Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 10 月 29 日

这份笔记的目的是记录域上 Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理同调与上同调形式的叙述以及相关基础概念. Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理最早由 G. Hochschild(德国, 1915-2010), B. Kostant(美国, 1928-2017) 与 A. Rosenberg(德国, 1926-2007) 发现并证明 [HKR62]. Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理表明对域上本质有限型光滑的交换代数, 其 Hochschild(上) 同调代数分次代数同构于其 Kähler 微分模 (导子模) 决定的外代数. 特别地, 代数闭域上光滑仿射簇 X 的坐标环 $\Bbbk[X]$ 作为仿射光滑代数的 Hochschild 上同调与同调间有对偶 $H^n(\Bbbk[X],\Bbbk[X]) \cong H_n(\Bbbk[X],\Bbbk[X])^*$.

目录

1 Hochschild(上) 同调的代数结构

1.1 Shuffle 积与 Hochschild 同调代数

设 A 是含幺交换环 K 上代数, 满足 A 是平坦 K-模, 则对任何 A-A 双模 M 下述 Hochschild 链复形的同调给出 A 系数在 M 中的 Hochschild 同调.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(A,M) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(A,M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(A,M) \xrightarrow{d_1} C_0(A,M) \longrightarrow 0$$

这里 $C_n(A,M)=A\otimes_K A\otimes_K\cdots\otimes_K A\otimes_K M=A^{\otimes n}\otimes_K M$, 微分 d_n 将每个形如 $a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes x\in C_n(A,M)$ 的元素映至

$$(-1)^n a_1\otimes\cdots\otimes a_{n-1}\otimes a_n x+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a_1\otimes\cdots a_i a_{i+1}\cdots\otimes a_n\otimes x+a_2\otimes\cdots\otimes a_n\otimes xa_1.$$

以下设 $M=A$ 且 A 是 K 上交换代数. 定义 K-双线性映射 $-\times -: C_n(A,A)\times C_m(A,A)\to C_{n+m}(A,A)$ 满足：对 $a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes a_0\in C_n(A,A), a_{n+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+m}\otimes a_0'\in C_m(A,A)$, 有

$$(a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes a_0)\times(a_{n+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+m}\otimes a_0')=\sum_{\sigma\in S_{p,q}}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes a_{\sigma^{-1}(2)}\otimes\cdots\otimes a_{\sigma^{-1}(n+m)}\otimes a_0a_0'.$$

称任意两个 Hochschild 链 $c\in C^n(A,A), c'\in C^m(A,A)$ 在上述双线性映射 $-\times -: C_n(A,A)\times C_m(A,A)\to C_{n+m}(A,A)$ 下的像 $c\times c'$ 为这两个链的 **shuffle 积**. 现记

$$C_*(A,A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}C_n(A,A), H_*(A,A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}H_n(A,A)$$

那么可以将 shuffle 积线性地扩充到 $C_*(A,A)$ 上, 通过直接地计算可知可得：

Lemma 1. 设 A 是 K 上交换代数满足 A 是平坦 K-模, 那么：
(1) 分次 K-模 $C_*(A,A)$ 上 shuffle 积是结合的且 $(C_*(A,A),\times)$ 构成分次交换代数.
(2) 对任何 Hochschild 链 $c\in C^n(A,A), c'\in C^m(A,A)$ 有 $d_{n+m}(c\times c')=d_n(c)\times c'+(-1)^n c\times d_m(c')$. 所以 shuffle 积可诱导 $H_*(A,A)$ 上, 使得 $(H_*(A,A),\times)$ 构成分次交换 K-代数, 称为 A 的 **Hochshild 同调代数**.

Proof. 该引理的计算验证可参见 [Lod13, p.123, Proposition 4.2.2] 或 [Wei94, p.321, Proposition 9.4.2]. □

记 $\Omega(A)$ 是交换代数 A 的 Kähler 微分模, 以下总默认 A 是平坦 K-模, 那么在系数环上平坦的交换代数的 1 次 Hochschild 同调可由 $\Omega(A)$ 具体表示, 具体地, 有下述结果.

