

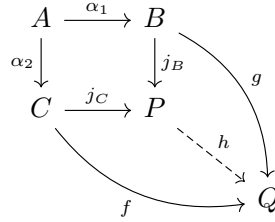
# 群范畴中的推出

戚天成 ☒

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 2 日

任给群  $A, B, C$  以及群同态  $\alpha_1 : A \rightarrow B, \alpha_2 : A \rightarrow C$ , 若存在群  $P$  以及群同态  $j_B : B \rightarrow P, j_C : C \rightarrow P$  满足  $j_C \alpha_2 = j_B \alpha_1$  且对任何群  $Q$  以及群同态  $f : C \rightarrow Q, g : B \rightarrow Q$ , 如果  $f \alpha_2 = g \alpha_1$ , 那么存在唯一的群同态  $h$  使得  $f = h j_C, g = h j_B$ , 即下图交换:



则称  $(P, j_B, j_C)$  是图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha_1} & B \\ \alpha_2 \downarrow & & \\ & & C \end{array}$$

的推出 (pushout) 或  $B$  与  $C$  沿  $A$  的融合自由积 (amalgamated free product). 这份笔记的目的是记录群范畴中推出的具体构造.

**Theorem.** 对群  $A, B, C$  以及同态  $\alpha_1 : A \rightarrow B, \alpha_2 : A \rightarrow C$ ,  $B$  与  $C$  沿  $A$  的推出存在且在同构意义下唯一.

*Proof.* 如果存在不难验证同构唯一性, 这里仅证明存在性. 设  $(B * C, i_B, i_C)$  是  $B$  与  $C$  的自由积, 记  $N$  是集合  $\{i_B(\alpha_1(a))i_C(\alpha_2(a^{-1})) | a \in A\}$  在  $B * C$  中生成的正规子群. 命

$$P = B * C / N,$$

$$j_B : B \rightarrow P, b \mapsto i_B(b)N,$$

$$j_C : C \rightarrow P, c \mapsto i_C(c)N,$$

下面验证  $(P, j_B, j_C)$  是  $B$  与  $C$  沿  $A$  的融合自由积. 任给  $a \in A$ , 有  $i_B(\alpha_1(a))i_C(\alpha_2(a^{-1})) \in N$ , 所以

$$j_B \alpha_1(a) = i_B(\alpha_1(a))N = i_C(\alpha_2(a))N = j_C \alpha_2(a),$$

于是  $j_C\alpha_2 = j_B\alpha_1$ . 现设群  $Q$  以及群同态  $f: C \rightarrow Q, g: B \rightarrow Q$  满足  $f\alpha_2 = g\alpha_1$ , 由自由积的定义知存在唯一的群同态  $h_1: B * C \rightarrow Q$  使得  $f = h_1i_C, g = h_1i_B$ , 即下图交换:

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{i_C} & B * C & \xleftarrow{i_B} & B \\ & \searrow f & \downarrow h_1 & \swarrow g & \\ & & Q & & \end{array}$$

于是对任给  $a \in A, h_1(i_B(\alpha_1(a))i_C(\alpha_2(a^{-1}))) = h_1(i_B(\alpha_1(a)))h_1(i_C(\alpha_2(a^{-1}))) = (g\alpha_1)(a)(f\alpha_2)(a^{-1}) = (g\alpha_1(a))(f\alpha_2(a))^{-1} 1_Q$ . 故  $N$  是  $\text{Ker}h_1$  的正规子群, 从而导出群同态  $h: P \rightarrow Q, pN \mapsto h_1(p)$ . 我们说明  $f = hj_C, g = hj_B$ : 任取  $b \in B, c \in C, hj_C(c) = h(i_C(c)N) = h_1i_C(c) = f(c), hj_B(b) = h(i_B(b)N) = h_1i_B(b) = g(b)$ . 最后验证群同态  $h$  的唯一性, 如果还有群同态  $\hat{h}: P \rightarrow Q$  使得  $\hat{h}j_C = f, \hat{h}j_B = g$ , 则  $\hat{h}j_C = hj_C, \hat{h}j_B = hj_B$ . 这表明  $\hat{h}(i_C(c)N) = h(i_C(c)N), \hat{h}(i_B(b)N) = h(i_B(b)N), \forall b \in B, c \in C$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow \alpha_2 & & \searrow \alpha_1 & \\ C & \xrightarrow{j_C} & P & \xleftarrow{j_B} & B \\ & \searrow f & \downarrow h, \hat{h} & \swarrow g & \\ & & Q & & \end{array}$$

记  $\pi: B * C \rightarrow P, x \mapsto xN$  是自然投射, 则  $h\pi i_C = \hat{h}\pi i_C, h\pi i_B = \hat{h}\pi i_B$ . 由自由积的定义知  $h\pi = \hat{h}\pi$ , 因为  $\pi$  是满射, 所以  $h = \hat{h}$ , 这就证明了  $h$  的唯一性. 所以  $(P, j_B, j_C)$  是  $B$  与  $C$  沿  $A$  的融合自由积.  $\square$

$$\begin{array}{ccccc} C & & & & B \\ & \searrow i_C & & \swarrow i_B & \\ & & B * C & & \\ & & \downarrow \pi & & \\ & & B * C / N & & \\ & \searrow f & \downarrow h, \hat{h} & \swarrow g & \\ & & Q & & \end{array}$$