



Modèle simple d'une EDO pour le poumon

Par

Moritz von Siemens, Colin Duilhé et Théo Crochemar

Table des matières

1	Introduction au problème	2
1.1	Mise en place de l'EDO et des paramètres	2
1.2	Définition de la fonction P	2
1.3	Distinction entre le modèle linéaire et non linéaire	2
2	Étude mathématique du modèle linéaire	3
2.1	Calcul de la solution exacte	3
2.2	Changement de la condition initiale dans le cas des problèmes respiratoires	4
2.3	Visualisation numérique	4
3	Approche numérique au modèle linéaire	5
3.1	Explication du schéma utilisé	5
3.2	Approximation dans le cas de la respiration normale	6
3.3	Approximation dans le cas des problèmes respiratoires	8
4	Modèle non linéaire	9
4.1	Cadre mathématique du modèle non linéaire	9
4.2	Application du schéma numérique au modèle non-linéaire	9
5	Conclusion	12
6	Annexe	13
6.1	Bibliographie	13
6.2	Code	13

1 Introduction au problème

1.1 Mise en place de l'EDO et des paramètres

La respiration est un des principaux automatismes de survie de l'être humain. Lors de l'inspiration et de l'expiration, le poumon se gonfle puis se dégonfle. Cette évolution du volume pulmonaire est donc un indicateur de santé et du bon fonctionnement des réflexes physiologiques, ainsi l'étudier permet d'obtenir des informations importantes sur le fonctionnement des organes vitaux. Il est possible de modéliser cette évolution par des équations différentielles. En particulier, des irrégularités peuvent être mieux étudiées. En modifiant les paramètres correspondant à la pression lors de la contraction du diaphragme ou à la résistance de l'arbre bronchique, il est possible de simuler différentes situations médicales

On souhaite modéliser l'évolution du volume pulmonaire grâce à l'équation différentielle.

$$RV' + \phi(V) = -P(t) \quad (1)$$

Cette équation définit un problème de Cauchy :

$$(PC) \quad \begin{cases} V'(t) &= f(t, V(t)), \\ V(t_0) &= V_0. \end{cases} \quad (2)$$

La condition initiale varie si l'on se retrouve dans une situation de respiration normale ou d'un problème respiratoire.

1. $f(t, v) = \frac{-\phi(V) - P(t)}{R}$
2. R correspond à la résistance de l'arbre bronchique
3. ϕ est la fonction qui décrit le comportement du volume pulmonaire
4. P est la fonction qui correspond au temps d'inspiration et d'expiration

1.2 Définition de la fonction P

Comme la respiration est périodique, la fonction P l'est aussi sur son domaine de définition $[0, T]$. Le comportement de P varie si l'on inspire ou expire. Pour cela, on fixe T_{insp} et on définit la fonction P par :

$$P(t) = \begin{cases} P_{insp} & \text{si } t < T_{insp}. \\ P_{exp} & \text{si } t \geq T_{insp}. \end{cases} \quad (3)$$

1.3 Distinction entre le modèle linéaire et non linéaire

On reconnaît donc que l'équation différentielle (1) dépend de la fonction ϕ car l'on connaît R et P . On distingue un cas où la fonction ϕ est linéaire et un autre où la fonction ϕ est non linéaire. Si ϕ est linéaire, alors on a

$$\phi(V) = E(V - V_{FRC}) \quad (4)$$

où V_{FRC} correspond au volume pulmonaire au repos et E à l'élastance, rapport entre la variation de pression et la variation de volume de la paroi pulmonaire.

L'intérêt du modèle non-linéaire est de pouvoir prendre en compte plus de données initiales afin de pouvoir fournir une solution plus individualisée selon les différents profils

Si ϕ n'est pas linéaire, alors on a

$$\phi(V) = \lambda \left(\frac{1}{V_{TLC} - V} - \frac{1}{V - V_{RV}} - \frac{1}{V_{TLC} - V_{FRC}} + \frac{1}{V_{FRC} - V_{RV}} \right) \quad (5)$$

où V_{TLC} correspond au volume maximal du poumon et V_{RV} à son volume minimal. De plus, on définit la constante λ par

$$\lambda = E \left(\frac{1}{(V_{TLC} - V_{FRC})^2} + \frac{1}{(V_{FRC} - V_{RV})^2} \right)^{-1}$$

2 Étude mathématique du modèle linéaire

2.1 Calcul de la solution exacte

On résoud l'équation (1) en prenant ϕ définie de manière linéaire.

$$\begin{aligned} RV' + \phi(V) &= -P(t) \\ \Leftrightarrow RV' + E(V - V_{FRC}) &= -P(t) \\ \Leftrightarrow RV' &= -EV + EV_{FRC} - P(t) \\ \Leftrightarrow V' &= -\frac{E}{R}V + \frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P(t)}{R} \\ \Leftrightarrow V' + \frac{E}{R}V &= \frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P(t)}{R} \end{aligned}$$

On reconnaît une EDO de la forme

$$V' + a(t)V = g(t) \text{ avec } a(t) = \frac{E}{R} \text{ et } g(t) = \frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P(t)}{R}$$

On a l'ensemble de solutions :

$$S = \{V : t \mapsto Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^t g(s)e^{A(s)} ds\} \quad (6)$$

avec $t \in [0, T]$ et A une primitive de a .

Comme on est de plus dans le cas où la respiration étudiée est normale, on a $V(0) = V_{FRC}$

$$\text{Or } V_0 = Ce^{-A(0)} \text{ et } a(t) = \frac{E}{R} \text{ donc } A(t) = \frac{E}{R}t$$

$$\Leftrightarrow V_0 = Ce^{\frac{E}{R}*0}$$

$$\Leftrightarrow V_0 = C$$

$$\Leftrightarrow C = V_{FRC}$$

On a donc la solution exacte

$$V : t \mapsto V_{FRC}e^{-\frac{E}{R}t} + e^{-\frac{E}{R}t} \int_0^t \left(\frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P(s)}{R}\right)e^{\frac{E}{R}s} ds \quad (7)$$

Si $t \in [0, T_{insp}]$, alors :

$$V(t) = V_{FRC}e^{-\frac{E}{R}t} + e^{-\frac{E}{R}t} \int_0^t \left(\frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P(s)}{R}\right)e^{\frac{E}{R}s} ds$$

Or pour $s \in [0, T_{insp}]$, on a $P(s) = P_{insp}$

Ainsi on a :

$$V(t) = V_{FRC}e^{-\frac{E}{R}t} + e^{-\frac{E}{R}t} \left(\frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P_{insp}}{R}\right) \int_0^t e^{\frac{E}{R}s} ds$$

Ce qui nous donne :

$$V(t) = V_{FRC}e^{-\frac{E}{R}t} + e^{-\frac{E}{R}t} \left(\frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P_{insp}}{R}\right) \left(\frac{R}{E}(e^{\frac{E}{R}t} - 1)\right) \quad (8)$$

Pour $t \in [T_{insp}, T]$, on a :

$$V(t) = V_{FRC}e^{-\frac{E}{R}t} + e^{-\frac{E}{R}t} \left(\int_0^{T_{insp}} \left(\frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P(s)}{R}\right)e^{\frac{E}{R}s} ds + \int_{T_{insp}}^t \left(\frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P(s)}{R}\right)e^{\frac{E}{R}s} ds\right)$$

