Independence, Basis and Dimension

Dependency / independence, the space they span

→ a basis for a subspace | basis for a Vector Space

↳ E assim, a dimensão do subespaço.

• falo de independência, não uma matriz sendo independente, mas uns vetores sendo independentes. ex. a bunch of vectors being independent, spanning a space, being a basis. A dimensão é um número.

mtas colunas

A é matriz $m \times n$, $m < n$

+ unknown than equations.

m equações, mtas incógnitas.

↳ we have free columns, special solutions, there's sth in the nullspace of A! (other than just the zero vector.

↳ there are some non-zero x tais q $Ax = 0$.

Temos um algoritmo de eliminação q deixa as coisas "echelon" com colunas de pivot e free columns, and those variables I can assign non-zero values to it.

↳ Resolvo p/ pivot variables e tenho sol p/ $Ax=0$.

Independence

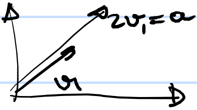
linearly

(or just independent

Vectors $x_1, x_2, \dots, x_n$ are independent if:

- combino eles. Alguma combinação dá zero? → they're dependent.
- if no combination gives the zero vector (except the zero combination) → independent

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \neq 0$$



→ dependent

$$2v_1 - a = 0$$

If one of the vectors is the zero vector, ex:

$\vec{v_1}$ = ↗ vector 2 e $\vec{v_2}$ = zero vector (0,0)

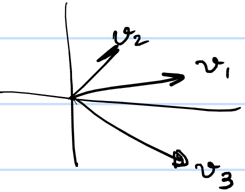
↳ todos os vetores são dependent do zero vector.

$$0 \cdot v_1 + \cancel{0}\,\vec{v_2} = 0$$

5, 6...

qualquer

If one of the vectors is the zero vector, independence is dead!



esses 3 vetores em $\mathbb{R}^2$, são DEPENDENT!

Como sei?

3 vectors in $\mathbb{R}^2$ have to be dependent.

Pq?

$$A = \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

we'll have free variable
→ tem coisa no espaço nulo ≠ de (0,0)
• tem coisas q dão zero vector.

→ Colunas são DEPENDENTES se há algo no espaço-nulo.

$$c_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

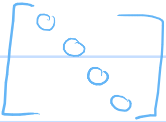
Se estou na dúvida se certos vetores são independentes, coloco-os como colunas de uma matriz. Eles são indep. se nullspace of A is only the zero vector.

They are dependent if $Ac = 0$ for non-zero vector C in the nullspace.

They are dependent if there's sth else in the nullspace. If $Ac = 0$ for some non-zero c in the nullspace.

$N(A) = \vec{0}$

In the case of indep. columns

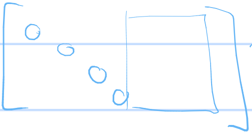


m×n

ñ tem nullspace, são independent.

$\boxed{\text{rank} \rightarrow \text{all } n}$

free columns would generate dependency



m×n

tem espaço nulo, dependent,

rank<n

Spanning a space → vectors $v_1 \ldots v_l$ span a space or just a vector space means the space consists of all combinations of those vectors.

→ se S é o espaço gerado por alguns vetores, quer dizer que S contém todas suas combinações. S will be the smallest space with those vectors in it.

→ estou interessada em um conjunto de vetores que gera um espaço e é independente.

↳ indica q tenho o # suficiente de vetores

→ se eu ñ tivesse todos os necessários, ñ reproduzo meu espaço.

A Basis for a vector space is a sequence of vectors $v_1, v_2, \ldots v_d$ com 2 propriedades:

↳ I've got enough vectors and not too many

Basis: bunch of vector in the space.

→ they are independent

→ they span a space

Sempre q olho um subespaço, pego a basis dele e te digo quem é o subespaço só olhando a base.

Ex.: $\mathbb{R}^3$ → One basis is

$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ → esta é uma base p/ $\mathbb{R}^3$. Não é a única.

Another basis:

$\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}}$

are they independent? YES

Do they span $\mathbb{R}^3$? NO

Agora, e se eu colocar outro? Se for $\begin{bmatrix}3\\3\\7\end{bmatrix}$ é dependent, pois é 1 + o outro. lies on the same plane as those.

Se eu colocar $\begin{bmatrix}3\\3\\8\end{bmatrix}$

Como testo p/ saber se os 3 realmente formam uma base p/ o $\mathbb{R}^3$?

→ Coloca em colunas, do elimination, row reduction

→ Checa: se fica com free variables? Ou todas as colunas são pivot columns?

Nesse caso, q ficamos com uma matriz quadrada (3x3), o necessário p/ ser base ...

$\mathbb{R}^n \to$ if I have n vectors, they form a basis if the nxn matrix w/ those columns is <u>invertible</u>.

↳ Isso é pra matriz quadrada!

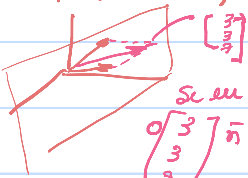
↳ forma todo o $\mathbb{R}^n$

Estes vetores constituem base p/ algum espaço?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}}$$

Sim! São independentes, satisfazem o 1º req.

Eles são base de um plano no $\mathbb{R}^3$, o espaço que eles formam.



Se eu colocar $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ñ é + base, pois os 3 ñ são + independentes.

Se tenho outra base:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Concluo que uma base p/ o $\mathbb{R}^3$ ñ é única. Existem zilhões de bases.

Qualquer matriz 3x3 invertível é base p/ $\mathbb{R}^3$. suas colunas

Existem mtas bases p/ o msm espaço, mas todas têm o msm # de vetores.

Se eu tô falando de $\mathbb{R}^3$, preciso de 3 vetores.

Se tô falando de $\mathbb{R}^n$, preciso de <u>n</u> vetores L.I.

Given a space: $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$, outro espaço-coluna, espaço-nulo...

Every basis for this space has the same # of vectors.

se uma tem 6 vetores, a outra tb terá.

O # de vetores me diz quão grande é o espaço.

Se $\mathbb{R}^6$, tenho 7 vetores, é muito. Se tenho 5, ñ é sufic.

O nº de vetores da base se chama dimensão do espaço.

Dimension → # of vectors in any space.

↳ Because all the basis have the same #.

Ex: Space is $C(A)$

$$A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- do they span the column-space of that matrix?

– They span, but is not a basis. No, they are not independent, there's sth in the nullspace.

$$N(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ Pq combino as colunas de A desta forma e produzo a coluna zero.

já ñ são independentes pq tem coisas $\neq 0$ no nullspace da matriz q eles geram.

Qual seria então uma base p/ este espaço coluna?

Columns 1 e 2. Pivot columns. Pq a 3ª é a soma das e a última é a 1ª. ⇒ O Rank da matriz é 2.

Theorem: rank(A) = # of pivot columns = Dimension of column space. (the subspace)

another basis for the column space:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

↳ Combin. Lineares.

Sei que $\dim(C(A))=2$ e tenho um monte de vetor independente, vai ser base.

$\dim(C(A))=r$

Nullspace: os vetores no nullspace me dizem as combinações do vetor que darão zero.

Se atribui a x_3 e x_4 (free variables) $(1,0)$ e $(0,1)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{m \times n} \rightarrow \text{nullspace: } \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Are they a basis for the nullspace?

$\rightarrow$ Yes.

$$\text{Dim}(\text{Nullspace}) = \underbrace{\#\text{ de colunas}}_{n} - \underbrace{\text{rank}}_{r}$$

$$\dim(N(A)) = \#\text{free variables} = n-r$$