

有限群的经典表示论初步

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 10 月 7 日

有限群表示论起源于 1896 年 Richard Dedekind(德国, 1831-1916) 和 Ferdinand Georg Frobenius(德国, 1849-1917) 的通信中, 由后者系统发展. 再由 Frobenius 的学生 Issai Schur(1875-1941) 显著地改进与简化了该理论. 这份笔记的目的是用结合代数观点简短有力地介绍有限群的经典表示论的基本概念和思想, 内容主要由以下两部分构成:

(1) 介绍群的表示的基本概念及其基本例子, 我们指出群的表示本质上就是群代数上的模结构, 等价的群表示对应同构的群代数上的模. 第一部分的主定理是 Maschke 定理 (见 [定理1.22]), 它表明当有限群的表示的基域特征不整除该群的阶时, 任何表示都是一些不可约表示的直和, 所以这时要研究群的表示, 只需搞清楚不可约表示以及不可约表示间的联系即可. 用模的语言来说, 当基域的特征不整除群的阶时, 群代数是 Artin 半单环, 其上任何非零模完全可约, 于是只需搞清楚群代数上的不可约模以及不可约模之间的同态即可.

(2) 介绍群表示的特征标的概念和基本性质, 特征标作为精巧的数值不变量, 它不仅易计算把握, 且承载了充分多的表示信息. 例如, 我们会说明复数域上任意两个有限维表示等价当且仅当它们特征标一致 (见 [推论2.14]). 并且有限维复表示的不可约性可通过计算特征标复内积判别 (见 [推论2.15]), 这与第一部分提到的研究群复表示的根本任务是研究不可约表示以及不可约表示间的联系呼应.

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎指出, 谢谢.

1 基本概念

在有限群的 Sylow 定理学习中我们看到群作用是强有力的工具, 通过把群作用到某个集合上就足以反映出很多信息. 在环的结构理论中, 任何一个含幺环 R 上的左 R -模 M 就是环 R 的一个表示对象, 模本来就可以看成把环作用到某个 Abel 群上的产物. 通过模论工具我们可以得到环的大量结构信息. 而接下来我们将介绍的群表示, 它是把群线性地作用到线性空间上, 当作用在有限维线性空间上时, 群表示会把每个群中元素对应到一个具体的矩阵, 使得我们可以用线性代数的工具去认识群.

1.1 群的表示

Definition 1.1 (群的表示). 设 G 是群, V 是域 \mathbb{k} 上线性空间, 称群同态 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是群 G 在 V 上的一个 \mathbb{k} -线性表示, 简称为 G 在 \mathbb{k} 上的表示, 其中 $GL(V)$ 表示 V 上可逆线性变换全体构成的群. 这里的线性

空间 V 称为表示 ρ 的**表示空间**. 当 ${}_k V$ 是有限维空间时, 称表示 ρ 有**次数** $\dim_k V$, 这时也称 ρ 是 G 的**有限维表示**. 当 ${}_k V$ 作为线性空间维数不是有限时, ρ 为 G 的**无限维表示**.

有了群表示的概念, 随之而来的第一个问题是其存在性问题. 下面的例子给出一个平凡的表示.

Example 1.2 (平凡表示). 设 G 是群, V 是域 k 上线性空间, 我们总有平凡群同态 $\rho : G \rightarrow GL(V), g \mapsto \text{id}_V$. 称该表示 ρ 为 G 的**平凡表示**.

任给域 k 上的代数 A 以及左 A -模 M , M 总有天然的 k -线性结构并且我们都可以通过 $a \in A$ 在 M 上决定的左乘变换给出 M 上的 k -线性变换. 现在我们把目光聚焦在群代数上的模的情形, 把群的表示和群代数上的模联系起来. 我们马上会看到, 有一个群表示本质上与有一个群代数上的模是一样的.

Example 1.3. 设 G 是群, kG 是群代数, 那么对任何群代数 kG 上的左模 M , M 有自然的 k -线性结构, 即对每个 $x \in M$ 与 $c \in k$, 定义 $cx = (c1_G)x$. 并且每个 g 都给出了 M 上的可逆 k -线性变换 $\rho(g) : M \rightarrow M, x \mapsto gx$, 因此我们得到映射 $\rho : G \rightarrow GL(M), g \mapsto \rho(g)$, 它明显是群同态, 故 ρ 是群 G 的一个表示.

事实上, 如果我们有了群 G 在 k 上的一个表示 $\rho : G \rightarrow GL(V)$, V 有天然的左 kG -模结构

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) v = \sum_{g \in G} a_g \rho(g)(v), \forall v \in V, \sum_{g \in G} a_g g \in kG.$$

所以一个群 G 的 k -线性表示所承载的信息和一个群代数 kG 上的左模所承载有的信息一致. 群代数 kG 上的左模自然会反映群 G 本身的一些信息, 以 kG 本身为例: 对有限群 G , 有 $\dim_k kG = |G|$. 当群 G 有非平凡挠元 $g \neq 1_G$ 时, 群代数 kG 会有零因子, 具体地, 设 g 有阶 t , 那么 $(1_G - g)(1_G + g + \cdots + g^{t-1}) = 1_G - g^t = 0$.

Definition 1.4 (忠实表示). 设 G 是群, V 是域 k 上线性空间, 如果群的表示 $\rho : G \rightarrow GL(V)$ 满足 $\text{Ker} \rho = \{1_G\}$, 即 ρ 是单同态, 则称该表示是**忠实的**. 忠实表示意味着对每个 $g \neq 1_G \in G$, g 在线性空间 V 上的作用一定会使 V 中某个元素变动.

对每个群的表示 $\rho : G \rightarrow GL(V)$, 它可天然诱导单群同态 $\bar{\rho} : G/\text{Ker} \rho \rightarrow GL(V)$, 所以从每个群的表示出发都可以产生一个忠实表示 $\bar{\rho} : G/\text{Ker} \rho \rightarrow GL(V)$. 对任何群我们也可以构造它的忠实表示.

Example 1.5 (正则表示). 设 $V = kG$ 是群代数, 则有忠实表示 $\rho : G \rightarrow GL(V), g \mapsto g_l$, 其中 g_l 指 g 决定的左乘变换. 我们把该表示 ρ 称为群 G 的**正则表示**.

Definition 1.6 (表示的等价性). 设 G 是群, k 是域, $\rho : G \rightarrow GL(V)$ 和 $\rho' : G \rightarrow GL(V')$ 均为群的表示, 如果存在线性同构 $f : V \rightarrow V'$ 使得下图对所有的 $g \in G$ 交换, 则称这两个表示是**等价的**.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho'(g) \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

根据表示等价性的定义, 如果 $\rho : G \rightarrow GL(V)$ 和 $\rho' : G \rightarrow GL(V')$ 这两个表示等价, 即存在线性同构 $f : V \rightarrow V'$ 使得 $f\rho(g) = \rho'(g)f, \forall g \in G$, 那么 $f : V \rightarrow V'$ 给出左 kG -模同构. 反之, 如果我们有二个同构的左

$\mathbb{k}G$ -模 V, V' , 设 $f: V \rightarrow V'$ 是 $\mathbb{k}G$ -模同构, $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是 V 上 $\mathbb{k}G$ -模结构给出的表示, $\rho': G \rightarrow GL(V')$ 是 V' 上 $\mathbb{k}G$ -模结构给出的表示, 那么 $f: V \rightarrow V'$ 是使得下图交换的线性同构.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho'(g) \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

根据上面的讨论, 我们便看到下述命题成立.

Proposition 1.7. 设 G 是群, \mathbb{k} 是域, $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 和 $\rho': G \rightarrow GL(V')$ 均为群的表示. 那么这两个表示等价的充要条件是用 ρ, ρ' 分别赋予 V, V' 左 $\mathbb{k}G$ -模结构后, 作为左 $\mathbb{k}G$ -模有同构 $V \cong V'$.

在本节最后, 用范畴语言来更严格地叙述群的表示与群代数上的模本质上一样. 为此, 引入

Definition 1.8 (群表示范畴). 给定群 G 以及域 \mathbb{k} , 通过如下方式来定义范畴 $\text{Rep}_{\mathbb{k}}(G)$: 定义对象类 $\text{obRep}_{\mathbb{k}}(G)$ 为 G 在 \mathbb{k} 上的线性表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 全体, 对任意两个群表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 和 $\rho': G \rightarrow GL(V')$, 若线性映射 $f: V \rightarrow V'$ 使得下图对所有的 $g \in G$ 交换, 则称 f 是表示 ρ 到 ρ' 的态 (或态射).

