PI 代数

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 6 月 4 日

这份笔记原先用于记录我在 2022 年 10 月所学习的 PI 代数基础知识, 正文的“经典结果”部分主要以 [1] 中 PI 代数的预备常识为主线, 一些细节上的处理主要参考了 [2]-[4]. 随后我添加了一些特殊 PI 环类的基本性质整理, 记录于“一些 PI 环类”部分. 这份笔记中会尽可能在每个定义、定理前标明主要参考的文献.

由于水平有限, 虽然我全力以赴, 但还是无法避免笔记中存在不足与错误, 欢迎大家指出!

目录

1 引言

PI 环的出现最早可以追溯到射影几何, 上个世纪 20 年代就有射影几何方面的文章中出现关于 PI 环的研究 (例如 [5]). 这里仅列出 PI 代数的部分发展历史 (更详尽的 PI 环早期发展历史可以参考 [6]):

• 1943 年, M. Hall 在文献 [7] 中证明了对域和四元数代数 $\mathbb{H}$, 都满足多项式等式 (见 [例2.8])

$$(xy - yx)^2 z = z(xy - yx)^2.$$

• 1948 年, I. Kaplansky 在文献 [8] 中引入了 PI 环的概念, 并证明了本原 PI 环是其中心上有限维中心单代数, 这一结果被称为 Kaplansky 定理 (见 [定理2.83]).

• 1950 年, J. Levitzki 在文献 [9] 中证明了素 PI 环没有非零的诣零理想 (更一般的结论见 [推论2.62]).

• 1950 年, S. A. Amitsur 和 J. Levitzki 在文献 [10] 中证明了含幺交换环 K 上的 n 阶矩阵环 $\mathrm{M}_n(K)$ 满足标准等式 s_{2n}, 这一结果被称为 Amitsur-Levitzki 定理 (见 [定理2.48]).

• 1952 年, S. A. Amitsur 在文献 [11] 中证明了任何 PI 环都满足某个偶数个变量的标准等式的幂 s_{2m}^n, 在这份笔记中称为 Amitsur 定理 (见 [定理2.124]).

• 1956 年, S. A. Amitsur 在文献 [12] 中证明了没有非零诣零理想的含幺环 R 上的一元多项式环 $R[x]$ 是半本原环 (见 [定理2.95]).

• 1960 年, Ed Posner 在文献 [13] 中使用 Goldie 定理证明了素 PI 环 R 关于中心正则元集 $S = Z(R) - \{0\}$ 的右商环是其中心上的有限维中心单代数 (见 [定理2.103]).

• 1972 年, E. Formanek 在文献 [14] 中构造了域上 n 阶矩阵环 $\mathrm{M}_n(F)$ 的中心多项式 (见 [定理2.66]).

• 1973 年, Y.P. Razmyslov 独立于 Formanek 在文献 [15] 中构造了矩阵环 $\mathrm{M}_n(F)$ 的中心多项式.

• 1973 年, L.R. Rowen 在文献 [16] 中使用 Formanek 中心多项式证明了半素 PI 环 R 的任何非零理想 J 与中心之交非零, 即 $J \cap Z(R) \neq 0$. 作为应用, 他加强了 Posner 定理 (见 [定理2.97]).

• 1976 年, S. Rosset 在文献 [17] 中使用外代数给出了 Amitsur-Levitzki 定理的简短证法.

这份笔记包含了以上列出的所有定理的证明, 其中 Amitsur-Levitzki 定理的证明采用了 Rosset 的方法, Kaplansky 定理的证明用到了本原环的稠密性定理, Posner 定理的证明采用了 Rowen 的方法. 我们将会看到, 域上的 PI 代数包含了交换代数与有限维代数 (见 [命题2.24]) 这两类代数. 因为 PI 环是交换环的推广 (见 [注记2.14]), 所以粗略地说, Kaplansky 定理就是把“交换本原环等价于域”推广为“PI 本原环等价于域上有限维单代数”, Posner 定理就是把“交换素环 (也就是整区) 关于中心正则元集的局部化 (也就是商域) 是自身上的 1 维单代数”推广为“PI 素环关于中心正则元集 S 的右局部化 R_S 是中心 $Z(R_S) = Z(R)_S$ 上的有限维单代数”. Amitsur 定理表明“PI 代数作为环是 PI 环”(见 [定理2.124]). 利用 Posner 定理与 Goldie 理论的事实, 可以得到 FBN 环类包含了 Noether PI 环类 (见 [定理3.3]). 利用 Kaplansky 定理与 Godie 定理, 可以证明域上仿射 PI 代数是满足零点定理的 Jacobson 环 (见 [推论3.11]). 我们也简要介绍了可分代数、Azumaya 代数的基本性质与刻画 (例如 [命题3.22] 和 [定理3.48]), 也包含域上代数的 (经典) 可分性与交换环上代数可分性定义的等价性 (见 [命题3.33] 和 [推论3.34])、素 PI 场景的 Artin-Procesi 定理的叙述与证明 (见 [定理3.69]).

2 经典结果

2.1 基本概念

这部分主要介绍 PI 代数的定义和最基本的性质, 我们将证明任何 PI 代数都满足某个首一多重线性多项式 (见 [定理2.16]) 以及 PI 代数的中心扩张还是 PI 的 (见 [推论2.19]). 如无特别说明, 默认含幺环 R 的单位元 $1_R \neq 0$, 含幺交换环 K 上的代数 A 默认有幺元 $1_A \neq 0$, 考虑的所有环默认非零环.

Definition 2.1 (多项式等式, [2],[4]). 设 R是 (非零) 环, 如果存在 $f \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 使得 $f(c_1, c_2, ..., c_n) = 0, \forall c_1, c_2, ..., c_n \in R$, 那么称 R 满足 f 且 f 是 R 的一个**多项式等式** (简称为 PI). 称 $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 中元素

$$s_n = s_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, \text{这里sgn}\sigma\text{表示置换}\sigma\text{的符号}$$

为第 n 个**标准等式**. 若非零多项式 $f \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 满足所有最高次 (这里是指将 f 表示为有限个字的非零 $\mathbb{Z}$-线性组合后, 系数非零的最长的字的长度) 项至少有一个系数为 1, 则称 f 是**首一多项式**. 称 $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 中形如

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, a_\sigma \in \mathbb{Z}$$

的元素为**多重线性多项式**.

Remark 2.2. 虽然我们把自由代数 $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 与多项式环 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, ..., x_n]$ 中元素都被称为多项式, 但它们是不同的概念, 前者变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 两两不交换而后者未定元两两可交换.

Remark 2.3. 类似地可以定义代数的多项式等式, 设 K 是含幺交换环, A 是 K-代数 (这里定义多项式等式的概念没有要求 A 必须有幺元), 如果自由代数 $K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 中的元素 f 使得 $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0, \forall a_1, a_2, ..., a_n \in A$, 则称 A 满足 f 且 f 是 A 的一个多项式等式. 将 $K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 中形如

$$h = h(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} b_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, b_\sigma \in K$$

的元素称为 K 上多重线性多项式. 因为环总可以视作 $\mathbb{Z}$-代数, 所以这里的概念可以视作 [定义2.1] 的推广. 这里称 h 为“多重线性”的原因是, 对 A 中任意 $n+1$ 个元素 $a_1, ..., a_{i-1}, a_i, b_i, a_{i+1}, ..., a_n$ 以及任意 $c \in K$, 有:

$$h(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, ..., a_n) = h(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n) + h(a_1, ..., a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, ..., a_n),$$

$$h(a_1, ..., a_{i-1}, ca_i, a_{i+1}, ..., a_n) = ch(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

Remark 2.4. 易见标准等式 s_n 是特殊多重线性多项式, 它是 n 次整系数多重线性多项式.

Remark 2.5. 设 A 是含幺交换环 K 上的代数, $Z(A)$是中心, 并设 $\mathcal{A}$ 是将 A 视作 $Z(A)$-模的一个生成元集. 如果多重线性多项式 $f \in K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 满足 $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0, \forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathcal{A}$, 则 A 满足 f.

Remark 2.6. 如果多重线性多项式 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} b_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \in K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$满足对任给正整数 $1 \leq i < j \leq n$, 有 $f(x_1, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, ..., x_n)$, 则称 f 是 **K 上交错多重线性多项式**. 易见 $f(x_1, ..., x_n)$ 是交错多重线性多项式的充要条件是对任给正整数 $1 \leq i < j \leq n$,

有 $f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_{j-1},x_i,x_{j+1},...,x_n)=0$(将 f 关于置换求和的展开式拆分成奇置换部分与偶置换部分之和, 考察每项系数可以发现对每个 $1\le i<j\le n$, 有 $b_\sigma=-b_{(ij)\sigma},\forall\sigma\in S_n$, 这里 $(ij)\in S_n$ 是对换). 易见标准等式 s_n 是 n 次交错多重线性多项式. 因此, 对 K-代数 A 中元素 $a_1,...,a_n$, 只要有某个 $a_i=a_j(1\le i\ne j\le n)$, 就有 $s_n(a_1,...,a_n)=0$.

Example 2.7. 设 R是交换环, 那么 R 满足第 2 个标准等式 $s_2=x_1x_2-x_2x_1$, 因为 $ab-ba=0,\forall a,b\in R$.

Example 2.8 (Hall 等式)**.** 设 K是含幺交换环, $R=\mathrm{M}_2(K)$, 易见 $(AB-BA)^2C=C(AB-BA)^2,\forall A,B,C\in R$, 所以 R 满足 $(x_1x_2-x_2x_1)^2x_3-x_3(x_1x_2-x_2x_1)^2$, 称为 **Hall 等式** (事实上 W. Wagner 在 1937 年就给出了这一构造 [18]). 因为四元数环可以用二阶复方阵表示

$$\mathbb{H}\cong\left\{\left(\begin{array}{cc} z & w\\ -\overline{w} & \overline{z}\end{array}\right)\Big|z,w\in\mathbb{C}\right\},$$

所以域上二阶方阵满足 Hall 等式蕴含了 $\mathbb{H}$ 满足 $(xy-yx)^2z-z(xy-yx)^2\in\mathbb{Z}\langle x,y,z\rangle$.

Example 2.9. 设 K是特征为 2 的域, 那么可数个变量的自由代数 $A=K\langle x_1,...,x_n,...\rangle$ 满足多项式等式 $2x\in\mathbb{Z}\langle x\rangle$, 但它不满足任何 K 上的非零多项式 $f\in K\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle$.

Proof. 若不然, 设存在 K 上的非零多项式 $f\in K\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle$ 使得 $f(g_1,...,g_n)=0,\forall g_1,g_2,...,g_n\in A$. 作代入 $g_i=x_i\in A$, 我们得到 $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$ 是零多项式, 矛盾. □

Remark 2.10. 证明过程中能够作代入 $g_i=x_i$ 的原因是对每个 K-代数 B, 固定 $b_1,b_2,...,b_n\in B$, 映射 $\varphi:K\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle\to B,h(x_1,x_2,...,x_n)\mapsto h(b_1,b_2,...,b_n)$ 是 K-代数同态, 以后不再说明.

Definition 2.11 (PI 代数,[2],[4])**.** 设 K 是含幺交换环, 若 K-代数 A(这里 A 可以没有 1_A) 满足某个 K 上首一多项式等式 $f\in K\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle$(当 A 没有 1_A 时, 我们额外要求这里的多项式等式是常数项为零), 则称 A 是 K 上的**多项式等式代数**, 或简称为 **PI 代数**. 如果 $K=\mathbb{Z}$, 称 A 是**多项式等式环**, 简称为 **PI 环**. 称 PI 代数满足的次数最低的首一多项式的次数为 PI 代数的**最小次数**.

Remark 2.12. 根据我们的定义立即得到任何 K 上的代数 A 如果作为环是 PI 的, 那么 A 当然是 PI 代数. 如果定义中将多项式等式的“首一”降低为“非零”, 就会出现 [例2.9] 这样病态的例子——作为环是 PI 的但作为代数不是 PI 的. 一个自然的反问题是：如果 K-代数 A 是 PI 代数, 那么它作为环是否是 PI 的呢 (即它是否满足某个首一整系数多项式)? 之后我们将会给出一个肯定的答复 (见定理2.124), 因此所有关于 PI 环的性质对于 PI 代数也是成立的.

Remark 2.13. 对 PI 代数引入最小次数的概念使证明一些关于 PI 代数的命题多了数学归纳法这一工具. 我们之后会对最小次数作归纳去证明非交换环论中的经典公开问题 Köthe 猜想在 PI 环层面是成立的.

Remark 2.14. 通过 [例2.7] 我们看到交换代数总是 PI 的, 通过 [例2.8] 我们看到域上的二阶矩阵环是 PI 的. 之后我们将会看到, 对含幺交换环 K 上的任何矩阵环 $\mathrm{M}_n(K)$, 它是 PI 的, 并且最小次数是 $2n$. 而 [例2.9] 也为我们提供了 $\mathbb{Z}\langle x_1,...,x_n,...\rangle$ 这一不是 PI 环的例子.

从 PI 代数的定义出发容易证明下面的事实, 进而得到从一些 PI 代数出发构造新的 PI 代数的一些手段. 我们将会在证明任何 PI 代数作为环也是 PI 的这一事实时, 使用下面引理的 (3).

Lemma 2.15 ([2]). 给定含幺交换环 K, 则
(1) 设 A 是 K 上最小次数为 d 的 PI 代数, 若 A' 是 A 的子代数, 那么 A' 也是 PI 代数, 且 A' 的最小次数不超过 d.
(2)PI 代数的 (代数) 同态像还是 PI 的. 代数同构的的 PI 代数满足相同的多项式等式.
(3) 如果含幺交换环 K 上的 PI 代数族 $\{A_i|i \in \Lambda\}$, 指标集 Λ 非空, 满足所有的 A_i 满足 K 上一公共的多项式 f, 那么 $\prod_{i\in\Lambda} A_i$ 也满足 f.

如果 PI 环 R 满足多项式等式 $h(x,y,z) = x^2y - yx - z^3 + z^{2022}$, 那么我们总能从 h 出发得到 R 的一个首一多重线性多项式：首先, 通过代入 $z = 0$ 可以看到 R 有多项式等式 $h(x,y) = x^2y - yx$, 再线性化处理多项式 h:

$$g(x,y,w) = h(x+w,y) - h(x,y) - h(w,y) = xwy + wxy.$$

这就得到 R 所满足的一个多重线性多项式. 对一般的 PI 代数我们也可以用这种思想去说明它一定满足某个首一多重线性多项式, 这也是下面的定理所说的事实.

Theorem 2.16 ([2]). 若含幺交换环 K 上的代数 A(可以没有 1_A) 满足 $K\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle$中一个次数为 d 的首一多项式 f(当 A 没有 1_A 时, 额外要求 f 的常数项是零), 那么存在某个 K 上次数不超过 d 的首一多重线性多项式 g(这里 g 的变量个数可能超过 n) 使得 g 是 A 的一个多项式等式.

Proof. 证明分为下面两步, 先调整多项式 f 来得到一个每个单项式都包含 $x_1,...,x_m$ 每个变量的首一多项式 $h(x_1,...,x_m)$(这里的变量个数 m 不超过 n), 再从 h 出发通过“线性化”的想法将 h 扩充变量与降次, 来得到所需要的首一多重线性多项式 g.

Step1. 我们先说明存在 $K\langle x_1,x_2,...,x_m\rangle$(这里 m 是不超过 n 的一个正整数) 中一个次数不超过 d 的首一多项式 h 使得 h 的每个 (系数非零的) 单项式都含有 $x_1,x_2,...,x_m$ 的每个变量并且它是 A 的一个多项式等式. 如果 f 的每个单项式都含有 $x_1,x_2,...,x_n$ 每个变量, 取 $h = f$ 即可. 否则, 存在某个变量 x_i 不在 f 的某个单项式中 (例如 $p(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3x_2 \in \mathbb{Z}\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ 中单项式 x_1x_2 不含变量 x_3), 设 $f_1(x_1,x_2,...,x_n)$ 是 f 所有包含 x_i 的非零单项式之和 (如果不存在这样的非零单项式, 定义 $f_1 = 0$), 设 $f_2(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ 是 f 所有不包含 x_i 的非零单项式之和 (如果不存在这样的非零单项式, 定义 $f_2 = 0$), 那么 $f(x_1,x_2,...,x_n) = f_1(x_1,x_2,...,x_n) + f_2(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$. 命 $a_i = 0$, 则对任给 $a_1,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_n \in A$, 有 $f_2(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_n) = 0$, 这说明 f_2 是 A 的一个多项式等式, 于是 f_1 也是 A 的一个多项式等式. 由于 f 是首一的所以 f_1, f_2 中至少有一个也是首一的, 选取 f_1, f_2 中首一的那个多项式 $f_j (j \in \{1,2\})$, 那么 f_j 是 A 的次数不超过 d 的首一多项式等式且 f_j 的每个单项式要么都含有变量 x_i, 要么都不含变量 x_i. 如果 f_j 每个单项式中出现的所有变量一致, 取 $h = f_j$, 否则, 我们对 f_j 重复作上述讨论, 可在有限步内找到满足条件的 h.

Step2. 设 A 有首一的多项式等式 $h(x_1,x_2,...,x_m) \in K\langle x_1,x_2,...,x_m\rangle$ 满足次数不超过 d 且 h 每个单项式都包含 $x_1,x_2,...,x_m$ 每个变量 (根据前面的讨论我们知道这样的 h 是存在的), 记 l_i 是 x_i 在 h 每个单项式中出现的次数 (或者说每个单项式关于变量 x_i 的次数) 的最大值, $l = \max\{l_1,l_2,...,l_m\}$(为了之后叙述方便, 临时称 l 是 h 的**变量最高次数**), 我们对 h 的变量最高次数 $l \geq 1$ 作归纳说明存在 K 上次数不超过 d 的首一多重线性多项式 g 使得 g 是 A 的一个多项式等式. 当 $l = 1$ 时, 由 h 的定义知 h 每个单项式中变量 $x_1,...,x_m$ 恰好出现一次, 故 h 自身是首一多重线性多项式, 取 $g = h$ 即可. 假设结论对不超过 $l-1 (l \geq 2)$ 的情形成立,

那么可设 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_t \le m$ 是 $1, 2, ..., m$ 中所有使得 $l_i = l$ 的指标 i. 命 $g_1(x_1, x_2, ..., x_{m+1}) =$

$$h(..., x_{i_1-1}, x_{i_1} + x_{m+1}, x_{i_1+1}, ...) - h(..., x_{i_1-1}, x_{i_1}, x_{i_1+1}, ...) - h(..., x_{i_1-1}, x_{m+1}, x_{i_1+1}, ...),$$

那么 g_1 是 A 的一个首一多项式等式, 次数不超过 h 的次数, 每项含有 $x_1, ..., x_{m+1}$ 的每个变量, 且变量 x_{i_1} 在 g_1 的每个单项式中次数不超过 $l-1$(这里 g_1 的构造相当于是对 g_1 关于变量 x_{i_1} 作了“线性化”). 类似地我们定义满足单项式包含每个变量且首一的多项式 $g_2(x_1, ..., x_{m+1}, x_{m+2}) =$

$$g_1(..., x_{i_2-1}, x_{i_2} + x_{m+2}, x_{i_2+1}, ...) - h(..., x_{i_2-1}, x_{i_2}, x_{i_2+1}, ...) - h(..., x_{i_2-1}, x_{m+2}, x_{i_2+1}, ...),$$

那么 g_2 是 A 的首一多项式等式, 次数不超过 g_1 的次数, g_2 每个单项式关于变量 x_{i_2} 的出现次数不超过 $l-1$. 重复上述过程, 可得 K 上多项式 $g_t(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+t})$ 使得它是 A 的首一多项式等式, 次数不超过 d, g_t 每个单项式都包含 $x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+t}$ 的每个变量, g_t 的变量最高次数不超过 $l-1$, 对 g_t 应用归纳假设即得多项式 g. □

Corollary 2.17 ([2]). 设 A 是含幺交换环 K 上最小次数为 d 的 PI 代数, 那么存在 d 次首一多重线性多项式 $g(x_1, ..., x_d) \in K\langle x_1, ..., x_d\rangle$ 使得 g 是 A 的一个多项式等式.

Example 2.18. 如果 K-代数 A 交换, 那么 A 是 K 上最小次数为 2 的 PI 代数 (满足 $xy - yx \in \mathbb{Z}\langle x, y\rangle$). 如果 K-代数 A 满足 $k \cdot 1_A \neq 0, \forall k \neq 0 \in K$, 那么当 A 的最小次数是 2 时, A 一定交换: 这时由 [定理2.16] 知存在 $k \in K$ 使得 A 满足 $xy + kyx$. 命 $x = y = 1_A$ 便知 $(1+k)1_A = 0$, 这迫使 $k = -1$, 所以 A 是交换代数.

Corollary 2.19 (PI 代数的中心扩张仍 PI, [2]). 如果 K-代数 B 有子代数 A 满足 B 作为 $Z(B)$-模有个生成元集是 A(或等价地, $A \cup Z(B)$ 是 B 作为 K-代数的一个生成元集), 则称 B 是 A 的**中心扩张**. 例如任意多个未定元的多项式环 $A[\{x_i\}_{i\in I}]$(这里 $\{x_i\}_{i\in I}$ 是 A 上以 I 为指标集的未定元集) 是 A 的中心扩张 (因为 $\{x_i\}_{i\in I}$ 在多项式环 $A[\{x_i\}_{i\in I}]$ 的中心里). 如果 K-代数 A 是 PI 代数, 那么 A 的中心扩张也是 PI 代数. 更进一步, PI 代数与它的中心扩张满足相同的多重线性多项式 (所以也有相同的最小次数). 特别地, PI 代数 A 上的多项式代数 $A[\{x_i\}_{i\in I}]$也是 PI 的 (所以 K-代数 A 是 PI 代数当且仅当 $A[x]$ 是 PI 代数).

Proof. 设 A 是 PI 代数, $B \supseteq A$ 是中心扩张. 由 [定理2.16] 可得存在某个首一多重线性多项式 $f \in K\langle x_1, ..., x_n\rangle$ 使得 f 是 A 的多项式等式. 而 B 中元素均可由 A 中有限个元素 $Z(B)$-线性表出, 因而由 f 的多重线性性得到 f 也是 B 的多项式等式. 反过来, A 作为 B 的子代数当然满足 B 在 K 上的任何多项式等式, 所以 A 与 B 满足相同的多重线性多项式. □

下面我们来说明域上有限维代数是 PI 的, 结论上会做得更一般些. 先做一些准备.

Lemma 2.20 ([2]). 设 R 为含幺环, M 是有限生成右 R-模, 可由 n 个元素生成, 那么存在矩阵环 $\mathrm{M}_n(R)$ 的 (含幺) 子环 S 与满环同态 $\varphi: S \to \mathrm{End}(M_R)$.

Proof. 因为有环同构 $\mathrm{M}_n(R) \cong \mathrm{End}(R^n)$, 所以只需证明自同态环 $\mathrm{End}(R^n)$ 有含幺子环 S 以及 S 到 $\mathrm{End}(M_R)$ 的满环同态即可. 设 M 有一个生成元集是 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, 置 $\pi: R^n \to M$ 为标准同态 (把 R^n 中的第 i 个标准单位列向量映至 x_i), 并令 $S = \{\alpha \in \mathrm{End}(R^n) | \alpha(\mathrm{Ker}\pi) \subseteq \mathrm{Ker}\pi\}$, 那么 S 明显是 $\mathrm{End}(R^n)$ 的含幺子环. 易

见对任给 $\alpha\in S$, 存在唯一的模同态 $\alpha'\in\mathrm{End}(M_R)$ 使得 $\pi\alpha=\alpha'\pi$, 即下图交换：

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[d, dashed, "\alpha'"] \\ R^n \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

那么 $\varphi: S\to\mathrm{End}(M_R), \alpha\mapsto\alpha'$ 是定义合理的保幺环同态. 只需验证 φ 是满射即可, 任取自同态 $f\in\mathrm{End}(M_R)$, 存在 n 阶矩阵 $A\in\mathrm{M}_n(R)$(未必唯一) 使得

$$(f(x_1),f(x_2),...,f(x_n))=(x_1,x_2,...,x_n)A,$$

通过矩阵 A 在 R^n 上的左乘可以导出 R^n 上的自同态 $\mathcal{A}:R^n\to R^n, v\mapsto Av$, 可直接验证 $\mathcal{A}\in S$ 且 $\varphi(\mathcal{A})=f$, 因此 φ 是满环同态. □

Lemma 2.21 ([2])**.** 设 R 是含幺环, 如果 R 作为 $Z(R)$-模可由 m 个元素生成, 那么对任何正整数 $t\geq m+1$, R 满足任何 t 次交错多重线性多项式 (例如 s_t). 特别地, 这时 R 是 PI 环.

Proof. 设 R 作为 $Z(R)$-模有生成元集 $X=\{a_1,...,a_m\}$, 根据 [注记2.6], 对任给 $t\geq m+1$ 次交错多重线性多项式 f, 有 $f(b_1,...,b_t)=0,\forall b_1,...,b_t\in X$. 再由 f 的多重线性性可得 f 是 R 的多项式等式. □

Remark 2.22. 因此 R 如果作为某个中心子环上的模是有限生成的, 则 R 是 PI 环.

Example 2.23 (交换环上的矩阵环 PI, [2])**.** 设 K 是含幺交换环, $R=\mathrm{M}_n(K)$ 作为其中心上的模明显可以由 n^2 个基础矩阵 E_{ij} 生成, 所以 R 满足 s_{n^2+1}, 特别地, R 是 PI 环. 现在我们得到了 $\mathrm{M}_n(K)$ 是最小次数不超过 n^2+1 的 PI 环, 在证明完 Amitsur-Levitzki 定理过后, 我们将会看到 $\mathrm{M}_n(K)$ 的最小次数是 $2n$.

Proposition 2.24 ([2])**.** 设 R 是含幺环, K是 R 的 (包含 1_R 的) 交换子环, 如果 R 是有限生成 K-模, 则 R 是 PI 环. 特别地, 域上有限维代数作为环是 PI 环, 进而也是 PI 代数.

Proof. 设 K-模 R 可由 n 个元素生成, 那么由 [引理2.20] 存在 $\mathrm{M}_n(K)$ 的含幺子环 S 使得 S 到 $\mathrm{End}(R_K)$ 有满环同态, 所以由 [例2.23] 以及 [引理2.15] 可知 $\mathrm{End}(R_K)$ 是 PI 环. 而 R 到 $\mathrm{End}(R_K)$ 有嵌入：$j:R\to\mathrm{End}(R_K), a\mapsto a_l$, 这里 a_l 是由元素 a 决定的左乘变换, 所以 R 是 PI 环. □

Remark 2.25. 与 [引理2.21] 不同的是这里交换子环 K 未必在 $Z(R)$ 中, 该命题推广了 [引理2.21].

若含幺交换环 K 上代数 A 是某个中心子代数 Z 上有限生成模, 称 A 是**模有限代数**. 从 [命题2.24] 中我们看到模有限代数都是 PI 代数. 下面介绍一个模有限代数类. 根据仿射代数几何中代数与几何的对应我们知道代数闭域上仿射簇范畴与交换仿射可约代数范畴间有标准的范畴对偶. 进而每个仿射簇在同构意义下都对应一个唯一的交换代数. 仿射空间 $\Bbbk^n$ 对应多项式代数 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$. 下面我们来看仿射空间的量子化, 单位根处的量子仿射空间也可以产生模有限代数. 首先是最简单的量子平面, 它来自俄罗斯数学家 Yuri Manin.

Example 2.26 (量子平面, [1])**.** 设 $\Bbbk$ 是域, $q\in\Bbbk^*$, 称 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)=\Bbbk\langle x,y\rangle/(xy-qyx)$ 为 q 处的**量子平面**. 如果 q 是 m 次单位根, 即 $q^m=1$. 那么 $\overline{x}^m,\overline{y}^m\in Z(\mathcal{O}_q(\Bbbk^2))$, 这时 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 是中心子代数 $\Bbbk[\overline{x}^m,\overline{y}^m]$ 上的有限生成模. 因此单位根处的量子平面是模有限仿射代数.

Remark 2.27. 设 $q \in \Bbbk^*$, 则量子平面 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $X = \{\overline{x}^i\overline{y}^j | i, j \in \mathbb{N}\}$. 易见 X 可 $\Bbbk$-线性张成 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$. 要看到 X 的线性无关性, 如果存在有限个不全为零的元素 $c_{ij} \in \Bbbk$ 使得 $\sum c_{ij}\overline{x}^i\overline{y}^j = 0$, 那么存在 $\Bbbk\langle x, y\rangle$ 中两两互异的非零多项式 $g_1, ..., g_m, f_1, ..., f_m$ 使得 $\sum c_{ij}x^iy^j = \sum f_k(x, y)(xy - qyx)g_k(x, y)$. 如果 $q = 1$ 结论明显成立, 下设 $q \neq 1$. 考察该式等号两边的最高次单项式便得矛盾. 因此 $X = \{\overline{x}^i\overline{y}^j | i, j \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 作为线性空间的基. 下面我们利用 Ore 扩张的性质来说明量子平面是双边 Noether 整环. 首先回忆含幺环 R 上关于一个给定环自同态 $\sigma : R \to R$ 的加群同态 $\delta : R \to R$ 被称为 σ-导子, 如果 $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b, \forall a, b \in R$. 在含幺环 R 关于环自同态 σ 和 σ-导子 δ 的 Ore 扩张 $R[x; \sigma, \delta]$ 中有 $xa = \sigma(a)x+\delta(a), \forall a \in R$. 如果 R 是整环且 σ 是单射, 则 $R[x; \sigma, \delta]$ 也是整环. 如果 σ 是满射且 R 是左 Noether 环 (那么 σ 是环自同构), 那么 $R[x; \sigma, \delta]$ 也是左 Noether 环. 并且 Ore 扩张 $R[x; \sigma, \delta]$ 满足下述泛性质：对任给含幺环 S, 保幺环同态 $\eta : R \to S$ 以及满足 $y\eta(a) = \eta(\sigma(a))y + \eta(\delta(a)), \forall a \in R$ 的元素 $y \in S$, 总存在唯一的保幺环自同态 $\overline{\eta} : R[x; \sigma, \delta] \to S$ 使得 $\overline{\eta}(x) = y$ 并且下图交换：

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr] \arrow[dr, "\eta"'] & & R[x;\sigma,\delta] \arrow[dl, dashed, "\overline{\eta}"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

现在取 $R = \Bbbk[x]$, $\sigma : R \to R, f(x) \mapsto f(q^{-1}x), \delta = 0$(易见 σ 是环自同构). 注意到在 $S = \mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 中总有 $\overline{yx} = q^{-1}\overline{xy}$, 因此若置 $\eta : \Bbbk[x] \to \mathcal{O}_q(\Bbbk^2), f(x) \mapsto f(\overline{x})$ 是标准嵌入同态, 那么由 $\overline{y}\eta(f(x)) = \eta(\sigma(f(x)))\overline{y}$ 知通过上述 Ore 扩张的泛性质存在唯一的保幺环同态 $\overline{\eta} : \Bbbk[x][y; \sigma] \to \mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 使得 $\overline{\eta}(y) = \overline{y}$ 并且 $\overline{\eta}(f(x)) = f(\overline{x}), \forall f(x) \in \Bbbk[x]$. 由此可见 $\overline{\eta}$ 一定是 $\Bbbk$-代数同态, 它将 $\Bbbk[x][y; \sigma]$ 的标准基映至量子平面的标准基, 故 $\overline{\eta}$ 是代数同构. 上述讨论表明量子平面是域上一元多项式代数关于一个特殊代数自同构的 Ore 扩张. 特别地, 量子平面是整环并且是双边 Noether 环. 故单位根处量子平面是 Noether 仿射 PI 整环.

Example 2.28 (量子仿射空间, [1]). 设 $\Bbbk$ 是域, $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 满足下面的乘性反对称条件:

$$q_{ii} = 1, q_{ij}q_{ji} = 1, \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

称 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) = \Bbbk\langle x_1, ..., x_n\rangle/(\{x_ix_j - q_{ij}x_jx_i | 1 \leq i, j \leq n\})$ 为乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}$ 处的 (多参数) **量子仿射 n-空间**. 这里要求矩阵 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n}$ 是乘性反对称的原因是我们希望在 $x_ix_i = q_{ii}x_ix_i$ 以及 $x_ix_j = q_{ij}q_{ji}x_ix_j$ 的基础上排除 $x_ix_j = 0$ 这种现象. 这迫使矩阵 $\boldsymbol{q}$ 的主对角线元素均为 1, (i, j) 元与 (j, i) 元互为 $\Bbbk$ 中乘法逆元. 如果 $q \in \Bbbk^*$, 乘性反对称阵 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n}$ 满足当 $i < j$ 时有 $q_{ij} = q$, 则记 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 为 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$, 称为 q 处 (单参数) **量子仿射 n-空间**. 由此可见量子平面是特殊的量子仿射 2-空间. 如果乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}$ 满足每个元素都是单位根, 那么对每个 $1 \leq i \leq n$, 存在正整数 t_i 使得 $\overline{x_i}^{t_i} \in Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$. 因此存在正整数 t 使得 $\Bbbk[\overline{x_1}^t, ..., \overline{x_n}^t] \subseteq Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$. 由此可知元素均为单位根的乘性反对称阵处的 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 也是模有限代数.

作为重要且基本的量子代数例子, 下面我们进一步讨论量子仿射空间的基本结构, 初次阅读可略过. 我们固定域 $\Bbbk$ 上乘性反对称阵 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n}$. 根据量子仿射空间的定义, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是仿射 $\Bbbk$-代数. 下面我们通过说明 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是多项式代数作有限次 (累次)Ore 扩张得到的代数来得到 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 的基本环论性质.

命 $\tau_1 : \Bbbk[x_1] \to \Bbbk[x_1], f(x_1) \mapsto f(q_{21}x_1)$, 易见 τ_1 是代数自同构, 并记 $R_1 = \Bbbk[x_1][x_2; \tau_1]$. 递归地, 如果已经对每个正整数 $1 \leq i \leq n - 1$ 定义了 $R_i = \Bbbk[x_1][x_2; \tau_1] \cdots [x_i; \tau_{i-1}]$, 其中 $\tau_{k-1} : R_{k-1} \to R_{k-1}$ 是由

$$\tau_{k-1}(f(x_1, ..., x_{k-1})) = f(q_{k1}x_1, ..., q_{k,k-1}x_{k-1}), \forall f(x_1, ..., x_{k-1}) \in R_{k-1}$$

确定的代数自同构 (可直接验证). 再考虑代数自同构 $\tau_i: R_i \to R_i, f(x_1, ..., x_i) \mapsto f(q_{i+1,1}x_1, ..., q_{i+1,i}x_i)$ 定义出的 Ore 扩张 R_{i+1}, 进而得到 $R_n = \Bbbk[x_1][x_2;\tau_1]\cdots[x_{n-1};\tau_{n-2}][x_n;\tau_{n-1}]$. 我们有

Lemma 2.29 ([1])**.** 上述构造的累次 Ore 扩张代数 $R_n = \Bbbk[x_1][x_2;\tau_1]\cdots[x_{n-1};\tau_{n-2}][x_n;\tau_{n-1}]$ 同构于 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$.

Proof. 考虑自由代数到 R_n 的标准代数同态 $\theta: \Bbbk\langle x_1, ..., x_n\rangle \to R_n, f(x_1, ..., x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_n)$. 对每个正整数对 $1 \le i < j \le n$, $\theta(x_ix_j - q_{ij}x_jx_i) = x_ix_j - q_{ij}\tau_{j-1}(x_i)x_j = x_ix_j - x_ix_j = 0$. 因此 θ 诱导代数同态 $\tilde{\theta}: \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \to R_n$ 满足 $\tilde{\theta}(x_k) = x_k, \forall 1 \le k \le n$. 于是知 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 作为 $\Bbbk$-线性空间有基

$$\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} | i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}\}.$$

这一观察表明 $\tilde{\theta}$ 是单射. 而 $\tilde{\theta}$ 明显是满射, 因此 $\tilde{\theta}$ 是代数同构. □

通过 [引理2.29], 以及 Ore 扩张代数的基本性质, 我们立即看到

Proposition 2.30 ([1])**.** 量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是 Noether 仿射 $\Bbbk$-整环且有 $\Bbbk$-基 $\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} | i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}\}$.

Corollary 2.31 ([1])**.** 量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 既不是左 Artin 环也不是右 Artin 环.

Proof. 有左理想严格降链 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)x_n \supsetneq \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)x_n^2 \supsetneq \cdots$ 和右理想严格降链 $x_1\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \supsetneq x_1^2\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \supsetneq \cdots$. □

Proposition 2.32. 设 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n}$ 是域 $\Bbbk$ 上乘性反对称阵, 满足每个 p_{ij} 是单位根. 那么 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是 PI 代数并且存在本原单位根 $\varepsilon \in \Bbbk$ 和反对称整数矩阵 $(a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 满足 $p_{ij} = \varepsilon^{a_{ij}}$.

Proof. 如果每个 p_{ij} 都是单位根, 那么存在正整数 ℓ 使得 $x_1^\ell, ..., x_n^\ell$ 两两可交换. 于是 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是中心子代数 $\Bbbk[x_1^\ell, ..., x_n^\ell]$ 上有限生成模, 进而 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是 PI 代数. 现在考察所有的 q_{ij} 在 $\Bbbk$ 的乘法群中生成的子群 G, 那么 G 是有限群. G 作为域的乘法群的有限子群必定是循环群, 设 G 的生成元是 ε, 那么 ε 是本原单位根并且对每个 q_{ij}, 都存在整数 a_{ij} 使得 $q_{ij} = \varepsilon^{a_{ij}}$. 结合 $\boldsymbol{q}$ 是乘性反对称阵可不妨取 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是反对称的. □

Remark 2.33. 反之, 可以证明当量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是 PI 代数时, 每个 q_{ij} 都是单位根, 见 [定理3.251].

下面我们来计算单位根处 (偶数维) 单参数量子仿射空间的中心 (见 [命题2.34]), 固定 $\Bbbk$ 中 ℓ 次本原单位根 ε. 设乘性反对称阵 $(q_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 满足当 $i < j$ 时, $q_{ij} = \varepsilon$. 即 $(q_{ij})_{n\times n}$ 决定的量子仿射空间是 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$. 这时明显有 $\hat{Z} = \Bbbk[x_1^\ell, ..., x_n^\ell] \subseteq Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n))$. 于是知 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 是有限生成 $\hat{Z}$-模, 可由

$$\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} | 0 \le i_1, ..., i_n \le \ell - 1\}$$

生成. 通过对上述生成元集中每个单项式的幂指数组模 ℓ 可知 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 是秩为 ℓ^n 的自由 $\hat{Z}$-模. 对每个正整数 $1 \le i \le n$, 定义 $\tau_i: \mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n) \to \mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 是由 $\tau_i(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}) = q_{i1}^{k_1}\cdots q_{in}^{k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 确定的线性同构, 不难看出 τ_i 还是 $\Bbbk$-代数同构 (或者, 对此固定的 i, 利用量子仿射空间定义中的生成元和生成关系知存在唯一的代数自同态 $\tau_i: \mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n) \to \mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 满足 $\tau_i(x_j) = q_{ij}x_j, \forall 1 \le j \le n$. 根据 [命题2.30] 便知这是线性同构, 进而是代数自同构). 对任何 $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$, 易知 $x_if = \tau_i(f)x_i$, 所以 τ_i 可以理解为 x_i 决定的“共轭变换”. 在 [命题2.30] 中已经指出量子仿射空间 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 是整环, 所以一个基本的观察是: 设 $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$, 那么 $fx_i = x_if$ 当且仅当 $\tau_i(f) = f$. 现在我们能够具体描述单位根处偶数维量子仿射空间的中心.

Proposition 2.34 ([1])**.** 设 n 是偶数, $\varepsilon \in \Bbbk$ 是 ℓ 次本原单位根. 那么 $Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)) = \Bbbk[x_1^\ell, ..., x_n^\ell]$.

Proof. 不妨设 $\ell \geq 2$. 之前已经指出 $\Bbbk[x_1^\ell,...,x_n^\ell] \subseteq Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n))$. 任取 $Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n))$ 中的元素 f, 对 f 的每个单项式 $x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}$, 由 $\tau_i(f)=f, \forall 1 \leq i \leq n$ 可知 τ_i 作用 $x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}$ 不动. 记 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 中主对角线全为零, 严格上三角部分全为 1, 严格下三角部分全为 -1 的矩阵 (即 $\boldsymbol{q}$ 每个分量关于 q 的幂指数按照原有次序排成的矩阵), 可直接计算 $\det(a_{ij})_{n\times n}=1$. 因为 $\tau_i(x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}) = x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}$, 所以对每个正整数 $1 \leq i \leq n$, 有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = 0,\ (\mathrm{mod}\ \ell).$$

于是由 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 上可逆 n 阶阵得到每个 $d_j = 0,\ (\mathrm{mod}\ \ell)$. 这与 $x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}$ 的选取矛盾. □

Remark 2.35. 特别地, n 是偶数时, $Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n))$ 的中心同构于 n 元多项式代数.

Remark 2.36. 当 n 是奇数时, $Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n))$ 的中心通常比 $\Bbbk[x_1^\ell,...,x_n^\ell]$ 更大并且难以把握. 例如设 $n=\ell=3$, 那么 $x_1^2x_2x_3^2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{O}_q(\Bbbk^3))$ 但 $x_1^2x_2x_3^2 \notin \Bbbk[x_1^3,x_2^3,x_3^3]$.

Remark 2.37. 如果 $\Bbbk$ 中非零元 q 不是单位根, 那么利用 [命题2.30] 易知 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 的中心就是 $\Bbbk$.

更一般地, 在 [命题2.32] 中我们看到如果决定量子仿射空间的乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}$ 中的每个元素是单位根, 那么存在本原单位根 ε 与整数环上的反对称阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $p_{ij}=\varepsilon^{a_{ij}}$. 那么使用 [命题2.34] 中的技术, 可以适当放宽命题的条件, 我们固定记号 $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}$.

Proposition 2.38. 设 $\Bbbk$ 是域, ε 是域 $\Bbbk$ 中 ℓ 次本原单位根, $(a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 是反对称阵并设 $q_{ij}=\varepsilon^{a_{ij}}, 1 \leq i,j \leq n$. 那么当 $(a_{ij})_{n\times n}$ 所对应的 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 上矩阵是可逆的, 那么 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)) = \Bbbk[x_1^\ell,...,x_n^\ell]$.

Remark 2.39. 我们指出在定理条件下, 正整数 n 只可能是偶数. 事实上, 含幺交换环上奇数阶主对角线全为零的反对称阵行列式为零. 固定含幺交换环 K 和奇数 n, 并设 $A=(a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(K)$ 是主对角线全为零的反对称阵. 我们说明 $\det A = 0$. 当 $n=1$ 时结论直接成立, 下设 $n \geq 3$, 我们将通过分析 $\det A$ 的组合展开式 $\det A = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ 来得到 A 的行列式为零. 由 n 是奇数保证了每个阶为 2 的置换 $\sigma \in S_n$ 都必有不动点 (考察 σ 的不相交轮换分解, 每个轮换因子长度恰为 2), 进而知此时 $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}=0$. 记 $X=\{\sigma\in S_n | \sigma \neq \sigma^{-1}\}$, 那么 X 含偶数个元素并且存在 X 的子集 X_1, X_2 使得 $X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \varnothing$ 且 $f: X_1 \to X_2, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ 是双射. 于是可如下计算 $\det A$.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in X} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in X_1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in X_1} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in X_1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma\in X_1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \sum_{\sigma\in X_1} \mathrm{sgn}(\sigma) (a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} - a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}) \\
&=0.
\end{aligned}$$

类似于量子仿射空间, Weyl 代数也是累次 Ore 扩张. 下面我们说明正特征的 Weyl 代数也是 PI 环.

Example 2.40 (Weyl 代数, [2])**.** 固定域 $\Bbbk$, 回忆 n 阶 **Weyl 代数** $A_n(\Bbbk)$ 是由 $2n$ 个生成元 $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n$ 和生成关系 $x_iy_j-y_jx_i=\delta_{ij},x_ix_j-x_jx_i=y_iy_j-y_jy_i=0$, 这里 $1\le i,j\le n$, 定义出的 $\Bbbk$ 仿射代数. Weyl 代数是量子力学中自然产生的非交换代数, 它也是仿射空间上的微分算子环. 当 $n=1$ 时, 将生成元写作 x,y, 这时 $A_1(\Bbbk)=\Bbbk\langle x,y\rangle/(xy-yx-1)$. 考虑多项式代数 $R=\Bbbk[x_1,...,x_n]$, 并作 Ore 扩张序列 $R_0=R,R_1=R_0[y_1;-\partial/\partial x_1],R_{i+1}=R_i[y_{i+1};-\partial/\partial x_{i+1}]$. 那么可直接验证 R_n 作为 $\Bbbk$-代数由 $\{x_1,...,x_n,y_1,...,y_n\}$ 生成并且 $x_iy_j-y_jx_i=\delta_{ij},x_ix_j-x_jx_i=y_iy_j-y_jy_i=0,\forall 1\le i,j\le n$. 进而存在自然的代数同态 $\varphi:A_n(\Bbbk)\to R_n$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk\langle x_1,...,x_n,y_1,...,y_n\rangle \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr] & & A_n(\Bbbk) \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
& R_n &
\end{tikzcd}$$

易见 φ 是满射, 结合 R_n 作为 $\Bbbk$-线性空间有基 $\{x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}y_1^{j_1}\cdots y_n^{j_n}|k_1,...,k_n,j_1,...,j_n\in\mathbb{N}\}$ 可知 φ 是单射. 因此我们得到 $\Bbbk$-代数同构 $R_n\cong A_n(\Bbbk)$. 由 Ore 扩张的性质立即得到 $A_n(\Bbbk)$ 是双边 Noether 整区. 注意到 Weyl 代数有左理想降链 $A_n(\Bbbk)y_n\supsetneq A_n(\Bbbk)y_n^2\supsetneq A_n(\Bbbk)y_n^3\supsetneq\cdots$ 和右理想降链 $x_1A_n(\Bbbk)\supsetneq x_1^2A_n(\Bbbk)\supsetneq x_1^3A_n(\Bbbk)\supsetneq\cdots$. 所以 Weyl 代数既不是左 Artin 环也不是右 Artin 环. 可直接计算对任何 $f\in A_n(\Bbbk)$ 有

$$x_if-fx_i=\partial f/\partial y_i, y_if-fy_i=-\partial f/\partial x_i,\forall 1\le i\le n.$$

由此可知当 $\mathrm{char}\Bbbk=0$ 时, 任何 $Z(A_n(\Bbbk))=\Bbbk$, 所以这时 $A_n(\Bbbk)$ 是无限维代数. 并且利用上式容易验证特征零的 Weyl 代数任何非零理想是整个代数, 这说明此时 Weyl 代数是双边 Noether 单整区. 之后我们将用 Kaplansky 定理 (见 [定理2.83]) 说明特征零的 Weyl 代数不是 PI 环. 下面我们考虑正特征的域上的 Weyl 代数, 设 $\mathrm{char}\Bbbk=p$ 为素数, 那么明显有 $x_i^p,y_i^p\in Z(A_n(\Bbbk))$, 所以 $\Bbbk[x_1^p,...,x_n^p,y_1^p,...,x_n^p]\subseteq Z(A_n(\Bbbk))$. 由此可知 $x_1^pA_n(\Bbbk)$ 是 $A_n(\Bbbk)$ 的非平凡理想, 因此正特征的 Weyl 代数不是单环. 对任给 $f\in Z(A_n(\Bbbk))$, 由 f 关于每个变量的偏导数是零立即得到 $f\in\Bbbk[x_1^p,...,x_n^p,y_1^p,...,x_n^p]$. 因此 $Z(A_n(\Bbbk))=\Bbbk[x_1^p,...,x_n^p,y_1^p,...,x_n^p]$. 容易验证 $A_n(\Bbbk)$ 作为中心上的模可由 $\mathcal{B}=\{x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}y_1^{j_1}\cdots y_n^{j_n}|0\le k_1,...,k_n,j_1,...,j_n\le p-1\}$ 生成并且 $\mathcal{B}$ 是 $Z(A_n(\Bbbk))$-线性无关的, 即 $A_n(\Bbbk)$ 是中心上秩为 p^{2n} 的自由模. 特别地, $A_n(\Bbbk)$ 是模有限代数.

为了之后引用方便, 我们记录一些 Ore 扩张代数的概念、事实以及标准等式的恒等式 (见 [引理2.42]), 初次阅读可先跳过. 固定含幺环 R 上的环自同构 τ, 并设 $d\in R$, 称形如 $\delta:R\to R,x\mapsto dx-\tau(x)d$ 的加群同态为 R 上的**内 τ-导子**. 这时易见对任何 $a,b\in R$ 有 $\delta(ab)=\delta(a)b+\tau(a)\delta(b)$(回忆 τ-导子 δ 是指满足对任何 $a,b\in R$ 有 $\delta(ab)=\delta(a)b+\tau(a)\delta(b)$ 的加群同态 $\delta:R\to R$).

Lemma 2.41 ([1])**.** 设 R 是含幺环, τ 是 R 上环自同构, δ 是 τ-导子, 即有 Ore 扩张 $R[x;\tau,\delta]$. 那么
(1) 如果 τ 是内自同构, 即存在可逆元 $u\in R$ 满足 $\tau(a)=u^{-1}au,\forall a\in R$, 那么 $u\delta$ 是 R 上 (经典) 导子, 并且 R 上恒等映射可延拓为环同构 $R[x;\tau,\delta]\cong R[y;u\delta]$ 把 y 对应到 ux.
(2) 如果 δ 是内 τ-导子, 即存在 $d\in R$ 使得 $\delta(a)=da-\tau(a)d,\forall a\in R$, 那么 R 上恒等映射可延拓为环同构 $R[x;\tau,\delta]\cong R[y;\tau]$ 把 y 对应到 $x-d$.
(3) 设 S 是 R 的右分母集满足 $\tau(S)=S$, 并设 $\lambda_S:R\to R_S$ 是右局部化映射. 对自同构 $\tau:R\to R$, 存在唯

一的环自同构 $\tilde{\tau}: R_S \to R_S$ 满足下图交换:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\lambda_S"] \arrow[d, "\tau"'] & R_S \arrow[d, dashed, "\tilde{\tau}"] \\ R \arrow[r, "\lambda_S"] & R_S \end{tikzcd}$$

类似地, τ-导子 δ 可自然诱导 R_S 上的 $\tilde{\tau}$-导子 $\tilde{\delta}$, 满足对任何 $a \in R, s \in S$ 有

$$\tilde{\delta}(as^{-1}) = \delta(a)s^{-1} - \tilde{\tau}(as^{-1})\delta(s)s^{-1}.$$

(4) 设 S 是 R 的右分母集满足 $\tau(S) = S$, 那么 S 也是 $R[x;\tau,\delta]$ 中的右分母集, 并且在 (3) 的记号下, 有自然的环同构 $R[x;\tau,\delta]_S \cong R_S[y;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 将 y 对应到 $x1^{-1}$.

Proof. (1) 由条件, 这时对任何 $a, b \in R$ 有 $\delta(ab) = \delta(a)b + \tau(a)b = \delta(a)b + u^{-1}au\delta(b)$. 于是对该等式两边左乘上 u 得到 $u\delta : R \to R$ 是经典导子. 记 $\mathfrak{i} : R \to R[y; u\delta]$ 和 $\mathfrak{j} : R \to R[x;\tau,\delta]$ 是标准嵌入. 注意对任何 $a \in R$, 有 $(ux)\mathfrak{j}(a) = uxa = u(\tau(a)x + \delta(a)) = aux + u\delta(a)$, 因此根据 Ore 扩张的泛性质, 存在唯一的 (保幺) 环同态 $\eta : R[y; u\delta] \to R[x;\tau,\delta]$ 满足 $\eta(y) = ux$ 以及 $\eta\mathfrak{i} = \mathfrak{j}$, 即下图交换:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\mathfrak{i}"] \arrow[dr, "\mathfrak{j}"'] & & R[y;u\delta] \arrow[dl, dashed, "\eta"] \\ & R[x;\tau,\delta] & \end{tikzcd}$$

类似地, 注意到对任何 $a \in R$ 有 $ya = ay + u\delta(a)$, 因此 $(u^{-1}y)a = \tau(a)(u^{-1}y) + \delta(a)$. 类似可得环同态 $\zeta : R[x;\tau,\delta] \to R[y;u\delta]$ 满足 $\zeta(x) = u^{-1}y$ 以及 $\mathfrak{i} = \zeta\mathfrak{j}$. 现在 $\zeta\eta(y) = y, \eta\zeta(x) = x$ 且 $\mathfrak{i} = (\zeta\eta)\mathfrak{i}, \mathfrak{j} = (\eta\zeta)\mathfrak{j}$. 因此由 Ore 扩张的泛性质立即得到 ζ 与 η 互为逆映射, 而 η 便是满足要求的环同态.

(2) 现在记 $\mathfrak{i} : R \to R[y;\tau]$ 和 $\mathfrak{j} : R \to R[x;\tau,\delta]$ 是标准嵌入. 那么对任何 $a \in R$ 有 $xa = \tau(a)x + \delta(a) = \tau(a)(x - d) + da$. 所以 $(x - d)a = \tau(a)(x - d)$. 于是根据 Ore 扩张的泛性质, 存在唯一的环自同态 $\eta : R[y;\tau] \to R[x;\tau,\delta]$ 满足 $\eta(y) = x - d$ 并且 $\eta\mathfrak{i} = \mathfrak{j}$. 在 $R[y;\tau]$ 中, $(y+d)a = \tau(a)y + da = \tau(a)(y+d) + \delta(a)$. 于是存在环同态 $\zeta : R[x;\tau,\delta] \to R[y;\tau]$ 满足 $\zeta(x) = y + d$ 以及 $\zeta\mathfrak{j} = \mathfrak{i}$, 由易知 η 就是满足条件的环同构.

(3) 因为 τ 是环同构, 所以 $\lambda_S\tau : R \to R_S$ 将 S 中元素映至可逆元, 进而存在唯一的环自同构 $\tilde{\tau} : R_S \to R_S$ 满足下图交换, 即有 $\tilde{\tau}(as^{-1}) = \tau(a)\tau(s)^{-1}, \forall a \in R, s \in S$:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\lambda_S"] \arrow[d, "\tau"'] & R_S \arrow[d, dashed, "\tilde{\tau}"] \\ R \arrow[r, "\lambda_S"] & R_S \end{tikzcd}$$

一旦证明存在 R_S 上 $\tilde{\tau}$-导子 $\tilde{\delta}$ 满足 $\tilde{\delta}(a) = \delta(a), \forall a \in R$(更严格地记号是 $\tilde{\delta}(a) = \lambda_S\delta(a)$), 那么

$$\tilde{\delta}(as^{-1}) = \delta(a)s^{-1} + \tilde{\tau}(a)\tilde{\delta}(s^{-1}) = \delta(a)s^{-1} + \tau(a)\tau(s)^{-1}\tilde{\tau}(s)\tilde{\delta}(s^{-1}).$$

结合 $0 = \tilde{\delta}(1) = \tilde{\delta}(ss^{-1}) = \delta(s)s^{-1} + \tau(s)\tilde{\delta}(s^{-1})$ 便知 $\tilde{\delta}(as^{-1}) = \delta(a)s^{-1} - \tilde{\tau}(as^{-1})\delta(s)s^{-1}$. 因此只需构造出满足 $\tilde{\delta}(a) = \delta(a), \forall a \in R$ 的 $\tilde{\tau}$-导子 $\tilde{\delta}$ 即可. 作

$$\eta : R \to \mathrm{M}_2(R_S), a \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_S\tau(a) & \lambda_S\delta(a) \\ 0 & \lambda_S(a) \end{pmatrix},$$

利用 δ 是 τ-导子立即得到 η 是环同态并且 $\eta(S)$ 中元素均为 $\mathrm{M}_2(R_S)$ 的可逆元, 所以存在唯一的环同态 $\overline{\eta}: R_S \to \mathrm{M}_2(R_S)$ 满足 $\overline{\eta}\lambda_S = \eta$, 现在设每个 $as^{-1} \in R_S$ 对应

$$\overline{\eta}(as^{-1}) = \begin{pmatrix} \tau(a)\tau(s)^{-1} & \tilde{\delta}(as^{-1}) \\ 0 & as^{-1} \end{pmatrix},$$

那么由 $\overline{\eta}$ 是环同态便知 $\tilde{\delta}$ 是 $\tilde{\tau}$ 导子且 $\tilde{\delta}\lambda_S = \lambda_S\delta$.

(4) 根据 (3), 现在我们有 R_S 上环同构 $\tilde{\tau}$ 以及 $\tilde{\tau}$-导子 $\tilde{\delta}$. 现在有标准映射 $\nu: R \to R[y;\tilde{\tau},\tilde{\delta}], a \mapsto \lambda_S(a)$, 并且在 $R[y;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 中, 对任何 $a \in R$ 有 $y\lambda_S(a) = \lambda_S(\tau(a))y + \lambda_S(\delta(a))$, 因此由 Ore 扩张的泛性质, 存在唯一的环同态 $\tilde{\nu}: R[x;\tau,\delta] \to R_S[y;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 使得 $\tilde{\nu}(x) = y$ 并且下图交换:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr] \arrow[dr, "\nu"'] & & R[x;\tau,\delta] \arrow[dl, dashed, "\tilde{\nu}"] \\ & R_S[y;\tilde{\tau},\tilde{\delta}] & \end{tikzcd}$$

根据 ν 的定义, $\tilde{\nu}(S)$ 中元素均可逆. 对 $a_0, ..., a_n \in R$ 有 $\tilde{\nu}(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_S(a_i)y^i$. $R_S[y;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 中元素形如 $\sum_{i=0}^{n}(a_i s_i^{-1})y^i$. 因为 $\tau(S) = S$, 所以可将 $R_S[y;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 中元素写作 $\sum_{i=0}^{n} b_i y^i t_i^{-1}$ 的形式, 这里 $b_i \in R, t_i \in S$. 在 R_S 中存在 $u \in S$ 以及 $c_0, ..., c_n \in R$ 满足 $c_i u^{-1} = t_i^{-1}, \forall 0 \leq i \leq n$. 因此任何 $R_S[y;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 中元素都可以表示为 $\tilde{\nu}(f)\tilde{\nu}(s)^{-1}$ 的形式, 其中 $f \in R[x;\tau,\delta], s \in S$. 如果 $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathrm{Ker}\tilde{\nu}$, 那么在 $R_S[y;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 中有

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_S(a_i)y^i = 0.$$

下面我们对自然数 n 作归纳说明存在 $v \in S$ 使得在 $R[x;\tau,\delta]$ 中有 $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) v = 0$.

当 $n = 0$ 时, 结论明显成立. 假设结论对不超过 $n-1 (n \geq 1)$ 的情形成立, 那么现在由 $\sum_{i=0}^{n} \lambda_S(a_i)y^i = 0$ 知存在 $s_n \in S$ 使得 $a_n s_n = 0$, 考察 $\tau^{-n}(s_n) \in S$ 对 $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 的右乘:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \tau^{-n}(s_n) = L + a_n s_n x^n = L,$$

其中 L 是关于 x 次数不超过 $n-1$ 的斜多项式. 注意到 $L \in \mathrm{Ker}\tilde{\nu}$, 所以由归纳假设, 存在 $t \in S$ 使得 $Lt = 0$, 进而知 $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 右乘上 $\tau^{-n}(s_n)t$ 为零, 断言得证. 由此根据右局部化的定义便知 $\tilde{\nu}: R[x;\tau,\delta] \to R_S[y;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 给出 Ore 扩张 $R[x;\tau,\delta]$ 关于乘闭子集 S 的右局部化, 这里 $y = \tilde{\nu}(x)$. $\square$

Lemma 2.42 ([2]). 任给正整数 m, 有 $s_{m+1}(x_1, x_2, ..., x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}x_i s_m(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m+1})$. 特别地, 如果一个 PI 代数 A 满足标准等式 s_m, 那么 A 也满足 $s_t, \forall t \geq m$.

Proof. 记 $N(k_1, k_2, ..., k_m)$ 表示由 m 个正整数构成的排列 $k_1, k_2, ..., k_m$ 的逆序数, 那么对任何置换 $\sigma \in S_n$, 有 $(-1)^{N(\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n))} = \mathrm{sgn}\sigma$. 于是

$$s_{m+1}(x_1, x_2, ..., x_{m+1}) = \sum_{\sigma \in S_{m+1}} \mathrm{sgn}\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m+1)} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{\sigma(1)=i} \mathrm{sgn}\sigma x_i x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m+1)}.$$

每项 $\mathrm{sgn}\sigma x_i x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(m+1)} = (-1)^{i-1}x_i(-1)^{N(\sigma(2),\ldots,\sigma(n))}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(m+1)}$, 所以

$$s_{m+1}(x_1,x_2,...,x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}x_i \sum_{\sigma(1)=i}(-1)^{N(\sigma(2),\ldots,\sigma(n))}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(m+1)}.$$

上式右端就是 $\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}x_i s_m(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_{m+1})$. □

任何仿射交换代数都可以写成某个有限个变量的多项式代数的同态像, 下面在 PI 代数场景作类似讨论.

Definition 2.43 (T-理想, [2])**.** 设 K 是含幺交换环, 如果自由代数 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 的理想 H 满足对 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 上任何 K-代数自同态 φ 有 $\varphi(H)\subseteq H$, 则称 H 是 **T-理想**.

Proposition 2.44 ([2])**.** 设 A 是含幺交换环 K 上的 PI 代数, 那么 A 在 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 中所有的多项式等式构成的集合 $\mathcal{J}$ 是 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 的一个 T-理想, 并且 $\mathcal{J}$ 就是所有 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 到 A 的代数同态的核之交.

Proof. 首先不难看出 $\mathcal{J}$ 是 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 的理想. 任取 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 上代数自同态 φ 以及 $f(x_1,...,x_n)\in\mathcal{J}$, 则有 $\varphi(f(x_1,...,x_n)) = f(\varphi(x_1),...,\varphi(x_n))$, 由此不难看出 $\varphi(f)$ 也是 A 的多项式等式, 即 $\varphi(f)\in\mathcal{J}$. 下面验证 $\mathcal{J}$ 是所有 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 到 A 的代数同态的核之交. 因为任意取定 A 的有限多个元素都可以诱导出自由代数到 A 的赋值同态, 所以 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 到 A 的全体代数同态之交是 A 的多项式等式. 反之, 任取 A 的多项式等式 $f(x_1,...,x_n)$, 对每个 K-代数同态 $\varphi: K\langle x_1,x_2,...\rangle\to A$, 记 $\varphi(x_i)$ 为 $a_i(i\geq 1)$. 那么 $f(a_1,...,a_n)=0$, 即 $\varphi(f)=0$. 所以 $\mathcal{J}$ 中元素均在所有 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 到 A 的代数同态的核之交中. □

根据 T-理想的定义以及自由代数的子集诱导的赋值映射是代数自同态可知

Proposition 2.45 ([2])**.** 设 K 是含幺交换环, 真理想 H 是 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 的 T-理想, 那么任何 H 中元素是 K-代数 $K\langle x_1,x_2,...\rangle/H$ 的多项式等式. 特别地, 当 H 包含一个首一多项式时, $K\langle x_1,x_2,...\rangle/H$ 是 PI 代数.

设 A 是交换环 K 上的 PI 代数, 如果 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 的真 T-理想 H 中的元素都是 A 满足的多项式等式 ([命题2.44] 表明这样的 T-理想存在), 那么有下述泛性质成立: 对任给映射 $\eta:\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\to A$, 存在唯一的 K-代数同态 $\overline{\eta}: K\langle x_1,x_2,...\rangle/H\to A$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\eta"'] & K\langle x_1,x_2,...\rangle/H \arrow[d, dashed, "\overline{\eta}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

其中 $\iota:\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\to K\langle x_1,x_2,...\rangle/H$ 是标准映射 (因为 A 不是零环, 所以 ι 是单射). 如果 A 是仿射 K-代数, 那么我们可以适当选取 η 使得 $\overline{\eta}$ 成为满射. 最后记录 PI 代数的稳定多项式等式和基本性质来结束本节.

Definition 2.46 ([2])**.** 设 K-代数 A 是 PI 代数, $f(x_1,...,x_n)\in K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 是 A 的多项式等式. 如果对任何 K-交换代数 L 都有 $f(x_1,...,x_n)$ 是 $A\otimes_K L$ 的多项式等式, 则称 $f(x_1,...,x_n)$ 是**稳定的**.

Proposition 2.47 ([2])**.** 设 K-代数 A 是 PI 代数, $\mathcal{I}$ 是 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 中所有稳定多项式等式构成的集合, 则:
(1) $\mathcal{I}$ 是 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 的 T-理想.
(2) $\mathcal{I}$ 包含 A 在 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 中所有的交错线性多项式等式.
(3) 赋予 $K\langle x_1,x_2,...\rangle$ 标准分次后, $\mathcal{I}$ 是分次理想.
(4) $K\langle x_1,x_2,...\rangle/\mathcal{I}$ 满足 $\mathcal{I}$ 中所有多项式等式.

Proof. 类似于 [命题2.44] 容易验证 $\mathcal{I}$ 是 T-理想, 并且明显是 $K\langle x_1, x_2, ...\rangle$ 的真理想, 因此 (1) 成立. 对任何 K-交换代数 L, 如果 A 满足交错多重线性多项式 $g(x_1, ..., x_m)$, 那么对 $A \otimes_K L$ 中任意 m 个形如 $a \otimes \ell$ 的元素, 有 $g(a_1 \otimes \ell_1, ..., a_m \otimes \ell_m) = g(a_1, ..., a_m) \otimes (\ell_1 \cdots \ell_m) = 0$. 结合 g 的多重线性性便知 g 也是 $A \otimes_K L$ 的多项式等式, 这证明了 (2). 现在证明 (3), 为此只需说明 $\mathcal{I}$ 中任何多项式 f 如果作齐次元分解 $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_t$(这里每个 f_k 是 k 次齐次非交换多项式), 那么每个 $f_k \in \mathcal{I}$. 由 f 的稳定性, 对每个 K-交换代数 L, f 也是 $A \otimes_K L[x] \cong (A \otimes_K L)[x]$ 的多项式等式. 设 $f = f(x_1, ..., x_s)$, 则对任给 $T_1, ..., T_s \in A \otimes_K L$, 有 $f(T_1x, T_2x, ..., T_sx) = \sum\limits_{i=0}^{t} f_i(T_1, ..., T_s)x^i = 0$. 这说明每个 f_i 是 $A \otimes_K L$ 的多项式等式, 于是 $f_i \in \mathcal{I}$. 这证明了 (3). (1) 中已经说明 $\mathcal{I}$ 是 T-理想, 所以应用 [命题2.45] 便得 (4). □

2.2 Amitsur-Levitzki 定理

在 [例2.23] 中我们看到, 含幺交换环 K 上的 n 阶矩阵环 $\mathrm{M}_n(K)$ 满足标准等式 s_{n^2+1}, 进而知道 $\mathrm{M}_n(K)$ 的最小次数不超过 $n^2 + 1$. 这节的目标是证明 Amitsur-Levitzki 定理——矩阵环 $\mathrm{M}_n(K)$ 满足 s_{2n}, 并说明 $\mathrm{M}_n(K)$ 的最小次数就是 $2n$. 本节的含幺交换环默认有非零的幺元.

Theorem 2.48 (Amitsur-Levitzki, [3])**.** 设 K 是含幺交换环, 那么矩阵环 $R = \mathrm{M}_n(K)$满足 s_{2n}.

Proof. 只要证明任给 $A_1, A_2, ..., A_{2n} \in R$ 有 $\sum\limits_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sgn}\sigma A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n)} = O$ 即可. 该等式左边的矩阵每个元素都是关于 $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ 元素的整系数多元多项式, 因此我们只需要证明 $K = \mathbb{C}$ 的情形就以足够 (利用整系数 m 元多项式如果作为 $\mathbb{C}^m$ 上复值函数恒为零, 则该多项式必为零多项式). 现设 $R = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, V 是 $2n$ 维复线性空间, 有基 $\{v_1, v_2, ..., v_{2n}\}$, 证明分为下面两步.

Step1. 设 $E(V)$ 是 V 决定的外代数, 考虑 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{2n} A_i \otimes v_i \in R \otimes_{\mathbb{C}} E(V)$, 直接的计算表明对每个正整数 $1 \leq r \leq 2n$, 有 $\alpha^r = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq 2n} s_r(A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_r}) \otimes (v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_r})$. 置 $\beta = \alpha^2$, 那么 $\beta^n = s_{2n}(A_1, A_2, ..., A_{2n}) \otimes (v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{2n})$. 故要证 $s_{2n}(A_1, A_2, ..., A_{2n}) = O$, 只要证 $\beta^n = 0$.

Step2. 记 $E(V)$ 所有偶数指标分次直和构成的子代数是 L, 即 $L = E^{(0)}(V) \oplus E^{(2)}(V) \oplus \cdots \oplus E^{(2n)}(V)$, 那么 L 是交换代数且 $\beta, \beta^2, ..., \beta^n \in R \otimes_{\mathbb{C}} L$. 记 $\Phi : R \otimes_{\mathbb{C}} L \to \mathrm{M}_n(L)$ 是标准 $\mathbb{C}$-代数同构, 利用下面的 [引理2.51] 立即得到 $\Phi(\beta), \Phi(\beta^2) = \Phi(\beta)^2, ..., \Phi(\beta^n) = \Phi(\beta)^n$ 都是迹为零的矩阵 (注意对迹零复矩阵 A 与 $c \in L$, $\Phi(A \otimes c)$ 也迹零), 再由下面的 [推论2.54] 马上得到 $\Phi(\beta)^n = O$, 从而 $\beta^n = 0$. □

Remark 2.49. 根据 [引理2.42], 我们立即得到 $\mathrm{M}_n(K)$ 满足 $s_t, \forall t \geq 2n$.

Remark 2.50. 从 Amitsur-Levitzki 定理的证明过程不难看出对任何含幺交换环 K, $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$(在 $\mathbb{Z}$ 上) 的所有多项式等式都是 $\mathrm{M}_n(K)$ 的多项式等式. 如果 $f \in \mathbb{Z}\langle x_1, ..., x_\ell\rangle$ 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 满足的多项式等式, 那么 $f((a_{ij}^1)_{n\times n}, ..., (a_{ij}^\ell)_{n\times n})$ 是零矩阵, 其中 $a_{ij}^k \in \mathbb{Z}$. 现在将 $f((x_{ij}^1)_{n\times n}, ..., (x_{ij}^\ell)_{n\times n})$ 的每个分量视作关于变量 $x_{11}^1, ..., x_{nn}^\ell$ 的整系数多项式, 那么该 ℓn^2 元整系数多项式对任意组整数代入都是零. 这说明 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}[\{x_{ij}^k | 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq \ell \leq n\}])$ 中矩阵 $f((x_{ij}^1)_{n\times n}, ..., (x_{ij}^\ell)_{n\times n})$ 的每个分量是关于变量集 $\{x_{ij}^k | 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq \ell \leq n\}$ 的零多项式. 于是该变量集对 K 中任意一组元素代入都是零, 这就证明了 $\mathrm{M}_n(K)$ 满足 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 的所有多项式等式. 反之, 只有当 $\mathbb{Z}$ 可嵌入 K 时才能够保证 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 满足 $\mathrm{M}_n(K)$ 的所有多项式等式.

Lemma 2.51 ([3])**.** 设 R是含幺交换环, $A_1, A_2, ..., A_{2r} \in \mathrm{M}_n(R)$是偶数个方阵, 则

$$\mathrm{tr}(s_{2r}(A_1, A_2, ..., A_{2r})) = \mathrm{tr}\left(\sum_{\sigma \in S_{2r}} \mathrm{sgn}\sigma A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2r)}\right) = 0.$$

Proof. 因为 $2r$ 是偶数所以轮换 $(123 \cdots 2r) \in S_{2r}$ 是奇置换. 我们把矩阵和式分成偶置换求和与奇置换求和两部分:

$$\sum_{\sigma \in S_{2r}} \mathrm{sgn}\sigma A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(2r)} = \sum_{\sigma \in A_{2r}} \mathrm{sgn}\sigma A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(2r)} + \sum_{\sigma \in A_{2r}} \mathrm{sgn}\sigma(123 \cdots 2r) A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2r)} A_{\sigma(1)}.$$

由 $\mathrm{sgn}\sigma(123 \cdots 2r) = -\mathrm{sgn}\sigma$ 以及矩阵 $A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(2r)}$ 和 $A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2r)} A_{\sigma(1)}$ 的迹相同即得. □

线性代数中我们熟知代数闭域 F 上的 n 阶方阵 A, 如果 $\mathrm{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, ..., n$, 那么 $A^n = O$. 我们在 Amitsur-Levitzki 定理的证明细节中所需要的工具是对任何复数域上的交换代数 L, 如果矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(L)$, 只要 $\mathrm{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, ..., n$, 也会有 $A^n = O$ 成立. 下面的引理就是为了证明这一事实.