Pour $s \in [T_{insp}, T]$, on a $P(s) = P_{exp}$

Ainsi :

$$V(t) = V_{FRC}e^{-\frac{E}{R}t} + e^{-\frac{E}{R}t} \left(\left(\frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P_{insp}}{R}\right) \left(\frac{R}{E}(e^{\frac{E}{R}T_{insp}} - 1)\right) + \left(\frac{E}{R}V_{FRC} - \frac{P_{exp}}{R}\right) \left(\frac{R}{E}(e^{\frac{E}{R}t} - e^{\frac{E}{R}T_{insp}})\right)\right) \quad (9)$$

2.2 Changement de la condition initiale dans le cas des problèmes respiratoires

Contrairement à la situation de respiration normale, on n'a pas $V_0 = V_{FRC}$ mais V_0 est défini comme le point fixe de ϕ :

$$\begin{aligned} V_0 &= \phi(V_0) \text{ et } C = V_0 \\ \Leftrightarrow V_0 &= E(V_0 - V_{FRC}) \\ \Leftrightarrow V_0 - EV_0 &= -EV_{FRC} \\ \Leftrightarrow V_0(1 - E) &= -EV_{FRC} \\ \Leftrightarrow V_0 &= \frac{EV_{FRC}}{E - 1} \end{aligned}$$

Donc

$$C = \frac{EV_{FRC}}{E - 1}$$

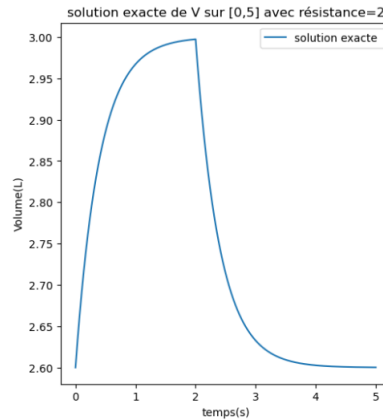
On a donc la solution exacte

$$V : t \mapsto \frac{EV_{FRC}}{E - 1} e^{-\frac{E}{R}t} + e^{-\frac{E}{R}t} \int_0^t \left(\frac{E}{R} V_{FRC} - \frac{P(s)}{R} \right) e^{\frac{E}{R}s} ds \quad (10)$$

2.3 Visualisation numérique

Les paramètres utilisés pour coder la solution exacte dans le cas normal sont :

1. $E = 5$
2. $V_{FRC} = 2.6L$
3. $R = 2$

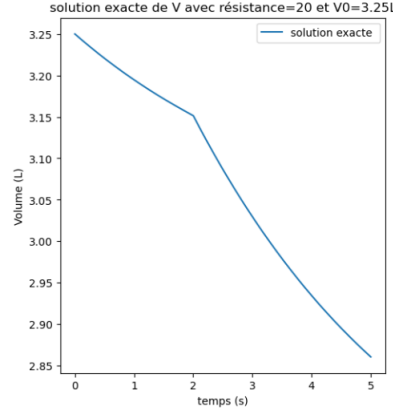


On observe que le volume pulmonaire augmente fortement lors de l'inspiration, tout de même la fonction semble concave, le volume pulmonaire augmente de moins en moins. Au contraire, lors de l'expiration, la fonction est convexe : le poumon perd beaucoup en volume avant de se restabiliser et tendre vers V_0 à la fin du cycle. Ainsi, dans le cas de la respiration normale, la fonction qui modélise le volume pulmonaire semble périodique. En effet, sauf en situation de maladies chroniques ou d'intervention consciente de l'être humain, la respiration est un réflexe musculaire périodique.

Les paramètres utilisés pour coder la solution exacte dans le cas normal sont :

1. $E = 5$
2. $V_{FRC} = 2.6L$ donc $V_0 = 3.25L$

3. $R = 20$



On étudie le cas d'une crise d'asthme, qui se présente par le fait que V_0 est le point fixe de ϕ et que $R=20$. Ainsi, la courbe est décroissante et convexe sur toute la période. Néanmoins, on constate un pic au moment P_{insp} , avant une deuxième chute du volume pulmonaire plus prononcée. L'article "Childhood wheezing phenotypes influence asthma, lung function and exhaled nitric oxide fraction in adolescence" explique que des problèmes d'expirations, donc un volume pulmonaire bien trop élevé, sont la raison d'une respiration sifflante, or celle-ci est un des symptômes principaux de l'asthme. Le graphe montre donc une situation réelle en cas de crise d'asthme car le volume chute mais reste supérieur au volume de référence.

3 Approche numérique au modèle linéaire

3.1 Explication du schéma utilisé

Afin de confirmer le modèle théorique, on modélise grâce à Python une solution approchée. Plusieurs méthodes sont possibles pour approcher une solution sur un intervalle, nous avons choisi la méthode de Cranck-Nicholson à un pas via la méthode du point milieu. On peut utiliser ce schéma car le problème est dans les conditions d'un problème de Cauchy. Le modèle de Cranck-Nicholson prend en argument :

- t_0 : l'instant initial
- T : la longueur de l'intervalle de temps $[t_0, t_0+T]$
- V_0 : la donnée initiale
- N : le nombre d'itérations
- h : le pas de temps qu'on prendra égal à T/N
- f : la fonction définissant le second membre de l'EDO
- on définit une sub-division de $[t_0, t_0 + T]$ donnée par les $N + 1$ points $t_n = t_0 + nh$, $n = 0, \dots, N$;
- on définit des valeurs approchées V^0, V^1, \dots, V^N de la solution exacte $t \mapsto V(t)$ de (PC) aux points t_0, t_1, \dots, t_N par le schéma suivant :

$$\begin{cases} V^0 = V_0, \\ V^{n+1} = V^n + \frac{h}{2}(f(t_n, V^n) + f(t_{n+1}, V^{n+1})) \end{cases}$$

Ce schéma est implicite à un pas, cela signifie qu'il utilise la valeur précédente afin de calculer les solutions suivantes. Pour approcher la valeur de V^{n+1} on utilise la méthode du point-milieu où l'on écrit :

$$\begin{cases} V^{n+1} = V^n + h\phi(t_n, V^n, h) \\ \phi(t_n, V^n, h) = f\left(t_n + \frac{h}{2}, V^n + \frac{h}{2}f(t_n, V^n)\right) \end{cases}$$

Python permet de modéliser un grand nombre d'itérations afin d'avoir un pas de temps très petit pour obtenir l'approximation la plus précise possible.

