} M$ 的定义, 由 [定理1.36] 我们知道

$$d = \mathrm{k.dim}\ R/\mathrm{Ann}_R M = \min\{t \in \mathbb{N} | \text{存在某个} m/\mathrm{Ann}_R M\text{-准素理想可由} t \text{个元素生成}\}.$$

如果有某个 $m/\mathrm{Ann}_R M$-准素理想可由 t 个元素生成, 设为 $((x_1, ..., x_t) + \mathrm{Ann}_R M)/\mathrm{Ann}_R M$, 那么

$$\sqrt{(x_1, ..., x_t) + \mathrm{Ann}_R M} = m.$$

反之, 如果存在 $x_1, ..., x_t \in m$ 使得 $(x_1, ..., x_t) + \mathrm{Ann}_R M$ 是 m-准素理想, 那么 $((x_1, ..., x_t) + \mathrm{Ann}_R M)/\mathrm{Ann}_R M$ 是 $R/\mathrm{Ann}_R M$ 中可由 t 个元素生成的理想, 并且是 $m/\mathrm{Ann}_R M$-准素理想. 这就完成了证明. □

下面给出交换 Noether 局部环上有限生成模的一个维数不等式.

Proposition 1.39. 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, 极大理想是 m, R-模 M 是有限生成模, $x_1, ..., x_r \in m$. 则 $\mathrm{k.dim}\ M/(x_1, ..., x_r)M \geq \mathrm{k.dim}\ M - r$.

Proof. 不妨设 $M \neq 0$. 设 $l = \mathrm{k.dim}\ M/(x_1, ..., x_r)M$, 那么根据 [推论1.38] 我们知道存在 $y_1, ..., y_l \in m$ 使得 $(y_1, ..., y_l) + \mathrm{Ann}_R(M/(x_1, ..., x_r)M)$ 是 m-准素理想, 再由下面的 [引理1.40] 可知

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{(y_1, ..., y_l) + \mathrm{Ann}_R(M/(x_1, ..., x_r)M)} \\ &= \sqrt{\sqrt{(y_1, ..., y_l)} + \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/(x_1, ..., x_r)M)}} \\ &= \sqrt{\sqrt{(y_1, ..., y_l)} + \sqrt{(x_1, ..., x_r) + \mathrm{Ann}_R M}} \\ &= \sqrt{(y_1, ..., y_l) + (x_1, ..., x_r) + \mathrm{Ann}_R M} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(y_1, ..., y_l, x_1, ..., x_r) + \mathrm{Ann}_R M}$$

根据 [推论1.38] 上式表明 $l + r \geq \mathrm{k.dim}\ M$, 得证. □

Lemma 1.40. 设 R 是含幺交换环, M 是有限生成 R-模, Q 是 R的真理想, 那么

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/QM)} = \sqrt{Q + \mathrm{Ann}_R M}.$$

Proof. 要证明上式只需证明任何 R 的素理想 P, P 包含 $\mathrm{Ann}_R(M/QM)$ 当且仅当 P 包含 $Q + \mathrm{Ann}_R M$ 即可. 事实上, 有: $P \in V(\mathrm{Ann}_R(M/QM)) \Leftrightarrow P \in \mathrm{Supp}(M/QM) \Leftrightarrow M_P/Q_P M_P \neq 0 \Leftrightarrow M_P \neq 0$ 且 $Q_P \subseteq P_P$. 而 $M_P \neq 0$ 且 $Q_P \subseteq P_P$ 又等价于 $P \in \mathrm{Supp} M$ 且 $Q \subseteq P$. 这等价于 P 包含 Q 与 $\mathrm{Ann}_R M$, 即 P 包含 $Q + \mathrm{Ann}_R M$. □

介绍交换 Noether 局部环上的非零有限生成模的参数系之前, 先来看看 Noether 局部环参数系的等价刻画. 这里先指出如下基本的观察.

Lemma 1.41. 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, m 是 R 唯一的极大理想, Q 是真理想, 则以下三条等价:(1)R/Q 是 Artin 环. (2)R/Q 作为 R-模有合成列. (3)Q 是 m-准素理想.

由此易知下述交换 Noether 局部环参数系的刻画：

Corollary 1.42 (交换 Noether 局部环的参数系刻画)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, 有唯一的极大理想 $m, x_1, ..., x_d \in m, d = \mathrm{k.dim} R$, 则以下三条等价:(1)$\{x_1, ..., x_d\}$ 是 R 的一个参数系. (2)$\mathrm{k.dim} R/(x_1, ..., x_d) = 0$. (3)$R/(x_1, ..., x_d)$ 是 Artin 环.

现在正式地给出交换 Noether 局部环上非零有限生成模的参数系定义.

Definition 1.43 (交换 Noether 上非零有限生成模的参数系)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, M 是非零有限生成 R-模, $\mathrm{k.dim}\ M = d$, 如果 R 的 d 个元素 $x_1, ..., x_d$ 满足 $(x_1, ..., x_d) + \mathrm{Ann}_R M$ 是 m-准素理想, 则称 $\{x_1, ..., x_d\}$ 是 M 的一个**参数系**.

它有下面几个等价定义.

Lemma 1.44 (交换 Noether 局部环上非零有限生成模参数系刻画)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, R-模 M 是非零有限生成的, $\mathrm{k.dim}\ M = d$, 则以下三条等价:(1)$\{x_1, ..., x_d\}$ 是 M 的一个参数系. (2)$M/(x_1, ..., x_d)M$ 是 Artin 模. (3)$M/(x_1, ..., x_d)M$ 有合成列.

Proof. 只要证 (1) 与 (2) 等价. 由前面的讨论, 可知 $\{x_1, ..., x_d\}$ 是 M 的一个参数系 $\Leftrightarrow (x_1, ..., x_d) + \mathrm{Ann}_R M$ 是 m-准素理想 $\Leftrightarrow \sqrt{(x_1, ..., x_d) + \mathrm{Ann}_R M} = m \Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/(x_1, ..., x_d)M)} = m \Leftrightarrow \mathrm{Ann}_R(M/(x_1, ..., x_d)M)$ 是 m-准素理想 $\Leftrightarrow R/\mathrm{Ann}_R(M/(x_1, ..., x_d)M)$ 是 Artin 环. 而最后一个论断由下面的 [引理1.45] 即得. □

Lemma 1.45. 设 M 是含幺交换 Noether 环 R 上的非零有限生成模, 则 M 是 Artin 模当且仅当 $R/\mathrm{Ann}_R M$是 Artin 环.

Proof. 必要性：设 M 可由 $x_1,...,x_n$ 生成, 那么 $\mathrm{Ann}_R M = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{ann}_R(x_i)$, 于是 $R/\mathrm{Ann}_R M$ 作为 R-模到

$$R/\mathrm{ann}_R(x_1) \oplus R/\mathrm{ann}_R(x_2) \oplus \cdots \oplus R/\mathrm{ann}_R(x_n)$$

有标准嵌入. 每个 $R/\mathrm{ann}_R(x_i)$ 与 M 的某个子模同构, 故是 Artin 模, 从而 $R/\mathrm{ann}_R(x_1) \oplus R/\mathrm{ann}_R(x_2) \oplus \cdots \oplus R/\mathrm{ann}_R(x_n)$ 也是 Artin 模, 由此得到 $R/\mathrm{Ann}_R M$ 作为 R-模是 Artin 的.

充分性：将 M 视作 $R/\mathrm{Ann}_R M$-有限生成模即可. □

下面的结果表明 [命题1.39] 中元素序列是 M-正则序列为维数的不等式取到等号的充要条件.

Proposition 1.46. 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, 极大理想是 m, R-模 M 是有限生成模, $x_1,...,x_r \in m$. 则

$$\mathrm{k.dim}\ M/(x_1,...,x_r)M \geq \mathrm{k.dim}\ M - r.$$

等号成立当且仅当 $x_1,...,x_r$ 是 M 的某个参数系的一部分 (指某个参数系的子集).

Proof. 结合 [命题1.39], 这里要证的只有等号成立的条件. 若等号成立, 设 $l = \mathrm{k.dim}\ M/(x_1,...,x_r)M$, 那么存在 $y_1,...,y_l \in m$ 使得 $(y_1,...,y_l)+\mathrm{Ann}_R(M/(x_1,...,x_r)M)$ 是 m-准素理想, 回忆 [命题1.39] 的证明过程, 我们可以得到 $\sqrt{(y_1,...,y_l)+\mathrm{Ann}_R(M/(x_1,...,x_r)M)} = \sqrt{(y_1,...,y_l,x_1,...,x_r)+\mathrm{Ann}_R M}$. 所以 $\{y_1,...,y_l,x_1,...,x_r\}$ 是 M 的参数系 (这时 $\mathrm{k.dim}\ M = l + r$). 反之, 若 $x_1,...,x_r$ 是 M 的某个参数系的一部分, 设 M 有参数系 $\{y_1,...,y_l,x_1,...,x_r\}$, 则 $\mathrm{k.dim}\ M = l + r$ 且 $\sqrt{(y_1,...,y_l)+\mathrm{Ann}_R(M/(x_1,...,x_r)M)} = m$, 这说明 $\mathrm{k.dim}\ M/(x_1,...,x_r)M \leq l$(回忆维数的刻画, [推论1.38]), 但 [命题1.39] 表明总有

$$\mathrm{k.dim}\ M/(x_1,...,x_r)M \geq (l+r) - r = l.$$

所以这时等号成立. □

Corollary 1.47 (交换 Noether 局部环上非零有限生成模的深度不超过维数)**.** 设含幺交换环 R 是 Noether 局部环, M 是非零有限生成 R-模, 则对任给 M-正则序列 $a_1,...,a_n$, 有

$$\mathrm{k.dim}\ M/(a_1,...,a_n)M = \mathrm{k.dim}\ M - n.$$

特别地, M-正则序列 $a_1,...,a_n$ 是 M 的参数系的一部分. 故对 R 上非零有限生成模 M, 总有

$$\mathrm{depth} M \leq \mathrm{k.dim}\ M.$$

Proof. 我们对正整数 n 作归纳. 当 $n=1$ 时, 我们证明 $\mathrm{k.dim} R/\mathrm{Ann}_R(M/a_1M) = \mathrm{k.dim} R/\mathrm{Ann}_R M - 1$. 为此只需说明 $\mathrm{k.dim} R/\mathrm{Ann}_R(M/a_1M) \leq \mathrm{k.dim} R/\mathrm{Ann}_R M - 1$. 任取 R 包含 $\mathrm{Ann}_R M$ 的极小素理想 P, 有 P 为 $\mathrm{Supp} M$ 的极小元, 进而 $P \in \mathrm{Ass}_R M$, 所以 $a_1 \notin P$. 现设 $s = \mathrm{k.dim} R/\mathrm{Ann}_R(M/a_1M)$, 对应 R 的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s$, 这里 $P_0 \supseteq \mathrm{Ann}_R(M/a_1M) \supseteq \mathrm{Ann}_R M$. 设 $Q \subseteq P_0$ 是包含 $\mathrm{Ann}_R M$ 的极小素理想, 那么 Q 不含 a_1 说明 $Q \neq P_0$. 所以 $\mathrm{k.dim} R/\mathrm{Ann}_R(M/a_1M) \leq \mathrm{k.dim} R/\mathrm{Ann}_R M - 1$, 这就证明了 $n=1$ 情形的结论.

假设结论对 $n-1 (n \geq 2)$ 的情形成立, 进而对 M-正则序列 $a_1,...,a_n$ 有 $\mathrm{k.dim}\ M/(a_1,...,a_{n-1})M = \mathrm{k.dim}\ M - n + 1$. 由 $n=1$ 时已证明的结论, $\mathrm{k.dim}\ M/(a_1,...,a_n)M = \mathrm{k.dim}\ M/(a_1,...,a_{n-1})M - 1$, 再由归纳假设得到结论. □

Proposition 1.48. 设含幺交换环 R 是 Noether 局部环, M是非零有限生成 R-模, 则

$$\mathrm{depth}M \le \mathrm{k.dim}R/P, \forall P \in \mathrm{Ass}M.$$

Proof. 我们对自然数 $n = \mathrm{depth}M$ 作归纳. 当 $n = 0$ 时结论直接成立. 假设结论对 $n-1(n \ge 1)$ 的情形成立, 现在考察 n 的情形. 这时 n 为 R 唯一的极大理想 m 所包含的极大 M-正则序列的长度, 所以 m 中存在 M-正则元 a, 于是 $\mathrm{depth}M/aM = \mathrm{depth}M - 1$. 下面说明 $P \subseteq Z(M/aM)$. 考虑非空集合 $\{Rx|x \in M, \mathrm{Ann}_R(Rx) = P\}$, 设其极大元是 Rx, 那么 $x \notin aM$(否则, 存在 $y \in M$ 使得 $x = ay$, 那么 Ry 零化子包含 P 且 $Rx \subsetneq Ry$, 原因是当 $y = bx$ 时, $1 - ab \in \mathrm{Ann}_R(Rx)$, 于是 $1 \in m$, 矛盾). 所以 $P \subseteq Z(M/aM)$, 进而存在 $Q \in \mathrm{Ass}(M/aM)$ 使得 $P \subseteq Q$. 注意到 $a \notin P$, 所以 $P \notin V(\mathrm{Ann}_R(M/aM)) = \mathrm{Supp}(M/aM)$, 因此 $P \ne Q$. 进而由归纳假设

$$\mathrm{k.dim}R/P > \mathrm{k.dim}R/Q \ge \mathrm{depth}M/aM = \mathrm{depth}M - 1,$$

即 $\mathrm{depth}M \le \mathrm{k.dim}R/P$. □

为了方便查阅, 在本节最后记录域上 n 元多项式环的 Krull 维数是 n 的证明.

Theorem 1.49. 设 F 是域, 则 $\mathrm{k.dim}F[x_1, x_2, ..., x_n] = n$.

Proof. 因为 $F[x_1, x_2, ..., x_n]$ 有长度是 n 的素理想升链 $(0) \subsetneq (x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (x_1, x_2, ..., x_n)$, 所以要证明 $\mathrm{k.dim}F[x_1, x_2, ..., x_n] = n$, 只要证明下述断言.

Claim. 设 A 是域 F 上交换代数 (可以是零环), S 是 A 作为代数的一个生成元集, 则

$$\mathrm{k.dim}A \le \sup\{|T||T\text{是}S\text{有限子集且代数无关}\}.$$

如果 $S = \varnothing$, 那么 $A = F1_A$ 不是零环就是域, 总之有 $\mathrm{k.dim}A \le 0 = \sup\{|T||T = \varnothing\}$. 下设 $S \ne \varnothing$, A 不是零环, 且 $\sup\{|T||T\text{是}S\text{有限子集且代数无关}\} = n$ 是自然数. 我们对 n 作归纳证明：若 A 是域 F 上交换代数, S 是 A 非空生成元集, 则 $\mathrm{k.dim}A \le \sup\{|T||T\text{是}S\text{有限子集且代数无关}\}$. 如果 $n = 0$, 那么 S 中任何元素都是 F 上代数元, 由此易得 A 中所有元素都是 F 上代数元. 任取 A 的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s$, 那么整区 A/P_0 有长度为 s 的素理想链 $\{0\} \subsetneq P_1/P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s/P_0$. 因为 A 中任何元素在 F 上代数, 所以整区 A/P_0 中任何元素也在 F 上代数, 由此得到 A/P_0 是域, 所以 $s = 0$, 这说明 $\mathrm{k.dim}A = 0 \le n$, 结论成立. 假设结论对不超过 $n - 1(n \ge 1)$ 的情形成立, 那么对 n 的情形, 我们分两步证明结论.

Step1. 若 A 是整区, 任取 A 的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s$(不妨设 $s \ge 1$, 否则结论直接成立), 可得 A/P_1 的长度为 $s-1$ 的素理想链 $\{0\} \subsetneq P_2/P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s/P_1$, 下面证明 A/P_1 的生成元集 $\{a+P_1|a \in S\}$ 任何一个有限代数无关子集 T 都有 $|T| \le n-1$, 一旦证明该断言, 对 A/P_1 作归纳假设可知 $s-1 \le n-1$, 进而可得 $\mathrm{k.dim}A \le n$. 假设 $\{a + P_1|a \in S\}$ 有一个代数无关子集有 n 个元素, 设为 $\{a_1 + P_1, a_2 + P_1, ..., a_n + P_1\}$, 那么 $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ 是 S 的代数无关子集. 于是对任何 $a \in S$, 都存在 $F[a_1, a_2, ..., a_n][x]$ 中的非零多项式 $h(x)$ 使得 $h(a) = 0$. 由此可得 $A \subsetneq \mathrm{Frac}(A)$ 在 $\mathrm{Frac}(F[a_1, a_2, ..., a_n])$ 上代数, 故任取 $a \ne 0 \in P_1$, 存在以 $F[a_1, a_2, ..., a_n]$ 中元为系数的非零多项式 $\varphi(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_\ell x^\ell$ 使 $\varphi(a) = 0$. 因为 $a \ne 0$, 所以可设 $c_0 \ne 0$, 于是存在 $F[x_1, x_2, ..., x_n]$ 中非零元 $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ 使得 $g(a_1, a_2, ..., a_n) = c_0 \in P_1$, 这与 $\{a_1 + P_1, a_2 + P_1, ..., a_n + P_1\}$ 代数无关矛盾. 断言得证, 于是知当 A 是整区时, $\mathrm{k.dim}A \le n$.

Step2. 对一般的情形, 任取 A 的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s$, 可得整区 A/P_0 有长度为 s 的素理想链 $\{0\} \subsetneq P_1/P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s/P_0$. 易见

$$\sup\{|T| | T\text{是}\{a+P_0|a\in S\}\text{有限子集且代数无关}\} \leq \sup\{|T| | T\text{是}S\text{有限子集且代数无关}\},$$

故对整区 A/P_0 应用第一步证明的结果知

$$s \leq \sup\{|T| | T\text{是}S\text{有限子集且代数无关}\},$$

进而 $\mathrm{k.dim}A \leq \sup\{|T| | T\text{是}S\text{有限子集且代数无关}\}$. □

Remark. 一般地, 若 R 是含幺交换 Noether 环, 可以证明 [Mat87, p.117, Theorem 15.4]

$$\mathrm{k.dim}R[x_1,...,x_n] = \mathrm{k.dim}R[[x_1,...,x_n]] = \mathrm{k.dim}R + n.$$

1.4 Auslander-Buchsbaum 公式

本节的目标是证明下述定理：

Theorem 1.50 (Auslander-Buchsbaum,1957)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, $M \neq 0$ 是投射维数有限的有限生成 R-模, 则 $\mathrm{p.dim}_R M + \mathrm{depth}M = \mathrm{depth}R$.

在正式给出证明之前, 我们复习一下模的极小投射分解, 它将是证明上述公式的基本工具. 对投射盖与极小投射分解很熟悉的读者可直接跳至 [引理1.63].

Definition 1.51 (投射盖)**.** 设 R 是含幺环, M 是左 R-模, 如果满模同态 $\theta: P \to M$ 满足 P 是投射模且 $\mathrm{Ker}\theta$ 是 P 的多余子模 ($\mathrm{Ker}\theta \subseteq_s P$), 则称 θ 是 M 的**投射盖** (projective cover).

定义中 $\mathrm{Ker}\theta \subseteq_s P$ 的条件也可以改为对 P 的任何子模 P', $\theta(P') = M$ 蕴含 $P = P'$.

Lemma 1.52. 设 R 是含幺环, P 是投射 R-模, $\theta: P \to M$ 是满模同态, 那么 $\mathrm{Ker}\theta \subseteq_s P \Leftrightarrow$ 对 P 的任何子模 P', $\theta(P') = M$ 蕴含 $P = P'$.

Proof. 只证必要性：如果 $\theta(P') = M$, 设 $\tilde{\theta}: P' \to M$ 是 θ 的限制, 那么根据 P 是投射模, 存在模同态 $f: P \to P'$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\theta"] & \\ P' \arrow[r, "\tilde{\theta}"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

这时有 $P' + \mathrm{Ker}\theta = P$(利用上图验证它), 所以 $\mathrm{Ker}\theta$ 是多余子模使得 $P = P'$ □

Example 1.53 (模的投射盖可能不存在)**.** 设 $R = k[x]$ 是域上多项式环, $M = k[x]/(x)$ 没有投射盖.

Proof. 假设有投射盖 $\theta: P \to M$, 那么 P 的真子模 $P' = (x-1)P$ 满足 $\theta(P') = M$, 矛盾. □

虽然模的投射盖可能不存在, 但当投射盖存在时有下面的同构唯一性.

Proposition 1.54. 设 R 是含幺环, $\theta : P \to M$ 与 $\theta' : P' \to M$ 都是 M 的投射盖, 那么存在模同构 $\alpha : P' \to P$使下图交换：

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\theta"] & M \\ & P' \arrow[ul, dashed, "\alpha"] \arrow[u, "\theta'"'] \end{tikzcd}$$

Proof. 由 P' 是投射模知存在模同态 $\alpha : P' \to P$ 使得 $\theta\alpha = \theta'$, 那么由 $\theta(\alpha(P')) = M$ 以及 [引理1.52] 得到 $\alpha(P') = P$, 于是由 P 是投射模得到 $\mathrm{Ker}\alpha$ 是 P' 的直和因子. 因 $\mathrm{Ker}\alpha$ 是多余子模 $\mathrm{Ker}\theta'$ 的子模, 所以 $\mathrm{Ker}\alpha$ 也是多余子模, 这迫使 $\mathrm{Ker}\alpha = 0$. 所以 α 是同构. □

Example 1.55 (局部环上有限生成模投射盖构造)**.** 设 R 是局部环, $J = \mathrm{Jac}R$, 则 R/J 是除环. 设 M 是有限生成左 R-模, 那么 M/JM 是除环 R/J 上有限维线性空间, 设维数是 n, 有基 $\{\overline{m_i}\}_{i=1}^n$, 那么将 R^n 的标准单位向量映至 m_i 可定义出满同态 $\theta : P = R^n \to M$ 使得下图交换, 其中 $\tilde{\theta}$ 是线性同构.

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ (R/J)^n \arrow[r, "\tilde{\theta}"] & M/JM \end{tikzcd}$$

那么 $\mathrm{Ker}\theta \subseteq J^n$, 结合 $J^n = J(R^n)$ 得到 $\mathrm{Ker}\theta$ 是多余子模. 所以 $\theta : R^n \to M$是投射盖.

Definition 1.56 (极小投射分解)**.** 设 R 是含幺环, 如果 M 的投射分解 (C, d, ε)

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

满足 $\varepsilon : C_0 \to M$ 是 M 的投射盖, 对任何正整数 i, $\overline{d_i} : C_i \to \mathrm{Im}d_i$ 是 $\mathrm{Im}d_i$ 的投射盖, 则称投射分解 (C, d, ε) 是 M 的**极小投射分解** (minimal projective resolution).

Example 1.57. 设 R 是左 Noether 局部环, $J = \mathrm{Jac}R$, 则任何有限生成左 R-模 M的极小投射分解构造.

Proof. 设 M/JM 作为 R/J-线性空间维数是 n_0, 基为 $\{\overline{x_i}\}_{i=1}^{n_0}$, 那么 [例1.55] 表明可利用 $\{x_i\}_{i=1}^{n_0}$ 得投射盖 $\varepsilon : R^{n_0} \to M$, 再对 $\mathrm{Ker}\varepsilon$ 重复上述讨论 (注意 R 的 Noether 条件保证了这里 $\mathrm{Ker}\varepsilon$ 也是有限生成模), 可得 M 的极小投射分解 (这里 R^0 表示零模)

$$\cdots \longrightarrow R^{n_2} \xrightarrow{d_2} R^{n_1} \xrightarrow{d_1} R^{n_0} \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

□

模的极小投射分解如果存在, 易证下述同构唯一性：

Proposition 1.58. 如果含幺环 R 上模 ${}_RM$ 有极小投射分解 $(P, d, \varepsilon), (P', d', \varepsilon')$, 那么它们作为复形同构, 即存在链映射 $\alpha : (P, d) \to (P', d')$ 使得 $\varepsilon = \varepsilon'\alpha_0$ 且每个 $\alpha_i : C_i \to C_i'$ 是同构.

Proof. 递归地易构造使得下图交换的链映射 α.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] \\ {} \arrow[r] & P_n' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1' \arrow[r, "d_1'"] & P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] & M \end{tikzcd}$$

利用 [命题1.54] 得到 α_0 是同构. 对每个正整数 i, 注意到下图交换

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "d_i|"] \arrow[d, "\alpha_i"] & \mathrm{Im}d_i \arrow[d, "\alpha_{i-1}|"] \\ C_i' \arrow[r, "d_i'|"] & \mathrm{Im}d_i' \end{tikzcd}$$

再应用 [命题1.54] 对 $n \geq 0$ 作归纳可证每个 α_n 是同构. □

事实上更一般地, 有下述结果.

Proposition 1.59. 如果含幺环 R 上模 ${}_RM$ 有极小投射分解 (P, d, ε), 那么对任何 M 的投射分解 (Q, h, η), 对每个自然数 i 存在满同态 $\alpha_i : Q_i \to P_i$.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \\ {} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \end{tikzcd}$$

Proof. 事实上只需要证明对每个自然数 n, 有 $\mathrm{Im}h_n \cong \mathrm{Im}d_n \oplus L_n$, L_n 是某个投射模即可. 一旦证明该断言, 存在下面的交换图:

$$\begin{tikzcd} Q_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{Im}h_n \arrow[d, "g"] \\ P_n \oplus L_n \arrow[r, "d_n|\oplus \mathrm{id}_{L_n}"'] & \mathrm{Im}d_n \oplus L_n \end{tikzcd}$$

其中 g 是同构, [引理1.60] 表明 $d_n| \oplus \mathrm{id}_{L_n}$ 是投射盖, 从而 h 满, 利用 h 便可构造出 α_n.

下面证明上面的断言, 对正整数 n 作归纳, 当 $n = 0$ 时, 存在同态 $\alpha_0 : Q_0 \to P_0$ 使得 $\varepsilon\alpha_0 = \eta$, 于是 ε 是投射盖表明 α_0 满, 进而存在同态 $s_0 : P_0 \to Q_0$ 使得 $\alpha_0 s_0 = \mathrm{id}_{P_0}$. 可直接验证 $\mathrm{Ker}\eta = \mathrm{Ker}\alpha_0 \oplus \mathrm{Ker}\varepsilon$, 这就得到了 $n = 0$ 的结果. 假设有 $\mathrm{Im}h_n \cong \mathrm{Im}d_n \oplus L_n$, 前面的讨论知有交换图

$$\begin{tikzcd} Q_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{Im}h_n \arrow[d, "g"] \\ P_n \oplus L_n \arrow[r, "d_n|\oplus \mathrm{id}_{L_n}"'] & \mathrm{Im}d_n \oplus L_n \end{tikzcd}$$

再应用下面的 [引理1.61] 即得结果. □

Lemma 1.60. 设 R 是含幺环 $\theta : P \to M$ 是左 R-模 M 的投射盖, 则对任何投射模 Q, 有 $\theta \oplus \mathrm{id}_Q : P \oplus Q \to M \oplus Q$也是投射盖.

Proof. 只要证 $\mathrm{Ker}\theta \oplus 0$ 是 $P \oplus Q$ 的多余子模. 如果 $P \oplus Q$ 的子模 X 满足 $\mathrm{Ker}\theta \oplus 0 + X = P \oplus Q$, 那么 $Y = \{y \in P | (y, 0) \in X\}$ 是 P 的子模且 $\mathrm{Ker}\theta + Y = P$, 于是 $Y = P$, 由此易得 $X = P \oplus Q$. □

Lemma 1.61. 给定含幺环 R 上的左模交换图:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[r, "\theta"] & M \end{tikzcd}$$

其中 f 是满射, g 是同构, Q 是投射模且 $\theta: P \to M$ 是投射盖, 那么 h 是满射且存在投射模 L 使得 $\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Ker}\theta \oplus L$.

Proof. 由条件 $\theta(h(Q)) = M$, 所以由 θ 是投射盖可得 $h(Q) = P$, 进而 h 满. 所以存在模同态 $s: P \to Q$ 使得 $hs = \mathrm{id}_P$. 故 $Q = \mathrm{Ker}h \oplus \mathrm{Im}s$, 直接验证得到 $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}h \oplus s(\mathrm{Ker}\theta)$, 取 $L = \mathrm{Ker}h$. □

对上述 [命题1.59] 的一个简单观察就是极小投射分解存在时, 它的长度是所有投射分解长度最短的. 所以这时极小投射分解的长度便可给出模的投射维数 (之后将使用这一事实).

Corollary 1.62. 设含幺环 R 上模 ${}_RM$ 有极小投射分解 (P, d, ε), 那么投射维数 $\mathrm{p.dim}_R M = l(P)$, 这里 $l(P)$ 指复形 (P, d)的长度.

Lemma 1.63 (交换 Noether 局部环上有限生成模的投射维数)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, 唯一极大理想为 m, $k = R/m$, 那么对任何有限生成 R-模 M, 有

$$\mathrm{p.dim}_R M = \sup\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Tor}_i^R(k, M) \neq 0\}.$$

Proof. 当 $M = 0$ 时结论明显成立, 下设 $M \neq 0$. 按照 [例1.57] 的讨论可得 M 的极小投射分解

$$\cdots \longrightarrow R^{n_2} \xrightarrow{d_2} R^{n_1} \xrightarrow{d_1} R^{n_0} \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

满足 $\mathrm{Im}d_i \subseteq m^{n_{i-1}} = mR^{n_{i-1}}$ 且 [推论1.62] 告诉我们下述复形长度是 $\mathrm{p.dim}_R M$.

$$\cdots \longrightarrow R^{n_2} \xrightarrow{d_2} R^{n_1} \xrightarrow{d_1} R^{n_0} \longrightarrow 0$$

对上式作用张量函子 $k \otimes_R -$, 得到下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R/m \otimes R^{n_2} \arrow[r, "\mathrm{id}_{R/m}\otimes d_2"] \arrow[d, "\cong"] & R/m \otimes R^{n_1} \arrow[r, "\mathrm{id}_{R/m}\otimes d_1"] \arrow[d, "\cong"] & R/m \otimes R^{n_0} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & R^{n_2}/mR^{n_2} \arrow[r, "\tilde{d_2}"] & R^{n_1}/mR^{n_1} \arrow[r, "\tilde{d_1}"] & R^{n_0}/mR^{n_0} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因每个 $\tilde{d_i}$ 是零同态, 所以 $\mathrm{Tor}_i^R(k, M) \cong R^{n_i}/mR^{n_i}$, 于是 $\mathrm{p.dim}_R M = \sup\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Tor}_i^R(k, M) \neq 0\}$. □

Lemma 1.64. 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, 唯一极大理想为 m, $k = R/m$, M 是有限生成 R-模, $x \in m$ 既是 R-正则元又是 M-正则元, 那么 $\mathrm{p.dim}_R M = \mathrm{p.dim}_{R/(x)} M/xM$.

Proof. 不妨设 $M \neq 0$, 同样按照 [例1.57] 可得 M 的极小投射分解

$$\cdots \longrightarrow R^{n_2} \xrightarrow{d_2} R^{n_1} \xrightarrow{d_1} R^{n_0} \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

使用张量函子 $R/(x) \otimes_R -$ 作用之, 由 x 既是 R-正则元又是 M-正则元根据 [命题1.10] 可得下面的交换图, 上下两行正合.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R/(x) \otimes R^{n_2} \arrow[r, "\mathrm{id}_{R/(x)}\otimes d_2"] \arrow[d, "\cong"] & R/(x) \otimes R^{n_1} \arrow[r, "\mathrm{id}_{R/(x)}\otimes d_1"] \arrow[d, "\cong"] & R/(x) \otimes R^{n_0} \arrow[r, "\mathrm{id}_{R/(x)}\otimes \varepsilon"] \arrow[d, "\cong"] & R/(x) \otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & R^{n_2}/xR^{n_2} \arrow[r, "\tilde{d_2}"] & R^{n_1}/xR^{n_1} \arrow[r, "\tilde{d_1}"] & R^{n_0}/xR^{n_0} \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}"] & M/xM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

所以我们得到了 $R/(x)$-模 M/xM 的一个自由分解 (每个 $R/(x)\otimes_R R^{n_i}\cong (R/(x))^{n_i}$). 以下简记 R^{n_i} 为 F_{n_i}, $k'=(R/(x))/(m/(x))\cong R/m=k$, 那么对 M/xM 的自由分解

$$\cdots \longrightarrow F_2/xF_2 \xrightarrow{\tilde{d_2}} F_1/xF_1 \xrightarrow{\tilde{d_1}} F_0/xF_0 \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} M/xM \longrightarrow 0$$

用张量函子 $k'\otimes_{R/(x)}-$ 作用之, 得到下述复形

$$\cdots \longrightarrow k'\otimes F_2/xF_2 \xrightarrow{\mathrm{id}_{k'}\otimes\tilde{d_2}} k'\otimes F_1/xF_1 \xrightarrow{\mathrm{id}_{k'}\otimes\tilde{d_1}} k'\otimes F_0/xF_0 \longrightarrow 0$$

对每个自然数 i, 定义 $\eta_i: k\otimes_R F_i\to k'\otimes_{R/(x)} F_i/xF_i$ 是由 R-平衡映射 $k\times F_i\to k'\otimes_{R/(x)}F_i/xF_i, (\overline{a},y)\mapsto (\overline{a}+m/(x))\otimes\overline{y}$ 诱导的加群同态, 则 η_i 是同构 (验证它) 且使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & k\otimes F_2 & \xrightarrow{\mathrm{id}_k\otimes d_2} & k\otimes F_1 & \xrightarrow{\mathrm{id}_k\otimes d_1} & k\otimes F_0 & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\eta_2} & & \downarrow{\scriptstyle\eta_1} & & \downarrow{\scriptstyle\eta_0} & & \\
\cdots & \longrightarrow & k'\otimes F_2/xF_2 & \xrightarrow{\mathrm{id}_{k'}\otimes\tilde{d_2}} & k'\otimes F_1/xF_1 & \xrightarrow{\mathrm{id}_{k'}\otimes\tilde{d_1}} & k'\otimes F_0/xF_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

所以 $\eta=\{\eta_i\}_{i\geq 0}$ 给出上面两个复形之间的链同构, 并导出 Tor 群同构:

$$\mathrm{Tor}_i^R(k,M)\cong \mathrm{Tor}_i^{R/(x)}(k',M/xM), \forall i\geq 0.$$

于是根据 [引理1.63], 我们得到

$$\mathrm{p.dim}_R M=\sup\{i\in\mathbb{N}|\mathrm{Tor}_i^R(k,M)\neq 0\}=\sup\{i\in\mathbb{N}|\mathrm{Tor}_i^{R/(x)}(k',M/xM)\neq 0\}=\mathrm{p.dim}_{R/(x)}M/xM.$$

□

现在我们能够给出 [定理1.50](Auslander-Buchsbaum 公式) 的证明, 即对含幺交换 Noether 局部环 R 上投射维数有限的非零有限生成模 M 有 $\mathrm{p.dim}_R M+\mathrm{depth}M=\mathrm{depth}R$.

Proof. 我们通过对 $\mathrm{depth}R$ 作归纳来证明该定理. 由条件知可设 $\mathrm{p.dim}_R M=n\in\mathbb{N}$, 由 [推论1.62] 得 M 的极小投射分解长度是 n, 设

$$0\longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

是 M 的一个极小自由分解满足每个 F_i 是有限生成自由 R-模 (由 [例1.57] 可直接构造).

当 $\mathrm{depth}R=0$ 时, [定理1.23] 表明 R 唯一的极大理想 m 中任何元素都是 R-零因子, 故由 [引理1.16(2)] 得 $m\in\mathrm{Ass}(R)$, 所以存在形如 $0\longrightarrow R/m\longrightarrow R\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 的 R-模正合列, 它导出长正合列

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(k,M)\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(R,M)\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(C,M)\longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(k,M)\longrightarrow\cdots$$

下证 $n=0$, 假设 $n\geq 1$, 这时 [引理1.63] 表明 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(k,M)=0, \mathrm{Tor}_n^R(k,M)\neq 0$, R 是平坦模可知 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(R,M)=\mathrm{Tor}_n^R(R,M)=0$(这里用到了 $n\geq 1$), 于是得到正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(C,M)\longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(k,M)\longrightarrow 0\ ,$$

这说明 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(C,M)\cong \mathrm{Tor}_n^R(k,M)\neq 0$, 这与 M 的投射维数是 n 矛盾. 从而 $n=0$, 特别地, $M\cong F_0$ 是有限生成自由 R-模, 结合 $m\in \mathrm{Ass}(R)$ 得到 m 中元素都是 M-零因子 (验证它), 这说明 $\mathrm{depth}M=0$, 所以当 $\mathrm{depth}R=0$ 时, 有 $\mathrm{p.dim}_R M+\mathrm{depth}M=0+0=0=\mathrm{depth}R$.

现在我们假设结论对深度不超过 $\mathrm{depth}R-1(\mathrm{depth}R\geq 1)$ 的含幺交换 Noether 局部环结论成立. 我们分 $\mathrm{depth}M\geq 1$ 与 $\mathrm{depth}M=0$ 两种情况来证明结论.

Case1. 如果 $\mathrm{depth}M\geq 1$, 那么 $m\notin \mathrm{Ass}(R), m\notin \mathrm{Ass}(M)$, 这一观察表明

$$m\nsubseteq\left(\bigcup_{P\in\mathrm{Ass}(R)}P\right)\bigcup\left(\bigcup_{Q\in\mathrm{Ass}(M)}P\right),$$

依 [引理1.17(6)], 右边的素理想取并是有限并, 于是存在 $x\in M$ 使得 $x\notin P,\forall P\in \mathrm{Ass}(R)\cup\mathrm{Ass}(M)$, 所以由 [引理1.16(1)] 知 x 既是 R-正则元又是 M-正则元, 由 [引理1.33(2)] 得到 $\mathrm{depth}R/(x)=\mathrm{depth}R-1$ 以及 $\mathrm{grade}(R/(x),M/xM)=\mathrm{depth}M-1$. 由 [引理1.64] 知可用归纳假设, 得到 $(\mathrm{depth}M-1)+\mathrm{p.dim}_{R/(x)}M/xM=\mathrm{depth}R-1$, 再利用 [引理1.64] 代入该等式即得结论.

Case2. 如果 $\mathrm{depth}M=0$, 那么 M 不可能是投射模, 否则 M 是自由模, 从而由 $\mathrm{depth}R\geq 1$ 导致 $\mathrm{depth}M\geq 1$, 矛盾. 故 $n\geq 1$. 对模 M, 总存在形如 $0\longrightarrow K\longrightarrow R^t\longrightarrow M\longrightarrow 0$ 的正合列, 于是 [命题1.32] 保证了 $\mathrm{depth}K\geq 1$(利用 $\mathrm{depth}R\geq 1$ 可得 $\mathrm{depth}R^t\geq 1$), 因此对 K 应用 **Case1.** 证明的结果得到 $\mathrm{p.dim}_R K+\mathrm{depth}K=\mathrm{depth}R$. 事实上必有 $\mathrm{depth}K=1=\mathrm{depth}M+1$, 原因是 $\mathrm{depth}R^t\geq 1$ 且由 [命题1.32] 得到 $\mathrm{depth}M\geq\min\{\mathrm{depth}K-1,\mathrm{depth}R^t\}$ 蕴含 $0=\mathrm{depth}M\geq\mathrm{depth}K-1$. 下面我们再说明 $\mathrm{p.dim}_R M=\mathrm{p.dim}_R K+1$, 只要证明该断言便得结果. 通过我们取定的短正合列可导出下面的 Tor 群长正合列, [引理1.63] 表明 $\mathrm{Tor}_n^R(k,M)\neq 0,\mathrm{Tor}_i^R(k,M)=0,\forall i\geq n+1$.

$$\longrightarrow\mathrm{Tor}_n^R(k,R^t)\longrightarrow\mathrm{Tor}_n^R(k,M)\longrightarrow\mathrm{Tor}_{n-1}^R(k,K)\longrightarrow\mathrm{Tor}_{n-1}^R(k,R^t)\longrightarrow\mathrm{Tor}_{n-1}^R(k,M)$$

因 R^t 是平坦模, 故 $\mathrm{Tor}_i^R(k,R^t)=0,\forall i\geq 1$. 从而 $\mathrm{Tor}_i^R(k,K)=0,\forall i\geq n$ 且 $\mathrm{Tor}_{n-1}^R(k,K)\neq 0$, 再由 [引理1.63] 得到 $\mathrm{p.dim}_R K=n-1$. 所以 $\mathrm{p.dim}_R M+\mathrm{depth}M=n=\mathrm{p.dim}_R K+\mathrm{depth}K=\mathrm{depth}R$. □

1.5 Koszul 复形: 基本性质

Koszul 复形由 Jean-Louis Koszul(法国, 1921-2018) 在研究 Lie 代数上同调理论时引入, 后被发现是在同调代数中有用构造. 在正式定义 Koszul 复形前, 我们先复习一下外代数的概念与基本性质. 设 K 是含幺交换环, M 是 K-模, 考虑由 M 决定的张量代数 $T(M)=\oplus_{i=0}^{\infty}M^{(i)}$, 其中 $M^{(0)}=K,M^{(1)}=M,M^{(i)}=M^{\otimes^i}(i\geq 2)$. 记 $j:M\to T(M)$ 是标准嵌入, 回忆张量代数有如下泛性质.

Lemma 1.65 (张量代数泛性质)**.** 对任何 K-代数 A 与 K-模同态 $f:M\to A$, 存在唯一的 K-代数同态 $\tilde f:T(M)\to A$ 使得 $\tilde f j=f$, 即下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & T(M) \arrow[d, dashed, "\tilde f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

也就是说 $(T(M),j)$ 是模 M 到忘却函子 $F:K\text{-Alg}\to K\text{-Mod}$ 的一个泛性.

对张量代数 $T(M)=\oplus_{i=0}^{\infty}M^{(i)}$, 我们可设 $M^{^{(i)}}=M^{\otimes^i}\subseteq T(M),\forall i\geq 1$ 来得到内直和 $T(M)=K1_{T(M)}\oplus M\oplus M^{(2)}\oplus\cdots$. 记 B 是 $T(M)$ 中由集合 $\{x\otimes x|x\in M\}$ 生成的理想, 那么 $B\cap M=\{0\}$, 所以映射 $i_M:M\to T(M)/B,x\mapsto x+B$ 是单 K-模同态. 对任何 $x\in M$, 有 $i_M(x)^2=0$.

Definition 1.66 (外代数)**.** 设 K 是含幺交换环, M 是 K-模, $T(M)$ 是由 M 决定的张量代数, 称 $E(M)=T(M)/B$ 是由 M 决定的**外代数** (exterior algebra), 也被称为 **Grassmann 代数**.

张量代数 $T(M)$ 是分次代数, 有分次 $\{M^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$(以后也把 $K1_{T(M)}$ 记为 $M^{(0)}$). 外代数也是分次代数：对 $T(M)$ 的理想 B, 注意到 $B=\oplus_{i=0}^{\infty}(M^{(i)}\cap B)$, 所以置 $E^{(i)}(M)=(M^{(i)}+B)/B,i\geq 0$, 我们得到 $E(M)=\oplus_{i=0}^{\infty}E^{(i)}(M)$ 且对任何自然数 i,j 有 $E^{(i)}(M)E^{(j)}(M)\subseteq E^{(i+j)}(M)$. 外代数也有下面的泛性质：

Proposition 1.67 (外代数泛性质)**.** 对任何 K-代数 A 与 K-模同态 $f:M\to A$, 如果 $f(x)^2=0,\forall x\in M$, 则存在唯一的 K-代数同态 $\overline{f}:E(M)\to A$ 使得 $\tilde{f}i_M=f$, 即下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "f"'] & E(M) \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Proof. 考虑标准投射 $\pi:T(M)\to E(M)$, 过渡到张量代数的泛性质 [引理1.5] 容易证明结论. □

该泛性质告诉我们 K-模间的同态可以导出外代数间的代数同态：

Corollary 1.68 (模同态导出外代数同态)**.** 设 $\varphi:M\to N$ 是 K-模同态, 记 $i_M:M\to E(M),i_N:N\to E(N)$ 是标准映射, 那么存在唯一的 K-代数同态 $\overline{\varphi}:E(M)\to E(N)$使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_M"'] & N \arrow[d, "i_N"] \\ E(M) \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}"] & E(N) \end{tikzcd}$$

Remark. 不难看出模同态 $\varphi:M\to N$ 所诱导出的代数同态 $\overline{\varphi}:E(M)\to E(N)$ 是分次的.

Proposition 1.69. 设 K 是含幺交换环, L 是交换 K-代数, M 是 K-模, 那么有 L-代数同构

$$E(L\otimes_K M)\cong L\otimes_K E(M).$$

Proof. 设 $i:M\to E(M)$ 是标准映射, 要说明存在 L-代数同构 $E(L\otimes_K M)\cong L\otimes_K E(M)$, 只需说明 L-模同态 $1_L\otimes i:L\otimes_K M\to L\otimes_K E(M)$ 满足对任何 $x\in L\otimes_K M$, 有 $(1_L\otimes i)^2(x)=0$ 且对任何 L-代数 A 以及 L-模同态 $f:L\otimes_K M\to A$ 如果 $f(x)^2=0,\forall x\in L\otimes_K M$, 那么存在唯一的 L-代数同态 $\tilde{f}:L\otimes_K E(M)\to A$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} L\otimes_K M \arrow[rr, "1_L\otimes i"] \arrow[dr, "f"'] & & L\otimes_K E(M) \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

记 $\eta : M \to L \otimes_K M$ 以及 $\xi : E(M) \to L \otimes_K E(M)$ 是标准映射, 它们都是 K-模同态. 我们先说明对任何 $x \in L \otimes_K M$, 有 $[(1_L \otimes i)(x)]^2 = 0$. 设 $x = \sum\limits_{k=1}^{s} l_k \otimes x_k$, 那么

$$
\begin{aligned}
(\sum_{k=1}^{s} l_k \otimes i(x_k))(\sum_{k=1}^{s} l_k \otimes i(x_k)) &= \sum_{k<j} l_k l_j \otimes i(x_k)i(x_j) + \sum_{j<k} l_k l_j \otimes i(x_k)i(x_j) \\
&= \sum_{k<j} l_k l_j \otimes (i(x_k)i(x_j) + i(x_j)i(x_k)) \\
&= \sum_{k<j} l_k l_j \otimes (i(x_k)i(x_j) - i(x_k)i(x_j)) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

下面再说明对任何 L-代数 A 以及 L-模同态 $f : L \otimes_K M \to A$, 满足 $f(x)^2 = 0, \forall x \in L \otimes_K M$, 则存在唯一的 L-代数同态 $\tilde{f} : L \otimes_K E(M) \to A$ 使得 $\tilde{f}(1_L \otimes i) = f$. 对 K-模同态 $f\eta$, 有 $f\eta(x) = 0, \forall x \in M$, 所以存在唯一的 K-代数同态 $\overline{f} : E(M) \to A$ 使得下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\eta"'] & E(M) \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\
L \otimes_K M \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}
$$

这导出 L-代数同态 $1_L \otimes \overline{f} : L \otimes_K E(M) \to L \otimes_K A$, 记 $h : L \otimes_K A \to A$ 是满足 $h(l \otimes a) = la, \forall l \in L, a \in A$ 的加群同态, 易见它是 L-代数同态, 所以我们得到了 L-代数同态 $\tilde{f} = h(1_L \otimes \overline{f}) : L \otimes_K E(M) \to A$. 直接计算容易验证下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\eta"'] & E(M) \arrow[d, "\xi"] \\
L \otimes_K M \arrow[r, "1_L \otimes i"] \arrow[dr, "f"'] & L \otimes_K E(M) \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\
 & A
\end{tikzcd}
$$

易见 $(1_L \otimes i)(L \otimes_K M)$ 是 $E(M)$ 作为 L-代数的一个生成元集, 所以 $\tilde{f}$ 是唯一的. $\square$

Remark. 特别地, 若 M 是含幺交换环 R 上模, R 有乘闭子集 S, 则有 R_S-代数同构 $E_{R_S}(M_S) \cong (E(M))_S$. 所以对含幺交换环上模取外代数和作局部化可交换.

我们也把外代数的分量 $E^{(r)}(M)$ 记作 $\wedge^r M$, 称为 M 的 r **次外幂** (exterior power). r 次外幂中元素 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r + B$ 记作 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ 称为元素 $x_1, ..., x_r$ 的**外积**. 容易验证外积具备下述性质：

Lemma 1.70. 设 $x_1, ..., x_r \in M$, 则对任何置换 $\sigma \in S_r$ 有 $x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(r)} = (\mathrm{sgn}\sigma) x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$.

Remark. 由此不难看到含幺交换环 K 上模 M 决定的外代数 $E(M)$ 作为 K 上正分次代数是分次交换的.

Proposition 1.71 (模同态导出外幂间同态)**.** 设 $\varphi : M \to N$ 是 K-模同态, 记 $i_M : M \to E(M), i_N : N \to E(N)$ 是标准映射, 那么对每个自然数 r, 存在唯一的 K-模同态 $\wedge^r \varphi : \wedge^r M \to \wedge^r N$ 使得 $\wedge^r \varphi(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_r), \forall x_1, ..., x_r \in M$. 并注意到当 φ 是模同构时, φ 所诱导出的同态 $\wedge^r \varphi$ 也是同构.

Proof. 唯一性是明显的, 存在性由 [推论1.68] 立即得到. $\square$

在引入外幂记号后, 外代数可表为 $E(M) = K1_{E(M)} \oplus \wedge^1 M \oplus \wedge^2 M \oplus \cdots$, 这里 $\wedge^1 M = (M+B)/B$ 作为 K-模与 M 同构 (因此在模的层面上可以将它们视作等同有时把 $x+B$ 写为 x, 在集合层面考虑时注意区分), 也记 $K1_{E(M)}$ 为 $\wedge^0 M$ 与 K 作为 K-模同构.

Definition 1.72 (对合同态, 反导子)**.** 对 K-模同态 $M \to E(M), x \mapsto -x+B$, 由 [命题1.67] 知导出唯一的 K-代数同态 $l : E(M) \to E(M)$, 称为 $E(M)$ 上**对合同态**. 对 $a \in E(M)$, 记 $l(a)$ 为 $\overline{a}$. 若 K-模同态 $D : E(M) \to E(M)$ 满足对任给 $a, b \in E(M)$ 有 $D(ab) = D(a)b + \overline{a}D(b)$, 则称 D 是 $E(M)$上的一个**反导子** (anti-derivation). 下面是定义 Koszul 复形所需基本概念.

要定义任何 K-模同态 $f : M \to K$ 决定的 Koszul 复形, 我们需要下面的反导子延拓性质.

Lemma 1.73. 设 $i_M : M \to E(M)$ 是标准嵌入, 如果 K-模同态 $f : M \to E(M)$ 满足 $f(x)i_M(x) = i_M(x)f(x), \forall x \in M$, 那么存在唯一的反导子 $D : E(M) \to E(M)$使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "f"'] & E(M) \arrow[d, dashed, "D"] \\ & E(M) \end{tikzcd}$$

即若模同态 $f : M \to E(M)$ 满足每个 $x \in M$ 在 f 下的像与在 i_M 下的像在 $E(M)$ 中可交换, 则可将 f 延拓至 $E(M)$ 上.

Proof. 仅证 D 的存在性 (唯一性由反导子定义易证). 作矩阵代数 $A = \mathrm{M}_2(E(M))$ 以及 K-模同态

$$h : M \to A, x \mapsto \begin{pmatrix} i_M(x) & 0 \\ f(x) & -i_M(x) \end{pmatrix},$$

则 $h(x)^2 = 0, \forall x \in M$, 所以存在唯一的 K-代数同态 $\overline{h} : E(M) \to E(M)$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "h"'] & E(M) \arrow[d, dashed, "\overline{h}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

对上述代数同态 $\overline{h} : E(M) \to A$, $\overline{h}(x+B) = \begin{pmatrix} x+B & 0 \\ f(x) & -x+B \end{pmatrix}$ 表明对任何 $a \in E(M)$, $\overline{h}(a)$ 形如

$$\overline{h}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ D(a) & \overline{a} \end{pmatrix},$$

这定义出映射 $D : E(M) \to E(M)$, 并且由 $\overline{h}$ 是代数同态可得 D 是反导子 (验证它). $\square$

现在我们取特殊的 K-模同态 $\delta : M \to E(M)$ 满足 $\delta(x)i_M(x) = i_M(x)\delta(x), \forall x \in M$：任给 K-模同态 $f : M \to K$(即 M 上 K-线性函数), 它诱导 K-模同态 $\delta : M \to E(M), x \mapsto f(x)1_{E(M)}$. 于是由 [引理1.73] 得 δ 导出反导子 $D : E(M) \to E(M)$ 使得 $Di_M = \delta$. 那么反导子 D 明显满足 $D(\wedge^1 M) \subseteq K1_{E(M)}$, 归纳地容易证明 $D(\wedge^r M) \subseteq \wedge^{r-1} M, \forall r \geq 1$. 下面我们来搞清楚 D 在每个外幂 $\wedge^r M$ 上是怎么作用的.

Lemma 1.74. 设反导子 $D : E(M) \to E(M)$ 是由 K-模同态 $f : M \to K$ 所诱导的, 则对每个正整数 r有

$$D(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} f(v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v_i} \wedge \cdots \wedge v_r, \forall v_1, ..., v_r \in M.$$

Proof. 当 $r = 1$ 时, 由反导子 D 的定义即得结果. 假设结论对 $r-1(r \geq 2)$ 的情形成立, 则 $D(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = D(v_1)(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r) - v_1 \wedge D(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r) = f(v_1)v_2 \wedge \cdots \wedge v_r - v_1 \wedge D(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$, 对 $D(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$ 应用归纳假设并代入上式整理即得结论. □

Example 1.75 (反导子诱导的 Lie 代数结构)**.** K-模同态 $f : M \to K$ 诱导出 K-模同态 $\tilde{D} : \wedge^2 M \to M$, 满足 $\tilde{D}(x \wedge y) = f(x)y - f(y)x$. 若定义 $[-,-] : M \times M \to M, (x,y) \mapsto f(y)x - f(x)y$, 那么 $[-,-]$ 是 K-双线性映射且可直接验证 $(M, [-,-])$ 是 K-Lie 代数.

这里给一个 [引理1.74] 的应用, 对含幺交换环上有限生成自由模的外代数, 它秩的计算.

Corollary 1.76. 设 V 是含幺交换环 K 上秩为 n 的自由模, 有基 $\{v_1, ..., v_n\}$. 那么 V 决定的外代数 $E(V) = K1_{E(V)} \oplus \wedge^1 V \oplus \cdots \oplus \wedge^n V$ 且每个 $\wedge^r V$ 有基 $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}(1 \leq r \leq n)$, 进而 $\wedge^r V$ 是自由模且有秩 C_n^r. 所以 $\mathrm{rank}_K E(V) = 2^n$.

Proof. 对正整数 $s \geq n+1$, 明显 $\wedge^s V = 0$. 我们对 $1 \leq r \leq n$ 归纳地证明结论, 当 $r = 1$ 时结论明显成立. 假设结论对 $r-1(2 \leq r \leq n)$ 成立, 我们来说明 $X = \{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ 是 $\wedge^r V$ 的基. 易见 $\wedge^r V$ 中元素都可以用 X 中有限个元素 K-线性表出, 要证的只有 X 的 K-线性无关性. 假设存在不全为零的 $c_{i_1 \cdots i_r} \in K$ 使得

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} c_{i_1 \cdots i_r} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} = 0,$$

设 $c_{j_1 \cdots j_r} \neq 0$, 设 $f \in V^*$ 是在 v_{j_1} 上取值 1, 其余 v_i 上取值 0 的线性函数 (这里 f 的定义依赖于 V 是自由模), 考虑 f 诱导的反导子 D, 作用上式可得

$$\sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_r \\ j_1 \notin \{i_1, ..., i_r\}}} c_{i_1 \cdots j_1 \cdots i_r} f(v_{j_1}) v_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{v_{j_1}} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} = 0,$$

其中项 $v_{j_2} \wedge \cdots \wedge v_{j_r}$ 的系数 $c_{j_1 \cdots j_r} \neq 0$, 这与 $r-1$ 情形结论成立的假设矛盾. □

Corollary 1.77. 设 V 是含幺交换环 K 上秩为 n 的自由模, 有基 $\{v_1, ..., v_n\}$. 设 $\psi_n : \wedge^n V \to K$ 是由 $\psi_n(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = 1$ 决定的 K-模同构, 那么对每个正整数 $1 \leq i \leq n-1$, 定义 $\psi_i : \wedge^i V \to (\wedge^{n-i} V)^* = \mathrm{Hom}_K(\wedge^{n-i} V, K), \alpha \mapsto \psi_i(\alpha)$ 为由 $\psi_i(\alpha) : \wedge^{n-i} V \to K, \beta \mapsto \psi_n(\alpha \wedge \beta)$ 决定的 K-模同态, 那么每个 ψ_i 是同构. 特别地, 我们得到 K-模同构 $\wedge^i V \cong (\wedge^{n-i} V)^*, \forall 0 \leq i \leq n$.

Proof. 根据 [引理1.76], 我们已经知道每个外幂 $\wedge^i V$ 有基 $\{v_{s_1} \wedge \cdots \wedge v_{s_i} | 1 \leq s_1 < \cdots < s_i \leq n\}$. 对偶模 $(\wedge^{n-i} V)^*$ 也是自由 K-模, 秩为 $n-i$, 它的基可以用 $\wedge^{n-i} V$ 的基构造对偶基给出. 为说明每个 ψ_i 是同构, 我们说明 ψ_i 将外幂的标准基 $\{v_{s_1} \wedge \cdots \wedge v_{s_i} | 1 \leq s_1 < \cdots < s_i \leq n\}$ 映射到 $(\wedge^{n-i} V)^*$ 的某个基. 任取正整数序列 $1 \leq s_1 < \cdots < s_i \leq n$, 设 $\{1, 2, ..., n\} - \{s_1, ..., s_i\}$ 中 $n-i$ 个数从小到大排是 $t_1, ..., t_{n-i}$, 记 $\sigma_{(s_1, ..., s_n)}$ 是把 1 到 i 分别映为 s_1 到 s_i, $i+1$ 到 n 分别映为 $t_1, ..., t_{n-i}$ 的置换, 即有 $\sigma_{(s_1, ..., s_n)} \in S_n$. 那么 $\psi_i(v_{s_1} \wedge \cdots \wedge v_{s_i})$ 作为 $\wedge^{n-i} V$ 上的 K-线性函数, 在基 $\{v_{q_1} \wedge \cdots \wedge v_{q_{n-i}} | 1 \leq q_1 < \cdots < q_{n-i} \leq n\}$ 上的作用如下：如果正整数序

列 $q_1 < \cdots < q_{n-i}$ 中有 $s_1, ..., s_i$ 中某个数, 则 $\psi_i(v_{s_1} \wedge \cdots \wedge v_{s_i})$ 作用 $v_{q_1} \wedge \cdots \wedge v_{q_{n-i}}$ 得到零. 否则, 即正整数序列 $q_1, ..., q_{n-i}$ 恰好对应 $t_1, ..., t_{n-i}$, 这时 $\psi_i(v_{s_1} \wedge \cdots \wedge v_{s_i})$ 作用 $v_{q_1} \wedge \cdots \wedge v_{q_{n-i}}$ 得到 $\mathrm{sgn}\sigma_{(s_1,...,s_n)} 1_K$(虽然表达式看起来复杂, 但总是 1_K 与 -1_K 中的某个). 由此易验证 $\{\psi_i(v_{s_1} \wedge \cdots \wedge v_{s_i}) | 1 \le s_1 < \cdots < s_i \le n\}$ 是 $(\wedge^{n-i} V)^*$ 的一个基. □

类似于自由情形, 当 V 是有限生成 K-模时, 外幂 $\wedge^r V$ 仍为有限生成投射 K-模.

Proposition 1.78. 设 V 是含幺交换环 K 上有限生成投射模, 那么对任何自然数 r, $\wedge^r V$ 也是有限生成投射 K-模. 并且有 K-模同构 $\wedge^r \mathrm{Hom}_K(V, K) \cong \mathrm{Hom}_K(\wedge^r V, K)$. 即对有限生成投射模取对偶和作外幂可交换.

Proof. 命 $\alpha : \wedge^r \mathrm{Hom}_K(V, K) \to \mathrm{Hom}_K(\wedge^r V, K)$ 满足对任何 $f_1, ..., f_r \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ 有

$$\alpha(f_1 \wedge \cdots \wedge f_r)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) f_1(v_{\sigma(1)}) f_2(v_{\sigma(2)}) \cdots f_r(v_{\sigma(r)}).$$

因为 V 是有限生成投射模, 故有对偶基 $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ 与 $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subseteq V^*$, 于是可直接计算验证当 $r > n$ 时, $\wedge^r V = 0$; 当 $0 \le r \le n$ 时, $\{x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r} | 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n\}$ 和 $\{\alpha(x_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_r}^*) | 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n\}$ 给出 $\wedge^r V$ 的对偶基. 所以 $\wedge^r V$ 是有限生成投射模. 命

$$\beta : \mathrm{Hom}_K(\wedge^r V, K) \to \wedge^r \mathrm{Hom}_K(V, K), f \mapsto \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} f(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r}) x_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_r}^*,$$

可以直接计算验证 α 与 β 互为逆映射. □

Remark. 特别地, 对域上有限维线性空间 V, 有线性同构 $\wedge^r V^* \cong (\wedge^r V)^*$.

下面我们来说明对任给 K-模同态 $f : M \to K$, 它能诱导出下述形式的复形:

$$\cdots \longrightarrow \wedge^3 M \longrightarrow \wedge^2 M \longrightarrow M \xrightarrow{f} K \longrightarrow 0$$

也就是之后要定义的 Koszul 复形. 模同态 $f : M \to K$ 所诱导的反导子 $D : E(M) \to E(M)$ 满足 $D(\wedge^r M) \subseteq \wedge^{r-1} M, \forall r \ge 1$(在 [引理1.74] 中我们看到了 D 在每个分次上是如何作用的). 所以我们可以通过 D 在每个外幂 $\wedge^r M$ 上的作用来给出复形的边缘映射:

$$d_r : \wedge^r M \to \wedge^{r-1} M, a \mapsto D(a), \forall r \ge 3.$$

因为 $\wedge^1 M \cong M$ 即便同构作为模可视作等同, 集合层面还是有区别, 这里额外定义 $d_2 : \wedge^2 M \to M, a \mapsto \xi D(a)$, 这里 $\xi : \wedge^1 M \to M, x + B \mapsto x$ 是 K-模同构. 那么我们得到了模同态序列:

$$\cdots \longrightarrow \wedge^3 M \xrightarrow{d_3} \wedge^2 M \xrightarrow{d_2} M \xrightarrow{f} K \longrightarrow 0.$$

因为 [引理1.74] 让直接处理 d_i 的计算成为了可能 (例如对任何 $x_1, x_2 \in M$ 有 $d_2(x_1 \wedge x_2) = f(x_1)x_2 - f(x_1)x_2$ 来得到 $fd_2 = 0$), 所以我们可以利用 [引理1.74] 来直接计算验证 $d_i d_{i+1} = 0, \forall i \ge 2$. 也可以借助反导子的定义, 规避完全硬算来证明这一事实:

Lemma 1.79. 对上述定义的 K-模同态 $d_r : \wedge^r M \to \wedge^{r-1} M$, 有 $d_r d_{r+1} = 0, \forall r \ge 2$.

Proof. 证明分两步, 先说明对 K-模同态 $f: M \to K$ 所诱导的反导子 D 满足 $Dl + lD = 0$, 这里 l 是对合同态 (回忆 [定义1.72]), 再利用该关系对 $r \geq 2$ 归纳地证明结论.

Step1. 先考察反导子在外代数单位元上的作用, 直接计算 $D(1_{E(M)}) = D(1_{E(M)}) + \overline{1_{E(M)}}D(1_{E(M)}) = 2D(1_{E(M)})$. 这一观察说明 $D(\wedge^0 M) = D(K1_{E(M)}) = 0$(也反映了 $D^2(a) = 0, \forall a \in \wedge^1 M$). 对 $x \in M$, 有 $D(x + B) = f(x)1_{E(M)} = -D(-x + B)$, 于是 $\overline{D(a)} = -D(\overline{a}), \forall a \in \wedge^1 M$. 归纳地可以证明 $\overline{D(a)} = -D(\overline{a}), \forall a \in \wedge^r M, \forall r \geq 1$(验证它), 所以 $\overline{D(a)} = -D(\overline{a}), \forall a \in E(M)$. 这也就是 $lD + Dl = 0$.

Step2. 先处理 $r = 2$ 的情形, 直接计算得到 $D^2(x \wedge y) = 0, \forall x, y \in M$, 从而 $D^2(\wedge^2 M) = 0$. 要证 $D^2(\wedge^3 M) = 0$, 只要证 $D^2(x \wedge y \wedge z) = 0, \forall x, y, z \in M$. 为此我们说明 $D^2(ab) = 0, \forall a \in \wedge^2 M, b \in \wedge^1 M$. $D^2(ab) = D(D(a)b + l(a)D(b)) = lD(a)D(b) + Dl(a)D(b) = [lD(a) + Dl(a)]D(b) = 0$. 假设结论对 $r-1(r \geq 3)$ 的情形成立, 要证明 r 的情形, 与 $r = 2$ 类似只需要验证 $D^2(ab) = 0, \forall a \in \wedge^{r-1} M, \wedge^1 M$ 就足够了, 验证过程与 $r = 2$ 的情形完全相同, 留给读者练习. □

有了上述引理, 现在可以正式地给出 Koszul 复形的定义.

Definition 1.80 (线性函数决定的 Koszul 复形)**.** 设 K 是含幺交换环, M 是 K-模, $f: M \to K$ 是模同态, 将前面的讨论所定义出的 K-模复形

$$\cdots \longrightarrow \wedge^3 M \xrightarrow{d_3} \wedge^2 M \xrightarrow{d_2} M \xrightarrow{f} K \longrightarrow 0$$

称为由 f 决定的 **Koszul 复形**, 将该复形记作 $\mathcal{K}(f)$(有时为了不引起混淆将它的边缘映射记为 d_f). 如果还有 K-模 N, 张量函子 $- \otimes_K N$ 作用 $\mathcal{K}(f)$ 可得复形 $\mathcal{K}(f) \otimes_K N$:

$$\cdots \longrightarrow (\wedge^3 M) \otimes_K N \xrightarrow{d_3} (\wedge^2 M) \otimes_K N \xrightarrow{d_2} M \otimes_K N \xrightarrow{f} K \otimes_K N \longrightarrow 0$$

称复形 $\mathcal{K}(f) \otimes_K N$ 是**由 f 决定系数在 N 中的 Koszul 复形** (取 $N = K$ 就退化到 $\mathcal{K}(f)$). 我们把复形 $\mathcal{K}(f) \otimes_K N$ 的边缘映射简记为 $d_{f,N}$(具体地, $(d_{f,M})_n = (d_f)_n \otimes \mathrm{id}_N$).

我们引入一些 Koszul 复形闭链群、边缘链群以及同调群的记号与术语.

Definition 1.81 (Koszul 同调, 上同调)**.** 设 K 是含幺交换环, M, N 是 K-模, $f: M \to K$ 是模同态, 记 $\mathcal{K}(f)$ 的 n 次闭链群为 $Z_n(f)$, n 次边缘链群 $B_n(f)$, n 次同调为 $H_n(f)$, 称为 **f 的 n 次 Koszul 同调**. 记由 f 决定系数在 N 中的 Koszul 复形 $\mathcal{K}(f) \otimes_K N$ 的 n 次闭链群是 $Z_n(f, N)$, n 次边缘链群是 $B_n(f, N)$, n 次同调是 $H_n(f, N)$, 称为 **f 系数在 N 中的 Koszul 同调**. 用逆变 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_K(-, K)$ 作用 Koszul 复形 $\mathcal{K}(f)$ 得到上链复形 $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{K}(f), K)$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K, K) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_K(M, K) \xrightarrow{(d_f)_2^*} \mathrm{Hom}_K(\wedge^2 M, K) \xrightarrow{(d_f)_3^*} \cdots$$

称这个上链复形的 n 次上同调为 **Koszul 上同调**, 记作 $H^n(f)$. 若用逆变 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_K(-, N)$ 作用 Koszul 复形 $\mathcal{K}(f)$ 也可以得到上链复形 $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{K}(f), N)$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_K(M, N) \xrightarrow{(d_f)_2^*} \mathrm{Hom}_K(\wedge^2 M, N) \xrightarrow{(d_f)_3^*} \cdots$$

称该上链复形的 n 次上同调为**系数在 N 中的 Koszul 上同调**, 记作 $H^n(f, N)$.

如果 V, N 是秩为 n 的 K-自由模, 有基 $\{e_1, ..., e_n\}$, 那么每个 K-模同态 $f : V \to K$ 被 $x_i = f(e_i), i = 1, ..., n$ 决定, 进而每个 K 中序列 $x_1, ..., x_n$ 可诱导一 Koszul 复形.