Lemma 2.52 ([19])**.** 设 R 是含幺交换环, $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(R)$, 设 $B(x) = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1 x + B_0 (B_j \in \mathrm{M}_n(R))$ 是 $xI_n - A$ 在 $\mathrm{M}_n(R[x])$ 中的伴随矩阵, $f(x) = \det(xI_n - A)$是 A 的特征多项式, 则:
(1)(Cayley-Hamilton)$f(A) = O$.
(2) 当 $n \geq 2$ 时, 若记 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 则 $A_{ij} = \sum\limits_{\sigma(i)=j} \prod\limits_{k\neq i} a_{k\sigma(k)}$.
(3) 如果 L 是含幺交换环 K 上的交换代数, 那么对 L 上的 K-导子 $\delta : L \to L$, 对任给 $C = (c_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{M}_n(L)$ 的伴随矩阵 C^*, 有 $\delta(\det C) = \mathrm{tr}((\delta(c_{ij}))_{n\times n} \cdot C^*)$.
(4)$\frac{d}{dx}f(x) = \mathrm{tr}(B(x))$.
(5) 设 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 那么特征多项式的系数满足

$$\mathrm{tr}(B_k) = (k+1)a_{k+1}, 0 \leq k \leq n-1,$$

其中 $a_n = 1$.

Proof. (1) 因为 $B(x)$ 是 $xI_n - A$ 的伴随矩阵, 所以 $B(x)(xI_n - A) = f(x)I_n$, 于是

$$B_{n-1}x^n + (B_{n-2} - B_{n-1}A)x^{n-1} + \cdots + (B_2 - B_1 A)x^2 + (B_0 - B_1 A)x - B_0 A = f(x)I_n.$$

对比系数可得 $B_{n-1} = I_n, B_{n-2} - B_{n-1}A = a_{n-1}I_n, ..., B_0 - B_1 A = a_1 I_n, -B_0 A = a_0 I_n$. 所以

$$f(A) = A^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = A^n + \sum_{i=1}^{n-1} (B_{i-1} - B_i A)A^i + (-B_0 A) = O.$$

(2) 这可以由代数余子式的定义展开整理得到, 也可以使用下面的处理方式: 设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 为 R 上未定元, $R[x_1, x_2, ..., x_n]$ 是 n 元多项式, 对固定的正整数 i, 作 $\mathrm{M}_n(R[x_1, x_2, ..., x_n])$ 中矩阵

$$C(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

这里行向量 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 在第 i 行. 将上面的矩阵行列数按组合展开可得它的行列式为

$$\det[C(x_1, x_2, ..., x_n)] = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{\sigma(i)=j} \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)}) x_j,$$

同时, 将 $\det[C(x_1, x_2, ..., x_n)]$ 按第 i 行展开可得 $\sum\limits_{l=1}^{n} A_{il} x_l = \sum\limits_{l=1}^{n} (\sum\limits_{\sigma(i)=l} \prod\limits_{k \neq i} a_{k\sigma(k)}) x_l$, 再比较该式 x_j 的系数即得.

(3) 直接计算知

$$\delta(\det C) = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=1}^{n} \delta(a_{k\sigma(k)}) \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma(k)=j} \delta(a_{kj}) \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta(a_{kj}) (\sum_{\sigma(k)=j} \prod_{l \neq k} a_{l\sigma(l)}),$$

而 $\sum\limits_{j=1}^{n} \delta(a_{kj}) (\sum\limits_{\sigma(k)=j} \prod\limits_{l \neq k} a_{l\sigma(l)})$ 就是矩阵 $(\delta(c_{ij}))_{n \times n} \cdot C^*$ 的 k 行 k 列元素, 故结论成立.

(4) 对 R-交换代数 $R[x]$, 求导算子 $\frac{d}{dx} : R[x] \to R[x]$ 是 R-导子, 所以对 $\mathrm{M}_n(R[x])$ 中矩阵 $xI_n - A$ 应用 (3) 的结果, 我们得到 $\frac{d}{dx} f(x) = \mathrm{tr}(I_n \cdot B(x)) = \mathrm{tr}(B(x))$.

对特征多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 作用求导算子 $\frac{d}{dx}$ 并应用 (4), 我们得到

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = \mathrm{tr}(B(x)) = \mathrm{tr}(B_{n-1})x^{n-1} + \mathrm{tr}(B_{n-2})x^{n-2} + \cdots + \mathrm{tr}(B_1)x + \mathrm{tr}(B_0).$$

再比较上式 $x^i (0 \le i \le n-1)$ 的 (矩阵) 系数即得. □

Proposition 2.53 (特征多项式系数刻画, [19]). 设 R 是含幺交换环, $A \in \mathrm{M}_n(R)$, 并设 A 的特征多项式为 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 那么对任给正整数 $1 \le k \le n$, 有 $ka_{n-k} + \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{tr}(A^i) a_{n-k+i} = 0$. 特别地, 如果 $\mathrm{tr}(A^i) = 0, i = 1, 2, ..., n$, 那么 $ka_{n-k} = 0, \forall 1 \le k \le n$.

Proof. 设 $B(x) = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1 x + B_0 (B_j \in \mathrm{M}_n(R))$ 是 $xI_n - A$ 在 $\mathrm{M}_n(R[x])$ 中的伴随矩阵, 则 $B_{n-1} = I_n, B_{n-2} - B_{n-1}A = a_{n-1}I_n, ..., B_0 - B_1 A = a_1 I_n, -B_0 A = a_0 I_n$. 归纳地, 易知对每个 $0 \le k \le n-1$, 有 $B_k = A^{n-1-k} + a_{n-1}A^{n-2-k} + \cdots + a_{k+2}A + a_{k+1}I_n$, 两边取迹并应用 [引理2.52(5)] 即得. □

Corollary 2.54 ([3]). 设 L 是 $\mathbb{C}$-交换代数, 如果矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(L)$ 满足 $\mathrm{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, ..., n$, 那么 $A^n = O$.

Proof. 由 [命题2.53], A 的特征多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 满足 $ka_{n-k} = 0, \forall 1 \le k \le n$. 因为对复数域上的代数而言, $k1_L (1 \le k \le n)$ 是 L 中可逆元, 所以 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, 那么 $f(x) = x^n$. 于是, 由 Cayley-Hamilton 定理即得结果. □

Proposition 2.55. 设 K 是含幺交换环, A 是 K-代数, 则不存在正整数 $t \le 2n-1$ 使得 $\mathrm{M}_n(A)$ 满足某个 K 上 t 次首一多项式, 即 $\mathrm{M}_n(A)$ 不满足任何次数严格低于 $2n$ 的首一多项式. 特别地, $\mathrm{M}_n(A)$ 的最小次数是 $2n$.

Proof. 若不然, 由 [定理2.16], 存在 $t (\le 2n-1)$ 次首一多重线性多项式 $f(x_1, x_2, ..., x_t) \in K\langle x_1, x_2, ..., x_t \rangle$ 使得 f 是 $\mathrm{M}_n(A)$ 的一个多项式等式, 不妨设 $x_1 x_2 \cdots x_t$ 的系数是 1, 即

$$f(x_1, x_2, ..., x_t) = x_1 x_2 \cdots x_t + \sum_{\sigma \neq (1) \in S_t} a_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(t)},$$

取 $A_1, A_2, ..., A_t$ 为下述 $2n-1$ 个基本矩阵中的前 t 个：

$$E_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{23}, E_{33}, ..., E_{n-1,n-1}, E_{n-1,n}, E_{nn}.$$

则 $f(A_1, A_2, ..., A_t) \neq O$, 得到矛盾. $\square$

Example 2.56. 固定正整数 n, 考虑 $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ 的子环

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

那么 R 是最小次数为 4 的素 PI 环.

Proof. 根据 Amitsur-Levitzki 定理, R 满足 s_4, 因此 R 的最小次数不超过 4. 假设 R 的最小次数 t 严格小于 4, 那么 [定理2.16] 表明存在 $t(\leq 3)$ 次首一多重线性多项式 $f(x_1, x_2, ..., x_t) \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_t\rangle$ 使得 f 是 R 的一个多项式等式. 同样可不妨设 $x_1 x_2 \cdots x_t$ 的系数是 1, 即

$$f(x_1, x_2, ..., x_t) = x_1 x_2 \cdots x_t + \sum_{\sigma \neq (1) \in S_t} a_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(t)},$$

取 $A_1, ..., A_t$ 为 E_{11}, nE_{12}, E_{22} 这三个矩阵中的前 t 个便有 $f(A_1, A_2, ..., A_t) \neq O$, 得到矛盾. 因此 R 的最小次数是 4. 要看到零理想是 R 的素理想, 只需注意到 R 的任何非零理想 I 满足存在正整数 a 使得

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I.$$

假设存在 R 的理想 I, J 使得 $IJ = 0$ 但 $I, J \neq 0$, 则存在正整数 a, b 使得

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J.$$

由此得到 $IJ \neq 0$, 矛盾. 因此 R 是素环. $\square$

Remark 2.57. 如果 $n = p$ 是素数, 那么

$$P = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z} & p\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

是 R 的极大理想, 原因是 $R/P \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是域. 此时 R/P 作为 PI 环的最小次数是 2.

2.3 Köthe 猜想

本节先介绍 Köthe 猜想, 再说明它在 PI 环层面是成立的, 并且我们将看到半素 PI 代数不存在非零诣零理想. 这节中 K 指含幺交换环, 考虑的所有环默认是非零环.

Gottfried Köthe(奥地利数学家, 1905-1989) 于 1930 年提出下述猜想：

Conjecture 2.58 (Köthe 猜想)**.** 如果含幺环 R 没有非零诣零理想, 那么 R 没有非零诣零单边理想.

Remark 2.59. 容易证明一个含幺环存在非零诣零左理想当且仅当存在非零诣零右理想. 目前上述猜想还是非交换环论领域的公开问题.

Theorem 2.60 ([2])**.** 设 K-代数 A(未必有 1_A) 是 PI 代数, 若 A 有非零诣零右理想, 则 A 有非零幂零理想.

Proof. 设 m 是 PI 代数 A 的最小次数, 那么由 $A \neq 0$ 知 $m \geq 2$, 我们对 $m \geq 2$ 作归纳证明结论. 当 $m = 2$ 时, 由 [定理2.16], A 满足 K 上某个 2 次首一多重线性多项式, 所以存在 $k \in K$ 使得 $ab = kba, \forall a, b \in A$. 设 A 的非零诣零右理想为 J, 那么存在 $b \neq 0 \in J$ 使得 $b^2 = 0$. 那么 $I = bA + Kb$ 是 A 的非零幂零右理想, 从 I 出发构造 $AI + I$ 便得到 A 的一个非零幂零理想. 所以当 $m = 2$ 时, 结论成立.

现假设结论对最小次数不超过 $m-1(m \geq 3)$ 的 PI 代数成立, 现在考虑最小次数为 m 的 PI 代数的情形. 设 A 满足 m 次首一多重线性多项式 $g(x_1, ..., x_m) \in K\langle x_1, ..., x_m\rangle$ 并设字 $x_1x_2\cdots x_m$ 的系数是 1, 那么存在 $m-1$ 次首一多重线性多项式 $g_1(x_1, ..., x_{m-1}) \in K\langle x_1, ..., x_{m-1}\rangle$ 以及多重线性多项式 $g_2(x_1, ..., x_m) \in K\langle x_1, ..., x_m\rangle$ 使得 $g(x_1, ..., x_m) = g_1(x_1, ..., x_{m-1})x_m + g_2(x_1, ..., x_m)$(将所有不以 x_m 结尾的单项式之和记为 g_2). 设 J 是 A 的非零诣零右理想, 取 $b \neq 0 \in J$ 使得 $b^2 = 0$, 则 $bA \subseteq J$. 如果 $bA = 0$, 那么 Kb 是 A 的非零幂零右理想, 于是 A 有非零幂零理想, 下面我们设 $bA \neq 0$. 对任给 $a_1, a_2, ..., a_{m-1} \in A$, 明显有 $g_2(ba_1, ba_2, ..., ba_{m-1}, b) = 0$, 所以对任给 $a_1, a_2, ..., a_{m-1} \in A$ 有 $g_1(ba_1, ba_2, ..., ba_{m-1})b = 0$. 置 $W = \{a \in bA | abA = 0\}$, 那么 W 是 K-代数 bA(未必有幺元) 的非零理想 (因为 W 含 b) 且 $W^2 = 0$. 如果 $bA = W$, 那么 $(bA)^2 = W^2 = 0$ 表明 bA 是 A 的非零幂零右理想, 于是 A 也有非零幂零理想. 下设 $W \subsetneq bA$, 那么商代数 $bA/W \neq 0$ 且满足 $m-1$ 次首一多重线性多项式 $g_1(x_1, ..., x_{m-1})$, 它自身就是自己的非零诣零右理想, 所以对代数 bA/W 应用归纳假设知 bA/W 存在非零幂零理想 $\hat{I}$, 不妨设 $\hat{I}^2 = 0$, 由理想对应定理, 存在 bA 的理想 $I \supsetneq W$ 使得 $I/W = \hat{I}$, 那么 $I^2 \subseteq W$. 现在说明 IbA 是 A 的一个非零幂零右理想, 一旦验证完该断言立即得到 A 有非零幂零理想. 因为 $I \not\subseteq W$, 所以 $IbA \neq 0$. 并注意到 $(IbA)^2 = IbAIbA \subseteq I^2bA \subseteq WbA = 0$, 这说明 IbA 是 A 的一个非零幂零右理想, 由此得到 A 有非零幂零理想. □

Corollary 2.61 ([2])**.** 如果 PI 代数 A 没有非零诣零理想, 那么 A 也没有非零诣零单边理想. 特别地, Köthe 猜想对 PI 环成立.

Corollary 2.62 ([2])**.** 设 K-代数 A 是半素 PI 的, 那么 A不存在非零诣零单边理想.
证明：由 A 半素等价于 A 没有非零幂零理想即得. □

2.4 Formanek 中心多项式

E. Formanek 在文献 [14] 中对域 K 上矩阵环 $M_n(K)$, 构造了某个整系数多项式 $F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ 使得它的常数项是零且对任给 $n+1$ 个矩阵 $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$, 有 $F_n(A_1, A_2, ..., A_{n+1})$ 是纯量矩阵, 并存在某组矩阵 $B_1, B_2, ..., B_{n+1}$ 代入 F_n 后得到的矩阵 $F_n(B_1, B_2, ..., B_{n+1})$ 的非零矩阵. 本节我们的主要目标就是验证 Formanek 所构造出的多项式 $F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ 确实是域上矩阵环的中心多项式 (见 [定理2.66]), 它将用于 Posner 定理证明的准备工作中. 以下固定含幺交换环 K.

Definition 2.63 (中心多项式, [4])**.** 设 A 是 K-代数, 如果 $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ 满足:
(1) 对任给 $r_1, r_2, ..., r_n \in A$ 有 $f(r_1, r_2, ..., r_n) \in Z(A)$;
(2) 存在 $r_1, r_2, ..., r_n \in A$ 使得 $f(r_1, r_2, ..., r_n) \neq 0$;

(3) $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 的常数项为零,
则称 $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 是 A 的一个**中心多项式**.

在正式验证 Formanek 构造的多项式是中心多项式前, 先做一些准备. 若 f,g 是域 K 上多项式, 次数分别设为 $n,m\geq 1$: $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m, a_0,b_0\neq 0\in K$. 记 f 与 g 的结式为:

$$\mathrm{Res}(f,g)\triangleq\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n\\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m & \cdots & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{m-1} & b_m & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots\\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

在线性代数中我们熟知对域 K 上次数不低于 1 的多项式 f,g, 它们在 K 的代数闭包 $\overline{K}$ 上有公共零点的充要条件是 $\mathrm{Res}(f,g)=0$. 应用结式可以证明下面的引理.

Lemma 2.64 ([4])**.** 设 R 为含幺环, $R[x_{11},...,x_{1n},...,x_{n1},...,x_{nn}]$ 是 R 上 n^2 元多项式环, 称以 x_{ij} 为元素的矩阵 $(x_{ij})_{n\times n}\in \mathrm{M}_n(R[x_{11},...,x_{1n},...,x_{n1},...,x_{nn}])$ 为 R 上**泛矩阵**. 现设 $A=(x_{ij})_{n\times n}$ 是域 K 上泛矩阵, 域 $K(x_{ij})=K(x_{11},...,x_{1n},...,x_{n1},...,x_{nn})$ 的代数闭包是 $E=\overline{K(x_{ij})}$. 那么泛矩阵 $A=(x_{ij})_{n\times n}$ 在 $\mathrm{M}_n(E)$中可对角化.

Proof. 我们断言 A 的特征多项式 $f(x)=\det(xI_n-A)\in K[x_{ij}][x]$ 在 E 上没有重根, 一旦证明这一点立即得到 A 在 E 上可对角化. 若不然, 考虑 f 的形式导数 f', 那么 f' 与 f 作为 $K(x_{ij})[x]$ 中多项式不互素, 这说明 f' 不可能是 $K(x_{ij})[x]$ 中的零次多项式 (非零常数), 于是 $f'=0$ 或 f' 是 $K[x_{ij}][x]$ 中次数不低于 1 的多项式. 现设 $a_{11},...,a_{1n},...,a_{n1},...,a_{nn}\in E$ 是使得 $(a_{ij})_{n\times n}$(即把 a_{ij} 代入 x_{ij}) 特征值互异的 n^2 个元素 (明显这样的元素组总存在), 记 $\mathrm{ev}:K[x_{ij}][x]\to E[x]$ 是标准映射 (把 a_{ij} 代入 x_{ij}), 那么 ev 是保幺环同态, 于是知矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式就是 $\mathrm{ev}(f(x))$, 它特征多项式关于未定元 x 的形式导数就是 $\mathrm{ev}(f'(x))$. 当 $f'=0$ 时, $\mathrm{ev}(f(x))$ 与 $\mathrm{ev}(f'(x))$ 是 $E[x]$ 中不互素的多项式, 所以矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式在 E 中有重根, 这与 a_{ij} 的选取矛盾. 如果 f' 是 $K[x_{ij}][x]$ 中次数不低于 1 的多项式, 那么 f,f' 作为 $K(x_{ij})[x]$ 中的多项式结式为零: $\mathrm{Res}(f,f')=0\in K[x_{ij}]$, 于是 $\mathrm{ev}(\mathrm{Res}(f,f'))=\mathrm{Res}(\mathrm{ev}(f),\mathrm{ev}(f'))=0\in E$, 这说明 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式与其形式导数在 E 中有公共零点, 即 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式在 E 中有重根, 这与 a_{ij} 的选取矛盾. 故 f 在 E 上没有重根. □

设 $f(x)\in K[x]$ 是域 K 上的非零多项式, 如果 f 在 K 的代数闭包 $\overline{K}$ 中没有重根, 则称 f 是**可分多项式**. 我们在线性代数中熟知代数闭域 F 上的 n 阶方阵 A 可对角化当且仅当 A 在 F 上有一个没有重根的首一零化多项式. 特别地, 域 K 上的方阵 A 如果特征多项式是 K 上可分多项式, 那么 A 在 A 在 $\overline{K}$ 上可对角化. 在给出 Formanek 多项式的构造前, 再做最后一个准备.

Lemma 2.65. 给定域 K 与正整数 n, 则存在 n 阶矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(K)$, 使得 A 的特征多项式是 K 上可分多项式, 特别地, A 在 $\overline{K}$上可对角化.

Proof. 我们只需要对正整数 n, 构造 K 上 n 次首一可分多项式 $f(x)$ 即可, 因为一旦构造出这样的多项式, 考虑它的友矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

即可. 若 K 的特征整除 n, 构造 $f(x) = x^n - x$, 它在 $\overline{K}$ 中没有重根. 如果 K 的特征不整除 n, 构造 $f(x) = x^n - 1$ 即可. □

现在给出这节的主定理.

Theorem 2.66 ([4])**.** 任给正整数 n, 存在整系数多项式 $F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, ..., y_n\rangle$(称证明过程中构造的多项式为 **Formanek 多项式**), 使得: (1)F_n 是 n^2 次齐次多项式且每个非零项关于 x 的次数是 $n^2 - n$, 关于 $y_1, y_2, ..., y_n$ 是多重线性的; (2) 如果 K 是域, 那么 F_n 是矩阵环 $\mathrm{M}_n(K)$的中心多项式.

Proof. 当 $n = 1$ 时, 取 $F_1 = y_1$ 即可. 以下假设正整数 $n \geq 2$. 设 $\mathbb{Z}[w_1, ..., w_{n+1}]$ 是整系数 $n+1$ 元多项式环, 通过如下方式可定义出 $\mathbb{Z}[w_1, ..., w_{n+1}]$ 到自由代数 $\mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, ..., y_n\rangle$ 的一个 $\mathbb{Z}$-模同态

$$\varphi : \mathbb{Z}[w_1, ..., w_{n+1}] \to \mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, ..., y_n\rangle.$$

对每个首一单项式 $w_1^{a_1} w_2^{a_2} \cdots w_n^{a_n}$, 定义 $\varphi(w_1^{a_1} w_2^{a_2} \cdots w_n^{a_n}) = x^{a_1} y_1 x^{a_2} y_2 \cdots x^{a_n} y_n x^{a_{n+1}}$(我们知道多项式环 $\mathbb{Z}[w_1, ..., w_{n+1}]$ 作为 $\mathbb{Z}$-模有一个基是由全体首一单项式构成的集合). 考虑

$$g(w_1, w_2, ..., w_{n+1}) = \prod_{i=2}^{n} (w_1 - w_i)(w_{n+1} - w_i) \prod_{2 \leq j < k \leq n} (w_j - w_k)^2,$$

那么 g 是 $n^2 - n$ 次齐次整系数多项式. 命 $G(x, y_1, ..., y_n) = \varphi(g(w_1, w_2, ..., w_{n+1})) \in \mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, ..., y_n\rangle$, 构造 $F_n(x, y_1, ..., y_n) = G(x, y_1, ..., y_n) + G(x, y_2, ..., y_n, y_1) + \cdots + G(x, y_n, y_1, ..., y_{n-1})$, 那么它明显是 n^2 次齐次多项式, 且每个非零项关于 x 的次数是 $n^2 - n$, 关于 $y_1, y_2, ..., y_n$ 是多重线性的. 因此需要验证的只有对任给域 K 上 $n+1$ 个 n 阶方阵 $X, Y_1, Y_2, ..., Y_n$, 有 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是纯量矩阵并且在某组 $X, Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 取值下, 矩阵 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是非零阵.

Step1. 设 $X = (x_{ij})_{n \times n}$ 是域 K 上泛矩阵, 记域 $K(x_{ij})$ 的代数闭包为 E. 如果我们能够说明对任给 $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in \mathrm{M}_n(E)$ 有 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是纯量矩阵, 那么当 X 是 $\mathrm{M}_n(K)$ 中数值矩阵时, $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 也是纯量阵. 而要说明对任给 $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in \mathrm{M}_n(E)$ 有 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是纯量矩阵, 我们只需要说明对 E 上任何对角阵 Z 与矩阵 $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 有 $F_n(Z, Y_1, ..., Y_n)$ 是 $\mathrm{M}_n(E)$ 中纯量矩阵即可, 原因是 [引理2.64] 告诉我们泛矩阵 X 在 E 上可对角化, 设可逆阵 $P \in \mathrm{M}_n(E)$ 使得 $PXP^{-1} = Z$ 是对角阵, 如果 $F_n(Z, Y_1, ..., Y_n)$ 对任何 $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in \mathrm{M}_n(E)$ 都是纯量矩阵, 那么 $P^{-1}F_n(Z, Y_1, ..., Y_n)P = F_n(P^{-1}ZP, P^{-1}Y_1P, ..., P^{-1}Y_nP) = F_n(X, P^{-1}Y_1P, ..., P^{-1}Y_nP)$ 也是纯量矩阵, 于是由 P 可逆知道矩阵 $F_n(X, Y_1, ..., Y_n)$ 是纯量矩阵对 $\mathrm{M}_n(E)$ 中

任意 n 个矩阵 $Y_1,Y_2,...,Y_n$ 成立. 所以根据前面的讨论, 我们只需要处理当 Z 是 E 上对角阵, $Y_1,Y_2,...,Y_n$ 是 E 中矩阵的情形即可. 而 F_n 的构造表明 F_n 是关于 $y_1,y_2,...,y_n$ 多重线性的, 因此我们可以把问题再约化为: 证明对 E 中任何对角阵 Z 以及任意 n 个基础矩阵 $Y_1=E_{i_1j_1},Y_2=E_{i_2j_2},...,Y_n=E_{i_nj_n}$ 时, $F_n(Z,Y_1,...,Y_n)$ 是纯量矩阵. 设 $Z=\sum\limits_{l=1}^{n}v_lE_{i_lj_l},v_l\in E$, $Y_1=E_{i_1j_1},Y_2=E_{i_2j_2},...,Y_n=E_{i_nj_n}$, 注意到对任给自然数 s 有 $Z^sE_{ij}=v_i^sE_{ij},E_{ij}Z^s=v_j^sE_{ij}$, 因此对任意一组自然数 $a_1,a_2,...,a_n$, 有

$$Z^{a_1}Y_1Z^{a_2}Y_2\cdots Z^{a_n}Y_nZ^{a_{n+1}}=v_{i_1}^{a_1}\cdots v_{i_n}^{a_n}v_{j_n}^{a_{n+1}}E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\cdots E_{i_nj_n}.$$

于是, 由 G 的定义可得 $G(Z,E_{i_1j_1},...,E_{i_nj_n})=g(v_{i_1},...,v_{i_n},v_{j_n})E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\cdots E_{i_nj_n}$.

现在我们来看 $g(v_{i_1},v_{i_2},...,v_{i_n},v_{j_n})$, 由 g 的定义知

$$g(v_{i_1},v_{i_2},...,v_{i_n},v_{j_n})=\prod_{r=2}^{n}(v_{i_1}-v_{i_r})(v_{j_n}-v_{i_r})\prod_{2\leq s<t\leq n}(v_{i_s}-v_{i_t})^2,$$

于是知只有当 $i_1,...,i_n$ 是正整数 $1,...,n$ 的一个排列且 $i_1=j_n$ 时, $g(v_{i_1},v_{i_2},...,v_{i_n},v_{j_n})$ 才有可能非零, 而此时, 有 $g(v_{i_1},v_{i_2},...,v_{i_n},v_{j_n})=\prod\limits_{1\leq s<t\leq n}(v_s-v_t)^2$. 并注意到 $E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\cdots E_{i_nj_n}$ 只有当 $j_1=i_2,j_2=i_3,...,j_{n-1}=i_n$ 时才是非零矩阵 $E_{i_1j_n}$, 因此, 矩阵 $G(Z,E_{i_1j_1},...,E_{i_nj_n})$ 如果非零, 只可能形如 $\prod\limits_{1\leq s<t\leq n}(v_s-v_t)^2E_{i_1i_1}$. 这时 $F_n(Z,E_{i_1j_1},...,E_{i_nj_n})=\sum\limits_{l=1}^{n}\prod\limits_{1\leq s<t\leq n}(v_s-v_t)^2E_{i_li_l}=\prod\limits_{1\leq s<t\leq n}(v_s-v_t)^2I_n$(否则, $F_n(Z,E_{i_1j_1},...,E_{i_nj_n})$ 是零矩阵, 考察是否有 $j_1=i_2,j_2=i_3,...,j_{n-1}=i_n$). 由此我们得到了对任给域 K 上 n 阶矩阵 $X,Y_1,Y_2,...,Y_n$, 有 $F_n(X,Y_1,...,Y_n)$ 是纯量矩阵.

Step2. 我们说明存在域 K 上 n 阶矩阵 $X,Y_1,Y_2,...,Y_n$, 使得 $F_n(X,Y_1,...,Y_n)$ 是非零矩阵. 事实上, 根据我们的构造方式, 取 K 上在 E 中有 n 个互异特征值的矩阵 X([引理2.65] 表明这样的 X 总是存在的), 并设 E 上可逆阵 Q 使得 $Z=QXQ^{-1}$ 是主对角元两两互异的对角阵. 那么由前面的讨论 ($F_n(Z,E_{i_1j_1},...,E_{i_nj_n})$ 是非零矩阵时等于 $\prod\limits_{1\leq s<t\leq n}(v_s-v_t)^2$, 这里 $v_1,v_2,...,v_n$ 是 Z 两两互异的那些主对角元) 知存在矩阵 $Y_1,Y_2,...,Y_n\in \mathrm{M}_n(E)$ 使得 $F(QXQ^{-1},QY_1Q^{-1},...,QY_nQ^{-1})$ 是非零矩阵, 于是 $F(X,Y_1,...,Y_n)$ 是非零矩阵, 将每个 Y_j 展开成基础矩阵的 E-线性组合可知存在某组基础矩阵选取方式 $E_{i_1j_1},...,E_{i_nj_n}$ 让 $F_n(X,E_{i_1j_1},...,E_{i_nj_n})$ 非零. □

Corollary 2.67. 设交换环 R 是半素的, 那么 Formanek 多项式 $F_n(x,y_1,y_2,...,y_n)$ 是 $\mathrm{M}_n(R)$ 的中心多项式.

Proof. 任取 R 的素理想 P 以及 $X,Y_1,...,Y_n\in\mathrm{M}_n(R)$. 那么这些矩阵对应 $\mathrm{M}_n(R/P)$ 中矩阵 $\overline{X},\overline{Y_1},...,\overline{Y_n}$. 于是由 [定理2.66] 知 $F_n(\overline{X},\overline{Y_1},...,\overline{Y_n})$ 是对角阵. 这说明 $F_n(X,Y_1,...,Y_n)$ 非对角线位置处的元素均在 P 内. 现在由 P 的任意性以及 R 半素可知 $F_n(X,Y_1,...,Y_n)$ 在 $\mathrm{M}_n(R)$ 的中心内. 下面还需说明存在某组矩阵代入 Formanek 多项式后非零. 任取 R 的极大理想 M, 由 $F_n(x,y_1,y_2,...,y_n)$ 是 $\mathrm{M}_n(R/M)$ 的中心多项式便知. □

Proposition 2.68. 设 $f\in\mathbb{Z}\langle x_1,...,x_m\rangle$ 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 的中心多项式 (例如 $F_n(x,y_1,y_2,...,y_n)$), 那么对任何正整数 $r<n$ 有 f 是 $\mathrm{M}_r(\mathbb{Z})$ 的多项式等式.

Proof. 如果 $n=1$, 结论直接成立. 下设 $n\geq 2$, 考虑低阶矩阵环到高阶矩阵环的标准嵌入:

$$j:\mathrm{M}_r(\mathbb{Z})\to\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}),A\mapsto\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix},$$

那么 j 是单环同态 (它并不保持幺元). 对任意 m 个矩阵 $A_1, A_2, ..., A_m \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$, 易见

$$j(f(A_1, ..., A_m)) = f(j(A_1), j(A_2), ..., j(A_m)),$$

而 f 是 $\mathrm{M}_n(H)$ 的中心多项式意味着 $j(f(A_1, ..., A_m))$ 是纯量矩阵, 但它的对角元中有零 (右下角的元素), 这迫使 $j(f(A_1, ..., A_m))$ 是零矩阵, 再由 j 是单射得到 $f(A_1, ..., A_m) = O$, 所以 f 是 $\mathrm{M}_r(\mathbb{Z})$ 的多项式等式. □

2.5 Kaplansky 定理

一个本原环是交换的当且仅当它是域, 本节的主定理——Kaplansky 定理告诉我们, 一个本原环是 PI 的当且仅当它是域上的有限维单代数. 因此, 在本原层面上, PI 环的特性与交换环类似. 如无特别说明, 本节中 K 表示含幺交换环, $1_K \neq 0$, 所有的含幺环幺元非零.

在证明 Kaplansky 定理前, 先做一些准备. Jacobson 本原环稠密性定理是我们抽象代数中熟知的结果, 这里需要用一个更具体的形式.

Lemma 2.69 (稠密性定理, [20]). 设 A是本原 K-代数, 设 ${}_AM$ 是忠实的不可约左 A-模, $\Delta = \mathrm{End}_A(M)$ 是除环, 那么 A 代数同构于 $\mathrm{End}({}_\Delta M)$ 的某个稠密子代数 ($\mathrm{End}({}_\Delta M)$ 上赋予自然的 K-代数结构). 更具体地, 以下情形有且仅有一种成立：
(1) 存在正整数 n 使得代数 A 和矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 代数同构.
(2) 对任给正整数 n, 存在 A 的子代数 A_n 使得 A_n 到 $\mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 有满 K-代数同态.

Proof. 命 $\rho: A \to \mathrm{End}({}_\Delta M), a \mapsto a_l: M \to M$, 这里 a_l 表示元素 a 决定的左乘变换, 那么 ρ 是 K-代数同态, 且由 ${}_AM$ 的忠实性得到 ρ 是单射. 再说明 $\rho(A)$ 稠密, 即说明对任给 M 的 Δ-线性无关子集 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 以及子集 $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$, 都存在 $f \in \rho(A)$ 使得 $f(x_k) = y_k, \forall 1 \leq k \leq n$. 对上述给定的子集 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 以及 $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$, 存在线性变换 $h \in \mathrm{End}({}_\Delta M)$ 使得 $h(x_k) = y_k, \forall 1 \leq k \leq n$. 因为 ${}_AM$ 不可约, 特别地, 它作为左 A-模完全可约, 于是由完全可约模的稠密性定理知对上述 $h \in \mathrm{End}({}_\Delta M)$ 以及 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, 存在 $a \in A$ 使得 $ax_k = h(x_k), \forall 1 \leq k \leq n$, 于是取 $a_l \in \rho(A)$ 立即得到 $\rho(A)$ 的稠密性. 对于 Δ-线性空间 ${}_\Delta M$, 它的维数要么为正整数要么是无限的, 下面我们分这两种情况讨论, 来证明引理的后半部分.

(1) 如果 $\dim_\Delta M = n < +\infty$, 那么 $\rho(A)$ 作为 $\mathrm{End}({}_\Delta M)$ 的稠密子集必为 $\mathrm{End}({}_\Delta M)$ 本身, 即我们得到 ρ 是满射, 因此这时 ρ 给出了 K-代数同构 $A \cong \mathrm{End}({}_\Delta M)$. 再由 $\mathrm{End}({}_\Delta M) = \mathrm{End}(M_{\Delta^{op}}) \cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 便得到 K-代数同构 $A \cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$.

(2) 如果 $\dim_\Delta M$ 不是有限的, 那么对任给正整数 n, 取 ${}_\Delta M$ 作为 Δ-线性空间的 n 维子空间 V_n, 并置 $A_n = \{a \in A | aV_n \subseteq V_n\}$, 易见 A_n 是 A 的 K-子代数, 并且 ρ 诱导 K-代数同态 $\hat{\rho}: A_n \to \mathrm{End}({}_\Delta V_n), x \mapsto \rho(x)|_{V_n}$, 那么 $\hat{\rho}$ 是满代数同态, 原因是对任给 $f \in \mathrm{End}({}_\Delta V_n)$, 都可以延拓为 ${}_\Delta M$ 上的 Δ-线性变换 $\hat{f}$, 取定 V_n 的一个基 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, 利用完全可约模的稠密性定理得到存在 $a \in A$ 使得 $ax_k = \hat{f}(x_k)$, 那么 $\rho(a)|_{V_n} = f$ 且 $a \in A_n$, 这就得到了 $\hat{\rho}$ 是满的. 进而得到 A 有子代数 A_n 使得 A_n 到 $\mathrm{End}({}_\Delta V_n)$ 有满 K-代数同态, 再结合代数同构 $\mathrm{End}({}_\Delta V_n) = \mathrm{End}((V_n)_{\Delta^{op}}) \cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 即得. □

设 Δ 是除环, 如果子域 H 满足不存在 Δ 的子域 E 使得 $H \subsetneq E$, 则称 H 是**极大子域**. 因为除环的中心是域, 故利用 Zorn 引理易验证任何除环总存在极大子域. 关于极大子域有下面的刻画.

Lemma 2.70 (极大子域, [21])**.** 设 Δ 是除环, K 是 Δ 的极大子域, 那么 $K = \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$. 特别地, $K \supseteq Z(\Delta)$. 所以除环上任何极大子域都可视作除环中心上的代数.

Proof. $K \subseteq \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$ 是明显的, 现任取 $a \in \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$, 则

$$K(a) = \{\frac{f(a)}{g(a)} | f, g \in K[x], g(a) \neq 0\}$$

是 Δ 的子域且包含 K, 由 K 的极大性知 $K = K(a)$, 于是 $a \in K$, 从而 $\{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\} \subseteq K$. 由此得到 $\{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\} = K$. □

Remark 2.71. 反之, 如果除环 Δ 的子域 K 满足 $K = \{x \in \Delta | xk = kx, \forall k \in K\}$, 则 K 明显是极大子域.

Definition 2.72 (中心单代数, [20])**.** 若 A 是域 k 上的代数, 满足 A 是单环且 $Z(A) = k1_A$, 则称 A 是域 k 上的**中心单代数**. 一些文献中要求中心单代数是有限维代数, 这里不做要求.

Remark 2.73. 设 A 是含幺交换环 K 上的 K-代数, 一般 K 和 $K1_A$ 作为交换环未必同构. 例如 $K = \mathbb{Z}, A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 时, $K1_A = A$ 和 $\mathbb{Z}$ 并不同构. 但当 K 是域时, 易见 $K \cong K1_A$.

在进一步讨论中心单代数的基本性质前, 我们记录一个中心可除代数 (即在中心单代数的基础上进一步为可除代数) 的基本特性 (见 [定理2.76], 初次阅读可直接跳至 [引理2.77]). 回忆对域的代数扩张 $L \supseteq K$, $\alpha \in L$ 称为 K 上**可分元**, 如果 α 在 K 上的最小多项式无重根. 如果代数扩张 $L \supseteq K$ 满足 L 中元素均为 K 上可分元, 则称 $L \supseteq K$ 是**可分扩张**. 易见特征为零的域的任何代数扩张都是可分的. 本原元定理告诉我们有限可分扩张一定是单扩张. 反之, 如果有单扩张 $L = K(\alpha) \supseteq K$ 满足 α 是 K 上可分元, 作 α 在 K 上最小多项式的分裂域 E, 我们有 $E \supseteq L \supseteq K$. 因为 α 是可分元, 所以 $E \supseteq K$ 是 Galois 扩张. 特别地, E 是 K 的可分扩张, 所以 L 是 K 的可分扩张. 为了证明 [定理2.76], 我们需要下述域论中的经典结果.

Lemma 2.74. 给定域扩张 $L \supseteq K$, $\mathrm{char}K = p > 0$. 若 $\alpha \in L$ 是 K 上代数元, 则存在自然数 n 使得 α^{p^n} 是域 K 上的可分元.

Proof. 对 α 在 K 上满足的最小多项式的次数 $\ell \geq 1$ 作归纳. 如果 $\ell = 1$, 则 $\alpha \in K$ 结论成立. 假设结论对最小多项式次数不超过 $\ell - 1 (\ell \geq 2)$ 的代数元成立, 那么对最小多项式次数为 ℓ 的元素 α, 当 α 是可分元时结论直接成立. 下设 α 不是可分元. 因为 α 在 K 上的最小多项式 (记作 $m(x)$) 有重根, 因此 $m(x)$ 与 $m'(x)$ 不互素, 这迫使 $m'(x) = 0$. 于是存在多项式 $g(x) \in K[x]$ 使 $m(x) = g(x^p)$. 注意到这样的多项式 $g(x)$ 次数严格低于 $\ell = \mathrm{deg} m(x)$, 故 α^p 是满足 K 上最小多项式次数严格低于 ℓ 的代数元. 对 α^p 应用归纳假设便得结论. □

通过 [引理2.74] 我们立即得到下面的命题.

Proposition 2.75. 设 $L \supseteq K$ 域的代数扩张, 满足 $L - K$ 中元素都是 K 上不可分元. 那么任何 $\alpha \in L$ 满足存在自然数 n 使得 $\alpha^{p^n} \in K$.

现在我们可以证明域上维数不低于 2 的中心可除代数一定存在中心以外的可分元.

Theorem 2.76 (Jacobson-Noether 定理)**.** 设 D 是域 F 上维数不低于 2 的中心可除代数 (即 D 不交换) 且 D 中每个元素是 F 上整元 (满足某个首一多项式). 那么存在 $\alpha \in D - F$ 在 F 上是可分元.

Proof. 如果 $\mathrm{char}F=0$, 那么任取 $\alpha\in D-F$ 都满足 $F(\alpha)$ 是 F 的有限可分扩张. 因此只需考虑 $\mathrm{char}F=p>0$ 的情形. 我们用反证法证明结论, 假设 $D-F$ 中所有的元素都是 F 上不可分元. 根据 [命题2.75] 可知 $D-F$ 中所有的元素 α 都满足存在自然数 n 使得 $\alpha^{p^n}\in F$. 现在取定 $\alpha\in D-F$ 和 $m\geq 1$ 使得 $\alpha^{p^m}\in F$. 考虑 D 上 (F-线性) 内导子 $\delta: D\to D, x\mapsto [a,x]$, 注意到素数 p 总满足 p 整除 $C_{p^m}^i, \forall 2\leq i\leq p^m-1$(利用组合数定义得到 $iC_{p^m}^i=p^mC_{p^m-1}^{i-1}$ 便知), 因此由 $\mathrm{char}F=p$ 知 $\delta^{p^m}(x)=\alpha^{p^m}x-x\alpha^{p^m}=0, \forall x\in D$. 即 $\delta^{p^m}=0$. 注意 $\alpha\notin F=Z(D)$ 表明 $\delta\neq 0$, 因此可选取满足 $\delta^n\neq 0$ 的最大正整数 n. 于是存在 $b\in D$ 使得 $\beta=\delta^n(b)\neq 0$ 且 $\delta(\beta)=0$. 因此 $\beta\in D$ 满足是与 α 可交换的可逆元 (因为非零). 构造 $d=\beta^{-1}\alpha\delta^{n-1}(b)$, 那么可直接验证 $\alpha d-d\alpha=\alpha$, 改写为 $d=1+\alpha^{-1}d\alpha$. 由 [命题2.75] 对 d 同样存在自然数 r 使得 $d^{p^r}\in F$. 而

$$d^{p^r}=(1+\alpha^{-1}d\alpha)^{p^r}=1+\alpha^{-1}d^{p^r}\alpha=1+d^{p^r},$$

这导出在 D 中 $0=1$, 矛盾! □

Lemma 2.77. 设 A 是域 F 上中心单代数, B 是域 F 上单代数, 则 $A\otimes_F B$ 是域 F 上单代数. 特别地, 对域 F 上中心单代数 A 与 F 的域扩张 E, 有 $A\otimes_F E$是单代数.

Proof. 任取 $A\otimes_F B$ 的非零理想 U, 置

$$\{n\in\mathbb{Z}_{>0}|存在a_1,a_2,...,a_n\neq 0\in A, b_1,b_2,...,b_n\in B使得\{b_1,...,b_n\}线性无关且\sum_{k=1}^{n}a_k\otimes b_k是U中非零元\},$$

上述集合明显非空, 取该集合的最小元 n, 并设 $a_1,a_2,...,a_n\neq 0\in A, b_1,b_2,...,b_n\in B$ 使得 $u=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\otimes b_k$ 是 U 中非零元, 这里 $\{b_1,...,b_n\}$ 是 F-线性无关的. 对 $a_1\neq 0\in A$, 因为 A 是单环, 所以存在 $r_1,r_2,...,r_n,s_1,s_2,...,s_n\in R$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_ia_1s_i=1_A$, 于是

$$u_1=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}r_ia_ks_i)\otimes b_k=1_A\otimes b_1+\sum_{k=2}^{n}(\sum_{i=1}^{n}r_ia_ks_i)\otimes b_k\neq 0\in U,$$

记 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_ia_ks_i$ 为 $\alpha_k(k\geq 2)$, 那么由 n 的选取方式知每个 α_k 非零.

Claim. $\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n\in Z(A)$.

对每个 $a\in A$, 易见 $(a\otimes 1_B)u_1-u_1(a\otimes 1_B)\in U$, 所以 $(a\alpha_2-\alpha_2a)\otimes b_2+(a\alpha_3-\alpha_3a)\otimes b_3+\cdots+(a\alpha_n-\alpha_na)\otimes b_n\in U$, 它必为零元, 进而 $a\alpha_2-\alpha_2a=a\alpha_3-\alpha_3a=\cdots=a\alpha_n-\alpha_na=0$, 断言得证.

于是由 A 是中心代数知每个 α_k 形如 $\alpha_k=c_k1_A, c_k\in F$. 进而 $u_1=1_A\otimes(b_1+c_2b_2+\cdots+c_nb_n), b_1+c_2b_2+\cdots+c_nb_n\neq 0\in B$. 这表明 $1_A\otimes_F B\subseteq U$, 进而 $U=A\otimes_F B$. □

Lemma 2.78. (1) 设 R,R' 是含幺环, 有环同构 $f:R\to R'$, 那么 $f(Z(R))=Z(R')$. 若更进一步 $Z(R')$ 是域, 则 $Z(R)$ 也是域, 将 R 视作 $Z(R)$-线性空间, R' 视作 $Z(R')$-线性空间, 则 $\dim_{Z(R)}R=\dim_{Z(R')}R'$.
(2) 设除环 Δ 是其中心 $Z(\Delta)$ 上 m 维线性空间, 则 $\mathrm{M}_n(\Delta)$ 作为其中心 $Z(M_n(\Delta))=Z(\Delta)I_n$ 上线性空间维数是 mn^2. 例如四元数环 $\mathbb{H}$ 的中心是 $\mathbb{R}$, 是 4 维 $\mathbb{R}$-代数, 且是除环, 那么四元数矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ 作为实线性空间维数是 $4n^2$.
(3) 设 ${}_\Delta V$ 是除环 Δ 上的线性空间, Δ' 是 Δ 的子除环, 则 $\dim_{\Delta'}V=(\dim_\Delta V)(\dim_{\Delta'}\Delta)$.

Proof. (1) 直接验证易得 $f(Z(R)) = Z(R')$, 所以环同构 $Z(R) \cong Z(R')$ 保证了 $Z(R')$ 是域当且仅当 $Z(R)$ 是域. 现在设 $Z(R')$ 是域, 则 $Z(R)$ 也是域, 将 R 视作 $Z(R)$-线性空间, R' 视作 $Z(R')$-线性空间, 设 X 是 R 作为 $Z(R)$-线性空间的一个基, 则对任给 $x_1, x_2, ..., x_m \in X$, 我们说明 $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m)$ 是 $Z(R')$-线性无关的：设 $r'_1, ..., r'_m \in Z(R')$ 使得 $\sum_{k=1}^{m} r'_k f(x_k) = 0$, 则由 $f(Z(R)) = Z(R')$ 知存在 $c_1, ..., c_m \in Z(R)$ 使得 $\sum_{k=1}^{m} f(c_k) f(x_k) = 0$, 从而 $\sum_{k=1}^{m} c_k x_k = 0$, 因此 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$, 于是 $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m)$ 是 $Z(R')$-线性无关的, 由此知 $f(X)$ 线性无关, 故 $\dim_{Z(R)} R \leq \dim_{Z(R')} R'$, 类似地可以证明 $\dim_{Z(R')} R' \leq \dim_{Z(R)} R$.

(2) 设 Δ 作为 $Z(\Delta)$-线性空间有基 $\{d_1, d_2, ..., d_m\}$, 可直接验证 $\{d_k E_{ij} | 1 \leq k \leq m, 1 \leq i, j \leq n\}$ 是 $\mathrm{M}_n(\Delta)$ 作为 $Z(\Delta) I_n$-线性空间的一个基.

(3) 不妨设 $V \neq 0$, 设 $\{x_i | i \in I\}$ 是 V 作为 Δ-线性空间的一个基, $\{d_j | j \in J\}$ 是 Δ 作为 Δ'-线性空间的一个基, 容易验证 $\{d_j x_i | i \in I, j \in J\}$ 是 ${}_{\Delta'}V$ 的一个基. 所以 $\dim_{\Delta'} V = |I| \cdot |J| = (\dim_\Delta V)(\dim_{\Delta'} \Delta)$. □

作为 [引理2.77] 的应用, 我们证明中心单代数的双重中心化子定理 (初次阅读可直接跳至 [引理2.81]):

Theorem 2.79 (双重中心化子定理)**.** 设 A 是域 F 上有限维中心单代数, B 是 A 的单子代数, 对 A 的非空子集 X, 记 $C_A(X) = \{a \in A | ax = xa, \forall x \in X\}$ 是 X 在 A 中的中心化子. 那么 $C_A(C_A(B)) = B$.

Proof. 注意到 $B \subseteq C_A(C_A(B))$ 且 A 是有限维代数, 故只需证 $\dim_F B = \dim_F C_A(C_A(B))$.

先证 $C_A(B)$ 是单环且 $\dim_F C_A(B) \dim_F B = \dim_F A$. 命 $R = A \otimes_F B^{op}$, 那么 [引理2.77] 表明 R 是有限维单代数, 特别地, 任何有限维左 R-模可分解为一些单模的直和, 并且 R 的单模同构类只有一个. 将 A 以自然的方式视作左 R-模, 容易验证 $C_A(B) \to \mathrm{End}_R A, c \mapsto c_r$, 其中 c_r 表示元素 c 决定的右乘变换, 是反代数同构. 将 A 分解为有限多个不可约左 R-模的直和: 设 M 是不可约左 R-模, 则 $\Delta = \mathrm{End}_R M$ 是有限维除环且存在正整数 n 使得 $A \cong M^n$. 于是由 $\mathrm{End}_R A \cong \mathrm{End}_R(M^n) \cong \mathrm{M}_n(\Delta)$ 可知 $C_A(B)$ 是单环. 根据 [引理2.69(1)], 命 $m = \dim_\Delta M$, 则有 F-代数同构 $R \cong \mathrm{M}_m(\Delta^{op})$, 因此 $(\dim_F A)(\dim_F B) = m^2 \dim_F \Delta$. 由 $A \cong M^n$ 得 $\dim_F A = nm(\dim_F \Delta)$. 同时, 也有 $\dim_F C_A(B) = n^2 \dim_F \Delta$. 因此我们得到

$$(\dim_F A)(\dim_F B)(\dim_F C_A(B)) = (\dim_F A)^2,$$

两边消去 $\dim_F A$ 便得到 $\dim_F C_A(B) \dim_F B = \dim_F A$.

现在用 $C_A(B)$ 这一单子代数替换维数公式中的 B 我们得到 $\dim_F C_A(C_A(B)) \dim_F C_A(B) = \dim_F A$. 结合前面得到的等式 $\dim_F C_A(B) \dim_F B = \dim_F A$ 便得到 $\dim_F B = \dim_F C_A(C_A(B))$. □

Remark 2.80. 在环的结构理论或代数表示论中, 双重中心化子定理有时也指: 对含幺交换环 K 上代数 R 上的完全可约模 ${}_R M$, 记 $E = \mathrm{End}_K(M)$ 以及 $\hat{R} = \{a_l | a \in R\text{且}a_l\text{表示}a\text{在}M\text{ 上的左乘变换}\}$. 如果 M 是有限生成 K-模 (例如 R 是有限维半单代数, M 是 R 的有限维表示), 那么在 E 中有 $\hat{R} = C_E(C_E(\hat{R}))$. 事实上该版本的双重中心化子定理是完全可约模的稠密性定理的直接推论: 首先易见 $\hat{R} \subseteq C_E(C_E(\hat{R}))$. 引入记号 $R' = \mathrm{End}_R M, R'' = \mathrm{End}_{R'} M$, 取定 M 作为 K-模的生成元集 $\{x_1, ..., x_n\}$. 那么对任给 $a'' \in C_E(C_E(\hat{R})) = \mathrm{End}_{R'} M = R''$, 根据完全可约模的稠密性定理, 存在 $a \in R$ 使得 $ax_i = a'' x_i, i = 1, 2, ..., n$. 这说明 $a'' = a_l \in \hat{R}$.

Lemma 2.81 ([2])**.** 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, ${}_R M$ 是忠实的不可约左 R-模, 那么：

(1) K-代数 $\Delta = \mathrm{End}({}_R M)$ 是除环, ${}_\Delta M$ 是有限维 Δ-线性空间;

(2) 设 $n = \dim_\Delta M$, 则有 K-代数同构 $R \cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$, 特别地, R 是单代数且 $Z(R)$ 是域;

(3) 设 H 是 Δ^{op} 的极大子域 (也为 Δ 的极大子域, [引理2.70] 表明 $H\supseteq Z(\Delta)$), 那么 M 上有天然左 $R\otimes_{Z(R)}H$-模结构, 满足 ${}_{R\otimes_{Z(R)}H}M$ 是忠实不可约模, $H=\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)$ 并且 $R\otimes_{Z(R)}H$ 是单 PI 代数;
(4)${}_HM$ 是域 H 上有限维线性空间, 若设 $m=\dim_HM$, 则有 H-代数同构

$$R\otimes_{Z(R)}H\cong \mathrm{M}_m(\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)^{op})=\mathrm{M}_m(H^{op})=\mathrm{M}_m(H),$$

并且, $\dim_{Z(\Delta^{op})}\Delta^{op}=(m/n)^2,\dim_{Z(R)}R=m^2$. 特别地, 本原 PI 代数 R 可嵌入某个域上的矩阵环 $\mathrm{M}_m(H)$.

Proof. (1) 因为 M 不可约, 所以 Schur 引理告诉我们 Δ 是除环, M 上的 K-模结构给出 Δ 上的 K-代数结构. 现在我们说明 ${}_\Delta M$ 是有限维 Δ-线性空间, 若不然, 由 [引理2.69] 得到对任给正整数 n, 存在 R 的子代数 R_n 使得 R_n 到 $\mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 有满代数同态, 进而由 [命题2.55] 得到 $d\geq 2n$, 由 n 的任意性得到矛盾. 所以 ${}_\Delta M$ 是有限维 Δ-线性空间.

(2) 设 $n=\dim_\Delta M$, 由 [引理2.69] 得到 K-代数同构 $R\cong \mathrm{M}_n(\Delta^{op})$, 易证单环的中心是域.

(3) 易见 $xf=f(x),\forall x\in M,f\in H\subseteq\Delta=\mathrm{End}({}_RM)$ 给出了 M 的右 H-模结构, 从而 M 上有 R-H 双模结构 (这两个模结构均与 M 上的 K-模结构相容), 这也给出了 M 的左 $R\otimes_{Z(R)}H$-模结构: $(\sum\limits_{k=1}^{l}r_k\otimes h_k)x=\sum\limits_{k=1}^{l}r_kxh_k,\forall\sum\limits_{k=1}^{l}r_k\otimes h_k\in R\otimes_{Z(R)}H,x\in M$, 其中 H 的 $Z(R)$-模结构以最自然的方式给出 (具体地, $Z(R)$ 中每个元素 a 决定的 M 上左乘变换 $a_l\in Z(\Delta)\subseteq H$, 所以 $Z(R)$ 可嵌入 H). 因为 ${}_RM$ 是不可约模, 所以 M 作为左 $R\otimes_{Z(R)}H$-模也不可约. 因为 (2) 表明 R 是 $Z(R)$ 上的中心单代数, 所以 [引理2.77] 告诉我们 $R\otimes_{Z(R)}H$ 是 K-单代数, 于是由 $\mathrm{Ann}_{R\otimes_{Z(R)}H}(M)$ 是 $R\otimes_{Z(R)}H$ 的真理想 (因为不含 $1_R\otimes 1_H$) 得到 ${}_{R\otimes_{Z(R)}H}M$ 是忠实的模, 所以 ${}_{R\otimes_{Z(R)}H}M$ 是忠实不可约模. 易见 $H=\mathrm{End}({}_RM_H)=\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)$. 最后说明 $R\otimes_{Z(R)}H$ 是 PI 代数 (前面已经说明它是单代数). 易知 K-代数同构 $R\cong R\otimes_{Z(R)}1_H\subseteq R\otimes_{Z(R)}H$, 故 $R\otimes_{Z(R)}1_H$ 是 PI 代数且 $R\otimes_{Z(R)}H$ 是 $R\otimes_{Z(R)}1_H$ 的中心扩张, 所以 [推论2.19] 表明 $R\otimes_{Z(R)}H$ 也是 PI 代数.

(4) 先说明 ${}_HM$ 是域 H 上有限维线性空间, 通过 (3) 我们知道 $H=\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)$, 所以要说明的即为 ${}_{\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)}M$ 是有限维线性空间, 而我们已经看到 $R\otimes_{Z(R)}H$ 是单 PI 代数, 特别地, 是本原 PI 代数, 进而使用 (1) 中完全相同的技术由 [引理2.69] 可知 ${}_{\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)}M$ 是有限维线性空间. 这就得到了 ${}_HM$ 是域 H 上有限维线性空间, 设 $m=\dim_HM$. 由 [引理2.69] 知有 H-代数同构

$$R\otimes_{Z(R)}H\cong \mathrm{M}_m(\mathrm{End}({}_{R\otimes_{Z(R)}H}M)^{op})=\mathrm{M}_m(H^{op})=\mathrm{M}_m(H),$$

故 $m^2=\dim_H(R\otimes_{Z(R)}H)=\dim_{Z(R)}R=\dim_{Z(\Delta^{op})}\mathrm{M}_n(\Delta^{op})=n^2\dim_{Z(\Delta^{op})}\Delta^{op}$ 知 $\dim_{Z(\Delta^{op})}\Delta^{op}=(m/n)^2$(这里 $\dim_H(R\otimes_{Z(R)}H)=\dim_{Z(R)}R$ 的原因是若设 $\{x_i|i\in I\}$ 为 R 作为 $Z(R)$-线性空间的一个基, 可直接验证 $\{x_i\otimes 1_H|i\in I\}$ 是 $R\otimes_{Z(R)}H$ 作为 H-线性空间的一个基). □

Remark 2.82. 如果 R 是域 K 上的有限维中心单代数, 那么忠实的不可约左 R-模 M 是域 K 上有限维模, 因此这时除环 Δ 和极大子域 H 均为有限维 K-代数. 特别地, 该引理的 (4) 告诉我们对有限维中心单代数 R, 总存在 K 的有限扩张 H 和正整数 m 使得有 H-代数同构 $R\otimes_KH\cong\mathrm{M}_m(H)$, 并且 $m^2=\dim_KR$. 由此可见有限维中心单代数 (作为中心上线性空间) 的维数一定是平方数. 一般地, 只要 K 有域扩张 H 满足存在正整数 m 使得有 H-代数同构 $R\otimes_KH\cong\mathrm{M}_m(H)$, 比较同构两边的 H-线性维数便知 $m^2=\dim_KR$, 所以这里的正整数 m 不依赖于域扩张 H 的选取. 通常将满足 $R\otimes_KH\cong\mathrm{M}_m(H)$ 的域扩张 H 称为 R 的**分裂域**. 只要 R 是 K 上有限维中心单代数, 那么 [引理2.77] 表明 K 的代数闭域 $\overline{K}$ 使 $R\otimes_K\overline{K}$ 是代数闭域上有限维单代数.

于是由 Artin 单环结构定理知 $R\otimes_K \overline{K}$ 同构于 $\overline{K}$ 上的矩阵代数. 所以中心单代数的中心作为域的代数闭包总是给定中心单代数的分裂域. 而刚才的讨论表明总存在分裂域满足是中心 (作为域) 的有限扩张.

我们知道如果一个含幺单环 R 满足 R 是 $Z(R)$ 上的有限维单代数, 那么 [命题2.24] 告诉我们 R 是 PI 环. 一个自然的问题是搞清楚本原 PI 环的结构. 下面是 Kaplansky 给出的本原 PI 环结构定理.

Theorem 2.83 (Kaplansky 定理, [4])**.** 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, 则 d 是偶数, $Z(R)$ 是域且 R 是 $Z(R)$ 上 $(d/2)^2$维中心单代数.

Proof. 由 [引理2.81] 中的 (2), $Z(R)$ 是域且 R 是 $Z(R)$ 上的中心单代数, 所以要证明的只有 d 是偶数以及 R 是 $Z(R)$ 上 $(d/2)^2$ 维中心单代数. 由 [引理2.81] 中 (4) 的证明过程, $\dim_{Z(R)}R=m^2$, $R\otimes_{Z(R)}H\cong \mathrm{M}_m(H)$ 有最小次数 $2m$, 且 $R\otimes_{Z(R)}H$ 是 $R\otimes_{Z(R)}1_H$ 的中心扩张. 于是由 [推论2.19] 知 $d=2m$, 所以 d 是偶数且 R 是 $Z(R)$ 上 $m^2=(d/2)^2$ 维中心单代数. □

Remark 2.84. Kaplansky 定理告诉我们 PI 代数的本原理想和极大理想等价, 这是交换环的经典特性.

Corollary 2.85. 设域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk=0$, 那么 Weyl 代数 $A_n(\Bbbk)$(回忆 [例2.40]) 不是 PI 环.

Proof. 我们已经看到这时 $A_n(\Bbbk)$ 的中心是 $\Bbbk$ 且 $A_n(\Bbbk)$ 是中心上的无限维代数. 假设 $A_n(\Bbbk)$ 是 PI 环, 那么 Kaplansky 定理说 $A_n(\Bbbk)$ 是 $\Bbbk=Z(A_n(\Bbbk))$ 上有限维代数. 这导出矛盾. □

Remark 2.86. 更一般地, Kaplansky 定理表明如果含幺环 R 是单环但不是 Artin 环, 那么 R 不是 PI 环.

Corollary 2.87. 设 K-代数 R 是 PI 代数, 那么不可约左 R-模 M,N 同构的充要条件是 $\mathrm{Ann}_RM=\mathrm{Ann}_RN$.

Proof. 只需验证充分性, 这时 M,N 均为本原 PI 代数 R/Ann_RM 上的不可约模. 而 R/Ann_RM 作为其中心上的有限维中心单代数是 Artin 单环, 故作为 R/Ann_RM-模有 $M\cong N$. 因此也有 R-模同构 $M\cong N$. □

Remark 2.88. 该推论表明 PI 代数的本原素谱 (就是极大谱) 与不可约表示等价类间有双射. 具体地, 记 PI 代数 R 的本原素谱为 $\mathrm{Prim}(R)$, 则有双射 $\theta:\{R\text{的不可约模等价类}\}\to\mathrm{Prim}(R),[M]\mapsto\mathrm{Ann}_RM$.

Corollary 2.89. 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, 那么 d 是偶数, 记 $m=d/2$, 则存在域 H 使得 R 可 (保幺地) 嵌入矩阵环 $\mathrm{M}_m(H)$.

Corollary 2.90 ([4])**.** K-代数 R 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, 对正整数 t:
(1) 如果 $d/2=t$, 那么 Formanek 多项式 $F_t(x,y_1,y_2,...,y_t)$ 是 R 的中心多项式;
(2) 如果 $d/2<t$, 那么 Formanek 多项式 $F_t(x,y_1,y_2,...,y_t)$ 是 R的一个多项式等式.

Proof. 我们沿用 [引理2.81] 以及 Kaplansky 定理证明过程中的记号, 由条件知 R 是 $Z(R)$ 上的中心单代数, 且对 $\Delta=\mathrm{End}({}_RM),n=\dim_\Delta M,H$ 是 Δ^{op} 的极大子域, $m=\dim_HM$, 我们有 K-代数同构 $R\cong\mathrm{M}_n(\Delta^{op})$ 以及 H-代数同构 $R\otimes_{Z(R)}H\cong\mathrm{M}_m(H)$, 正整数 n 整除 m, $\dim_{Z(\Delta)}\Delta^{op}=(m/n)^2,d=2m$. 下面开始原问题的证明, 主要利用 Formanek 多项式 F_t 是域上 t 阶矩阵代数的中心多项式.

(1) 首先我们有 $t=m$. 如果 $Z(R)$ 是有限的, 那么由环同构 $Z(R)\cong Z(\Delta)I_n\cong Z(\Delta)$ 得到 $Z(\Delta)$ 是有限集. 结合 $\dim_{Z(\Delta)}\Delta^{op}=(m/n)^2$ 我们得到 Δ 是有限集, Wedderburn 小定理 (见下面的 [引理2.92]) 表明 Δ 是域, 所以 $m=n$ 且得到 K-代数同构 $R\cong\mathrm{M}_n(Z(\Delta))=\mathrm{M}_m(Z(\Delta))$, 于是知 F_m 是 R 的中心多项式. 下

设 $Z(R)$ 是无限域的情形, 这时 $R\otimes_{Z(R)}H\cong \mathrm{M}_m(H)$ 表明 F_m 是 $R\otimes_{Z(R)}H$ 的中心多项式. 注意到对任何 $a\otimes 1_H\in Z(R\otimes_{Z(R)}H)$, 都有 $a\in Z(R)$, 所以对任给 $r_1,r_2,...,r_{m+1}\in R$, 利用 $F_m(r_1\otimes 1_H,...,r_{m+1}\otimes 1_H)=F_m(r_1,r_2,...,r_{m+1})\otimes 1_H\in Z(R\otimes_{Z(R)}H)$, 我们得到 $F_m(r_1\otimes 1_H,...,r_{m+1}\otimes 1_H)\in Z(R)$, 所以要说明 F_m 是 R 的中心多项式我们只需要再说明在 R 的某组元素 $r_1,r_2,...,r_{m+1}$ 代入下 $F_m(r_1,r_2,...,r_{m+1})\neq 0$. 我们用反证法说明这一点：若不然, 则 F_m 是 R 的一个多项式等式, 进而由 $Z(R)$ 是无限域, 利用下面的 [引理2.93] 得到 F_m 也是 $R\otimes_{Z(R)}H$ 的一个多项式等式, 但这与 F_m 是 $R\otimes_{Z(R)}H$ 的中心多项式矛盾 (因为一定有一组 $R\otimes_{Z(R)}H$ 中元素的代入使得 F_m 取值非零). 所以 F_m 是 R 的中心多项式.

(2) 的证明方式与 [命题2.68] 完全相同. □

Remark 2.91. 该推论的证明过程仅用到 $F_n(x,y_1,y_2,...,y_n)$ 是域上 n 阶矩阵代数的中心多项式, 把该推论结论中的 $F_t(x,y_1,y_2,...,y_t)$ 更改成域上 t 阶矩阵代数的中心多项式都成立.

Lemma 2.92 (Wedderburn 小定理)**.** 设 Δ 是有限除环, 则 Δ是域.

Proof. 记 $F=Z(\Delta)$, 则 F 是域, 将 Δ 视作域 F 上线性空间, 则为有限维线性空间, 设 $\dim_F\Delta=n$. 下面通过反证法证明 $n=1$, 一旦证明 $n=1$, 利用 $\Delta=F$ 可得 Δ 是域. 假设 $n\geq 2$, 设 $|F|=q\geq 2$(注意有限域的阶是素数幂次, 所以至少为 2), 那么 $|\Delta^*|=q^n-1$, 将乘法群 Δ^* 共轭作用到自身上, 根据轨道公式可得 $q^n-1=q-1+\sum\limits_{a\in A}[\Delta^*:C(a)^*]$, 其中 A 是所有元素个数至少为 2 的共轭类的一个代表元集. 因为 $C(a)\supseteq F$, 所以 $C(a)$ 也可以视作 F 上线性空间 ($C(a)$ 是除环, 未必交换), 注意到 $\dim_F\Delta=(\dim_{C(a)}\Delta)(\dim_F C(a))$, 所以 $r_a=\dim_F C(a)$ 是整除 n 的正整数, 且 $1\leq r_a<n$. 于是

$$q^n-1=q-1+\sum_{a\in A}\frac{q^n-1}{q^{r_a}-1},$$

对每个 $a\in A$, 注意到 $\Phi_n(x)(x^{r_a}-1)$ 是在 $\mathbb{Z}[x]$ 中整除 x^n-1 的整系数多项式 (这里 $\Phi_n(x)$ 表示 n 次分圆多项式), 所以存在整系数多项式 $h(x)$ 使得 $x^n-1=\Phi_n(x)(x^{r_a}-1)h(x)$, 这说明 $(q^n-1)/(q^{r_a}-1)$ 是被 $\Phi_n(q)$ 整除的正整数, 那么 $\Phi_n(q)$ 整除 $q-1$, 于是

$$q-1\geq|\Phi_n(q)|=\prod_{\mathrm{g.c.d}(k,n)=1}|q-e^{2ik\pi/n}|,$$

但对与 n 互素的正整数 $1\leq k\leq n$, 有 $|q-e^{2ik\pi/n}|>q-1\geq 1$, 得到矛盾. □

Lemma 2.93 ([4])**.** 设 R,L 是 K-代数, 这里 K 是无限域, L 是域, 那么 R 的任何一个 K 上的多项式等式 $f(x_1,x_2,...,x_m)$ 也是 $R\otimes_K L$的一个多项式等式.

Proof. 设 $\{r_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是 R 作为 K-线性空间的一个基. 我们知道 $R\otimes_K L$ 中的任何一个元素都可以表示为有限和 $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}r_\alpha\otimes l_\alpha$ 的形式, 所以要证明 f 是 $R\otimes_K L$ 的一个多项式等式, 我们只要验证对任给

$$r_{\alpha_{11}},...,r_{\alpha_{1N_1}},r_{\alpha_{21}},...,r_{\alpha_{2N_2}},...,r_{\alpha_{m1}},...,r_{\alpha_{mN_m}}\in\{r_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$$

以及 $l_{11},...,l_{1N_1},...,l_{m1},...,l_{mN_m}\in L$, 有

$$f(\sum_{j=1}^{N_1}r_{\alpha_{1j}}\otimes l_{1j},\sum_{j=1}^{N_2}r_{\alpha_{2j}}\otimes l_{2j},...,\sum_{j=1}^{N_m}r_{\alpha_{mj}}\otimes l_{mj})=0$$

即可. 固定上面的 $r_{\alpha_{11}},...,r_{\alpha_{1N_1}},r_{\alpha_{21}},...,r_{\alpha_{2N_2}},...,r_{\alpha_{m1}},...,r_{\alpha_{mN_m}}\in\{r_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$, 如果我们能够证明对 L 上的多项式环 $L[x_{ij}]=L[x_{11},...,x_{1N_1},...,x_{m1},...,x_{mN_m}]$, $R\otimes_K L[x_{ij}]$ 中的元素

$$f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}}\otimes x_{1j},\sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}}\otimes x_{2j},...,\sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}}\otimes x_{mj})=0,$$

那么我们将 l_{ij} 代入 x_{ij} 便得到了结果, 原因是赋值映射 $\mathrm{ev}: R\otimes_K L[x_{ij}]\to R\otimes_K L, \sum\limits_{k=1}^{t} r_k\otimes f_k(x_{ij})\mapsto \sum\limits_{k=1}^{t} r_k\otimes f_k(l_{ij})$ 是环同态 (映射合理性容易验证, 这里赋值映射能够成为环同态是由 L 是交换环保证的), 所以 $\mathrm{ev}(f(\sum\limits_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}}\otimes x_{1j},\sum\limits_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}}\otimes x_{2j},...,\sum\limits_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}}\otimes x_{mj}))=f(\sum\limits_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}}\otimes l_{1j},\sum\limits_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}}\otimes l_{2j},...,\sum\limits_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}}\otimes l_{mj})=0$. 下面我们说明 $f(\sum\limits_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}}\otimes x_{1j},\sum\limits_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}}\otimes x_{2j},...,\sum\limits_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}}\otimes x_{mj})=0$.