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho'(g) \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

记 $\text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbb{k}}(G)}(\rho, \rho')$ 为 ρ 到 ρ' 的所有态构成的集合. 于是可天然地定义表示间态的合成. 进而可得范畴 $\text{Rep}_{\mathbb{k}}(G)$. 称为群 G 在 \mathbb{k} 上的表示范畴. 记 $\text{rep}_{\mathbb{k}}(G)$ 为群 G 在 \mathbb{k} 上所有有限维表示构成的全子范畴.

Theorem 1.9. 给定群 G 以及域 \mathbb{k} , 那么有范畴同构 $\mathbb{k}G\text{-Mod} \cong \text{Rep}_{\mathbb{k}}(G)$.

Proof. 对每个左 $\mathbb{k}G$ -模 V , 可在 [例1.3] 意义下得到表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 记之为 FV . 任意两个 $\mathbb{k}G$ -模之间的模同态 $f: V \rightarrow V'$, 可对应表示之间的态 $f: V \rightarrow V'$, 记为 $F(f)$. 由此得到函子 $F: \mathbb{k}G\text{-Mod} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{k}}(G)$. 对每个群的表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 根据之前的讨论, 可为 V 赋予天然的左 $\mathbb{k}G$ -模结构, 记该左模为 $H(\rho)$. 表示间的态 f 明显给出群代数上左模之间的模同态 $H(f)$. 这定义出函子 $H: \text{Rep}_{\mathbb{k}}(G) \rightarrow \mathbb{k}G\text{-Mod}$. 于是可直接验证 F 和 H 满足 $FH = 1_{\mathbb{k}G\text{-Mod}}, HF = 1_{\text{Rep}_{\mathbb{k}}(G)}$ □

1.2 群的矩阵表示

如果群 G 在域 \mathbb{k} -上有一个次数为 $n \geq 1$ 有限维表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 那么每个 $g \in G$ 它都会对应一个 $M_n(\mathbb{k})$ 中的可逆矩阵. 具体地, 取定 V 的基 $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, 那么考虑每个 $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ 在这个基下表示矩阵 A , 即满足等式 $(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) = (u_1, \dots, u_n)A$ 的矩阵 A , 我们可以得到 \mathbb{k} -代数同构

$$T: \text{End}_{\mathbb{k}}(V) \rightarrow M_n(\mathbb{k}), \varphi \mapsto A,$$

那么 T 自然把可逆线性变换全体 $GL(V)$ 映至可逆阵全体 $GL_n(\mathbb{k})$, 并且把 T 限制在 $GL(V)$ 上就给出了群同构 $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{k})$, 所以通过下述同态列的合成 $\rho_B = T|_{\rho}: G \rightarrow GL_n(\mathbb{k})$

$$G \xrightarrow{\rho} GL(V) \xrightarrow{T|} GL_n(\mathbb{k})$$

我们便可把每个群中元素 g 对应到可逆矩阵 $\rho_B(g)$. 那么 $g \in G$ 在 V 上的线性作用可由可逆阵 $\rho_B(g)$ 在 \mathbb{k}^n 上的数乘作用描述. 这就引出了矩阵表示的概念.

Definition 1.10 (矩阵表示). 设 G 是群, \mathbb{k} 是域, $n \geq 1$, 称群同态 $\rho: G \rightarrow GL_n(\mathbb{k})$ 为群 G 的 n 次矩阵表示.

Example 1.11. 设 G 是群, \mathbb{k} 是域, $\rho: G \rightarrow GL_n(\mathbb{k})$ 为群 G 的 n 次矩阵表示. 那么 $\varphi: G \rightarrow \mathbb{k}^*, g \mapsto \det \rho(g)$, 这里 $\det \rho(g)$ 指 n 阶矩阵 $\rho(g)$ 的行列式, 是 G 的 1 次表示.

根据有限维线性变换和它在一给定基下表示矩阵的关系, 我们看到

Lemma 1.12. 设群 G 在域 \mathbb{k} -上有一个次数为 $n \geq 1$ 有限维表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 取定 V 的基 $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, 并设 $\eta_B: V \rightarrow \mathbb{k}^n$ 是满足 $\eta_B(u_i) = e_i, 1 \leq i \leq n$ 的线性同构, 其中 $e_i \in \mathbb{k}^n$ 是第 i 个标准单位列向量, 那么对由 B 诱导的矩阵表示 $\rho_B: G \rightarrow GL_n(\mathbb{k})$, 有下图对所有 $g \in G$ 交换.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho(g)} & V \\ \eta_B \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ \mathbb{k}^n & \xrightarrow{\rho_B(g)} & \mathbb{k}^n \end{array}$$

线性代数中更一般的结果如下, 它的证明也是平凡的.

Lemma 1.13. 设 V 是域 \mathbb{k} 上 n 维线性空间, V' 是域 \mathbb{k} 上 m 维线性空间, 取定 V 的基 $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, 并设 $\eta_B: V \rightarrow \mathbb{k}^n$ 是满足 $\eta_B(u_i) = e_i, 1 \leq i \leq n$ 的线性同构, 其中 $e_i \in \mathbb{k}^n$ 是第 i 个标准单位列向量. 类似地, 取定 V' 的一个基 C , 可得线性同构 $\eta_C: V' \rightarrow \mathbb{k}^m$. 对任何线性映射 $\varphi: V \rightarrow V'$, 设 M_φ 是 φ 在基 B, C 下的表示矩阵, 那么下图交换

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V' \\ \eta_B \downarrow & & \downarrow \eta_C \\ \mathbb{k}^n & \xrightarrow{M_\varphi} & \mathbb{k}^m \end{array}$$

根据前面的讨论, 给定一个次数是 n 的有限维表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 通过取定 V 的一个基 $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, 可产生一个群 G 的矩阵表示 $\rho_B: G \rightarrow GL_n(\mathbb{k})$. 如果我们通过另一个 V 的基 $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ 来产生矩阵表示 $\rho_C: G \rightarrow GL_n(\mathbb{k})$, 设基 B 到 C 的过渡矩阵是 $P \in GL_n(\mathbb{k})$, 即 $(v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_n)P$, 那么 $\rho_C(g) = P^{-1}\rho_B(g)P, \forall g \in G$. 这时我们可以对所有的 $g \in G$ 找到一个公共的可逆阵 P 使得对 $\rho_B(g)$ 作用 P 决定的相似变换后得到矩阵 $\rho_C(g)$. 这就引出了两个矩阵表示等价的概念.

Definition 1.14 (矩阵表示的等价). 设 $\rho_1, \rho_2: G \rightarrow GL_n(\mathbb{k})$ 均为群 G 在 \mathbb{k} 上的矩阵表示, 如果存在可逆阵 P 使得 $\rho_1(g) = P^{-1}\rho_2(g)P, \forall g \in G$, 称这两个矩阵表示是等价的, 记作 $\rho_1 \sim \rho_2$. 易知矩阵表示的等价作为群 G 在 \mathbb{k} 上的矩阵表示全体构成的集合上的二元关系是等价关系.

从 [引理1.12] 以及 [引理1.13] 我们可以看到对任何两个群 G 在 \mathbb{k} 上的有限维表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 和 $\rho': G \rightarrow GL(V')$, 其中 $\dim_{\mathbb{k}} V = n, \dim_{\mathbb{k}} V' = m$, 只要 V 和 V' 之间有个左 $\mathbb{k}G$ -模同态 $\varphi: V \rightarrow V'$, 就会产

生下述交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V & \xrightarrow{\varphi} & V' \\
 & \nearrow \rho(g) & \downarrow \phi & \nearrow \rho'(g) & \\
 V & \xrightarrow{\quad} & V' & & \\
 \downarrow \eta_B & & \downarrow & & \downarrow \eta_C \\
 & \nearrow \rho_B(g) & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{M_\varphi} & \mathbb{K}^m \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{M_\varphi} & \mathbb{K}^m \\
 & & & \nearrow \rho'_C(g) &
 \end{array}$$

其中 B 是 V 取定的基, C 是 V' 取定的基. 进而我们看到等价的有限维群表示它们在给定基下决定的矩阵表示也等价. 反过来, 如果两个有限维表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 和 $\rho': G \rightarrow GL(V')$ 满足 $n = m$ 且它们在给定基下决定的矩阵表示等价, 我们仍可构造上述形式的交换图. 总结一下, 我们得到

Proposition 1.15. 给定群 G 在 \mathbb{K} 上的有限维表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 和 $\rho': G \rightarrow GL(V')$, 其中 $\dim_{\mathbb{K}} V = n, \dim_{\mathbb{K}} V' = m$, 取定 V 的基 B, V' 的基 C , 并设 $\rho_B: G \rightarrow GL_n(\mathbb{K}), \rho'_C: G \rightarrow GL_m(\mathbb{K})$ 是相应矩阵表示. 那么 ρ 和 ρ' 是等价的群表示当且仅当 $n = m$ 且 ρ_B 和 ρ'_C 是等价的矩阵表示.