Voici le code mis en place pour appliquer cette méthode

```
def mon_schema(t0,T,y0,N,f):
    """
    fonction qui prend en arguments :
    t0 : l'instant initial
    T: la longueur de l'intervalle de temps [t0,t0+T]
    y0 : la donnée initiale
    h : le pas de temps
    N : le nombre d'itérations
    f : la fonction définissant le second membre de l'EDO

    -----
    schéma de Cranck-Nicholson à un pas via la méthode du point-milieu

    y^0=y0
    y^{n+1} = y^n + h/2 ( f(tn,y^n) + f(tn+1,y^{n+1}) )
    où y^{n+1} = y^n + hf(tn + h/2, y^n + h/2 f(tn,y^n) )

    -----

    fonction qui renvoie:
    t: un vecteur de la subdivision du temps
    y: la solution approchée

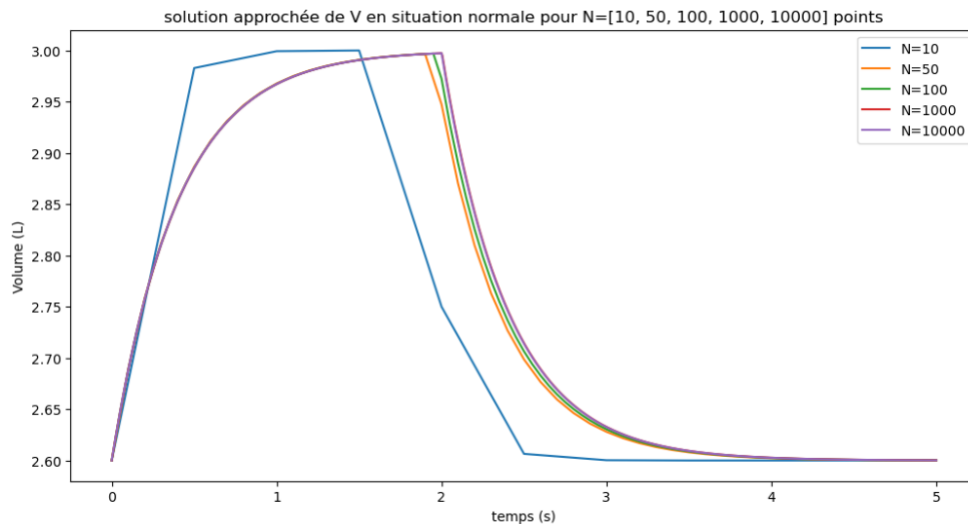
    """
    h = T/N
    t = [t0]
    y = [y0]
    for n in range(N):
        tn = t[-1]
        yn = y[-1]
        tn1 = tn + h
        yn1_bar = yn + h*f(tn+(h/2), yn+(h/2)*f(tn,yn))
        yn1 = yn + (h/2)*(f(tn, yn) + f(tn1, yn1_bar))
        t.append(tn1)
        y.append(yn1)
    t = np.array(t)
    y = np.array(y)
    return t, y
```

3.2 Approximation dans le cas de la respiration normale

Après avoir mis en place notre schéma, on peut maintenant l'appliquer au problème en gardant les mêmes conditions initiales :

- le temps initial est fixé en 0 et le temps final est à 5 secondes
- $R = 2$
- La durée de l'inspiration est de 2s et la durée de l'expiration est de 3s secondes
- Pour la définition de P , on prend $P_{insp} = -2$ et $P_{exp} = 0$
- On prend $E=5$ et $V_0 = V_{FRC} = 2.6L$
- Enfin on prend comme fonction de second membre $\phi(V) = 5(V-2.6)$

Il reste à choisir le nombre de points, voici le graphique de comparaisons pour les cas $N = 10, 50, 100, 1\,000$ et $10\,000$.



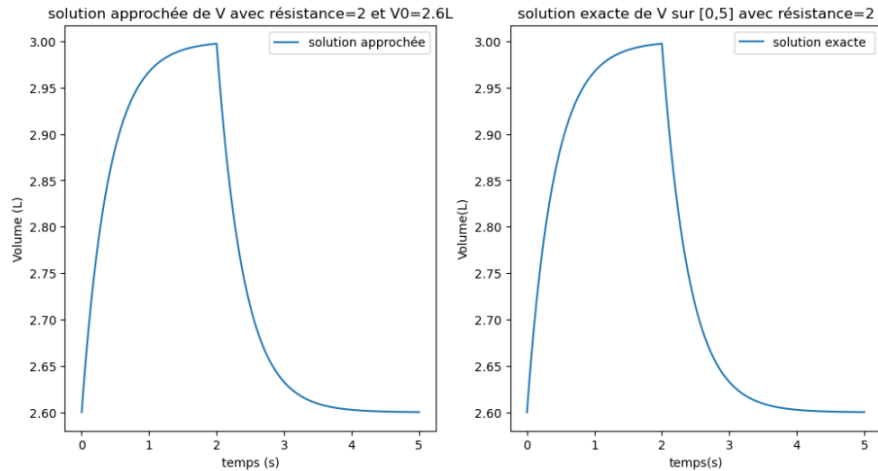
On observe que pour le cas $N = 10$, un cas calculable sans ordinateur, on ne peut rien conclure du modèle hormis deviner qu'il y a une phase d'inspiration et d'expiration.

Le cas $N = 50$ est le premier modèle qui ressemble au graphique de la solution exacte, cependant on observe que le pas de temps est trop grand car le volume des poumons atteint son maximum un peu avant $t = 2$. Il faut continuer à tester avec un pas de temps plus petit.

Le cas $N = 100$ est lui-même inférieur au cas $N = 1\,000$.

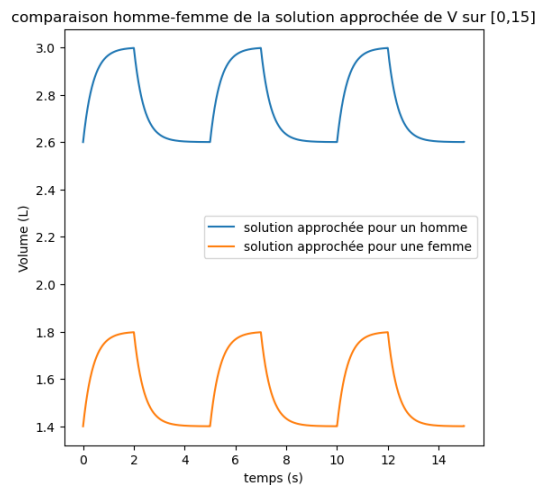
Le cas $N = 1\,000$ peut être considéré comme satisfaisant, en effet il n'y a pas de différence à l'oeil entre le graphique $N=1\,000$ et celui pour $N = 10\,000$. On peut conclure que le cas $N = 1\,000$ est suffisant pour le comparer à la solution exacte. Cependant rien ne nous empêche de prendre la valeur de N la plus élevée possible, hormis la puissance de notre ordinateur. On utilisera donc $N = 10\,000$ pour le reste des graphiques car notre ordinateur nous le permet.

Après avoir terminé de fixer nos conditions initiales, on obtient ainsi un graphique que l'on peut comparer à la solution exacte :



On observe que le modèle approché est une bonne approximation du modèle exact. En effet les deux graphes atteignent leurs maximum en $t = 2s$ et sont identiques lorsqu'on les superpose. Cette comparaison dans le cas le plus simple permet d'avoir confiance dans le modèle approché dans les cas plus compliqués où l'intervention de Python facilitera grandement les calculs.