将 $f(\sum\limits_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}}\otimes x_{1j},\sum\limits_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}}\otimes x_{2j},...,\sum\limits_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}}\otimes x_{mj})$ 展开, 对每个形如 $r\otimes g(x_{ij}), g(x_{ij})\in K[x_{ij}]$ 的项全部把 r 用 r_α 来 K-线性表出, 可得存在有限个 $r_{\beta_1},r_{\beta_2},...,r_{\beta_s}\in\{r_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 以及 K 上的多项式 $G_{\beta_1}[x_{ij}],...,G_{\beta_s}[x_{ij}]\in K[x_{ij}]$, 使得

$$f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}}\otimes x_{1j},\sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}}\otimes x_{2j},...,\sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}}\otimes x_{mj})=\sum_{k=1}^{s} r_{\beta_k}\otimes G_{\beta_k}[x_{ij}].$$

下面说明 $G_{\beta_1}[x_{ij}],...,G_{\beta_s}[x_{ij}]$ 全部都是零多项式 (一旦证明这一点, 便得到了结果). 任取域 K 中元素

$$c_{11},...,c_{1N_1},...,c_{m1},...,c_{mN_m},$$

将 $c_{ij}1_L$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{s} r_{\beta_k}\otimes G_{\beta_k}[c_{ij}1_L]=&\sum_{k=1}^{s} r_{\beta_k}G_{\beta_k}[c_{ij}]\otimes 1_L\\ =&f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}}c_{1j}\otimes 1_L,\sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}}c_{2j}\otimes 1_L,...,\sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}}c_{mj}\otimes 1_L)\\ =&f(\sum_{j=1}^{N_1} r_{\alpha_{1j}}c_{1j},\sum_{j=1}^{N_2} r_{\alpha_{2j}}c_{2j},...,\sum_{j=1}^{N_m} r_{\alpha_{mj}}c_{mj})\otimes 1_L\\ =&0.\end{aligned}$$

于是由 $\sum\limits_{k=1}^{s} r_{\beta_k}G_{\beta_k}[c_{ij}]\otimes 1_L=0$ 得到 $\sum\limits_{k=1}^{s} G_{\beta_k}[c_{ij}]r_{\beta_k}=0$, 再由 r_{β_k} 的 K-线性无关性迫使每个 $G_{\beta_k}[c_{ij}]=0$. 总结一下, 现在我们得到了每个 $G_{\beta_k}[x_{ij}]$ 关于 K 中任意一组元素 c_{ij} 的代入是零, 而 K 是无限域, 这迫使 $G_{\beta_k}[x_{ij}]$ 是零多项式. □

2.6 Posner 定理

在抽象代数中我们熟知整区可以关于它所有非零元构成的乘闭子集作局部化, 来得到商域. 素 PI 环作为整区的推广, 它也可以关于中心正则元集作 (非交换) 局部化, 本节的 Posner 定理告诉我们, 素 PI 环关于中心

正则元集作右局部化得到的右商环, 是其中心上有限维中心单代数, 这可以视作 "整区的商域是自身上的 1 维单代数" 这一事实的推广. 如无特别说明, 本节的含幺环幺元均非零, K 表示含幺交换环.

现在开始我们为 Posner 定理的证明做一些准备. 下面是我们在交换代数中熟知的结论.

Lemma 2.94 ([22]). 设 R 是含幺环, $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x]$ 满足系数两两可交换, 那么 $f(x)$ 在 $R[x]$ 中可逆当且仅当 a_0 在 R 中可逆且 $a_1,a_2,...,a_n$ 幂零.

Proof. 充分性是明显的, 这里仅验证必要性. 设 $f(x)$ 的逆 $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$(设 $n,m\geq 1$). 首先 a_0 可逆是明显的, 因为 b_0 就是它的逆元. 下面说明 $a_1,a_2,...,a_n$ 幂零. 由 $f(x)g(x)=1$ 我们马上得到 $a_nb_m=0,a_{n-1}b_m+a_nb_{m-1}=0$, 进而 $a_n^2b_{m-1}=0$. 归纳地容易证明对每个自然数 $0\leq r\leq m$, 有 $a_n^{r+1}b_{m-r}=0$. 特别地, $a_n^{m+1}=0$, 所以 a_n 幂零. 于是再由 $f(x)-a_nx^n$ 可逆知 a_{n-1} 幂零, 重复上述讨论可得 $a_1,a_2,...,a_n$ 幂零. □

下面的结果来自 Amitsur 于 1956 年的工作.

Theorem 2.95 ([12]). 设含幺环 R 没有非零的诣零理想 (例如半本原环), 那么 $R[x]$是半本原环.

Proof. 我们通过反证法说明 $\mathrm{Jac}(R[x])$ 是零. 假设 $\mathrm{Jac}(R[x])\neq 0$, 设 $\mathrm{Jac}(R[x])$ 里所有非零多项式中次数最低的多项式次数为 $n\geq 0$, 那么

$$I=\{a_n\in R|\text{存在}a_0,a_1,...,a_{n-1}\in R,\text{使得}a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in\mathrm{Jac}(R[x])\}$$

是 R 的非零理想. 下证 I 是诣零的来得到矛盾. 任取 $a_n\in I$, 并设 $a_0,a_1,...,a_{n-1}\in R$ 使得 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in\mathrm{Jac}(R[x])$, 那么 $a_nf(x)-f(x)a_n\in\mathrm{Jac}(R[x])$ 迫使 $a_na_j=a_ja_n,\forall 0\leq j\leq n$. 再利用 $a_{n-1}f(x)-f(x)a_{n-1}\in\mathrm{Jac}(R[x])$ 可得 $a_{n-1}a_j=a_ja_{n-1},\forall 0\leq j\leq n$. 归纳地, 可得 $a_ia_j=a_ja_i,\forall 0\leq i,j\leq n$. 因此 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in\mathrm{Jac}(R[x])$ 的系数两两可交换, 考虑多项式 $1-xf(x)$, 它在 $R[x]$ 中可逆且系数两两可交换, 由前面的引理知系数 $a_0,a_1,...,a_n$ 幂零, 于是知 I 中元素均幂零. 故 I 为诣零理想, 矛盾. □

Remark 2.96. 这一结果告诉我们半本原环 R 上的多项式环 $R[x]$ 仍是半本原的. 但是反过来结论不一定成立, 例如取 R 是域 F 上形式幂级数环 $F[[x]]$, 则 R 不是半本原环, 但 $R[x]$ 是半本原的 (因为 R 是整区, 那么 R 不存在非零的诣零理想, 所以这里的定理对 R 适用).

Theorem 2.97 ([4]). 设 K-代数 R 是半素 PI 代数, 那么 R 的任何非零理想 J 满足 $J\cap Z(R)\neq 0$.

Proof. 事实上我们只需要证明当 R 是半本原 PI 代数的情形结论成立就够了, 因为如果结论对半本原 PI 代数都成立, 那么对半素 PI 代数 R 上的多项式环 $R[x]$, 因为 R 没有非零的诣零理想, 所以 $R[x]$ 是半本原 K-代数. 于是 $R[x]$ 的非零理想 $J[x]$ 与 $R[x]$ 的中心 $Z(R[x])=Z(R)[x]$ 之交 $J[x]\cap Z(R)[x]=(J\cap Z(R))$ 非零, 这就蕴含了 $J\cap Z(R)\neq 0$. 现在我们证明：当 R 是半本原 PI 代数时, 对 R 的任何非零理想 J, 有 $J\cap Z(R)\neq 0$. 设 R 是本原代数族 $\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的次直积, 即存在单代数同态 $j:R\to\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}R_\alpha$, 使得对每个标准投射 $p_\alpha:\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}R_\alpha\to R_\alpha$, 有 $p_\alpha j$ 是满射. 因为 R 到每个 R_α 有满代数同态, 所以每个 R_α 是本原 PI 代数, 那么由 Kaplansky 定理知 R_α 是单代数. 设 R_α 有最小次数 d_α, 那么正整数集 $\{d_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 有上界 (被 R 的最小次数控制). 记 $d_\alpha/2$ 为 m_α 并设正整数集 $\{m_\alpha|\alpha\in\Lambda,p_\alpha j(J)\neq 0\}$ 的最大元为 m. 设 S 是 J 中元素代入 Fromanek 多项式 F_m 后所有可能的取值构成的集合, 即 $S=\{F_m(r_1,...,r_{m+1})\in R|r_1,...,r_{m+1}\in J\}$, 那

么 $S\subseteq J$. 并且 S 中有非零元: 首先存在 α_0 使得 $m_{\alpha_0}=m\in\{m_\alpha|\alpha\in\Lambda,p_\alpha j(J)\neq 0\}$. 于是 F_m 是 R_{α_0} 中心多项式 (见 [推论2.90]) 保证了存在 $c_1,...,c_{m+1}\in R_{\alpha_0}$ 使得 $F_m(c_1,...,c_{m+1})\neq 0$. 注意到这时 $p_{\alpha_0}j(J)$ 作为 R_{α_0} 这一单环的非零理想必为 R_{α_0} 本身, 所以对每个 c_k 在 J 中找关于 $p_{\alpha_0}j$ 的原像即可得到 S 中有非零元 (具体地, 对每个 c_k, 设 $b_k\in J$ 使得 $p_{\alpha_0}j(b_k)=c_k$, 那么 $p_{\alpha_0}j(F_m(b_1,...,b_{m+1}))=F_m(c_1,...,c_{m+1})\neq 0$ 表明 $j(F_m(b_1,...,b_{m+1}))\neq 0$, 于是由 j 是单射即得结果).

Claim. 对 $\alpha\in\Lambda$, 有 $p_\alpha j(S)\subseteq Z(R_\alpha)$. 一旦证明这一断言, 对任给 $b_1,...,b_{m+1}\in J$, 由 $F_m(b_1,...,b_{m+1})\in S$ 知 $p_\alpha j(rF_m(b_1,...,b_{m+1}))=p_\alpha j(F_m(b_1,...,b_{m+1})r),\forall r\in R$, 于是利用 j 是单射可得 $F_m(b_1,...,b_{m+1})\in Z(R),\forall b_1,...,b_{m+1}\in J$. 再由 $S\subseteq J$ 便得 $S\subseteq J\cap Z(R)$.
现在证明断言, 任给 $\alpha\in\Lambda$, 如果 $m_\alpha<m$, 那么 F_m 是 R_α 的一个多项式等式, 特别地, $p_\alpha j(S)=0\subseteq Z(R_\alpha)$. 如果 $m_\alpha=m$, 那么 F_m 是 R_α 的一个中心多项式, 进而 $p_\alpha j(S)\subseteq Z(R_\alpha)$. 如果 $m_\alpha>m$, 那么由 m 的定义知 $p_\alpha j(J)=0$, 特别地, $p_\alpha j(S)=0\subseteq Z(R_\alpha)$. 断言得证. □

Remark 2.98. 因此半素 PI 代数 R 如果中心是域, 那么任何非零理想都包含可逆元. 进而知中心为域的半素 PI 代数是单 PI 代数, 于是由 Kaplansky 定理知 R 是其中心上的有限维中心单代数.

Remark 2.99. 证明过程表明对半本原 PI 代数 R 的任何非零理想 J, 存在正整数 m, 使得

$$0\neq S=\{F_m(r_1,...,r_{m+1})\in R|r_1,...,r_{m+1}\in J\}\subseteq J\cap Z(R).$$

当 R 是半素 PI 代数时, 因为 $R[x]$ 是半本原 PI 代数, 所以对 R 的非零理想 J, 存在正整数 m, 使得 $J[x]$ 中所有元素关于 $F_m(x,y_1,...,y_m)$ 的代入得到的集合 $\hat{S}$ 非零且含于 $J[x]\cap Z(R)[x]$. 如果进一步假设 R 是无限域 $\Bbbk$ 上的代数, 我们能够证明 $0\neq S=\{F_m(r_1,...,r_{m+1})\in R|r_1,...,r_{m+1}\in J\}\subseteq J\cap Z(R)$. 首先需要

Lemma 2.100. 设 $\Bbbk$ 是无限域, R 是 $\Bbbk$-代数, 如果 $f(x)\in R[x]$ 满足 $f(c)=0,\forall c\in\Bbbk$, 则 $f=0$. 特别地, 如果 I 是 R 的理想且 $f(x)\in R[x]$ 满足 $f(c)\in I,\forall c\in\Bbbk$, 那么 $f\in I[x]$.

Proof. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 取两两互异的 $c_1,...,c_{n+1}\in\Bbbk$, 则有

$$\begin{pmatrix} c_1^n & c_1^{n-1} & \cdots & c_1 & 1\\ c_2^n & c_2^{n-1} & \cdots & c_2 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ c_{n+1}^n & c_{n+1}^{n-1} & \cdots & c_{n+1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n\\ a_{n-1}\\ \vdots\\ a_0\end{pmatrix}=0.$$

等号左边的系数矩阵作为 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 中 Vandermonde 矩阵易见有非零的行列式, 故左乘上此系数矩阵在 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 中的逆矩阵立即得到 $a_0=\cdots=a_n=0$. 要说明第二个结论成立, 只需将第一个结论应用于 $\Bbbk$-代数 R/I. □

Proposition 2.101. 设 R 是无限域 $\Bbbk$ 上的半素 PI 代数, 那么对任何 R 的非零理想 J, 存在正整数 m 使得

$$0\neq S=\{F_m(r_1,...,r_{m+1})\in R|r_1,...,r_{m+1}\in J\}\subseteq J\cap Z(R).$$

Proof. 根据 [定理2.97] 的证明过程我们已经看到结论对本原 PI 代数成立. 现在对半素 PI 代数 R, $R[x]$ 的半本原 PI 代数, 进而由结论对本原 PI 情形成立可知存在正整数 m 使得

$$0\neq\{F_m(f_1(x),...,f_{m+1}(x))\in R[x]|f_1(x),...,f_{m+1}(x)\in J[x]\}\subseteq J[x]\cap(Z(R))[x].$$

特别地, $S \subseteq J \cap Z(R)$. 并且存在 $f_1(x), ..., f_{m+1}(x) \in J[x]$ 使得 $F_m(f_1(x), ..., f_{m+1}(x))$ 是 $R[x]$ 中非零多项式. 现在应用 [引理2.100] 便知存在 $c \in \Bbbk$ 使得 $F_m(f_1(c), ..., f_{m+1}(c)) \neq 0$. $\square$

Example 2.102. 设 R 是无限域 $\Bbbk$ 上的半素 PI 代数, 对 [命题2.101] 中的理想 J, 取 $J = R$, 我们立即得到存在正整数 n 使得 Formanek 多项式 $F_n(x, y_1, ..., y_n)$ 是 R 的中心多项式.

Ed Posner(美国数学家, 1933-1993) 给出了下面的 Posner 定理, 它表明最小次数为 d 的素 PI 环 R 在其中心正则元集 $S = Z(R) - \{0\}$ 处的右局部化 R_S 是其中心上维数为 $(d/2)^2$ 的中心单代数.

Theorem 2.103 (Posner 定理, [4])**.** 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的素 PI 代数, 记 $Z = Z(R), S = Z(R) - \{0\}$, 那么右商环 R_S 存在且是其中心 Z_S 上的中心单代数, R_S 与 R 满足 K 上相同的多重线性多项式, 特别地, d 是偶数且 R_S 作为 Z_S 上的中心单代数维数是 $(d/2)^2$. 一般称 $d/2$ 是素 PI 代数 R 的 **PI 次数**, 记为 PI-deg(R).

Proof. R 是素环保证了 Z 是整区, R_S 存在, R_S 的中心是 Z 的商域 Z_S 且 R_S 为素环. 如果我们能够证明 R_S 与 R 满足 K 上相同的多重线性多项式, 那么 R_S 是最小次数是 d 且为中心是域的 PI 素代数. 而半素 PI 代数的任何非零理想与中心的交非零, 所以 R_S 作为中心是域的素 PI 代数必为单代数. 进而 R_S 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, 再由 Kaplansky 定理即得 d 是偶数且 R_S 是 Z_S 上的 $(d/2)^2$ 维中心单代数. 因此, 要证明 Posner 定理, 只需要再验证 R_S 与 R 满足 K 上相同的多重线性多项式. 首先由 R 是素环保证了右局部化 (R_S, λ) 中 K-代数同态 $\lambda : R \to R_S$ 是单射, 因此代数同构 $\lambda(R) \cong R$ 保证了 R_S 满足的任何多项式等式 $f \in K\langle x_1, ..., x_n\rangle$ 也是 R 的多项式等式. 最后说明 R 满足的多重线性多项式也被 R_S 满足. 如果 Z 是有限集, 那么 Z 作为有限整区是域, 所以这时 $\lambda : R \to R_S$ 是满射, 进而为代数同构, 于是知这时 R 的多项式等式也是 R_S 的多项式等式. 如果 Z 是无限集, 置 $\Lambda = \{\lambda(s)^{-1} | s \in S\}$, 考虑 $\lambda(R)$ 上以 Λ 为指标集的未定元集所定义的多项式环 $\lambda(R)[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$, 那么 Z_S 子集 $\{\lambda(s)^{-1} | s \in S\}$ 所决定的赋值映射 $\mathrm{ev} : \lambda(R)[\{x_i\}_{i\in\Lambda}] \to R_S, f(\{x_i\}_{i\in\Lambda}) \mapsto f(\{c\}_{c\in\Lambda})$ 是满 K-代数同态, 这表明 $\lambda(R)[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ 满足的 K 上任何一个多项式等式都被 R_S 满足, 而 $\lambda(R)[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ 作为 $\lambda(R)$ 的中心扩张与 $\lambda(R)$ 满足相同的多重线性多项式, 故 $\lambda(R)$ 满足的任何多重线性多项式都被 R_S 满足, 再由 $R \cong \lambda(R)$ 得到 R 满足的任何多重线性多项式等式都被 R_S 满足. 于是我们证明了 R_S 与 R 满足 K 上相同的多重线性多项式. $\square$

Remark 2.104. 上述证明来自 [4]. 也可以从中心扩张的角度更直接地得到素 PI 代数 R 与其在中心正则元集 S 处的局部化 R_S 满足相同的多重线性多项式: 我们已经指出局部化映射 $\lambda : R \to R_S$ 这时是 K-代数嵌入. 那么由 R_S 作为 Z_S-模可由 $\lambda(R) \cong R$ 生成便知 R_S 是 R 的中心扩张, 所以从 [推论2.19] 易见 R 与 R_S 在 K 上满足相同的多重线性多项式. 一般地, 如果 R 是 PI 代数且 T 是 R 的一些中心正则元构成的乘闭子集, 那么 R_T 存在且局部化映射 $\lambda_T : R \to R_T$ 是代数嵌入. 进而同样的理由表明 R 和 R_T 满足相同的多重线性多项式.

Remark 2.105. 本原 PI 代数作为特殊的素 PI 代数, 其 PI 次数也是最小次数的一半. 所以本原 PI 代数作为其中心上中心单代数的维数就是 PI 次数的平方. 素 PI 代数 R 在中心正则元集 S 处的局部化 R_S 作为中心上中心单代数的维数也是 R 的 PI 次数的平方 (Posner 定理也表明 R 与 R_S 具有相同的 PI 次数). 注意到 R_S 作为 Z_S 上有限维线性空间的维数与 K 无关, 故素 PI 代数 R 在系数环上的最小次数不依赖于系数环的选取.

Remark 2.106. 素 PI 环可能有不在中心里的正则元, 例如正特征的 Weyl 代数 (回忆 [例2.40]). 对素 PI 环 R, 因为中心 Z 中的非零元都是 R 中正则元, 所以 R 作为 Z-模是无挠的. 特别地, 当 ${}_ZR$ 是有限生成模且 Z 是 P.I.D. 时, ${}_ZR$ 是有限生成自由 Z-模.

Remark 2.107. 事实上, 只要含幺环 R 在中心 Z 上是有限生成模, 那么对任何 Z 的乘闭子集 S 就能够保证 $Z(R_S) = Z_S$(见 [引理3.59]).

Corollary 2.108. 设 R 是素环, 且在中心 Z 上是有限生成自由模. 记 n 是 R 的 PI 次数, 那么 $\mathrm{rank}_Z R = n^2$ 且对任何 Z 的真理想 $\mathfrak{a}$, $R/\mathfrak{a}R$ 是 $Z/\mathfrak{a}$ 上秩为 n^2 的自由模.

Proof. 设 R 是 Z 上秩为 r 的自由模, 记 S 是 R 的中心正则元集. 那么 R_S 是秩为 r 的自由 Z_S-模, 由 Posner 定理得到 $r = n^2$, 即 $\mathrm{rank}_Z R = n^2$. 现在设 $R = Za_1 \oplus \cdots \oplus Za_r$, 对 Z 的任何真理想 $\mathfrak{a}$, 考虑标准投射 $\pi : R \to (Z/\mathfrak{a}Z)^r, z_1a_1 + \cdots + z_ra_r \mapsto (\overline{z_1}, ..., \overline{z_r})$, 这是满 Z-模同态且 $\mathrm{Ker}\pi = \mathfrak{a}R$. 于是结论明显成立. □

Example 2.109. Posner 定理表明素 PI 环在中心正则元构成的乘闭子集处作局部化是单环. 一般地, 素环在中心正则元构成的乘闭子集处作局部化未必是单环. 例如考虑域 $\Bbbk$ 上可数变量的自由代数 $R = \Bbbk\langle x_1, x_2, ...\rangle$, 易验证 $Z(R) = \Bbbk$, 这时 R 在 $S = Z(R) - \{0\}$ 处作局部化同构于自身, 即 $R_S \cong R$. 但 R 明显有非平凡的理想, 例如变量 x_1 生成的理想便是非零真理想. 所以 R_S 不是单环. 类似地, 利用 Posner 定理可得对域 $\Bbbk$ 任何自由代数 $R = \Bbbk\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$, 只要 $n \geq 2$, 那么 R 不是 PI 环.

回忆一个含幺环 R 称为**右 Goldie 环**, 如果 R 具有有限一致维数且满足右零化子升链条件. 一个右 R-模 M 具有有限一致维数指它不含非零子模的无限直和. 如果含幺环 R 有乘闭子集 S 满足 S 由一些正则元构成且 $Q = R_S$ 存在, 可以证明 Q 是 Artin 单环蕴含 R 是素右 Goldie 环 (证明可参见 [2]).

Corollary 2.110 ([1])**.** 设 K-代数 R 是素 PI 代数, 那么 R 是素右 Goldie 环.

Corollary 2.111 ([1])**.** 设 K-代数 R 是素 PI 代数, 中心正则元集为 S, 局部化映射为 $\lambda : R \to R_S$. 那么 (R_S, λ_S) 就是 R 的右 (经典) 商环. 特别地, R 的右商环的 PI 次数与 R 一致.

Proof. 记 T 是 R 的正则元全体, 那么 $T \supseteq R$. 注意到 R_S 是 Artin 环, 即正则元都可逆, 所以由 $\lambda_S(T)$ 中元素均为 R_S 中正则元便知 $\lambda_S(T)$ 中元素都在 R_S 中可逆. 因为 R_S 中元素都形如 $\lambda_S(a)\lambda(s)^{-1}, a \in R, s \in S \subseteq T$, 所以结合 λ_S 是单射立即得到 (R_S, λ_S) 就是 R 的右经典商环. □

不难验证素 PI 代数在中心乘闭子集处的局部化依然是素代数. Posner 定理使我们能看到

Corollary 2.112. 设 K-代数 R 是素 PI 代数, Z 是中心, $S = Z - \{0\}$. 那么对任何乘闭子集 $T \subseteq S$, R_T 也是素 PI 代数, R_T 与 R 满足 K 上相同多重线性多项式并且 PI-deg$R$ = PI-degR_S = PI-degR_T.

Proof. 设 $\lambda_T : R \to R_T, \lambda_S : R \to R_S$ 是局部化映射. 那么由 $\lambda_S(T)$ 中元素均在 R_S 中可逆知存在唯一的 K-代数同态 $\eta : R_T \to R_S$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\lambda_T"] \arrow[dr, "\lambda_S"'] & R_T \arrow[d, dashed, "\eta"] \\ & R_S \end{tikzcd}$$

不难验证 η 是单射. 所以 R_T 可嵌入 R_S. 现在由 Posner 定理知 R 与 R_S 满足 K 上相同的多重线性多项式, 进而 R_T 也与它们满足相同的多重线性多项式. 这说明 PI-deg$R$ = PI-degR_S = PI-degR_T. □

Corollary 2.113. 设 K-代数 R 是素 PI 代数并有 PI-deg$R=n$, 那么对任何正整数 $t>n$, Formanek 多项式 $F_t(x,y_1,...,y_t)$ 是 R 的多项式等式.

Proof. 根据 [推论2.112], R 关于中心正则元构成的乘闭子集 S 的局部化 R_S 的 PI 次数也是 n. 故由 Posner 定理表明 R_S 是 PI 次数为 n 的本原 PI 代数. 现在应用 [推论2.90] 即可. □

Corollary 2.114. 设 $\Bbbk$ 是无限域, $\Bbbk$-代数 R 是素 PI 代数并有 PI-deg$R=n$, 那么 $F_n(x,y_1,...,y_n)$ 是 R 的中心多项式.

Proof. 由 [推论2.112], R 关于中心正则元构成的乘闭子集 S 的局部化 R_S 的 PI 次数也是 n. 应用 [推论2.90] 知 $F_n(x,y_1,...,y_n)$ 是 R_S 的中心多项式. 所以存在 $b,a_1,...,a_n\in R,s,s_1,...,s_n\in S$ 使得

$$F_n(b/s,a_1/s_1,...,a_n/s_n)\neq 0\in Z_S.$$

因为 Formanek 多项式关于变量 $y_1,...,y_n$ 是线性的, 所以 $F_n(b/s,a_1,...,a_n)\neq 0$. 作

$$h(x)=F_n(x,a_1,...,a_n)\in R[x],$$

那么 $h(x)\neq 0$(否则 $h(b/s)=0$, 矛盾). 所以由 $\Bbbk$ 是无限域, 应用 [引理2.100] 得到存在 $\alpha\in\Bbbk$ 使得 $h(\alpha)\neq 0$. 这一观察表明 $F_n(x,y_1,...,y_n)$ 总存在一组关于 R 中元素的赋值非零. 我们还需验证 Formanek 多项式在任何一组 R 中元素的赋值下的像在 $Z(R)$ 中. 只需注意到如果 $a\in R$ 满足 $a/1\in Z(R_S)$, 那么由 R 到 R_S 的局部化映射是代数嵌入便可得到 $a\in Z(R)$. 因此这时 $F_n(x,y_1,...,y_n)$ 是 R 的中心多项式. □

对一般的素 PI 环, 根据 [推论2.114] 的证明过程我们仍能保证

Proposition 2.115. 设 R 是 PI 次数为 n 的素 PI 环且 R 的中心是 Z, 那么 Formanek 多项式 $F_n(x,y_1,...,y_n)$ 关于 R 中任意一组元素的代入取值在 Z 中.

Proof. 记 $S=Z-\{0\}$, 那么 Posner 定理表明 R_S 是域 Z_S 上 n^2 维中心单代数. 应用 [推论2.90] 得到 $F_n(x,y_1,...,y_n)$ 是 R_S 的中心多项式. 特别地, $F_n(x,y_1,...,y_n)$ 关于 R 中任意一组元素的代入取值在 Z_S 中. 再结合 $Z_S\cap R=Z$ 得到结论. □

对模有限的素代数, 我们可以更简洁地证明 Posner 定理的加强版本.

Theorem 2.116. 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的素 PI 代数并记 Z 是 R 的中心. 如果 R 存在中心子环 C 使得 R 是有限生成 C-模, 那么对 $S=C-\{0\}$, R_S 都是以 Z_S 为中心的有限维中心单代数, 且维数是 $(d/2)^2$. 特别地, 当 $C=Z$ 且 $S=Z-\{0\}$ 时, 便得到模有限版本的 Posner 定理.

Proof. 通过 S 中元素都是 R 中的中心正则元容易验证 R_S 是素环, 因此由 ${}_CR$ 有限生成便知 R_S 是域 $C_S=\mathrm{Frac}C$ 上有限维素代数. 特别地, R_S 是单边 Artin 素环, 故由下面的 [引理2.117] 知 R_S 是 Artin 单环. 由 ${}_CR$ 是有限生成模容易验证 $Z(R_S)=Z_S$(细节参见 [引理3.59]). 下面说明 R 和 R_S 满足 K 上相同多重线性多项式. 一旦证明该断言, 则 R_S 的最小次数也是 d, 于是应用 Kaplansky 定理便知 R_S 是中心上的 $(d/2)^2$ 维中心单代数. 由 R 可 K-代数嵌入 R_S 知 R_S 满足的多项式等式 R 也满足. 反之, 如果 K 上多重线性多项式

$f(x_1,...,x_n) \in K\langle x_1,...,x_n\rangle$ 是 R 的多项式等式, 我们说明 R_S 也满足 $f(x_1,...,x_n)$: 任取 $a_1/s_1,...,a_n/s_n \in R_S$, 由 $1/s_1,...,1/s_n \in Z(R_S)$ 知有

$$f(a_1/s_1,...,a_n/s_n) = f(a_1/1,...,a_n/1)/(s_1\cdots s_n) = f(a_1,...,a_n)/(s_1\cdots s_n) = 0.$$

因此 R_S 和 R 在 K 上满足相同的多重线性多项式, 进而有相同的最小次数. □

Lemma 2.117. 设 R 是单边 Artin 环, 那么 $\mathrm{maxSpec}R = \mathrm{Spec}R$.

Proof. 只需验证任何 R 的素理想是极大理想. 因为 Artin 环的极大理想只有有限多个, 故可设 $M_1,...,M_n$ 是 R 所有的极大理想, 根据 Wedderburn-Artin 定理, 这也是 R 所有的本原理想. 因此 $\mathrm{Jac}R = M_1 \cap \cdots \cap M_n$. 于是由 R 的 Jacobson 根是幂零理想知存在正整数 k 使得 $(M_1\cdots M_n)^k = 0$. 于是 R 的任何素理想 P 包含 $(M_1\cdots M_n)^k = 0$, 这说明 P 一定是某个极大理想 M_{i_0}. □

2.7 Amitsur 定理

本节的主要目标是证明任何 PI 代数作为环是 PI 环, 本节中 K 表示含幺交换环, $1_K \neq 0$.

Lemma 2.118. 设 K-代数 R 是最小次数为 d 的本原 PI 代数, 那么 R 满足标准等式 s_d. 特别地, 任何最小次数为 d 的半素 K-PI 代数也满足 s_d.

Proof. 由 [引理2.81] 中的 (4) 知有 H-代数同构 $R\otimes_{Z(R)} H \cong \mathrm{M}_m(H)$, 这也是环同构, 所以 Amitsur-Levitzki 定理告诉我们 R 满足 s_{2m}. Kaplansky 的证明过程表明 $d = 2m$, 所以 R 满足标准等式 $s_{2m} = s_d$. 现设 K-代数 R 是最小次数为 d 的半素 PI 代数, 那么 [推论2.62] 表明 R 没有非零诣零理想, 所以 [定理2.95] 表明 $R[x]$ 是半本原的. 因此 $R[x]$ 是一些本原 K-代数 $\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的次直积, $R[x]$ 到每个 R_α 有满代数同态, 所以每个 R_α 的最小次数不超过 d, 于是由 [引理2.42] 知每个 R_α 满足 s_d, 因此由 [引理2.15] 的 (3) 知 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ 也满足 s_d. 进而由 $R[x]$ 可嵌入 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ 知 $R[x]$ 满足 s_d, 特别地, R 也满足 s_d. □

Corollary 2.119 ([1])**.** 设半素 PI 环族 $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的中每个 PI 环的最小次数都不超过 d, 那么 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ 也是最小次数不超过 d 的半素 PI 环.

Proof. 根据 [引理2.118], 每个 R_α 都满足标准等式 s_d. 因此 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ 也满足 s_d. □

Corollary 2.120. 设 R 是最小次数为 d 的半素 PI 环, 那么存在交换环 F 与正整数 n 使得 R 可嵌入矩阵环 $\mathrm{M}_n(F)$. 特别地, $\mathrm{M}_t(R)$ 也是半素 PI 环.

Proof. 与前面的引理证明过程类似, [推论2.62] 表明 R 没有非零诣零理想, 所以 [定理2.95] 表明 $R[x]$ 是半本原的. 于是我们可不妨设 R 是最小次数为 d 的半本原 PI 环. 设 R 是一些本原环 $\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的次直积, 那么每个 R_α 的最小次数 d_α 不超过 d. [推论2.89] 保证了每个 R_α 可保幺地嵌入域 H_α 上的矩阵环 $\mathrm{M}_{m_\alpha}(H_\alpha), m_\alpha = d_\alpha/2$. 置 $n = (d/2)!$, 则通过 $\mathrm{M}_n(H_\alpha) \cong \mathrm{M}_{n/m_\alpha}(M_{m_\alpha}(H_\alpha))$(这里的同构来自分块矩阵角度) 可将每个 $\mathrm{M}_{m_\alpha}(H_\alpha)$ 保幺地嵌入 $\mathrm{M}_n(H_\alpha)$. 所以 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ 可嵌入 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{M}_n(H_\alpha) \cong \mathrm{M}_n(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} H_\alpha)$. 故 R 可嵌入交换环 $F = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} H_\alpha$ 上的 n 阶矩阵环. 最后说明半素 PI 环上的矩阵环仍半素 PI. 半素是明显的, 因为矩阵环

$\mathrm{M}_t(R)$ 的素根就是 $\mathrm{M}_t(N(R))$. 要看到 $\mathrm{M}_t(R)$ 是 PI 的, 只需注意 R 嵌入 $\mathrm{M}_n(F)$ 蕴含 $\mathrm{M}_t(R)$ 嵌入 $\mathrm{M}_{nt}(F)$, 后者是 PI 环 (回忆 [例2.23]). $\square$

Remark 2.121. R. S. Irving 在 [23] 中给出了仿射 PI 代数未必能嵌入含幺交换环上矩阵环的例子.

Remark 2.122. 如果 R 是 PI 次数为 n 的素 PI 环, 那么存在域 F 使得 R 能够嵌入矩阵代数 $\mathrm{M}_n(F)$(当 R 是 K-代数时, 这还是代数嵌入). 首先通过局部化映射, 由 Posner 定理, R 可嵌入中心单代数 R_S, 其中 $S = Z - \{0\}$, Z 是 R 的中心. 在 [注记2.82] 中已经指出 R_S 的分裂域 F 总存在, 即满足存在 F-代数同构 $R_S \otimes_{Z_S} F \cong \mathrm{M}_n(F)$ 的域 $F \supseteq Z_S$. 所以 R_S 又可嵌入矩阵代数 $\mathrm{M}_n(F)$. 注意到 R 的最小次数是 $2n$, 所以由 Amitsur-Levitzki 定理, 对任何正整数 $m < n$ 以及任何含幺交换环 K, R 都无法嵌入 $\mathrm{M}_m(K)$.

因为交换环上的矩阵环具有 IBN 性质, 因此由半素 PI 代数的矩阵嵌入性质马上可知

Proposition 2.123. 设 R 是 PI 环, 那么 R 具有 IBN 性质. 特别地, 有限维代数具有 IBN 性质.

Proof. 考虑标准投射 $\pi : R \to R/N(R)$, 其中 $N(R)$ 是素根. 以及半素 PI 环 $R/N(R)$ 的嵌入 $\mathrm{M}_n(K)$, 其中 K 是某个含幺交换环. 因为 $\mathrm{M}_n(K)$ 具有 IBN 性质, 所以 $R/N(R)$ 也有 IBN 性质. 从而 R 也有 IBN 性质. $\square$

Theorem 2.124 (Amitsur 定理,[4])**.** 设 K-代数 A 是满足首一多项式 $f \in K\langle x_1, ..., x_d\rangle$ 的 PI 代数, 则存在正整数 m, n 使得 A 满足 s_n^m. 特别地, 我们得到任何 PI 代数 A作为环也是 PI 的.

Proof. 我们先说明对任给满足 f 的 K-代数 T, 存在正整数 n 使得 $s_n(a_1, ..., a_n) \in N(T), \forall a_1, ..., a_n \in T$. 对 T 的任何素理想 P, 有 T/P 是最小次数不超过 f 次数的素 PI 代数, 而前面的引理表明最小次数是 q 的素 PI 代数总满足 s_q, 所以 T/P 满足 $s_n, \forall P \in \mathrm{Spec}(T)$, 这里 n 是 f 的次数. 于是知 $s_n(a_1, ..., a_n) \in N(T), \forall a_1, ..., a_n \in T$. 置指标集 $\Lambda = A^n, A_\alpha = A, S = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 那么 S 满足 f 且由前面的讨论知存在正整数 n 使得对任给 $u_1, ..., u_n \in S$ 有 $s_n(u_1, u_2, ..., u_n) \in N(S)$. 对每个 $1 \leq i \leq n$, 命 u_i 为 S 中指标 α 的元素是 α 的第 i 分量构成的元素, 即若 $\alpha = (r_1, ..., r_n) \in A^n$, 那么 u_i 在指标 α 处的分量是 r_i. 那么由 $s_n(u_1, u_2, ..., u_n) \in N(S)$ 知存在正整数 m 使得 $s_n(u_1, u_2, ..., u_n)^m = 0$. 对任给 $r_1, r_2, ..., r_n \in A$, 易见 $s_n(u_1, u_2, ..., u_n)^m \in S$ 在指标 $\alpha = (r_1, ..., r_n)$ 处的分量就是 $s_n(r_1, r_2, ..., r_n)^m$, 所以 $s_n(r_1, r_2, ..., r_n)^m = 0, \forall r_1, r_2, ..., r_n \in A$. $\square$

Remark 2.125. 因此, PI 代数就是作为环是 PI 环的代数, 任何 PI 环满足的性质 PI 代数也都满足.

事实上, 上述证明过程可以告诉我们更多

Theorem 2.126 ([2])**.** 设 R 是 PI 环, 那么矩阵环 $\mathrm{M}_s(R)$ 满足某个标准等式的幂 s_n^m, 故也是 PI 环.

Proof. 因为 $\mathrm{M}_s(R/N(R)) \cong \mathrm{M}_s(R)/\mathrm{M}_s(N(R))$, 所以 [推论2.120] 表明 $\mathrm{M}_s(R)/\mathrm{M}_s(N(R))$ 是半素 PI 环, 进而存在正整数 n 使得 $s_n(A_1, ..., A_n) \in N(\mathrm{M}_s(R)) = \mathrm{M}_s(N(R)), \forall A_1, ..., A_n \in \mathrm{M}_s(R)$. 其余讨论与 [定理2.124] 完全相同. 我们可以得到存在正整数 m 使得 $s_n(A_1, A_2, ..., A_n)^m = 0, \forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathrm{M}_s(R)$. $\square$

Corollary 2.127 ([2])**.** 如果含幺环 R 是 PI 环, 那么任何有限生成右 R-模 M_R 的自同态环 $\mathrm{End}(M_R)$ 也是 PI 的. 特别地, 环的 PI 性质是 Morita 不变量.

Proof. 设 M_R 可由 n 个元素生成, 由 [引理2.20] 知存在矩阵环 $\mathrm{M}_n(R)$ 的 (含幺) 子环 S 与满环同态 $\varphi : S \to \mathrm{End}(M_R)$. R 是 PI 环保证了 S 是 PI 的, 因此 $\mathrm{End}(M_R)$ 也 PI. 对于后一结论, 根据 Morita I, 任何与 R 是 Morita 等价的环 R', 都同构于 $\mathrm{End}(P_R)$, 其中 P_R 是有限生成投射生成子, 所以 R' 也是 PI 环. $\square$

Corollary 2.128 ([2])**.** 如果含幺环 R 是 PI 环, S 是 R 的环扩张 ($1_S \in R$) 满足 S_R 是有限生成模, 则 S 也是 PI 环. 这推广了 [命题2.24].

2.8 零次 Hochschild 同调的非零性

设 A 是 K-代数, 其中 K 是交换环, 并要求 A 是平坦 K-模. 记 $[A, A]$ 是 A 所有换位子生成的加法子群 (也是 A 的 K-子模). 那么 A 的 (系数在自身的)0 次 Hochschild 同调 $H_0(A, A)$ 就是 $A/[A, A]$. 本节我们说明当 A 是 PI 代数时, $H_0(A, A) \neq 0$. 按照 [24] 的术语, 如果含幺环 R 满足 $R = [R, R]$, 则称 R 的**换位子环**. 根据换位子环的定义, 易见换位子环的同态像依然是换位子环. 如果交换环 L 是 K 的扩环, 那么当 A 是换位子环时, $A \otimes_K L$ 也是换位子环: 对形如 $a \otimes \ell (a \in A, \ell \in L)$ 的元素, 设 $a = [x_1, y_1] + \cdots + [x_m, y_m]$, 那么

$$a \otimes \ell = \sum_{k=1}^{m} [x_k, y_k] \otimes \ell = \sum_{k=1}^{m} [x_k \otimes \ell, y_k \otimes 1].$$

现在我们可以证明

Proposition 2.129 ([24])**.** 设 A 是域 K 上有限维代数, 那么 $A \neq [A, A]$.

Proof. 这里用反证法证明结论, 假设 A 是换位子环. 设 $\overline{K}$ 是 K 的代数闭包, 那么 $A \otimes_K \overline{K}$ 也是换位子环. 命 R 是 $A \otimes_K \overline{K}$ 关于某个极大理想的商环, 那么 R 是代数闭域 $\overline{K}$ 上的有限维单代数, 且为换位子环. 由 Artin 单环结构定理, 存在正整数 n 使得 $R \cong \mathrm{M}_n(\overline{K})$. 这说明 $\mathrm{M}_n(\overline{K}) = [\mathrm{M}_n(\overline{K}), \mathrm{M}_n(\overline{K})]$, 等式右边中的矩阵迹都是零, 即不可能有 $\mathrm{M}_n(\overline{K}) = [\mathrm{M}_n(\overline{K}), \mathrm{M}_n(\overline{K})]$ 成立, 得到矛盾. □

Corollary 2.130 ([24])**.** 设 R 是 PI 环, 那么 $R \neq [R, R]$. 特别地, 如果 K-代数 A 是平坦 K-模且是 PI 代数, 那么 $H_0(A, A) = A/[A, A] \neq 0$.

Proof. 假设 $R = [R, R]$, 那么任何本原 PI 环都是换位子环. 根据 Kaplansky 定理, 本原 PI 环都是某个域 (中心) 上的有限维代数, 所以本原 PI 环不可能是换位子环, 矛盾. □

Remark 2.131. 任何 K-代数 A 的 0 次 Hochschild 上同调 $H^0(A, A) \cong Z(A) \neq 0$.

3 一些 PI 环类

3.1 Noether PI 环

如果一个素环 R 的任何本质右理想都含有一个非零理想, 则称该素环是**右有界的**. 如果含幺环 R 满足对任何素理想 P, 商环 R/P 都是右有界环, 则称 R 是**右全有界的**. 类似可定义**左有界素环**与**左全有界环**的概念. 如果一个素环既是左有界的又是右有界的, 称该素环**有界**. 如果一个含幺环既是右全有界环又是左全有界环, 称该环是**全有界的**. 将右全有界的右 Noether 环简称为**右 FBN 环**. 全有界的双边 Noether 环简称为 **FBN 环**. FBN 环自然是特殊的右 FBN 环. 本节的目标是说明右 Noether PI 环是右 FBN 环. Posner 定理 (见 [定理2.103]) 说素 PI 环关于中心正则元集的右经典商环存在且为中心上有限维中心单代数, 特别地, 是 Artin 半单代数, 因此由 Goldie 理论的基本事实 (例如参见 [2, p.57, Proposition 3.1]) 知**素 PI 环是右 Goldie 环**. 进而可对素 PI 环应用 Goldie 定理: 素 PI 环的任何本质右理想都会含 R 的某个正则元. 回忆对含幺环 K 上一

个 PI 代数 A(可以没有 1_A), 如果 A 满足某个次数为 $d \geq 1$ 的首一多项式 $f \in K\langle x_1, ..., x_n\rangle$, 那么 A 满足 K 上某个次数不超过 d 的首一多重线性多项式 (回忆 [定理2.16]). 我们利用这个工具先证明：

Proposition 3.1. 设含幺环 R 是 PI 的, $a \in R$, 那么对充分大的正整数 n, 右理想 $a^nR + \mathrm{rann}(a^n)$ 一定包含 R 的某个非零理想.

Proof. 考虑集合 $\mathcal{S} = \{l \in \mathbb{Z}_{\geq 1} | 存在某个l次首一多重线性多项式使得对某个正整数k, a^kR满足该多项式\}$, 因为 R 是 PI 环, 所以 $\mathcal{S}$ 非空, 由良序原理, 存在 $\mathcal{S}$ 中最小元 l, 设它对应 a^kR 满足的首一多重线性多项式 $g(x_1, x_2, ..., x_l) \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_l\rangle$, 那么一方面, 由 $a^nR \subseteq a^kR, \forall n \geq k$ 知对每个正整数 $n \geq k$, a^nR 也满足 g; 另一方面, 根据 l 的选取, 任何 $a^nR(n \geq k)$ 不会满足次数严格低于 l 的首一多重线性多项式. 不妨设 g 表达式中项 $x_1 \cdots x_l$ 的系数是 1. 现在我们将 g 如下拆分：$g(x_1, ..., x_l) = x_1g_1(x_2, ..., x_l) + g_2(x_1, ..., x_l)$, 其中 g_1 是以 $x_2, ..., x_l$ 为变量的首一多重线性多项式, g_2 是每项不以变量 x_1 为首的多重线性多项式 (在证明 Köthe 猜想在 PI 环层面成立时, 我们也用过这个技术). 那么对任何 $r_1, ..., r_l \in R$, 有

$$0 = g(a^nr_1, a^{2n}r_2, ..., a^{2n}r_l) = (a^nr_1)g_1(a^{2n}r_2, ..., a^{2n}r_l) + g_2(a^nr_1, ..., a^{2n}r_l), \forall n \geq k.$$

根据前面的讨论, g_1 作为次数严格低于 l 的首一多重线性多项式不能零化 $a^{2n}R$, 故可选取适当 $r_2, ..., r_l \in R$ 使 $g_1(a^{2n}r_2, ..., a^{2n}r_l) \neq 0$. 记 $s = g_1(a^{2n}r_2, ..., a^{2n}r_l) \neq 0, a^{2n}t = g_2(a^nr_1, ..., a^{2n}r_l) \in R$(这里 s 依赖于 n), 则

$$a^nr_1s + a^{2n}t = 0 \Rightarrow a^n(r_1s + a^nt) = 0, \forall r_1 \in R, n \geq k.$$

因此对充分大的正整数 n, $Rs \subseteq a^nR + \mathrm{rann}(a^n)$, 因为包含关系右边也是右理想, 所以 $RsR \subseteq a^nR + \mathrm{rann}(a^n)$. 即对充分大的正整数 n, $a^nR + \mathrm{rann}(a^n)$ 会包含一个非零理想 RsR. □

Corollary 3.2. 设含幺环 R 是 PI 环, $a \in R$ 满足 $\mathrm{rann}(a) = 0$, 那么 aR 包含某个非零理想.

Proof. 因为 a 的右零化子是平凡的, 所以对任何首一多重线性的多项式 $g \in \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, ..., x_l\rangle$, aR 满足 g 当且仅当对所有的 $k \geq 1$ 有 a^kR 满足 g. 这意味着在前一命题证明过程中所构造的集合 $\mathcal{S}$ 的最小元 l 所对应的首一多重线性多项式 g 可以零化每个 $a^kR(k \geq 1)$. 所以在前一命题证明过程中可取 $n = k = 1$ 来得到 aR 会包含一个非零理想. □

现在我们已经做好了证明“PI 环是右全有界环”的所有准备.

Theorem 3.3. 设 R 是 PI 环, 那么对每个素理想 P, 有 R/P 是右有界环, 即 R/P 任何本质右理想都包含一个非零理想. 从而知 PI 环是右全有界环. 特别地, 右 Noether PI 环是右 FBN 环.

Proof. 只要证素 PI 环是右有界环即可. Posner 定理告诉我们素 PI 环是右 Goldie 素环, 从而 Goldie 定理保证了素 PI 环的任何本质右理想会包含一个正则元, 于是 [推论3.2] 表明该正则元生成的右理想必定包含某个非零理想. 故素 PI 环的任何本质右理想会包含某个非零理想. □

Example 3.4. 设含幺环 R 满足 $Z(R)$ 是 Noether 环且 R 是有限生成 $Z(R)$-模, 那么由 [命题2.24] 立即得到 R 是双边 Noether 的 PI 环. 因此中心 Noether 且在中心上有限的环都是右 FBN 的. 一般地, 若含幺环 R 是 $Z(R)$ 上的有限生成模, 则每个有限生成左 R-模 M 会存在一个生成元集 $\{x_1, ..., x_n\}$ 使得

$$\mathrm{Ann}_RM = \mathrm{ann}_R(x_1) \cap \mathrm{ann}_R(x_2) \cap \cdots \cap \mathrm{ann}_R(x_n).$$

上式等号左边明显是右边的子集, 现在我们选取一个使得等号成立的有限生成元集 $\{x_1, ..., x_n\}$. 因为 M 这时也是有限生成 $Z(R)$-模, 取 $\{x_1, ..., x_n\}$ 是 M 作为 $Z(R)$-模的一个生成元集, 容易验证这时每个 $a \in \mathrm{ann}_R(x_1) \cap \mathrm{ann}_R(x_2) \cap \cdots \cap \mathrm{ann}_R(x_n)$ 一定零化 M 中所有元素.

Remark 3.5. 特别地, 域上的仿射模有限代数都是右 FBN 环.

虽然非交换代数中的 Jacobson 猜想目前仍是公开问题, 我们还是可以问对 Noether 的 PI 环是否满足 Jacobson 猜想, A. V. Jategaonkar 于 1974 年证明了更一般的结果：

Theorem 3.6 ([25])**.** 设 R 是 FBN 环 (例如 Noether 的 PI 环), 那么 $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Jac}R)^n = 0$.

3.2 仿射 PI 代数

称含幺环 R 有**根性质**, 如果对任何 R 的真理想 I, R/I 的 Jacobson 根是诣零理想. 称域 $\Bbbk$ 上代数 A 有**自同态性质**, 如果对每个不可约左 A-模 M, M 的自同态环在 $\Bbbk$ 上代数. 称域 $\Bbbk$ 上代数 A 满足**零点定理**, 如果 A 具有根性质和自同态性质. 易见域上仿射交换代数总满足零点定理. 回忆含幺环 R 称为 **Jacobson 环**, 如果对任何 R 的素理想 P, P 均可表示为一些本原理想之交. 因此, 含幺交换环是 Jacobson 环当且仅当任何素理想可表示为一些极大理想之交. 同时, 不难看出含幺环是 Jacobson 环的充要条件是对任何素理想 P 有 R/P 是半本原环. 一个基本的观察是：

Proposition 3.7 ([2])**.** 设含幺环 R 满足对每个素理想 P, R/P 是右 Goldie 环 (例如 R 是右 Noether 环或 PI 环). 那么 R 是 Jacobson 环的充要条件是对 R 的任何真理想 I, $\mathrm{Jac}(R/I)$ 是诣零理想.

Proof. 必要性：如果 R 是 Jacobson 环, 那么对 R 的任何真理想 I, 商环 R/I 也是 Jacobson 环, 因此 $\mathrm{Jac}(R/I)$ 诣零. 充分性：对任何素理想 P, R/P 是素右 Goldie 环, 故没有非零诣零理想, 这迫使 $\mathrm{Jac}(R/P) = 0$. □

Remark 3.8. 一般地, 对交换 Noether 代数 R, 即便 $\mathrm{Jac}R$ 是诣零理想也未必能保证 R 关于素理想 P 的商环 R/P 满足 $\mathrm{Jac}(R/P)$ 诣零. 例如取 S 是域上形式幂级数环 $\Bbbk[[x]]$, 它是交换 Noether 局部整环, 唯一的极大理想 $\mathfrak{m} = (x)$ 每个非零元都不是幂零元. 根据 Amitsur 定理, 没有非零诣零理想的含幺环上的一元多项式环半本原, 所以 $R = S[x]$ 是交换 Noether 半本原环. 故 $\mathrm{Jac}R = 0$, 但是 $S \cong R/(x)$ 有不诣零的 Jacobson 根.

本节的主要目标是证明域上的仿射 PI 代数满足零点定理且是 Jacobson 环. 为此, 我们需要：

Lemma 3.9. 设 R 是含幺环, $a \in R$, 那么 a 是幂零元当且仅当 $(1 - ax)R[x] = R[x]$.

Proof. 如果 a 是幂零元, 设 $a^{n+1} = 0$, 进而 $(1-ax)(1+ax+a^2x^2+\cdots+a^nx^n) = 1$, 必要性得证. 假设有多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 使得 $(1-ax)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n) = 1$, 直接计算得到 $a_0 = 1, a_1 = a, ..., a_n = a^n, aa_n = 0$, 所以 $a^{n+1} = 0$. 类似地容易验证 a 是幂零元当且仅当 $R[x](1 - ax) = R[x]$. □

Proposition 3.10 ([2])**.** 设 $\Bbbk$-代数 A 满足任何不可约左 $A[x]$-模自同态环在 $\Bbbk$ 上代数, 则 A 满足零点定理.

Proof. 此时 $A \cong A[x]/(x)$ 以及 A 的任何商代数 A/I 也满足任何不可约模在 $\Bbbk$ 上代数. 用 A/I 替换 A 知只需验证 $\mathrm{Jac}A$ 是诣零理想. 任取 $a \in \mathrm{Jac}A$, 假设 a 不是幂零元, 那么 $A[x](1 - ax) \neq A[x]$, 取 $A[x]$ 的一个包含 $1 - ax$ 的极大左理想 M, 那么 $A[x]/M$ 作为不可约左 $A[x]$-模在 $\Bbbk$ 上代数. 考察 $x \in A[x]$ 决定的左乘

变换 $\theta = x_l \in \mathrm{End}_{A[x]}(A[x]/M)$, 那么 $\theta \neq 0$, 所以由 Schur 引理知 θ^{-1} 存在. 于是 θ^{-1} 满足 $\Bbbk$ 上某个首一多项式, 故存在 $g(x) \in \Bbbk[x]$ 使得 $\theta = g(\theta^{-1})$, 进而由 $\theta^{-1}(1+M) = a + M$ 可知 $g(a) + M = x + M$, 所以 $(1 - g(a)a)x + M = 0$, 而 $1 - g(a)x$ 在 R 中可逆, 矛盾. $\square$

Corollary 3.11 ([2])**.** 设 $\Bbbk$-代数 A 是仿射 PI 代数, 那么：
(1) 任何不可约左 A-模是有限维模;
(2) A 满足零点定理, 进而也是 Jacobson 环;
(3) 若进一步 A 是 Artin 的, 则 A 是有限维代数.

Proof. (1) 任取不可约左 A-模 M, 那么 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 是本原 PI 代数, 用 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 替换 A 可不妨设 A 是本原的. 由 Kaplansky 定理知本原 PI 代数是其中心 $Z(A)$ 上的有限维中心单代数. 对代数扩链 $\Bbbk \subseteq Z(A) \subseteq A$ 应用 Artin-Tate 引理可得 $Z(A)$ 是 $\Bbbk$ 上仿射代数. 注意到此时 $Z(A)$ 是域, 所以 Zariski 引理保证了 $Z(A)$ 是有限维代数, 从而 A 是有限维代数 (注意这是在 A 本原的假定下), 从而 M 是有限维模.

(2) 这时 $A[x]$ 作为 A 的中心扩张仍是仿射 PI 代数, 进而 [命题3.10] 保证了 A 满足零点定理. 特别地, A 满足根性质, 因为 A 是 PI 代数, 所以由 [命题3.7] 得到 A 是 Jacobson 环.

(3) 此时 ${}_AA$ 作为既 Noether 又 Artin 的左 A-模存在合成列, 通过 (1) 知道 ${}_AA$ 的每个合成因子是有限维模, 从而 A 也是有限维的. $\square$

Remark 3.12. 交换代数中的经典结论是域上交换代数是 Artin 的当且仅当是有限维代数. 该推论说对仿射 PI 代数, 它是 Artin 的当且仅当它是有限维代数. 如果 $\Bbbk$ 是代数闭域且 A 是素仿射 PI 代数, 那么根据上述推论第一个结论的证明过程, 任何不可约左 A-模 M 的线性维数不超过 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 的维数. 本原 PI 代数 $A/\mathrm{Ann}_A M$ 的 PI 次数不超过 A 的 PI 次数, 所以 $\overline{A} = A/\mathrm{Ann}_A M$ 作为其中心 $\overline{Z}$ 上的中心单代数维数不超过 $(\text{PI-deg}A)^2$. 因为 $\overline{A}$ 也是仿射 $\Bbbk$-代数, 所以利用 Artin-Tate 引理得到 $\overline{Z}$ 是 $\Bbbk$ 上仿射代数. 而 $\overline{Z}$ 是域, 所以 Zariski 引理保证了 $\overline{Z} \supseteq \Bbbk$ 是有限扩张, 结合 $\Bbbk$ 是代数闭域迫使 $\overline{Z} = \Bbbk$. 进而知

$$\dim_{\Bbbk} M \leq \dim_{\Bbbk} \overline{A} = \dim_{\overline{Z}} \overline{A} \leq (\text{PI-deg}A)^2.$$

因此代数闭域上素仿射 PI 代数 A 上的不可约模维数都被 $(\text{PI-deg}A)^2$ 控制. 我们可以把不可约表示维数上界作进一步改进. 因为 $\overline{A}$ 是 $\Bbbk$ 上有限维代数, 故由 Artin 单环结构定理以及 $\Bbbk$ 是代数闭域可知存在正整数 d 使得 $\overline{A} \cong \mathrm{M}_d(\Bbbk)$. 因此 $d \leq \text{PI-deg}A$, 从而 $\dim_{\Bbbk} M \leq \text{PI-deg}A$. 所以代数闭域上素仿射 PI 代数的任何不可约表示维数不超过该代数的 PI 次数. 应当指出, 代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射 PI 代数的不可约表示维数具有公共上界并不需要 A 是素环的条件. 事实上, 根据上述证明过程 (并沿用前面的记号), 如果 A 是最小次数为 ℓ 的仿射 PI 代数, 那么由 Kaplansky 定理知对任何不可约表示 M, $\dim_{\Bbbk} M \leq \dim_{\overline{Z}} \overline{A} \leq (\ell/2)^2$. 即 A 的不可约表示的维数有公共上界. 与素的情形一样, 该上界可以加强. 这时存在正整数 t 使得 $\Bbbk$-代数同构 $\overline{A} \cong \mathrm{M}_t(\Bbbk)$. 于是将 M 视作 $\overline{A}$ 在 $\Bbbk$ 上的不可约表示后得到 $\dim_{\Bbbk} M = t \leq \ell/2$. 因此 $\ell/2$ 是 A 的所有不可约表示的一个维数公共上界.

Remark 3.13. 虽然上述推论让我们看到域 $\Bbbk$ 上仿射 PI 代数的不可约表示总是有限维的, 并且前面提到代数闭域上的仿射 PI 代数的不可约表示维数有公共的上界, 但对一般域上仿射 PI 代数, 所有的不可约表示未必有公共的上界 (即使额外要求是素代数). 例如考虑 $\mathbb{Q}$-仿射整区 $\mathbb{Q}[x]$, 由 Eisenstein 判别法易知 $\mathbb{Q}[x]$ 中存在任意正整数次数的不可约多项式 (例如 $x^n - p$, 这里 p 是素数), 对任给正整数 n, 设 $p_n(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中 n 次不可约多项式. 由 $\mathbb{Q}[x]$ 是 P.I.D., 所以 $(p_n(x))$ 是极大理想, 进而得到 $\mathbb{Q}[x]$ 上线性维数为 n 的不可约表示 $\mathbb{Q}[x]/(p_n(x))$. 该例表明域上仿射素 PI 代数的不可约表示可能没有公共的上界.

Remark 3.14. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, 通常称代数同态 $\chi: A \to \Bbbk$ 为 A 上**可乘线性泛函**, 记 A 上可乘线性泛函全体为 $\mathcal{M}(A)$. 根据 Zariski 引理, 如果 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上交换仿射代数, 则 $\theta: \mathcal{M}(A) \to \mathrm{maxSpec}A, \chi \mapsto \mathrm{Ker}\chi$ 是满射. 下面说明 θ 也是单射. 如果 $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{M}(A)$ 满足 $\mathrm{Ker}\chi_1 = \mathrm{Ker}\chi_2$, 记 $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}\chi_1$ 为公共的极大理想, 那么对每个 $a \in A$, 存在唯一的 $\alpha \in \Bbbk$ 使得 $a - \alpha 1 \in \mathfrak{m}$, 进而知 $\chi_1(a) = \chi_2(a) = \alpha$. 所以 θ 是双射, 它给出了 A 上可乘线性泛函全体与极大谱间的双射. 对代数闭域 $\Bbbk$ 上交换仿射代数 A, 由于 A 是 Jacobson 环, 这时 $A/\mathrm{Jac}A = A/N(A)$ 是约化环, 于是它在同构意义下决定唯一的 $\Bbbk$-仿射簇 X, 满足 $X \cong \mathrm{maxSpec}A$, 称仿射簇 X 为仿射交换代数 A 的**相伴代数簇**. 根据前面的讨论, X 也和 A 上可乘线性泛函全体一一对应.

Corollary 3.15. 域上仿射 PI 代数的任何素理想是一些极大理想之交.

Proof. 根据 Kaplansky 定理, PI 环的本原理想就是极大理想, 现在应用 [推论3.11]. □

Proposition 3.16. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, Z 是 A 的中心子代数且 ${}_ZA$ 模有限. 那么 Z 是仿射 $\Bbbk$-代数当且仅当 A 是仿射 $\Bbbk$-代数.

Proof. 充分性来自 Artin-Tate 引理, 必要性是明显的. □

3.3 Azumaya 代数

本节主要介绍可分代数以及 Azumaya 代数的基本概念与相关性质. 域上的可分代数是域论中有限可分扩张的“结合代数推广”(见 [引理3.17] 与 [定义3.18]). 我们将讨论交换环上的可分代数并说明域上的可分代数的经典定义与交换环场景的定义是等价的 ([推论3.34]), 由此说明域上的代数是 (有限维) 中心单代数当且仅当它是以基域为中心的可分代数, 即域上的“中心可分代数”(见 [命题3.20] 以及 [命题3.33]). Azumaya 代数是交换环上的中心可分代数 (见 [定义3.37]), 即域上的代数是有限维中心单代数当且仅当它是 Azumaya 代数.

Lemma 3.17. 设 $K \subseteq L$ 是域的有限扩张, 则 $K \subseteq L$ 是可分扩张的充要条件是对任何域扩张 $F \supseteq K$ 都有 $L \otimes_K F$ 是 Artin 半单环.

Proof. 充分性：假设 $K \subseteq L$ 不是可分扩张, 那么存在 $\alpha \in L$ 使得 α 在 K 上的最小多项式 $m(x)$ 有重根. 考虑 K 的代数闭包 $\overline{K}$, 那么 $m(x)$ 在 $\overline{K}$ 上可表示为 $m(x) = (x-\beta)^2 g(x)$, 这里 $\beta \in \overline{K}, g(x) \in \overline{K}[x]$. 现考虑 $L \otimes_K \overline{K}$ 的 K-子代数 $K(\alpha) \otimes_K \overline{K}$, 由于 K-代数同构 $K(\alpha) \otimes_K \overline{K} \cong K[x]/(m(x)) \otimes_K \overline{K} \cong \overline{K}[x]/(m(x))$. 注意到 $\overline{K}[x]/(m(x))$ 有非零幂零元 $\overline{x-\beta}$, 所以 $L \otimes_K \overline{K}$ 不是 Artin 半单的. 必要性：设 $K \subseteq L$ 是有限可分扩张, 那么本原元定理表明存在 $\alpha \in L$ 使得 $L = K(\alpha)$. 设 α 在 K 上最小多项式是 $m(x)$, 则 $m(x)$ 无重根, 所以对 K 的任何域扩张 $F[x]$, $m(x)$ 在 $F[x]$ 中可分解为一些两两不相伴的不可约多项式的乘积, 设两两不相伴的首一不可约多项式 $p_1(x), p_2(x), ..., p_s(x) \in F[x]$ 满足 $m(x) = p_1(x) \cdots p_s(x)$. 于是由 $L \otimes_K F = K(\alpha) \otimes_K F$ 以及 $K(\alpha) \cong K[x]/(m(x))$ 可知有 K-代数同构 $L \otimes_K F \cong F[x]/(m(x))$. 应用中国剩余定理可知

$$L \otimes_K F \cong F[x]/(p_1(x)) \times F[x]/(p_2(x)) \times \cdots \times F[x]/(p_s(x)),$$

即 $L \otimes_K F$ 同构于有限多个域的直积, 这说明 $L \otimes_K F$ 是 Artin 半单环. □

从 [引理3.17] 可自然地导出域上可分代数的概念, 它是可分扩张的自然推广.

Definition 3.18 ([4])**.** 设 A 是域 K 上有限维代数, 如果 A 满足对任何域扩张 $L \supseteq K$ 有 L-代数 $A \otimes_K L$ 是 Artin 半单代数, 则称 A 是**可分代数**.

Remark 3.19. 之后会介绍交换环上的可分代数并证明域这里的定义等价 (见 [推论3.18]).

根据 [引理2.77], 域上任何有限维中心单代数都是可分代数. 反之, 如果域上 Artin 半单代数的中心就是基域, 那么将其分解为有限多个 Artin 单代数的直和观察中心便知该半单代数必定是单代数. 所以域上有限维可分代数如果中心就是基域, 那么该代数是中心单代数. 总结一下, 我们得到

Proposition 3.20 ([4])**.** 设 A 是有限维代数, 那么 A 是中心单代数的充要条件是 A 是中心可分代数.

Proposition 3.21 ([20])**.** 设 F 是域, A 是可分 F-代数, 则 A^e 是 Artin 半单代数.

Proof. 设 E 是 F 的代数闭包. 因为 A 是有限维 F-代数, 故 $A \otimes_F E$ 是域 E 上有限维代数. 因为 $A \otimes_F E$ 是代数闭域上 Artin 半单代数, 所以存在矩阵环 $M_{n_1}(E), M_{n_2}(E), ..., M_{n_s}(E)$ 使得有 E-代数同构 $A \otimes_F E \cong M_{n_1}(E) \oplus M_{n_2}(E) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(E)$. 于是有 E-代数同构 $A^{op} \otimes_F E = (A \otimes_F E)^{op} \cong (M_{n_1}(E))^{op} \oplus (M_{n_2}(E))^{op} \oplus \cdots \oplus (M_{n_s}(E))^{op} \cong M_{n_1}(E) \oplus M_{n_2}(E) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(E)$. 于是有 E-代数同构 $A^e \otimes_F E = (A \otimes_F A^{op}) \otimes_F E \cong (A \otimes_F A^{op}) \otimes_F (E \otimes_E E) \cong A \otimes_F (E \otimes_E E) \otimes_F A^{op} \cong (A \otimes_F E) \otimes_E (E \otimes_F A^{op}) \cong (M_{n_1}(E) \oplus M_{n_2}(E) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(E)) \otimes_E (M_{n_1}(E) \oplus M_{n_2}(E) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(E)) \cong \oplus_{i=1}^{s} \oplus_{j=1}^{s} M_{n_i n_j}(E)$, 所以 $A^e \otimes_F E$ 是 Artin 半单代数. 命 $\varphi : A^e \to A^e \otimes_F E, x \mapsto x \otimes 1_F$, 易见这是单 $F-$ 代数同态. 由于 A^e 是有限维 $F-$ 代数, 故只要再说明 A^e 的半单性. 假设 A^e 不是 Artin 半单代数, 则存在非零幂零理想, 进而由代数嵌入 φ 得到 $A^e \otimes_F E$ 也有非零幂零理想. 这与 $A^e \otimes_F E$ 是 Artin 半单代数矛盾. $\square$

特别地, [命题3.21] 告诉我们有限维可分代数在包络代数上是 (有限生成) 投射的. 这个观察使人们将可分代数的概念进一步放宽: 设 A 是含幺交换环 K 上的代数, 如果 A 作为左 A^e-模是投射的, 那么称 A 是**可分代数**. 之后介绍的 Azumaya 代数 ([定义3.37]) 就是特殊的可分代数. 以下固定 K 是含幺交换环.

Proposition 3.22 ([4])**.** 设 A 是 K-代数, $\mu : A \otimes_K A \to A, a \otimes b \mapsto ab$ 是乘法映射. 那么以下等价:
(1) A 是可分 K-代数.
(2) 左 A^e-模正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\mu \longrightarrow A \otimes_K A^{op} \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$ 可裂.
(3) 存在 $\xi \in A^e$ 满足 $\mu(\xi) = 1$ 且 $(\mathrm{Ker}\mu)\xi = 0$.

Proof. (1)⇒(2): 由 A 是投射左 A^e-模便知. (2)⇒(1): 这时 A 作为左 A^e-模是 A^e 的直和因子, 所以 A 是投射左 A^e-模. 下面说明 (2) 与 (3) 等价. (2)⇒(3): 这时存在左 A^e-模同态 $s : A \to A^e$ 使得 $\mu s = \mathrm{id}_A$. 命 $\xi = s(1)$, 那么 $\mu(\xi) = 1$ 且对任何 A^e 中形如 $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ 的元素, 有 $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ 数乘 $1 \in A$ 得到零. 因此

$$(a \otimes 1 - 1 \otimes a)\xi = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)s(1) = s((a \otimes 1 - 1 \otimes a) \cdot 1) = 0.$$

现在注意到 $\mathrm{Ker}\mu$ 作为 A^e 的左理想可由 $\{a \otimes 1 - 1 \otimes a | a \in A\}$ 生成, 故 $(\mathrm{Ker}\mu)\xi = 0$.

(3)⇒(2): 定义 $s : A \to A^e, a \mapsto (a \otimes 1)\xi$. 由 $(\mathrm{Ker}\mu)\xi = 0$ 知对任何 $b \otimes c \in A^e$ 有

$$s((b \otimes c)a) = s(bac) = (bac \otimes 1)\xi = (ba \otimes c)\xi = (b \otimes c)s(a), \forall a \in A.$$

上述观察表明 s 是左 A^e-模同态, 再由 $\mu(\xi) = 1$ 得到 $\mu s = \mathrm{id}_A$. $\square$

Remark 3.23. 我们指出满足 $\mu(\xi)=1$ 且 $(\mathrm{Ker}\mu)\xi=0$ 的元素 $\xi\in A^e$ 一定是 A^e 中的幂等元. 只需注意到

$$\xi^2-\xi=(\xi-1\otimes 1)\xi\in(\mathrm{Ker}\mu)\xi=0.$$

称满足上述条件的 ξ 为 A 的**可分幂等元** (注意 $\xi\in A^e$). 可分代数的可分幂等元一般不唯一. 例如考虑矩阵代数 $\mathrm{M}_n(K)$, 并记 E_{ij} 是 (i,j) 元为 1 其余分量元素为零的基础矩阵, 那么对任何正整数 $1\le j\le n$, 可直接验证

$$\sum_{i=1}^{n}E_{ij}\otimes E_{ji}$$

都是 $\mathrm{M}_n(K)$ 的可分幂等元. 特别地, $\mathrm{M}_n(K)$ 是可分 K-代数.

Example 3.24. 有理数域 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-代数是可分的, 但 $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ 不是有限生成的也不是投射的.

Proof. 因为任何 $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 中元素可表示为 $q\otimes 1(q\in\mathbb{Q})$ 的形式, 故容易验证乘法映射 $\mu:\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 是加群同构. 特别地, $\mathrm{Ker}\mu=0$. 由此易见 $\xi=1\otimes 1$ 就是 $\mathbb{Q}$ 的可分幂等元. □

K-代数 A 系数在 A-A 双模 M 的 0 次 Hochschild 上同调 $H^0(A,M)=\mathrm{Ext}^0_{A^e}(A,M)=\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$, 后者就是双模 M 的中心, 以下记作 $\mathcal{Z}_A(M)$. 那么取双模中心诱导函子 $\mathcal{Z}_A:A^e\textbf{-Mod}\to K\textbf{-Mod}$. 则

Lemma 3.25 ([26])**.** 设 A 是 K-代数. 对 A-A 双模 M, 定义 $\eta_M:\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)\to\mathcal{Z}_A(M),\varphi\mapsto\varphi(1)$. 那么

$$\eta:\mathrm{ob}A^e\textbf{-Mod}\to\bigcup_{M\in\mathrm{ob}A^e\textbf{-Mod}}\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M),\mathcal{Z}_A(M)),M\mapsto\eta_M$$

是 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,-)$ 到 $\mathcal{Z}_A(-)$ 的自然同构. 特别地, $\mathcal{Z}_A(-)$ 是左正合函子.

Example 3.26. 设 A 是 K-代数, 则有 K-模同构 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A)\cong\mathcal{Z}_A(A)$. 如果进一步 A 是可分 K-代数, 那么 [命题3.22] 给出可裂左 A^e-模短正合列 $0\longrightarrow\mathrm{Ker}\mu\longrightarrow A^e\xrightarrow{\mu}A\longrightarrow 0$, 于是由 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,A^e)$ 是加性函子可得可裂短正合列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^e)\xrightarrow{\mu^*}\mathrm{Hom}_{A^e}(A^e,A^e)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathrm{Ker}\mu,A^e)\longrightarrow 0,$$

所以当 A 是可分代数时, 进一步有 K-模同构 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^e)\cong\mathcal{Z}_A(A)\cong\{\zeta\in A^e|(\mathrm{Ker}\mu)\zeta=0\}$(易见这是 A^e 的右理想). 具体地, 这里的 K-模同构可由 $\varphi:\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^e)\to\{\zeta\in A^e|(\mathrm{Ker}\mu)\zeta=0\},f\mapsto f(1)$ 给出.

[引理3.25] 使我们能够用函子性质给出可分性的刻画.

Proposition 3.27 ([26])**.** 设 A 是 K-代数, 那么 A 是可分 K-代数的充要条件是 $\mathcal{Z}_A(-)$ 是右正合函子.