Example 1.16 (置换表示). 给定群 G 在集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的一个作用, 它诱导群同态 $\pi: G \rightarrow S_n$ 使得 $\pi(g)(i) = gi, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. 下面我们用群同态 $\pi: G \rightarrow S_n$ 来产生一个群 G 的有限维表示. 设 V 是域 \mathbb{K} 上的 n 维线性空间, 取定 V 的基 $B = \{u_1, \dots, u_n\}$. 那么对每个 $g \in G$, 通过定义 $\rho(g)(u_i) = u_{\pi(g)(i)} = u_{gi}$ 可唯一决定一可逆线性变换 $\rho(g): V \rightarrow V$, 于是我们得到群同态 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 它给出群 G 一个次数为 n 的 \mathbb{K} -线性表示, 称为 G 的置换表示. 可以看到每个 $\rho(g)$ 在基 B 上的作用无非是把 u_1, \dots, u_n 进行重排, 因此 $\rho(g)$ 在 B 下的表示矩阵是置换矩阵.

Example 1.17 (表示的张量积). 设群 G 有表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 和 $\rho': G \rightarrow GL(V')$, 对每个 $g \in G$, 有线性同构 $\rho(g): V \rightarrow V$ 以及 $\rho'(g): V' \rightarrow V'$, 于是得到线性同构 $\rho(g) \otimes \rho'(g): V \otimes_{\mathbb{K}} V' \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} V'$. 通过定义 $\rho \otimes \rho': G \rightarrow GL(V \otimes_{\mathbb{K}} V'), g \mapsto \rho(g) \otimes \rho'(g)$, 我们得到群同态 $\rho \otimes \rho'$, 称为表示 ρ, ρ' 的张量积. 如果 V 是 G 的 n 次表示, V' 是 G 的 m 次表示, 这里 n, m 是正整数, 那么表示的张量积 $\rho \otimes \rho'$ 是 nm 次表示. 若取定 V 的基 $B = \{u_1, \dots, u_n\}, V'$ 的基 $C = \{v_1, \dots, v_m\}$, 设 $\rho(g)$ 在 B 下的表示矩阵是 $\rho_B(g), \rho'(g)$ 在 C 下的表示矩阵是 $\rho'_C(g)$, 那么 $(\rho \otimes \rho')(g)$ 在基 $\{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, \dots, u_1 \otimes v_m, \dots, u_n \otimes v_1, \dots, u_n \otimes v_m\}$ 下的表示矩阵是矩阵 $\rho_B(g)$ 和 $\rho'_C(g)$ 的 Kronecker 积 $\rho_B(g) \otimes \rho'_C(g)$. 用模的语言来说, 表示的张量积对应的是对左 $\mathbb{K}G$ -模 V, V' , 在 $V \otimes_{\mathbb{K}} V'$ 上通过 $g(v \otimes v') = gv \otimes gv'$ 赋予 $V \otimes_{\mathbb{K}} V'$ 一个左 $\mathbb{K}G$ -模结构.

1.3 完全可约性

设 G 是群, 我们已经看到群 G 在域 \mathbb{K} 上的表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 本质上就是一个群代数 $\mathbb{K}G$ 上的模结构. 那么我们可以把模论的观点与工具带进群表示论来研究群的表示.

Definition 1.18 (不变子空间). 设 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是群 G 在域 \mathbb{K} 上的表示, 若 V 的线性子空间 U 满足 $\rho(g)U \subseteq U, \forall g \in G$, 称 U 是 V 的 $\rho(G)$ -不变子空间或 G -不变子空间.

根据 $\rho(G)$ -不变子空间的定义可以看到, 对群 G 在域 \mathbb{k} 上的表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, V 的子集 U 是 $\rho(G)$ -不变子空间的充要条件是将 V 视作左 $\mathbb{k}G$ -模后 U 是 V 的子模. 因为 $\rho(g)$ 是 V 上可逆线性变换, 因此 $\rho(g)|_U$ 一定是 U 上单线性变换, 而每个 $x \in U$ 满足 $x = \rho(g)\rho(g^{-1})x$, 其中 $\rho(g^{-1})x \in U$, 所以 $\rho(g)$ 限制在 U 上可得 U 上可逆线性变换. 我们通过 $\rho(G)$ -不变子空间来引入子表示的概念.

Definition 1.19 (子表示). 设 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是群 G 在域 \mathbb{k} 上的表示, 若 V 的线性子空间 U 是 $\rho(G)$ -不变子空间, 那么每个 $\rho(g)|_U: U \rightarrow U$ 是可逆线性变换, 因此可得群同态 $\rho|_U: G \rightarrow GL(U), g \mapsto \rho(g)|_U$, 称 $\rho|_U: G \rightarrow GL(U)$ 是 ρ 的子表示. 子表示本质上就是一个 $\mathbb{k}G$ -子模结构.

子表示无非是通过群代数上模的子模去认识群的表示. 完全类似地我们可以用商模去研究群的表示.

Definition 1.20 (商表示). 设 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是群 G 在域 \mathbb{k} 上的表示, 若 V 的线性子空间 U 是 $\rho(G)$ -不变子空间, 即 U 是 V 作为左 $\mathbb{k}G$ -模的子模, 那么我们得到商模 V/U , 于是得到表示 $\rho|_{V/U}: G \rightarrow GL(V/U), g \mapsto g_l$, 这里 g_l 表示 $g \in G$ 所决定的商模 V/U 上的左乘变换, 称表示 $\rho|_{V/U}$ 是 ρ 的商表示.

如果 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是群 G 在域 \mathbb{k} 上的有限维表示, $\dim_{\mathbb{k}} V = n$ 且有子表示 $\rho|_U: G \rightarrow GL(U)$. 设 U 有基 $\{u_1, \dots, u_r\}$, 并将其扩充为 V 的一个基 $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, 那么 $\rho(g)$ 在基 B 下的表示矩阵 $\rho_B(g)$ 是具有下述形式的分块矩阵.

$$\rho_B(g) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}, M_{11} \in M_r(\mathbb{k}), M_{12} \in \mathbb{k}^{r \times (n-r)}, M_{22} \in M_{n-r}(\mathbb{k}).$$

特别地, 当 U 是 V 作为 $\mathbb{k}G$ -模的一个直和因子, 即存在子模 U' 使得 $V = U \oplus U'$ 时, 取 U 的基 $\{u_1, \dots, u_r\}$ 以及 U' 的基 $\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$ 来得到 V 的基 $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, 那么 $\rho(g)$ 在基 B 下的表示矩阵 $\rho_B(g)$ 是分块对角阵, 即上述分块矩阵的子矩阵 $M_{12} = 0$, 这样的矩阵具有更简单的形式. 因此我们可以把模的直和分解理论带进群表示论来把一个表示分解为一些尽可能简单的表示加以研究.

Definition 1.21 (表示的直和). 设 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是群 G 在域 \mathbb{k} 上的表示, 若 V 作为左 $\mathbb{k}G$ -模可以分解为有限个子模的直和, 设为 $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$, 记 $\rho_i = \rho|_{U_i}$ 是 ρ 的子表示, 我们称表示 ρ 是子表示 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ 的直和, 记作 $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \dots \oplus \rho_m$.

根据表示直和的定义我们知道表示的直和分解对应于群代数上模的直和分解. 如果表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 对应的左 $\mathbb{k}G$ -模 V 是不可约模, 称该表示是不可约的. 若 V 是完全可约左 $\mathbb{k}G$ -模, 称该表示是完全可约的.

下面的结果被称为 Maschke 定理. 该定理在复数域上的特殊情形由 H. Maschke(德国, 1853-1908), 呈现的版本由 L.E.Dickson(美国, 1874-1954) 先注意到.

Theorem 1.22 (Maschke). 设 G 是有限群, 对任何域 \mathbb{k} , 只要 $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$, 那么 G 在域 \mathbb{k} 上的表示 $\rho: G \rightarrow GL(V) (V \neq 0)$ 都是完全可约的. 特别地, 对满足 $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$ 的域 \mathbb{k} , 群代数 $\mathbb{k}G$ 是 Artin 半单代数.

Proof. 只需证任何左 $\mathbb{k}G$ -模 V 的子模 U 是直和因子. 设 U_0 是 U 作为线性子空间的直和补, 即作为 \mathbb{k} -线性空间有直和分解 $V = U \oplus U_0$. 设 $p_0: V \rightarrow U$ 是 V 作为线性空间在子空间 U 上的标准投射, 命

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)^{-1} p_0 \rho(g),$$

则 $p: V \rightarrow U$ 是满左 $\mathbb{k}G$ -模同态且 $p|_U = \text{id}_U$, 故 U 作为 $\mathbb{k}G$ -子模是直和因子. □

Corollary 1.23 (群代数的半单性). 设 G 是有限群, \mathbb{k} 是域, 那么群代数 $\mathbb{k}G$ 半单的充要条件是 $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$.

