Freyd-Mitchell 嵌入定理注记

戚天成 ✉

复旦大学 数学科学学院

2023 年 9 月 6 日

1 Freyd-Mitchell 嵌入定理

我们所学的初等同调代数大多在模范畴上展开, 而随着代数学习的深入或是科研的需要, 就不可避免需要使用建立在 Abel 范畴上的同调代数来作为基本工具. 直接使用泛性质与交换图来建立 Abel 范畴上的同调代数虽然更普适的反映研究对象的性质且是有益的范畴训练, 但对于仅把范畴论作为工具的数学工作者未必感兴趣这些"范畴细节". 对于验证过模范畴上同调代数且希望自己用过大部分数学工具都尽可能推导验证过的人来说, 承认 Freyd-Mitchell 嵌入定理来替代直接推导 Abel 范畴上大部分同调代数理论是不错的选择.

1.1 基本准备

本节先回顾 Freyd-Mitchell 嵌入定理的叙述, 再证明任何 Abel 范畴的给定对象集都可以含于某个小 Abel 范畴中 (考虑该对象集生成的 Abel 全子范畴是最自然直接的想法, 但该对象集生成的范畴可以取成小范畴是需要证明的), 它是嵌入定理可应用性的基本保证.

Freyd-Mitchell Theorem (1964)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是一个小 Abel 范畴 (即对象类是集合的 Abel 范畴), 那么存在含幺环 R 以及共变正合的忠实满函子 $F : \mathcal{A} \to R$-**Mod**.

Remark. 该嵌入定理最早来自 Peter J. Freyd(美国数学家, 1936-) 和 Barry Mitchell(美国数学家, 1933-2021) 于 1964 年的工作, 见 [Fre64] 与 [Mit64].

该定理的一个直接应用便是模范畴中任何可以仅用"追图法"证明的同调代数结论都可以用忠实正合满函子过渡到 Abel 范畴上. 但嵌入定理的条件适用于 Abel 范畴, 所以我们还是需要说明任何一个在模范畴中"仅用追图"可证的同调代数结论都可以化归到一个小 Abel 范畴上讨论. 注意到我们可处理的任何一个交换图中出现的所有对象构成的类都是集合 (甚至在绝大部分情况下, 例如蛇形引理、五引理所处理的交换图中出现的对象数目是有限的), 因此我们只需说明任何 Abel 范畴中的对象集都含于某个小 Abel 子范畴中即可.

Proposition 1.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 是非空集合, 那么存在 $\mathcal{A}$ 的一个 Abel 全子范畴 $\mathcal{B}$ 使得对象类 $\mathrm{ob}\mathcal{B}$ 是包含 $\mathcal{S}$ 的集合, 即 $\mathcal{B}$ 为包含 $\mathcal{S}$ 的小 Abel 全子范畴.

Proof. 定义 $\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{S}$ 添加 $\mathcal{A}$ 中零对象构成的集合. 那么 $\mathcal{S}$ 可生成 $\mathcal{A}$ 的一个全子范畴 $\mathcal{B}_0$, 它是小范畴. 定义 $\mathcal{S}_1$ 为 $\mathrm{ob}\mathcal{B}_0$ 添加 $\mathcal{B}_0$ 中所有态射在 $\mathcal{A}$ 中的核、余核以及有限直和 (均指定一个对象) 构成的集合 (这里确实可以使 $\mathcal{S}_1$ 成为集合, 首先对范畴 $\mathcal{A}$ 的所有同构类都选定一个代表元, 那么任何态射 $f: X \to Y$ 的核 $k: \mathrm{Ker}f \to X$ 与余核 $c: Y \to \mathrm{Coker}f$ 都可以指定对象 $\mathrm{Ker}f$ 以及 $\mathrm{Coker}f$. 任何有限个对象的直和本身在同构意义下唯一, 因此一旦我们对 $\mathcal{A}$ 中所有同构类都选定一个代表元, 就对任意有限个对象也取定一个直和对象, 注意到 $\mathcal{B}_0$ 中所有态射构成的类是集合, 所以如此构造的 $\mathcal{S}_1$ 也是集合). 并定义 $\mathcal{B}_1$ 是以 $\mathcal{S}_1$ 为对象集的全子范畴. 假设对正整数 n, 已经定义好对象集 $\mathcal{S}_n$ 以及 $\mathcal{S}_n$ 生成的全子范畴 $\mathcal{B}_n$, 定义 $\mathcal{S}_{n+1}$ 为 $\mathrm{ob}\mathcal{B}_n$ 添加 $\mathcal{B}_n$ 中所有态射在 $\mathcal{A}$ 中的核、余核以及有限直和 (均指定一个对象) 构成的集合, $\mathcal{B}_{n+1}$ 是以 $\mathcal{S}_{n+1}$ 为对象集的全子范畴. 递归地, 对每个正整数 n, 定义出 $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S}_n)$. 根据构造方式, 每个 $\mathcal{S}_n$ 是集合且 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_{n+1} \subseteq \cdots$. 现作

