Factorization into $A=LU$

Qual a inversa de um produto?

→ se multiplico 2 matrizes e sei suas inversas, ql a inversa de AB? Sei p/ uma matriz só:

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

$$\boxed{\text{The big formula for elimination} \rightarrow \text{resultado da aula de hj}}$$

↳ The great way to look at Gaussian Elimination

$$A=LU$$

A é invert. | B é invertível

Que matriz me dá a inversa de AB?

multiplico A^{-1} e B^{-1} em q ordem?

$$A\underbrace{B(B^{-1}}A^{-1}) = I$$

↳ Gives the identity.

Transpostas: Square, invertible

$$AA^{-1} = I \qquad I^t = I \text{ pq } I \text{ é simétrica}$$

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I^t = I$$

inverte!

Assim, como

$$(A^{-1})^T A^T = I, \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Essa cara é o inverso de A^T

Se queremos saber o inverso de A^T e sabemos a inversa de A, é só transpor!

Posso fazer em qqr ordem o processo de transpor e inverter.

$A=LU$ é a forma + básica de fatorar uma matriz.

A é matriz bem comportada, posso fazer elimin. sem row exchanges a princípio.

Tudo OK com os pivots, ñ tem zero em pos. de pivô.

↳ fico com U.

Ex.: Em 2×2 (elimination)

Se tem pivô zero, é singular.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad L2 - 4.L1 = \begin{array}{r} 8 \quad 7 \\ - \; 8 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 3 \end{array}$$

E_{21} → elementary matrix to produce 0 na pos(2,1)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}$$

a inversa tem sinal +

pq adds back what this removes.

$$A = L \; U$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{(E_{21})^{-1}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

repete a 1ª linha de U,

a 2ª linha:

4× 1st row of U + 2nd row → 8 7

ok!

L → lower triangle

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 1 & 1 & \\ & 1 & \ddots \end{bmatrix}$$

↳ tem 1's na diag. princ.

U →

$$\begin{bmatrix} p_1 & & \vdots \\ & p_2 & \vdots \\ 0 & & p_3 \end{bmatrix}$$

Pivôs na diag. princ.

Se quero separar os pivôs: LDU

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

p/ tirar o 2 da 1ª linha, mult. por 1/2

p/ tirar o 3, mult. por 1/3.

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{D}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Caso $3 \times 3 \rightarrow$ matriz A

$E_{32} E_{31} E_{21} A = U$ (Consider no row exchange)

E

Cada uma delas é fácil de inverter.

E o produto?

$A = E^{-1} U \Rightarrow A = \underbrace{\overbrace{E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} E_{32}^{-1}}^{L \text{ é produto de inversas}}}_{} U$

$A = LU$

Pq esse produto é melhor que esse?

$2 \times 2 \Rightarrow$ just one E, no problem.

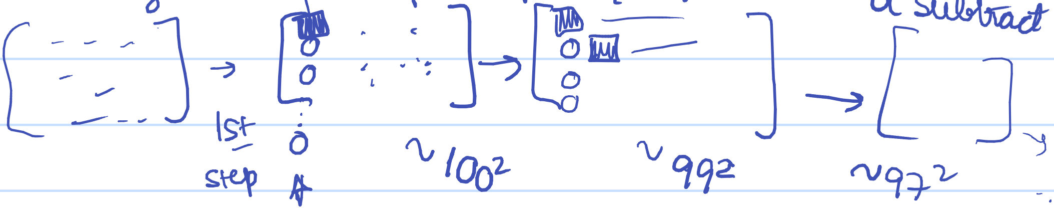
$EA = U$

$A = LU$

How expensive is elimination?

Operation = multiply + a subtract

matriz 100x100 → qtas operações?



$\sim 3^2 \dots 2^2 \sim 1^2$

Problema vai diminuindo!

Pq os n^os vão diminuindo.

$$\underbrace{n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2}_{\text{n terms, the biggest is } n^2.} \sim \frac{1}{3} n^3$$

no pior caso, seria n^3.

p/ resolver o sistema $Ax = b$

Elim. on A - higher price - $\frac{1}{3}n^3$

transf. em LU e eliminar.

b => lower cost.

→ Isso p/ o caso + simples. Se tiver q trocar linhas - se aparecer zero em pos. de pivô.

Transposes and Permutations

→ q.d. preciso
row exchanges.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

muda 1 e 2, muda 1 e 3, muda 2 e 3. ....

se multiplicar matrizes assim, como é a resposta?

A função da inversa é desfazer o q a matriz fez.

$P^{-1} = P^T$ → $\boxed{\text{no caso de permutations matrices}}$

$4 \times 4 \Rightarrow$

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ permutations matrices

In the next lecture we'll use them.