Definition 1.82 (序列的 Koszul 复形, 同调及上同调)**.** 设 $x_1, ..., x_n$ 是 K 中元素序列, V 是秩为 n 的 K-自由模, 有基 $\{e_1, ..., e_n\}$, 那么存在唯一的 K-模同态 $f : V \to K$ 满足 $x_i = f(e_i), \forall 1 \le i \le n$, 称 f 决定的 Koszul 复形 $\mathcal{K}(f)$ 为**由序列** $x_1, ..., x_n$ **决定的 Koszul 复形**, 简记为 $\mathcal{K}(x_1, x_2, ..., x_n)$. 把由上述序列决定的 Koszul 复形的 i 次同调记为 $H_i(x_1, x_2, ..., x_n)$. 类似可定义系数在 K-模 N 中的 Koszul 复形 $\mathcal{K}(x_1, x_2, ..., x_n; N)$, 其 i 次同调记作 $H_i(x_1, x_2, ..., x_n; N)$. 将逆变 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_K(-, K)$ 作用 Koszul 复形作用 Koszul 复形 $\mathcal{K}(x_1, x_2, ..., x_n)$ 得到的上链复形 $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{K}(x_1, x_2, ..., x_n), K)$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K, K) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_K(V, K) \xrightarrow{(d_f)_2^*} \mathrm{Hom}_K(\wedge^2 V, K) \xrightarrow{(d_f)_3^*} \cdots$$

的 i 次上同调记为 $H^i(x_1, x_2, ..., x_n)$, 完全类似地我们再引入系数在 N 中的 Koszul 上同调记号 $H^i(x_1, x_2, ..., x_n; N)$.

虽然定义序列的 Koszul 复形虽然选取了具体的自由模, 但在复形同构意义下并不依赖于 V 的选取. 如果还有秩为 n 的 K-自由模 V', 设有基 $\{e_1', ..., e_n'\}$ 我们有 K-模同构 $\xi : V \to V'$ 使得 $\xi(e_i) = e_i', 1 \le i \le n$. 并取定 K-模同态 $f' : V' \to K$ 使得 $x_i = f'(e_i'), \forall 1 \le i \le n$, 那么下图交换并且 [推论1.68] 导出了每个外幂 $\wedge^i V$ 到 $\wedge^i V'$ 的 K-模同态 $\eta_i : \wedge^i V \to \wedge^i V', i \ge 2$, 事实上 η_i 是模同构 (利用 [推论1.76] 验证它把外幂 $\wedge^i V$ 的基映射到 $\wedge^i V'$ 的基来总结出它确实个同构).

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad f \quad} & K \\ {\scriptstyle \xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_K} \\ V' & \xrightarrow{\quad f' \quad} & K \end{array}$$

利用 [引理1.74] 不难看出 η_i 与 ξ 给出 $\mathcal{K}(f)$ 到 $\mathcal{K}(f')$ 的链同构, 于是得到复形同构 $\mathcal{K}(f) \cong \mathcal{K}(f')$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \wedge^3 V & \xrightarrow{(d_f)_3} & \wedge^2 V & \xrightarrow{(d_f)_2} & V & \xrightarrow{f} & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \eta_3} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_2} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_K} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \wedge^3 V' & \xrightarrow{(d_{f'})_3} & \wedge^2 V' & \xrightarrow{(d_{f'})_2} & V' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

根据序列 Koszul 复形的定义我们马上看到下述事实.

Lemma 1.83 (Koszul 复形的张量积)**.** 设 $x_1, ..., x_n$是 K 中元素序列, 那么有复形同构

$$\mathcal{K}(x_1, ..., x_n) \cong \mathcal{K}(x_1) \otimes_K \cdots \otimes_K \mathcal{K}(x_n).$$

那么也有 $\mathcal{K}(x_1, ..., x_n) \cong \mathcal{K}(x_1, ..., x_{n-1}) \otimes_K \mathcal{K}(x_n)$. 特别地, 任给 K-模 M, 有复形同构

$$\mathcal{K}(x_1, ..., x_{n-1}; M) \otimes_K \mathcal{K}(x_n) \cong \mathcal{K}(x_1, ..., x_n; M).$$

Proof. 只需要证 $n = 2$ 的情形, 再归纳地得到结论. 考虑 x_1 以及 x_2 决定的 Koszul 复形:

$$0 \longrightarrow \wedge^1 K \xrightarrow{f_1} K \longrightarrow 0\ ,\ \ 0 \longrightarrow \wedge^1 K \xrightarrow{f_2} K \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $f_i : \wedge^1 K \to K$ 满足 $f_i(1_K) = x_i, i \in \{1, 2\}$. 它们的张量积 $\mathcal{K}(x_1) \otimes_K \mathcal{K}(x_2)$ 为

$$0 \longrightarrow \wedge^1 K \otimes_K \wedge^1 K \xrightarrow{d_2} (\wedge^1 K \otimes_K K) \oplus (K \otimes_K \wedge^1 K) \xrightarrow{d_1} K \otimes_K K \longrightarrow 0\ .$$

下面说明 $\mathcal{K}(x_1,x_2)$ 到上述复形有链同构. 记 $e_1=(1_K,0),e_2=(0,1_K)\in K^2$. $f:\wedge^1K^2\to K$ 是由 $f(e_i)=x_i,i=1,2$ 决定的 K-模同态, D 是由 f 决定的反导子. 置 $\alpha_0:K\to K\otimes_K K$ 是由 $\alpha_0(1_K)=1_K\otimes 1_K$ 决定的 K-模同构, $\alpha_1:\wedge^1K^2\to(\wedge^1K\otimes_K K)\oplus(K\otimes_K\wedge^1K)$ 是由 $\alpha_1(e_1)=(1_K\otimes 1_K,0),\alpha_1(e_2)=(0,1_K\otimes 1_K)$ 决定的 K-模同构, $\alpha_2:\wedge^2K^2\to\wedge^1K\otimes_K\wedge^1K$ 是由 $\alpha_2(e_1\wedge e_2)=1_K\otimes 1_K$ 决定的 K-模同构, 可直接验证下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \wedge^2K^2 \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\alpha_2"] & \wedge^1K^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_1"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \wedge^1K\otimes_K\wedge^1K \arrow[r, "d_2"] & (\wedge^1K\otimes_K K)\oplus(K\otimes_K\wedge^1K) \arrow[r, "d_1"] & K\otimes_K K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

所以置 $\alpha=\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}},\alpha_i=0,\forall i\in\mathbb{Z}-\{0,1,2\}$ 可给出两复形间的链同构. $\square$

下面的引理主要是为了证明 [推论1.85], 它将用于证明 [定理1.92].

Lemma 1.84. 设 K 是含幺交换环, M,N 是 K-模, $f:M\to K$ 是模同态, 那么对每个 $a\in\mathrm{Im}f$, 左乘变换 a_l 决定的链映射 $a_l:\mathcal{K}(f)\to\mathcal{K}(f)$ 是零伦的. a_l 也给出 f 系数在 N 中 Koszul 复形上的自链映射, 也是零伦的. 特别地, 上述链映射可导出同调上的自同态表明 Koszul 同调 $H_\bullet(f)$ 与带系数 Koszul 同调 $H_\bullet(f,N)$ 都被 a 零化.

Proof. 只要证 $a_l:\mathcal{K}(f)\to\mathcal{K}(f)$ 是零伦的即可, 因为带系数的 Koszul 复形 $\mathcal{K}(f,N)$ 上 a 决定的左乘变换对应链映射 $a_l\otimes\mathrm{id}_N$, 一旦得到 a_l 零伦, 自然也有 $a_l\otimes\mathrm{id}_N$ 零伦. 下面构造链映射 a_l 与零链映射间的链同伦. 设 $x\in M$ 使得 $a=f(x)$, 那么 x 可决定外幂 $\wedge^iM$ 到 $\wedge^{i+1}M$ 上的左乘变换 $\lambda_i:\wedge^iM\to\wedge^{i+1}M,\alpha\mapsto x\wedge\alpha$, 这里 $i\geq 2$, 并定义 $\lambda_1:M\to\wedge^2M,\lambda_0:K\to M,c\mapsto cx$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \wedge^3M \arrow[r, "(d_f)_3"] \arrow[d, "(a_l)_3"] \arrow[dl, dashed] & \wedge^2M \arrow[r, "(d_f)_2"] \arrow[d, "(a_l)_2"] \arrow[dl, dashed, "\lambda_2"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(a_l)_1"] \arrow[dl, dashed, "\lambda_1"] & K \arrow[r] \arrow[d, "(a_l)_0"] \arrow[dl, dashed, "\lambda_0"] & 0. \\
\cdots \arrow[r] & \wedge^3M \arrow[r, "(d_f)_3"] & \wedge^2M \arrow[r, "(d_f)_2"] & M \arrow[r, "f"] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

利用 [引理1.74] 易算得 $\lambda=\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 给出 a_l 与 0 之间的链同伦. $\square$

这一观察表明由序列决定的 Koszul 复形, 序列中每项可零化 Koszul 同调.

Corollary 1.85. 设 $x_1,...,x_n$ 是 K 中元素序列, N 是 K-模, $\mathcal{K}(x_1,...,x_n)$ 是该序列决定的 Koszul 复形, 那么每个 x_j 可零化 Koszul 同调 $H_\bullet(x_1,...,x_n)$ 以及带系数 Koszul 同调 $H_\bullet(x_1,...,x_n;N)$.

我们知道 K-模复形短正合列可导出同调群短正合列, 下面的结果说 K-模短正合列可导出由序列决定的带系数 Koszul 复形短正合列. 进而导出 Koszul 同调长正合列.

Proposition 1.86 (模短正合列导出 Koszul 复形短正合列)**.** 设 K 是含幺交换环, $x_1,...,x_n$ 是 K 中元素序列, 并给定 K-模短正合列 $0\longrightarrow N'\xrightarrow{\alpha}N\xrightarrow{\beta}N''\longrightarrow 0$, 那么该 K-模短正合列导出 Koszul 复形短正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{K}(x_1,...,x_n;N')\longrightarrow\mathcal{K}(x_1,...,x_n;N)\longrightarrow\mathcal{K}(x_1,...,x_n;N'')\longrightarrow 0\ .$$

特别地, 上述复形短正合列导出 Koszul 同调长正合列:

$$\cdots\longrightarrow H_{i+1}(x_1,...,x_n;N'')\longrightarrow H_i(x_1,...,x_n;N')\longrightarrow H_i(x_1,...,x_n;N)\longrightarrow H_i(x_1,...,x_n;N'')\longrightarrow\cdots$$

Proof. 只需要说明 K-模短正合列导出 Koszul 复形短正合列, 设 V 是秩为 n 的自由 K-模, $f: V \to K$ 是定义 $\mathcal{K}(x_1, ..., x_n)$ 的同态. Koszul 复形间的链映射由下述交换图直接给出.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & (\wedge^3 V) \otimes N' \arrow[r, "(d_f)_3 \otimes \mathrm{id}_{N'}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\wedge^3 V} \otimes \alpha"] & (\wedge^2 V) \otimes N' \arrow[r, "(d_f)_2 \otimes \mathrm{id}_{N'}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\wedge^2 V} \otimes \alpha"] & V \otimes N' \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}_{N'}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_V \otimes \alpha"] & K \otimes N' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_K \otimes \alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & (\wedge^3 V) \otimes N \arrow[r, "(d_f)_3 \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\wedge^3 V} \otimes \beta"] & (\wedge^2 V) \otimes N \arrow[r, "(d_f)_2 \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\wedge^2 V} \otimes \beta"] & V \otimes N \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "\mathrm{id}_V \otimes \beta"] & K \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_K \otimes \beta"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & (\wedge^3 V) \otimes N'' \arrow[r, "(d_f)_3 \otimes \mathrm{id}_{N''}"] & (\wedge^2 V) \otimes N'' \arrow[r, "(d_f)_2 \otimes \mathrm{id}_{N''}"] & V \otimes N'' \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}_{N''}"] & K \otimes N'' \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

上图给出的链映射确实给出 Koszul 复形的短正合列, 因为外代数 $E(V)$ 的每个分次 $\wedge^i V$ 是自由 K-模, 这保证了张量函子 $\wedge^i V \otimes_K -$ 是正合函子. □

在 [推论1.77] 中我们看到对一个有限生成自由 K-模 V, 每个外幂 $\wedge^i V (0 \leq i \leq n)$ 与 $\wedge^{n-i} V$ 是对偶的, 我们利用它们的关系来说明 Koszul 复形的自对偶性.

Proposition 1.87 (Koszul 复形自对偶)**.** 设 $x_1, ..., x_n$ 是 K 中元素序列, N 是 K-模, $\mathcal{K}(x_1, ..., x_n)$是该序列决定的 Koszul 复形, 则 $\mathcal{K}(x_1, ..., x_n)$ 与 $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{K}(x_1, x_2, ..., x_n), K)$ 作为复形同构.

Proof. 我们来构造 $\mathcal{K}(x_1, ..., x_n)$ 与上链复形 $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{K}(x_1, x_2, ..., x_n), K)$ 之间的链同构. 根据 [推论1.77](以下沿用当时的记号), 我们得到 K-模同构 $\psi_i : \wedge^i V \to (\wedge^{n-i} V)^*, i = 1, ..., n-1$, 额外定义 $\psi_0 : K \to (\wedge^n V)^*$ 满足 $\psi_0(1)$ 作用 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ 得到 1, 那么 ψ_0 也是 K-模同构. 记标准 K-模同构 $K \cong \mathrm{End}_K(K)$ 为 ζ. $\xi : \wedge^1 V \to V, v + B \mapsto v$ 是标准 K-模同构. 考虑下图 (没有说是交换图! 之后会把它修正为交换图), 那么每个竖直方向的同态均为 K-模同构.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \wedge^n V \arrow[r, "(d_f)_n"] \arrow[d, "\zeta\psi_n"'] & \wedge^{n-1} V \arrow[r, "(d_f)_{n-1}"] \arrow[d, "(\xi^*)^{-1}\psi_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r, "(d_f)_2"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_1\xi^{-1}"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "\psi_0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_K(K, K) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_K(V, K) \arrow[r, "(d_f)_2^*"] & \cdots \arrow[r, "(d_f)_{n-1}^*"] & \mathrm{Hom}_K(\wedge^{n-1} V, K) \arrow[r, "(d_f)_n^*"] & \mathrm{Hom}_K(\wedge^n V, K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

为记号便利, 对上图从右到左依次记竖直方向上的 K-模同构为 $w_0, w_1, ..., w_n$(例如 $w_0 = \psi_0, w_n = \xi\psi_n$), 那么上图可以改写为下图. 直接地计算表明 $w_0 f = (d_f)_n^* w_1, w_{n-1}(d_f)_n = (-1)^{n-1} f^* w_n$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \wedge^n V \arrow[r, "(d_f)_n"] \arrow[d, "w_n"'] & \wedge^{n-1} V \arrow[r, "(d_f)_{n-1}"] \arrow[d, "w_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r, "(d_f)_2"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w_1"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "w_0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_K(K, K) \arrow[r, "f^*"] & V^* \arrow[r, "(d_f)_2^*"] & \cdots \arrow[r, "(d_f)_{n-1}^*"] & (\wedge^{n-1} V)^* \arrow[r, "(d_f)_n^*"] & (\wedge^n V)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

对正整数 $2 \leq i \leq n-1$, 有 $w_{i-1}(d_f)_i = (-1)^{i-1}(d_f)_{n+1-i}^* w_i$(计算验证它). 所以我们适当修改上图中同构 w_i 的正负号就能得到复形 $\mathcal{K}(x_1, ..., x_n)$ 与上链复形 $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{K}(x_1, x_2, ..., x_n), K)$ 的链同构. □

现在我们使用 [命题1.87] 来揭示 Koszul 同调与 Koszul 上同调之间的联系.

Corollary 1.88 (Koszul 同调与上同调)**.** 设 $x_1, ..., x_n$ 是含幺交换环 K 中元素序列, M 是 K-模, $\mathcal{K}(x_1, ..., x_n)$ 是该序列决定的 Koszul 复形, 则对任给自然数 $0 \leq i \leq n$, 有 K-模同构

$$H_i(x_1, ..., x_n; M) \cong H^{n-i}(x_1, ..., x_n; M).$$

Proof. 左边是复形 $\mathcal{K}(x_1,...,x_n)\otimes_K M$ 的 i 次同调, 右边是复形 $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{K}(x_1,...,x_n),M)$ 的 $n-i$ 次上同调, [命题1.87] 表明 $\mathcal{K}(x_1,...,x_n)\otimes_K M$ 与 $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{K}(x_1,x_2,...,x_n),K)\otimes_K M$ 作为复形同构. 若能说明函子 $\mathrm{Hom}_K(-,K)\otimes_K M$ 与 $\mathrm{Hom}_K(-,M)$ 作为有限生成自由 K-模范畴 (这里视作 K-Mod 的全子范畴) 到 K-模范畴的自然同构, 结论明显成立. 而这就是下面 [引理1.89] 所阐述的事实. □

Lemma 1.89. 设 M 是含幺环 R 上的左 R-模. 对每个 $N\in R$-Mod, 记 $\eta_N:\mathrm{Hom}_R(N,R)\otimes_R M\to\mathrm{Hom}_R(N,M)$ 是由下述 R-平衡映射导出的加群同态:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_R(N,R)\times M\to\mathrm{Hom}_R(N,M)\\&\qquad\qquad(f,x)\mapsto(\eta_N(f):N\to M,n\mapsto f(n)x)\end{aligned}$$

则 η 给出函子 $\mathrm{Hom}_R(-,R)\otimes_R M$ 到 $\mathrm{Hom}_R(-,M)$(都视作 R-Mod 到 **Ab** 的逆变函子) 的自然变换. 当 N 是有限生成投射左 R-模时, η_N是同构.

Proof. 条件给出的 η 的自然性验证是容易的, 这里仅验证当 N 是有限生成投射左 R-模时, η_N 是同构. 由对偶基引理, 存在 $\{x_1,...,x_n\}\subseteq N,\{x_1^*,...,x_n^*\}\subseteq N^*$ 使得每个 $x\in N$ 满足 $x=\sum\limits_{i=1}^n x_i^*(x)x_i$. 定义 $\zeta_N:\mathrm{Hom}_R(N,M)\to\mathrm{Hom}_R(N,R)\otimes_R M, g\mapsto\sum\limits_{i=1}^n x_i^*\otimes g(x_i)$, 可直接验证 ζ_N 与 η_N 互为逆映射. □

在这节的最后, 我们说明对 R-模与 R 中序列 $a_1,...,a_n$, 当序列前 t 项 $a_1,...,a_t$ 构成弱 M-正则序列时, Koszul 同调 $H_\bullet(a_1,...,a_n;M)\cong H_\bullet(a_{t+1},...,a_n;M/(a_1,...,a_t)M)$(见 [推论1.91](2)). [定理1.93] 的证明不需要用到下面讨论的内容.

Lemma 1.90. 设 R是含幺交换环, (C,d) 是 R-模复形, $\mathcal{K}(a)$ 是由 $a\in R$ 决定的 Koszul 复形.
(1) 记 $(C(-1),d(-1))$ 是由 $C(-1)_i=C_{i-1},d(-1)_i=d_{i-1},\forall i\in\mathbb{Z}$ 定义的 R-模复形 (这里的微分 $d(-1)_i$ 与 d_{i-1} 是相等不是差个负号! 与复形范畴上标准的平移函子 $[-1]$ 作区分), 则有下述形式的 R-模复形短正合列

$$0\longrightarrow C\longrightarrow C\otimes_R\mathcal{K}(a)\longrightarrow C(-1)\longrightarrow 0\ .$$

(2) 由 (1) 中复形短正合列所导出的同调长正合列形如

$$\cdots\longrightarrow H_i(C)\longrightarrow H_i(C\otimes_R\mathcal{K}(a))\longrightarrow H_{i-1}(C)\xrightarrow{(-1)^{i-1}a}H_{i-1}(C)\longrightarrow\cdots$$

(3) 如果对任何 $i\in\mathbb{Z}$, a 是 C_i-正则元, 那么有 R-模同构 $H_i(C\otimes_R\mathcal{K}(a))\cong H_i(C/aC),\forall i\in\mathbb{Z}$.

Proof. (1) 考察复形 $C\otimes_R\mathcal{K}(a)$ 的 i 次部分:

$$(C\otimes_R\mathcal{K}(a))_i=(C_i\otimes_R R)\oplus(C_{i-1}\otimes_R\wedge^1 R).$$

易见 $(C\otimes_R\mathcal{K}(a))_i$ 与 $C_i\oplus C_{i-1}$ 之间有自然的同构 $\eta_i:(C\otimes_R\mathcal{K}(a))_i\to C_i\oplus C_{i-1}$ 使得 η_i 作用 $(x_i\otimes 1,0)$ 得到 $(x_i,0)$, η_i 作用 $(0,x_{i-1}\otimes 1)$ 得到 $(0,x_{i-1})$. 那么通过该同构, 我们可以构造一个和 $C\otimes_R\mathcal{K}(a)$ 链同构的复形, 使得该复形的 i 次部分是 $C_i\oplus C_{i-1}$. 具体地, 如下定义微分 δ:

$$\delta_i:C_i\oplus C_{i-1}\to C_{i-1}\oplus C_{i-2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d_i & (-1)^{i-1}a \\ 0 & d_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

那么 $\{C_i \oplus C_{i-1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 与 $\{\delta_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 给出复形 $C \oplus C(-1)$, 并且 $\eta = \{\eta_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 给出复形 $C \otimes_R \mathcal{K}(a)$ 到 $C \oplus C(-1)$ 的链同构. 我们有下述自然的链映射序列 (可直接验证确实是链映射序列):

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} C \oplus C(-1) \xrightarrow{(0,1)} C(-1) \longrightarrow 0,$$

因此我们得到形如 $0 \longrightarrow C \longrightarrow C \otimes_R \mathcal{K}(a) \longrightarrow C(-1) \longrightarrow 0$ 的复形短正合列.

(2) 由 (1) 中复形 $0 \longrightarrow C \longrightarrow C \oplus C(-1) \longrightarrow C(-1) \longrightarrow 0$ 导出同调的长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_i(C) \longrightarrow H_i(C \oplus C(-1)) \longrightarrow H_i(C(-1)) \xrightarrow{\Delta_i} H_{i-1}(C) \longrightarrow \cdots.$$

下面说明连接同态 $\Delta_i : H_i(C(-1)) = H_{i-1}(C) \to H_{i-1}(C)$ 由 $(-1)^{i-1}a$ 的左乘变换给出.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "d_i"'] & C_i \oplus C_{i-1} \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "\eta_i"] & C_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_{i-1}"] & 0, \\
0 \arrow[r] & C_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}"] & C_{i-1} \oplus C_{i-2} \arrow[r, "\beta_{i-1}"] & C_{i-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据连接同态的定义, 我们只要说明 $\alpha_{i-1}((-1)^{i-1}ax) = \eta_i(x, 0), \forall x \in Z_i(C(-1)) = Z_{i-1}(C)$ 即可. 这由

$$\eta_i = \begin{pmatrix} d_i & (-1)^{i-1}a \\ 0 & d_{i-1} \end{pmatrix}$$

可直接验证得到. 最后再利用复形同构 $C \otimes_R \mathcal{K}(a) \cong C \oplus C(-1)$ 即得结果.

(3) 由链同构 $\eta : C \otimes_R \mathcal{K}(a) \to C \oplus C(-1)$ 知只需证 R-模同构 $H_\bullet(C \oplus C(-1)) \cong H_\bullet(C/aC)$. 我们有自然的链映射 $\xi : C \oplus C(-1) \to C/aC$ 满足 $\xi_i : C_i \oplus C_{i-1} \to C_i/aC_i, (x, y) \mapsto \overline{x}$. 我们验证 ξ 所诱导的各次同调间的 R-模同态是同构. 这时 ξ_i 所诱导的 i 次同调间的 R-模同态是

$$\tilde{\xi_i} : H_i(C \oplus C(-1)) \to H_i(C/aC)$$
$$(x, y) + B_i(C \oplus C(-1)) \mapsto \overline{x} + B_i(C/aC)$$

先验证 $\tilde{\xi_i}$ 是满射, 任取 $\overline{x} \in Z_i(C/aC)$, 则 $d_i(x) \in aC_{i-1}$, 设 $y_{i-1} \in C_{i-1}$ 使得 $d_i(x) = ay_{i-1}$. 利用 a 是 C_{i-1}-正则元得到 $d_{i-1}(y_{i-1}) = 0$, 于是 $(x, (-1)^i y_{i-1}) \in Z_i(C \oplus C(-1))$ 且 $\tilde{\xi_i}((x, (-1)^i y_{i-1}) + B_i(C \oplus C(-1))) = \overline{x}$, 由此得到 $\tilde{\xi_i}$ 是满射. 最后验证 $\tilde{\xi_i}$ 是单射. 如果 $(x, y) + B_i(C \oplus C(-1)), (x', y') + B_i(C \oplus C(-1)) \in H_i(C \oplus C(-1))$ 满足 $\overline{x} - \overline{x'} \in B_i(C/aC)$, 那么存在 $c_{i+1} \in C_{i+1}, y_i \in C_i$ 使得 $x - x' - d_{i+1}(c_{i+1}) = ay_i$. 这也说明 $d_i(x) - d_i(x') = ad_i(y_i)$. 因为 $(x, y), (x', y') \in Z_i(C \oplus C(-1))$, 所以 $d_i(x) + (-1)^{i-1}ay = 0, d_i(x') + (-1)^{i-1}ay' = 0$. 代入 $d_i(x) - d_i(x') = ad_i(y_i)$ 得到 $d_i(x - x') = (-1)^i a(y - y') = ad_i(y_i)$, 利用 a 是 C_{i-1}-正则元得 $(-1)^i d_i(y_i) = a(y - y')$, 于是由

$$\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{i+1} & (-1)^i a \\ 0 & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i+1} \\ (-1)^i y_i \end{pmatrix}$$

推知 $(x, y) + B_i(C \oplus C(-1)) = (x', y') + B_i(C \oplus C(-1))$. 故 $\tilde{\xi_i}$ 是 R-模同构. $\square$

Corollary 1.91. 设 R是含幺交换环, $a_1,...,a_n$ 是 R 中序列, M 是 R-模.
(1) 我们有 Koszul 同调长正合列

$$\cdots \xrightarrow{(-1)^i a_n} H_i(a_1,...,a_{n-1};M) \longrightarrow H_i(a_1,...,a_n;M) \longrightarrow H_{i-1}(a_1,...,a_{n-1};M) \xrightarrow{(-1)^{i-1}a_n} H_{i-1}(a_1,...,a_{n-1};M) \longrightarrow \cdots$$

(2) 设 $t \le n$ 是正整数, $a_1,...,a_t$ 是弱 M-正则序列, 则有 Koszul 同调的 R-模同构

$$H_i(a_1,...,a_n;M) \cong H_i(a_{t+1},...,a_n;M/(a_1,...,a_t)M), \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Proof. (1) 对 [引理1.90(2)] 取 $C = \mathcal{K}(a_1,...,a_{n-1})$, 并应用 [引理1.83] 中的复形同构 $\mathcal{K}(a_1,...,a_{n-1};M) \otimes_K \mathcal{K}(a_n) \cong \mathcal{K}(a_1,...,a_n;M)$ 即得 Koszul 同调长正合列

$$\cdots \xrightarrow{(-1)^i a_n} H_i(a_1,...,a_{n-1};M) \longrightarrow H_i(a_1,...,a_n;M) \longrightarrow H_{i-1}(a_1,...,a_{n-1};M) \xrightarrow{(-1)^{i-1}a_n} H_{i-1}(a_1,...,a_{n-1};M) \longrightarrow \cdots$$

(2) 我们对正整数 t 作归纳证明结论.

Step1. 先验证 $t=1$ 的情形, 考虑序列 $a_2,...,a_n,a_1$ 以及复形 $C = \mathcal{K}(a_2,...,a_n) \otimes_R M$, 那么由 a_1 是 M-正则元可知对每个自然数 i, a_1 是 C_i-正则元 (回忆 [引理1.7]), 因此应用 [引理1.90(3)] 我们得到 $H_i(\mathcal{K}(a_2,...,a_n) \otimes_R M \otimes_R \mathcal{K}(a_1)) \cong H_i((\mathcal{K}(a_2,...,a_n) \otimes_R M)/a_1(\mathcal{K}(a_2,...,a_n) \otimes_R M)), \forall i \in \mathbb{Z}$. 通过 [引理1.83] 容易看到复形同构 $\mathcal{K}(a_2,...,a_n) \otimes_R M \otimes_R \mathcal{K}(a_1) \cong \mathcal{K}(a_1,...,a_n) \otimes_R M$, 容易看出复形 $(\mathcal{K}(a_2,...,a_n) \otimes_R M)/a_1(\mathcal{K}(a_2,...,a_n) \otimes_R M)$ 与 $\mathcal{K}(a_2,...,a_n) \otimes_R M/a_1M$ 有自然的同构. 因此有 R-模同构 $H_i(a_1,...,a_n;M) \cong H_i(a_2,...,a_n;M/a_1M), \forall i \in \mathbb{Z}$.

Step2. 如果已说明结论对 $t-1(t \ge 2)$ 成立, 这时 a_t 是 $M/(a_1,...,a_{t-1})M$-正则元, 由归纳假设

$$H_i(a_1,...,a_n;M) \cong H_i(a_t,...,a_n;M/(a_1,...,a_{t-1})M), \forall i \in \mathbb{Z}.$$

再对后者应用 $t=1$ 时结论便完成证明. □

1.6 Koszul 复形: 同调与级

我们已经定义了 Koszul 复形并讨论了 Koszul 同调的一些基本性质, 本节主要是利用前面已经证明的工具来揭示 Koszul 同调与交换 Noether 环的理想在有限生成模上的级之间的联系.

Theorem 1.92. 设 R 是含幺交换环, M 是 R-模, $x_1,...,x_n$ 是 R 中元素序列并记其生成的理想为 $I = (x_1,...,x_n)$. 任给长度为 $m(m \ge 0)$ 且含于 I 的弱 M-正则序列 $a_1,...,a_m$, 有:
(1) 对正整数 $i = 1,...,m$, 有 $H_{n+1-i}(x_1,...,x_n;M) = 0$.
(2) 有 R-模同构 $H_{n-m}(x_1,...,x_n;M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/(a_1,...,a_m)M) \cong \mathrm{Ext}_R^m(R/I,M)$.

Proof. 注意 [引理1.22] 已经告诉我们 R-模同构 $\mathrm{Hom}_R(R/I, M/(a_1,...,a_m)M) \cong \mathrm{Ext}_R^m(R/I,M)$, 所以结论 (2) 中最后一个同构总成立. 下面我们分 $m=0$ 与 $m \ge 1$ 两种情况来证明结论成立.

Case1. 当 $m = 0$ 时, 要证 $H_n(x_1,...,x_n;M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I,M)$. 设 $f: V \to R$ 是 Koszul 复形 $\mathcal{K}(x_1,...,x_n)$ 定义中的 R-模同态 (回忆 [定义1.82]), 那么有 R-模正合列

$$V \xrightarrow{f} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0,$$

作用 $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ 可得 $H_n(x_1,...,x_n;M) \cong H^0(x_1,...,x_n;M) = \mathrm{Ker} f^* = \mathrm{Hom}_R(R/I,M)$(第一个同构来自 [推论1.88]). 故当 $m=0$ 时结论成立.

Case2. 当 $m \geq 1$ 时, 我们对正整数 m 作归纳来证明结论. 当 $m = 1$ 时, 由 a_1 是 M-正则元可知 $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) = 0$, 而 $m = 0$ 时已证明的结果表明 $H_n(x_1, ..., x_n; M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M)$, 所以我们得到 $H_n(x_1, ..., x_n; M) = 0$, 我们再说明 $H_{n-1}(x_1, ..., x_n; M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/a_1M)$. 考虑短正合列：

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a_1} M \longrightarrow M/a_1M \longrightarrow 0,$$

依 [命题1.86], 上述短正合列导出 Koszul 同调的长正合列：

$$\cdots \longrightarrow H_n(x_1, ..., x_n; M) \xrightarrow{(a_1)_l} H_n(x_1, ..., x_n; M) \longrightarrow H_n(x_1, ..., x_n; M/a_1M) \longrightarrow H_{n-1}(x_1, ..., x_n; M) \longrightarrow \cdots$$

而 [推论1.85] 表明 a_1 诱导的 Koszul 同调间的左乘变换是零同态, 所以我们得到 Koszul 同调的短正合列 (见下图), 前面的讨论表明第一项是零模, 所以后两项 R-模同构.

$$0 \longrightarrow H_n(x_1, ..., x_n; M) \longrightarrow H_n(x_1, ..., x_n; M/a_1M) \longrightarrow H_{n-1}(x_1, ..., x_n; M) \longrightarrow 0.$$

对 R-模 M/a_1M 应用 $m = 0$ 情形的结论得到 R-模同构

$$H_{n-1}(x_1, ..., x_n; M) \cong H_n(x_1, ..., x_n; M/a_1M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/a_1M).$$

假设结论对 $m - 1(m \geq 2)$ 的情形成立, 即得到

$$H_n(x_1, ..., x_n; M) = H_{n-1}(x_1, ..., x_n; M) = \cdots = H_{n-m+2}(x_1, ..., x_n; M) = 0$$

以及 $H_{n-m+1}(x_1, ..., x_n; M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/(a_1, ..., a_{m-1})M)$. 因为 a_m 是 $M/(a_1, ..., a_{m-1})M$-正则元, 所以 $\mathrm{Hom}_R(R/I, M/(a_1, ..., a_{m-1})M) = 0$. 还需证 $H_{n-m}(x_1, ..., x_n; M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/(a_1, ..., a_m)M)$. 对短正合列 $0 \longrightarrow M/(a_1, ..., a_{m-1})M \xrightarrow{a_m} M/(a_1, ..., a_{m-1})M \longrightarrow M/(a_1, ..., a_m)M \longrightarrow 0$, 可导出 Koszul 同调长正合列, 与前面类似地讨论可得到下述两个 R-模同构.

$$H_{n-m+1}(x_1, ..., x_n; M/(a_1, ..., a_m)M) \cong H_{n-m}(x_1, ..., x_n; M/(a_1, ..., a_{m-1})M)$$

再对 $M/(a_1, ..., a_m)M$ 应用 $m = 0$ 情形的结论得到 R-模同构

$$H_n(x_1, ..., x_n; M/(a_1, ..., a_{m-1})M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/(a_1, ..., , a_m)M).$$

因此 $H_{n-m}(x_1, ..., x_n; M/(a_1, ..., a_{m-1})M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/(a_1, ..., , a_m)M)$, 完成证明. □

下面给出含幺交换 Noether 环 R 中一个理想 I 在有限生成 R-模 M 上的级关于 Koszul 同调的刻画.

Theorem 1.93 (级关于 Koszul 同调的刻画)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模, $I = (x_1, ..., x_n)$ 是 R 的理想. 那么 (1)$IM = M$ 的充要条件是 $H_i(x_1, ..., x_n; M) = 0.\forall 0 \leq i \leq n$. 即 $\mathrm{grade}(I, M) = +\infty$ 当且仅当系数在 M 中的各次 Koszul 同调是零. (2) 如果存在某次 Koszul 同调 $H_{i_0}(x_1, ..., x_n; M) \neq 0$(这时 $0 \leq i_0 \leq n$), 那么对 $r = \max\{j \in \mathbb{Z} | H_j(x_1, ..., x_n; M) \neq 0\}$, 有 $\mathrm{grade}(I, M) = n - r$. 用上同调的语言说, $\mathrm{grade}(I, M) = \inf\{j \in \mathbb{Z} | H^j(x_1, ..., x_n; M) \neq 0\}$.

Proof. 因为 $H_0(x_1, ..., x_n; M) \cong M/IM$, 所以 (1) 的充分性是明显的. 下证必要性, 对每个自然数 $0 \leq i \leq n$, 我们通过说明 $(H_i(x_1, ..., x_n; M))_P = 0, \forall P \in \mathrm{Spec}(R)$ 来证明结论. 将 M_P 视作 R-模, 利用自然同构

$(-)_P \cong - \otimes_R R_P$, 可以导出 R-模同构 $(H_i(x_1,...,x_n;M))_P \cong H_i(x_1,...,x_n;M_P)$. 下面说明右边的 R-模是零模. 如果 $I \subseteq P$, 利用 Nakayama 引理得 $M_P = 0$, 进而 $H_i(x_1,...,x_n;M_P) = 0$. 如果 $I \nsubseteq P$, 那么存在某个 $x_s, 1 \le s \le n$ 使得 $x_s \in I - P$. 于是 x_s 决定的 M_P 上的左乘变换是可逆映射, 进而导出 x_s 决定的 $H_i(x_1,...,x_n;M_P)$ 上左乘变换也是可逆映射, 但 [推论1.85] 说该左乘变换是零同态, 这迫使 $H_i(x_1,...,x_n;M_P) = 0$. 因此 $(H_i(x_1,...,x_n;M))_P = 0, \forall P \in \mathrm{Spec}(R)$, 从而证明了必要性.

最后证明 (2), 在 (2) 的条件下, 已证明的 (1) 表明 $IM \neq M$, 从而应用 [定理1.23] 知对 I 包含的任何极大 M-正则序列 $a_1,...,a_m$ 满足 $m = \min\{i \in \mathbb{Z}_{>0} | \mathrm{Ext}_R^i(R/I,M) \neq 0\} = \mathrm{grade}(I,M)$(那么也就有 $\mathrm{Ext}_R^m(R/I,M) \neq 0$). 由 [定理1.92] 知

$$H_{n-m+1}(x_1,...,x_n;M) = \cdots = H_n(x_1,...,x_n;M) = 0, H_{n-m}(x_1,...,x_n;M) \cong \mathrm{Ext}_R^m(R/I,M) \neq 0.$$

所以 $r = n - m$, 进而 $\mathrm{grade}(I,M) = m = n - r$. □

本节的最后我们给出交换 Noether 局部环的真理想在非零有限生成模上的级的刻画. 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, m 是唯一的极大理想, 且有 m 中序列 $a_1,...,a_n$, $M \neq 0$ 是有限生成 R-模, 则 [推论1.91] 说有 Koszul 同调的长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_i(a_1,...,a_{n-1};M) \xrightarrow{(-1)^i a_n} H_i(a_1,...,a_{n-1};M) \longrightarrow H_i(a_1,...,a_n;M) \longrightarrow \cdots$$

如果对整数 i, 有 $H_i(a_1,...,a_n;M) = 0$, 那么 $(-1)^i a_n$ 导出的 Koszul 同调上的左乘变换是满射, 于是由 Nakayama 引理知 $H_i(a_1,...,a_{n-1};M) = 0$, 这也就得到了下述引理.

Lemma 1.94. 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, m 是唯一的极大理想, 序列 $a_1,...,a_n \in m$, $M \neq 0$ 是有限生成 R-模. 则 $H_i(a_1,...,a_n;M) = 0$ 蕴含 $H_i(a_1,...,a_{n-1};M) = 0$.

Corollary 1.95 (Noether 局部环上非零有限生成模的级)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, m 是唯一的极大理想, M 是非零有限生成 R-模, 理想 $I = (a_1,...,a_n) \subseteq m$, 则以下四条等价：
(1)$\mathrm{grade}(I,M) = n$.
(2)$H_i(a_1,...,a_n;M) = 0, \forall i \geq 1$.
(3)$H_1(a_1,...,a_n;M) = 0$.
(4) 序列 $a_1,...,a_n$ 是 M-正则序列.

Proof. (1)⇒(2): 由条件知 $IM \neq M$, 所以 [定理1.93] 表明 $n = n - \max\{j \in \mathbb{Z} | H_j(a_1,...,a_n;M) \neq 0\}$, 这说明 $H_i(a_1,...,a_n;M) = 0, \forall i \geq 1$. (3) 是 (2) 的特殊情况, 所以 (2)⇒(3) 不证自明.

(3)⇒(4): 反复利用 [引理1.94] 便知 $H_1(a_1,...,a_n;M) = H_1(a_1,...,a_{n-1};M) = \cdots = H_1(a_1,a_2;M) = H_1(a_1;M) = 0$. 下证 a_1 是 M-正则元. 先说明理想 (a_1) 在 M 上的级 $\mathrm{grade}((a_1),M) = 1$ 来得到 (a_1) 含有 M-正则元. 因为 $a_1 M \neq M$, 所以 $\mathrm{grade}((a_1),M) = 1 - \max\{j \in \mathbb{Z} | H_j(a_1;M) \neq 0\}$. 而 $H_1(a_1;M) = 0$ 迫使 $\mathrm{grade}((a_1),M) = 1$, 从而 (a_1) 中有 M-正则元, 因此 a_1 也是 M-正则元. 现在对 $H_1(a_1,a_2;M)$ 应用 [推论1.91(2)], 我们得到 $H_1(a_2;M/a_1M) = 0$, 与前面类似地, 通过 M/a_1M 是非零有限生成 R-模得到 a_2 是 M/a_1M-正则元. 如果对正整数 $t \le n-1$ 已经证明了 $a_1,...,a_t$ 是弱 M-正则序列, 那么 [推论1.91(2)] 以及前面所证 $t = 1$ 情形的结果便知 a_{t+1} 是 $M/(a_1,...,a_t)M$-正则元. 故归纳地得到 $a_1,...,a_n$ 是弱 M-正则序列. 再结合 $(a_1,...,a_n) \subseteq m$ 知这是 M-正则序列.

(4)⇒(1): 这时 $a_1,...,a_n$ 是含于 I 的极大 M-正则序列 (回忆 [引理1.14]). 由 [定理1.23] 即得. □

注意上述推论的证明中, (4)⇒(2) 是不需要局部环条件的：给定交换 Noether 环 R 以及非零有限生成模 M, 那么对理想 $I=(a_1,...,a_n)$, 当 $a_1,...,a_n$ 是 M-正则序列时, 自然是含于 I 的极大 M-正则序列, 我们还是可以应用 [定理1.93] 来得到 $H_i(a_1,...,a_n;M)=0, \forall i\geq 1$. 我们再来这能够告诉我们什么: 序列 $a_1,...,a_n$ 可决定一系数在 M 中的 Koszul 复形 $\mathcal{K}(a_1,a_2,...,a_n;M)$:

$$0 \longrightarrow (\wedge^n V)\otimes_R M \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_3} (\wedge^2 V)\otimes_R M \xrightarrow{d_2} V\otimes_R M \xrightarrow{f} R\otimes_R M \longrightarrow 0$$

其中 V 是以 $\{e_1,...,e_n\}$ 为基的自由模, f 是由 $f(e_i)=a_i$ 决定的 R-线性函数. 上述复形的 i 次同调是 $H_i(a_1,...,a_n;M)$, 那么前面的讨论表明序列 $a_1,...,a_n$ 是 M-正则序列时, 复形

$$0 \longrightarrow (\wedge^n V)\otimes_R M \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_3} (\wedge^2 V)\otimes_R M \xrightarrow{d_2} V\otimes_R M \xrightarrow{f} R\otimes_R M$$

正合. 因此, 如果 $a_1,...,a_n$ 是 M-正则序列, 我们能够得到正合复形

$$0 \longrightarrow (\wedge^n V)\otimes_R M \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_3} (\wedge^2 V)\otimes_R M \xrightarrow{d_2} V\otimes_R M \xrightarrow{f} R\otimes_R M \longrightarrow R/(a_1,...,a_n)\otimes_R M \longrightarrow 0$$

我们把这一观察总结为下面的推论.

Corollary 1.96. 设含幺交换环 R 是 Noether 环, M 是非零有限生成 R-模, 理想 $I=(a_1,...,a_n)$, 当序列 $a_1,...,a_n$ 是 M-正则序列时, 有正合复形

$$0 \longrightarrow (\wedge^n V)\otimes_R M \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} V\otimes_R M \xrightarrow{f} R\otimes_R M \longrightarrow R/(a_1,...,a_n)\otimes_R M \longrightarrow 0.$$

特别地, 当序列 $a_1,...,a_n$ 是 R-正则序列时, 有 $R/(a_1,...,a_n)$ 的自由分解

$$0 \longrightarrow (\wedge^n V) \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} V \xrightarrow{f} R \longrightarrow R/(a_1,...,a_n) \longrightarrow 0$$

这给出了下一节 [定理1.100] 正则序列版本的证明.

当 (R,m) 是 Noether 局部环且 $(a_1,...,a_n)\subseteq m$ 时这是 $R/(a_1,...,a_n)$ 的一个极小投射分解. 只需注意到每个 d_i 的核都在 $m\wedge^i V$ 中, 由 V 是有限生成模以及 Nakayama 引理得到 $m\wedge^i V$ 是多余子模, 所以每个 $\mathrm{Ker}d_i$ 也是多余子模, 于是由极小投射分解的定义我们看到上述复形确实是 $R/(a_1,...,a_n)$ 的极小投射分解, 最后我们应用 [推论1.62], 得到下述推论.

Corollary 1.97. 设 (R,m) 是含幺交换 Noether 局部环, 序列 $a_1,...,a_n\in m$ 是 R-正则序列, 那么 Koszul 复形 $\mathcal{K}(a_1,...,a_n)$ 给出 $R/(a_1,...,a_n)$ 的极小投射 (自由) 分解

$$0 \longrightarrow (\wedge^n V) \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} V \xrightarrow{f} R \longrightarrow R/(a_1,...,a_n) \longrightarrow 0$$

并且 $\mathrm{p.dim}_R R/(a_1,...,a_n)=n$.

1.7 Koszul 复形: Hilbert 合冲定理

本节的主要目标是证明下面的 Hilbert 合冲定理 (Hilbert's Syzygy Theorem)[定理1.98]. 这里的分次环与分次模默认是正分次的, 即分次各项指标来自 $\mathbb{N}$.

Theorem 1.98 (Hilbert 合冲定理)**.** 设 $R=F[x_1,...,x_m]$ 是域 F 上多项式环, M 是分次 R-模, 如果有分次 R-模正合列

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

且每个 L_i 是分次自由 R-模, 则 P_m也是分次自由 R-模.

Remark. 该定理名为“合冲”的原因是, 对 R-模 M 形如下述形式的正合列

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

这里每个 P_i 是投射模, 则称 K_n 是 M 的第 n 个**合冲** (syzygy). 合冲来自天文学, 原意指三个天体接近一条直线. 这里尽量避免使用这个术语.

如果含幺环 R 是分次环 (有分次 $\{R_i\}_{i=0}^{\infty}$), M 是分次 R-模 (有分次 $\{M_i\}_{i=0}^{\infty}$), 那么总可构造分次自由左 R-模 L 到分次模 M 的满同态 $\varepsilon: L \to M$. 具体地, 可选取 M 的生成元集 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 使得每个 u_α 都是齐次元, 那么我们可作一个以 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为基的自由 R-模 L, 那么 L 到 M 有自然的满同态 ε 将每个 u_α 映至 u_α. 对每个自然数 i, 定义 L_i 是所有形如 $a_j u_\alpha (a_j \in R_j, j+\deg u_\alpha = i)$ 的有限和构成的集合, 它构成 L 的加法子群且 $L=\oplus_{i=0}^{\infty} L_i, R_j L_i \subseteq L_{i+j}, \forall i,j \geq 0$(验证它). 所以 L 是分次 R-模且 ε 是分次模同态. 回忆分次模间的同态的核是分次子模, 所以 $\mathrm{Ker}\varepsilon$ 是 L 的分次子模. 现在回到 [定理1.98] 的条件上看, 对分次 $R(=F[x_1,...,x_m])$-模 M, 我们总能递归地构造出形如

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

且每个 L_i 是分次自由模的正合列. 因此 Hilbert's Syzygy 定理说的就是如此递归地构造 M 的分次自由表示, 最多做到第 m 步 (即得到分次模 L_{m-1}), 分次模同态 $d_{m-1}: L_{m-1} \to L_{m-2}$ 的核 $P_m = \mathrm{Ker} d_{m-1}$ 就给出 M 的分次自由表示. 也可以总结成下述推论.

Corollary 1.99. 设 $R=F[x_1,...,x_m]$ 是域 F 上多项式环, M 是分次 R-模, 那么 M 存在长度不超过 m 的分次自由表示. 特别地, $\mathrm{gl.dim}F[x_1,...,x_m] \leq m$.

Remark. 一般地, 对含幺环 R 上 m 元多项式环有 $\mathrm{r.gl.dim}R[x_1,...,x_m] = \mathrm{r.gl.dim}R + m$(见 [定理3.29]).

在正式地证明 Hilbert 合冲定理前, 先做一些准备. 设 $R=F[x_1,...,x_m]$, 我们可以把 F 视作 R-模：对每个 $f(x_1,...,x_m)\in R, c\in F$, 定义数乘作用为 $f(x_1,...,x_m)c = f(0,...,0)c$. 于是得到 R-模同态 $\varepsilon: R \to F, f(x_1,...,x_m) \mapsto f(0,...,0)$. 设 M 是以 $\{y_1,...,y_m\}$ 为基的自由 R-模, 则对 R-模同态 $f: M \to R, \sum\limits_{i=1}^{m} r_i y_i \mapsto \sum\limits_{i=1}^{m} r_i x_i$, 可决定 Koszul 复形

$$0 \longrightarrow \wedge^m M \xrightarrow{d_m} \cdots \longrightarrow \wedge^3 M \xrightarrow{d_3} \wedge^2 M \xrightarrow{d_2} M \xrightarrow{f} R \longrightarrow 0$$

其中 $\wedge^i M (2\leq i\leq n)$ 是自由 R-模 (回忆 [推论1.76]), 并将 f 根据 [引理1.73] 诱导的反导子记作 $D: E(M) \to E(M)$(D 在每个外幂 $\wedge^r M$ 上的作用记为 d_r), 在 [引理1.74] 中我们已经指出 D 满足：

$$D(v_1\wedge\cdots\wedge v_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} f(v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_r, \forall v_1,...,v_r \in M.$$

所以这时根据 f 的定义, 我们得到对每个正整数 r, 有

$$D(y_{i_1}\wedge\cdots\wedge y_{i_r})=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{i-1}x_{i_k}(y_{i_1}\wedge\cdots\wedge \hat{y_{i_k}}\wedge\cdots\wedge y_{i_r}),\forall 1\leq i_1<\cdots<i_r\leq m.$$

之前所定义的 $\varepsilon:R\to F$ 明显满足 $\varepsilon f=0$, 所以我们得到 R-模复形

$$0\longrightarrow \wedge^m M\xrightarrow{d_m}\cdots\longrightarrow\wedge^3 M\xrightarrow{d_3}\wedge^2 M\xrightarrow{d_2} M\xrightarrow{f} R\xrightarrow{\varepsilon} F\longrightarrow 0$$

下述定理表明该复形是 ${}_RF$ 作为 R-模的一个自由表示.

Theorem 1.100 (Koszul 表示)**.** 设 $R=F[x_1,...,x_m]$, M 是以 $\{y_1,...,y_m\}$ 为基的自由 R-模, R-模同态 $f:M\to R,\sum\limits_{i=1}^{m}r_iy_i\mapsto\sum\limits_{i=1}^{m}r_ix_i$ 所决定的 Koszul 复形与 R-模同态 $\varepsilon:R\to F,f(x_1,...,x_m)\mapsto f(0,...,0)$ 诱导出的复形

$$0\longrightarrow \wedge^m M\xrightarrow{d_m}\cdots\longrightarrow\wedge^3 M\xrightarrow{d_3}\wedge^2 M\xrightarrow{d_2} M\xrightarrow{f} R\xrightarrow{\varepsilon} F\longrightarrow 0$$

是 ${}_RF$ 的一个自由表示, 称为 ${}_RF$的 **Koszul 表示** (Koszul resolution).

Proof. 由 f 的定义知 $\mathrm{Im}f=(x_1,...,x_n)=\mathrm{Ker}\varepsilon$. 所以要证明该定理只需再验证上述模同态序列在各 $\wedge^iM(i\geq 2)$ 处与 M 处正合. 记 $\mathcal{E}:E(M)\to E(M)$ 是将 ε 如下延拓得到的 R-模同态: $\mathcal{E}|_{R1_{E(M)}}:R1_{E(M)}\to E(M),a1_{E(M)}\mapsto\varepsilon(a)1_{E(M)}$ 并定义 $\mathcal{E}(\wedge^iM)=0,\forall i\geq 1$. 那么根据 $\mathcal{E}$ 的定义, $D\mathcal{E}(E(M))\subseteq D(R1_E)=0$ 且 $\mathcal{E}D(E(M))=0$(验证它). 由下面的 [引理1.101], 存在 F-线性映射 $S:E(M)\to E(M)$ 使得 $DS+SD=\mathrm{id}_{E(M)}-\mathcal{E}$. 所以对 $x\in\mathrm{Ker}f$, 由 $D(x)=0$ 以及 $\mathcal{E}(x)=0$ 推知 $x=DS(x)$, 再记 $S(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_j,b_j\in\wedge^jM$, 则 $x=D(b_2)=d_2(b_2)\in\mathrm{Im}d_2$, 所以 d_2 与 f 在 M 处正合. 类似地, 若 $y\in\wedge^iM(i\geq 2)$ 使得 $d_i(y)=0$, 则 $D(y)=0$, 进而得到 $DS(y)=0$, 再将 $S(y)$ 写成在 $\wedge^jM$ 各分量的和便可得到 $y\in\mathrm{Im}d_{i+1}$. 故 $\mathrm{Im}d_i=\mathrm{Ker}d_{i-1},\forall i\geq 2$. □

Lemma 1.101. 在上述 [定理1.100] 的条件下, 设 $\mathcal{E}:E(M)\to E(M)$ 是将 ε 如下延拓得到的 R-模同态: $\mathcal{E}|_{R1_{E(M)}}:R1_{E(M)}\to E(M),a1_{E(M)}\mapsto\varepsilon(a)1_{E(M)}$ 并定义 $\mathcal{E}(\wedge^iM)=0,\forall i\geq 1$. 那么存在 F-线性映射 $S:E(M)\to E(M)$ 使得 $DS+SD=\mathrm{id}_{E(M)}-\mathcal{E}$.

Proof. 通过对多项式环未定元个数 $m\geq 1$ 作归纳来证明结论.

Step1. 当 $m=1$ 时, 设 $R=F[x]$ 且 M 是以 $\{y\}$ 为基的自由模, 那么 $E(M)=R1_{E(M)}\oplus\wedge^1M$. 这时 $E(M)$ 作为 F-线性空间有基 $\{x^i1_{E(M)}|i\geq 0\}\cup\{x^iy|i\geq 0\}$, 通过计算 $D,\mathrm{id}_{E(M)}-\mathcal{E}$ 在这个基下的取值, 为了让等式 $DS+SD=\mathrm{id}_{E(M)}-\mathcal{E}$ 成立, 构造 $S:E(M)\to E(M)$ 在该基下的取值为 $S(1_{E(M)})=0,S(x^{i+1}1_{E(M)})=x^iy(i\geq 0),S(x^iy)=0,\forall i\geq 0$, 那么在 $E(M)$ 上有 $DS+SD=\mathrm{id}_{E(M)}-\mathcal{E}$, 即 $m=1$ 时结论成立. 并且注意到在 $m=1$ 的情形, 我们构造的 S 满足 $S\mathcal{E}=\mathcal{E}S=0,\mathcal{E}l=l\mathcal{E}=\mathcal{E},Sl+lS=0$, 其中 l 是 $E(M)$ 上对合同态 (见 [定义1.72]).

Step2. 现在假设结论对 $m-1(m\geq 2)$ 的情形成立, 考察 m 的情形. $E(M)=R1_{E(M)}\oplus\wedge^1M\oplus\cdots\oplus\wedge^mM$, 每个直和项 $\wedge^rM$ 作为 F-线性空间有基 $\{x_1^{j_1}\cdots x_m^{j_m}(y_{i_1}\wedge\cdots\wedge y_{i_r})|j_1,...,j_m\geq 0,1\leq i_1<\cdots<i_r\leq m\}$. 现在设 E_1 是 $E(M)$ 中由集合 $\{x_1^n|n\geq 0\}\cup\{x_1^ny_1|n\geq 0\}$ 所张成的子空间, E_2 是由 $\{x_2^{j_2}\cdots x_m^{j_m}(y_{i_1}\wedge\cdots\wedge y_{i_r})|j_2,...,j_m\geq 0,2\leq i_1<\cdots<i_r\leq m\}$. 那么 E_1 作为 $E(M)$ 的子环也可视作 $F[x_1]$-代数, E_2 作为

$E(M)$ 的子环可视作 $F[x_2,...,x_m]$-代数. 如果记 $M_1=F[x_1]y_1, M_2=F[x_2,...,x_m]y_2\oplus\cdots\oplus F[x_2,...,x_m]y_m$ 分别是 $F[x_1]$-自由模和 $F[x_2,...,x_m]$-自由模, 那么有 $F[x_1]$-代数同构 $E(M_1)\cong E_1$ 和 $F[x_2,...,x_m]$-代数同构 $E(M_2)\cong E_2$(用外代数泛性质 [命题1.67] 验证). 可直接验证 F-双线性映射 $E_1\times E_2\to E(M),(u,v)\mapsto uv$ 给出了 F-线性同构 $\xi: E_1\otimes_F E_2\to E(M)$. 并注意到反导子 D 和 $\mathcal{E}$ 限制在 E_1 与 E_2 上可以导出 $E(M_1)$ 和 $E(M_2)$ 相应的反导子 $D_1: E(M_1)\to E(M_1), D_2: E(M_2)\to E(M_2)$ 与线性映射 $\mathcal{E}_1: E(M_1)\to E(M_1),\mathcal{E}_2: E(M_2)\to E(M_2)$, 现对 M_1 应用 $m=1$ 时已证明的结果, 对 M_2 应用归纳假设, 可知存在 E_1 上线性映射 $S_1: E_1\to E_1$ 使得

$$DS_1+S_1D=\mathrm{id}_{E_1}-\mathcal{E}_1=(\mathrm{id}_{E(M)}-\mathcal{E})|_{E_1}, S_1\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_1S_1=0, \mathcal{E}_1l=l\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_1, S_1l+lS_1=0,$$

存在 E_2 上线性映射 $S_2: E_2\to E_2$ 使得 $DS_2+S_2D=\mathrm{id}_{E_2}-\mathcal{E}_2=(\mathrm{id}_{E(M)}-\mathcal{E})|_{E_2}$. 现在可定义唯一的 F-线性映射 $S: E(M)\to E(M)$ 使得 $S(uv)=S_1(u)v+\mathcal{E}(u)S_2(v),\forall u\in E_1, v\in E_2$. 由此可直接计算验证 $(DS+SD)(uv)=(\mathrm{id}_{E(M)}-\mathcal{E})(uv),\forall u\in E_1,v\in E_2$, 由此得到 $DS+SD=\mathrm{id}_{E(M)}-\mathcal{E}$. □

[定理1.100] 直接告诉我们 F 作为 R-模的投射维数 $\mathrm{p.dim}_R F\le m$(事实上可以更进一步证明 $\mathrm{p.dim}_R F=m$, 具体地, 利用 ${}_RF$ 的 Koszul 表示来算得 F-线性同构 $\mathrm{Tor}_m^R(F,F)\cong V^m\neq 0$, 其中 V 是以 $\{y_1,...,y_m\}$ 为基的 F-线性空间, 但在 Hilbert 合冲定理的证明中只需要 $\mathrm{p.dim}_R F\le m$ 就够了).

要证明 [定理1.98], 还需要下面两个准备.

Lemma 1.102. 设 $R=F[x_1,...,x_m]$, M 是分次 R-模且 $M\otimes_R F=0$, 则 $M=0$.

Proof. 设 $\varepsilon: R\to F, f(x_1,...,x_m)\mapsto f(0,...,0)$ 为满 R-模同态, 它有核 $J=(x_1,...,x_n)$, 所以有 R-模短正合列 $0\longrightarrow J\xrightarrow{j} R\xrightarrow{\varepsilon} F\longrightarrow 0$, 其中 j 是标准嵌入, 再用张量函子 $M\otimes_R -$ 作用之, 由 $M\otimes_R F=0$ 得到 $M\otimes_R J\to M,\sum\limits_{i=1}^s x_i\otimes f_i\mapsto\sum\limits_{i=1}^s x_if_i$ 是满射, 换句话说, M 中元素都具备 $\sum\limits_{i=1}^s x_if_i, f_i\in J$ 的形式. 现在我们用反证法说明 $M=0$. 假设 $M\neq 0$, 设 $x\neq 0$ 是 M 非零齐次元中次数最低的, 那么存在正整数 t 以及齐次元 $u_i\in M, f_i\in J(1\le i\le t)$ 使得 $x=\sum\limits_{i=1}^t u_if_i, u_if_i\neq 0, \mathrm{deg}x=\mathrm{deg}u_i+\mathrm{deg}f_i$. 注意到 $f_i\in J$ 的次数至少是 1, 因此 $\mathrm{deg}u_i<\mathrm{deg}x$, 这与 x 的选取相矛盾. □

Theorem 1.103. 设 $R=F[x_1,...,x_m]$, M 是分次 R-模且 $\mathrm{Tor}_1^R(M,F)=0$, 那么 M是分次自由模.

Proof. 注意到 $M\otimes_R F$ 作为 F-线性空间有个生成元集 $\{u\otimes 1|u\in M\text{是齐次元}\}$, 所以 $M\otimes_R F$ 作为线性空间有形如 $\{u_i\otimes 1|u_i\in M\text{是齐次元}\}$ 的基. 通过 M 的齐次元集 $\{u_i|i\in I\}$, 作自由 R-模 $L=\oplus_{i\in I}Ru_i$, 并置 $\eta: L\to M$ 是由 $\eta(u_i)=u_i$ 确定的 R-模同态. 我们知道 L 有天然的分次 $\{L_k\}_{k=0}^\infty$(其中 L_k 是由所有形如 $a_ju_i, a_j\in R_j, j+\mathrm{deg}u_i=k$ 的有限和构成的加法子群) 使得 L 成为分次自由 R-模, 进而 η 是分次模同态. 下面通过证明 η 是 R-模同构来说明 M 是分次自由模. 记 K,C 分别是 η 的核与余核, 那么 K,C 都是分次 R-模. 对正合列 $L\xrightarrow{\eta} M\longrightarrow C\longrightarrow 0$, 作用张量函子 $-\otimes_R F$ 得到 $L\otimes_R F\xrightarrow{\eta\otimes\mathrm{id}_F} M\otimes_R F\longrightarrow C\otimes_R F\longrightarrow 0$. 可直接验证 $\{u_i\otimes 1|i\in I\}$ 是 $L\otimes_R F$ 作为 F-线性空间的一个基, 所以 $\eta\otimes\mathrm{id}_F$ 是 R-模同构, 从而 $C\otimes_R F=0$, 于是 [引理1.102] 保证了 $C=0$, 这也说明了 η 是满射. 最后说明 η 是单射. 考虑正合列

$$0\longrightarrow K\xrightarrow{i} L\xrightarrow{\eta} M\longrightarrow 0$$

(注意刚刚已经说明了 η 是满射), 这导出长正合列

$$\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M,F) \longrightarrow K\otimes_R F \xrightarrow{i\otimes \mathrm{id}_F} L\otimes_R F \xrightarrow{\eta\otimes \mathrm{id}_F} M\otimes_R F \longrightarrow 0,$$

由条件 $\mathrm{Tor}_1^R(M,F)=0$, 所以 $0 \longrightarrow K\otimes_R F \xrightarrow{i\otimes \mathrm{id}_F} L\otimes_R F \xrightarrow{\eta\otimes \mathrm{id}_F} M\otimes_R F \longrightarrow 0$ 是 R-模正合列, 前面已证 $\eta\otimes \mathrm{id}_F$ 是同构, 所以 $K\otimes_R F=0$, 再利用 [引理1.102] 便知 $K=0$, 即 η 是单射. □

现在可以给出 Hilbert 合冲定理 (前本节开头 [定理1.98]) 的证明. 即说明对分次 R-模 M 以及分次 R-模正合列

$$0\longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

如果每个 L_i 是分次自由 R-模, 则 P_m 也是分次自由 R-模.

Proof. 通过考虑 ${}_RF$ 的 Koszul 表示, 我们得到了 $\mathrm{p.dim}_R F\le m$, 这也说明 $\mathrm{Tor}_{m+1}^R(M,F)=0$. 因为

$$\mathrm{Tor}_1^R(P_m,F)\cong \mathrm{Tor}_{m+1}^R(M,F)=0,$$

所以利用 [定理1.103] 我们得到 P_m 是分次自由模. □

需要再指出, [定理1.103] 也告诉我们下述推论.

Corollary 1.104. 设 $R=F[x_1,...,x_m]$, M 是分次投射 R-模, 则 M 是自由模.

2 Cohen-Macaulay 环

本章先介绍交换代数中的 Cohen-Macaulay 环 (模) 的基本性质以及重要例子 (例如正则局部环和 Gorenstein 环). 随后介绍 Gorenstein 局部环的等价刻画、Cohen-Macaulay 局部环上的 canonical 模并讨论其存在性条件和唯一性.

2.1 Cohen-Macaulay 环与模

本节我们先介绍 Cohen-Macaulay 环以及 Cohen-Macaulay 模的基本概念与性质, 我们将看到 Cohen-Macaulay 性质关于局部化是封闭的, 交换 Artin 环总是 Cohen-Macaulay 环, Cohen-Macaulay 环上有限个未定元的多项式环总是 Cohen-Macaulay 的. 最后我们解释 Cohen-Macaulay 命名的缘由.

在 [推论1.47] 中我们看到对交换 Noether 局部环上的非零有限生成模 M 总有 $\text{depth}M \leq \text{k.dim}M$. 当等号成立时, 就给出了 Cohen-Macaulay 模的概念.

Definition 2.1 (Noether 局部环上的 Cohen-Macaulay 模, 环)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, $M \neq 0$ 是有限生成 R-模, 如果 $\text{depth}M = \text{k.dim}M$, 则称 M 是 **Cohen-Macaulay 模**. 如果 R 作为 R-模是 Cohen-Macaulay 模, 则称 R 是 **Cohen-Macaulay 环**. 如果 Cohen-Macaulay 模 M 满足 $\text{k.dim}M = \text{k.dim}R$(易见一般有 $\text{k.dim}M \leq \text{k.dim}R$), 则称 M 是**极大 Cohen-Macaulay 模**.

现给定含幺交换 Noether 局部环 R 上的非零有限生成模 M, 对任何理想 $I \subseteq \text{Ann}_R M$, 我们可把 M 天然视作 R/I-模, 其上数乘作由 R 中元素数乘作用导出, 所以对序列 $a_1, ..., a_n \in R$, $a_1, ..., a_n$ 是 M-正则序列的充要条件是 $\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}$ 是 M-正则序列 (这里视 M 为 R/I-模). 从而得到 $\text{grade}_{R/I}(m/I, M) = \text{grade}_R(m, M)$, 这也就是 $\text{depth}_R M = \text{depth}_{R/I} M$. 并注意到

$$\text{k.dim}_R M = \text{k.dim}\ R/\text{Ann}_R(M) = \text{k.dim}(R/I)/(\text{Ann}_R(M)/I) = \text{k.dim}(R/I)/(\text{Ann}_{R/I}(M)) = \text{k.dim}_{R/I} M,$$

所以对任何理想 $I \subseteq \text{Ann}_R M$, M 作为 R-模是 Cohen-Macaulay 模当且仅当 M 作为 R/I-模是 Cohen-Macaulay 模. 我们把上述讨论归结为下述命题.

Proposition 2.2. 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, $M \neq 0$ 是有限生成 R-模, 理想 $I \subseteq \text{Ann}_R M$, 那么 M 作为 R-模是 Cohen-Macaulay 模当且仅当 M 作为 R/I-模是 Cohen-Macaulay 模.

下面把 Cohen-Macaulay 模的概念延拓至交换 Noether 环.

Definition 2.3 (Noether 环上的 Cohen-Macaulay 模, 环)**.** 设 R 是含幺交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模. 若对任何极大理想 $m \in \text{Supp}(M)$ 有 M_m 是 R_m 上非零有限生成模且 $\text{depth}M_m = \text{k.dim}M_m$, 则称 M 是 **Cohen-Macaulay 模** (注意在这个定义下零模也是 Cohen-Macaulay 模!). 如果 Cohen-Macaulay 模 M 满足对任何极大理想 $m \in \text{Supp}(M)$ 有 $\text{k.dim}M_m = \text{k.dim}R_m$, 则称 M 是**极大 Cohen-Macaulay 模**. 如果 R作为 R-模是 Cohen-Macaulay 模, 那么称 R 是 **Cohen-Macaulay 环**.

下面的引理说明上述定义确实是 Noether 局部环版本定义的延伸.

Lemma 2.4. 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, M 是 R-模, 那么以下两条等价:
(1)M 是非零有限生成 R-模且 $\text{depth}_R M = \text{k.dim}_R M$.
(2) 对极大理想 $m \in \text{Supp}(M)$ 有 M_m 是 R_m 上非零有限生成模且 $\text{depth}_{R_m} M_m = \text{k.dim}_{R_m} M_m$.

Proof. 设 m 是唯一的极大理想, 那么乘闭子集 $R-m$ 中元素都是可逆元, 因此有环同构 $\lambda: R \to R_m, a \mapsto a/1$. 所以可以用 λ 将 M 视作 R_m-模, 将 M_m 视作 R-模. 于是作为 R-模或是 R_m-模都有模同构 $M_m \cong M$, 那么 M 是非零有限生成 R-模当且仅当 M_m 是非零有限生成 R_m-模, 由此不难验证 $\mathrm{k.dim}_R M = \mathrm{k.dim}_{R_m} M_m, \mathrm{depth}_R M = \mathrm{depth}_{R_m} M_m$(其中深度等式的验证需要借助 [引理2.4]). □

由上述引理证明过程易见 Noether 环上极大 Cohen-Macaulay 模的概念也是 Noether 局部环版本的延伸. 在 [命题1.46] 与 [推论1.47] 中我们看到, 对交换 Noether 局部环 R, 非零有限生成 R-模 M 与序列 $a_1, ..., a_n \in m$, 总有 $\mathrm{k.dim} M/(a_1, ..., a_n)M \geq \mathrm{k.dim} M - n$, 并且该不等式的等号成立当且仅当 $a_1, ..., a_n$ 是 M 某个参数系的一部分. 任何 M-正则序列总是 M-参数系的一部分. 下面的定理不仅给出了当 M 是 Cohen-Macaulay 模时, 理想 I 在 M 上级与维数的关系, 还指出了前面维数不等式等号成立已经蕴含了序列 $a_1, ..., a_n$ 的 M-正则性.