$$\mathrm{ob}\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n,$$

那么 $\mathrm{ob}\mathcal{B}$ 是集合, 定义 $\mathcal{B}$ 是以 $\mathrm{ob}\mathcal{B}$ 为对象集的全子范畴, 还需说明 $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴. 任取 $\mathcal{B}$ 中有限个对象 $X_1, ..., X_n$, 存在正整数 N 使得这些对象都在 $\mathcal{S}_N$ 中, 所以 $\mathcal{S}_{N+1}$ 中有它们的直和. 于是由 $\mathcal{S}_0$ 含有零对象易知 $\mathcal{B}$ 是对象集包含 $\mathcal{S}$ 的加性范畴. 任取 $\mathcal{B}$ 中态射 $f: X \to Y$, 则存在正整数 t 使得 X, Y 在 $\mathcal{S}_t$ 中, 于是 $\mathcal{S}_{t+1}$ 中存在 $\mathrm{Ker}f$ 以及 $\mathrm{Coker}f$, 利用 $\mathcal{B}_{t+1}$ 是全子范畴便知 $f: X \to Y$ 在 $\mathcal{B}$ 中存在核与余核. 如果能够说明 $\mathcal{B}$ 中任何 monic 态是它余核的核、任何 epic 态是它核的余核, 便可得 $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴. 而这一点由 $\mathcal{B}$ 本身的构造以及范畴 $\mathcal{A}$ 自身具备该性质便知结论成立. 所以 $\mathcal{B}$ 是对象集包含 $\mathcal{S}$ 的 Abel 全子范畴. □

Remark. 这里并没有验证 $\mathcal{B}$ 满足“满单分解”的原因是只要一个加性范畴满足：(AC5) 任何态射存在核与余核. (AC6) 任何 monic 态是它余核的核, 任何 epic 态是它核的余核. 那么该加性范畴自动满足满单分解, 证明如下 (初次阅读可跳过)：设 $\mathcal{C}$ 是满足 AC5 与 AC6 的加性范畴, $f: A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态, 则对下图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"] & B \\
& & \mathrm{Coker}k \arrow[d] & \\
& & 0 &
\end{tikzcd}$$

由 $fk = 0$ 知存在态 $m: \mathrm{Coker}k \to B$ 使得 $f = me$. 这里 e 作为 k 的余核自然是 epic 态, 所以我们只需说明 m 是 monic 态.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & B \\
& & \mathrm{Coker}k \arrow[d] \arrow[ur, dashed, "m"'] & \\
& & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathcal{C}$ 是加性范畴, 所以要证明 m 是 monic 态只需证明对任何满足 $mg = 0$ 的态 $g : D \to \mathrm{Coker}k$, 有 $g = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & B \\
& D \arrow[r, "g"] & \mathrm{Coker}k \arrow[ur, "m"'] \arrow[d] & \\
& & 0 &
\end{tikzcd}
$$

设 $l : \mathrm{Coker}k \to \mathrm{Coker}g$ 是 g 的余核, 如果我们能够证明 l 是 monic 态, 那么就得到了 $g = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & B \\
& D \arrow[r, "g"] & \mathrm{Coker}k \arrow[ur, "m"'] \arrow[d] \arrow[r, "l"] & \mathrm{Coker}g \arrow[u, dashed, "h"'] \\
& & 0 &
\end{tikzcd}
$$

下证 l 是 monic 态. 因为 $mg = 0$, 所以存在态 $h : \mathrm{Coker}g \to B$ 使得 $m = hl$. 易见有 $f = hle$. 设 $k' : \mathrm{Ker}(le) \to A$ 是态 le 的核, 那么 $lek' = 0$. 进而 $fk' = hlek' = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}(le) \arrow[dr, "k'"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & B \\
& D \arrow[r, "g"] & \mathrm{Coker}k \arrow[ur, "m"'] \arrow[d] \arrow[r, "l"] & \mathrm{Coker}g \arrow[u, "h"'] \\
& & 0 &
\end{tikzcd}
$$

因此由 k 是 f 的核知存在态 $q : \mathrm{Ker}(le) \to \mathrm{Ker}f$ 使得 $k' = kq$. 所以 $ek' = ekq = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}(le) \arrow[dr, "k'"] \arrow[d, dashed, "q"'] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & B \\
& D \arrow[r, "g"] & \mathrm{Coker}k \arrow[ur, "m"'] \arrow[d] \arrow[r, "l"] & \mathrm{Coker}g \arrow[u, "h"'] \\
& & 0 &
\end{tikzcd}
$$

利用 k' 是 le 的核容易验证 k' 也是 e 的核. 于是由 AC6 知 e 与 el 都是 k' 的余核, 从而由余核的同构唯一性知存在同构 $u : \mathrm{Coker}g \to \mathrm{Coker}k$ 使得 $ule = e$. 利用 e 是 epic 态得到 $ul = 1_{\mathrm{Coker}k}$, 这说明 l 是 monic 态. 于是结合前面的讨论知 $g = 0$, 所以 m 是 monic 态. 这就证明了满单分解 $f = me$ 的存在性. 易见若态射 $f : X \to Y$ 有满单分解 $e : X \to Z, m : Z \to Y$, 那么 m 就是 f 的像, 进而 $Z = \mathrm{Im}f$.

这里再指出若 $f: X \to X$ 是幂等态射, 则满单分解 $f = me$ 满足 $em = 1$. 设 $e: X \to Z, m: Z \to Y$, 首先 $(1-f)m = 0$, 所以 $m = fm = mem$, 进而由 m 是 monic 态得到 $em = 1$.

1.2 嵌入定理的应用

现在我们可以用 Freyd-Mitchell 嵌入定理来把模范畴上众多同调代数结论推广到 Abel 范畴上. 出于篇幅原因, 这里仅列出嵌入定理在“五引理”、“复形短正合列诱导同调长正合列”以及“蛇形引理”证明上的应用.

Corollary 1.2 (五引理)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 下图是 $\mathcal{A}$ 中交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & X_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & X_5 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Y_3 & \xrightarrow{\beta_3} & Y_4 & \xrightarrow{\beta_4} & Y_5 \end{array}$$

其中上下两行均为正合列, 则有

(1) 若 f_1 是 epic 态, f_2, f_4 均为 monic 态, 则 f_3 是 monic 态.