On peut prolonger cette solution sur un intervalle plus grand afin d'observer les périodes. De plus on peut également comparer le volume pulmonaire entre un homme et une femme en changeant la valeur du volume de référence V_{FRC} en gardant 2.6L pour les hommes et en prenant 1.4L pour les femmes (cf. science.lu, cf. annexe 1.4)



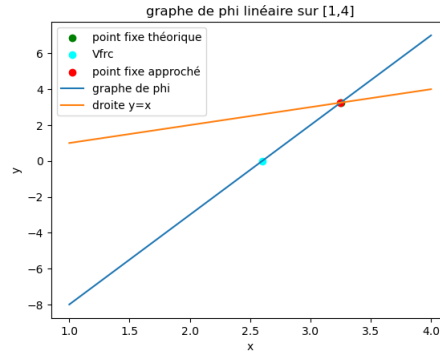
on observe bien une solution périodique comme souhaitée. On obtient bien également un écart entre le volume respiratoire chez les hommes et chez les femmes. Néanmoins les deux courbes suivent les mêmes tendances. Or l'anatomie masculine et féminine ne se manifeste pas uniquement par une différence du volume pulmonaire de référence et la respiration ne devrait pas être si parallèle. On peut donc commencer à douter de l'exactitude du modèle linéaire.

3.3 Approximation dans le cas des problèmes respiratoires

Pour le cas du crise d'asthme on doit changer plusieurs paramètres :

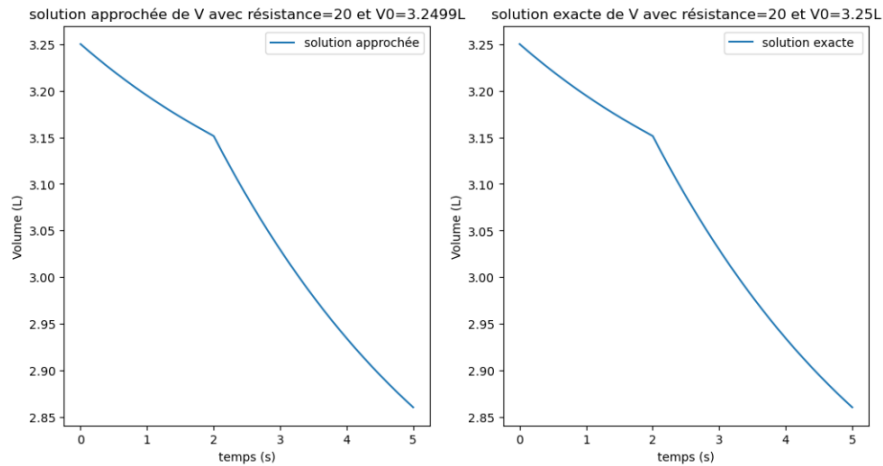
- R passe de 2 à 20
- il faut calculer le point fixe de ϕ

pour faire cela de manière numérique, on prend 10 000 points notés x_i compris entre 1 et 4 et on compare l'écart entre x_i et $\phi(x_i)$ en gardant le x_i avec la plus faible différence. Nous avons calculé la valeur approchée afin d'enlever toute dépendance à un modèle théorique mathématique.

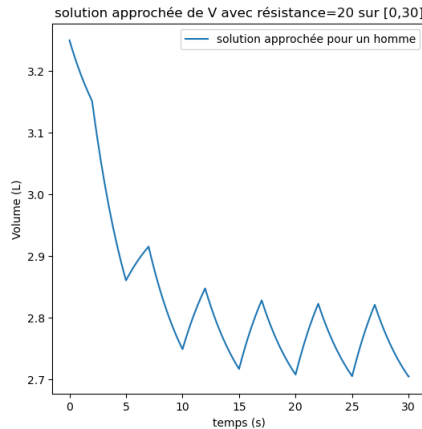


L'écart étant très faible, on pourra garder cette méthode dans les prochains cas.

On peut donc appliquer la méthode avec les nouvelles conditions initiales :



On observe comme précédemment une chute progressive du volume pendant deux secondes puis une chute drastique qui donne néanmoins un volume supérieur à V_{FRC} . L'intérêt du modèle numérique est de pouvoir facilement prolonger la solution approchée afin d'observer comment se comporte le volume après plusieurs cycles de respiration.



On observe grâce au prolongement que la respiration redevient périodique à partir de 20 secondes. Cependant cette période est différente de celle observée dans le cas normal. En effet les phases de la respiration ont des changements de volume abrupts, de plus le volume n'arrive pas à redescendre jusqu'à son volume de référence V_{FRC} .

Nous avons jugé inutile de représenter le modèle féminin car il ne possède aucune différence au modèle masculin hormis un volume de poumon inférieur.

4 Modèle non linéaire

4.1 Cadre mathématique du modèle non linéaire

On étudie le cas où ϕ est une fonction non-linéaire (5). Cette définition de ϕ ne permet pas de trouver une solution exacte rapidement sans risquer de nombreuses erreurs de calculs, on va plutôt se rapporter à des solutions approchées de l'EDO et conclure à base de ces graphiques.

Étudions les variations de ϕ lors de la définition non-linéaire.

$$\begin{aligned}\phi'(V) &= \lambda \left(\frac{0 - (-1)}{(V_{TLC} - V)^2} - \frac{-1}{(V - V_{RV})^2} \right) \\ \Leftrightarrow \phi'(V) &= \lambda \left(\frac{1}{(V_{TLC} - V)^2} + \frac{1}{(V - V_{RV})^2} \right)\end{aligned}$$

On a :

$$\lambda = E \left(\frac{1}{(V_{TLC} - V_{FRC})^2} + \frac{1}{(V_{FRC} - V_{RV})^2} \right)^{-1} \geq 0$$

et

$$\frac{1}{(V_{TLC} - V)^2} + \frac{1}{(V - V_{RV})^2} \geq 0$$

donc $\phi'(V)$ est positive donc ϕ est une fonction croissante sur $[0, T]$. Comme l'EDO (1) peut être définie par $V'(t) = f(t, V(t))$, on étudie le signe de f .

$$f(t, V(t)) = \frac{-\phi(V(t)) - P(t)}{R}$$

On a $R \geq 0$ et $-\phi(V) \leq 0$. De plus $P(t)$ croissante donc $-P(t)$ décroissante. Ainsi f est une fonction décroissante. L'allure de $V'(t)$ est donc opposée à celle de $V(t)$. Donc lorsque V croissante, V' est décroissante donc V concave et lorsque V décroissante, V' est croissante et V concave.

De plus, comme ϕ est de classe C^1 sur $]V_R, V_{TLC}[$ et P C^1 , on a f C^1 , donc lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Donc le problème de Cauchy admet une unique solution maximale que l'on peut numériquement approximer.

4.2 Application du schéma numérique au modèle non-linéaire

Le schéma numérique devient presque essentiel à partir de ce moment. En effet l'intérêt du modèle non-linéaire est d'étudier des profils variés en modifiant plus de paramètres sans risquer de nombreuses erreurs de calculs.