Theorem 2.5. 设含幺交换环 R 是 Noether 局部环, m 是唯一的极大理想, $M \neq 0$是 Cohen-Macaulay 模. 则
(1) 对任何相关素理想 $P \in \mathrm{Ass} M$, 有 $\mathrm{k.dim} R/P = \mathrm{depth} M = \mathrm{k.dim} M$.
(2) 对任何理想 $I \subseteq m$, 有 $\mathrm{grade}(I, M) = \mathrm{k.dim} M - \mathrm{k.dim} M/IM$.
(3) 任给 m 中序列 $a_1, ..., a_n$, 它是 M-正则序列的充要条件是

$$\mathrm{k.dim} M/(a_1, ..., a_n)M = \mathrm{k.dim} M - n.$$

(4) 任给 m 中序列 $a_1, ..., a_n$, 它是 M-正则序列的充要条件是它是 M 参数系的一部分.

Proof. (1) 因为 $\mathrm{Ass} M \subseteq \mathrm{Supp} M = V(\mathrm{Ann}_R M)$(这时 M 是有限生成模), 所以每个素理想 $P \in \mathrm{Ass} M$ 都包含零化子 $\mathrm{Ann}_R M$, 这说明 $\mathrm{k.dim} R/P \leq \mathrm{k.dim} R/\mathrm{Ann}_R(M) = \mathrm{k.dim} M = \mathrm{depth} M$. 另一个方向的不等号就是 [命题1.48] 所证明的结论. 所以 $\mathrm{k.dim} R/P = \mathrm{depth} M, \forall P \in \mathrm{Ass} M$.

(2) 由 Nakayama 引理知 $IM \neq M$, 所以 $\mathrm{grade}(I, M)$ 是自然数. 下面对 $\mathrm{grade}(I, M) = n$ 作归纳证明结论. 当 $n = 0$ 时, 我们需要说明 $\mathrm{k.dim} M/IM = \mathrm{k.dim} M$. 这时 I 中元素均为 M-零因子, 所以 [引理1.16(2)] 表明存在 $P \in \mathrm{Ass} M$ 使得 $I \subseteq P$. 根据 [引理1.40], 我们知道 R 的素理想 Q 包含 $I + \mathrm{Ann}_R M$ 当且仅当 Q 包含 $\mathrm{Ann}_R(M/IM)$, 易知 $P \supseteq I + \mathrm{Ann}_R M$, 那么 $P \supseteq \mathrm{Ann}_R(M/IM)$, 这意味着 $\mathrm{k.dim} M/IM \geq \mathrm{k.dim} R/P$. 由 (1) 结论得 $\mathrm{k.dim} M/IM \geq \mathrm{k.dim} M$. 另一个方向的不等号是明显的, 所以当 $\mathrm{grade}(I, M) = 0$ 时有 $\mathrm{k.dim} M/IM = \mathrm{k.dim} M$. 现假设结论对 $n-1 (n \geq 1)$ 的情形成立, 我们还需要证明当 $\mathrm{grade}(I, M) = n$ 时 $\mathrm{k.dim} M - \mathrm{k.dim} M/IM = n$. 取 I 中一个 M-正则元 a, 则 [引理1.33(2)] 表明 $\mathrm{grade}(I, M/aM) = \mathrm{grade}(I, M) - 1 = n - 1, \mathrm{depth}(M/aM) = \mathrm{depth} M - 1$, [推论1.47] 保证了 $\mathrm{k.dim} M/aM = \mathrm{k.dim} M - 1$. 故 M 是 Cohen-Macaulay 模的条件也保证了 M/aM 也是 Cohen-Macaulay 模. 现在针对 M/aM 应用归纳假设, 得到 $\mathrm{grade}(I, M/aM) = \mathrm{k.dim}\ M/aM - \mathrm{k.dim} M/IM$. 再代入 $\mathrm{grade}(I, M/aM) = \mathrm{grade}(I, M) - 1$ 以及 $\mathrm{k.dim} M/aM = \mathrm{k.dim} M - 1$ 即得结论.

(3) 必要性已经在 [推论1.47] 中证明过了, 这里仅证充分性：由 (2) 证明的结论我们知道对理想 $I = (a_1, ..., a_n)$, 有 $\mathrm{grade}(I, M) = n$. 再应用 [推论1.95] 得到 $a_1, ..., a_n$ 是 M-正则序列.

(4) 根据 [命题1.46], $\mathrm{k.dim} M/(a_1, ..., a_n)M = \mathrm{k.dim} M - n$ 的充要条件是 $a_1, ..., a_n$ 是 M 参数系的一部分. 所以 (3) 中的等价性蕴含 (4) 中的等价性. □

让我们来看看上述定理可以告诉我们些什么.

[定理2.5(1)] 说 Noether 局部环上的非零有限生成 Cohen-Macaulay 模的相关素理想集就是 Supp$M$ 中极小元全体. 特别地, 取 $M = R$ 得到当 R 是 Cohen-Macaulay 局部环时, Ass$R$ 就是 R 的极小素理想集. 以后会基于此说明 Cohen-Macaulay 性质的几何特征 (见 [例2.22]).

[定理2.5(4)] 说给定交换 Noether 局部环 (R, m) 上的非零有限生成 Cohen-Macaulay 模 M, 那么对任何 m 中序列 $a_1, ..., a_n$, 它是 M-正则序列的充要条件是它是 M 参数系的一部分. 那么我们得到下述满射:

$$\Phi : \{\{a_i\}_{i=1}^n | a_1, ..., a_n \text{是} M\text{-正则序列}\} \to \{\{a_1, ..., a_n\} | \{a_1, ..., a_n\} \text{是} M \text{某个参数系的一部分}\}$$
$$\{a_i\}_{i=1}^n \mapsto \{a_1, ..., a_n\}$$

当 $\mathrm{grade}(m, M) = 0$, 即 m 中不含任何 M-正则元时, 上述映射的定义域与陪域两个集合都是空集. 我们没办法直接说 Φ 是双射, 原因是正则序列这个概念是有序的, 而参数系是无序的. 每个参数系 $\{a_1, ..., a_n\}$ 会产生 $n!$ 个 M-正则序列 $a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}, \sigma \in S_n$(回忆 [命题1.6] 说 Noether 局部环上有限生成模的正则序列重排仍正则), 因此我们无法保证 Φ 是单的. 根据 Φ 的定义不难看到每个极大 M-正则序列 $a_1, ..., a_n$ 给出 M 的一个参数系 $\{a_1, ..., a_n\}$. 反之, M 的每个参数系 $\{a_1, ..., a_n\}$ 可以产生 $n!$ 个极大 M-正则序列 $a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}, \sigma \in S_n$.

Proposition 2.6. 设含幺交换环 R 是 Noether 环, M 是有限生成 R-模, 那么对任何 M-正则序列 $a_1, ..., a_n$, 只要 M 是 Cohen-Macaulay 模, 则 $M/(a_1, ..., a_n)M$也是 Cohen-Macaulay 模.

Proof. 先对 Noether 局部环的情形证明, 再把一般情形根据定义转化为特殊情形处理.

Step1. 当 R 是局部环时, 不妨设 $M \neq 0$, 则由 [推论1.47] 得 $\mathrm{k.dim}\ M/(a_1, ..., a_n)M = \mathrm{k.dim}\ M - n$, 由 [引理1.33(2)] 得 $\mathrm{depth}\ M/(a_1, ..., a_n)M = \mathrm{depth} M - n$, 故由 Cohen-Macaulay 模的定义即得.

Step2. 对任何极大理想 m, 有 R_m-模同构 $(M/(a_1, ..., a_n)M)_m \cong M_m/(a_1/1, ..., a_n/1)M_m$. 当 $m \in \mathrm{Supp}M$ 时, 由 [推论1.8] 知 $a_1/1, ..., a_n/1$ 是 M_m-正则序列. 由局部情形证明的结论即得结果. □

特别地, 如果 R 是 Cohen-Macaulay 环, 那么对任何 R-正则序列 $a_1, ..., a_n$, 商环 $R/(a_1, ..., a_n)$ 也是 Cohen-Macaulay 环. 我们来看一个应用这个观察的例子.

Example 2.7. 设含幺交换 Noether 环 R 满足多项式环 $R[x]$ 是 Cohen-Macaulay 环, 则 R 也是 Cohen-Macaulay 环. 以后我们会看到这事实上是充要条件 (见 [定理2.16]).

Proof. 由 x 是 $R[x]$ 的一个正则元得 $R \cong R[x]/(x)$ 是 Cohen-Macaulay 环. □

当 R 是 Noether 局部环时, 在同样的条件下上述命题的逆命题也成立.

Proposition 2.8. 设含幺交换环 R 是 Noether 局部环, M 是有限生成 R-模, 那么对任何 M-正则序列 $a_1, ..., a_n$, M 是 Cohen-Macaulay 模的充要条件是 $M/(a_1, ..., a_n)M$ 也是 Cohen-Macaulay 模.

Proof. 由 [命题2.6] 已证结论, 这里仅要证充分性. 设 $M \neq 0$. 若序列 $a_1, ..., a_n$ 使 $M/(a_1, ..., a_n)M$ 是 Cohen-Macaulay 模, 那么由 [推论1.47] 以及 [引理1.33(2)] 得 $\mathrm{k.dim}M - n = \mathrm{k.dim}\ M/(a_1, ..., a_n)M = \mathrm{depth}\ M/(a_1, ..., a_n)M = \mathrm{depth}M - n$. 所以 $\mathrm{k.dim}M = \mathrm{depth}\ M$, 即 M 是 Cohen-Macaulay 模. □

下述性质说对交换 Noether 环上的有限生成模, Cohen-Macaulay 性质关于局部化封闭.

Theorem 2.9. 设含幺交换环 R 是 Noether 环, M 是有限生成 R-模, S 是 R 的乘闭子集, 那么当 M 是 Cohen-Macaulay 模时, M_S 作为 R_S-模也是 Cohen-Macaulay 模.

Proof. 证明分为两步, 先说明当 R 是局部环且 M 是 Cohen-Macaulay 模时, 对每个素理想 P, M_P 作为 R_P-模是 Cohen-Macaulay 模. 再把对一般情形化归到对素理想作局部化的特殊情形处理.

Step1. 设 R 是 Noether 局部环. 任取 R 的素理想 P, 我们说明 M_P 是 Noether 局部环 R_P 上的 Cohen-Macaulay 模并且当 $M_P \neq 0$ 时有 $\mathrm{grade}(P,M) = \mathrm{depth}_{R_P}M_P$. 如果 $M_P = 0$, 结论直接成立, 所以我们不妨设 $P \in \mathrm{Supp}M$, 进而 $\mathrm{depth}M_P$ 总是自然数. 下面对自然数 $n = \mathrm{depth}M_P$ 作归纳证明结论. 当 $n = 0$ 时, R_P 的极大理想 P_P 中的每个元素都是 M_P-零因子, 应用 [引理1.16(2)] 可知 $P_P \in \mathrm{Ass}_{R_P}(M_P)$, 那么 [引理1.17(2)] 保证了 $P \in \mathrm{Ass}_R(M)$(这也告诉我们 $\mathrm{grade}(P,M) = 0$). 下面我们先说明 P 是 $\mathrm{Supp}M$ 中极小元, 再基于此得到 $\mathrm{k.dim}_{R_P}M_P = 0$. 因为 M 是 Noether 局部环 R 上的 Cohen-Macaulay 模, 所以 [定理2.5(1)] 保证了 $\mathrm{k.dim}R/P = \mathrm{depth}_R M$. 如果 P 不是 $\mathrm{Supp}M$ 中的极小元, 那么存在 $\mathrm{Supp}M$ 的极小元 Q 使得 $Q \subsetneq P$, [引理1.17(3)] 说 $Q \in \mathrm{Ass}_R(M)$, 因此也有 $\mathrm{k.dim}R/Q = \mathrm{depth}_R M$. 这得到 $\mathrm{k.dim}R/P = \mathrm{k.dim}R/Q$, 矛盾! 因此 P 是 $\mathrm{Supp}M$ 中极小元, 下面说明 $\mathrm{k.dim}_{R_P}M_P = 0$ 来完成 $n = 0$ 情形的证明. $\mathrm{k.dim}_{R_P}M_P = \mathrm{k.dim}R_P/(\mathrm{Ann}_{R_P}M_P)$, 而 R_P 的任何包含 $\mathrm{Ann}_{R_P}M_P$ 的素理想 Q_P(这里 Q 是 R 的素理想且 $Q \subseteq P$) 都在 $\mathrm{Supp}_{R_P}M_P$ 中, 于是 $(M_P)_{Q_P} \neq 0$, 所以 $M_Q \neq 0$, 即 $Q \in \mathrm{Supp}M$, 而 P 是 $\mathrm{Supp}M$ 中极小元迫使 $Q = P$, 所以 $\mathrm{k.dim}R_P/(\mathrm{Ann}_{R_P}M_P) = 0$. 故当 $n = 0$ 时我们得到了 $\mathrm{k.dim}_{R_P}M_P = \mathrm{depth}_{R_P}M_P = \mathrm{grade}(P,M) = 0$. 现在假设结论对 $n-1(n \geq 1)$ 的情形成立, 考察 $\mathrm{depth}_{R_P}M_P = n \geq 1$ 的情形, 因为 P_P 中有 R_P-正则元, 所以可取 P 中 M-正则元 a 使得 $a/1$ 是 M_P-正则元, 依 [引理1.33(2)], 我们得到 $\mathrm{depth}_{R_P}M_P/(a/1)M_P = n-1$. 由于 $a/1$ 是 M_P-正则元, 应用 [推论1.47] 得 $\mathrm{k.dim}_{R_P}M_P/(a/1)M_P = \mathrm{k.dim}_{R_P}M_P - 1$. 我们对 M/aM 应用归纳假设, 得到 $M_P/(a/1)M_P$ 作为 R_P-模是 Cohen-Macaulay 模且 $\mathrm{grade}(P, M/aM) = \mathrm{depth}_{R_P}M_P/(a/1)M_P = n-1$, 所以 $\mathrm{depth}_{R_P}M_P/(a/1)M_P = \mathrm{k.dim}_{R_P}M_P/(a/1)M_P$, 这也说明 $\mathrm{k.dim}_{R_P}M_P = n = \mathrm{depth}_{R_P}M_P$. 所以 M_P 作为 R_P-模是 Cohen-Macaulay 模. 并且对前面得到的 $\mathrm{grade}(P, M/aM) = n-1$ 应用 [引理1.33(2)] 可得 $\mathrm{grade}(P,M) = n = \mathrm{k.dim}_{R_P}M_P$. 总结一下, 现在我们证明了对 Noether 局部环 R 上的有限生成 R-模 M, 当 M 是 Cohen-Macaulay 模时, 对 R 的任何素理想 P, R_P-模 M_P 总是 Cohen-Macaulay 模, 并且当 $P \in \mathrm{Supp}M$ 时, $\mathrm{grade}(P,M) = \mathrm{depth}_{R_P}M_P$.

Step2. 现在处理一般情形, 不妨设乘闭子集 S 使 $M_S \neq 0$, 任取 $\mathrm{Supp}_{R_S}(M_S)$ 中的极大理想 I, 存在唯一的 R 的素理想 Q 使得 $Q \cap S = \varnothing$ 且 $Q_S = I$. 那么我们有环同构 $R_Q \cong (R_S)_{Q_S}$(具体地, 命 $f: R_Q \to (R_S)_{Q_S}, a/t \mapsto (as/s)/(ts/s)$ 可直接验证这是定义合理的环同构). 类似地, 取 R 的极大理想 m 使得 $m \supseteq Q$, 则乘闭子集 $R-m$ 同样与 Q 不交, 也有 $R_Q \cong (R_m)_{Q_m}$, 因此我们得到了环同构 $(R_m)_{Q_m} \cong (R_S)_{Q_S}$. 于是可将 $(M_S)_{Q_S}$ 利用该同构视作 $(R_m)_{Q_m}$-模, 数乘作用为

$$(R_m)_{Q_m} \times (M_S)_{Q_S} \to (M_S)_{Q_S}, (\frac{a/u}{b/v}, \frac{x/s}{c/t}) \mapsto \frac{avx/s}{buc/t}.$$

可直接验证

$$\varphi: (M_S)_{Q_S} \to (M_m)_{Q_m}, \frac{x/s}{c/t} \mapsto \frac{x/s}{c/t}$$

是定义合理的 $(R_m)_{Q_m}$-模同构 (先验证 M_Q 与 $(M_S)_{Q_S}, (M_m)_{Q_m}$ 之间的两个自然映射都是加群同构来得到 φ 是加群同构, 再计算验证 φ 确实保持数乘作用). 如果 $m \notin \mathrm{Supp}M$, 那么 $(M_S)_{Q_S}$ 是零模, 它是 Cohen-Macaulay 模. 否则, $M_m \neq 0$, 由 M 作为 R-模是 Cohen-Macaulay 模知 M_m 作为 Noether 局部环 R_m 上的有限生成模是 Cohen-Macaulay 模, 现在我们应用 **Step1.** 所证明的结果, 得到 $(M_m)_{Q_m}$ 作为 $(R_m)_{Q_m}$-模是 Cohen-Macaulay 模, 前面已经说明了 $(R_m)_{Q_m}$-模同构 $(M_m)_{Q_m} \cong (M_S)_{Q_S}$, 所以 $(M_S)_{Q_S}$ 作为 $(R_m)_{Q_m}$-模是

Cohen-Macaulay 模. 最后我们需要说明 $(M_S)_{Q_S}$ 作为 $(R_S)_{Q_S}$ 上的有限生成模是 Cohen-Macaulay 模. 而这由 $\mathrm{depth}_{(R_m)_{Q_m}}(M_S)_{Q_S} = \mathrm{depth}_{(R_S)_{Q_S}}(M_S)_{Q_S}$ 以及 $\mathrm{k.dim}_{(R_m)_{Q_m}}(M_S)_{Q_S} = \mathrm{k.dim}_{(R_S)_{Q_S}}(M_S)_{Q_S}$(验证它) 便完成证明. $\square$

上述定理证明过程也告诉我们：

Corollary 2.10. 设 R 是含幺交换 Noether 局部环, 有限生成模 M 是 R 上的 Cohen-Macaulay 模, 则对任何 $P \in \mathrm{Supp}M$, 有 $\mathrm{grade}(P, M) = \mathrm{depth}_{R_P} M_P$.

[定理2.9] 体现了 Cohen-Macaulay 性质在局部化意义下具有稳定性. 特别地, Cohen-Macaulay 模在任何素理想处的局部环当然也是 Cohen-Mcaulay 模, 由此我们可以得到 Noether 局部环上 Cohen-Macaulay 模的维数公式.

Corollary 2.11. 设含幺交换环 R 是 Noether 局部环, 有限生成 R-模 M 是 Cohen-Macaulay 模, 那么对任何素理想 $P \in \mathrm{Supp}M$, 有 $\mathrm{k.dim}_R M = \mathrm{k.dim}_{R_P} M_P + \mathrm{k.dim}_R M/PM$. 特别地, 如果含幺交换 Noether 局部环 R 是 Cohen-Macaulay 环, 我们有

$$\mathrm{k.dim}R = \mathrm{k.dim}R_P + \mathrm{k.dim}R/P, \forall P \in \mathrm{Spec}R.$$

这里 $\mathrm{k.dim}R_P$ 可替换为 $\mathrm{ht}P$, 得到公式 $\mathrm{k.dim}R = \mathrm{ht}P + \mathrm{k.dim}R/P, \forall P \in \mathrm{Spec}R$.

Proof. 如果 $M_P \neq 0$, 那么 $M/PM \neq 0$. [定理2.9] 保证了 M_P 是 Cohen-Macaulay 模, 因为 R 是 Noether 局部环, 所以 [定理2.5(2)] 表明 $\mathrm{grade}(P, M) = \mathrm{k.dim}M - \mathrm{k.dim}M/PM$. 由 [推论2.10] 得到 $\mathrm{grade}(P, M) = \mathrm{depth}_{R_P} M_P = \mathrm{k.dim}_{R_P} M_P$, 再代入前面的等式得到结论. $\square$

回忆含幺交换环 R 的理想 I 的**高度** $\mathrm{ht}I = \inf\{\mathrm{ht}P | P \in V(I)\} = \inf\{\mathrm{k.dim}R_P | P \in V(I)\}$(如果 $I = R$, 那么 $\mathrm{ht}I = +\infty$), 所以 [定理2.9] 使我们可以得到 Cohen-Macaulay 环的一个等价定义.

Corollary 2.12. 设含幺交换 Noether 环 R 是 Cohen-Macaulay 环, 那么对任何真理想 I, 有 $\mathrm{ht}I = \mathrm{grade}(I, R)$. 反之, 如果 R 满足对任何极大理想 m 有 $\mathrm{ht}m = \mathrm{grade}(m, R)$, 则 R 是 Cohen-Macaulay 环. 所以 Noether 环 R 是 Cohen-Macaulay 环当且仅当对任何极大理想 m 有 $\mathrm{ht}m = \mathrm{grade}(m, R)$([**?**] 中使用这个条件来定义 Cohen-Macaulay 环).

Proof. 先说明对 Cohen-Macaulay 环 R 的任何真理想 I, 有 $\mathrm{ht}I = \mathrm{grade}(I, R)$. 根据 [定理2.9], 对任何素理想 P 有 R_P 是 Cohen-Macaulay 环, 所以 $\mathrm{k.dim}R_P = \mathrm{depth}_{R_P} R_P, \forall P \in \mathrm{Spec}(R)$. 于是由 [引理1.33(1)] 得到 $\mathrm{ht}I = \mathrm{grade}(I, R)$. 现设交换 Noether 环 R 满足对任何极大理想 m 有 $\mathrm{ht}m = \mathrm{grade}(m, R)$, 只要证对每个极大理想 m, 有 R_m 是 Cohen-Macaulay 环. 只需注意到 $\mathrm{grade}(m, R) = \mathrm{grade}(m_m, R_m) = \mathrm{depth}_{R_m} R_m$(用 [引理1.33](1) 或 [推论2.10]) 以及 $\mathrm{ht}m = \mathrm{k.dim}R_m$ 即得结果. $\square$

用了上述推论对 Cohen-Macaulay 环的刻画, 我们可以说明交换 Artin 环 (这等价于 0 维 Noether 环) 总是 Cohen-Macaulay 环. 回忆左 Artin 环 R 的元素 a 是左正则元当且仅当 a 可逆.

Example 2.13. 设 R 是含幺交换 Artin 环, 则 R 是 Cohen-Macaulay 环.

Proof. 根据 [推论2.12] 所给出的刻画, 要验证任何极大理想 m 满足 $\mathrm{ht}m = \mathrm{grade}(m, R)$. 因为 Artin 环的素理想总是极大理想, 所以任何极大理想 m 的高度是 0. 因此只要说明对任何极大理想 m 有 $\mathrm{grade}(m, R) = 0$. 而 R 中任何 R-正则元必定可逆, 所以 m 中不存在 R-正则元, 这迫使 m 在 R 中极大正则序列的长度是 0, 即 $\mathrm{grade}(m, R) = 0$. 所以 $\mathrm{ht}m = \mathrm{grade}(m, R)$. □

Corollary 2.14. 设 R 是 Cohen-Macaulay 局部环, m 是极大理想, $a_1, ..., a_n$ 是 m 中序列, 则以下四条等价:
(1)$a_1, ..., a_n$ 是 R-正则序列.
(2) 对任给正整数 $1 \leq j \leq n$ 有 $\mathrm{ht}(a_1, ..., a_j) = j$.
(3)$\mathrm{ht}(a_1, ..., a_n) = n$.
(4)$a_1, ..., a_n$ 是 R 参数系的一部分.

Proof. (1) 与 (4) 的等价性在 [定理2.5] 中已证, (2)⇒(3) 是明显的, 所以我们要证的只有 (1)⇒(2) 以及 (3)⇒(1). 先证 (1)⇒(2): 这时对每个正整数 j 有 R-正则序列 $a_1, ..., a_j$, 所以根据 [推论1.95], $\mathrm{grade}((a_1, ..., a_j), R) = j$, 所以由 [推论2.12] 知 $\mathrm{ht}(a_1, ..., a_j) = \mathrm{grade}((a_1, ..., a_j), R) = j$. 现在证 (3)⇒(1): [推论2.12] 保证了 $\mathrm{grade}((a_1, ..., a_n), R) = n$, 所以再次应用 [推论1.95] 即得结果. □

下面我们说明含幺交换环 R 是 Cohen-Macaulay 环的充要条件是多项式环 $R[x]$ 是 Cohen-Macaulay 环. 在此之前我们需要一个引理 (可跳过, 事实上后面证明过程中只需要 [引理1.33(1)]).

Lemma 2.15. 给定含幺交换 Noether 环 R 的理想 I, 则 $\mathrm{grade}(I, R) \leq \mathrm{ht}I$.

Proof. 不妨设 I 是真理想, 则由 [引理1.33(1)] 知 $\mathrm{grade}(I, R) = \inf\{\mathrm{depth}R_P | P \in V(I)\}$, 而 Noether 局部环 R_P 满足 $\mathrm{depth}R_P \leq \mathrm{k.dim}R_P$, 故由 $\mathrm{ht}I = \inf\{\mathrm{k.dim}R_P | P \in V(I)\}$ 得 $\mathrm{grade}(I, R) \leq \mathrm{ht}I$. □

Theorem 2.16. 设 R 是含幺交换 Noether 环, 则 R 是 Cohen-Macaulay 环的充要条件是多项式环 $R[x]$ 是 Cohen-Macaulay 环.

Proof. 充分性在 [例2.7] 中已证, 这里仅证必要性：要证明 $R[x]$ 是 Cohen-Macaulay 环, 只要证对任何 $R[x]$ 的极大理想 Q 有 $(R[x])_Q$ 是 Cohen-Macaulay 环即可. 取 $P = R \cap Q$ 是 R 的素理想, 那么在 $R[x]$ 中 $R - P$ 是乘闭子集 $R[x] - Q$ 的子集. 考虑 $R[x]$ 在乘闭子集 $R - P$ 处的局部化 $(R[x])_{R-P}$, 那么由局部化的基本性质知道 $(R[x])_Q \cong ((R[x])_{R-P})_{(R[x]-Q)_{R-P}}$. 而 $R[x]$ 在 $R - P$ 处的局部化同构于 $R_P[x]$(通过局部化泛性质验证它), 具体地, 有下述环同构：

$$\eta : R_P[x] \to (R[x])_{R-P}$$
$$\frac{a_0}{s_0} + \frac{a_1}{s_1}x + \cdots + \frac{a_n}{s_n}x^n \mapsto \frac{a_0}{s_0} + \frac{a_1 x}{s_1} + \cdots + \frac{a_n x^n}{s_n}$$

由 P 的定义知 $Q \cap (R - P) = \varnothing$, 进而 Q_{R-P} 是 $(R[x])_{R-P}$ 中的极大理想, 利用 η 得到它对应 $R_P[x]$ 中的极大理想 $\eta^{-1}(Q_{R-P})$, 满足 $P_P \subseteq \eta^{-1}(Q_{R-P})$. 所以 $(R[x])_Q$ 同构于 $R_P[x]$ 在极大理想 $\eta^{-1}(Q_{R-P})$ 处的局部化, 该极大理想满足 $\eta^{-1}(Q_{R-P}) \cap R_P = P_P$. 用 R 代替 R_P, Q 代替 $\eta^{-1}(Q_{R-P})$, m 代替 P_P, 因为 R_P 也是 Cohen-Macaulay 的, 所以我们可以看到要证明原问题只需证明对 Cohen-Macaulay 局部环 (R, m) 以及 $R[x]$ 的满足 $Q \cap R = m$ 的极大理想 Q, 有 $\mathrm{k.dim}(R[x])_Q = \mathrm{grade}(Q_Q, (R[x])_Q)$.

Claim. $\mathrm{k.dim}(R[x])_Q = \mathrm{ht}Q \leq \mathrm{grade}(Q_Q, (R[x])_Q)$.
注意到 $R[x]/m[x] \cong (R/m)[x]$ 是 P.I.D., 所以 $Q/m[x]$ 是主理想, 并且存在 $R[x]$ 中的首一多项式 $f(x)$ 使得

$Q = (m, f(x))$. 设 $n = \mathrm{grade}(m, R)$, 并取 m 中极大 R-正则序列 $a_1, ..., a_n$, 根据 [定理2.5] 下面的注记, 我们知道 $a_1, ..., a_n$ 是 Cohen-Macaulay 局部环 R 的一个参数系, 所以存在正整数 s 使得 $m^s \subseteq (a_1, ..., a_n)$, 所以 $Q^s \subseteq (m^s, f(x)) \subseteq (a_1, ..., a_n, f(x))$, 这一观察说明 Q 是理想 $(a_1, ..., a_n, f(x))$ 上唯一的极小素理想, 依广义 Krull 主理想定理, 我们得到 $\mathrm{ht}Q \leq n + 1 = \mathrm{grade}(m, R) + 1$. 下面我们说明 $\mathrm{grade}(m, R) + 1$ 有上界 $\mathrm{grade}(Q, R[x])$ 来完成证明. 因为 $a_1, ..., a_n$ 是 R-正则序列, 因此 $a_1, ..., a_n$ 也是 $R[x]$-正则序列 (验证它), 利用 $f(x)$ 是首一多项式易得 $a_1, ..., a_n, f(x)$ 是 $R[x]$-正则序列 (验证它), 因此 $\mathrm{grade}(m, R) + 1 \leq \mathrm{grade}(Q, R[x])$, 再利用 [引理1.33(1)] 知道

$$\mathrm{ht}Q \leq n + 1 = \mathrm{grade}(m, R) + 1 \leq \mathrm{grade}(Q, R[x]) \leq \mathrm{grade}(Q_Q, (R[x])_Q),$$

断言得证. 而 $\mathrm{grade}(Q_Q, (R[x])_Q) \leq \mathrm{k.dim}(R[x])_Q$ 总是成立的 (前面的 [引理2.15]), 证毕. □

通过对未定元数目作归纳我们马上得到下述推论.

Corollary 2.17. 设含幺交换 Noether 环 R 是 Cohen-Macaulay 环, 则多项式环 $R[x_1, ..., x_n]$ 是 Cohen-Macaulay 环. 特别地, 当 R 是交换 Artin 环时, $R[x_1, ..., x_n]$ 是 Cohen-Macaulay 环.

以后我们会说明正则局部环也是 Cohen-Macaulay 环 (见 [定理2.34]). 在本节的最后我们来解释 Cohen-Macaulay 环这个概念命名的缘由.

Definition 2.18. 若含幺交换 Noether 环 R 的真理想 I 满足相关素理想集 $\mathrm{Ass}_R(R/I)$ 中所有素理想的高度一致, 称 I 是 **unmixed**. 若 R 满足对任给自然数 $r \geq 0$, 以 r 为高度且可由 r 个元素生成的真理想 I 都 unmixed, 称 R 满足 **unmixedness 定理**.

根据 unmixed 理想的定义我们马上看到:

Lemma 2.19. 设 R 是含幺交换 Noether 环, $I = (a_1, ..., a_r)$ 是真理想且 $\mathrm{ht}I = r$, 那么 I 是 unmixed 理想的充要条件是 $\mathrm{Ass}(R/I)$ 中元素都是 (包含关系下) 极小元.

Proof. 必要性：如果 $\mathrm{Ass}(R/I)$ 中有素理想链 $Q \subsetneq P$, 那么 P 与 Q 高度不同, 矛盾. 充分性：这时 $\mathrm{Ass}(R/I)$ 中元素也都是 $\mathrm{Supp}(R/I)$ 中极小元, 所以是包含 I 的极小素理想, 依广义 Krull 主理想定理, 任何包含 I 的素理想高度不超过 r, 而 $\mathrm{ht}I = r$, 故每个 R/I 的相关素理想具有高度 r. □

F. S. Macaulay(英国, 1862-1937) 于 1916 年证明了域上的 n 元多项式环满足 unmixedness 定理, I. S. Cohen(美国, 1917-1955) 于 1946 年证明了正则局部环满足 unmixedness 定理. 这也是 Cohen-Macaulay 环命名的原因.

Theorem 2.20. 设 R 是含幺交换 Noether 环, 则 R 满足 unmixedness 定理的充要条件是 R 是 Cohen-Macaulay 环.

Proof. 充分性：设 R 是 Cohen-Macaulay 环, 假设 R 不满足 unmixedness 定理, 那么有高度为 r 的理想 $I = (a_1, ..., a_r)$ 使得 $\mathrm{Ass}(R/I)$ 中有非极小元, 即存在相关素理想 $Q \subsetneq P$, 现对 R 关于素理想 P 作局部化, 则 $\mathrm{ht}I_P = r, I_P = (a_1/1, ..., a_r/1), Q_P \subsetneq P_P$. 用 R 替换 R_P, I 替换 I_P, 我们可以不妨设 R 是 Cohen-Macaulay 局部环. 故 [推论2.14] 表明 $a_1, ..., a_n$ 是 R-正则序列, 从而 [命题2.6] 保证了 R/I 是 Cohen-Macaulay 模, 进而

由 [定理2.5(1)] 知 R/I 的相关素理想集恰好是 $\mathrm{Supp}(R/I)$ 的极小元全体, 也就是说 $\mathrm{Ass}(R/I)$ 中素理想都是极小元, 矛盾.

必要性：设 R 满足 unmixedness 定理, 依 [推论2.12], 要证 R 是 Cohen-Macaulay 环, 只要验证任何极大理想 $\mathfrak{m}$ 有 $\mathrm{ht}\mathfrak{m} = \mathrm{grade}(\mathfrak{m}, R)$. 为此只需证任何高度为 r 的素理想 P 有 $\mathrm{grade}(P, R) \geq r$ 即可. 取 P 中序列 $a_1, ..., a_r$ 使得 $\mathrm{ht}(a_1, ..., a_i) = i, \forall 1 \leq i \leq r$(具体操作如下：设 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$ 是素理想链, 取 $a_1 \in P_1$ 使得 a_1 不在任何极小素理想中, 那么由广义 Krull 主理想定理得 $\mathrm{ht}(a_1) = 1$, 如果已经取好了 $a_1, ..., a_{i-1} \in P$ 使得 $\mathrm{ht}(a_1, ..., a_{i-1}) = i - 1$, 这里 $i \leq r$, 那么取 $a_i \in P_i$ 使得 a_i 不落在任何 $(a_1, ..., a_{i-1})$ 上极小素理想中, 那么包含 $(a_1, ..., a_i)$ 的任何极小素理想 Q 不可能是 $(a_1, ..., a_{i-1})$ 上极小素理想, 进而 $\mathrm{ht}Q \geq i$, 再由广义 Krull 主理想定理得到 Q 的高度是 i, 由此知 $\mathrm{ht}(a_1, ..., a_i) = i$). 那么由 R 满足 unmixedness 定理得到 $R/(a_1, ..., a_i)$ 的相关素理想都是极小的, 高度均为 i. 进而知 a_{i+1} 不可能在 $R/(a_1, ..., a_i)$ 的相关素理想中 (因为任何一个包含 $(a_1, ..., a_i, a_{i+1})$ 的素理想高度至少是 $i + 1$), 于是 [引理1.16(2)] 保证了 a_{i+1} 是 $R/(a_1, ..., a_i)$-正则元. 因此 $a_1, ..., a_r$ 是含于素理想 P 的 R-正则序列, 这说明 $\mathrm{grade}(P, R) \geq r$. □

2.2 Universally catenary 环

给定交换 Noether 环 R 的素理想 $P \subseteq Q$, 若 $\mathrm{Spec}(R)$ 的全序子集 $\mathscr{C}$ 满足 (1)$P, Q \in \mathscr{C}$, (2) 对每个 $I \in \mathscr{C}$, 有 $P \subseteq I \subseteq Q$, 则称 $\mathscr{C}$ 是 **P 与 Q 之间的素理想链**. 因为 R 是 Noether 的, 所以 P 与 Q 之间的所有素理想链长度必定不超过自然数 $\mathrm{k.dim}R_Q$(假设 $\mathscr{C}$ 是 P 与 Q 之间的素理想链中素理想个数超过 $\mathrm{k.dim}R_Q$, 我们可以构造一个长度为 $\mathrm{k.dim}R_Q + 1$ 的素理想链：$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_{\mathrm{k.dim}R_Q+1} = Q$, 这对应 Noether 局部环 R_Q 中一条长度为 $\mathrm{k.dim}R_Q + 1$ 的素理想链, 得到矛盾). 因而 $\{\mathscr{C} \subseteq \mathrm{Spec}(R) | \mathscr{C}\text{是}P\text{与}Q\text{之间的素理想链}\}$(关于包含关系) 总有极大元, 称该偏序集中的极大素理想链为 **P 与 Q 之间的极大素理想链** (maximal chain of primes between P and Q), 根据前面的讨论知这样的极大素理想链是有限长, 长度被 R_Q 的 Krull 维数控制. 如果含幺交换 Noether 环 R 的任何素理想 $P \subseteq Q$ 满足它们之间的所有极大素理想链有相同的长度, 称 R 满足**饱和链条件** (saturated chain condition). 把满足饱和链条件的环 R 称为是 **catenary 环**. catenary 这个词来自拉丁语 catena, 意为“链”. catenary 环的概念可以在任何含幺交换环上定义, 这里不作展开. 如果含幺交换 Noether 环 R 满足 R 上任何有限生成交换代数是 catenary 环, 则称 R 是 **universally catenary 环**. 根据 universally catenary 环的定义我们马上看到 universally catenary 环的同态像仍 universally catenary：

Lemma 2.21. 设 R, S 是含幺交换 Noether 环, R 到 S 有满环同态. 则当 R 是 universally catenary 环时, S 也是 universally catenary 环.

Proof. 这时任何有限生成 S-代数可天然视作有限生成 R-代数, 再由 catenary 是环论性质即得. □

设 k 是代数闭域, 回忆仿射簇 $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ 在一点 p 处的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的 Krull 维数给出 X 在 p 点的局部维数 $\dim_p X$. 我们将说明 Cohen-Macaulay 性质在几何中可以保证“局部等维性”. 通过加强形式的 Noether 正规化定理我们可以证明对任何 k 上仿射整区 R 的任何一条极大素理想链长度就是 R 的 Krull 维数 (这里 k 不是代数闭域时结论也成立, 证明可参见 [推论3.9], 感兴趣的读者也可以参考 [Eis04, Chapter 13, Theorem A]), 进而知 $\mathrm{ht}P + \mathrm{k.dim}R/P = \mathrm{k.dim}R, \forall P \in \mathrm{Spec}(R)$(任取一条含 P 的极大素理想链可知 $\mathrm{k.dim}R \leq \mathrm{ht}P + \mathrm{k.dim}R/P$, 另一个方向的等号明显成立). 对不可约仿射簇 $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, 取 $R = k[x_1, ..., x_n]$, $P = I(X)$, 记 m_p 是 p 所对应的 R 的极大理想, 取零理想与 m_p 之间一条含有 $I(X)$ 的极大素理想链 $\{0\} = Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq I(X) \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n = m_p$,

那么我们得到了 $I(X)$ 与 m_p 之间的极大素理想链, 它的长度是 $\text{k.dim}A(X) = \text{k.dim}k[x_1, ..., x_n]/I(X)$, 该素理想链对应某个 X 的不可约闭子集降链, 因而 $\text{k.dim}A(X) \leq \text{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}$. 但 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 $A(X)$ 在一个极大理想处的局部化表明 $\text{k.dim}\mathcal{O}_{X,p} \leq \text{k.dim}A(X)$. 由此知道 $\text{k.dim}\mathcal{O}_{X,p} = \text{k.dim}A(X)$. 代数角度看这个等式告诉我们不可约仿射簇的正则函数环 $A(X)$ 在任何极大理想处作局部化不改变 Krull 维数. 几何角度看这个等式告诉我们不可约仿射簇 X 的维数 $\text{dim}X$ 与 X 在任何 $p \in X$ 处的局部维数 $\text{dim}_p X$ 相同. 现在我们可以给出 Cohen-Macaulay 环在几何上反映局部等维性的证明.

Example 2.22 (Cohen-Macaulay 性保证局部等维性)**.** 设 k 是代数闭域, $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ 是仿射簇, $p \in X$, 如果仿射簇 X 在 p 点的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 Cohen-Macaulay 环, 那么 X 所有含 p 的不可约分支有相同的维数, 该维数是 $\text{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}$.

Proof. 任取 X 含有 p 的不可约分支 Y, 那么 $I(Y)/I(X)$ 是 $A(Y)$ 的极小素理想. 记 p 对应 $A(X)$ 中的极大理想是 m_p. 则 $A(X)_{m_p}$ 是 Cohen-Macaulay 局部环, 有极小素理想 $(I(Y)/I(X))_{m_p}$. 于是

$$\text{dim}Y = \text{k.dim}\mathcal{O}_{Y,p} = \text{k.dim}A(Y)_{m_p'} = \text{k.dim}\left(\frac{k[x_1, ..., x_n]/I(X)}{I(Y)/I(X)}\right)_{\overline{m_p}} = \text{k.dim}\frac{(k[x_1, ..., x_n]/I(X))_{m_p}}{(I(Y)/I(X))_{m_p}}$$

因为 $(I(Y)/I(X))_{m_p}$ 作为 $A(X)_{m_p}$ 的极小素理想是相关素理想, 所以 [定理2.5(1)] 保证了

$$\text{dim}Y = \text{k.dim}\frac{(k[x_1, ..., x_n]/I(X))_{m_p}}{(I(Y)/I(X))_{m_p}} = \text{k.dim}\frac{A(X)_{m_p}}{(I(Y)/I(X))_{m_p}} = \text{k.dim}A(X)_{m_p} = \text{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}.$$

所以 X 所有过点 p 的不可约分支 Y 有公共的维数, 维数是 $\text{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}$. □

下面我们将证明 Cohen-Macaulay 环都是 universally catenary 环. 为此需要下述引理.

Lemma 2.23. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, 那么对 R 的任何素理想 Q 与含于 Q 的相关素理想 $P \in \text{Ass}R$, 有 Q 与 P 之间的极大素理想链长度不小于 $\text{grade}(Q, R)$. 特别地, 当 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Cohen-Macaulay 局部环时, 所有极大素理想链的长度都是 $\text{k.dim}R$.

Proof. 这里含于 Q 的相关素理想 P 总是存在的, 因为我们可以取 Q 所包含的极小素理想 P, 它作为 $\text{Supp}R$ 的极小元在 $\text{Ass}R$ 中 (回忆 [引理1.17(3)]). 任取 Q 与相关素理想 P 之间的极大素理想链 $P = Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_{l-1} \subsetneq Q_l = Q$, 下面对该极大素理想链长度 $l \geq 0$ 作归纳证明结论.

当 $l = 0$ 时, Q 本身是相关素理想, 即 Q 中元素都是 R-零因子, 所以 $\text{grade}(Q, R) = 0 = l$, 结论成立. 假设结论对长度为 $l-1 (l \geq 1)$ 的极大素理想链成立, 取 $a \in Q - Q_{l-1}$, 那么 Q 是包含理想 $Q_{l-1} + (a)$ 唯一的极小素理想 (否则与上述素理想链的极大性矛盾), 这说明 $\sqrt{Q_{l-1} + (a)} = Q$, 所以根据 [引理1.33(1)] 知 $\text{grade}(Q_{l-1} + (a), M) = \text{grade}(Q, M)$, 对素理想链 $P = Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_{l-1}$ 用归纳假设可知 $l - 1 \geq \text{grade}(Q_{l-1}, M)$. 下面说明 $\text{grade}(Q_{l-1} + (a), M) \leq \text{grade}(Q_{l-1}, M) + 1$ 来完成证明. 设 $Q_{l-1} = (a_1, ..., a_n), \text{grade}(Q_{l-1} + (a), M) = r$, 那么 [定理1.93] 说 $H_j(a_1, ..., a_n, a; M) = 0, \forall n - r + 2 \leq j \leq n + 1$. 因此应用 [引理1.94] 可知 $H_j(a_1, ..., a_n; M) = 0, \forall n - r + 2 \leq j \leq n + 1$. 而 $H_j(a_1, ..., a_n; M) = 0, j = n - r + 2, ..., n$ 说明 $\text{grade}(Q_{l-1}, M) \geq r - 1 = \text{grade}(Q_{l-1} + (a), M) - 1$.

现在我们说明任何极大素理想链之长为 $\text{k.dim}R$. 任何极大素理想链形如 $P_0 \subseteq \cdots \subseteq P_l = m$, 其中 P_0 作为极小素理想是 R 的相关素理想, 进而长度 $l \geq \text{grade}(m, R) = \text{depth}R = \text{k.dim}R$, 得证. □

事实上在上述证明过程使用的方法可以得到下述引理.

Lemma 2.24. 设 (R,m) 是交换 Noether 局部环, M 是有限生成 R-模, 那么对任何理想 I 和 $b_1,...,b_t\in m$, 有 $\mathrm{grade}(I+(b_1,...,b_t),M)\le \mathrm{grade}(I,M)+t$.

Proof. 当 $I=R$ 或 $M=0$ 结论直接成立, 所以我们不妨设 I 是真理想且 $M\ne 0$, 只需证 $t=1$ 的情形, 再归纳地得到结论. 设 $I=(a_1,...,a_n)$, $\mathrm{grade}(I+(b_1),M)=r$, 那么 [定理1.93] 说 $H_j(a_1,...,a_n,b_1;M)=0,\forall n-r+2\le j\le n+1$. 因此应用 [引理1.94] 可知 $H_j(a_1,...,a_n;M)=0,\forall n-r+2\le j\le n+1$. 而 $H_j(a_1,...,a_n;M)=0, j=n-r+2,...,n$ 说明 $\mathrm{grade}(I,M)\ge r-1=\mathrm{grade}(I+(b_1),M)-1$. □

Theorem 2.25. 任何 Cohen-Macaulay 环是 universally catenary 环.

Proof. 因为 Cohen-Macaulay 环上有限个未定元的多项式环仍是 Cohen-Macaulay 的, 所以要证该定理只需验证 Cohen-Macaulay 环的同态像是 catenary 环. 设 R 是 Cohen-Macaulay 环, R 到环 S 有满同态 φ, 则 S 任何给定素理想对 $P\subseteq Q$ 之间的极大素理想链都拉回到 R 上成为 R 两个素理想之间的极大素理想链 (若有极大素理想链 $P=P_0\subsetneq\cdots\subsetneq P_l=Q$, 则有 R 的素理想链 $\varphi^{-1}(P_0)\subsetneq\varphi^{-1}(P_1)\subsetneq\cdots\subsetneq\varphi^{-1}(P_l)$, 并注意 $\varphi^{-1}(P_0)$ 是包含 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的素理想, 由此易验证 $\varphi^{-1}(P_0)\subsetneq\varphi^{-1}(P_1)\subsetneq\cdots\subsetneq\varphi^{-1}(P_l)$ 的极大性). 所以只要验证 Cohen-Macaulay 环是 catenary 环就足够了. 现设 Cohen-Macaulay 环 R 有素理想链 $P\subseteq Q$, 那么任意一条极大素理想链 $P=P_0\subsetneq\cdots\subsetneq P_l=Q$ 与 P 与某个极小素理想间的极大素理想链合并可诱导 R_Q 的一条极大素理想链, 而 [引理2.23] 说这样的极大素理想链长度就是 $\mathrm{k.dim}R_Q$, 所以由 P 与任何相关素理想间的极大素理想链长度恒为 $\mathrm{ht}P$ 得到 $l=\mathrm{k.dim}R_Q-\mathrm{k.dim}R_P$ 是固定的. □

对 Krull 维数有限的交换 Noether 环 R, 如果它是 catenary 环, 那么明显有

Proposition 2.26. 设含幺交换环 R 是 catenary 环并且 $\mathrm{k.dim}R<+\infty$, 则

$$\mathrm{ht}P+\mathrm{k.dim}R/P=\mathrm{k.dim}R,\forall P\in\mathrm{Spec}(R).$$

一般地, 可以将上述维数等式放宽至任何真理想.

Proposition 2.27. 设含幺交换 Noether 环 R 满足 $\mathrm{k.dim}R<+\infty$ 且 $\mathrm{ht}P+\mathrm{k.dim}R/P=\mathrm{k.dim}R,\forall P\in\mathrm{Spec}(R)$. 那么对 R 的任何真理想 I 有 $\mathrm{ht}I+\mathrm{k.dim}R/I=\mathrm{k.dim}R$.

Proof. 因为 R 是交换 Noether 的, 所以包含 I 的素理想全体可设为 $Q_1,...,Q_m$. 根据高度的定义有 $\mathrm{ht}I=\min\{\mathrm{ht}Q_k|1\le k\le m\}$. 不妨设 $\mathrm{ht}I=\mathrm{ht}Q_1$, 则 $\mathrm{k.dim}R/Q_1\ge\mathrm{k.dim}R/Q_k,\forall 1\le k\le m$. 下面断言 $\mathrm{k.dim}R/I=\mathrm{k.dim}R/Q_1$, 一旦证明该断言结论立即成立. 现设 $\mathrm{k.dim}R/I=n$. 一方面, R/I 到 R/Q_1 有标准满环同态保证了 $\mathrm{k.dim}R/Q_1\le\mathrm{k.dim}R/I=n$. 另一方面, 存在 R 的素理想链 $P_0\subseteq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_n$ 使得 $P_0\supseteq I$, 因为 $\mathrm{k.dim}R/I=n$, 所以 P_0 是包含理想 I 的极小素理想, 这意味着存在 $1\le j\le m$ 使得 $P_0=Q_j$, 进而 $\mathrm{k.dim}R/I=n\le\mathrm{k.dim}R/Q_j\le\mathrm{k.dim}R/Q_1$, 所以 $\mathrm{k.dim}R/I=\mathrm{k.dim}R/Q_1=n$, 断言得证. □

2.3 正则局部环

之前在 [定义1.37] 中我们已经回顾过正则局部环的概念. 它有下述等价刻画:

Lemma 2.28. 给定含幺交换 d 维 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m})$, 记 $k=R/\mathfrak{m}$ 是局部环 R 的剩余域, 那么 R 是正则局部环的充要条件是 $\dim_k\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=d$.

Proof. 回忆对含幺环 R 上的有限生成左模 M 以及 $\{x_1,...,x_m\}\subseteq M$, M 可由 $\{x_1,...,x_m\}$ 生成的充要条件是 $M/\mathrm{Jac}(R)M$ 作为 $R/\mathrm{Jac}(R)$-模可由 $\{\overline{x_1},...,\overline{x_m}\}$ 生成. 所以 d 维 Noether 局部环 R 总满足 $\dim_k\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\geq d$(这里也指出 $\dim_k\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 总有限). 那么该引理的充要性是明显成立的. □

回忆仿射簇 $X\subseteq\mathbb{A}_k^n$ 在一点 p 处的 **Zarisiki 切空间** $T_pX=V(\{\sum\limits_{i=1}^n(\partial F/\partial x_i)(p)x_i|F\in I(X)\})\subseteq\mathbb{A}_k^n$, 根据定义易知它是仿射空间 $\mathbb{A}_k^n$ 的 k-线性子空间. 如果 $D:A(X)\to k$ 是 k-线性映射且 $D(fg)=f(p)D(g)+g(p)D(f),\forall f,g\in A(X)$, 称 D 是 X **在** p **处导子** (derivation). 易见仿射簇 X 在 p 处导子全体构成 k-线性空间. 若仿射簇内一点 $p\in X$ 满足 $\dim_pX=\dim_kT_pX$, 称该点为**光滑点**. 下面的定理体现了正则局部环的几何上的重要性——仿射簇在一点的光滑性可以由簇在该点处局部环的正则局部性刻画.

Theorem 2.29 (光滑性刻画)**.** 设 k 是代数闭域, 对仿射簇 $X\subseteq\mathbb{A}_k^n$, $p\in X$, 局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是正则局部环的充要条件是 $p\in X$ 是光滑点.

Proof. 记 $\mathfrak{m}_p$ 是点 p 所对应 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的极大理想. 易证 k-线性同构 $T_pX\cong(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$, 后者总是有限维 k-线性空间, 所以 $\dim_kT_pX=\dim_k\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$. 于是由 $\dim_pX=\mathrm{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}$ 即得等价性. □

容易证明正则局部环总是整区.

Lemma 2.30. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是正则局部环, 则 R 是整环.

Proof. 我们对 R 的 Krull 维数 $d\geq 0$ 作归纳证明结论. 当 $d=0$ 时, $\mathfrak{m}=0$, 所以 R 是域, 结论成立. 假设结论对 $d-1(d\geq 1)$ 维正则局部环成立, 那么对 d 维正则局部环 R, $\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}^2$(利用 Nakayama 引理) 且 $\mathfrak{m}$ 不是极小素理想. 若设 R 的全体极小素理想是 $P_1,...,P_r$, 那么 $\mathfrak{m}\not\subseteq\mathfrak{m}^2\bigcup(\bigcup\limits_{i=1}^rP_i)$, 所以可选取 $x\in\mathfrak{m}$ 使得 $x\notin\mathfrak{m}^2$ 且 x 不在任何一个极小素理想中. 置 $S=R/(x)$, 那么由 x 的选取方式迫使 $\mathrm{k.dim}S=d-1$(应用 [命题1.39]). 下面说明 S 是正则局部环, 记 $I=\mathfrak{m}/(x)$ 是 S 唯一的极大理想, 那么作为 R-模有同构 $I/I^2\cong\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2+(x))$, 下证 $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2+(x))$ 作为 R-模可由 $d-1$ 个元素生成, 一旦证明该断言, 则 Noether 局部环 S 满足 $\dim_{S/I}I/I^2=d-1$, 进而得到 S 是 $d-1$ 维正则局部环. 记 $k=R/\mathfrak{m}$, 将 $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2+(x))$ 视作 k-线性空间, 考虑 k-线性映射 $\varphi:\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2+(x)),a+\mathfrak{m}^2\mapsto a+(\mathfrak{m}^2+(x))$, 易见 φ 是满射并且 $\mathrm{Ker}\varphi=k(x+\mathfrak{m}^2)$. 于是 $d=\dim_k\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=1+\dim_k\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2+(x))$, 进而 $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2+(x))$ 作为 R-模可由 $d-1$ 个元素生成, 这也证明了断言. 所以我们得到 S 是 $d-1$ 维正则局部环. 对 S 应用归纳假设, 我们得到 (x) 是 R 的素理想, 由 x 的选取方式知 (x) 不是极小素理想, 所以存在 R 的某个极小素理想 Q 使得 $(x)\supsetneqq Q$, 容易验证 $Q=xQ$, 再由 Nakayama 引理得到 $Q=0$, 因此 R 是整环, 得证. □

Remark. 一般可以证明正则局部环是 U.F.D.(参见 [Mat87, Theorem 20.3]).

同样用上面引理的证明方法, 可以得到

Proposition 2.31. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, $x\in\mathfrak{m}$. 则 R 是正则局部环且 $x\notin\mathfrak{m}^2$ 的充要条件是 $R/(x)$ 是正则局部环且 x 是 R-正则元.

Proof. 必要性：因为正则局部环是整环，所以 $x \neq 0$ 自然是含于 $\mathfrak{m}$ 的 R-正则元，进而 [推论1.47] 表明 $\text{k.dim}R/(x) = \text{k.dim}R - 1$. 同样记 $S = R/(x)$, $I = \mathfrak{m}/(x)$ 是 S 唯一的极大理想，那么作为 R-模有同构 $I/I^2 \cong \mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + (x))$, 只需证 $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + (x))$ 作为 R-模可由 $d-1$ 个元素生成, 利用 $x \notin \mathfrak{m}^2$ 与之前同样的方法便得 $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + (x))$ 作为 R-模可由 $d-1$ 个元素生成. 于是 $R/(x)$ 是正则局部环.

充分性：设 $\text{k.dim}R/(x) = d-1$, 那么它的极大理想 $\mathfrak{m}/(x)$ 可由 $d-1$ 个元素生成 (由此可知 $\mathfrak{m}$ 可由 d 个元素生成). 因为 $x \in \mathfrak{m}$ 是 R-正则元, 故 [推论1.47] 表明 $\text{k.dim}R = d$, 这说明 R 是正则局部环. 最后需要验证 $x \notin \mathfrak{m}^2$, 记 $I = \mathfrak{m}/(x)$, 有 R-模有同构 $I/I^2 \cong \mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + (x))$，假设 $x \in \mathfrak{m}^2$, 则 $I/I^2 \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$(作为 R-模), 进而 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的 k-线性维数不超过 $d-1$, 矛盾. 因此 $x \notin \mathfrak{m}^2$. □

Corollary 2.32 (正则参数系给出正则序列)**.** 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是 d 维正则局部环, 那么 R 的任何正则参数系 $\{x_1, x_2, ..., x_d\}$ 都给出一个含于 $\mathfrak{m}$ 的极大 R-正则序列.

Proof. 不妨设 $d \geq 1$, 对每个正整数 $1 \leq i \leq d-1$, Noether 局部环 $R/(x_1, x_2, ..., x_i)$ 的 Krull 维数至少是 $d-i$(应用 [命题1.39]), 但它唯一的极大理想可由 $d-i$ 个元素生成, 所以 $\text{k.dim } R/(x_1, x_2, ..., x_i) = d-i$, 这说明 $R/(x_1, x_2, ..., x_i)$ 是正则局部环, 那么是整环, 所以由 $x_{i+1} \notin (x_1, x_2, ..., x_i)$ 知 x_{i+1} 是 $R/(x_1, x_2, ..., x_i)$-正则元. 最后结合 $(x_1, x_2, ..., x_d)$ 是真理想得到结论. □

正则局部环也有关于相伴分次环的刻画.

Theorem 2.33. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是 d 维交换 Noether 局部环, 则以下三条等价：
(1) 相伴分次环 $G_{\mathfrak{m}}(R)$ 作为分次环同构于 $k[x_1, ..., x_d]$.
(2) 线性维数 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d$.
(3) 极大理想 $\mathfrak{m}$ 可由 d 个元素生成.

Proof. (1)⇒(2): 因为 $k[x_1, ..., x_d]$ 的 1 次部分作为 0 次部分上的线性空间是 d 维的, 所以 $G_{\mathfrak{m}}(R)$ 的 1 次部分 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 也是 k 上 d 维线性空间. (2)⇒(3) 是明显的. 还想证 (3)⇒(1). 设 $\mathfrak{m}$ 可由 $\{a_1, ..., a_d\}$ 生成, 那么 R 是正则局部环, $\{a_1, ..., a_d\}$ 是正则参数系, 进而是含于 $\mathfrak{m}$ 的极大 R-正则序列. 命 $\alpha : k[x_1, ..., x_d] \to G_{\mathfrak{m}}(R), f(x_1, ..., x_d) \mapsto f(a_1, ..., a_d)$, 这是满分次环同态. 我们用反证法说明 α 是单射. 若不然, 由 $\text{Ker}\alpha$ 是非零齐次理想知存在非零 s 次齐次多项式 $\tilde{F} \in k[x_1, ..., x_d]$ 使得 $\tilde{F}[a_1, ..., a_d] = 0$, 进而有 R 上 s 齐次多项式 F 使得 $F[a_1, ..., a_d] \in \mathfrak{m}^{s+1}$(这里 F 满足 $\tilde{F}$ 是 F 在 $R[x_1, ..., x_d]$ 到 $k[x_1, ..., x_d]$ 标准投射下的像). 现在应用 [定理1.11], F 各系数在 $\mathfrak{m}$ 中, 所以 $\tilde{F} = 0$, 矛盾. □

Theorem 2.34. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是 d 维正则局部环, 则 R 是 Cohen-Macaulay 环.

Proof. 因为 R 的任何正则参数系 $\{x_1, x_2, ..., x_d\}$ 是含于 $\mathfrak{m}$ 的极大 R-正则序列, 且该序列长度就是 R 的维数, 所以由 Cohen-Macaulay 环的定义得到结果. □

Remark. 我们在 [定理2.5] 下面的讨论中看到了交换 Noether 局部环上非零 Cohen-Macaulay 模任何极大 M-正则序列与 M 的参数系之间的联系. 特别地, 对于 Cohen-Macaulay 局部环, 它作为 Noether 局部环的每个参数系都产生 $n!$ 个含于 $\mathfrak{m}$ 的极大 R-正则序列. 反之, 它的每个极大 R-正则序列都给出一个 R 的参数系.

我们已经从 [引理1.63] 中看到交换 Noether 局部环 R 的整体维数就是 $\mathrm{p.dim}_R k$(关于整体维数的基本概念和性质, 可以参考 [定义3.22] 和 [定理3.25]), 也就是说

$$\mathrm{gl.dim}R = \sup\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Tor}_i^R(k,k) \neq 0\}.$$

并通过 [推论1.97] 得到对含于 $\mathfrak{m}$ 的 R-正则序列 $a_1,...,a_n$, 有 $\mathrm{p.dim}_R R/(a_1,...,a_n) = n$. 因此, 根据前面的讨论可知, 对 d 维正则局部环 R, 设 $\{x_1,x_2,...,x_d\}$ 是正则参数系, 那么

$$\mathrm{gl.dim}R = \mathrm{p.dim}_R k = \mathrm{p.dim}_R R/\mathfrak{m} = \mathrm{p.dim}_R R/(x_1,x_2,...,x_d) = d.$$

由此我们得到下述推论.

Corollary 2.35. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是 d 维正则局部环, 那么 $\mathrm{gl.dim}R = \mathrm{k.dim}R = d$.

特别地, 正则局部环有有限的整体维数. 那么一个基本的问题就是：如果一个交换 Noether 局部环的整体维数有限, 它是否一定是正则局部环? 历史上, 在上个世纪 50 年代初, Emil Artin 希望 David Buchsbaum 为他介绍一些除了 Ext 函子与 Tor 函子外同调代数的应用, Buchsbaum 给出了正则局部环具有有限的整体维数的证明, 并期待逆命题是正确的但未能给出证明. 随后 Buchsbaum 邀请 Maurice Auslander 与他一起尝试证明, 在还没成功证明前他们把已经取得的成果与需要的不等式整理起来给了 Eilenberg, 后者带着这些整理去了巴黎, Serre 看到证明提纲后比 Auslander 和 Buchsbaum 提前一周完成最终证明. 接下来我们来证明上述推论的逆命题. 首先我们需要

Lemma 2.36. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, $a \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, 则 $\mathfrak{m}/(a)$ 同构于 $\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$ 的直和因子.

Proof. 考虑 R 的剩余域 k 上的有限维线性空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, 因为 $\overline{a} \neq 0 \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, 可扩充为 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的一个基 $\{\overline{a}, \overline{x_1},...,\overline{x_s}\}$, 易知 $\mathfrak{m} = (a,x_1,...,x_s)$ 以及 $I = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_s \subseteq \mathfrak{m}$ 且对任何 $c \in R$, $ac \in I$ 蕴含 $c \in \mathfrak{m}$. 这说明 $I \cap (a) \subseteq a\mathfrak{m}$. 进而有自然同态列 $\mathfrak{m}/(a) = (I+(a))/(a) \cong I/I\cap(a) \hookrightarrow \mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$, 记它们的合成是 $f: \mathfrak{m}/(a) \to \mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$, 则标准投射 $g: \mathfrak{m}/a\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/(a)$ 满足 $gf = \mathrm{id}$, 这说明 $\mathfrak{m}/(a)$ 同构于 $\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$ 的直和因子 (无论是作为 R-模还是作为 $R/(a)$-模). $\square$

Theorem 2.37. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, 如果 $\mathrm{p.dim}_R\mathfrak{m} < +\infty$, 则 R 是正则局部环.

Proof. 因为 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 有限, 可设 $n = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. 下面对 $n \geq 0$ 作归纳证明：任何交换 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m})$, 只要 $\mathrm{p.dim}_R\mathfrak{m}$ 有限, 则 R 是正则局部环. 当 $n = 0$ 时, $\mathfrak{m} = 0$, 所以 R 是域, 结论直接成立. 假设结论对 $n-1 (n \geq 1)$ 的情形成立, 现考察 n 的情形. 设 $\mathrm{p.dim}_R\mathfrak{m} < +\infty$, 我们断言存在 $a \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ 使得 a 是 R-正则元. 若不然, 则 $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ 中均为 $\mathfrak{m}$-零因子, 进而由 [引理1.16(1)] 得到

$$\mathfrak{m} \subseteq \left(\bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\mathfrak{m}} P\right) \bigcup \mathfrak{m}^2,$$

由于 $\mathfrak{m} \neq 0$, 这时 Nakayama 引理保证了 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, 所以 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}\mathfrak{m}$, 进而存在 $c \neq 0 \in \mathfrak{m}$ 使得 $c\mathfrak{m} = 0$, 这意味着 $\mathfrak{m}$ 不是自由 R-模. 所以由 R 是局部环知 $\mathfrak{m}$ 不是投射 R-模 (回忆局部环上的有限生成投射模总是自由的, 一个直接的证明可参见 [命题3.12]). 另一方面, 因为 $\mathfrak{m}$ 是投射维数有限的非零有限生成 R-模, 由 Auslander-Buchsbaum 公式, $\mathrm{p.dim}_R\mathfrak{m} + \mathrm{depth}\mathfrak{m} = \mathrm{depth}R$. 注意到 $\mathrm{depth}\mathfrak{m} = \mathrm{depth}R$, 所以 $\mathrm{p.dim}_R\mathfrak{m} = 0$, 这意味着

$\mathfrak{m}$ 是投射 R-模, 我们得到了矛盾. 断言得证, 即存在 R-正则元 $a \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$. 下面我们说明 Noether 局部环 $R' = R/(a)$ 的极大理想 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/(a)$ 作为 R'-模投射维数有限且对 R' 的剩余域 k' 有 $\dim_{k'}\mathfrak{m}'/(\mathfrak{m}')^2 = n-1$. 因为 $a \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, 所以类似之前的讨论易证 $\dim_{k'}\mathfrak{m}'/(\mathfrak{m}')^2 = n-1$. 对于后一结论, 注意这里 a 是 R-正则元则也必为 $\mathfrak{m}$-正则元, 所以 [引理1.64] 保证了 $\text{p.dim}_R\mathfrak{m} = \text{p.dim}_{R'}\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$ 也有限. 现在应用 [引理2.36], 则 $\mathfrak{m}/(a)$ 作为 R'-模的投射维数不超过 $\text{p.dim}_{R'}\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$, 从而 $\text{p.dim}_{R'}\mathfrak{m}/(a) < +\infty$. 于是可以对 R' 应用归纳假设, 得到 $R' = R/(a)$ 是正则局部环, 因为这里 a 是 R-正则元, 故由 [命题2.31] 得到结论. □

最后, 我们把前面的讨论总结为下述定理.

Theorem 2.38 (Auslander-Buchsbaum-Serre)**.** 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, 则以下五条等价:
(1)R 是正则局部环.
(2) 整体维数 $\text{gl.dim}R < +\infty$.
(3) 投射维数 $\text{p.dim}_R k < +\infty$.
(4) 任何有限生成 R-模 M 有 $\text{p.dim}_R M < +\infty$.
(5) 投射维数 $\text{p.dim}_R\mathfrak{m} < +\infty$.
并且这时 $\text{gl.dim}R = \text{k.dim}R$.

Proof. (1)⇒(2) 来自 [推论2.35]. (2)⇒(3) 由整体维数定义即得. (3)⇒(4) 来自 [引理1.63]. (4)⇒(5) 明显. (5)⇒(1) 来自 [定理2.37]. 已经在 [推论2.35] 中证明过正则局部环 R 满足 $\text{gl.dim}R = \text{k.dim}R$. □

Corollary 2.39. 设 R 是正则局部环, 则对 R 的任何素理想 P, R_P 也是正则局部环.

Corollary 2.40. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是正则局部环, 那么任何 R 上极大 Cohen-Macaulay 模是自由的. 反之, R 上任何非零有限生成自由模当然是极大 Cohen-Macaulay 模. 所以正则局部环上的非零有限生成模是自由模等价于它是极大 Cohen-Macaulay 模.

Proof. 因为正则局部环整体维数有限, 所以任何极大 Cohen-Macaulay 模 M 自然有 $\text{p.dim}_R M < +\infty$, 不妨设 $M \neq 0$, 于是对 M 应用 Auslander-Buchsbaum 公式立即得到 M 的投射维数是零, 进而知 M 投射, 因为局部环上有限生成投射模自由 (见附录 [命题3.12]), 故 M 是自由 R-模. □

2.4 Gorenstein 环

本节先回忆内射维数的相关基本性质, 再介绍 Gorenstein 环的概念. 最后应用 [定理2.49] 说明 Gorenstein 环总是 Cohen-Macaulay 环. 先回忆内射维数的定义.

Definition 2.41. 设 M 是左 R-模, 称

$$\text{inj.dim}_R M = \inf\{l \in \overline{\mathbb{Z}} | \text{存在}M\text{的内射分解}(D,d,\eta)\text{使得}l\text{为复形}(D,d)\text{的长度}\}$$

是 M 的**内射维数**. 零模的内射维数是 $-\infty$.

根据内射维数的定义马上看到:

Lemma 2.42. 设 ${}_RM \neq 0$, 那么 M 是内射模的充要条件是 $\text{inj.dim}_R M = 0$.