(2) 若 f_5 是 monic 态, f_2, f_4 均为 epic 态, 则 f_3 是 epic 态.

(3) 特别地, 若 f_1, f_2, f_4, f_5 均为同构, 则 f_3 也是同构.

Proof. 五引理在模范畴中的版本追图易证. 现在设 $\mathcal{B}$ 是含有 $\{X_1, ..., X_5, Y_1, ..., Y_5\}$ 的小 Abel 全子范畴, 那么根据 Freyd-Mitchell 嵌入定理, 存在含幺环 R 以及共变正合的忠实满函子 $F: \mathcal{B} \to R$-**Mod**. 进而有交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} FX_1 & \xrightarrow{F\alpha_1} & FX_2 & \xrightarrow{F\alpha_2} & FX_3 & \xrightarrow{F\alpha_3} & FX_4 & \xrightarrow{F\alpha_4} & FX_5 \\ {\scriptstyle Ff_1}\downarrow & & {\scriptstyle Ff_2}\downarrow & & {\scriptstyle Ff_3}\downarrow & & {\scriptstyle Ff_4}\downarrow & & {\scriptstyle Ff_5}\downarrow \\ FY_1 & \xrightarrow{F\beta_1} & FY_2 & \xrightarrow{F\beta_2} & FY_3 & \xrightarrow{F\beta_3} & FY_4 & \xrightarrow{F\beta_4} & FY_5 \end{array}$$

因为 F 是正合函子, 所以上下两行是模范畴中的正合列. 同时, 正合函子保持 monic 态与 epic 态, 所以 $\mathcal{A}$ 中 monic 态在 F 作用下变为模范畴中的单同态, epic 态在 F 作用下变成模范畴中的满同态. 于是可对上面的交换图应用模范畴中的五引理. 于是知: (1) 若 f_1 是 epic 态, f_2, f_4 均为 monic 态, 则 Ff_3 是单同态. (2) 若 f_5 是 monic 态, f_2, f_4 均为 epic 态, 则 Ff_3 是满同态. 最后, 由 F 是忠实的满函子可知 F 反向保持 monic 态和 epic 态, 于是知 Abel 范畴中的五引理成立. □

下述结果是用于证明复形间链映射诱导上同调对象间态射的必要工具, 虽然它利用态射余核的定义可立即得到, 这里作为嵌入定理的简单应用加以证明.

Corollary 1.3. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 下图是 $\mathcal{A}$ 中交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & {\scriptstyle \beta}\downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_2 & \xrightarrow{g_2} & Y_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中上下两行正合, 那么存在唯一的态射 $\gamma: X_3 \to Y_3$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & {\scriptstyle \beta}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_2 & \xrightarrow{g_2} & Y_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Proof. 该结论在模范畴情形追图易证. 现在设 $\mathcal{B}$ 是包含 $\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\}$ 的小 Abel 全子范畴, 根据 Freyd-Mitchell 嵌入定理, 存在含幺环 R 以及共变正合的忠实满函子 $F : \mathcal{B} \to R$-**Mod**. 进而有交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & FX_1 \arrow[r, "Ff_1"] \arrow[d, "F\alpha"'] & FX_2 \arrow[r, "Ff_2"] \arrow[d, "F\beta"'] & FX_3 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & FY_1 \arrow[r, "Fg_1"] & FY_2 \arrow[r, "Fg_2"] & FY_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中上下两行正合, 进而由模范畴中的结果, 存在同态 $h : FX_3 \to FY_3$ 使得 $hFf_2 = Fg_2F\beta$. 因为 F 是忠实的满函子, 所以存在唯一的态射 $\gamma : X_3 \to Y_3$ 使得 $h = F\gamma$, 进而 $F(\gamma f_2) = F(g_2\beta)$, 再利用 F 的忠实性得到 $\gamma f_2 = g_2\beta$. 最后说明 γ 的唯一性. 如果还有态射 $\gamma' : X_3 \to Y_3$ 使得 $\gamma' f_2 = g_2\beta$, 那么 $F\gamma F f_2 = F\gamma' F f_2$, 于是由 Ff_2 是 epic 态立即得到 $F\gamma = F\gamma'$, 因此 F 的忠实性保证了 $\gamma = \gamma'$. □

Remark. 对偶地, 若在 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中有下述形式的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] & Y_2 \arrow[r, "g_2"] & Y_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中上下两行正合. 那么存在态射 $\alpha : X_1 \to Y_1$ 使得 $g_1\alpha = \beta f_1$.

如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的忠实函子, 易知 $FX = 0$ 当且仅当 $X = 0$. 因为满足 $gf = 0$ 的态射序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 的正合性可通过 $\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f$ 是否为零对象刻画, 故嵌入定理也可以用于证明:

Corollary 1.4 (复形短正合列诱导同调长正合列)**.** 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上复形的短正合列

$$0 \longrightarrow (C', d') \xrightarrow{\alpha} (C, d) \xrightarrow{\beta} (C'', d'') \longrightarrow 0,$$

那么对每个整数 i, 存在态射 $\Delta^i : H^i(C'') \to H^{i+1}(C)$ 使得下述同调群间的态射序列正合:

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{i-1}} H^i(C') \xrightarrow{\tilde{\alpha^i}} H^i(C) \xrightarrow{\tilde{\beta^i}} H^i(C'') \xrightarrow{\Delta^i} H^{i+1}(C') \longrightarrow H^{i+1}(C) \longrightarrow \cdots.$$