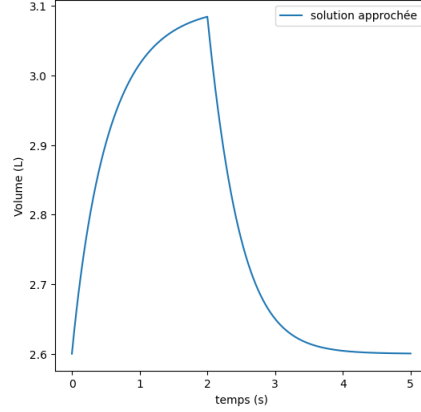
On l'applique au profil d'un homme moyen pour le comparer au graphe du modèle linéaire. Les conditions initiales étant :

- $E=5$
- $R=2$
- $V_{FRC}=2.6L$

en rajoutant les nouvelles données trouvées dans Science.Lu (cf annexe 1.3) d'un homme moyen :

- $V_{RV}= 1.2L$
- $V_{TLC} = 6 L$

solution approchée de V pour le modèle non-linéaire dans le cas de respiration normale, $V_0=2.6L$

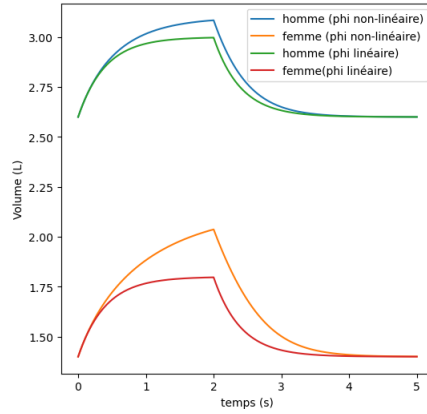


On observe une similitude dans la forme du graphe cependant on observe que le maximum atteint est plus élevé que précédemment. Cela confirme que le modèle précédent était trop général d'où l'intérêt d'introduire un nouveau modèle.

Nous pouvons à nouveau regarder la différence Homme-Femme sur ce nouveau modèle en le comparant avec le modèle linéaire. Pour cela, on change quelques paramètres (cf. annexe 1.4) :

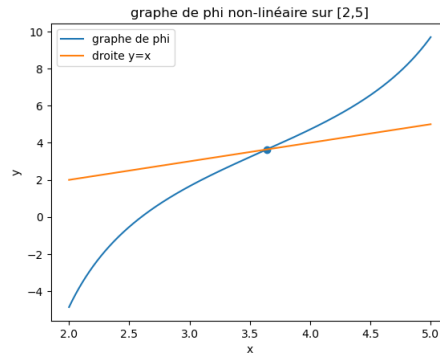
- $V_{FRC} = 1.4L$
- $V_{RV} = 0.7L$
- $V_{TLC} = 4.2L$

comparaison des solutions approchées de V pour les différents modèles dans le cas d'une respiration normale

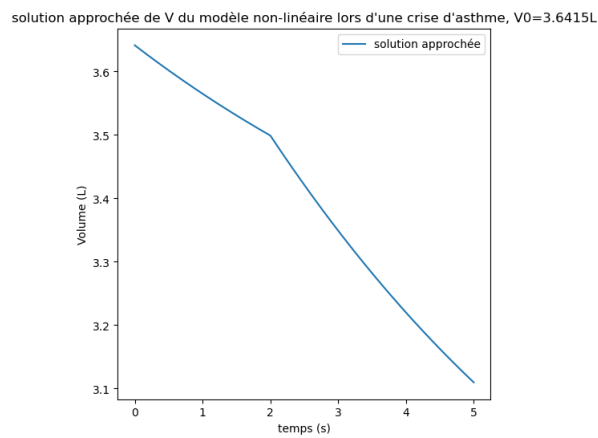


Sur ce graphe, on voit que la solution linéaire ne prend pas en compte assez de paramètres pour permettre une modélisation exacte pour l'ensemble de la population. En effet il y a une légère amélioration sur le modèle masculin, cependant l'ajout de données fait une vraie différence sur le modèle féminin. Dans ce cas, le volume pulmonaire monte maintenant jusqu'à de plus de 2L alors qu'il atteignait précédemment un plateau à 1,75L. La comparaison homme/femme est aussi bien plus intéressante, en effet pour les hommes la variation entre le volume à la fin de l'inspiration et de l'expiration est en dessous de 0.5L pendant que pour les femmes cette variation est bien au dessus de 0.5L.

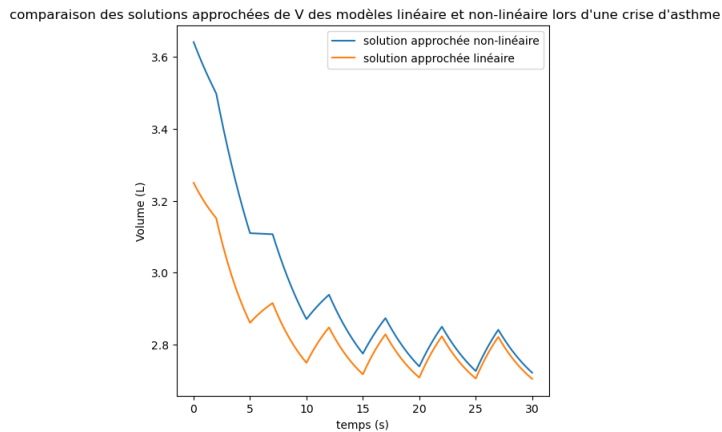
En appliquant cela au cas de respiration anormale, l'approximation numérique de V_0 donne un point fixe d'environ 3.64, bien plus haut que le point fixe calculé dans le cas linéaire, qui était de 3.26.



ainsi en remettant $R=20$ on obtient :



On observe comme vu précédemment que les valeurs du volume pulmonaire sont bien plus élevées que dans le modèle linéaire. On peut ensuite prolonger la solution comme précédemment en la comparant avec la solution linéaire



On observe que la chute du volume pulmonaire est bien plus extrême dans le cas non-linéaire. En effet, comme V_0 est plus grand, et qu'une crise d'asthme se manifeste entre autres par des problèmes d'expirations et un volume pulmonaire trop élevé, le modèle non-linéaire semble représenter le cas d'une crise plus extrême en pouvant accentuer les problèmes avec les paramètres additionnels.

De plus, on constate que la courbe obtenue par le modèle non-linéaire nécessite deux cycles respiratoires supplémentaires pour retrouver une allure périodique comme la courbe obtenue sous le modèle linéaire, seulement à partir de $t=25$ secondes. Ceci souligne la complexité supérieure du modèle non linéaire et confirme l'importance de la comparaison des deux modèles au lieu de prendre le choix plus simple du modèle linéaire. Le modèle non linéaire permet donc un encadrement plus sûr d'un retour vers une situation normale après une crise d'asthme. Il permet aussi de mieux étudier les points forts de cette crise, V_0 étant le moment où le volume pulmonaire est le plus élevé donc le sujet d'étude le plus en danger.

5 Conclusion

Il est donc possible de modéliser l'évolution du volume pulmonaire grâce à une équation différentielle. L'équation différentielle donnée permet grâce à différents paramètres de simuler la respiration humaine. On utilise deux modèles qui présentent différents avantages. Dans les deux cas, une solution existe et l'on peut émettre une conjecture concernant l'allure des courbes obtenues : lorsque la fonction V calculée est croissante, elle est concave et lorsqu'elle est décroissante, elle est convexe.

Dans le cas linéaire, on a pu trouver des solutions exactes et approchées à l'équation différentielle qui semblaient simuler la respiration humaine et dont les valeurs étaient cohérentes avec les différents paramètres trouvés au fil de la recherche. Le calcul possible d'une solution exacte permet de vérifier la cohérence du schéma utilisé pour la solution approchée. De plus, en cas normal, la solution exacte est périodique sur le temps d'un cycle respiratoire.