当 R 是交换 Noether 环时, 对任何乘闭子集 S 和有限生成 R-模 M 与 R-模 N, 有 R_S-模同构 $(\mathrm{Ext}_R^n(M,N))_S \cong \mathrm{Ext}_{R_S}^n(M_S,N_S)$. 由此不难看到对任何内射 R-模 Q 有 Q_S 是内射 R_S-模. 故有：

Proposition 2.43. 设 R 是交换 Noether 环, S 是乘闭子集, M 是 R-模, 则

$$\mathrm{inj.dim}_{R_S} M_S \leq \mathrm{inj.dim}_R M.$$

下面是模的内射维数不超过 n 的一些等价条件.

Proposition 2.44. 给定模 $_RM$ 与自然数 n, 则以下三条等价：
(1)$\mathrm{inj.dim}_R M \leq n$.
(2)$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)=0, \forall N \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}$.
(3) 对任何 R 的左理想 I 有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I,M)=0$.

Proof. (1)⇒(2): 取 M 一长度不超过 n 的内射分解, 由 $\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(N,-)$ 的定义得到 $\overline{\mathrm{Ext}}_R^{n+1}(N,M)=0$.

(2)⇒(3): 取 $N=R/I$ 即可.

(3)⇒(1): 先构造出下述形式的正合复形：

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} D^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} D^{n-1} \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

其中每个 D^i 是内射模. 如果能证明 Q 是内射模, 那么 $\mathrm{inj.dim}_R M \leq n$. 下面使用 Baer 判别法来得到 Q 的内射性. 由 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,Q) \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I,M)$ 得到对每个左理想 I 有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,Q)=0$, 于是由短正合列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

导出 Ext 群长正合列得到短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/I,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(I,Q) \longrightarrow 0,$$

再用 Baer 判别法得到 Q 是内射模. □

回忆交换 Noether 环 R 上的有限生成模 M 总有形如 $0=M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_t = M$ 且每个 $M_{i+1}/M_i \cong R/P_i$, 其中 $P_i \in \mathrm{Supp}M$ 的子模链 ([引理1.17(4)]). 由此可得下述引理.

Lemma 2.45. 设 R 是交换 Noether 环, M,N 是 R-模, N 是有限生成模, n 是正整数, 如果对每个 $P \in \mathrm{Supp}N$ 有 $\mathrm{Ext}_R^n(R/P,M)=0$, 那么 $\mathrm{Ext}_R^n(N,M)=0$.

Proof. 取 N 的子模链 $0=N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_t = M$ 使每个 $N_{i+1}/N_i \cong R/P_i$, P_i 是 $\mathrm{Supp}N$ 中元. 那么由条件得到 $\mathrm{Ext}_R^n(N_{i+1}/N_i,M)=0$. 由短正合列 $0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_1/N_0 \longrightarrow 0$ 导出 Ext 群长正合列得到 $\mathrm{Ext}_R^n(N_1,M)=0$, 如此继续地讨论得到 $\mathrm{Ext}_R^n(N,M)=0$. □

于是我们对交换 Noether 环上模的内射维数不超过 n 可以说更多.

Corollary 2.46. 设 R 是交换 Noether 环, M 是 R-模, n 是自然数, 那么以下两条等价：
(1)$\mathrm{inj.dim}_R M \leq n$.
(2)$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/P,M)=0, \forall P \in \mathrm{Spec}R$.

事实上结合投射维数的刻画, 易知对任何含幺环 R 有 $\mathrm{l.gl.dim}R = \sup\{\mathrm{p.dim}_R M | M \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}\} = \sup\{\mathrm{inj.dim}_R M | M \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}\}$, 所以整体维数有限的环 R(例如正则局部环, 回忆 [推论2.35]) 必定满足 $\mathrm{inj.dim}_R R$ 有限. 我们之后定义的 Gorenstein 局部环就是指内射维数有限的交换 Noether 局部环.

Proposition 2.47. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, $\mathfrak{p}$ 是异于 $\mathfrak{m}$ 的素理想, M 是有限生成 R-模, n 是自然数. 如果对任何素理想 $\mathfrak{q} \supsetneq \mathfrak{p}$ 有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/\mathfrak{q}, M) = 0$, 则 $\mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M) = 0$.

Proof. 取定 $a \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$, 那么 a 是 $R/\mathfrak{p}$-正则元, 故有正合列

$$0 \longrightarrow R/\mathfrak{p} \xrightarrow{a_l} R/\mathfrak{p} \longrightarrow R/(\mathfrak{p} + (a)) \longrightarrow 0,$$

它导出长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{a_l} \mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/(\mathfrak{p} + (a)), M) \longrightarrow \cdots,$$

注意到 R-模 $R/(\mathfrak{p}+(a))$ 的支集含于 $\{\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}) | \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}\}$, 那么根据 [引理2.45] 得到 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/(\mathfrak{p}+(a)), M) = 0$, 所以 $\mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M) = a\mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M)$, 其中 $a \in \mathfrak{m}$, 因为 $\mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M)$ 是有限生成模 (取 $R/\mathfrak{p}$ 的有限生成自由表示容易验证), 所以应用 Nakayama 引理得到 $\mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M) = 0$. □

现在我们可以给出交换 Noether 局部环上有限生成模的内射维数公式.

Proposition 2.48. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, $k = R/\mathfrak{m}$ 是剩余类域, M 是有限生成 R-模. 则 $\mathrm{inj.dim}_R M = \sup\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}$.

Proof. 如果 $M = 0$, 则 $\mathrm{inj.dim}_R M = \sup\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\} = -\infty$, 结论成立. 下设 M 是非零模, 那么 Nakayama 引理保证了 $mM \neq M$, 所以 $\mathrm{grade}(m, M)$ 有限, 这说明 $\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\} \neq \varnothing$. 如果集合 $\sup\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\} = +\infty$, 那么 [命题2.44] 表明 $\mathrm{inj.dim}_R M = +\infty$. 下设集合 $\sup\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\} = t \in \mathbb{N}$, 那么 $\mathrm{inj.dim}_R M \geq t$. 下面使用反证法证明 $\mathrm{Ext}_R^{t+1}(R/P, M) = 0, \forall P \in \mathrm{Spec}R$. 一旦证明该事实, 由 [推论2.46] 得到 $\mathrm{inj.dim}_R M \leq t$, 也就得到了 $\mathrm{inj.dim}_R M = t$. 假设有某个素理想 P 使得 $\mathrm{Ext}_R^{t+1}(R/P, M) \neq 0$, 那么 $P \neq \mathfrak{m}$, 由 [命题2.47] 得到存在素理想 $P_1 \supsetneq P$ 使 $\mathrm{Ext}_R^{t+1}(R/P_1, M) \neq 0$, 同样 $P_1 \neq \mathfrak{m}$, 如此继续讨论, 递归地得到素理想严格升链 $P = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \cdots$, 这与 R 是 Noether 环相矛盾. 所以我们得到 $\mathrm{inj.dim}_R M = t$. □

Theorem 2.49 (Bass 公式)**.** 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, $k = R/\mathfrak{m}$ 是剩余域, M 是非零有限生成 R-模, 满足 M 的内射维数有限. 那么 $\mathrm{k.dim}M \leq \mathrm{inj.dim}_R M = \mathrm{depth}R$.

Proof. 先证明 $\mathrm{k.dim}M \leq \mathrm{inj.dim}_R M$. 记 $d = \mathrm{k.dim}M$, 根据 [命题2.48] 知只需证明 $\mathrm{Ext}_R^d(k, M) \neq 0$ 就够了. 取包含 $\mathrm{Ann}_R M$ 的极大素理想链

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d = \mathfrak{m},$$

其中 $P_0 \supseteq \mathrm{Ann}_R M$. 这里 P_0 作为包含 $\mathrm{Ann}_R M$ 的极小素理想, 在 $\mathrm{Ass}M$ 中, 从而 [引理1.21] 保证了

$$\mathrm{Hom}_{R_{P_0}}(R_{P_0}/(P_0)_{P_0}, M_{P_0}) \neq 0,$$

即 $\mathrm{Ext}^0_{R_{P_0}}(R_{P_0}/(P_0)_{P_0}, M_{P_0}) \neq 0$. 下面我们归纳地证明对每个自然数 $0 \leq i \leq d$ 有

$$\mathrm{Ext}^i_{R_{P_i}}(R_{P_i}/(P_i)_{P_i}, M_{P_i}) \neq 0,$$

一旦证明, 则当 $i=d$ 时由 $(\mathrm{Ext}_R^d(k,M))_{P_d}\neq 0$ 我们立即得到 $\mathrm{Ext}_R^d(k,M)\neq 0$. 前面我们看到了当 $i=0$ 时结论成立, 假设我们已经说明了 $\mathrm{Ext}^{i-1}_{R_{P_{i-1}}}(R_{P_{i-1}}/(P_{i-1})_{P_{i-1}},M_{P_{i-1}})\neq 0, 1\leq i\leq d$, 有加群同构

$$(\mathrm{Ext}^{i-1}_{R_{P_i}}(R_{P_i}/(P_{i-1})_{P_i},M_{P_i}))_{(P_{i-1})_{P_i}}\cong \mathrm{Ext}^{i-1}_{R_{P_{i-1}}}(R_{P_{i-1}}/(P_{i-1})_{P_{i-1}},M_{P_{i-1}})\neq 0,$$

所以 $\mathrm{Ext}^{i-1}_{R_{P_i}}(R_{P_i}/(P_{i-1})_{P_i},M_{P_i})\neq 0$, 注意到 $R_{P_{i-1}}$ 中唯一包含 $(P_{i-1})_{P_i}$ 的素理想只有 $(P_i)_{P_i}$, 所以 [命题2.47] 告诉我们 $\mathrm{Ext}^i_{R_{P_i}}(R_{P_i}/(P_i)_{P_i},M_{P_i})\neq 0$. 由此我们得到 $\mathrm{Ext}_R^d(k,M)\neq 0$. 故 $\mathrm{k.dim}M\leq \mathrm{inj.dim}_R M$.

再验证等式 $\mathrm{inj.dim}_R M=\mathrm{depth}R$. 记 $\mathrm{inj.dim}_R M=s, \mathrm{depth}R=n$, 那么有极大 R-正则序列 $a_1,...,a_n$, 根据 [推论1.97] 我们知道 $\mathrm{p.dim}_R R/(a_1,...,a_n)=n$ 并且 $\mathrm{Ext}_R^n(R/(a_1,...,a_n),M)$ 就是系数在 M 中的 n 次 Koszul 上同调 $H^n(a_1,...,a_n;M)$. 回忆 [推论1.88], 我们有 n 次 Koszul 上同调就是 0 次 Koszul 同调, 所以 $\mathrm{Ext}_R^n(R/(a_1,...,a_n),M)\cong H_0(a_1,...,a_n;M)\cong M/(a_1,...,a_n)M$, 由 Nakayama 引理得到后者非零, 进而 $\mathrm{Ext}_R^n(R/(a_1,...,a_n),M)\neq 0$, 这说明 $\mathrm{inj.dim}_R M=s\geq n$(通过 $\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(R/(a_1,...,a_n),-)$ 的定义可以看到这一点). 另一方面, 由 $a_1,...,a_n$ 的极大性我们知道 $\mathfrak{m}$ 中元均为 $R/(a_1,...,a_n)$-零因子, 从而 $\mathfrak{m}\in\mathrm{Ass}(R/(a_1,...,a_n))$, 这一观察说明存在形如

$$0\longrightarrow R/\mathfrak{m}\longrightarrow R/(a_1,...,a_n)\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

的正合列, 它导出 Ext 群长正合列

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^s(C,M)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^s(R/(a_1,...,a_n),M)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^s(R/\mathfrak{m},M)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{s+1}(C,M)\longrightarrow\cdots$$

并注意到 $\mathrm{Ext}_R^{s+1}(C,M)=0$, 所以存在满同态 $\mathrm{Ext}_R^s(R/(a_1,...,a_n),M)\to\mathrm{Ext}_R^s(R/\mathfrak{m},M)$, 根据 [命题2.48], 我们得到 $\mathrm{Ext}_R^s(R/(a_1,...,a_n),M)\neq 0$, 这说明 $n=\mathrm{p.dim}_R R/(a_1,...,a_n)\geq s$. 故 $s=n$. $\square$

Corollary 2.50. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, M 是非零有限生成 R-模, 那么 $\mathrm{k.dim}M\leq\mathrm{inj.dim}_R M$.

Remark. 可以证明如果交换 Noether 局部环 R 存在一个内射维数有限的非零有限生成模 (此时 [定理2.49] 保证了内射维数是环的深度), 那么 $\mathrm{depth}M\leq\mathrm{depth}R$[BH98, p.96, Exercise 3.1.24]. 由此可知交换 Noether 局部环上任意两个有限生成模 $M,N\neq 0$, 总有 $\mathrm{depth}M\leq\mathrm{inj.dim}N$. 并且如果交换 Noether 局部环 R 上有非零有限生成模 M 满足 $\mathrm{depth}M\geq\mathrm{depth}R+1$, 那么不存在内射维数有限的非零有限生成模. 同时, 我们也从此看到交换 Noether 局部环如果不是 Cohen-Macaulay 环并且存在内射维数有限的有限生成模, 那么它不存在极大 Cohen-Macaulay 模.

Definition 2.51 (Gorenstein 环)**.** 如果交换 Noether 局部环 R 满足 $\mathrm{inj.dim}_R R<+\infty$, 称 R 是 **Gorenstein 局部环**. 如果交换 Noether 环在每个极大理想处的局部化都是 Gorenstein 局部环, 称该环是 **Gorenstein 环**. 域明显是 Gorenstein 环.

如果有含幺环同构 $R\cong R'$, 通过这一同构赋予 R' 左 R-模结构后自然也有左 R-模同构 ${}_RR\cong {}_RR'$, 由此易得 $\mathrm{inj.dim}_R R=\mathrm{inj.dim}_{R'}R'$. 所以和 Gorenstein 环同构的环当然也是 Gorenstein 环. 之前我们已经说明过正则局部环作为自身上的模拥有有限的内射维数, 所以我们得到:

Example 2.52. 正则局部环是 Gorenstein 局部环.

Proposition 2.53. 设 R 是交换 Noether 环, 则
(1) 当 R 是 Gorenstein 环时, 对任何乘闭子集 S 只要 $R_S\neq 0$, R_S 就是 Gorenstein 环.
(2)Gorenstein 环是 Cohen-Macaulay 环.

Proof. (1) 任取 R_S 的极大理想 $\mathfrak{m}=Q_S$, 这里 Q 是 R 的素理想且与 S 不交, 那么 $(R_S)_{\mathfrak{m}}\cong R_Q$, 后者是某个 Gorenstein 局部环的局部化, 所以利用 [命题2.43] 即得 R_Q 是 Gorenstein 环.

(2) 根据 [定理2.49] 和 [推论1.47] 这是明显的. □

Corollary 2.54. 设含幺交换 Noether 局部环 R 是 Gorenstein 局部环, 那么 $\text{inj.dim}_R R=\text{depth}R=\text{k.dim}R$. 若进一步 R 是正则局部环, 则 $\text{inj.dim}_R R=\text{gl.dim}R$.

Proof. 应用 Gorenstein 局部环是 Cohen-Macaulay 环以及 [定理2.49] 立即得到. □

在 [命题2.6] 以及 [命题2.8] 中我们看到, 对交换 Noether 环 R 以及任何 R-正则序列 $a_1,...,a_n$, R 是 Cohen-Macaulay 环蕴含 $R/(a_1,...,a_n)$ 是 Cohen-Macaulay 环; 当 $(R,\mathfrak{m})$ 是 Noether 局部环时, 若对 R-正则序列 $a_1,...,a_n\in\mathfrak{m}$ 有 $R/(a_1,...,a_n)$ 是 Cohen-Macaulay 环, 那么易验证它作为 R-模是 Cohen-Macaulay 模, 于是 R 也是 Cohen-Macaulay 环. 接下来我们对 Gorenstein 环证明类似的结论. 为此需要使用一些极小内射分解的相关结果, 下面进行一些回顾：回忆一个左 R-模 M 的**本质子模** (essential submodule)N 是指对 M 的任何非零子模 N' 有 $N\cap N'\neq 0$ 的模. 如果 N 是 M 的本质子模, 那么记作 $N\trianglelefteq_e M$, 这时也称 M 是 N 的**本质扩张** (essential extension). 如果 M 是 N 的本质扩张且 $M\neq N$, 称该扩张是**真本质扩张**. 如果本质扩张 $E\supseteq M$ 满足不存在 M 的本质扩张 E' 使得 $E\subsetneq E'$, 则称本质扩张 $E\supseteq M$ 是**极大的** (maximal). 如果单模同态 $i:N\to M$ 满足 $\text{Im}i$ 是 M 的本质子模, 称 i 是**本质单同态**.(essential monomorphism). 根据本质子模的定义, 我们看到：对 M 的子模 N, N 是本质子模的充要条件是对每个 $x\neq 0\in M$, 存在 $r\in R$ 使得 $rx\neq 0\in N$.

Example 2.55. 设 V 是域 k 上非零线性空间, 因为任何子空间有直和补, 所以 V 的本质子空间只有 V.

根据本质子模的定义我们看到本质子模的本质子模仍是本质子模. 对每个模 M, M 自身总是本质子模. 下面我们用本质单同态的概念给内射模一个刻画.

Proposition 2.56. 设 ${}_RQ$ 是模, 则 Q 是内射模的充要条件是每个本质单同态 $i:Q\to M$ 是同构. 特别地, 一个模 Q 是内射模的充要条件是 Q 没有真的本质扩张.

Proof. 必要性：设 Q 是内射模, 则任何本质单同态 $i:Q\to M$ 满足存在同态 $p':M\to Q$ 使得 $ip'=\text{id}_M$, 从而 $M=\text{Im}i\oplus\text{Ker}p'$, 再利用 $i(Q)$ 是本质子模得到 $\text{Ker}p'=0$, 即同态 i 是满射, 故本质单同态 i 是同构.

充分性：由于任何模可嵌入某内射模, 设 $Q_0\supseteq Q$ 是内射模. 设 S 是 Q_0 中全体与 Q 相交为零的子模全体, 易知 $(S,\subseteq)$ 任何全序子集有上界, 应用 Zorn 引理可得 S 有极大元 N, 那么 $j:Q\to Q_0/N$ 是本质单同态, 所以根据条件得到 j 是满射, 从而 $Q_0=Q\oplus N$, 那么 Q 作为内射模的直和因子仍内射.

本命题阐述的第二个事实就是前面证明等价命题的重述. 如果 Q 是内射模, 那么每个本质扩张对应一本质单同态, 由该本质单同态是同构便得 Q 没有真本质扩张. 反之, 若 Q 没有真本质扩张, 那么用反证法易得不存在不是同构的本质单同态 $i:Q\to M$(否则会产生 Q 的真本质扩张), 那么也就得到了 Q 是内射模. □

任给本质单同态 $j:Q\to N$ 与单同态 $k:Q\to Q_0$, 只要 Q_0 是内射模, 就存在单同态 $l:N\to Q_0$ 使得 $k=lj$. 由此马上看到下述结果.

Lemma 2.57. 任何模 ${}_RM$ 都存在本质嵌入 $i:M\to Q$ 使得 Q 是内射模. 故任何模有极大本质扩张.

Proof. 取含 M 的内射模 Q_0, 并作 $S=\{N\subseteq Q_0|M\trianglelefteq_e N\}$, 则 $M\in S$ 并且易验证 $(S,\subseteq)$ 满足 Zorn 引理条件, 故由 Zorn 引理, 存在 $(S,\subseteq)$ 中极大元 Q, 从而 $i:M\to Q$ 是本质单同态, 下证 Q 是内射模. 只需说明任何本质单同态 $k:Q\to L$ 是同构, 记 $j:Q\to Q_0$ 是标准嵌入. 首先存在单同态 $l:L\to Q_0$ 使得 $lk=j$, 于是 $M\trianglelefteq_e Q, k(Q)\trianglelefteq_e L$ 且 $Q=j(Q)\trianglelefteq_e l(L)$, 所以由 Q 的极大性保证了 $l(L)=Q=lk(Q)$, 所以 $L=k(Q)$, 即 k 是同构, 从而 Q 是内射模. 所以存在本质单同态 $i:M\to Q$ 使得 Q 是内射模. 事实上根据前面的证明过程, 得到了内射模 Q 使得 M 是 Q 的本质子模, 而内射模没有真本质扩张, 故 Q 自然是 M 的极大本质扩张. □

Theorem 2.58. 设 M 是 I 的子模, 则以下三条等价：
(1)I 是 M 的极大本质扩张.
(2)I 是内射模且为 M 的本质扩张.
(3)I 是包含 M 的极小内射模.

Proof. (1)⇒(2): 取 Q 是包含 I 的内射模, 使得 I 是 Q 的本质子模, 那么 Q 是 M 的本质扩张, 由 I 的极大性得到 $I=Q$ 是内射模. 所以 I 是内射模且为 M 的本质扩张.

(2)⇒(3): 如果 I 有内射子模 I' 使得 $M\subseteq I'\subsetneq I$, 那么由 I' 是内射模知 I' 是 I 的直和因子, 从而 M 不是 I 的本质子模, 矛盾. 所以 I 是包含 M 的极小内射模.

(3)⇒(1): 根据 [引理2.57] 的证明过程得到 I 存在内射子模 Q 使得 $M\trianglelefteq_e Q$. 于是由 I 的极小性得到 $Q=I$, 因此 I 是 M 的本质扩张, 那么它自然是极大本质扩张. □

Definition 2.59. 设 ${}_RM$ 是 ${}_RI$ 的子模, 如果 I 满足 [定理2.58] 中任何一条, 称 I 是 M 的**内射包** (injective hull), 记为 $E(M)$. 内射包最早由 Beno Eckmann(瑞士, 1917-2008, Hopf 学生) 与 A. Schopf 于 1953 年引入.

[引理2.57] 说任何模的内射包都存在, 内射包也有下述同构唯一性.

Corollary 2.60. 设 I,I' 都是 M 的内射包, 则有 $I\cong I'$. 一般这一同构映射不唯一.

Proof. 这时存在单同态 $g:I'\to I$ 使下图交换. 故 $g(I')$ 是包含 M 但含于 I 的内射模, 由 I 极小性得 g 满.

$$\begin{tikzcd} & & I \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "j"'] & I' \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

□

下面我们说明交换 Noether 环上模取内射包与关于某个乘闭子集作局部化可交换.

Lemma 2.61. 设 R 是交换 Noether 环, S 是乘闭子集, Q 是内射 R-模, 则 Q_S 是 R_S-内射模.

Proof. 由 Q 是内射模可知对任何模 N 有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,Q)=0,\forall i\geq 1, N\in \mathrm{ob}R\text{-Mod}$. 对任何理想 I, 取 $N=R/I$ 并将 Ext 模关于 S 作局部化可知 $\mathrm{Ext}_{R_S}^i(R_S/I_S,Q_S)=0,\forall i\geq 1$. 因为 R_S 的理想总具备 I_S 的形式, 所以利用 $\mathrm{Ext}_{R_S}^1(R_S/I_S,Q_S)=0$ 以及 Baer 判别法即得 Q_S 的内射性. □

Remark. 因为局部化函子与直和可交换, 所以对任何交换环 R 与投射 R-模 P, P 关于任何乘闭子集 S 作局部化后 P_S 作为 R_S-模总是投射的. 即投射情形不需要 Noether 条件.

根据上述引理我们可以得到：

Proposition 2.62. 设 R 是交换 Noether 环, S 是乘闭子集, R-模 M 有内射包 $E_R(M)$, 则作为 R_S-模有同构 $(E_R(M))_S \cong E_{R_S}(M_S)$. 即取内射包和作局部化可交换.

Proof. 设 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E_R(M)$ 是本质单同态, 只需说明 $0 \longrightarrow M_S \xrightarrow{i_S} (E_R(M))_S$ 也是本质单同态即可. 任取非零元 $x/s \in (E_R(M))_S$, 我们需要说明 $R_S x/s \cap i_S(M_S) \neq 0$. 易见只要验证 $s = 1$ 的情形就足够了, 作理想集 $T = \{\mathrm{ann}_R(tx) | t \in S\}$, 那么由 R 是 Noether 环知 T 中有极大元 $\mathrm{ann}_R(tx)$, 易见 $tx \neq 0$.

Claim. $R_S(tx/1) \cap (E_R(M))_S \neq 0$. 于是 $(E_R(M))_S \supseteq i_S(M_S)$ 是本质扩张. 假设 $R_S(tx/1) \cap (E_R(M))_S = 0$. 因为 $Rtx \cap E_R(M) = Itx \neq 0$, I 是 R 的理想, 并设 $a_1, ..., a_n \in I$ 使得 $I = (a_1, ..., a_n)$, 所以每个 $a_i tx/1 = 0$, 进而存在 $u \in S$ 使得 $uta_i x = 0, \forall 1 \leq i \leq n$. 由此我们看到 $I \subseteq \mathrm{ann}_R(uxt) = \mathrm{ann}_R(tx)$(这里使用了 $\mathrm{ann}_R(tx)$ 的极大性), 于是 $Itx = 0$, 得到矛盾. 故 $R_S(tx/1) \cap (E_R(M))_S = 0$, 断言得证. □

回忆左 R-模 M 的**内射分解**是形如

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} D^0 \xrightarrow{d^0} D^1 \longrightarrow \cdots$$

且每个 D^j 是内射模的正合复形. 若 M 是内射分解 (D, d, η) 满足 D^0 是 M 的内射包 (一般地, η 是本质单同态), D^{i+1} 是 $\mathrm{Im}d^i = \widetilde{d^i}(D^i/\mathrm{Ker}d^i)$ 的内射包, 称该内射分解是 M 的**极小内射分解** (minimal injective resolution). 因为任何模有内射包, 所以递归地可构造任何模的极小内射分解.

Proposition 2.63 (极小内射分解存在性)**.** 任何模 $_RM$ 有极小内射分解.

Proof. 取定 M 的内射包 $E(M)$, 有正合列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E(M)$, 对 $\mathrm{Coker}i = E(M)/\mathrm{Im}i$, 考虑其内射包作正合列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E(M) \arrow[rr, dashed, "d^0"] \arrow[dr] & & E(\mathrm{Coker}i) \\ & & & \mathrm{Coker}i \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

递归地便得到 M 的一个极小内射分解. □

极小内射分解自然有同构唯一性.

Lemma 2.64. 设 $_RM$ 有极小内射分解 $(I, d, i), (J, h, j)$, 则对任何使下图交换的链映射 $\alpha : (I, d) \to (J, h)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\alpha^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\alpha^1"] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] & J^0 \arrow[r, "h^0"] & J^1 \arrow[r, "h^1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

有每个 α^k 是同构. 回忆比较引理保证了这样的链映射 α 总存在.

Proof. 因为 $i: M \to I^0$ 是本质单同态切 J^0 是内射模, 所以 α^0 是单射, 从而由 $\alpha^0(I^0) \supseteq M$ 是内射模以及内射包的极小性得到 $\alpha^0(I^0) = J^0$, 因此 α^0 是同构. 因为 α^0 是同构, 所以下图中的同态 $\widetilde{\alpha^0}$ 自然也是同构.

$$
\begin{tikzcd}
{} & {} & I^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dll, "\alpha^0"'] \arrow[dr] & {} & I^1 \arrow[dll, "\alpha^1"'] \\
J^0 \arrow[rr, "h^0"] \arrow[dr] & {} & J^1 & I^0/\mathrm{Ker}d^0 \arrow[ur, "\widetilde{d^0}"'] \arrow[dll, "\widetilde{\alpha^0}"] & {} \\
{} & J^0/\mathrm{Ker}h^0 \arrow[ur, "\widetilde{h^0}"] & {} & {} & {}
\end{tikzcd}
$$

因为嵌入 $0 \longrightarrow I^0/\mathrm{Ker}d^0 \xrightarrow{\widetilde{d^0}} I^1$ 是本质单同态, $\widetilde{h^0}\widetilde{\alpha^0}$ 单且 J^1 是内射模, 所以 α^1 是单射. 注意到 $\alpha^1(I^1)$ 是包含 $\widetilde{h^0}(J^0/\mathrm{Ker}h^0)$ 的内射模, 所以由内射包极小性可知 $\alpha^1(I^1) = J^1$, 故 α^1 是同构. 最后归纳地我们得到每个 α^k 都是同构. $\square$

通过这一观察我们可以证明模 M 的任何一个极小内射分解到内射分解都有单链映射.

Proposition 2.65. 设 $_RM$ 有极小内射分解 (E, d, i) 与内射分解 (I, h, j), 那么存在链映射 $\beta: (E, d) \to (I, h)$ 使得每个同态 β^k 是单射. 特别地, 极小内射分解是长度最短的内射分解.

Proof. 根据比较引理, 存在链映射 $\beta: (E, d) \to (I, h)$ 使得 $\beta^0 i = j$ 以及链映射 $\gamma: (I, h) \to (E, d)$ 使得 $\gamma^0 j = i$. 所以 $\gamma\beta: (E, d) \to (E, d)$ 是使得下图交换的链映射

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\gamma^0\beta^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\gamma^1\beta^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

所以应用上面的引理得到每个 $\gamma^k\beta^k$ 是同构. 特别地, 每个 β^k 是单射, 故 β 为所求链映射. $\square$

通过上述命题直接得到下述推论.

Corollary 2.66. 任何模的极小内射分解长度给出该模的内射维数.

下述定理表明模的每个内射分解已经承载了极小内射分解的所有信息.

Theorem 2.67. 设 $_RM$ 有内射分解 (I, h, j), 那么存在 M 的极小内射分解与一个正合复形使得 (I, h, i) 是这两个复形的直和.

Proof. 取定 M 的一个极小内射分解 (E, d, i), 根据 [命题2.65] 的证明过程中由比较引理诱导的链映射 $\beta: (E, d) \to (I, h)$ 与 $\gamma: (I, h) \to (E, d)$, 有 $\gamma\beta$ 是链同构. 因此对链映射 $\beta: (E, d) \to (I, h)$, 存在链映射 $s: (I, h) \to (E, d)$ 使得 $s\beta = \mathrm{id}_{(E,d)}$ 以及下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[u, "\mathrm{id}_M"] & I^0 \arrow[r, "h^0"] \arrow[u, "s^0"] & I^1 \arrow[r, "h^1"] \arrow[u, "s^1"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

因为每个 E^k 是内射模, 所以根据 $s^k\beta^k = \mathrm{id}_{E^k}$ 可知 $I^k = \mathrm{Im}\beta^k \oplus \mathrm{Ker}s^k$. 易见每个 h^k 满足 $h^k(\mathrm{Im}\beta^k) \subseteq \mathrm{Im}\beta^{k+1}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\beta^0"'] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\beta^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & I^0 \arrow[r, "h^0"] \arrow[d, "s^0"'] & I^1 \arrow[r, "h^1"] \arrow[d, "s^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

于是知把 h^k 限制在 $\mathrm{Im}\beta^k$ 上我们得到复形 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{j|} \mathrm{Im}\beta^0 \xrightarrow{h^0|} \mathrm{Im}\beta^1 \xrightarrow{h^1|} \cdots$. 易知下图交换, 即 β 给出极小内射分解 (E, d, i) 与复形 $(\mathrm{Im}\beta, h|, j|)$ 之间的链同构.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\beta^0|"'] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\beta^1|"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j|"] & \mathrm{Im}\beta^0 \arrow[r, "h^0|"] & \mathrm{Im}\beta^1 \arrow[r, "h^1|"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

所以我们得到复形 $(\mathrm{Im}\beta, h|, i|)$ 是 M 的一个极小内射分解. 注意 (I, h, j) 可改写为

$$0 \longrightarrow M \oplus 0 \xrightarrow{i} \mathrm{Im}\beta^0 \oplus \mathrm{Ker}s^0 \xrightarrow{h^0} \mathrm{Im}\beta^1 \oplus \mathrm{Ker}s^1 \xrightarrow{h^1} \cdots$$

因此如果我们能证明 $h^k(\mathrm{Ker}s^k) \subseteq \mathrm{Ker}s^{k+1}$, 我们就可以把 (I, h, j) 拆解成极小内射分解 $(\mathrm{Im}\beta, h|, i|)$ 与

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}s^0 \xrightarrow{h^0|} \mathrm{Ker}s^1 \xrightarrow{h^1|} \cdots$$

的直和, 然后再说明上述复形是正合复形即可. 事实上, 由 $d^k s^k = s^{k+1}h^k$ 我们马上看到 $h^k(\mathrm{Ker}s^k) \subseteq \mathrm{Ker}s^{k+1}$. 由于 $\mathrm{Ker}h^0 = \mathrm{Im}j \subseteq \mathrm{Im}\beta^0$, 所以 $h^0|$ 是单射. 下面说明每个 $h^k|$ 与 $h^{k+1}|$ 在 $\mathrm{Ker}s^{k+1}$ 处正合, 为此只需证对每个 $x \in \mathrm{Ker}h^{k+1} \cap \mathrm{Ker}s^{k+1}$ 有某个 $y \in \mathrm{Ker}s^k$ 使得 $h^k(y) = x$. 首先我们总存在 $z \in I^k$ 使得 $h^k(z) = x$, 设 $z = \beta^k(w) + y$, 这里 $w \in E^k, y \in \mathrm{Ker}s^k$, 于是两边作用 h^k 由 $x = h^k\beta^k(w) + h^k(y)$ 以及 $h^k(y) \in \mathrm{Ker}s^{k+1}$ 马上看到 $h^k(y) = x$. 至此, 我们证明了复形

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}s^0 \xrightarrow{h^0|} \mathrm{Ker}s^1 \xrightarrow{h^1|} \cdots$$

是正合的. $\square$

回忆 Hom 函子与张量函子是一对伴随函子, 所以如果有保幺环同态 $\alpha: R \to S$ 以及内射左 R-模 I, 那么 ${}_RS_S$ 是双模且 $\mathrm{Hom}_R({}_RS_S, {}_RI)$ 是内射左 S-模. 利用这一观察我们来得到下述命题.

Proposition 2.68. 设 R 是交换 Noether 环, M 是 R-模且 $x \in R$ 既是 R-正则元又是 M-正则元, 那么对任何能够被 x 零化的 R-模 N, 有 R-模同构 $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(N, M) \cong \mathrm{Ext}^i_{R/(x)}(N, M/xM), \forall i \geq 0$.

Proof. **Step1.** 先取 M 的极小投射分解, 然后构造 M/xM 作为 $R/(x)$-模的极小投射分解. 取定 M 的极小内射分解

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{j} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \longrightarrow \cdots,$$

根据前面的讨论知其长度给出 M 的内射维数. 现用 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),-)$ 作用之, 得复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^0) \xrightarrow{(d^0)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2) \xrightarrow{(d^2)_*} \cdots$$

该复形的 i 次同调就是 $\mathrm{Ext}^i_R(R/(x),M)$, 下面我们来说明 $\mathrm{Ext}^t_R(R/(x),M)=0,\forall t\geq 2, \mathrm{Ext}^1_R(R/(x),M)\cong M/xM$, 进而可从上述复形出发构造 M/xM 作为 $R/(x)$-模的内射分解 (并且是极小的). 考察短正合列

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{x_l} R \longrightarrow R/(x) \longrightarrow 0,$$

它导出 Ext 群长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,M) \xrightarrow{(x_l)^*} \mathrm{Hom}_R(R,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(R/(x),M) \longrightarrow \cdots$$

由 R 是投射模知 $\mathrm{Ext}^t_R(R,M)=0,\forall t\geq 1$, 于是 $\mathrm{Ext}^t_R(R/(x),M)=0,\forall t\geq 2$ 并且借助下述交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(R,M) \arrow[r, "(x_l)^*"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(R,M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Ext}^1_R(R/(x),M) \arrow[r] & 0 \\
M \arrow[r, "x_l"] & M & &
\end{tikzcd}$$

马上得到 $R/(x)$-模同构 $M/xM\cong \mathrm{Ext}^1_R(R/(x),M)$. 下面通过说明 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^0)=0$ 来得到正合 $R/(x)$-模复形.

$$0 \longrightarrow M/xM \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2) \xrightarrow{(d^2)_*} \cdots$$

假设 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^0)\neq 0$, 那么 E_0 中有非零元 a 可被 x 零化. 因为 Ra 中有 $\mathrm{Ker}d^0=j(M)$ 的非零元, 所以该非零元可被 x 零化, 这和 x 是 M-正则元矛盾. 从而 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^0)=0$. 下面我们先说明正合复形

$$0 \longrightarrow M/xM \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2) \xrightarrow{(d^2)_*} \cdots$$

是 M/xM 的内射分解, 再说明其极小性. 利用张量函子 $-\otimes_{R/(x)} R/(x)$ 与 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),-)$ 的伴随性, 有函子的自然同构

$$\mathrm{Hom}_R(-,E^i)(-\otimes_{R/(x)} R/(x)) = \mathrm{Hom}_R(-\otimes_{R/(x)} R/(x),E^i) \cong \mathrm{Hom}_{R/(x)}(-,\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^i))$$

这一观察说明每个 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^i)$ 作为 $R/(x)$-模是内射模. 因而前面得到的复形

$$0 \longrightarrow M/xM \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2) \xrightarrow{(d^2)_*} \cdots$$

是 M/xM 的内射分解. 要验证其极小性只需说明每个 $\mathrm{Ker}(d^i)_*$ 是 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^i)$ 的本质子模, 任取 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^i)$ 的非零元 $g:R/(x)\to E^i$, 有 $g(\overline{1})\neq 0\in E^i$, 因为 $\mathrm{Ker}d^i$ 是 E^i 的本质子模, 所以存在 $a\in R$ 使得 $ag(\overline{1})\neq 0\in \mathrm{Ker}d^i$, 于是 $ag\neq 0\in \mathrm{Ker}(d^i)_*$, 所以 $\mathrm{Ker}(d^i)_*$ 是 $\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^i)$ 的本质子模. 总结一下, 现在我们得到了 M/xM 作为 $R/(x)$-模的极小内射分解

$$0 \longrightarrow M/xM \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1) \xrightarrow{(d^1)_*} \mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2) \xrightarrow{(d^2)_*} \cdots.$$

Step2. 对 N, 因为 $xN=0$, 所以可天然给出 N 上的 $R/(x)$-模结构, 并且易得 $\mathrm{Hom}_R(N,E^0)=0$, 现在用 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_{R/(x)}(N,-)$ 作用我们得到的 M/xM 的极小内射分解得到复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R/(x)}(N,\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1)) \xrightarrow{(d^1)_{**}} \mathrm{Hom}_{R/(x)}(N,\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2)) \xrightarrow{(d^2)_{**}} \cdots.$$

通过张量函子与 Hom 函子的伴随性易得下述两复形间的链同构

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{R/(x)}(N,\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^1)) \arrow[r, "(d^1)_{**}"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{R/(x)}(N,\mathrm{Hom}_R(R/(x),E^2)) \arrow[r, "(d^2)_{**}"] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(N,E^0) \arrow[r, "(d^0)_*"] & \mathrm{Hom}_R(N,E^1) \arrow[r, "(d^1)_*"] & \mathrm{Hom}_R(N,E^2) \arrow[r, "(d^2)_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

对上下两复形取同调即得结果. □

上述命题证明过程中我们也得到了下述引理, 为了之后引用方便这里单独列出.

Lemma 2.69. 设 R 是含幺交换环, M 是 R-模, $\mathrm{E}_R(M)$ 是 M 的内射包, $a\in R$ 不可逆. 那么

$$j_*:\mathrm{Hom}_R(R/(a),M)\to\mathrm{Hom}_R(R/(a),E_R(M))$$

是 $R/(a)$-模范畴间的本质单同态, 这里 $\mathrm{Hom}_R(R/(a),E_R(M))$ 是内射 $R/(a)$-模.

Proof. 利用 $E_R(M)$ 是内射模以及 Hom 函子与张量函子伴随性看到 $\mathrm{Hom}_R(R/(a),E_R(M))$ 是内射 $R/(a)$-模, 要验证的只有 j_* 是本质单同态. 任取 $g\neq 0\in\mathrm{Hom}_R(R/(a),E_R(M))$, 我们需要说明存在 $c\in R/(a)$ 使得 $cg\neq 0\in j_*(\mathrm{Hom}_R(R/(a),M))$ 来得到 $j_*(\mathrm{Hom}_R(R/(a),M))$ 是 $\mathrm{Hom}_R(R/(a),E_R(M))$ 的本质子模. 因为 $g(\overline{1})\neq 0\in E_R(M)$, 所以利用 M 是 $E_R(M)$ 的本质子模知存在 $b\in R$ 使得 $bg(\overline{1})\in M$. 现取 $c=\overline{b}$, 那么 $cg=bg\neq 0$ 满足 $\mathrm{Im}(cg)\subseteq M$. 这一观察表明 $cg\neq 0\in j_*(\mathrm{Hom}_R(R/(a),M))$. □

通过 [命题2.68] 立即得到下述推论.

Corollary 2.70. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, 那么对任何有限生成模 M 以及 $x\in\mathfrak{m}$, 如果 x 既是 R-正则元又是 M-正则元, 那么 $\mathrm{inj.dim}_{R/(x)}M/xM=\mathrm{inj.dim}_RM-1$.

Proof. 回忆 [命题2.48], 我们有 $\mathrm{inj.dim}_RM=\sup\{i\in\mathbb{N}|\mathrm{Ext}^i_R(k,M)\neq 0\}$ 以及

$$\mathrm{inj.dim}_{R/(x)}M/xM=\sup\{i\in\mathbb{N}|\mathrm{Ext}^i_{R/(x)}(k',M/xM)\neq 0\}=\sup\{i\in\mathbb{N}|\mathrm{Ext}^i_{R/(x)}(k,M/xM)\neq 0\}$$

再应用 [命题2.68] 即可. □

特别地, 如果我们有 R-正则序列 $a_1,...,a_n$, 那么每个 a_{i+1} 作为 $R/(a_1,...,a_i)$-正则元当然满足上述推论的条件. 那么反复应用上述推论我们看到 $\mathrm{inj.dim}_{R/(a_1,...,a_n)}R/(a_1,...,a_n)=\mathrm{inj.dim}_RR-n$. 故得下述推论.

Corollary 2.71. 设 R 是交换 Noether 环, $a_1,...,a_n$ 是 R-正则序列, 那么 $R/(a_1,...,a_n)$ 也是 Gorenstein 环. 反之, 若 R 是 Noether 局部环, 那么 $R/(a_1,...,a_n)$ 是 Gorenstein 环蕴含 R 是 Gorenstein 环.

根据前面的讨论知 [推论2.70] 也告诉我们下述推论.

Corollary 2.72. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是非零有限生成模, 如果 R-正则序列 $a_1,...,a_n$ 也是 M-正则序列, 那么 $\mathrm{inj.dim}_{R/(a_1,...,a_n)}M/(a_1,...,a_n)M=\mathrm{inj.dim}_RM-n$.

2.5 Matlis 理论初步

本节先介绍 Noether 环上内射模的结构理论、Bass 数、模的 type、局限在有限长模范畴的 Matlis 对偶. 最后说明一个交换 Noether 局部环是 Gorenstein 环的充要条件是它是 type 为 1 的 Cohen-Macaulay 环.

先看一个由 Eben Matlis(美国 1923-2015, Kaplansky 学生) 给出的一个交换代数中的著名定理:

Theorem 2.73 (Matlis,1958)**.** 设 R 是交换 Noether 环, $\mathcal{I}(R)$ 是不可分内射模同构类全体, 那么

$$\alpha : \mathrm{Spec}R \to \mathcal{I}(R), P \mapsto [E(R/P)]$$

是定义合理的双射. 即交换 Noether 环上不可分内射模同构类全体与素谱有一一对应, 特别地, $\mathcal{I}(R)$ 是集合 (严格来说这种表述是错误的, 原因是每个不可分内射模同构类是真类, 它不可能是某个集合的元素, 但我们可以先从每个不可分内射模等价类中选取一个代表元, 将全体代表元构成的类记作 $\mathcal{I}(R)$ 来修正这一点). 并且 R 上任何不可分内射模总同构于某个 R/P 的内射包, 这里 $P \in \mathrm{Spec}R$.

在证明该定理前做一些准备.

Lemma 2.74. 设 R 是交换 Noether 环, 那么
(1) 任何素理想 P 满足 $E(R/P)$ 是不可分内射模.
(2) 任给内射 R-模 $I \neq 0$, 对 $P \in \mathrm{Ass}I$, 有 $E(R/P)$ 同构于 I 的某个直和因子. 特别地, 当 I 是不可分内射模时, $E(R/P) \cong I$.
(3) 对任何有限生成 R-模 M, 有 $\mathrm{Ass}M = \mathrm{Ass}E(M)$. 特别地, 当 $M = R/P, P \in \mathrm{Spec}R$ 时, 有

$$\mathrm{Ass}E(R/P) = \mathrm{Ass}R/P = \{P\}.$$

Proof. (1) 假设 $E(R/P)$ 可分, 那么有非零子模 N_1, N_2 的交是零, 则 $N_1 \cap R/P$ 与 $N_2 \cap R/P$ 作为 R/P 的非零子模交是零, 但 R/P 是整环表明它任何两个非零子模 (理想) 之交非零, 得到矛盾.

(2) 由条件知有形如 $0 \longrightarrow R/P \xrightarrow{j} I$ 的正合列, 那么存在使得下图交换的单模同态 k.

$$\begin{tikzcd} & E_R(R/P) \arrow[dr, "k"] & \\ 0 \arrow[r] & R/P \arrow[u, "i"] \arrow[r, "j"] & I \end{tikzcd}$$

于是由 $E(R/P)$ 是内射模我们马上得到 $E(R/P)$ 同构于 I 的某个直和因子.

(3) 只要说明 $\mathrm{Ass}E_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}M$, 任取 $Q \in \mathrm{Ass}E_R(M)$, 有形如 $0 \longrightarrow R/Q \xrightarrow{j} E_R(M)$ 的短正合列, 所以 $j(R/Q) \cap M \neq 0$, 结合 $\mathrm{Ass}(R/Q) = \{Q\}$ 可知 $\mathrm{Ass}(j(R/Q) \cap M) = \{Q\}$. 从而 $Q \in \mathrm{Ass}M$. $\square$

现在我们可以给出 Matlis 定理的证明, 即说明 $\alpha : \mathrm{Spec}R \to \mathcal{I}(R), P \mapsto [E(R/P)]$ 是定义合理的双射. 根据 [引理2.74(1)] 得到 α 定义合理, 根据 [引理2.74(3)] 得到 α 是单射, [引理2.74(2)] 表明 α 是满射, 得证.

下面先说明 Noether 环上内射模总是一些不可分内射模的直和, 再根据刚刚介绍的 Matlis 定理, 对交换 Noether 环上的内射模, 其不可分内射模直和分解每个直和项同构于某个 R/P 的内射包, 我们将看到, 对固定的素理想 P, 同构于 $E(R/P)$ 的直和项指标全体的基数是不变量——由 M, P 决定 (见 [定理2.77]). 随后介绍 Bass 数的概念 (见 [定义2.81]), 它可给交换 Noether 环上任何模的极小内射分解每个项一个描述. 具体地, 记 M 关于素理想 P 的 i 次 Bass 数是 $\mu_i(P, M)$, 我们会说明对 M 的极小内射分解 $(E^\bullet(M), d^\bullet)$, $\mu_i(P, M)$ 就是 $E^i(M)$ 极小内射直和分解中与 $E(R/P)$ 同构的直和项数目.

Lemma 2.75. 设 R 是左 Noether 环, 那么任何内射左 R-模 M 是一些不可分内射模的直和.

Proof. 注意任何非零内射模 $_RE$ 必定存在不可分内射子模, 因为取 $x \neq 0 \in E$, 考虑内射包 $E(Rx) \subseteq E$, 我们用反证法说明 $E(Rx)$ 含有不可分内射子模. 若不然, 则存在非零真内射子模 I_{11}, I_{12} 使得 $E(Rx) = I_{11} \oplus I_{12}$, I_{11} 不是不可分内射子模表明存在 I_{11} 的非零真内射子模 I_{21}, I_{22} 使得 $I_{11} = I_{21} \oplus I_{22}$, 如此继续, 递归地可得到非零内射子模序列 $\{I_{k1}\}_{k\geq 1}$ 以及 $\{I_{k2}\}_{k\geq 1}$ 使得 $I_1 = I_{11} \oplus I_{12}, I_{k1} = I_{k+1,1} \oplus I_{k+1,2}, \forall k \geq 1$. 易见

$$I_1 = I_{12} \oplus I_{22} \oplus \cdots \oplus I_{n2} \oplus I_{n1}, \forall n \geq 1.$$

所以我们有 $E(Rx)$ 的子模严格升链 $I_{12} \subsetneq I_{12} \oplus I_{22} \subseteq I_{12} \oplus I_{22} \oplus I_{32} \subsetneq \cdots$, 它诱导 Rx 的子模严格升链

$$I_{12} \cap Rx \subsetneq (I_{12} \oplus I_{22}) \cap Rx \subseteq (I_{12} \oplus I_{22} \oplus I_{32}) \cap Rx \subsetneq \cdots$$

这与 Rx 是 Noether 模矛盾. 因而 $E(Rx)$ 有不可分内射子模, 这也说明 E 有不可分内射子模. 现在我们说明内射模 M 是一些不可分内射模的直和. 不妨设 $M \neq 0$, 考虑集合

$$S = \{\{M_i\}_{i\in\Lambda} | \{M_i\}_{i\in\Lambda}\text{是}M\text{的不可分内射子模族且}\sum_{i\in\Lambda} M_i = \oplus_{i\in\Lambda} M_i\}$$

那么根据前面的讨论知道 $(S, \subseteq)$ 是非空偏序集, 可直接验证它任何全序子集有上界, 所以应用 Zorn 引理知 S 有极大元 $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$. 依 Bass-Papp 定理, 左 Noether 环上任何一族内射左模的直和仍内射, 所以 $\oplus_{i\in\Lambda} M_i$ 是 M 的直和因子, 设为 $M = E \oplus (\oplus_{i\in\Lambda} M_i)$, 假设 $E \neq 0$, 则由前面的讨论知道 E 有不可分内射子模, 这会与子模族 $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ 的极大性矛盾, 所以 $E = 0$, 从而 $M = \oplus_{i\in\Lambda} M_i$. □

Lemma 2.76. 设 R 是交换 Noether 环, P 是素理想, M 是有限生成 R-模, 那么有 R_P/P_P-线性同构

$$R_P/P_P \cong \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, (E(R/P))_P).$$

Proof. 因为 R_P-模同构 $E_{R_P}(R_P/P_P) \cong (E(R/P))_P$, 所以只要证 $R_P/P_P \cong \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, E_{R_P}(R_P/P_P))$. 为此, 用 R 替换 R_P, m 替换 P_P 并记 $k = R/m$, 只要证 R 是局部环的情形就够了. 下证 k-线性同构 $k \cong \mathrm{Hom}_R(k, E_R(k))$. 注意到 k-线性同构

$$\begin{aligned} \eta : \{x \in E_R(k) | mx = 0\} &\to \mathrm{Hom}_R(k, E_R(k)) \\ x &\mapsto x_r : k \to E_R(k), c \mapsto cx \end{aligned}$$

如果能说明 $\{x \in E_R(k) | mx = 0\} = k$, 便得到结果. 易见 $k \subseteq \{x \in E_R(k) | mx = 0\}$, 假设 $k \subsetneq \{x \in E_R(k) | mx = 0\}$, 那么线性空间 $\{x \in E_R(k) | mx = 0\}$ 有非零子空间 W 和 k 交为零, 将 W 视作非零 R-子模, 那么这和 $E_R(k)$ 任何非零子模与 k 相交非零矛盾. 故 $k = \{x \in E_R(k) | mx = 0\}$, 证毕. □

证明过程给出了 k-线性同构 $k \cong \mathrm{Hom}_R(k, E_R(k))$, 这也是 R-模同构, 故总有 R-模同构

$$\mathrm{Ext}^i_R(k, E_R(k)) \cong \begin{cases} k, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

Theorem 2.77. 设 R 是交换 Noether 环, 那么任何内射 R-模 M 可分解为一些不可分内射 R-模的直和 $M=\oplus_{i\in\Lambda}M_i$, 那么对 R 的每个素理想 P, 指标集 Λ 中满足 $M_i\cong E(R/P)$ 的指标全体的势由维数

$$\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)$$

给出. 即 $\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)=|\{i\in\Lambda|M_i\cong E(R/P)\}|$, 该定理表明直和分解 $M=\oplus_{i\in\Lambda}M_i$ 中与 $E(R/P)$ 同构的 M_i 数量是由 M,P 决定的不变量. 并注意当 M 是有限生成模时, $\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)\in\mathbb{N}$.

Proof. 直和分解的存在性由前面的引理即得. 要证的只有

$$\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)=|\{i\in\Lambda|M_i\cong E(R/P)\}|.$$

现在证明结论：首先由局部化与直和可交换得到 R_P/P_P-线性同构

$$\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)\cong\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,\oplus_{i\in\Lambda}(M_i)_P),$$

因为 R_P/P_P 作为 R_P-模是不可约模, 所以由下面的 [引理2.78] 马上得到 R_P/P_P-线性同构

$$\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,\oplus_{i\in\Lambda}(M_i)_P)\cong\oplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(M_i)_P)$$

每个不可分内射模 M_i 同构于某个 $R/Q,Q\in\mathrm{Spec}R$, 当 $Q\neq P$ 时, 仅可能 $Q\subsetneq P$ 或 $Q\nsubseteq P$. 下面我们说明这两种情况都将导致 $\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,E(R_P/Q_P))=0$. 一旦证明该断言, 应用 [引理2.78] 我们可以立即得到 R_P/P_P-线性同构 $\oplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(M_i)_P)\cong\oplus_{i\in\Lambda_0}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,E(R_P/P_P))$, 其中 $\Lambda_0=\{i\in\Lambda|M_i\cong E(R/P)\}$, 从而由 [引理2.76] 来得到

$$\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)\cong\oplus_{i\in\Lambda_0}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,E(R_P/P_P))\cong\oplus_{i\in\Lambda_0}R_P/P_P,$$

即 $|\{i\in\Lambda|M_i\cong E(R/P)\}|=|\Lambda_0|=\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,M_P)$. 下面来证明断言.

Case1. 当素理想 $Q\nsubseteq P$, $P\notin V(Q)=V(\mathrm{Ann}_RR/Q)=\mathrm{Supp}(R/Q)$, 这表明 $R_P/Q_P=0$, 所以内射包 $E_{R_P}(R_P/Q_P)=0$, 结论成立.

Case2. 当素理想 $Q\subsetneq P$ 时, 取 $x\in P-Q$, 那么 $x/1\in P_P-Q_P$, 因此它决定的左乘变换给出 R_P/Q_P 上的单射, 考虑下述交换图：

$$\begin{array}{ccc}
R_P/Q_P & \xrightarrow{\ i\ } & E_{R_P}(R_P/Q_P)\\
{\scriptstyle (x/1)_l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (x/1)_l}\\
R_P/Q_P & \xrightarrow{\ i\ } & E_{R_P}(R_P/Q_P)
\end{array}$$

因为 $i:R_P/Q_P\to E_{R_P}(R_P/Q_P)$ 是本质单同态, $i(x/1)_l$ 是单同态且 $E_{R_P}(R_P/Q_P)$ 是内射模, 故 $E_{R_P}(R_P/Q_P)$ 上的左乘变换 $(x/1)_l$ 也是单射, 下面使用反证法说明 $\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,E(R_P/Q_P))=0$. 若不然, 存在非零 R_P-模同态 $f:R_P/P_P\to E(R_P/Q_P)$, 那么存在某个 $a\in R_P/P_P$ 使得 $f(a)\neq0$, 那么 $(x/1)f(a)\neq0$, 这与 $(x/1)a=0\in R_P/P_P$ 矛盾. 故 $\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,E(R_P/Q_P))=0$, 证毕. $\square$

Lemma 2.78. 设 R 是含幺环, $M,N_i(i\in\Lambda)$ 均是左 R-模, 如果 M 是不可约模, 那么有加群同构

$$\varphi:\oplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Hom}_R(M,N_i)\to\mathrm{Hom}_R(M,\oplus_{i\in\Lambda}N_i)$$

$$(f_i)_{i\in\Lambda} \mapsto \varphi((f_i)_{i\in\Lambda}) : M \to \oplus_{i\in\Lambda} N_i, x \mapsto (f_i(x))_{i\in\Lambda}$$

并且当 M 有双模结构时, 例如 ${}_RM_S$ 是 R-S 双模, 那么 φ 是左 S-模同构.

事实上, 更一般地, 可以将上述引理证明到下述形式.

Lemma 2.79. 设 R 是含幺环, $M, N_i (i \in \Lambda)$ 均是左 R-模, 如果 M 是有限生成模, 那么有加群同构

$$\begin{aligned}\varphi_M : \oplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Hom}_R(M, N_i) &\to \mathrm{Hom}_R(M, \oplus_{i\in\Lambda} N_i)\\ (f_i)_{i\in\Lambda} &\mapsto \varphi((f_i)_{i\in\Lambda}) : M \to \oplus_{i\in\Lambda} N_i, x \mapsto (f_i(x))_{i\in\Lambda}\end{aligned}$$

并且对任何模同态 $d : M \to M'$ 有下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M, \oplus_{i\in\Lambda} N_i) \arrow[r, "d^*"] & \mathrm{Hom}_R(M', \oplus_{i\in\Lambda} N_i) \\
\oplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Hom}_R(M, N_i) \arrow[r, "(d^*)_{i\in\Lambda}"] \arrow[u, "\varphi_M"] & \oplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Hom}_R(M', N_i) \arrow[u, "\varphi_{M'}"']
\end{tikzcd}$$

Corollary 2.80. 设 R 是含幺环, $M, N_i (i \in \Lambda)$ 均是左 R-模, 满足 M 有投射分解

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

其中每个 P_k 是有限生成投射模 (例如 M 是左 Noether 环上有限生成模). 那么 $\mathrm{Ext}^i_R(M, -)$ 保持直和, 即有加群同构

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, \oplus_{i\in\Lambda} N_i) \cong \oplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Ext}^i_R(M, N_i).$$

若更进一步 M 或 N 是 R-S 双模, 那么该加群同构可以成为 S-模同构.

下面的概念由 Hyman Bass(美国, 1932-) 于 1963 年引入, 我们将马上看到它在极小内射分解上的作用.

Definition 2.81 (Bass 数)**.** 设 R 是交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模, $P \in \mathrm{Spec}R$, 称

$$\mu_i(P, M) = \dim_{R_P/P_P}\mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/P_P, M_P)$$

是 M **关于** P **的** i **次 Bass 数** (the i-th Bass number of M with respect to P), 易见它是自然数.

Proposition 2.82. 设 R 是交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模, 并设 M 有极小内射分解

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{j} E^0(M) \xrightarrow{d^0} E^1(M) \xrightarrow{d^1} \cdots$$

那么对每个自然数 i, 有 R-模同构 $E^i(M) \cong \oplus_{P\in\mathrm{Spec}R} E(R/P)^{\mu_i(P,M)}$.

Proof. 由局部化函子的正合性以及这时模取内射包与作局部化可交换 (回忆 [命题2.62]) 知对每个素理想 P,

$$0 \longrightarrow M_P \xrightarrow{j_P} (E^0(M))_P \xrightarrow{(d^0)_P} (E^1(M))_P \xrightarrow{(d^1)_P} \cdots$$

是 M_P 作为 R_P-模的极小内射分解, 下面说明 R_P/P_P-线性同构

$$\mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/P_P, M_P) \cong \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P, (E^i(M))_P),$$

一旦证明该断言, 则由 [定理2.77] 得到 R-模同构

$$E^i(M) \cong \oplus_{P\in \mathrm{Spec}R} E(R/P)^{\dim_{R_P/P_P}\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(E(M))_P)} \cong \oplus_{P\in\mathrm{Spec}R} E(R/P)^{\mu_i(P,M)}.$$

为计算 $\mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/P_P, M_P)$, 用 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,-)$ 作用 M_P 的极小内射分解得到复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(E^0(M))_P) \xrightarrow{((d^0)_P)_*} \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(E^1(M))_P) \xrightarrow{((d^1)_P)_*} \cdots$$

对每个自然数 i, 命 $C^i = \{x \in (E^i(M))_P | P_P x = 0\} \subseteq (E^i(M))_P$, 那么

$$\eta^i : \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(E^i(M))_P) \to C^i, f \mapsto f(\overline{1})$$

是 R_P/P_P-线性同构, 并且 $\eta = \{\eta^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 给出下述两复形间的链同构:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(E^0(M))_P) \arrow[r, "((d^0)_P)_*"] \arrow[d, "\eta^0"'] & \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(E^1(M))_P) \arrow[r, "((d^1)_P)_*"] \arrow[d, "\eta^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^0 \arrow[r, "(d^0)_P|"] & C^1 \arrow[r, "(d^1)_P|"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

下面通过说明每个 $(d^i)_P$ 是零同态的方式来得到 $\mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/P_P, M_P) \cong \mathrm{Hom}_{R_P}(R_P/P_P,(E^i(M))_P)$. 任取 $x \neq 0 \in C^i$, 那么根据 $(E^i(M))_P$ 是 $\mathrm{Im}(d^{i-1})_P$ 的本质扩张 (这里记 j_P 为 $(d^{-1})_P$) 知存在 $a \in R_P$ 使得 $ax \neq 0 \in \mathrm{Im}(d^{i-1})_P$, 注意到 $a \notin P_P$ 必定是 R_P 中可逆元得到 $x \in \mathrm{Im}(d^{i-1})_P$, 那么我们当然有 $(d^i)_P(x) = 0$. $\square$

前面针对交换 Noether 环上非零有限生成模以及素理想定义了 Bass 数, 容易验证对 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m},k)$ 上的有限生成模 M, 总满足 $R_\mathfrak{m}$-模同构 $\mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}) \cong (\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M))_\mathfrak{m}$ 再转为 R-模同构易知 $\dim_k \mathrm{Ext}^i_R(k,M) = \dim_{R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\mathfrak{m}} \mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}) = \mu_i(\mathfrak{m}, M)$. 因此模的 type 可视作特殊的 Bass 数.

Definition 2.83 (type)**.** 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是非零有限生成 R-模, 并设 $\mathrm{depth}M = t$, 称 $\dim_k \mathrm{Ext}^t_R(k,M) = \mu_t(\mathfrak{m}, M)$ 为模 M 的 **type**, 记作 $r(M)$. 即 M 关于 $\mathfrak{m}$ 的 t 次 Bass 数.

若取定交换局部环 R 上的模 M, 那么它的基座 $\mathrm{soc}M = \{x \in M | \mathfrak{m}x = 0\} \cong \mathrm{Hom}_R(k, M)$($k$-线性同构), 这时若 R 进一步是 Noether 的, 对深度为 t 的有限生成模 M, 若取定含于 $\mathfrak{m}$ 的极大 M-正则序列 $a_1,...,a_t$, 那么我们有 R-模同构 $\mathrm{Ext}^t_R(k,M) \cong \mathrm{Hom}_R(k, M/(a_1,...,a_t)M)$, 若将两边视作 k-线性空间, 这也是 k-线性同构, 因此我们得到 $r(M) = \dim_k \mathrm{soc}(M/(a_1,...,a_t)M) = r(M/(a_1,...,a_t)M)$(这里的 type 是视作 R-模而言, 但注意将 $M/(a_1,...,a_t)M$ 视作 R-模的 type 与把它视作 $R/(a_1,...,a_t)$-模的 type 一致, 即下面的 [引理2.85]). 特别地, 当 $\mathrm{depth}M = 0$ 时, M 的 type 由其基座的线性维数给出. 下面的引理是我们之后需要引用的一个特殊情形.

Lemma 2.84. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是有限生成 R-模且 $\mathrm{depth}M = 0$(例如当 $\mathfrak{m}M = 0$ 时), 那么 $r(M) = \dim_k \mathrm{soc}M$.

为了之后引用方便, 我们再额外列出下述引理.

Lemma 2.85. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是非零有限生成 R-模, 并设 $\mathrm{depth}M = t$, $a_1,...,a_t$ 是含于 $\mathfrak{m}$ 的极大 M-正则序列, 那么 $M/(a_1,...,a_t)M$ 视作 R-模的 type 与把它视作 $R/(a_1,...,a_t)$-模的 type 一致, 即 $r_R(M) = r_R(M/(a_1,...,a_t)M) = r_{R/(a_1,...,a_t)}M/(a_1,...,a_t)M$.

Matlis 于 1958 年证明了对完备交换 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m}, k)$, 其上 Artin 模全子范畴和 Noether 模全子范畴是范畴对偶的, 更具体地, k 的内射包 E 所决定的逆变 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ 给出两全子范畴间的范畴对偶. 让我们看一个关于 Noether 局部环上有限长模全子范畴形式的 Matlis 对偶.

Proposition 2.86. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是交换 Noether 局部环, E 是 k 作为 R-模的内射包, N 是有限长 R-模, 对每个 $M \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}$, 记 $M' = \mathrm{Hom}_R(M, E)$(如果 R 是域, 这时 $E = k$, M' 就是 k-线性空间 M 的对偶), 则:
(1) 有 R-模同构

$$\mathrm{Ext}^i_R(k, E) \cong \begin{cases} k, \ i = 0, \\ 0, \ i > 0. \end{cases}$$

(2) 对任何有限长 R-模 N, N'(读作 N 的 E-对偶) 作为 R-模也有限长, 且 $l(N) = l(N')$.
(3) 自然同态

$$\begin{aligned} \eta_N : N \to N'' = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(N, E), E) \\ n \mapsto \eta(n) : \mathrm{Hom}_R(N, E) \to E, g \mapsto g(n) \end{aligned}$$

是 R-模同构. 若记 $\mathscr{F}$ 是 R-Mod 中有有限长模构成的全子范畴, 给出那么 $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ 给出 $\mathscr{F}$ 到自身的范畴对偶, 更具体地, 我们有自然同构 $\mathrm{Hom}_R(-, E)\mathrm{Hom}_R(-, E) \cong \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$.
(4) 记 $\mu(M)$ 表示 R 上有限生成模 M 的极小生成元数目, 那么 $\mu(N) = r(N'), r(N) = \mu(N')$.
(5) 若更进一步 R 是 Artin 环 (注意这时有限生成 R-模有有限长), 那么 E 是有限生成忠实 R-模并且满足

- $l(E) = l(R)$.
- 标准同态 $R \to \mathrm{End}_R(E), a \mapsto a_l$ 是环同构也是 R-模同构 (故 E 的自同态由 R 中元素左乘变换诱导). 注意 $\mathrm{End}_R(E)$ 作为循环 R-模的生成元必定是 E 上自同构.
- $r(E) = 1$ 且 $\mu(E) = r(R)$.
- 任何 type 是 1 的忠实有限生成 R-模和 E 同构.

Proof. (1) 是 [注记2.5] 所阐述过的事实. 下面通过对 N 的长度 $l(N)$ 作归纳得到 (2). 不妨设 $N \neq 0$, 当 $l(N) = 1$ 时, N 是单模, 所以 $k \cong N$, 进而 (1) 表明 $N' \cong k$, 所以 $l(N') = 1$. 假设结论对长度不超过 $l(N) - 1(l(N) \geq 2)$ 的有限长模成立, 因为 $l(N) \geq 2$, 所以存在非零真子模 K, 进而有形如

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

的正合列, 其中 $l(K), l(C)$ 严格小于 $l(N)$. 用函子 $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ 作用上述正合列得到

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow N' \longrightarrow K' \longrightarrow 0$$

由归纳假设, C', K' 有有限长且 $l(C) = l(C'), l(K) = l(K')$. 故 N' 有有限长且 $l(N') = l(C') + l(K') = l(N)$, 这就证明了 (2). 现在说明 (3), 置 $\eta : \mathrm{ob}\mathscr{F} \to \bigcup\limits_{N \in \mathrm{ob}\mathscr{F}} \mathrm{Hom}_R(N, N''), N \mapsto \eta_N$, 直接计算可知 η 是恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathscr{F}}$ 到 $\mathrm{Hom}_R(-, E)\mathrm{Hom}_R(-, E)$ 的自然变换. 故只需验证每个 η_N 是同构即可. 不妨设 $N \neq 0$, 当 $l(N) = 1$

时, $N \cong k$, 故由 η 的自然性, 只需说明 η_k 是同构, 这是单模间的同态, 只需说明 $\eta_k \neq 0$ 即可, 这明显成立. 假设结论对长度不超过 $l(N)-1(l(N)\geq 2)$ 的有限长模成立, 考虑形如

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

的正合列, 其中 $l(K), l(C)$ 严格小于 $l(N)$. 我们有下述交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\eta_K"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\eta_N"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\eta_c"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'' \arrow[r] & N'' \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据归纳假设, 这里 η_C, η_K 是同构, 故 η_N 也是同构.