这里的 Δ^i 称为**连接态射** (connecting morphism), 连接同态的一个重要特征是它有自然性: 给定复形的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (C', d'_C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (C, d_C) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & (C'', d''_C) \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (D', d'_D) \arrow[r, "\gamma"'] & (D, d_D) \arrow[r, "\delta"'] & (D'', d''_D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中上下两行是复形短正合列, 那么对每个整数 i, 有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
H^i(C'') \arrow[r, "\Delta^i"] \arrow[d, "(\tilde{f''})^i"'] & H^{i+1}(C') \arrow[d, "(\tilde{f'})^{i+1}"] \\
H^i(D'') \arrow[r, "\Delta^i"'] & H^{i+1}(D')
\end{tikzcd}$$

Proof. 该结论的模范畴版本可追图直接验证. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的小 Abel 全子范畴使得它包含三个复形所有项. 根据 Freyd - Mitchell 嵌入定理, 存在含幺环 R 以及共变正合的忠实满函子 $F:\mathcal{B}\to R$-**Mod**. 进而得到 R-**Mod** 中复形短正合列 $0\longrightarrow(FC',Fd')\xrightarrow{F\alpha}(FC,Fd)\xrightarrow{F\beta}(FC'',Fd'')\longrightarrow 0$, 对复形 X, 易知 $F(H^n(X))\cong H^n(FX),\forall n\in\mathbb{Z}$, 所以根据模范畴情形的结论, 以及 F 是满函子, 得到存在态射 $\Delta^i:H^i(C'')\to H^{i+1}(C)$ 使得下述同调群间的态射序列正合：

$$\cdots\xrightarrow{F(\Delta^{i-1})}F(H^i(C'))\xrightarrow{F(\tilde{\alpha^i})}F(H^i(C))\xrightarrow{F(\tilde{\beta^i})}F(H^i(C''))\xrightarrow{F(\Delta^i)}F(H^{i+1}(C'))\longrightarrow F(H^{i+1}(C))\longrightarrow\cdots.$$

并且 $F(\Delta^i)$ 满足自然性. 再利用 F 是忠实的正合函子易得结论. $\square$

类似地, 可以应用嵌入定理来证明 Abel 范畴中的蛇形引理.

Corollary 1.5 (蛇形引理)**.** 考虑 Abel 范畴 A 中的交换图

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha'"] & Y' \arrow[r, "\beta'"] & Z' & \end{tikzcd}$$

其中上下两行正合, 那么存在下述形式的正合列：

$$\mathrm{Ker}f\xrightarrow{\tilde{\alpha}}\mathrm{Ker}g\xrightarrow{\tilde{\beta}}\mathrm{Ker}h\xrightarrow{\delta}\mathrm{Coker}f\xrightarrow{\tilde{\alpha'}}\mathrm{Coker}g\xrightarrow{\tilde{\beta'}}\mathrm{Coker}h$$

使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "k_1"] & \mathrm{Ker}g \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "k_2"] & \mathrm{Ker}h \arrow[d, "k_3"] & \\ & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "c_1"] & Y' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "c_2"] & Z' \arrow[d, "c_3"] & \\ & \mathrm{Coker}f \arrow[r, "\tilde{\alpha'}"] & \mathrm{Coker}g \arrow[r, "\tilde{\beta'}"] & \mathrm{Coker}h & \end{tikzcd}$$

Proof. 蛇形引理在模范畴中的版本可通过追图直接验证 (细节较多). 首先总有下图：

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "k_1"] & \mathrm{Ker}g \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "k_2"] & \mathrm{Ker}h \arrow[d, "k_3"] & \\ & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "c_1"] & Y' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "c_2"] & Z' \arrow[d, "c_3"] & \\ & \mathrm{Coker}f \arrow[r, "\tilde{\alpha'}"] & \mathrm{Coker}g \arrow[r, "\tilde{\beta'}"] & \mathrm{Coker}h & \end{tikzcd}$$

设 $\mathcal{B}$ 是包含上图所有对象的小 Abel 全子范畴：依 Freyd-Mitchell 嵌入定理, 存在含幺环 R 以及共变正合的忠实满函子 $F:\mathcal{B}\to R$-**Mod**. 那么用函子 F 作用上图, 应用模范畴版本蛇形引理再拉回 $\mathcal{B}$ 中即可. $\square$

在模范畴中, 我们知道一个非零模是不可分的当且仅当它的自同态环没有非平凡幂等元. 一般地, 有：

Lemma 1.6. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $X \neq 0 \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 则 X 不可分当且仅当 $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}X$ 没有非平凡幂等元.

Proof. 充分性：如果 X 可分, 通过 X 在非零直和项上的投射可定义出非平凡幂等元. 必要性：假设 f 是 $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}X$ 的幂等元, 我们断言 $X \cong \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Im}(1-f)$. 具体地, 设满单分解：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e_1"'] & & X \\ & \mathrm{Im}f \arrow[ur, "m_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "1-f"] \arrow[dr, "e_2"'] & & X \\ & \mathrm{Im}(1-f) \arrow[ur, "m_2"'] & \end{tikzcd}$$

那么利用 $f, 1-f$ 幂等知 $e_1m_1 = 1, e_2m_2 = 1$. 易验证 $e_2m_1 = 0, e_1m_2 = 0$, 所以

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} : X \to \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Im}(1-f), (m_1, m_2) : \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Im}(1-f) \to X$$

是一对互逆的态射. 进而由 X 不可分知 $\mathrm{Im}f = 0$ 或 $\mathrm{Im}(1-f) = 0$, 这意味着 $f = 0$ 或 1. □

Corollary 1.7. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, X 是非零对象且 $F : \mathcal{A} \to R$-Mod 是忠实满函子, 则：
(1)X 是不可分对象当且仅当 FX 是不可分模.
(2)X 是强不可分对象当且仅当 FX 是强不可分模.