Proposition 2. 设 A 是含幺交换环 K 上的交换代数, 满足 A 是平坦 K-模. 设 $\Omega(A)$ 是 A 的 Kähler 微分模, M 是 A-模, 将其天然视作 A-A 双模. 那么 A 系数在 M 中的 Hochschild 1 次同调 $H_1(A,M)\cong\Omega(A)\otimes_A M$(这里 Hochschild 同调 $H_1(A,M)$ 的 A-模结构来自 M 上的 A-模结构). 特别地, 若取 $M=A$, 则 A 的 Kähler 微分模和 A 的 1 次 Hochschild 同调作为 A-模同构.

Proof. 考虑 A 系数在 M 中的 Hochschild 复形, 那么 1 次微分是零, 2 次微分为

$$\delta^2: A\otimes_K A\otimes_K M\to A\otimes_K M, a\otimes b\otimes m\mapsto a\otimes bm-ab\otimes m+b\otimes ma,$$

所以作为 K-模, 有

$$H_1(A,M)\cong A\otimes_K M/(\{a\otimes bm-ab\otimes m+b\otimes ma|a,b\in R,m\in M\}),$$

易知存在唯一的 K-模同态 $\varphi: H_1(A,M)\to\Omega(A)\otimes_A M$ 使得 $\varphi(a\otimes m+B_1(A,M))=da\otimes m$. 通过 Kähler 微分模的泛导子定义可天然构造 A-模同态 $\psi:\Omega(A)\otimes_A M\to H_1(A,M)$ 使得 $\psi(bda\otimes m)=a\otimes bm+B_1(A,M)$. 可直接验证 ψ 与 φ 是互逆的映射, 所以 $H_1(A,M)\cong\Omega(A)\otimes_A M$. □

注意到 $\Omega(A)$ 与 $H_1(A,A)$ 的等同诱导了 $\Omega(A)$ 到 $H_*(A,A)$ 有标准 A-模同态 $\theta:\Omega(A)\to H_*(A,A), adb\mapsto \overline{b\otimes a}$. 可直接计算验证 $\theta(x)^2=0,\forall x\in\Omega(A)$, 因此外代数 $E_A(\Omega(A))$ 的泛性质诱导出 A-代数同态

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\theta"'] & & E_A(\Omega(A)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\Omega^n(A) \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
& H_*(A,A) &
\end{tikzcd}$$

易见 ψ 是分次 A-代数同态, 并且

$$\psi(a_0da_1\wedge\cdots\wedge da_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\overline{a_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes a_{\sigma(n)}\otimes a_0}.$$

1.2 杯积与 Hochschild 上同调代数

本节我们介绍代数的 Hochschild 上同调上的代数结构. 考虑含幺交换环 K 上代数 A, 并设 A 是投射 K-模. 对任何 A-A 双模 M, 若记 $C^0(A,M)=M, C^1(A,M)=\mathrm{Hom}_K(A,M), C^n(A,M)$ 表示 A^n 到 M 的多重 K-线性映射全体. 对每个自然数 n, 记 $\delta^n: C^n(A,M)\to C^{n+1}(A,M)$ 为

$$\delta^n(f)(x_1,...,x_{n+1})=x_1f(x_2,...,x_{n+1})+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_1,...,x_ix_{i+1},...,x_n)+(-1)^{n+1}f(x_1,...,x_n)x_{n+1},$$

其中 $\delta^0: M\to C^1(A,M), u\mapsto\delta^0(u), \delta^0(u)(x)=xu-ux$, 那么便有用于计算 Hochschild 上同调的上链复形

$$0\longrightarrow C^0(A,M)\xrightarrow{\delta^0}C^1(A,M)\xrightarrow{\delta^1}C^2(A,M)\xrightarrow{\delta^2}\cdots\longrightarrow C^n(A,M)\xrightarrow{\delta^n}\cdots,$$

如无特别说明, 以下讨论中出现的记号 δ 均表示 Hochschild 上链复形的微分.