Proof. 充分性由 Maschke 定理即得. 必要性: 如果 $\text{char } \mathbb{k}$ 整除 $|G|$, 那么 $z = \sum_{g \in G} g \neq 0$ 满足 $z^2 = |G|z = 0$ 以及 $zx = xz, \forall x \in G$, 因此 $z \in \text{Jac}(\mathbb{k}G)$. 由 Wedderburn-Artin 定理知这说明 $\mathbb{k}G$ 不是 Artin 半单环. 但条件说群代数 $\mathbb{k}G$ 作为一个 Artin 环是半单的, 这就得到了矛盾. \square

Maschke 定理的意义在于它告诉我们, 要研究有限群 G 在满足特征不整除 G 的阶的域上的表示, 只需要把不可约表示研究清楚即可, 因为完全可约模总可以分解为一些不可约模的直和.

Application 1.24 ($\mathbb{Z}G$ 半单). 设 G 是有限群, 则 $\mathbb{Z}G$ 是 Artin 半单环.

Proof. 根据 Maschke 定理, 只要素数 p 不整除 $|G|$, 群代数 $\mathbb{F}_p G$ 半单, 其中 \mathbb{F}_p 是 p 元有限域, 所以此时 $\text{Jac}(\mathbb{F}_p G) = 0$. 对任给素数 p , 都有自然的满环同态

$$\alpha_p : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{F}_p G, \sum_{g \in G} b_g g \mapsto \sum_{g \in G} \overline{b_g} g,$$

易知 $\alpha_p(\text{Jac } \mathbb{Z}G) \subseteq \text{Jac}(\mathbb{F}_p G)$, 当素数 p 不整除 $|G|$ 时, 上述包含关系右端是 0, 由此可知对每个 $x = \sum_{g \in G} b_g g \in \text{Jac } \mathbb{Z}G$, 并且每个系数 b_g 可以被无穷多素数整除, 这迫使 $x = 0$. 所以 $\text{Jac } \mathbb{Z}G = 0$. 记 $m = |G|$, 那么 \mathbb{Z}^m 到 $\mathbb{Z}G$ 有自然的满 \mathbb{Z} -模同态, 这表明 $\mathbb{Z}G$ 是左、右 Artin 环. 于是我们看到 $\mathbb{Z}G$ 是 Artin 半单环. \square

1.4 模论的应用

我们已经引入过将群 G 的表示 $\rho : G \rightarrow GL(V)$ 视作群代数 $\mathbb{k}G$ 上的模的观点. 因此我们可以把模论工具引入到群表示论中. 例如 Artin 半单代数的不可约模同构类只有有限多个, 转换成群表示的语言就是

Proposition 1.25. 设 G 是有限群, \mathbb{k} 是域, 满足 $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$. 那么 G 的不可约表示等价类只有有限多个.

对 \mathbb{k} -代数 A 上的左模 V , Krull-Schmidt 定理告诉我们只要 V 有合成列 (例如 V 是非零有限维模), 那么 V 可分解为有限个不可分模的直和, 并且这样的直和分解在不计次序和同构意义下唯一. 具体地, 若 ${}_A V \neq 0$ 有合成列, 则存在不可分子模 $V_1, \dots, V_m \neq 0$ 使得 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$. 若还存在不可分子模 W_1, \dots, W_s 使得 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$, 那么 $s = m$ 并且存在 $\sigma \in S_m$ 使得 $V_i \cong W_{\sigma(i)}, \forall 1 \leq i \leq m$. 现在我们设 G 是有限群, 域 \mathbb{k} 满足 $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$, 那么 $A = \mathbb{k}G$ 是有限维半单代数, 对任何非零有限维模 ${}_A V$, 它可分解为有限个不可约子模的直和, 设为 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$, 其中每个 V_i 不可约, 由于不可约模一定不可分, 所以 ${}_A V$ 的不可约子模直和分解在不计次序和同构意义下唯一. 现在我们可以设有限维模 V 有不可约分解

$$V = V_1^{(1)} \oplus \dots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \dots \oplus V_r^{(1)} \oplus \dots \oplus V_r^{(m_r)},$$

其中每个 $V_i^{(k)}$ 是不可约模, 对每个 $1 \leq i \leq r$, 有 $V_i^{(k)} \cong V_i^{(l)}, \forall k, l \in \{1, 2, \dots, m_i\}$, 只要 $i \neq j$, 就有 $V_i^{(k)} \not\cong V_j^{(l)}$. 那么正整数序列 m_1, \dots, m_r 和正整数序列 $\dim_{\mathbb{k}} V_1^{(1)}, \dim_{\mathbb{k}} V_2^{(1)}, \dots, \dim_{\mathbb{k}} V_r^{(1)}$ 被 V 唯一确定. 记左 A -模 V 给出群 G 的有限维表示为 $\rho : G \rightarrow GL(V)$, ρ_i 为 $V_i^{(1)}$ 决定的不可约表示, 称 ρ_i 是 ρ 的不可约成分, m_i 是 ρ_i 的重数. 现在我们取 $V = \mathbb{k}G$, 那么一样可设它有不可约分解 $V = V_1^{(1)} \oplus \dots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \dots \oplus V_r^{(1)} \oplus \dots \oplus V_r^{(m_r)}$ 满足之前我们假定的条件, 记每个 $V_i^{(1)}$ 作为左 $\mathbb{k}G$ -模的自同态环是 Δ_i , 那么 Δ_i 是域 \mathbb{k} 上的可除代数并且当 \mathbb{k} 是代数闭域时, 下面的引理表明有代数同构 $\Delta_i \cong \mathbb{k}$.

Lemma 1.26. 设 \mathbb{k} 是代数闭域, A 是 \mathbb{k} -代数, ${}_A M$ 是有限维不可约模, 则有 \mathbb{k} -代数同构 $\text{End}_A(M) \cong \mathbb{k}$.

Proof. 这时 $\text{End}_A(M)$ 是有限维 \mathbb{k} -可除代数, 而 \mathbb{k} 是代数闭域, 故每个 $\varphi \in \text{End}_A(M)$ 在 \mathbb{k} 上最小多项式是一次的, 设为 $x - \lambda_\varphi$, 那么 $\varphi = \lambda_\varphi \text{id}_M$, 由此可见 $\mathbb{k} \mapsto \text{End}_A(M), a \mapsto a \text{id}_M$ 是 \mathbb{k} -代数同构. \square

于是由反代数同构 $\mathbb{k}G \cong \text{End}_{\mathbb{k}G}(\mathbb{k}G) = \text{End}_{\mathbb{k}G}(V)$ 以及 \mathbb{k} -线性同构

$$\text{End}_{\mathbb{k}G}(V) \cong \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^r \text{Hom}_{\mathbb{k}G}(V_i^{(1)}, V_j^{(1)})^{m_i m_j} \cong \prod_{i=1}^r \text{End}_{\mathbb{k}G}(V_i^{(1)})^{m_i^2} = \prod_{i=1}^r \Delta_i^{m_i^2}$$

得到 $|G| = \dim_{\mathbb{k}} \mathbb{k}G = \sum_{i=1}^r m_i^2 \dim_{\mathbb{k}} \Delta_i$. 我们把上述讨论总结为下面的推论.

Corollary 1.27. 设 G 是有限群, 群代数 $\mathbb{k}G$ 半单, 并设 $V = \mathbb{k}G$ 作为左 $\mathbb{k}G$ -模有不可约分解

$$\mathbb{k}G = V_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(m_r)},$$

其中每个 $V_i^{(k)}$ 是不可约模, 对每个 $1 \leq i \leq r$, 有 $V_i^{(k)} \cong V_i^{(l)}, \forall k, l \in \{1, 2, \dots, m_i\}$, 只要 $i \neq j$, 就有 $V_i^{(k)} \not\cong V_j^{(l)}$. 若记 $\Delta_i = \text{End}_{\mathbb{k}G}(V_i^{(1)})$, 那么 $|G| = \dim_{\mathbb{k}} \mathbb{k}G = \sum_{i=1}^r m_i^2 \dim_{\mathbb{k}} \Delta_i$. 若进一步要求 \mathbb{k} 是代数闭域, 则 $|G| = \sum_{i=1}^r m_i^2$.