(4) 只要证明第一个等式就足够了, 原因是一旦说明了 $\mu(N)=r(N')$, 根据 (2) 知道 N' 也是有限长模, 那么就有 $\mu(N')=r(N'')$, 再应用 (3) 得到的 $N\cong N''$ 立即得到 $r(N)=\mu(N')$. 现在我们来验证 $\mu(N)=r(N')$. 因为 $N'=\mathrm{Hom}_R(k,N)$, 它满足 $\mathfrak{m}N'=0$, 所以由 [引理2.84] 得 $r(N')=\dim_k\mathrm{soc}N'$. 考虑短正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}N \longrightarrow N \longrightarrow N/\mathfrak{m}N \longrightarrow 0,$$

用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 作用之, 得正合列 $0 \longrightarrow (N/\mathfrak{m}N)' \longrightarrow N' \longrightarrow (\mathfrak{m}N)' \longrightarrow 0$, 从而知 R-模同构 $(N/\mathfrak{m}N)'\cong\{f\in N' | \mathfrak{m}f=0\}=\mathrm{soc}N'$, 因此作为 k-线性空间, 有 $\dim_k(N/\mathfrak{m}N)'=\dim_k\mathrm{soc}N'=r(N')$. 对 R-模 $N/\mathfrak{m}N$, 它明显满足 $\mathfrak{m}(N/\mathfrak{m}N)=0$, 所以由 (2) 并结合下面的 [引理2.87] 可得

$$\mu(N)=\dim_k N/\mathfrak{m}N=l_R(N/\mathfrak{m}N)=l_R((N/\mathfrak{m}N)')=\dim_k(N/\mathfrak{m}N)'=\dim_k\mathrm{soc}N'=r(N').$$

(5) 现在我们设 R 也是 Artin 的, 那么有 R-模同构 $E\cong\mathrm{Hom}_R(R,E)=R'$, 这表明 $l(E)=l(R')=l(R)$(第二个等号是因为 (2)). 既然 E 是有限长模, 便有 E 有限生成. 根据 (3), 我们知道

$$\eta_R : R \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R,E),E), a\mapsto \eta_R(a)$$

是 R-模同构. 再对标准 R-模同构 $g: E\to\mathrm{Hom}_R(R,E), x\mapsto x_r$ 作用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 得到 R-模同构 $g^*:\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R,E),E)\to\mathrm{End}_R(E), \varphi\mapsto\varphi g$. 于是得到 R-模同构

$$g^*\eta_R : R\to\mathrm{End}_R(E), a\mapsto g(x)(a)=ax.$$

即 $g^*\eta_R$ 就是由 R 中每个元素的左乘变换导出的同构, 它既是环同构又是 R-模同构. 特别地, E 忠实.

根据 (4), 我们知道 $r(E)=\mu(E')$, 根据刚刚证明了 $R\cong\mathrm{End}_R(E)=E'$ 知道 $\mu(E')=\mu(R)=1$. 此外, 也有 $\mu(E)=r(E')=r(R)$. 最后我们说明任何 type 是 1 的忠实有限生成模 N 必定和 E 同构. 因为 N 是有限生成模, 所以 N 有有限长, 从而应用 (4) 得到 $1=r(N)=\mu(N')$, 这说明 N', 这表明 N' 是循环模, 进而存在 R 的理想 I 使得 $R/I\cong N'$, 因此得到 R-模同构 $\mathrm{Hom}_R(R/I,E)\cong N''\cong N$. 根据条件, N 是忠实模, 这迫使理想 $I=0$, 那么 $N\cong\mathrm{Hom}_R(R,E)\cong E$, 证毕. $\square$

Lemma 2.87. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, 那么对任何有限生成 R-模 M, 只要 $\mathfrak{m}M=0$(那么 M 可天然视作 k-线性空间), 那么 M 有有限长且 $l_R(M)=\dim_k M$.

Proof. 因为 M 满足 $\mathfrak{m}M=0$, 所以 M 以及 M 的任何一个子模可视作有限维 k-线性空间, 反之, 将 M 视作 k-线性空间后每个子空间对应 M 的 R-子模. 不妨设 $M\neq 0$, 取 M 作为 k-线性空间的基 $\{x_1,...,x_n\}$, 那么有 k-子空间升链 $0\subsetneq(x_1)\subsetneq(x_1,x_2)\subsetneq\cdots\subsetneq(x_1,...,x_{n-1})\subsetneq(x_1,...,x_{n-1},x_n)=M$, 因为相邻的 k-子空间 $(x_1,...,x_i)$ 和 $(x_1,...,x_i,x_{i+1})$ 之间不会严格包含 k-子空间, 所以也不会严格包含 R-子模, 故上述子空间链给出 M 长度为 n 的合成列. 因此 $l_R(M)=n=\dim_k M$. □

Theorem 2.88. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, 那么 R 是 Gorenstein 环的充要条件是 R 是 type 为 1 的 Cohen-Macaulay 环.

Proof. 必要性：设 $\mathrm{depth}R=t$ 并取含于 $\mathfrak{m}$ 的极大 M-正则序列 $a_1,...,a_t$ 可得 $R/(a_1,...,a_t)$ 是作为自身上模深度为 0 的 Gorenstein 环 (见 [推论2.71]), 由 [命题2.8] 知如果能说明 $R/(a_1,...,a_t)$ 是 Cohen-Macaulay 环, 那么 R 自身也是 Cohen-Macaulay 环, 此外, [引理2.85] 说 $r(R)$ 与 $R/(a_1,...,a_t)$ 作为自身上模的 type 一致, 基于此观察, 我们可以不妨设 Gorenstein 环 R 的深度与维数都是 0(见 [推论1.47]). 那么根据 [定理2.49], $\mathrm{inj.dim}_R R=0$, 即 ${}_RR$ 是内射模, 而它的自同态环是除环表明 ${}_RR$ 是不可分内射模, 故由 [引理2.74(2)] 知存在某个素理想 P 使得 $R\cong E(R/P)$, 那么 [引理2.74(3)] 又说 $\mathrm{Ass}R=\{P\}$, 因为这时 $\mathrm{depth}R=0$, 所以 $\mathfrak{m}\in\mathrm{Ass}R$, 这迫使 $P=\mathfrak{m}$, 从而 $R\cong E(k)$, 而 [命题2.86(1)] 说后者的 type 是 1, 故 $r(R)=1$.

充分性：类似地, 不妨设 $\mathrm{depth}R=\mathrm{k.dim}R=0, r(R)=1$, 那么 R 是 Artin 环, 所以由 [命题2.86(5)] 可得 R 作为自身上的模是忠实有限生成并且 type 为 1 的模必为内射模, 从而 R 有有限内射维数. □

在本节结尾, 我们罗列一下交换代数中一般的 Matlis 对偶. 因为接下来关心证明细节的主要定理证明并用不到它, 所以这里省略证明. 证明可参考 [BH98] 或 [Mat87].

Theorem 2.89 (Matlis 对偶)**.** 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是完备交换 Noether 局部环, 设 E 是 ${}_Rk$ 的内射包, 那么逆变正合函子 $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 给出 R-Mod 的 Artin 模全子范畴与 Noether 模全子范畴之间的范畴对偶. 更具体地, $\mathrm{Hom}_R(-,E)\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 作为 Artin 模全子范畴上的函子自然同构于 Artin 模全子范畴上恒等函子; $\mathrm{Hom}_R(-,E)\mathrm{Hom}_R(-,E)$ 作为 Noether 模全子范畴上的函子自然同构于 Noether 模全子范畴上恒等函子.

2.6 Canonical 模

本节我们先介绍 Cohen-Macaulay 局部环的 canonical 模的概念, 随后通过一些准备后证明如果它存在, 则在同构意义下唯一 (见 [定理2.95]). 最后证明 Cohen-Macaulay 局部环存在 canonical 模的充要条件是它为某个 Gorenstein 局部环的同态像 (见 [定理2.100]).

让我们先看 canonical 模的定义. 回忆一个交换 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 上的 Cohen-Macaulay 模 M 如果满足 $\mathrm{depth}M=\mathrm{k.dim}\ R$, 则称 M 是极大 Cohen-Macaulay 模.

Definition 2.90 (canonical 模)**.** 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, 如果 R-模 C 是 type 为 1 的极大 Cohen-Macaulay 模, 具有有限内射维数, 则称 C 是 R 的 **canonical 模**.

根据 canonical 模的定义, 一个基本的观察是：

Lemma 2.91. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是 d 维交换 Noether 局部环, C 是非零有限生成 R-模, 那么 C 是 R 的 canonical 模的充要条件是

$$\dim_k \mathrm{Ext}_R^i(k,C) = \begin{cases} 1, & i = d, \\ 0, & i \neq d. \end{cases}$$

Proof. 必要性：因为 $r(C) = \dim_k \mathrm{Ext}_R^d(k,C) = 1$, 所以要说明的只有 $\mathrm{Ext}_R^i(k,C) = 0, \forall i \neq d$. 注意 C 内射维数有限保证了这时 $\mathrm{inj.dim}_R C = \mathrm{depth} C = \mathrm{k.dim} C = d$(回忆 [定理2.49]), 那么由 [命题2.48] 得到 $\mathrm{Ext}_R^i(k,C) = 0, \forall i > d$. 而 $\mathrm{Ext}_R^i(k,C) = 0, \forall i < d$ 由深度的定义即得.

充分性：这时由深度定义马上看到 $\mathrm{depth} C = d$, [命题2.48] 使得我们知道 $\mathrm{inj.dim}_R C = d$, 故 C 是内射维数有限的极大 Cohen-Macaulay 模, 再由 $r(C) = \dim_k \mathrm{Ext}_R^d(k,C) = 1$ 得到结论. □

下面我们做一些准备后证明 canonical 模的同构唯一性. 首先需要的是 Cohen-Macaulay 模关于极大性的等价刻画：

Proposition 2.92. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是 d 维交换 Noether 局部环, M 是非零有限生成 R-模, 则以下三条等价：
(1) 任何 R 的参数系 (任意排序得到的序列) 是 M-正则序列.
(2) 存在 R 的参数系 (任意排序得到的序列) 是 M-正则序列.
(3) $\mathrm{depth} M = d$.

Proof. (1)⇒(2) 是特殊情形, (2)⇒(3) 由 R 的参数系由 d 个元素构成是明显的. 所以只需要证 (3)⇒(1): 任取 R 的参数系 $a_1,...,a_d$, 有 $\mathfrak{m} = \sqrt{(a_1,...,a_d)}$, 所以应用 [引理1.33(1)]

$$\mathrm{grade}((a_1,...,a_d),M) = \mathrm{grade}(\sqrt{(a_1,...,a_d)},M) = \mathrm{grade}(\mathfrak{m},M) = d,$$

故 [推论1.95] 表明 $a_1,...,a_d$ 是 M-正则序列. □

所以如果对有限生成模 $M \neq 0$ 我们能够说明 R 的任何参数系是 M-正则序列, 就能得到 M 是极大 Cohen-Macaulay 模.

Lemma 2.93. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环, $\varphi: M \to N$ 是有限生成 R-模间的同态, $a_1,...,a_n$ 是 N-正则序列, 如果 $\tilde{\varphi}: M/(a_1,...,a_n)M \to N/(a_1,...,a_n)N, \overline{x} \mapsto \overline{\varphi(x)}$ 是同构, 那么 φ 本身也是同构.

Proof. 由条件, $\mathrm{Im}\varphi + (a_1,...,a_n)N = N$, 所以应用 Nakayama 引理得到 φ 是满射, 考察正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0,$$

利用 [命题1.9] 立即得到正合列

$$0 \longrightarrow K/(a_1,...,a_n)K \longrightarrow N/(a_1,...,a_n)N \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M/(a_1,...,a_n)M \longrightarrow 0,$$

于是由条件得到 $K = (a_1,...,a_n)K$, 再对 K 应用 Nakayama 引理即得结果. □

Proposition 2.94. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是 d 维 Cohen-Macaulay 局部环, C 是极大 Cohen-Macaulay$R$-模, 那么：
(1) 若 M 是极大 Cohen-Macaulay$R$-模, 并且 $\mathrm{Ext}_R^j(M,C) = 0, \forall j > 0$, 那么 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$ 是极大 Cohen-Macaulay$R$-模并且对任何 R-正则序列 $a_1,...,a_n$ 有 $a_1,...,a_n$ 是 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$-正则序列以及 R(或 $R/(a_1,...,a_n)$)-模同构

$$\Phi: \mathrm{Hom}_R(M,C)/(a_1,...,a_n)\mathrm{Hom}_R(M,C) \to \mathrm{Hom}_{R/(a_1,...,a_n)}(M/(a_1,...,a_n)M, C/(a_1,...,a_n)C)$$

$$f+(a_1,...,a_n)\mathrm{Hom}_R(M,C)\mapsto \tilde{f}:M/(a_1,...,a_n)M\to C/(a_1,...,a_n)C$$

其中 $\tilde{f}:M/(a_1,...,a_n)M\to C/(a_1,...,a_n)C, x+(a_1,...,a_n)M\mapsto f(x)+(a_1,...,a_n)C$.
(2) 若极大 Cohen-Macaulay$R$-模 C 还满足内射维数有限, M 是维数为 t 的 Cohen-Macaulay 模, 那么 $\mathrm{Ext}_R^j(M,C)=0,\forall j\neq d-t$ 且 $\mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,C)$ 是维数为 t 的 Cohen-Macaulay 模.

Proof. (1) 先指出在条件下 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$ 总是非零有限生成 R-模, 它是有限生成模是明显的, 根据 [引理1.33(3)], 有

$$\mathrm{grade}(\mathrm{Ann}_RM,C)=\inf\{j\in\mathbb{N}|\mathrm{Ext}_R^j(M,C)\neq 0\},$$

而 $C\neq 0$ 说明 $\mathrm{grade}(\mathrm{Ann}_RM,C)$ 有限, 这迫使 $\mathrm{grade}(\mathrm{Ann}_RM,C)=0$, 即有 $\mathrm{Hom}_R(M,C)\neq 0$. 不妨设 $d\geq 1$, 否则 R 是 Artin 环我们立即得到 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$ 是 0 维有限生成模, 进而也是极大 Cohen-Macaulay 模, 并且这时 $\mathrm{depth}R=0$, 下面的模同构直接成立. 下面我们对正则序列长度作归纳证明 $\Phi:\mathrm{Hom}_R(M,C)/(a_1,...,a_n)\mathrm{Hom}_R(M,C)\to\mathrm{Hom}_{R/(a_1,...,a_n)}(M/(a_1,...,a_n)M,C/(a_1,...,a_n)C)$ 是 R-模同构并且 $a_1,...,a_n$ 是 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$-正则序列. 先考虑 $n=1$ 的情形, 因为 C 是极大 Cohen-Macaulay 模, 且 a_1 是 R 的参数系的一部分 (回忆 [推论1.47]) 可得 a_1 是 C-正则元, 考察短正合列

$$0\longrightarrow C\xrightarrow{a_1}C\longrightarrow C/a_1C\longrightarrow 0,$$

它导出 Ext 群长正合列, 结合 $\mathrm{Ext}_R^1(M,C)=0$ 得到正合列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M,C)\xrightarrow{(a_1)_*}\mathrm{Hom}_R(M,C)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M,C/a_1C)\longrightarrow 0$$

由此我们看到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_R(M,C)/a_1\mathrm{Hom}_R(M,C)\to\mathrm{Hom}_R(M,C/a_1C)\\&\qquad f+a_1\mathrm{Hom}_R(M,C)\mapsto\overline{f}:M\to C/a_1C, x\mapsto f(x)+a_1C\end{aligned}$$

是 R-模同构以及 a_1 是 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$-正则元. 通过上述模同构可得

$$\begin{aligned}&\Phi:\mathrm{Hom}_R(M,C)/a_1\mathrm{Hom}_R(M,C)\to\mathrm{Hom}_{R/(a_1)}(M/a_1M,C/a_1C)\\&\qquad f+a_1\mathrm{Hom}_R(M,C)\mapsto\tilde{f}:M/a_1M\to C/a_1C\end{aligned}$$

是 R-模同构, 所以当 $n=1$ 时结论成立.

假设已经说明 $a_1,...,a_{n-1}$ 是 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$-正则序列以及 R-模同构

$$\begin{aligned}&\Phi_{n-1}:\mathrm{Hom}_R(M,C)/(a_1,...,a_{n-1})\mathrm{Hom}_R(M,C)\to\mathrm{Hom}_{R/(a_1,...,a_{n-1})}(M/(a_1,...,a_{n-1})M,C/(a_1,...,a_{n-1})C)\\&\qquad f+(a_1,...,a_{n-1})\mathrm{Hom}_R(M,C)\mapsto\tilde{f}:M/(a_1,...,a_{n-1})M\to C/(a_1,...,a_{n-1})C\end{aligned}$$

那么 $R/(a_1,...,a_{n-1})$ 是 Cohen-Macaulay 局部环、$M/(a_1,...,a_{n-1})$ 与 $C/(a_1,...,a_{n-1})$ 视作 $R/(a_1,...,a_{n-1})$ 上的模是极大 Cohen-Macaulay 模 (利用 [引理1.33(2)]), 于是由 $n=1$ 时已证明的结果我们得到 $\overline{a_n}\in R/(a_1,...,a_{n-1})$ 是 $\mathrm{Hom}_{R/(a_1,...,a_{n-1})}(M/(a_1,...,a_{n-1})M,C/(a_1,...,a_{n-1})C)$-正则元并且若记 $\overline{R}=R/(a_1,...,a_{n-1}),\overline{M}=M/(a_1,...,a_{n-1})M,\overline{C}=C/(a_1,...,a_{n-1})C$, 则有 R-模同构

$$\Phi_1':\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{C})/\overline{a_n}\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{C})\to\mathrm{Hom}_{\overline{R}/\overline{a_n}\overline{R}}(\overline{M}/\overline{a_n}\overline{M},\overline{C}/\overline{a_n}\overline{C})$$

$$f+\overline{a_n}\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{C})\mapsto \hat{f}:\overline{M}/\overline{a_n}\overline{M}\to\overline{C}/\overline{a_n}\overline{C}$$

通过直接计算可得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{C})}{\overline{a_n}\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{C})} \arrow[dd, "\Phi_1'"] \\
\frac{\mathrm{Hom}_R(M,C)/(a_1,...,a_n)\mathrm{Hom}_R(M,C)}{a_n(\mathrm{Hom}_R(M,C)/(a_1,...,a_n)\mathrm{Hom}_R(M,C))} \arrow[ur, "\widetilde{\Phi_{n-1}}"] & \\
 & \mathrm{Hom}_{\overline{R}/\overline{a_n}\overline{R}}(\overline{M}/\overline{a_n}\overline{M},\overline{C}/\overline{a_n}\overline{C}) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_R(M,C)/(a_1,...,a_n)\mathrm{Hom}_R(M,C) \arrow[uu, "\cong"] \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{Hom}_{R/(a_1,...,a_n)}(M/(a_1,...,a_n)M,C/(a_1,...,a_n)C)
\end{tikzcd}$$

进而得到

$$\Phi:\mathrm{Hom}_R(M,C)/(a_1,...,a_n)\mathrm{Hom}_R(M,C)\to\mathrm{Hom}_{R/(a_1,...,a_n)}(M/(a_1,...,a_n)M,C/(a_1,...,a_n)C)$$

是 R-模同构. 此外我们也得到 a_n 是 $\mathrm{Hom}_R(M,C)/(a_1,...,a_{n-1})\mathrm{Hom}_R(M,C)$-正则元. 现在我们说明 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$ 是极大 Cohen-Macaulay$R$-模. 前面已经说明任何 R-正则序列 $a_1,...,a_n$ 是 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$-正则序列. 因为 R 是 Cohen-Macaulay 局部环, 所以 R 的任何参数系都是 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$-正则序列, 应用 [命题2.92] 即得 $\mathrm{Hom}_R(M,C)$ 是极大 Cohen-Macaulay 模.

(2) 先证第一个叙述, 我们分 $j<d-t$ 和 $j>d-t$ 两种情况处理.

Case1. 现在说明 $j<d-t$ 时有 $\mathrm{Ext}_R^j(M,C)=0$. 假设存在 $0\le j_0<d-t$ 使得 $\mathrm{Ext}_R^j(M,C)\neq 0$, 那么 [引理1.33(3)] 表明 $\mathrm{grade}(\mathrm{Ann}_RM,C)<d-t$, 取 Noether 局部环 R/Ann_RM 的一个参数系 $a_1,...,a_t$, 那么 $\sqrt{(a_1,...,a_t)+\mathrm{Ann}_RM}=\mathfrak{m}$ 且 [引理2.24] 表明 $\mathrm{grade}((a_1,...,a_t)+\mathrm{Ann}_RM,C)\le\mathrm{grade}(\mathrm{Ann}_RM,C)+t<(d-t)+t=d$, 而 [引理1.33] 表明 $d=\mathrm{grade}(\mathfrak{m},C)=\mathrm{grade}((a_1,...,a_t)+\mathrm{Ann}_RM,C)<d$, 矛盾. 故我们得到 $\mathrm{Ext}_R^j(M,C)=0,\forall 0\le j<d-t$.

Case2. 我们通过对 $\mathrm{depth}M=\mathrm{k.dim}M=t$ 作归纳证明 $\mathrm{Ext}_R^j(M,C)=0,\forall>d-t$. 当 $t=0$ 时, 需要说明 $\mathrm{Ext}_R^j(M,C)=0,\forall>d$, 由 [定理2.49] 得到 $\mathrm{inj.dim}_RC=d$, 故结论直接成立. 现在设 M 的维数 $t\ge 1$ 并设结论对维数是 $t-1$ 的模成立. 那么可取 $a\in\mathfrak{m}$ 使得 a 为 M-正则元, 考察正合列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{a}M\longrightarrow M/aM\longrightarrow 0,$$

它导出长正合列

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^j(M/aM,C)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^j(M,C)\xrightarrow{a_l}\mathrm{Ext}_R^j(M,C)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^{j+1}(M/aM,C)\longrightarrow\cdots,$$

注意 M/aM 是深度为 $t-1$ 的 Cohen-Macaulay 模, 所以由归纳假设, 当 $j+1>d-(t-1)$ 时, 有 $\mathrm{Ext}_R^{j+1}(M/aM,C)=0$, 所以当 $j>d-t$ 时 $\mathrm{Ext}_R^j(M,C)=a\mathrm{Ext}_R^j(M,C)$, 再对 $\mathrm{Ext}_R^j(M,C)$ 应用 Nakayama 引理即可. 总结一下, 现在证明了 $\mathrm{Ext}_R^j(M,C)=0,\forall j\neq d-t$.

最后对 $t=\mathrm{k.dim}\ M$ 作归纳证明 $\mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,C)$ 是维数为 t 的 Cohen-Macaulay 模. 当 $t=0$ 时, 由 (1) 以及刚刚证明的结果我们看到 $\mathrm{grade}(\mathrm{Ann}_RM,C)=d$, 于是应用 [引理1.22] 得到 $\mathrm{Ext}_R^d(M,C)\cong$

$\mathrm{Hom}_R(M, C/(a_1,...,a_d)C)$, 这里 $a_1,...,a_d$ 是含于 $\mathrm{Ann}_R M$ 的极大 C-正则序列. 那么 $C/(a_1,...,a_d)C$ 作为深度是 0 的 Cohen-Macaulay 模其维数也是零, 注意到

$$\mathrm{Ann}_R(C/(a_1,...,a_d)C) \subseteq \mathrm{Ann}_R(\mathrm{Hom}_R(M, C/(a_1,...,a_d)C)),$$

所以非零有限生成 R-模 $\mathrm{Hom}_R(M, C/(a_1,...,a_d)C)$ 也是 0 维模, 那么它一定是 Cohen-Macaulay 模, 故当 $t=0$ 时结论成立. 假设结论对维数是 $t-1$ 的情形成立, 取 $x \in \mathfrak{m}$ 为 M-正则元, 由短正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0$$

导出长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,C) \xrightarrow{x_l} \mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{d-t+1}(M/xM,C) \longrightarrow 0$$

上述正合列两端 Ext 群是零由刚刚证明的事实保证, 并注意上面的短正合列说 x 是 $\mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,C)$-正则元. 于是由归纳假设, 我们得到

$$\mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,C)/x\mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,C)$$

是维数为 $t-1$ 的 Cohen-Macaulay 模, 再应用 [命题2.8] 马上得到 $\mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,C)$ 是 Cohen-Macaulay 模. 通过 [引理1.33(2)] 易知 $\mathrm{Ext}_R^{d-t}(M,C)$ 的深度是 t, 进而其维数也是 t. □

现在我们做足了验证 canonical 模同构唯一性的准备.

Theorem 2.95 (canonical 模唯一性)**.** 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是 d 维 Cohen-Macaulay 局部环, C 与 C' 是 R 的 canonical 模, 那么有下述结论成立:
(1) 对任何极大 R-正则序列 $a_1,...,a_d$ 有 $R/(a_1,...,a_d)$-模同构 $C/(a_1,...,a_d)C \cong E_{R/(a_1,...,a_d)}(k)$.
(2) canonical 模 C 与 C' 同构并且有 R-模同构 $\mathrm{Hom}_R(C,C') \cong R$, 此外, $\mathrm{Hom}_R(C,C')$ 作为循环模的任何生成元 φ 是同构.
(3) 标准映射 $\eta: R \to \mathrm{End}_R(C), a \mapsto a_l$ 是 R-模 (或环) 同构.
所以对 Cohen-Macaulay 局部环 R, 如果它的 canonical 模存在, 那么该定理说 canonical 模在同构意义下唯一, 以后我们把 R 的 canonical 模记作 ω_R.

Proof. (1) 首先我们已经知道 $a_1,...,a_d$ 也是极大 C-正则序列, 那么 [引理2.85] 告诉我们 $C/(a_1,...,a_d)C$ 作为 $R/(a_1,...,a_d)$-模的 type 是 1. 注意到这时 $R/(a_1,...,a_d)$ 是 Artin 环, 所以它的素理想只有 $\mathfrak{m}/(a_1,...,a_d)$, 此外, 根据 [定理2.49], $C/(a_1,...,a_d)C$ 作为 $R/(a_1,...,a_d)$-模也是内射模. 通过这一观察以及 [定理2.77] 马上得到 $R/(a_1,...,a_d)$-模同构

$$C/(a_1,...,a_d)C \cong E_{R/(a_1,...,a_d)}(k'),$$

其中 k' 表示 Noether 局部环 $R/(a_1,...,a_d)$ 的剩余域. 因为作为 $R/(a_1,...,a_d)$-模有同构 $k \cong k'$, 所以 $C/(a_1,...,a_d)C \cong E_{R/(a_1,...,a_d)}(k)$, 这就证明了 (1).

(2) 根据 (1), 我们有 $R/(a_1,...,a_d)$-模同构 $C/(a_1,...,a_d)C \cong E_{R/(a_1,...,a_d)}(k) \cong C'/(a_1,...,a_d)C'$. 根据 [性质2.94(2)] 可知 $\mathrm{Ext}_R^j(C,C')=0, \forall j>0$ 且 $\mathrm{Ext}_R^0(C,C') \cong \mathrm{Hom}_R(C,C')$ 是维数为 d 的 Cohen-Macaulay 模. 进而我们应用 [命题2.94(1)], 可知 $\mathrm{Hom}_R(C,C')$ 是极大 Cohen-Macaulay 模以及有 $R/(a_1,...,a_d)$-模同构

$$\Phi: \mathrm{Hom}_R(C,C')/(a_1,...,a_d)\mathrm{Hom}_R(C,C') \to \mathrm{Hom}_{R/(a_1,...,a_d)}(C/(a_1,...,a_d)C, C'/(a_1,...,a_d)C'),$$

我们刚刚又得到了 $R/(a_1,...,a_d)$-模同构 $C/(a_1,...,a_d)C \cong E_{R/(a_1,...,a_d)}(k')$, 综合可知 $R/(a_1,...,a_d)$-模同构 $\mathrm{Hom}_R(C,C')/(a_1,...,a_d)\mathrm{Hom}_R(C,C') \cong \mathrm{End}_{R/(a_1,...,a_d)}(k') \cong R/(a_1,...,a_d)$(最后一个同构来自 [命题2.86(5)]), 这当然也给出 R-模同构. 于是知 $\mathrm{Hom}_R(C,C')/(a_1,...,a_n)\mathrm{Hom}_R(C,C')$ 作为 R-模是循环模, 应用 Nakayama 引理马上得到 $\mathrm{Hom}_R(C,C')$ 是循环 R-模. 易知存在 $\mathrm{Hom}_R(C,C')$ 作为循环 R-模的生成元 ψ 使得 $\psi + (a_1,...,a_d)\mathrm{Hom}_R(C,C')$ 是 $\mathrm{Hom}_R(C,C')/(a_1,...,a_d)\mathrm{Hom}_R(C,C')$ 作为循环 $R/(a_1,...,a_d)$-模的生成元并且 $R \to \mathrm{Hom}_R(C,C'), a \mapsto a\psi$ 诱导的同态

$$R/(a_1,...,a_d) \to \mathrm{Hom}_R(C,C')/(a_1,...,a_d)\mathrm{Hom}_R(C,C')$$

是上面的 R-模同构, 因为 $a_1,...,a_d$ 是极大 Cohen-Macaulay 模 $\mathrm{Hom}_R(C,C')$ 的极大正则序列, 所以应用 [引理2.93] 可知 $R \to \mathrm{Hom}_R(C,C'), a \mapsto a\psi$ 是 R-模同构. 由此得到 R-模同构 $\mathrm{Hom}_R(C,C') \cong R$. 我们不难看到对 $\mathrm{Hom}_R(C,C')$ 作为循环 R-模的任何生成元 φ, 都存在 R 中可逆元 u 使得 $\psi = u\varphi$. 所以要证明每个 φ 是同构, 只要证 ψ 是同构就足够了. 这时 Φ 是同构保证了 $\tilde{\psi}: C/(a_1,...,a_d)C \to C'/(a_1,...,a_d)C'$ 是循环模的生成元, 而 $\tilde{\psi}$ 对应 $E_{R/(a_1,...,a_d)}(k')$ 作为循环 R-模的生成元, 这时由 [命题2.86(5)] 得到 $\tilde{\psi}$ 是同构 (验证它), 于是 [引理2.93] 保证了 ψ 是同构. 这就证明了 (2).

(3) 在 (2) 的证明过程中取 $C' = C$, 我们通过说明 (2) 中的 ψ 可以取到 $\mathrm{End}_R(C)$ 中恒等态来得到 $R \to \mathrm{End}_R(C), a \mapsto a\psi = a_l$ 是同构. 设 $\zeta: C/(a_1,...,a_d)C \to E_{R/(a_1,...,a_d)}(k')$ 是 $R/(a_1,...,a_d)$-模同构, 那么有 R-模同构

$$\mathrm{End}_{R/(a_1,...,a_d)}(E_{R/(a_1,...,a_d)}(k')) \to \mathrm{End}_{R/(a_1,...,a_d)}(C/(a_1,...,a_d)C), f \mapsto \zeta^{-1}f\zeta.$$

结合 [命题2.86(5)], 得到同构 $R/(a_1,...,a_d) \to \mathrm{End}_{R/(a_1,...,a_d)}(C/(a_1,...,a_d)C), a \mapsto a_l$. 因此 $R/(a_1,...,a_d)$ 到 $\mathrm{End}_R(C)/(a_1,...,a_d)\mathrm{End}_R(C)$ 的 R-模同构可以选取得将 $R/(a_1,...,a_d)$ 作为循环模的生成元 $\bar{1}$ 映至 $\mathrm{id}_C + (a_1,...,a_d)\mathrm{End}_R(C)$, 即可选取 $\psi = \mathrm{id}_C$, 证毕. □

现在我们指出用 canonical 模可以给出 Gorenstein 局部环的一个等价刻画, 在一些文献中这也是 Gorenstein 局部环的原始定义. 它至少说明了 Gorenstein 局部环有 canonical 模.

Corollary 2.96 (Gorenstein 环的 canonical 模刻画)**.** 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是 Cohen-Macaulay 局部环, 那么 R 是 Gorenstein 环的充要条件是 R 的 canonical 模存在且 $\omega_R \cong R$.

Proof. 必要性：这时 ${}_RR$ 是内射维数有限的极大 Cohen-Macaulay 模, 并且 [定理2.88] 说 $r(R) = 1$, 所以 ${}_RR$ 是 R 的 canonical 模, 根据前面得到的 canonical 模唯一性知 $\omega_R \cong R$.

充分性：这时 $r(R) = r(\omega_R) = 1$, 所以根据 [定理2.88] 便知 R 是 Gorenstein 环. □

与 Cohen-Macaulay 模类似, canonical 模具备下述性质. 它是我们之后需要证明 canonical 模存在性刻画所需工具.

Theorem 2.97. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是 Cohen-Macaulay 局部环, ω_R 是 R 的 canonical 模, 那么对任何 R-正则序列 $a_1,...,a_n$ 有 $R/(a_1,...,a_n)$-模同构 $\omega_R/(a_1,...,a_n)\omega_R \cong \omega_{R/(a_1,...,a_n)}$, 也就是说 $\omega_R/(a_1,...,a_n)\omega_R$ 给出了 Cohen-Macaulay 局部环 $R/(a_1,...,a_n)$ 的 canonical 模.

Proof. 因为 ω_R 是极大 Cohen-Macaulay 模, 所以 R-正则序列 $a_1, ..., a_n$ 也是 ω_R-正则序列 $a_1, ..., a_n$, 现在我们应用 [推论2.72] 可以看到 $\omega_R/(a_1, ..., a_n)\omega_R$ 作为 $R/(a_1, ..., a_n)$ 上的非零有限生成模有有限的内射维数. 另一方面 $r_R(\omega_R) = 1$ 以及 [引理2.85] 说明 $\omega_R/(a_1, ..., a_n)\omega_R$ 作为 $R/(a_1, ..., a_n)$ 上模的 type 也是 1, 故 $\omega_R/(a_1, ..., a_n)\omega_R$ 是 Cohen-Macaulay 局部环 $R/(a_1, ..., a_n)$ 的 canonical 模, 再由前面所证明的 canonical 模同构唯一性即得结论. □

反之, 我们也有:

Proposition 2.98. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是 Cohen-Macaulay 局部环, C 是极大 Cohen-Macaulay$R$-模, $a_1, ..., a_n$ 是极大 R-正则序列, 如果 $C/(a_1, ..., a_n)C$ 是 Cohen-Macaulay 局部环 $R/(a_1, ..., a_n)$(见 [命题2.6]) 上的 canonical 模, 那么 C 是 R 的 canonical 模.

Proof. 因为 C 是极大 Cohen-Macaulay 模, 所以 [推论1.47] 和 [命题2.92] 告诉我们 $a_1, ..., a_n$ 既是 R-正则序列又是 C-正则序列. 易见只需说明 $r(C) = 1$ 以及 C 作为 R-模的内射维数有限. 而这可通过 [推论2.72] 与 [引理2.85] 直接看到. □

在给出 [定理2.100] 的证明前, 还需要最后一个准备. 让我们回忆一下环的平凡扩张并罗列一些它的基本性质. 下述引理的各结论证明都没有技术难度, 故略去证明.

Lemma 2.99 (平凡扩张)**.** 设 R 是含幺环, M 是 R-R 双模, 在加群 $R \oplus M$ 上定义乘法运算:

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2), \forall (r_1, m_1), (r_2, m_2) \in R \oplus M$$

则 $R \oplus M$ 关于加法与上述乘法构成含幺环, 单位元为 $(1_R, 0)$, 称为环 R(关于双模 ${}_RM_R$) 的**平凡扩张** (trivial extension). 我们把 R 关于双模 M 的平凡扩张记作 $R * M$. 我们有:

- 映射 $i : R \to R * M, a \mapsto (a, 0)$ 是单保幺环同态.
- 平凡扩张 $R * M$ 上有天然的 R-模结构. 若记 $0 * M = \{(0, x) | x \in M\}$, 那么 $0 * M$ 是 $R * M$ 的双边理想且 $(0 * M)^2 = 0$. 此外有双模同构 $0 * M \cong M$.
- 映射 $\varphi : R \to (R * M)/(0 * M), a \mapsto (a, 0) + 0 * M$ 是环同构.
- 如果有 R-R 双模同构 $M \cong M'$, 那么有环同构 $R * M \cong R * M'$.
- 若 R 是左 Noether 环, 双模 M 满足 ${}_RM$ 有限生成, 则 $R * M$ 是左 Noether 环.
- 若 R 是局部环, $\mathfrak{m}$ 是全体不可逆元构成的理想, 那么 $R*M$ 也是局部环, 且全体不可逆元构成理想 $\mathfrak{m}*M$.
- 若 R 交换, M 是 R-模 (天然视作左右模结构一致的双模), 则 $R * M$ 是也交换.
- 若 R 交换, M 是 R-模, 那么 $\text{k.dim}R = \text{k.dim}R * M$.
- 若 R 交换, M 是 R-模, $a_1, ..., a_n$ 既是 R-正则序列又是 M-正则序列, 那么

$$(a_1, 0), (a_2, 0), ..., (a_n, 0) \in R * M$$

是 $R*M$-正则序列. 此时映射

$$\begin{aligned}\varphi: R*M &\to (R/(a_1,...,a_n))*(M/(a_1,...,a_n)M)\\ (r,x) &\mapsto (r+(a_1,...,a_n), x+(a_1,...,a_n)M)\end{aligned}$$

是满环同态且 $\mathrm{Ker}\varphi = ((a_1,0),...,(a_n,0))R*M$, 故有环同构

$$R*M/((a_1,0),...,(a_n,0))(R*M) \cong (R/(a_1,...,a_n))*(M/(a_1,...,a_n)M).$$

现在我们可以给出本节主定理的证明.

Theorem 2.100. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是 Cohen-Macaulay 局部环, 那么 R 有 canonical 模的充要条件是 R 是某个 Gorenstein 局部环的同态像.

Proof. 必要性: 设 R 有 canonical 模 ω_R, 那么 R 是平凡扩张 $R*\omega_R$ 这一交换 Noether 局部环 (应用 [引理2.99]) 在标准投射这一环同态下的同态像. 下面通过说明 $R*\omega_R$ 是 Gorenstein 环来得到结果. 取极大 R-正则序列 $a_1,...,a_d$, 这里 $d = \mathrm{k.dim}R$, 那么它也是 ω_R-正则序列, 故应用 [引理2.99] 可得 $(a_1,0),(a_2,0),...,(a_d,0) \in R*\omega_R$ 是 $R*\omega_R$-正则序列 (事实上这里是极大 $R*\omega_R$-正则序列, 因为序列长度是 d 并且 [引理2.99] 告诉我们 $d = \mathrm{k.dim}R = \mathrm{k.dim}R*\omega_R$) 以及环同构

$$R*\omega_R/((a_1,0),...,(a_d,0))(R*\omega_R) \cong (R/(a_1,...,a_d))*(\omega_R/(a_1,...,a_d)\omega_R).$$

根据 [推论2.71], 要证明 $R*\omega_R$ 是 Gorenstein 环, 只需证明 $R*\omega_R/((a_1,0),...,(a_d,0))(R*\omega_R)$ 是 Gorenstein 环, 因此基于上述同构, 我们只需说明 $(R/(a_1,...,a_d))*(\omega_R/(a_1,...,a_d)\omega_R)$ 是 Gorenstein 环. 根据 [定理2.95(1)] 中的同构 $\omega_R/(a_1,...,a_d)\omega_R \cong E_{R/(a_1,...,a_d)}(k')$ 以及 [引理2.99], 我们得到要证明 $R*\omega_R$ 是 Gorenstein 环, 只需要验证 $(R/(a_1,...,a_d))*E_{R/(a_1,...,a_d)}(k')$ 是 Gorenstein 环, 并注意 $R/(a_1,...,a_d)$ 是 Artin 局部环, 用 $R/(a_1,...,a_d)$ 替换 R 可知, 要证明必要性, 我们只要说明对 Artin 局部环 R, Artin 局部环 $R*E_R(k)$(这里的 Artin 局部性由 [引理2.99] 保证) 的 type 必定是 1 即可 (回忆 Gorenstein 环的刻画 [定理2.88]). 下面我们来说明 $r(R*E_R(k)) = 1$. 首先局部环 $R*E_R(k)$ 是 Atrin 的意味着它作为自身上的有限生成模深度为 0, 于是 [引理2.84] 告诉我们 $R*E_R(k)$ 的 type 就是 $\mathrm{soc}(R*E_R(k))$ 作为 $R*E_R(k)$ 剩余域上线性空间的线性维数, 因此我们需要说明 $\mathrm{soc}(R*E_R(k))$ 的线性维数是 1. 下面我们说明 $\mathrm{soc}(R*E_R(k)) = \{(0,x)|x \in \mathrm{soc}E_R(k)\}$, 一旦证明该断言, 由 [命题2.86(5)] 中的 $r_R(E)=1$ 可知 $\mathrm{soc}E_R(k)$ 作为 k-线性空间是 1 维的, 所以 $\mathrm{soc}(R*E_R(k))$ 作为 $R*E_R(k)$ 剩余域上线性空间也是 1 维的. $\{(0,x)|x \in \mathrm{soc}E_R(k)\} \subseteq \mathrm{soc}(R*E_R(k))$ 是明显的 (回忆 [引理2.84] 上面提到的交换局部环上模的基座公式). 现任取 $(a,x) \in \mathrm{soc}(R*E_R(k))$, 那么至少有

$$(b,0)(a,x) = (ba,bx) = (0,0), \forall b \in \mathfrak{m},$$

由此可知 $a \in \mathrm{soc}R, x \in \mathrm{soc}M$. 现在用反证法说明 $a = 0$. 假设 $a \neq 0$, 那么 $(a) = Ra$ 是不可约模, 所以 $l_{R/(a)}(R/(a)) = l_R(R/(a)) < l_R(R)$(第一个等号是因为 $R/(a)$ 中每个元素 $\bar{c}$ 在其上作用与 $c \in R$ 在其上作用一致). a 不可能是可逆元, 否则取 $y \neq 0 \in E_R(k)$, 有 $ay \neq 0$, 从而 $(0,y)(a,x) = (0,ay) \neq 0$(这里 $(0,y) \in \mathfrak{m}*E_R(k)$), 这与 $(a,x) \in \mathrm{soc}(R*E_R(k))$ 矛盾. 所以 $a \in \mathfrak{m}$. 考察正合列

$$R \xrightarrow{a} R \longrightarrow R/(a) \longrightarrow 0,$$

用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,E_R(k))$ 作用之, 得到正合列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(R/(a),E_R(k)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(R,E_R(k)) & \xrightarrow{a^*} & \mathrm{Hom}_R(R,E_R(k)) \\ & & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ & & & E_R(k) & \xrightarrow{\quad a \quad} & E_R(k) \end{array}$$

记 $\hat{k}$ 是 $R/(a)$ 的剩余域, 那么由 [引理2.69] 以及自然同构 $k\cong\hat{k}$ 保证了 $\mathrm{Hom}_R(R/(a),\hat{k})$ 到内射 R-模 $\mathrm{Hom}_R(R/(a),E_R(k))$ 有本质单同态 j_*, 考虑下述 $R/(a)$-模同态交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(R/(a),k) & \xrightarrow{\quad j_* \quad} & \mathrm{Hom}_R(R/(a),E_R(k)) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \hat{k} & \xrightarrow{\qquad\qquad} & E_{R/(a)}(\hat{k}) \end{array}$$

我们立即得到形如 $0\longrightarrow E_{R/(a)}(\hat{k})\longrightarrow E_R(k)\xrightarrow{\ a\ } E_R(k)$ 的 R-模正合列. 那么 a 在 $E_R(k)$ 上的左乘变换不可能是零同态, 原因是当 $a_l=0$ 时, $E_R(k)$ 上 $R/(a)$-模结构与 R-模结构一致并且作为 $R/(a)$-模与 $E_{R/(a)}(\hat{k})$ 同构, 因此有 $l_R(E_R(k))=l_{R/(a)}(E_R(k))=l_{R/(a)}(E_{R/(a)}(\hat{k}))$. 应用 [命题2.86(5)] 可得 $l_R(R/(a))=l_{R/(a)}(R/(a))=l_{R/(a)}(E_{R/(a)}(\hat{k}))=l_R(E_R(k))=l_R(R)$, 但这和前面提到的 $l_R(R/(a))<l_R(R)$ 相矛盾. 因此 a 在 $E_R(k)$ 上的左乘变换不可能是零同态, 进而存在 $y\neq 0\in E_R(k)$, 使得 $ay\neq 0$, 从而 $(0,y)(a,x)=(0,ay)\neq 0$, 这与 $(a,x)\in\mathrm{soc}R*E_R(k)$ 矛盾! 从而 $a=0$. 故 $\mathrm{soc}(R*E_R(k))=\{(0,x)|x\in\mathrm{soc}E_R(k)\}$, 结合前面的讨论, 我们得到 $r(R*E_R(k))=1$, 这就证明了必要性.

充分性: 在 [推论2.96] 中我们看到 Gorenstein 局部环的 canonical 模总是存在的. 所以充分性由下面更一般的 [定理2.101] 可以直接得到. □

Theorem 2.101. 设 $(R,\mathfrak{m}),(S,\mathfrak{n})$是 Cohen-Macaulay 局部环, $\varphi:R\to S$ 是保幺环同态满足 $\varphi(\mathfrak{m})=\mathfrak{n}$ 且 S 经 φ 赋予 R-模结构后是有限生成 R-模 (例如当 φ 是满射时该条件成立). 那么当 R 的 canonical 模 ω_R 存在时, S 的 canonical 模 ω_S 也存在.

Proof. 由条件知单环同态 $\tilde{\varphi}:R/\mathrm{Ker}\varphi\to S$ 满足 S 是 $\tilde{\varphi}(R/\mathrm{Ker}\varphi)$ 的整扩张, 所以 $\mathrm{k.dim}(R/\mathrm{Ker}\varphi)=\mathrm{k.dim}S$. 根据 [引理2.24] 可知 $\mathrm{k.dim}R-\mathrm{k.dim}(R/\mathrm{Ker}\varphi)\le\mathrm{grade}(\mathrm{Ker}\varphi,R)$, 若记 $t=\mathrm{k.dim}R-\mathrm{k.dim}S$, 该不等式表明可取含于 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的 R-正则序列 $a_1,...,a_t$, 记 $\overline{R}=R/(a_1,...,a_t)$, 那么 [定理2.97] 保证了 $\omega_R/(a_1,...,a_t)\omega_R$ 是 Cohen-Macaulay 局部环 $\overline{R}$ 的 canonical 模, 且 $\mathrm{k.dim}\overline{R}=\mathrm{k.dim}S$. 用 $\overline{R}$ 替换 R 知我们可不妨设 $\mathrm{k.dim}R=\mathrm{k.dim}S$. 现在设 $d=\mathrm{k.dim}R$, $a_1,...,a_d$ 是极大 R-正则序列, 那么由 ω_R 是极大 Cohen-Macaulay 模知 $a_1,...,a_d$ 也是极大 ω_R-正则序列, 并且 $\varphi(\mathfrak{m})=\mathfrak{n}$ 保证了 $\mathrm{grade}(\mathfrak{m},{}_RS)=\mathrm{grade}(\mathfrak{n},S)=\mathrm{k.dim}S=d$, 也就是说 S 是维数是 d 的极大 Cohen-Macaulay$R$-模 (那么任何极大 R-正则序列也是极大 ${}_RS$-正则序列), 现在我们应用 [命题2.94(2)] 得到 $\mathrm{Ext}^j_R(S,\omega_R)=0,\forall j>0$, 于是利用 [命题2.94(1)] 知道 $a_1,...,a_d$ 是极大 $\mathrm{Hom}_R(S,\omega_R)$-序列, $\mathrm{Hom}_R(S,\omega_R)$ 是极大 Cohen-Macaulay$R$-模且有 $R'=R/(a_1,...,a_d)$-模同构

$$\mathrm{Hom}_R(S,\omega_R)/(a_1,...,a_d)\mathrm{Hom}_R(S,\omega_R)\cong\mathrm{Hom}_{R'}(S',\omega_{R'}),$$

其中 $S'=S/(a_1,...,a_d)S=S/(\varphi(a_1),...,\varphi(a_d))$ 是 Artin 局部环, 上面的同构用到了 [定理2.97]. 注意, $\mathrm{Hom}_R(S,\omega_R)$ 也是极大 Cohen-Macaulay$S$-模, $\mathrm{Hom}_R(S,\omega_R)/(a_1,...,a_d)\mathrm{Hom}_R(S,\omega_R)\cong\mathrm{Hom}_{R'}(S',\omega_{R'})$ 也

是 S'-模同构, 由此可知 $\mathrm{Hom}_{R'}(S',\omega_{R'})$ 是维数为 0 的极大 Cohen-MacaulayS'-模. 基于 [命题2.98], 如果能证明 $\omega_{S'}=\mathrm{Hom}_{R'}(S',\omega_{R'})$, 那么也就有 $\omega_S=\mathrm{Hom}_R(S,\omega_R)$, 从而得到 S 有 canonical 模. 下面我们来证明 $\mathrm{Hom}_{R'}(S',\omega_{R'})$ 是 S' 的 canonical 模. 利用 [定理2.95] 知有 R'-模同构 $\omega_{R'}\cong E_{R'}(k_{R'})$, 这里 $k_{R'}$ 表示局部环 R' 的剩余域, 所以我们得到 S'-模同构 $\mathrm{Hom}_{R'}(S',\omega_{R'})\cong\mathrm{Hom}_{R'}(S',E_{R'}(k_{R'}))$, 因为 $E_{R'}(k_{R'})$ 是内射 R'-模, 所以 $\mathrm{Hom}_{R'}(S',E_{R'}(k_{R'}))$ 是内射 S'-模, 因此要证明 $\mathrm{Hom}_{R'}(S',\omega_{R'})$ 是 S' 的 canonical 模, 要验证的仅剩说明 0 维模 $\mathrm{Hom}_{R'}(S',E_{R'}(k_{R'}))$ 的 type 是 1. 由 [引理2.84], 要验证的就是 $\mathrm{soc}_{S'}\mathrm{Hom}_{R'}(S',E_{R'}(k_{R'}))$ 作为 $k_{S'}$-线性空间的维数是 1, 其中 $k_{S'}$ 表示 S' 的剩余域. 注意 R' 到 S' 的环同态导出 $k_{R'}$ 到 $k_{S'}$ 的域嵌入, 并且 $k_{S'}$ 作为 $k_{R'}$ 上的线性空间是有限维的, 下面我们通过说明 $k_{S'}$-线性同构 $\mathrm{soc}_{S'}\mathrm{Hom}_{R'}(S',E_{R'}(k_{R'}))\cong k_{S'}$ 来完成定理证明.

对每个 $g\in\mathrm{soc}_{S'}\mathrm{Hom}_{R'}(S',E_{R'}(k_{R'}))\cong k_{S'}$, S' 的极大理想 $\mathfrak{n}_{S'}$ 满足 $\mathfrak{n}_{S'}g=0$, 进而由 φ 是局部同态知 $\mathfrak{m}_{R'}\mathrm{Im}g=0$. 这一观察说明 $\mathrm{Im}g\subseteq\mathrm{soc}E_{R'}(k_{R'})=\mathrm{soc}k_{R'}=k_{R'}$(一般地, 模的基座与其内射包基座一致). 进而每个 $g\in\mathrm{soc}_{S'}\mathrm{Hom}_{R'}(S',E_{R'}(k_{R'}))$ 导出 $k_{R'}$-模同态 $\tilde{g}:k_{S'}\to k_{R'}$, 由此不难看到 $k_{S'}$-模同构 $\mathrm{soc}_{S'}\mathrm{Hom}_{R'}(S',E_{R'}(k_{R'}))\cong\mathrm{Hom}_{k_{R'}}(k_{S'},k_{R'})$, 最后说明作为 $k_{S'}$-线性空间有同构 $\mathrm{Hom}_{k_{R'}}(k_{S'},k_{R'})\cong k_{S'}$. 因为 $k_{S'}$ 作为 $k_{R'}$ 的域扩张是有限扩张, 所以由 $\dim_{k_{R'}}\mathrm{Hom}_{k_{R'}}(k_{S'},k_{R'})=\dim_{k_{R'}}k_{S'}$ 我们立即得到

$$(\dim_{k_{R'}}k_{S'})(\dim_{k_{S'}}\mathrm{Hom}_{k_{R'}}(k_{S'},k_{R'}))=\dim_{k_{R'}}k_{S'},$$

两边消去正整数 $\dim_{k_{R'}}k_{S'}$ 得到 $\dim_{k_{S'}}\mathrm{Hom}_{k_{R'}}(k_{S'},k_{R'})=1$, 证毕! □

可以证明任何完备 Noether 局部环是某个正则局部环的同态像, 而正则局部环总是 Grostein 局部环, 故完备 Cohen-Macaulay 局部环总有 canonical 模.

2.7 局部上同调

之前我们介绍了 Cohen-Macaulay 局部环的 canonical 模的概念, 并指出一个 Cohen-Macaulay 局部环有 canonical 模的充要条件是该 Cohen-Macaulay 环是某个 Grostein 局部环的同态像 ([定理2.100]), 事实上 canonical 模的概念是 Alexander Grothendieck(1928-2014) 在上个世纪 60 年代给出局部对偶定理 (见 [定理2.107]) 时自然引入的. 本节先介绍交换代数中局部上同调的基本概念与性质. 最后略去证明地介绍 Grothendieck vanishing 定理 (见 [定理2.106]) 以及 Grothendieck 局部对偶定理.

设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是 R-模, 定义

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)=\{x\in M|\text{存在}s\geq 0\text{使得}\mathfrak{m}^s x=0\}$$

那么它天然给出一个 R-Mod 到自身的加性共变函子 $\Gamma_{\mathfrak{m}}:R\text{-Mod}\to R\text{-Mod}$ 满足对每个模同态 $f:M\to M'$ 有 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(f):\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)\to\Gamma_{\mathfrak{m}}(M'),x\mapsto f(x)$. 我们有下面的基本事实.

Proposition 2.102. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是 R-模. 那么:
(1) 对每个自然数 i, 考虑 R-模 $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,M)\cong\{x\in M|\mathfrak{m}^i x=0\}$, 对自然数 $i\leq j$, 定义

$$\begin{aligned}\varphi^i_j:\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,M)&\to\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^j,M)\\ f&\mapsto\varphi^i_j(f):R/\mathfrak{m}^j\to M\end{aligned}$$

这里 $\varphi_j^i(f): R/\mathfrak{m}^j \to M, \overline{a} \mapsto f(\overline{a})$. 那么 R-Mod 上以 $(\mathbb{N}, \leq)$ 为指标集的正向系 $\{\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M), \varphi_j^i\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 的正向极限 $\varinjlim \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M) \cong \Gamma_\mathfrak{m}(M)$.

(2) 加性共变函子 $\Gamma_\mathfrak{m}: R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ 是左正合函子.

(3) 对任给 R-模族 $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ 有 $\Gamma_\mathfrak{m}(\oplus_{i\in\Lambda}M_i) = \oplus_{i\in\Lambda}\Gamma_\mathfrak{m}(M_i)$.

Proof. (1) 对每个自然数 i, 可自然定义 $\alpha_i: \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M) \to \Gamma_\mathfrak{m}(M), g \mapsto g(\overline{1})$, 于是当 $i \leq j$ 时有 $\alpha_i = \alpha_j\varphi_j^i$. 可直接验证对每个使得 $f_i = f_j\varphi_j^i$ 的模 X 与同态族 $\{f_i : \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M) \to X\}_{i\in\mathbb{N}}$, 存在唯一的模同态 $f: \Gamma_\mathfrak{m}(M) \to X$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_\mathfrak{m}(M) \arrow[rr, dashed, "f"] & & X \\
& \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, M) \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & \\
& \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^j, M) \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

具体地, 这里同态 f 如下构造: 对每个 $x \in \Gamma_\mathfrak{m}(M)$, 存在自然数 s 使得 $\mathfrak{m}^s x = 0$, 定义 $g_x : R/\mathfrak{m}^s \to M, \overline{a} \mapsto ax$ 并置 $f(x) = f_s(g_x)$. 可直接验证 f 是定义合理的 R-模同态并使得上图交换.

(2) 任取 R-模正合列 $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$, 要验证

$$0 \longrightarrow \Gamma_\mathfrak{m}(M') \xrightarrow{\Gamma_\mathfrak{m}(f)} M \xrightarrow{\Gamma_\mathfrak{m}(g)} \Gamma_\mathfrak{m}(M'')$$

正合. 作为 f 的限制 $\Gamma_\mathfrak{m}(f)$ 自然是单射, $\Gamma_\mathfrak{m}(g)\Gamma_\mathfrak{m}(f) = 0$ 也是明显的. 唯一需要说明的就是 $\mathrm{Ker}\Gamma_\mathfrak{m}(g) \subseteq \mathrm{Im}(\Gamma_\mathfrak{m}(f))$. 任取 $x \in \mathrm{Ker}\Gamma_\mathfrak{m}(g)$, 即 $g(x) = 0$ 且存在自然数 t 使得 $\mathfrak{m}^t x = 0$, 那么 $x \in \mathrm{Im}f$, 即存在 $y \in M'$ 使得 $f(y) = x$, 从而 $f(\mathfrak{m}^t y) = 0$, 再利用 f 是单射得 $y \in \Gamma_\mathfrak{m}(M')$, 所以 $x \in \mathrm{Im}(\Gamma_\mathfrak{m}(f))$. 故 $\Gamma_\mathfrak{m}$ 是左正合函子.

(3) 根据函子 $\Gamma_\mathfrak{m}$ 的定义明显成立. □

现在可以给出局部上同调函子的定义.

Definition 2.103 (局部上同调函子). 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是交换 Noether 局部环, 称左正合加性共变函子 $\Gamma_\mathfrak{m}: R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ 的 i 次右导出函子为 i **次局部上同调函子** (the local cohomology functor), 记作 $H_\mathfrak{m}^i(-)$. 对 R-模 M, 称 $H_\mathfrak{m}^i(M)$ 是 M 的 i **次局部上同调群**.

具体地, 先对每个模 M, 取定它的内射分解 (I, d, η):

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

再用 $\Gamma_\mathfrak{m}$ 作用之, $H_\mathfrak{m}^i(M)$ 就是下述上链复形的 i 次上同调.

$$0 \longrightarrow \Gamma_\mathfrak{m}(I^0) \xrightarrow{\Gamma_\mathfrak{m}(d^0)} \Gamma_\mathfrak{m}(I^1) \xrightarrow{\Gamma_\mathfrak{m}(d^1)} \Gamma_\mathfrak{m}(I^2) \xrightarrow{\Gamma_\mathfrak{m}(d^2)} \cdots$$

根据右导出函子的定义, 我们马上得到局部上同调函子的一些基本性质:

Proposition 2.104. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, 则：
(1) 对任何 R-模 M, 有 R-模同构 $H^0_{\mathfrak{m}}(M)\cong\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$.
(2) 如果 R-模 Q 是内射模, 那么 $H^i_{\mathfrak{m}}(Q)=0,\forall i\geq 1$.
(3) 对每个 R-模 M 与自然数 n, 有 R-模同构 $H^n_{\mathfrak{m}}(M)\cong\varinjlim\mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{m}^i,M)$.
(4) 对任何 R-模短正合列 $0\longrightarrow M'\xrightarrow{\alpha}M\xrightarrow{\beta}M''\longrightarrow 0$, 有 R-模长正合列

$$0\longrightarrow\Gamma_{\mathfrak{m}}(M')\xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(\alpha)}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)\xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(\beta)}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M'')\longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(M')\longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(M)\longrightarrow\cdots$$

(5) 对 R 的每个素理想 P, 有

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(E(R/P))=\begin{cases}E(k),\ P=\mathfrak{m},\\ \quad 0,\ P\neq\mathfrak{m}.\end{cases}$$

Proof. (1),(2) 和 (4) 都是明显的. 这里仅说明 (3) 和 (5). 取定 M 的内射分解 $(I^\bullet,d^\bullet,\eta)$, 那么对每个 I^n, 有 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(I^n)=\varinjlim\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,I^n)$, 易验证 $(d^n)_*:\{\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,I^n),\varphi^i_j\}_{\mathbb{N}}\to\{\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,I^{n+1}),\varphi^i_j\}_{\mathbb{N}}$ 所诱导的正向极限之间的同态 $(\vec{d^n})_*:\varinjlim\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,I^n)\to\varinjlim\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,I^{n+1})$ 就是 d^n, 也就是说可以把 R-模复形 $0\longrightarrow\Gamma_{\mathfrak{m}}(I^0)\xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(d^0)}\Gamma_{\mathfrak{m}}(I^1)\xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(d^1)}\Gamma_{\mathfrak{m}}(I^2)\xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(d^2)}\cdots$ 改写为

$$0\longrightarrow\varinjlim\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,I^0)\xrightarrow{(\vec{d^0})_*}\varinjlim\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,I^1)\xrightarrow{(\vec{d^1})_*}\varinjlim\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,I^2)\xrightarrow{(\vec{d^2})_*}\cdots$$

由此我们马上得到

$$H^n_{\mathfrak{m}}(M)\cong H^n(\varinjlim\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,I^\bullet))\cong\varinjlim H^n(\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i,I^\bullet))=\varinjlim\mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{m}^i,M).$$

这就证明了 (3). 现在来说明 (5). 当 $P=\mathfrak{m}$ 时, 需要说明 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(E(k))=E(k)$. 任取 $x\neq 0\in E(k)$, 那么 Rx 作为 $E(k)$ 的非零子模, 结合 [引理2.74(3)] 可知 $V(\mathrm{ann}(x))=\mathrm{Supp}(Rx)=\mathrm{Ass}(Rx)=\{\mathfrak{m}\}$, 故存在正整数 t 使得 $\mathfrak{m}^t\subseteq\mathrm{ann}(x)$, 即 $\mathfrak{m}^tx=0$, 所以 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(E(k))=E(k)$. 现设 $P\neq\mathfrak{m}$, 假设有 $x\neq 0\in\Gamma_{\mathfrak{m}}(E(R/P))$, 那么存在正整数 l 使得 $\mathfrak{m}^l\subseteq\mathrm{ann}(x)$, 而 $\mathrm{Ass}E(R/P)=\{P\}$ 蕴含 $\mathfrak{m}^l\subseteq P$, 故 $P=\mathfrak{m}$, 矛盾. 因此当 $P\neq\mathfrak{m}$ 时, 有 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(E(R/P))=0$. □

回忆 Bass 数可给交换 Noether 环上有限生成模极小内射分解每项一描述 (见 [命题2.82]), 那么应用 [命题2.102(3)] 和 [命题2.104(5)] 得到交换 Noether 局部环 R 上任何有限生成模 M 它的极小内射分解 i 次项 $E^i(M)$ 满足 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(E^i(M))\cong E(k)^{\mu_i(\mathfrak{m},M)}$, 这里 $\mu_i(\mathfrak{m},M)=\dim_k\mathrm{Ext}^i_R(k,M)$ 是 M 关于 $\mathfrak{m}$ 的 i 次 Bass 数, 那么 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(E^\bullet(M))$ 作为复形同构于下述形式的复形.

$$0\longrightarrow E(k)^{\mu_0(\mathfrak{m},M)}\longrightarrow E(k)^{\mu_1(\mathfrak{m},M)}\longrightarrow\cdots\longrightarrow E(k)^{\mu_i(\mathfrak{m},M)}\longrightarrow\cdots$$

该复形的 i 次上同调给出 M 的 i 次局部上同调 $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$. 可以证明此时内射包 $E(k)$ 是 Artin 模 (见 [?], 定理18.6), 所以 $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ 总是 Artin 模. 我们再指出两个关于局部上同调的基本观察.

Corollary 2.105. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是交换 Noether 局部环, M 是有限生成 R-模, 那么：
(1) 当自然数 $i<\mathrm{depth}M$ 时, $H^i_{\mathfrak{m}}(M)=0$.
(2) 如果 R 是 Gorenstein 环, 那么

$$H^i_{\mathfrak{m}}(R)=\begin{cases}E(k),\ i=\mathrm{k.dim}R,\\ \quad 0,\ i\neq\mathrm{k.dim}R.\end{cases}$$

Proof. 根据前面的讨论, $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ 由下述形式复形的 i 次上同调给出.

$$0 \longrightarrow E(k)^{\mu_0(\mathfrak{m},M)} \longrightarrow E(k)^{\mu_1(\mathfrak{m},M)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E(k)^{\mu_i(\mathfrak{m},M)} \longrightarrow \cdots$$

于是由 [定理1.23] 即得 (1). 如果 R 是 Gorenstein 局部环, 由 [定理1.23], [命题2.48] 和 [定理2.49] 可得 i 次 Bass 数 $\mu_i(\mathfrak{m}, R)$ 只有当 $i = \mathrm{k.dim}R = \mathrm{depth}R$ 时非零. 并且由 Gorenstein 局部环的刻画 [定理2.88] 知当 $i = \mathrm{k.dim}R$ 时, Bass 数 $\mu_i(\mathfrak{m}, R) = r(R) = 1$, 这就得到了 (2). □

上述推论中我们看到当自然数 $i < \mathrm{depth}M$ 时, $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$. 下面的 Grothendieck vanishing 定理给出了模的局部上同调与它的深度、维数之前的关系.

Theorem 2.106 (Grothendieck vanishing 定理)**.** 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$是交换 Noether 局部环, M 是非零有限生成 R-模, 并设 $\mathrm{depth}M = t, \mathrm{k.dim}M = d$(我们已经知道 $t \leq d$), 那么

- 当 $i < t$ 或 $i > d$ 时, $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$.
- $H_{\mathfrak{m}}^t(M) \neq 0$ 且 $H_{\mathfrak{m}}^d(M) \neq 0$.

下面的定理便是 Grothendieck 局部对偶定理.

Theorem 2.107 (Grothendieck 局部对偶定理)**.** 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$是 d 维完备 Cohen-Macaulay 局部环, 那么根据 Matlis 对偶与前面的讨论, 对任何整数 i, $\mathrm{Hom}_R(H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(-), E(k))$ 可视作 Noether 模全子范畴到自身的逆变函子, 我们有自然同构

$$\mathrm{Ext}_R^i(-, \omega_R) \cong \mathrm{Hom}_R(H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(-), E(k)).$$

其中 ω_R 是 R 的 canonical 模. 对上述自然同构应用 Matlis 对偶, 并改写指标可得自然同构

$$H_{\mathfrak{m}}^i(-) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^{d-i}(-, \omega_R), E(k)).$$

当整数 $i < 0$ 时依前面的 vanishing 定理结论明显成立. 当 i 是自然数时, 该定理的证明过程中先说明了存在 R-模 C 使得 $\mathrm{Hom}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(-), E(k)) \cong \mathrm{Hom}_R(-, C)$, 进而由 $C \cong \mathrm{Hom}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(R), E(k))$ 以及 Matlis 对偶得到 C 是 Noether 模. 随后说明了 $\mathrm{Hom}_R(H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(-), E(k))$ 是 $\mathrm{Hom}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(-), E(k))$ 的 i 次右导出函子以及 C 满足 [引理2.91] 中 Ext 群线性维数的条件来得到 C 是 R 的 canonical 模. 因此根据证明过程可以看到定义 canonical 模的概念是自然的：根据局部对偶定理已经知道有某个有限生成模 $C \cong \mathrm{Hom}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(R), E(k))$ 满足它决定的 Ext 函子能够和局部上同调函子产生联系, 即 $\mathrm{Ext}_R^i(-, C) \cong \mathrm{Hom}_R(H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(-), E(k))$, 所以研究这样的模 C 也是自然要做的事.

3 附录：回顾与补充

本章主要用于回顾一些经典交换代数中的结论或是一些非交换代数专题.

3.1 域扩张的超越次数

本节回顾域扩张的超越基与超越次数的概念, 它们也是交换代数中的基本工具.

Definition 3.1. 给定域扩张 $F \supseteq K$, 若域 F 中的 n 个元素 $s_1, s_2, ..., s_n$ 满足不存在 K 上非零多项式 $f \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ 使得 $f(s_1, s_2, ..., s_n) = 0$, 则称这有限个元素或集合 $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ 是 K-**代数无关**的, 简称为**代数无关**. 如果 $S \subseteq F$ 满足任意有限个元素 K-代数无关, 则称 S 是 K-**代数无关集**, 否则称 S 是 K-**代数相关**的. 例如域 K 上的有理函数域 $K(x_1, x_2, ..., x_n)$ 中 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 是 K-代数无关集 (易见 K-代数无关蕴含 K-线性无关). 给定域扩张 $F \supseteq K$, 易见 F 所有 K-代数无关子集构成的集合关于集合包含关系构成非空偏序集, 容易验证任意全序子集有上界, 故由 Zorn 引理可知任何域扩张 $F \supseteq K$ 都有极大 K-代数无关子集, 称该极大代数无关子集为 F 在 K 上的**超越基** (transcendence base).

Lemma 3.2. 给定域扩张 $F \supseteq K$, S 是 F 的子集, $u \in F - K(S)$, 那么 $S \cup \{u\}$ 是 K-代数无关集当且仅当 u 是 $K(S)$ 上超越元.

Corollary 3.3. 给定域扩张 $F \supseteq K$ 以及 K-代数无关集 $S \subseteq F$, 那么 S 是 F 的超越基当且仅当 F 是 $K(S)$ 的代数扩张. 若域扩张 $F \supseteq K$ 满足存在 F 的代数无关子集 S 使得 $F = K(S)$, 则称 F 是 K 的**纯超越扩张**.

Proposition 3.4. 给定域扩张 $F \supseteq K$, 若 $S \subseteq F$ 是 K 上一个有限超越基, 那么 F 在 K 上的任何超越基 T 必定也是有限的且 $|T| = |S|$.

Proof. 若 S 是空集, 则由超越基定义中的极大性知 T 也是空集. 下设 S 非空, 设 $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$.

Claim. 存在 $t_1 \in T$ 使得 $\{t_1, s_2, ..., s_n\}$ 是 F 在 K 上一个超越基.

首先明显存在 $t_1 \in T$ 使得 $\{t_1, s_2, ..., s_n\}$ 是 K-代数无关的, 原因是若不然 T 中所有元素在 $K(s_2, ..., s_n)$ 上是代数的, 进而 $K(s_2, ..., s_n)(T)$ 是 $K(s_2, ..., s_n)$ 的代数扩张, 而 F 是 $K(s_2, ..., s_n)(T)$ 的代数扩张表明 F 是 $K(s_2, ..., s_n)$ 的代数扩张, 于是 s_1 是 $K(s_2, ..., s_n)$ 上的代数元, 矛盾. 其次, 代数无关集 $\{t_1, s_2, ..., s_n\}$ 必定是 K 上超越基, 只需注意到 s_1 在 $K(t_1, s_2, ..., s_n)$ 上代数即得 F 是 $K(t_1, s_2, ..., s_n)$ 的代数扩张, 这就得到了 $\{t_1, s_2, ..., s_n\}$ 是超越基.