Corollary 3.28 ([26])**.** 设 A_1,A_2,Z_1,Z_2 都是 K-代数, Z_1,Z_2 交换. 则当 A_1 是可分 Z_1-代数, A_2 是可分 Z_2-代数且 $Z_1\otimes_K Z_2,A_1\otimes_K A_2\neq 0$ 时, $A_1\otimes_K A_2$ 赋予下述 $Z_1\otimes_K Z_2$-模结构后成为的代数是可分 $(Z_1\otimes_K Z_2)$-代数: $(z_1\otimes z_2)(a_1\otimes a_2)=z_1a_1\otimes z_2a_2,\forall z_1\in Z_1,z_2\in Z_2,a_1\in A_1,a_2\in A_2$.

Proof. 根据 [命题3.27], 只需验证 $(Z_1\otimes_K Z_2)$-代数 $A_1\otimes_K A_2$ 决定的双模中心函子 $\mathcal{Z}_{A_1\otimes_K A_2}(-)$ 右正合 (所以下面的包络代数 $(A_1\otimes_K A_2)^e$ 是在 $Z_1\otimes_K Z_2$ 上作张量积的). 结合其左正合性, 我们只需验证双模中心函子 $\mathcal{Z}_{A_1\otimes_K A_2}(-)$ 保持满同态. 任给满左 $(A_1\otimes_K A_2)^e$-模同态 $f:M\to N$. 通过标准映射 $\ell_1:A_1\to A_1\otimes_K A_2,a_1\mapsto$

$a_1\otimes 1$(易见它是左 Z_1-模同态) 可将 M,N 视作 A_1-A_1 双模并使得 $f:M\to N$ 成为左 $(A_1)^e$-模同态 (这里 $A_1^e=A_1\otimes_{Z_1}A_1^{op}$), 于是由 A_1 是可分 Z_1 代数可知 $\mathcal{Z}_{A_1}(f):\mathcal{Z}_{A_1}(M)\to\mathcal{Z}_{A_1}(N)$ 是满射. 再通过标准映射 $\ell_2:A_2\to A_1\otimes_K A_2, a_2\mapsto 1\otimes a_2$ 将 M,N 视作 A_2-A_2 双模. 那么由 $\mathrm{Im}\ell_1$ 与 $\mathrm{Im}\ell_2$ 中元素可交换得到 $\mathcal{Z}_{A_1}(M)$ 与 $\mathcal{Z}_{A_1}(N)$ 都是 A_2-A_2 双模. 进而由 A_2 是 Z_2-可分代数知 $\mathcal{Z}_{A_2}\mathcal{Z}_{A_1}(f):\mathcal{Z}_{A_2}\mathcal{Z}_{A_1}(M)\to\mathcal{Z}_{A_2}\mathcal{Z}_{A_1}(N)$ 也是满射. 注意到 $\mathcal{Z}_{A_1\otimes_K A_2}=\mathcal{Z}_{A_2}(-)\mathcal{Z}_{A_1}(-)$, 所以 $\mathcal{Z}_{A_1\otimes_K A_2}(f)$ 是满射. □

Remark 3.29. 一般 K-代数 A,B 的张量积代数 $A\otimes_K B$ 可能是零环, 例如 $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. 但是 $A\otimes_K A$ 一定是非零的, 因为乘法映射 $\mu:A\otimes_K A\to A$ 是满射.

通过上面的推论我们立即看到可分性不随“系数环的扩张”改变.

Corollary 3.30 ([26])**.** 设 A,S 都是 K-代数, 满足 A 是可分 K-代数且 S 交换并设 $A\otimes_K S\neq 0$(根据 [例3.24], $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ 是可分代数, 但 $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=0$). 那么 $A\otimes_K S$ 是可分 S-代数.

Proof. 在 [推论3.28] 中取 $A_1=A,A_2=S,Z_1=K,Z_2=S$ 便得结论. □

Proposition 3.31 ([26])**.** 设 K-代数 A 是可分代数, I 是 A 的真理想. 那么 A/I 也是可分 K-代数并且中心

$$Z(A/I)=(Z(A)+I)/I.$$

Proof. 任何 (A/I)-(A/I) 双模 M 都可自然视作 A-A 双模并且 $\mathcal{Z}_A(M)=\mathcal{Z}_{A/I}(M)$. 现在由 A 是可分 K-代数知 $\mathcal{Z}_A(-)$ 是正合函子, 所以 $\mathcal{Z}_{A/I}(-)$ 也是正合函子. 现在应用 [命题3.27] 便知 A/I 是可分 K-代数. 考虑标准投射 $\pi:A\to A/I$, 作用函子 $\mathcal{Z}_A(-)$ 得到满同态 $\mathcal{Z}_A(\pi):\mathcal{Z}_A(A)\to\mathcal{Z}_A(A/I)$. 注意到 $\mathcal{Z}_A(A/I)=Z(A/I)$, 所以 $Z(A/I)$ 就是 $Z(A)$ 在 π 下的像集, 得证. □

Remark 3.32. 同样地, 如果 K-代数 A 是可分代数, 那么对 K 的任何真理想 $\mathfrak{a}$, $A/\mathfrak{a}A$ 是可分 $K/\mathfrak{a}$-代数.

在 [例3.24] 中我们看到存在在系数环上非投射非有限生成的可分代数. 我们指出

Proposition 3.33 ([26])**.** 设 A 是可分 K-代数且 ${}_KA$ 是投射模. 那么 A 是有限生成 K-模.

Proof. 设 ${}_KA$ 有对偶基 $\{x_i|i\in I\}\subseteq A,\{x_i^*|i\in A\}\subseteq A^*$. 对每个 $i\in I$, 定义 A^e 到 A 的左 A-模同态

$$1\otimes x_i^*:A^e\to A, a\otimes b\mapsto ax_i^*(b).$$

则对任何 $a\otimes b\in A^e$ 有 $a\otimes b=\sum\limits_{i\in I}ax_i^*(b)\otimes x_i=\sum\limits_{i\in I}[(1\otimes x_i^*)(a\otimes b)](1\otimes x_i)$. 故 A^e 作为左 A-模有对偶基

$$\{1\otimes x_i|i\in I\}\subseteq A^e,\{1\otimes x_i^*|i\in I\}\subseteq \mathrm{Hom}_A(A^e,A).$$

设 $\xi=\sum\limits_{j=1}^n e_j\otimes e_j'$ 是 A 的可分幂等元. 那么对任何 $a\in A$, 考虑 $(a\otimes 1)\xi$ 关于上述对偶基的表示

$$(a\otimes 1)\xi=\sum_{i\in I}[(1\otimes x_i^*)((a\otimes 1)\xi)](1\otimes x_i),$$

对上述等式两边作用乘法 μ 并利用可分幂等元的性质 (回忆 [命题3.22]) 便知

$$a=(a\otimes 1)\mu(\xi)=\sum_{i\in I}[(1\otimes x_i^*)((a\otimes 1)\xi)]x_i=\sum_{i\in I}(a\otimes 1)[(1\otimes x_i^*)(\xi)]x_i.$$

根据对偶基的性质, 仅有有限多个指标 $i \in I$ 使得 $(1\otimes x_i^*)((a\otimes 1)\xi) \neq 0$. 再注意到

$$(a\otimes 1)[(1\otimes x_i^*)(\xi)]x_i = [(1\otimes x_i^*)((a\otimes 1)\xi)]x_i = [(1\otimes x_i^*)((1\otimes a)\xi)]x_i = (1\otimes x_i^*)(\sum_{j=1}^{n} e_j\otimes e_j'a)x_i = \sum_{j=1}^{n} e_j x_i^*(e_j'a),$$

所以存在有限多个 $e_j x_i$ 可 K-线性生成 A. 这说明 ${}_K A$ 有限生成. $\square$

现在我们可以得到 [定义3.18] 给出的 (经典) 可分代数与交换环上可分代数的等价性.

Corollary 3.34 ([26])**.** 设 A 是域 K 上代数, 那么 A 是投射左 A^e-模当且仅当 A 是域 K 上有限维代数并且对任何域扩张 $L\supseteq K$ 有 $A\otimes_K L$ 是 Artin 半单代数.

Proof. 充分性来自 [命题3.21]. 根据 [命题3.33], 要证明必要性只需再验证对任何域扩张 $L\supseteq K$ 有 $A\otimes_K L$ 是 Artin 半单代数. 前面已经指出交换环上的矩阵代数总是其包络代数上的投射模, 特别地, L 是 L^e-投射模, 所以由 [推论3.28] 知 $A\otimes_K L$ 是交换环 L 上的可分代数 (其为自身的包络代数上的投射模), 这一观察说明我们要完成推论的证明只需验证 A 是投射左 A^e-模蕴含 A 是 Artin 半单环即可. 而这由下面的 [引理3.35] 便知. $\square$

Lemma 3.35. 设 $\Bbbk$ 是域, R 是 $\Bbbk$-代数, 则 $\mathrm{l.gl.dim} R \leq \mathrm{p.dim}_{R^e} R$.

Proof. 不妨设 $\mathrm{p.dim}_{R^e} R$ 有限. 如果 R 作为左 R^e-模的投射维数是 n, 可设左 R^e-模投射分解

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

该复形每项作为右 R-模投射, 所以作为右 R-模复形可裂正合, 进而对任何左 R-模 M 有正合列

$$0 \longrightarrow P_n\otimes_R M \xrightarrow{d_n\otimes 1} P_{n-1}\otimes_R M \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1\otimes_R M \xrightarrow{d_1\otimes 1} P_0\otimes_R M \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} R\otimes_R M \longrightarrow 0,$$

注意到双模同构 $(R\otimes_{\Bbbk} R^{op})\otimes_R M \to R\otimes_{\Bbbk} M, a\otimes b\otimes x \mapsto a\otimes bx$, 并且 M 作为线性空间自然是自由 $\Bbbk$-模, 所以对任何投射左 R^e-模 Q, $Q\otimes_R M$ 是投射左 R-模. 于是任何左 R-模 M 的投射维数不超过 n. $\square$

作为 [命题3.22] 和 [推论3.34] 的应用, 我们来证明有限可分扩张的有限可分扩张依然可分.

Proposition 3.36. 设 $K\subseteq L\subseteq E$ 是域的有限扩张, 满足 $L\supseteq K, E\supseteq L$ 均为可分, 则 $E\supseteq K$ 也可分.

Proof. 根据 [命题3.22] 和 [推论3.34], 我们只需要证明 ${}_K E$ 是可分代数. 依 [命题3.22], ${}_L E$ 和 ${}_K L$ 作为可分代数存在可分幂等元

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i \in E\otimes_L E, \sum_{j=1}^{m} c_j\otimes d_j \in L\otimes_K L.$$

命 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_i c_j \otimes b_i d_j \in E\otimes_K E$, 下面说明 ξ 是 E 作为 K-代数的可分幂等元来完成证明. 记 $\mu: E\otimes_K E\to E$ 是乘法映射, 那么由 ξ 的定义不难看到 $\mu(\xi)=1$, 故只需再验证对任何 $\alpha\in E$ 有 $(\alpha\otimes 1 - 1\otimes\alpha)\xi = 0$ 即可. 为此, 作映射 $E\times E\to E\otimes_K E, (u,v)\mapsto (\sum\limits_{j=1}^{m} c_j\otimes d_j)(u\otimes v)$, 利用 $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j\otimes d_j$ 是 L 作为 K-可分代数的可分幂等元可直接验证该映射是 L-平衡映射, 所以它诱导加群同态

$$\theta: E\otimes_L E\to E\otimes_K E, u\otimes v\mapsto \sum_{j=1}^{m} c_j u\otimes d_j v.$$

为了完成命题证明, 还需验证对任何 $\alpha \in E$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha a_i c_j \otimes b_i d_j = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_i c_j \otimes b_i d_j \alpha$(在 $E \otimes_K E$ 中).

因为 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ 是 E 作为 L-代数的可分幂等元, 所以对任何 $\alpha \in E$, 在 $E \otimes_L E$ 中有 $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha a_i \otimes b_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \alpha$, 现在对该等式两边同时左乘上 $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j \otimes d_j \in E \otimes_L E$ 用加群同态 θ 作用便得结论. □

特别地, 域上的代数是有限维中心单代数的充要条件是该代数的中心是基域且是中心上可分代数 (见 [命题3.20]). 下面我们考虑交换环上的“中心可分代数”——Azumaya 代数.

Definition 3.37 ([4])**.** 设 A 是 K-代数并设 Z 是 A 的中心. 如果 A 是 Z 上可分代数, 即 A 是投射左 $A \otimes_Z A^{op}$-模, 那么称 A 是 **Azumaya 代数**. 一些文献中也称为**中心可分代数**.

Remark 3.38. 因为 Z 是 A 的含幺子环, 所以 $_ZA$ 是忠实模. 如果 K-代数 A 作为左 $A \otimes_Z A^{op}$-模是有限生成投射生成子, 那么根据定义便知 A 是 Azumaya 代数. 之后会说明反之亦然 (见 [定理3.48]).

Example 3.39. 域上的代数是有限维中心单代数当且仅当它是 Azumaya 代数.

Example 3.40. Kaplansky 定理表明本原 PI 环是中心上有限维中心单代数, 故是 Azumaya 代数.

Example 3.41. 交换环上的矩阵代数是 Azumaya 代数. 特别地, 交换环是自身上 Azumaya 代数.

Proof. 之前已经指出 $\mathrm{M}_n(K)$ 有可分幂等元 $\sum\limits_{i=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{ji}$, 所以矩阵代数是 K-可分代数. 再由 $Z(\mathrm{M}_n(K)) = KI_n$ 便知矩阵代数是中心可分代数, 即 Azumaya 代数. □

下面的引理会在证明 Artin-Procesi 定理 (见 [定理3.69]) 时用到, 初次阅读可跳过.

Lemma 3.42 ([4])**.** 设 K-代数 A 有中心 Z. 若存在 $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1 \text{ 且} \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i \in Z, \forall x \in A,$$

那么 A 是 Azumaya 代数.

Proof. 命 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$, 那么 $\mu(\xi) = 1$ 且 $\xi \cdot A \subseteq Z$. 记 $J = \mathrm{Ker}\mu$, 那么 $(J\xi) \cdot A \subseteq J \cdot Z = 0$. 考虑 A^e 在自身上的 (左模) 作用:

$$*_1 : A^e \times A^e \to A^e, (\zeta, a \otimes b) \mapsto (\zeta \cdot a) \otimes b, *_2 : A^e \times A^e \to A^e, (\zeta, a \otimes b) \mapsto a \otimes (\zeta \cdot b).$$

易见 $(A^e, *_1)$ 和 $(A^e, *_2)$ 是左 A^e-模. 因为 $\xi \cdot A \subseteq Z$, 所以 $a(\xi\zeta \cdot b) \otimes 1 = a \otimes (\xi\zeta \cdot b), \forall a, b \in A, \zeta \in A^e$. 如果我们能够证明 ξ 在 A^e 中生成的理想就是 A^e, 即 $A^e \xi A^e = A^e$, 那么可以通过下述计算得到 $(A^e \xi A^e) *_2 \lambda \subseteq (\lambda *_1 A^e) A^e, \forall \lambda \in A^e$: 对任何 $\eta, \zeta, \lambda \in A^e$, 设 $\xi\zeta = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j \otimes d_j, \lambda = \sum\limits_{k=1}^{t} g_k \otimes h_k$, 并注意 $(\xi\zeta) \cdot A \subseteq Z$, 我们有

$$(\eta\xi\zeta) *_2 \lambda = \sum_{k=1}^{t} g_k \otimes (\eta\xi\zeta) \cdot h_k = \sum_{k=1}^{t} g_k \otimes \eta \cdot ((\xi\zeta) \cdot h_k) = \sum_{k=1}^{t} g_k \otimes (\eta \cdot 1)((\xi\zeta) \cdot h_k) = \sum_{k=1}^{t} g_k((\xi\zeta) \cdot h_k) \otimes (\eta \cdot 1).$$

再代入 $\xi\zeta$ 便知 $(\eta\xi\zeta)*_2\lambda=\sum\limits_{k=1}^{t}\sum\limits_{j=1}^{m}g_kc_jh_kd_j\otimes(\eta\cdot 1)=\sum\limits_{j=1}^{m}[\sum\limits_{k=1}^{t}g_kc_jh_k\otimes(\eta\cdot 1)](d_j\otimes 1)\in(\lambda*_1 A^e)A^e$. 而 $(J\xi)\cdot A=0$ 表明 $(J\xi)*_1 A^e=0$, 所以如果我们能够证明 $A^e\xi A^e=A^e$, 便有

$$J\xi\subseteq A^e*_2(J\xi)=(A^e\xi A^e)*_2(J\xi)\subseteq(J\xi*_1A^e)A^e\subseteq(J\xi)*_1A^e=0,$$

进而知 ξ 是 A 作为 Z-代数的可分幂等元, 这保证了 A 是 Azumaya 代数. 下面我们说明 $A^e\xi A^e=A^e$ 来完成该引理的证明. 命 $N=\{a\in A|a\otimes 1\in A^e\xi A^e\}$, 那么这是 A 的理想. 下证 $N=A$ 来得到 $1\otimes 1\in A^e\xi A^e$.

假设 N 是 A 的真理想, 那么存在 A 的极大理想 M 使得 $N\subseteq M$. 进而有标准满环同态

$$p:A\otimes_Z A^{op}\to(A/M)\otimes_{\mathcal{Z}}(A/M)^{op},a\otimes b\mapsto\overline{a}\otimes\overline{b},$$

其中 $\mathcal{Z}$ 表示 A/M 的中心. 注意到 A/M 是单环, 所以 A/M 是 $\mathcal{Z}$ 上 (可能无限维) 中心单代数, 于是应用 [引理2.77] 可知 $(A/M)\otimes_{\mathcal{Z}}(A/M)^{op}$ 是单环. 类似地可在 $(A/M)\otimes_{\mathcal{Z}}(A/M)^{op}$ 上定义作用 $\overline{*}_2$, 并容易验证对任何 $\zeta,\eta\in A^e$ 有 $p(\zeta*_2\eta)=p(\zeta)\overline{*}_2\overline{\eta}$. 现在 $0\neq p(1\otimes 1)=p(\xi*_2(1\otimes 1))=p(\xi)\overline{*}_2p(1\otimes 1)$. 特别地, $p(\xi)\neq 0$. 于是由 $(A/M)^e$ 是单环得到 $p(A^e\xi A^e)=(A/M)^ep(\xi)(A/M)^e=(A/M)^e=p(A^e)$. 那么

$$p(\xi)\overline{*}_2p(A^e)=p(\xi)\overline{*}_2p(A^e\xi A^e)=p(\xi*_2(A^e\xi A^e)).$$

之前已经指出对任何 $a,b\in A$ 有 $\xi*_2(a\otimes b)=a(\xi\cdot b)\otimes 1$, 所以 $\xi*_2A^e$ 中元素都形如 $r\otimes 1$. 并且可通过直接 (形式上的) 计算得到 $A^e*_2(A^e\xi A^e)\subseteq A^e\xi A^e$. 现在 $\xi*_2(A^e\xi A^e)\subseteq A^e\xi A^e$ 且左边集合的元素都形如 $r\otimes 1$. 所以 $\xi*_2(A^e\xi A^e)\subseteq N\otimes_Z 1$(形式记号). 于是 $p(\xi*_2(A^e\xi A^e))\subseteq\{\overline{n}\otimes\overline{1}\in(A/M)^e|n\in N\}=0$. □

下面的命题说 Azumaya 代数作为中心上的模, 中心总是该代数的直和因子.

Proposition 3.43 ([26]). 设 K-代数 A 是 Azumaya 代数并设有中心 Z. 那么 Z 是 ${}_ZA$ 的直和因子.

Proof. 首先有标准 K-代数同态 $\theta:A^e\to\mathrm{End}_ZA,\alpha\mapsto\alpha_\ell$, 这里 α_ℓ 表示 α 决定的 A 上左乘变换. 取 A 作为可分 Z-代数的可分幂等元 ξ, 那么 $\theta(\xi)$ 是 End_ZA 中幂等元. 记 $p=\theta(\xi)$, 那么 $p^2=p$ 表明 A 有 Z-模直和分解 $A=p(A)\oplus(\mathrm{id}_A-p)(A)$. 下面说明 $p(A)=Z$ 来得到结论. 一方面, $p(1)=\theta(\xi)(1)=\mu(\xi)=1$, 所以 $Z\subseteq p(A)$. 另一方面, 固定 $a\in A$, 对任何 $b\in A$ 有 $p(a)b=(1\otimes b)\theta(\xi)(a)=(1\otimes b)(\xi\cdot a)=[(1\otimes b)\xi]\cdot a=[(b\otimes 1)\xi]\cdot a$, 这里最后一个等号用到了 $(\mathrm{Ker}\mu)\xi=0$. 于是 $p(a)b=[(b\otimes 1)\xi]\cdot a=(b\otimes 1)(\xi\cdot a)=bp(a)$. 这说明 $p(A)\subseteq Z$. □

Corollary 3.44 ([26]). 设 K-代数 A 是 Azumaya 代数并设有中心 Z. 那么对 Z 的任何理想 $\mathfrak{a}$ 有 $\mathfrak{a}A\cap Z=\mathfrak{a}$.

Proof. 只需验证 $\mathfrak{a}A\cap Z\subseteq\mathfrak{a}$. 由 [命题3.43], 可设有 A 的 Z-子模 L 使得 $A=L\oplus Z$. 进而 $\mathfrak{a}A=\mathfrak{a}L\oplus\mathfrak{a}Z=\mathfrak{a}L\oplus\mathfrak{a}$. 由此易见 $\mathfrak{a}A\cap Z\subseteq\mathfrak{a}$. □

Proposition 3.45 ([2]). 设 K-代数 A 是 Azumaya 代数并设有中心 Z, 那么对 Z 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$, $A/\mathfrak{m}A$ 也是 Azumaya 代数并且中心为 $(Z+\mathfrak{m}A)/\mathfrak{m}A\cong Z/(Z\cap\mathfrak{m}A)=Z/\mathfrak{m}$, 即为域 $Z/\mathfrak{m}$ 上的有限维中心单代数.

Proof. 之前我们已经从 [命题3.31] 看到对 K 的任何真理想 $\mathfrak{a}$, $A/\mathfrak{a}A$ 是可分 $K/\mathfrak{a}$-代数. 取 $\mathfrak{a}=\mathfrak{m}$ 便知 $A/\mathfrak{m}A$ 是可分 $Z/\mathfrak{m}$-代数. 现在应用 [命题3.31] 便知 $Z(A/\mathfrak{m}A)=(Z+\mathfrak{m}A)/\mathfrak{m}A$, 再应用 [推论3.44] 即可. □

下面我们将做最后一个准备来证明 Azumaya 代数的刻画定理 (见 [定理3.48]).

Proposition 3.46 ([26]). 设 K-代数 A, B 是 Azumaya 代数, 中心均为 Z. 那么 $A \otimes_Z B$ 是 Azumaya 代数.

Proof. 由 [命题3.43] 知 Z 是 A, B 作为 Z-模的直和因子, 故由 $Z \otimes_Z Z \cong Z \neq 0$ 立即得到 $A \otimes_Z B \neq 0$. 现在应用 [推论3.28] 可知 $A \otimes_Z B$ 是可分 $Z \otimes_Z Z$-代数. 下面我们需要说明 $A \otimes_Z B$ 的中心就是 $Z \otimes_Z Z$(注意 Z 作为 ${}_ZA, {}_ZB$ 的直和因子可保证 $Z \otimes_Z Z$ 到 $A \otimes_Z B$ 的标准映射是单射). 因为 A 是有限生成投射左 A^e-模, B 是有限生成投射左 B^e-模, 所以有 K-代数同构

$$\varepsilon : \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A) \otimes_K \mathrm{Hom}_{B^e}(B, B) \to \mathrm{Hom}_{A^e \otimes_K B^e}(A \otimes_K B, A \otimes_K B), f \otimes g \mapsto \varepsilon(f \otimes g) = f \otimes g.$$

根据 [例3.26], $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, A) \cong \mathcal{Z}_A(A) = Z, \mathrm{Hom}_{B^e}(B, B) \cong \mathcal{Z}_B(B) = Z$ 以及

$$\mathrm{Hom}_{A^e \otimes_K B^e}(A \otimes_K B, A \otimes_K B) = \mathrm{Hom}_{(A \otimes_K B)^e}(A \otimes_K B, A \otimes_K B) \cong \mathcal{Z}_{A \otimes_K B}(A \otimes_K B)$$

可知任何 $\mathcal{Z}_{A \otimes_K B}(A \otimes_K B)$ 中元素决定的 $\mathrm{Hom}_{(A \otimes_K B)^e}(A \otimes_K B, A \otimes_K B)$ 中自同态都是由 Z 中两个元素的左乘变换作张量得到的, 因此 $Z(A \otimes_K B) = Z \otimes_K Z$. □

Remark 3.47. 因为域上的中心可分代数就是有限维中心单代数, 所以该命题是 [引理2.77] 的中心单代数版本的“交换环”推广. 特别地, 域 $\Bbbk$ 上任意两个有限维中心单代数关于 $\Bbbk$ 作张量积得到的张量积代数依然是有限维中心单代数. 在命题使得人们能在交换环层面定义 Brauer 群.

Theorem 3.48 ([26]). 设 A 是 K-代数, 有中心 Z. 那么以下等价:
(1) A 是 Azumaya 代数.
(2) A 作为左 A^e-模是有限生成投射生成子.
(3) A 作为 Z-模是有限生成投射生成子并且标准 K-代数同态 $\theta : A^e \to \mathrm{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$, 这里 α_ℓ 表示 α 决定的 (${}_{A^e}A$ 上) 左乘变换, 是 K-代数同构 (易见也是 Z-代数同构).

Proof. (2)⇒(1) 由 Azumaya 代数的定义立即得到. 下面使用 Morita 理论证明 (2)⇒(3): 这时有 K-代数同态 $\psi : Z \to \mathrm{End}_{A^e} A, z \mapsto z_\ell$, ψ 明显是单射. 现在说明 ψ 是满射, 只需注意对任何 $a \in A$ 与 $f \in \mathrm{End}_{A^e} A$ 有

$$af(1) = (a \otimes 1)f(1) = f(a) = f(1)(1 \otimes a) = f(1)a.$$

所以 $f(1) \in Z(A) = Z$ 且 f 是由中心元 $f(1)$ 决定的左乘变换. 由 ψ 是满射以及 A 作为左 A^e-模是有限投射生成子可知 A 作为 Z-模也是有限生成投射生成子: 将 A 先视作 A^e 的反环 $(A^e)^{op}$ 上的右模, 由对偶基定理知模 $A_{(A^e)^{op}}$ 是有限生成投射模 (且为生成子). 注意这时 $\mathrm{End}(A_{(A^e)^{op}}) = \mathrm{End}_{A^e} A$. 考虑有限生成投射生成子 $A_{(A^e)^{op}}$ 决定的标准 Morita Context, 应用 Morita I 便知 A 作为左 $\mathrm{End}_{A^e} A$-模是有限生成投射生成子. 结合前面指出的 $\mathrm{End}_{A^e} A$ 在 A 上的作用就是 Z 中元素的左乘变换便知 ${}_ZA$ 是有限生成投射生成子. 此外, Morita I 还给出 $(A^e)^{op}$ 到 $\mathrm{End}_Z A$ 的反代数同构 $\lambda : (A^e)^{op} \to \mathrm{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_r$, 其中 α_r 表示右乘变换. 由此得到代数同构 $(A^e)^{op} \to \mathrm{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$, 这恰好是 θ. 因此 θ 是 K-代数同构.

(3)⇒(2): 考虑由 A_Z 决定的标准 Morita Context, 因为 A_Z 是有限生成投射生成子, 所以应用 Morita I 立即得到 A 作为左 $\mathrm{End}_Z A$-模是有限生成投射生成子. 现在利用 θ 是同构便知 ${}_{A^e}A$ 是有限生成投射生成子.

(1)⇒(2): 根据 Azumaya 代数的定义只需验证 A 作为左 A^e-模是生成子. 下面我们通过证明求值映射 $\psi : \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \otimes_Z A \to A^e, f \otimes a \mapsto f(a)$ 是满射来说明 ${}_{A^e}A$ 是生成子. 在 [例3.26] 中我们已经看到 A 的

Z-可分性可保证我们有 Z-模同构 $\varphi : \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \to \{\zeta \in A^e | (\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0\}, f \mapsto f(1)$(其逆映射将每个满足 $(\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0$ 的 $\zeta \in A^e$ 映至左 A^e-模同态 $\varphi^{-1}(\zeta) : A \to A^e, a \mapsto (a \otimes 1)\zeta$). 因此我们只需要说明

$$\{\zeta \in A^e | (\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0\} \otimes_Z A \to A^e, \zeta \otimes b \mapsto (b \otimes 1)\zeta$$

是满射即可. 因为对满足 $(\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0$ 的 $\zeta \in A^e$ 总有 $(b \otimes 1)\zeta = (1 \otimes b)\zeta$, 因此上述映射的满射性等价于验证 $A^e\{\zeta \in A^e | (\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0\} = A^e$. 假设 $A^e\{\zeta \in A^e | (\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0\} \subsetneq A^e$, 则存在 A^e 的极大理想 M 使得 $A^e\{\zeta \in A^e | (\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0\} \subseteq M$. 注意 A^e 是以 $Z \otimes_Z Z$ 为中心的 Azumaya 代数 ([命题3.46]), 故由下面的 [引理3.49], 存在 $Z \otimes_Z Z$ 的理想 $\mathfrak{a}$(因为 $Z \cong Z \otimes_Z Z$ 所以不妨设 $\mathfrak{a}$ 是 Z 的理想) 使得 $M = A^e\mathfrak{a}$, 至此我们得到

$$A^e\{\zeta \in A^e | (\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0\} \subsetneq A^e\mathfrak{a}.$$

对上式作用乘法映射 μ(它是左 A^e-模同态) 可知 $A^e \cdot \mu(\{\zeta \in A^e | (\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0\}) \subseteq A\mathfrak{a}$. 注意到 A 的可分幂等元总在 $\{\zeta \in A^e | (\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0\}$ 中, 所以 $A^e \cdot \mu(\{\zeta \in A^e | (\mathrm{Ker}\mu)\zeta = 0\}) = A$. 于是 $A = A\mathfrak{a}$. 结合 $M = A^e\mathfrak{a}$ 我们得到 $M = A^e$, 这和 M 是极大理想矛盾. □

Lemma 3.49 ([26]). 设 K-代数 A 是 Azumaya 代数, 有中心 Z. 那么 A 的任何极大理想 M, 都存在 Z 的某个理想 $\mathfrak{a}$ 使得 $M = A\mathfrak{a}$.

Proof. 命 $\mathfrak{a} = Z \cap M$, 那么 $\mathfrak{a}$ 是 Z 的理想, 下证 $M = A\mathfrak{a}$. 首先易见 $M \supseteq A\mathfrak{a}$. 由 [命题3.31], 这时 A/M 是以 $(Z + M)/M \cong Z/\mathfrak{a}$ 为中心的 Z-可分代数, 所以 A/M 也是 Azumaya 代数. 注意到 A/M 是单环, 所以 $Z/\mathfrak{a}$ 作为单环的中心是域. 现在由 [推论3.44] 得到 $\mathfrak{a}A \cap Z = \mathfrak{a}$, 所以再次应用 [命题3.31] 的注记得到 $A/\mathfrak{a}A$ 是以 $(Z + \mathfrak{a}A)/\mathfrak{a}A \cong Z/\mathfrak{a}$ 为中心的可分 $Z/\mathfrak{a}$-代数. 即 $A/\mathfrak{a}A$ 是域上的 Azumaya 代数. 在 [例3.39] 中我们看到域上的 Azumaya 代数就是有限维中心单代数, 因此 $A/\mathfrak{a}A$ 是单环. 特别地, $\mathfrak{a}A$ 是 A 的极大理想. 故 $M = A\mathfrak{a}$. □

[定理3.48] 表明 Azumaya 代数是中心上有限生成代数, 因此由 [命题2.24] 我们有

Corollary 3.50 ([2]). Azumaya 代数是 PI 代数.

设 A 是 K-代数, 那么 A 作为 Z-模本身是忠实模, 再由

Lemma 3.51 ([20]). 交换环上忠实的有限生成投射模是生成子.

Proof. 设 M 是交换环 Z 上忠实的有限生成投射模, 并记 $T(M)$ 是 M 的迹理想. 那么利用对偶基定理可知 $M = T(M)M$, 因此由 M 是有限生成模得到 $T(M) + \mathrm{Ann}_Z M = Z$. 现在结合 $\mathrm{Ann}_Z M = 0$ 便得结论. □

我们得到 Azumaya 代数相较 [定理3.48(3)] 更弱的等价刻画:

Proposition 3.52 ([2]). 设 A 是 K-代数并有中心 Z. 那么 A 是 Azumaya 代数当且仅当 A 是有限生成投射 Z-模且标准 K-代数同态 $\theta : A^e \to \mathrm{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$ 是 K-代数同构.

Proof. 必要性来自 [定理3.48], 充分性来自 [定理3.48] 和 [引理3.51]. □

设 K-代数 A 是中心为 Z 的 Azumaya 代数, 那么有标准代数同态 $\sigma : A \to \mathrm{End}_Z A, a \mapsto a_l$, 其中 a_l 表示 a 决定的左乘变换. 易见 σ 是单代数同态. 又注意到 ${}_Z A$ 是有限生成投射生成子, 这启发我们问: Azumaya 代数与其中心是否 Morita 等价? 一般而言结论是否定的, 即便在中心单代数的情形, 例如

Example 3.53. 考虑四元数环 $\mathbb{H}$, 它是 $\mathbb{R}$ 上 4 维中心单代数, 并且不存在正整数 n 使环同构 $\mathbb{H} \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

但是类似于 Morita 等价保持的性质, Azumaya 代数和它的中心也有同构的理想格:

Proposition 3.54 ([2])**.** 设 K-代数 A 是以 Z 为中心的 Azumaya 代数. 记 Z 的理想格为 $\mathcal{I}(Z)$, A 的理想格为 $\mathcal{I}(A)$, 那么有保序双射 $\nu : \mathcal{I}(Z) \to \mathcal{I}(A), \mathfrak{a} \mapsto A\mathfrak{a}$, 其逆映射为 $\nu^{-1} : \mathcal{I}(A) \to \mathcal{I}(Z), I \mapsto I \cap Z$.

Proof. 记 $\lambda : \mathcal{I}(A) \to \mathcal{I}(Z), I \mapsto I \cap Z$, 那么 ν 与 λ 都保持理想的包含关系. 下面验证 λ 和 ν 互为逆映射来得到结论. 首先 $\lambda\nu = \mathrm{id}_{\mathcal{I}(Z)}$ 来自 [推论3.44]. 下面需要验证对任何 A 的理想 I 有 $A(I \cap Z) = I$ 来得到 $\nu\lambda = \mathrm{id}_{\mathcal{I}(A)}$. 因为 ${}_ZA$ 是有限生成投射模, 故可设有对偶基 $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq A, \{x_1^*, ..., x_n^*\} \subseteq \mathrm{Hom}_Z(A, Z)$, 并且有 $\mathrm{id}_A = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot x_i$, 这里我们把 x_i^* 视作 A 上 Z-模自同态 $x_i^* : A \to A, a \mapsto x_i^*(a)$ 并把 $\mathrm{End}_Z A$ 视作 Z-A 双模. 借助 Azumaya 代数的标准 K-代数同构 $\theta : A^e \to \mathrm{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$, 可设每个 x_i^* 为

$$x_i^* = \theta(\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \otimes b_{ij}), a_{ij}, b_{ij} \in A.$$

对每个 $s \in I$, $s = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(s)x_i$, 而每个 $x_i^*(s) = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}sb_{ij} \in AIA \cap Z = I \cap Z$, 故 $I \subseteq (I \cap Z)A = A(I \cap Z)$. $\square$

下面的推论表明 Azumaya 代数是满足其素谱和中心素谱 (保序) 同胚的 PI 代数.

Corollary 3.55 ([2])**.** 设 K-代数 A 是以 Z 为中心的 Azumaya 代数. 那么 [命题3.54] 中的保序双射 $\nu : \mathcal{I}(Z) \to \mathcal{I}(A), \mathfrak{a} \mapsto A\mathfrak{a}$ 可诱导素谱间的拓扑同胚 $\tilde{\nu} : \mathrm{Spec}Z \to \mathrm{Spec}A, \mathfrak{p} \mapsto A\mathfrak{p}$. 特别地, 拓扑同胚保持闭点, 因此 ν 也诱导极大谱间的拓扑同胚 $\tilde{\nu}| : \mathrm{maxSpec}Z \to \mathrm{maxSpec}A, \mathfrak{m} \mapsto A\mathfrak{m}$.

Proof. 我们先说明 $\tilde{\nu}$ 作为映射定义合理且为双射, 再验证它和它的逆映射都是连续映射. 如果 $\mathfrak{p}$ 是 Z 的素理想, 并设 A 的理想 I, J 满足 $IJ \subseteq A\mathfrak{p}$, 可设 $I = A\mathfrak{i}, J = A\mathfrak{j}$, 其中 $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ 是 Z 的理想, 我们有 $A(\mathfrak{i}\mathfrak{j}) \subseteq A\mathfrak{p}$, 进而由 ν 是偏序同构得到 $\mathfrak{i}\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{p}$, 于是不难得到 I, J 中至少有一个是 $A\mathfrak{p}$ 的子集. 故 $A\mathfrak{p}$ 是素理想. 不难看出 $\tilde{\lambda} : \mathrm{Spec}A \to \mathrm{Spec}Z, I \mapsto I \cap Z$ 是定义合理的映射并且和 $\tilde{\nu}$ 互为逆映射. 至此我们证明了 $\tilde{\nu} : \mathrm{Spec}Z \to \mathrm{Spec}A$ 是定义合理的双射. 通过 ν 是偏序同构容易验证对 A 的任何理想 I 以及 Z 的任何理想 $\mathfrak{a}$ 有

$$\tilde{\nu}^{-1}(V(I)) = V(I \cap Z), \tilde{\lambda}^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(A\mathfrak{a}),$$

因此 $\tilde{\nu}, \tilde{\lambda}$ 均为连续映射. 从而 $\tilde{\nu}$ 是拓扑同胚. $\square$

Remark 3.56. 我们将在 [命题3.180] 对代数的素谱到其中心子代数素谱的标准连续映射作进一步讨论.

Corollary 3.57 ([2])**.** 设 K-代数 A 是以 Z 为中心的 Azumaya 代数. 那么以下等价:
(1) A 满足理想升链条件.
(2) A 是双边 Noether 环.
(3) Z 是 Noether 环.

Proof. 通过 [命题3.54] 易知 (1) 与 (3) 等价. (2) 与 (3) 的等价性来自 A 是有限生成 Z-模以及 [命题3.54]. $\square$

下面的命题说对在中心上有有限表现的代数而言, Azumaya 性质是局部性质.

Proposition 3.58 ([1])**.** 设 K-代数 A 作为中心 Z 上的模有有限表现, 那么 A 是 Azumaya 代数的充要条件是对 Z 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$ 有 $A_{\mathfrak{m}}$ 是 Azumaya 代数 (这里必要性不需要有限表现的条件).

Proof. 必要性: 这时 A 是有限生成投射 Z-模且标准环同态 $\theta: A^e \to \mathrm{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$ 是 Z-代数同构. 那么对 Z 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{m}}$ 是有限生成投射 $Z_{\mathfrak{m}}$-模. 并注意 ${}_Z A$ 作为有限生成投射 Z-模自然是有有限表现的 Z-模! 于是 $\theta_{\mathfrak{m}}$ 可视作 $(A_{\mathfrak{m}})^e \cong (A^e)_{\mathfrak{m}}$ 到 $\mathrm{End}_{Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}} \cong (\mathrm{End}_Z A)_{\mathfrak{m}}$ 的 $Z_{\mathfrak{m}}$-代数同构. 现在应用 [命题3.52] 并结合下面的 [引理3.59] 知 $A_{\mathfrak{m}}$ 是以 $Z_{\mathfrak{m}}$ 为中心的 Azumaya 代数.

充分性: 考虑 $\theta: A^e \to \mathrm{End}_Z A, \alpha \mapsto \alpha_\ell$, 与充分性一样 A 是有有限表现的 Z-模可保证对任何 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, $\theta_{\mathfrak{m}}$ 可诱导从 $(A_{\mathfrak{m}})^e$ 到 $\mathrm{End}_{Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}$ 的环同态, 而 $A_{\mathfrak{m}}$ 是 Azumaya 代数的条件保证了 $\theta_{\mathfrak{m}}$ 诱导的环同态是同构, 因此 $\theta_{\mathfrak{m}}$ 本身也是环同构. 于是由 θ 是 Z-模同态知 θ 是同构. 现在 $A_{\mathfrak{m}}$ 对所有的 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec} Z$ 都有 $A_{\mathfrak{m}}$ 是有限生成投射 $Z_{\mathfrak{m}}$-模. 所以 A 是平坦 Z-模. 而有有限表现的模的平坦性与投射性等价, 所以 A 是投射 Z-模. 于是由 [命题3.52] 得到 A 是 Azumaya 代数. □

Lemma 3.59. 设含幺环 R 是中心 Z 上有限生成模. 则对任何 Z 的乘闭子集 S, R_S 的中心是 Z_S.

Proof. 易知 $Z_S \subseteq Z(R_S)$. 任取 $a/s \in Z(R_S)$, 设 $R = Zx_1 + \cdots + Zx_n$. 那么对每个正整数 $1 \le i \le n$, 在 R_S 中有 $(ax_i - x_i a)t/t = 0$, 那么存在 $s_i \in S$ 使得 $s_i(ax_i - x_i a) = 0$. 作 $\hat{s} = s_1 \cdots s_n$, 那么 $\hat{s}a \in Z$. 所以有 $a/s = \hat{s}a/\hat{s}s \in Z_S$. 即 $Z(R_S) \subseteq Z_S$. □

下面我们将进一步讨论 Azumaya 代数作为 PI 代数的性质. 首先指出 Azumaya 代数的下述局部化性质.

Lemma 3.60 ([2])**.** 设 K-代数 A 是 Azumaya 代数, 则对任何中心的极大理想 $\mathfrak{m}$ 有 K-代数同构

$$A/\mathfrak{m}A \cong A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}.$$

Proof. 首先我们有局部化映射 $\lambda_{\mathfrak{m}}: A/\mathfrak{m}A \to A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$, 它是 K-代数同态. 在 [命题3.45] 中已指出 $A/\mathfrak{m}A$ 是中心单代数, 故 $\lambda_{\mathfrak{m}}$ 是单射. 最后说明 $\lambda_{\mathfrak{m}}$ 是满射来完成证明. 为此只需说明任何 $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ 中元素形如 $a/1 + \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$. 任给 $b/s + \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \in A/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$, 因为 $s \notin \mathfrak{m}$, 所以存在 $z \in Z = Z(A)$ 使得 $sz - 1 \in \mathfrak{m}$. 注意到

$$b/s - bz/1 = b(1 - sz)/1 \in \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}},$$

所以 $b/s + \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} = bz/1 + \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$. 进而知 $\lambda_{\mathfrak{m}}$ 是满射. □

在 [命题3.58] 中我们已经看到对 Azumaya 代数 A, 它在中心的极大理想 $\mathfrak{m}$ 处作局部化也是 Azumaya 代数. 所以 [引理3.60] 指出 $A/\mathfrak{m}A$ 与 $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ 作为同构的 Azumaya 代数, 中心也都是域, 进而是在各自中心上有相同维数的中心单代数. 我们把 A 的中心记作 Z, 则有 $\dim_{Z/\mathfrak{m}} A/\mathfrak{m}A = \dim_{Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$. 根据 Kaplansky 定理我们知道该公共线性维数是某个正整数 n 的平方, 而 $2n$ 便是相应 PI 代数的最小次数. 沿用 [定理2.103] 中的术语, $A/\mathfrak{m}A$ 和 $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ 的 PI 次数都是 n. 此外, 因为 A 是有限生成投射 Z-模, 所以 $A_{\mathfrak{m}}$ 是自由 $Z_{\mathfrak{m}}$-模, 根据经典的交换代数我们知道 $\mathrm{rank}_{Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}} = \dim_{Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$. 总结一下, 我们有

Proposition 3.61 ([2])**.** 设 K-代数 A 是 Azumaya 代数, 中心为 Z, $\mathfrak{m}$ 是 Z 的极大理想. 那么

$$\dim_{Z/\mathfrak{m}} A/\mathfrak{m}A = \dim_{Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} = \mathrm{rank}_{Z_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}.$$

Definition 3.62 ([2])**.** 设 K-代数 A 是 Azumaya 代数, 中心为 Z, n 是正整数. 如果 $n^2 = \dim_{Z/\mathfrak{m}} A/\mathfrak{m}A$ 对 Z 所有的极大理想 $\mathfrak{m}$ 成立, 我们称 A **是秩为 n^2 的 Azumaya 代数**.

Example 3.63. 如果 K-代数 A 是素 Azumaya 代数, 我们说明 A 一定是秩为 n^2 的 Azumaya 代数, 这里 $n = \text{PI-deg}A$. 首先由 [命题3.61] 知对每个 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, $A/\mathfrak{m}A$ 作为 $Z/\mathfrak{m}$ 上线性空间的维数就是 $\text{rank}_{Z_\mathfrak{m}} A_\mathfrak{m}$. 记 P 是 Z 的零理想, 那么 $P \cap (Z - \mathfrak{m}) = \varnothing$, 因此可以进一步对 $Z_\mathfrak{m}$-模 $A_\mathfrak{m}$ 关于 $P_\mathfrak{m}$ 作局部化, 并且 $A_\mathfrak{m}$ 关于 $P_\mathfrak{m}$ 作局部化就是素 PI 环 $A_\mathfrak{m}$ 在中心正则元集 $Z_\mathfrak{m} - \{0\}$ 作局部化, 根据经典的交换代数我们知道 $A_\mathfrak{m} \otimes_{Z_\mathfrak{m}} \text{Frac}Z_\mathfrak{m} \cong A_P$. 结合 Posner 定理便知这时必有 $\text{rank}_{Z_\mathfrak{m}} A_\mathfrak{m} = \dim_{Z_P} A_P = (\text{PI-deg}A)^2$.

Remark 3.64. 该例表明 Azumaya 代数的秩在素 Azumaya 代数类上总存在.

Example 3.65. 设 A 是域 $\mathbb{k}$ 上 Azumaya 代数, 即有限维中心单代数. 设 $\dim_\mathbb{k} A = n^2$, 那么 A 的 PI 次数是 n 并且 A 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数.

Example 3.66. 设 Z 是含幺交换环, 之前已经指出 $A = \mathrm{M}_n(Z)$ 是 Azumaya 代数, 对 Z 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$, $A/\mathfrak{m}A \cong \mathrm{M}_n(Z/\mathfrak{m})$ 在 $Z/\mathfrak{m}$ 上线性维数是 n^2. 所以交换环上 n 阶矩阵代数是秩为 n^2 的 Azumaya 代数.

如果 R 是素 PI 环, 那么对任何素理想 P, R/P 依然是素 PI 环并且 $\text{PI-deg}(R/P) \leq \text{PI-deg}(R)$. 如果该不等式等号成立, 便称素理想 P 是**正则的**. 例如零理想总是正则素理想. 存在非正则的素理想. 例如考虑

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

在 [例2.56] 中我们看到 R 是最小次数为 4 的素 PI 环. 由 $R/P \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 知 P 是 R 的素理想且 $\text{PI-deg}(R/P) = 1$. 所以上述素理想并不是 R 的正则素理想. 我们将看到素 PI 环素理想的正则性与 Azumaya 性质有密切的联系 ([定理3.69]). 以下固定记号 $F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{Z}\langle x, y_1, y_2, ..., y_n\rangle$ 是 Formanek 多项式 ([定理2.66]). 根据 [推论2.90], $F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ 是所有 PI 次数为 n 的中心单代数的中心多项式.

Proposition 3.67. 设 A 是素 PI 环且 PI 次数是 n, M 是极大理想. 那么 M 是正则极大理想当且仅当

$$\{F_n(a, b_1, b_2, ..., b_n) | a, b_1, ..., b_n \in A\} \nsubseteq M.$$

Proof. 必要性: 这时 A/M 是 PI 次数为 n 的本原 PI 环, 应用 [推论2.90] 可知 $F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ 是 A/M 的中心多项式, 故一定有一组 A 中元素在 Formanek 多项式下赋值不在 M 中. 充分性: 若不然, 则 A/M 是 PI 次数严格小于 n 的本原 PI 环, 同样应用 [推论2.90] 便得结论. $\square$

Corollary 3.68. 设 A 是素 PI 环且 PI 次数是 n, 有正则极大理想. 那么 $F_n(x, y_1, ..., y_n)$ 是 A 的中心多项式.

Proof. 如果 A 存在正则极大理想, 那么 [命题3.67] 表明 $F_n(x, y_1, ..., y_n)$ 一定在 A 的某组元素取值下非零. 现在应用 [命题2.115], 我们便知 $F_n(x, y_1, ..., y_n)$ 是 A 的中心多项式. $\square$

Theorem 3.69 (Artin-Procesi 定理, [1])**.** 设 A 是以 Z 为中心的素环, n 是正整数, 则以下等价:
(1) A 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数.
(2) A 是满足所有素理想正则且 PI 次数为 n 的 PI 环.
(3) A 是满足所有极大理想正则且 PI 次数为 n 的 PI 环.

Proof. (1)⇒(2): 这时 A 是素 PI 环并且对任何 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{m}}$ 是秩为 n^2 的自由 $Z_{\mathfrak{m}}$-模 ([命题3.61]). 在经典的交换代数中, 对交换环 Z 的任何乘闭子集 T, 如果 Z 的素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $\mathfrak{p}\cap T=\varnothing$, 那么有标准的环同构 $Z_{\mathfrak{p}}\cong(Z_T)_{\mathfrak{p}_T}$. 类似地, 我们也有标准的环同构 $A_{\mathfrak{p}}\cong(A_T)_{\mathfrak{p}_T}$. 现取 $T=Z-\mathfrak{m}$($\mathfrak{m}$ 是 Z 的任意极大理想), $\mathfrak{p}=0$, 那么由局部化函子 $(-)_{\mathfrak{p}_T}$ 保持 $A_{\mathfrak{m}}$ 作为 $Z_{\mathfrak{m}}$-自由模的自由秩以及 Posner 定理立即得到 A 在中心正则元集的局部化是中心上 n^2 维中心单代数. 特别地, A 的 PI 次数是 n. 现在由条件可知对 Z 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$, $A/\mathfrak{m}A$ 是其中心 $Z/\mathfrak{m}$ 上 n^2 维中心单代数. 特别地, Posner 定理表明 $A/\mathfrak{m}A$ 是 PI 次数为 n 的 PI 环. 下面我们需要验证 A 的任何素理想 P 是正则的, 即 PI-deg$(A/P)=n$. 根据 [推论3.55], A 的任何极大理想形如 $\mathfrak{m}A$, 其中 $\mathfrak{m}$ 是 Z 的某个极大理想. 现在可设 P 含于 A 的极大理想 $\mathfrak{m}A$, 那么

$$n=\text{PI-deg}A\geq\text{PI-deg}A/P\geq\text{PI-deg}A/\mathfrak{m}A=n,$$

这迫使 PI-deg$A/P=$ PI-deg$A=n$. 所以 A 所有的素理想都正则. (2)⇒(3) 是明显的.

(3)⇒(1): 现设对 A 的所有极大理想 M, PI-deg$A/M=n$, 于是 A/M 作为 PI 单环的最小次数是 $2n$(也是 PI 次数为 n 的中心单代数). 根据 [推论2.90], Formanek 多项式 $F_n(x,y_1,y_2,...,y_n)$ 是 A/M 的中心多项式. 因为 $F_n(x,y_1,y_2,...,y_n)$ 关于 y_n 是线性的, 并且 $F_n(x,y_1,y_2,...,y_n)$ 不是 A 任何非零同态像的多项式等式 (否则, 存在某个 A 的极大理想 M 使得 $F_n(x,y_1,...,y_n)$ 是 A/M 的多项式等式, 矛盾), 所以 Formanek 多项式满足下面 [引理3.71] 的条件 ($F_n(x,y_1,...,y_n)$ 是 A 的中心多项式来自 [推论3.68]), 进而由该引理可知存在 $a_1,...,a_m,b_{11},...,b_{1n},...,b_{m1},...,b_{mn}\in A$ 使得

$$1=F_n(a_1,b_{11},b_{12},...,b_{1n})+F_n(a_2,b_{21},b_{22},...,b_{2n})+\cdots+F_n(a_m,b_{m1},b_{m2},...,b_{mn}).$$

接下来我们将使用 [引理3.42] 说明 A 是 Azumaya 代数. 现在考虑 $F_n(x,y_1,y_2,...,y_n)$ 导出的多项式

$$F_n(x,y_1,...,y_nz)=\sum_{t=1}^{\ell}G_t(x,y_1,y_2,...,y_n)zH_t(x,y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{Z}\langle x,y_1,y_2,...,y_n,z\rangle,$$

可以表达为上述形式依赖于 $F_n(x,y_1,...,y_n)$ 关于 y_n 是线性的. 现在定义

$$c_{ti}=G_t(a_i,b_{i1},...,b_{in}),d_{ti}=H_t(a_i,b_{i1},...,b_{in})\in A,1\leq i\leq n,1\leq t\leq\ell.$$

那么 $\sum\limits_{t=1}^{\ell}\sum\limits_{i=1}^{n}c_{ti}d_{ti}=1,\sum\limits_{t=1}^{\ell}\sum\limits_{i=1}^{n}c_{ti}ad_{ti}\in Z,\forall a\in A$. 于是由 [引理3.42] 知 A 是 Azumaya 代数. 最后, 对 Z 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}A$ 作为 A 的极大理想是正则的, 所以 PI-deg$A/\mathfrak{m}A=n$ 表明 $A/\mathfrak{m}A$ 在中心上的维数是 n^2, 故根据 [定义3.62] 便知 A 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数. □

Remark 3.70. 这里呈现的仅是素环场景的 Artin-Procesi 定理. 该定理更为一般的版本先由 M. Artin 对系数环是域的情形证明 [27], 再被 Procesi 推广至一般的交换环 [28]. 更一般的 Artin-Procesi 定理的证明需要借助比 Formanek 中心多项式更强的中心多项式. 下面关于 Azumaya 代数的讨论并不需要用到.

Lemma 3.71 ([4])**.** 设 A 是以 Z 为中心的环, $f(x_1,...,x_n)\in\mathbb{Z}\langle x_1,...,x_n\rangle$ 如果满足
(1) f 是 A 的中心多项式 (回忆 [定义2.63]) 且关于 x_n 是线性的.
(2) f 不是 A 的任何非零同态像的多项式等式.
那么集合 $\{f(a_1,...,a_n)\in Z|a_1,...,a_n\in A\}$ 在 Z 中生成的加法子群包含 A 的乘法单位元 1.

Proof. 记 $\{f(a_1,...,a_n)\in Z|a_1,...,a_n\in A\}$ 在 Z 中生成的加法子群为 $\mathcal{F}$. 假设 $1\notin\mathcal{F}$, 考虑集合

$$S=\{I\subseteq A|I\text{是}A\text{的理想并满足}1\notin\mathcal{F}+I\}.$$

因为零理想在 S 中, 所以 $(S,\subseteq)$ 是非空偏序集. 易见 S 的任何全序子集有上界, 故应用 Zorn 引理得到 S 有极大元 M. 下证 M 是素理想. 假设 M 不是素理想, 则存在严格包含 M 的理想 I,J 使得 $IJ\subseteq M$. 进而由 M 的极大性可知 $1\in\mathcal{F}+I,\mathcal{F}+J$. 设 $s\in I,t\in J,z_1,z_2\in\mathcal{F}$ 满足 $1=s+z_1=t+z_2$. 将 1 的两个表达式相乘得到 $st+sz_2+z_1t+z_1z_2=1$. 注意到 $s,t\in Z$, 所以由 f 关于 x_n 是线性的可知 $sz_2+z_1t+z_1z_2\in\mathcal{F}$. 那么由 $st\in M$ 得到 $1\in\mathcal{F}+M$, 矛盾. 因此 M 是素理想. 现在考虑 A 的同态像 A/M, 由条件知存在一组 A/M 中元素关于 f 的赋值非零. 即存在 $a_1,...,a_{n-1},d\in A$ 使得 $f(a_1,...,a_{n-1},d)\notin M$. 记 $\hat{z}=f(a_1,...,a_{n-1},d)$. 那么 M 的极大性蕴含 $1\in\mathcal{F}+M+A\hat{z}$. 于是存在 $z_0\in\mathcal{F},a_0\in A$ 使得在 A/M 中有 $\overline{1}=\overline{z_0}+\overline{a_0}\overline{\hat{z}}$. 因为 A/M 是素环, 非零中心元都是正则的, 所以 $\overline{a_0}\in Z(A/M)$. 那么由 f 个关于 x_n 的线性性可知在 A/M 中有

$$\overline{a_0}\overline{\hat{z}}=f(\overline{a_1},...,\overline{a_{n-1}},\overline{a_0}\overline{d})\in\overline{\mathcal{F}}.$$

现在由前面得到的等式 $\overline{1}=\overline{z_0}+\overline{a_0}\overline{\hat{z}}$ 便知 $1-z_0\in M$, 即 $1\in\mathcal{F}+M$, 矛盾. $\square$

在 [定理3.48] 中我们看到 Azumaya 代数在中心上是有限生成投射模, 因此自然要问是否存在在中心上有限生成投射但不是 Azumaya 代数的例子. Artin-Procesi 定理使得我们容易验证这样的例子.

Example 3.72. 考虑 [例2.26] 中的量子平面 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$, 这里 $q\in\Bbbk^*$ 是 ℓ 次本原单位根, $\ell\geq 2$. 那么 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 不是交换代数, 因此它的最小次数至少是 3(见 [例2.18]), 结合 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 是素 PI 环知 PI-deg$\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)\geq 2$(事实上 PI-deg$\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 的 PI 次数就是 ℓ, 更一般地, 见 [定理3.253]). 任取 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 的一个包含 x 的素理想 P, 那么 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)/P$ 是交换的, 所以 PI-deg$\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)/P=1$. 这说明 P 不是正则素理想. 由 [例3.63] 以及 Artin-Procesi 定理知 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 不是 Azumaya 代数. 而可直接验证 $Z(\mathcal{O}_q(\Bbbk^2))=\Bbbk[x^\ell,y^\ell]$ 且 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 在中心上有限生成自由 (见 [命题2.34]), 所以 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 是素 PI 代数, 在中心上有限生成自由, 但不是 Azumaya 代数的例子.

为之后引用方便 (见 [定理3.212] 前的讨论), 这里记录域上仿射 PI 代数的正则素 (极大) 理想的基本特性.

Proposition 3.73 ([1])**.** 设 A 是域 $\Bbbk$ 上仿射素 PI 代数, P 是 A 的素理想. 那么:
(1) P 不是一些正则极大理想的交就是一些非正则极大理想的交.
(2) P 是正则素理想的充要条件是 P 是一些正则极大理想的交.
(3) P 不是正则素理想的充要条件是 P 为一些非正则的极大理想之交.
(4) A 的所有正则素理想构成 Spec$A$ 的真闭子集.
(5) A 的所有正则极大理想构成 maxSpec$A$ 的真闭子集. 特别地, 正则极大理想存在.
(6) 零理想是所有正则极大理想的交.

Proof. 在 [推论3.11] 中已经指出域上仿射 PI 代数总是 Jacobson 环, 因此任何素理想是一些极大理想 (Kaplansky 定理保证本原理想就是极大理想) 的交. 将 P 表示为一些极大理想的交后, 可设 $P=P_1\cap P_2$, 其中 P_1 是一些正则极大理想的交, P_2 是一些非正则极大理想的交. 因为 P 是素理想, 所以 $P=P_1$ 或 $P=P_2$, 这证明了 (1). 如果 P 是一些非正则极大理想 $\{M_i\}_{i\in\Gamma}$ 的交, 那么 A/P 可嵌入半素 PI 环 $\prod\limits_{i\in\Gamma}A/M_i$. 由 [推论2.119] 知 A/P 的 PI 次数也会严格小于 A 的 PI 次数, 于是 P 不是正则素理想. 如果 P 不是正则素理想,

那么任何包含 P 的极大理想也不会是正则素理想, 所以结合 (1) 便知 (3) 成立. 当 P 是一些正则极大理想的交时, P 明显是正则的. 反之, 如果 P 是正则素理想, 由 (1) 和已经证明的 (3) 便知 P 是一些正则极大理想的交. 所以 (2) 也成立. 现在命 I 是 A 所有非正则素理想之交, 那么由零理想是正则素理想以及 (3) 可知 $0 \neq I$. 类似 (3) 的讨论可知 A/I 的 PI 次数严格小于 A 的 PI 次数, 所以含 I 的素理想不是正则素理想. 从而知 $\{P \in \mathrm{Spec}A | P \supseteq I\}$ 就是素谱中所有非正则的素理想构成的集合. 这就证明了 (4). 因为零理想是正则素理想, 所以由 (2) 可知 (6) 成立. 最后证明 (5): 首先由 (4) 的证明过程可知所有正则极大理想构成 $\mathrm{maxSpec}A$ 的闭子集. 假设所有的极大理想都不是正则的, 那么所有正则极大理想的交是 A, 这与 (6) 矛盾. $\square$

关于 Azumaya 代数还有一个著名的结论是 Skolem-Noether 定理, 它可应用于定义有限维中心单代数的元素的约化特征多项式 (见 [定理3.87]), 进而可把矩阵的迹推广至中心单代数类.

Theorem 3.74 (Skolem-Noether 定理, [3])**.** 设 A 是以 Z 为中心的 Azumaya 代数且 Z 是局部环. 那么任何 A 作为 Z-代数的自同构都是内自同构, 即任何 $\theta \in \mathrm{Aut}_Z A$ 满足存在 A 中可逆元 u 使得 $\theta(a) = uau^{-1}, \forall a \in A$.

Proof. 给定 $\theta \in \mathrm{Aut}_Z A$, 我们有两种自然的方式赋予 A 上 A-A 双模结构: 第一种就是以 A 中元素在自身上的左乘与右乘赋予经典的双模 A; 第二种是右模结构使用原有的元素右乘赋予, 左模结构来自 $a \cdot b = \theta(a)b, \forall a, b \in A$, 记此双模为 ${}^\theta A$. 设 $\mathfrak{m}$ 是 Z 唯一的极大理想, 我们已经在 [命题3.45] 中看到 $A/\mathfrak{m}A$ 是以域 $Z/\mathfrak{m}$ 为中心的 (有限维) 中心单代数. 于是由 $\overline{A} = A/\mathfrak{m}A$ 和 $\overline{A}^{op} = A^{op}/\mathfrak{m}A^{op}$ 是中心单代数以及 [命题3.46] 便知

$$(\overline{A})^e = (A/\mathfrak{m}A) \otimes_Z (A/\mathfrak{m}A)^{op}$$

是以 $\overline{Z} \otimes_{\overline{Z}} \overline{Z}$ 为中心的中心单代数. 特别地, $(\overline{A})^e$ 作为 Artin 单环只有一个单模同构类. 注意到 $A/\mathfrak{m}A, {}^\theta A/\mathfrak{m}({}^\theta A)$ 作为左 $(\overline{A})^e$-模都是单模 (因为这时 $A/\mathfrak{m}$ 是单环, 任何非零元生成的主理想便是整个环). 因此存在左 $(\overline{A})^e$-模同构 $\varphi : A/\mathfrak{m}A \to {}^\theta A/\mathfrak{m}({}^\theta A)$, 这也是左 A^e-模同构. 记 $\pi_1 : A \to A/\mathfrak{m}A, \pi_2 : {}^\theta A \to {}^\theta A/\mathfrak{m}({}^\theta A)$ 是标准投射, 因为 A 是投射左 A^e-模, 所以存在左 A^e-模同态 $\tilde{\varphi} : A \to {}^\theta A$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[ddl, dashed, "\tilde{\varphi}"'] \\ & A/\mathfrak{m}A \arrow[d, "\varphi"] \\ {}^\theta A \arrow[r, "\pi_2"] & {}^\theta A/\mathfrak{m}({}^\theta A) \end{tikzcd}$$

特别地, 我们有 $\tilde{\varphi}(A) + \mathfrak{m}({}^\theta A) = {}^\theta A$. 将 $\tilde{\varphi}$ 视作 Z-模同态, 因为 ${}^\theta A$ 是有限生成 Z-模, 所以由 Nakayama 引理可知 $\tilde{\varphi}(A) = {}^\theta A$, 即 $\tilde{\varphi}$ 是满射. 现在命 $u = \tilde{\varphi}(1)$, 我们说明 u 是可逆元并且 θ 是 u 诱导的内自同构.

取 $b \in A$ 使得 $\tilde{\varphi}(b) = 1$, 那么 $1 = \tilde{\varphi}(1)b = \theta(b)\tilde{\varphi}(1)$, 总之有 u 可逆. 任给 $a \in A$, 有 $\tilde{\varphi}(a) = \theta(a)u = ua$, 所以 $\theta(a) = uau^{-1}, \forall a \in A$. 因此 θ 是可逆元 u 诱导的内自同构. $\square$

Remark 3.75. 上述定理“Z 是局部环”的条件用在对等式 $\tilde{\varphi}(A) + \mathfrak{m}({}^\theta A) = {}^\theta A$ 应用 Nakayama 引理上, 因为这时 $\mathrm{Jac}Z = \mathfrak{m}$. 该定理的原始形式是对域上有限维中心单代数阐述的, 由 T. Skolem(挪威, 1887-1963) 于 1927 年先发表, 再被 E. Noether 重新发现. 因此该定理也说明对域上的有限维中心单代数 (例如域上的矩阵代数或 $\mathbb{R}$-(四元数) 代数 $\mathbb{H}$), 其代数自同构一定是某个内自同构.

前面指出 Skolem-Noether 定理的经典版本考虑的是域上有限维中心单代数场景, 这时可进一步加强为

Theorem 3.76 (Skolem-Noether 定理,[20])**.** 设 B 是域 $\Bbbk$ 上有限维中心单代数, A 是 B 的单子代数. 那么任何 A 到 B 的代数同态可延拓为 B 上的 ($\Bbbk$-代数) 内自同构. 中心单代数版本的 [定理3.74] 可视作此直接推论.

Proof. 考虑 $E=\Bbbk$-代数 $A\otimes_{\Bbbk}B^{op}$, 根据 [引理2.77], E 是域 $\Bbbk$ 上有限维单代数. 特别地, E 作为 Artin 单环, 任何 E 上的模都完全可约并且 E 的只有一个单模同构类. 特别地, 任意两个有限维左 E-模只要有相同 $\Bbbk$-线性维数便作为左 E-模同构. 任给 $\Bbbk$-代数同态 $\theta: A\to B$, 可将 B 以两种方式视作有限维左 E-模: 第一种便是标准 A-B 双模结构, 第二种是标准的右 B-模结构但左 A-模结构来自 $a\cdot b=\theta(a)b,\forall a\in A, b\in B$. 将赋予了第二种双模结构的 B 记作 ${}^{\theta}B$. 根据前面的讨论, 我们有左 E-模同构 $B\cong {}^{\theta}B$. 所以有左 E-模同构 $\ell: B\to {}^{\theta}B$ 满足对任何 $a\in A, x,y\in B$ 有 $\ell(ax)=\theta(a)x, \ell(xy)=\ell(x)y$. 其中 $\ell(xy)=\ell(x)y,\forall x,y\in B$ 表明若记 $u=\ell(1)$, 则 $\ell(y)=uy,\forall y\in B$ 且 u 在 B 中有右逆. 再考虑 u 在 B 上的右乘变换, 由 u 有右逆知该右乘变换是单射, 进而由 B 是有限维空间得到 u 诱导的右乘变换是满射. 于是知 u 在 B 中有左逆, 所以 u 是 B 中的可逆元. 总之, 我们得到 ℓ 是 B 上由可逆元 u 诱导的左乘变换. 现在由 $\ell(ax)=\theta(a)\ell(x),\forall a\in A, x\in B$ 可知 $uax=\theta(a)ux,\forall a\in A, x\in B$. 命 $x=1$ 得到 $\theta(a)=uau^{-1},\forall a\in A$. 所以 θ 可延拓由 u 决定的内自同构. □

Example 3.77. 如果 $\Bbbk$ 是域, $\sigma:\Bbbk\to\Bbbk$ 是域上自同构, $A=\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 上有环自同构 $\eta: A\to A$ 满足 $\eta(\alpha a)=\sigma(\alpha)\eta(a),\forall\alpha\in\Bbbk, a\in A$. 记 $\mathrm{M}_n(\sigma): A\to A$ 是由 σ 诱导的环同构, 那么 $\mathrm{M}_n(\sigma^{-1})\eta: A\to A$ 是 $\Bbbk$-代数自同构. 所以 Skolem-Noether 定理表明 $\mathrm{M}_n(\sigma^{-1})\eta$ 是内自同构, 故 η 为某个内自同构与 $\mathrm{M}_n(\sigma^{-1})$ 的合成.

下面我们给一个 [定理3.76] 的直接应用——(有限维) 中心单代数上的线性导子都是内导子.

Corollary 3.78. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上中心单代数, 那么任何 A 上的 $\Bbbk$-线性导子都是内导子. 即对任何 $\delta\in\mathrm{Der}_{\Bbbk}A$, 存在 $b\in A$ 使得 $\delta(a)=[b,a]=ba-ab,\forall a\in A$.

Proof. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上中心单代数, 那么 $\mathrm{M}_2(A)$ 也是域 $\Bbbk$ 上中心单代数. 任给 $\delta\in\mathrm{Der}_{\Bbbk}A$, 那么

$$\varphi: A\to\mathrm{M}_2(A), a\mapsto\begin{pmatrix} a & \delta(a)\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

是单代数 A 到 $\mathrm{M}_2(A)$ 的 $\Bbbk$-代数嵌入, 应用 [定理3.76] 便知存在可逆矩阵 $U\in\mathrm{M}_2(A)$ 使得

$$\varphi(a)=U(aI_2)U^{-1},\forall a\in A.$$

现在设 $U=\begin{pmatrix} u_1 & u_2\\ u_3 & u_4\end{pmatrix}$, 其中 $u_j\in A$. 那么利用矩阵等式 $\varphi(a)U=U(aI_2)$ 可解得 $u_3,u_4\in Z(A)$ 并且

$$\delta(a)u_3=[u_1,a],\delta(a)u_4=[u_2,a],\forall a\in A.$$

因为 A 是中心单代数, 所以 $u_3,u_4\in\Bbbk$. 结合 U 是可逆矩阵知 u_3,u_4 不全为零, 由此便知结论成立. □

Example 3.79. 域 $\Bbbk$ 上矩阵代数上的 $\Bbbk$-线性导子都是某个矩阵决定的内导子.

Skolem-Noether 定理的另一个应用是说明有限维中心可除代数总存在一个极大子域是中心的可分扩张.

Theorem 3.80. 设 D 是域 $\Bbbk$ 上有限维中心可除代数, 那么存在 D 的极大子域满足是 $\Bbbk$ 的有限可分扩张.

Proof. 考虑 D 所有是 $\Bbbk$ 的可分扩张的子域构成的集合 $\mathcal{S}$. 由 $\Bbbk \in \mathcal{S}$ 知 $\mathcal{S}$ 非空, 因此由 $\dim_{\Bbbk} D$ 有限知 $(\mathcal{S}, \subseteq)$ 存在极大元, 记作 H. 下证 H 是 D 的极大子域来完成证明. 考虑 H 在 D 中的中心化子 $C_D(H)$, 我们用反证法说明 $C_D(H) = H$, 由此便知 H 是 D 的极大子域. 假设 $C_D(H) \neq H$, 即有 $C_D(H) \supsetneq H$. 由双重中心化子定理 (见 [定理2.79]) 可知 $Z(C_D(H)) = C_D(C_D(H)) = H$. 所以这时 $C_D(H)$ 是 H 上维数至少为 2 的中心可除代数 (这也说明 $C_D(H)$ 不交换). 现在应用 Jacobson-Noether 定理 (见 [定理2.76]), 存在 $\alpha \in C_D(H) - H$ 使得 α 是 H 上可分元. 于是 $H(\alpha) \supsetneq H$ 是有限可分扩张. 根据 H 的选取, $H \supseteq \Bbbk$ 也是可分的, 所以由可分扩张的传递性 (可分代数角度的证明见 [命题3.36]) 得到 $H(\alpha) \supseteq \Bbbk$ 是可分扩张. 而 $H(\alpha) \supsetneq H$ 表明这与 H 的极大性矛盾. 因此我们得到 $C_D(H) = H$. 这说明 H 是可除代数 D 的极大子域. □

Remark 3.81. 该定理指出有限维中心可除代数总存在可分极大子域.