我们再指出对上述不可约分解 $V = V_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(m_r)}$, 可直接验证 \mathbb{k} -代数同构 $\text{End}_{\mathbb{k}G}(V) \cong \text{End}_{\mathbb{k}G}((V_1^{(1)})^{m_1} \oplus \cdots \oplus (V_r^{(1)})^{m_r}) \cong \text{End}_{\mathbb{k}G}(V_1^{(1)})^{m_1} \times \cdots \times \text{End}_{\mathbb{k}G}(V_r^{(1)})^{m_r}$, 记 $\Delta_i = \text{End}_{\mathbb{k}G} V_i^{(1)}$ 是域 \mathbb{k} 上的有限维可除代数, 那么有 \mathbb{k} -代数同构

$$\text{End}_{\mathbb{k}G}(V) \cong M_{m_1}(\Delta_1) \times \cdots \times M_r(\Delta_r),$$

于是得到 \mathbb{k} -代数同构 $\mathbb{k}G \cong M_{m_1}(\Delta_1^{op}) \times \cdots \times M_r(\Delta_r^{op})$. 我们把刚刚的讨论总结为

Corollary 1.28. 设 G 是有限群, 群代数 $\mathbb{k}G$ 半单, 并设 $\mathbb{k}G$ 作为左 $\mathbb{k}G$ -模有不可约分解

$$\mathbb{k}G = V_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(m_r)},$$

其中每个 $V_i^{(k)}$ 是不可约模, 对每个 $1 \leq i \leq r$, 有 $V_i^{(k)} \cong V_i^{(l)}, \forall k, l \in \{1, 2, \dots, m_i\}$, 只要 $i \neq j$, 就有 $V_i^{(k)} \not\cong V_j^{(l)}$. 若记 $\Delta_i = \text{End}_{\mathbb{k}G}(V_i^{(1)})$, 那么有 \mathbb{k} -代数同构 $\mathbb{k}G \cong M_{m_1}(\Delta_1^{op}) \times \cdots \times M_r(\Delta_r^{op})$. 这时同样可得 $|G| = \sum_{i=1}^r m_i^2 \dim_{\mathbb{k}} \Delta_i$. 若进一步要求 \mathbb{k} 是代数闭域, 则代数同构 $\Delta_i \cong \mathbb{k}$ 表明 $\Delta_i = \Delta_i^{op}$, 从而有代数同构

$$\mathbb{k}G \cong M_{m_1}(\mathbb{k}) \times \cdots \times M_r(\mathbb{k}).$$

下面我们再把有限群的共轭类和群代数的中心联系起来.

Proposition 1.29. 设 G 是有限群, 共轭类全体是 $C_1 = \{1_G\}, C_2, \dots, C_r$, 对每个 $1 \leq i \leq r$, 置 $c_i = \sum_{g \in C_i} g$, 那么 $\{c_1, \dots, c_r\}$ 是群代数 $\mathbb{k}G$ 中心 $Z(\mathbb{k}G)$ 作为 \mathbb{k} -线性空间的一个基, 特别地, $\dim_{\mathbb{k}} Z(\mathbb{k}G) = r$ 为共轭类个数.

Proof. 易见 $\{c_1, \dots, c_r\}$ 是线性无关的, 只要证每个 $c_i \in Z(\mathbb{k}G)$ 以及任何 $c \in Z(\mathbb{k}G)$ 可被 $\{c_1, \dots, c_r\}$ 线性表出即可. 任取 $g \in G$, 有 $gc_i g^{-1} = \sum_{g_i \in C_i} gg_i g^{-1} = c_i$, 所以 $c_i \in Z(\mathbb{k}G)$. 对每个 $c \in Z(\mathbb{k}G)$, 设

$$c = \sum_{g \in G} \alpha_g g, \alpha_g \in \mathbb{k},$$

那么 $c = hch^{-1}, \forall h \in G$, 由此可见 $\alpha_{hgh^{-1}} = \alpha_g, \forall h \in G$. 这蕴含 c 可被 $\{c_1, \dots, c_r\}$ 线性表出. \square

若设 Artin 半单代数 A 的极小左理想分解为 $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_m$, 那么每个不可约左 A -模都同构于某个 I_k , 把这一观察和前面的讨论结合便有

Corollary 1.30. 设 G 是有限群, \mathbb{k} 是代数闭域且群代数 $\mathbb{k}G$ 半单, $V = \mathbb{k}G$ 作为左 $\mathbb{k}G$ -模有不可约分解

$$V = V_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{(m_r)},$$

其中每个 $V_i^{(k)}$ 是不可约模, 对每个 $1 \leq i \leq r$, 有 $V_i^{(k)} \cong V_i^{(l)}, \forall k, l \in \{1, 2, \dots, m_i\}$, 只要 $i \neq j$, 就有 $V_i^{(k)} \not\cong V_j^{(l)}$. 那么群 G 的共轭类总数 $\dim_{\mathbb{k}} Z(\mathbb{k}G) = r$ 就是 $\mathbb{k}G$ 上不可约模同构类总数.

Proof. 此时 $\mathbb{k}G \cong M_{m_1}(\mathbb{k}) \times \cdots \times M_r(\mathbb{k})$, 再由 $Z(\mathbb{k}G) \cong Z(M_{m_1}(\mathbb{k})) \times \cdots \times Z(M_r(\mathbb{k}))$ 便知. \square

Example 1.31 (置换群 S_n 的不可约复表示和整数拆分). 对有限群 G , [推论1.30] 说 $\mathbb{C}G$ 上不可约模同构类总数恰是 G 共轭类数目. 当我们取 $G = S_n$ 为 n 次对称群时, S_n 中两个元素共轭当且仅当它们有相同的型 (回忆置换 $\sigma \in S_n$ 的型如下定义: 当 σ 分解为不相交轮换分解后, 记 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中被 σ 作用固定不同的元素数目是 α_1 , 不相交轮换分解中长度为 i ($2 \leq i \leq n$) 的轮换数目是 α_i , 称形式记号 $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n}]$ 是置换 σ 的型), 而置换 $\sigma \in S_n$ 的型 $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n}]$ 对应正整数 n 的拆分 $n = \alpha_1 1 + \alpha_2 2 + \cdots + \alpha_n n$ (即把正整数 n 分解成一些正整数的和, 分解中数字 1 出现 α_1 次, 数字 i ($2 \leq i \leq n$) 出现 α_i 次), 我们把正整数 n 的拆分数记作 $p(n)$ (例如, $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5$), 那么 $p(n)$ 也就是 S_n 共轭类的数目. 所以 $\mathbb{C}S_n$ 不可约模同构类, 或者说 S_n 的不可约复表示等价类, 数目是 $p(n)$.

Example 1.32 (有限 Abel 群的不可约表示). 设 \mathbb{k} 是代数闭域, G 是有限 Abel 群, 那么 $\mathbb{k}G$ 是交换代数. 考虑 $\mathbb{k}G$ 上任何不可约左模 M , 它是有限维模, 由 [引理1.26] 知 M 上任何一个自同态是 \mathbb{k} 中元素决定的数乘作用. 而 $\mathbb{k}G$ 的交换性使得每个 $g \in G$ 决定的 M 上左乘变换是左 $\mathbb{k}G$ -模同态, 于是 M 的左 $\mathbb{k}G$ -子模等价于 M 的 \mathbb{k} -线性子空间. 这一观察意味着 M 作为不可约左 $\mathbb{k}G$ -模是 1 维的. 故

有限 Abel 群在代数闭域上的不可约表示都是 1 次的.

在 [推论1.30] 中我们看到只要代数闭域 \mathbb{k} 的特征不整除有限群的阶 $|G|$, 那么有限群 G 在代数闭域 \mathbb{k} 上的不可约表示等价类数恰好就是 G 的共轭类总数. 当 G 是有限 Abel 群时, 它的共轭类数目恰好是 $|G|$, 因此

对有限 Abel 群 G 和代数闭域 \mathbb{k} , 只要 $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$, 那么 G 的不可约表示等价类恰好 $|G|$ 个.

Example 1.33 (一般有限群的不可约表示构造). 对含么环 R, S 之间的保么环同态 $\alpha : R \rightarrow S$, 我们可以使用 α 为每个左 S -模 M 赋予自然的左 R -模结构: $rx = \alpha(r)x, \forall r \in R, x \in M$. 如果 α 是满环同态, 易知 ${}_S M$ 是不可约模蕴含配备 α 诱导的 R -模 ${}_R M$ 也不可约. 应用这个观点于群的表示理论, 我们对每个有限群 G , 关于它的换位子群 $[G, G]$ 作商可得一有限 Abel 群 $\overline{G} = G/[G, G]$, 并且标准投射 $\pi : G \rightarrow \overline{G}$ 是满群同态, 它诱导满环同态 $\alpha : \mathbb{k}G \rightarrow \mathbb{k}\overline{G}, \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g \pi(g)$, 由此能够从每个不可约 $\mathbb{k}\overline{G}$ -模产生不可约左 $\mathbb{k}G$ -模结构. 用群表示的语言说, 我们可以从有限 Abel 群 \overline{G} 的不可约表示出发构造有限群 G 的不可约表示.