回忆模范畴中一个模一旦有一个强不可分模分解 (默认直和项有限), 那么该模的不可分模分解在不计次序与同构意义下唯一, 于是应用 Freyd-Mitchell 嵌入定理立即得到：

Corollary 1.8 (Krull-Schmidt 定理)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $X \neq 0 \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$, 如果 X 有两个分解

$$X \cong X_1 \oplus \cdots \oplus X_m \cong Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n,$$

其中每个 X_i 是强不可分对象、每个 Y_i 是不可分对象. 那么 $m = n$ 且存在 $\sigma \in S_n$ 使得 $X_i \cong Y_{\sigma(i)}, \forall 1 \leq i \leq n$.

1.3 无法应用嵌入定理的场景

本节我们先说明 Abel 范畴间正合的忠实满函子未必保持单对象, 进而知模范畴中部分定理 (例如 Jordan-Hölder 定理) 无法使用嵌入定理直接推广到 Abel 范畴上. 这里嵌入定理失效的本质原因是正合的忠实满函子虽然能够保持对象类中对象间的普遍联系 (例如有限积、有限余积、monic 态、epic 态、正合列等), 但无法保持单个对象内部结构的所有信息. 最后, 利用 Abel 范畴中的“拉回”构造, 对模范畴中“经典同构定理”和“Jordan-Hölder 定理”予以证明. 适当增加了一些内容.

回忆 Abel 范畴中一个非零对象被称为**单对象**, 如果它的子对象 (在同构意义下) 只有零和自身. 虽然 Abel 范畴间的加性函子如果忠实满、或更进一步正合可以保持许多范畴性质, 尤其是对象间的态射性质, 但对于单个对象内部的性质未必能够在函子作用下保持, 例如

Example 1.9. 设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间正合的忠实满函子, 那么 F 未必保持单对象. 例如考虑忘却函子 $F : \mathbb{Q}\textbf{-Mod} \to \mathbb{Z}\textbf{-Mod}$, 它是忠实满正合函子. 但 $\mathbb{Q}$ 作为自身上的 1 维线性空间作为 $\mathbb{Z}$-模有非平凡子模.

在模范畴中有三个经典同构定理, Abel 范畴的定义直接保证了对任何态射 $f: X \to Y$ 有同构 $X/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f$. 若 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中有子对象链 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3$, 考虑下述交换图 ($h$ 由 [推论1.3] 诱导, α 是 monic 态):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_3 \arrow[r] & X_3/X_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[u, "1_{X_1}"] & X_2 \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & X_2/X_1 \arrow[r] \arrow[u, dashed, "h"] & 0
\end{tikzcd}$$

由五引理立即得到 h 是 monic 态, 所以应用蛇形引理易得 $\frac{X_3/X_1}{X_2/X_1} \cong X_3/X_2$, 这是第三同构定理. 对于第二同构定理, 设 $\alpha_1: C_1 \to C, \alpha_2: C_2 \to C$ 是 C 的两个子对象. 下面说明同构:

$$\frac{C_1 + C_2}{C_1} \cong \frac{C_2}{C_1 \cap C_2},$$

其中 C 的子对象的和与交定义参见 [Ste12, p.88]. 为明确记号, 设 C_1, C_2 的和与交由下面两交换图定义:

$$\begin{tikzcd}
 & & C/C_1 \times C/C_2 \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & C_i \arrow[r, "\alpha_i"] & C \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\pi_i"] & C/C_i \\
 & & C_1 \cap C_2 \arrow[ul, "u_i"] \arrow[u, "k"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C_2 \arrow[d] & \\
C_1 \arrow[r] & C_1 \oplus C_2 \arrow[d, "\widetilde{(\alpha_1,\alpha_2)}"'] \arrow[dr, "(\alpha_1,\alpha_2)"] & \\
 & C_1 + C_2 \arrow[r, "j"'] & C
\end{tikzcd}$$

置 $\beta_1 = \widetilde{(\alpha_1, \alpha_2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}: C_1 \to C_1 + C_2, \beta_2 = \widetilde{(\alpha_1, \alpha_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}: C_2 \to C_1 + C_2$, 直接验证有拉回

$$\begin{tikzcd}
C_1 \cap C_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] & C_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\
C_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & C_1 + C_2
\end{tikzcd}$$

进而得到正合列 $0 \longrightarrow C_1 \cap C_2 \xrightarrow{\theta} C_1 \oplus C_2 \xrightarrow{\tau} C_1 + C_2 \longrightarrow 0$, 这里

$$\theta = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}: C_1 \cap C_2 \to C_1 \oplus C_2, \tau = (\beta_1, -\beta_2): C_1 \oplus C_2 \to C_1 + C_2.$$

因为任何以 β_1 为核的态射 $g: C_1 + C_2 \to Z$ 一定满足 $g\beta_2$ 以 u_2 为核 (见 [Ste12, p.90, Proposition 5.1]), 故

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_1 \cap C_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] & C_2 \arrow[r, "c\beta_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & \frac{C_1+C_2}{C_1} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & C_1 + C_2 \arrow[r, "c"'] & \frac{C_1+C_2}{C_1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

是上下两行正合的交换图. 于是由第一行的正合性得到结果. 总结一下, 我们有

Theorem 1.10. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 中对象, X_1, X_2 均为 X 的子对象, $f: X \to Y$ 是态射. 那么

•(第一同构定理)$X/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f$.