Claim. 超越基 T 满足 $|T| = n$.

重复上述讨论, 必定存在 $t_2 \in T$ 使得 $\{t_1, t_2, s_3, ..., s_n\}$ 是超越基, 依此类推, 有 $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subseteq T$ 是超越基, 因此 $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$, 得证. □

Theorem 3.5 (超越次数)**.** 给定域扩张 $F \supseteq K$, 若 $S \subseteq F$ 是 K 上一个超越基, 那么 F 在 K 上的任何超越基 T 必定满足 $|T| = |S|$. 对域扩张域扩张 $F \supseteq K$, 我们将 F 在 K 上的任意超越基 S 的基数 $|S|$ 称为 F 在 K 上的**超越次数** (transcendence degree), 记作 $\mathrm{tr}_K(F)$ 或 $\mathrm{tr.d.}F/K$, 本定理表明域扩张的超越次数定义合理.

Proof. 根据前面的命题, 我们只需要处理 S 是无限超越基的情形. 对每个 $s \in S$, 存在 T 的非空有限子集 T_s 使得 s 在 $K(T)$ 上的首一最小多项式系数均在 $K(T_s)$ 中, 由选择公理, 对每个 $s \in S$ 都可指定一个 T 的非空有限子集 T_s 使得 s 在 $K(T)$ 上的首一最小多项式系数均在 $K(T_s)$ 中.

Claim. 集合 $\bigcup\limits_{s\in S} T_s$ 是 F 在 K 上的一个超越基, 故 $T=\bigcup\limits_{s\in S} T_s$.

因为 $\bigcup\limits_{s\in S} T_s$ 是 T 的子集, 所以 K-代数无关. 由于每个 $s\in S$ 均在 $K(\bigcup\limits_{s\in S} T_s)$ 上代数, 所以 $K(\bigcup\limits_{s\in S} T_s)(S)$ 是 $K(\bigcup\limits_{s\in S} T_s)$ 的代数扩张, 于是 F 是 $K(\bigcup\limits_{s\in S} T_s)$ 的代数扩张, 进而 $\bigcup\limits_{s\in S} T_s$ 是超越基, 断言得证.

最后说明 $|S|=|T|$, 由对称性我们只需说明 $|T|\le|S|$ 即可. 只需注意到

$$|T|=|\bigcup_{s\in S} T_s|\le|S|\aleph_0=|S|.$$

□

3.2 Noether 正规化定理加强版

在经典交换代数中, Noether 正规化定理是证明 Hilbert 零点定理的一个工具, 我们将介绍的加强形式可以用于证明仿射 (交换) 整环的维数特性 (见 [推论3.9]). 为了证明 Noether 正规化定理, 首先我们需要下面的引理, 这一引理的想法来自 Nagata.

Lemma 3.6. 设 k 是域, $r\ge 1$, $f\in k[x_1,...,x_r]$ 是非常数多项式, 那么存在 $x_1',x_2',...,x_{r-1}'\in k[x_1,...,x_r]$ 使得 $k[x_1,...,x_r]$ 是 $k[x_1',x_2',...,x_{r-1}',f]$ 上有限生成模.

Proof. $r=1$ 时结论明显成立, 所以仅考虑 $r\ge 2$ 的情形. 选取正整数 e 使得 e 严格大于 f 任何一个非零单项式 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_r^{i_r}$ 的所有幂指数 $i_1,i_2,...,i_r$. 下面验证 $x_l'=x_l-x_r^{e_l},l=1,2,...,r-1$ 是满足条件的构造.

如果我们能够说明 f 能够表示为 $k[x_1',x_2',...,x_{r-1}']$ 上的首一 d 次多项式 (这里 d 是正整数), 那么我们便可得到 $k[x_1,...,x_r]$ 是 $k[x_1',x_2',...,x_{r-1}',f]$ 上有限生成模, 原因是此时 $f=c_0(x_1',x_2',...,x_{r-1}')+c_1(x_1',x_2',...,x_{r-1}')x_r+\cdots+x_r^d$ 导致 x_r 可被 $k[x_1',x_2',...,x_{r-1}',f]$ 中首一多项式

$$y^d+c_{d-1}(x_1',x_2',...,x_{r-1}')y^{d-1}+\cdots+c_0(x_1',x_2',...,x_{r-1}')-f$$

零化, 即 x_r 是 $k[x_1',x_2',...,x_{r-1}',f]$ 上整元, 并注意到 $x_1,...,x_{r-1}\in k[x_1',x_2',...,x_{r-1}',f]$, 所以 $k[x_1,...,x_r]$ 是 $k[x_1',x_2',...,x_{r-1}',f]$ 上有限生成模.

现在我们来验证 f 能够表示为 $k[x_1',x_2',...,x_{r-1}']$ 上的首一 d 次多项式, f 的每个非常数单项式 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_r^{i_r}$ 可改写为

$$(x_1-x_r^e)^{i_1}(x_2-x_r^{e^2})^{i_2}\cdots(x_{r-1}-x_r^{e^{r-1}})^{i_{r-1}}x_r^{i_r}+\cdots+x_r^{i_1e+i_2e^2+\cdots+i_{r-1}e^{r-1}+i_r},$$

即系数来自 $k[x_1',x_2',...,x_{r-1}']$ 关于 x_r 的一元首一多项式. 根据我们 e 的选取方式, 如果 f 有两个不同的单项式 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_r^{i_r}$ 与 $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_r^{j_r}$, 那么幂指数组 $(i_1,...,i_r)\ne(j_1,...,j_r)$, 这导致 $i_1e+i_2e^2+\cdots+i_{r-1}e^{r-1}+i_r\ne j_1e+j_2e^2+\cdots+j_{r-1}e^{r-1}+j_r$, 所以 f 确实可表为 $k[x_1',x_2',...,x_{r-1}']$ 上的首一 $d(d\ge 1)$ 次多项式, 得证. □

下面是 Noether 正规化定理的加强形式.

Theorem 3.7. 给定域 k上 Krull 维数是 d 的交换仿射代数 A 以及 A 的真理想升链 $I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots\subseteq I_m$, 记 $d_j=\text{k.dim } A/I_j$. 如果 $d>d_1>d_2>\cdots>d_m\ge 0$, 那么存在 A 的子集 $\{y_1,y_2,...,y_d\}$, 使得

(1)A 是 $k[y_1,y_2,...,y_d]$ 上的有限生成模;

(2) 每个 I_j 满足 $I_j\cap k[y_1,y_2,...,y_d]=(y_{d_j+1},...,y_d),j=1,2,...,m$.

Proof. 如果 $d=0$, 那么 A 作为 0 维仿射交换代数在 k 上是代数的, 因此结论直接成立, 下面考虑 $d\geq 1$ 的情形. 我们先说明只要证明 $A=k[x_1,...,x_d]$ 的情形就足够了, 然后再针对 $k[x_1,...,x_d]$ 的情形予以证明. 设 $\varphi: A\to k[x_1,...,x_n]/I$ 是 k-代数同构, I 是 $k[x_1,...,x_n]$ 的某个真理想, 那么 A 的真理想升链 $I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots\subseteq I_m$ 对应 $k[x_1,...,x_n]/I$ 的真理想升链 $J_1/I\subseteq J_2/I\subseteq\cdots\subseteq J_m/I$, 其中 $I\subseteq J_1\subseteq J_2\subseteq\cdots\subseteq J_m$ 是 $k[x_1,...,x_n]$ 的真理想升链. 那么每个 J_t 满足 $\text{k.dim}\ k[x_1,...,x_n]/J_t=\text{k.dim}(k[x_1,...,x_n]/I)(J_t/I)=\text{k.dim}\ A/I_t=d_t$. 那么 $d>d_1>d_2>\cdots>d_m\geq 0$, 如果我们证明了结论对 $k[x_1,...,x_n]$ 成立, 我们对理想链 $I\subseteq J_1\subseteq J_2\subseteq\cdots\subseteq J_m$ 应用结论, 便得到 $k[x_1,...,x_n]$ 的子集 $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ 使得 $k[x_1,...,x_n]$ 是 $k[\alpha_1,...,\alpha_n]$ 上的有限生成模, 并且:

- 对每个 $1\leq t\leq m$, 有 $J_t\cap k[\alpha_1,...,\alpha_n]=(\alpha_{d_t+1},...,\alpha_n)$.
- $I\cap k[\alpha_1,...,\alpha_n]=(\alpha_{d+1},...,\alpha_n)$.

于是 $k[x_1,...,x_n]/I$ 是子代数 $k[\alpha_1+I,...,\alpha_d+I]$ 上的有限生成模, 并且对每个 $1\leq t\leq m$, 有

$$J_t/I\cap k[\alpha_1+I,...,\alpha_d+I]=(\alpha_{d_t+1}+I,...,\alpha_n+I).$$

置 $y_t=\varphi^{-1}(\alpha_t+I),t=1,2,...,d$, 那么 $\{y_1,...,y_d\}$ 便是满足条件的子集.

现在我们对 $A=k[x_1,...,x_d]$ 的情形证明结论.

Claim. 如果 A 有子集 $\{y_1,...,y_d\}$ 满足:

(N1) $k[x_1,...,x_d]$ 是 $k[y_1,...,y_d]$ 上有限生成模;

(N2) $I_j\cap k[y_1,...,y_d]\supseteq(y_{d_j+1},...,y_d),j=1,2,...,m$,

$\{y_1,...,y_d\}$ 便是满足条件的子集. 因为由 $k[x_1,...,x_d]$ 是 $k[y_1,...,y_d]$ 的整扩张知 $\text{k.dim}k[y_1,...,y_d]=d$, 进而 $\{y_1,...,y_d\}$ 是 k-代数无关的, 于是每个 $(y_{d_j+1},...,y_d)$ 都是 $k[y_1,...,y_d]$ 的素理想. 再由 $k[x_1,...,x_d]/I_j$ 是 $k[y_1,...,y_d]/(k[y_1,...,y_d]\cap I_j)$ 的整扩张得到 $d_j=\text{k.dim}k[y_1,...,y_d]/(k[y_1,...,y_d]\cap I_j)$. 假设 $I_j\cap k[y_1,...,y_d]\supsetneqq(y_{d_j+1},...,y_d)$, 我们会得到 $\text{k.dim}k[y_1,...,y_d]/(k[y_1,...,y_d]\cap I_j)\leq d_j-1$, 矛盾. 断言得证.

经过前面的讨论, 我们知道只有构造满足 (N1) 与 (N2) 的子集 $\{y_1,...,y_d\}$ 即可. 现在我们来构造它. 先作辅助序列 $y_j'=x_j,j=1,2,...,d$. 之后会不断更新 $\{y_j'\}_{j=1}^d$, 得到的最终序列就是所要构造的 $\{y_1,...,y_d\}$. 下面我们构造 y_d 并替换 $y_1',...,y_{d-1}'$ 使得 $k[x_1,...,x_d]$ 是 $k[y_1',...,y_{d-1}',y_d]$ 上的有限生成模且每个 $I_j(1\leq j\leq m)$ 满足 $I_j\cap k[y_1',...,y_{d-1}',y_d]\supseteq(y_d)$. 由 $\{y_j'\}_{j=1}^d$ 之前的初始定义, 有 $k[y_1',...,y_{d-1}',y_d']\cap I_j\neq 0$(这是因为 $\text{k.dim}\ k[x_1,...,x_n]/I_j<d$ 保证了 I_j 是非零理想), 选取 y_d 是 $k[y_1',...,y_{d-1}',y_d']\cap I_1$ 中非常数多项式, 那么存在 $\alpha_1,...,\alpha_{d-1}\in k[x_1,...,x_n]$ 使得 $k[x_1,...,x_n]$ 是 $k[\alpha_1,...,\alpha_{d-1},y_d]$ 上的有限生成模. 更新 y_j' 为 $\alpha_j,j=1,2,...,d-1$, 那么 $k[x_1,...,x_d]$ 是 $k[y_1',...,y_{d-1}',y_d]$ 上的有限生成模且 $I_1\cap k[y_1',...,y_{d-1}',y_d]\supseteq(y_d)$. 结合每个 $I_j\supseteq I_1$ 可知 $I_j\cap k[y_1',...,y_{d-1}',y_d]\supseteq(y_d)$.

如果我们已经选定了 $y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d$, 这里 $1\leq e\leq d-1$, 满足

- $k[x_1,...,x_d]$ 是 $k[y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d]$ 上有限生成模;
- 对每个 $I_j(1\leq j\leq m)$, 有 $I_j\cap k[y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d]\supseteq(y_h,...,y_d)$, 其中 $h=\max\{d_j+1,e+1\}$.

下面我们构造 y_e 并更新 $y_1',...,y_{e-1}'$ 使得

- $k[x_1,...,x_d]$ 是 $k[y_1',...,y_{e-1}',y_e,...,y_d]$ 上有限生成模;
- 对每个 $I_j(1\leq j\leq m)$, 有 $I_j\cap k[y_1',...,y_{e-1}',y_e,...,y_d]\supseteq(y_h,...,y_d)$, 其中 $h=\max\{d_j+1,e\}$.

一旦依次构造完 $y_d,y_{d-1},...,y_1$, 我们便得到了满足 (N1) 与 (N2) 的子集 $\{y_1,...,y_d\}$. 如果 $e\leq d_m$, 那么每个 $I_j(1\leq j\leq m)$, 满足 $I_j\cap k[y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d]\supseteq(y_{d_m+1},...,y_d)\supseteq(y_{d_j+1},...,y_d)$. 这时置 $y_e=y_e'$, $y_1',...,y_{e-1}'$ 保持不变即可. 否则, 当 $e>d_m$ 时, 设 s 是满足 $e>d_s$ 的最小正整数.

Claim. $k[y_1',...,y_e'] \cap I_s \neq 0$. 一旦证明该断言, 选取 y_e 是 $k[y_1',...,y_e'] \cap I_s$ 中的非常数多项式 (注意在我们的假设下有 $\{y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d\}$ 是 k-代数无关的, 所以 $k[y_1',...,y_e']$ 同构于多项式环), 那么存在 $\beta_1,...,\beta_{e-1} \in k[y_1',...,y_e']$ 使得 $k[y_1',...,y_e']$ 是 $k[\beta_1,...,\beta_{e-1},y_e]$ 上的有限生成模. 更新 y_j' 为 $\beta_j, j = 1,2,...,e-1$, 那么 $k[y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d]$ 是 $k[y_1',...,y_{e-1}',y_e,...,y_d]$ 的整扩张, 并且对每个 $j \geq s$, 有 $I_j \cap k[y_1',...,y_{e-1}',y_e,...,y_d] \supseteq (y_e,...,y_d)$. 对 $j < s$, 有 $e \leq d_j$, 所以 $I_j \cap k[y_1',...,y_{e-1}',y_e,...,y_d] \supseteq (y_{d_j+1},...,y_d)$, 进而得到结论. 现在我们来证明断言: 假设 $k[y_1',...,y_e'] \cap I_s = 0$, 那么由 $I_s \cap k[y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d] \supseteq (y_{e+1},...,y_d)$ 知 $I_s \cap k[y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d] = (y_{e+1},...,y_d)$, 等式左边满足

$$\text{k.dim } k[y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d]/(I_s \cap k[y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d]) = d_s,$$

等式右边满足 $\text{k.dim } k[y_1',...,y_e',y_{e+1},...,y_d]/(y_{e+1},...,y_d) = e$, 这与 $e > d_s$ 矛盾, 证毕. □

下面我们给出两个 Noether 正规化定理加强形式的应用.

Corollary 3.8. 设 k-代数 R 是仿射整环, 那么 $d = \text{k.dim } R$ 就是 R 任意一条极大素理想链的长度.

Proof. 任取 R 的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m$, 我们说明 $m < d$ 时某个素理想可以严格插入该素理想链. 不妨设 $P_0 = 0$ 且 P_m 是极大理想. 记 d_j 是 R/P_j 的 Krull 维数, $j = 0,1,...,m$, 其中 $d_0 = d, d_m = 0$, 那么存在某个 $1 \leq j \leq m$ 使得 $d_{j-1} \geq d_j + 2$. 如果 $j \geq 2$, 那么由 Noether 正规化定理, 存在 R 的子集 $\{y_1,...,y_d\}$ 使得 $R \supseteq k[y_1,...,y_d]$ 是整扩张且每个 $1 \leq t \leq m$ 都有 $P_j \cap k[y_1,...,y_d] = (y_{d_t+1},...,y_d)$. 注意到 $(y_{d_{j-1}},...,y_d)$ 作为 $k[y_1,...,y_d]$ 的理想是严格介于 $P_{j-1} \cap k[y_1,...,y_d] = (y_{d_{j-1}+1},...,y_d)$ 以及 $P_j \cap k[y_1,...,y_d] = (y_{d_j+1},...,y_d)$ 之间的素理想. 如果 $j = 1$, 那么 $P_0 \cap k[y_1,...,y_d] = 0$ 与 $P_1 \cap (y_{d_1+1},...,y_d)$ 之间同样严格包含 $k[y_1,...,y_d]$ 的素理想 (y_{d_1+1}). 总之, $P_{j-1} \cap k[y_1,...,y_d]$ 与 $P_j \cap k[y_1,...,y_d]$ 间严格存在一个 $k[y_1,...,y_d]$ 的素理想 $\mathcal{Q}$. 现在我们得到整闭整环 $k[y_1,...,y_d]/(k[y_1,...,y_d] \cap P_{j-1})$ 的整扩张 R/P_{j-1}, 针对 R/P_{j-1} 的素理想 P_j/P_{j-1} 以及 $k[y_1,...,y_d]/(k[y_1,...,y_d] \cap P_{j-1})$ 的素理想 $\mathcal{Q}/(k[y_1,...,y_d] \cap P_{j-1})$ 应用 Going-down 定理, 可得 R 的素理想 Q 使得 $P_{j-1} \subsetneq Q \subsetneq P_j$. 所以素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m$ 当长度严格小于 d 时仍可加长. □

Corollary 3.9. 设 k-交换代数 A 是仿射整环, 那么

$$\text{ht}P + \text{k.dim } R/P = \text{k.dim } R, \forall P \in \text{Spec}R.$$

Proof. 任取 R 的素理想 P, 要证的只有 $\text{ht}P + \text{k.dim } R/P \geq \text{k.dim } R$. 由于 P 总含于 R 的某条极大素理想链中, 所以由 $\text{k.dim } R$ 是该极大素理想链的长度可得 $\text{k.dim } R \leq \text{ht}P + \text{k.dim } R/P$. □

3.3 Schanuel 引理与投射等价

对一个 R-模 M 形如下述形式的正合列

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

任给这里每个 P_i 是投射模, 则称 K_n 是 M 的第 n 个**合冲** (syzygy), 也简称为 n **次合冲**. 合冲来自天文学, 原意指三个天体接近一条直线. 对两个 R-模 X, Y, 如果存在投射 R-模 P, Q 使得 $X \oplus P \cong Y \oplus Q$, 称 X 与 Y **投射等价** (projectively equivalent). 容易证明投射等价是所有模构成类上的一个等价关系. 本节的目标是说明模 M 的任意两个 n 次合冲投射等价. 首先需要下面的 **Schanuel 引理**.

Lemma 3.10 (Schanuel)**.** 设 R 是含幺环, 有 R-模短正合列:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{f'} P' \xrightarrow{g'} M \longrightarrow 0\ ,$$

其中 P, P' 是投射模, 那么 $K \oplus P' \cong K' \oplus P$.

Proof. 因为 P 是投射模, 所以存在模同态 $\beta : P \to P'$ 使下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & P \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "\beta"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"'] & P' \arrow[r, "g'"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

我们还有自然的模同态 $\alpha : K \to K'$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"'] & P' \arrow[r, "g'"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

那么有短正合列 (验证它)

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{h} K' \oplus P \xrightarrow{l} P' \longrightarrow 0,$$

其中 $h : K \to K' \oplus P, x \mapsto (\alpha(x), f(x)), l : K' \oplus P \to P', (x, y) \mapsto f'(x) - \beta(y)$. 由 P' 投射知上述短正合列可裂, 所以 $K \oplus P' \cong K' \oplus P$. □

Remark ([Lam99])**.** Schanuel 引理来自 S. Schanuel(美国, 1933-2014, 师从 Serge Lang) 听 Kaplansky 教授《同调环论》课程时, 当时 Kaplansky 说如果一个模有一个 n 次合冲是投射模, 则所有 n 次合冲都是投射的, 尽管这个结论陈述简明, 不过证明还是需要做很多准备. 于是指出了上述引理所陈述的事实来表示证明很容易. 之后通过几天半的交流, 他们得到了该引理完整的证明. 这是同调代数中一个本质引理.

Corollary 3.11. 设 R 是含幺环, R-模 M 有下述两个正合列:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0,$$

满足每个 P_i, Q_i 投射, n 是自然数, 那么存在有限个投射模 $X_1, ..., X_s, Y_1, ..., Y_t (s, t \geq 1)$ 使得 $K \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_s \cong L \oplus Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_t$(作为 R-模). 特别地, M 的任意两个 n 次合冲投射等价. 因此 M 只要有一个 n 次合冲是投射模, 那么 M 的所有 n 次合冲均为投射模.

Proof. 对 n 作归纳, 当 $n = 0$ 时, 结论直接成立. 当 $n = 1$ 时, 这是 Schanuel 引理. 假设结论对 $n - 1 (n \geq 1)$ 情形结论成立, 记 $K' = \mathrm{Ker}\alpha, L = \mathrm{Ker}\beta$, 则 Schanuel 引理表明 $K' \oplus Q_0 \cong L' \cong P_0$. 所以有下述形式的两条

正合列：

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \oplus Q_0 \longrightarrow K' \oplus Q_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \oplus P_0 \longrightarrow L' \oplus Q_0 \longrightarrow 0$$

由归纳假设知结论成立. $\square$

3.4 局部环上有限生成平坦模自由

交换代数中一个经典结论是交换局部环上的有限生成投射模总自由. 事实上在非交换层面这也成立.

Proposition 3.12. 设含幺环 R 是局部环, 则任何有限生成投射左 R-模 M 自由.

Proof. 设 M 元素数目最小的生成元集是 $\{x_1, ..., x_n\}$, 对每个 $1 \leq i \leq n$, 记 e_i 是 R^n 中标准单位列向量, 则有左 R-模同态 $\psi : R^n \to M$ 使得 $\psi(e_i) = x_i, \forall 1 \leq i \leq n$. 因为 M 投射, 所以 ψ 是可裂满同态, 进而存在模同态 $\varphi : M \to R^n$ 使得 $\psi\varphi = \mathrm{id}_M$, 于是 $R^n = \varphi(M) \oplus K$, 这里 $K = \mathrm{Ker}\varphi$. 任取 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i \in K$, 假设有某个 $a_{i_0} \notin \mathrm{Jac}(R)$, 即 a_{i_0} 是可逆元, 则在 M 中, $\psi(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ 使得 M 有元素数目更少的生成元集, 这和 $\{x_1, ..., x_n\}$ 的选取矛盾. 进而 $K \subseteq \mathrm{Jac}(R)R^n$. 于是对直和分解 $\mathrm{Jac}(R)R^n = \mathrm{Jac}(R)\varphi(M) \oplus \mathrm{Jac}(R)K$ 有 $K = \mathrm{Jac}(R)K$. 注意到 K 有限生成, 故由 Nakayama 引理得到 $K = 0$, 于是 $R^n = \varphi(M) \cong M$ 自由. $\square$

事实上, 这里的有限生成条件也是多余的, 在 1958 年, Kaplansky 证明了下面的定理.

Theorem 3.13 (Kaplansky)**.** 局部环上投射模总自由.

Proof. 证明并不复杂, 感兴趣的读者参见 [Kap58, Theorem 2]. $\square$

事实上 [命题3.12] 可以用类似想法进一步推广.

Theorem 3.14. 设含幺环 R 是局部环, 则任何有限生成平坦左 R-模 M 自由.

Proof. 记 R 的 Jacobson 根是 $\mathfrak{m}$, 那么 $R/\mathfrak{m}$ 是除环. 考虑 $R/\mathfrak{m}$ 上线性空间 $M/\mathfrak{m}M$, 它维数有限, 故可取基 $\{\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}\}$, 那么 $\{x_1, ..., x_n\}$ 是 M 的一个生成元集. 对每个 $1 \leq i \leq n$, 记 e_i 是 R^n 中标准单位列向量, 则有左 R-模同态 $\psi : R^n \to M$ 使得 $\psi(e_i) = x_i, \forall 1 \leq i \leq n$. 如果 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i \in K = \mathrm{Ker}\psi$, 那么在 $M/\mathfrak{m}M$ 中有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{x_i} = 0$$

于是 $a_i \in \mathfrak{m}, \forall 1 \leq i \leq n$, 进而 $K \subseteq \mathfrak{m}R^n$. 下面通过证明 $K = 0$, 即说明 ψ 为同构, 来得到 M 的自由性. 考虑右理想 $I = a_1 R + a_2 R + \cdots + a_n R$, 对正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{j} R^n \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

应用 [引理3.15] 可知 $IK = IR^n \cap K$. 进而 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i \in K \cap IR^n = IK \subseteq I\mathfrak{m}R^n$. 于是 $I = I\mathfrak{m}$, 现在对有限生成右 R-模 I 使用 Nakayama 引理, 可知 $I = 0$, 所以 $K = 0$, 得证. $\square$

Remark. 如果不加有限生成条件, 局部环上平坦模未必投射.

Lemma 3.15. 对任何含幺环 R 上左模短正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 ,$$

如果 F, M 平坦, 那么对任何右理想 I 有 $f(K) \cap IF = If(K)$.

Proof. 考察下面的交换图, 其中 α, β, γ 是标准加群同态, 均满.

$$\begin{tikzcd}
I \otimes_R K \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[d, "\alpha"] & I \otimes_R F \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes g"] \arrow[d, "\beta"] & I \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
IK \arrow[r, "f|"'] & IF \arrow[r, "g|"'] & IM &
\end{tikzcd}$$

张量函子右正合保证了上图第一行正合, F, M 的平坦性保证了 β, γ 是同构, 于是直接追图可得 $\mathrm{Im} f| = \mathrm{Ker} g|$, 由此易知 $f(K) \cap IF = If(K)$. □

Corollary 3.16. 设 R 是含幺交换环, M 是有限生成 R-模. 那么：
(1)M 平坦的充要条件是对任何素理想 P 有 M_P 是自由 R_P-模.
(2))M 平坦的充要条件是对任何极大理想 $\mathfrak{m}$ 有 $M_{\mathfrak{m}}$ 是自由 $R_{\mathfrak{m}}$-模.

Proof. (1) 与 (2) 的充分性来自经典交换代数中的局部整体性质, 这里仅说明平坦 R-模关于任何素理想的局部化是自由的. 首先易知平坦模 M 满足对任何素理想 P 有 M_P 是有限生成平坦 R_P-模, 而局部环上有限生成平坦模自由, 故 M_P 是自由 R_P-模. □

3.5 平坦维数

本节简要介绍模的平坦维数的基本事实, 所有的环默认非交换.

Definition 3.17 (平坦维数)**.** 右 R-模 M 的**平坦维数**为

$$\mathrm{f.dim}_R M = \inf\{l \in \overline{\mathbb{Z}} | \text{存在}M\text{的平坦表示}(C, d, \varepsilon)\text{使得}l\text{为复形}(C, d)\text{的长度}\}.$$

易见一个非零模 M 是平坦模的充要条件是它的平坦维数是零. 并且模的平坦维数总不超过投射维数. 类似投射维数的情形, 有

Theorem 3.18. 给定含幺环 R, 非负整数 n 以及右 R-模 M, 以下三条等价：
(1) 平坦维数 $\mathrm{f.dim}_R M \leq n$.
(2) $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, N) = 0, \forall N \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}$.
(3) 如果正合列 $0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$
满足 $C_i (0 \leq i < n)$ 是平坦模, 那么 C_n 也是平坦模.

在证明上述定理前, 我们回顾一些 Tor 群的基本性质.

Lemma 3.19. 设 R 是含幺环, 则对任给右 R-模 M 和左 R-模 N 有加群同构 $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^{R^{op}}(N, M)$.

Proof. 取定 M 的投射分解 $\cdots \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$. 那么 $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ 即下述复形 $P_\bullet \otimes_R N$ 的 n 次同调.

$$\cdots \longrightarrow P_n \otimes_R N \xrightarrow{d_n \otimes \mathrm{id}_N} \cdots \xrightarrow{d_1 \otimes \mathrm{id}_N} P_0 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

注意当把每个右 R-模视作左 R^{op}-模时, 上述投射分解也给出 M 作为左 R^{op}-模的投射分解, 由此可计算 $\mathrm{Tor}_n^{R^{op}}(N,M)$. 对每个自然数 i, 记 $t_i : P_i \otimes_R N \to N \otimes_{R^{op}} P_i$ 是标准 twist 同构, 即有 $t_i(x \otimes y) = y \otimes x$, 那么我们可得复形 $P_\bullet \otimes_R N$ 到 $N \otimes_{R^{op}} P_\bullet$ 的链同构 t, 于是这两个复形的各次同调作为加群同构, 证毕. □

Tor 函子作为张量函子的左导出函子是用投射分解计算的, 现在我们说明它也可以使用平坦分解计算.

Theorem 3.20. 设 R 是含幺环, M 是右 R-模, N 是左 R-模, 那么 $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ 可以取 M 的平坦分解计算, 也可以取 N 的平坦分解计算.

Proof. 我们说明 Tor 群 $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ 可通过取定 M 的平坦分解 $(F_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$

$$\cdots \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

加以计算. 我们对自然数 n 作归纳来证明结论. 首先 $n = 0$ 的情形是明显的, 因为 $- \otimes_R N$ 是右正合函子表明 $F_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \otimes \mathrm{id}_N} F_0 \otimes_R N \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_R N \longrightarrow 0$ 正合, 所以复形 $F_\bullet \otimes_R N$ 的 0 次同调是 $M \otimes_R N \cong \mathrm{Tor}_0^R(M,N)$. 下面再处理 $n = 1$ 的情形, 考虑下面的分解

$$\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[r, "d_2"] & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "d_1|"'] & & F_0 \\
& & \mathrm{Im}d_1 \arrow[ur, "i"] \arrow[dr] & \\
& & & 0
\end{tikzcd}$$

作用张量函子 $- \otimes_R N$ 后, 一方面由张量函子是正合函子, 我们可以看到 $\mathrm{Im}(d_2 \otimes \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(d_1| \otimes \mathrm{id}_N)$, 这一观察表明图

$$\begin{tikzcd}
F_1 \otimes_R N/\mathrm{Im}(d_2 \otimes \mathrm{id}_N) \arrow[rr, "\widetilde{d_1 \otimes \mathrm{id}_N}"] \arrow[dr, "\widetilde{d_1| \otimes \mathrm{id}_N}"'] & & F_0 \otimes_R N \\
& \mathrm{Im}d_1 \otimes_R N \arrow[ur, "i \otimes \mathrm{id}_N"'] &
\end{tikzcd}$$

中同态 $\widetilde{d_1| \otimes \mathrm{id}_N}$ 是同构, 进而它把 $\mathrm{Ker}(\widetilde{d_1 \otimes \mathrm{id}_N}) = H_1(F_\bullet \otimes_R N)$ 同构地映为 $\mathrm{Ker}(i \otimes \mathrm{id}_N)$. 另一方面, 考虑短正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Im}d_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$ 导出的 Tor 群长正合列可以看到 $\mathrm{Ker}(i \otimes \mathrm{id}_N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(M,N)$. 从而得到 1 次 Tor 群可用平坦分解计算. 假设结论对 $n \geq 1$ 的情形成立, 即任何 n 次 Tor 群可由平坦分解计算. 同样考察短正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Im}d_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$ 导出的 Tor 群长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(F_0,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{Im}d_1,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(F_0,N) \longrightarrow \cdots,$$

因为 $n \geq 1$, 所以 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(F_0,N)$ 与 $\mathrm{Tor}_n^R(F_0,N)$ 均为零, 故 $\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{Im}d_1,N) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N)$. 根据归纳假设, 前者可由 $\mathrm{Im}d_1$ 的平坦分解计算, 而 $\mathrm{Im}d_1$ 的平坦分解可由

$$\cdots \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} \mathrm{Im}d_1 \longrightarrow 0$$

给出, 故 $\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{Im}d_1, N)$ 可由复形 $F_\bullet \otimes_R N$ 的 $n+1$ 次同调给出, 证毕. $\square$

现在能够给出 [定理3.18] 的证明：其中 (1)⇒(2) 由 Tor 群可通过平坦分解计算直接得到. (2)⇒(3) 只需注意 C_n 平坦当且仅当 $\mathrm{Tor}_1^R(C_n, N) = 0, \forall N \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}$. (3)⇒(1) 是明显的. $\square$

3.6 整体维数

整体维数是环论或者说同调代数中的重要概念, 它是环的同调不变量. 本节简要回顾整体维数的基本刻画. 对含幺环 R 上的左模 ${}_RM$ 以及自然数 n, 易知 $\mathrm{p.dim}_R M \leq n$ 的充要条件是 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0, \forall N \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}$. 以及 $\mathrm{inj.dim}_R M \leq n$ 的充要条件是 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N, M) = 0, \forall N \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}$. 综合这两点不难得到：

Lemma 3.21. 设 R 是含幺环, 则 $\sup\{\mathrm{p.dim}_R M | M \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}\} = \sup\{\mathrm{inj.dim}_R M | M \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}\}$.

于是我们可以给出整体维数的概念.

Definition 3.22 (整体维数)**.** 设 R 是含幺环, 称 $\sup\{\mathrm{p.dim}_R M | M \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}\}$ 是 R 的**左整体维数**, 记作 $\mathrm{l.gl.dim}R$. 类似可定义右整体维数的概念, 记作 $\mathrm{r.gl.dim}R$. 易见同构的环有相同的整体维数. 含幺交换环 R 的左右整体维数一致, 这时简称为**整体维数**, 并把 R 的整体维数记为 $\mathrm{gl.dim}R$.

因为一个含幺环是 Artin 半单的当且仅当其上模均投射, 所以我们根据投射维数的定义便知：

Proposition 3.23. 设 R 是含幺环, 则 R 是 Artin 半单环的充要条件是 $\mathrm{l.gl.dim}R = 0$.

Example 3.24. 我们之前已经证明过 Auslander-Buchsbaum-Serre 定理 (见 [定理2.38]), 因此一个交换 Noether 局部环是正则局部环当且仅当它具有有限整体维数.

根据 Baer 判别法易证左 R-模 Q 的内射模当且仅当对任何 R 的左理想 I 有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, Q) = 0$. 通过这一观察我们可以证明 Auslander 的一个结果, 它给出了整体维数的一些等价刻画.

Theorem 3.25 (Auslander)**.** 设 R 是含幺环, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{l.gl.dim}R &= \sup\{\mathrm{p.dim}_R M | M \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}\} \\
&= \sup\{\mathrm{inj.dim}_R M | M \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}\} \\
&= \sup\{\mathrm{p.dim}_R R/I | I\text{是}R\text{的左理想}\} \\
&= \sup\{\mathrm{p.dim}_R M | M\text{是循环左}R\text{-模}\} \\
&= \sup\{\mathrm{p.dim}_R M | M\text{是有限生成左}R\text{-模}\}
\end{aligned}$$

对右整体维数也有类似结论成立.

Proof. 易见只要验证 $\mathrm{l.gl.dim}R = \sup\{\mathrm{p.dim}_R R/I | I\text{是}R\text{的左理想}\}$ 即可. 若等号右边是 $+\infty$, 结论直接成立, 下设 $\sup\{\mathrm{p.dim}_R R/I | I\text{是}R\text{的左理想}\} = n \in \mathbb{N}$, 那么对任何左理想 I 有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I, N) = 0, \forall N \in \mathrm{ob}R\text{-Mod}$, 考虑形如 $0 \longrightarrow N \longrightarrow D^0 \longrightarrow D^1 \longrightarrow \quad \longrightarrow D^{n-1} \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 的正合列, 其中 D^i 均为内射模, 如果我们能够说明 C 是内射模, 那么 $\mathrm{l.gl.dim}R \leq n$, 进而得到结论. 只需注意到 $0 = \mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I, N) \cong \mathrm{Ext}_R^1(R/I, C)$, 再由左理想 I 的任意性得到 C 是内射模. $\square$

称一个含幺环 R 是**左遗传环** (left hereditary ring), 如果任何投射左 R-模的子模仍投射.

Proposition 3.26. 设 R 是含幺环, 则 R 是左遗传环的充要条件是 $\mathrm{l.gl.dim}R \leq 1$.

Proof. 必要性由定义即得. 充分性：假设 ${}_RP$ 是投射模, 有子模 K, 那么有正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow P/K \longrightarrow 0,$$

同时 $\mathrm{l.gl.dim}R \leq 1$ 也保证了存在形如

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P/K \longrightarrow 0$$

的正合列. 现在应用 Schanuel 引理可得 K 是投射模. $\square$

下面两个结果展示了基环改变时整体维数的关系, 我们将用于证明多项式环的整体维数公式 (见 [定理3.29]).

Lemma 3.27. 设 R 是含幺环, x 是 R 的中心正则元满足商环 $\overline{R} = R/xR \neq 0$. 那么对任何非零右 $\overline{R}$-模 M, 如果 $\mathrm{p.dim}M_{\overline{R}} = n \in \mathbb{N}$, 那么 $\mathrm{p.dim}M_R = n+1$.

Proof. 对自然数 n 作归纳, 若 $n=0$, 那么 M 是某个自由 $\overline{R}$-模 F 的直和因子. 考虑标准右 R-模正合列

$$0 \longrightarrow xR \longrightarrow R \longrightarrow \overline{R} \longrightarrow 0,$$

通过投射维数关于正合列的关系以及右 R-模同构 $xR \cong R$ 得到 $\mathrm{p.dim}\overline{R}_R \leq 1$, 所以 $\mathrm{p.dim}M_R \leq \mathrm{p.dim}F_R = \mathrm{p.dim}\overline{R}_R \leq 1$. 同时, $Mx = 0$ 表明 M 不可能是投射右 R-模, 所以 $\mathrm{p.dim}M_R = 1$, 进而 $n=0$ 时结论成立. 假设结论对投射维数不超过 $n-1(n \geq 1)$ 的非零右 $\overline{R}$-模成立, 对 M 有下述形式右 $\overline{R}$-模 (也是右 R-模) 正合列：

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 F 是自由右 $\overline{R}$-模, K 是非零右 $\overline{R}$-模 (因为 M 作为 $\overline{R}$-模非投射). 那么通过投射维数与短正合列的关系分析可知无论 K 作为 $\overline{R}$-模是否投射总有 $\mathrm{p.dim}K_{\overline{R}} = n-1$, 故对 K 应用归纳假设可知 $\mathrm{p.dim}K_R = n$. 如果 $n \geq 2$, 那么这时有 $\mathrm{p.dim}M_R = \mathrm{p.dim}K_R + 1 = n+1$, 结论成立. 因此只需再验证当 $n=1$ 时结论成立. 首先这时总有 $\mathrm{p.dim}M_R \leq 2$, 下证 $\mathrm{p.dim}M_R \geq 2$. 考虑下述形式的右 R-模正合列：

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 P 是自由右 R-模, L 是 P 的真子模, 那么由 $Mx = 0$ 以及 $P/L \cong M$ 可知 $Px \subseteq L$, 故有右 $\overline{R}$-模正合列

$$0 \longrightarrow L/Px \longrightarrow P/Px \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

因为 P/Px 是自由右 $\overline{R}$-模, 所以利用 $\mathrm{p.dim}M_{\overline{R}} = 1$ 可得 L/Px 是投射右 $\overline{R}$-模, 考察右 $\overline{R}$-模正合列

$$0 \longrightarrow Px/Lx \longrightarrow L/Lx \longrightarrow L/Px \longrightarrow 0,$$

因为 L/Px 是投射右 $\overline{R}$-模, 所以上述正合列可裂, 所以 Px/Lx 作为右 $\overline{R}$-模是 L/Lx 的直和因子. 并注意右 $\overline{R}$-模同构 $M \cong P/L \cong Px/Lx$, 所以 M 作为右 $\overline{R}$-模同构于 L/Lx 的直和因子. 我们断言 L 不是投射右 R-模, 否则 L/Lx 是投射右 $\overline{R}$-模, 进而 M 作为右 $\overline{R}$-模也投射, 矛盾. 从而知 $\mathrm{p.dim}M_R = \mathrm{p.dim}L_R + 1 \geq 2$. $\square$

Lemma 3.28. 设 $\alpha : R \to S$ 是保幺环同态, 进而任何右 S-模有天然右 R-模结构. 于是对每个右 S-模 M, 有 $\text{p.dim}M_R \le \text{p.dim}M_S + \text{p.dim}S_R$. 特别地, 若 S_R 投射, 则 $\text{p.dim}M_R \le \text{p.dim}M_S$.

Proof. 不妨设 M 是非零模且 $\text{p.dim}M_S = n \in \mathbb{N}$. 如果 $n = 0$, 那么 M_S 是某个自由右 S-模 F_S 的直和因子, 进而 $\text{p.dim}M_R \le \text{p.dim}F_R = \text{p.dim}S_R$, 结论成立. 假设结论对投射维数不超过 $n-1 (n \ge 1)$ 的右 S-模成立, 对 M_S, 考虑形如 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 的右 S-模正合列, 那么 $\text{p.dim}K_S = n-1$, 对 K_S 应用归纳假设可得 $\text{p.dim}K_R \le \text{p.dim}K_S + \text{p.dim}S_R$. 将上述右 S-模短正合列视作右 R-模短正合列可得 $\text{p.dim}M_R \le \text{p.dim}K_R + 1 \le \text{p.dim}S_R + n$. □

Theorem 3.29 (多项式的整体维数)**.** 设 R 是含幺环, 则 $\text{r.gl.dim}R[x] = \text{r.gl.dim}R + 1$. 故归纳地得到

$$\text{r.gl.dim}R[x_1, ..., x_m] = \text{r.gl.dim}R + m.$$

Proof. 对任给右 R-模 M, 考虑系数在 M 中的形式多项式集全体 $M[x] = \{m_0 + m_1x + \cdots + m_sx^s | m_0, ..., m_s \in M, s \ge 0\}$, 其上有天然右 $R[x]$-模结构, 且满足 $M[x] \cong M \otimes_R R[x]$. 注意到 $R[x]$ 是自由左 R-模, 所以 $\text{p.dim}(M[x])_{R[x]} \le \text{p.dim}M_R$. 应用前面的引理可知 $\text{p.dim}M_R \le \text{p.dim}(M[x])_{R[x]} + \text{dim}R[x]_R = \text{p.dim}(M[x])_{R[x]}$. 所以 $\text{p.dim}(M[x])_{R[x]} = \text{p.dim}M_R$. 由此立即得到当 $\text{r.gl.dim}R = +\infty$ 时有 $\text{r.gl.dim}R[x] = +\infty$. 进而知 $\text{r.gl.dim}R = +\infty$ 时结论成立. 下面假设 $\text{r.gl.dim}R = n \in \mathbb{N}$. 事实上, 只需验证 $\text{r.gl.dim}R[x] \le \text{r.gl.dim}R + 1$ 即可, 原因是任何右 R-模 M_R 可通过定义 $Mx = 0$ 天然赋予右 $R[x]$-模, 进而由前面的引理知 M 作为右 $R[x]$-模的投射维数为 $\text{p.dim}M_R + 1$. 由此可得 $\text{r.gl.dim}R[x] \ge \text{r.gl.dim}R + 1$. 下面来说明 $\text{r.gl.dim}R[x] \le \text{r.gl.dim}R + 1$. 为此, 我们对任何右 $R[x]$-模 M, 将其天然视作右 R-模后, 构造下述形式的右 $R[x]$-模正合列:

$$0 \longrightarrow M[x] \longrightarrow M[x] \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

一旦得到上述形式的正合列, 则由 $\text{p.dim}M_{R[x]} \le \text{p.dim}(M[x])_{R[x]} + 1 \le \text{r.gl.dim}R + 1$ 便得结论.

下面构造上述形式的正合列. 作 $\pi : M[x] \to M, \sum_{i=0}^{n} m_ix^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} m_ix^i$, 这是定义合理的满右 $R[x]$-模同态, 只需说明右 $R[x]$-模同构 $\text{Ker}\pi \cong M[x]$. 作

$$\sigma : M[x] \to \text{Ker}\pi, \sum_{i=0}^{n} m_ix^i \mapsto (m_0x)1 + (m_1x - m_0)x + (m_2x - m_1)x^2 + \cdots + (m_nx - m_{n-1})x^n + (-m_n)x^{n+1}.$$

易见 σ 是定义合理的单右 $R[x]$-模同态并且对任何 $\sum_{i=0}^{n} m_ix^i \in \text{Ker}\pi$, 在 M 内有 $\sum_{i=0}^{n} m_ix^i = 0$. 进而在 $\text{Ker}\pi$ 内

$$\sum_{i=0}^{n} m_ix^i = (-\sum_{k=0}^{n-1} m_{k+1}x^k)1 + [(-\sum_{k=0}^{n-2} m_{k+2}x^k)x + \sum_{k=0}^{n-1} m_{k+1}x^k]x + \cdots (0 \cdot x + m_n)x^n + 0x^{n+1},$$

故 σ 是满射. 结合前面的讨论知结论成立. □

Remark. L. W. Small 在 [Sma68, Theorem 2] 中证明了对任何右 Noether 环 R, $\text{r.gl.dim}R[[x]] = \text{r.gl.dim}R + 1$.

Corollary 3.30. 设含幺环 R 满足 $\text{r.gl.dim}R < +\infty$, 则 $R[x_1, ..., x_n] \not\cong R[x_1, ..., x_m], \forall n \ne m \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$.

设 A 是域 $\Bbbk$ 上的代数, 称 $A^e = A \otimes_{\Bbbk} A^{op}$ 是 A 的**包络代数**. 易验证范畴同构 $A^e\text{-Mod} \cong A\text{-Mod-}A$, 并且任何自由左 A^e-模作为左、右 A-模均自由; 任何投射左 A^e-模作为左、右 A-模均投射. 如果 A 作为左 A^e-模的投射

维数是 n, 可设左 A^e-模投射分解 $0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$. 该复形每项作为右 A-模投射, 所以作为右 A-模复形可裂正合, 进而对任何左 A-模 M 有正合列

$$0 \longrightarrow P_n \otimes_A M \xrightarrow{d_n\otimes 1} P_{n-1} \otimes_A M \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_A M \xrightarrow{d_1\otimes 1} P_0 \otimes_A M \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} A \otimes_A M \longrightarrow 0,$$

注意到双模同构 $(A \otimes_{\Bbbk} A^{op}) \otimes_A M \to A \otimes_{\Bbbk} M, a \otimes b \otimes x \mapsto a \otimes bx$, 并且 M 作为线性空间自然是自由 $\Bbbk$-模, 所以对任何投射左 A^e-模 Q, $Q \otimes_A M$ 是投射左 A-模. 由此可知

Theorem 3.31. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 则 $\text{l.gl.dim}A \leq \text{p.dim}_{A^e}A$.

3.7 弱整体维数

Definition 3.32 (弱整体维数)**.** 设 R 是含幺环, 称 $\sup\{\text{f.dim}_R M | M \in \text{ob}R\text{-Mod}\}$ 是 R 的**左弱整体维数**, 记作 $\text{l.w.gl.dim}R$. 类似可定义**右弱整体维数**的概念, 记作 $\text{r.w.gl.dim}R$. 我们马上会看到左右弱整体维数一致.

Lemma 3.33. 设 R 是含幺环, n 是自然数, 那么 $\text{r.w.gl.dim}R \leq n$ 当且仅当 $\text{Tor}^R_{n+1}(M, N) = 0, \forall N \in \text{ob}R\text{-Mod}, M \in \text{obMod-}R$. 对左弱整体维数有同样的结论成立.

Proof. 在 [定理3.20] 中已经说明 Tor 群可用平坦分解计算, 故必要性明显成立. 充分性来自 [定理3.18]. □

所以含幺环 R 的弱整体维数是 n 蕴含存在左 R-模 N 和右 R-模 M 使 $\text{Tor}^R_n(M, N) \neq 0$.

Corollary 3.34. 设 R 是含幺环, 则 $\text{r.w.gl.dim}R = \text{l.w.gl.dim}R$.

将 R 的左右弱整体维数公共值称为 R 的**弱整体维数**, 记作 $\text{w.gl.dim}R$, 弱整体维数不超过整体维数.

Lemma 3.35. 设 R 为含幺环, 那么右 R-模 M 是平坦模的充要条件是 $\text{Tor}^R_1(M, R/I) = 0$, 对 R 的任何左理想 I 成立. 对左 R-模的平坦性也有类似刻画.

Proof. 回忆 M 是平坦模当且仅当对所有左理想 I 以及嵌入 $i : I \to R$ 有 $\text{id}_M \otimes i : M \otimes_R I \to M \otimes_R R$ 单. □

Corollary 3.36 (弱整体维数)**.** 设 R 是含幺环, 则

$$\begin{aligned}
\text{w.gl.dim}R &= \sup\{\text{f.dim}_R M | M \in \text{ob}R\text{-Mod}\} \\
&= \sup\{\text{f.dim}_R M | M \in \text{obMod-}R\} \\
&= \sup\{\text{f.dim}_R R/I | I\text{是}R\text{的左理想}\} \\
&= \sup\{\text{f.dim}_R R/I | I\text{是}R\text{的右理想}\} \\
&= \sup\{\text{f.dim}_R M | M\text{是循环左}R\text{-模}\} \\
&= \sup\{\text{f.dim}_R M | M\text{是有限生成左}R\text{-模}\}
\end{aligned}$$

Proof. 只说明 $\text{w.gl.dim}R = \sup\{\text{f.dim}_R R/I | I\text{是}R\text{的左理想}\}$, 若等式右边是 $+\infty$, 结论直接成立. 下设等式右边是 n, 那么对每个右模 M 有 $\text{Tor}^R_{n+1}(M, R/I) = 0$, 对 R 的任何左理想 I 成立. 我们说明对正合列 $0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$ 满足 $C_i (0 \leq i < n)$ 是平坦模, 那么 C_n 也是平坦模, 进而得到 M 的平坦维数不超过 n. 注意这时 $\text{Tor}^R_1(C_n, R/I) \cong \text{Tor}^R_{n+1}(M, R/I) = 0$, 对 R 的任何左理想 I 成立. 所以 $\text{f.dim}_R M \leq n, \forall M \in \text{ob}R\text{-Mod}$, 从而 $\text{w.gl.dim}R \leq n$, 故 $\text{w.gl.dim}R = n$. □

3.8 Noether 环的同调维数

本节说明 Noether 环的弱整体维数与整体维数一致. 首先回忆一下有限表现模的平坦性与投射性等价.

Theorem 3.37. 设 X 是有有限表现的左 R-模, 即存在形如 $R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0$ 的正合列的模 (例如左 Noether 环上有限生成模), 那么 X 是平坦模当且仅当 X 是投射模.

定理的证明需要下述引理.

Lemma 3.38. 设 $_RX$ 是左 R-模, $_RY_S$ 是 R-S 双模, Z_S 是右 S-模, 则有加群同态

$$\eta_{X,Y,Z} : \mathrm{Hom}_S(Y,Z) \otimes_R X \to \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(X,Y),Z)$$

满足 $\eta_{X,Y,Z}(f \otimes x) : \mathrm{Hom}_R(X,Y) \to Z, g \mapsto f(g(x)), \forall f \in \mathrm{Hom}_S(Y,Z), x \in X$. 那么 $\eta_{X,Y,Z}$ 对变量 X,Y 都是自然的, 并且当 $Z = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 且 X 是有有限表现的模时, $\eta_{X,Y,Z}$ 是同构.

Proof. 这里仅列出证明概要. $\eta_{X,Y,Z}$ 对变量 X,Y 的自然性可通过直接计算验证得到. 对于后一结论, 先对 $X = R$ 的情形证明, 再借助张量函子保持余积得到 X 是有限生成自由模时 $\eta_{X,Y,Z}$ 是同构. 最后, 当 $Z = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 且 X 是有有限表现的模时, 设有正合列 $R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0$, 分别用函子 $\mathrm{Hom}_S(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_R -$ 与 $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(-,Y),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作用之, 通过五引理以及 $\eta_{R^m,Y,Z}, \eta_{R^n,Y,Z}$ 是同构便得结果. □

现在可以给出 [定理3.37] 的证明: 设 X 是具有有限表现的平坦左 R-模, 对上述引理, 取 $S = \mathbb{Z}$, $Z = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, 那么对任何左 R-模 Y 有加群同构 $\eta_{X,Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_R X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X,Y),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 为后面叙述方面, 把 $\eta_{X,Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ 记为 ζ_Y, 它关于 Y 是自然的. 因为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是内射上生成子, 所以我们想说明 X 是投射的, 即 $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ 保持满射, 只需说明对任何左 R-模满同态 $\varepsilon : M \to N$, 有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X,N),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{(\varepsilon_*)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X,M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \ .$$

首先下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X,N),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "(\varepsilon_*)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X,M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_R X \arrow[r, "\varepsilon^* \otimes \mathrm{id}_X"] \arrow[u, "\zeta_N"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_R X \arrow[u, "\zeta_M"']
\end{tikzcd}$$

竖直方向的映射是同构, 于是由 X 是平坦模得到第二行是正合列, 所以第一行也正合. □

现在可以说明 Noether 环上有限生成模的平坦维数与投射维数相同.

Corollary 3.39. 设 R 是左 Noether 环, M 是有限生成左 R-模, 则 $\mathrm{f.dim}_R M = \mathrm{p.dim}_R M$.

Proof. 只需证 $\mathrm{p.dim}_R M \le \mathrm{f.dim}_R M$. 不妨设 $\mathrm{f.dim}_R M = n$ 有限, 考虑下述形式的正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{j} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

其中每个 P_k 是有限生成投射模. 因为 M 的平坦维数是 n, 所以 K 是有限生成平坦模, 从而是投射模, 于是 $\mathrm{p.dim}_R M \le n = \mathrm{f.dim}_R M$. □

Remark. 这里模的有限生成条件是必要的, 否则结论未必成立, 例如 $\text{f.dim}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = 0 < 1 = \text{p.dim}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.

于是知对 Noether 环而言, 弱整体维数与整体维数没有不同.

Corollary 3.40. 设 R 是左 Noether 环, 则 $\text{w.gl.dim}R = \text{l.gl.dim}R$. 右 Noether 环也有类似结论.

Proof. $\text{w.gl.dim}R = \sup\{\text{f.dim}_R R/I | I\text{是}R\text{的左理想}\} = \sup\{\text{p.dim}_R R/I | I\text{是}R\text{的左理想}\} = \text{l.gl.dim}R$. □

Corollary 3.41 (Auslander)**.** 设含幺环 R 是左、右 Noether 环, 则 $\text{l.gl.dim}R = \text{w.gl.dim}R = \text{r.gl.dim}R$.

因为左 Noether 环的左整体维数就是弱整体维数, 所以我们马上看到

Corollary 3.42. 设 R 是左 Noether 环, 则 $\text{l.gl.dim}R = \text{w.gl.dim}R \le \text{r.gl.dim}R$.

Theorem 3.43 ([Jat69])**.** 对 $1 \le m \le n \le +\infty$, 存在一个左 Noether 环 R, 使得

$$\text{l.gl.dim}R = m, \text{r.gl.dim}R = n.$$

Proof. 证明参见 [Jat69, p.439]. □

我们也可以问 Noether 环作为自身上的模左右内射维数的关系:

Theorem 3.44 ([Zak69])**.** 如果含幺环 R 是左、右 Noether 环且左右内射维数有限, 那么 $\text{l.inj.dim}R = \text{r.inj.dim}R$.

Proof. 证明参见 [Zak69, Lemma A]. □

Theorem 3.45. 存在一个含幺交换 Noether 整环 R, 使得 $\text{gl.dim}R = \text{k.dim}R = +\infty$, 但 R 在任何素理想 P 处的局部化 R_P 是正则局部环, 即有 $\text{gl.dim}R_P = \text{k.dim}R_P < +\infty, \forall P \in \text{Spec}R$.

Proof. 这个问题的经典反例来自 M. Nagata, 证明参见 [Lam99, p.200, Example 5.96]. □

Noether 环的整体维数还会和它的自内射维数产生联系, 以下的结果来自 H. Bass.

Theorem 3.46 ([Bas62])**.** 设含幺环 R 是右 Noether 环, 那么当 $\text{inj.dim}R_R$ 与

$$\sup\{\text{inj.dim}_R M | M\text{是内射维数有限的右}R\text{-模}\}$$

都有限时, 它们相等, 即 $\text{inj.dim}R_R = \sup\{\text{inj.dim}_R M | M\text{是内射维数有限的右}R\text{-模}\}$. 特别地, 当右 Noether 环 R 的右整体维数 $\text{r.gl.dim}R$ 有限时, $\text{inj.dim}R_R = \text{r.gl.dim}R$. 对于左 Noether 环有类似结论成立, 即在左自内射维数有限且所有内射维数有限模的内射维数有公共上界的前提下, 有

$$\text{inj.dim}_R R = \sup\{\text{inj.dim}_R M | M\text{是内射维数有限的左}R\text{-模}\},$$

所以左整体维数和自内射维数一致.

在证明该定理前我们指出

Lemma 3.47. 设 R 是右 Noether 环, 则对任意右 R-模族 $\{X_i\}_{i\in I}$, 有 $\text{inj.dim}\bigoplus_{i\in I} X_i = \sup\{\text{inj.dim}_R X_i | i \in I\}$.

Proof. 易知 $\text{inj.dim}\bigoplus_{i\in I} X_i \geq \sup\{\text{inj.dim}_R X_i | i \in I\}$, 故不妨设 $\sup\{\text{inj.dim}_R X_i | i \in I\} = n$ 有限. 回忆 Bass-Papp 定理说右 Noether 环上任意一族内射右模的直和仍内射, 故结论明显成立. □

在投射情形我们证明过上面的类似公式 ([推论??]). 利用上述引理可得, 如果一个含幺环 R 是右 Noether 环, 那么任意自由右 R-模 F 满足 $\text{inj.dim}F_R = \text{inj.dim}R_R$.

现在给出 [定理3.46] 的证明：设 $\sup\{\text{inj.dim}_R M | M\text{是内射维数有限的右}R\text{-模}\} = n$, 那么由条件, R 作为自身上右 R-模的内射维数不超过 n. 下面只要再证 $\text{inj.dim}R_R \geq n$. 取右 R-模 M 使得 M 的内射维数是 n, 那么存在下述形式的短正合列：

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0,$$

其中 F 是非零自由模. 因为 R 是右 Noether 环, 所以我们立即得到 $\text{inj.dim}F_R = \text{inj.dim}R_R$ 有限, 结合 M 内射维数有限可得 K 也具有有限内射维数, 于是 $\text{inj.dim}K_R \leq n$. 因为 M 的内射维数是 n, 故 [命题2.44] 表明存在右 R-模 N 使得 $\text{Ext}_R^n(N, M) \neq 0$. 考虑上述短正合列导出的 Ext 群长正合列：

$$\cdots \longrightarrow \text{Ext}_R^n(N, K) \longrightarrow \text{Ext}_R^n(N, F) \longrightarrow \text{Ext}_R^n(N, M) \longrightarrow \text{Ext}_R^{n+1}(N, K) \longrightarrow \cdots$$

因为 K 的内射维数不超过 n, 因此 $\text{Ext}_R^{n+1}(N, K) = 0$, 从而 $\text{Ext}_R^n(N, F) \neq 0$, 这说明 F 的内射维数不低于 n. 故 $\text{inj.dim}R_R = \text{inj.dim}F_R \geq n$. □

因此, 以后当我们考虑整体维数有限的右 (左)Noether 环, 其自内射维数便为右 (左) 整体维数.

3.9 正则环与光滑簇

之前我们已经介绍过正则局部环的概念与通常性质, 本节主要介绍正则局部环的推广——正则环. 首先需要引入的是如下基本观察, 它指出交换 Noether 环上有限生成模的投射维数局部与整体的关系.

Lemma 3.48. 设 R 是交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模, 则

$$\text{p.dim}_R M = \sup\{\text{p.dim}_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \text{Max}R\}.$$

其中 $\text{Max}R$ 表示 R 的极大谱.

Proof. 对任何乘闭子集 S, 总有 $\text{p.dim}_{R_S} M_S \leq \text{p.dim}_R M$(这里不需要 R 的 Noether 条件也不需要 M 的有限生成条件), 因此总有 $\text{p.dim}_R M \geq \text{p.dim}_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}, \forall \mathfrak{m} \in \text{Max}R$. 于是得到

$$\text{p.dim}_R M \geq \sup\{\text{p.dim}_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \text{Max}R\}.$$

因此不妨设 $\sup\{\text{p.dim}_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \text{Max}R\} = n$, 只需证 $\text{p.dim}_R M \leq n$. 考虑下述形式的正合列

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

这里每个 F_i 是有限生成自由模, 那么 K_n 也有限生成. 对上述正合列关于每个极大理想 $\mathfrak{m}$ 作局部化, 由每个 $\text{p.dim}_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \leq n$ 立即看到 K_n 关于每个极大理想作局部化是投射模. 而 $(K_n)_\mathfrak{m}$ 作为局部环 $R_\mathfrak{m}$ 上的有限生成投射模必自由 ([命题3.12]). 所以 [推论3.16(2)] 保证了 K_n 平坦. 因为 Noether 环上有限生成模是有限表现的, 所以 [定理3.37] 表明 K_n 是投射 R-模. 于是知 $\text{p.dim}_R M \leq n$, 得证. □

Remark. 事实上证明过程中 $\mathrm{p.dim}_{R_S}M_S \le \mathrm{p.dim}_R M$ 告诉我们：对任何含幺交换环 R 的乘闭子集 S, 总有 $\mathrm{gl.dim}R_S \le \mathrm{gl.dim}R$(事实上非交换情形也有类似结论). 原因是任何 R_S-模 X 都同构于某个 R-模的局部化.

事实上, 上述引理可以加强成下面更紧致的形式.

Lemma 3.49. 设 R 是交换 Noether 环, M 是有限生成 R-模, 则存在某个极大理想 $\mathfrak{m}_1$ 使得

$$\mathrm{p.dim}_R M = \mathrm{p.dim}_{R_{\mathfrak{m}_1}} M_{\mathfrak{m}_1}.$$

Proof. 不妨设对任何极大理想 $\mathfrak{m}$ 有 $\mathrm{p.dim}_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} < +\infty$, 记该投射维数是 $d(\mathfrak{m})$. 对每个自然数 n, 取定 M 的有限生成 n 次合冲 K_n(根据 [推论3.11], 它在投射等价下唯一). 那么对每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $(K_n)_\mathfrak{m}$ 是 $M_\mathfrak{m}$ 作为 $R_\mathfrak{m}$-模的有限生成 n 次合冲. 于是知 $(K_{d(\mathfrak{m})})_\mathfrak{m}$ 是 $R_\mathfrak{m}$-投射模, 进而也是有限生成自由模, 设秩是 $r(\mathfrak{m})$. 所以存在 R-模同态 $\varphi_\mathfrak{m}: R^{r(\mathfrak{m})} \to K_{d(\mathfrak{m})}$ 使得它在 $\mathfrak{m}$ 处局部化是 $R_\mathfrak{m}$-同构 (通过自由性直接构造). 由此可知存在 $s_\mathfrak{m} \notin \mathfrak{m}$ 使得 $s_\mathfrak{m}\mathrm{Ker}\varphi_\mathfrak{m} = s_\mathfrak{m}\mathrm{Coker}\varphi_\mathfrak{m} = 0$. 根据 $s_\mathfrak{m}$ 的选取, 由集合 $\{s_\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}R\}$ 生成的理想只能是 R. 于是存在有限个 $\{s_{\mathfrak{m}_1}, ..., s_{\mathfrak{m}_k}\}$ 可生成 R. 不妨设 $d = d(\mathfrak{m}_1)$ 是 $\{d(\mathfrak{m}_i) | 1 \le i \le k\}$ 中最大值, 我们通过说明 K_d 是投射 R-模来得到 $\mathrm{p.dim}_R M = d = \mathrm{p.dim}_{R_{\mathfrak{m}_1}} M_{\mathfrak{m}_1}$. 而 Noether 环上有限生成模的投射性与平坦性等价 (回忆 [定理3.37]), 所以只要证 K_d 平坦. 根据 [推论3.16(2)], 只要证 K_d 在每个极大理想处的局部化是自由的. 对任给极大理想 $\mathfrak{m}$, 首先存在 $1 \le i \le k$ 使得 $s_i \notin \mathfrak{m}$, 固定指标 i, 那么根据 s_{m_i} 的选取, s_{m_i} 可零化 R-模同态 $\varphi_{\mathfrak{m}_i}: R^{r(\mathfrak{m}_i)} \to K_{d(\mathfrak{m}_i)}$ 的核与余核, 进而 $\varphi_{\mathfrak{m}_i}$ 关于极大理想 $\mathfrak{m}$ 的局部化也是同构. 由此知 $K_{d(\mathfrak{m}_i)}$ 是有限生成自由 $R_\mathfrak{m}$-模, 因为 $d \ge d(\mathfrak{m}_i)$, 所以 $M_\mathfrak{m}$ 会有个自由的 d 次合冲. 根据 [推论3.11], $(K_d)_\mathfrak{m}$ 作为 $M_\mathfrak{m}$ 的一个 d 次合冲一定投射, 故是自由 $R_\mathfrak{m}$-模. 因此 K_d 是 R-平坦的, 由前面的讨论知结论成立. □

Theorem 3.50. 设 R 是交换 Noether 环, 则对每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $\mathrm{gl.dim}R_\mathfrak{m} = \mathrm{p.dim}_R R/\mathfrak{m}$, 并且

$$\mathrm{gl.dim}R = \sup\{\mathrm{gl.dim}R_\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}R\} = \sup\{\mathrm{p.dim}_R S | S\text{是不可约模}\}.$$

Proof. 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$, 在 [引理3.48] 中取 $M = R/\mathfrak{m}$, 则由 $V(\mathrm{Ann}_R M) = \mathrm{Supp}M = \{\mathfrak{m}\}$(这里依赖于 M 是有限生成的) 得到 $M_{\mathfrak{m}'} = 0, \forall \mathfrak{m}' \ne \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}R$. 易见 $R_\mathfrak{m}$-模同构 $M_\mathfrak{m} \cong R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$, 应用 [引理3.48] 得到

$$\mathrm{p.dim}_R R/\mathfrak{m} = \mathrm{p.dim}_{R_\mathfrak{m}} R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m} = \mathrm{gl.dim}R_\mathfrak{m},$$

最后一个等号是因为 $R_\mathfrak{m}$ 是 Noether 局部环. 由此可知要证明该定理只需说明 $\mathrm{gl.dim}R = \sup\{\mathrm{gl.dim}R_\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}R\}$. 而这由 [引理3.48] 以及 [定理3.25] 知明显成立. □

Remark. 该定理给出交换 Noether 环整体维数的两个刻画, 前者联系起了局部和整体, 后者表明交换 Noether 环的整体维数是所有不可约模投射维数的上确界.

现在可以给出整体版本的 Auslander-Buchsbaum-Serre 定理 (对比 [定理2.38]).

Theorem 3.51 (正则环)**.** 设 R 是交换 Noether 环, 则以下五条等价：
(1) 对任何有限生成 R-模 M, $\mathrm{p.dim}_R M < +\infty$.
(2) 对每个素理想 P, $\mathrm{p.dim}_R P < +\infty$.
(3) 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $\mathrm{p.dim}_R \mathfrak{m} < +\infty$.

(4) 对每个素理想 P, R_P 是正则局部环.

(5) 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $R_\mathfrak{m}$ 是正则局部环.

对交换 Noether 环 R, 当 R 满足上述五条等价条件之一时, 则称 R 是**正则环** (regular ring). 并且此时总有 $\mathrm{gl.dim}R = \mathrm{k.dim}R$.

Proof. (1)⇒(2)⇒(3) 和 (4)⇒(5) 是明显的. 所以只要说明 (3)⇒(4) 以及 (5)⇒(1). 假设 (3) 成立, 则对每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $\mathrm{p.dim}_{R_\mathfrak{m}}\mathfrak{m}_\mathfrak{m}$ 也有限, 进而由 [定理2.37] 得到 $R_\mathfrak{m}$ 是正则局部环, 而每个素理想 P 对应的 R_P 都是某个 $R_\mathfrak{m}$ 的局部化 (在 [定理2.9] 的证明过程中我们指出, 对含幺交换环 R 的乘闭子集 S 以及素理想 Q, 只要 $Q \cap S = \varnothing$, 则有环同构 $R_Q \cong (R_S)_{Q_S}$. 在这里, 对任何素理想 P, 取极大理想 $\mathfrak{m} \supseteq P$ 以及 $S = R - \mathfrak{m}$ 即可), 故 R_P 整体维数有限, 再应用 Auslander-Buchsbaum-Serre 定理就证明了 (3)⇒(4). 如果 (5) 成立, 那么对每个有限生成模 M, 必有 $\mathrm{p.dim}_{R_\mathfrak{m}}M_\mathfrak{m} < +\infty, \forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}R$. 现在应用 [引理3.49], 则 $\mathrm{p.dim}_R M < +\infty$.