2 特征理论

虽然群的矩阵表示使得我们可以通过分析具体的对象结构来了解抽象的群, 但是对高阶群, 它的矩阵表示或是置换表示难以具体分析处理. 例如对充分大的正整数 n , 置换群 S_n 中每个元素的不相交轮换分解可能基

本无法手算. 这时我们需要更精巧的数值不变量, 使得不通过复杂计算也能在一些具体处理问题的场合能为我们提供一些有用的信息. 大量实践经验表明特征标 (见 [定义2.1]) 所载有的表示信息在应用中卓有成效. 并且, 我们会说明对有限群的任意两个不可约复表示, 这两个复表示等价的充要条件是它们的特征标相同 (见 [推论2.14]). 并且有限维复表示的不可约性可通过计算特征标复内积判别 (见 [推论2.15]).

2.1 基本性质

Definition 2.1 (类函数, 特征标). 设 G 是群, \mathbb{k} 是域.

- 若函数 $f: G \rightarrow \mathbb{k}$ 在群 G 的每个共轭类上取值是常值的, 即 $f(gxg^{-1}) = f(x), \forall x, g \in G$, 则称 f 是一个类函数. 易见 G 的类函数全体关于通常加法和乘法构成含么交换环, 称为 G 的类函数环.
- 若 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是次数为 $n \geq 1$ 的有限维表示, 称 $\chi: G \rightarrow \mathbb{k}, g \mapsto \text{tr}\rho(g)$ 为该表示的特征标. 不可约表示的特征称为不可约特征标. 称 ρ 的次数为该特征标的次数. 当 $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ 时, 称 χ 是复特征标.

有时为了突出 χ 是表示 ρ 的特征标, 我们会把特征标记作 χ_ρ . 从特征的定义可以看到群表示的特征标是群上一个类函数. 群 G 两个等价的有限维表示特征标一致. 下面是关于有限维表示特征标的一些简单事实.

Example 2.2 (平凡表示特征标). 设 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是群 G 的 n 次平凡表示, 则该表示的特征标

$$\chi(g) = n1_{\mathbb{k}}, \forall g \in G.$$

Example 2.3 (子表示直和特征标). 设 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是群 G 的 $n \geq 1$ 次表示, 如果 ρ 是子表示 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ 的直和, 即 $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \dots \oplus \rho_m$, 若记 χ_i 是子表示 ρ_i 的特征标, 那么明显有 $\chi = \sum_{i=1}^m \chi_i$.

Example 2.4 (商表示特征标). 设 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是群 G 的 $n \geq 1$ 次表示, 如果 U 是 V 的 $\mathbb{k}G$ -子模, 设 ρ_U 和 $\rho_{V/U}$ 是相应子表示与商表示, 那么 $\chi_\rho = \chi_{\rho_U} + \chi_{\rho_{V/U}}$.

Example 2.5 (表示张量积的特征标). 设群 G 有有限维表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 和 $\rho': G \rightarrow GL(V')$, 它们次数均正. 在 [例1.17] 中我们已经看到若取定 V 的基 $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, V' 的基 $C = \{v_1, \dots, v_m\}$, 设 $\rho(g)$ 在 B 下的表示矩阵是 $\rho_B(g)$, $\rho'(g)$ 在 C 下的表示矩阵是 $\rho_C(g)$, 那么 $(\rho \otimes \rho')(g)$ 在基 $\{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, \dots, u_1 \otimes v_m, \dots, u_n \otimes v_1, \dots, u_n \otimes v_m\}$ 下的表示矩阵是矩阵 $\rho_B(g)$ 和 $\rho_C(g)$ 的 Kronecker 积 $\rho_B(g) \otimes \rho_C(g)$. 于是 $\chi_{\rho \otimes \rho'} = \chi_\rho \chi_{\rho'}$.

2.2 复特征标

实际应用中我们更感兴趣复特征标, 它性质丰富. 例如对有限群 G 的 n 次复表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 每个 $\rho(g)$ 的特征值总是单位根, 进而 $\chi_\rho(g)$ 为一些单位根之和. 现在我们来看一些复特征标的基本性质.

Lemma 2.6. 设 G 是有限群, 它的指数是 m , 即全体元素阶的最小公倍数是 m . 那么对任何一个群 G 的 n 次复表示 ρ , 对每个 $g \in G$, $\rho(g)$ 在某个基下表示矩阵是由一些 m 次本原单位根构成的对角阵. 即 $\rho(g)$ 在某个基下表示矩阵形如 $\text{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, 其中每个 ω_i 是某个 m 次本原单位根. 于是 $\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^n \omega_i$.

Proof. 注意线性变换 $\rho(g)$ 在 \mathbb{C} 上的最小多项式整除 $x^m - 1$, 故其最小多项式无重根且特征值均为 m 次本原单位根, 这表明线性变换 $\rho(g)$ 在 \mathbb{C} 上可对角化且相似于一个主对角线都是 m 次本原单位根的对角阵. \square

上述引理说有限群 G 的任何 n 次复表示的特征标均是一些 m 次本原单位根的和, 这里 m 是 G 的指数. 于是对任何 n 次复表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 有 $|\chi_\rho(g)| \leq n$. 不等式中等号成立当且仅当存在 m 次本原单位根 ω 使得 $\rho(g) = \omega \text{id}_V$. 充分性明显, 必要性: 设 $\rho(g)$ 在某个基下表示矩阵形如 $\text{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, 其中每个 ω_i 是某个 m 次本原单位根. 那么 $\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^n \omega_i$ 且 $|\sum_{i=1}^n \omega_i| = n$ 迫使所有 ω_i 具有相同方向, 即都相同, 设 ω_i 的公共值是 ω , 那么我们便得到 $\rho(g) = \omega \text{id}_V$. 我们把刚刚的讨论总结为

Proposition 2.7. 设 G 是有限群, 它的指数是 m , $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是 n 次复表示. 那么对每个 $g \in G$, 有 $|\chi_\rho(g)| \leq n$. 等号成立当且仅当存在 m 次本原单位根 ω 使得 $\rho(g) = \omega \text{id}_V$. 特别地, 如果 $\chi_\rho(g) = n$, 那么 $\rho(g) = \text{id}_V$. 也就是说我们可以直接从有限群 G 的复特征标 χ 在元素 g 上的取值读出 $\rho(g)$ 是否是恒等映射!

根据上述命题, 对有限群 G 的 n 次复表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 那些满足 $|\chi_\rho(g)| = n$ 的元素 g 对应了某个 m (m 表示群的指数) 次本原单位根诱导的数乘变换 $\rho(g) = \omega \text{id}_V$. 同时也看到 $\{g \in G | \chi_\rho(g) = n\} = \text{Ker} \rho$, 也称 $\{g \in G | \chi_\rho(g) = n\}$ 为该特征标的核, 记作 $\text{Ker} \chi_\rho$. 我们也引入

$$Z(\chi_\rho) = \{g \in G | \text{特征标} |\chi_\rho(g)| = n\} = \{g \in G | \text{存在 } m \text{ 次本原单位根 } \omega \text{ 使得 } \rho(g) = \omega \text{id}_V\}$$

这也是群 G 的正规子群, 并且包含 $\text{Ker} \chi_\rho = \text{Ker} \rho$. 通过满群同态 $Z(\chi_\rho) \rightarrow U(m), g \mapsto \omega$, 这里 $\rho(g) = \omega \text{id}_V$, 我们看到 $Z(\chi_\rho)/\text{Ker} \rho$ 是循环群.

Example 2.8 (对偶表示). 设有限群 G 有 n 次复表示 $\rho: G \rightarrow GL(X)$, 那么可如下在 $X^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$ 上赋予左 $\mathbb{C}G$ -模结构: $g\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \varphi(g^{-1}x)$, 于是得到 G 的表示 $\rho^*: G \rightarrow GL(X^*)$, 称为 G 关于 ρ 的对偶表示. 在 [引理2.6] 中我们看到对每个 $g \in G$, 可选取 X 的一个基 B 使得 $\rho(g)$ 在 B 下的表示矩阵形如 $\text{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, 其中每个 ω_i 是某个 m 次本原单位根, m 是 G 的指数, 考虑 B 对应的 X^* 中对偶基 B^* , 容易验证 $\rho^*(g)$ 在 B^* 下表示矩阵是 $\text{diag}\{\overline{\omega_1}, \dots, \overline{\omega_n}\}$, 所以 $\chi_\rho(g^{-1}) = \chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}, \forall g \in G$.

