导子模

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2024 年 7 月 24 日

导子是数学多个领域中自然产生的概念. 例如若记 $C^\infty(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上光滑函数全体构成的函数环, 那么求导算子 $d/dx : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), f \mapsto df/dx$ 是满足 Leibniz 公式的 $\mathbb{R}$-线性变换. 这份笔记主要介绍交换代数中关于导子的一些基本概念与基本例子, 主要参考文献是 [Mat70], [Lee12] 和 [SP94]. 在微分几何场景下, 我们将看到光滑流形上的光滑向量场全体本质上就是光滑函数环决定的导子模 (见 [命题2.3]). 在代数几何场景下, 我们将看到仿射簇上的 (多项式) 向量场全体就是坐标环决定的导子模 (见 [命题3.2]).

1 基本概念

本节固定 K 是含幺交换环, A 是 K-交换代数. 下面的导子便是 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上求导算子的推广.

Definition 1.1. 设 M 是 A-模, 如果 K-模同态 $D : A \to M$ 满足 $D(ab) = D(a)b + aD(b), \forall a, b \in A$, 则称 D 是 A 到 M 的 K-**导子**. 记 A 到 M 的所有 K-导子构成的集合是 $\mathrm{Der}_K(A, M)$, 易见其上有自然的 A-模结构, 也称 $\mathrm{Der}_K(A, M)$ 为 A 到 M 的**导子模**. 如果 $M = A$, 将 $\mathrm{Der}_K(A, A)$ 简记为 $\mathrm{Der}_K A$.

Remark 1.2. 导子也可以在非交换代数场景下定义, 但这里仅关注交换代数.

Example 1.3. 设 $K = \mathbb{R}$, $A = C^\infty(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上光滑函数环. 那么求导算子 $d/dx \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathbb{R})$.

Example 1.4. 设 $K = \Bbbk$ 是域, $A = \mathcal{O}(\Bbbk^n) = \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 是 $\Bbbk$ 上 n 元多项式代数. 那么 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(\Bbbk^n)$ 是自由 $\mathcal{O}(\Bbbk^n)$-模. 设 $\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n$ 是偏导数算子, 那么 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(\Bbbk^n) = \mathcal{O}(\Bbbk^n)\partial/\partial x_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(\Bbbk^n)\partial/\partial x_n$.

Example 1.5. 设 $K = \mathbb{R}$, $A = C^\infty(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上光滑函数环, 并固定 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. 那么

$$\{-, g\} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

也是 $\mathbb{R}$-导子. 通常称 $\{f, g\}$ 是 f 与 g 的 Jacobian Poisson 括号.

Example 1.6. 设 $K = \mathbb{R}$, $A = C^\infty(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上光滑函数环并取定 $a \in \mathbb{R}$. 那么 $d/dx|_a : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto f'(a)$ 满足 $(d/dx|_a)(fg) = f(a)(d/dx|_a)(g) + (d/dx|_a)(f)g(a), \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$. 通过 $f \cdot c = f(a)c, \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$ 赋予 $\mathbb{R}$ 上 $C^\infty(\mathbb{R})$-模结构. 那么 $d/dx|_a \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

2 来自微分几何的导子模

本节固定光滑流形 $\mathcal{M}$ 以及 $p \in \mathcal{M}$ 并设 $C^\infty(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 的光滑函数环.