还需要验证 $\mathrm{gl.dim}R = \mathrm{k.dim}R$. 根据 [定理3.50] 和 [推论2.35], 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{gl.dim}R &= \sup\{\mathrm{gl.dim}R_\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}R\} \\
&= \sup\{\mathrm{k.dim}R_\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}R\} \\
&= \sup\{\mathrm{ht}\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}R\} \\
&= \mathrm{k.dim}R.
\end{aligned}$$

□

Remark. 与正则局部环不同的是, 正则环有可能整体维数无限, 具体例子见 [Lam99, p.200, Example 5.96].

Example 3.52. 设 R 是域 $\Bbbk$ 上仿射交换代数, 那么 R 是正则代数当且仅当 $\mathrm{gl.dim}R < +\infty$.

Proof. 必要性：这时 $\mathrm{gl.dim}R = \mathrm{k.dim}R < +\infty$. 充分性明显成立. □

Corollary 3.53. 整体维数有限的交换 Noether 环是正则环.

Remark. 特别地, 交换 Artin 半单环也正则. 于是我们容易给出下面这个问题的反例：正则局部环总是整环 [引理2.30], 那么正则环是否是整环? 考虑交换的 Artin 半单环 $\Bbbk \times \Bbbk$(这里 $\Bbbk$ 是域) 即可.

Example 3.54 (光滑簇)**.** 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 我们已经在 [定理2.29] 中看到对仿射簇 $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ 内一点 $p \in X$, 局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是正则局部环的充要条件是 $p \in X$ 是光滑点. 在经典代数几何中, 若仿射簇中任意一点光滑, 称该簇是**光滑簇**或**非奇异簇**. 因为 $\mathcal{O}_{X,p}$ 可以由仿射簇 X 的正则函数环 $A(X)$(或者同构地, 坐标环) 关于 p 点对应的极大理想得到, 因此 X 是光滑簇的充要条件是正则函数环 $A(X)$ 是正则环. 粗略地说, 环的正则局部性质对应几何上的局部光滑性, 正则性对应几何上的整体光滑性.

自然, 仿射空间 $\Bbbk^n$ 作为光滑簇, 其对应的多项式代数是正则环的经典例子.

Example 3.55. 域上的多项式代数 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 作为整体维数有限的 Noether 环, 是正则整环.

对任何仿射簇 $X \subseteq \Bbbk^n$, 记全体 X 的奇点构成的集合为 **Sing**X, 称为 X 的 **singular locus**. 在交换代数中, 对任何含幺交换 Noether 环 R, 称 $X = \mathrm{Spec}R$ 中满足 R_P 是正则局部环的点 P 为**正则点**, 所有正则点所构成的 $\mathrm{Spec}R$ 的子集记作 $\mathrm{Reg}X$, 称为 X 的 **regular locus**. 相应地, 如果交换 Noether 环 R 的素理想 P 满

足 R_P 不是正则局部环, 则称 P 是**奇点**, 所有奇点构成的集合记作 $\mathbf{Sing}X$, 也称为 X 的 **singular locus**. 如果一个交换 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 满足它的 singular locus 是 $\{\mathfrak{m}\}$, 称 R 有**孤立奇点** (isolated singularity), 一些文献中也称 R 是一个孤立奇点.

在本节的最后我们指出正则环也有相应非交换版本, 它在代数 K-理论中特别有用.

Definition 3.56 (单边正则环)**.** 若含幺环 R 是左 (右)Noether 环且任何有限生成左 (右) 模的投射维数有限, 则称 R 是**左 (右) 正则环**. 根据 [定理3.51], 正则环既是左正则环又是右正则环.

3.10 非交换环的素谱

本节将交换代数中的素谱平行地在非交换世界发展, 以提供非交换 Noether 环素理想的必要工具. 和交换情形一样, 对含幺环 R 的理想 I, 定义 $V(I)$ 是含 I 素理想全体, 我们可以用所有的 $V(I)$ 作为素理想集 $\mathrm{Spec}(R)$ 中闭集赋予素理想集一个拓扑结构, 仍称该拓扑空间是 R 的**素谱**, 该拓扑称为 **Zariski 拓扑**. 它享有交换情形的通常性质. 例如对 $\mathrm{Spec}(R)$ 的子集 X, 记 $I(X)$ 是 X 中全体素理想之交, 我们可以得到 $V(I(X))$ 是 X 在 Zariski 拓扑下的闭包. 通过定义 R 的理想 J 的**根理想** $\sqrt{J}$ 为所有含 J 的素理想之交可得 $I(V(J))=\sqrt{J}$, 当 R 交换时以上结论都与交换情形重合. 并且对非交换情形, 还是有：(1) 素谱的闭子集 X 是不可约的当且仅当 $I(X)$ 是 R 的素理想. (2)R 的素理想集和素谱 $\mathrm{Spec}(R)$ 的不可约闭子集有双射：$\mathrm{Spec}(R)\to\{X\subseteq \mathrm{Spec}(R|X\text{是不可约闭子集}\},P\mapsto V(P)$. 这构建起代数对象和几何对象间的对应. 一方面, 我们可以用代数事实来得到几何结论. 例如

Lemma 3.57. 回忆拓扑空间 X 是 **Noether 空间**, 如果 X 的任何闭子集降链 $X_1\supseteq X_2\supseteq\cdots$ 都会稳定. 当含幺环 R 是左 (右)Noether 环时, 素谱 $\mathrm{Spec}(R)$ 是 Noether 空间.

另一方面, 也可以用几何事实去导出一些代数事实. 回忆 Noether 空间的一个基本性质是任何非空闭子集可分解为有限个不可约闭子集的并, 且该分解是不可缩短时, 在不计取并次序意义下唯一. 具体而言, 对 Noether 空间 X 的任何非空闭子集 Y, 总存在有限个不可约闭子集 $Y_1,...,Y_r$ 使得 $Y=\bigcup\limits_{i=1}^{r}Y_i$. 若进一步要求 $Y_i\nsubseteq Y_j,\forall i\neq j$ 时, 正整数 r 与集合 $\{Y_1,...,Y_r\}$ 被 Y 唯一确定, 我们把这里的 Y_i 称为 Y 的**不可约分支**. 于是

Lemma 3.58. 设 R 是左 Noether 环, 那么对 R 的任何真理想 J, 包含 J 的极小素理想总是存在并且有限的. 更具体地, 设素理想 $P_1,...,P_n$ 使得 $V(J)$ 的不可约分支是 $V(P_1),...,V(P_n)$, 那么 $P_1,...,P_n$ 就是 J 上的极小素理想全体. 因此左 Noether 环的真理想 J 的极小素理想全体对应着闭集 $V(J)$ 的不可约分支.

Proof. 设 $V(J)$ 有不可约分解 $V(J)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}V(P_i)=V(P_1P_2\cdots P_n)$, 那么对每个 J 上的极小素理想 Q, $Q\supseteq P_1P_2\cdots P_n$, 进而 Q 就是某个 P_{i_0}. 这说明极小素理想集是 $\{P_1,...,P_n\}$ 的子集. 反之, 每个 P_i 一定是 J 上极小素理想：首先每个 $P_i=\sqrt{P_i}=I(V(P_i))\supseteq I(V(J))=\sqrt{J}\supseteq J$ 并且对不同的 i,j, $V(P_i)\nsubseteq V(P_j)$ 蕴含 $P_i\nsubseteq P_j,\forall i\neq j$. 我们已经看到任何一个含 J 的素理想 Q 必定含某个 P_{i_0}. 如果 P_i 不是 J 上极小素理想, 则存在某个素理想 Q 使得 $J\subseteq Q\subsetneq P_i$, 这意味着 $P_{i_0}\subsetneq P_i$, 矛盾. 故每个 P_i 都是 J 上极小素理想. □

Remark. 对含幺环 R, 素谱 $\mathrm{Spec}R$ 关于包含关系总有极小元: 考虑集族 $T=\{R-P|P\in X\}$, 那么 X 非空保证了 $(T,\subseteq)$ 是非空偏序集, 对任意全序子集 $\{R-P_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$, 有素理想链 $\{P_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$, 可直接验证所有的 P_α 之交仍是素理想, 所以全序子集 $\{R-P_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 T 中有上界, 应用 Zorn 引理便知存在 T 的极大元 $R-P$,

那么 P 便是素谱内的极小元. 这一观察直接表明含幺环 R 的任何真理想 I 总有包含 I 的极小素理想：考察商环 R/I 的素谱便知. 需要指出, 虽然 (SpecR, $\subseteq$) 有极小元, 但对 Spec$R$ 给定的非空子集作为偏序集可能不存在极小元. 例如考虑多项式代数 $R=\Bbbk[x_1,x_2,...]$, 则有 R 有素理想严格降链 $(x_1,x_2,...)\supsetneq(x_2,x_3,...)\supsetneq$(这一例子也表明一般的环素谱可能未必构成 Noether 空间). 对交换 Noether 环, 其素谱不可能出现存在严格降链的现象：任取素理想 P, 设 P 可以由 n 个元素生成, 那么应用广义 Krull 主理想定理得到 ht$P\le n$.

上述引理让我们看到单边 Noether 环的每个真理想 J, 它的极小素理想全体对应素谱中的闭集 $V(J)$ 的不可约分支全体. 特别地, 我们看到对单边 Noether 环 R 的任何一个真理想 J, 包含 J 的极小素理想数目是有限的. 并且上述引理的证明过程告诉我们更多.

Corollary 3.59. 设含幺环 R 是左 Noether 环, J 是真理想, 则 (1) 对任何包含 J 的素理想 Q, 存在包含 J 的极小素理想 P 使得 $Q\supseteq P\supseteq J$. (2) 设 J 极小素理想全体是 $P_1,...,P_n$, 则 $\sqrt{J}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}P_i$.

下面我们应用前面的结论来给出一些应用. 含幺交换环的有限生成诣零理想一定是幂零的, 基于这点交换 Noether 环的诣零根 $N(R)$ 是幂零理想是明显成立的. 在非交换 Noether 环中需要使用其他方法处理.

Proposition 3.60. 设 R 是左 Noether 环, J 是真理想, 则存在素理想 $P_1,...,P_r$ 使得 $J\supseteq P_1\cdots P_r$ 且每个 P_i 是包含 J 的极小素理想.

Proof. 因为任何一个包含 J 的素理想 Q 都包含某个 J 上极小素理想, 所以我们只要证存在素理想 $P_1,...,P_r$ 使得 $J\supseteq P_1\cdots P_r$ 且每个 $P_i\supseteq J$ 即可. 使用反证法证明：若不然, 考虑集合

$$S=\{I|I\text{是真理想且}I\text{不包含有限个包含}I\text{的素理想的乘积}\},$$

则此时 S 非空, 取该理想集的极大元 M, 那么 M 不是素理想, 所以存在严格包含 M 的两个理想 I_1,I_2 使得 $I_1I_2\subseteq M$, 于是 I_1,I_2 都包含有限个包含 M 的素理想乘积, 进而 M 包含有限个包含 M 的素理想乘积, 这与 $M\in S$ 矛盾. □

Corollary 3.61. 设 R 是左 Noether 环, J 是真理想, 那么存在正整数 t 使得 $(\sqrt{J})^t\subseteq J$. 并且若理想 I 满足存在正整数 n 使得 $I^n\subseteq J$, 则 $I\subseteq\sqrt{J}$. 即 $\sqrt{J}$ 是满足该性质的理想 I 中最大的.

Proof. 由 [命题3.60] 知存在素理想 $P_1,...,P_r$ 使得 $J\supseteq P_1\cdots P_r$ 且每个 P_i 是包含 J 的极小素理想, 因为每个 $P_i\supseteq\sqrt{J}$, 所以 $J\supseteq(\sqrt{J})^r$. 现在设理想 I 满足存在正整数 n 使得 $I^n\subseteq J$, 那么对每个包含 J 的素理想 P 有 $I\subseteq P$, 因此 $I\subseteq\sqrt{J}$. □

Corollary 3.62. 设 R 是左 Noether 环, 那么 R 的素根 $N(R)$ 的幂零理想.

Proof. 因为 $N(R)$ 是所有素理想的交, 即零理想的根理想, 所以应用上面的推论即得. □

Remark. 之后我们会说明左 Artin 环的素理想和本原理想等价 (见 [推论3.76]), 于是得到左 Artin 环的素根与 Jacobson 根一致, 所以该推论可视作 Artin 环具有幂零的 Jacobson 根这一事实的推广.

Application 3.63. 设 R 是左 Noether 环, 那么存在 R 的一些极小素理想 $P_1,...,P_r$(允许重复) 使得 $P_1P_2\cdots P_r=0$. 特别地, ${}_RR$ 有限滤 $0=P_1P_2\cdots P_r\subseteq P_1P_2\cdots P_{r-1}\subseteq\cdots\subseteq P_1P_2\subseteq P_1\subseteq R$ 使得该滤相邻两项作商可以视作某个 R/P 上的有限生成模, 这里 P 是 R 的某个极小素理想.

在交换代数中, 我们知道一个含幺交换环 R 是 Artin 的当且仅当 R 是 Noether 环且每个素理想是极大理想 (R 的每个素理想 P 是极大理想等价于说 R/P 是域, 也等价于说 R/P 是 Artin 环, 这是因为 Artin 整区是域). 下面是在非交换层面的类似结论.

Application 3.64. 设 R 是含幺环, 那么 R 是左 Artin 环的充要条件是 R 是左 Noether 环且对每个素理想 P 有 R/P 是左 Artin 环.

Proof. 必要性由 Hopkins 定理直接得到. 仅要验证充分性：[命题3.60] 表明存在有限个素理想 $P_1,...,P_r$ 使得 $P_1\cdots P_r=0$. 由于每个 $P_i\cdots P_r(1\le i\le r-1)$ 作为左 R-模是有限生成的, 所以 $P_{i+1}\cdots P_r/P_iP_{i+1}\cdots P_r$ 作为左 R/P_i-模也是有限生成的, 进而是 Artin 模, 从而 $P_{i+1}\cdots P_r/P_iP_{i+1}\cdots P_r$ 作为左 R-模也是 Artin 的. 于是 $P_1\cdots P_r=0$ 和 $P_2\cdots P_r/P_2\cdots P_r$ 是 Artin 模表明 $P_2\cdots P_r$ 是 Artin 左 R-模. 以此类推得到 P_r 是 Artin 模, 再结合 R/P_r 是 Artin 模可得 ${}_RR$ 是 Artin 模. □

Remark. 一般地, 非交换 Noether 环如果每个素理想是极大理想, 也无法得到它是 Artin 的 (例如考虑特征是零的域上的 n 次 Weyl 代数 $A_n(\Bbbk)$, 它是 Noether 单环, 但不 Artin). 即使在交换层面, 每个素理想都是极大理想的环都未必是 Artin 的. 例如考虑无限 Bool 环 (回忆一个含幺环 R 被称为 **Bool 环**, 如果 $x^2=x,\forall x\in R$). 容易验证 Bool 环总交换且 $2x=0,\forall x\in R$. 我们作出下述断言：

Claim. 设含幺环 R 是 Bool 环, 则有下面的基本事实成立.

(1)Bool 整环同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，故是域, 所以该环任何素理想是极大理想.
(2) 该环的幂零元只有零, 即诣零根 $N(R)=0$, 故 (1) 表明全体极大理想之交是零.
(3) 该环如果是局部环, 则同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 特别地, 局部 Bool 环有限.
(4) 该环有限等价于该环 Noether 等价于该环 Artin 等价于该环仅有有限多个极大理想.
(5) 该环是整环当且仅当该环是域当且仅当该环同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(6) 该环在任何乘闭子集 (不妨设该乘闭子集不含零元, 以排除局部化是零环) 处的局部化仍 Bool.
(7) 该环在任何素理想处的局部化是 Noether 环.

Proof. (1) 与 (2) 利用 Bool 环的定义即得. (3) 只需注意 R 唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$ 也是唯一的素理想, 所以 $N(R)=\mathfrak{m}=0$, 进而知 R 是域, 因此同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (4) 首先环的有限性明显蕴含 Noether 性, 因为满足“任何素理想极大”的交换 Noether 环一定 Artin, 故 Noether 的 Bool 环必定 Artin 且具有有限多个极大理想. 如果 Bool 环具有有限多个极大理想, 那么由 (2) 知这有限个极大理想之交是零, 应用中国剩余定理马上得到该环同构于有限个 Bool 域的直积, 即有限个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的直积, 这就得到了 (4). 现在 (5) 是明显的. (6) 是因为对任何乘闭子集 S, R_S 中任何元素明显幂等. (7) 由 (6) 和 (3) 马上得到. □

于是上述断言告诉我们无限 Bool 环不是 Noether 环, 但它每个素理想都是极大理想. 此外, 无限 Bool 环也告诉我们：一个交换环如果在每个素理想处局部化都是 Noether(Artin) 的, 该环未必是 Noether(Artin) 环.

3.11 Artin 半单环

本节记录非交换代数中关于 Artin 半单环的一些等价刻画, 并由此导出 Artin 环的一些基本事实. 这里的半单环定义为“一些单环的次直积”, 即若含幺环 R 满足存在一族单环 $\{R_i\}_{i\in I}$ 与单保幺环同态 $j:R\to\prod\limits_{i\in I}R_i$ 使得对每个 $i\in I$, j 与标准投射 $p_i:\prod\limits_{i\in I}R_i\to R_i$ 之合成满, 则称 R 是**半单环**.

1907 年, Wedderburn(英国, 1882-1948) 证明了一般域上有限维代数的结构定理. 1927 年, Emil Artin(德国, 1898-1962) 受 Noether 的工作启发, 针对一般环定义了 Artin 环的概念, 并推广了 Wedderburn 在有限维代数结构理论的工作, 给出了 Artin 半单代数的结构定理, 被称为 Wedderburn-Artin 定理.

Theorem 3.65 (Wedderburn-Artin)**.** 设 R 是含幺环, 则以下五条等价：

- R 是左 Artin 环且没有非零幂零理想.
- R 是左 Artin 半本原环.
- R 是左 Artin 半单环.
- R 作为左 R-模是完全可约模.
- 存在有限个含幺环 R_k 使得 $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_m$ 且每个 R_k 是某除环上非零有限维线性空间的线性变换环.
- R 同构于有限个左 Artin 单环 R_k 的积：$R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_m$.

类似地对右 Artin 半单环也有类似刻画, 它与左 Artin 半单环一样都同构于有限个单环的积, 所以 Artin 半单环不分左右, 我们直接简称为 **Artrin 半单环**. 在一些文献中, 把这里的 Artin 半单环称为**半单环**.

Proposition 3.66. 设 Artin 半单环 R 有分解 $R \cong \mathrm{M}_{n_1}(\Delta_1) \oplus \mathrm{M}_{n_2}(\Delta_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_s}(\Delta_s)$, 其中 $\Delta_1, ..., \Delta_s$ 是除环. 那么 s 是不可约左 R-模同构类总数, 设 $\{M_1, ..., M_s\}$ 是一个不可约左 R-模代表元集, 那么经适当重排后有 $\Delta_i^{op} \cong \mathrm{End}_R M_i$, n_i 是 R 的不可约模直和分解中同构于 M_i 的数目 (因为不可约模是强不可分模, 所以由 Krull-Schmidt 定理知 R 的不可约模直和分解在不计次序和同构意义下唯一).

Proof. 为叙述方便, 不妨设 $R = \mathrm{M}_{n_1}(\Delta_1) \oplus \mathrm{M}_{n_2}(\Delta_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_s}(\Delta_s)$. 对每个正整数 $1 \le i \le s$, 记 $A_{ij} (1 \le j \le n_i)$ 是矩阵环 $\mathrm{M}_{n_i}(\Delta_i)$ 中所有第 j 列任意变动, 其余列为零向量的矩阵构成的左理想. 进而 $R = A_{11} \oplus \cdots \oplus A_{1n_1} \oplus \cdots \oplus A_{s1} \oplus \cdots \oplus A_{sn_s}$ 给出 R 的极小左理想分解. 对固定的 $1 \le i \le s$, 易见 $A_{i1}, ..., A_{in_i}$ 两两同构. 对 $1 \le i \ne k \le s$, 易知 $A_{ip} \ncong A_{kq}, \forall 1 \le p \le n_i, 1 \le q \le n_k$. 因此 $\{A_{11}, A_{21}, ..., A_{s1}\}$ 是 R 的一个不可约模同构类代表元集. 下面说明对每个 $1 \le i \le s$ 有 $\mathrm{End}_R A_{i1} \cong \Delta_i^{op}$. 易见只需说明对任给除环 D 以及正整数 n 有环同构 $D^{op} \cong \mathrm{End}_{\mathrm{M}_n(D)}(D^n)$. 命 $\varphi : D^{op} \to \mathrm{End}_{\mathrm{M}_n(D)}(D^n), a \mapsto a_r$, 其中 a_r 表示 $a \in D$ 所决定的 D^n 上右乘变换, 易知 φ 是单环同态. 还需说明 φ 是满射. 任取 $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{M}_n(D)}(D^n)$, 对每个正整数 $1 \le j \le n$, 记 e_j 是第 j 个标准单位列向量, 那么取矩阵 $B = e_j e_j^T$, 利用 $f(Be_j) = Bf(e_j)$ 可知存在 $\lambda_j \in D$ 使得 $f(e_j) = e_j \lambda_j$. 对任给正整数 $1 \le j \ne l \le n$, 取 $C = I_n - e_j e_j^T - e_l e_l^T + e_j e_l^T + e_l e_j^T$. 那么利用 $e_l \lambda_l = f(Ce_j) = Cf(e_j) = Ce_j \lambda_j = e_l \lambda_j$ 可得 $\lambda_j = \lambda_l$, 故取 $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ 便知 $f(\alpha) = \alpha\lambda, \forall \alpha \in D^n$. 这说明 φ 是满射. □

Remark. 该命题表明对 Artin 半单环而言, 其不可约模同构类的数目、不可约模自同态环以及环自身极小左理想分解在同构意义下的重复数目的信息全部都包含在该 Artin 半单环除环上矩阵分解中.

在介绍 Artin 半单环其他刻画之前, 我们需要下面的引理.

Lemma 3.67. 设 R 是含幺环, 那么对任何左理想 I 都存在左理想 J 使得 $I \oplus J$ 是 R 的本质左理想.

Proof. 考察集合 $S=\{J|J\text{是}R\text{的左理想且}J\cap I=0\}$, 那么 S 关于集合包含关系构成非空偏序集且 $(S,\subseteq)$ 的任何全序子集明显有上界, 依 Zorn 引理得 S 有极大元 J, 根据 J 的极大性可知 $I\oplus J$ 是本质左理想. □

现在我们给出 Artin 半单环一些其他刻画的证明.

Proposition 3.68. 设 R 是含幺环, 则以下六条等价:
(1)R 是 Artin 半单环.
(2)R 上非零模都是完全可约模.
(3)R 上所有模是投射模.
(4)R 上所有模是内射模.
(5)R 的所有极大左理想是 R 的直和因子.
(6)R 上不可约模都是投射模.

Proof. 根据 Wedderburn-Artin 定理, 这里的 (1)⇔(2) 以及 (1)⇒(4) 是明显成立的. 其中 (3)⇔(4), (4)⇒(5), (3)⇒(6) 本身又是明显成立的. 所以下面通过证明 (4)⇒(1), (5)⇒(1) 和 (6)⇒(5) 来得到结论.

(4)⇒(1): 这时 R 的任何左理想 I 到 R 的标准嵌入 $i:I\to R$ 是可裂单同态, 所以 I 是 R 的直和因子, 那么 ${}_RR$ 是完全可约模, 由 Wedderburn-Artin 定理得到结论.

(5)⇒(1): 任取 R 的左理想 I, 根据 [引理3.67], 存在左理想 J 使得 $I\oplus J$ 是 R 的本质左理想, 我们断言 $I\oplus J=R$ 来得到 R 任何左理想是直和因子, 进而利用 Wedderburn-Artin 定理得到 R 是 Artin 半单环. 事实上, 假设 $I\oplus J\neq R$, 那么存在某个极大左理想 M 使得 $I\oplus J\subseteq M$, 那么 M 是 R 的直和因子且为本质左理想, 这迫使 $M=R$, 矛盾. 因此 $R=I\oplus J$, 得证.

(6)⇒(5): 任取 R 的极大左理想 I, 那么 R/I 是不可约模, 故投射, 考察短正合列

$$0\longrightarrow I\xrightarrow{i}R\xrightarrow{\pi}R/I\longrightarrow 0,$$

利用 R/I 是投射模知它可裂, 所以 I 是 R 的直和因子, 证毕. □

Corollary 3.69. 设 R 是含幺环, 那么 R 是 Artin 半单环的充要条件是任何 R 的左理想 I 是内射模.

Proof. 必要性由 [命题3.68(3)] 立即得到, 充分性由此时 ${}_RR$ 是完全可约模即得. □

该推论的对偶形式一般不成立. 若含幺环 R 满足任何左理想 I 都是投射模, 那么称该环是**左遗传环**.

Example 3.70. 任何 P.I.D. 是遗传环, 但 $\mathbb{Z}$ 不是 Artin 半单环.

Proof. 任何 P.I.D.R 的非零理想作为 R-模与 R 同构, 故投射. 而 $\mathbb{Z}$ 明显不是 Artin 环. □

Corollary 3.71. 任何 Artin 半单环都是遗传环.

Proof. 我们已经看到 Artin 半单环上的模总投射. □

Corollary 3.72 (整体维数刻画)**.** 回忆含幺环 R 的 (左) 整体维数是指 $\mathrm{l.gl.dim}R=\sup\{\mathrm{p.dim}_RM|M\in\mathrm{ob}R\text{-Mod}\}$. 那么含幺环 R 是 Artin 半单环的充要条件是 $\mathrm{l.gl.dim}R=0$.

Proof. 由 [命题3.68(3)] 立即得到. □

下面我们说明 Artin 半单环和 Artin 半素环等价、Artin 单环和 Artin 素环等价. 在介绍环的素性、半素性前先回忆一下单环的 Wedderburn-Artin 定理. 这里本原环默认左本原环.

Theorem 3.73. 设 R 是含幺环, 则以下三条等价：(1)R 是左 Artin 单环. (2)R 是左 Artin 本原环. (3)R 同构于某个除环上非零有限维线性空间的线性变换环. 对右情形有类似结论成立, 故 Artin 单环也不分左右.

Proof. (1)⇒(2) 是明显的, 因为本原环的一个内部刻画是含幺环 R 是本原环当且仅当 R 有一个极大左理想 I 不含非零的双边理想, 这蕴含单环是本原环. (3)⇒(1) 也是明显的, 因为对含幺环 S 而言, 矩阵环 $\mathrm{M}_n(S)$ 的左理想集与 S^n 的左子模集偏序同构, 进而 S 是左 Artin 环的充要条件是 $\mathrm{M}_n(S)$ 是左 Artin 环, 这说明除环上的矩阵环是左 Artin 环. 此外, 含幺环 S 的理想格和 $\mathrm{M}_n(S)$ 的理想格偏序同构说明 S 是单环当且仅当 $\mathrm{M}_n(S)$ 也是单环, 特别地, 除环上的矩阵环是单环. 最后我们说明 (2)⇒(3). 设 ${}_RM$ 是一个忠实的不可约左 R-模, 记 $\Delta = \mathrm{End}_R(M)$ 是除环, 下面用本原环的稠密性定理来说明 ${}_\Delta M$ 是有限维线性空间. 假设 ${}_\Delta M$ 不是有限维线性空间, 它有可数无限的线性无关子集 $\{x_i|i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \subseteq M$, 记 $I_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{ann}_R(x_i)$ 是 R 的左理想, 那么 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ 是 R 的左理想降链, 利用完全可约模的稠密性定理易知该做理想降链是严格的, 这与 R 的左 Artin 性矛盾. 于是 ${}_\Delta M$ 是有限维线性空间, 根据本原环稠密性定理我们知道 R 环同构于 $\mathrm{End}_\Delta(M)$ 的稠密子环, 而这时 M 是有限维的表明 $R \cong \mathrm{End}_\Delta(M)$, 得证. □

Corollary 3.74. Artin 单环 R 作为自身上的左模, 其本质子模只有自身.

Proof. 除环上的矩阵环作为自身上的左模时, 本质子模明显只有自身. □

回忆**素环**是指零理想是素理想的含幺环 (因此一个含幺环 R 的理想 P 是素理想当且仅当 R/P 是素环), **半素环**是指所有素理想之交是零理想的含幺环 (一般把 R 的全体素理想之交记作 $N(R)$, 称之为**素根**. 在交换层面就是诣零根). 对含幺交换环而言, 素环等价于整区, 即素环是整区的非交换推广. 一般地, 本原环一定是素环 (对本原环 R, 若理想 I,J 满足 $IJ=0$, 设 M 是忠实的不可约左 R-模, 则 $I(JM)=(IJ)M=0$. 假设 $J \neq 0$, 则 $JM=M$, 进而 $IM=0$ 迫使 $I=0$, 故零理想是 R 的素理想). 反之不然, 考虑域上的多项式环 $\Bbbk[x]$, 它是素环但不是本原环 (回忆含幺交换环是本原环等价于域, 而 $\Bbbk[x]$ 不是域). 所以本原理想一定是素理想, 进而由含幺环 R 的 Jacobson 根 $\mathrm{Jac}(R)$ 可表示为全体本原理想之交可得 $\mathrm{Jac}(R)$ 总包含素根.

Corollary 3.75. 设 R 是左 Artin 环, 那么 R 的本原理想都是极大理想. 而含幺环的极大理想总是本原理想, 故在 Artin 环中极大理想集和本原理想集一致.

Corollary 3.76. 设 R 是左 Artin 环, 那么 R 的素理想集和极大理想集相等. 于是我们得到 Artin 环中

$$\{R\text{的本原理想}\} = \{R\text{的极大理想}\} = \{R\text{的素理想}\}.$$

Proof. 只需证明素理想都是极大理想. 设 P 是素理想, 依 Hopkins 定理, R 仅有有限个极大理想, 设为 $\mathfrak{m}_1,...,\mathfrak{m}_n$, 那么 $\mathrm{Jac}(R) = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$. 而 Artin 环的 Jacobson 根幂零意味着存在正整数 k 使得 $(\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n)^k = 0 \subseteq P$, 因此 P 就是某个 $\mathfrak{m}_{i_0}$, 为极大理想. □

Remark. 在交换情形, 易知交换 Artin 环的素理想均为极大理想, 上述推论说这一结论在非交换层面也成立.

Proposition 3.77. 设 R 是含幺环, 则以下三条等价：(1)R 是左 Artin 单环. (2)R 是左 Artin 素环. (3)R 是左 Artin 本原环.

Proof. 在单环的 Wedderburn-Artin 定理中我们已看到 (1) 和 (3) 等价. 本原环一定是素环说明 (3) 蕴含 (2). 我们只需再说明 (2) 蕴含 (1). 这时左 Artin 环 R 的零理想是素理想, 故是极大理想, 从而 R 是单环. □

Proposition 3.78. 设 R 是含幺环, 以下三条等价：(1)R 是左 Artin 半单环. (2)R 是左 Artin 半素环. (3)R 是左 Artin 半本原环. 类似地有右 Artin 的情形, 故 Artin 半单环不分左右也表明 Artin 半素环不分左右.

Proof. 只要说明 (2) 和 (3) 等价. 因为 Artin 环的素理想集就是本原理想集, 所以全体素理想之交是零等价于全体本原理想之交是零等价于 $\mathrm{Jac}(R)=0$ 等价于 R 是半本原环, 这就是 (2) 和 (3) 的等价性. □

3.12 Artin 环上不可约模

本节介绍 Artin 环上不可约模的基本性质, 我们将看到 Artin 环上不可约模同构类有限.

Lemma 3.79. 设含幺环 R 上左模 M 不可约, 则 $\mathrm{Ann}_R M$ 是本原理想, 所以是素理想.

Proof. 这时 M 是 $R/\mathrm{Ann}_R M$ 上忠实的不可约模, 故 $\mathrm{Ann}_R M$ 是本原理想. □

Lemma 3.80. 设 R 是 Artin 单环, 那么 R 的不可约模同构类只有一个.

Proof. 设 I 是 R 的极小左理想, $M=Rx$ 是不可约模, 则 M 忠实, 故 $I\cong Ix=M$. □

Remark. 反之, 存在不是 Artin 单环的环也仅有一个不可约模同构类. 例如考虑局部环 R, 那么 $J(R)$ 就是 R 的不可逆元全体. 这时 $R/J(R)$ 是除环, 进而 $R/J(R)$ 上的不可约模同构类只有一个. 对任何不可约左 R-模 M, 总有 $J(R)M=0$, 所以 M 可天然成为不可约 $R/J(R)$-模. 由此知局部环 R 的不可约模同构类仅有一个.

Proposition 3.81. 设 R 是左 Artin 环, M_1,M_2 是不可约左 R-模, 那么 $M_1\cong M_2\Leftrightarrow \mathrm{Ann}_R M_1=\mathrm{Ann}_R M_2$.

Proof. 只需证充分性：记 $P=\mathrm{Ann}_R M_1$ 是 R 的素理想, 因 R 是左 Artin 环, 故 P 极大. 从而 M_1,M_2 均为 Artin 单环 R/P 上的不可约模, 而 Artin 单环上不可约模同构类只有一个, 所以作为 R/P-模有模同构 $M_1\cong M_2$, 这也给出 R-模同构. □

Corollary 3.82. 设 R 是左 Artin 环, 那么 R 的不可约模同构类全体和 $\mathrm{Spec}R$ 间有双射. 因为 R 的素理想集就是极大理想集, 而 R 的极大理想集有限, 所以 R 的不可约模同构类只有有限个.

Proof. 记 $\mathcal{I}(R)$ 是 R 上不可约模同构类全体. 置 $\varphi:\mathrm{Spec}R\to\mathcal{I}(R),P\mapsto[R/I]$, 这里 I 是 R 的极大左理想使得 $P=(I:R)=\mathrm{Ann}_R(R/I)$. 先说明该映射定义合理, I 的存在性由 P 是本原理想保证, 如果还有极大左理想 I' 使得 R/I' 零化子也是 P, 那么 [命题3.81] 表明 $R/I\cong R/I'$, 故 φ 作为映射定义合理. 根据 [命题3.81] 我们也看到 φ 是单射, 最后说明它是满射. 任取不可约左 R-模 M, 总有极大左理想 I 使得有 R-模同构 $M\cong R/I$, 取本原理想 $P=(I:R)$ 即可. 我们也指出这里构造的 φ 它的逆映射就是 $\psi:\mathcal{I}(R)\to\mathrm{Spec}R,[M]\mapsto\mathrm{Ann}_R M$. □

根据刚刚的推论我们看到左 Artin 环上不可约模同构类和环的极大理想集之间有双射, 该映射可由把每个模映至该模零化子给出. 一般地, 自然想分类 Artin 环上的不可分模, 而这不像不可约模一样容易.

代数表示论的基本内容便是研究 Artin 代数上的模范畴, 根据 Krull-Schmidt 定理立即得到该 Artin 代数作为自身上模可分解为有限多个不可分模的直和. 于是对该 Artin 代数结构的探索可化归为研究该 Artin 代

数上不可分模的分类. 如果域上代数上所有不可分模同构类是有限的, 称该代数是**有限表示型的**. 反之, 则称该代数是**无限表示型的**. 代数表示论就是研究一个给定的 Artin 代数是有限表示型还是无限表示型. 在 1945 年, 美国数学家 Richard Brauer 和 Robert M. Thrall 提出了下面两个猜想.

Conjecture (Brauer-Thrall 第一猜想)**.** 域上有限维代数如果是无限表示型, 则有无限个正整数 k 使得维数为 k 的不可分模存在. 或等价地, 如果域上有限维代数的所有不可分模维数有公共上界, 则该代数必定有限型.

Conjecture (Brauer-Thrall 第二猜想)**.** 域上有限维代数如果是无限表示型, 则有无限个自然数 d 使得维数为 d 的模有无穷多个.

第一猜想由 A. V. Roıter 于 1968 年完全解决, 给出了肯定的解答 [Roı68]. 第二猜想在域是代数闭域层面由 Roıter 与他爱人于 1973 年证明 [NR73]. 随后 Auslander 与 Reiten 引入了几乎可裂序列与不可约态射的概念, 发展了 Auslander-Reiten 理论, 该理论可被用于给出 Brauer-Thrall 第一猜想的一个范畴证明 [ASS06].

代数表示论的兴起可以归功于人们对 Brauer–Thrall 的两个猜想的试图解决, 这两个猜想也被认为是代数表示论的起源.

3.13 中心无限除环构造

本节主要用于记录中心无限除环具体例子的构造, 主要参考文献是 [Lam01]. 除环是抽象代数中的基本研究对象, 它是特殊的单环, 而我们熟知的域是特殊的除环. 根据模论中的 Schur 引理, 任何不可约模的自同态环是除环, 这是产生除环的一种手段 (反之不然, 例如有理加群 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模有非平凡子模, 但 $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$). 除环有非常丰富的理论, 一个里程碑式的结果便是 Wedderburn 小定理：有限除环必是域 [MW05]. 因为单环的中心是域, 所以除环的中心自然也是域. 在经典域论中, 对一个域扩张 $F \subseteq E$, 我们感兴趣域扩张的次数 $[E:F] = \dim_F E$. 在除环理论中, 因为除环 Δ 可视作域 $Z(\Delta)$ 上的线性空间 (自然也是 $Z(\Delta)$-代数), 故除环分类的研究便化归为两种基本情形：

(1)$\dim_{Z(\Delta)}\Delta$ 有限, 此时称 Δ 是**中心有限除环**. (2)$\dim_{Z(\Delta)}\Delta$ 无限, 此时称 Δ 是**中心无限除环**.

对于前者, 每个域明显是中心有限除环、四元数代数 $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ 是 $\mathbb{R}$ 上 4 维非交换代数. 而对于后者, 我们很难直接给出具体例子, 因此一下子无法断言是否存在中心无限的除环.

含幺交换环 K 上的**多项式恒等式代数** (或简称 **PI 代数**) 的指满足某个 K 上首一非交换多项式 $f \in K\langle x_1, ..., x_n\rangle$ 的结合代数. $\mathbb{Z}$ 上的 PI 代数被称为 **PI 环**. 容易证明作为中心上的模有限生成的环都是 PI 的, 所以中心有限除环都是 PI 环. 对于中心无限情形, PI 代数中的 Kaplansky 定理说一个 (左) 本原 PI 环必定是其中心上的有限维中心单代数, 因而如果存在中心无限的除环, 那么这样的除环一定不是 PI 的. 特别地, 我们也可以看到 Artin 环未必是 PI 环. 由此可见, 确定中心无限除环的存在性显得十分必要.

下面的例子来自 D. Hilbert(1899). 固定域 $\Bbbk$ 以及域 $\Bbbk$ 上的自同构 $\sigma : \Bbbk \to \Bbbk$, 考虑域 $\Bbbk$ 上所有 Laurent 级数作成的加法群 (易见其上有天然的 $\Bbbk$-线性结构)

$$\left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i \middle| a_i \in \Bbbk \text{且仅有有限多个} i < 0 \text{使} a_i \neq 0 \right\},$$

下面通过域自同构 σ 在此加群上赋予乘法结构：

$$\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i \sigma^i(b_j) \right) x^k.$$

因为对充分小的 i,j, $a_i=b_j=0$, 所以对固定的 $k\in\mathbb{Z}$, $\sum\limits_{i+j=k}a_i\sigma^i(b_j)$ 是有限和. 并且当 k 充分小时, x^k 的系数为零. 因此上述乘法结构是定义合理的二元运算, 记赋予该乘法运算的 Laurent 级数加群为 $\Bbbk((x;\sigma))$. 根据上述乘法运算的定义, 很容易看到该运算满足左右分配律, 为了说明 $\Bbbk((x;\sigma))$ 构成环, 还需验证:

Lemma 3.83. 设 $\sigma\in\mathrm{Aut}\Bbbk$, 则 $\Bbbk((x;\sigma))$ 上定义的乘法具备结合律.

Proof. 任取 $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i, \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j, \sum\limits_{t=-\infty}^{\infty}c_tx^t\in\Bbbk((x;\sigma))$, 则

$$\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j\right)\sum_{t=-\infty}^{\infty}c_tx^t=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i+j+t}a_i\sigma^i(b_j)\sigma^{i+j}(c_t)\right)x^k,$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j\cdot\sum_{t=-\infty}^{\infty}c_tx^t\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i+j+t}a_i\sigma^i(b_j\sigma^j(c_t))\right)x^k.$$

对固定的 $k\in\mathbb{Z}$, 这里 $\sum\limits_{i+j+t}a_i\sigma^i(b_j)\sigma^{i+j}(c_t)$ 与 $\sum\limits_{i+j+t}a_i\sigma^i(b_j\sigma^j(c_t))$ 均为有限和, 故由 σ 保持乘法即得结论. $\square$

由此我们看到 $\Bbbk((x;\sigma))$ 是 $\Bbbk$-代数, 有乘法幺元 1, 称 $\Bbbk((x;\sigma))$ 为**斜 Laurent 级数环** (skew Laurent series ring), 将 $\Bbbk((x;\sigma))$ 中元素称为**斜 Laurent 级数**. 在复分析中我们熟知复数域上 Laurent 级数环 $\mathbb{C}((x))$ 是域.

Example 3.84. 若取域自同构 $\sigma=\mathrm{id}\in\mathrm{Aut}\Bbbk$, 则 $\Bbbk((x;\sigma))$ 上乘法为

$$\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^k.$$

这时斜 Laurent 级数环退化为经典 Laurent 级数环.

一般地, 斜 Laurent 级数环是非交换的. 若 $\sigma\neq\mathrm{id}\in\mathrm{Aut}\Bbbk$, 取 $b\in\Bbbk$ 使得 $\sigma(b)\neq b$, 则 $bx\neq\sigma(b)x=xb$. 不过因为这里 $\Bbbk$ 是域, 所以它享有良好的性质——$\Bbbk((x;\sigma))$ 是除环.

Proposition 3.85. 斜 Laurent 多项式环 $\Bbbk((x;\sigma))$ 是除环.

Proof. 易见 $\Bbbk((x;\sigma))$ 中非零元之积仍非零, 故只要证任何 $\Bbbk((x;\sigma))$ 中非零元在 $\Bbbk((x;\sigma))$ 中有左逆即可. 任取

$$\alpha=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i\neq 0\in\Bbbk((x;\sigma)),$$

并设 $t=\min\{i\in\mathbb{Z}|a_i\neq 0\}$, 希望构造 $\alpha=a_tx^t+a_{t+1}x^{t+1}+\cdots$ 的逆元. 如果 α 的左逆存在, 设为 $\beta=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j$, 则由 $\beta\alpha=1$ 迫使 $\min\{j\in\mathbb{Z}|b_j\neq 0\}=-t$ 且 $b_{-t}=\sigma^t(a_t)$, 对于 $j\geq -t+1$, 均满足

$$\sum_{j+i=k}b_j\sigma^j(a_i)=b_{-t}\sigma^{-t}(a_{k+t})+b_{-t+1}\sigma^{-t+1}(a_{k+t-1})+\cdots+b_{k-t}\sigma^{k-t}(a_t)=0,\forall k\geq 1.$$

因此, 我们如下递归地定义序列 $\{b_j\}_{j=-t}^{\infty}$: 置 $b_{-t}=\sigma^t(a_t)$. 如果对 $t\leq j-1$ 已经定义好 $b_{-t},b_{-t+1},...,b_{j-1}$ 的取值, 定义 $b_j=-[b_{-t}\sigma^{-t}(a_{j+2t})+b_{-t+1}\sigma^{-t+1}((a_{j+2t-1})+\cdots+b_{j-1}\sigma^{j-1}(a_{t+1})]\sigma^{-j}(a_t)$. 由此得到 $\beta=b_{-t}x^{-t}+b_{-t+1}x^{-t+1}+\cdots$. 根据 β 的定义, 直接验证便知 β 是 α 的左逆. 故 $\Bbbk((x;\sigma))$ 是除环. $\square$

现在我们可以给出主要结论, 它表明中心无限除环的存在性.

Proposition 3.86. 设 $\Bbbk$ 是域, $\sigma \in \mathrm{Aut}\Bbbk$ 满足阶是无穷. 那么除环 $\Delta = \Bbbk((x;\sigma))$ 的中心

$$Z(\Delta) = \Bbbk_0 = \{a \in \Bbbk | \sigma(a) = a\}.$$

特别地, Δ 作为 $Z(\Delta)$ 上的线性空间维数无限.

Proof. 任取 $f = \sum_{i=n}^{\infty} a_i x^i \in Z(\Delta)$, 对每个 $a \in \Bbbk$, 利用 $af = fa$ 可知对任何 $a_j \neq 0$ 有 $\sigma^j(a) = a$. 即一旦 f 存在使得 $a_j x^j \neq 0$ 的项, 便有 $\sigma^j = \mathrm{id}$. 由于 σ 的阶是无穷, 故满足 $a_j \neq 0$ 的指标 j 只可能是零. 这一观察表明 $f = a_0 \in \Bbbk$. 于是由 $fx = xf$ 立即得到 $f = a_0 \in \Bbbk_0$. 反之, 每个 $c \in \Bbbk$ 满足 $xc = cx$, 所以 $cg = gc, \forall g \in \Delta$. 所以 $Z(\Delta) = \Bbbk_0$. Δ 作为 $\Bbbk_0$ 上线性空间维数明显无限, 故结论成立. □

Corollary 3.87. 存在除环 Δ 使得 Δ 是中心无限除环.

Corollary 3.88. 存在左 Artin 单环 R 使得 R 作为 $Z(R)$-模不是有限生成的.

Corollary 3.89. 存在左 Artin 环 R 使得 R 不是 PI 环.

3.14 Kähler 微分模与 de Rham 上链复形

本节固定 A 是含幺交换环 K 上的交换代数, $\mathrm{Der}_K A$ 表示 A 上 K-导子全体构成的 A-模, 用 $\mathrm{Der}_K(A, M)$ 表示 A 到任何 A-模 M 的 K-导子全体构成的 A-模. 现在我们可以给出 A 的 Kähler 微分模的概念.

Definition 3.90. 若 A-模 $\Omega(A)$ 与 K-导子 $d : A \to \Omega(A)$ 满足对任何 K-导子 $D : A \to M$, 存在唯一的 A-模同态 $f : \Omega(A) \to M$ 使得 $fd = D$, 即下图交换, 则称 $(\Omega(A), d)$ 是 A 的 **Kähler 微分模** (Kähler differentials).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "D"'] & & \Omega(A) \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

定义中的导子 $d : A \to \Omega(A)$ 常被称为**泛导子** (universal derivation). 有时也将 Kähler 微分模记作 $\Omega_K(A)$.

根据定义不难看到 Kähler 微分模若存在则在同构意义下唯一, 下面用两种方式构造 Kähler 微分模.

Theorem 3.91 (Kähler 微分模的存在性)**.** 设 $\Omega(A)$ 是由生成元集 $\{d(a)|a \in A\}$ 与下述关系定义出的 A-模:

$$d(aa') = ad(a') + d(a)a', d(ka + k'a') = kd(a) + k'd(a'), \forall a, a' \in A, k, k' \in K.$$

并记 $d : A \to \Omega(A), a \mapsto d(a)$. 那么 $(\Omega(A), d)$ 是 A 的 Kähler 微分模.

Proof. 该定理直接计算验证即得, 这里仅强调以后会常用此构造来定义从 Kähler 微分模出发的模同态. □

Theorem 3.92 (Kähler 微分模的第二种构造)**.** 设 $\mu : A \otimes_K A \to A$ 是 A 上乘法运算, 记 $I = \mathrm{Ker}\mu$, 记 $\Omega(A) = I/I^2$ 并设 $d : A \to I/I^2, a \mapsto (1 \otimes a - a \otimes 1) + I$. 那么 $(\Omega(A), d)$ 是 A 的 Kähler 微分模.

Proof. 可直接计算验证 d 是 K-导子, 下面验证 $(\Omega(A), d)$ 是 A 的 Kähler 微分模. 对任何 A-模 M 与 K-导子 $D: A \to M$, 要说明存在唯一的 A-模同态 $f: \Omega(A) \to M$ 使得 $fd = D$. 首先, 由恒等式

$$a \otimes b = ab \otimes 1 + a(1 \otimes b - b \otimes 1), \forall a, b \in A$$

表明 $\sum a_i \otimes b_i = \sum a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1), \forall \sum a_i \otimes b_i \in I$, 这意味着 $\Omega(A)$ 作为 A-模可由 $\{da | a \in A\}$ 生成, 进而知满足 $fd = D$ 的 A-模同态 f 只要存在必定唯一. 考虑 A 关于 A-模 M 的平凡扩张 $A * M$, 那么可直接验证

$$\Phi: A \otimes_K A \to A * M, a \otimes b \mapsto (ab, aD(b))$$

是 A-代数同态, 因为 $\Phi(I) \subseteq 0 * M$, 故由 $(0 * M)^2 = 0$ 立即得到 $\Phi(I^2) = 0$, 由此知 Φ 可自然地诱导 A-代数同态 $\overline{\Phi}: (A \otimes_K A)/I^2 \to A * M$ 满足 $\overline{\Phi}(a \otimes b + I^2) = (ab, aD(b)), \forall a, b \in A$. 现记 $j: I/I^2 \to (A \otimes_K A)/I^2$ 是标准嵌入, $p: A * M \to M$ 是标准投射, 定义 $f: \Omega(A) \to M$ 是下述映射序列的合成:

$$I/I^2 \xrightarrow{\quad j \quad} (A \otimes_K A)/I^2 \xrightarrow{\quad \overline{\Phi} \quad} A * M \xrightarrow{\quad \pi \quad} M$$

即 $f = \pi\overline{\Phi}j: \Omega_{A/K} \to M$, 易知 f 是 A-模同态且 $f(1 \otimes a - a \otimes 1 + I^2) = D(a), \forall a \in A$. 故 $fd = D$. $\square$

通过 Kähler 微分模的定义不难看到当 A 是 K-仿射代数时, $\Omega(A)$ 是有限生成模. 此外, 由定义知

Proposition 3.93. 设 $(\Omega(A), d)$ 是 A 的 Kähler 微分模, 那么有自然同构 $\mathrm{Der}_K(A, -) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega(A), -)$.

上述命题表明取导子函子 $\mathrm{Der}_K(A, -)$ 是可表函子, 并且引入 Kähler 微分模使得我们可以用线性对象 (模同态) 来描述非线性对象 (导子). 下面来看多项式代数的导子性质以及 Kähler 微分模的特性.

Example 3.94. 设 $A = K[x_1, ..., x_n]$ 是多项式代数, 容易验证 $\mathrm{Der}_K A$ 是自由 A-模, 并有

$$\mathrm{Der}_K A = A\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus A\frac{\partial}{\partial x_2} \oplus \cdots \oplus A\frac{\partial}{\partial x_n}, df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \forall f \in A.$$

而 $\mathrm{Der}_K A \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega(A), A)$ 启发我们猜测 $\Omega(A)$ 是由 $\{dx_1, ..., dx_n\}$ 自由生成的自由模. 下面验证这一猜测: 首先 Kähler 微分模的构造可知 $\Omega(A)$ 作为 A-模可由 $\{da | a \in A\}$ 生成, 故只需说明 $\{dx_1, ..., dx_n\}$ 是 A-线性无关的. 假设存在多项式 $f_1, ..., f_n \in A$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i dx_i = 0$, 那么对每个偏导子 $\partial/\partial x_j: A \to A$, 存在唯一的 A-模同态 $\varphi_j: \Omega_{A/K} \to A$ 使 $\varphi_j d = \partial/\partial x_j$. 那么对等式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i dx_i = 0$ 两边作用模同态 φ_j 立即得到 $f_j = 0$.

下面我们说明域上交换代数的 Kähler 微分模事实上就是该代数的 1 次 Hochschild 同调.

Proposition 3.95. 设 A 是含幺交换环 K 上的交换代数, 满足 A 是平坦 K-模. 设 $\Omega(A)$ 是 A 的 Kähler 微分模, M 是 A-模, 将其天然视作 A-A 双模. 那么 A 系数在 M 中的 Hochschild1 次同调 $H_1(A, M) \cong \Omega(A) \otimes_K M$. 特别地, 若取 $M = A$, 则 A 的 Kähler 微分模和 A 的 1 次 Hochschild 同调作为 K-模同构.

Proof. 考虑 A 系数在 M 中的 Hochschild 复形, 那么 1 次微分是零, 2 次微分为

$$\delta^2: A \otimes_K A \otimes_K M \to A \otimes_K M, a \otimes b \otimes m \mapsto a \otimes bm - ab \otimes m + b \otimes ma,$$

所以作为 K-模, 有

$$H_1(A,M) \cong A \otimes_K M/(\{a \otimes bm - ab \otimes m + b \otimes ma | a, b \in R, m \in M\}),$$

易知存在唯一的 K-模同态 $\varphi : H_1(A,M) \to \Omega(A) \otimes_K M$ 使得 $\varphi(a \otimes m + B_1(A,M)) = da \otimes m$. 通过 Kähler 微分模的泛导子定义可天然构造 K-模同态 $\psi : \Omega(A) \otimes_K M \to H_1(A,M)$ 使得 $\psi(bda \otimes m) = a \otimes bm + B_1(A,M)$. 可直接验证 ψ 与 φ 是互逆的映射, 所以 $H_1(A,M) \cong \Omega(A) \otimes_K M$. □

Remark. 通过交换代数的 Kähler 微分模与该代数的 1 次 Hochschild 同调间的关系, 我们可以直接导出 Kähler 微分模的第二种构造方式. 同样记 I 是乘法映射 $\mu : A \otimes_K A \to A$ 的核, 那么有 K-可裂的 A^e-模短正合列 $0 \longrightarrow I \xrightarrow{j} A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$, 这里 M 是左右模结构一致的 A-A 双模. 作用张量函子 $- \otimes_{A^e} M$ 并考察该短正合列所诱导的同调长正合列后易知 K-模同构 $\mathrm{Tor}_1^{A^e}(A,M) \cong \mathrm{Ker}(I \otimes_{A^e} M \to IM)$. 注意 $IM = 0$, 所以 $H_1(A,M) \cong I \otimes_{A^e} M$. 下面验证 $I \otimes_{A^e} M \cong I/I^2 \otimes_A M$. 对每个 $a \otimes b \in A^e$, 如果 $ab = 0$, 那么对任何 $c \otimes b \in A^e$ 有

$$[(ac \otimes bd) + I^2] \otimes x - [(a \otimes b) + I^2] \otimes cxd = [(a \otimes b)(c \otimes b - 1 \otimes cd) + I^2] \otimes x = 0, \forall x \in M,$$

这一观察说明存在唯一的 K-模同态 $\varphi : I \otimes_{A^e} M \to I/I^2 \otimes_A M$ 使得 $\varphi(a \otimes x) = (s + I^2) \otimes x, \forall s \in I, x \in M$. 同样地, 可直接计算验证存在唯一的 K-模同态 $\psi : I/I^2 \otimes_A M \to I \otimes_{A^e} M$ 使得 $\psi((s + I^2) \otimes x) = s \otimes x, \forall s \in I, x \in M$. 直接的计算表明 φ 与 ψ 互为逆映射, 所以有 K-模同构 $I \otimes_{A^e} M \cong I/I^2 \otimes_A M$. 进而得到交换代数 A 系数在对称双模 M 中的 1 次 Hochschild 同调是 $H_1(A,M) \cong I/I^2 \otimes_A M$. 若取 $M = A$, 那么 A 的 Kähler 微分模 $\Omega(A) \cong I/I^2$. 总结一下, 对含幺交换环 K 上的交换代数 A, 若记 I 是乘法映射 $\mu : A \otimes_K A \to A$ 的核, 那么对任何对称双模 M, 总有 $H_1(A,M) \cong I/I^2 \otimes_A M$. 特别地, 当 $M = A$ 时, $H^1(A,A) \cong I/I^2$. 若假设 A 是 K-平坦的, 那么 $H_1(A,A) \cong \Omega(A)$, 所以前面的讨论表明当 A 是在基环上平坦的交换代数时, $H_1(A,A) \cong \Omega(A) \cong I/I^2$. 因此从这个角度看, Kähler 微分模的第二种构造是自然可以想到的. 并且根据之前第二种构造的等价性, 在这里的注记中, 我们看到, 事实上不需要对 A 要求 K-平坦性, 对任何 K-交换代数 A 和对称双模 M, 总有 K-模同构

$$H_1(A,M) \cong \Omega(A) \otimes_A M.$$

我们把 A 的 Kähler 微分模在 A 上的 r 次外幂 $\wedge^r \Omega(A)$ 记作 $\Omega^r(A)$, 称之为 r **阶 Kähler 微分形式** (若 $r = 0$, $\Omega^0(A) = A$), 称 $\Omega^r(A)$ 中元素为 A 的 **Kähler r-形式**. 类似地我们也考虑高阶导子, 对每个自然数 r 和 A-模 M, 记 $\mathfrak{X}^r(M) = \{F \in \mathrm{Hom}_K(\wedge_K^r A, M) | F\text{在每个分量上是}K\text{-导子}\}$ 为 A 到 M 的交错 r-线性导子全体. 其中 $\mathfrak{X}^0(M) = M, \mathfrak{X}^1(M) = \mathrm{Der}_K(A,M)$. 高阶导子与高阶 Kähler 微分形式间也有密切联系.

Theorem 3.96. 设 M 是 A-模, r 是自然数. 那么有典范 A-模同构 $\varphi : \mathfrak{X}^r(M) \to \mathrm{Hom}_A(\Omega^r(A), M)$ 使得

$$\varphi(F)(a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_r) = a_0 F(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n), \forall a_i \in A.$$

因此, 对任何交错 r-线性导子 $F : \wedge_K^r A \to M$, 存在唯一的 A-模同态 $\tilde{F} : \Omega^r(A) \to M$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\wedge_K^r A \arrow[rr, "\wedge^r d"] \arrow[dr, "F"'] & & \Omega^r(A) \arrow[dl, dashed, "\tilde{F}"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Proof. 首先对每个 $F \in \mathfrak{X}^r(M)$, 有 A-模同态

$$\theta : \left(\bigoplus_{a\in A} Ada\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{a\in A} Ada\right) \otimes_A \cdots \otimes_A \left(\bigoplus_{a\in A} Ada\right) \to M$$

$$b_1da_1 \otimes b_2da_2 \otimes \cdots \otimes b_rda_r \mapsto b_1b_2\cdots b_rF(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r)$$

因为 F 在每个分量上是 K-导子, 故 $\theta(\oplus_{a\in A}Ada \otimes \cdots \otimes C \otimes \cdots \oplus_{a\in A} Ada) = 0$, 其中

$$C = (\{d(aa') - ad(a') - d(a)a' - d(ka + k'a') - kd(a) - k'd(a')|a, a' \in A, k, k' \in K\})$$

在 i 次位置, $i = 1, 2, ..., r$. 因此 θ 诱导 A-模同态

$$\Theta : \left(\bigoplus_{a\in A} Ada/C\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{a\in A} Ada/C\right) \otimes_A \cdots \otimes_A \left(\bigoplus_{a\in A} Ada/C\right) \to M$$

利用 $\Omega(A) = \bigoplus\limits_{a\in A} Ada/C$, 可改写 Θ 为 $\Theta : \Omega(A) \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega(A) \to M$. 易见 $\Theta(a_0da_1 \otimes \cdots da_r) = a_0F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r), \forall a_i \in A$. 注意到 $\Theta(da_1 \otimes \cdots \otimes da_{i-1} \otimes x \otimes x \otimes da_{i+1} \otimes \cdots \otimes da_r) = 0, \forall x \in \Omega_{A/K}$, 所以对 $x = \sum\limits_{k=1}^{n} c_kdb_k$, 有 $\Theta(da_1 \otimes \cdots \otimes da_{i-1} \otimes x \otimes x \otimes da_{i+1} \otimes \cdots \otimes da_r)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_kc_lF(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r)\\
&= \sum_{k<l} c_kc_lF(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r) + \sum_{l<k} c_kc_lF(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r)\\
&= \sum_{k<l} c_kc_lF(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r) - \sum_{l<k} c_kc_lF(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_l \wedge b_k \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r)\\
&= \sum_{k<l} c_kc_lF(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r) - \sum_{k<l} c_kc_lF(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge b_k \wedge b_l \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge da_r)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

所以 Θ 可唯一地沿着 $\Omega^r(A)$ 分解, 即存在唯一的 A-模同态 $\varphi : \mathfrak{X}^r(M) \to \mathrm{Hom}_A(\Omega^r(A), M)$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{\otimes^r}(A) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\Theta"'] & & \Omega^r(A) \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
& M &
\end{tikzcd},$$

这里 π 是标准投射. 易见 $\varphi(F)(a_0da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_r) = a_0F(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)$, 所以 φ 定义合理. 下面验证 φ 可逆. 作 $\psi : \mathrm{Hom}_A(\Omega^r(A), M) \to \mathfrak{X}^r(M), g \mapsto \psi(g)$, 其中

$$\psi(g) : \wedge_K^r A \to M, a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r \mapsto g(da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_r).$$

可直接计算验证 φ 与 ψ 互为逆映射. □

Remark. 现设 A 是 K-交换代数, 那么对每个交错 p-线性导子 $F \in \mathfrak{X}^p(A)$, 可通过上述泛性质诱导出唯一的 A-模同态 $\iota_F : \Omega^*(A) \to \Omega^*(A)$ 满足当 $q \geq p$ 时 $\iota_F : \Omega^q(A) \to \Omega^{q-p}(A)$ 将 $da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_q$ 映至

$$\sum_{\sigma\in S_{p,q-p}} \mathrm{sgn}(\sigma)F(a_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(p)})da_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(q)},$$

其中 $S_{p,q-p}=\{\sigma\in S_q|\sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(p),\sigma(p+1)<\cdots<\sigma(q)\}$ 是所有 $(p,q-p)$-shuffles 构成的集合. 当 $q<p$ 时, $\iota_F:\Omega^q(A)\to\Omega^{q-p}(A)$ 定义为零同态. 这里

$$\Omega^*(A)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\Omega^i(A).$$

将上述次数为 $-p$ 的 A-模同态 $\iota_F:\Omega^*(A)\to\Omega^*(A)$ 称为由线性导子 F 所诱导的**截断映射**. 如果 $F=a\in A$(即此时 $p=0$), 那么截断映射 $\iota_F:\Omega^*(A)\to\Omega^*(A)$ 就是由 a 诱导的左乘变换. 例如若 $(A,\{-,-\})$ 是 Poisson 代数, 那么 Poisson 括号 $\pi=\{-,-\}\in\mathfrak{X}^2(A)$, 进而对 $q\geq 2$ 可诱导截断映射 $\iota_\pi:\Omega^q(A)\to\Omega^{q-2}(A)$ 满足

$$\begin{aligned}\iota_\pi(da_1\wedge\cdots\wedge da_q)&=\sum_{\sigma\in S_{2,q-2}}\{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)}\}da_{\sigma(3)}\wedge\cdots\wedge da_{\sigma(q)}\\&=\sum_{1\leq i<j\leq q}(-1)^{i+j+1}\{a_i,a_j\}da_1\wedge\cdots\widehat{da_i}\cdots\widehat{da_j}\wedge\cdots\wedge da_q.\end{aligned}$$

此外, A-模同构 $\mathfrak{X}^r(M)\to\mathrm{Hom}_A(\Omega^r(A),M)$ 使得我们也能够考虑由高阶 Kähler 微分形式所诱导的截断映射. 具体地, 设 $Q\in\Omega^p(A)$ 是一个 Kähler p-形式, 类似地记

$$\mathfrak{X}^*(A)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathfrak{X}^i(A),$$

那么由 Q 诱导的**截断映射** $\iota_Q:\mathfrak{X}^*(A)\to\mathfrak{X}^*(A)$ 定义为：当 $q\geq p$ 时, 对每个 $F\in\mathfrak{X}^q(A)$, 记 $\overline{F}:\Omega^q(A)\to A$ 是满足 $\overline{F}(\wedge^q d)=F$ 的唯一的 A-模同态, 那么定义 $\iota_Q:\mathfrak{X}^q(A)\to\mathfrak{X}^{q-p}(A)$ 为

$$(\iota_QF)(a_1\wedge\cdots\wedge a_{q-p})=\overline{F}(da_1\wedge da_2\wedge\cdots\wedge da_{q-p}\wedge Q),\forall a_1,...,a_{p-q}\in A.$$

当 $q<p$ 时, 定义 $\iota_Q:\mathfrak{X}^q(A)\to\mathfrak{X}^{q-p}(A)$ 为零同态. 具体地, 当 $q\geq p$ 时, 若设

$$Q=\sum_{j=1}^{t}b_{0j}db_{1j}\wedge db_{2j}\wedge\cdots\wedge db_{qj}\in\Omega^p(A),$$

那么对任何 $F\in\mathfrak{X}^q(A)$, 有

$$(\iota_QF)(a_1\wedge\cdots\wedge a_{q-p})=\sum_{j=1}^{t}b_0F(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{q-p}\wedge b_{1j}\wedge b_{2j}\wedge\cdots\wedge b_{qj}).$$

例如当 $Q=da\in\Omega(A)$ 时, 对任何交错多重线性导子 $F\in\mathfrak{X}^q(A)$ 有

$$(\iota_QF)(a_1\wedge\cdots\wedge a_{q-1})=F(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{q-1}\wedge a).$$

特别地, 当 A 上有 Poisson 结构 $\pi=\{-,-\}\in\mathfrak{X}^2(A)$ 时 ((即 $\{-,-\}$ 作为 $A\times A\to A$ 的 K-双线性映射不仅是 Lie 括号且每个分量上有导子性质), $\iota_{da}(\pi)=\{-,a\}=\{-a,-\}$, 即由 da 决定的截断映射在 Poisson 结构 (双线性导子) 上的作用为由元素 $-a$ 决定的 Hamilton 导子. 对光滑流形 M, 如果其光滑函数环 $C^\infty(M)$ 上有 Poisson 结构, 则称该流形是 **Poisson 流形**. 任何辛流形 M 上光滑函数 f 所诱导的 Hamilton 向量场 $X_f:M\to TM$ 可通过定义 $\{f,g\}=X_f(g)$ 来赋予光滑函数环 $C^\infty(M)$ 上的 Poisson 结构.

Lemma 3.97. 设 A 是 K-交换代数, $F \in \mathfrak{X}^p(A)$ 是交错 p-线性导子, $a \in R$ 且 $\omega \in \Omega^q(A)$. 那么

$$\iota_F(\omega \wedge da) = \iota_F(\omega) \wedge da + (-1)^{q-p+1}\iota_{\iota_{da}(F)}(\omega).$$

其中 $\iota_{da}(F) \in \mathfrak{X}^{p-1}(A)$, 上式两端元素均在 $\Omega^{q-p+1}(A)$ 内.

Proof. 因为截断映射是 A-线性的, 所以只需验证 $\omega = da_1 \wedge \cdots \wedge da_q$ 的情形即可. 记 $a_{q+1} = a$, 那么

$$\begin{aligned}\iota_F(\omega \wedge da_{q+1}) &= \sum_{\sigma \in S_{p,q-p+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) F(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(p)}) da_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(q+1)} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{p,q-p+1} \\ \sigma(p)=q+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) F(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(p)}) da_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(q+1)} \\ &+ \sum_{\substack{\sigma \in S_{p,q-p+1} \\ \sigma(q+1)=q+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) F(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(p)}) da_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(q+1)}\end{aligned}$$

不难看出 $\sum\limits_{\substack{\sigma \in S_{p,q-p+1} \\ \sigma(q+1)=q+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) F(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(p)}) da_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(q+1)} = \iota_F(\omega) \wedge da$, 所以只要再验证

$$\sum_{\substack{\sigma \in S_{p,q-p+1} \\ \sigma(p)=q+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) F(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(p)}) da_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(q+1)} = (-1)^{q-p+1}\iota_{\iota_{da}(F)}(\omega).$$

其中多重线性导子 $\iota_{da}(F) \in \mathfrak{X}^{p-1}(A)$ 满足 $(\iota_{da}F)(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{p-1}) = F(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{p-1} \wedge a)$. 所以

$$\iota_{\iota_{da}(F)}(\omega) = \sum_{\tau \in S_{p-1,q-p+1}} \operatorname{sgn}(\tau) F(a_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge a_{\tau(p-1)} \wedge a) a_{\tau(p)} \wedge \cdots \wedge a_{\tau(q)},$$

由此易知结论成立. □

在 [命题1.78] 中我们看到含幺交换环上有限生成模的外幂还是有限生成投射模, 由此可以给出适当条件下含幺交换环的高阶导子全体与导子全体的外幂间的关系. 通过直接地计算验证可得下述推论.

Corollary 3.98. 设 A 是 K-交换代数, 满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模 (可以证明当 A 是光滑交换代数时该结论成立). 那么对任何自然数 r, A-模同态 $\Phi : \wedge_A^r \mathrm{Der}_K A \to \mathfrak{X}^r(A), \delta^1 \wedge \delta^2 \wedge \cdots \wedge \delta^r \mapsto \Phi(\delta^1 \wedge \delta^2 \wedge \cdots \wedge \delta^r)$, 这里 $\Phi(\delta^1 \wedge \delta^2 \wedge \cdots \wedge \delta^r)(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r) = \sum\limits_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma)\delta_1(a_{\sigma(1)})\delta_2(a_{\sigma(2)}) \cdots \delta_r(a_{\sigma(r)})$, 是同构, 且

$$\begin{tikzcd} \wedge_A^r \mathrm{Der}_K A \arrow[r, "\wedge_A^r \varphi"] \arrow[d, "\Phi"'] & \wedge_A^r \mathrm{Hom}_A(\Omega(A), A) \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathfrak{X}^r(A) \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Hom}_A(\Omega^r(A), A) \end{tikzcd}$$

交换, 其中 α 是来自 [命题1.78] 的模同构, φ 是来自 [定理3.96] 的同构.