2.3 第一正交关系

固定有限群 G , 设 $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r\}$ 是 G 在 \mathbb{C} 上不可约表示等价类的一个代表元集, ρ_i 的表示空间是 W_i , χ_i 是 ρ_i 的特征标. 那么 $\{W_1, \dots, W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$ 上所有不可约模同构类的一个代表元集. 对每个 G 的有限维表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 我们已经看到 V 作为完全可约左 $\mathbb{C}G$ -模可分解为一些不可约模的直和, 可设

$$V = V_1^{(1)} \oplus \dots \oplus V_1^{(m_1)} \oplus V_2^{(1)} \oplus \dots \oplus V_r^{(1)} \oplus \dots \oplus V_r^{(m_r)},$$

其中每个 $V_i^{(k)}$ 是不可约模, 对每个 $1 \leq i \leq r$, $V_i^\ell \cong W_i, \forall 1 \leq \ell \leq m_i$, 这里 m_1, \dots, m_r 由 V 决定. 进而得到 $\mathbb{C}G$ -模同构 $V \cong W_1^{m_1} \oplus W_2^{m_2} \oplus \dots \oplus W_r^{m_r}$. 从 [例2.3] 可知 $\chi_\rho = \sum_{i=1}^r m_i \chi_i$. 接下来我们来说明 $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ 作为复线性空间 $\mathbb{C}^G = \{f: G \rightarrow \mathbb{C}\}$ 的子集线性无关. 一旦说明这一点我们马上得到

有限群 G 的两个有限维复表示等价当且仅当它们有相同的特征标.

我们通过证明下面的定理来得到特征标集 $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ 的 \mathbb{C} -线性无关性.

Theorem 2.9 (第一正交关系). 设 G 是有限群, \mathbb{k} 的特征零的代数闭域. $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r\}$ 是 G 在 \mathbb{k} 上不可约表示等价类的一个代表元集, ρ_i 的表示空间是 W_i , χ_i 是 ρ_i 的特征标. 那么对每个 $g \in G$, 有

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) \chi_j(g) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

为了看到上述定理成立, 对有限群 G 的有限维表示 $\rho : G \rightarrow GL(V)$, $\dim_{\mathbb{k}} V = n$, 设线性作用的不动点集

$$V^G = \{x \in V | gx = x, \forall g \in G\},$$

易见 V^G 是 V 作为左 $\mathbb{k}G$ -模的一个子模, 并且 $\text{char } \mathbb{k} = 0$ 使得可构造满 $\mathbb{k}G$ -模同态

$$p : V \rightarrow V^G, x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gx$$

使得对标准嵌入 $i : V^G \rightarrow V$ 有 $pi = \text{id}_{V^G}$, 因此 p 是 V 在直和因子 V^G 上的投影. 我们把 p 视作 V 上线性变换 $\tilde{p} : V \rightarrow V$ 并设 $\dim_{\mathbb{k}} V^G = t$, 那么可取 V 的一个基 B 使得 $\tilde{p} : V \rightarrow V$ 在 B 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\text{tr}(\tilde{p}) = \dim_{\mathbb{k}} V^G$. 另一方面, 由 p 的定义可以看出 $\tilde{p} = (1/|G|) \sum_{g \in G} \rho(g)$, 对该等式两边取迹得

$$\tilde{p} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho}(g),$$

总结一下, 得到

Lemma 2.10. 对有限群 G 的有限维表示 $\rho : G \rightarrow GL(V)$, $\dim_{\mathbb{k}} V = n$, 设线性作用的不动点集 $V^G = \{x \in V | gx = x, \forall g \in G\}$, 那么 $\dim_{\mathbb{k}} V^G = (1/|G|) \sum_{g \in G} \chi_{\rho}(g)$.

对群 G 上任意两个左 $\mathbb{k}G$ -模 X, Y , 可如下赋予 $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, Y)$ 一个左 $\mathbb{k}G$ -模结构: 对每个 $g \in G$, $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, Y)$, 定义 $g\varphi : X \rightarrow Y, x \mapsto g\varphi(g^{-1}x)$. 那么 $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, Y)$ 给出群 G 的一个表示.

Example 2.11. 设 G 是群, X, Y 是左 $\mathbb{k}G$ -模, 则 $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, Y)^G = \text{Hom}_{\mathbb{k}G}(X, Y)$.

通过取对偶基容易验证下述经典同构.

Lemma 2.12. 设 G 是群, X, Y 是左 $\mathbb{k}G$ -模, 那么 $X \otimes_{\mathbb{k}} Y$ 上通过表示的张量积可知有一个左 $\mathbb{k}G$ -模结构 (见 [例1.17]), 对 $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, Y)$, $X^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, \mathbb{k})$ 通过前面的方式赋予左 $\mathbb{k}G$ -模结构 (其中 \mathbb{k} 上左模结构平凡), 则有左 $\mathbb{k}G$ -模同构 $X^* \otimes_{\mathbb{k}} Y \cong \text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, Y)$.

现在我们把上述引理具体到有限维复表示的场景, 对有限维非零左 $\mathbb{C}G$ -模 X, Y , 由模同构 $X^* \otimes_{\mathbb{C}} Y \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ 知它们对应的表示有相同的特征标, 设 ρ_X, ρ_Y 分别是模 X, Y 对应的复表示. 从 [例2.5] 看到 $X^* \otimes_{\mathbb{C}} Y$ 的特征标由 $\chi_{\rho_X^*} \chi_{\rho_Y}$ 给出, 而 [例2.8] 中已说明 $\chi_{\rho_X^*} = \overline{\chi_{\rho_X}}$, 所以 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ 对应的表示的特征标是 $\overline{\chi_{\rho_X}} \chi_{\rho_Y}$. 因此由 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)^G = \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(X, Y)$ 以及 $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)^G = (1/|G|) \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\rho_X}}(g) \chi_{\rho_Y}(g)$ 知

Proposition 2.13. 设有限群 G 有有限维复表示 $\rho_X : G \rightarrow GL(X), \rho_Y : G \rightarrow GL(Y)$, 其中 $X, Y \neq 0$. 那么

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(X, Y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\rho_X}}(g) \chi_{\rho_Y}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_X}(g^{-1}) \chi_{\rho_Y}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_X}(g) \chi_{\rho_Y}(g^{-1}).$$

现在我们可以给出 [定理2.9] 的证明：对不可约模同构类代表元集 $\{W_1, \dots, W_r\}$, 有

$$\dim_{\mathbb{C}G} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(W_i, W_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \chi_j(g).$$

当 $i = j$ 时, [引理1.26] 说上式等号左边的维数是 1. 当 $i \neq j$ 时, 明显 $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(W_i, W_j) = 0$, 证毕.

对有限群 G , 在复线性空间 \mathbb{C}^G 上, 对每个 $\varphi, \psi \in \mathbb{C}^G$, 通过定义

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g), \forall g \in G,$$

可赋予 \mathbb{C}^G 复内积结构. 那么 [定理2.9] 无非是说不可约特征标集 $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ 是两两正交且长度是 1 的向量集, 这也是为什么我们称该定理体现的是“正交关系”. 特别地, 我们得到 $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ 是 \mathbb{C} -线性无关的.

Corollary 2.14. 有限群 G 的两个有限维复表示等价当且仅当它们有相同的特征标.

该推论表明有限群 G 的有限维复表示的特征标承载了复表示结构上的所有信息. 此外, 引入复内积语言后, 任何有限维表示的特征标在该复内积下的长度可由不可约分解中的“重数”表示. 具体地, 有

Corollary 2.15 (复表示的不可约性关于内积的判别). 设有限群 G 有有限维复表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 并设有 $\mathbb{C}G$ -模同构 $V \cong W_1^{m_1} \oplus W_2^{m_2} \oplus \dots \oplus W_r^{m_r}$ (m_1, \dots, m_r 由 V 决定), 其中 $\{W_1, \dots, W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$ -不可约模同构类代表元集, 它们对应的不可约表示特征标集设为 $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$. 我们有 $\chi_\rho = \sum_{i=1}^r m_i \chi_i$, 并且 $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum_{i=1}^r m_i^2$. 特别地, ρ 是不可约复表示当且仅当 $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$. 若取 $V = \mathbb{C}G$, 那么 $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = |G|$ (回忆 [推论1.27]).