•(第二同构定理) 总有

$$\frac{X_1 + X_2}{X_1} \cong \frac{X_2}{X_1 \cap X_2}.$$

•(第三同构定理) 如果 $X_1 \subseteq X_2$, 则

$$\frac{X/X_1}{X_2/X_1} \cong X/X_2.$$

之前提到, Abel 范畴间的忠实满正合函子未必保持单对象, 因此无法使用嵌入定理将涉及单对象的定理直接推广至 Abel 范畴上. 我们马上应用 Abel 范畴中的基本同构定理来证明 Abel 范畴层面的 Jordan-Hölder 定理. 首先回顾一些基本术语. 若 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中非零对象 X 有长度为 $n \geq 1$ 的子对象严格链

$$0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n = X,$$

使得 $X_0, X_1/X_0, ..., X_n/X_{n-1}$ 均为单对象, 则称上述严格链为 X 的**合成列**. 与模范畴情形一样可定义有限长严格子对象链 (对应模范畴中的正规列) 的等价性. 称零对象或有合成列的非零对象为**有有限长的**.

Theorem 1.11 (Jordan-Hölder 定理)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 中有合成列的非零对象, 则 X 任意两个合成列等价, 即若 X 有合成列

$$0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n = X,$$
$$0 = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_{m-1} \subsetneq Y_m = X,$$

则 $n = m$ 且存在 $\sigma \in S_n$ 使得 $X_i/X_{i-1} \cong Y_{\sigma(i)}/Y_{\sigma(i)-1}$.

Proof. 对正整数 n 作归纳. 当 $n = 1$ 时, X 是单对象, 进而 $m = 1$, 结论成立. 假设结论在 $n-1(n \geq 2)$ 的情形成立. 设 j 是使得 $X_1 \subseteq Y_j$ 的最小正整数 (首先满足条件的正整数 j 存在, 例如取 $j = m$, 故最小正整数也存在), 设 $t : X_1 \to Y_j$ 是 monic 态, 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_1 \arrow[d, "t"] & & \\
0 \arrow[r] & Y_{j-1} \arrow[r, "l"] & Y_j \arrow[r, "p"] & Y_j/Y_{j-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为 X_1 不是 Y_{j-1} 的子对象, 所以 $pt \neq 0$. 于是由 X_1 和 Y_j/Y_{j-1} 均为单对象知 pt 是同构. 下面说明

$$0 \subsetneq X_2/X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n/X_1 = X/X_1$$

以及

$$0 \subsetneq \frac{Y_1 + X_1}{X_1} \subsetneq \frac{Y_2 + X_1}{X_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \frac{Y_{j-2} + X_1}{X_1} \subsetneq Y_j/X_1 \subsetneq Y_{j+1}/X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_m/X_1 = X/X_1$$

都是 X/X_1 的两个合成列, 一旦验证该断言, 则由归纳假设便得结论 (第二条合成列与 X 本身合成列的商因子相比缺少 $Y_j/Y_{j-1} \cong X_1$). 首先由第三同构定理易知 $0 \subsetneq X_2/X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n/X_1 = X/X_1$ 是非零对象 X/X_1 的合成列. 利用第二同构定理, 对每个 $1 \leq s \leq j-2$, 有 $(Y_s + X_1)/X_1 \cong Y_s/(X_1 \cap Y_s)$, 因为单对象 X_1 不是 Y_s 的子对象, 所以 $X_1 \cap Y_s = 0$, 进而 $(Y_s + X_1)/X_1 \cong Y_s$. 结合第三同构定理, 易知只需再验证同构

$$(Y_{j-1} + X_1)/X_1 \cong Y_j/X_1.$$

考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "1_{X_1}"'] & Y_{j-1} + X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \frac{Y_{j-1}+X_1}{X_1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & Y_j \arrow[r] & Y_j/X_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 β 由 [推论1.3] 导出, α 是 monic 态. 利用五引理可知 β 也是 monic 态, 如果能够说明 $Y_j/(Y_{j-1}+X_1)=0$, 则 β 的余核是零, 进而可得 β 是同构. 为此, 由第三同构定理, 有下述形式正合列

$$0 \longrightarrow \frac{Y_{j-1}+X_1}{Y_{j-1}} \xrightarrow{m} Y_j/Y_{j-1} \xrightarrow{e} \frac{Y_j}{Y_{j-1}+X_1} \longrightarrow 0,$$

因为 X_1 不是 Y_{j-1} 的子对象, 所以由第二同构定理得到 $(X_1+Y_{j-1})/Y_{j-1}$ 是非零对象. 结合 Y_j/Y_{j-1} 是单对象可知 m 为同构, 因此 $Y_j/(Y_{j-1}+X_1)=0$. 结合前面的讨论知结论成立. □

Remark. 前面已经提到, 因为 Abel 范畴间忠实满的正合函子不能保持单对象, 所以 Jordan-Hölder 定理只能在 Abel 范畴中直接验证. 嵌入函子甚至会把具有合成列的对象对应到没有合成列的对象.

在模范畴中, 非零模有合成列的充要条件是它既是 Noether 模又是 Artin 模. 下面将把这个事实在 Abel 范畴层面证明. 先回忆 Abel 范畴中 Noether 对象以及 Artin 对象的概念.

Definition 1.12 (Noether 对象与 Artin 对象)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 中对象. 若 X 任何子对象升链会稳定, 即对子对象升链 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \cdots$ 有某个正整数 N 使得 $X_N = X_{N+1} = \cdots$, 则称 X 是 **Noether 对象**. 若 X 任何子对象降链会稳定, 即对子对象降链 $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \cdots$ 有某个正整数 N 使得 $X_N = X_{N+1} = \cdots$, 则称 X 是 **Artin 对象**.

与模范畴类似, 有下面的基本观察. 细节处理上不同的是选择公理需要规避从真类中选取对象.