现取 $M=A$, 那么对任给 $f\in C^p(A,A)$ 以及 $g\in C^q(A,A)$, 定义

$$\cup: C^p(A,A)\times C^q(A,A)\to C^{p+q}(A,A), (f,g)\mapsto f\cup g$$

为 $(f\cup g)(a_1,...,a_{p+q})=f(a_1,...,a_p)g(a_{p+1},...,a_{p+q}),\forall a_1,...,a_{p+q}\in A$. 称 $f\cup g$ 为 f 与 g 的**杯积**. 若记

$$C^*(A,A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}C^n(A,A),$$

那么可将 $\cup$ 天然地 K-线性扩充为 $C^*(A,A)$ 上二元运算, 仍记作 $\cup$. 根据杯积的定义我们立即看到 $(C^*(A,A),\cup)$ 是 $\mathbb{N}$-分次代数. 并且对任何 $f\in C^p(A,A), g\in C^q(A,A)$, 可直接计算得 $\delta^{p+q}(f\cup g)=\delta f\cup g+(-1)^p f\cup\delta g$. 这一观察表明任意两个 Hochschild 上闭链的杯积还是 Hochschild 上闭链, 所以有

Proposition 3 (Hochschild 上同调环)**.** 设 A 是 K-代数, 满足 A 是投射 K-模, 则上述定义的杯积诱导

$$H^*(A,A)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}H^i(A,A)$$

上 K-双线性映射 $\cup: H^*(A,A)\times H^*(A,A)\to H^*(A,A)$ 使得 $(H^*(A,A),\cup)$ 成为 $\mathbb{N}$-分次代数. 称 $H^*(A,A)$ 为 A 的 **Hochschild 上同调代数**.

与交换代数的 Hochschild 同调代数一样, Hochschild 上同调代数也是分次交换的, 其计算验证也很复杂, 对 $f \in C^p(A,A), g \in C^q(A,A)$, 定义

$$f \bullet g : A^{p+q-1} \to A, (a_1, ..., a_{p+q-1}) \mapsto \sum_{i=1}^{p} (-1)^{(q-1)(i-1)} f(a_1, ..., a_{i-1}, g(a_i, ..., a_{i+q-1}), a_{i+q}, ..., a_{p+q-1}),$$

称之为 $f \bullet g$ 为 f 与 g 的**圈积**. 可直接计算验证

Lemma 4. 设 A 是 K-代数, 那么对任何 $f \in C^p(A,A), g \in C^q(A,A)$, 有

$$f \cup g - (-1)^{mn} g \cup f = \delta(g) \bullet f + (-1)^p \delta(g \bullet f) + (-1)^{p-1} g \bullet \delta(f).$$

Corollary 5. 设 K-代数 A 满足 A 是投射 K-模, 那么 Hochschild 上同调代数 $(H^*(A,A), \cup)$ 构成分次交换代数, 即对任何齐次元 $\overline{f} \in H^p(A,A), \overline{g} \in H^q(A,A)$, 有 $\overline{f} \cup \overline{g} = (-1)^{mn} \overline{g} \cup \overline{f}$.

2 Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理

2.1 同调形式

Hochschild-Kostant-Rosenberg Theorem (同调形式)**.** 设 A 是域 $\Bbbk$ 上交换代数, 设 $\psi : E_A(\Omega(A)) \to H_*(A,A)$ 是由标准 A-模同态 $\theta : \Omega(A) \to H_*(A,A), adb \mapsto \overline{b \otimes a}$ 经外代数泛性质诱导出的分次 A-代数同态, 即有

$$\psi(a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \overline{a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)} \otimes a_0}.$$

那么当 A 是本质有限型光滑代数时, ψ 时分次代数同构. 若 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$, 那么对 ψ 限制在指标为 n 的分次项上的同态 $\psi_n : \Omega^n(A) \to H_n(A,A)$ 有逆映射

$$\varepsilon_n : H_n(A,A) \to \Omega^n(A), \overline{a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0} \mapsto \frac{1}{n!} a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n.$$

Proof. 该定理的证明可参见 [Lod13, p.103, Theorem 3.4.4] 或 [Wei94, p.322, Theorem 9.4.7]. 这里仅说明当域 $\Bbbk$ 的特征为零时, ψ 的逆映射 ε_n 将 $H_n(A,A)$ 中形如 $\overline{a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0}$ 的元素映至

$$\frac{1}{n!} a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n.$$

首先定义 $e_n : C_n(A,A) \to \Omega^n(A)$ 为将每个形如 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0$ 的元素映至 $(1/n!) a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n$ 的 A-模同态. 那么可得分次 A-模同态 $e : C_*(A,A) \to E_A(\Omega(A))$, 利用所有 (n,m)-shuffles 构成的集合 $S_{n,m}$ 中的元素数目是 C_{n+m}^n 可以直接验证 e 保持齐次元的乘法, 进而知 e 是分次 A-代数同态. 再直接计算验证 Hochschild 边缘链群 $B_n(A,A) \subseteq \mathrm{Ker} e_n$, 因此 e 可诱导分次代数层面的代数同态 $\varepsilon : H_*(A,A) \to E_A(\Omega(A))$. 对每个自然数 n, 有

$$\varepsilon_n \psi(a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_0 da_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge da_{\sigma(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n.$$