回忆 $\mathcal{M}$ 在 p 处的切向量就是满足下述条件的 $\mathbb{R}$-线性函数 $D : C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$: 对任何 $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ 有 $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. 如果在 $\mathbb{R}$ 上如下赋予 $C^\infty(\mathcal{M})$-模结构: $f \cdot c = f(p)c, \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}), c \in \mathbb{R}$, 那么 $D : C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ 是 M 在 p 处切向量等价于说 $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R})$. 因此在导子模的记号下, $\mathcal{M}$ 在 p 处的切空间 $T_p\mathcal{M}$ 就是 $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R})$. 因为 $\mathcal{M}$ 在 p 处切向量在每个光滑函数 f 上的作用完全由 f 在 p 附近的局部性态决定, 因此也有 $\mathbb{R}$-线性同构 $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R}) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty, \mathbb{R})$, 其中 C_p^∞ 是 $\mathcal{M}$ 在 p 处的光滑函数芽环, 由函数芽在 p 处取值的数乘来赋予 $\mathbb{R}$ 上 C_p^∞-模结构. 在一些文献中也用函数芽环到 $\mathbb{R}$ 的导子模 $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty, \mathbb{R})$ 作为切空间的原始定义. 我们把刚刚的讨论总结为下述例子.

Example 2.1. 设 $T_p\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 在 p 处切空间, 则 $T_p\mathcal{M} = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R}) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty, \mathbb{R})$.

Remark 2.2. 在此记号下, 光滑映射 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 在 p 处的切映射 $dF_p : T_p\mathcal{M} \to T_{F(p)}\mathcal{N}, D \mapsto DF^*$.

现在我们再来看光滑流形上的光滑向量场. 回忆 $\mathcal{M}$ 上的光滑向量场 $X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ 是满足 $\pi X = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 的光滑映射, 其中 $T\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 的切丛, $\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是标准投射. 因此光滑向量场就是标准投射 $\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 的一个光滑截面. 通常把 $p \in \mathcal{M}$ 在向量场 X 下的像记作 X_p, 它是 $\mathcal{M}$ 在 p 处的一个切向量. 对每个 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, 可定义映射 $Xf : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, p \mapsto X_pf$ 通过切丛的自然坐标表示可验证 $Xf \in C^\infty(\mathcal{M})$(事实上对任何 π 的连续截面 $X : M \to TM$, X 是光滑向量场的充要条件是 $Xf \in C^\infty(\mathcal{M}), \forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$). 因此我们也可以把光滑向量场 X 视作光滑函数环到自身的线性变换: $X : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}), f \mapsto Xf$. 由 $X_p \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R}), \forall p \in \mathcal{M}$ 可直接验证 $X \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{M})$. 反之, 任给 $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{M})$, 通过定义 $X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}, p \mapsto X_p$, 其中 $X_p : C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}, f \mapsto (Df)(p)$, 则可验证 X 是光滑向量场并且 $Xf = Df, \forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$. 并且如果 $\mathcal{M}$ 上光滑向量场 X, Y 满足 $Xf = Yf \in C^\infty(\mathcal{M}), \forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$, 对固定的 $[f] \in C_p^\infty$, 存在 $g \in C^\infty(\mathcal{M})$ 使得 f 与 g 在 p 的某个开邻域相同, 由此得到 $X_pf = X_pg = (Xg)(p) = (Yg)(p) = Y_p(g) = Y_pf$. 这说明

Proposition 2.3. 记 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 上光滑向量场全体, 那么有 $\mathbb{R}$-线性同构 $\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{M})$.

Remark 2.4. 事实上该线性同构还是 $C^\infty(\mathcal{M})$-模同构. 首先回忆 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 上有如下自然 $C^\infty(\mathcal{M})$-模结构: $fX : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}, p \mapsto f(p)X_p$. 于是 fX 在每个光滑函数 g 上的作用就是 $f(Xg)$.