因为有限维复表示 χ_ρ 关于自己的复内积由定义是

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\rho(g)} \chi_\rho(g), \forall g \in G,$$

特征标相当于算有限维线性空间上线性变换的迹, 它的计算并不需要把线性变换所有特征值解出, 因此计算复特征标的复内积在实际计算中是可行的. 前面提到有限群的元素个数可通过计算 $\mathbb{C}G$ 对应的复表示特征标自身和自身的内积得到, 任何有限维复表示的不可约性判别也可由复特征标内积计算得到. 所以有限群的特征标理论不止步于理论本身的优美与重要研究意义, 也具有很高的应用价值. 若有限群 G 的共轭类全体是 $\{C_1, \dots, C_r\}$, $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ 是不可约复表示等价类的一个代表元集 $\{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ 所对应的复特征标 (我们已经从 [推论1.30] 中看到 r 就是 $\mathbb{C}G$ 上所有不可约模等价类的数目), 每个 χ_i 可视作共轭类上的函数, 于是得到下表

	C_1	C_2	\dots	C_r
χ_1	$\chi_1(C_1)$	$\chi_1(C_2)$	\dots	$\chi_1(C_r)$
χ_2	$\chi_2(C_1)$	$\chi_2(C_2)$	\dots	$\chi_2(C_r)$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
χ_r	$\chi_r(C_1)$	$\chi_r(C_2)$	\dots	$\chi_r(C_r)$

称为群 G 的复特征标表. 设 $C_1 = \{1_G\}$, 则特征标表 C_1 所在的列, 各元素 $\chi_i(C_1)$ 就是 ρ_i 的次数. 我们也指

出特征标表实际上也给我们提供了一个复方阵

$$\begin{pmatrix} \chi_1(C_1) & \chi_1(C_2) & \cdots & \chi_1(C_r) \\ \chi_2(C_1) & \chi_2(C_2) & \cdots & \chi_2(C_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_r(C_1) & \chi_r(C_2) & \cdots & \chi_r(C_r) \end{pmatrix} \in M_r(\mathbb{C}).$$

下面应用特征标的复内积来导出有限群所有不可约复表示维数的平方和就是群的阶, 也就是说特征标表第一列的平方和, 即 $\sum_{i=1}^r (\chi_i(C_1))^2 (C_1 = \{1_G\})$, 是 $|G|$.

在 [例1.5] 中引入了正则表示, 它相当于是对群 G 利用群代数上的模结构给出一个表示. 在 [推论1.27] 中我们也看到若有限群 G 与代数闭域 \mathbb{k} 使 $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$, 则考察正则表示对应的不可约模直和分解 $\mathbb{k}G \cong W_1^{m_1} \oplus W_2^{m_2} \oplus \cdots \oplus W_r^{m_r}$, 其中 $\{W_1, \dots, W_r\}$ 是 $\mathbb{k}G$ -不可约模同构类代表元集, 会得到 $|G| = \sum_{i=1}^r m_i^2$, 即正则表示的不可约表示直和分解中所有重数平方和给出群的阶. 下面我们说明当 $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ 时每个 $m_i = \dim_{\mathbb{k}} W_i$, 即有限群 G 的正则表示的不可约表示直和分解中, 每个 W_i 对应表示 ρ_i 的重数 m_i 恰是 W_i 作为复线性空间的维数, 进而知群的阶 $|G|$ 就是所有 W_i 作为复线性空间的维数平方和.

Lemma 2.16. 设 G 是有限群, $\{W_1, \dots, W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$ -不可约模同构类代表元集, 并设有 $\mathbb{C}G$ -模同构 $\mathbb{k}G \cong W_1^{m_1} \oplus W_2^{m_2} \oplus \cdots \oplus W_r^{m_r}$, 那么对每个 $1 \leq i \leq r$, 有 $m_i = \dim_{\mathbb{C}} W_i$. 进而 $|G| = \sum_{i=1}^r (\dim_{\mathbb{C}} W_i)^2$.

Proof. 记 W_i 对应的不可约表示为 ρ_i , 其特征标是 χ_i , 正则表示仍记为 $\rho: G \rightarrow GL(\mathbb{C}G)$. 那么 [推论2.15] 说 $\chi_\rho = \sum_{i=1}^r m_i \chi_i$, 从而对每个 i 有 $\langle \chi_\rho, \chi_i \rangle = m_i$. 另一方面, 由正则表示的定义不难看到 $\chi_\rho(g) = 0, \forall g \neq 1_G \in G$ 以及 $\chi_\rho(1_G) = |G|$. 所以

$$m_i = \langle \chi_\rho, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\rho(g)} \chi_i(g) = \frac{1}{|G|} \overline{\chi_\rho(1_G)} \chi_i(1_G) = \chi_i(1_G) = \dim_{\mathbb{C}} W_i.$$

□

在 [例1.32] 中我们看到有限 Abel 群 G 在代数闭域 \mathbb{k} 上的不可约表示都是 1 次的, 所以群代数 $\mathbb{k}G$ 上的不可约模都是 1 维的. 下面我们刚刚得到的事实给出一个有限群交换性的刻画.

Application 2.17 (有限群交换性刻画). 设 G 是有限群, 则 G 交换的充要条件是什么? 任何不可约左 $\mathbb{C}G$ -模都是 1 维的, 即任何不可约复表示都是 1 次的. 因此我们可以读特征标表第一列元素来判别有限群的交换性. 例如对称群 S_3 的共轭类总数是 $p(3) = 3$ (回忆 [例1.31]), 所以可设 S_3 的一个不可约复表示代表元集是 $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$, ρ_i 的次数是 m_i , 那么 $6 = |S_3| = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ 表明 S_3 存在次数高于 1 的不可约表示, 事实上求解上式的正整数解便知在等价意义下 S_3 有两个 1 次不可约表示和一个 2 次不可约表示. 这就反映了 S_3 是非交换的.

Proof. 只需说明充分性: 如果任何不可约左 $\mathbb{C}G$ -模都是 1 维的, 那么 [引理2.16] 表明 G 的共轭类总数就是 $|G|$, 这迫使群 G 每个元素所在的共轭类是单点集, 进而知 G 是交换群. □

2.4 第二正交关系

在 [定理2.9] 中我们得到了复特征标的第一正交关系, 本节我们介绍另一种正交关系, 它不仅指出复特征标表不同的列是正交的, 也为我们提供了用复特征标计算有限群中一给定元素所在共轭类元素数目的公式 (见 [定理2.18]).

对有限群 G , 设 G 的共轭类全体是 $\{C_1, \dots, C_r\}$, $\{W_1, \dots, W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$ -不可约模同构类代表元集, 它们对应的不可约表示特征标集设为 $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$. 我们有下述特征标表

	C_1	C_2	\cdots	C_r
χ_1	$\chi_1(C_1)$	$\chi_1(C_2)$	\cdots	$\chi_1(C_r)$
χ_2	$\chi_2(C_1)$	$\chi_2(C_2)$	\cdots	$\chi_2(C_r)$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
χ_r	$\chi_r(C_1)$	$\chi_r(C_2)$	\cdots	$\chi_r(C_r)$

前面提到过我们可以把特征标表视作一个 r 阶复方阵

$$\begin{pmatrix} \chi_1(C_1) & \chi_1(C_2) & \cdots & \chi_1(C_r) \\ \chi_2(C_1) & \chi_2(C_2) & \cdots & \chi_2(C_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_r(C_1) & \chi_r(C_2) & \cdots & \chi_r(C_r) \end{pmatrix}.$$

回忆不可约特征标的第一正交关系 (见 [定理2.9]) 表明

$$\frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^r |C_k| \chi_i(C_k) \overline{\chi_j(C_k)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g^{-1}) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

作复方阵

$$A = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \begin{pmatrix} \chi_1(C_1)\sqrt{|C_1|} & \chi_1(C_2)\sqrt{|C_2|} & \cdots & \chi_1(C_r)\sqrt{|C_r|} \\ \chi_2(C_1)\sqrt{|C_1|} & \chi_2(C_2)\sqrt{|C_2|} & \cdots & \chi_2(C_r)\sqrt{|C_r|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_r(C_1)\sqrt{|C_1|} & \chi_r(C_2)\sqrt{|C_2|} & \cdots & \chi_r(C_r)\sqrt{|C_r|} \end{pmatrix},$$

那么 A 的行向量是两两正交的单位复向量, 所以 A 是酉矩阵, 这说明 A 的列向量全体也是两两正交的单位向量. 于是我们得到了下述定理.

Theorem 2.18 (第二正交关系). 设 G 是有限群, G 的共轭类全体是 $\{C_1, \dots, C_r\}$, $\{W_1, \dots, W_r\}$ 是 $\mathbb{C}G$ -不可约模同构类代表元集, 它们对应的不可约表示特征标集设为 $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$. 那么

- (1) 对每个共轭类 C_k , 有 $\sum_{i=1}^r \overline{\chi_i(g)} \chi_i(g) = |G|/|C_k|, \forall g \in C_k$. 特别地, 对任何 $g \in G$, g 所在的共轭类元素个数是 $|G|/(\sum_{i=1}^r |\chi_i(g)|^2)$, 这给出了用特征标计算共轭类元素个数的公式.
- (2) 设 $a, b \in G$ 是不共轭的两个元素, 那么 $\sum_{i=1}^r \overline{\chi_i(a)} \chi_i(b) = 0$. 特别地, 复特征标表中任意两个不同的列作为 \mathbb{C}^r 中列向量 (在标准复内积下) 正交.