Néanmoins, le modèle linéaire présente aussi certaines faiblesses. Il prend en compte un nombre limité de paramètres. Comme vu lors de la comparaison des comportements respiratoires hommes/femmes, le modèle linéaire distingue l'activité de ces deux appareils respiratoires de dimensions totalement différentes seulement par un volume pulmonaire plus bas, les deux courbes ont des allures identiques. De plus, lorsque l'on prolonge la solution en cas de crise d'asthme sur plusieurs périodes, le modèle a tendance à revenir vers une situation calme rapidement mais la respiration "calmée" est bien moins ronde et symétrique que la respiration en cas normal.

Au contraire, le modèle non-linéaire met en valeur non seulement la différence de volume pulmonaire entre les hommes et les femmes, mais les courbes approchées obtenues sont bien plus distinguables. On constate que la différence en cas de respiration normale entre les deux modèles est bien plus grande pour les hommes. Cela permet de supposer que le modèle linéaire est seulement exact et cohérent lorsque l'on souhaite modéliser le cycle respiratoire d'un homme. De plus, la différence hommes/femmes ne se résume pas seulement au volume pulmonaire, mais la courbe est moins concave en cas de croissance et plus convexe en cas de décroissance pour les femmes.

Mais l'étude la plus intéressante médicalement se fait entre le comportement de la solution approchée en cas de crise d'asthme sous les deux modèles lorsque l'on étudie les courbes sur plus d'un cycle respiratoire. En effet, en cas de crise d'asthme, deux indicateurs sont clés : le volume pulmonaire maximum atteint (en cas de difficultés d'expiration, le poumon augmente en volume ce qui donne un sentiment d'asphyxie) et le temps pour revenir à une situation de respiration contrôlée et périodique. Ces deux éléments sont différents pour le modèle non-linéaire. En effet, le volume pulmonaire maximal atteint est bien plus grand car le point fixe de ϕ est dépendant des paramètres additionnels ajoutés. De plus, deux cycles respiratoires additionnels sont requis pour un retour en situation de respiration calme qui est toujours plus saccadée qu'en situation de respiration normale. Dans le modèle linéaire, le retour vers une situation calme donne une courbe qui suit les mêmes vagues tendances que la solution calculée en situation normale. Dans le modèle non-linéaire, la solution en situation normale est moins convexe et concave et plus coupée au début de l'expiration, ce qui est plus proche de la situation calme en fin de crise d'asthme, les deux résultats sont plus cohérents. Prendre en compte des paramètres additionnels permet donc de rendre le modèle bien plus précis et cette précision est essentielle dans un cadre médical, surtout lors de crises de santé où une prévision exacte du comportement permet d'identifier de potentiels dangers ou débuts d'amélioration.

Le modèle non-linéaire est donc le modèle le plus complexe mais préférable, car il permet de personnaliser les paramètres pour une simulation exacte indépendamment de la santé, du sexe ou de l'anatomie du patient potentiel.

6 Annexe

6.1 Bibliographie

- 1- <https://erj.ersjournals.com/content/47/2/510>
- 2- <https://www.le-scope.com/pages/jeudi-ca-je-dis-rien/les-poumons-contiennent-toujours-au-minimum-1l-d-air.html>
- 3- <https://www.msmanuals.com/fr/professional/troubles-pulmonaires/>
- 4- <https://www.science.lu/fr/corps-humain-volume-pulmonaire/combien-dair-nos-poumons-peuvent-ils-contenir>
- 5- <https://des-pneumo.org/wp-content/uploads/2024/02/EFR-Mesure-des-volumes-statiques-DES-pneumo-SOCLE-TG-2024.pdf>

6.2 Code

- 1- code du schéma de Cranck-Nicholson

```
def mon_schema(t0,T,y0,N,f):
    """
    fonction qui prend en arguments :
    t0 : l'instant initial
    T: la longueur de l'intervalle de temps [t0,t0+T]
    y0 : la donnée initiale
    h : le pas de temps
    N : le nombre d'itérations
    f : la fonction définissant le second membre de l'EDO

    -----
    schéma de Cranck-Nicholson à un pas via la méthode du point-milieu

    y0=y0
    y^n+1 = y^n + h/2 ( f(tn,y^n) + f(tn+1,y^n+1) )
    où y^n+1 = y^n + hf(tn + h/2, y^n + h/2 f(tn,y^n) )

    -----

    fonction qui renvoie:
    t: un vecteur de la subdivision du temps
    y: la solution approchée

    """
    h = T/N
    t = [t0]
    y = [y0]
    for n in range(N):
        tn = t[-1]
        yn = y[-1]
        tn1 = tn + h
        yn1_bar = yn + h*f(tn+(h/2), yn+(h/2)*f(tn,yn))
        yn1 = yn + (h/2)*(f(tn, yn) + f(tn1, yn1_bar))
        t.append(tn1)
        y.append(yn1)
    t = np.array(t)
    y = np.array(y)
    return t, y
```

- 2- Code de la fonction P

```
def P(t,Tinsp,Ttot,Pinsp,Pexp):
    """
    Fonction périodique représentant la pression lors du cycle inspiration/expiration. Période de [0,Ttot]

    fonction qui prend en arguments :
    t : 1 instant regardé
    tinsp : le temps d'un cycle d'inspiration
    Ttot : l'instant final du cycle
    Pinsp: la pression lors de l'inspiration
    Pexp : la pression lors de l'expiration

    -----

    fonction qui renvoie la pression

    """
    while t-Ttot>0:
        t=t-Ttot
    if t<Tinsp:
        return Pinsp
    else:
        return Pexp
```

- 3- code du graphe de la solution approchée linéaire dans la situation normale selon le nombre de points

```
# Application numérique en situation normale
# f second membre de L'EDO
def f(t,V):
    return -(V*E/R)*(E*Vfrc/R)-P(t,Tinsp,Ttot,Pinsp,Pexp)/R

t0=0 #temps initial
T=5 #temps final
E=5 #élastance
R=2 #résistance de l'arbre bronchique
Vfrc=2.6 #volume de référence
Tinsp=2 #temps d'un cycle d'inspiration
Ttot=5 #l'instant final du cycle inspiration/expiration
Pinsp=2 #la pression lors de l'inspiration
Pexp=0 #la pression lors de l'expiration
V0=Vfrc #volume initial

fig = plt.figure(figsize = (12, 6))
valeurs_N=[10,50,100,1000,10000] #nombre de points
for N in valeurs_N:
    Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0, N, f) #on recupère la subdivision de temps et la solution approchée
    plt.plot(Tn,Yn,label=f"N={N}")
plt.title("solution approchée de V en situation normale pour N={valeurs_N} points")
plt.xlabel("temps (s)")
plt.ylabel("Volume (L)")
plt.legend()

plt.show()
```

4- code de la solution exacte dans le cas linéaire

```
def sol_exacte (tt,T,Tinsp,Ttot,Pinsp,Pexp,E,R,Vfrc,V0):
    """
    fonction de la solution exacte d'un modèle linéaire

    fonction qui prend en arguments :
    tt: l'instant regardé
    T: la fin du cycle
    Tinsp : le temps d'un cycle d'inspiration
    Ttot : l'instant final du cycle
    Pinsp: la pression lors de l'inspiration
    Pexp : la pression lors de l'expiration
    E: élastance
    R: résistance de l'arbre bronchique
    Vfrc : volume de référence
    V0 : le volume initial

    =====
    fonction qui renvoie la pression exacte dans le modèle linéaire
    """

    res=np.zeros(len(tt))
    for i in range(len(tt)):
        t=tt[i]
        if t < Tinsp:
            integ_insp1 = (E*Vfrc/R - Pinsp/R)*((R/E)*(np.exp(E*t/R)-1))
            res[i] = (V0*np.exp(-E*t/R)) + np.exp(-E*t/R)*(integ_insp1)
        if t >= Tinsp:
            integ_insp2 = (E*Vfrc/R - Pinsp/R)*((R/E)*(np.exp(E*Tinsp/R)-1))
            integ_exp = (E*Vfrc/R - Pexp/R)*((R/E)*(np.exp((E/R)*t)-np.exp((E/R)*Tinsp)))
            res[i] = (V0*np.exp(-E*t/R)) + np.exp(-E*t/R)*(integ_insp2 + integ_exp)
    return res
```