设 $\mathcal{M}$ 是 n 维光滑流形, 有子集 A, $(X_1, ..., X_k)$ 是定义在 A 上向量场 (未必光滑) 的 k 元有序组. 如果对每个 $p \in A$, $(X_1|_p, ..., X_k|_p)$ 是 $T_p\mathcal{M}$ 中线性无关的 k 元有序组, 则称 $(X_1, ..., X_k)$ 是**线性无关的**. 如果对每个 $p \in A$, $(X_1|_p, ..., X_k|_p)$ 可以生成 $T_p\mathcal{M}$, 则称 $(X_1, ..., X_k)$ **可张成切丛**. 如果 $(X_1, ..., X_n)$ 是定义在 $\mathcal{M}$ 的某个开子集 U 上的向量场, 满足对每个 $p \in U$, $(X_1|_p, ..., X_n|_p)$ 是 $T_p\mathcal{M}$ 的基, 则称 $(X_1, ..., X_n)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个**局部标架**. 如果局部标架定义中 $U = \mathcal{M}$, 则称为**整体标架**. 如果局部标架定义中的向量场均光滑, 则称该局部标架是**光滑标架**. 例如 $\mathbb{R}^n$ 上标准坐标向量场给出 $\mathbb{R}^n$ 的一个光滑整体标架. 任给光滑流形 $\mathcal{M}$ 的光滑坐标卡 (U, φ), 并设有坐标表示 $(x_1, ..., x_n)$, 那么坐标向量场组 $(\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个光滑局部标架.

3 来自代数几何的导子模

本节固定 $X \subseteq \Bbbk^n$ 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇并且 $p \in X$, 用 $I(X)$ 表示 $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$ 中所有零化 X 的多项式构成的理想. 回忆仿射簇 X 在 p 处的切空间就是 $I(X)$ 的有限生成元集对应的 p 处 Jacobi 矩阵的解空间

$$T_pX = V(\{\sum_{i=1}^{n}(\partial F/\partial x_i)(p)x_i | F \in I(X)\}) \subseteq \Bbbk^n,$$

其中的元素被称为 X 在 p 处的切向量. 设 $\mathcal{O}(X)$ 是 X 的坐标环, 那么它可等价地视作 X 上多项式函数环. 通过 $f \cdot c = f(p)c, \forall f \in \mathcal{O}(X), c \in \Bbbk$ 可赋予 $\Bbbk$ 上 $\mathcal{O}(X)$-模结构, 进而可直接验证 $\Bbbk$-线性同构 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(X), \Bbbk) \cong T_pX$. 类似于光滑流形的情形, 若记 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 X 在 p 处的正则函数芽环, 也可用正则函数芽在 p 处取值的数乘来赋予 $\Bbbk$ 上 $\mathcal{O}_{X,p}$-模结构并可直接验证 $T_pX \cong \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathcal{O}_{X,p}, \Bbbk)$. 我们把刚刚的讨论总结为下述例子.

Example 3.1. 设 T_pX 是 X 在 p 处切空间, 则 $T_pX \cong \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(X), \Bbbk) \cong \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathcal{O}_{X,p}, \Bbbk)$.

类似于光滑流形的情形, 可定义 X 的切丛为

$$TX = \coprod_{p \in X} T_pX = \{(p, v_p) \in \Bbbk^{2n} | p \in X, v_p \in T_pX\} \subseteq \Bbbk^{2n},$$

那么 $TX = V(S) \subseteq \Bbbk^{2n}$, 其中 S 为 $\{f(x_1, ..., x_n) \in \Bbbk[x_1, ..., x_n, ..., x_{2n}] | f(x_1, ..., x_n) \in I(X)\}$ 与

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)x_{i+1} \in \Bbbk[x_1, ..., x_{2n}] | F \in I(X)\right\}$$

的并集, 所以 TX 也是仿射簇. 此时标准投射 $\pi : TX \to X$ 明显是正则映射. 称 π 的正则截面为 X 上 (多项式) 向量场. 记 X 上所有向量场构成的集合为 $\Gamma(TX)$. 进而可在 $\Gamma(TX)$ 上赋予 $\mathcal{O}(X)$-模结构: 其上加法运算利用每点处切空间上加法运算赋予, 数乘作用定义为 $\mu : \mathcal{O}(X) \times \Gamma(TX) \to \Gamma(TX), (f, \mathcal{V}) \to \mu(f, \mathcal{V})$, 其中 $\mu(f, \mathcal{V}) : X \to TX, p \mapsto f(p)v_p$, 其中 $\mathcal{V}(p) = (p, v_p)$. 由此不难看出 $\Gamma(TX)$ 是 $\mathcal{O}(X)$-模.