Lemma 1.13. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 中对象, Sub$X$ 是 X 所有子对象构成的类 (这里因为把子对象与它的一个代表元视作等同, 所以严格地说这里 Sub$X$ 是所有子对象的一个代表元类, 一般而言它不是集合). 如果 Sub$X$ 构成集合 (这一条件自然适用于任何具体的代数结构, 例如 X 是群、环、模), 那么
- 对象 X 是 Noether 对象的充要条件是 Sub$X$ 的任何非空子集有极大元.
- 对象 X 是 Artin 对象的充要条件是 Sub$X$ 的任何非空子集有极小元.

下面的命题在模范畴中也对应着经典结论, 它不需要在集合论层面加上额外约束.

Proposition 1.14. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X'' \longrightarrow 0$ 是正合列. 那么
- 对象 X 是 Noether 对象的充要条件是 X', X'' 是 Noether 对象.
- 对象 X 是 Artin 对象的充要条件是 X', X'' 是 Artin 对象.

Proof. 以 Noether' 情形为例. 如果 X 是 Noether 对象, 易知 X' 也是 Noether 对象. 假设 X'' 不是 Noether 对象, 则有子对象严格生链 $X''_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X''_n \subsetneq X''_{n+1} \subsetneq \cdots$. 对每个正整数 n, 设 $j_n : X''_n \to X''$ 是子对象 X_n 对应的 monic 态, $k''_n : X''_n \to X''_{n+1}$ 是使得 $j_{n+1}k''_n = j_n$ 的 monic 态, 且 k''_n 不是同构. 作 j_n 和 β 的拉回:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\beta"] & X'' \arrow[r] & 0 \\
 & & X_n \arrow[u, "t_n"] \arrow[r, "\beta_n"] & X''_n \arrow[u, "j_n"'] &
\end{tikzcd}$$

那么根据拉回的性质, 存在唯一的态射 $k_n : X_n \to X_{n+1}$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "\beta"] & X'' & & \\
 & & & X_{n+1} \arrow[ull, dashed, "t_{n+1}"'] & X''_{n+1} \arrow[ull, "j_{n+1}"'] \\
X_n \arrow[uur, "t_n"] \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[urrr, dashed, "k_n"] & X''_n \arrow[uur, "j_n"] \arrow[urrr, "k''_n"'] & & &
\end{tikzcd}$$

由此得到交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\beta"] & X'' \arrow[r] & 0 \\
 & & X_{n+1} \arrow[u, "t_{n+1}"] \arrow[r, "\beta_{n+1}"] & X''_{n+1} \arrow[u, "j_{n+1}"'] & \\
 & & X_n \arrow[u, "k_n"] \arrow[r, "\beta_n"] & X''_n \arrow[u, "k''_n"'] &
\end{tikzcd}$$

因为 β 是 epic 态, 所以利用拉回性质可得 β_n, β_{n+1} 都是 epic 态, 作它们的核可得下述交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\beta"] & X'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_{n+1} \arrow[u, dashed] \arrow[r, "s_{n+1}"] & X_{n+1} \arrow[u, "t_{n+1}"] \arrow[r, "\beta_{n+1}"] & X''_{n+1} \arrow[u, "j_{n+1}"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_n \arrow[u, dashed] \arrow[r, "s_n"] & X_n \arrow[u, "k_n"] \arrow[r, "\beta_n"] & X''_n \arrow[u, "k''_n"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

至此, 得到交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & X'_{n+2} \arrow[u] \arrow[r, "s_{n+2}"] & X_{n+2} \arrow[u] \arrow[r, "\beta_{n+2}"] & X''_{n+2} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_{n+1} \arrow[u] \arrow[r, "s_{n+1}"] & X_{n+1} \arrow[u, "k_{n+1}"] \arrow[r, "\beta_{n+1}"] & X''_{n+1} \arrow[u, "k''_{n+1}"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_n \arrow[u] \arrow[r, "s_n"] & X_n \arrow[u, "k_n"] \arrow[r, "\beta_n"] & X''_n \arrow[u, "k''_n"'] \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

其中每个 k''_n 不是同构. 因为 X 是 Noether 对象, 所以对充分大的正整数 n, 态射 k_n 都是同构, 进而由五引理知对充分大的正整数 n, k''_n 是同构, 得到矛盾. 至此得到 X 是 Noether 对象蕴含 X', X'' 是 Noether 对象.

反之, 设 X', X'' 是 Noether 对象. 假设 X 不是 Noether 对象, 则有子对象升链 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$, 设

$t_n : X_n \to X$ 是子对象对应的 monic 态. 对每个正整数 n, 作 α 和 t_n 的拉回：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\beta"] & X'' \arrow[r] & 0 \\
& X'_n \arrow[u, "l_n"] \arrow[r, "s_n"] & X_n \arrow[u, "t_n"] & &
\end{tikzcd}$$

再作 s_n 的余核得到下述交换图, 其中 k''_n 是诱导出的 monic 态.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\beta"] & X'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_n \arrow[u, "l_n"] \arrow[r, "s_n"] & X_n \arrow[u, "t_n"] \arrow[r, "\beta_n"] & X''_n \arrow[u, "k''_n"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

类似之前的讨论, 可诱导出下述形式的交换图, 其中每个 k_n 都是 monic 态.

$$\begin{tikzcd}
& \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & X'_{n+2} \arrow[u] \arrow[r, "s_{n+2}"] & X_{n+2} \arrow[u] \arrow[r, "\beta_{n+2}"] & X''_{n+2} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_{n+1} \arrow[u, "l_{n+1}"] \arrow[r, "s_{n+1}"] & X_{n+1} \arrow[u, "k_{n+1}"] \arrow[r, "\beta_{n+1}"] & X''_{n+1} \arrow[u, "k''_{n+1}"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_n \arrow[u, "l_n"] \arrow[r, "s_n"] & X_n \arrow[u, "k_n"] \arrow[r, "\beta_n"] & X''_n \arrow[u, "k''_n"'] \arrow[r] & 0 \\
& \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

