群范畴中的推出

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 11 月 2 日

任给群 A,B,C 以及群同态 $\alpha_1 : A \to B, \alpha_2 : A \to C$, 若存在群 P 以及群同态 $j_B : B \to P, j_C : C \to P$ 满足 $j_C\alpha_2 = j_B\alpha_1$ 且对任何群 Q 以及群同态 $f : C \to Q, g : B \to Q$, 如果 $f\alpha_2 = g\alpha_1$, 那么存在唯一的群同态 h 使得 $f = hj_C, g = hj_B$, 即下图交换：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & B \arrow[d, "j_B"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
C \arrow[r, "j_C"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & P \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & Q
\end{tikzcd}$$

则称 (P, j_B, j_C) 是图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & B \\
C &
\end{tikzcd}$$

的**推出** (pushout) 或 B 与 C 沿 A 的**融合自由积** (amalgamated free product). 这份笔记的目的是记录群范畴中推出的具体构造.

Theorem. 对群 A,B,C 以及同态 $\alpha_1 : A \to B, \alpha_2 : A \to C$, B 与 C 沿 A 的推出存在且在同构意义下唯一.

Proof. 如果存在不难验证同构唯一性, 这里仅证明存在性. 设 $(B * C, i_B, i_C)$ 是 B 与 C 的自由积, 记 N 是集合 $\{i_B(\alpha_1(a))i_C(\alpha_2(a^{-1}))|a \in A\}$ 在 $B * C$ 中生成的正规子群. 命

$$P = B * C/N,$$

$$j_B : B \to P, b \mapsto i_B(b)N,$$

$$j_C : C \to P, c \mapsto i_C(c)N,$$

下面验证 (P, j_B, j_C) 是 B 与 C 沿 A 的融合自由积. 任给 $a \in A$, 有 $i_B(\alpha_1(a))i_C(\alpha_2(a^{-1})) \in N$, 所以

$$j_B\alpha_1(a) = i_B(\alpha_1(a))N = i_C(\alpha_2(a))N = j_B\alpha_2(a),$$

于是 $j_C\alpha_2 = j_B\alpha_1$. 现设群 Q 以及群同态 $f : C \to Q, g : B \to Q$ 满足 $f\alpha_2 = g\alpha_1$, 由自由积的定义知存在唯一的群同态 $h_1 : B * C \to Q$ 使得 $f = h_1 i_C, g = h_1 i_B$, 即下图交换：

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "i_C"] \arrow[dr, "f"'] & B * C \arrow[d, dashed, "h_1"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

于是对任给 $a \in A$,$h_1(i_B(\alpha_1(a))i_C(\alpha_2(a^{-1}))) = h_1(i_B(\alpha_1(a)))h_1(i_C(\alpha_2(a^{-1}))) = (g\alpha_1)(a)(f\alpha_2)(a^{-1}) = (g\alpha_1(a))(f\alpha_2(a))^{-1}$ 1_Q. 故 N 是 $\mathrm{Ker}h_1$ 的正规子群, 从而导出群同态 $h : P \to Q, pN \mapsto h_1(p)$. 我们说明 $f = hj_C, g = hj_B$: 任取 $b \in B, c \in C$, $hj_C(c) = h(i_C(c)N) = h_1 i_C(c)) = f(c), hj_B(b) = h(i_B(b)N) = h_1 i_B(c) = g(b)$. 最后验证群同态 h 的唯一性, 如果还有群同态 $\hat{h} : P \to Q$ 使得 $\hat{h}j_C = f, \hat{h}j_B = g$, 则 $\hat{h}j_C = hj_C, \hat{h}j_B = hj_B$. 这表明 $\hat{h}(i_C(c)N) = h(i_C(c)N), \hat{h}(i_B(b)N) = h(i_B(b)N), \forall b \in B, c \in C$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
C \arrow[r, "j_C"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & P \arrow[d, dashed, bend right, "\hat{h}"'] \arrow[d, dashed, bend left, "h"] & B \arrow[l, "j_B"'] \arrow[dl, bend left, "g"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

记 $\pi : B * C \to P, x \mapsto xN$ 是自然投射, 则 $h\pi i_C = \hat{h}\pi i_C, h\pi i_B = \hat{h}\pi i_B$. 由自由积的定义知 $h\pi = \hat{h}\pi$, 因为 π 是满射, 所以 $h = \hat{h}$, 这就证明了 h 的唯一性. 所以 (P, j_B, j_C) 是 B 与 C 沿 A 的融合自由积. $\square$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "i_C"] \arrow[dddr, bend right, "f"'] & & B \arrow[dl, "i_B"'] \arrow[dddl, bend left, "g"] \\
& B * C \arrow[d, "\pi"] & \\
& B * C/N \arrow[d, dashed, bend right, "h"'] \arrow[d, dashed, bend left, "\hat{h}"] & \\
& Q &
\end{tikzcd}$$