易见每个 $\mathcal{O}(X)$ 上导子 D 可以产生 X 每点 p 处的切向量 $\mathcal{V}_p(D) : \mathcal{O}(X) \to \Bbbk, f \mapsto D(f)(p)$. 于是 $(\mathcal{V}_p(D)(x_1), \mathcal{V}_p(D)(x_2), ..., \mathcal{V}_p(D)(x_n)) = (D(x_1)(p), ..., D(x_n)(p)) \in T_pX$. 对每个固定的正整数 $1 \leq j \leq n$, $D(x_j)$ 为 X 上多项式函数, 所以 $\mathcal{V}(D) : X \to TX, p \mapsto (p, \mathcal{V}_p(D))$ 是 X 上向量场. 反之, 任给 X 上向量场 $\mathcal{W} : X \to TX, p \mapsto (p, f_1(p), ..., f_n(p))$, 这里 $f_j \in A(X)$ 并且 $(f_1(p), ..., f_n(p)) \in T_pX$. 作

$$D(f) = f_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(f_1, ..., f_n) + f_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(f_1, ..., f_n) + \cdots + f_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(f_1, ..., f_n), \forall f \in A(X),$$

这里每个 $(\partial f/\partial x_j)(f_1, ..., f_n)$ 表示对偏导数多项式 $\partial f/\partial x_j$ 作赋值 $(x_1, ..., x_n) = (f_1, ..., f_n)$. 注意到对每个 $h \in I(X)$, $D(h)$ 作为 X 上多项式函数为零, 所以 $D : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ 是定义合理的线性变换. 并且不难看出 $D \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$ 且 $\mathcal{W} = \mathcal{V}(D)$. 根据前面的讨论, 命 $\mathcal{V} : \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X) \to \Gamma(TX), D \mapsto \mathcal{V}(D)$, 那么这是定义合理的满 $\Bbbk$-线性映射. 假设 $D, D' \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$ 满足 $\mathcal{V}(D) = \mathcal{V}(D')$, 那么对每个正整数 $1 \leq j \leq n$, $D(x_j)$ 与 $D'(x_j)$ 作为 X 上多项式函数相同, 进而 $D(x_j) = D'(x_j), \forall 1 \leq j \leq n$. 进而由 X 上坐标函数集 $\{x_1, ..., x_n\}$ 是 $\mathcal{O}(X)$ 作为 $\Bbbk$-代数的一个生成元集知 $D = D'$. 因此得到线性同构 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X) \cong \Gamma(TX)$. 结合 $\Gamma(TX)$ 上 $\mathcal{O}(X)$-模结构的定义易见该同构也是 $\mathcal{O}(X)$-模同构. 总结一下, 我们得到

Proposition 3.2. 设 X 是域 $\Bbbk$ 上仿射簇, $\Gamma(TX)$ 是 X 上所有向量场构成的 $\mathcal{O}(X)$-模. 对每个 $p \in X, D \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$, 记 $\mathcal{V}_p(D) : \mathcal{O}(X) \to \Bbbk, f \mapsto D(f)(p)$, $\mathcal{V}(D) : X \to TX, p \mapsto (p, \mathcal{V}_p(D))$ 是 X 上向量场. 那么 $\mathcal{V} : \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X) \to \Gamma(TX), D \mapsto \mathcal{V}(D)$ 是 $\mathcal{O}(X)$-模同构. 即 $\Gamma(TX) \cong \mathrm{Der}_{\Bbbk}\mathcal{O}(X)$.

参考文献

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 1977.

[Lee12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[Mat70] H. Matsumura. *Commutative algebra*, volume 120. WA Benjamin New York, 1970.

[Sha94] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry 1*, volume 2. Springer, 1994.

[SP94] I. R. Shafarevich and A.N. Parshin. *Algebraic geometry I: Algebraic curves, algebraic manifolds and schemes*. Springer, 1994.