Corollary 3.82 ([29])**.** 设域 $\Bbbk$ 上代数 A 是有限维中心单代数, 则存在 A 的分裂域满足是 $\Bbbk$ 的有限可分扩张.

Proof. 根据 [引理2.81], 任取不可约左 A-模 M(由于这时 M 已经是 A 忠实的不可约表示所以满足 [引理2.81] 使用条件), 则 $\Bbbk$ 上有限维可除代数 Δ 的任何极大子域 H 都是 A 的分裂域, 即满足 H-代数同构 $A \otimes_{\Bbbk} H \cong \mathrm{M}_m(H)$, 其中 $m^2 = \dim_{\Bbbk} A$. 而 [定理3.80] 表明这样的极大子域 H 总可选取为 $\Bbbk$ 的可分扩张. □

Proposition 3.83. 设 D 是域 F 上有限维可除代数, 记 Z 是 D 的中心并设 $\dim_Z D = h^2$. 如果 $Z \supseteq F$ 是 p 次可分扩张. 那么对任何正整数 k 有 $\overline{Z}$-代数同构 $\mathrm{M}_k(D) \otimes_F \overline{Z} \cong \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z})^p$.

Proof. 首先 $\mathrm{M}_k(D) \otimes_F \overline{Z} \cong (\mathrm{M}_k(D) \otimes_F Z) \otimes_Z \overline{Z} \cong Z \otimes_F (\mathrm{M}_k(D) \otimes_Z \overline{Z}) \cong Z \otimes_F \mathrm{M}_k(D \otimes_Z \overline{Z})$. 因为 D 是域 Z 上中心单代数, $\overline{Z}$ 是单环, 所以由 [引理2.77] 知 $D \otimes_Z \overline{Z}$ 是 $\overline{Z}$ 上 h^2 维单代数, 因此 $D \otimes_Z \overline{Z} \cong \mathrm{M}_h(\overline{Z})$. 这说明 $\mathrm{M}_k(D \otimes_Z \overline{Z}) \cong \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z})$. 最后说明 $Z \otimes_F \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z}) \cong \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z})^p$ 来完成证明. 因为 $Z \supseteq F$ 是有限可分扩张, 因此由本原元定理, $Z \supseteq F$ 是单扩张. 设 $Z = F(\alpha)$, α 在 F 上最小多项式记作 $m(x)$, 那么 $m(x)$ 在 $\overline{Z}$ 上可分裂为互不相同的一次多项式乘积 $m(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_p)$. 现在有

$$Z \otimes_F \overline{Z} = F(\alpha) \otimes_F \overline{Z} \cong F[x]/(m(x)) \otimes_F \overline{Z} \cong \overline{Z}[x]/(m(x)) \cong \prod_{i=1}^{p} \overline{Z}[x]/(x - \alpha_i) \cong \overline{Z}^p,$$

所以 $Z \otimes_F \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z}) \cong \mathrm{M}_{hk}(Z \otimes_F \overline{Z}) \cong \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z}^p) \cong \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z})^p$. □

Remark 3.84. 根据证明过程可将 [命题3.83] 结论中代数闭包 $\overline{Z}$ 修改为 F 的某个 (包含 Z 的) 有限 Galois 扩张: 因为 $Z \supseteq F$ 是有限可分扩张, 因此由本原元定理, $Z \supseteq F$ 是单扩张. 设 $Z = F(\alpha)$, 考虑 α 在 F 上最小多项式的分裂域 $L \supseteq Z$, 那么由 α 在 F 上可分可得 L 是 F 的有限 Galois 扩张. 再沿用证明过程即可.

Skolem-Noether 定理也能够让我们给出 (结合) 代数有限维表示间的等价性一个刻画.

Proposition 3.85. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数, $\rho_1 : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk} V, \rho_2 : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk} W$ 是 A 的两个有限维表示 (对一般的 $\Bbbk$-代数未必存在非零的有限维表示, 例如特征是零的域上的 Weyl 代数). 那么 ρ_1 与 ρ_2 等价 (即 V 与 W 作为左 A-模同构) 的充要条件是存在 $\Bbbk$-代数同构 $\theta : \mathrm{End}_{\Bbbk} V \to \mathrm{End}_{\Bbbk} W$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & \mathrm{End}_{\Bbbk} V \arrow[d, dashed, "\theta"] \\ & \mathrm{End}_{\Bbbk} W \end{tikzcd}$$

Proof. 必要性是明显的, 仅证充分性. 这时 V 与 W 是维数相同的线性空间, 可设有 $\Bbbk$-线性同构 $h_1 : V \to \Bbbk^n, h_2 : W \to \Bbbk^n$. 那么这诱导 $\Bbbk$-代数同构 $c_1 : \mathrm{End}_{\Bbbk}V \to \mathrm{M}_n(\Bbbk), f \mapsto h_1 f h_1^{-1}, c_2 : \mathrm{End}_{\Bbbk}W \to \mathrm{M}_n(\Bbbk), g \mapsto h_2 g h_2^{-1}$. 于是存在唯一的 $\Bbbk$-代数同构 $\overline{\theta} : \mathrm{M}_n(\Bbbk) \to \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & \mathrm{End}_{\Bbbk}V \arrow[r, "c_1"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathrm{M}_n(\Bbbk) \arrow[d, dashed, "\overline{\theta}"] \\
& \mathrm{End}_{\Bbbk}W \arrow[r, "c_2"] & \mathrm{M}_n(\Bbbk)
\end{tikzcd}$$

根据 Skolem-Noether 定理, 存在可逆矩阵 U 使得 $\overline{\theta}(X) = U^{-1}XU, \forall X \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 现在定义

$$V_2 \xrightarrow{h_2} \Bbbk^n \xrightarrow{U} \Bbbk^n \xrightarrow{h_1^{-1}} V_1$$

的合成映射 $\mu : V_2 \to V_1$, 这是 $\Bbbk$-线性同构. 下证这是左 A-模同态, 这只需要验证对任何 $a \in A$ 有

$$\rho_1(a)h_1^{-1}Uh_2 = h_1^{-1}Uh_2\rho_2(a).$$

根据 $\overline{\theta}$ 以及 U 的定义, 我们有 $U^{-1}c_1(\rho_1(a))U = c_2(\rho_2(a))$. 那么 $U^{-1}h_1\rho_1(a)h_1^{-1}U = h_2\rho_2(a)h_2^{-1}$. □

有限维中心单代数分裂域的存在性 (见 [引理2.81] 的注记)、Skolem-Noether 定理和 [推论3.82] 使人们能够在中心单代数场景类似于矩阵代数去定义“迹”的概念. 以下固定域 $\Bbbk$ 上有限维中心单代数 A.

任取 A 的分裂域 F, 即 $\Bbbk$ 的满足有 F-代数同构 $A \otimes_{\Bbbk} F \cong \mathrm{M}_m(F)$, 其中 $m^2 = \dim_{\Bbbk} A$, 的域扩张 F. 设 $h, g : A \otimes_{\Bbbk} F \to \mathrm{M}_m(F)$ 都是 F-代数同构, 那么 hg^{-1} 是矩阵代数 $\mathrm{M}_m(F)$ 上的代数自同构, 根据 Skolem-Noether 定理, hg^{-1} 一定是某个可逆阵决定的内自同构. 这一观察表明

Lemma 3.86 ([29])**.** 对任何 $a \in A$, $a \otimes 1 \in A \otimes_{\Bbbk} F$ 在代数同构 h, g 作用下的像有相同特征多项式.

Proof. 这时存在可逆阵 $U \in \mathrm{M}_m(F)$ 使得 $hg^{-1}(X) = U^{-1}XU, \forall X \in \mathrm{M}_m(F)$. 取 $X = g(a \otimes 1)$ 即可. □

下面我们马上说明 $h(a \otimes 1) \in \mathrm{M}_m(F)$ 的特征多项式不仅系数在 $\Bbbk$ 中, 也不依赖于分裂域 F 的选取.

Theorem 3.87 ([29])**.** 任给 $a \in A$, 对 A 的分裂域 F, 记 $h(a \otimes 1) \in \mathrm{M}_m(F)$ 的特征多项式为 $\mathrm{char.p}_F(a \otimes 1)$(根据 [引理3.86], 该多项式不依赖于代数同构 h 的选取). 那么 $\mathrm{char.p}_F(a \otimes 1) \in \Bbbk[x]$ 并且 $\mathrm{char.p}_F(a \otimes 1)$ 不依赖于分裂域 F 的选取. 因此 $\mathrm{char.p}_F(a \otimes 1)$ 是**仅依赖于** a 的多项式, 记作 $\mathrm{red.p}(a)$, 称为 a 的**约化特征多项式**.

Proof. 我们先证明 $\mathrm{char.p}_F(a \otimes 1)$ 不依赖于 F 的选取再说明它系数均在 $\Bbbk$ 中. 任取 A 的分裂域 E, 不妨设 $E \supseteq F$(否则, 由下面的 [引理3.89], 可找 $\Bbbk$ 的一个更大的域扩张包含 E 和 F, 易见分裂域的域扩张依然是分裂域), 那么对 F-代数同构 $h : A \otimes_{\Bbbk} F \to \mathrm{M}_m(F)$, 我们可以借助 E-代数同构

$$(A \otimes_{\Bbbk} F) \otimes_F E \cong A \otimes_{\Bbbk} E, \mathrm{M}_m(F) \otimes_F E \cong \mathrm{M}_m(E)$$

从 h 出发得到 $A \otimes_{\Bbbk} E$ 到 $\mathrm{M}_m(E)$ 的 E-代数同构, 它把 $a \otimes 1$ 映至 $h(a \otimes 1)$. 在 [引理3.86] 中已经指出对固定的分裂域 E, 不同的 E-代数同构 $A \otimes_{\Bbbk} E \cong \mathrm{M}_m(E)$ 产生的 $a \otimes 1$ 的特征多项式相同, 因此分裂域 E 产生的 $a \otimes 1$ 的特征多项式就是分裂域 F 给出的特征多项式. 至此得到 $\mathrm{char.p}_F(a \otimes 1)$ 不依赖于分裂域的选取.

下面说明 $\mathrm{char.p}_F(a \otimes 1) \in \Bbbk[x]$ 来完成定理证明. 根据 [推论3.82], 我们可选取分裂域 F 是 $\Bbbk$ 的有限可分扩张. 因为分裂域的扩域依然是分裂域, 所以我们不妨设 F 是 $\Bbbk$ 的有限 Galois 扩张 (具体地, 通过本原元

定理我们知道存在 $\Bbbk$ 上可分元 $\alpha \in F$ 使得 $F = \Bbbk(\alpha)$, 再考虑 α 的最小多项式在 $\Bbbk$ 上的分裂域 L, 那么 L 是 F 的有限扩张并且是 $\Bbbk$ 的有限 Galois 扩张, 取 $F = L$ 即可). 考虑 $F \supseteq \Bbbk$ 的 Galois 群 $G = \mathrm{Aut}_{\Bbbk}F$, 那么由 Galois 理论我们知道 $\Bbbk = F^G$. 下面通过说明 $\mathrm{char.p}_F(a \otimes 1) \in F[x]$ 的系数在 G 作用下不动来得到结论. 先考虑一个更一般的场景: 对任何与 F 作为 K-代数同构的 K 的域扩张 F' 和取定的 K-代数同构 $\sigma : F \to F'$(之后我们将局限回 $F' = F$ 且 $\sigma \in G$ 的场景), 那么存在唯一的 F'-代数同构 $h' : A \otimes_{\Bbbk} F' \to \mathrm{M}_m(F')$ 使

$$\begin{tikzcd} A \otimes_{\Bbbk} F \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\sigma"] \arrow[d, "h"'] & A \otimes_{\Bbbk} F' \arrow[d, dashed, "h'"] \\ \mathrm{M}_m(F) \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] & \mathrm{M}_m(F') \end{tikzcd}$$

交换, 其中 $\tilde{\sigma}$ 是矩阵代数间由系数环同构诱导的自然环同构. 特别地, 我们有

$$\tilde{\sigma}(h(a \otimes 1)) = h'(a \otimes \sigma(1)) = h'(a \otimes 1),$$

这一观察表明 $a \otimes 1$ 由分裂域 F 定义的特征多项式系数均作用 σ 后得到的特征多项式就是 $a \otimes 1$ 由分裂域 F' 定义出的特征多项式. 现在取 $F' = F, \sigma$ 是 G 中任意元素, 那么 $\mathrm{char.p}_F(a \otimes 1)$ 关于 G 中任何元素作用不动. 因此由 $\Bbbk = F^G$ 我们得到 $\mathrm{char.p}_F(a \otimes 1) \in \Bbbk[x]$. $\square$

Remark 3.88. 证明过程中已经指出域 $\Bbbk$ 上有限维中心单代数总有分裂域 F 使 $F \supseteq \Bbbk$ 是有限 Galois 扩张.

Lemma 3.89 ([29]). 设域 E, F 是 $\Bbbk$ 的域扩张, 那么存在域 L 使得 E 与 F 均可嵌入 L.

Proof. 考虑 $\Bbbk$-交换代数 $E \otimes_{\Bbbk} F$, 并取其极大理想 M, 作 $L = (E \otimes_{\Bbbk} F)/M$ 即可. $\square$

沿用 [定理3.87] 的记号, 前面的讨论表明任取有限维中心单代数 A 的分裂域 F, 取 F-代数同构 $h : A \otimes_{\Bbbk} F \to \mathrm{M}_m(F)$, 并记标准嵌入 $i : A \to A \otimes_{\Bbbk} F, a \mapsto a \otimes 1$, 考虑映射的合成

$$A \xrightarrow{i} A \otimes_{\Bbbk} F \xrightarrow{h} \mathrm{M}_m(F) \xrightarrow{\mathrm{tr}} F,$$

若记上述合成映射是 $\tau : A \to F$, 那么 [定理3.87] 表明 τ 的定义不依赖于 F 和 h 的选取并且 $\tau(A) = \Bbbk$. 定义 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}} : A \to \Bbbk, a \mapsto \tau(a)$, 这是 $\Bbbk$-线性映射并且把每个 a 映至矩阵 $h(a \otimes 1)$ 的迹. 对每个 $a \in A$, $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(a) \in \Bbbk$ 是关于 a 的不变量, 进而映射 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$ 是中心单代数 A 的不变量, 称为 A 的**约化迹**, 易见它是 $\Bbbk$-线性映射.

根据约化迹的定义, $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(a)$ 就是 a 的约化特征多项式 $\mathrm{red.p}(a)$ 次高次项系数的负元, 即若把约化特征多项式写作 $\mathrm{red.p}(a) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + x^n$, 那么 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(a) = -\alpha_{n-1}$. 由矩阵的迹的性质易见

Lemma 3.90. 域 $\Bbbk$ 上有限维中心单代数 A 的约化迹映射 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}} : A \to \Bbbk$ 满足 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(ab) = \mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(ba), \forall a, b \in \Bbbk$.

Remark 3.91. 一般地, 如果含幺环 R 有中心子环 C, 称满足 $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba), \forall a, b, \in R$ 的 C-线性映射 $\mathrm{tr} : R \to C$ 是 R 到中心子环 C 的**迹映射**. 有限维中心单代数 A 到 $\Bbbk$ 的约化迹映射是特殊的迹映射.

具有良好性质的迹映射能够保证环许多可控的性质, 例如在幺元处的取值不是 $\mathbb{Z}$-挠元的迹满足

Proposition 3.92. 设 R 是含幺环, C 是中心子环并且 $\mathrm{tr} : R \to C$ 是迹映射. 如果 $\mathrm{tr}(1)$ 满足 $n\mathrm{tr}(1) \neq 0, \forall n \geq 1$, 那么 R 是 IBN 环.

Proof. 只要证对任何正整数 m,n, 如果 R 上 $m\times n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $n\times m$ 阶矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times m}$ 满足 $AB=I_m, BA=I_n$, 则 $n=m$ 即可. 只需注意到 $n\mathrm{tr}(1)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}\mathrm{tr}(b_{ik}a_{ki})=\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{tr}(a_{ki}b_{ik})=m\mathrm{tr}(1)$. □

现设 A 是域 $\Bbbk$ 上 n^2 维中心单代数 (由 Kaplansky 定理, A 作为 PI 代数的最小次数是 $2n$. 它的 PI 次数就是 n), 并设 M 是不可约左 A-模, 那么这时对 A 的分裂域 F(我们不妨设 F 为 A 的极大子域), 有 F-代数同构 $A\otimes_{\Bbbk}F\cong \mathrm{M}_n(F)$. 由 [引理2.81(4)], n 也是 M 作为 F-线性空间的维数. 结合 [引理2.69] 的证明过程知 F-代数同构 $A\otimes_{\Bbbk}F\cong \mathrm{M}_n(F)$ 可由 $A\otimes_{\Bbbk}F$ 中元素在 M 上的左乘变换给出 (这里按照 [引理2.81(3)] 将 M 视作左 $A\otimes_{\Bbbk}F$-模, 是不可约模, 并把 $\mathrm{M}_n(F)$ 和 $\mathrm{End}_F M$ 视作等同). 所以一个基本的观察是 $h(a\otimes 1)$ 的特征多项式 (即 $\mathrm{red.p}(a)$) 和 $a\otimes 1$ 所决定的 M 上左乘变换 (作为 F-线性变换) 的特征多项式一致. 因为 $A\otimes_{\Bbbk}F$ 是 Artin 单环, 所以 $A\otimes_{\Bbbk}F$ 作为自身上左模是完全可约的, 恰好 (在同构意义下) 可分解为 n 个不可约左 $A\otimes_{\Bbbk}F$-模 M 的直和. 由于准对角阵的特征多项式就是对角线上各个分块矩阵特征多项式的乘积, 所以对每个 $a\in A$, $a\otimes 1$ 所决定的 $A\otimes_{\Bbbk}F$ 上左乘变换 (作为 F-线性变换) 的特征多项式就是 $a\otimes 1$ 所决定的 M 上左乘变换 (作为 F-线性变换) 的特征多项式的 n 次方. 使用符号语言, 便是 $\mathrm{char.p}(a\otimes 1)_\ell=(\mathrm{red.p}(a))^n$, 其中 $(a\otimes 1)_\ell$ 表示 $a\otimes 1$ 在 $A\otimes_{\Bbbk}F$ 上的左乘变换. 通过取 A 具体的 $\Bbbk$-基可直接验证 $\mathrm{char.p}(a\otimes 1)_\ell$ 与 a 诱导的 A 上左乘变换作为 $\Bbbk$-线性变换的特征多项式一致. 通常, 对域 $\Bbbk$ 上的有限维代数 B, 我们都可以定义 $\Bbbk$-线性映射 $\mathrm{tr}_{\mathrm{reg}}: B\to\Bbbk, b\mapsto \mathrm{tr}(b_\ell)$, 其中 b_ℓ 表示元素 b 在 B 上的左乘变换在 $\Bbbk$ 中的迹. 称 $\mathrm{tr}_{\mathrm{reg}}$ 是有限维代数的**正则迹**. 而我们刚刚的讨论证明了中心单代数上正则迹与约化迹的如下关系:

Theorem 3.93 (中心单代数的约化迹与正则迹,[29])**.** 设 A 是域 $\Bbbk$ 上 n^2 维中心单代数, $a\in A$. 那么 A 上左乘变换 a_ℓ 作为 $\Bbbk$-线性变换的特征多项式就是 $(\mathrm{red.p}(a))^n$. 特别地, 我们有 $\mathrm{tr}_{\mathrm{reg}}=n\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$.

Remark 3.94. 这里再指出中心单代数的约化迹一定是非零的. 沿用前面的记号, 设 A 是域 $\Bbbk$ 上 n^2 维中心单代数, 那么有分裂域 F 和 F-代数同构 $h: A\otimes_{\Bbbk}F\to\mathrm{M}_n(F)$. $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(A)$ 就是 $\mathrm{M}_n(F)$ 中所有矩阵的迹构成的集合. 无论 $\Bbbk$ 是否有正特征, 总存在迹非零的矩阵 (例如基础矩阵 E_{11}). 因此 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(A)\neq 0$. 而上述定理表明当 $\mathrm{char}\Bbbk$ 整除 n 时, $\Bbbk$ 上 n^2 维中心单代数的正则迹一定是零. 因此中心单代数的约化迹能获取更多信息.

Remark 3.95. 由于域上有限维代数的正则迹容易计算, 故 $\mathrm{char}\Bbbk\notin[1,n]$ 时可用该定理来计算约化迹.

如果含幺环 R 到中心子环 C 有非零 C-模同态 $\tau: R\to C$ 满足 $\tau(ab)=\tau(ba),\forall a,b\in R$, 那么 R 有真理想 $I=\{a\in R|\tau(aR)=0\}$. 该理想衡量 τ 诱导的 C-对称双线性型 $R\times R\to C,(a,b)\mapsto\tau(ab)$ 的非退化性. 易见该对称双线性型非退化当且仅当上述理想 $I=0$. 特别地, 当 R 是单环时, $I=0$. 所以我们得到

Proposition 3.96 ([29])**.** 设 A 是域 $\Bbbk$ 上 n^2 维中心单代数, 那么约化迹 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$ 诱导的对称双线性型

$$\langle -,-\rangle_{\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}}: A\times A\to\Bbbk, (a,b)\mapsto \mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(ab)$$

是非退化的.

Example 3.97. 考虑域 $\Bbbk$ 上 n 阶矩阵代数 $A=\mathrm{M}_n(\Bbbk)$, 这时 $\Bbbk$ 就是 A 的分裂域. 因此根据约化迹的构造我们立即看到矩阵代数作为中心单代数的约化迹就是原有的经典迹映射.

如果 R 是 PI 次数为 n 的素 PI 环, 记其中心是 Z 且记 $S=Z-\{0\}$ 是 R 的中心正则元集, 那么根据 Posner 定理可知 R_S 是 $Z_S=\mathrm{Frac}Z$ 上维数为 n^2 的中心单代数, 于是我们可以利用中心单代数 R_S 的约化迹

去构造一个 R 到 Z_S 的"迹映射". 具体地, 考虑局部化映射 $\lambda_S: R\to R_S$ 并取 R_S 的分裂域 $F\supseteq \mathrm{Frac}Z$, 沿用前面的记号, 取定 F-代数同构 $h: R_S\otimes_{Z_S}F\to \mathrm{M}_n(F)$, 考虑下述映射列的合成:

$$R\xrightarrow{\lambda_S}R_S\longrightarrow R_S\otimes_{Z_S}F\xrightarrow{h}\mathrm{M}_n(F)\xrightarrow{\mathrm{tr}}F,$$

其中 tr 表示矩阵代数上的经典迹. 易见上述映射列的合成就是 λ_S 与中心单代数 R_S 的约化迹的合成, 记上述映射列的合成为 $\tau: R\to F$, 那么 [定理3.87] 表明 $\tau(R)\subseteq Z_S$. 结合中心单代数的约化迹总是非零的, 不难看到存在 $a\in R$ 使得 $\tau(a)\neq 0$. 所以我们改写 τ 的陪域得到非零 Z-线性映射 $\tau: R\to Z_S, a\mapsto \tau(a)$, 它满足对所有的 $a,b\in A$ 有 $\tau(ab)=\tau(ba)$. 人们会把 Z_S 修改地更小些但始终包含 $\tau(R)$ 来研究素 PI 环 R 的性质.

Definition 3.98 (迹环, [30])**.** 设 R 是以 Z 为中心且 PI 次数为 n 的素 PI 环, $S=Z-\{0\}$, $\lambda_S: R\to R_S$ 是局部化映射, F 是 R_S 的分裂域并取定 F-代数同构 $h: R_S\otimes_{Z_S}F\to \mathrm{M}_n(F)$. 对每个正整数 $1\le k\le n$, 记

$$\sigma_k: \mathrm{M}_n(F)\to F, A\mapsto \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_k}$$

是将每个方阵映至其特征值在第 k 个初等对称多项式下的取值, 这里 $\lambda_1,...,\lambda\in\overline{F}$ 是 A 的特征值. 命

$$c_k: R\xrightarrow{\lambda_S}R_S\longrightarrow R_S\otimes_{Z_S}F\xrightarrow{h}\mathrm{M}_n(F)\xrightarrow{\sigma_k}F,$$

根据 [定理3.87], $c_k(R)\subseteq Z_S$(注意到 $h(1\otimes 1)=I_n$ 的特征多项式是 $(x-1)^n$, 所以 $c_n(1)=(-1)^n$). 定义 $T(R)$ 为 $R\cup\{c_k(R)|1\le k\le n\}$ 在 R_S 中生成的子环 (即 $\mathbb{Z}$-子代数, 也可以等价地, 先定义 $\{c_k(R)|1\le k\le n\}$ 在 Z_S 中生成的 Z-子代数 T, 再命 $T(R)=TR$), 那么 $T(R)\supseteq R$ 是环扩张. 称 $T(R)$ 是 R 的**迹环**或**特征闭包**.

Remark 3.99. 如果域 Z_S 的特征 $\mathrm{char}Z_S\notin[1,n]$, 那么对任何正整数 $1\le k\le n$, $k!$ 是 Z_S 中可逆元. 那么也是中心单代数 R_S 的分裂域 F 中的可逆元. 于是由下面的 [引理3.102(3)], 每个 $c_k(a), a\in R$, 作为矩阵 $h(a\otimes 1)$ 的特征多项式的系数, 可由矩阵 $h(a\otimes 1)$ 的正整数幂的迹生成. 这时 Z_S 的 Z-子代数 T 含于 Z_S 的由 $\{\mathrm{tr}(h(a\otimes 1))=\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(a)|a\in R\}$ 生成的含幺子环 (由 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$ 的 Z-线性性知这也是 Z-子代数) 中, 其中 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$ 表示中心单代数 R_S 的约化迹. 因此 T 就是由 $\{\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(a)|a\in R\}$ 在 Z_S 中生成的含幺子环. 这是迹环命名之由.

Remark 3.100. 对每个 $a\in R$, 由 $(-1)^kc_k(a)$ 就是矩阵 $h(a\otimes 1)$ 的特征多项式中 x^{n-k} 的系数可知若定义

$$\chi_{a,n}(x)=x^n-c_1(a)x^{n-1}+c_2(a)x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}(a)x+(-1)^nc_n(a)\in T[x]\subseteq Z_S[x],$$

则 $\chi_{a,n}(a)\otimes 1=\chi_{a,n}(a\otimes 1)=\chi_{a,n}(h(a\otimes 1))=0$. 结合 Z_S 是域知 $\chi_{a,n}(a)=0$. 并指出 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(1)=n$.

Remark 3.101. 这里使用的迹环定义与一些文献中采用的定义不同 (例如 [2]). 这里的迹环比 [2] 中的大.

下面我们回顾线性代数中 Newton 公式以及对称多项式与幂和间的基本关系.

Lemma 3.102 (Newton 公式)**.** 设 $\Bbbk$ 是域且 n 是固定的正整数, 对每个正整数 $1\le k\le n$, 记

$$\sigma_k=\sigma_k(x_1,...,x_n)=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

是多项式代数 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 中第 k 个初等对称多项式, 并记 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$ 是第 k 个 (Newton) 幂和 (当 $k=0$ 时, $s_0=n$). 那么对固定的正整数 k, 有

(1)(Newton) 如果 $k \leq n-1$, 那么 $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 + \cdots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0$.
(2)(Newton) 当 $k \geq n$ 时, 有 $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 + \cdots + (-1)^{n-1}s_{k-n+1}\sigma_{n-1} + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0$.
(3) 如果正整数 $k \in [1,n]$ 但 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1,k]$, 那么有

$$\sigma_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}.$$

特别地, 对域 $\Bbbk$ 上任何 n 阶方阵 M, M 的特征多项式的系数都在 $\{\mathrm{tr}(M^i)|1 \leq i \leq n\} \subseteq \Bbbk$ 生成的子环中.
(4) 设 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1,n]$, 记 $\mathbb{l}$ 是 $\Bbbk$ 的素域, 即

$$\mathbb{l} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \mathrm{char}\Bbbk = 0 \\ \mathbb{F}_p, & \mathrm{char}\Bbbk = p, \end{cases}$$

其中 p 是素数, $\mathbb{F}_p$ 表示 p 元域. 那么对任何 $\mathbb{l}$ 上 n 元对称多项式 h, 存在唯一的 n 元多项式 $p \in \mathbb{l}[x_1,...,x_n]$ 使得 $h = p(s_1,...,s_n)$. 并且, 对每个正整数 $1 \leq k \leq n$, 存在唯一的 k 元多项式 $p_k \in \mathbb{Z}[(k!)^{-1}][x_1,...,x_k]$ 使得

$$\sigma_k = p_k(s_1,...,s_k).$$

根据 (3) 的结论, 我们可以如下显式地写出 p_k 的表达式:

$$p_k(x_1,...,x_k) = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & x_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k-1} & x_{k-2} & x_{k-3} & \cdots & k-1 \\ x_k & x_{k-1} & x_{k-2} & \cdots & x_1 \end{vmatrix}.$$

Proof. 对多项式代数 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 添加变量 x 得到 $n+1$ 元多项式代数 $\Bbbk[x_1,...,x_n,x]$, 在证明引理前我们先说明对 $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + (-1)^n\sigma_n$, 有

$$x^{k+1}f'(x) = (s_0x^k + s_1x^{k-1} + \cdots + s_k)f(x) + g(x),$$

其中 $g(x)$ 作为 x 的多项式次数严格小于 n. 首先根据多项式求导的定义立即看到

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{f(x)}{x-x_i}.$$

所以对每个正整数 k, 有

$$x^{k+1}f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x^{k+1}f(x)}{x-x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{(x^{k+1}-x_i^{k+1})f(x)}{x-x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1}f(x)}{x-x_i},$$

易见最后一个表达式的第一个和式就是 $(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)f(x)$, 记第二个表达式对应的多项式为 $g(x)$, 它关于 x 的次数明显严格低于 n. 现在对 $f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x+(-1)^n\sigma_n$ 对 x 求导再乘上 x^{k+1}, 我们得到 $x^{k+1}f'(x)=nx^{n+k}-(n-1)\sigma_1x^{n+k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x^{k+1}$. 由前面的讨论, 还有

$$\begin{aligned}x^{k+1}f'(x)&=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)f(x)+g(x)\\&=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)(x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x+(-1)^n\sigma_n)+g(x).\end{aligned}$$

当 $k\leq n-1$ 时, 最后一个表达式关于 x^n 系数为 $s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2+\cdots+(-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1}+(-1)^kn\sigma_k$. 因此比较该系数与 $x^{k+1}f'(x)=nx^{n+k}-(n-1)\sigma_1x^{n+k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x^{k+1}$ 中 x^n 的系数可得

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2+\cdots+(-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1}+(-1)^kn\sigma_k=(-1)^k(n-k)\sigma_k,$$

整理上式便知 $s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2+\cdots+(-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1}+(-1)^kk\sigma_k=0$, 这证明了 (1).

如果 $k\geq n$, 那么之前得到 $(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)f(x)+g(x)$ 的表达式中关于 x^n 的系数便是

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2+\cdots+(-1)^{n-1}s_{k-n+1}\sigma_{n-1}+(-1)^ns_{k-n}\sigma_n,$$

这时 $x^{k+1}f'(x)=nx^{n+k}-(n-1)\sigma_1x^{n+k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x^{k+1}$ 中 x^n 的系数是 0, 这说明

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2+\cdots+(-1)^{n-1}s_{k-n+1}\sigma_{n-1}+(-1)^ns_{k-n}\sigma_n=0,$$

于是知 (2) 也成立. 下面证明 (3). 根据前面得到的 Newton 公式, 我们有 k 个等式:

$$\sigma_1=s_1,s_1\sigma_1-2\sigma_2=s_2,...,s_{k-1}\sigma_1-s_{k-2}\sigma_2+\cdots+(-1)^{k-1}k\sigma_k=s_k.$$

这些等式可视作关于 $\sigma_1,...,\sigma_k$ 的线性方程组 (将 σ_i 视作变量, 视方程组为系数在有理函数域 $\Bbbk(x_1,...,x_n,x)$ 中的线性方程组), 该关于 $\sigma_1,...,\sigma_k$ 的线性方程组的系数矩阵 (这里记该 k 阶矩阵为 M) 的行列式为

$$\det M=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\s_1&-2&0&\cdots&0\\s_2&-s_1&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\s_{k-2}&-s_{k-3}&s_{k-4}&\cdots&0\\s_{k-1}&-s_{k-2}&s_{k-3}&\cdots&(-1)^{k-1}k\end{vmatrix}=(-1)^{1+2+\cdots+(k-1)}k!.$$

记 M_k 是将 M 的第 k 列更换为 $(s_1,s_2,...,s_k)^T$, 其余列保持不变的 k 阶矩阵. 注意到 $\det M$ 是 $\Bbbk$ 中可逆元 (这里用到了 $\mathrm{char}\Bbbk\notin[1,k]$ 的条件), 因此由 Cramer 法则, $\sigma_k=\det M_k/\det M$. 下面我们计算 $\det M_k$.

将 M_k 的最后一列经 $k-1$ 次相邻对换转移到第一列后, 对每个 $3\leq i\leq k$, 将新矩阵的第 i 列乘上 $(-1)^{i-2}$, 我们得到

$$\det M_k=(-1)^{(k-1)+(1+2+3+\cdots+k-2)}\begin{vmatrix}s_1&1&0&0&\cdots&0\\s_2&s_1&2&0&\cdots&0\\s_3&s_2&s_1&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\s_{k-1}&s_{k-2}&s_{k-3}&s_{k-4}&\cdots&k-1\\s_k&s_{k-1}&s_{k-2}&s_{k-3}&\cdots&s_1\end{vmatrix}.$$

现在我们不难看到 $\sigma_k = \det M_k/\det M$ 就是 (3) 中要证结论中的表达式.

最后证明 (4). 根据对称多项式基本定理, 对 $\mathbb{l}$ 上任何 n 元对称多项式, 总可唯一地表示为初等对称多项式 $\sigma_1, ..., \sigma_n$ 的多项式. 因此应用 (3) 可知 (这时 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1,k], \forall 1 \leq k \leq n$)$\mathbb{l}$ 上 n 元对称多项式均可表示为关于 $s_1, ..., s_n$ 的多项式. 因此我们想要证明对称多项式关于 $s_1, ..., s_n$ 的多项式表示的唯一性, 我们必须验证 $\{s_1, ..., s_n\}$ 是 $\mathbb{l}$ 代数无关的. 下面用反证法证明该断言. 首先注意 $\mathbb{l}[s_1, ..., s_n]$ 就是 $\mathbb{l}$ 上对称多项式代数, 故由 $\mathbb{l}[x_1, ..., x_n] \supseteq \mathbb{l}[x_1, ..., x_n]^{S_n} = \mathbb{l}[s_1, ..., s_n]$(这里将对称群 S_n 通过置换多项式变量的方式自然地作用到多项式代数上) 是整扩张知 $\mathrm{k.dim}\mathbb{l}[s_1, ..., s_n] = n$. 于是由下面的 [引理3.104] 得到 $\{s_1, ..., s_n\}$ 在 $\mathbb{l}$ 上代数无关. 下面我们说明对每个正整数 $1 \leq k \leq n$, 存在唯一的 k 元多项式 $p_k \in \mathbb{Z}[(k!)^{-1}][x_1, ..., x_k]$ 使得 $\sigma_k = p_k(s_1, ..., s_k)$. 首先, k 元多项式 p_k 的存在性由 (3) 保证. 其次, 注意到 $\mathbb{Z}[(k!)^{-1}][x_1, ..., x_k] \subseteq \mathbb{l}[x_1, ..., x_n]$, 所以 p_k 的唯一性来自 $\{s_1, ..., s_n\}$ 的 $\mathbb{l}$-代数无关性. 至此, (4) 的证明已完整. $\square$

Remark 3.103. 根据证明过程不难看到结论对 $\Bbbk$ 是整区的情形也成立 (或者直接把整区嵌入商域应用引理).

Lemma 3.104. 设 $\mathbb{l}$ 是域, A 是 $\mathbb{l}$ 上可由子集 S 生成的交换代数. 那么

$$\mathrm{k.dim}A \leq \sup\{|T|\,|T\text{是}S\text{的有限子集且}\mathbb{l}\text{-代数无关}\}.$$

特别地, 若取 $A = \mathbb{l}[x_1, ..., x_n], S = \{x_1, ..., x_n\}$, 那么 $\mathrm{k.dim}\mathbb{l}[x_1, ..., x_n] = n$ 是上述不等式的直接推论.

Proof. 如果 $S = \varnothing$, 那么 $A = \mathbb{l}$ 是域. 于是 $\mathrm{k.dim}A \leq 0 = \sup\{|T|\,|T = \varnothing\}$. 因此只需讨论 $S \neq \varnothing$ 并且 $\sup\{|T|\,|T\text{是}S\text{有限子集且代数无关}\}$ 是自然数 (记为 $n \in \mathbb{N}$) 的情形. 下面对 n 作归纳证明: 若 A 是域 $\mathbb{l}$ 上交换代数, S 是 A 非空生成元集, 则 $\mathrm{k.dim}A \leq \sup\{|T|\,|T\text{是}S\text{有限子集且代数无关}\}$. 如果 $n = 0$, 那么 S 中任何元素都是 $\mathbb{l}$ 上代数元, 那么 A 中所有元素都是 $\mathbb{l}$ 上代数元. 任取 A 的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s$, 那么整区 A/P_0 有长度为 s 的素理想链 $\{0\} \subsetneq P_1/P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s/P_0$. 因为 A 中任何元素在 $\mathbb{l}$ 上代数, 所以整区 A/P_0 中任何元素也在 $\mathbb{l}$ 上代数 (即 $A/P_0 \supseteq \mathbb{l}$ 是整扩张), 由此得到 A/P_0 是域, 所以 $s = 0$, 这说明 $\mathrm{k.dim}A = 0 \leq n$, 结论成立. 假设结论对不超过 $n-1 (n \geq 1)$ 的情形成立, 那么对 n 的情形, 我们分两步证明结论.

Step1. 若 A 是整区, 任取 A 的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s$(不妨设 $s \geq 1$, 否则结论直接成立), 可得 A/P_1 的长度为 $s-1$ 的素理想链 $\{0\} \subsetneq P_2/P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s/P_1$, 下面证明 A/P_1 的生成元集 $\{a + P_1 | a \in S\}$ 的任何一个有限代数无关子集 T 都有 $|T| \leq n-1$, 一旦证明该断言, 对 A/P_1 作归纳假设可知 $s-1 \leq n-1$, 进而可得 $\mathrm{k.dim}A \leq n$. 假设 $\{a + P_1 | a \in S\}$ 有一个代数无关子集有 n 个元素, 设为 $\{a_1 + P_1, a_2 + P_1, ..., a_n + P_1\}$, 那么 $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ 是 S 的代数无关子集. 于是对任何 $a \in S$, 都存在 $\mathbb{l}[a_1, a_2, ..., a_n][x]$ 中的非零多项式 $h(x)$ 使得 $h(a) = 0$. 由此可得 $A \subsetneq \mathrm{Frac}A$ 是 $\mathrm{Frac}\mathbb{l}[a_1, a_2, ..., a_n]$ 的整扩张. 故任给 $a \neq 0 \in P_1$, 均存在以 $\mathbb{l}[a_1, a_2, ..., a_n]$ 中元为系数 (未必首一) 的非零多项式 $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_\ell x^\ell$ 使 $\varphi(a) = 0$. 因为 $a \neq 0$, 所以可设 $c_0 \neq 0$, 于是存在 $\mathbb{l}[x_1, x_2, ..., x_n]$ 中非零多项式 $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ 使得 $g(a_1, a_2, ..., a_n) = c_0 \in P_1$, 这与 $\{a_1 + P_1, a_2 + P_1, ..., a_n + P_1\}$ 代数无关矛盾. 断言得证, 于是知当 A 是整区时, $\mathrm{k.dim}A \leq n$.

Step2. 对一般的情形, 任取 A 的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s$, 可得整区 A/P_0 有长度为 s 的素理想链 $\{0\} \subsetneq P_1/P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s/P_0$. 易见

$$\sup\{|T|\,|T\text{是}\{a + P_0 | a \in S\}\text{有限子集且代数无关}\} \leq \sup\{|T|\,|T\text{是}S\text{有限子集且代数无关}\} = n,$$

故对整区 A/P_0 应用第一步证明的结果知 $s \leq n$, 进而 $\mathrm{k.dim}A \leq \sup\{|T|\,|T\text{是}S\text{有限子集且代数无关}\}$. $\square$

Example 3.105. 设 n 是正整数并给定域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1,n]$. 下面我们说明任何 $\Bbbk$-交换代数 C 上的 n 阶方阵 M 的特征多项式 $f(x)=x^n-c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}x+(-1)^nc_n$ 的系数满足

$$c_k=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} \mathrm{tr}(M) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(M^2) & \mathrm{tr}(M) & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{tr}(M^{k-1}) & \mathrm{tr}(M^{k-2}) & \mathrm{tr}(M^{k-3}) & \cdots & k-1 \\ \mathrm{tr}(M^k) & \mathrm{tr}(M^{k-1}) & \mathrm{tr}(M^{k-2}) & \cdots & \mathrm{tr}(M) \end{vmatrix}, \forall 1\le k\le n.$$

根据 [命题2.53], 我们有 $k(-1)^kc_k+\sum\limits_{i=1}^{k}\mathrm{tr}(M^i)(-1)^{k-i}c_{k-i}=0, \forall 1\le k\le n$, 这里约定 $c_0=1$. 因此对固定的正整数 $k\le n$, 我们得到 k 个等式:

$$c_1=\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M)c_1-2c_2=\mathrm{tr}(M^2), ..., \mathrm{tr}(M^{k-1})c_1-\mathrm{tr}(M^{k-2})c_2+\cdots+(-1)^{k-2}\mathrm{tr}(M)c_{k-1}+(-1)^{k-1}kc_k=\mathrm{tr}(M^k).$$

将上述 k 个等式视作以 $c_1,...,c_k$ 为变量的 k 元线性方程组. 与 [引理3.102(3)] 作相同讨论便得结论.

Remark 3.106. 在该例的记号下, $c_1=\mathrm{tr}(M)$ 且 $c_n=\mathrm{det}M$.

Example 3.107 ([30])**.** 如果 PI 次数为 n 且以 Z 为中心的素 PI 环 R 的中心 Z 是整闭整区并且 R 中元素均是 Z 上整元 (之后会在 [引理3.175] 中看到当 ${}_ZR$ 是有限生成模时会满足该性质), 我们说明 $T(R)=R$. 沿用 [定义3.98] 中的记号, 记 $S=Z-\{0\}$, 设 F 是中心单代数 R_S 的分裂域, 并固定 F-代数同构 $h: R_S\otimes_{Z_S}F\to \mathrm{M}_n(F)$. 对每个正整数 $1\le k\le n$, 记

$$\sigma_k:\mathrm{M}_n(F)\to F, A\mapsto \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_k}$$

是将每个方阵映至其特征值在第 k 个初等对称多项式下的取值, 这里 $\lambda_1,...,\lambda\in\overline{F}$ 是 A 的特征值. 命

$$c_k: R\xrightarrow{\lambda_S} R_S\longrightarrow R_S\otimes_{Z_S}F\xrightarrow{h}\mathrm{M}_n(F)\xrightarrow{\sigma_k}F,$$

并设 T 是 Z_S 中由 $\{c_k(R)|1\le k\le n\}$ 生成的 Z-子代数. 这时每个 $a\in R$ 对应的矩阵 $h(a\otimes 1)$ 都是 Z 上的整元, 所以由下面的 [引理3.109] 知每个 $(-1)^kc_k(a)\in Z_S$ 作为 $h(a\otimes 1)$ 的特征多项式的系数都是 Z 上整元. 根据条件, Z 是整闭整区迫使 $c_k(a)\in Z$, 所以 $T\subseteq Z$. 于是 $T(R)=ZR=R$.

Remark 3.108. 一般地, 对以 Z 为中心的素 PI 环 R, 如果 $T(R)=R$, 必有 $T=Z$: 因为这时 $T\subseteq R$ 且 T 中元素与 R 中所有元素都可交换. 特别地, 对 $a\in R$, 矩阵 $h(a\otimes 1)$ 的特征多项式系数均在 Z 中.

Lemma 3.109 ([2])**.** 给定域 $\Bbbk$ 上 n 阶矩阵 X 以及 $\Bbbk$ 的子环 C. 如果 X 是 C 上整元, 那么矩阵 X 在 $\Bbbk$ 上的最小多项式与特征多项式的系数均为 C 上整元. 如果 X 是一些在 C 上整的矩阵的 C-线性组合, 那么 $\mathrm{tr}(X)$ 是 C 上整元.

Proof. 设 X 满足 C 上首一多项式 $g(x)\in C[x]$, 并设 $m(x)\in\Bbbk[x]$ 是 X 在 $\Bbbk$ 上的最小多项式. 那么在 $\Bbbk[x]$ 中有 $m(x)$ 整除 $g(x)$. 这说明 $m(x)$ 在 $\overline{\Bbbk}$ 中的根都是 C 上整元. 根据 Vieta 定理, $m(x)$ 的系数均为 C 上整元. 因为 X 的特征多项式与 $m(x)$ 在 $\overline{\Bbbk}$ 中有相同的根, 所以特征多项式的系数也都是 C 上整元.

现在设矩阵 X 是一些在 C 上整的矩阵的 C-线性组合, 下面说明 $\mathrm{tr}(X)$ 是 C 上整元. 根据 tr 的 C-线性性, 只需证明 X 在 C 上整的情形即可. 而这时 $-\mathrm{tr}(X)$ 是 X 的特征多项式的系数, 故是 C 上整元. $\square$

根据约化迹和迹环的定义, 我们立即看到

Proposition 3.110 (素 PI 环的约化迹, [30])**.** 设 R 是 PI 次数为 n 且中心为 Z 的素 PI 环, 满足 $T(R) = R$. 记 $S = Z - \{0\}$, 这时中心单代数 R_S 上的约化迹 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}} : R_S \to Z_S$ 可限制为 R 到 Z 的迹映射 (见 [注记3.108]), 将该映射依然记作 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}} : R \to Z$, 称为素 PI 环 R 的**约化迹**. 总有 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(R) \neq 0$ 且 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(1) = n$.

如果进一步设 R 是域 $\Bbbk$ 上代数, $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1, n]$. 那么这时对每个 $a \in R$, a 满足下述 Z 上首一多项式

$$\chi_{a,n}(x) = x^n - c_1(a)x^{n-1} + c_2(a)x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}(a)x + (-1)^n c_n(a) \in Z[x],$$

其中 $c_1(a), ..., c_n(a)$ 的定义来自 [定义3.98]. 特别地, R 是 Z 的整扩张.

Remark 3.111. 依 [引理3.102(4)], 当域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1, n]$ 时, 对每个正整数 $1 \leq k \leq n$, 存在唯一的 k 元多项式 $p_k \in \mathbb{Z}[(k!)^{-1}][x_1, ..., x_k]$ 使 $\sigma_k = p_k(s_1, ..., s_k)$. 结合 [例3.105] 不难看到在命题条件下, 如果这时 R 是 $\Bbbk$-代数, 那么有 $c_k(a) = p_k(\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(a), \mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(a^2), ..., \mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(a^k))$.

Remark 3.112. 设 R 是 PI 次数为 n 且中心为 Z 的素 PI 环, 那么 $T(R) = R \Leftrightarrow T = Z$($T$ 来自 [定义3.98]).

Example 3.113 (同调齐次环, [30])**.** 在上个世纪 80 年代 Brown 与他的导师 C. R. Hajarnavis 引入了一类广泛的整体维数有限的 Noether 环——同调齐次环. 设含幺环 R 是右 Noether 环并记其中心为 Z, 如果 R 具有有限的右整体维数, $R \supseteq Z$ 是整扩张并且对任何满足 $\mathrm{Ann}_R X \cap Z = \mathrm{Ann}_R Y \cap Z$ 的不可约右 R-模 X, Y, 它们有相同的投射维数, 则称 R 是**同调齐次环**. 整体维数有限的交换 Noether 环明显是同调齐次的. Brown 与 Yakimov 在 [30, Proposition 3.10] 中证明了模有限素同调齐次代数的中心是整闭整区, 进而可应用 [命题3.110] 来赋予模有限素同调齐次代数上的约化迹来研究其表示论.

3.4 Cayley-Hamilton 代数

本节介绍 Procesi 在 [31] 中引入的 Cayley-Hamilton 代数的概念、基本例子与 Procesi 发展的一些经典性质. 初次阅读本笔记可略过. 本节的内容我们将承认一些深刻或繁琐的 PI 代数工具 (例如交换环上矩阵代数的中心多项式的存在性, 我们之前引入的 Formanek 中心多项式 $F_n(x, y_1, ..., y_n)$ 只证明了是域上 n 阶矩阵代数的中心多项式), 包括应用经典的 Artin-Procesi 定理来证明 [命题3.153]. 在之后会给出仿射 Cayley-Hamilton 代数是模有限代数的完整证明 (见 [推论3.166]). 这份笔记仅涉及 Cayley-Hamilton 代数的内容会承认一些结论, 其余主要结论及其所需工具均带有完整的证明. 在模有限代数部分我们也会介绍 Cayley-Hamilton 代数的判别式理想零点集的性质及其与不可约表示间的联系 (见 [定理3.195] 和 [定理3.201]).

在 PI 环论中一个基本问题是: 给定含幺环 R, 当 R 满足什么条件时, 能够保证存在交换环 C 以及正整数 n 使得 R 可嵌入矩阵代数 $\mathrm{M}_n(C)$? 我们已经指出当 R 是素 PI 环 ([注记2.122]) 或更一般地, 半素 PI 环 ([推论2.120]) 时, R 能够嵌入某个交换环上的矩阵代数. 能够嵌入某个 $\mathrm{M}_n(C)$ 的环 R 自然满足交换环上 n 阶矩阵代数所满足的多项式恒等式, 例如标准等式 s_{2n}. 但这仅是必要条件. 一般地, 人们还没有对一般的环找到合适的充要条件 (但利用范畴层面能够给一个基本的等价条件, 见 [32] 中的"泛 n 维表示"). Procesi 意识到当考虑的环 R 带有额外的迹映射结构, 即对"带迹代数", 他能够在特征零场景给出 R 能够 (保迹地) 嵌入某个交换环上 n 阶矩阵代数的充要条件——所有元素满足给定迹映射对应的"形式特征多项式". 这就是下面的 Cayley-Hamilton 代数的概念, 它是一类广阔的 PI 代数类, 包含所有的交换代数与有限维代数.

Definition 3.114 (Cayley-Hamilton 代数, [31])**.** 设 n 是正整数, 域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1,n]$. 对每个正整数 $1 \leq k \leq n$, 记 σ_k 是 $\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 中第 k 个初等对称多项式, $s_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$ 是第 k 个幂和. 根据 [引理3.102(4)], 对每个正整数 $1 \leq k \leq n$, 存在唯一的 k 元多项式 $p_k \in \mathbb{Z}[(k!)^{-1}][x_1,...,x_k]$ 使 $\sigma_k = p_k(s_1,...,s_k)$. 现再设 A 是域 $\Bbbk$ 上代数并有中心子代数 C, $\mathrm{tr}: A \to C$ 是迹映射 (见 [注记3.91]). 对 $a \in A$, 称

$$\chi_{n,a}(x) = x^n - c_1(a)x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}(a)x + (-1)^n c_n(a) \in C[x],$$

其中 $c_k(a) = p_k(\mathrm{tr}(a), \mathrm{tr}(a^2), ..., \mathrm{tr}(a^k)), 1 \leq k \leq n$, 为 a 的 **(形式)n-特征多项式**或 n **次特征多项式**. 如果 (A, C, tr) 满足对任何 $a \in A$ 有 $\chi_{n,a}(a) = 0$ 并且 $\mathrm{tr}(1) = n$, 那么称三元组 (A, C, tr) 是 **n-Cayley-Hamilton 代数**或 **n 次 Cayley-Hamilton 代数**. 易见 Cayley-Hamilton 代数 (A, C, tr) 总满足 $A \supseteq C$ 是整扩张.

Remark 3.115. 前面提到, Procesi 引入 Cayley-Hamilton 代数的主要动机是含幺环关于交换环上矩阵代数的嵌入问题. Procesi 在 [31, Theorem 2.6] 中证明了对任何特征为零的域 $\Bbbk$ 上的 n 次 Cayley-Hamilton 代数 (A, C, tr), 存在 $\Bbbk$-交换代数 $\mathscr{B}_n(A)$ 以及 $\Bbbk$-代数嵌入 $\mathrm{i}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 使得 $\mathrm{i}_A(C) \subseteq \mathscr{B}_n(A)$ 且下图交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{i}_A"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A)) \arrow[d, "\tau"] \\ C \arrow[r, "\mathrm{i}_A|_C"] & \mathscr{B}_n(A) \end{tikzcd}$$

其中 $\tau : \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A)) \to \mathscr{B}_n(A)$ 是矩阵代数上的经典迹. 因此特征为零的域上的 n 次 Cayley-Hamilton 代数都可以保迹地嵌入某个交换代数上 n 阶矩阵代数. **故特征为零的域上的 n 次 Cayley-Hamilton 代数是 PI 环**. 并且由矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 的最小次数是 $2n$ 立即得到 n 次 Cayley-Hamilton 代数的最小次数不超过 $2n$. 结合 [注记3.12] 便知当 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域时, $\Bbbk$ 上任何 n 次 Cayley-Hamilton 代数的不可约表示的 $\Bbbk$-线性维数不超过 n. 有可能出现不可约表示维数都不超过 $n-1$ 的情况, 见 [例3.190].

Remark 3.116. 设 n 是正整数且域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1,n]$, (A, C, tr) 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 由于 $\mathrm{tr}(1) = n \neq 0$ 且 tr 是 C-线性的, 所以 $\mathrm{tr}(A) = C$. 并注意到 $c_1(a) = \mathrm{tr}(a), \forall a \in A$.

Remark 3.117. 设 n 是正整数且域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1,n]$, (A, C, tr) 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 那么对任何 A 的包含 C 的 $\Bbbk$-子代数 B, $(B, C, \mathrm{tr}|_B)$ 也是 n 次 Cayley-Hamilton 代数.

Example 3.118. 设域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1,n]$, C 是交换 $\Bbbk$-代数并设 $\mathrm{tr} : \mathrm{M}_n(C) \to C$ 是矩阵求迹映射. 根据 [例3.105], 我们看到矩阵代数带上经典迹映射得到的三元组 $(\mathrm{M}_n(C), C, \mathrm{tr})$ 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 特别地, 对任何交换 $\Bbbk$-代数 C, 取 $\mathrm{tr} = \mathrm{id}_C$, 那么 (C, C, tr) 可视作次数为 1 的 Cayley-Hamilton 代数. 事实上, 如果 (A, C, tr) 是 1 次 Cayley-Hamilton 代数, 那么根据定义便知 $a = \mathrm{tr}(a), \forall a \in A$, 进而 $A = C$ 且 $\mathrm{tr} = \mathrm{id}_C$.

Remark 3.119. 设域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1,n]$, $\Bbbk$-代数 A 有中心子代数 C 满足 A 是有限生成自由 C-模 (记 n 是自由模 ${}_CA$ 的秩), 那么有 C-代数同构 $\mathrm{End}_C A \cong \mathrm{M}_n(C)$. 记 $\mathrm{tr} : \mathrm{M}_n(C) \to C$ 是矩阵代数上的经典迹, 并设 $\ell : A \to \mathrm{End}_C A, a \mapsto \ell_a$ 是由 A 中元素的左乘变换 (其中 ℓ_a 表示 a 在 A 上的左乘变换) 诱导的 C-代数嵌入. 利用自同态代数与矩阵代数的代数嵌入可将矩阵代数上的迹 tr 视作 $\mathrm{End}_C A$ 到 C 的迹映射 (依然记作 tr, 它将每个 ${}_CA$ 的自同态映至该同态在给定基下表示矩阵的迹). 考虑下述映射列的合成

$$A \xrightarrow{\ \ell\ } \mathrm{End}_C A \xrightarrow{\ \mathrm{tr}\ } C,$$

将上述合成映射记作 $\mathrm{tr}_{\mathrm{reg}}$, 称为 A 的**正则迹**. 依 [注记3.117], $(A, C, \mathrm{tr}_{\mathrm{reg}})$ 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 特别地, 这时 $\Bbbk$ 上的有限维代数都可以通过正则迹赋予 Cayley-Hamilton 代数结构.

Example 3.120. 设域 $\Bbbk$ 上代数 A 有中心子代数 C 满足 A 是有限生成 C-模, C 是整闭整区且 ${}_CA$ 无挠. 那么对 $n = \dim_{C_S} A_S$, 其中 $S = C - \{0\}$, 当 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1, n]$ 时, 可自然赋予 (A, C) 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数结构. 具体地, 记 $\tau : A_S \to C_S$ 是 A_S 作为 C_S 上有限维代数的正则迹, $\mathrm{j} : A \to A_S$ 是局部化映射. 因为 A 是无挠 C-模, 所以 j 是 $\Bbbk$-代数嵌入. 命 $\mathrm{tr} : A \to C, a \mapsto \tau(\mathrm{j}(a))$, [引理3.109] 和 C 的整闭性保证了 tr 是定义合理的迹映射. 现在通过 (A_S, C_S, τ) 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数得到 (A, C, tr) 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 例如当 A 是 $\Bbbk$ 上仿射模有限代数时, 利用 Artin-Tate 引理和 Noether 正规化引理便知 A 存在中心子代数 C 是整闭整区满足 ${}_CA$ 是有限生成模. 如果进一步 A 是素环, 那么 ${}_CA$ 作为无挠模便满足假设.

Example 3.121 ([30]). 设 n 是正整数, 域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1, n]$, R 是 $\Bbbk$ 上满足 $T(R) = R$ 且 PI 次数是 n 的素 PI 代数并设其中心为 Z, $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}} : R \to Z$ 是 [命题3.110] 中定义的约化迹. 则 [命题3.110] 表明 $(R, Z, \mathrm{tr}_{\mathrm{red}})$ 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 特别地, 如果 A 是域 $\Bbbk$ 上 n^2 维中心单代数 (由 [例3.107], $\Bbbk$ 作为正规整区自然有 $T(A) = A$), 则 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr}_{\mathrm{red}})$ 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 我们将在 [定理3.158] 中学习更一般的构造.

Example 3.122. 设 n 是正整数, 域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1, n]$, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 设 C 的真理想 $\mathfrak{a}$ 满足 $\mathfrak{a}A$ 也是 A 的真理想. 那么 tr 诱导迹映射 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{a}} : A/\mathfrak{a}A \to C/\mathfrak{a}, a + \mathfrak{a}A \mapsto \mathrm{tr}(a) + \mathfrak{a}$. 记 $\pi : A \to A/\mathfrak{a}A$ 是标准投射. 对每个 $a \in A$, 用 π 作用形式特征多项式等式 $\chi_{a,n}(a) = 0$ 可得 $(A/\mathfrak{a}A, C/\mathfrak{a}, \mathrm{tr}_{\mathfrak{a}})$ 也是 $\Bbbk$ 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数.

我们指出当 n 次 Cayley-Hamilton 代数的定义去掉 $\mathrm{tr}(1) = n$ 的要求时, 如果中心子代数是整区, 则有

Proposition 3.123. 设 n 是正整数, $\mathrm{char}\Bbbk = 0$, A 是 $\Bbbk$ 上代数, 有中心子代数 C 为整区并且迹映射 $\mathrm{tr} : A \to C$ 满足 $\chi_{n,1}(1) = 0$, 那么 $\mathrm{tr}(1)$ 是正整数且 $\mathrm{tr}(1) \in [1, n]$.

Proof. 由 $\chi_{n,1}(1) = 0$ 立即得到 $\mathrm{tr}(1)$ 是 C 中可逆元. 假设 $\mathrm{tr}(1) \notin \{1, 2, ..., n\}$, 这时

$$0 = \chi_{n,1}(1) = 1 - \mathrm{tr}(1) + \frac{\mathrm{tr}(1)(\mathrm{tr}(1) - 1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{tr}(1)(\mathrm{tr}(1) - 1) \cdots (\mathrm{tr}(1) - n + 1)}{n!},$$

对上式约去 $\mathrm{tr}(1) - 1$ 并乘上 2 得到

$$0 = -2 + \mathrm{tr}(1) - \frac{\mathrm{tr}(1)(\mathrm{tr}(1) - 2)}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{tr}(1)(\mathrm{tr}(1) - 2) \cdots (\mathrm{tr}(1) - n + 1)}{n(n-1) \cdots 3},$$

再对上式约去 $\mathrm{tr}(1) - 2$ 并乘上 3 可得

$$0 = 3 - \mathrm{tr}(1) + \frac{\mathrm{tr}(1)(\mathrm{tr}(1) - 3)}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{tr}(1)(\mathrm{tr}(1) - 2) \cdots (\mathrm{tr}(1) - n + 1)}{n(n-1) \cdots 4},$$

依此类推, 我们得到

$$0 = (-1)^{n-1}(\mathrm{tr}(1) - (n-1)) + (-1)^n \frac{\mathrm{tr}(1)(\mathrm{tr}(1) - (n-1))}{n}.$$

现在对上式约去 $\mathrm{tr}(1) - n + 1$ 并乘上 n 得到 $\mathrm{tr}(1) = n$, 矛盾. □

[注记3.115] 中提到 Procesi 证明了特征为零的域上的 Cayley-Hamilton 代数总可保迹地嵌入某个交换代数上的矩阵代数, 这一观察使得我们能够对 Cayley-Hamilton 代数中的幂零元说更多.

Proposition 3.124 ([32])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 那么对 A 中任何幂零元 a, 有 $\mathrm{tr}(a)$ 也是幂零元. 故如果 C 是整区, 那么 tr 在 A 的幂零元上取值为零.

Proof. 因为 A 可保迹嵌入某个交换代数上的矩阵代数, 所以要证明该命题只需说明对 A 是交换环 C 上的矩阵代数, $\mathrm{tr} : \mathrm{M}_n(C) \to C$ 是经典迹的情形证明结论即可. 设 X 是 C 上 n 阶幂零矩阵, 只需证明 $\mathrm{tr}(X)$ 含于 C 中每个素理想即可. 任取 C 的素理想 P, 将 X 对应到 C/P 上 n 阶矩阵, 记作 $\overline{X}$. 那么 $\overline{X}$ 作为整区 C/P 上幂零矩阵自然迹是零. 这说明 $\mathrm{tr}(X) \in P, \forall P \in \mathrm{Spec}C$. □

Remark 3.125. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 那么对 A 中幂零元 a, 自然有每个 $a^j (j \geq 1)$ 是幂零元, 这说明 $\mathrm{tr}(a^j)$ 是 C 中幂零元. 注意到形式特征多项式 $\chi_{n,a}$ 的系数中 $c_j(a) \in (\mathrm{tr}(a), ..., \mathrm{tr}(a^j))$, 为幂零理想中的元素, 因此 $\chi_{n,a}$ 除了最高次项外其余项的系数都是 C 中幂零元.

Remark 3.126. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数, 如果对 $a \in A$ 的形式特征多项式 $\chi_{n,a}(x) = x^n - c_1(a)x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}(a)x + (-1)^n c_n(a)$, 满足对每个 $1 \leq j \leq n$ 有 $c_j(a)$ 是 C 中幂零元, 那么每个 $c_j(a)a^{n-j}$ 是 A 中幂零元. 现在考察 A 的 $\Bbbk$-交换子代数 $C[a]$, 我们得到 $a^n \in C[a]$ 是 $C[a]$ 中有限个幂零元的和, 因此 a^n 是 $C[a]$ 中幂零元. 从而 a 也是 A 中幂零元.

因为关于 Cayley-Hamilton 代数的部分结果会使用 [注记3.115], 因此即便之后许多结论在某些正特征场景成立, 我们依然仅讨论特征零的情形. 现在我们将 [注记3.125], [注记3.126] 得到的观察记录为

Proposition 3.127. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数, $a \in A$ 的形式特征多项式为 $\chi_{n,a}(x) = x^n - c_1(a)x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}(a)x + (-1)^n c_n(a)$. 那么 a 是幂零元的充要条件是对每个 $1 \leq j \leq n$ 有 $c_j(a)$ 是 C 中幂零元. 如果 $c_1(a)$ 是 C 中幂零元, a 未必是 A 中幂零元 (例如考虑域上迹为零的可逆阵). 如果 a 是 A 中幂零元, 未必有 $c_1(a) = 0$(例如取 $A = C, \mathrm{tr} = \mathrm{id}_C, n = 1$).

根据 Cayley-Hamilton 代数的定义 (结合 [引理3.102]) 不难得到 [推论2.54] 的相应结论:

Proposition 3.128 ([32])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 Cayley-Hamilton 代数. 如果 $a \in A$ 满足 $\mathrm{tr}(a^k) = 0, k = 1, 2, ..., n$, 那么 $a^n = 0$. 特别地, A 有诣零理想 $\{a \in A | \mathrm{tr}(aA) = 0\}$.

Remark 3.129. 根据 [命题3.124] 和 [命题3.128] 可知: 如果 (A, C, tr) 是单边 Artin 的 Cayley-Hamilton 代数并且 C 是整区, 那么 $\{a \in A | \mathrm{tr}(aA) = 0\} = \mathrm{Jac}A$. 我们将在 [推论3.166] 中证明域上的仿射 Cayley-Hamilton 代数总是在给定中心子代数上模有限的. 特别地, 由此可以知道如果 (A, C, tr) 是域 $\Bbbk$ 上仿射 Cayley-Hamilton 代数并且 $\mathrm{tr}(A) \subseteq \Bbbk$, 那么 A 是有限维 $\Bbbk$-代数且 $\{a \in A | \mathrm{tr}(aA) = 0\} = \mathrm{Jac}A$. 特别地, 对域 $\Bbbk$ 上有限维半单 Cayley-Hamilton 代数 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$, 迹映射诱导的对称双线性型 $\langle -, - \rangle_{\mathrm{tr}} : A \times A \to \Bbbk$ 是非退化的.

[注记3.115] 也让我们能够直接得到 Cayley-Hamilton 代数关于系数环改变的性质.

Proposition 3.130 (改变系数环, [32])**.** 设 n 是正整数, 域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 那么对任何 $\Bbbk$-交换代数 C', 将 $C \otimes_{\Bbbk} C'$ 视作 $A \otimes_{\Bbbk} C'$ 的中心子代数, 并定义 $\tau = \mathrm{tr} \otimes \mathrm{id}_C$. 那么 $(A \otimes_{\Bbbk} C', C \otimes_{\Bbbk} C', \tau)$ 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数.

Proof. 根据 τ 的定义, 对任何正整数 k 和 $a \in A, c' \in C'$, 有 $\tau(a \otimes c') = \mathrm{tr}(a) \otimes c'$. $\tau(1 \otimes 1) = n(1 \otimes 1)$. 因此我们只需再证明 $A \otimes_{\Bbbk} C'$ 中任何元素满足关于迹映射 τ 的形式特征多项式即可. 根据 [注记3.115], 存在交换

代数 $\mathscr{B}_n(A)$ 和保迹代数嵌入 $\mathfrak{i}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$, 进而得到下述交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_{\Bbbk} C' \arrow[r, "\mathfrak{i}_A \otimes \mathrm{id}_{C'}"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A)) \otimes_{\Bbbk} C' \arrow[d] \\
C \otimes_{\Bbbk} C' \arrow[r, "\mathfrak{i}_A| \otimes \mathrm{id}_{C'}"] & \mathscr{B}_n(A) \otimes_{\Bbbk} C'
\end{tikzcd}$$

因为张量积代数的系数环是域, 因此通过取定 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 和 C' 的基易知典范代数同态

$$\mathfrak{j} : \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A)) \otimes_{\Bbbk} C' \to \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A) \otimes_{\Bbbk} C'), (b_{ij})_{n\times n} \otimes c' \mapsto (b_{ij} \otimes c')_{n\times n}$$

是嵌入. 于是我们得到下述交换图, 该图水平方向的代数同态均为保迹嵌入:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_{\Bbbk} C' \arrow[r, "\mathfrak{i}_A \otimes \mathrm{id}_{C'}"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A)) \otimes_{\Bbbk} C' \arrow[r, "\mathfrak{j}"] \arrow[d] & \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A) \otimes_{\Bbbk} C') \arrow[d] \\
C \otimes_{\Bbbk} C' \arrow[r, "\mathfrak{i}_A| \otimes \mathrm{id}_{C'}"] & \mathscr{B}_n(A) \otimes_{\Bbbk} C' \arrow[r, "\mathfrak{j}|"] & \mathscr{B}_n(A) \otimes_{\Bbbk} C'
\end{tikzcd}$$

因此带迹的代数 $(A \otimes_{\Bbbk} C', C \otimes_{\Bbbk} C', \tau)$ 可以通过 $\mathfrak{j}(\mathfrak{i}_A \otimes \mathrm{id}_{C'})$ 保迹嵌入 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A) \otimes_{\Bbbk} C')$. 于是由矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A) \otimes_{\Bbbk} C')$ 关于其上经典迹构成 n 次 Cayley-Hamilton 代数得到结论. □

结合 [例3.122] 和 [注记3.129], 我们可以看到下述引理, 它将用于证明 [定理3.195].

Lemma 3.131. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上仿射 Cayley-Hamilton 代数. 任给 C 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 定义 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}} : A/\mathfrak{m}A \to C/\mathfrak{m}, a + \mathfrak{m}A \mapsto \mathrm{tr}(a) + \mathfrak{m}$, 那么 $(A/\mathfrak{m}A, C/\mathfrak{m}, \mathrm{tr}_{\mathfrak{m}})$ 是 $C/\mathfrak{m}$ 上有限维 n 次 Cayley-Hamilton 代数并且 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}}$ 可诱导映射 $\overline{\mathrm{tr}}_{\mathfrak{m}} : (A/\mathfrak{m}A)/\mathrm{Jac}(A/\mathfrak{m}A) \to C/\mathfrak{m}, \overline{a} + \mathrm{Jac}(A/\mathfrak{m}A) \mapsto \mathrm{tr}(a) + \mathfrak{m}$.

Proposition 3.132 ([32])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 那么对任给正整数 r, $(A, C, r\mathrm{tr})$ 是 rn 次 Cayley-Hamilton 代数.

Proof. 由条件, $r\mathrm{tr}(1) = rn$, 我们需要验证 A 关于 $r\mathrm{tr} : A \to C$ 满足 rn 次形式特征多项式. 根据 [注记3.115] 中 Procesi 得到的保迹嵌入定理, 对条件的 n 次 Cayley-Hamilton 代数 A, 存在 $\Bbbk$-交换代数 $\mathscr{B}_n(A)$ 以及 $\Bbbk$-代数嵌入 $\mathfrak{i}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathfrak{i}_A"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A)) \arrow[d, "\tau"] \\
C \arrow[r, "\mathfrak{i}_A|_C"] & \mathscr{B}_n(A)
\end{tikzcd}$$

利用保迹嵌入 $\mathfrak{i}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$, 我们得到 $(A, C, r\mathrm{tr})$ 到 $\mathrm{M}_{rn}(\mathscr{B}_n(A))$ 的保迹嵌入

$$\mathfrak{i}_A^r : A \to \mathrm{M}_{rn}(\mathscr{B}_n(A)), a \mapsto \begin{pmatrix} \mathfrak{i}_A(a) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathfrak{i}_A(a) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{i}_A(a) \end{pmatrix}$$

由此可知对每个 $a \in A$, $\mathfrak{i}_A^r(a)$ 作为交换代数 $\mathscr{B}_n(A)$ 上 rn 阶矩阵满足 rn 次 Cayley-Hamilton 代数等式. 结合 $\mathfrak{i}_A^r$ 是保迹嵌入便知 $(A, C, r\mathrm{tr})$ 中每个元素满足关于 $r\mathrm{tr}$ 的形式特征多项式. □

Remark 3.133. 该命题表明对 n 次 Cayley-Hamilton 代数 A, 可能存在正整数 $\ell < n$ 使得 A 能够嵌入某个交换环 Z 上 ℓ 阶矩阵代数 $\mathrm{M}_\ell(Z)$.

Example 3.134. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, 那么对任何正整数 n, 都存在迹 $\mathrm{tr}: C \to C$ 使得 (C, C, tr) 成为 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 事实上只需取 $\mathrm{tr}(c) = nc, \forall c \in C$.

Example 3.135. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, n, m 是正整数. 如果矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 能够 $\Bbbk$-代数嵌入 $\mathrm{M}_m(\Bbbk)$, 那么 n 整除 m. 结合 [命题3.132] 的证明过程知 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 可嵌入 $\mathrm{M}_m(\Bbbk)$ 当且仅当 n 整除 m.

