Grafos e Redes

Matrizes de Incidência
Leis de Kirchhoff

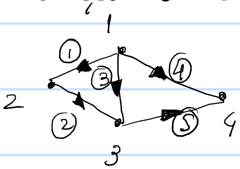
Desenhar um grafo e a matriz associada a ele.

Graph - nodes and edges

$n=4$ nodes

$m=5$ edges

dar uma direção a cada edge.



pode ser corrente, fluxo de água, de óleo... uma estrutura

Vou criar uma matriz que nos diga exatamente o que o grafo quer dizer.

Incidence Matrix

leaves node 1 / goes to node 2

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} \text{node1} & \text{node2} & \text{node3} & \text{node4} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{edge 1} \\ \text{edge 2} \\ \text{edge 3} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Subgrafo formado por edges 1, 2 e 3? Loop.

O nº de loops e posição deles é crucial.

Olho as 3 1^as linhas, correspondentes ao loop - are the rows independent? Row 1 + Row 2 = Row 3

Loops correspond to dependent → linearly dependent

give me a basis for the nullspace.

Every row has only 2 non-zero element.

Big graph → a lot of zeros.

$\boxed{\text{Very sparse matrix.}}$

(pq cada row representa um edge e um edge sempre sai de um nó e chega em outro.)

nº de elementos ≠ 0 → $\underline{\underline{2m}}$ (2 por linha)

Qual o nullspace? Olha as colunas: 4 colunas. Se são independentes, o q tem no nullspace? Só zero vector.

Nullspace diz qual combinação de colunas dá zero. Tem outra coisa no nullspace além do vetor zero?

Solve $Ax=0$ to find the nullspace.

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix}}^{Ax} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interpretação: $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ → potentials at the nodes.

Se todos os x são zero, OK. Claro q o vetor zero tá no nullspace.

As colunas em A são dependentes pq posso achar soluções p/ esta equação.

↳ $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ → constant potential

Na prática, quer dizer q os potenciais só podem ser determinados com um fator de escala.
Diferenças de potencial fazem a corrente fluir.
nada vai se mover entre 2 potenciais iguais.
Por causa dessa constante aí q aparece, devemos fixar um potencial em zero, por exemplo.

$\boxed{x_4=0}$ → a quarta coluna some!

Qual o rank da matriz?

5x4 matrix, nullspace dimensão 1.

4 colunas → 1 dependente (dimensão do nullspace) e 3 com pivô.

Any 3 columns will be independent!
Any 3 potentials are independent, good variables.
The 4th potential is not. We need to set and typically we ground that node.

nullspace (A)=1

Rank=3

Column space - combinação das colunas.

Nullspace of A^T.

Probably the most fundamental equation of applied mathematics.

$A^T y = 0$

$N(A^T)$

$A \to 5 \times 4$

$A^T \to 4 \times 5$

rank = 3

$n(A^T) = 2$

$A^T \to n \times m$

$\underbrace{5 - 3}_{\text{rank}}$ = free variabels

Sei a dimensão de $n(A^T)$. $\boxed{\text{Qual a base?}}$

O que é $A^T y = 0$?

Relation between currents and potential differences → Lei de Ohm.

Ohm's Law → current on the edge is number × potential drop.

↳ Conductance → $1/R$

Kirchoff's Current Law

$A^T y = 0$

Relação entre corrente, resistência e ΔV.

→ mudança no potencial q faz uma corrente ocorrer.

$x = x_1, x_2, x_3, x_4$ (potentials at nodes)

$\downarrow A$

$x_2 - x_1, \ldots$ etc.

potential differences $\xrightarrow[\text{Ohm's Law}]{C}$ Currents on edges y_1, y_2, y_3, y_4, y_5

$A^T y = 0$

$n(A^T) \to$ dimensão 2.

Qual um vetor no $n(A^T)$?

Equivale a pedir 5 correntes q satisfazem a lei de Kirchhoff das correntes.

O q diz a lei de Kirchhoff?

$$-y_1 - y_3 - y_4 = 0$$
$$y_1 - y_2 = 0$$
$$y_2 + y_3 - y_5 = 0$$
$$y_4 + y_5 = 0$$

4 equações, 4 nós

$$A^T y = 0$$

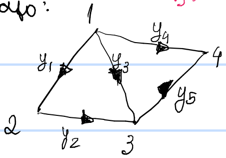
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5 incógnitas, 5 edges

current in = current out.

y_1, y_3, y_4 leaving nodes

Redesenhando o grafo:



First equation refers to node 1 and says that the net flow is zero. Net flow is zero!

→ $A^T y$, Kirchhof's current law, is a balance equation, a conservation law. → In equals out.

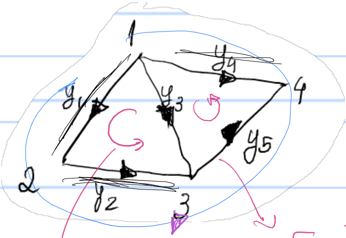
3 setas saindo de 1 → add to zero.

Mas a carga ñ se acumula nos nós. Ela viaja.

Qual o nullspace? Sem fazer RREF → só olhando o grafo.

$n(A^T) = 2$ → Estou procurando 2 vetores.

2 dim. - space.



Se pegar um loop pelo lado de fora :(azul)

O y_3 cancela, ñ é + L.I.! É dependente!

It's not independent!

Prova:

1ª coluna + 2ª col = 3rd col

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

loop 1   loop 2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{loop}_1 + \text{loop}_2$$

all the dependencies come from loops.

Rowspace of A → column space of A^T.

Column space of A^T 4×5, rank = 3

rank

Edges 1, 2 e 4 são independentes pq ñ formam um loop.

o nº de loops é a dimensão do espaço-nulo? Sim.

tree → graphs with no loops →

$\dim n(A^T) = m - r$ → # of loops, # of independent loops

cause dependency, cause nullspace!

loops → # of edges

rank = n − 1

Se pego 3 pivot columns, no dependencies among them. They form a graph without a loop.

n colunas, dos n nodes,

pq só tinha um vetor no nullspace

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Columns were not independent.

n columns coming from n nodes − um vetor no nullspace

Formula: $\dim N(A^T) = m - r$

r: $n-1$ ← n columns, coming from n nodes

$$\underbrace{\# \text{ loops}}_{\dim N(A^T)} = \underbrace{\# \text{ edges} - (\# \text{ nodes} - 1)}$$

$$\# \text{nodes} + \underbrace{\# \text{loops}} - \underbrace{\# \text{edges}} = 1$$

0-dimensional (points)

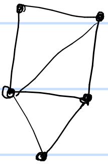
2 dimensional things, have an "area"

1 dimensional, connect nodes

Euler's Formula

→ great topology fact about any graph.

Grafo sem loop − independency!
Grafo com loop − dependency!



sem current sources from outside

3 loops + 5 loops − 7 edges = 1

$A^T y = 0$

$A^T y = f$ adding current sources!

currents

Physical constant in Ohm's law

$y = Ce$

$CAx = y$

$e = Ax$

A^T

$\underbrace{A^T C A}_{\text{Sempre simétrica!}} x = A^T y = f$

Potential differences

Rascunho Draft

$A^T A$ é simétrica?

$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$

Sim!

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$A^T \underbrace{CA}_{B}$ é simétrica?

$(A^T B)^T = B^T A$

$(CA)^T A$

$A^T C^T A$

$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$C A^T A$

C é constante!

$\begin{bmatrix} ae + gc & fa + ch \\ eb + dg & fb + dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

OK