而上式最后一个等号就是 $a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n$, 所以结论成立. $\square$

Remark 6. 从证明过程中我们看到, 只要基域特征为零, 我们总可以定义出 A-分次代数同态

$$\varepsilon : \varepsilon : H_*(A, A) \to E_A(\Omega(A))$$

使得该分次代数同态在每个分次项上的作用为

$$\varepsilon_n : H_n(A, A) \to \Omega^n(A), \overline{a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0} \mapsto \frac{1}{n!} a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n.$$

并且 ε 与定理中的 ψ 满足 $\mathrm{id} = \varepsilon\psi$(见 [Wei94, p.322, Corollary 9.4.4]).

对 K 上本质有限型光滑代数 A, $\Omega(A)$ 是有限生成投射 A-模, 所以存在正整数 n 使得 $\Omega^\ell(A) = 0, \forall \ell \geq n$. 此时, 称

$$\ell = \max\{n \in \mathbb{N} | \Omega^n(A) \neq 0\}$$

为代数 A 的**光滑维数**. $\Omega^\ell(A)$ 被称为 A 的**典范丛**. 如果进一步 $\Omega^\ell(A) \cong A$, 则称 A 有平凡的典范丛, 这时称 $\Omega^\ell(R)$ 作为自由 R-模的生成元 η 为 R 的一个**体积形式**. 如果 P 是非零有限生成投射 A-模, 那么 P^* 是有限生成投射模且 $P \cong P^{**}$ 蕴含 $P^* \neq 0$. 所以一旦交换代数 A 满足 $\Omega(A)$ 是有限生成投射模, 那么不仅各阶 Kähler 微分形式 $\Omega^r(A)$ 是有限生成投射模, 而且 $\wedge_A^r \mathrm{Der}_K A \cong \mathfrak{X}^r(A)$ 都是有限生成投射 A-模 (其中 $\mathfrak{X}^r(A)$ 表示 A 上所有交错 r-重线性导子构成的 A-模). 这时, 我们也可以看到 $\wedge_A^r \mathrm{Der}_K A \neq 0$ 当且仅当 $\Omega^r(A) \neq 0$. 进而这时交换代数 A 的光滑维数也可以由 $\ell = \max\{n \in \mathbb{N} | \wedge_A^n \mathrm{Der}_K A \neq 0\}$ 给出.

由 A^e 是正则代数 (见 [Wei94, p.322 Proposition 9.4.6]) 知 $\mathrm{p.dim}_{A^e} A < +\infty$, 故 A 是同调光滑代数. Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理表明对域 $\Bbbk$ 上本质有限型光滑代数 A 有 A-模同构 $\Omega^n(A) \cong H_n(A, A)$. 特别地, $\mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, A)$ 对所有的自然数 n 都是有限生成投射 A-模, 于是 [HKR62, Lemma 4.1] 可证明

Corollary 7. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上本质有限型交换代数, 那么有分次 A-代数同构 $\rho : H^*(A, A) \to \mathfrak{X}^*(A)$, 这里 ρ 满足将每个 $f \in C^n(A, A)$ 所在等价类 $\overline{f} \in H^n(A, A)$ 映至下述交错 n-重线性导子

$$\begin{aligned} \rho(\overline{f}) : \wedge^n A &\to A \\ a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

Proof. 该推论的证明过程可参见 [WZ21, Proposition 3.5]. □

回忆对含幺交换环 K 上交换代数 A, 只要 $\Omega(A)$ 是有限生成投射 A-模, 那么 $\mathrm{Der}_K A$ 到 $\mathfrak{X}^*(A)$ 的自然嵌入 $\theta : \mathrm{Der}_K A \to \mathfrak{X}^*(A), \delta \mapsto \delta$ 由外代数泛性质诱导出的分次代数同态 $\Theta : E_A(\mathrm{Der}_K A) \to \mathfrak{X}^*(A)$ 是分次代数同构, 并且 Θ 限制在指标 r 处给出的 A-模同构为

$$\Theta(\delta^1 \wedge \delta^2 \wedge \cdots \wedge \delta^r)(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r) = \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) \delta_1(a_{\sigma(1)}) \delta_2(a_{\sigma(2)}) \cdots \delta_r(a_{\sigma(r)}).$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Der}_K A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\theta"'] & E_A(\mathrm{Der}_K A) \arrow[d, dashed, "\Theta"] \\ & \mathfrak{X}^*(A) \end{tikzcd}$$