Proof. 假设存在代数嵌入 $\varphi : \mathrm{M}_n(\Bbbk) \to \mathrm{M}_m(\Bbbk)$, 如果记 τ_m, τ_n 是分别是 $\mathrm{M}_m(\Bbbk), \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 上经典迹映射, 那么有迹映射 $\tau_m\varphi$. 结合 $\varphi(I_n) = I_m$ 可知 $\tau_m\varphi = (m/n)\tau_n$. 注意到 $\varphi(E_{11})$ 是幂等矩阵, 所以 $\tau_m(\varphi(E_{11})) \in \mathbb{N}$(将其在 $\Bbbk$ 的代数闭包上对角化), 由此得到 $m/n \in \mathbb{N}$, 总之我们得到 n 整除 m. □

在 [例3.105] 我们看到矩阵幂次的迹与该矩阵特征多项式系数间的关系, 尤其是特征多项式的常数项与行列式的关系. 因此在 Cayley-Hamilton 代数场景可以利用形式特征多项式的常数项来引入“行列式”的概念.

Definition 3.136. 设域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1, n]$, (A, C, tr) 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 对每个 $a \in A$ 的形式特征多项式 $\chi_{n,a}(x) = x^n - c_1(a)x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}(a)x + (-1)^n c_n(a) \in C[x]$, 称 $c_n(a)$ 是 a 的**范数**.

Remark 3.137. 我们记 $a \in A$ 的范数为 $N(a)$, 考虑 [注记3.115] 中的保迹嵌入 $\mathrm{i}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$, 那么 $\chi_{n,\mathrm{i}_A(a)}$ 就是矩阵 $\mathrm{i}_A(a)$ 的特征多项式. 因此 $\mathrm{i}_A(N(a)) = \det(\mathrm{i}_A(a))$. 由此立即得到对任何 $a, b \in A$ 有 $N(ab) = N(a)N(b)$. 再结合 $\chi_{n,a}(a) = 0$ 便知 a 是 A 中可逆元当且仅当 $N(a)$ 在 C 中可逆.

在 [注记2.122] 中我们看到 PI 次数是 m 的素 PI 环所能够嵌入的交换环上矩阵代数的阶数至少为 m, 因此 [注记3.115] 表明 n 次 Cayley-Hamilton 代数如果是素环, 那么其 PI 次数不超过 n. 将此观察记录为

Proposition 3.138. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次素 Cayley-Hamilton 代数, 则 PI-deg$A \leq n$.

Remark 3.139. 根据 [例3.121], 当 tr 是素 PI 环 A 的约化迹且 $T(A) = A$ 时结论的不等式取到等号.

Remark 3.140. 在模有限自由场景, 如果含幺环 R 在中心子环 C 上是秩为 n 的自由模, 那么 R 关于正则迹构成 n 次 Cayley-Hamilton 代数, 这时可能存在正整数 $\ell < n$ 使得 R 带上某个 R 到 C 的迹后具有 ℓ 次 Cayley-Hamilton 代数结构. 例如取 $C = \Bbbk$ 是域, 那么 $R = \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 关于正则迹构成 n^2 次 Cayley-Hamilton 代数, 但关于经典迹构成 n 次 Cayley-Hamilton 代数.

如果 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的 n 次有限维半单 Cayley-Hamilton 代数, 那么 A 中任何元素都满足 $\Bbbk$ 上的首一多项式, 于是知若设 $A \cong \prod\limits_{i=1}^{s} \mathrm{M}_{n_i}(\Bbbk)$, 那么 $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i \leq n$(考察 s 元矩阵组的最小多项式). 而

$$\dim_\Bbbk A = \sum_{i=1}^{s} n_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{s} n_i\right)^2 \leq n^2.$$

等号成立当且仅当 $s = 1$ 且 $n = n_1$. 于是我们证明了下述结果.

Proposition 3.141 ([32])**.** 设 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的 n 次有限维半单 Cayley-Hamilton 代数, 那么 $\dim_\Bbbk A \leq n^2$, 等号成立当且仅当 $A \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$.

对迹映射取值在域中的有限维单 Cayley-Hamilton 代数, 使用 [例3.135] 中的技术我们能够说更多.

Proposition 3.142 ([32]). 设 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的 n 次有限维单 Cayley-Hamilton 代数, 那么若设 $A \cong \mathrm{M}_t(\Bbbk)$, 那么 t 整除 n.

Proof. 设有 $\Bbbk$-代数同构 $\varphi : \mathrm{M}_t(\Bbbk) \to A$, 那么 $\tau = \mathrm{tr}\varphi$ 是 $\mathrm{M}_t(\Bbbk)$ 上迹映射, 于是由 $\tau(I_t) = n$ 得到 $\tau = (n/t)\mathrm{tr}_t$, 这里 tr_t 表示 $\mathrm{M}_t(\Bbbk)$ 上的经典迹. 现在 $\tau(E_{11}) = n/t$, 因此可直接计算出其形式特征多项式的常数项是

$$(-1)^{2n+1}\frac{1}{n!}\cdot\frac{n}{t}\left(1-\frac{n}{t}\right)\left(2-\frac{n}{t}\right)\cdots\left(n-1-\frac{n}{t}\right).$$

如果 $t = 1$, 结论直接成立. 下设 $t \geq 2$, 这时 E_{11} 在 $\Bbbk$ 上的最小多项式为 $x(x-1)$, 所以上述形式特征多项式的常数项为零, 进而存在正整数 $1 \leq \ell \leq n-1$ 使得 $n = \ell t$, 得证. $\square$

下面的 [例3.143] 可视作 [命题3.142] 在半单场景的推广, 它原先由 Procesi 使用矩阵不变量理论证明. 这里我们利用 [例3.135] 中的技术给出一个初等证明.

Example 3.143. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是 $\Bbbk$ 上有限维 Cayley-Hamilton 代数, 并设 $\{V_1, ..., V_s\}$ 是 A 的一个不可约表示的代表元集. 那么对每个正整数 $1 \leq i \leq s$, V_i 诱导 (正则) 迹映射 $\mathrm{tr}_{V_i} : A \to \Bbbk$:

$$\mathrm{tr}_{V_i} : \qquad A \xrightarrow{\ell_i} \mathrm{End}_{\Bbbk}V_i \xrightarrow{\mathrm{tr}_i} \Bbbk$$

其中 ℓ_i 是 A 在 V_i 上的左乘变换诱导的 $\Bbbk$-代数同态, tr_i 是将 $\mathrm{End}_{\Bbbk}V_i$ 视作矩阵代数后的经典迹. 现在设 $\Bbbk$ 是代数闭域并记 $n_i = \dim_{\Bbbk}V_i$. 根据 Wedderburn-Artin 理论, 我们有 $\Bbbk$-代数同构

$$A \to \prod_{k=1}^{s}\mathrm{End}_{\Bbbk}V_i, a \mapsto (\ell_1(a), \ell_2(a), ..., \ell_s(a)).$$

Procesi 在 [32, Proposition 3.4(3)] 中利用矩阵不变量理论的工具证明了当 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维 Cayley-Hamilton 代数时 (固定前面的记号), 存在正整数 $k_1, ..., k_s$ 使得 $\mathrm{tr} = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i\mathrm{tr}_{V_i}$.

下面我们给出该观察一个初等的证明, 并且说明上述正整数序列 $k_1, ..., k_s$ 是唯一的. 只需证明: 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域 (这里不用假设 $\Bbbk$ 是代数闭域), $n, n_1, ..., s_s$ 是正整数, $A = \mathrm{M}_{n_1}(\Bbbk) \oplus \mathrm{M}_{n_2}(\Bbbk) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_s}(\Bbbk)$(由 [注记3.129], 可不妨设 A 是半单代数), 并设迹映射 $\mathrm{tr} : A \to \Bbbk$ 满足 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数, 那么存在唯一的正整数 $k_1, ..., k_s$ 使得 $\mathrm{tr} = \sum\limits_{j=1}^{s} k_j\mathrm{tr}_j$, 这里 tr_j 表示矩阵代数 $\mathrm{M}_{n_j}(\Bbbk)$ 上的经典迹 (取值在 $\Bbbk$ 中) 所诱导的 A 上标准迹映射, 即在 A 的第 j 直和项取值为 tr_j, 其余分量取值为零的 $\Bbbk$-线性函数.

Proof. 我们先证明存在 $\alpha_1, ..., \alpha_s \in \Bbbk$ 使得 $\mathrm{tr} = \sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_j\mathrm{tr}_j$, 并说明满足该性质的 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 是唯一的, 最后证明每个 α_j 是正整数, 因此取 $k_j = \alpha_j$ 便得结论.

对每个正整数 $1 \leq j \leq s$, 记 $\mathfrak{i}_j : \mathrm{M}_{n_j}(\Bbbk) \to A$ 是标准嵌入 (当 $s \geq 2$ 时并不保持幺元), 那么 $\mathrm{tr}\mathfrak{i}_j : \mathrm{M}_{n_j}(\Bbbk) \to \Bbbk$ 是 $\mathrm{M}_{n_j}(\Bbbk)$ 上迹映射, 所以存在 $\alpha_j \in \Bbbk$ 使得 $\mathrm{tr}\mathfrak{i}_j = \alpha_j\mathrm{tr}_j$. 由此立即得到 $\mathrm{tr} = \sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_j\mathrm{tr}_j$.

固定 $1 \leq j \leq s$, 现在对等号两边作用第 j 分量为基础矩阵 $E_{11} \in \mathrm{M}_{n_j}(\Bbbk)$, 其余分量为零矩阵的矩阵组所对应的 A 中元素便知 α_j 由 tr 与 tr_j 唯一决定. 下面我们需要证明每个 α_j 是正整数, 我们使用 [命题3.142] 中的技术. 以下固定正整数 $1 \leq j \leq s$, 根据前面的讨论, $\alpha_j\mathrm{tr}_j : \mathrm{M}_{n_j}(\Bbbk) \to \Bbbk$ 是迹映射, 并且 $\mathrm{M}_{n_j}(\Bbbk)$ 关

于 $\alpha_j\mathrm{tr}_j$ 满足 n 次 Cayley-Hamilton 等式. 考察 $\mathrm{M}_{n_j}(\Bbbk)$ 中基础矩阵 E_{11} 所满足的形式特征多项式, 因为 $(\alpha_j\mathrm{tr}_j)(E_{11}) = \alpha_j$, 所以形式特征多项式的常数项为

$$(-1)^{2n+1}\frac{1}{n!}\alpha_j(1-\alpha_j)(2-\alpha_j)\cdots(n-1-\alpha_j).$$

因为 E_{11} 的最小多项式为 $x(x-1)$, 所以上述常数项为零, 于是知 α_j 是不超过 $n-1$ 的自然数. 最后我们需要说明 $\alpha_j \geq 1$, 这由 tr 的非退化性 (回忆 [注记3.129]) 立即得到. □

Remark 3.144. 特别地, 如果特征为零的代数闭域上有限维半单代数 A 上有 n 次 Cayley-Hamilton 代数结构 $(A,\Bbbk,\mathrm{tr})$, 并设 $A \cong \mathrm{M}_{n_1}(\Bbbk)\oplus\mathrm{M}_{n_2}(\Bbbk)\oplus\cdots\oplus\mathrm{M}_{n_s}(\Bbbk)$, 那么存在正整数 $k_1,...,k_s$ 使得 $n = \sum\limits_{j=1}^{s} k_jn_j$. 特别地, 对特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上有限维代数 A, 并固定正整数 n, 至多存在有限多个 $\Bbbk$-线性函数 $\mathrm{tr}: A\to\Bbbk$ 使得 $(A,\Bbbk,\mathrm{tr})$ 成为 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 反之, 考虑特征为零的域 $\Bbbk$ 上的有限维半单代数 $B = \mathrm{M}_{n_1}(\Bbbk)\oplus\mathrm{M}_{n_2}(\Bbbk)\oplus\cdots\oplus\mathrm{M}_{n_s}(\Bbbk)$, 任给正整数 $k_1,k_2,...,k_s$, 命 $n = k_1n_1+\cdots+k_sn_s$, 那么

$$\begin{aligned}\mathrm{j}: B &\to \mathrm{M}_n(\Bbbk)\\ (X_1,...,X_s) &\mapsto \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & X_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & X_s & \cdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & X_s \end{pmatrix}\end{aligned}$$

是 $\Bbbk$-代数嵌入, 其中 $\mathrm{j}(X_1,...,X_s)$ 是分块对角阵, 对每个正整数 $1\leq j\leq s$, 分块对角线上有 k_j 个 X_j. 命

$$\mathrm{tr}: B\to\Bbbk, (X_1,...,X_s)\mapsto\sum_{j=1}^{s}k_j\mathrm{tr}(X_j),$$

那么 $(B,\Bbbk,\mathrm{tr})$ 明显是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 可以类似 [命题3.132] 对交换代数上矩阵得到类似结论.

Corollary 3.145. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, $(A,\Bbbk,\mathrm{tr})$ 是 $\Bbbk$ 上 n 次有限维 Cayley-Hamilton 代数, 那么 A 的不可约表示等价类数目 (也是 A 的极大理想数目) 不超过 n.

Proof. 设 $\{V_1,...,V_s\}$ 是 A 的一个不可约表示的代表元集, 并设 $\dim_{\Bbbk}V_j = n_j$. 那么 [例3.143] 表明存在正整数 $k_1,...,k_s$ 使得 $n = \sum\limits_{j=1}^{s}k_jn_j$. 特别地, 由每个 k_jn_j 是正整数迫使 $s\leq n$. □

Remark 3.146. 一般地, 不可约表示等价类的数目 s 不会整除 Cayley-Hamilton 代数的次数, 例如 $A = \mathrm{M}_3(\Bbbk)\oplus\mathrm{M}_2(\Bbbk)$ 上有自然 5 次 Cayley-Hamilton 代数结构, 而不可约表示等价类数目为 2.

Example 3.147. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, $A = \mathrm{M}_2(\Bbbk)\oplus\mathrm{M}_2(\Bbbk)$, 那么对任何奇数 n, 不存在迹映射 $\mathrm{tr}: A\to\Bbbk$ 使得 $(A,\Bbbk,\mathrm{tr})$ 成为 n 次 Cayley-Hamilton 代数.

Example 3.148. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, $A = \mathrm{M}_2(\Bbbk) \oplus \mathrm{M}_3(\Bbbk)$, 那么如果迹映射 $\mathrm{tr}: A \to \Bbbk$ 满足 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数, 必有 $n \geq 5$. 并且该下界是可以达到的.

Example 3.149. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, $A = \mathrm{M}_{n_1}(\Bbbk) \oplus \mathrm{M}_{n_2}(\Bbbk) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_s}(\Bbbk)$ 并有迹映射 $\mathrm{tr}: A \to \Bbbk$ 使得 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 根据 [命题3.141] 的证明过程或 [例3.143] 知 $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i \leq n$. 一般

$$\sum_{i=1}^{s} n_i \nmid n.$$

例如取 $n_1 = 2, n_2 = 3, n = 7$ 即可 ([注记3.144] 保证了该选取的存在性).

在进一步介绍 [例3.143] 的应用前, 我们再记录有限维 Cayley-Hamilton 代数幂等元的迹的特性.

Proposition 3.150. 设 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维 n 次 Cayley-Hamilton 代数, a 是 A 中幂等元, 那么 $\mathrm{tr}(a) \in \mathbb{N}$ 并且 $\mathrm{tr}(a) \leq n$.

Proof. 这里依然使用 [例3.135] 的技术. 不妨设 $a \neq 0, 1$. 那么 a 在 $\Bbbk$ 上的最小多项式为 $x(x-1)$. 首先由 $\mathrm{tr}(a) = \mathrm{tr}(a^j), \forall j \geq 1$, 可知 a 的形式特征多项式的常数项为

$$(-1)^{2n+1}\frac{1}{n!}\mathrm{tr}(a)(1-\mathrm{tr}(a))(2-\mathrm{tr}(a))\cdots(n-1-\mathrm{tr}(a)),$$

由此可知存在 $0 \leq \ell \leq n-1$ 使得 $\mathrm{tr}(a) = \ell$. □

Corollary 3.151. 设 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维 n 次 Cayley-Hamilton 代数, 那么 A 存在在同构意义下唯一的 n 维完全可约表示 W 使得

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_W"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & \mathrm{End}_{\Bbbk} W \arrow[d, "\mathrm{tr}_W"] \\ \Bbbk \arrow[r, "\rho_W|"] & \Bbbk \end{tikzcd}$$

交换. 并且满足该条件的左 A-模 W 的不可约模直和因子遍历 A 的不可约表示等价类.

Proof. 沿用 [例3.143] 中的记号, 设 $\{V_1, ..., V_s\}$ 是 A 的一个不可约表示的代表元集. 那么对每个正整数 $1 \leq i \leq s$, V_i 诱导迹映射记作 tr_{V_i}. 那么 [例3.143] 表明存在唯一的正整数序列 $k_1, ..., k_s$ 使得 $\mathrm{tr} = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i \mathrm{tr}_{V_i}$. 这时

$$A/\mathrm{Jac}(A) \cong \mathrm{M}_{n_1}(\Bbbk) \oplus \mathrm{M}_{n_2}(\Bbbk) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_s}(\Bbbk),$$

因此对每个 $1 \leq j \leq s$, $\Bbbk^{n_j}$ 可自然视作与 V_j 同构的不可约表示. 现在考虑 A 的 n 维完全可约表示

$$W = \bigoplus_{j=1}^{s} k_j \Bbbk^{n_j},$$

那么 W 的不可约模直和因子遍历 A 的不可约表示等价类并且不难看出 $\mathrm{tr}_W \rho_W = (\rho_W|)\mathrm{tr}$. 由此证明满足条件的 n 维完全可约表示的存在性. 我们指出 W 在同构意义下的唯一性是明显的: 如果设有自然数 $m_1, ..., m_s$

使得 A 有 n 维完全可约表示 $W'=m_1\Bbbk^{n_1}\oplus m_2\Bbbk^{n_2}\oplus\cdots\oplus m_s\Bbbk^{n_s}$, 那么 $\mathrm{tr}_{W'}\rho_{W'}$ 可赋予 A 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数结构, 并且满足 $\mathrm{tr}_{W'}\rho_{W'}=\sum\limits_{j=1}^{s}m_j\mathrm{tr}_{V_j}$. 如果这时 $(W',\mathrm{tr}_{W'})$ 满足

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_{W'}"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & \mathrm{End}_{\Bbbk}W' \arrow[d, "\mathrm{tr}_{W'}"] \\ \Bbbk \arrow[r, "\rho_{W'}|"] & \Bbbk \end{tikzcd}$$

交换, 那么 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\mathrm{tr}_{V_i}=\mathrm{tr}=\sum\limits_{j=1}^{s}m_j\mathrm{tr}_{V_j}$, 于是由 [例3.143] 中证明的序列 $k_1,...,k_s$ 的唯一性完成证明. □

Remark 3.152. 事实上, 在推论的条件下 (注意这里要求 $\mathrm{char}\Bbbk=0$!), 如果 A 存在有限维表示 W 满足

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_{W}"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & \mathrm{End}_{\Bbbk}W \arrow[d, "\mathrm{tr}_{W}"] \\ \Bbbk \arrow[r, "\rho_{W}|"] & \Bbbk \end{tikzcd}$$

交换, 那么 $\dim_{\Bbbk}W=n$. 只需注意到 $\dim_{\Bbbk}W=\mathrm{tr}_W(\mathrm{id}_W)=\rho_W(\mathrm{tr}(1_A))=n$. 因此, 特征零的域上的 n 次 Cayley-Hamilton 代数的保迹有限维表示一定是 n 维的, 并且总存在完全可约的 n 维保迹表示, [推论3.151] 表明这样的保迹表示在等价意义下唯一. 由此知 n 维保迹完全可约表示是 n 次 Cayley-Hamilton 代数的不变量. 如果该保迹完全可约表示是不可约表示, 那么 $A/\mathrm{Jac}(A)\cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 我们马上在 [命题3.153] 中说明这时 $\mathrm{Jac}(A)=0$ 来说明这时 $A\cong\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 因此 A 只要存在 n 维不可约表示, $A\cong\mathrm{M}_n(\Bbbk)$.

下面我们承认一些 (验证较繁琐的) 工具后证明 [命题3.153]. 我们需要比 Formanek 中心多项式更强的中心多项式. 由于我们以下只需要该中心多项式的存在性, 我们并不显式写出该多项式的表达式, 具体可参见 [2, p.496, Corollary 5.11] 或 [33, p.24, Proposition 1.4.10]: 对任何正整数 n, 存在整系数多重线性多项式 g_n 使得对任何含幺交换环 K, g_n 是 $\mathrm{M}_n(K)$ 的中心多项式并且该 g_n 可选取得满足是所有秩为 n^2 的 Azumaya 代数的中心多项式 (见 [33, p.70, Theorem 1.8.48]). 那么根据 [注记2.91], g_n 为任何 PI 次数是 n 的中心单代数的中心多项式并且对任何 PI 次数严格小于 n 的中心单代数 R, g_n 是 R 的多项式等式. 经典的 Artin-Procesi 定理说固定正整数 n, 含幺环 R 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数当且仅当 R 满足所有 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 的多项式等式但 R 的任何非零同态像不满足 $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ 所满足的那些 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 不满足的多项式等式 (见 [28, Theorem 3.2]). 下面应用 g_n 是所有秩为 n^2 的 Azumaya 代数的中心多项式以及经典的 Artin-Procesi 定理证明

Proposition 3.153 ([32])**.** 设 $(A,\Bbbk,\mathrm{tr})$ 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的 n 次有限维 Cayley-Hamilton 代数. 如果 $A/\mathrm{Jac}(A)\cong\mathrm{M}_n(\Bbbk)$, 那么 $\mathrm{Jac}(A)=0$.

Proof. 根据 [注记3.115], A 可嵌入某个交换代数 $\mathscr{B}_n(A)$ 上的 n 阶矩阵代数. 所以 A 作为 PI 环的最小次数不超过 $2n$ 并且 A 满足 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 满足的所有多项式等式. 下面证明 A 的任何非零同态像不满足任何 $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ 满足的次数最低的多项式等式. 进而可应用前面提到的经典的 Artin-Procesi 定理来得到 A 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数. 只需注意到 $A/\mathrm{Jac}(A)\cong\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 蕴含 $\mathrm{Jac}(A)$ 是 A 的极大理想, 所以 $\mathrm{Jac}(A)$ 是 A 唯一的极大理想. 于是由 $A/\mathrm{Jac}(A)$ 是 A 任何非零同态像的同态像可知 A 的任何非零同态像不满足任何 $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ 满足的次数最

低的多项式等式. 于是知 A 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数. 设 $\mathfrak{i}_A : A \to \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 是使得下图交换保迹嵌入:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathfrak{i}_A"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & \mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A)) \arrow[d, "\tau"] \\ \Bbbk \arrow[r, "\mathfrak{i}_A|_C"] & \mathscr{B}_n(A) \end{tikzcd}$$

下面我们说明 A 的任何中心元 z 满足 $\mathfrak{i}_A(z)$ 在 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 的中心内. 一旦证明该断言, 设 $\mathfrak{i}_A(z)$ 是对角线上元素均为 $b \in \mathscr{B}_n(A)$ 的纯量矩阵. 由 $\mathrm{tr}(z) \in \Bbbk$ 知 $nb = \tau(\mathfrak{i}_A(z)) \in \Bbbk$, 进而 $b \in \Bbbk$. 即存在 $\alpha \in \Bbbk$ 使得 $\mathfrak{i}_A(z) = \alpha$. 因为 $\mathfrak{i}_A$ 是嵌入, 所以 $z \neq 0$ 时 $\alpha \neq 0$, 这一观察表明 A 的中心的任何非零元是中心内可逆元. 于是知 A 是中心为域的 Azumaya 代数. 所以 A 是中心单代数. 特别地, $\mathrm{Jac}(A) = 0$. 结合前面的讨论, 要完成命题证明我们还需要说明 A 的任何中心元 z 满足 $\mathfrak{i}_A(z)$ 在 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 中. 因为 A 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数, 所以 g_n 是 A 的中心多项式. 注意到这时 g_n 满足 [引理3.71] 的条件 (由 [注记2.50] 可知 A 的非零同态像满足的多项式等式都将是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 的多项式等式), 设 $g_n = g_n(x_1, ..., x_\ell)$, 那么存在 $a_{11}, ..., a_{1\ell}, ..., a_{s1}, ..., a_{s\ell} \in A$ 使得 $1 = g_n(a_{11}, ..., a_{1\ell}) + g_n(a_{21}, ..., a_{2\ell}) + \cdots + g_n(a_{s1}, ..., a_{s\ell})$. 结合 g_n 的多重线性性, 我们有

$$z = g_n(za_{11}, ..., a_{1\ell}) + g_n(za_{21}, ..., a_{2\ell}) + \cdots + g_n(za_{s1}, ..., a_{s\ell}).$$

对上式两边作用 $\mathfrak{i}_A$ 并结合 g_n 是 $\mathrm{M}_n(\mathscr{B}_n(A))$ 的中心多项式便得断言. □

根据 [推论3.153] 的后半部分证明过程, 我们也得到了下述观察.

Proposition 3.154. 设 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的 n 次有限维 Cayley-Hamilton 代数. 如果 A 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数, 那么 $A \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 特别地, A 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数当且仅当 $A \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$.

Corollary 3.155 ([32])**.** 设 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的 n 次有限维 Cayley-Hamilton 代数. 如果存在 $a_1, a_2, ..., a_{n^2} \in A$ 使得 $\det(\mathrm{tr}(a_i a_j))_{n^2 \times n^2} \neq 0$, 那么 $A \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$.

Proof. 由条件, 我们有 n 次 Cayley-Hamilton 代数 $(A/\mathrm{Jac}(A), \Bbbk, \overline{\mathrm{tr}})$. 易见 $\{a_1 + \mathrm{Jac}(A), a_2 + \mathrm{Jac}(A), ..., a_{n^2} + \mathrm{Jac}(A)\}$ 是 $\Bbbk$-线性无关的, 于是 $\dim_\Bbbk A/\mathrm{Jac}(A) \geq n^2$. 所以应用 [命题3.141] 得到 $A/\mathrm{Jac}(A) \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 现在我们应用 [推论3.153] 得到 $A \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. □

Example 3.156. 设 $\Bbbk$ 是域且 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$, 那么 $A = \Bbbk \oplus \Bbbk$ 与 $\Bbbk$ 上二阶上三角矩阵代数 B 作为 $\mathrm{M}_2(\Bbbk)$ 的子代数 (将 A 中元素嵌入为对角阵) 都有自然的 (取值在 $\Bbbk$ 中的迹给出)2 次 Cayley-Hamilton 代数结构, 这时存在保迹代数同构 $A/\mathrm{Jac}(A) \cong B/\mathrm{Jac}(B)$, 但 A 与 B 明显不同构. 这时 A 和 B 各自均有两个不等价的 1 维表示等价类 (更一般地, 在 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域场景, [推论3.4] 中我们看到有限维 n 次 Cayley-Hamilton 代数的不可约表示等价类数目不超过 n. 不可约表示等价类数目如果恰好为 1, 那么 $A/\mathrm{Jac}(A)$ 是 $\Bbbk$ 上矩阵代数, 并且 [命题3.142] 表明该矩阵代数的阶数整除 n. 如果有限维 n 次 Cayley-Hamilton 代数 $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 的不可约表示等价类数目如果恰好为 n, 那么 $A/\mathrm{Jac}(A) \cong \Bbbk^n$, 但前面的例子表明无法更近一步复原 A).

通过 [例3.121] 可知对域 $\Bbbk$ 上的 PI 次数为 n 的素 PI 代数 A, 记其中心为 C, 当 $T(A) = A$ 且 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1, n]$ 时, 约化迹 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}} : A \to C$ 使得 $(A, C, \mathrm{tr}_{\mathrm{red}})$ 为 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 由于人们关注的许多单位根处的量子代数场景, 通常考虑的量子代数 A 是素环, C 虽然在许多重要例子中是整闭整区但往往仅是 A 的中心子代

数, 因此有必要在 C 是整闭中心子代数的场景定义约化迹, 即推广 [命题3.110] 中的构造. 下面我们遵循 [32] 中的讨论在特征为零的模有限素代数场景说明总有自然的 Cayley-Hamilton 代数结构.

现在固定记号: $\Bbbk$ 是特征为零的域, A 是在中心子代数 C 上模有限的素代数. 并记 $S = C - \{0\}$ 是 C 的非零乘闭子集, 根据 [定理2.116], A_S 是 C_S 上有限维中心单代数, 由于 C_S 一般不是 A_S 的中心 (若记 Z 是 A 的中心, 那么 Z_S 是 A_S 的中心), 需要适当推广约化迹的定义. 首先这时存在 Z_S 上可除代数 D 和正整数 k 使得 $A_S \cong \mathrm{M}_k(D)$. 注意 D 的中心就是 Z_S, D 是 Z_S 上有限维可除代数. 于是 D 作为 Z_S 上有限维中心单代数, 存在正整数 h 使得 $\dim_{Z_S} D = h^2$. 记 Z_S 的代数闭包是 $\overline{Z_S}$, 那么有 $\overline{Z_S}$-代数同构

$$A_S \otimes_{Z_S} \overline{Z_S} \cong \mathrm{M}_k(D) \otimes_{Z_S} \overline{Z_S}.$$

注意 $Z_S \supseteq C_S$ 是有限可分扩张 ($\mathrm{char} C_S = 0$, 可放宽为 $Z_S \supseteq C_S$ 可分), 记 $p = [Z_S : C_S]$, 那么利用 [命题3.83] 我们得到 $\overline{Z_S}$-代数同构 $A_S \otimes_{C_S} \overline{Z_S} \cong \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p$, 记该同构为 $\eta : A_S \otimes_{C_S} \overline{Z_S} \to \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p$. 考虑标准嵌入

$$\mathrm{j} : \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p \to \mathrm{M}_{hkp}(\overline{Z_S}), (X_1, ..., X_p) \mapsto \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_p \end{pmatrix},$$

并记 $\tau : \mathrm{M}_{hkp}(\overline{Z_S}) \to \overline{Z_S}$ 是矩阵代数的经典迹, 那么 $\tau\mathrm{j}(X_1, ..., X_p)$ 就是矩阵 $X_1, ..., X_p$ 的迹之和. 定义

$$\mathrm{tr} : A \to \overline{Z_S}, a \mapsto \tau(\mathrm{j}\eta(a \otimes 1)),$$

下面我们将说明 $\mathrm{tr}(A) \subseteq Z_S$ 并且 tr 的定义不依赖于 $\overline{Z_S}$-代数同构 η 的选取. 首先我们需要

Lemma 3.157. 设 R 是域 $\Bbbk$ 上有限维单代数, n 是正整数, 并记 $B = R^n$. 那么对任何 $\Bbbk$-代数自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}_\Bbbk B$, 存在 $\sigma \in S_n$ 与 $\theta_1, ..., \theta_n \in \mathrm{Aut}_\Bbbk R$ 使得 $\sigma^*\varphi(a_1, ..., a_n) = (\theta_1(a_1), ..., \theta_n(a_n)), \forall a_1, ..., a_n \in R$. 这里 σ^* 是由 $\sigma^*(a_1, ..., a_n) = (a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}), \forall a_1, ..., a_n \in R$ 定义出的 B 上 $\Bbbk$-代数自同构.

Proof. 为叙述方便, 记 ξ_i 是 B 中第 i 个分量为 1, 其余分量为零的元素并设 $d = \dim_\Bbbk R$. 首先说明对任给正整数 $1 \leq \ell \leq n$, 存在唯一的正整数 $1 \leq \delta(\ell) \leq n$ 使得 $\varphi(B\xi_\ell) = B\xi_{\delta(\ell)}$. 由 φ 是映射自然保证 $\delta(\ell)$ 一旦存在必定唯一. 下证 $\delta(\ell)$ 的存在性, 不妨设 $n \geq 2$. 注意到 $J_\ell = B\xi_1 + \cdots + B\xi_{\ell-1} + B\xi_{\ell+1} + \cdots + B\xi_n$ 是 B 的 $(n-1)d$ 维理想, 并且 $J_\ell(B\xi_\ell) = 0$, 所以由 φ 是代数同构可知 $\varphi(B\xi_\ell)$ 也满足存在 $(n-1)d$ 维理想 I_ℓ 使得 $I_\ell\varphi(B\xi_\ell) = 0$. 假设存在 $1 \leq i < j \leq n$ 满足 $\varphi(B\xi_\ell)\xi_i \neq 0$ 且 $\varphi(B\xi_\ell)\xi_j \neq 0$. 那么由 B 是单环立即得到 $\varphi(B\xi_\ell)\xi_i = B\xi_i, \varphi(B\xi_\ell)\xi_j = B\xi_j$. 进而知 B 能够零化 $\varphi(B\xi_\ell)$ 的理想维数至多 $(n-2)d$, 矛盾.

根据前面的讨论以及 φ 是单射立即得到对任给正整数 $1 \leq \ell \leq n$, 存在唯一的正整数 $1 \leq \delta(\ell) \leq n$ 使得 $\varphi(B\xi_\ell) = B\xi_{\delta(\ell)}$. 记对 $1 \leq \ell \leq n$, 并且由 φ 是单射, 对 $1 \leq i \neq j \leq n$, 有 $\delta(i) \neq \delta(j)$. 换言之, $\delta \in S_n$. 记 $\mathrm{j}_\ell : R \to B$ 是第 ℓ 个分量的标准嵌入, $\pi_\ell : B \to R$ 是标准投射. 那么我们得到满代数同态 $\pi_{\delta(\ell)}\varphi\mathrm{j}_\ell : R \to R$, 特别地, 这是代数同构, 记作 $\theta_\ell : R \to R$. 于是对任何 $a_1, ..., a_n \in R$, 有

$$\varphi(a_1, ..., a_n) = (\theta_{\delta^{-1}(1)}(a_{\delta^{-1}(1)}), \theta_{\delta^{-1}(2)}(a_{\delta^{-1}(2)}), ..., \theta_{\delta^{-1}(n)}(a_{\delta^{-1}(n)}))$$

现在命 $\sigma = \delta \in S_n$. 那么 $\sigma^*\varphi(a_1, ..., a_n) = (\theta_1(a_1), ..., \theta_n(a_n)), \forall a_1, ..., a_n \in R$. $\square$

要说明 tr 的定义不依赖于 η 的选取, 只需说明对任何 $\overline{Z_S}$-代数同构 $\psi: \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p \to \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p$ 有

$$\tau \mathrm{j}(X_1, ..., X_p) = \tau \mathrm{j}\psi(X_1, ..., X_p), \forall X_1, ..., X_p \in \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S}).$$

事实上, 根据 [引理3.157] 以及 Skolem-Noether 定理, 存在 $\sigma \in S_p$ 和可逆矩阵 $U_1, ..., U_p \in \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})$ 使得

$$\sigma^*\psi(X_1, ..., X_p) = (U_1^{-1}X_1U_1, ..., U_p^{-1}X_pU_p), \forall X_1, ..., X_p \in \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S}).$$

所以 $\mathrm{j}\psi(X_1, ..., X_p)$ 和 $\mathrm{j}(X_1, ..., X_p)$ 具有相同的特征多项式. 特别地, $\tau \mathrm{j}(X_1, ..., X_p) = \tau \mathrm{j}\psi(X_1, ..., X_p)$.

至此我们证明了之前定义的 $\mathrm{tr}: A \to \overline{Z_S}$ 与代数同构 η 的选取无关 (类似 [定理3.87], 事实上把 $\overline{Z_S}$ 修改为任何 Z_S 的满足 $A_S \otimes_{C_S} L \cong \mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 的域扩张 L 都成立). 下面我们需要证明 $\mathrm{tr}(A) \subseteq Z_S$, 方法与 [定理3.87] 基本类似. 根据条件, 对有限可分扩张 $Z_S \supseteq C_S$, 根据 [注记3.84], 存在 C_S 的有限 Galois 扩张 $L \supseteq Z_S$ 使得 $A_S \otimes_{C_S} L \cong \mathrm{M}_{hk}(L)^p$. 因为 $L \supseteq Z_S$ 是代数扩张, 所以 L 可嵌入 $\overline{Z_S}$, 于是由 $(A_S \otimes_{C_S} L) \otimes_L \overline{Z_S} \cong A_S \otimes_{C_S} \overline{Z_S}$ 和 $\mathrm{M}_{hk}(L)^p \otimes_L \overline{Z_S} \cong \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p$(以及前面证明的 tr 的定义不依赖于代数同构 η 的选取) 可知使用 C_S 的有限 Galois 扩张 L 定义出的迹和使用 $\overline{Z_S}$ 定义出的迹一致. 因此我们只需对 L 的场景证明 $\mathrm{tr}(A) \subseteq C_S$ 即可.

因为 L 是 C_S 的有限 Galois 扩张, 故若记 $G = \mathrm{Aut}_{C_S}L$ 是域扩张的 Galois 群, 便有 $C_S = L^G$. 类似 [定理3.87], 若记 $\eta: A_S \otimes_{C_S} L \to \mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 是 L-代数同构, 那么只需说明 $\mathrm{j}\eta(a \otimes 1)$ 的特征多项式在 Galois 群 G 的作用下不动即可. 而该讨论与 [定理3.87] 后半部分的证明完全相同. 我们把前面的讨论总结为

Theorem 3.158 (素代数到中心子代数的约化迹, [32]). 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, $\Bbbk$-代数 A 是在中心子代数 C 上模有限的素代数. 并记 $S = C - \{0\}$ 是 C 的非零乘闭子集, Z 是 A 的中心. 设 Z_S 上有限维可除代数 D 和正整数 k 满足 Z_S-代数同构 $A_S \cong \mathrm{M}_k(D)$, $\dim_{Z_S} D = h^2$, $p = [Z_S : C_S]$. 那么对 Z_S 的代数闭包 $\overline{Z_S}$ 可固定 $\overline{Z_S}$-代数自同构 $\eta: A_S \otimes_{C_S} \overline{Z_S} \to \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p$. 考虑标准嵌入

$$\mathrm{j}: \mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p \to \mathrm{M}_{hkp}(\overline{Z_S}), (X_1, ..., X_p) \mapsto \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_p \end{pmatrix},$$

并记 $\tau: \mathrm{M}_{hkp}(\overline{Z_S}) \to \overline{Z_S}$ 是矩阵代数的经典迹, 那么 $\mathrm{tr}: A \to \overline{Z_S}, a \mapsto \tau(\mathrm{j}\eta(a \otimes 1))$ 满足 $\mathrm{tr}(A) \subseteq C_S$ 并且 tr 的定义不依赖于代数同构 η 的选取. 因此可将 tr 视作 A 到 C_S 的映射. 如果进一步 C 是整闭整区, 那么由 ${}_CA$ 是有限生成模 (这时取定 ${}_CA$ 的有限生成元集易见 A 是 C 的整扩张, 详细证明可参见 [引理3.175]) 以及 [引理3.109] 可知 $\mathrm{tr}(A) \subseteq C$. 这时, 即 C 是整闭整区时, 称 tr 诱导的迹映射 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}: A \to C$ 是**约化迹**.

Remark 3.159. 定理条件中 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$ 不是必要的, 可修改为 Z_S 是 C_S 的可分扩张.

Remark 3.160. 如果定理叙述里中心子代数 C 是 A 的中心, 则 $p = [Z_S : C_S] = 1$, 这时得到经典约化迹.

在 [定理3.158] 的记号下, A_S 作为中心 Z_S 上的线性维数是 h^2k^2, 所以 [推论2.112] 表明 A 作为素 PI 环的 PI 次数就是 hk. 并且利用嵌入 j 不难看到当 C 是整闭整区时, $(A, C, \mathrm{tr}_{\mathrm{red}})$ 是 hkp 次 Cayley-Hamilton 代数. 一个基本的问题便是刻画 [定理3.158] 场景下, 当 C 是整闭整区时, (A, C) 上的 Cayley-Hamilton 代数结构. 下面结果来自 [32], 它说明 (A, C) 上所有 Cayley-Hamilton 代数结构本质上都来自约化迹.

Theorem 3.161 ([32])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, $\Bbbk$-代数 A 是在中心子代数 C 上模有限的素代数, 并设 C 是整闭整区并且 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}: A \to C$ 是约化迹. 设 $(A, C, \mathrm{tr}_{\mathrm{red}})$ 作为 Cayley-Hamilton 代数的次数是 n. 那么对任何迹映射 $\tau : A \to C$, 如果 (A, C, τ) 是 m 次 Cayley-Hamilton 代数, 那么存在唯一的正整数 r 使得

$$m = rn \text{ 并且} \tau = r\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}.$$

Proof. 记 $S = C - \{0\}$, 那么 $\tau_S : A_S \to C_S$ 也是迹映射并且使 (A_S, C_S, τ_S) 成为域 C_S 上有限维 m 次 Cayley-Hamilton 代数. 沿用 [定理3.158] 的记号, 那么 $n = hkp$ 且 [定理3.158] 的证明过程表明存在 C_S 的有限 Galois 扩张 L 使得 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$ 可使用 L-代数同构 $\eta : A_S \otimes_{C_S} L \to \mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 计算 (并且对 A 的中心 Z, L 可选取满足 $L \supseteq Z_S$, 进而 L 可嵌入 $\overline{Z_S}$). 现在由 [命题3.130] 可知 $\tau_S \otimes \mathrm{id}_L : A_S \otimes_{C_S} L \to C_S \otimes_{C_S} L$ 与代数同构 η^{-1} 可赋予 $\mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 上迹映射 $\tau' = (\tau_S \otimes \mathrm{id}_L)\eta^{-1}$(这里把同构 $C_S \otimes_{C_S} L \cong L$ 视作等同后将 τ' 视作 $\mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 到 L 的迹映射) 使得 $(\mathrm{M}_{hk}(L)^p, L, \tau')$ 成为域 L 上 m 次 Cayley-Hamilton 代数. 根据 [定理3.158] 中约化迹的定义, 对每个 $a \in A$, $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(a)$ 就是 $\eta(a \otimes 1)$ 的各分量矩阵的 (经典) 迹之和. 而定理条件给定的迹映射 $\mathrm{tr} : A \to C$ 满足 $\mathrm{tr}(a) = \tau'(\eta(a \otimes 1))$. 现在我们使用 $\mathrm{M}_{hk}(L)^p \otimes_L \overline{Z_S}, L \otimes_L \otimes \overline{Z_S}$ 和 [命题3.130] 进一步将 τ' 延拓为 $\mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p$ 到 $\overline{Z_S}$ 的迹映射 $\overline{\tau}$ 满足 $(\mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p, \overline{Z_S}, \overline{\tau})$ 是 m 次 Cayley-Hamilton 代数.

因为 $\overline{Z_S}$ 是特征为零的代数闭域, 因此可应用 [例3.143]: 记 tr_i 是 $(\mathrm{M}_{hk}(\overline{Z_S})^p$ 第 i 个分量上的经典迹诱导的迹映射, 那么存在正整数 $k_1, k_2, ..., k_p$ 使得 $\overline{\tau} = \sum\limits_{i=1}^{p} k_i \mathrm{tr}_i$. 注意将等式两边限制在 $(\mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 上便得到 τ'.

因此, 我们记 $\tau_i : \mathrm{M}_{hk}(L)^p \to L$ 是 tr_i 在 $\mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 上的限制, 便有 $\tau' = \sum\limits_{i=1}^{p} k_i \tau_i$(在此记号下, 并把基域限制在 C_S, 根据约化迹的定义, $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$ 对应的 $\mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 上迹映射就是 τ_i 之和). 因为 L 是 C_S 的有限 Galois 扩张, 因此对任何 $g \in G = \mathrm{Aut}_{C_S} L$, 由 [命题3.83] 的证明过程知 $\mathrm{id} \otimes g : \mathrm{M}_{hk}(L) \otimes_{C_S} L \to \mathrm{M}_{hk}(L) \otimes_{C_S} L$ 诱导 $\mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 上的 L-代数自同构 (这里有 L-代数同构 $\mathrm{M}_{hk}(L) \cong A_S$). 并且我们可选取 $g \in G$ 对应 $\mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 矩阵分量的置换: 具体地, 对有限 Galois 扩张 $L \supseteq C_S$, 设 $\alpha \in L$ 是 C_S 上可分元满足 $L = C_S(\alpha)$. 那么 α 在 C_S 上最小多项式的根之间的置换诱导 $\mathrm{M}_{hk}(L)^p$ 矩阵分量的置换, 也对应 $A_S \otimes_{C_S} L$ 上的 L-代数自同构, 并且不难看到该代数自同构与 $\tau_S \otimes \mathrm{id}_L$ 可交换. 特别地, 我们看到对任何 $\sigma \in S_p$, 有

$$\overline{\tau}(X_1, ..., X_p) = \overline{\tau}(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(p)}), \forall X_1, ..., X_p \in \mathrm{M}_{hk}(L).$$

结合 $\tau' = \sum\limits_{i=1}^{p} k_i \tau_i$, 便知 $k_i = k_j, \forall 1 \leq i, j \leq p$. 取 $r = k_1 \geq 1$, 那么 $\tau = r\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$ 且有 $m = rn$. $\square$

Remark 3.162. 该定理突显出素模有限代数到给定整闭中心子代数的约化迹的重要性——可生成所有具有 Cayley-Hamilton 代数结构的迹. 我们最后再强调当 A 是 PI 次数为 d 在整闭中心子代数 C 上模有限的素代数时, 若记 $S = C - \{0\}$, Z 是 A 的中心且 $p = [Z_S; C_S]$, 那么在这些记号下, $(A, C, \mathrm{tr}_{\mathrm{red}})$ 是 dp 次 Cayley-Hamilton 代数. 当 C 取为 A 的中心时, 作为 Cayley-Hamilton 代数的次数恰好是 A 的 PI 次数.

Corollary 3.163. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, $\Bbbk$-代数 A 是模有限素代数并且在中心子代数 C 上是秩为 t 的有限生成自由模. 如果 C 是整闭整区, 那么 A 的 PI 次数整除 t.

Proof. 这时利用正则迹可赋予 $(A, C, \mathrm{tr}_{\mathrm{reg}})$ 上 t 次 Cayley-Hamilton 代数结构, 再应用 [定理3.161]. $\square$

3.5 PI 整扩张

在交换代数中我们熟知如果 $R \subseteq E$ 是交换环的整扩张并且 E 是仿射 R-代数, 那么 E 是有限生成 R-模. 本节的主要目标是在 PI 代数场景介绍上述结论的非交换版本的证明:

Theorem 3.164 ([33])**.** 设 R 是中心子环 C 上整的 PI 环, 并且 R 是仿射 C-代数. 那么 R 是有限生成 C-模.

Remark 3.165. 历史上, 受群论中的 Burnside 问题 (一个有限生成群如果每个元素的阶有限, 那么该群是否是有限群?) 启发, A. G. Kurosch(苏联, 1908-1971) 于 1941 年对域上 (结合) 代数问了如下问题 (现在被称为是 **Kurosch 问题**): 域 $\Bbbk$ 上的仿射代数如果每个元素在 $\Bbbk$ 上代数, 那么该代数是否一定是有限维的? 无论是群论中的 Burnside 问题还是结合代数场景的 Kurosch 问题, 一般地, 答案都是否定的. 而该定理表明 Kurosch 问题在 PI 环场景答案是肯定的. 我们将在 [定理3.174] 中介绍一个更强的结论来导出此定理.

在 [注记3.115] 中我们指出特征为零的域上 Cayley-Hamilton 代数 (回忆 [定义3.114]) 总是 PI 环, 所以

Corollary 3.166 ([32])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, (A, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 (更一般地, C 上) 仿射 Cayley-Hamilton 代数. 那么 A 是中心子代数 C 上的有限生成模. 特别地, A 是双边 Noether 环.

Proof. 这时 A 是仿射 C-代数并由 Cayley-Hamilton 代数的定义知 $A \supseteq C$ 是整扩张. 再应用 [定理3.164]. □

Remark 3.167. 如果 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, 那么根据 [推论3.11] 知 $\Bbbk$ 上仿射 Cayley-Hamilton 代数作为仿射 PI 代数, 所有的不可约表示都是有限维的.

Remark 3.168. 若域 $\Bbbk$ 上 n 次 Cayley-Hamilton 代数 (A, C, tr) 是双边 Noether 的, 则未必有 A 是仿射 $\Bbbk$-代数, 例如取 $A = C, n = 1, \mathrm{tr} = \mathrm{id}_C$(见 [例3.134]).

Example 3.169 ([32])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, $(A, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是 $\Bbbk$ 上仿射 Cayley-Hamilton 代数. 则 $\dim_{\Bbbk} A$ 有限.

这里采用 [33] 中的组合方法, 源自 A. I. Shirshov(苏联, 1921-1981), 来给出 [定理3.164] 的证明. 首先我们引入一些辅助术语和记号, 记号上与 [33] 有区别. 记 $\mathcal{W}$ 是正整数集生成的自由半群 (因此 $\mathcal{W}$ 中元素都是正整数集上的字, 例如 $92^3457^28^41$). 如果字 $w \in \mathcal{W}$ 满足存在自然数 n(可能为零) 和不含 1 的字 w' 使得 $w = 1^n w'$(当 $n = 0$ 时, 该表达式指 $w = w'$), 那么称 w 是 **1-开始的** (根据定义, 如果字 w 不含 1, 那么 w 本身就是 1-开始的). 如果字 w 满足可写成 $w_1 \cdots w_m$, 其中每个 w_i 是 1-开始的, 则称 $w_1 \cdots w_m$ 是 w 的一个**划分**. 例如 5713217 有划分 (57)(13)(2)(17)(该划分一般不唯一, 例如本例还可以划分为 (5)(7)(1)(32)(17)). 根据划分的定义不难得到 $\mathcal{W}$ 中任何字都存在划分. 于是任何字总存在划分项数最小的划分 (且唯一).

对 $w = i_1 i_2 \cdots i_m, w' = j_1 j_2 \cdots j_n$, 如果 $w \neq w'$ 且存在正整数 $s < \min\{m, n\}$ 使得 $i_1 = j_1, ..., i_s = j_s$ 但 $i_{s+1} < j_{s+1}$, 则定义 $w < w'$. 注意这里没有比较长度, 所以与字典序不同. 有可能会出现两个不同的字 w, w' 不可比的情况, 例如 $w = 12$ 和 $w' = 123$ 就不可比. 定义 $w \leq w' \Leftrightarrow w = w'$ 或 $w < w'$. 那么 $(\mathcal{W}, \leq)$ 是偏序集, 前面的讨论表明这不是全序的 (但如果 $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ 具有相同长度, 那么 w_1 和 w_2 总可作比较并且这时上述定义的序就是字典序). 如果字 $w, w' \in \mathcal{W}$ 满足 $w < w'$, 那么对任何字 w'', w''' 明显有 $ww'' < w'w'''$. 如果 $\mathcal{W}$ 中字 w 有长度为 d(关于子字) 的分解 $w = w_1 \cdots w_d$ 满足对任何非恒等置换 $\sigma \in S_d$ 有 $w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(d)} < w$, 则称 w 是 **d-可分解的** (这里的分解未必是划分). 我们指出如果字 $w = w_1 w'$, 其中 $w' = w_2 \cdots w_d$ 是 $(d-1)$-可分解的并且 $w_j < w_1, \forall 2 \leq j \leq d$, 那么 w 是 d-可分解的. 称字 $w = i_1 i_2 \cdots i_m$ 中最大的正整数 i_{k_0} 为 w 的**高度**. 稍后我们需要对两个正整数同时作归纳. 因此这里额外增加下述同时对两个正整数作归纳的归纳法合理性证明.

Lemma 3.170. 设 $P(m,n)$ 是关于正整数 m,n 的命题. 如果 (1) 对所有正整数 m 有 $P(m,1)$ 成立, 对所有正整数 n 有 $P(1,n)$ 成立; (2) 当整数 $m,n\geq 2$ 时, $P(m-1,t),P(t,n-1)$ 对所有的正整数 t 都成立能够推出 $P(m,t),P(t,n)$ 对所有的正整数 t 成立. 那么 $P(m,n)$ 对所有的正整数 m,n 都成立.

Proof. 若不然, 取 m_0 是集合 $\{m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}|P(m,t)\text{对某个正整数}t\text{不成立}\}$ 的最小元, 那么由条件 (1) 得到 $m_0\geq 2$. 那么存在正整数 n_0 使得 $P(m_0,n_0)$ 不成立. 由 m_0 的选取方式可知 $P(m_0-1,n_0)$ 成立. 于是条件 (2) 保证了 $P(m_0,n_0)$ 成立, 得到矛盾. □

Lemma 3.171 ([33])**.** 存在映射 $\beta:\mathbb{Z}_{\geq 1}\times\mathbb{Z}_{\geq 1}\times\mathbb{Z}_{\geq 1}\to\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 满足对任何正整数 $k\geq\beta(a,b,d)$, 任何 $\mathcal{W}$ 中长度为 k, 高度不超过 a 的字要么包含某个形如 w_0^b 的子字, 要么包含某个是 d-可分解字的子字.

Proof. 根据 [引理3.170] 可对正整数 a,d 同时作归纳证明对任何正整数 b, 总存在正整数 $\beta(a,b,d)$ 满足要求. 一旦归纳地证明此断言, 利用选择公理对每个三元组 (a,b,d) 取定满足要求的正整数 $\beta(a,b,d)$ 来定义出映射 β 即可. 根据 [引理3.170], 为了完成证明我们需要证明:

- 当 $a=1$ 时, 对所有的正整数 b,d, 都存在满足要求的正整数 $\beta(1,b,d)$.
- 当 $d=1$ 时, 对所有的正整数 a,b, 都存在满足要求的正整数 $\beta(a,b,1)$.
- 假设对任何正整数 t,s,b, 满足要求的 $\beta(s,b,d-1)$ 和 $\beta(a-1,b,t)$ 都存在, 则存在满足要求的 $\beta(a,b,d)$.

如果 $a=1$, 取 $\beta(1,b,d)=b$, 那么任何正整数 $k\geq b$ 都满足长度为 k 且高度不超过 1(这时高度就是 1) 的字包含子字 1^b, 满足要求. 如果 $d=1$, 取 $\beta(a,b,1)=1$, 那么对任何 (长度为 $k\geq 1$ 的) 字, 都可视作自身的子字, 满足要求. 现在我们设对任何正整数 t,s,b, 满足要求的 $\beta(s,b,d-1)$ 和 $\beta(a-1,b,t)$ 都存在 (这里 $a,d\geq 2$), 下面构造满足要求的正整数 $\beta(a,b,d)$. 记 $a'=ba^{\beta(a-1,b,d)}$, 这时满足要求的 $\beta(a-1,b,d)$ 和 $\beta(a',b,d-1)$ 都存在, 定义

$$\beta(a,b,d)=(\beta(a-1,b,d)+b-1)\beta(a',b,d-1).$$

为之后讨论方便, 记条件 (1) 为给定字包含某个形如 w_0^b 的子字, 条件 (2) 为给定字包含某个是 d-可分解字的子字. 现在设长度为 k 且高度不超过 a 的字 w 不满足条件 (1) 也不满足条件 (2), 我们说明这时 $k<\beta(a,b,d)$ 来完成证明 (注意这时自动有 $b\geq 2$). 设 $w=w_1\cdots w_m$ 是 w 划分项最少的划分并且对每个 w_i 设 $w_i=1^{n_i}\hat{w}_i$, 其中 $\hat{w}_i$ 是不包含 1 的字 (换言之, 由数字 $2,3,...,a$ 构成的字). 如果存在某个正整数 $1\leq i\leq m$ 使得 $\hat{w}_i$ 的长度大于等于 $\beta(a-1,b,d)$, 那么对 $\hat{w}_i$ 应用归纳假设便得 w 满足 (1) 或 (2), 矛盾. 因此对每个 $1\leq i\leq m$, $\hat{w}_i$ 的长度严格小于 $\beta(a-1,b,d)-1$. 不难看到每个 $n_i<b$, 否则 w 有子字 1^b, w 会满足条件 (1), 矛盾. 于是每个 w_i 满足长度严格小于 $\beta(a-1,b,d)+b-1$. 前面我们看到字 w 在不满足 (1) 也不满足 (2) 的条件下, 如果 w 划分项最少的划分为 $w=w_1\cdots w_m$, 并设 $w_i=1^{n_i}\hat{w}_i$, 其中 $\hat{w}_i$ 是不包含 1 的字, 那么对每个 $1\leq i\leq m$, $\hat{w}_i$ 的长度不超过 $\beta(a-1,b,d)-1$ 并且 $n_i<b$. 如果字 w 满足高度不超过 a 并且划分项最少的划分为 $w=w_1\cdots w_m$, 并设 $w_i=1^{n_i}\hat{w}_i$ 后, 其中 $\hat{w}_i$ 是不包含 1 的字, 满足每个 $\hat{w}_i$ 的长度不超过 $\beta(a-1,b,d)-1$ 并且 $n_i<b$, 临时称 w 是**可容许的**. 那么根据前面的讨论知如果 w 是可容许的字并且项数最少的划分形如 $w=w_1\cdots w_m$, 那么每个 w_i 满足长度不超过 $\beta(a-1,b,d)+b-1$. 因此这时可容许字 w 的长度不超过 $m(\beta(a-1,b,d)+b-1)$. 特别地, 任何 1-开始的可容许字 (这时项数最少的划分就是自身一项) 的长度不超过 $\beta(a-1,b,d)+b-1$. 并且如果 v 是 1-开始的可容许字, 设 $v=1^n v'$, v' 不含 1(那么根据可容许字的定义要求了高度不超过 a, v' 是由数字 $2,3,...,a$ 构成的字). 现在说明 v 的可能情况数不超过 a': 如果 $a=2$, 那么 v' 仅由数字 2 构成, 那么 v

的情况数不超过 $b\beta(a-1,b,d)\le a'$. 当 $a\ge 3$ 时, 记 v' 的长度为 ℓ, 不难看出 v 的情况数不超过

$$b(\sum_{\ell=0}^{\beta(a-1,b,d)-1}(a-1)^{\ell})=b\frac{(a-1)^{\beta(a-1,b,d)}-1}{a-2}\le b((a-1)^{\beta(a-1,b,d)}-1)\le ba^{\beta(a-1,b,d)}=a'.$$

如果在所有 1-开始的可容许字构成的集合上赋予字典序 (先比字长再从左到右比数字大小), 那么该集合作为元素数目不超过 a' 的有限全序集可保序嵌入 $\{1,2,...,a'\}$. 设 $\alpha:\{1\text{-开始的可容许字}\}\to\{1,2,...,a'\}$ 是一个保序嵌入. 对给定的长度为 k, 不满足条件 (1) 和 (2) 且高度不超过 a 的字 w, 保持之前的记号, 设 $w=w_1\cdots w_m$ 是 w 分解项最少的分解, 下面证明 $m\le\beta(a',b,d-1)$. 一旦证明此断言, 则由

$$k<m(\beta(a-1,b,d)+b-1)\le(\beta(a-1,b,d)+b-1)\beta(a',b,d-1)=\beta(a,b,d)$$

便完成证明. 假设 $m>\beta(a',b,d-1)$, 特别地, $m\ge 2$ 并且 $m-1\ge\beta(a',b,d-1)$. 作 $w'=\alpha(w_2)\cdots\alpha(w_m)$, 这是长度为 $m-1$ 且高度不超过 a' 的字. 对 a' 和 $d-1$ 应用归纳假设可得 w' 满足条件 (1) 或 (2). 如果 w' 满足条件 (1), 那么有形如 t^b 的子字, 结合 α 是双射 (注意每个 $\alpha(w_i)$ 仅是一个数字, 是长度为 1 的字) 知 w 存在形如 w_0^b 的子字, 这与 w 不满足条件 (1) 矛盾. 因此 w' 只可能满足条件 (2). 于是 w' 存在某个 $(d-1)$-可分解的子字 $(\alpha(w_{i_1+1})\cdots\alpha(w_{i_2-1}))(\alpha(w_{i_2})\cdots\alpha(w_{i_3-1}))\cdots(\alpha(w_{i_{d-1}})\cdots\alpha(w_j))$, 这里 $2\le i=i_1<i_2<\cdots<i_d<j\le m$. 这对应 w 的 $(d-1)$-可分解子字 $(w_i\cdots w_{i_2-1})(w_{i_2}\cdots w_{i_3-1})\cdots(w_{i_{d-1}}\cdots w_j)$, 引入记号 $w_1''=w_i\cdots w_{i_2-1},...,w_{d-1}''=w_{i_{d-1}}\cdots w_j$ 后将上述子字的分解式改写为 $w_1''\cdots w_{d-1}''$(这里再指出该分解是 $(d-1)$-可分解的原因是分解中的子字 $w_1'',...,w_{d-1}''$ 对应到 w' 中的子字后, 由 w' 中对应子字的 $(d-1)$-可分解性知关于字典序 $\prec$ 有 $w_{\sigma(1)}''\cdots w_{\sigma(d-1)}''\prec w_1''\cdots w_{d-1}'',\forall\sigma\ne(1)\in S_{d-1}$, 注意到 $w_{\sigma(1)}''\cdots w_{\sigma(d-1)}''$ 和 $w_1''\cdots w_{d-1}'',\forall\sigma\ne(1)$ 是长度相同的字, 所以也有 $w_{\sigma(1)}''\cdots w_{\sigma(d-1)}''<w_1''\cdots w_{d-1}'',\forall\sigma\ne(1)\in S_{d-1}$). 至此我们得到 w 有 $(d-1)$-可分解的子字 $w_1''\cdots w_{d-1}''$. 因为每个 w_j'' 都是 $\{w_2,...,w_d\}$ 中有限多个的乘积, 所以每个 w_j'' 从左到右的第一项的数字是 1. 考虑 1-开始的子字 w_{i-1} 的分解 $w_{i-1}=1^{n_{i-1}}\hat{w}_{i-1}$, 其中 $\hat{w}_{i-1}$ 是不包含 1 的字. 特别地, 在这里考虑的序下, 有 $w_j''<\hat{w}_{i-1},\forall 1\le j\le d$. 这说明 $\hat{w}_{i-1}w_1''\cdots w_{d-1}''$ 是 w 的 d-可分解的子字, 这与 w 不满足条件 (2) 矛盾. 总结一下, 现在证明了当长度为 k, 高度不超过 a 的字 w 不满足条件 (1) 也不满足条件 (2) 时, 其最短划分 $w=w_1\cdots w_m$ 满足 $m\le\beta(a',b,d-1)$. 因此前面的断言得证, 引理证毕. □

Lemma 3.172 ([33]). 如果字 w 的长度至少为 d, 并且不存在正整数 $n\ge 2$ 和字 w' 使得 $w=(w')^n$, 那么 w^{2d} 包含 d-可分解的子字.

Proof. 设 $w=(i_1\cdots i_d)w'$, 这里 $i_1,...,i_d\in\mathbb{Z}_{\ge1}$, w' 有可能不存在. 定义 $w_1=w,w_2=(i_2\cdots i_d)w'i_1$, 对每个 $2\le k\le d$, 定义 $w_k=(i_k\cdots i_d)w'(i_1\cdots i_{k-1})$. 我们说明对 $2\le k\le d$ 有 $w_k\ne w$. 假设存在某个 $2\le k_0\le d$ 使得 $w_{k_0}=w$, 那么 $(i_1\cdots i_d)w'=(i_{k_0}\cdots i_d)w'(i_1\cdots i_{k_0-1})$. 通过比较等式两边可得到存在正整数 $j\ge 2$ 使得 $w=(i_1\cdots i_{k_0-1})^j$, 这和条件矛盾. 因此 $w_k\ne w,\forall 2\le k\le d$. 现在我们说明对任何正整数 $1\le s\ne t\le d$ 有 $w_s\ne w_t$. 前面已经证明了当 s,t 中有一个为 1 的情形. 所以不妨设 $2\le s<t\le d$, 假设 $w_s=w_t$, 那么 $(i_s\cdots i_d)w'(i_1\cdots i_{s-1})=(i_t\cdots i_d)w'(i_1\cdots i_{t-1})$, 进而 $(i_{t-s+1}\cdots i_d)w'(i_1\cdots i_{t-s})=(i_1\cdots i_d)w'=w$. 这迫使 $t-s=0$, 即 $s=t$. 因为 $w_1,w_2,...,w_d$ 长度相同, 因此它们之间关于我们考虑的序就是字典序, 于是存在 $\sigma\in S_d$ 使得 $w_{\sigma(d)}<w_{\sigma(d-1)}<\cdots<w_{\sigma(1)}$. 对每个正整数 $1\le k\le d$, 由 w_k 的定义知 w_k 是 w^2 的子字. 所以可写作 $w^2=w_k'w_kw_k''$, 这时我们可以将 w^{2d} 写作

$$w^{2d}=w_{\sigma(1)}'(w_{\sigma(1)}w_{\sigma(1)}''w_{\sigma(2)}')(w_{\sigma(2)}w_{\sigma(2)}''w_{\sigma(3)}')\cdots(w_{\sigma(d-1)}w_{\sigma(d-1)}''w_{\sigma(d)}')(w_{\sigma(d)}w_{\sigma(d)}'').$$

现在记 $v_1 = w_{\sigma(1)}w''_{\sigma(1)}w'_{\sigma(2)}, v_2 = w_{\sigma(2)}w''_{\sigma(2)}w'_{\sigma(3)}, ..., v_{\sigma(d-1)} = w_{\sigma(d-1)}w''_{\sigma(d-1)}w'_{\sigma(d)}$ 以及 $v_d = w_{\sigma(d)}w''_{\sigma(d)}$. 那么 $v_1v_2\cdots v_d$ 是 w^{2d} 的子字并且 $v_d < v_{d-1} < \cdots < v_1$. 由此知 $v_1v_2\cdots v_d$ 是 d-可分解的. □

下面的 Shirshov 定理是 [引理3.171] 的加强版本, 它可视作 [引理3.171] 和 [引理3.172] 的直接推论.

Theorem 3.173 (Shirshov 定理, [33]). 存在映射 $\beta : \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 满足对任何正整数 $b \geq 2d$ 和 $k \geq \beta(a, b, d)$, 任何 $\mathcal{W}$ 中长度为 k, 高度不超过 a 的字要么包含某个形如 w_0^b 的子字并且这里 w_0 长度严格小于 d, 要么包含某个是 d-可分解字的子字.

Proof. 根据 [引理3.171], 存在映射 $\beta : \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 满足对任何正整数 $k \geq \beta(a, b, d)$, 任何 $\mathcal{W}$ 中长度为 k, 高度不超过 a 的字要么包含某个形如 w_0^b 的子字, 要么包含某个是 d-可分解字的子字. 现在设长度为 k, 高度不超过 a 的字 w 不包含 d-可分解字的子字, 那么 [引理3.172] 表明 w 所包含的形如 w_0^b 的子字一定满足 w_0 的长度严格小于 d. □

Theorem 3.174 (Levitzki-Kaplansky-Shirshov-Schelter 定理, [33]). 设 R 是中心子环 C 上仿射 PI 代数, 可由 $a_1, ..., a_t$ 生成, R 满足 C 上首一多重线性多项式 $f(x_1, ..., x_d)$ 并且每个长度严格小于 d 的关于 $a_1, ..., a_d$ 的单项式是 C 上整元. 命 $u = \max\{2d, \text{长度不超过}d \text{ 的关于}a_1, ..., a_t \text{ 的单项式所满足}C \text{ 上次数最低的多项式的次数}\}$. 并设映射 $\beta : \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是 Shirshov 定理中得到的映射, 那么 R 作为 C-模可由所有关于 $a_1, ..., a_t$ 的长度不超过 $\beta(t, u, d)$ 的单项式生成. 特别地, [定理3.164] 成立.

Proof. 记 B 是所有关于 $a_1, ..., a_t$ 的长度不超过 $\beta(t, u, d)$ 的单项式构成的有限集, 下面通过证明任何关于 $a_1, ..., a_t$ 的单项式都可以由 B 中有限个元素 C-线性表出来完成定理证明. 我们使用反证法, 假设存在关于 $a_1, ..., a_t$ 的单项式不能够由 B 中有限个元素 C-线性表出. 可选取 $a_{i_1}\cdots a_{i_k}$ 是不能够由 B 中有限多个元素 C-线性表出的长度最小的单项式. 并且我们可设该多项式是满足对应到的字 $i_1 \cdots i_k \in \mathcal{W}$ 中关于字典序最小的 (虽然关于 $a_1, ..., a_t$ 的单项式的表法未必唯一, 但是总能选到不能被 B 中有限多个元素 C-线性表出的长度最小且对应字在字典序下最小的单项式). 这时字 $i_1 \cdots i_k$ 的长度 $k > \beta(t, u, d)$(高度自然不超过 t), 所以由 β 满足 Shirshov 定理所述性质知 $i_1 \cdots i_k$ 要么包含形如 w_0^b 的子字并且这里 w_0 长度严格小于 d, 要么包含某个是 d-可分解字的子字. 我们分两种情况讨论:

如果 $i_1 \cdots i_k$ 包含形如 w_0^b 的子字并且这里 w_0 长度严格小于 d, 设 $w_0 = j_1 \cdots j_q$, 每个 $1 \leq j_k \leq t$, 那么 $q < d$, 定义 $r = a_{j_1} \cdots a_{j_q}$. 存在根据条件, r 是 C 上整元. 再由 u 的定义便知 r 满足 C 上次数不超过 u 的首一多项式, 设为 r 满足 $r^\ell + c_{\ell-1}r^{\ell-1} + \cdots + c_1 r + c_0 = 0$. 因为 w_0 是 $i_1 \cdots i_k$ 的子字, 所以 $a_{i_1}\cdots a_{i_k}$ 可表示为一些长度严格小于 k 的关于 $a_1, ..., a_t$ 的单项式的 C-线性组合, 根据 $a_{i_1}\cdots a_{i_k}$ 的选取, 长度严格小于 k 的关于 $a_1, ..., a_t$ 的单项式都可以被 B 中元素 C-线性表出, 故 $a_{i_1}\cdots a_{i_k}$ 也可以被 B 中元素 C-线性表出, 矛盾.

如果 $i_1 \cdots i_k$ 包含某个 d-可分解的子字, 设为 $w_1 \cdots w_d$, 那么每个 w_j 对应关于 $a_1, ..., a_t$ 的单项式 r_j. 可将 $a_{i_1}\cdots a_{i_k}$ 写作 $r' r_1 r_2 \cdots r_d r''$, 这里 r', r'' 是关于 $a_1, ..., a_t$ 的单项式. 可设 $f(x_1, ..., x_d)$ 形如

$$f(x_1, ..., x_d) = x_1 \cdots x_d + \sum_{\tau \neq (1) \in S_d} c_\tau x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(d)},$$

那么根据字 $i_1 \cdots i_k$ 的选取, $r' r_{\tau(1)} \cdots r_{\tau(d)} r''$ 作为对应 $\mathcal{W}$ 的字在字典序下严格小于 $i_1 \cdots i_k$ 的关于 $a_1, ..., a_t$ 的单项式能够被 B 中元素 C-线性表出. 于是由 $f(r_1, ..., r_d) = 0$ 得到 $a_{i_1}\cdots a_{i_k} = r' r_1 \cdots r_d r''$ 能够被 B 中元素 C-线性表出, 矛盾. 至此我们证明了 B 可 C-线性生成 R. □

3.6 模有限代数

在 [命题2.24] 中我们看到模有限代数是特殊的 PI 代数. 除了有限维代数以及 Azumaya 代数外, 模有限代数包含了许多单位根处的量子群. 例如单位根 $q \in \Bbbk^*$ 处量子仿射 n-空间 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^n)$ 就是模有限代数 (见 [例2.28]). 任何正特征的域上的 Weyl 代数都是模有限代数 (见 [例2.40]), 并且在中心上是有限生成自由模. 在 [推论3.166] 中我们也指出特征为零的域上的仿射 Cayley-Hamilton 代数均为给定中心子代数上的模有限代数.

下面我们来讨论模有限代数的素谱性质, 首先一个基本的观察是：

Lemma 3.175 ([2])**.** 设 R 是含幺环, Z 是 R 的中心子环 (即含幺子环 $Z \subseteq Z(R)$). 如果 R_Z 是有限生成模, 那么 R 是 Z 上仿射代数且 R 中任何元素是 Z 上整元 (即满足 Z 上某个首一多项式). 如果 $\mathfrak{p}$ 是 Z 的理想, P 是 $\mathfrak{p}$ 在 R 中生成的理想, 则对任何 $p \in P$, 存在 $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathfrak{p}$ 使得 $p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$.

Proof. 首先回忆交换代数中的一个经典结果是对含幺交换环 Z 上任何有限生成模 M 以及理想 I, 如果 $\varphi \in \mathrm{End}_Z M$ 满足 $\varphi(M) \subseteq IM$, 那么存在正整数 n 和 $a_0, ..., a_{n-1} \in I$ 使得 $\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 \mathrm{id}_M = 0$(这通过取定 M 的有限生成元集利用 Cayley-Hamilton 定理不难得到). 现在回到该引理的证明. R_Z 是有限生成模已经说明了 R 作为 Z-代数的仿射性. 因此只需验证 R 中任何元素 b 满足 Z 上某个首一多项式. 考虑左乘变换 $\varphi = b_l : R \to R, x \mapsto bx$, 则 $\varphi \in \mathrm{End}_Z R$. 在上述结果中取 $I = Z$, 则存在 Z 上首一多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in Z[x]$ 使得 $\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 \mathrm{id}_R = 0$. 即 $(b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0)R = 0$. 因此 $f(b) = 0$. 类似地, 注意到 $pR \subseteq \mathfrak{p}R$, 同理可证第二个结论. $\square$

Remark 3.176. 由证明过程, 若 ${}_ZR$ 可由 n 个元素生成, 则 R 中元素都满足某个 Z 上 n 次首一多项式.

