Eigenvalues e Eigenvectors

outras lectures - how do we use

→ matrices are square, we're looking for special numbers - eigenvalues

Special vectors - eigenvectors

Esta lição é sobre - quais são esses números?

Eigenvectors:

matriz que age sobre um vetor

$$x \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow Ax$$

quero os vetores Ax que apontam na msm direção que entraram.

$Ax \parallel x$

↳ eigenvectors

BIG EQUATIONS

$$\boxed{Ax = \lambda x}$$

eigenvector

eigenvalue

ñ tenho $Ax=b$, ñ posso usar eliminação

Eigenvalue zero:

$$Ax = 0$$

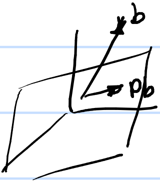
quais são os eignvectors com eignvalues zero? → the guys in the nullspace.

If our matrix is singular, then x is $[0\ 0\ 0\ 0 \dots 0]$

Singular → it takes some vector x into zero.

↳ Se A é singular, $\lambda=0$ é eigenvalue.

→ What are λ's and x's of a projection matrix?



b is eigenvector? No.

Pb é projeção em outra direção.

Que vetores são eigenvectors de P? $\lambda=1$

- qd b ∈ ao plano (a projeção é ele mesmo)
- qd b é ⊥ ao plano (a proj. é zero.) $\lambda=0$

- Any x in the plane will be an eigenvector. (unchange by P) $Px = x$ $(\lambda=1)$
- projeção é zero: $Px = 0$ $(\lambda=0)$

matriz de permutação

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ esta matriz permuta x_1 e x_2.

$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $Ax = x$ $(\lambda=1)$ (se eu permuto, não altera!)

$$\boxed{Ax = -x \qquad \hat{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda=-1}$$

The sum of eigenvalues equal the sum down the diagonal. (TRACE)

$$\sum \lambda = \text{TRACE } (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$$

How to solve $Ax = \lambda x$ q/d tenho 2 incógnitas (λ e x)

Rewrite: $\underbrace{(A - \lambda I)}x = 0$

A shifted by λI

- $A - \lambda I$ tem q ser singular. Se ñ, o único x é zero.

$\boxed{\text{Logo, } \det = 0}$

$\det(A - \lambda I) = 0$ — Eq. característica

$\boxed{\text{acho } \lambda \text{ primeiro}}$ → n lambdas.

↳ um λ repetido é a fonte de problemas.

- Como achar x agora?

$(A - \lambda I)x = 0$

↳ Se já achei λ, acho x by elimination.

Agora tenho uma matriz singular, procuro o nullspace.

Elimination, find free variables, pivot cols...

↳ give values to free variables

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

perpendicular

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad 2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

TRAÇO

$$9 - 6\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

4, 2

$(A - \lambda I)x = 0$

Se ñ fosse singular, $\lambda = 4$ ñ seria autovalor.

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$(A - \lambda I)x = 0$

x está no nullspace da matriz $A - \lambda I$ correspondente a λ.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \quad -x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 = x_2 \to \boxed{\lambda = 4 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Agora achar o autovetor correspond. a $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 = -x_2 \quad \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2}$$

nullspace desse cara (basis)

Peguei a matriz do 1º exemplo e adicionei 3I.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{+3I} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

+3 nos eigenvalues tb!

$\lambda_1 = 1$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_2 = -1$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda = 4$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda = 2$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

nada aconteceu com os eigenvectors!

Se $Ax = \lambda x$

$$(A+3I)x = \underbrace{Ax}_{\lambda x} + 3x = (\lambda+3)x$$

$$\cdot\,(A+3I)x = (\lambda+3)\,x$$

not so great:

$Ax = \lambda x$, B has eigenvalues α_1,

$B\cancel{X} = \alpha x$

$(A+B)x = (\alpha+\lambda)x$ — Qual o erro?

- x ñ é necessariamente autovetor de A e B ao mesmo tempo!

$Ax = \lambda x$

$By = \alpha y$!!!

Rotation:

Q rotates by 90°.

det é o prod. de eigenvalues.

orthog. matrix

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

trace: $0+0=0 \quad = \lambda_1 + \lambda_2$

$\det = 1 \quad = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

Que vetor pode continuar paralelo a ele msm depois de rotacionado de 90°?

say they add to zero.
the product is zero.

$$\det(Q-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$\lambda^2 = -1$

$i \quad -i$

Conjugados complexos.

msm que a matriz seja toda real, ñ precisa que autovetores sejam reais.

- Se a matriz é simétrica, eigenvalues stay real.

$Q^T = -Q \rightarrow$ antisimétrica

autovalores totalm. imaginários

Se troco por zero:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

eigenvalues?

é triangular. 3 e 3.

Autovalores estão na diagonal

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(3-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 3$

Problema: eigenvectors

$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

$(A - \lambda I)x = 0$

tem q ser singular

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$0 - 1 = -1$

don't give the complete story.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

degenerate matrix

2x2 mas só tem 1 indep. eigenvector

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1 x col 1 + 0 x col 2.

Only got one eigenvector