因此我们立即得到

Corollary 8. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上本质有限型交换代数, 那么存在 A-分次代数同构 $H^*(A, A) \cong E_A(\mathrm{Der}_{\Bbbk} A)$.

2.2 上同调形式

设域 $\Bbbk$ 的特征为零且 A 是 $\Bbbk$ 上本质有限型的光滑交换代数, 那么 [推论7] 中的分次代数同构 ρ 的逆映射可具体求出. 具体地, 若记 $H^1(A,A)=Z^1(A,A)/B^1(A,A)$, 那么标准嵌入 $\ell:\mathrm{Der}_K A\to H^*(A,A), D\mapsto D+B^1(Z,Z)$ 满足 $\ell(D)^2=0$ 且由外代数泛性质所诱导出的 A-代数同态 $\Phi:E_A(\mathrm{Der}_K A)\to H^*(A,A)$ 满足 $\Phi(D_1\wedge D_2\wedge\cdots\wedge D_n)=\theta+B^n(A,A)$, 其中

$$\theta:A^n\to A,(a_1,a_2,...,a_n)\mapsto D_1(a_1)D_2(a_2)\cdots D_n(a_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)D_1(a_{\sigma(1)})D_2(a_{\sigma(2)})\cdots D_n(a_{\sigma(n)}).$$

与标准分次 A-代数同构 $\Theta:E_A(\mathrm{Der}_K A)\to\mathfrak{X}^*(A)$ 合成可得分次 A-代数同构

$$\xi:\mathfrak{X}^*(A)\to H^*(A,A),D_1\wedge D_2\wedge\cdots\wedge D_n\mapsto\overline{\xi(D_1\wedge D_2\wedge\cdots\wedge D_n)},$$

其中 $\xi(D_1\wedge\cdots\wedge D_n)(a_1,...,a_n)=(1/n!)\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)D_1(a_{\sigma(1)})D_2(a_{\sigma(2)})\cdots D_n(a_{\sigma(n)})$, 可直接计算验证 $\rho\xi=\mathrm{id}$, 因此上述 A-代数同态 Φ 是分次代数同构, 由此得到上同调形式的 Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理.

Hochschild-Kostant-Rosenberg Theorem (上同调形式)**.** 设域 $\Bbbk$ 的特征为零且 A 是 $\Bbbk$ 上本质有限型的光滑交换代数, 设 $\Phi:E_A(\mathrm{Der}_K A)\to H^*(A,A)$ 是由标准 A-模同态 $\ell:\mathrm{Der}_{\Bbbk}A\to H^*(A,A),D\mapsto\overline{D}$ 经外代数泛性质所诱导出的分次 A-代数同态, 那么 Φ 是分次 A-代数同构且满足 $\Phi(D_1\wedge D_2\wedge\cdots\wedge D_n)=\theta+B^n(A,A)$, 其中

$$\theta:A^n\to A,(a_1,a_2,...,a_n)\mapsto D_1(a_1)D_2(a_2)\cdots D_n(a_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)D_1(a_{\sigma(1)})D_2(a_{\sigma(2)})\cdots D_n(a_{\sigma(n)}).$$

Remark 9. 对比同调形式的 Hochschild-Kostant-Rosenberg 定理我们看到上同调形式对基域的特征有要求.

参考文献

[HKR62] G. Hochschild, B. Kostant, and A. Rosenberg. Differential forms on regular affine algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 102(3):383–408, 1962.

[Lod13] J.L. Loday. *Cyclic homology*, volume 301. Springer Science & Business Media, 2013.

[Wei94] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge university press, 1994.

[WZ21] Quanshui Wu and Ruipeng Zhu. Nakayama automorphisms and modular derivations in filtered deformations. *Journal of Algebra*, 572:381–421, 2021.