Zariski 切空间

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 10 日

1 Zariski 切空间

Definition 1.1 (Zarisiki 切空间)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, 对应理想为 $I(X)$, $p \in X$. 称 $T_pX = V(\{\sum_{i=1}^{n}(\partial F/\partial x_i)(p)x_i | F \in I(X)\}) \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇 X 在 p 处 **Zariski 切空间**.

Example 1.2. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是不可约多项式 $f \in \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 的零点集, 那么 T_pX 即线性方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)x_n = 0$$

的解空间. 例如考虑仿射曲线 $C = V(x^3 - y^2) \subseteq \Bbbk^2$, 它在 $p = (0, 0)$ 处的切空间 $T_pC = \Bbbk^2$. 一般地, 若仿射簇 X 是不可约的且是 1 维的, 则称 X 是**仿射曲线**.

光滑流形在一点处的切空间可由该流形光滑函数环在给定点的全体导子给出, 下面是仿射簇情形的概念.

Definition 1.3 (导子)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 称 $\Bbbk$-线性映射 $D : A(X) \to \Bbbk$ 是 X 在点 p 处的**导子**, 如果 $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f), \forall f, g \in A(X)$. 这里 $A(X)$ 表示仿射簇 X 的坐标环.

Remark 1.4. 如果 $\Bbbk$ 是代数闭域, $A(X)$ 到 X 上的正则函数环是标准嵌入是代数同构. 因此当我们考虑代数闭域上的仿射簇时, 常将该簇的正则函数环与坐标环视作等同.

仿射簇在一点处的切空间也可以由仿射簇在给定点处全体导子给出.

Lemma 1.5. 设 $\Bbbk$ 是域, $X \subseteq \Bbbk^n$ 是仿射簇, $p \in X$. 那么 T_pX 与 X 在 p 点导子全体构成的线性空间 Ω_p 间有 $\Bbbk$-线性同构 $\varphi : T_pX \to \Omega_p, a = (a_1, ..., a_n) \mapsto D_a : A(X) \to \Bbbk$, 其中 $D_a : A(X) \to \Bbbk, f \mapsto \sum_{i=1}^{n}(\partial f/\partial x_i)(p)a_i$ 是由多项式函数 f 在每个变量上的偏导数诱导的标准导子.

Proof. 首先可直接计算验证 $\varphi : T_pX \to \Omega_p\}, a = (a_1, ..., a_n) \mapsto D_a$ 是定义合理的 $\Bbbk$-线性映射. 若 $a, b \in T_pX$ 满足 $D_a = D_b$, 把这两个导子作用各坐标函数 $x_i : X \to \Bbbk$ 可得 $a = b$, 由此得到映射 φ 是单射. 对任何 p 处的 $\Bbbk$-导子 D, 命 $a_i = D(x_i)$ 得到点 $a = (a_1, ..., a_n) \in \Bbbk^n$, 直接验证可得该点满足 $D_a = D$, 故 φ 满. □

仍设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇并取定 X 内一点 p. 记 $\mathfrak{m}_p=\{f\in A(X)|f(p)=0\}$ 是 p 所对应 $A(X)$ 的极大理想, 如果 D 是仿射簇 X 在点 p 处的导子, 那么 $D(\mathfrak{m}_p^2)=0$. 所以每个导子 D 可天然诱导出 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 上的 $\Bbbk$-线性函数. 反之, 任给 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 上的 $\Bbbk$-线性函数 l, 通过定义 $D_l:A(X)\to k, f\mapsto l(\overline{f-f(p)})$ 可得到一导子, 可直接计算验证这给出 X 在 p 点导子全体与 $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ 间的 k-线性同构, 于是我们得到下述命题.

Proposition 1.6. 设 $\Bbbk$ 是域, $X\subseteq\Bbbk^n$ 是仿射簇, $p\in X$, p 点对应 $A(X)$ 的极大理想记作 $\mathfrak{m}_p$. 则作为 $\Bbbk$-线性空间有同构 $T_pX\cong(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. 特别地, $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 也是有限维线性空间, 满足 $\dim_{\Bbbk}T_pX=\dim_{\Bbbk}\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$.