5- code du graphe de la comparaison entre la solution approchée et la solution exacte dans le cas linéaire lors de la situation normale

```
# Application numérique en situation normale

t0=0 #temps initial
T=5 #temps final
N=10000 #nombre de points
E=5 #élastance
R=2 #résistance de l'arbre bronchique
Vfrc=2.6 #volume de référence
Tinsp=2 #temps d'un cycle d'inspiration
Ttot=5 #l'instant final du cycle inspiration/expiration
Pinsp=-2 #La pression lors de l'inspiration
Pexp=0 #La pression lors de l'expiration
V0=Vfrc #volume initial

Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0, N, f) #on recupère la subdivision de temps et la solution approchée

fig = plt.figure(figsize = (12, 6))
ax=fig.add_subplot(1,2,1)
ax.plot(Tn,Yn,label="solution approchée")
plt.title("solution approchée de V avec résistance=R et V0={V0}L")
plt.xlabel("temps (s)")
plt.ylabel("Volume (L)")
plt.legend()

ax=fig.add_subplot(1,2,2)
ax.plot(Tn,sol_exacte (Tn,T,Tinsp,Ttot,Pinsp,Pexp,E,R,Vfrc,V0),label="solution exacte ")
plt.title("solution exacte de V sur [{t0},{T}] avec résistance=R")
plt.xlabel("temps(s)")
plt.ylabel("Volume(L)")
plt.legend()
plt.show()
```

6- code du graphe de la comparaison entre la solution approchée dans le cas linéaire pour les hommes et pour les femmes sur [0,15] lors de la situation normale

```
# f second membre de l'EDO
def f(t,V):
    return -(V*E/R)+(E*Vfrc/R)-P(t,Tinsp,Ttot,Pinsp,Pexp)/R

# Application numérique en situation normale

t0=0 #temps initial
T=15 #temps final
N=10000 #nombre de points
E=5 #élastance
R=2 #résistance de l'arbre bronchique
Tinsp=2 #temps d'un cycle d'inspiration
Ttot=5 #l'instant final du cycle inspiration/expiration
Pinsp=-2 #La pression lors de l'inspiration
Pexp=0 #La pression lors de l'expiration

VfrcH=2.6 #Vfrc homme moyen
VfrcF=1.4 #Vfrc femme moyenne
legend=["un homme","une femme"]
fig = plt.figure(figsize = (6, 6))
for i,Vfrc in enumerate ([VfrcH,VfrcF]):
    V0=Vfrc
    Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0, N, f) #on recupère la subdivision de temps et la solution approchée
    plt.plot(Tn,Yn,label=f"solution approchée pour {legend[i]}")
plt.title("comparaison homme-femme de la solution approchée de V sur [{t0},{T}]")
plt.xlabel("temps (s)")
plt.ylabel("Volume (L)")
plt.legend()
plt.show()
```

7- code du calcul du point fixe dans le cas linéaire

```

#Phi dans le modèle linéaire
def phi(x,Vfrc):
    return E*(x-Vfrc)

# Application numérique en situation pour R=20 donc V0 est égale au point fixe de Phi

t0=0      #temps initial
T=5       #temps final
N=10000   #nombre de points
E=5       #élastance
R=20      #résistance de l'arbre bronchique
Vfrc=2.6  #volume de référence
Tinsp=2   #temps d'un cycle d'inspiration
Ttot=5    #l'instant final du cycle inspiration/expiration
Pinsp=-2  #La pression lors de l'inspiration
Pexp=0    #La pression lors de l'expiration

#Recherche du point fixe de phi et comparaison avec Vfrc
xfixe=0
dif=1
x=np.linspace(1,4,N)
for i in range(N):
    if abs(x[i]-phi(x[i],Vfrc))<dif:
        dif = abs(x[i]-phi(x[i],Vfrc))
        xfixe=x[i]

Pfixe_theo=E*Vfrc/(E-1) #point fixe théorique

plt.scatter(Pfixe_theo,Pfixe_theo,label="point fixe théorique",color="green")
plt.scatter(Vfrc,phi(Vfrc,Vfrc), label="Vfrc",color="cyan")
plt.scatter(xfixe,xfixe,label="point fixe approché",color="red")
plt.plot(x,phi(x,Vfrc),label="graphe de phi")
plt.plot(x,x,label="droite y=x")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("graphe de phi linéaire sur [1,4]")
plt.legend()

print(f"l'écart entre le point fixe théorique et le point fixe approché est de {abs(xfixe-Pfixe_theo)}")

```

8- code du graphe de la comparaison entre la solution approchée et la solution exacte dans le cas linéaire lors de la situation anormale

```

#Application
V0_theo= Pfixe_theo #volume initial théorique
V0_appro = xfixe    #volume initial approché

Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0_appro, N, f) #on récupère la subdivision de temps et la solution approchée

fig = plt.figure(figsize = (12, 6))
ax=fig.add_subplot(1,2,1)
ax.plot(Tn,Yn,label="solution approchée")
plt.title(f"solution approchée de V avec résistance={R} et V0={round(V0_appro,4)}L")
plt.xlabel("temps (s)")
plt.ylabel("Volume (L)")
plt.legend()
axs=fig.add_subplot(1,2,2)
axs.plot(Tn,sol_exacte (Tn,T,Tinsp,Ttot,Pinsp,Pexp,E,R,Vfrc,V0_theo),label="solution exacte ")
plt.title(f"solution exacte de V avec résistance={R} et V0={V0_theo}L")
plt.xlabel("temps (s)")
plt.ylabel("Volume (L)")
plt.legend()
plt.show()

```

9- code du graphe de la solution approchée dans le cas linéaire lors de la situation anormale sur [0,30]

```

#application comparaison homme femme respiration anormale
t0=0      #temps initial
T=30      #temps final
N=10000   #nombre de points
E=5       #élastance
R=20      #résistance de l'arbre bronchique
Tinsp=2   #temps d'un cycle d'inspiration
Ttot=5    #l'instant final du cycle inspiration/expiration
Pinsp=-2  #La pression lors de l'inspiration
Pexp=0    #La pression lors de l'expiration

Vfrc=2.6  #Vfrc homme moyen
fig = plt.figure(figsize = (6, 6))
xfixe=0
dif=1
x=np.linspace(1,4,N)
for i in range(N):
    if abs(x[i]-phi(x[i],Vfrc))<dif:
        dif = abs(x[i]-phi(x[i],Vfrc))
        xfixe=x[i]

V0_appro = xfixe #volume initial approché

Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0_appro, N, f) #on récupère la subdivision de temps et la solution approchée
plt.plot(Tn,Yn,label=f"solution approchée pour un homme")
plt.title(f"solution approchée de V avec résistance={R} sur [{t0},{T}]")
plt.xlabel("temps (s)")
plt.ylabel("Volume (L)")
plt.legend()
plt.show()