Remark 3.177. 结合 [定理3.164] 便知如果 PI 环 R 有中心子环 Z, 那么 ${}_ZR$ 是有限生成模的充要条件是 R 是仿射 Z-代数并且 $Z \subseteq R$ 是整扩张.

Corollary 3.178. 设含幺环 R 是素环且在中心子环 C 上模有限. 那么 R 的任何非零理想与 C 相交非零.

Proof. 设 I 是 R 的非零理想, 由 [定理2.97] 知 I 与 R 的中心 Z 相交非零, 取 $b \neq 0 \in I \cap Z$. 那么由 [引理3.175] 知道 b 是 C 上整元. 不难验证 b 在 C 上最小多项式的常数项就是 $I \cap C$ 中的非零元. $\square$

如果含幺环 R 中元素 a 满足 $aR = Ra$, 则称 a 是 R 中**正规元**. 例如中心元总是正规的. 如果 a 是 R 中的正规正则元, 那么对任给 $x \in R$, 存在唯一的 $x' \in R$ 使得 $ax' = xa$, 这时把 x' 记作 $a^{-1}xa$.

Proposition 3.179 ([34])**.** 设 R 是整环, 满足 R 在中心 $Z = Z(R)$ 上是有限生成模. 并设 R 的非零正规元 a, b 满足 $a^{-1}xa = b^{-1}xb, \forall x \in R$. 那么存在 $z_1, z_2 \in Z$ 使得 $z_1 b = z_2 a$.

Proof. 记 $S = \{R\text{中非零正规元}\}$, 由 R 是整环, 易验证 S 是乘闭子集并且 S 满足右 Ore 条件. 故我们有右局部化 R_S, 设局部化映射为 $\lambda_S : R \to R_S$. 再记 $T = Z - \{0\}$ 是 R 的中心正则元集. 因为 R 是素 PI 环, 所以由 Posner 定理知 R_T 是单环且 $Z(R_T) = Z_T$. 设 $\lambda_T : R \to R_T$ 是局部化映射, 因为 $T \subseteq S$, 所以存在唯一的环同态 $\theta : R_T \to R_S$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\lambda_T"] \arrow[dr, "\lambda_S"'] & & R_T \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\ & R_S & \end{tikzcd}$$

因为 R_T 是单环, 故 θ 是单射. 由条件知 $ba^{-1}\in R_S$ 满足 $ba^{-1}x=xba^{-1},\forall x\in R$(特别地, $ab=ba$), 这蕴含 $ba^{-1}\in Z(R_S)$. 如果能够证明 $ba^{-1}\in \mathrm{Im}\theta$, 即存在 $y\in R, t\neq 0\in Z$ 使得在 R_S 中有 $ba^{-1}=yt^{-1}$, 那么利用 $Z(R_T)=Z_T$ 立即得到结论. 下面我们构造满足条件的 $y\in R, t\neq 0\in Z$ 来完成命题证明. 因为 ${}_ZR$ 是有限生成模, 所以 [引理3.175] 表明 R 中元素均为 Z 上整元. 因为 $ba\neq 0$, 所以由 R 是整环可知 ba 在 Z 上最小多项式常数项非零. 设 $m(x)=x^n+z_{n-1}x^{n-1}+\cdots+z_1x+z_0$ 是 ba 在 Z 上最小多项式, 对该多项式代入 $x=ba$, 再由 $ba=ab$ 可知非零中心元 $z_0\in bR\cap Ra$. 设 $d\in R$ 满足 $da=z_0$. 因为 z_0 与 a 在 R_S 中都可逆, 所以 d 也是 R_S 中可逆元. 现在对 $a^{-1}d^{-1}=z_0^{-1}$ 两边左乘上 b 得到 $(ba^{-1})d^{-1}=bz_0^{-1}$. 两边再右乘上 d 得到 $ba^{-1}=bz_0^{-1}d$. 因为 $z_0\in Z$, 所以 $ba^{-1}=bdz_0^{-1}$. 命 $y=bd\in R, t=z_0\neq 0\in Z$, 便得 $ba^{-1}=yt^{-1}$. □

如果含幺环 R 有中心子环 Z, 那么标准嵌入 $j:Z\to R$ 诱导出连续映射 $\varphi:\mathrm{Spec}R\to\mathrm{Spec}Z, P\mapsto P\cap Z$: 任取 R 的素理想 P, 如果 $a,b\in Z$ 满足 $ab\in P\cap Z$, 那么 $aRb\subseteq P$, 从而 a 与 b 中至少有一个在 P 中, 这说明 $P\cap Z$ 是 Z 的素理想. $\mathrm{Spec}Z$ 的任何闭子集形如 $V(\mathfrak{b})$, 其中 $\mathfrak{b}$ 是 Z 的理想. 若记 $\mathfrak{b}$ 在 R 中生成的理想是 B, 易验证 $V(B)=\varphi^{-1}(V(\mathfrak{b}))$, 这说明 $\varphi:\mathrm{Spec}R\to\mathrm{Spec}Z$ 是连续映射.

Proposition 3.180 ([35])**.** 设 R 是含幺环, Z 是 R 的中心子环满足 R_Z 是有限生成模, $\varphi:\mathrm{Spec}R\to\mathrm{Spec}Z$ 是标准嵌入 $j:Z\to R$ 诱导出的连续映射, 那么
(1) 对任给 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}Z$, 存在 $P\in\mathrm{Spec}R$ 使得 $P\cap Z=\mathfrak{p}$, 即映射 φ 是满射.
(2) 如果 R 的素理想和 Z 的素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $P\cap Z=\mathfrak{p}$, 则对任何 Z 的素理想 $\mathfrak{q}\supseteq\mathfrak{p}$, 存在 R 的素理想 $Q\supseteq P$ 使得 $Q\cap Z=\mathfrak{q}$. 即 Going-up 性质成立.
(3) 如果 R 的素理想 P,Q 满足 $P\subsetneq Q$, 那么 $P\cap Z\subsetneq Q\cap Z$.
(4) 如果 P 是 R 的本原理想 (就是极大理想), 那么 $P\cap Z$ 是 Z 的极大理想.
(5) 如果 R 的素理想 P 满足 $P\cap Z$ 是 Z 的极大理想, 那么 P 是极大理想.
(6) 若记 R,Z 的 Jacobson 根为 $\mathrm{Jac}R,\mathrm{Jac}Z$, 那么 $\mathrm{Jac}Z=Z\cap\mathrm{Jac}R$ 且 $N(Z)=Z\cap N(R)$.
(7) 固定 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}Z$, 则 $R_\mathfrak{p}$ 的极大谱是 $\{Q_\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}R_\mathfrak{p}|Q\in\mathrm{Spec}R, Q\cap Z=\mathfrak{p}\}$, 与 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 等势.
(8) 固定 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}Z$, 则 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 与 $\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p}/(\mathfrak{p}R)_\mathfrak{p})$ 间有自然双射且 $R_\mathfrak{p}/(\mathfrak{p}R)_\mathfrak{p}$ 是 Artin 环, 因此 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 是有限集. 若进一步设 ${}_ZR$ 可由 t 个元素生成, 那么 $|\varphi^{-1}(\mathfrak{p})|\leq t$.

Proof. (1) 根据 [引理3.175], 任何 $b\in\mathfrak{p}R$ 满足存在 $a_0,...,a_{n-1}\in\mathfrak{p}$ 使得 $b^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0=0$, 所以若进一步 $b\in Z$, 则 $b^n\in\mathfrak{p}$. 因此 $\mathfrak{p}R\cap Z=\mathfrak{p}$. 这说明 $\mathcal{S}=\{I\subseteq R|I\text{为}R\text{的理想且满足}I\cap Z=\mathfrak{p}\}$ 是关于包含关系的非空偏序集. 易验证 $(\mathcal{S},\subseteq)$ 的任何全序子集有上界, 所以 Zorn 引理保证了 $\mathcal{S}$ 中有极大元 P, P 满足 $P\cap Z=\mathfrak{p}$. 下面验证 P 是 R 的素理想. 假设存在 $a\in R-P, b\in R-P$ 满足 $aRb\subseteq P$, 那么 P 的极大性保证了 $(a)+P$ 与 $(b)+P$ 都含有 $Z-\mathfrak{p}$ 内的元素. 设 $x\in(a)+P, y\in(b)+P$ 满足 $x,y\in Z-\mathfrak{p}$, 那么 $xy\in Z-\mathfrak{p}$, 从而 $xy\notin P$. 这与 $xy\in P$ 矛盾. 因此 P 是 R 的素理想且 $P\cap Z=\mathfrak{p}$.

(2) 这时 $Z/\mathfrak{p}$ 是 R/P 的中心子代数且 R/P 是有限生成 $Z/(Z\cap P)$-模. 应用 (1) 的结果可知 $Z/Z\cap P$ 的素理想 $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ 关于连续映射 $\varphi:\mathrm{Spec}(R/P)\to\mathrm{Spec}(Z/\mathfrak{p})$ 有原像. 取 R 的素理想 $Q\supseteq P$ 使得 $\varphi(Q/P)=\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$. 那么可直接验证 $Q\cap Z=\mathfrak{q}$, 因此 $Q\supseteq P$ 便是满足条件的素理想.

(3) 通过用 R/P 替换 R, $Z/\mathfrak{p}$ 替换 Z, 可不妨设 $P=0$, 这时 $P\cap Z=0$. 因此只需验证 R 的任何非零素理想 Q 满足 $Q\cap Z\neq 0$ 即可. 因为这时 R 是素 PI 环, 所以 [定理2.97] 保证了 $Q\cap Z(R)\neq 0$(注意 Z 是 $Z(R)$ 的子环), 取 $c\neq 0\in Q\cap Z(R)$, 由 R 是素环知 c 是正则元, 所以 c 在 Z 上满足的最小多项式 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in Z[x]$ 满足 $a_0\neq 0$, 于是 $a_0\neq 0\in Q\cap Z$.

(4) 这时 R/P 是本原 PI 环, 有中心子环 $Z/(P\cap Z)$, 根据 Kaplansky 定理, $Z(R/P)$ 是域, 所以 $Z(R/P)$ 作为 $Z/(P\cap Z)$ 的整扩张保证了 $Z/(P\cap Z)$ 也是域. 这说明 $P\cap Z$ 是 Z 的极大理想.

(5) 通过 (3) 立即可知 $P\cap Z$ 是极大理想迫使 P 是 R 的极大理想.

(6) 将 $\mathrm{Jac}R$ 表示为 R 所有本原理想之交, 由 (4) 得到 $\mathrm{Jac}Z\subseteq Z\cap\mathrm{Jac}R$. 将 $\mathrm{Jac}Z$ 表示为 Z 所有极大理想之交, 由 (1) 和 (5) 得到 $\mathrm{Jac}Z\supseteq Z\cap\mathrm{Jac}R$. 因此 $\mathrm{Jac}Z=Z\cap\mathrm{Jac}R$. 类似地可验证 $N(Z)=Z\cap N(R)$.

(7) 通过下面的 [命题3.183] 可知 $\mathrm{Spec}R_{\mathfrak{p}}$ 与 $\{Q\in\mathrm{Spec}R|Q\cap(Z-\mathfrak{p})=\varnothing\}$ 间有标准双射. 而 $Q\cap(Z-\mathfrak{p})=\varnothing$ 等价于 $Q\cap Z\subseteq\mathfrak{p}$, 所以 (3) 蕴含 $\{Q_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Spec}R_{\mathfrak{p}}|Q\in\mathrm{Spec}R,Q\cap Z=\mathfrak{p}\}$ 中任何素理想是 $R_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想. 任取 $R_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想 $Q_{\mathfrak{p}}$, 这里 Q 是满足 $Q\cap Z\subseteq\mathfrak{p}$ 的素理想, 下证 $Q\cap Z=\mathfrak{p}$. 如果 $Q\cap Z\subsetneq\mathfrak{p}$, 通过 (2), 存在 R 的素理想 $T\supsetneq Q$ 使得 $T\cap Z=\mathfrak{p}$. 进而 $T_{\mathfrak{p}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$ 中真包含 $Q_{\mathfrak{p}}$ 的理想, 这与 $Q_{\mathfrak{p}}$ 是极大理想矛盾.

(8) 根据 [命题3.180(7)], $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 与 $R_{\mathfrak{p}}$ 的极大谱 $\{Q_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Spec}R_{\mathfrak{p}}|Q\in\mathrm{Spec}R,Q\cap Z=\mathfrak{p}\}$ 等势. 并且有

$$\{Q_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Spec}R_{\mathfrak{p}}|Q\in\mathrm{Spec}R,Q\cap Z=\mathfrak{p}\}=\{Q_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Spec}R_{\mathfrak{p}}|Q\in\mathrm{Spec}R,Q\cap(Z-\mathfrak{p})=\varnothing,Q\supseteq R\mathfrak{p}\}.$$

而 [命题3.180(3)] 表明对任何 R 不同的素理想 P,Q 如果 $P\cap Z=Q\cap Z=\mathfrak{p}$, 那么 $P\nsubseteq Q$ 或 $Q\nsubseteq P$. 因此 $R_{\mathfrak{p}}$ 的极大谱与 $\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}})$ 间有双射. 在 (1) 中我们看到 $\mathfrak{p}R\cap Z=\mathfrak{p}$, 因此域 $Z_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$ 的中心子环且 $R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$ 是域 $Z_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ 上有限维线性空间. 因此由有限维代数的素理想数目不超过其线性维数 (见 [引理3.184]) 可知 $|\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}})|\leq\dim_{Z_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}}R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$. 于是当 ${}_ZR$ 可由 t 个元素生成时, $|\varphi^{-1}(\mathfrak{p})|\leq t$. □

Remark 3.181. 该命题表明要研究 R 上的不可约模只需研究所有 $R/\mathfrak{m}R$ 上的不可约模, 其中 $\mathfrak{m}$ 遍历中心子环 Z 的极大理想. 原因是 [推论2.87] 让我们看到 R 上任意两个不可约模 M,N 同构的充要条件是 $\mathrm{Ann}_RM=\mathrm{Ann}_RN$. 记本原理想 Ann_RM 与 Z 之交是 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 则 R 上的每个不可约模 M 都给出 $R/\mathfrak{m}R$ 上的不可约模 M. 反之, 取定 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 每个 $R/\mathfrak{m}R$ 上的不可约模 M 自然是 R 上的不可约模. 并注意到对任给 Z 的两个极大理想 $\mathfrak{m},\mathfrak{m}'$, 只要 $\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}'$, 那么 $R/\mathfrak{m}R$ 上任何不可约模 M 与 $R/\mathfrak{m}'R$ 上任何不可约模 M' 作为不可约 R-模必不同构. 对 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, $R/\mathfrak{m}R$ 所产生的不可约 R-模的零化子在 $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ 中.

Remark 3.182. 对结构更丰富的代数类, 我们能够对命题中的连续映射说更多. 之后我们会说明当 R 是代数闭域上仿射模有限素代数且 Z 是 R 的中心时, φ 限制在 R 的维数最大的不可约表示等价类对应的极大理想集 (事实上恰好是 R 所有的正则极大理想) 上是单射, 并给出 R 的正则极大理想集与 R 的 Azumaya 轨迹间的双射 (见 [定理3.212], [定义3.220] 和 [命题3.229]).

Proposition 3.183 ([35])**.** 设 R 是含幺环, 若乘闭子集 $S\subseteq Z(R)$, 那么有双射

$$\varphi:\{P\in\mathrm{Spec}R|P\cap S=\varnothing\}\to\mathrm{Spec}R_S,P\mapsto P_S,$$

其中 $P_S=\{\lambda(p)\lambda(s)^{-1}|p\in P,s\in S\}$, 这里 $\lambda:R\to R_S$ 是局部化映射. φ 的逆映射将每个 R_S 的素理想 $\mathfrak{q}$ 映至 $\{a\in R|存在s\in S使得\lambda(a)\lambda(s)^{-1}\in\mathfrak{q}\}$. 如果赋予 $\{P\in\mathrm{Spec}R|P\cap S=\varnothing\}$ 素谱 $\mathrm{Spec}R$ 上 Zariski 拓扑的子空间拓扑、$\mathrm{Spec}R_S$ 上 Zariski 拓扑, 则双射 φ 给出同胚.

Proof. 任取 R 的素理想 P, 并设 $P\cap S=\varnothing$. 易验证 P_S 是 R_S 的理想, 下证 P_S 是真理想. 如果存在 $p\in P,s\in S$ 使得 $\lambda(1)=\lambda(p)\lambda(s)^{-1}$, 那么存在 $u\in S$ 使得 $(p-s)u=0$. 进而 $us\in P$, 这和 $P\cap S=\varnothing$ 矛盾. 再说明 P_S 是 R_S 的素理想. 任何 R_S 中理想都具备 I_S 的形式, 这里 I 是 R 的理想, 所以只需验证若 R 的理想 I,J 满足 $I_SJ_S\subseteq P_S$, 则 $IJ\subseteq P$ 即可. 利用 $S\subseteq Z(R)$ 易验证任何 $a\in IJ$ 满足存在 $s\in S$ 使得 $as\in P$.

于是 $aRs \subseteq P$, 因此 P 是素理想以及 $s \notin P$ 蕴含 $a \in P$, 这说明 $IJ \subseteq P$. 以上讨论表明 φ 是定义合理的映射. 如果 R 的素理想 P, Q 满足均与 S 不相交以及 $P_S = Q_S$, 那么易验证任何 $p \in P$ 满足存在 $u \in S$ 使得 $pu \in Q$, 类似前面的讨论由 $pRu \subseteq Q$ 得到 $p \in Q$. 于是 $P \subseteq Q$, 类似可验证 $Q \subseteq P$, 因此 φ 是单射. 任取 R_S 的素理想 $\mathfrak{q}$, 定义 $Q = \{a \in R | \text{存在} s \in S \text{使得} \lambda(a)\lambda(s)^{-1} \in \mathfrak{q}\}$, 那么 Q 是 R 的理想且 $Q_S = \mathfrak{q}$. 通过 $\mathfrak{q}$ 是真理想易见 $Q \cap S = \varnothing$. 如果 R 的理想 I, J 满足 $IJ \subseteq Q$, 则 $I_S J_S \subseteq Q_S = \mathfrak{q}$. 故 $I_S \subseteq Q_S$ 或 $J_S \subseteq Q_S$. 不妨设 $I_S \subseteq Q_S = \mathfrak{q}$, 那么根据 Q 的定义得到 $I \subseteq Q$. 所以 Q 是素理想, 这说明 φ 是单射.

最后说明 φ 是同胚. 任何 $\mathrm{Spec}R_S$ 中闭集形如 $V(I_S)$ 的形式, I 是 R 的理想. 不妨设 $I \cap S = \varnothing$, 那么可直接验证 $\varphi^{-1}(V(I_S)) = V(I) \cap \{P \in \mathrm{Spec}R | P \cap S = \varnothing\}$, 所以 φ 是连续映射. 再说明 φ 是闭映射. 不妨设 I 是 R 的与 S 不相交的理想, 则有 $\varphi(V(I) \cap \{P \in \mathrm{Spec}R | P \cap S = \varnothing\}) = V(I_S)$, 因此 φ 是闭映射. □

Lemma 3.184. 设 $\Bbbk$ 是域, 那么对任何有限维 $\Bbbk$-代数 A, $|\mathrm{Spec}A| \leq \dim_{\Bbbk} A$.

Proof. 首先回忆任给左 Artin 环 R, 若 $\mathrm{Jac}R$ 为 R 的 Jacobson 根, 那么 R 的任何极大理想都包含 $\mathrm{Jac}R$, 由此不难看出 R 的极大谱与 Artin 半单环 $\overline{R} = R/\mathrm{Jac}R$ 的极大谱间有双射. 根据 Wedderburn-Artin 定理, $\overline{R}$ 可分解为有限多个 Artin 单环 R_k 的积: $\overline{R} \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_m$. 因此 $\overline{R}$ 的极大理想数目恰好 m 个. 现取 $R = A$ 是域 $\Bbbk$ 上有限维代数, 那么 m 自然不超过 $R/\mathrm{Jac}R$ 的 $\Bbbk$-线性维数. 因此 A 的极大理想数目不超过 $\dim_{\Bbbk} A$. 故 A 的素谱、极大谱以及本原素谱的元素数目都不超过 A 的线性维数. □

Remark 3.185. 该引理也告诉我们有限维 $\Bbbk$-代数 A 的不可约表示等价类数目不超过 $\dim_{\Bbbk} A$.

总结一下, 如果 R 是某个中心子环 Z 上的有限生成模, 那么有天然的满连续映射 $\varphi : \mathrm{Spec}R \to \mathrm{Spec}Z, P \mapsto P \cap Z$. 对每个 $P \in \mathrm{Spec}R$, P 是 R 的极大理想当且仅当 $\varphi(P) = P \cap Z$ 是 Z 的极大理想. 因此 Z 的极大理想可将 R 的极大谱 (也是本原素谱) 划分为若干不相交的纤维, 并且每个纤维都是有限集.

$$\mathrm{maxSpec}R = \bigcup_{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}Z} \varphi^{-1}(\mathfrak{m}).$$

对固定的 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}Z$, 易见 $R/\mathfrak{m}R$ 是域 $Z/\mathfrak{m}$ 上有限维代数且 $R/\mathfrak{m}R$ 上不可约模同构类全体与

$$\{R\text{上零化子在}\varphi^{-1}(\mathfrak{m})\text{中的不可约模同构类}\} = \{R\text{上可以被}\mathfrak{m}\text{零化的不可约模同构类}\}$$

间有自然的双射, 因此 $R/\mathfrak{m}R$ 上不可约模同构类数目就是 $|\varphi^{-1}(\mathfrak{m})|$, 它不超过 R 作为有限生成 Z-模的生成元数目. 若进一步假设 R 是域 $\Bbbk$ 上仿射代数, 下面的 [引理3.186] 表明 $R/\mathfrak{m}R$ 是 $\Bbbk$ 上有限维代数. 于是研究 R 的不可约表示可转化为研究所有形如 $R/\mathfrak{m}R$($\mathfrak{m}$ 遍历 Z 的极大理想) 的有限维代数的不可约表示.

Lemma 3.186 ([1]). 当 R 是域上仿射模有限代数时, 对 Z 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$ 都有 $R/\mathfrak{m}R$ 是有限维代数.

Proof. 在 [推论3.11] 中我们已经看到域上仿射本原 PI 代数都是有限维的. 对 R 模有限的中心子代数 Z 以及 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 取 R 的极大理想 P 使得 $P \cap Z = \mathfrak{m}$. 那么 $Z/\mathfrak{m}$ 与 R/P 都是有限维代数. 注意到 $R/\mathfrak{m}R$ 是有限维代数 $Z/\mathfrak{m}$ 上的有限生成模, 所以 $R/\mathfrak{m}R$ 也是有限维代数. □

Example 3.187. 如果 R 是域 $\Bbbk$ 上有限维单代数并记 $Z = \Bbbk$, 那么 $\mathrm{maxSpec}R$ 和 $\mathrm{maxSpec}Z$ 都是由相应零理想构成的单点集. 这时 [命题3.180] 中的连续满射 $\varphi : \mathrm{maxSpec}R \to \mathrm{maxSpec}Z, M \mapsto M \cap Z$ 是拓扑同胚.

Example 3.188. 考虑域 $\Bbbk$上有限维半单代数 $R = \mathrm{M}_2(\Bbbk) \oplus \mathrm{M}_3(\Bbbk)$ 并考虑 A 的中心 $Z = \Bbbk \oplus \Bbbk$. 那么 Z 共有两个极大理想 $\mathfrak{m}_1 = \Bbbk \oplus 0, \mathfrak{m}_2 = 0 \oplus \Bbbk$, 这两个极大理想关于 [命题3.180] 中的连续满射 $\varphi : \mathrm{maxSpec}R \to \mathrm{maxSpec}Z, M \mapsto M \cap Z$ 的原像分别为 $M_1 = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_1) = \mathrm{M}_2(\Bbbk) \oplus 0$ 和 $M_2 = 0 \oplus \mathrm{M}_3(\Bbbk)$. M_1 对应 R 在 $\Bbbk$ 上的 2 维不可约表示, M_2 对应 3 维不可约表示. 可直接计算有 $\Bbbk$-代数同构 $R_{\mathfrak{m}_1} \cong \mathrm{M}_3(\Bbbk)$ 和 $R_{\mathfrak{m}_2} \cong \mathrm{M}_2(\Bbbk)$.

Example 3.189. 依然考虑 [例3.188] 中域 $\Bbbk$ 上有限维半单代数 $R = \mathrm{M}_2(\Bbbk) \oplus \mathrm{M}_3(\Bbbk)$, 取 $Z = \Bbbk(I_2, I_3) \cong \Bbbk$, 那么 R 是域 Z 上模有限仿射代数. 前面指出中心 $\mathcal{Z}(R) = \Bbbk \oplus \Bbbk$ 并且 R 在中心每个极大理想处的局部化都是 Azumaya 代数, 因此由 [命题3.58] 可知 R 是 Azumaya 代数. 这说明 R 在 $Z - \{0\} = \Bbbk - \{0\}$ 处作局部化依然是 Azumaya 代数. 所以 $\mathrm{maxSpec}Z$ 中极大理想 $\mathfrak{m}$ 均使得 $R_{\mathfrak{m}}$ 是 Azumaya 代数. 而零理想关于 [命题3.180] 中的连续满射 $\varphi : \mathrm{maxSpec}R \to \mathrm{maxSpec}Z$ 的原像集为由 $M_1 = \mathrm{M}_2(\Bbbk) \oplus 0$ 和 $M_2 = 0 \oplus \mathrm{M}_3(\Bbbk)$, 它们分别对应 R 在 $\Bbbk$ 上的 2 次不可约表示和 3 次不可约表示.

Example 3.190. 考虑域 $\Bbbk$ 上的二阶上三角矩阵代数 R, 那么 R 的中心 $Z = \Bbbk I_2$. 因为 R 是 Artin 环, 所以 $\mathrm{maxSpec}R = \mathrm{Spec}R$, 容易计算验证 $\mathrm{maxSpec}R$ 由下述两个元素构成:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{pmatrix}.$$

并且 $M_1 \cap Z = M_2 \cap Z = 0$. 这时 [命题3.180] 中的连续满射 $\varphi : \mathrm{maxSpec}R \to \mathrm{maxSpec}Z, M \mapsto M \cap Z$ 是常值映射. 注意 M_1, M_2 所对应的 R 在域 $\Bbbk$ 上的不可约表示 (等价类) 都是 1 维的. $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Jac}R = 1$. 这时 0 作为 Z 唯一的极大理想关于 φ 的原像集的元素数目为 $2 < \dim_Z R$. 注意到 R 作为域 $\Bbbk$ 上有限维代数不是单的, 所以 [推论3.34] 表明 R 不是 Z-可分代数, 进而也不是 Azumaya 代数. 现在设 $\mathrm{char}\Bbbk = 0$ 并记 $\mathrm{tr} : R \to \Bbbk$ 是对上三角阵取经典迹得到的迹映射, 那么 $(R, \Bbbk, \mathrm{tr})$ 是次数为 2 的 Cayley-Hamilton 代数 ([定义3.114]), 并注意 R 不可能带上某个取值在 $\Bbbk$ 中的迹映射成为次数为 1 的 Cayley-Hamilton 代数. 在 [注记3.115] 中我们指出当 $\Bbbk$ 进一步是代数闭域时, n 次 Cayley-Hamilton 代数的不可约表示的线性维数不超过 n. 而本例表明有可能所有的不可约表示维数都不超过 $n-1$.

设 R 是中心子环 Z 上有限生成模, 取定 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}Z$, 那么有标准双射 $\theta : \{Q \in \mathrm{maxSpec}R | Q \cap Z = \mathfrak{m}\} \to \mathrm{maxSpec}R_{\mathfrak{m}}, Q \mapsto Q_{\mathfrak{m}}$. 若记 $\varphi : \mathrm{Spec}R \to \mathrm{Spec}Z, P \mapsto P \cap Z$ 是素谱间的标准连续映射, 那么有 $\{Q \in \mathrm{maxSpec}R | Q \cap Z = \mathfrak{m}\} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$. 记含幺环 S 上不可约模同构类集为 $\mathrm{Irr}(S)$. 那么根据前面的讨论, 有标准双射 $\eta : \{[{}_R M] \in \mathrm{Irr}(R) | \mathfrak{m}M = 0\} \to \mathrm{maxSpec}R_{\mathfrak{m}}, [M] \mapsto (\mathrm{Ann}_R M)_{\mathfrak{m}}$. 注意到 $R_{\mathfrak{m}}$ 是中心子代数 $Z_{\mathfrak{m}}$ 上的有限生成模, 因此有标准同构 $\xi : \mathrm{Irr}(R_{\mathfrak{m}}) \to \mathrm{maxSpec}R_{\mathfrak{m}}, [{}_{R_{\mathfrak{m}}}X] \mapsto \mathrm{Ann}_{R_{\mathfrak{m}}}X$. 现在任取不可约左 R-模 M 满足 $\mathfrak{m}M = 0$, 简记 $\mathrm{Ann}_R M$ 为 Q. 那么 $M_{\mathfrak{m}}$ 作为 $R_{\mathfrak{m}}$ 上的模零化子包含 $Q_{\mathfrak{m}}$. 下证 $M_{\mathfrak{m}} \neq 0$, 进而可知 $\mathrm{Ann}_{R_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} = Q_{\mathfrak{m}}$. 设 $M = Rx$, 假设 $x1^{-1} \in M_{\mathfrak{m}}$ 为零, 那么存在 $s \in Z - \mathfrak{m}$ 使得 $sx = 0$, 于是 $sRx = 0$ 迫使 $s \in Q$. 结合 $s \in Z$ 可知 $s \in \mathfrak{m}$, 矛盾. 因此 $M_{\mathfrak{m}} \neq 0$. 那么下面的引理保证了 $M_{\mathfrak{m}}$ 是不可约 $R_{\mathfrak{m}}$-模.

Lemma 3.191. 设含幺环 R 有中心乘闭子集 S, 若不可约 R-模 M 满足 $M_S \neq 0$, 那么 M_S 是不可约 R_S-模.

Proof. 任取 M_S 的非零 R_S-子模 X, 定义 $N = \{x \in M | 存在s \in S使得xs^{-1} \in X\}$, 那么 N 是 M 的非零 R-子模, 故 $N = M$, 进而 $X = M_S$. 因此 M_S 是不可约 R_S-模. □

Remark 3.192. 有可能产生 $M_S = 0$ 的情况, 例如考虑 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在素理想 $3\mathbb{Z}$ 处作局部化.

通过局部化函子立即得到定义合理的映射 $\psi:\{[{}_RM]\in\mathrm{Irr}(R)|\mathfrak{m}M=0\}\to\mathrm{Irr}(R_{\mathfrak{m}}),[{}_RM]\mapsto[M_{\mathfrak{m}}]$. 注意到对不可约 R-模 M, 若记 $Q=\mathrm{Ann}_RM$, 那么 $Q_{\mathfrak{m}}=\mathrm{Ann}_{R_{\mathfrak{m}}}M_{\mathfrak{m}}$, 所以有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\{Q\in\mathrm{maxSpec}R|Q\cap Z=\mathfrak{m}\} \arrow[r, "\theta"] & \mathrm{maxSpec}R_{\mathfrak{m}} \\
\{[{}_RM]\in\mathrm{Irr}(R)|\mathfrak{m}M=0\} \arrow[u] \arrow[r, "\psi"] & \mathrm{Irr}(R_{\mathfrak{m}}) \arrow[u, "\xi"']
\end{tikzcd}$$

因此 $\psi:\{[{}_RM]\in\mathrm{Irr}(R)|\mathfrak{m}M=0\}\to\mathrm{Irr}(R_{\mathfrak{m}}),[{}_RM]\mapsto[M_{\mathfrak{m}}]$ 也是双射. 注意到 $Z_{\mathfrak{m}}$ 是局部环 (如果 R 进一步是域上仿射代数, 那么 Z 也是仿射的, 进而 $Z_{\mathfrak{m}}$ 是交换 Noether 局部环), 因此研究 R 的不可约表示也可以拆分为对每个 $\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}Z$, 研究 $R_{\mathfrak{m}}$(在其中心子代数 $Z_{\mathfrak{m}}$ 上是有限生成模) 的不可约表示, $R_{\mathfrak{m}}$ 的不可约模同构类 $\mathrm{Irr}(R_{\mathfrak{m}})$ 对应于 $\mathrm{Irr}(R)$ 中能够被 $\mathfrak{m}$ 零化的不可约模同构类构成的子集.

在进一步讨论模有限代数的通用表示理论前, 我们简单地介绍一下 Brown 与 Yakimov 在 [30] 中关于 Cayley-Hamilton 代数的判别式理想的部分工作, 他们在 Cayley-Hamilton 代数的判别式理想零点集与其不可约表示间建立了深刻的联系 (见 [定理3.195]). 在给出判别式理想以及其零点集的相关概念前, 我们先指出

Example 3.193 ([30]). 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, (R,C,tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次仿射 Cayley-Hamilton 代数 (在 [推论3.166] 中已经指出这时 ${}_CR$ 是有限生成模, 于是由 Artin-Tate 引理得到 C 是仿射 $\Bbbk$-代数), 并固定 C 的极大理想 $\mathfrak{m}$. 那么根据前面的讨论, R 上所有能够被 $\mathfrak{m}$ 零化的不可约表示的研究可转化为域 $C/\mathfrak{m}\cong\Bbbk$ 上有限维代数 $R/\mathfrak{m}R$ 的不可约表示的研究. 沿用 [30] 中的记号, 我们把 R 的所有可由 $\mathfrak{m}$ 零化的不可约表示同构类构成的集合记作 $\mathrm{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)$. 这时迹映射 $\mathrm{tr}:R\to C$ 诱导迹映射 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}}:R/\mathfrak{m}R\to C/\mathfrak{m}\cong\Bbbk,a+\mathfrak{m}R\mapsto\mathrm{tr}(a)+\mathfrak{m}$. 根据 [例3.122], $(R/\mathfrak{m}R,\Bbbk,\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}})$ 是 n 次有限维 Cayley-Hamilton 代数. 现在应用 [例3.143] 中介绍的 Procesi 的结果 (并沿用 [例3.143] 中的记号), 我们知道存在映射 $k_{\mathfrak{m}}:\mathrm{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)\to\mathbb{Z}_{\geq1}$ 使得

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}}=\sum_{[V]\in\mathrm{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)}k_{\mathfrak{m}}([V])\mathrm{tr}_{[V]}.$$

不难验证 $\mathrm{tr}_{[V]}$ 定义合理 (不依赖于代表元选取). 若对上式两边作用 1, 则 $n=\sum\limits_{[V]\in\mathrm{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)}k_{\mathfrak{m}}([V])\dim_{\Bbbk}V$.

Remark 3.194. 设 R 是代数闭域 $\Bbbk$ 上模有限仿射代数, $\mathrm{tr}:R\to C$ 是迹映射. 沿用上例中的记号 (将 $C/\mathfrak{m}\cong\Bbbk$ 视作等同), 如果对每个 C 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 都存在映射 $s_{\mathfrak{m}}:\mathrm{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)\to\Bbbk$ 使得

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}}=\sum_{[V]\in\mathrm{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)}s_{\mathfrak{m}}([V])\mathrm{tr}_V,$$

[30] 中将满足该性质的 tr 是**几乎表示论迹**. 该例表明特征零的代数闭域上的仿射 Cayley-Hamilton 代数 (注意 [推论3.166] 已经保证了该代数是模有限的)(R,C,tr) 中的迹映射 $\mathrm{tr}:R\to C$ 是几乎表示论迹.

判别式起源于多项式的重根判定, 随后人们在数论和非交换环论场景定义判别式以及判别式理想的概念. 设含幺环 R 有中心子环 C, 并给定迹映射 $\mathrm{tr}:R\to C$, 对每个正整数 ℓ, 分别定义 $D_\ell(R/C;\mathrm{tr})$ 和 $MD_\ell(R/C;\mathrm{tr})$ 为以下两个 C 的子集在 C 中生成的理想:

$$\{\det(\mathrm{tr}(x_ix_j))_{m\times m}|(x_1,...,x_\ell)\in R^\ell\},\{\det(\mathrm{tr}(x_iy_j))_{m\times m}|(x_1,...,x_\ell),(y_1,...,y_\ell)\in R^\ell\}$$

称 $D_\ell(R/C;\mathrm{tr})$ 为 ℓ 阶**判别式理想**, $MD_\ell(R/C;\mathrm{tr})$ 为 ℓ 阶**改良判别式理想**. 利用行列式的基本性质, 当 R 作为 C-模的生成元集 X 明确时, 可以适当简化改良判别式理想的描述: $MD_\ell(R/C;\mathrm{tr})$ 可由下述集合生成:

$$\{\det(\mathrm{tr}(x_iy_j))_{m\times m}|(x_1,...,x_\ell),(y_1,...,y_\ell)\in X^\ell\}.$$

尤其是当 R 作为 C-模是有限生成模并且有自然的生成元集 X 时, 该观察可用于显式地表达改良判别式理想的生成元集. 不过这里的观察并不会在下面的 [定理3.195] 的证明中用到. 对 C 的理想 I, 记 $\mathcal{V}(I)$ 是 C 中所有包含 I 的极大理想构成的集合, 即 I 在极大谱中的零点集. 现在我们能够证明

Theorem 3.195 ([30])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, (R,C,tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次仿射 Cayley-Hamilton 代数. 对每个 $\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}C$, 将所有可被 $\mathfrak{m}$ 零化的不可约模同构类构成的集合记作 $\mathrm{Irr}_\mathfrak{m}(R)$. 那么对任何正整数 ℓ 有

$$\mathcal{V}(MD_\ell(R/C;\mathrm{tr}))=\mathcal{V}(D_\ell(R/C;\mathrm{tr}))=\{\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}C|\sum_{[V]\in\mathrm{Irr}_\mathfrak{m}(R)}(\dim_\Bbbk V)^2<\ell\}.$$

Proof. 固定 C 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 那么在 [例3.193] 中我们看到 tr 诱导迹映射 $\mathrm{tr}_\mathfrak{m}:R/\mathfrak{m}R\to C/\mathfrak{m}\cong\Bbbk, a+\mathfrak{m}R\mapsto \mathrm{tr}(a)+\mathfrak{m}$. 现在应用 [引理3.131], 我们得到迹映射

$$\overline{\mathrm{tr}}_\mathfrak{m}:(R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R)\to C/\mathfrak{m}\cong\Bbbk,\overline{a}+\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R)\mapsto\mathrm{tr}(a)+\mathfrak{m}.$$

因此 $((R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R),\Bbbk,\overline{\mathrm{tr}}_\mathfrak{m})$ 是 $\Bbbk$ 上有限维半单 n 次 Cayley-Hamilton 代数, 注意我们在 [注记3.129] 中已经指出 $\overline{\mathrm{tr}}_\mathfrak{m}$ 诱导的 $(R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R)$ 上对称双线性型是非退化的. 根据 Wedderburn-Artin 定理, 有

$$\dim_\Bbbk(R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R)=\sum_{[V]\in\mathrm{Irr}_\mathfrak{m}(R)}(\dim_\Bbbk V)^2.$$

根据下面的 [引理3.198], 如果 $\ell\le\sum_{[V]\in\mathrm{Irr}_\mathfrak{m}(R)}(\dim_\Bbbk V)^2$, 那么总存在 $(x_1,...,x_\ell)\in R^\ell$ 使得

$$\pi_\mathfrak{m}(\det(\mathrm{tr}(x_ix_j))_{\ell\times\ell})\neq 0,$$

这里 $\pi_\mathfrak{m}:R\to R/\mathfrak{m}R$ 是标准投射. 这说明 $\ell\le\sum_{[V]\in\mathrm{Irr}_\mathfrak{m}(R)}(\dim_\Bbbk V)^2$ 时 $\mathfrak{m}\notin\mathcal{V}(D_\ell(R/C;\mathrm{tr}))$. 即

$$\mathcal{V}(D_\ell(R/C;\mathrm{tr}))\subseteq\{\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}C|\sum_{[V]\in\mathrm{Irr}_\mathfrak{m}(R)}(\dim_\Bbbk V)^2<\ell\}.$$

如果 $\ell>\sum_{[V]\in\mathrm{Irr}_\mathfrak{m}(R)}(\dim_\Bbbk V)^2$, 那么由基本的线性代数不难看出对所有的 $(x_1,...,x_\ell),(y_1,...,y_\ell)\in R^\ell$ 有

$$\pi_\mathfrak{m}(\det(\mathrm{tr}(x_iy_j))_{\ell\times\ell})=0,$$

这说明 $\mathfrak{m}\in\mathcal{V}(MD_\ell(R/C;\mathrm{tr}))$. 于是我们得到

$$\{\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}C|\sum_{[V]\in\mathrm{Irr}_\mathfrak{m}(R)}(\dim_\Bbbk V)^2<\ell\}\subseteq\mathcal{V}(MD_\ell(R/C;\mathrm{tr})).$$

注意 $D_\ell(R/C;\mathrm{tr})\subseteq MD_\ell(R/C;\mathrm{tr})$, 所以总有 $\mathcal{V}(MD_\ell(R/C;\mathrm{tr}))\subseteq\mathcal{V}(D_\ell(R/C;\mathrm{tr}))$, 证毕. $\square$

Remark 3.196. 注意在该定理的证明中并没有用到 [例3.193] 中指出的 Cayley-Hamilton 代数的迹是几乎表示论迹. 但我们用到了特征零的域上的有限维 Cayley-Hamilton 代数的迹与 Jacobson 根的关系 (见 [注记3.129]). 而这依赖于 Procesi 所证明的 Cayley-Hamilton 代数可保迹嵌入某交换环上矩阵代数这一事实.

Remark 3.197. 沿用上述定理的条件与记号, 这时对每个 $\mathfrak{m} \in \operatorname{maxSpec}C$, $(R/\mathfrak{m}R)/\operatorname{Jac}(R/\mathfrak{m}R)$ 作为 $\Bbbk \cong C/\mathfrak{m}$ 上有限维半单 n 次 Cayley-Hamilton 代数, 其 $\Bbbk$-线性维数自然不超过 n^2(见 [命题3.141]). 所以

$$\sum_{[V]\in \operatorname{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)} (\dim_{\Bbbk} V)^2 \leq n^2.$$

特别地, 结合 [定理3.195], 我们立即得到 $\mathcal{V}(D_\ell(R/C;\operatorname{tr})) = \operatorname{maxSpec}C, \forall \ell \geq n^2+1$.

Lemma 3.198. 设域 $\Bbbk$ 的特征不是 2, V 是 n 维线性空间. $\mu : V\times V \to \Bbbk$ 是非退化对称双线性型. 那么对任何正整数 $1 \leq t \leq n$, 存在 V 的 t 维子空间 W 使得 $\mu|_W$ 也非退化.

Proof. 取定 V 的基 $\{x_1, ..., x_n\}$. 由条件, 对 Gram 矩阵 $A = (\mu(x_i, x_j))_{n\times n}$, A 是可逆对称阵并且可合同于某对角阵. 设可逆阵 Q 满足 $Q^TAQ = \operatorname{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, 这里 λ_i 均非零. 固定正整数 $1 \leq t \leq n$, 对每个 $1 \leq i \leq t$ 记 e_i 是 $\Bbbk^n$ 中第 i 个标准单位列向量, 并定义 $y_i = (x_1, ..., x_n)Qe_i$, 那么 $\{y_1, ..., y_t\}$ 是 $\Bbbk$-线性无关的. 命 W 是由 $\{y_1, ..., y_t\}$ 生成的子空间, 那么 $\mu|_W$ 在基 $\{y_1, ..., y_t\}$ 下的 Gram 矩阵就是 $\operatorname{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_t\}$. □

在 [例3.121] 中我们看到特征为零的域上 PI 次数为 n 的模有限仿射素代数 R 满足 $T(R) = R$(例如 R 的中心 Z 是整闭整区) 时, $(R, Z, \operatorname{tr}_{\mathrm{red}})$ 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 应用 [定理3.195], 得到

Corollary 3.199 ([30])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, R 是 $\Bbbk$ 上模有限仿射素代数, 并且满足 $T(R) = R$. 将 R 的中心记作 Z, 设 $\operatorname{tr}_{\mathrm{red}} : R \to Z$ 是 R 的约化迹 (回忆 [命题3.110]). 对每个 $\mathfrak{m} \in \operatorname{maxSpec}Z$, 将所有可被 $\mathfrak{m}$ 零化的不可约模同构类构成的集合记作 $\operatorname{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)$. 那么对任何正整数 ℓ 有

$$\mathcal{V}(MD_\ell(R/Z;\operatorname{tr}_{\mathrm{red}})) = \mathcal{V}(D_\ell(R/Z;\operatorname{tr}_{\mathrm{red}})) = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{maxSpec}Z | \sum_{[V]\in \operatorname{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)} (\dim_{\Bbbk} V)^2 < \ell\}.$$

Remark 3.200. 沿用 [推论3.199] 的记号, 并记 $S = Z - \{0\}$, 根据 Posner 定理, R_S 是 Z_S 上 n^2 维代数. 所以当 $\ell \geq n^2+1$ 时, $MD_\ell(R_S/Z_S; (\operatorname{tr}_{\mathrm{red}})_S) = D_\ell(R_S/Z_S; (\operatorname{tr}_{\mathrm{red}})_S) = 0$, 这说明

$$\mathcal{V}(MD_\ell(R/Z;\operatorname{tr}_{\mathrm{red}})) = \mathcal{V}(D_\ell(R/Z;\operatorname{tr}_{\mathrm{red}})) = \operatorname{maxSpec}Z, \forall \ell \geq n^2+1.$$

设 R 是代数闭域 $\Bbbk$ 上仿射模有限代数, C 是 R 的中心子代数满足 ${}_CR$ 是有限生成模. 根据 [命题3.180], 我们有定义合理的不可约表示维数平方和函数

$$\chi : \operatorname{maxSpec}C \to \mathbb{N}, \mathfrak{m} \mapsto \sum_{[V]\in \operatorname{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)} (\dim_{\Bbbk} V)^2,$$

而 [定理3.195] 表明至少在 Cayley-Hamilton 代数场景, 判别式理想的零点集承载了 χ 的信息: 对 $\ell \geq 1$ 有

$$\mathfrak{m} \in \mathcal{V}(D_\ell(R/C;\operatorname{tr})) \Leftrightarrow \chi(\mathfrak{m}) < \ell.$$

因此维数平方和函数 χ 能够告诉我们 C 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$ 所含于的判别式理想零点集阶数的最小值, 即 $\chi(\mathfrak{m})+1$. 注意 [注记3.197] 表明在 n 次 Cayley-Hamilton 代数场景, $\chi(\mathfrak{m}) \leq n^2, \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{maxSpec}C$.

对于 n 次 Cayley-Hamilton 代数 n^2 阶的判别式理想的零点集, 我们能够说更多.

Theorem 3.201 ([30]). 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, (R, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次仿射 Cayley-Hamilton 代数. 则

$$\{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)\} = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R\text{有}n\text{维不可约表示}\} = \mathrm{maxSpec}C - \mathcal{V}(D_{n^2}(R/C; \mathrm{tr})).$$

Proof. 如果 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C$ 满足 $R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, 那么 R 明显有 n 维不可约表示. 如果 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C$ 满足 $R/\mathfrak{m}R$ 存在 n 维不可约表示, 那么 $(R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R)$ 也存在 n 维不可约表示, 于是. 因 $(R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R)$ 是有限维半单 n 次 Cayley-Hamilton 代数, 所以 [命题3.141] 表明 $(R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R)$ 的线性维数不超过 n^2. 由 Wedderburn-Artin 定理, 将 $(R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R)$ 分解为一些 $\Bbbk$ 上矩阵代数的乘积, 那么这些矩阵代数一定存在某个是 n 阶的, 这迫使 $(R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R) \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 现在应用 [命题3.153] 得到 $R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 至此我们证明了 $\{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)\} = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R\text{有}n\text{维不可约表示}\}$. 下证

$$\{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)\} = \mathrm{maxSpec}C - \mathcal{V}(D_{n^2}(R/C; \mathrm{tr})).$$

如果 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C$ 满足 $R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, 那么 $(R/\mathfrak{m}R, \Bbbk, \mathrm{tr}_{\mathfrak{m}})$ 是有限维单 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 特别地, $\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}}$ 是 $R/\mathfrak{m}R$ 上非退化迹映射. 从而 $D_{n^2}(R/C; \mathrm{tr}) \nsubseteq \mathfrak{m}$. 即 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C - \mathcal{V}(D_{n^2}(R/C; \mathrm{tr}))$.

最后, 任取 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C - \mathcal{V}(D_{n^2}(R/C; \mathrm{tr}))$, 则 n 次 Cayley-Hamilton 代数 $((R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R), \Bbbk, \mathrm{tr}_{\mathfrak{m}})$ 的 n^2 阶判别式理想非零, 这说明 $\dim_{\Bbbk}(R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R) \geq n^2$. 现在应用 [命题3.141] 得到

$$\dim_{\Bbbk}(R/\mathfrak{m}R)/\mathrm{Jac}(R/\mathfrak{m}R) = n^2.$$

由 [命题3.153] 知 $R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 故 $\mathrm{maxSpec}C - \mathcal{V}(D_{n^2}(R/C; \mathrm{tr})) \subseteq \{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)\}$. □

Remark 3.202. 该定理在有限维复单 Lie 代数在单位根处量子包络代数 (对 Lie 代数与单位根的本原次数加适当限制) 的情形 (这是模有限自由素代数, 带上约化迹) 早在 [38] 中被 Concini 与 Kac 证明.

Remark 3.203. 根据 [命题3.154], 在定理条件下我们还有

$$\{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)\} = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R\text{是秩为}n^2\text{的 Azumaya 代数}\}.$$

Corollary 3.204. 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, (R, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次仿射 Cayley-Hamilton 代数, 那么 (由 [定理3.201] 立即得到)$\{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R\text{有}n\text{维不可约表示}\}$ 是 $\mathrm{maxSpec}C$ 的 Zariski 开子集.

Remark 3.205. 之前在 [注记3.115] 中已经指出在上述推论条件下, R 的不可约表示的 $\Bbbk$-线性维数不超过 n.

我们指出 [定理3.201] 结论中的零点集的补集 $\mathrm{maxSpec}C - \mathcal{V}(D_{n^2}(R/C; \mathrm{tr}))$ 可能是空集.

Example 3.206. 设 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, 在 [例3.190] 中我们已经看到 n 次 Cayley-Hamilton 代数的不可约表示可能维数都严格小于 n. 之后会在 [定理3.212] 中证明 PI 次数为 n 的仿射模有限素代数均存在 n 维不可约表示 (注意我们已经在 [注记3.12] 中指出这时模有限仿射素代数的不可约表示维数不超过 n).

我们把 [定理3.195] 和 [定理3.201] 总结为下述推论, 它是 [30] 中的一个主要结果.

Corollary 3.207 ([30]). 设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域, (R, C, tr) 是 $\Bbbk$ 上 n 次仿射 Cayley-Hamilton 代数, 那么对每个正整数 ℓ 有 $\mathcal{V}(MD_\ell(R/C; \mathrm{tr})) = \mathcal{V}(D_\ell(R/C; \mathrm{tr})) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | \sum_{[V] \in \mathrm{Irr}_{\mathfrak{m}}(R)} (\dim_{\Bbbk} V)^2 < \ell\}$, 且

$$\{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)\} = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R/\mathfrak{m}R\text{有}n\text{维不可约表示}\} = \mathrm{maxSpec}C - \mathcal{V}(D_{n^2}(R/C; \mathrm{tr})).$$

[定理3.201] 的证明依赖于 [注记3.115] 介绍的 Procesi 得到的 Cayley-Hamilton 代数的保迹嵌入性质以及 [命题3.153] 前面罗列的经典 Artin-Procesi 定理和中心多项式 g_n 的性质. 在 [例3.121] 中我们看到当域 $\Bbbk$ 的特征 $\mathrm{char}\Bbbk \notin [1,n]$ 时, 满足 $T(R)=R$(例如中心是整闭整区) 的域 $\Bbbk$ 上 PI 次数为 n 的素 PI 代数 R, 记 R 的中心为 Z, 那么 $(R,Z,\mathrm{tr}_{\mathrm{red}})$ 是 n 次 Cayley-Hamilton 代数. 在这个场景下, 我们能只用 [注记3.115] 证明

Theorem 3.208 ([38])**.** 设代数闭域 $\Bbbk$ 是特征为零的代数闭域, R 是 $\Bbbk$ 上 PI 次数为 n 的模有限仿射素代数, 中心为 Z, 满足 $T(R)=R$. 现在设 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}: R\to Z$ 是约化迹. 那么

$$\{\mathfrak{m}\in \mathrm{maxSpec}Z | R/\mathfrak{m}R \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)\} = \mathrm{maxSpec}Z - \mathcal{V}(D_{n^2}(R/Z;\mathrm{tr}_{\mathrm{red}})).$$

Proof. 首先记 $S=Z-\{0\}$, 那么 Posner 定理表明 R_S 是 Z_S 上 n^2 维中心单代数. 如果 $\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}Z$ 满足 $R/\mathfrak{m}R\cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, 那么存在 $a_1,...,a_{n^2}\in R$ 使得 $\{\overline{a_1},...,\overline{a_{n^2}}\}$ 是 $R/\mathfrak{m}R$ 作为 $\Bbbk$-线性空间的基. 由 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}}$ 诱导的对称双线性型非退化 (利用 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 上非零迹都非退化或应用 [注记3.129]) 便知 $D_{n^2}(R/Z;\mathrm{tr}_{\mathrm{red}})\nsubseteq \mathfrak{m}$. 这证明了 $\{\mathfrak{m}\in \mathrm{maxSpec}Z|R/\mathfrak{m}R\cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)\}\subseteq \mathrm{maxSpec}Z-\mathcal{V}(D_{n^2}(R/Z;\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}))$. 现在设 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}\notin \mathcal{V}(D_{n^2}(R/Z;\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}))$, 那么存在 $a_1,...,a_{n^2}\in R$ 使得 $\det(\mathrm{tr}(a_ia_j))_{n^2\times n^2}\notin\mathfrak{m}$. 下证 $\{\overline{a_1},...,\overline{a_{n^2}}\}$ 是 $R/\mathfrak{m}R$ 作为 $\Bbbk$-线性空间的基, 一旦证明此断言, 则 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}}$ 非退化. 结合 [注记3.129] 得到 $R/\mathfrak{m}R$ 是 n^2 维半单代数. 再应用 [命题3.141] 便得到 $R/\mathfrak{m}R\cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$. 因此, 根据前面的讨论, 要完成定理证明只需证明 $\{\overline{a_1},...,\overline{a_{n^2}}\}$ 是 $R/\mathfrak{m}R$ 作为 $\Bbbk$-线性空间的基这一断言. 首先我们指出 $\det(\mathrm{tr}(a_ia_j))_{n^2\times n^2}$ 是 Z 中非零元保证了 $a_1,...,a_{n^2}$ 作为 R_S 中元素是 Z_S-线性无关的 (所以也是 $\Bbbk$-线性无关的). 并注意 $\mathrm{tr}_S: R_S\to Z_S$ 是 n^2 维 Z_S-线性空间 R_S 上的 (非退化) 迹映射. 记 tr_S 所诱导的 R_S 上非退化对称双线性型为 $\langle -,-\rangle_{\mathrm{tr}_S}$. 由下面的 [引理3.209], 存在 $\{a_1^*,...,a_{n^2}^*\}\subseteq R_S$ 使得 $\langle a_i,a_j^*\rangle_{\mathrm{tr}_S}=\delta_{ij}$ 并且由其构造知 $\det(\mathrm{tr}(a_ia_j))_{n^2\times n^2}a_i^*\in R$. 于是对任何 $x\in R_S$ 有

$$x=\sum_{j=1}^{n^2}\langle x,a_j^*\rangle_{\mathrm{tr}_S}a_j.$$

特别地, 对任何 $a\in R$, 取 $x=\det(\mathrm{tr}(a_ia_j))_{n^2\times n^2}a$ 便知 $\det(\mathrm{tr}(a_ia_j))_{n^2\times n^2}a$ 可被 $\{a_1,...,a_{n^2}\}$ 来 Z-线性表出. 现在将该 Z-线性表出等式对应到 $R/\mathfrak{m}R$ 中, 由 $\det(\mathrm{tr}(a_ia_j))_{n^2\times n^2}\neq 0\in Z/\mathfrak{m}\cong\Bbbk$ 便知断言成立. □

Lemma 3.209. 设 V是域 $\Bbbk$ 上 $d\geq 1$ 维线性空间, $\langle -,-\rangle: V\times V\to\Bbbk$ 是非退化对称双线性型. 那么对 V 的任何 $\Bbbk$-基 $\{v_1,...,v_d\}$, 存在 $\{v_1^*,...,v_d^*\}\subseteq V$ 使得 $\langle v_i,v_j^*\rangle=\delta_{ij},\forall 1\leq i,j\leq d$.

Proof. 由条件, 矩阵 $T=(\langle v_i,v_j\rangle)_{d\times d}$ 可逆. 于是可通过下述关系定义 $\{v_1^*,...,v_d^*\}\subseteq V$:

$$(v_1^*,v_2^*,...,v_d^*)T=(v_1,v_2,...,v_d).$$

可直接计算验证 $\langle v_i,v_j^*\rangle=\delta_{ij},\forall 1\leq i,j\leq d$. □

我们也感兴趣代数闭域上仿射模有限素代数更高阶的判别式理想零点集是否平凡. 更一般地, 有

Proposition 3.210 ([30])**.** 设 R 是域 $\Bbbk$ 上 PI 次数为 n 的素 PI 代数, 记其中心为 Z 并设 $\mathrm{tr}: R\to Z$ 是迹映射. 那么对任何正整数 $\ell\geq n^2+1$ 有 $MD_\ell(R/Z;\mathrm{tr})=D_\ell(R/Z;\mathrm{tr})=0$.

Proof. 对判别式理想与改良判别式理想关于中心正则元集 $S=Z-\{0\}$ 作局部化, 再由 Posner 定理便知. □

下面进一步讨论代数闭域上仿射模有限素代数的不可约表示与正则极大理想之间的关系. 首先我们需要

Proposition 3.211 ([1]). 设 R 是含幺环, Z 是 R 的中心子环满足 R_Z 是有限生成模, $\varphi: \mathrm{Spec}R \to \mathrm{Spec}Z$ 是标准嵌入 $j: Z \to R$ 诱导出的连续映射, 即 $\varphi: \mathrm{Spec}R \to \mathrm{Spec}Z, P \mapsto P \cap Z$. 根据 [命题3.180], φ 是满连续映射并且限制在极大谱层面有满连续映射 $\varphi': \mathrm{maxSpec}R \to \mathrm{maxSpec}Z, M \mapsto M \cap Z$. 如果 Z 是 Noether 环 (例如当 R 是域上仿射代数), 那么 φ 与 φ' 均为闭映射 (即把闭集映至闭集).

Proof. 先说明 φ 是闭映射, 任取 $\mathrm{Spec}R$ 的闭子集 $\mathcal{V} = V(I)$, 可不妨设 I 是半素理想 (否则用所有含 I 素理想之交替换 I), 我们断言 $\varphi(\mathcal{V}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}Z | I \cap Z \subseteq \mathfrak{p}\} = V(I \cap Z)$. 一旦证明此断言立即得到 φ 是闭映射.

记 $\mathcal{W} = V(I \cap Z)$, 明显 $\varphi(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{W}$. 反之, 如果 $\mathfrak{p} \in \mathcal{W}$, 即 $I \cap Z \subseteq \mathfrak{p}$. 注意到 R 作为有限生成 Z-模一定是双边 Noether 环, 故 R 中包含 I 的极小素理想只有有限多个, 设为 $P_1, ..., P_t$. 现在由 I 的半素性知 $I = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_t$. 所以存在某个 I 上极小素理想 P_k 使得 $Z \cap P_k \subseteq \mathfrak{p}$. 应用 [命题3.180(2)] 便知存在 R 的素理想 $Q \supseteq P_k$ 使得 $\varphi(Q) = \mathfrak{p}$. 特别地, $Q \supseteq I$, 因此 $Q \in \mathcal{V}$. 由此得到 $\varphi(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$.

还需要证明 φ' 也是闭映射. 设 $\mathcal{V}'$ 是 R 中所有包含半素理想 I 的极大理想构成的集合. 记 $\mathcal{W}'$ 是 Z 中所有包含 $I \cap Z$ 的极大理想构成的集合. 我们通过说明 $\varphi'(\mathcal{V}') = \mathcal{W}'$ 来得到 φ' 是闭映射. 而这由 [命题3.180(4)], [命题3.180(5)] 以及前面关于 φ 的讨论知结论明显成立. □

在 [推论3.11] 中我们看到域上仿射 PI 代数的不可约表示总是有限维的. 如果进一步考虑代数闭域场景, 代数闭域上素仿射 PI 代数的不可约表示维数都被该代数的 PI 次数控制, 即所有的不可约表示维数具有公共的上界. 下面的定理表明代数闭域上模有限仿射素代数总有不可约表示的维数恰是 PI 次数 (注意 [命题3.73] 表明域上仿射素 PI 代数总存在正则极大理想, 所以满足下述定理结论的极大理想总存在).

Theorem 3.212 ([1]). 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, A 是仿射模有限素 $\Bbbk$-代数, Z 是 A 的中心, n 是 A 的 PI 次数. 那么对任给 A 的极大理想 M, 并记 $\mathfrak{m} = M \cap Z$, 以下五条等价:
(1) M 是 A 的正则极大理想.
(2) $A_{\mathfrak{m}}$ 是以 $Z_{\mathfrak{m}}$ 为中心的 Azumaya 代数.
(3) $M = \mathfrak{m}A$.
(4) 极大理想 M 所对应的不可约左 A-模 (回忆 [推论2.87]) 是 $\Bbbk$-线性维数是 n.
(5) 作为 $\Bbbk$-代数, $A/M \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$.

Proof. 在正式证明前我们再回顾一下定理条件下的基本结论. 设极大理想 M 对应 A 的不可约表示 X(即有 $\mathrm{Ann}_A X = M$), 那么 $\dim_{\Bbbk} X \leq \dim_{\Bbbk} A/\mathrm{Ann}_A X$(利用 Kaplansky 定理和 Zariski 引理可知右边确实是有限维代数). 并且由 $A/\mathrm{Ann}_A X$ 的 PI 次数不超过 A 的 PI 次数以及 Kaplansky 定理可知 $A/\mathrm{Ann}_A X$ 作为中心上的线性空间维数不超过 $(\text{PI-deg}A)^2$. 注意到 $A/\mathrm{Ann}_A X$ 的中心是 $\Bbbk$ 的有限扩张, 所以 $\Bbbk$ 是代数闭域迫使 $Z(A/\mathrm{Ann}_A X) = \Bbbk$. 由此可知 $\dim_{\Bbbk} X \leq \dim_{\Bbbk} A/\mathrm{Ann}_A X \leq (\text{PI-deg}A)^2 = n^2$. 注意到 $A/\mathrm{Ann}_A X$ 是代数闭域 $\Bbbk$ 上有限维单代数, 故由 Wedderburn-Artin 定理知存在正整数 $1 \leq d \leq n$ 使得 $A/\mathrm{Ann}_A X = A/M \cong \mathrm{M}_d(\Bbbk)$. 这时利用矩阵代数的不可约表示特性以及 X 可自然视作 $A/\mathrm{Ann}_A X$ 上模易见 $\dim_{\Bbbk} X = d$. 即这时有

$$\dim_{\Bbbk} X = \text{PI-deg}A/M = d, A/M \cong \mathrm{M}_d(\Bbbk).$$

其中 $\text{PI-deg}A/M = d$ 来自 Amitsur-Levitzki 定理. 下面开始证明本定理.

根据前面的讨论, (1)⇔(4)⇔(5) 的等价性是明显的. 下面证明 (2),(3) 和 (5) 之间的等价性.

(2)⇒(3): 注意到 $M_{\mathfrak{m}} \cap Z_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$, 所以当 $A_{\mathfrak{m}}$ 是 Azumaya 代数时, 由 [命题3.54] 便知 $M_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$. 由此易知对任何 $b \in M$ 存在 $u \in Z - \mathfrak{m}$ 使得 $ub \in \mathfrak{m}A$. 而存在 $z \in Z$ 使得 $uz - 1 \in \mathfrak{m}$, 故 $b \in \mathfrak{m}A$.

(3)⇒(5): 根据前面的讨论, 只需要说明 $\dim_{\Bbbk}A/M = n^2$ 即可. 首先前面已经指出 $\dim_{\Bbbk}A/M \leq n^2$, 所以只要验证 $\dim_{\Bbbk}A/M \geq n^2$. 这时 $A/M = A/\mathfrak{m}A$ 作为 $Z/\mathfrak{m} = \Bbbk$ 上线性空间维数至少是 $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ 作为域 $Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$ 上线性空间的维数, 利用 Nakayama 引理我们看到这就是 $A_{\mathfrak{m}}$ 作为有限生成 $Z_{\mathfrak{m}}$-模的最小生成元集数目. 记 Z 的零理想为 Q, 现在有 $A_Q \cong (A_{\mathfrak{m}})_{Q_{\mathfrak{m}}}$, 因此 $A_{\mathfrak{m}}$ 作为有限生成 $Z_{\mathfrak{m}}$-模的最小生成元集数目至少是 $\dim_{Z_Q}A_Q$. 由 Posner 定理, $\dim_{Z_Q}A_Q = n^2$, 所以 $\dim_{\Bbbk}A/M \geq n^2$.

(5)⇒(2): 由 Amitsur-Levitzki 定理, 这时 PI-deg$A/M = n$, 所以 M 是正则极大理想. 并注意到 $A_{\mathfrak{m}}/M_{\mathfrak{m}} \cong (A/M)_{\overline{\mathfrak{m}}} \cong A/M$ 表明 $A_{\mathfrak{m}}/M_{\mathfrak{m}}$ 也是 PI 次数为 n 的中心单代数. 而根据 [推论2.112], $A_{\mathfrak{m}}$ 的 PI 次数也是 n, 因此 $M_{\mathfrak{m}}$ 是 $A_{\mathfrak{m}}$ 的正则极大理想. 于是由 [命题3.67] 可知存在某组 $A_{\mathfrak{m}}$ 的元素在 $F_n(x, y_1, ..., y_n)$ 下的值非零. 因为 $\Bbbk$ 是无限域, 故应用 [推论2.114] 知 $F_n(x, y_1, ..., y_n)$ 是 $A_{\mathfrak{m}}$ 的中心多项式, 即 $A_{\mathfrak{m}}$ 中元素代入 $F_n(x, y_1, ..., y_n)$ 后得到的值总在 $Z_{\mathfrak{m}}$ 中. 故存在 $\alpha, \beta_1, ..., \beta_n \in A_{\mathfrak{m}}$ 使得 $F_n(\alpha, \beta_1, ..., \beta_n) \in Z_{\mathfrak{m}} - M_{\mathfrak{m}}$. 特别地, $F_n(\alpha, \beta_1, ..., \beta_n)$ 是 $Z_{\mathfrak{m}}$ 中可逆元 (因为表示成分式后分子在 $Z - \mathfrak{m}$ 中). 假设 $A_{\mathfrak{m}}$ 存在非正则的极大理想 $\mathcal{N}$, 那么由 [推论2.113] 知 $F_n(x, y_1, ..., y_n)$ 是 $A_{\mathfrak{m}}/\mathcal{N}$ 的多项式等式. 因此 $F_n(\alpha, \beta_1, ..., \beta_n) \in \mathcal{N}$. 这说明 $\mathcal{N}$ 包含 $A_{\mathfrak{m}}$ 中的可逆元, 这与 $\mathcal{N}$ 是真理想矛盾. 所以 $A_{\mathfrak{m}}$ 的所有极大理想都正则. 故由 Artin-Procesi 定理便知 $A_{\mathfrak{m}}$ 是 Azumaya 代数. □

Remark 3.213. 设 $\Bbbk$ 是代数闭域, A 是 $\Bbbk$ 上最小次数不超过 $2n$ 的仿射 PI 代数. 根据 [注记3.12], 这时 A 在 $\Bbbk$ 上的不可约表示维数均不超过 n. 设正整数 $\ell \leq n$, 如果 A 的极大理想 M 对应的不可约表示是 ℓ 维的, 那么 $A/M \cong \mathrm{M}_{\ell}(\Bbbk)$. 我们依然有: M 对应的不可约表示是 n 维的 $\Leftrightarrow A/M \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk)$.

Remark 3.214. 该定理的分次版本最早在 [36] 中由层论工具证明. 这里的非分次版本来自 [37]. 如果 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 使 $A_{\mathfrak{m}}$ 是 Azumaya 代数, 那么由 PI-deg$A_{\mathfrak{m}} = n$ 以及 [例3.63] 立即得到 $A_{\mathfrak{m}}$ 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数. 如果 Z 的极大理想 $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}$ 满足 $A_{\mathfrak{m}}, A_{\mathfrak{n}}$ 都是 Azumaya 代数, 那么 $A/\mathfrak{m}A \cong \mathrm{M}_n(\Bbbk) \cong A/\mathfrak{n}A$.

Remark 3.215. 在 (2)⇒(3) 过程中, 我们看到 $M_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ 蕴含 $M = \mathfrak{m}A$. 一般地, 对含幺环 R 和中心子环 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 如果 R 的理想 $I, J \supseteq \mathfrak{m}$ 且 $I_{\mathfrak{m}} = J_{\mathfrak{m}}$, 用同样的技术我们可以说明 $I = J$: 任取 $c \in I$, 那么存在 $s, t \in Z - \mathfrak{m}$ 和 $d \in J$ 使得 $c/s = d/t$, 由此可知存在 $u \in Z - \mathfrak{m}$ 使得 $uc \in J$. 因为 $u \notin \mathfrak{m}$, 所以存在 $z \in Z$ 使得 $uz - 1 \in \mathfrak{m} \subseteq J$, 于是 $uzc - c \in J$, 因此 $c \in J$. 这说明 $I \subseteq J$. 对称地得到 $J \subseteq I$. 对中心子环的素理想一般不成立. 即当 R 的理想 I, J 满足包含中心子环 Z 的素理想 $\mathfrak{p}$ 且 $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$ 时未必有 $I = J$. 例如考虑 $R = Z = \mathbb{Z}, \mathfrak{p} = 0$. 取 $I = 2\mathbb{Z}, J = 3\mathbb{Z}$, 那么 $I_{\mathfrak{p}}, J_{\mathfrak{p}}$ 作为 $\mathbb{Q} = R_{\mathfrak{p}}$ 的非零理想都是 $\mathbb{Q}$. 利用这个观察, 我们可以看到如果 K-代数 A 在中心子代数 C 上模有限且 C 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 满足 $A_{\mathfrak{m}}$ 是 (以 $Z(A)_{\mathfrak{m}}$ 为中心的)Azumaya 代数 (这里局部化是关于乘闭子集 $C - \mathfrak{m}$ 作), 那么对任何 A 的满足 $M \cap C = \mathfrak{m}$ 的极大理想 M, 依然能够证明 $M = \mathfrak{m}A$. 这时可直接验证 $M_{\mathfrak{m}} \cap Z(A)_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}Z(A)_{\mathfrak{m}}$. 应用 [命题3.54] 得到 $M_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$. 现在由 $M, \mathfrak{m}A$ 都是 A 的包含 $\mathfrak{m}$ 的理想可知 $M = \mathfrak{m}A$. 因此, 只要 $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C$ 满足 $A_{\mathfrak{m}}$ 是 Azumaya 代数, 就能够保证 $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) = (\varphi')^{-1}(\mathfrak{m})$ 是单点集 (这里等号来自 [命题3.180]).