利用 X' 是 Noether 对象, 对充分大的正整数 n, l_n 是同构, 于是利用五引理得到对充分大的正整数 n, k''_{n+1} 是 monic 态. 于是知对充分大的正整数 n 有 l_n, k''_n 都是同构, 再应用五引理得到此时 k_n 均为同构. 这意味着对充分大的正整数 n, 有 $X_n = X_{n+1} = \cdots$. 所以 X 也是 Noether 对象. □

于是我们可以给出非零对象有合成列的刻画.

Corollary 1.15. 设 X 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中非零对象, 满足子对象类 Sub$X$ 是集合. 那么 X 有合成列的充要条件是 X 既是 Noether 对象又是 Artin 对象.

Proof. 充分性：对 Sub$X$ 所有非空子集构成的集合应用选择公理, 对每个非空子集都指定一个元素. 如果 X 是单对象, 结论直接成立. 现设 X 有非零真子对象, 那么根据 X 的 Artin 性质, X 所有非零真子对象构成的集合有极小元, 那么可对满足条件的极小元集根据之前的指定得到对象 X_1, 它明显是单对象. 因为 X 不是单对象, 所以存在真包含 X_1 的对象, 即集合 $\{Y \in \mathrm{Sub}X | X_1 \subsetneq Y\}$ 非空, 进而可选取先前指定的极小元 $X_2 \subseteq X$, 易验证 X_2/X_1 是单对象. 如果 $X = X_2$, 结论成立, 否则重复上述讨论. 因为 X 是 Noether 对象, 所以在有限步讨论后便可得到 X 的合成列.

必要性：设 X 有合成列 $0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n = X$, 这里 $X_0, X_1/X_0, ..., X_n/X_{n-1}$ 均为单对象对每个正整数 $1 \leq k \leq n$, 有正合列 $0 \longrightarrow X_{k-1} \longrightarrow X_k \longrightarrow X_k/X_{k-1} \longrightarrow 0$. 首先 X_1/X_0 是单

对象, 所以既是 Noether 对象又是 Artin 对象, 从而应用 [命题1.17] 得 X_1 既是 Noether 对象又是 Artin 对象. 重复应用 [命题1.17], 归纳地便知 $X = X_n$ 既是 Noether 对象又是 Artin 对象. $\square$

Remark. 如果 X 是 Y 的子对象, 那么 X 的子对象全体可天然嵌入 Y 的子对象全体, 进而知 $\mathrm{Sub}Y$ 是集合蕴含 $\mathrm{Sub}X$ 是集合. Y 任何商对象都形如 Y/X, 对 Y 的任何包含 X 的子对象 Y', 通过下图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y/X \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[u, "1_x"] & Y' \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & Y'/X \arrow[r] \arrow[u, dashed, "k"] & 0
\end{tikzcd}$$

可得映射 $\Theta : \{Y' \in \mathrm{Sub}Y | X \subseteq Y'\} \to \mathrm{Sub}Y/X, Y' \mapsto Y'/X$(严格地说, 这里应当是把作为等价类的子对象映射到作为等价类的子对象). 对任何 Y/X 的子对象 $\gamma : C \to Y/X$, 可通过作 γ 与 $p : Y \to Y/X$ 的拉回证明 Θ 是满射 (并且如果 Y/X 有子对象 C, C' 满足 $C \subseteq C'$, 存在 Y 的包含 X 的子对象 S, S' 使得 $S \subseteq S'$ 且 $\Theta(S) = C, \Theta(S') = C'$). 故只要一个对象的子对象类构成集合, 那么它的子对象和商对象也满足这一性质.

Definition 1.16. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 中有有限长对象. 若 $X = 0$, 定义其**长度**为零, 否则定义其长度为 X 合成列的长度. 记对象 X 的长度为 $l(X)$.

Corollary 1.17. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X'' \longrightarrow 0$ 是正合列, 并设 $\mathrm{Sub}X$ 是集合. 那么 X 有有限长的充要条件是 X' 和 X'' 有有限长. 且这时 $l(X) = l(X') + l(X'')$

Corollary 1.18. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, X 是 $\mathcal{A}$ 中有合成列的非零对象满足 $\mathrm{Sub}X$ 是集合. 那么 X 可以分解为有限个不可分对象的直和.

Proof. 对 $l(X)$ 作归纳. 如果 $l(X) = 1$, 那么 X 是单对象, 结论成立. 假设结论对长度不超过 $n-1 (n \geq 2)$ 的非零对象成立. 那么当 $l(X) = n$ 时. 如果 X 自身不可分, 结论成立. 如果 X 可分, 设 $X \cong X_1 \oplus X_2$ 是非零子对象的直和, 那么 X_1, X_2 是有有限长的非零对象并且有 $l(X) = l(X_1) + l(X_2)$. 进而对 X_1, X_2 应用归纳假设可得 X_1, X_2 可分解为有限多个不可分对象的直和. 因此 X 也是有限个不可分对象的直和. $\square$

参考文献

[Fre64] Peter J Freyd. *Abelian categories*, volume 1964. Harper & Row New York, 1964.

[Mit64] Barry Mitchell. The full imbedding theorem. *American Journal of Mathematics*, 86(3):619–637, 1964.

[Ste12] Bo Stenström. *Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory*, volume 217. Springer Science & Business Media, 2012.