```

10-code des données initiales dans le cas non-linéaire


```

#Conditions initiales modèle non-linéaire valeurs prises dans Science.Lu
t0=0
T=5
N=10000
E=5
R=2

Vfrc=2.6 #Vfrc de référence
VfrcF=1.4 #Vfrc femme moyenne

Tinsp=2
Ttot=5
Pinsp=-2
Pexp=0

Vtlc=6 #Vtlc homme moyen
VtlcF=4.2 #Vtlc femme moyenne

Vrv=1.2 #Vrv homme moyen
VrvF=0.7 #Vrv femme moyenne

#Phi dans le modèle non-linéaire
def phi2(V,Vtlc,Vfrc,Vrv):
    lamb=E/((1/(Vtlc-Vfrc)**2))+1/(Vfrc-Vrv)**2))
    return lamb*(1/(Vtlc-V)-1/(V-Vrv)-(1/(Vtlc-Vfrc)-1/(Vfrc-Vrv)))

# f second membre de l'EDO non-linéaire
def fnonlineaire(t,V):
    return -P(t,Tinsp,Ttot,Pinsp,Pexp)/R - phi2(V,Vtlc,Vfrc,Vrv)/R

```

11- code du graphe de la solution approchée dans le cas non-linéaire lors de la situation normale

```

#solution du modèle non-linéaire dans le cas normal
V0=Vfrc

Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0, N, fnonlineaire)

fig = plt.figure(figsize = (6, 6))
plt.plot(Tn,Yn,label="solution approchée")
plt.title(f"solution approchée de V pour le modèle non-linéaire dans le cas de respiration normale,V0={V0}L")
plt.xlabel("temps (s)")
plt.ylabel("Volume (L)")
plt.legend()
plt.show()

```

12- code du graphe de la comparaison entre les solutions approchées Homme-Femme dans les cas linéaire et non-linéaire lors de la situation normale

```

t0=0
T=5
N=10000
E=5
R=2

Vfrc=2.6
VfrcF=1.4 #Vfrc femme moyenne

Tinsp=2
Ttot=5
Pinsp=-2
Pexp=0

VtlcH=6 #Vtlc homme moyen
VtlcF=4.2 #Vtlc femme moyenne

VrvH=1.2 #Vrv homme moyen
VrvF=0.7 #Vrv femme moyenne
legend=["homme (phi non-linéaire)","femme (phi non-linéaire)"]
fig = plt.figure(figsize = (6, 6))
for n,V in enumerate([[Vfrc,VtlcH,VrvH],[VfrcF,VtlcF,VrvF]]):
    V0=Vfrc-V[0]
    Vtlc=V[1]
    Vrv=V[2]

    Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0, N, fnonlineaire)
    plt.plot(Tn,Yn,label=f"{legend[n]}")

legend2=["homme (phi linéaire)","femme(phi linéaire)"]
for i,Vfrc in enumerate ([VfrcH,VfrcF]):
    V0=Vfrc
    Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0, N, f) #on recupère la subdivision de temps et la solution approchée
    plt.plot(Tn,Yn,label=f"{legend2[i]}")
plt.title(f"comparaison des solutions approchées de V pour les différents modèles dans le cas d'une respiration normale")
plt.xlabel("temps (s)")
plt.ylabel("Volume (L)")
plt.legend()
plt.show()

```

13- code du calcul du point fixe dans le cas non-linéaire

```

#Calcul du point fixe de phi non-linéaire
x=np.linspace(2,5,N)

xfixe2=0
dif=1
for i in range(N):
    if abs(x[i]-phi2(x[i],Vtlc,Vfrc,Vrv))<dif:
        dif = abs(x[i]-phi2(x[i],Vtlc,Vfrc,Vrv))
        xfixe2=x[i]
print (f"le point fixe approximé pour le modèle non-linéaire est {round(xfixe2,4)}")

plt.plot(x,phi2(x,Vtlc,Vfrc,Vrv),label="graphe de phi")
plt.plot(x,x,label="droite y=x")
plt.scatter(xfixe2,xfixe2)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("graphe de phi non-linéaire sur [2,5]")
plt.legend()
plt.show()

```

14- code du graphe de la solution approchée dans le cas non-linéaire lors de la situation anormal sur [0,5]

```

#application comparaison homme femme respiration anormale
t0=0      #temps initial
T=30      #temps final
N=10000   #nombre de points
E=5       #élastance
R=20      #résistance de l'arbre bronchique
Tinsp=2   #temps d'un cycle d'inspiration
Ttot=5     #'instant final du cycle inspiration/expiration
Pinsp=-2  #La pression lors de l'inspiration
Pexp=0     #La pression lors de l'expiration

Vfrc=2.6  #Vfrc homme moyen
fig = plt.figure(figsize = (6, 6))
xfixe=0
dif=1
x=np.linspace(1,4,N)
for i in range(N):
    if abs(x[i]-phi(x[i],Vfrc))<dif:
        dif = abs(x[i]-phi(x[i],Vfrc))
        xfixe=x[i]

V0_appro = xfixe      #volume initial approché

Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0_appro, N, f) #on recupère la subdivision de temps et la solution approchée
plt.plot(Tn,Yn,label=f"solution approchée pour un homme")
plt.title(f"solution approchée de V avec résistance={R} sur [{t0},{T}]")
plt.xlabel("temps (s)")
plt.ylabel("Volume (L)")
plt.legend()
plt.show()

```

15- code du graphe de la comparaison entre solution approchée dans le cas linéaire et la solution dans le cas non-linéaire lors de la situation anormal sur [0,30]

```

#solution du modèle non linéaire dans le cas d'une crise d'asthme, R=20
Vfrc=2.6
Vtlc=6
Vrv=1.2
T=30
R=20

x=np.linspace(2,5,N)

xfixe2=0
dif=1
for i in range(N):
    if abs(x[i]-phi2(x[i],Vtlc,Vfrc,Vrv))<dif:
        dif = abs(x[i]-phi2(x[i],Vtlc,Vfrc,Vrv))
        xfixe2=x[i]
V0=xfixe2

fig = plt.figure(figsize = (6, 6))

Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0, N, fnonlinéaire) #on recupère la subdivision de temps et la solution approchée non-linéaire
plt.plot(Tn,Yn,label="solution approchée non-linéaire")
Vfrc=2.6
xfixe=0
dif=1
x=np.linspace(1,4,N)
for i in range(N):
    if abs(x[i]-phi(x[i],Vfrc))<dif:
        dif = abs(x[i]-phi(x[i],Vfrc))
        xfixe=x[i]

V0_appro = xfixe
Tn, Yn = mon_schema(t0, T, V0_appro, N, f) #on recupère la subdivision de temps et la solution approchée linéaire
plt.plot(Tn,Yn,label=f"solution approchée linéaire")
plt.title(f"comparaison des solutions approchées de V des modèles linéaire et non-linéaire lors d'une crise d'asthme")
plt.xlabel("temps (s)")
plt.ylabel("Volume (L)")
plt.legend()
plt.show()

```

Crochemar Théo