Remark. 只要交换代数 A 满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模, 那么各次外幂 $\Omega^r(A)$ 也是有限生成投射模并且对充分大的正整数 n 有 $\Omega^n(A) = 0$. 此时, 称

$$\ell = \max\{n \in \mathbb{N} | \Omega^n(A) \neq 0\}$$

为代数 A 的**光滑维数**. $\Omega^\ell(A)$ 被称为 A 的**典范丛**. 如果进一步 $\Omega^\ell(A)\cong A$, 则称 A 有平凡的典范丛, 这时称 $\Omega^\ell(R)$ 作为自由 R-模的生成元 η 为 R 的一个**体积形式** (volume form). 如果 P 是非零有限生成投射 A-模, 那么 P^* 是有限生成投射模且 $P\cong P^{**}$ 蕴含 $P^*\neq 0$. 所以一旦交换代数 A 满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模, 那么不仅各阶 Kähler 微分形式 $\Omega^r(A)$ 是有限生成投射模, 而且 $\wedge_A^r\mathrm{Der}_K A\cong\mathfrak{X}^r(A)$ 都是有限生成投射 A-模. 这时, 我们也可以看到 $\wedge_A^r\mathrm{Der}_K A\neq 0$ 当且仅当 $\Omega^r(A)\neq 0$. 进而这时交换代数 A 的光滑维数也可以由 $\ell=\max\{n\in\mathbb{N}|\wedge_A^n\mathrm{Der}_K A\neq 0\}$ 给出.

设交换代数 A 满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模, 光滑维数是 n 并且有平凡的典范丛, 那么可设 $\Omega^n(A)=A\eta$, 这里 η 是 A 的一个体积形式, 进而由 $\Omega^{n+1}(A)=0$ 保证了 $\eta\wedge df=0,\forall f\in R$. 代入 [引理3.97] 给出的恒等式可知对任何 A 上导子 $F\in\mathfrak{X}^1(A)=\mathrm{Der}_K A$, 有 $\iota_F(\eta)\wedge df+(-1)^nF(f)\eta=0$. 所以

$$F(f)\eta=df\wedge\iota_F(\eta),\forall F\in\mathfrak{X}^1(A).$$

若此时 $(A,\{-,-\})$ 是 Poisson 代数, 那么对其上 Poisson 结构 $\pi=\{-,-\}\in\mathfrak{X}^2(A)$ 以及 $f\in A$, 由 $\iota_{df}(\pi)=\{-,f\}$ 以及 [引理3.97] 可得 $\iota_{H_f}(\eta)=-df\wedge\iota_\pi(\eta)$, 其中 $H_f=\{f,-\}:A\to A$ 表示由 f 决定的 Hamilton 导子. 事实上, 上面导出的公式只需要 $\Omega^{n+1}(A)=0$ 且 $\eta\in\Omega^n(A)$ 的条件即可.

下面介绍交换代数的 de Eham 上链复形. 使用类似 [定理3.96] 的构造映射方法, 对任何自然数 r, 可以构造 K-模同态 $d^r:\Omega^r(A)\to\Omega^{r+1}(A)$ 使得

$$d^r(a_0da_1\wedge\cdots\wedge da_r)=da_0\wedge da_1\wedge\cdots\wedge da_r,\forall a_i\in A.$$

由此得到 K-模复形

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{d^0}\Omega^1(A)\xrightarrow{d^1}\cdots\longrightarrow\Omega^r(A)\xrightarrow{d^r}\Omega^{r+1}(A)\xrightarrow{d^{r+1}}\cdots,$$

称之为 A 在 K 上的 **de Rham 上链复形** (de Rham complex of A over K). 该复形的 r 次上同调被称为 r 次(代数)**de Rham 上同调**. 若 Kähler r-形式 $\omega\in\Omega^r(A)$ 是闭链, 称之为**闭形式**. 若 $\omega\in\Omega^r(A)$ 是边缘链, 称之为**恰当形式**. 可直接计算知对任何 Kähler p-形式 α 和 Kähler q-形式 β 有 $d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta$.

Example 3.99. 如果 K-交换代数 A 满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模且光滑维数是 ℓ, 那么它的 de Rham 上链复形形如 $0\longrightarrow A\xrightarrow{d^0}\Omega^1(A)\xrightarrow{d^1}\cdots\longrightarrow\Omega^{\ell-1}(A)\xrightarrow{d^{\ell-1}}\Omega^\ell(A)\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$.

有了 de Rham 上链复形的微分, 可以定义由交换代数上多重线性导子决定的 Lie 导数的概念.

Definition 3.100. 设 A 是 K-交换代数, $F\in\mathfrak{X}^p(A)$ 是交错多重线性导子, 称 $[\iota_F,d]=\iota_Fd-(-1)^pd\iota_F:\Omega^*(A)\to\Omega^{*-p+1}(A)$ 为由 F 决定的 **Lie 导数**. 即对每个 $\omega\in\Omega^*(A)$ 有 $[\iota_F,d](\omega)=\iota_Fd(\omega)-(-1)^pd(\iota_F(\omega))$.

Example 3.101. 设 K-交换代数 A 满足满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模, 光滑维数是 n 并且有平凡的典范丛 $\Omega^n(A)=A\eta$. 那么之前已经说明 $F(f)\eta=df\wedge\iota_F(\eta),\forall F\in\mathfrak{X}^1(A)$. 下面我们验证对任何 $g\in A$ 有

$$d\iota_{gF}(\eta)=gd\iota_F(\eta)+F(g)\eta,$$

其中 d 为 de Rham 上链复形中的微分. 由于 $F(g)\eta=dg\wedge\iota_F(\eta)$, 所以只需验证 $d\iota_{gF}(\eta)=gd\iota_F(\eta)+dg\wedge\iota_F(\eta)$. 而这通过直接地计算验证不难看到. 若进一步 $(A,\{-,-\})$ 是 K 上 Poisson 代数, 取 F 为由 $f\in A$ 决定的 Hamilton 导子, 并记 L_{H_f} 为由 Hamilton 导子 H_f 决定的 Lie 导数, 那么前面证明的等式表明

$$L_{gH_f}(\eta)=gL_{H_f}(\eta)+\{f,g\}\eta,\forall f,g\in A.$$

类似地, 通过直接计算验证可知 $L_{H_g}(h\eta)=dh\wedge\iota_{H_g}(\eta)+hL_{H_g}(\eta),\forall g,h\in A$.

Example 3.102 ([LWW15]). 设 $(A,\{-,-\})$ 是 K 上 Poisson 代数, 满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模, 光滑维数是 n 并且有平凡的典范丛, 设 $\Omega^n(A)=A\eta$, η 是体积形式, $f\in R$ 并记 $H_f=\{f,-\}:A\to A$ 是 f 诱导的 Hamilton 导子. 记 $L_{H_f}=[\iota_{H_f},d]$ 是由 Hamilton 导子 H_f 决定的 Lie 导数, 那么 $L_{H_f}(\eta)\in\Omega^n(A)$, 所以存在唯一的 $\phi_\eta(f)\in A$ 使得 $\phi_\eta(f)\eta=L_{H_f}(\eta)$, 或改写为存在唯一的映射 $\phi_\eta:A\to A$ 使得

$$\phi_\eta(f)=\frac{L_{H_f}(\eta)}{\eta}.$$

对任何 $f,g\in A$, 易见 $H_{f+g}=H_f+H_g$, 所以 $\iota_{H_{f+g}}=\iota_{H_f}+\iota_{H_g}$, 进而知 $\phi_\eta:A\to A$ 是加群同态. 事实上, 之前我们已经看到 $\iota_{H_f}(\eta)=-df\wedge\iota_\pi(\eta),\forall f\in A$, 结合 $\phi_\eta(f)\eta=d(\iota_{H_f}(\eta))$ 由此不难验证 ϕ_η 是 A 上 K-导子. 称 ϕ_η 为 A 关于体积形式 η 的**模导子** (modular derivation). 对 Poisson 代数 $(A,\{-,-\})$, 若 K-导子 $F\in\mathrm{Der}_K A$ 满足 $F(\{g,f\})=\{F(g),f\}+\{g,F(f)\},\forall g,f\in A$, 则称该导子为 A 上 **Poisson 导子**. 下面我们验证上述 η 对应的模导子 $\phi_\eta:A\to A$ 是 Poisson 导子. 首先可直接计算验证

$$\phi_\eta(\{g,f\})\eta=L_{H_{\{g,f\}}}(\eta)=L_{H_g}L_{H_f}(\eta)-L_{H_f}L_{H_g}(\eta),\forall f,g\in A.$$

而 $L_{H_g}L_{H_f}(\eta)=L_{H_g}(\phi_\eta(f)\eta)=\{g,\phi_\eta(f)\}\eta+\phi_\eta(f)L_{H_g}(\eta)$, 所以 $\phi_\eta(\{g,f\})\eta=\{g,\phi_\eta(f)\}\eta-\{f,\phi_\eta(g)\}\eta$, 进而得到 ϕ_η 是 Poisson 导子. 我们定义的模导子是依赖于体积形式 η 选取的, 因此一个自然的问题是选取不同的体积形式定义出的模导子有何联系? 例如设 $\lambda=u\eta$ 是 A 的另一个体积形式, 这里 u 是 A 中某个可逆元, 那么 $\phi_\lambda(f)\lambda=d(\iota_{H_f}(u\eta))=d(u\iota_{H_f}(\eta))=du\wedge\iota_{H_f}(\eta)+ud\iota_{H_f}(\eta)=\{f,u\}\eta+u\phi_\eta(f)\eta=u^{-1}H_f(u)\lambda+\phi_\eta(f)\lambda$. 由此立即得到 $\phi_\lambda-\phi_\eta=-u^{-1}H_u$. 即

$$\phi_\eta-\phi_\lambda=\frac{\{u,-\}}{u}.$$

特别地, $u^{-1}\{u,-\}:A\to A$ 也是 Poisson 导子, 称为 A 的由可逆元 u 决定的 **log-Hamilton 导子**. 上述讨论表明 Kähler 微分模是有限生成投射模且典范丛平凡的 Poisson 代数, 不同体积形式决定的模导子相差一个 log-Hamilton 导子. 通过 $\{1,-\}=0$ 可知对任何可逆元 u 有 $u^{-1}\{u,-\}+u\{u^{-1},-\}=0$, 所以可直接验证对任何整数 n, $nu^{-1}\{u,-\}=u^{-n}\{u^n,-\}$ 为 u^n 决定的 log-Hamilton 导子. 对任意可逆元 $u_1,u_2\in A$, $u_1^{-1}\{u_1,-\}+u_2^{-1}\{u_2,-\}=(u_1u_2)^{-1}\{u_1u_2,-\}$, 所以任意有限个 log-Hamilton 导子的整系数线性组合仍是 log-Hamilton 导子. 进而知 $\mathrm{Der}_K A$ 中所有 log-Hamilton 导子构成加法子群 L. 对任何模导子 ϕ_η, 称该模导子在 $\mathrm{Der}_K A/L$ 中对应的元素 (等价类) 为 A 的**模类** (modular class). 根据前面的讨论我们看到 Poisson 代数的模类定义不依赖于具体的模导子选取. 如果 Poisson 代数 A 的模类是平凡的, 或等价地, 存在某个模导子是 log-Hamilton 导子, 则称该 Poisson 代数是 **unimodular**. 对域 $\Bbbk$ 上典范丛平凡且光滑维数是 n 的 Poisson 代数 $(A,\{-,-\})$, 如果 A 的乘法可逆元全体只有 $\Bbbk 1_A$(例如 A 是域上多项式代数), 那么 A 的 log-Hamilton 导子都是零, 所以此时 A 是 unimodular Poisson 代数当且仅当 A 的模导子是零 (并且在上述条件下的 Poisson 代数有唯一的模导子). 多项式 Poisson 代数 $A=\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 是光滑维数是 n 且典范丛平凡的 Poisson 代数, 它的模导子 ϕ_η(这里体积形式 $\eta=dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$) 由下式给出:

$$\phi_\eta(f)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial\{f,x_j\}}{\partial x_j},\forall f\in A.$$

上述模导子的公式可如下计算得到：

$$\begin{aligned}\phi_\eta(f)\eta &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}d\{f,x_j\}dx_1\wedge\cdots\widehat{dx_j}\cdots\wedge dx_n\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial\{f,x_j\}}{dx_j}dx_j\wedge dx_1\wedge\cdots\widehat{dx_j}\cdots\wedge dx_n\\ &= \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\{f,x_j\}}{\partial x_j}\right)dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n.\end{aligned}$$

Remark. 上述定义的模导子已经模类的概念本身来自 Poisson 几何, 人们首先考虑了实可定向 Poisson 流形上的模向量场和模类. 这里介绍的定义和术语来自 [Dol09] 以及 [LWW15].

Remark. 对 K-交换代数 A, 记 $\mathfrak{X}^p(A)$ 是 A 上 p-多重线性导子全体构成的 K-模, 对任何 $P\in\mathfrak{X}^p(A),Q\in\mathfrak{X}^q(A)$, 记 $P\circ Q:\wedge^{p+q-1}A\to A$ 为

$$(P\circ Q)(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{p+q-1})=\sum_{\sigma\in S_{q,p-1}}\mathrm{sgn}(\sigma)P(Q(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(q)})\wedge a_{\sigma(q+1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(q+p-1)}),$$

置 $[P,Q]_{SN}=P\circ Q-(-1)^{(p-1)(q-1)}Q\circ P$, 那么可直接计算验证 $[P,Q]_{SN}\in\mathfrak{X}^{p+q-1}(A)$, 称之为 P 与 Q 的 **Schouten-Nijenhuis 括号**或 **Schouten 括号**. 如果 $P,Q\in\mathfrak{X}^2(A)$ 是交错双线性导子, 那么

$$\begin{aligned}[P,Q]_{SN}(a_1,a_2,a_3)=&P(Q(a_1,a_2),a_3)+P(Q(a_2,a_3),a_1)+P(Q(a_3,a_1),a_2)\\ &+Q(P(a_1,a_2),a_3)+Q(P(a_2,a_3),a_1)+Q(P(a_3,a_1),a_2).\end{aligned}$$

所以当交换代数 A 上有 Poisson 结构 $\pi\in\mathfrak{X}^2(A)$ 时, 就有 $[\pi,\pi]_{SN}=0$(即 π 满足 Jacobi 恒等式). 进而知当 $2\in K^\times$ 时, $\pi\in\mathfrak{X}^2(A)$ 给出 A 上 Poisson 结构的充要条件是 $[\pi,\pi]_{SN}=0$. 如果 $\Bbbk[[\hbar]]$-双线性映射 $\pi_\star:A[[\hbar]]\times A[[\hbar]]\to A[[\hbar]]$ 满足对每个自然数 k 有 $\pi_k\in\mathfrak{X}^2(A)$(这里设 $\pi_\star=\pi+\pi_1\hbar+\pi_2\hbar^2+\cdots$), 那么 $\pi_\star(a,a)=0,\forall a\in A$, 进而

$$\pi_\star(\sum_{i=0}^{n}a_i\hbar^i,\sum_{i=0}^{n}a_i\hbar^i)=0.$$

由此得到 $\pi_\star(f,f)=0,\forall f\in A[[\hbar]]$. 因此利用 $\pi_\star$ 关于 $A[[\hbar]]$ 上 $(\hbar)$-adic 拓扑的连续性知对 Poisson 代数 $(A,\mu,\pi=\{-,-\})$, 给定一族交错双线性导子 $\{\pi_k\}_{k=0}^\infty\subseteq\mathfrak{X}^2(A)$, 其中 $\pi_0=\pi$, 如果对任何 $a,b,c\in A$ 以及自然数 n 有

$$\sum_{i+j=n}\pi_j(\pi_i(a,b),c)+\pi_j(\pi_i(b,c),a)+\pi_j(\pi_i(c,a),b)=0,$$

那么 $\pi_\star$ 是 π 的一个形式形变. 考察上式 $n=1$ 的情形, 不难看到上式即 $[\pi_1,\pi]=0$.

例如, 若特征为零的域 $\Bbbk$ 上 Poisson 代数 $(A,\pi=\{-,-\})$ 的 Poisson 结构有形式形变 $\pi_\star=\pi+\pi_1\hbar+\pi_2\hbar^2+\cdots$, 那么 $2\in\Bbbk[[\hbar]]$ 作为中心正则元, $\pi_\star$ 给出 $A[[\hbar]]$ 上 Poisson 结构等价于说 $[\pi_\star,\pi_\star]_{SN}=0$. 在特征零的形变理论中, Hochschild 上链复形的 Gerstenhaber 括号可以用于表示 n-阶形变是否可以扩张为 $(n+1)$-阶形变的阻碍, Poisson 上链复形的 Schouten 括号可以用于表示 n-阶形变是否可以扩张为 $(n+1)$-阶形变的阻碍. 类似于 Gerstenhaber 括号在代数的 Hochschild 上链复形微分起的作用 (回忆：对含幺交换环 K 上代数 A, 其系数在自身内的 Hochschild 上链复形 $C^\bullet(A,A)$ 的微分 δ 由 $-[-,\mu]_G$ 给出, 这里 $\mu\in C^2(A,A)$ 表示 A

上乘法运算, $[-,-]_G$ 表示 Gerstenhaber 括号), 我们也可以使用 Schouten 括号来表示 Poisson 上链复形的微分. 对 K 上 Poisson 代数 $(A,\{-,-\})$, 置 $\pi=\{-,-\}\in\mathfrak{X}^2(A)$, 其 Poisson 上链复形为

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta^0} \mathfrak{X}^1(A) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \longrightarrow \mathfrak{X}^r(A) \xrightarrow{\delta^r} \mathfrak{X}^{r+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

其中 $\delta^r:\mathfrak{X}^r(A)\to\mathfrak{X}^{r+1}(A)$ 定义为 $F\mapsto\delta^r(F)$, 这里

$$\begin{aligned}\delta^r(F)(a_1\wedge\cdots\wedge a_r\wedge a_{r+1})=&\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i\{F(a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\wedge a_{r+1}),a_i\}\\&+\sum_{1\le i<j\le r+1}(-1)^{i+j}F(\{a_i,a_j\}\wedge a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\widehat{a_j}\cdots\wedge a_{r+1})\end{aligned}$$

下面我们计算验证 $\delta=-[-,\pi]_{SN}$. 任给 $a_1,a_2,...,a_{r+1}\in A$ 以及 $F\in\mathfrak{X}^r(A)$, 有

$$\begin{aligned}(F\circ\pi)(a_1\wedge\cdots\wedge a_{r+1})&=\sum_{\sigma\in S_{2,r-1}}\mathrm{sgn}(\sigma)F(\{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)}\}\wedge a_{\sigma(3)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(r+1)})\\&=\sum_{1\le i<j\le r+1}(-1)^{i+j-1}F(\{a_i,a_j\}\wedge a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\widehat{a_j}\cdots\wedge a_{p+1}).\end{aligned}$$

另一方面, 根据 Schouten 括号的定义可算得

$$(\pi\circ F)(a_1\wedge\cdots\wedge a_{r+1})=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{r+1-i}\{F(a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\wedge a_{r+1}),a_i\}.$$

进而 $-[F,\pi]_{SN}=\sum_{1\le i<j\le r+1}(-1)^{i+j}F(\{a_i,a_j\}\wedge a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\widehat{a_j}\cdots\wedge a_{p+1})+\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i\{F(a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\wedge a_{r+1}),a_i\}$. 前面我们看到对交换代数 A 上 Poisson 结构 $\pi\in\mathfrak{X}^2(A)$ 的形式形变 $\pi_\star=\pi+\pi_1\hbar+\pi_2\hbar^2+\cdots$ 的 1 次部分 π_1 满足 $[\pi_1,\pi]_{SN}=0$, 因此若记 (A,π) 的 Poisson 上链复形的微分为 δ_π^2, 那么 $\pi_1\in\mathrm{Ker}\delta_\pi^2$, 这意味着 Poisson 结构的形式形变的 1 次部分给出一个 2 次 Poisson 上闭链 (类比结合代数乘法运算的形式形变的 1 次部分给出 2 次 Hochschild 上闭链).

Example 3.103. 前面我们看到域 $\Bbbk$ 上多项式代数 $A=\Bbbk[x,y]$ 是光滑维数为 2 且典范丛平凡的, 通过 $\{x,y\}=xy$ 可唯一地赋予 A 上 Poisson 结构. 那么模导子满足 $\phi_\eta(x)=x,\phi_\eta(y)=-y$, 这表明这里考虑的多项式 Poisson 代数不是 unimodular 的. 所以典范丛平凡的光滑 Poisson 代数一般而言不是 unimodular Poisson 代数. 如果 $A=\Bbbk[x,y]$ 上的 Poisson 结构使得模导子 ϕ_η 是 Hamilton 导子, 即存在多项式代数 $g\in A$ 使得 $\phi_\eta(f)=\{g,f\},\forall f\in A$, 那么可直接计算验证 $\{x,y\}$ 是 $\Bbbk$ 中常数, 进而知 $\phi_\eta=0$, 所以 $(A,\{-,-\})$ 为 unimodular Poisson 代数. 反之, 如果多项式代数 $\Bbbk[x,y]$ 上的 Poisson 结构是 unimodular 的, 那么模导子自然是特殊的 Hamilton 导子. 所以多项式代数 $\Bbbk[x,y]$ 上的 Poisson 结构是 unimodular 的当且仅当其模导子是 Hamilton 导子. 一般地, $\Bbbk[x,y,z]$ 上 Poisson 结构的模导子如果是 Hamilton 导子, 该 Poisson 结构未必是 unimodular 的. 例如可通过 $\{x,y\}=0,\{y,z\}=y,\{z,x\}=-1$ 在 $\Bbbk[x,y,z]$ 上赋予 Poisson 结构, 该 Poisson 结构关于体积形式 $\eta=dx\wedge dy\wedge dz$ 的模导子是 $\phi_\eta=\{-,x\}$ 为 Hamilton 导子, 但这时该 Poisson 结构并不 unimodular[LWW15, Example 2.5].

接下来回到 Kähler 微分模本身性质的讨论, 我们将着眼于 Kähler 微分模的两个基本正合列.

Theorem 3.104 (第一正合列). 设 A, B 是 K-交换代数, $\psi: A \to B$ 是 K-代数同态且 M 是 B-模, 则有: (1) 作为 A-模, 有 $\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A \Omega_K(A), M) \cong \mathrm{Der}_K(A, M)$. (2) 存在 B-模正合列
(i) $0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Der}_K(B, M) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Der}_K(A, M)$

(ii) $B \otimes_A \Omega_K(A) \xrightarrow{\alpha} \Omega_K(B) \xrightarrow{\beta} \Omega_A(B) \longrightarrow 0$
满足 α 可裂单的充要条件是 τ 对任何模 ${}_BM$ 是满射.

Proof. (1) 我们总有下述自然同构:

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A \Omega_K(A), M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_K(A), \mathrm{Hom}_B(B, M)) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_K(A), M) \cong \mathrm{Der}_K(A, M).$$

(2) 注意 $\mathrm{Der}_K(A, M)$ 有自然 B-模结构. 这里仅证明 (ii), (i) 可直接验证. 设 $d_A : A \to \Omega_K(A), d_B : B \to \Omega_K(B), d'_B : B \to \Omega_A(B)$ 为泛导子. 由 d_A 的泛性质, 可通过 $\alpha(b \otimes d_A a) = b d_B(\psi(a))$ 定义 B-模同态 $\alpha : B \otimes_A \Omega_K(A) \to \Omega_K(B)$. 类似地可定义 B-模同态 $\beta : \Omega_K(B) \to \Omega_A(B)$ 使得 $\beta(d_B b) = d'_B b$. 将 $\mathrm{Hom}_B(-, M)$ 作用于序列 $B \otimes_A \Omega_K(A) \xrightarrow{\alpha} \Omega_K(B) \xrightarrow{\beta} \Omega_A(B) \longrightarrow 0$, 可得下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}_A(B, M) \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{Der}_K(B, M) \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Der}_K(A, M) \\
\mathrm{Hom}_B(\Omega_A(B), M) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\beta^*"] & \mathrm{Hom}_B(\Omega_K(B), M) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, "\alpha^*"] & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A \Omega_K(A), M) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

其余的验证是明显的. □

Theorem 3.105 (第二正合列). 设 I 是 A 的真理想, 则对任何 A/I-模 M, 有下面的 A-模正合列:
(1) $0 \longrightarrow \mathrm{Der}_K(A/I, M) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Der}_K(A, M) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}_A(I, M)$;

(2) $0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\beta'} A/I \otimes_A \Omega_K(A) \xrightarrow{\alpha'} \Omega_K(A/I)$.

Proof. 仅验证 (2), 定义 $\beta'(a + I^2) = \overline{1} \otimes da$, $\alpha'(\overline{1} \otimes da) = d(\overline{a})$. 则有 A/I-模同态序列

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\beta'} A/I \otimes_A \Omega_K(A) \xrightarrow{\alpha'} \Omega_K(A/I).$$

对任何 A/I-模 M, 对上述同态序列作用 $\mathrm{Hom}_{A/I}(-, M)$ 可得下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}_K(A/I, M) \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Der}_K(A, M) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Hom}_A(I, M) \\
\mathrm{Hom}_{A/I}(\Omega_K(A/I), M) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "(\alpha')^*"] & \mathrm{Hom}_{A/I}(A/I \otimes_A \Omega_K(A), M) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, "(\beta')^*"] & \mathrm{Hom}_{A/I}(I/I^2, M) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

其余的验证是明显的. □

最后介绍 Kähler 微分模的局部化性质.

Lemma 3.106. 设 S 是 A 的乘闭子集并设 $t_S(M)$ 是 A-模 M 的 S-挠子模. 那么对 $\delta \in \mathrm{Der}_K(A, M)$, 有 (1)$\delta(t_S(A)) \subseteq t_S(M)$.

(2)δ 自然地诱导 $\mathrm{Der}_K(A/t_S(A), M/t_S(M))$.

(3)δ 诱导唯一的导子 $D \in \mathrm{Der}_K(A_S, M_S)$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & A_S \arrow[d, "D"] \\ M \arrow[r] & M_S \end{tikzcd}$$

Proof. 这里仅验证 (3). 定义 $D : A_S \to M_S$ 为

$$D(\frac{a}{s}) = \frac{\delta(a)s - a\delta(s)}{s^2}, \forall a \in A, s \in S.$$

一旦验证了 D 定义合理, 那么 D 明显是满足条件的导子. 假设 $a_1/s_1 = a_2/s_2$, 则存在 $u \in S$ 使得 $u(s_2a_1 - s_1a_2) = 0$. 下面需要验证存在 $v \in S$ 零化

$$s_2^2(\delta(a_1)s_1 - a_1\delta(s_1)) - s_1^2(\delta(a_2)s_2 - a_2\delta(s_2)).$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} s_2^2(\delta(a_1)s_1 - a_1\delta(s_1)) - s_1^2(\delta(a_2)s_2 - a_2\delta(s_2)) &= s_1s_2^2\delta(a_1) - a_1s_2^2\delta(s_1) - s_1^2s_2\delta(a_2) + s_1^2a_2\delta(s_2) \\ &= -s_1s_2\delta(a_1s_2) - a_1s_2\delta(s_1s_2) - s_1s_2\delta(a_2s_1) + s_1a_2\delta(s_1s_2) \\ &= -s_1s_2\delta(a_1s_2 - a_2s_1) + (s_1a_2 - a_1s_2)\delta(s_1s_2). \end{aligned}$$

现在取 $v = u^2$ 便得结论. □

下面的推论表明对交换代数取 Kähler 微分模和作局部化可交换.

Corollary 3.107. 设 S 是 A 的乘闭子集, 则有 A_S-模同构 $\varphi : A_S \otimes_A \Omega_K(A) \to \Omega_K(A_S)$ 将 $1 \otimes d_A(a)$ 映至 $d_{A_S}(as/s)$. 特别地, 有 A_S-模同构 $(\Omega_K(A))_S \cong \Omega_K(A_S)$.

Proof. 考虑 [定理3.104] 中构造的映射 $\tau : \mathrm{Der}_K(B, M) \to \mathrm{Der}_K(A, M)$, 并置 $B = A_S, \psi = \lambda_S : A \to A_S, a \mapsto as/s$, 那么对任何 A_S-模 M, 有典范同构

$$\begin{aligned} \xi_M : (M_S)_S &\to M \\ \frac{x/s}{t} &\mapsto \frac{x}{st} \end{aligned}$$

于是得到下述交换图：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1"] \arrow[d] & M \arrow[d, "1"] \\ (M_S)_S \arrow[r, "\xi_M"] & M \end{tikzcd}$$

通过 [引理3.104] 可直接验证对任何 A_S-模 M, τ 是满射. 故由 [定理3.104] 得到下述正合列

$$0 \longrightarrow A_S \otimes_A \Omega_K(A) \xrightarrow{\varphi} \Omega_K(A_S) \xrightarrow{\psi} \Omega_A(A_S) \longrightarrow 0$$

注意到对任何 $s, t \in S$ 有

$$0 = \delta(\frac{s}{s}) = \delta(\frac{t}{st} \cdot \frac{ts}{t}) = \frac{ts}{t}\delta(\frac{t}{st}), \forall \delta \in \mathrm{Der}_A(A_S, M),$$

所以泛导子 $d_{A_S} : A_S \to \Omega_A(A_S)$ 是零同态, 进而 $\Omega_A(A_S) = 0$, 其余是明显的. □

3.15 微分代数与 Δ-Dixmier-Moeglin 等价

本节简要介绍微分代数相关基础知识. 微分代数最早由 Joseph Ritt(美国, 1893-1951) 为以代数角度研究微分方程引入, 再由其学生 Ellis Kolchin 进一步发展. 作为动机, 先介绍一些 Poisson 代数的基本概念.

以下固定 $\Bbbk$ 是是特征为零的域. 若 $\Bbbk$-交换代数 A 上有 Lie 括号 $\{-,-\}: A\times A \to A$ 使得对每个 $a \in A$, 线性变换 $\{a,-\}: A \to A$ 是 $\Bbbk$-导子, 则称 $(A, \{-,-\})$ 是 **Poisson 代数** (以下简称 A 是 Poisson 代数). Poisson 代数上的 Lie 括号 $\{-,-\}$ 一般称为 **Poisson 括号**. 称 Poisson 代数 A 的子代数 $Z_P(A) = \{b \in A | \{a, b\} = 0, \forall a \in A\}$ 为 A 的 **Poisson 中心**. Poisson 代数 A 的理想 I 被称为 **Poisson 理想**, 如果 $\{A, I\} \subseteq I$.

Lemma 3.108. 设 $\Bbbk$-代数 A 是 Poisson 代数, 那么任何理想 I 都包含一个唯一的最大的 Poisson 理想.

Proof. 记 $J = \{b \in A | \{a_1, \{a_2, \cdots \{a_n, b\}\}\} \in I, \forall a_1, ..., a_n \in A, n \geq 0\}$, 那么 J 是 A 的理想, 并且由 J 的定义易知 J 是含于 I 的 Poisson 理想. 任何含于 I 的 Poisson 理想都在 J 中, 所以 J 即为所求. □

我们把含于理想 I 的最大 Poisson 理想称为理想 I 的 **Poisson core**. 称 Poisson 代数 A 的真 Poisson 理想 P 是 **Poisson 素理想**, 如果对任何 Poisson 理想 I, J, $IJ \subseteq P$ 蕴含 I, J 中至少有一个是 P 的子集. 将 Poisson 代数中极大理想的 Poisson 核称为 **Poisson 本原理想**. 进而可定义 **Poisson 素谱** P.Spec$A$ 与 **Poisson 本原素谱** P.Prim$A$. 下面的微分代数理论便可将 Poisson 代数的理想论纳入其框架下予以研究, 这一想法来自 K. R. Goodearl[Goo06].

Definition 3.109. 记 $\Bbbk$-代数 A 所有 $\Bbbk$-导子构成的集合为 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}A$. 对 $\Delta \subseteq \mathrm{Der}_{\Bbbk}A$, 称 (A, Δ) 是**微分 $\Bbbk$-代数**. 如果微分代数 A 的理想 I 满足关于 Δ 中导子作用封闭, 则称 I 是 **Δ-理想**. 若微分代数 A 的 Δ-理想 P 满足对任何 Δ-理想 I, J, $IJ \subseteq P$ 蕴含 I, J 中至少有一个含于 P, 称 P 是 **Δ-素理想**. 如果素理想 Q 是 Δ-理想, 称 Q 是**素 Δ-理想**. 将 A 的所有 Δ-素理想构成的子空间记作 Δ-Spec$A$, 称为 **Δ-素谱**. 将 A 的所有 Δ-本原理想构成的子空间记作 Δ-Prim$A$, 称为 **Δ-本原素谱**. 易见 Δ-Prim$A \subseteq \Delta$-Spec$A$.

Remark. 对微分代数 (A, Δ), 任意一族 Δ-理想之和或者之交都还是 Δ-理想.

Example 3.110. 取 $\Delta = \{0\}$, 则任何 $\Bbbk$-代数都可以视作微分代数.

Example 3.111. 对微分代数 $(\Bbbk[x], \partial/\partial x)$, 素理想 (x) 不是 Δ-理想.

对微分代数 A 的任何理想 I, 容易验证下述 Δ-理想是 I 所包含的最大 Δ-理想:

$$(I : \Delta) = \{a \in R | \delta_1 \cdots \delta_n(a) \in I, \forall \delta_1, ..., \delta_n \in I, n \geq 0\}.$$

称为理想 I 的 **Δ-core**. 将本原理想的 Δ-core 称为 **Δ-本原理想**.

Example 3.112. 对 Poisson 代数 A, 取 $\Delta = \{A, -\} = \{\{a, -\} | a \in A\}$, 那么微分代数 (A, Δ) 的 Δ-理想就是 Poisson 理想, 理想的 Δ-core 就是 Poisson core, Δ-素理想就是 Poisson 素理想, Δ-本原理想就是 Poisson 本原理想. 所以 Poisson 代数的理想论可以纳入微分代数理想论中讨论.

Proposition 3.113. 设 (A, Δ) 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上的微分代数, 那么:
(1) 对任何素理想 P, $(P : \Delta)$ 是 A 的素理想 (这一观察最早来自 J. Dixmier, 见 [Dix96, p.107, Lemma 3.3.2]).
(2) 任何 Δ-本原理想是素理想.

(3) 如果 P 是 Δ-理想 I 上的极小素理想, 那么 P 是 Δ-理想.
(4) 如果 A 是左 Noether 的, 那么任何 Δ-素理想是素理想.
(5) 如果 A 是左 Noether 仿射 PI 代数, 那么任何 Δ-素理想是一些 Δ-本原理想之交.

Proof. (1) 为简化记号, 记 $(P:\Delta)$ 为 Q. 设 $a,b\in A$ 满足 $aAb\subseteq Q$, 下证 a 与 b 中至少有一个在 Q 内.

Claim. 若 $\delta_1,...,\delta_p\in\Delta, m_1,...,m_p\in\mathbb{N}$ 使 $\delta_1^{m_1}\cdots\delta_p^{m_p}b\notin P$, 则 $\delta_1^{n_1}\cdots\delta_p^{n_p}a\in P,\forall n_1,...,n_p\in\mathbb{N}$.

赋予 $\mathbb{N}^p$ 字典序 $\leq$, 则 $(\mathbb{N}^p,\leq)$ 良序. 下面通过对 $(\mathbb{N}^p,\leq)$ 作超限归纳证明断言. 先取 $\mathbb{N}^p$ 中满足 $\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}b\notin P$ 的最小元. 对每个 $x\in A$, 有

$$\delta_1^{n_1+s_1}\cdots\delta_p^{n_p+s_p}(axb)=\sum_{\substack{i_k+j_k+l_k=n_k+s_k\\1\leq k\leq p}}\alpha(i_1,j_1,l_1,...,i_p,j_p,l_p)\delta_1^{i_1}\delta_2^{i_2}\cdots\delta_p^{i_p}(a)\delta_1^{j_1}\delta_2^{j_2}\cdots\delta_p^{j_p}(x)\delta_1^{l_1}\delta_2^{l_2}\cdots\delta_p^{l_p}(b),$$

其中 $\alpha(i_1,j_1,l_1,...,i_p,j_p,l_p)\in\mathbb{Z}_{\geq1}$. 那么上式可整理为

$$\delta_1^{n_1+s_1}\cdots\delta_p^{n_p+s_p}(axb)=\delta_1^{n_1}\cdots\delta_p^{n_p}(a)x\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}(b)+r,$$

这里 r 是一些形如 $\alpha(i_1,j_1,l_1,...,i_p,j_p,l_p)\delta_1^{i_1}\delta_2^{i_2}\cdots\delta_p^{i_p}(a)\delta_1^{j_1}\delta_2^{j_2}\cdots\delta_p^{j_p}(x)\delta_1^{l_1}\delta_2^{l_2}\cdots\delta_p^{l_p}(b)$ 的项的有限和, 其中 $(i_1,...,i_p)<(n_1,...,n_p)$ 或 $(l_1,...,l_p)<(s_1,...,s_p)$. 当 $(n_1,...,n_p)=(0,0,...,0)$ 时, 易见 $r\in P$, 故由 $axb\in Q$ 得 $ax\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}(b)\in P$. 于是 x 的任意性保证了 $a\in P$. 由归纳假设, $\delta_1^{i_1}\delta_2^{i_2}\cdots\delta_p^{i_p}(a)\in P,\forall(l_1,...,l_p)<(s_1,...,s_p)$. 从而利用 $axb\in Q$ 便知 $\alpha(n_1,0,s_1,...)\delta_1^{n_1}\cdots\delta_p^{n_p}(a)x\delta_1^{s_1}\cdots\delta_p^{s_p}(b)\in P$. 因为 $\mathrm{char}\Bbbk=0$, 故由 x 的任意性立即得到 $\delta_1^{n_1}\cdots\delta_p^{n_p}(a)\in P$. 断言得证.

下面通过说明 $b\notin Q$ 蕴含 $a\in Q$ 来完成证明. 对 $\delta_1,...,\delta_p\in\Delta$, 要证 $\delta_1\cdots\delta_p(a)\in P$. 因为 $b\notin Q$, 故存在 $\delta_{p+1},...,\delta_t\in\Delta$ 使得 $\delta_1^0\cdots\delta_p^0\delta_{p+1}^1\cdots\delta_t^1(b)\notin P$. 应用断言知 $\delta_1^1\cdots\delta_p^1(a)=\delta_1^1\cdots\delta_p^1\delta_{p+1}^0\cdots\delta_t^0(a)\in P$.

(2) 和 (3) 由 (1) 立即得到. 下证 (4). 设 A 左 Noether 且 P 是 Δ-素理想, 那么存在 P 上极小素理想 $Q_1,...,Q_m$ 使得 $P\supseteq Q_1\cdots Q_m$. 由 (3) 知每个 Q_i 都是 Δ-理想, 所以 P 就是某个 Q_i.

(5) 在 (4) 中已经说明左 Noether 环的 Δ-素理想是素理想. 因为仿射 PI 代数是 Jacobson 环, 所以任何素理想是一些本原理想的交, 设 Δ-素理想 $P=\bigcap\limits_{i\in I}Q_i$, 其中 Q_i 是本原理想. 那么

$$P=\bigcap_{i\in I}(Q_i:\Delta).$$

□

Remark. 因此对于左 Noether 的微分代数而言 $\Delta\text{-Prim}A\subseteq\Delta\text{-Spec}A\subseteq\mathrm{Spec}A$.

Example 3.114. 设 A 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上的仿射 (或一般地, Noether)Poisson 代数, 那么

Corollary 3.115. 设 (A,Δ) 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上的微分代数, 那么任何 Δ-理想 I 的根理想 $\sqrt{I}$ 仍是 Δ-理想. 特别地, 对 Poisson 代数, 任何 Poisson 理想的根理想仍 Poisson.

Proof. 因为 $\sqrt{I}$ 就是所有含 I 的极小素理想之交, 并且 Δ-理想的极小素理想仍是 Δ-理想, 故结论成立. □

Example 3.116 (Poisson order, [BG03]). 为了研究辛反射代数, K. A. Brown 与 I. Gordon 引入了 Poisson order 的概念, 它包含了辛反射代数和许多单位根量子群. 具体地, 若仿射 $\Bbbk$-代数 A 满足存在中心子代数 Z 使得 A 是有限生成 Z-模以及 $\Bbbk$-线性映射

$$D : Z \to \mathrm{Der}_{\Bbbk} A, z \mapsto D_z$$

使得 $D(Z)$ 作用 Z 封闭且 $\{z, z'\} = D_z(z'), \forall z, z' \in Z$ 赋予 Z 一个 Poisson 代数结构, 那么称 A 是 Z 上 **Poisson order** 或者 **Z-Poisson order**. 若 A 是仿射 Poisson 代数, 那么取 $Z = A$ 不难看到 A 是 Poisson order, 因此 Poisson order 也包含了仿射 Poisson 代数. 利用 Artin-Tate 引理, 我们马上看到 Z 上的 Poisson 代数 A 的中心子代数 Z 自动是仿射代数. 称 Z-Poisson order 的双边理想 I 是 **Poisson 理想**, 如果该理想在 $D(Z)$-作用下封闭 (这时 Z 作为 Poisson 代数的理想是 Poisson 理想等价于该理想在 $D(Z)$-作用下封闭). 于是我们可以把 Z-Poisson order 天然地视作微分代数：取导子集 $\Delta = D(Z)$, 那么 (A, Δ) 是仿射 $\Bbbk$-微分代数. 并且 Poisson order 的 Poisson 理想就是它作为上述意义下微分代数的 Δ-理想. 于是可知 Poisson order 或是 Poisson 代数任何 Poisson 理想的根理想或者极小素理想都还是 Poisson 理想.

给定拓扑空间 X 的子空间 Y, 称连续映射 $r : X \to Y$ 是**收缩映射**, 如果 $r(y) = y, \forall y \in Y$. 下面说明 Noether 微分代数的素谱到 Δ-素谱存在自然的收缩映射.

Theorem 3.117. 设 (A, Δ) 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上左 Noether 微分代数. 那么

$$\pi : \mathrm{Spec}A \to \Delta\text{-}\mathrm{Spec}A, Q \mapsto (Q : \Delta)$$

是连续收缩映射. 并且 Δ-Spec$A$ 上的子空间拓扑就是满射 π 诱导的商拓扑.

Proof. 对任何素理想 Q, $(Q : \Delta)$ 明显是 Δ-素理想. 对任何 Δ-素理想 P, 自然有 $P = (P : \Delta)$, 因此要证明该定理只需验证 π 的连续性以及 Δ-Spec$A$ 上拓扑是由 π 诱导的商拓扑. 任取 Δ-Spec$A$ 中闭集 $W = V(I)$, 不妨设 I 是 A 的 Δ-理想, 那么 $\pi^{-1}(W) = \{Q \in \mathrm{Spec}A | (Q : \Delta) \supseteq I\} = \{Q \in \mathrm{Spec}A | Q \supseteq I\} = V(I)$, 因此 π 是连续映射. 因为 π 是连续映射, 故由 Δ-Spec$A$ 上商拓扑是使得 π 成为连续映射的最大拓扑知 Δ-Spec$A$ 上子空间拓扑含于商拓扑. 现任取商拓扑的闭子集 W, 即满足 $\pi^{-1}(W)$ 在 Spec$A$ 中闭的子集 W. 设 $\pi^{-1}(W) = V(J)$, J 是 A 的理想, 则有 $W = \{P \in \Delta\text{-}\mathrm{Spec}A | P \supseteq J\}$, 所以 W 关于 Δ-Spec$A$ 上子空间拓扑也是闭的. □

Remark. 自然可将 π 限制为 A 的本原素谱至 Δ-本原素谱间的映射：$\pi_m : \mathrm{Prim}A \to \Delta\text{-}\mathrm{Prim}A$, 根据 Δ-本原理想的定义, π_m 仍为满连续映射. 此时 π_m 未必是商映射. 例如考虑 $A = \Bbbk[x]_S$, 其中乘闭子集 $S = \{f \in \Bbbk[x] | 多项式x, x-1均不能整除f\}$. 那么 $\mathrm{Spec}A = \{Ax, A(x-1)\} = \mathrm{maxSpec}A$ 是离散拓扑空间, 取 $\Delta = \{x(\partial/\partial x)\}$, 那么微分代数 (A, Δ) 的 Δ-本原素谱是 $\{Ax, 0\}$, 其中 $Ax = (Ax : \Delta), 0 = (A(x-1) : \Delta)$. 注意到 Δ-Spec$A$ 中 $\{0\}$ 的闭包是整个 Δ-Spec$A$, 故 A 的极大 (本原素) 谱不是离散空间. 由于拓扑空间之间的连续双射只要是商映射就一定是同胚, 故在这个例子中 π_m 不可能是商映射.

[定理3.117] 的建立并不是凭空提出, 为了看到考虑上述定理的动机, 这里简单引入一些代数群与量子群领域的基本术语, 主要参考文献是 [Hum12]. 回忆一个群 G 被称为**可解群**, 如果 G 有一个正规列使得该正规列的商因子全部是交换群. 对 $\Bbbk$ 上代数群 G, 可以证明它总有唯一的最大正规可解闭子群 [Hum12, p.111, Lemma 17.3(c)]. 那么该子群的单位元所在的连通分支便是 G 唯一的最大连通正规可解闭子群, 称为该群的**根**, 记作 $R(G)$. 如果连通的仿射代数群 G 满足 $G \neq \{1_G\}$ 且 $R(G) = \{1_G\}$, 则称 G 是**半单的**. 如果代数群

T 同构于有限个 $\Bbbk^\times$ 的直积, 那么称 T 是**代数环面** (algebraic torus). 可以证明对连通的代数群, 极大环面存在 [Bor12, p.218, Theorem 18.2]. 对任给仿射簇 V, 记其坐标环是 $\mathcal{O}(V)$, 那么对一些具体的簇, 可以考虑 V 的量子化 $\mathcal{O}_q(V)$(也被称为**量子坐标环**). 例如, 对 n 维仿射空间 $\Bbbk^n$, 记矩阵 $q=(q_{ij})_{n\times n}$ 是**乘性反对称的** (即 $q_{ii}=1, q_{ij}=q_{ij}^{-1}, \forall i\neq j$), 那么称

$$\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)=\Bbbk\langle x_1,...,x_n\rangle/(x_ix_j-q_{ij}x_jx_i)$$

是**量子仿射 n-空间** (quantum affine n-space). 固定一个连通半单仿射代数群 G, 并取定 G 的一个极大环面 H, 通过总结前人对带有 H-作用的量子坐标环 $\mathcal{O}_q(G)$ 的本原素谱性质所得到的一些结论, K.R. Goodearl 猜测仿射代数群 G 量子坐标环 $\mathcal{O}_q(G)$ 的素谱与经典坐标环的素谱 $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_q(G)$ 间应当有商空间的关系, 具体地, 他猜测 $\mathrm{Spec}\mathcal{O}(G)$ 到 $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_q(G)$ 有一个商映射 [GL00]. 随后在 [GL00, Theorem 4.11] 中 Goodearl 证明了：对代数闭域 $\Bbbk$ 上乘性反对称阵 $q=(q_{ij})_{n\times n}$, 只要 -1 不是矩阵 q 的元素或者 $\mathrm{char}\Bbbk=2$, 就可以具体地构造 $\mathrm{Spec}\mathcal{O}(\Bbbk^n)$ 到 $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 的商映射, 并且该商映射可以限制为极大谱 $\mathrm{maxSpec}\mathcal{O}(\Bbbk^n)$ 到本原素谱 $\mathrm{Prim}\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 的商映射. 因为前者是代数闭域, 因此 $\mathrm{maxSpec}\mathcal{O}(\Bbbk^n)$ 和仿射空间 $\Bbbk^n$ 之间有标准的同胚, 故量子仿射空间的素谱可以认为是经典仿射空间的商空间. 对一般地非交换代数 A, 设 $z\in A$ 是中心正则元使得 $\overline{A}=A/zA$ 交换, 那么对 $\overline{x}=x+zA, \overline{y}=y+zA(x,y\in A)$, 定义

$$\{\overline{x},\overline{y}\}=[x,y]/z+zA\in\overline{A},$$

其中 $[x,y]$ 表示 x,y 在 A 中的换位子. 那么 $\overline{A}$ 关于 $\{-,-\}$ 构成 Poisson 代数, 称为 A 的 **semiclassical limit**, A 被称为 $\overline{A}$ 的**量子化** (quantization). 有很多非交换代数 (量子坐标环) 都是交换 Poisson 代数的量子化, 例如仿射簇 $SL_2(\Bbbk)$ 的量子化 [BG12, p.275, Example 5.5]. 因此自然可以考虑把量子群理论的问题放在泊松代数里发展, 进而泊松代数的理想论广受关注. 前面已经提到泊松代数的理想论可以纳入微分代数的理想论加以研究, 因此 [定理3.117] 并不是天马行空产生的结果.

设 (A,Δ) 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上微分代数, 称 $Z_\Delta(A)=\{a\in A|\delta(a)=0,\forall\delta\in\Delta\}$ 为 A 的 **Δ-中心**. 那么当 A 是 Poisson 代数, $\Delta=\{A,-\}$ 时, A 作为微分代数的 Δ 中心就是 Poisson 中心.

Definition 3.118. 设 (A,Δ) 是是特征为零的域 $\Bbbk$ 上交换 Noether 微分代数. 如果 Δ-素理想 P(注意此时 P 也是素理想) 满足域 $Z_\Delta(\mathrm{Frac}A/P)$ 是 $\Bbbk$ 的代数扩张, 则称 P 是 **Δ-有理素理想** (Δ-rational prime ideal).

Remark. 因为 A/P 是整区, 所以可以作其商域 $\mathrm{Frac}A/P$, 那么对每个 $\delta\in\Delta$, 首先 δ 可天然诱导出 A/P 上 $\Bbbk$-导子 (一般地, 若 $\Bbbk$-交换代数 R 有乘闭子集 S, 那么任何 R 上 $\Bbbk$-导子 δ 都可以通过 $\delta(as^{-1})=(\delta(a)s-\delta(s)a)s^{-2}$ 延拓至 R_S 上成为导子), 随后再唯一地延拓为 $\mathrm{Frac}A/P$ 上导子, 将 Δ 所诱导的 A/P 的导子集仍记作 Δ, 进而定义出 Δ-中心 $Z_\Delta(\mathrm{Frac}A/P)$. 事实上对任何 $\Bbbk$-微分代数 (F,Δ), 只要 F 是域, 就自动有 $Z_\Delta(F)$ 是域：只需说明对任何 $a\neq 0\in Z_\Delta(F)$ 有 $a^{-1}\in Z_\Delta(F)$. 注意到 $0=\delta(1)=\delta(aa^{-1})=\delta(a)a^{-1}+a\delta(a^{-1})=a\delta(a^{-1}),\forall\delta\in\Delta$, 因此 $a^{-1}\in Z_\Delta(F)$.

Example 3.119. 如果 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, 那么 P 是 Δ-有理素理想当且仅当 $Z_\Delta(\mathrm{Frac}A/P)=\Bbbk$.

现在我们可以与代数表示论中一样为微分代数引入 Dixmier-Moeglin 等价的概念.

Definition 3.120. 设 (A,Δ) 是是特征为零的域 $\Bbbk$ 上交换 Noether 微分代数. 称 A 满足 **Δ-Dixmier-Moeglin 等价**, 如果 A 的 Δ-本原理想集, Δ-有理素理想集以及 Δ-$\mathrm{Spec}A$ 中的局部闭点集一致.

一般地, 对交换仿射的微分代数, 其 Δ-素谱内总有如下现象产生.

Theorem 3.121. 设 (A,Δ) 是特征为零的域 $\Bbbk$ 上交换仿射微分代数. 那么在 Δ-Spec$A$ 内总有下述蕴含关系：

$$\Delta\text{-Spec}A\text{中的局部闭点} \Rightarrow \Delta\text{-本原理想} \Rightarrow \Delta\text{-有理素理想}.$$

Proof. 任取 Δ-Spec$A$ 中的局部闭点 P, 那么存在 A 的理想 I,J 使得 $\{P\}=V(I)-V(J)$, 这里 $V(I),V(J)$ 分别指包含 I 的 Δ-素理想全体和包含 J 的 Δ-素理想全体. 那么所有真包含 P 的 Δ-素理想之交包含 $P+J\supsetneq P$, 即所有真包含 P 的 Δ-素理想之交真包含 P. 因此由 [命题3.113(5)] 可知 P 一定等于某个 Δ-本原理想. 下面说明任何 Δ-本原理想一定是 Δ-有理的. 设 $P=(M:\Delta)$ 是 Δ-本原理想, 这里 M 是 A 的一个极大理想, 注意到 A_M 到 A/M 有天然的代数同态, 因此如果能够证明域 $Z_\Delta(\text{Frac}A/P)$ 可代数嵌入 A_M, 那么域 $Z_\Delta(\text{Frac}A/P)$ 也可代数嵌入 A/M, 进而由 A/M 是有限维代数可得 $Z_\Delta(\text{Frac}A/P)$ 是 $\Bbbk$ 的有限扩张. 用 A 替换 A/P 知可不妨设 $P=0$ 且 A 是整环, 此时需要验证 $Z_\Delta(\text{Frac}A)$ 可嵌入 A_M, 这里极大理想 M 满足 $(M:\Delta)=P=0$. 任取 $as^{-1}\in Z_\Delta(\text{Frac}A)$, 那么对任何 $\delta\in\Delta$, 有 $(\delta(a)s-\delta(s)a)s^{-2}=0$. 所以只要导子 δ 满足 $\delta(s)\neq 0$, 在 Frac$A$ 内就有 $as^{-1}=\delta(a)\delta(s)^{-1}$. 特别地, 如果存在 A 上导子 $\delta_1,...,\delta_n$ 使得 $\delta_n\delta_{n-1}\cdots\delta_1(s)\neq 0$, 那么便有

$$\frac{a}{s}=\frac{\delta_1(a)}{\delta_1(s)}=\frac{\delta_2\delta_1(a)}{\delta_2\delta_1(s)}=\cdots=\frac{\delta_n\cdots\delta_2\delta_1(a)}{\delta_n\cdots\delta_2\delta_1(s)}.$$

而由 $(M:\Delta)=0$ 知对非零元 s, 总存在 A 上导子 $\delta_1,...,\delta_n$ 使得 $\delta_n\delta_{n-1}\cdots\delta_1(s)\notin M$. 因此对这样的导子列, 在 Frac$A$ 内总有 $as^{-1}=[\delta_n\cdots\delta_2\delta_1(a)][\delta_n\cdots\delta_2\delta_1(s)]^{-1}$. 现定义

$$\varphi:Z_\Delta(\text{Frac}A)\to A_M, as^{-1}\mapsto[\delta_n\cdots\delta_2\delta_1(a)][\delta_n\cdots\delta_2\delta_1(s)]^{-1},$$

其中导子 $\delta_1,...,\delta_n$ 满足 $\delta_n\delta_{n-1}\cdots\delta_1(s)\notin M$. 根据前面的讨论, 立即得到 φ 是定义合理的 $\Bbbk$-线性映射. 事实上 φ 是 $\Bbbk$-代数同态, 对任给 $as^{-1},bt^{-1}\in Z_\Delta(\text{Frac}A)$, 在 Frac$A$ 内总有

$$\varphi(\frac{ab}{st})=\frac{ab}{st}=\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\varphi(\frac{a}{s})\varphi(\frac{b}{t}),$$

因此在 A_M 内有 $\varphi(ab(st)^{-1})=\varphi(as^{-1})\varphi(bt^{-1})$, 这说明 φ 是 $\Bbbk$-代数同态, 再注意 $Z_\Delta(\text{Frac}A)$ 是域, 因此 φ 自动是代数嵌入. 现在结合前面的讨论知域 $Z_\Delta(\text{Frac}A/P)$ 可代数嵌入 A/M, 进而 $Z_\Delta(\text{Frac}A/P)$ 是 $\Bbbk$ 的有限扩张. 这说明 Δ-本原理想 P 是 Δ-有理素理想. $\square$

上述定理对不满足 $\dim_\Bbbk A<|k|$ 或无限生成的微分代数 A 未必成立.

Example 3.122. 考虑域 $\Bbbk$ 上形式幂级数环 $A=\Bbbk[[x]]$, 那么 $\dim_\Bbbk A=\dim_\Bbbk\Bbbk^{\mathbb{N}}$, 因为 $\Bbbk^{\mathbb{N}}$ 是无限维的, 所以 $\aleph_0<2^{\aleph_0}\leq|\Bbbk^{\mathbb{N}}|=|\Bbbk|\dim_\Bbbk\Bbbk^{\mathbb{N}}=\dim_\Bbbk\Bbbk^{\mathbb{N}}=\dim_\Bbbk A$. 在 A 上赋予平凡的 Poisson 结构, 即 $\{f,g\}=0,\forall f,g\in A$, 那么 A 的 Poisson 理想等价于 A 的理想. 此时 A 的 Poisson 素谱仅由零理想和唯一的极大理想 (x) 构成 (注意 A 的任意非零理想形如 $(x^s),s\geq 0$). 因此零理想是 Poisson 素谱内的局部闭点, 但不是 Poisson 本原理想.

3.16 同调光滑与斜 Calabi-Yau 代数

Definition 3.123 (完备复形与完备模)**.** 若含幺环 R 上的上链复形 $(X^\bullet,d^\bullet)$ 满足该复形拟同构于一个有界的有限生成投射复形, 则称该复形是**完备的** (perfect). 若将左 R-模 M 视作集中在 0 次的复形后该复形完备, 则称 M 是**完备模** (perfect module).

Proposition 3.124. 设 M 是含幺环 R 上左模, 那么 M 是完备模的充要条件是 M 存在一个有限长的有限生成投射分解.

Proof. 充分性是明显的, 这里仅验证必要性. 假设有有界的有限生成投射复形 $(P^\bullet, d^\bullet)$ 满足存在模同态 $\varepsilon : P^0 \to M$ 给出下述拟同构:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P^{-n} \arrow[u] \arrow[r, "d^{-n}"] & \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[u] \arrow[r, "d^{-1}"] & P^0 \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r] & P^1 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^t \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

那么 $0 \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} \cdots \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0$ 是正合列并且有定义合理的模同构

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Ker}d^0/\mathrm{Im}d^{-1} &\to M \\ x + \mathrm{Im}d^{-1} &\mapsto \varepsilon(x) \end{aligned}$$

由此立即看到 $\mathrm{Im}d^{-1} = \mathrm{Ker}\varepsilon$ 并且 ε 是满射. 因此我们得到 M 的有限生成投射分解

$$0 \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} \cdots \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

□

Proposition 3.125 ([RR22])**.** 设 R 是含幺环, M 是完备左 R-模, 那么

$$\mathrm{p.dim}_R M = \sup\{i \in \mathbb{Z} | \mathrm{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}.$$

Proof. 不妨设 $M \neq 0$ 并且 $\mathrm{p.dim}_R M = n$, 下面说明 $\mathrm{Ext}^n_R(M, R) \neq 0$. 根据投射维数的刻画, 存在左 R-模 L 使得 $\mathrm{Ext}^n_R(M, L) \neq 0$. 考虑正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow 0$, 其中 F 是自由左 R-模, 那么它诱导 Ext 群长正合列, 由此可知 $\mathrm{Ext}^n_R(M, F) \neq 0$. 因为 M 存在有限生成的投射分解, 所以应用 [推论2.80] 可得 $\mathrm{Ext}^n_R(M, A) \neq 0$. □

Remark. 事实上证明过程中也表明含幺环 R 上的左模 M 如果 $\mathrm{p.dim}_R M = n$, 那么总存在自由模 F 使得 $\mathrm{Ext}^n_R(M, F) \neq 0$. 在 [定理3.46] 的证明中也已经用到了这个观察.

Definition 3.126 (同调光滑代数)**.** 设 A 是含幺交换环 K 上代数, 若 A 作为包络代数 $A^e = A \otimes_K A^{op}$ 上的左模是完备的, 则称 A 是**同调光滑的** (homologically smooth).

Proposition 3.127. 设 A 是含幺交换环 K 上的同调光滑代数, 那么

$$\mathrm{p.dim}_{A^e} A = \max\{i \in \mathbb{N} | \mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) \neq 0\}.$$

一般将 $\mathrm{p.dim}_{A^e} A$ 称为 A 的 **Hochschild 维数**. 若 K 是域, 则 $\mathrm{p.dim}_{A^e} A \geq \mathrm{l.gl.dim} A$(回忆 [定理3.31]). 注意, 当 K 是域时, $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e)$ 就是 A 系数在 A^e 中的 i 次 Hochschild 上同调.

Example 3.128. 设 R 是左 Noether 环, 则左 R-模 M 是完备模当且仅当 M 有限生成且 $\mathrm{p.dim}_R M < +\infty$.

Proof. 必要性明显, 下证充分性. 设 $\mathrm{p.dim}_R M = n$, 那么存在有限生成投射模 $P^0, ..., P^{-n+1}$ 使得存在下述形式的正合列：

$$0 \longrightarrow K^{-n} \longrightarrow P^{-n+1} \xrightarrow{d^{-n+1}} \cdots \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

进而由 $\mathrm{p.dim}_R M = n$ 得到 K^{-n} 投射, 所以 M 有长度为 n 的有限生成投射分解. □

V. Ginzburg 于 2006 年引入了下面的 Calabi-Yau 代数, 它产生于 Calabi-Yau 流形的几何.

Definition 3.129 ([Gin06])**.** 设 A 是含幺交换环 K 上的同调光滑代数, d 是自然数. 如果有 A-A 双模同构

$$\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) \cong \begin{cases} 0, & i \neq d; \\ A, & i = d, \end{cases}$$

则称 A 是 d 维 **Calabi-Yau 代数** (这里 $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e)$ 的 A-A 双模结构来自 A^e 的右 A^e-模结构). 因此域上 d 维 Calabi-Yau 代数即为 d 次 Hochschild 上同调是 A, 其余次数 Hochschild 上同调是零的同调光滑代数.

称代数自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}_K A$ 是**内自同构**, 如果存在可逆元 $b \in A$ 使得 $\sigma(a) = bab^{-1}, \forall a \in A$, 易见所有内自同构构成的群 $\mathrm{Inn}_K(A)$ 构成 $\mathrm{Aut}_K A$ 的正规子群. 称 $\mathrm{Aut}_K A$ 关于内自同构群的商为**外自同构群**. 如果 A 有自同构 $\tau, \mu \in \mathrm{Aut}_K A$, 那么可天然赋予每个 A-A 双模 M 新的双模结构：$axb = \tau(a)x\mu(b), \forall a, b \in A, x \in M$. 将该双模记作 ${}^\tau M^\mu$. 若 $\tau = \mathrm{id}$, 记 ${}^\tau M^\mu$ 为 M^μ; 若 $\mu = \mathrm{id}$, 记 ${}^\tau M^\mu$ 为 ${}^\tau M$. 对任何自同构 μ, 易验证双模同构 $A^\mu \otimes_A {}^\mu A \cong A, {}^\mu A \otimes_A A^\mu \cong A$, 所以 A^μ 是可逆双模. 在 Morita 等价理论中, 我们知道每个可逆 R'-R 双模 ${}_{R'}P_R$ 决定的张量函子 $- \otimes_{R'} P$ 给出模范畴 $\mathrm{Mod}\text{-}R'$ 到 $\mathrm{Mod}\text{-}R$ 的等价函子, 进而得到可逆 R'-R 双模同构类与 $\mathrm{Mod}\text{-}R'$ 到 $\mathrm{Mod}\text{-}R$ 的等价函子自然同构类全体间有双射. 而含幺环 R 上所有可逆 R-R 双模同构类全体关于 $- \otimes_R -$ 可天然构成一个群, 即 R 的 **Picard 群** $\mathrm{Pic}(R)$. 因此, A^μ 所在的 A-A 双模同构类 $[A^\mu] \in \mathrm{Pic}(A)$.

Example 3.130. 设 K-代数 A 有代数自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}_K A$, 那么有双模同构 ${}^{\sigma^{-1}}A \cong A^\sigma$.

Example 3.131. 设 K-代数 A 有代数自同构 $\mu \in \mathrm{Aut}_K A$, 那么 A 双模同构于 A^μ 当且仅当 μ 是内自同构.

Proof. 必要性：如果 A 和 A^μ 作为 A-A 双模同构, 设同构映射为 φ, 则由 φ 是标准左 A-模同构知存在可逆元 $b \in A$ 使得 $\varphi = b_r$, 即 φ 由某个可逆元的右乘变换决定. 于是有 $ab = \varphi(a) = \varphi(1)a = b\mu(a), \forall a \in A$. 因此 μ 是内自同构. 充分性：设 μ 是内自同构, 那么存在 A 的可逆元 b 使得 $\mu(a) = bab^{-1}, \forall a \in A$. 于是 $\phi : A \to A, x \mapsto xb^{-1}$ 给出 A-A 双模同构. □

Remark. 类似地, 若 K-代数 A 有代数自同构 $\mu_1, \mu_2 \in \mathrm{Aut}_K A$ 满足双模同构 $A^{\mu_1} \cong A^{\mu_2}$, 那么 μ_1 与 μ_2 向差个内自同构, 具体地, 存在内自同构 σ 使得 $\mu_2 = \sigma\mu_1$.

Definition 3.132 ([Sch12])**.** 设 A 是含幺交换环 K 上的同调光滑代数, d 是自然数, U 是可逆 A-A 双模. 如果有 A-A 双模同构

$$\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) \cong \begin{cases} 0, & i \neq d; \\ U, & i = d, \end{cases}$$

则称 A 是**斜 Calabi-Yau 代数** (twisted Calabi-Yau algebra).

Remark. 若定义中 $U = A^\mu$, 其中 $\mu \in \mathrm{Aut}_K A$, 则称 μ 是 A 的 **Nakayama 自同构** (在相差一个内自同构意义下唯一). 这里斜 Calabi-Yau 代数的维数被称为是 d 的原因是, 根据 [命题3.127], 此时 $\mathrm{p.dim}_{A^e} A = d$.

参考文献

[ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*. Cambridge University Press, 2006.

[Bas62] Hyman Bass. Injective dimension in noetherian rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 102(1):18–29, 1962.

[BG03] Kenneth A Brown and Iain Gordon. Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory. 2003.

[BG12] Ken Brown and Ken R Goodearl. *Lectures on algebraic quantum groups*. Birkhäuser, 2012.

[BH98] Winfried Bruns and H Jürgen Herzog. *Cohen-macaulay rings*. Number 39. Cambridge university press, 1998.

[Bor12] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126. Springer Science & Business Media, 2012.

[Dix96] Jacques Dixmier. *Enveloping algebras*. Number 11. American Mathematical Soc., 1996.

[Dol09] Vasiliy Dolgushev. The van den bergh duality and the modular symmetry of a poisson variety. *Selecta Mathematica*, 14(2):199–228, 2009.

[Eis04] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer Science+Business Media, 2004.

[Gin06] Victor Ginzburg. Calabi-yau algebras. *arXiv preprint math/0612139*, 2006.

[GL00] K Goodearl and E Letzter. Quantum -space as a quotient of classical -space. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(12):5855–5876, 2000.

[Goo06] Kenneth R Goodearl. A dixmier-moeglin equivalence for poisson algebras with torus actions. *Contemporary Mathematics*, 419:131, 2006.

[Hum12] James E Humphreys. *Linear algebraic groups*, volume 21. Springer Science & Business Media, 2012.

[Jac09] Nathan Jacobson. *Basic algebra II*. Dover Publications, 2nd edition, 2009.

[Jat69] Arun Vinayak Jategaonkar. A counter-example in ring theory and homological algebra. *Journal of Algebra*, 12(3):418–440, 1969.

[Kap58] Irving Kaplansky. Projective modules. *Annals of Mathematics*, 68(2):372–377, 1958.

[Lam99] T. Y. Lam. *Lectures on Modules and Rings*. Springer-Verlag, 1999.

[Lam01] T. Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2001.

[LWW15] J Luo, S-Q Wang, and Q-S Wu. Twisted poincaré duality between poisson homology and poisson cohomology. *Journal of Algebra*, 442:484–505, 2015.

[Mat70] Hideyuki Matsumura. *Commutative algebra*, volume 120. WA Benjamin New York, 1970.

[Mat87] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[MW05] J. H. Maclagan-Wedderburn. A theorem on finite algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6(3):349–352, 1905.

[NR73] Liudmila A Nazarova and A. V. Roıter. Kategornye matrichnye zadachi i problema brauera-trella. *Izdat. "Naukova Dumka" , Kiev*, 1973.

[Roı68] A. V. Roıter. Unbounded dimensionality of indecomposable representations of an algebra with an infinite number of indecomposable representations. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 32(6):1275–1282, 1968.

[RR22] Manuel L Reyes and Daniel Rogalski. Graded twisted calabi–yau algebras are generalized artin–schelter regular. *Nagoya Mathematical Journal*, 245:100–153, 2022.

[Sch12] Travis Schedler. Deformations of algebras in noncommutative geometry. *arXiv preprint arXiv:1212.0914*, 2012.

[Sma68] Lance W Small. A change of rings theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 19(3):662–666, 1968.

[Wei94] Charles A Weibel. *An introduction to homological algebra*. Number 38. Cambridge university press, 1994.

[Zak69] Abraham Zaks. Injective dimension of semi-primary rings. *Journal of Algebra*, 13(1):73–86, 1969.