记 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是仿射簇 X 在点 $p\in X$ 处的局部环, $\mathfrak{m}_p$ 是点 p 对应的极大理想, 那么总有 $\Bbbk$-代数同构 $\mathcal{O}_{X,p}\cong A(X)_{\mathfrak{m}_p}$. 若记 p 在 $A(X)$ 中对应的极大理想是 M_p, 那么可直接验证 $\Bbbk$-线性同构 $M_p/M_p^2\cong(\mathfrak{m}_p)_{\mathfrak{m}_p}/(\mathfrak{m}_p^2)_{\mathfrak{m}_p}$(一般地, 对含幺交换环 K 上的交换代数 R, 若有极大理想 $\mathfrak{m}$, 那么有标准 K-模同构 $\theta:\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2, x+\mathfrak{m}^2\mapsto x/1+\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2$, θ 明显是单射, 要看到 θ 是满射, 对任给 $x/s\in\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$, 因为 $s\notin\mathfrak{m}$, 故存在 $a\in R$ 使得 $1-sa\in\mathfrak{m}$, 于是 $x-xsa\in\mathfrak{m}^2$, 这意味着 $x/s+\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2=xa/1+\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2$, 所以 θ 是满射). 总之, 我们得到

Proposition 1.7. 设 $\Bbbk$ 是域, $X\subseteq\Bbbk^n$ 是仿射簇, $p\in X$, $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 X 在 p 点处的局部环. 若记 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的极大理想, 则有 $\Bbbk$-线性同构 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*\cong T_pX$. 特别地, $\dim_{\Bbbk}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=\dim_{\Bbbk}T_pX$. 并注意 $\Bbbk\cong\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}$ 是剩余域.

注意到 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是交换 Noether 局部环, 故有交换 Noether 局部环的维数特性立即得到:

Corollary 1.8. 设 $\Bbbk$ 是域, $X\subseteq\Bbbk^n$ 是仿射簇, $p\in X$. 那么 $\text{k.dim}\mathcal{O}_{X,p}\le\dim_{\Bbbk}T_pX$.

Remark 1.9. 若进一步假设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 那么 $\mathcal{O}_{X,p}$ 的 Krull 维数就是 X 在点 p 处的局部维数.

2 光滑点和奇异点

在 [推论1.8] 中我们已经看到仿射簇在一点处局部环的 Krull 维数总不超过这点处 Zariski 切空间的线性维数. 当取到等号时, 就得到了光滑点的概念.

Definition 2.1 (光滑点, 奇异点)**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $X\subseteq\Bbbk^n$ 是仿射簇, $p\in X$. 当 $\dim_{\Bbbk}T_pX=\dim_pX$ 时, 称 p 是 X 的**光滑点**, 否则称 p 是**奇异点**. 对簇 X, 若在每点都光滑, 则称该簇是**光滑簇**.

根据正则局部环的定义以及 [推论1.8] 我们立即得到:

Theorem 2.2 (光滑性刻画)**.** 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $X\subseteq\Bbbk^n$ 是仿射簇, $p\in X$. 那么 X 在点 p 处的局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是正则局部环的充要条件是 $p\in X$ 是光滑点.

Remark 2.3. 因此由正则环的定义可知代数闭域上仿射簇光滑当且仅当该簇坐标环是正则环.

Example 2.4. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, 考虑仿射曲线 $C=V(x^3-y^2)\subseteq\Bbbk^2$, 它在 $p=(0,0)$ 处的切空间 $T_pC=\Bbbk^2$. 而该曲线在 p 处局部环的 Krull 维数不可能超过 $A(C)$ 的 Krull 维数, 故 $\text{k.dim}\mathcal{O}_{C,p}\le 1<2=\dim_{\Bbbk}T_pC$(事实上 $A(C)$ 作为 1 维 Noether 整区它在极大理想处的局部化也是 1 维 Noether 整区). 故 p 是 C 的奇异点.

Example 2.5 (曲线的光滑性)**.** 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, $C\subseteq\Bbbk^n$ 是仿射曲线, $p\in C$. 则 C 在 p 点光滑当且仅当 $\mathcal{O}_{C,p}$ 是离散赋值环. C 是光滑曲线的充要条件是 $A(C)$ 是 Dedekind 整区.