Remark 3.216. 我们指出 [定理3.212] 中要求代数是素环的要求是必要的. 在 [例3.188] 中我们看到有限维半单代数 A 的中心的极大谱可能每个点 $\mathfrak{m}$ 都满足 $A_{\mathfrak{m}}$ 是 Azumaya 代数, 但 $\mathfrak{m}$ 关于 [命题3.180] 中的连续满射 $\varphi : \mathrm{maxSpec}R \to \mathrm{maxSpec}Z, M \mapsto M \cap Z$ 的原像对应的不可约表示具有不同的维数. 按照 [定义3.220] 的术语, 这表明对代数闭域上仿射模有限半素代数 A 而言, Azumaya 轨迹中的点生成的 A 的极大理想可能不再对应最大维数的不可约表示, 并注意 [例3.188] 中的代数 A 关于中心的任意极大理想 $\mathfrak{m}$ 生成的理想作商后,

$A/\mathfrak{m}A$ 是有限维单代数. 而 [例3.189] 表明对代数闭域上有限维半单代数 A 如果在某个中心子代数 Z(也是整区) 上模有限, Z 中使得 $A_\mathfrak{m}$ 是 Azumaya 代数的极大理想 $\mathfrak{m}$ 关于 φ 的原像集可能不是单点集, 并且不同的 (A 的) 极大理想对应 A 不同维数的不可约表示. 再指出 [例3.189] 考虑的代数 A 关于相应中心子代数 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 诱导的代数 $A/\mathfrak{m}A$ 是有限维半单代数, 但不是单环.

Corollary 3.217. 设 A 是代数闭域上 PI 次数为 n 的仿射模有限素代数. 那么以下三条等价:
(1) A 是 Azumaya 代数.
(2) A 是秩为 n^2 的 Azumaya 代数.
(3) A 在 $\Bbbk$ 上所有的不可约表示维数是 n.

Proof. (1)⇒(2): 根据 [命题3.61], 只需说明对 A 的中心 Z 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$, $A_\mathfrak{m}$ 是 $Z_\mathfrak{m}$ 上秩为 n^2 的自由模. 记 $\mathrm{rank}_{Z_\mathfrak{m}} A_\mathfrak{m} = \ell$, 那么对 $S = Z - \{0\}$, 易见 A_S 是域 Z_S 上 ℓ 维线性空间. 于是由 A 的 PI 次数是 n 得到 $\ell = n^2$. (2)⇒(3) 来自 [命题3.58] 和 [定理3.212]. (3)⇒(1) 由 [定理3.212] 立即得到. □

下面我们来总结理解一下 [定理3.212] 的意义. 固定代数闭域 $\Bbbk$ 上 PI 次数为 n 的模有限仿射素代数 A 并记其中心为 Z. 对 A 在 $\Bbbk$ 上的任何不可约表示 X, 总有 $\dim_\Bbbk X \leq n$. 该定理说 $\dim_\Bbbk X = n$ 的充要条件是极大理想 $\mathrm{Ann}_A X$ 是 A 的正则极大理想. 而 [命题3.73] 告诉我们 A 的正则极大理想总存在, 所以 A 所有不可约表示的线性维数不仅被 n 控制, n 这个上界还是“可达”的. A 维数最大的不可约表示, 即线性维数为 n 的不可约表示, 恰好对应所有的正则极大理想. 因此我们从 [定理3.212] 读出

Corollary 3.218. 考虑代数闭域 $\Bbbk$ 上 PI 次数为 n 的模有限仿射素代数 A 并记其中心为 Z. 那么有双射

$$\varepsilon : \{X | X\text{是不可约左}A\text{-模且}\dim_\Bbbk X = n\} \to \{M \in \mathrm{maxSpec}A | M\text{是正则极大理想}\}, X \mapsto \mathrm{Ann}_A X.$$

Remark 3.219. 因此素 PI 代数极大理想的正则性捕捉了不可约表示维数的最大性这一信息.

而 A 的极大理想 M 是正则的当且仅当 $A_\mathfrak{m}$ 是 Azumaya 代数, 其中 $\mathfrak{m} = Z \cap M$, 启发我们定义

Definition 3.220 (Azumaya 轨迹, [1]). 设 R 是含幺环, Z 是 R 的中心且 ${}_ZR$ 是有限生成模. 称

$$\mathcal{A}(R) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}Z | R_\mathfrak{m}\text{是 (以}Z_\mathfrak{m}\text{为中心的)Azumaya 代数}\}$$

是 R 的 **Azumaya 轨迹**. 注意模有限的条件保证了 $R_\mathfrak{m}$ 的中心就是 $Z_\mathfrak{m}$([引理3.59]).

Remark 3.221. 根据上述定义, Azumaya 轨迹是中心的极大谱的子集. 我们当然也可以对环的中心子环去定义 Azumaya 轨迹的概念. 设含幺环 R 的中心是 Z, 并有中心子环 C, 满足 ${}_CR$ 是有限生成模, 定义

$$\mathcal{A}(R) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}C | R_\mathfrak{m}\text{是 (以}Z_\mathfrak{m}\text{为中心的)Azumaya 代数}\}.$$

在 [注记3.215] 中我们指出即便定义的 Azumaya 轨迹是在中心子代数的极大谱内, 这时依然有每个 $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(R)$ 满足 $\mathfrak{m}R$ 是 R 的极大理想. 即 R 的与 C 相交为 $\mathfrak{m}$ 的极大理想是唯一的.

Proposition 3.222. 设 A 是代数闭域上仿射模有限素代数, 那么 $\bigcap\limits_{\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A)} \mathfrak{m}A = 0$.

Proof. 根据 [定理3.212], 所有 $\mathfrak{m}A(\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A))$ 之交就是 A 的所有正则极大理想之交, 再应用 [命题3.73(6)]. □

因为现在 A 是仿射素 PI 代数, 所以总存在正则极大理想 (回忆 [命题3.73]). 于是由 [定理3.212] 知总存在 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$(即取一个 A 的正则极大理想与 Z 的交) 使得 $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A)$. 所以代数闭域上模有限仿射素代数的 Azumaya 轨迹总是非空的. 事实上, 我们还有

Theorem 3.223 ([1]). 设 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的模有限仿射素代数并设其中心为 Z, 那么 A 的 Azumaya 轨迹 $\mathcal{A}(A)$ 是 $\mathrm{maxSpec}Z$ 的非空稠密开子集.

Proof. $\mathcal{A}(A) \neq \varnothing$ 来自 [定理3.212] 和 [命题3.73]. 记 $\mathcal{S}$ 是 A 所有非正则的极大理想构成的集合, 那么根据 [命题3.73] 知 $\mathcal{S}$ 是 $\mathrm{maxSpec}A$ 的真闭子集. 设 $\varphi' : \mathrm{maxSpec}R \to \mathrm{maxSpec}Z, M \mapsto M \cap Z$ 是标准映射, 因为 Z 是 Noether 环, 所以 [命题3.211] 表明 φ' 是连续满的闭映射. 根据 [定理3.212] 可知 $\mathrm{maxSpec}Z - \mathcal{A}(A) = \varphi'(\mathcal{S})$. 于是知 $\mathcal{A}(A)$ 是 $\mathrm{maxSpec}Z$ 的非空开子集. 因为 Z 是域 $\Bbbk$ 上仿射交换代数, 所以 Z 是 Jacobson 环, 于是结合 Z 是整区知 $\mathrm{Jac}Z = N(Z) = 0$. 现在应用下面的 [引理3.224] 便知 $\mathcal{A}(A)$ 是稠密开子集. □

Lemma 3.224. 设 Z 是含幺交换环, 则 $\mathrm{maxSpec}Z$ 是不可约空间的充要条件是 $\mathrm{Jac}Z$ 是素理想.

在 [命题3.58] 中我们看到 Azumaya 代数在中心的任何极大理想处作局部化依然是 Azumaya 的, 所以

Example 3.225. 设 A 是以 Z 为中心的 Azumaya 代数, 那么 $\mathcal{A}(A) = \mathrm{maxSpec}Z$. 我们将在 [命题3.260] 中证明代数闭域上单参数偶数维的量子环面是 Azumaya 代数.

Remark 3.226. 反之, 如果 A 是域 $\Bbbk$ 上仿射模有限代数并设其中心为 Z. 那么这时 A 作为 Noether 环 Z 上的有限生成模自然是有有限表现的. 因此应用 [命题3.58] 便知 $\mathcal{A}(A) = \mathrm{maxSpec}Z$ 蕴含 A 是 Azumaya 代数.

Example 3.227. 对代数闭域上模有限仿射代数, 其 Azumaya 轨迹可能是空集. 例如考虑 [例3.190] 中的二阶上三角阵代数, 记为 A. 其中心的极大谱是以零理想为元素的单点集, 因此 A 不是 Azumaya 代数表明 $\mathcal{A}(A) = \varnothing$.

Example 3.228. 在 [例3.72] 中我们看到如果 $q \in \Bbbk^*$ 是域 $\Bbbk$ 中的 ℓ 次本原单位根且 $\ell \geq 2$, 那么 q 处的量子平面 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 作为域上仿射 Noether 整区且在中心上有限生成自由的代数不是 Azumaya 的. 因此这时 Azumaya 轨迹 $\mathcal{A}(\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)) \subsetneq \mathrm{maxSpec}Z$. 故可用 Azumaya 轨迹来衡量仿射模有限代数与“Azumaya 代数”的距离.

依然设 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上 PI 次数为 n 的模有限仿射素代数, 那么从 [定理3.223] 的证明过程中我们看到 $\mathcal{A}(A)$ 就是 A 的正则极大理想集在连续满射 $\varphi' : \mathrm{maxSpec}R \to \mathrm{maxSpec}Z, M \mapsto M \cap Z$ 下的像集. 结合 [命题3.180], 我们看到 $\mathcal{A}(A)$ 中点关于 φ 的纤维给出 A 的正则极大理想集的不相交分解. 不过 [定理3.212] 告诉我们所有的纤维代数 $A/\mathfrak{m}A(\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A))$ 都同构于 $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$, 所以 $A/\mathfrak{m}A$ 的不可约表示等价类只有一个. 因此

Proposition 3.229. 设 A 是代数闭域 $\Bbbk$ 上 PI 次数为 n 的模有限仿射素代数且中心为 Z. 那么 $\mathcal{A}(A)$, A 的正则极大理想集以及 A 的 $\Bbbk$-线性维数为 n 的不可约表示等价类集之间有如下双射:

$$\{[{}_AX] | X\text{是线性维数为}n\text{的不可约左}A\text{-模}\} \xrightarrow{\mathrm{Ann}_A} \{M \in \mathrm{Spec}A | M\text{是正则极大理想}\} \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{A}(A)$$

这里 Ann_A 是取零化子映射, $\varphi' : \mathrm{maxSpec}A \to \mathrm{maxSpec}Z, M \mapsto M \cap Z$ 是标准连续满射.

特别地, Azumaya 轨迹中的点关于 φ 的原像集是单点集.

Remark 3.230. 该定理也可以视作是 [定理3.212] 的直接推论, Ann_A 是双射来自 [定理3.212] 中 (1) 与 (4) 的等价性, φ' 是单射来自 (1) 蕴含 (3), φ' 是满射来自 (2) 蕴含 (1).

Remark 3.231. 考虑到代数闭域上仿射模有限素代数的 Azumaya 轨迹中点与最大维数不可约表示间的对应关系, Azumaya 轨迹的计算基本且重要——**本质上在确定所有最大维数的不可约表示**.

Remark 3.232. 在代数闭域上模有限仿射素代数场景, 我们看到 Azumaya 轨迹中点的原像集是单点集, 对应给定代数维数最大的不可约表示. 并且 Azumaya 轨迹中的点生成的代数中的理想是极大理想. 反之, 如果代数闭域 $\Bbbk$ 上模有限仿射素代数 A 的中心 Z 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 满足 $\mathfrak{m}A$ 是 A 的极大理想, 由 $\mathfrak{m}A\cap Z\supseteq\mathfrak{m}$ 以及 [命题3.180(4)] 可知 $\mathfrak{m}A\cap Z=\mathfrak{m}$, 再对 $M=\mathfrak{m}A$ 应用 [定理3.212] 可知 $\mathfrak{m}\in\mathcal{A}(A)$. 所以当 A 是代数闭域上模有限仿射素代数时, $\mathfrak{m}\in\mathcal{A}(A)\Leftrightarrow\mathfrak{m}A\in\mathrm{maxSpec}A\Leftrightarrow A/\mathfrak{m}A$ 是 Artin 单代数.

Remark 3.233. 一般地, 对代数闭域 $\Bbbk$ 上有限维代数 A 以及中心子代数 Z, 如果 $\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}Z$ 满足 $\mathfrak{m}$ 关于连续映射 $\varphi':\mathrm{maxSpec}A\to\mathrm{maxSpec}Z, M\mapsto M\cap Z$ 的原像集是单点集, 也不能保证 $\mathfrak{m}$ 在 A 中生成的理想是极大理想. 例如考虑域 $\Bbbk$ 上有限维代数 $A=\Bbbk[x]/(x^2)$, 并取中心子代数 $Z=\Bbbk$ 以及 $\mathfrak{m}=0$. 那么 $(\varphi')^{-1}(\mathfrak{m})=\{(x)/(x^2)\}$ 是 A 唯一的极大理想 (也是唯一的素理想, 注意 A 是 Artin 环). 但 $\mathfrak{m}A=0$ 不是 A 的极大理想, 这时 $(\varphi')^{-1}(\mathfrak{m})\supsetneq\mathfrak{m}A$. 并此例也说明对代数闭域上有限维代数 A, $(\varphi')^{-1}(\mathfrak{m})$ 是单点集不足以蕴含 $\mathfrak{m}A$ 是极大理想. 换句话说, 即便 $\mathfrak{m}A$ 不是 A 的极大理想, 有可能有 $(\varphi')^{-1}(\mathfrak{m})$ 是单点集. 反之, 当 $\mathfrak{m}A$ 是极大理想时, $(\varphi')^{-1}(\mathfrak{m})$ 明显是单点集.

Example 3.234 ([30]). 设 A 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射模有限素代数, 满足 $T(A)=A$. 并记 A 的中心是 Z, $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}:A\to Z$ 是 A 的约化迹. 设 A 的 PI 次数是 n, 那么根据 [定理3.208], n^2 阶判别式理想的零点集满足 $\{\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}Z|A/\mathfrak{m}A\cong\mathrm{M}_n(\Bbbk)\}=\mathrm{maxSpec}Z-\mathcal{V}(D_{n^2}(A/Z;\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}))=\mathrm{maxSpec}Z-\mathcal{V}(MD_{n^2}(A/Z;\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}))$. 现在应用 [定理3.212] 便知 $\{\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}Z|A/\mathfrak{m}A\cong\mathrm{M}_n(\Bbbk)\}=\mathcal{A}(A)\neq\varnothing$. 所以

$$\mathcal{V}(D_{n^2}(A/Z;\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}))=\mathcal{V}(MD_{n^2}(A/Z;\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}))=\mathrm{maxSpec}Z-\mathcal{A}(A).$$

Remark 3.235. 根据 [命题3.210], 对 $\ell\geq n^2+1$ 有 $\mathcal{V}(D_\ell(A/Z;\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}))=\mathcal{V}(MD_\ell(A/Z;\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}))=\mathrm{maxSpec}Z$.

Remark 3.236. 该例表明判别式理想作为非交换代数中的工具可应用于 Azumaya 轨迹的计算.

前面在 [定理3.223] 中我们看到代数闭域上模有限仿射素代数的 Azumaya 轨迹总是中心的极大谱的非空稠密开子集. 我们马上说明 Azumaya 轨迹中的点在某种意义下是“光滑的”.

固定代数闭域 $\Bbbk$, 记仿射簇 X 的坐标环是 $\mathcal{O}(X)$. 在古典代数几何中我们知道 X 与 $\mathrm{maxSpec}\mathcal{O}(X)$ 间有标准的同胚, 记 $p\in X$ 在该同胚下对应的极大理想是 $\mathfrak{m}_p$. 那么 p 是 X 的光滑点当且仅当 $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p}$ 是正则局部环. 根据 Auslander-Buchsbaum-Serre 定理, 交换 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m},k=R/\mathfrak{m})$ 是正则局部环当且仅当 $\mathrm{gl.dim}R<+\infty$ 也当且仅当 $\mathrm{p.dim}_Rk<+\infty$. 由此看到 p 是仿射簇 X 的光滑点当且仅当 $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p}$ 的整体维数有限. 一般地, 我们可以在交换 Noether 环场景定义“光滑点”与“奇异点”的概念.

Definition 3.237 ([1]). 设 R 是交换 Noether 环, $\mathfrak{m}\in\mathrm{maxSpec}R$. 如果 $\mathrm{gl.dim}R_{\mathfrak{m}}<+\infty$, 则称 $\mathfrak{m}$ 是 R 的**光滑点**. 如果 $\mathrm{gl.dim}R_{\mathfrak{m}}=+\infty$, 则称 $\mathfrak{m}$ 是 R 的**奇异点**. 将所有光滑点构成的集合记作 $\mathcal{R}(R)$, 称为 R 的**光滑轨迹**; 将所有奇异点构成的集合记作 $\mathcal{S}(R)$, 称为 R 的**奇异轨迹**.

Proposition 3.238 ([1]). 设 A 是域 $\Bbbk$ 上模有限仿射代数, Z 是 A 的中心. 如果整体维数 $\mathrm{gl.dim}A<+\infty$, 那么 $\mathcal{A}(A)\subseteq\mathcal{R}(Z)$, 即 A 的 Azumaya 轨迹中的点全部是 Z 的光滑点.

Proof. 任取 $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}(A)$, 即 $A_{\mathfrak{m}}$ 是以 $Z_{\mathfrak{m}}$ 为中心的 Azumaya 代数, 于是 $A_{\mathfrak{m}}$ 是有限生成投射 $Z_{\mathfrak{m}}$-模. 特别地, 任何任何投射 $A_{\mathfrak{m}}$-模视作 $Z_{\mathfrak{m}}$-模也投射. 由 $A_{\mathfrak{m}}$ 是非零有限生成 $Z_{\mathfrak{m}}$-模以及 Nakayama 引理可知 $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \neq A_{\mathfrak{m}}$. 于是非零模 $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ 作为 $A_{\mathfrak{m}}$-模的任何投射分解也是作为 $Z_{\mathfrak{m}}$-模的投射分解. 因此由 A 的整体维数有限可知 $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ 作为 $Z_{\mathfrak{m}}$-模的投射维数有限. 根据 [推论3.45], 由 $\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$ 是 $Z_{\mathfrak{m}}$ 的极大理想可知 $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ 也是 Azumaya 代数. 并且其中心同构于 $Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$. 现在应用 [命题3.43], 我们看到 $Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$ 可视作 $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ 作为 $Z_{\mathfrak{m}}$-模的直和因子, 因此 $Z_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}Z_{\mathfrak{m}}$ 作为 $Z_{\mathfrak{m}}$-模有有限的投射维数. 根据 Auslander-Buchsbaum-Serre 定理, $Z_{\mathfrak{m}}$ 作为交换 Noether 局部环是正则局部环, 因此 $\mathfrak{m}$ 是 Z 的光滑点. □

Remark 3.239. 该命题结论中的包含关系一般可能是严格的, 但在许多场景下被证明是可以取等的. 能保证 Azumaya 轨迹与光滑轨迹相同的较为一般的同调条件可参见 [1, p.303, III Theorem 8.1] 或 [37, Theorem 3.8].

Example 3.240. 如果 A 是整体维数有限的交换仿射 $\Bbbk$-代数, 即 $A = Z$, 那么由 $Z_{\mathfrak{m}}$ 总是自身上的 Azumaya 代数可知 $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(Z) = \mathrm{maxSpec}Z$. 这时由 $\mathrm{gl.dim}Z < +\infty$ 我们也总有 $\mathcal{R}(Z) = \mathrm{maxSpec}Z$.

结合 [例3.234], 我们立即得到代数闭域上整体维数有限的模有限仿射素代数关于约化迹的判别式理想在中心极大谱中的零点集包含所有的奇异点:

Corollary 3.241 ([30])**.** 设 A 是特征为零的代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射模有限素代数满足 $T(A) = A$ 且 $\mathrm{gl.dim}A < +\infty$. 记 A 的中心是 Z, $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}} : A \to Z$ 是 A 的约化迹. 设 A 的 PI 次数是 n. 那么

$$\mathcal{V}(D_{n^2}(A/Z; \mathrm{tr}_{\mathrm{red}})) = \mathcal{V}(MD_{n^2}(A/Z; \mathrm{tr}_{\mathrm{red}})) = \mathrm{maxSpec}Z - \mathcal{A}(A) \supseteq \mathcal{S}(A).$$

3.7 PI 斜多项式代数

在 [引理2.29] 中我们已经看到量子仿射空间能够实现成 Ore 扩张代数, 事实上许多量子代数都能够实现为累次 Ore 扩张代数 (或称为斜多项式代数). 当形变参数是单位根时, 相应的量子代数往往是 PI 代数. 因此对理解 PI 场景的 Ore 扩张代数对研究单位根处的量子代数而言基本且重要.

本节先介绍特征为零的域上素 PI 代数的 Ore 扩张代数的 PI 次数性质, 主要参考文献是 [1]. 这里介绍的定理形式来自 S. Jøndrup[39]. 随后介绍量子环面的概念 (见 [定义3.246], 这是代数环面的量子版本) 和基本性质 (见 [命题3.247], [推论3.248] 和 [定理3.253], 在 [命题3.260] 中我们证明一类 PI 量子环面具有 Azumaya 性质), 并介绍 Procesi 与 Concini 在 [40] 中利用量子环面计算量子仿射空间的 PI 次数的工作 ([定理3.253]). 尤其在单参数的 PI 量子仿射空间场景, 能够具体地给出 PI 次数的表达 (见 [例3.261]). 我们也在一类 PI 量子仿射空间上计算约化迹 ([例3.262]), 在此场景下介绍 Cayley-Hamilton 代数结构的具体实现.

首先指出对含幺环 R 上的环自同态 τ 与 τ-导子 δ, 由于 R 是 Ore 扩张 $R[x;\tau,\delta]$ 的子环, 因此 $R[x;\tau,\delta]$ 是 PI 环的必要条件是 R 为 PI 环. 下面我们主要感兴趣 R 是素 PI 环并且 τ 是环自同构的场景. 注意这时对任何 τ-导子 δ 均有 $R[x;\tau,\delta]$ 是素环. 下面的 Jøndrup 定理不仅刻画了当 τ 是素代数上代数自同构时, Ore 扩张 $R[x;\tau,\delta]$ 是 (素)PI 代数的充要条件, 也给出了相应 PI 次数. 我们将大量使用 [引理2.41] 进行分析.

Theorem 3.242 (Jøndrup 定理, [1])**.** 设 $\Bbbk$ 是特征为零的域, $\Bbbk$-代数 R 是素 PI 代数, $\tau : R \to R$ 是 $\Bbbk$-代数自同构, $\delta : R \to R$ 是 τ-导子. 并记 $T = R[x;\tau,\delta]$ 是 Ore 扩张代数, Z 是 R 的中心, $S = Z - \{0\}$. 那么:
(1) 如果 τ 限制在 Z 上是恒等映射, 那么存在 R_S 中的可逆元 u 使得 τ 是 u 决定的内自同构, 并且这时 T 是 PI 环的充要条件是 $u\tilde{\delta}$(见 [引理2.41(3)] 中 τ-导子 δ 的自然延拓) 是 R_S 上的内导子. 这时 $R[x;\tau]$ 是 PI 环并

且 PI-deg(T) = PI-deg(R) = PI-deg$(R[x;\tau])$.
(2) 如果 τ 限制在 Z 上不是恒等映射, 那么 T 是 PI 环的充要条件是 $\tau|_Z$ 的阶数有限. 并且当 T 是 PI 环时, Ore 扩张代数 $R[x;\tau]$ 也是 PI 环且 PI-deg(T) = PI-deg$(R[x;\tau])$.

特别地, 只要 $T = R[x;\tau,\delta]$ 是 PI 环, 便有 $R[x;\tau]$ 是 PI 环且 PI-deg(T) = PI-deg$(R[x;\tau])$.

Proof. (1) 如果 τ 限制在 Z 上是恒等映射, 那么 $\tilde{\tau}: R_S \to R_S, as^{-1} \mapsto \tau(a)\tau(s)^{-1}$ 是 (定义合理的)Z_S-代数自同构, 而 Posner 定理表明 R_S 是 Z_S 上有限维中心单代数, 所以由 Skolem-Noether 定理 (见 [定理3.76]), $\tilde{\tau}$ 是内自同构. 即存在 R_S 中的可逆元 u 使得 $\tilde{\tau}(x) = u^{-1}xu, \forall x \in R_S$. 根据 [引理2.41(1)], $u\tilde{\delta}: R_S \to R_S$ 是经典导子, 其中 $\tilde{\delta}$ 是来自 [引理2.41(3)] 的自然延拓. 注意这时由 [引理2.41(4)] 和 [引理2.41(1)] 得到 $T_S \cong R_S[y;u\tilde{\delta}]$. 如果 $u\tilde{\delta}$ 是 R_S 上 (经典) 内导子, 那么 [引理2.41(2)] 表明有环同构 $R_S[y;u\tilde{\delta}] \cong R_S[z]$, 即同构于 R_S 上多项式代数. 这时直接有 $R_S[y;u\tilde{\delta}]$ 是 PI 环 (回忆 [推论2.19]), 进而 T_S 是 PI 环, 注意 S 中元素都是 T 的正则元, 所以 T 也是 (素)PI 环. 并且由 [推论2.19] 和 [推论2.111] 可知 PI-deg$R$ = PI-degR_S = PI-deg$R_S[z]$ = PI-degT_S = PI-deg$T$. 此外, [引理2.41(1)] 表明 $R_S[x;\tau] \cong R_S[y]$, 因此 $R[x;\tau]$ 也是 PI 环并且由 $R[x;\tau]$ 是素 PI 环得到 PI-deg$R$ = PI-degR_S = PI-deg$R[x;\tau]$. 目前我们证明了当 $u\tilde{\delta}$ 是 R_S 上内导子时, (1) 中所阐述的结论都成立. 因此为完成 (1) 的证明还需证明当 $u\tilde{\delta}$ 不是内导子时, T 不是 PI 环. 根据下面的 [引理3.244](这里使用了 char$\Bbbk = 0$ 的条件), 这时中心单代数 R_S 上的 Ore 扩张代数 $R_S[y;u\tilde{\delta}]$ 是单环, 进而由 $\tilde{\tau}$ 是 R_S 上内自同构以及 [引理2.41(1)] 得到 $R_S[x;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 是单环. 并注意到有左理想严格降链 $R_S[x;\tilde{\tau},\tilde{\delta}] \supsetneq R_S[x;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]x \supsetneq R_S[x;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]x^2 \supsetneq \cdots$, 这说明 $R_S[x;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 不是左 Artin 环. 于是由 Kaplansky 定理知 T_S 不是 PI 环, 再由 S 中元素均为 T 中正则元以及 Posner 定理的 [推论2.111] 得到 T 不是 PI 环.

(2) 如果存在 $c \in Z$ 使得 $\tau(c) - c \neq 0$, 那么在 R_S 中有 $\tilde{\tau}(c) - c$ 是 Z_S 中可逆元, 下证 $\tilde{\delta}: R_S \to R_S$ 是内 $\tilde{\tau}$-导子. 对任何 $x \in R_S$ 有 $xc = cx$, 对该等式作用 $\tilde{\delta}$ 可得 $\tilde{\tau}(x)\tilde{\delta}(c) + \tilde{\delta}(x)c = \tilde{\tau}(c)\tilde{\delta}(x) + \tilde{\delta}(c)x$. 现在有

$$(\tilde{\tau}(c) - c)\tilde{\delta}(x) = \tilde{\tau}(x)\tilde{\delta}(c) - \tilde{\delta}(c)x.$$

结合 $\tilde{\tau}(c) - c$ 在 Z_S 中可逆立即得到 $\tilde{\delta}$ 是内 $\tilde{\tau}$-导子. 所以应用 [引理2.41(2)] 得到环同构 $R_S[x;\tilde{\tau},\tilde{\delta}] \cong R_S[y;\tilde{\tau}]$. 注意 $Z_S[y;\tilde{\tau}|_{Z_S}]$ 可自然视作 $R_S[y;\tilde{\tau}]$ 的子代数并且由 R_S 是有限维 Z_S-线性空间可得 $R_S[y;\tilde{\tau}]$ 是有限生成自由右 $Z_S[y;\tilde{\tau}|_{Z_S}]$-模. 特别地, $R_S[y;\tilde{\tau}]$ 可嵌入 $Z_S[y;\tilde{\tau}|_{Z_S}]$ 上矩阵代数. 所以 [定理2.126] 表明 $R_S[y;\tilde{\tau}]$ 是 PI 环的充要条件是 $Z_S[y;\tilde{\tau}|_{Z_S}]$ 是 PI 环. 因此由下面的 [引理3.245] 得到 $R_S[x;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 是 PI 环的充要条件是 $\tilde{\tau}$ 限制在域 Z_S 上阶数有限. 易见 $\tilde{\tau}$ 作为 Z_S 上域自同构的阶数有限等价于 τ 作为 Z 上环自同构阶数有限. 之前已经指出 [引理2.41(4)] 和 [推论2.111] 保证了 T 是 PI 环当且仅当 $R_S[x;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ 是 PI 环, 因此前面的讨论表明 T 是 PI 环的充要条件是 $\tau|_Z$ 的阶数有限. 当 T 是 PI 环时, 由 $R_S[x;\tilde{\tau},\tilde{\delta}] \cong R_S[y;\tilde{\tau}]$ 得到 $R_S[y;\tilde{\tau}]$ 是 PI 环, 进而 $R[y,\tau]$ 也是 PI 环. 并且 [推论2.111] 保证了 PI-deg$T$ = PI-deg$R_S[x;\tilde{\tau},\tilde{\delta}]$ = PI-deg$R_S[y;\tilde{\tau}]$ = PI-deg$R[y,\tau]$. □

Remark 3.243. 该定理条件中域的特征为零的条件是必要的, 正特征场景存在结论不成立的例子.

Lemma 3.244 ([2])**.** 设 R 是 $\mathbb{Q}$-代数, δ 是 R 上导子, 如果 R 不存在非平凡的 δ-稳定理想 (即满足 $\delta(I) \subseteq I$ 的理想 I), δ 不是内导子, 并且 R 是单环, 那么 $R[x;\delta]$ 也是单环.

Proof. 任取 $R[x;\delta]$ 的非零理想 I, 对每个自然数 n, 记 I_n 是 $R[x;\delta]$ 中所有次数不超过 n 的斜多项式的 n 次项系数构成的集合, 这明显是 R 的双边理想, 下面说明 I_n 是 δ-稳定的: 任取 $a \in I_n$, 那么存在 $b_{n-1}, ..., b_0 \in R$ 满足 $f = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + ax^n \in I$. 所以 $fx - xf \in I$, 这也是次数不超过 n 的斜多项式. 考察

$xf-fx$ 的 n 次项系数便知 $\delta(a)\in I$. 所以由条件得到只要 $I_n\neq 0$ 就有 $I_n=R$. 下证 $I=R[x;\delta]$. 我们只需证明 $I_0=R$ 即可. 设正整数 n 是满足 $I_n\neq 0$ 的最小自然数, 我们需要说明 $n=0$. 假设 $n\geq 1$, 可设

$$f=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in I, a_n\neq 0,$$

那么对任何 $b\in R$ 有 $bf-fb\in I$, 可直接计算验证 fb 的 n 次项系数为 b, $n-1$ 次项系数为 $n\delta(b)+a_{n-1}b$. 因此 $bf-fb$ 作为次数不超过 $n-1$ 的斜多项式以及 n 的最小性, 必有 x^{n-1} 的系数 $ba_{n-1}-a_{n-1}b-n\delta(b)$ 为零. 进而由 n 在 R 中可逆得到 δ 是内导子, 这和条件矛盾. 现在由 $I_0=R$ 得到结论. □

Lemma 3.245. 设 F 是域, $\tau:F\to F$ 是域自同构, 那么 $F[x;\tau]$ 是 PI 环的充要条件是 τ 的阶数有限.

Proof. 充分性: 如果正整数 ℓ 满足 $\tau^\ell=\mathrm{id}$, 那么对任何 $\alpha\in F$ 有 $\alpha x^\ell=x^\ell\alpha$, 即 $x^\ell\in Z(F[x;\tau])$. 由此得到 $F[x;\tau]$ 在中心子环 $F[x^\ell]$ 上有限生成, 进而 $F[x;\tau]$ 是 PI 环. 必要性: 如果 $F[x;\tau]$ 是 PI 环, 那么也是素 PI 环. 假设 τ 的阶数不是有限的, 那么任何正整数 ℓ 满足存在 $\beta\in F$ 使得 $x^\ell\beta\neq\beta x^\ell$. 这一观察说明 $F[x;\tau]$ 的中心里不存在非常数的斜多项式. 下证 $Z(F[x;\tau])$ 是 F 的子域. 现在我们看到对 $\alpha\in Z(F[x;\tau])$ 有 $\alpha\in F$. 那么 $\alpha x^\ell=x^\ell\alpha,\forall\ell\in\mathbb{N}$. 由此可知 $\alpha^{-1}\in F$ 也和每个 x^ℓ 可交换, 于是知 $Z(F[x;\tau])$ 构成 F 的子域. 现在应用 [定理2.97] 知中心为域的半素 PI 环是单环, 因此 $F[x;\tau]$ 是单 PI 环. 注意到 $F[x;\tau]$ 是中心上的无限维代数, 这和 Kaplansky 定理矛盾. 所以 τ 的阶数有限. □

Jøndrup 定理是 Concini 与 Procesi 在 [40] 关于量子仿射空间与量子环面 PI 次数关系的基本推广. 在 [40] 中, PI 量子仿射空间的 PI 次数被具体地描述. 下面我们介绍 Concini 与 Procesi 在 [40] 中的这部分工作.

在 [例2.28] 中我们介绍了量子仿射空间的概念, 相应地, 有量子环面的概念, 它最早由 Manin 在 [41] 中引入. 下面我们先介绍量子环面的概念, 再讨论 PI 量子仿射空间与相应量子环面间的关系 (见 [命题3.247]).

在给出量子环面的定义前我们先回顾交换场景下经典的代数环面与仿射空间的关系, 再引出代数环面的量子版本. 以下记 $\Bbbk$ 的乘法群为 $\Bbbk^\times$ 并固定正整数 n. 回忆秩为 n 的 (标准) **代数环面**是指

$$(\Bbbk^\times)^n=\{(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\Bbbk^n|\alpha_1,...,\alpha_n\neq 0\}=\Bbbk^n-\mathcal{V}(x_1\cdots x_n).$$

根据定义立即知 $(\Bbbk^\times)^n$ 是拟仿射簇并且其上标准乘法映射和求逆映射都是正则映射, 即 $(\Bbbk^\times)^n$ 是代数群. 现在我们说明这是仿射代数群: 考虑 $\Bbbk^{n+1}$ 中仿射簇 $\mathcal{V}(x_1\cdots x_{n+1}-1)$, 那么有标准投射

$$\pi:\mathcal{V}(x_1\cdots x_{n+1}-1)\to(\Bbbk^\times)^n,(\alpha_1,...,\alpha_n,\alpha_{n+1})\mapsto(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

以及 $\theta:(\Bbbk^\times)^n\to\mathcal{V}(x_1\cdots x_{n+1}-1),(\alpha_1,...,\alpha_n)\mapsto(\alpha_1,...,\alpha_n,(\alpha_1\cdots\alpha_n)^{-1})$, 易知 π 与 θ 都是正则映射并且互为逆映射. 所以有拟仿射簇同构 $(\Bbbk^\times)^n\cong\mathcal{V}(x_1\cdots x_{n+1}-1)$. 因此代数环面 $(\Bbbk^\times)^n$ 是仿射代数群. 可直接计算验证 $x_1\cdots x_{n+1}-1\in\Bbbk[x_1,...,x_{n+1}]$ 是不可约多项式. 那么代数环面 $(\Bbbk^\times)^n$ 的坐标环就是 $\mathcal{O}((\Bbbk^\times)^n)=\Bbbk[x_1,...,x_{n+1}]/(x_1\cdots x_{n+1}-1)$. 容易验证 $\mathcal{O}((\Bbbk^\times)^n)$ 就是多项式代数 $\mathcal{O}(\Bbbk^n)=\Bbbk[x_1,...,x_n]$ 关于 $\{x_1,...,x_n\}$ 生成的乘法幺半群的局部化. 在 $\Bbbk$ 是代数闭域的场景, 我们知道 $\Bbbk$ 上仿射代数簇范畴与 $\Bbbk$ 上仿射交换半素代数范畴间有范畴对偶, 因此在这个意义下我们能够把几何对象 (仿射簇) 与其上函数代数 (坐标环) 视作等同. 于是当我们把非交换代数等同于“非交换空间”时, 量子环面 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 的自然定义应当满足下述原则:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}(\Bbbk^n) & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)\\ {\scriptstyle\text{局部化}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{局部化}}\\ \mathcal{O}((\Bbbk^\times)^n) & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)\end{array}$$

现在我们可以给出量子环面的定义, 与量子仿射空间一样它依赖于给定的乘性反对称阵.

Definition 3.246 (量子环面, [1]). 固定域 $\Bbbk$ 上乘性反对称阵 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n}$ 以及 $q \in \Bbbk^\times$. 称由生成元 $x_1, ..., x_n, x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}$ 和关系 $x_ix_j = q_{ij}x_jx_i, x_ix_i^{-1} = x_i^{-1}x_i = 1, \forall 1 \leq i, j \leq n$ 定义出的 $\Bbbk$-代数, 记作 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$, 称为 $\boldsymbol{q}$ 处的 (多参数) **量子环面**. 如果乘性反对称阵 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n}$ 满足当 $i < j$ 时有 $q_{ij} = q$, 则记 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 为 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^n)$, 称为 q 处 (单参数) **量子环面**.

根据前面的讨论, 我们定义的量子环面 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 应当是量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 在 $\{x_1, ..., x_n\}$ 生成的乘法幺半群 S 处的局部化. 我们先说明 S 是量子仿射空间的右分母集. 在 [命题2.30] 中已经证明量子仿射空间是整环, 所以我们只需证明 S 是右 Ore 集. 任取 $s \in S, f \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$, 不难看出 $fs = sg$, 其中 $g \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$, 故 S 满足右 Ore 条件. 由此知 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 关于 S 的右局部化存在. 类似地, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 关于 S 的左局部化也存在.

任给 (保幺) 环同态 $\varphi : \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \to R$, 并设 $\varphi(S)$ 中元素均在 R 中可逆. 通过 $\alpha \cdot a = \varphi(\alpha)a, \forall \alpha \in \Bbbk, a \in R$ 可赋予 R 上 $\Bbbk$-代数结构使 φ 成为 $\Bbbk$-代数同态. 于是存在唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\eta : \Bbbk\langle x_1, ..., x_n, x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}\rangle \to R$ 使得 $\eta(x_i) = \varphi(x_i), \eta(x_i^{-1}) = \varphi(x_i)^{-1}, \forall 1 \leq i \leq n$. 易见 $\eta(x_ix_j - q_{ij}x_jx_i) = \eta(x_ix_i^{-1} - 1) = \eta(x_i^{-1}x_i - 1) = 0$, 所以 η 诱导唯一的 $\Bbbk$-代数同态 $\tilde{\eta} : \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n) \to R$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk\langle x_1, ..., x_n, x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}\rangle \arrow[r] \arrow[dr, "\eta"'] & \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n) \arrow[d, dashed, "\tilde{\eta}"] \\
& R
\end{tikzcd}$$

由 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 作为 $\Bbbk$-代数可由 $\{x_1, ..., x_n, x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}\}$ 生成可知 $\tilde{\eta}$ 是使下图交换唯一的代数同态:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \arrow[r, "\lambda_S"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n) \arrow[d, dashed, "\tilde{\eta}"] \\
& R
\end{tikzcd}$$

这里 $\lambda_S : \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 是标准映射. 于是知 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n) \cong \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)_S$. 上述讨论证明了

Proposition 3.247 (量子环面的局部化实现, [1]). 量子环面 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 是 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 关于 S 的局部化.

现在由量子环面的定义, 量子平面可视作量子仿射空间的局部化以及 [命题2.30], 我们看到

Corollary 3.248 ([1]). 量子环面 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 是双边 Noether 仿射 $\Bbbk$-整环且作为 $\Bbbk$-线性空间有基

$$\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} | i_1, ..., i_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Remark 3.249. 量子环面不是除环, 例如 $1+x_1$ 就不是可逆元: 若不然, 存在 $f(x_1, ..., x_n), cx_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} (c \in \Bbbk^\times)$ 使得在 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 中有 $(1+x_1)f(x_1, ..., x_n) = cx_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$, 等号左边表示为标准基 ([命题2.30] 意义下) 线性组合后至少有两个非零单项式, 矛盾. 特别地, 量子环面存在不可逆的正则元, 所以量子环面不是左、右 Artin 的.

利用 Kaplansky 定理和量子环面的自然基, 我们分析非单位根处单参数的 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$ 的基本结构.

Example 3.250 ([1]). 设 $q \in \Bbbk^\times$ 不是单位根, 那么量子环面 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$ 是单环, 中心是 $\Bbbk$ 且不是 PI 环.

Proof. 由于 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$ 中任何元素可唯一地表示为有限和 $f(x_1,x_2)=\sum\limits_{i,j\in\mathbb{Z}}\alpha_{ij}x_1^ix_2^j,\alpha_{ij}\in\Bbbk$, 所以当 $f(x_1,x_2)$ 是中心元时, 由它与 x_1,x_2 的交换性以及 q 不是单位根容易验证对 $(i,j)\neq(0,0)$ 有 $\alpha_{ij}=0$. 故 $Z(\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2))=\Bbbk$. 下证 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$ 是单环, 一旦证明此结论, 由 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$ 是无限维代数以及 Kaplansky 定理便知 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$ 不是 PI 环. 任取 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$ 的非零理想 I, 我们需要说明 $I=\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$. 取定 I 中非零元

$$f(x_1,x_2)=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\alpha_{ij}x_1^ix_2^j\in I,$$

可不妨设 $\alpha_{ij}=0,\forall i,j<0$ 并且 $\alpha_{00}\neq 0$(否则, 可适当对 $f(x_1,x_2)$ 左乘 x_1 的幂次或右乘 x_2 的幂次后替换 $f(x_1,x_2)$). 如果存在 $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 且 $(i,j)\neq(0,0)$ 满足 $\alpha_{ij}\neq 0$, 那么利用 $x_1^{-1}f(x_1,x_2)x_1,x_2^{-1}f(x_1,x_2)x_2\in I$ 以及 q 不是单位根可不断将 $f(x_1,x_2)$ 替换为 I 中某个常数项非零且首项比 $f(x_1,x_2)$ 的首项在字典序下更小的元素, 最终可得 I 包含某个非零常数多项式. 因此 $I=\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$. □

当 $q\in\Bbbk^\times$ 不是单位根时, [例3.250] 表明量子环面 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$ 不是 PI 环, 由于量子环面作为量子平面 $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 在一些正则元集构成的乘闭子集的局部化, $\mathcal{O}_q(\Bbbk^2)$ 可嵌入 $\mathcal{O}_q((\Bbbk^\times)^2)$ 的右商环, 因此应用 [推论2.111] 便知这时量子平面不是 PI 环. 由 [命题2.30] 易知对任何乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}\in\mathrm{M}_n(\Bbbk)$, 固定某个 q_{ij}, 总有量子平面 $\mathcal{O}_{q_{ij}}(\Bbbk^2)$ 可嵌入量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$. 这一观察结合 [命题2.32] 让我们得到

Theorem 3.251 (量子仿射空间的 PI 性质, [1]). 设 $\Bbbk$ 是域, $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}\in\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 是乘性反对称阵, 那么量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是 PI 代数当且仅当每个 $q_{ij}(1\leq i,j\leq n)$ 是单位根. 并且这时 (当所有 q_{ij} 是单位根时) 存在本原单位根 $\varepsilon\in\Bbbk$ 和反对称整数矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ 满足 $p_{ij}=\varepsilon^{a_{ij}}$.

通过 [定理3.251] 不难看到 PI 量子仿射空间是模有限代数, 我们记录为

Corollary 3.252. 设 $\Bbbk$ 是域, $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}\in\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ 是乘性反对称阵, 那么量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 是模有限代数当且仅当每个 $q_{ij}(1\leq i,j\leq n)$ 是单位根.

[定理3.251] 表明决定 PI 仿射量子空间的乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}$ 总可设为 $\boldsymbol{q}=(\varepsilon^{a_{ij}})_{n\times n}$, 其中 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是整数反对称阵, ε 是 $\Bbbk$ 中本原单位根. 因为 PI 量子仿射空间是素 PI 环, 我们可以计算其 PI 次数.

Theorem 3.253 (PI 量子仿射空间的 PI 次数, [40]). 设 ε 是域 $\Bbbk$ 中 ℓ 次本原单位根, $(a_{ij})_{n\times n}$ 是整数反对称阵, 并设 $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}=(\varepsilon^{a_{ij}})_{n\times n}$ 是乘性反对称阵. 记 $H:\mathbb{Z}^n\to(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$ 是 $(a_{ij})_{n\times n}$ 在 $\mathbb{Z}^n$ 上诱导的左乘变换与标准投射 $\pi:\mathbb{Z}^n\to(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$ 的合成, 且设 $h=|\mathrm{Im}H|$. 那么:
(1) 集合 $\{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)|(i_1,...,i_n)\in\mathbb{N}^n\cap\mathrm{Ker}H\}$ 是 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$ 的 $\Bbbk$-基.
(2) 集合 $\{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)|(i_1,...,i_n)\in\mathrm{Ker}H\}$ 是 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n))$ 的 $\Bbbk$-基.
(3) 设集合 $\mathcal{I}\subseteq\mathbb{Z}^n$ 是 $\mathbb{Z}^n/\mathrm{Ker}H$ 的一个代表元集 (特别地, $|\mathcal{I}|=h$), 那么 $\{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)|(i_1,...,i_n)\in\mathcal{I}\}$ 是 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 作为 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n))$ 上有限生成自由模的基. 特别地, 由 [推论2.111] 知 PI-deg$\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)=\sqrt{h}$.

Proof. 根据这里的记号, $(k_1,...,k_n)\in\mathbb{Z}^n$ 满足 $(k_1,...,k_n)\in\mathrm{Ker}H\Leftrightarrow\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}k_j\equiv 0,(\bmod\ell),\forall 1\leq i\leq n$. 类似 [命题2.34], 对每个 $1\leq i\leq n$, 引入量子仿射空间上 $\Bbbk$-代数自同构 $\tau_i:\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)\to\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 满足

$$\tau_i(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n})=q_{i1}^{k_1}\cdots q_{in}^{k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},\forall k_1,...,k_n\in\mathbb{N}.$$

不难看出我们也可以把该代数自同构延拓到量子环面 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 上, 记作 $\hat{\tau}_i : \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n) \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$, 即

$$\hat{\tau}_i(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}) = q_{i1}^{k_1}\cdots q_{in}^{k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}, \forall k_1,...,k_n \in \mathbb{Z}.$$

通过直接计算可知在量子仿射空间中, 对每个 $f \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$, $\tau_i(f)x_i = x_i f, \forall 1 \le i \le n$. 同样地, 在量子环面中, 对每个 $g \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 有 $\hat{\tau}_i(g)x_i = x_i g, \forall 1 \le i \le n$. 因此由量子环面以及量子仿射空间是整环立即得到量子环面中元素 (相应地, 量子仿射空间中元素) 在中心内当且仅当该元素关于所有 $\hat{\tau}_i$(相应地, 所有 τ_i) 作用不动. 现在我们开始定理的证明. 如果单项式 $x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 的幂指数组满足

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}k_j \equiv 0, (\bmod \ell), \forall 1 \le i \le n,$$

那么由 $q_{ij} = \varepsilon^{a_{ij}}$ 知 $\tau_i(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}) = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}, \forall 1 \le i \le n$. 于是知要完成 (1) 的证明只需说明 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$ 中任何斜多项式可由 $\{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) | (i_1,...,i_n) \in \mathbb{N}^n \cap \mathrm{Ker}H\}$ 来 $\Bbbk$-线性表出. 由 τ_i 的定义, 只需证明 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$ 中每个单项式 $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 满足幂指数组 $(k_1,...,k_n) \in \mathbb{N}^n \cap \mathrm{Ker}H$, 而由 ε 是 ℓ 次本原单位根以及 τ_i 作用此单项式不动易知 $\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}k_j \equiv 0, (\bmod \ell), \forall 1 \le i \le n$, 故 (1) 成立. (2) 的证明与 (1) 基本一致, 区别在于量子环面的自然基幂指数组不用限制在 $\mathbb{N}^n$(见 [推论3.248]). 最后说明 (3) 来完成定理证明. (3) 的第一个结论来自 (2) 和 [推论3.248]. 要看到 PI-deg$\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) = \sqrt{h}$, 首先 [推论2.111] 表明 PI-deg$\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) = \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$. 再应用 Posner 定理得到 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n) = \sqrt{h}$. □

Remark 3.254. 利用该定理, 保持定理的记号, 这时计算乘性反对称阵 $\boldsymbol{q} = (\varepsilon^{a_{ij}})_{n\times n}$ 处的量子仿射空间的中心就是求出所有满足同余方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}k_j \equiv 0, (\bmod \ell), \forall 1 \le i \le n,$$

的自然数组 $(k_1,...,k_n)$. 以这些自然数组为幂指数组的单项式全体构成了 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$ 的 $\Bbbk$-基.

Remark 3.255. 一般地, 代数环面 $\mathbb{T}_n = (\Bbbk^\times)^n$可自然作用到量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 以及量子环面 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 上. 具体地, 任给 $(\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{T}_n$, 在 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 中, 由于 $(\alpha_i x_i)(\alpha_j x_j) = q_{ij}(\alpha_j x_j)(\alpha_i x_i)$, 所以由量子仿射空间的定义可得代数自同态 $\tau : \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 满足 $\tau(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}) = \alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_n^{k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}, \forall k_1,...,k_n \in \mathbb{N}$. 通过量子仿射空间的自然基立即看到 τ 是代数自同构. 由此易见 $\mathbb{T}_n$ 在 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 上有自然的群作用. 类似地, 对 $(\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{T}_n$, 可诱导量子环面上代数自同构 τ 满足 $\tau(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}) = \alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_n^{k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}, \forall k_1,...,k_n \in \mathbb{Z}$.

Remark 3.256. 对域 $\Bbbk$ 上单参数的 PI 量子仿射空间 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$, 这里 ε 是 ℓ 次本原单位根, 其上代数自同构通常比代数环面 $\mathbb{T}_n$ 在 [注记3.255] 意义下赋予的自同构更多. 例如, 设 $\ell \ge 2$ 且 n 是奇数, 那么在 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 中

$$x_i(x_n + x_1^{\ell-1}x_2x_3^{\ell-1}\cdots x_{n-2}^{\ell-1}x_{n-1}) = \varepsilon(x_n + x_1^{\ell-1}x_2x_3^{\ell-1}\cdots x_{n-2}^{\ell-1}x_{n-1})x_i, \forall 1 \le i < n.$$

所以根据量子仿射空间的定义, 可诱导 $\Bbbk$-代数自同态 $\theta : \mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n) \to \mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 满足

$$\theta(x_i) = \begin{cases} x_i, & i < n \\ x_n + x_1^{\ell-1}x_2x_3^{\ell-1}\cdots x_{n-2}^{\ell-1}x_{n-1}, & i = n. \end{cases}$$

可直接计算 x_n 和 $x_n + x_1^{\ell-1}x_2x_3^{\ell-1}\cdots x_{n-2}^{\ell-1}x_{n-1}$ 可交换, 于是知对 $k_1,...,k_n \in \mathbb{N}$ 有

$$\theta(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}) = x_1^{k_1}\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}}\left(\sum_{j=0}^{k_n} C_n^j (x_1^{\ell-1}x_2x_3^{\ell-1}\cdots x_{n-2}^{\ell-1}x_{n-1})^{n-j}x_n^j\right).$$

将 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 中所有元素唯一地表示成形如 $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的 $\Bbbk$-线性组合后依幂指数组的逆字典序 (先比较 x_n 的幂指数, 再比较 x_{n-1} 的幂指数, 以此类推) 后不难验证 θ 将非零元映至非零元, 即 θ 是单射. 另一方面, 根据 θ 的定义, 首先 $x_j \in \mathrm{Im}\theta, \forall 1 \leq j \leq n-1$. 再由 $\theta(x_n)$ 的形式得到 $x_n \in \mathrm{Im}\theta$. 因此 θ 是代数同构. 在 $n=2$ 的场景, 上述代数同构 θ 满足 $\theta(x) = x, \theta(y) = y + x^{\ell-1}$. 对域 $\Bbbk$ 上一般的乘性反对称阵 $\boldsymbol{q}$ 处的量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$, 通过 [命题2.30], 对每个自然数 m 如果定义 X_m 是由集合 $\{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} | i_1,...,i_n \in \mathbb{N}, i_1+\cdots+i_n = m\}$ 生成的 $\Bbbk$-子空间, 那么 $\dim_\Bbbk X_m = C_{m+n-1}^{n-1}$ 并且 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n) = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots$. 结合 $X_iX_j \subseteq X_{i+j}, \forall i,j \in \mathbb{N}$, 得到 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 上自然的 $\mathbb{N}$-分次代数结构, 并且根据分次代数的语言, 这还是连通分次代数. 利用量子仿射空间的分次结构我们不难看到 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 的乘法群就是 $\Bbbk^\times$. 前面构造的代数自同构 θ 表明通常存在非分次的代数自同构. 如果记 $F_m = X_0 \oplus \cdots \oplus X_m$, 那么 $\dim_\Bbbk F_m = 1 + C_n^{n-1} + C_{n+1}^{n-1} + \cdots + C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n}^n$. 因为对任何自然数 i,j 有 $F_iF_j \subseteq F_{i+j}$, 因此 $\{F_i | i \in \mathbb{N}\}$ 给出了 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 上的 $\mathbb{N}$-滤, 这是由生成元集 $\{x_1,...,x_n\}$ 给出的标准滤.

Remark 3.257. 如果定理条件中的整数反对称阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 对应的 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 上矩阵是可逆的 (例如 ε 是 ℓ 次本原单位根, n 是偶数且考虑的量子环面是单参数的), 那么根据量子环面中心元的刻画可知 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 的中心为 $\Bbbk[x_1^{\pm\ell}, x_2^{\pm\ell}, ..., x_n^{\pm\ell}]$, 同构于 $\Bbbk$ 上 n 元 Laurent 多项式环.

Example 3.258 ([42])**.** 设 $\Bbbk$ 是域, 考虑下述 $\Bbbk$ 上乘性反对称阵处的量子仿射空间 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^3)$:

$$\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

现在我们使用 [定理3.253] 来计算 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^3))$. 这时取定的单位根 $\varepsilon = -1(\ell = 2)$, 相应的整数反对称阵 $(a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $a_{12} = a_{13} = 1, a_{23} = 2$. 那么关于自然数组 (k_1,k_2,k_3) 的同余方程组

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 = 0, (\bmod 2), i = 1,2,3.$$

解得 $k_1 \equiv 0, k_2 + k_3 \equiv 0, (\bmod 2)$. 例如 $(k_1,k_2,k_3) = (2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(0,1,1)$ 都是满足上述同余方程组的解. 所以 $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3 \in Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^3))$. 结合前面得到 (k_1,k_2,k_3) 满足的关系便知 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^3)) = \Bbbk[x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3]$. 于是 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^3)$ 作为中心上的模可以由 $\{1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3\}$ 生成.

利用代数环面在 PI 量子环面上自然的群作用以及某些乘性反对称阵处量子环面的中心描述, 我们说明

Example 3.259 ([1])**.** 设 ε 是代数闭域 $\Bbbk$ 中 ℓ 次本原单位根, $(a_{ij})_{n\times n}$ 是整数反对称阵, 并设 $\boldsymbol{q} = (q_{ij})_{n\times n} = (\varepsilon^{a_{ij}})_{n\times n}$ 是乘性反对称阵. 若 $(a_{ij})_{n\times n}$ 对应的 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 上矩阵是可逆的, 那么代数环面 $\mathbb{T}_n = (\Bbbk^\times)^n$ 在量子环面 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)$ 上的自然作用 (在 [注记3.255] 的意义下) 所诱导的 $\mathrm{maxSpec}Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n))$ 上群作用是传递的.

Proof. 由 $\Bbbk$ 是代数闭域以及 Hilbert 零点定理知 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n)) = \Bbbk[x_1^{\pm\ell}, x_2^{\pm\ell}, ..., x_n^{\pm\ell}]$ 中极大理想都形如

$$(x_1^\ell - \beta_1, x_2^\ell - \beta_2, ..., x_n^\ell - \beta_n), \beta_1, ..., \beta_n \in \Bbbk^\times.$$

现在任给 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}((\Bbbk^\times)^n))$ 的极大理想 $M_1=(x_1^\ell-\alpha_1,x_2^\ell-\alpha_2,...,x_n^\ell-\alpha_n), M_2=(x_1^\ell-\beta_1,x_2^\ell-\beta_2,...,x_n^\ell-\beta_n)$, 我们说明存在 $\mathbb{T}_n$ 中元素 τ 使得 $\tau(M_1)=M_2$. 因为 $\Bbbk$ 是代数闭域, 所以对每个 $1\le j\le n$, 存在 $\omega_j\in\Bbbk$ 使得 $\omega_j^\ell=\alpha_j\beta_j^{-1}$. 现在考虑 $\tau=(\omega_1,...,\omega_n)\in\mathbb{T}_n$ 决定的群作用, 对每个 $1\le j\le n$, 易见

$$\tau(x_j^\ell-\alpha_j)=(\omega_jx_j)^\ell-\alpha_j=(\alpha_j\beta_j^{-1})x_j^\ell-\alpha_j=(\alpha_j\beta_j^{-1})(x_j^\ell-\beta_j),$$

所以 $\tau(M_1)=(\tau(x_1^\ell-\alpha_1),...,\tau(x_n^\ell-\alpha_n))=(x_1^\ell-\beta_1,x_2^\ell-\beta_2,...,x_n^\ell-\beta_n)=M_2$. □

作为 [例3.259] 的应用, 我们说明代数闭域上单参数量子环面的 Azumaya 性质.

Proposition 3.260 ([1]). 设 ε 是代数闭域 $\Bbbk$ 中 ℓ 次本原单位根且 n 是偶数, 那么量子环面 $\mathcal{O}_\varepsilon((\Bbbk^\times)^n)$ 是 Azumaya 代数. 特别地, Azumaya 轨迹 $\mathcal{A}(\mathcal{O}_\varepsilon((\Bbbk^\times)^n))=\mathrm{maxSpec}\mathcal{O}_\varepsilon((\Bbbk^\times)^n)$. 这时 $\mathcal{O}_\varepsilon((\Bbbk^\times)^n)$ 所有在 $\Bbbk$ 上不可约表示的线性维数都是 PI-deg$\mathcal{O}_\varepsilon((\Bbbk^\times)^n)$(在下面的 [例3.261] 中我们说明 PI-deg$\mathcal{O}_\varepsilon((\Bbbk^\times)^n)=\ell^{n/2}$).

Proof. 根据 [定理3.212], 量子环面 $\mathcal{O}_\varepsilon((\Bbbk^\times)^n)$ 作为代数闭域上仿射模有限素代数, 总存在极大正则理想. 通过 [例3.259] 我们看到代数环面 $\mathbb{T}_n$ 在量子环面中心极大谱上自然的群作用是传递的, 这一观察表明量子环面所有的极大理想都是极大正则理想. 特别地, $\mathcal{A}(\mathcal{O}_\varepsilon((\Bbbk^\times)^n))=\mathrm{maxSpec}\mathcal{O}_\varepsilon((\Bbbk^\times)^n)$. 现在应用 [命题3.58]. □

现在我们能够应用 [定理3.253] 来具体给出单参数的 PI 量子仿射空间的 PI 次数.

Example 3.261 ([1]). 设 ε 是域 $\Bbbk$ 中 ℓ 次本原单位根, n 是正整数并记 $\lfloor n/2\rfloor$ 是不超过 $n/2$ 的最大整数, 则

$$\text{PI-deg}\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)=\ell^{\lfloor n/2\rfloor}=\begin{cases}\ell^{n/2}, & n\text{ 是偶数}\\ \ell^{(n-1)/2}, & n\text{ 是奇数.}\end{cases}$$

特别地, 根据 [定理3.253(3)], 这时 PI-deg$\mathcal{O}_\varepsilon((\Bbbk^\times)^n)=$ PI-deg$\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$, 因此得到相应量子环面的 PI 次数.

Proof. 沿用 [定理3.253] 的记号, 设 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是严格上三角部分元素全为 1 的反对称整数矩阵, 因此定义量子仿射空间 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^n)$ 的乘性反对称阵是 $(\varepsilon^{a_{ij}})_{n\times n}$. 并记 $H:\mathbb{Z}^n\to(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$ 是 $(a_{ij})_{n\times n}$ 左乘变换诱导的标准映射, $h=|\mathrm{Im}H|$. 在此记号下, 由 [定理3.253] 知只需证明

$$h=\begin{cases}\ell^n, & n\text{ 是偶数}\\ \ell^{n-1}, & n\text{ 是奇数.}\end{cases}$$

根据 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的定义, 对 $(a_{ij})_{n\times n}$ 将第二行乘上 -1 加到第一行, 第三行乘上 -1 加到第二行, 依此类推, 第 $i(2\le i\le n)$ 行乘上 -1 加到第 $i-1$ 行, 直至第 n 行乘上 -1 加到第 $n-1$ 行, 得到 $(a_{ij})_{n\times n}$ 相抵于

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&\cdots&0&0&0\\0&1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&1&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&0&0&\cdots&0&1&1\\-1&-1&-1&-1&\cdots&-1&-1&0\end{pmatrix}.$$

现在再利用上述矩阵前 $n-1$ 行都有某两个相邻分量元素为 1, 其余元素为零, 可乘上 -1 加到第 n 行来消去最后一行前 $n-1$ 个分量. 最终, 我们得到 $(a_{ij})_{n\times n}$ 相抵于相抵于下述形式的矩阵:

$$(\tilde{a}_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&\cdots&0&0&0\\0&1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&1&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&0&0&\cdots&0&1&1\\0&0&0&0&\cdots&0&0&t\end{pmatrix},$$

这里当 n 是偶数时, $t=1$; 当 n 是奇数时, $t=0$. 下面说明使用 $(\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 的左乘变换诱导的映射 $\tilde{H}:\mathbb{Z}^n\to(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$ 满足 $h=|\mathrm{Im}\tilde{H}|$. 事实上, 这时存在行列式为 1 的 n 阶整数矩阵 P,Q 使得 $(a_{ij})_{n\times n}=P(\tilde{a}_{ij})_{n\times n}Q$, 那么由 P,Q 对应到 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 中的矩阵依然是可逆阵便知 $h=|\mathrm{Im}H|=|\mathrm{Im}\tilde{H}|$.

最后, 当 $t=1$ 时, 由 $(\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 对应 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 中的矩阵可逆便知 $|\mathrm{Im}\tilde{H}|=\ell^n$. 如果 $t=0$, 那么利用 $(\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 左上角的 $n-1$ 阶矩阵对应的 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 中的矩阵可逆便知 $|\mathrm{Im}\tilde{H}|=\ell^{n-1}$. □

Example 3.262. 设 ε 是域 $\Bbbk$ 中 ℓ 次本原单位根, $(a_{ij})_{n\times n}$ 是整数反对称阵, 并设 $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}=(\varepsilon^{a_{ij}})_{n\times n}$ 是乘性反对称阵, 记 $H:\mathbb{Z}^n\to(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$ 是 $(a_{ij})_{n\times n}$ 左乘变换诱导的标准映射, $h=|\mathrm{Im}H|$. 那么当 $(a_{ij})_{n\times n}$ 对应的 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 是可逆矩阵时 (注意在 [注记2.39] 中已经指出这时 n 只能是偶数), $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))=\Bbbk[x_1^\ell,...,x_n^\ell]$. 结合 [命题2.30] 知 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$ 同构于 $\Bbbk$ 上 n 元多项式代数, 特别地, $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$ 是整闭整区. $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$ 作为 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$ 上秩为 ℓ^n 的有限生成自由模, 利用 Posner 定理知 PI-deg$\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)=\ell^{n/2}$, 因此这时 $h=\ell^n$. 现在设 char$\Bbbk\notin[1,\ell^{n/2}]$, 根据 [例3.121], $(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n),Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)),\mathrm{tr}_{\mathrm{red}})$ 是 $\ell^{n/2}$ 次 Cayley-Hamilton 代数. 下面计算约化迹. 首先对任何 $f\in Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$ 总有 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(f)=f\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(1)=\ell^{n/2}f$. 考虑到 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$ 是 $Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$-线性的, 我们只需计算 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}$ 在每个单项式 $x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ 上的取值. 设 $(k_1,...,k_n)\in\mathbb{N}^n$ 满足每个 $0\le k_j\le\ell-1$ 且 $(k_1,...,k_n)\neq0$. 因为 $(\varepsilon^{a_{ij}})_{n\times n}$ 对应的 $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 中矩阵可逆, 所以存在某个 $1\le i_0\le n$ 使得

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0j}k_j\not\equiv0,(\mod\ell),$$

根据迹映射的对称性, 注意

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n})=&\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(x_{i_0}^{k_{i_0}}x_{i_0+1}^{k_{i_0+1}}\cdots x_n^{k_n}x_1^{k_1}\cdots x_{i_0-1}^{k_{i_0-1}})\\=&q_{i_01}^{k_1}\cdots q_{i_0n}^{k_n}\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(x_{i_0}^{k_{i_0}-1}x_{i_0+1}^{k_{i_0+1}}\cdots x_n^{k_n}x_1^{k_1}\cdots x_{i_0-1}^{k_{i_0-1}}x_{i_0})\\=&\varepsilon^{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}k_j}\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}).\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon^{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}k_j}\neq0$. 因此 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n})=0,\forall x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\notin Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$.

不难看出 [例3.262] 中约化迹的计算方法对一般的 PI 量子仿射空间也奏效:

Proposition 3.263 (PI 量子仿射空间的约化迹, [40]). 设 ε 是域 $\Bbbk$ 中 ℓ 次本原单位根, $(a_{ij})_{n\times n}$ 是整数反对称阵, 并设 $\boldsymbol{q}=(q_{ij})_{n\times n}=(\varepsilon^{a_{ij}})_{n\times n}$ 是乘性反对称阵. 那么对任何单项式 $x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)$, 有

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n})=\begin{cases}(\text{PI-deg}\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}, & x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\in Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))\\ 0, & x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\notin Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n)).\end{cases}$$

Proof. 只需验证 $x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\notin Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$ 的情形, 这时存在某个 $1\le i_0\le n$ 使得 $x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ 与 x_{i_0} 不交换. 因此由 $\tau_i(x_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n})=q_{i1}^{t_1}\cdots q_{in}^{t_n}x_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$ 定义出的代数自同构 τ_i 满足当 $i=i_0$ 时, 有

$$\varepsilon^{\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}k_j}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}=\tau_{i_0}(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n})\neq x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}.$$

所以 $\ell\nmid\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}k_j$. 于是由 [例3.262] 后半部分的讨论得到 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n})=0$. □

Remark 3.264. 不难看出 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n})=0,\forall x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\notin Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$ 的证明并没有用到约化迹的特性, 证明过程对一般的 ($Z(\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}(\Bbbk^n))$-线性的) 迹映射均成立.

下面我们限制在最简单的 PI 量子仿射空间——单位根处量子平面上总结一些目前得到的基本环论性质.

Example 3.265. 设 ε 是域 $\Bbbk$ 中 ℓ 次本原单位根, 那么 $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^2)=\Bbbk\langle x,y\rangle/(xy-\varepsilon yx)$ 是双边 Noether 仿射 PI 整环 ([命题2.30] 和 [定理3.251]), 不是 Artin 环 ([推论2.31]), 具有 $\Bbbk$-基 $\{x^iy^j|i,j\in\mathbb{N}\}$ 且中心 $Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^2))=\Bbbk[x^\ell,y^\ell]$([命题2.34]). $\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^2)$ 作为素 PI 环的 PI 次数为 ℓ([例3.261]). 其上约化迹 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}:\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^2)\to Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^2))$ 满足 $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(x^iy^j)=0,\forall x^iy^j\notin Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^2))$. 当 $x^iy^j\in Z(\mathcal{O}_\varepsilon(\Bbbk^2))$ 时, $\mathrm{tr}_{\mathrm{red}}(x^iy^j)=\ell x^iy^j$.

参考文献

[1] Ken A. Brown, Ken R. Goodearl, Lectures on Algebraic Quantum Groups, Springer Basel AG(2002).

[2] J. C. McConnell, J. C. Robson, Noncommutative Noetherian Rings, American Mathematical Society(1987).

[3] Michael Artin, Noncommutative Rings, class notes(1999).

[4] Vesselin Drensky, Edward Formanek, Polynomial Identity Rings, Springer Basel AG(2004).

[5] M. Dehn, Uber die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme, Math. Ann. 85 (1922), 184-193.

[6] Amitsur, S.A. Polynomial identities. Israel J. Math. 19(1974), 183-199.

[7] M. Hall, Projective planes, Trans. Amer. Math. Soc. 54(1943), 229-277.

[8] I. Kaplansky, Rings with a polunomial identity, Bull. Amer. Math. Soc. 54(1948),575-580.

[9] J. Levitzki, A theorem on polynomial identities, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 334-34l.

[10] S.A. Amitsur, J. Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 2(1950),449-463.

[11] S.A. Amitsur, The identities of PI-rings, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 27-34.

[12] S.A. Amitsur, Radicals of polynomial rings, Canadian J. Math. 8 (1956), 355-361.

[13] E.C. Posner, Prime rings satisfying a polynomial identity, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 180-184.

[14] E. Formanek, Central polynomials for matrix rings, J. Algebra 23 (1972), 129-132.

[15] On a problem of Kaplansky, Izv. Akad. Nauk SSSR 37 (1973), 483-501.

[16] L. H. Rowen, Some results on the center of a ring with polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 219-223.

[17] S. Rosset, A new proof of the Amitsur-Levitski identity, Israel J. Math. 23 (1976), 187-188.

[18] W. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme, Math. Z. 113 (1937), 528-567.

[19] Darij Grinberg, Notes on the combinatorial fundamentals of algebra(2022).

[20] Nathan Jacobson, Basic Algebra II, Dover Publications(1980).

[21] I. N. Herstein, Noncommutative Rings, The Mathematical Association of America(2005).

[22] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company(1969).

[23] R. S. Irving, Affine PI algebras not embeddable in matrix rings, J. Algebra 82 (1983), 94-101.

[24] Z. Mesyan, Commutator rings, Bull. Austral. Math. Soc. 74 (2006), 279-288.

[25] A. V. Jategaonkar, Jacobson's conjecture and modules over fully bounded Noetherian rings, J. Algebra 30 (1974), 103-121.

[26] De Meyer, F., Ingraham, E., Separable algebras over commutative rings, Springer (2006).

[27] M. Artin, On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings, Journal of Algebra 11(1969), 532-563.

[28] C. Procesi, On a theorem of M. Artin, Journal of Algebra 22(1972), 309-315.

[29] I. Reiner, Maximal Orders, London Mathematical Society Monographs (2003).

[30] K.A. Brown, M.T. Yakimov, Azumaya loci and discriminant ideals of PI algebras, Advances in Mathematics 340 (2018), 1219-1255.

[31] C. Procesi, A formal inverse to the Cayley-Hamilton theorem, Journal of Algebra 107(1987), 63-74.

[32] C. De Concini, C. Procesi, N. Reshetikhin and M. Rosso, Hopf algebras with trace and representations, Inventiones mathematicae 161(2005), 1-44.

[33] L. H. Rowen, Polynomial identities in ring theory, Academic Press (1980).

[34] K. Chan, J. Gaddis, R. Won and Zhang, J. J., Ozone groups of Artin–Schelter regular algebras satisfying a polynomial identity, arXiv preprint arXiv:2312.13014(2023).

[35] Wu Quanshui, Zhu Ruipeng, Derived equivalences for a class of PI algebras, Algebr. Represent. Theory 26 (2023), 753–762.

[36] L. Bruyn L, M. V. den Bergh, F. V. Oystaeyen, Graded orders, Birkhäuser Boston, 1988

[37] K.A. Brown, K. R. Goodearl, Homological aspects of Noetherian PI Hopf algebras and irreducible modules of maximal dimension, Journal of algebra 198 (1997), 240-265.

[38] C. De Concini, V. G. Kac, Representations of quantum groups at roots of 1, Colloque Dixmier 1989, Progress in Math.92 (1990),471-506.

[39] S. Jøndrup, Representations of skew polynomial algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 1301-1305.

[40] C. De Concini, C. Procesi, Quantum groups, D-modules, representation theory, and quantum groups (Venice, 1992), Lecture Notes in Math. 1565 (1993), 31-140.

[41] Manin, Yuri I., Topics in noncommutative geometry, M. B. Porter Lectures, Princeton University Press (1991).

[42] Ceken, S., Palmieri, J. H., Wang, Y.-H. and Zhang, J. J., The discriminant criterion and automorphism groups of quantized algebras, Adv. Math. 286 (2016), 754–801.