Lecture #10 - Thania Cardoso Senna @ UNICAMP

Falar sobre os 4 subespaços que vêm com a matriz.

• Já vimos column space e nullspace.

Correção da lição 9:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\\8\end{bmatrix}$$

this one is not independent.

Se olho p/a matriz, ñ é inversível.

a 3ª coluna ñ pode ser independente das 2 primeiras. Elas têm 2 linhas idênticas.

Tenho uma matriz quadrada. Com 2 linhas idênticas. Obviously dependent! Isso faz c/ que as colunas sejam dependentes tb!

A matriz ñ é inversível pq tem 2 equal rows!

Haverá nesta aula uma conclusão que conecta column e row space.

→ Vamos estudar + a fundo o rowspace.

→ The rows tells sth abt the column space.

no exemplo anterior, temos 2 equal rows, the rowspace will be 2-dimensional, the rank of the matrix will be only 2.

⇓

Só 2 dessas colunas podem ser independentes tb!

4 fundamental subspaces

↳ O ♡ da linear algebra!

Ver esses 4 subespaços e suas relações.

- ★ column-space → $C(A)$
- ★ nullspace → $N(A)$
- ★ rowspace
  - * rows are basis for rowspace when they're independent.
  - * all combinations of the rows of A.

  How can I get column vectors out of these rows → to continue working with columns? → transpose!

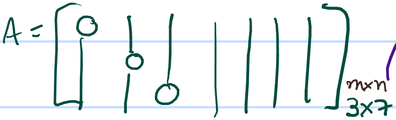
  ↳ all combinations of columns of A^T.

  → $C(A^T)$
- ★ nullspace of A^T → $N(A^T)$ or left nullspace of A

A is m×n. / nullspace of A → vectors w/ n components, sols for $Ax=0$ → in $\mathbb{R}^n$.

Ex.: matriz A.

Estranho!



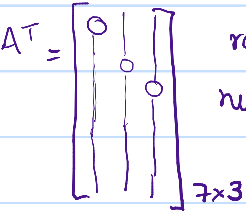
Solved

Espaço-coluna: Em $\mathbb{R}^3$ (dimensão)

Espaço-nulo: Em $\mathbb{R}^7$.

in $\mathbb{R}^n$

Ver melhor!



rowspace de A = col(A^T) = in $\mathbb{R}^7$

in $\mathbb{R}^7$

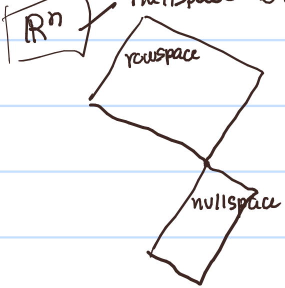
nullspace of (A^T) = in $\mathbb{R}^3$

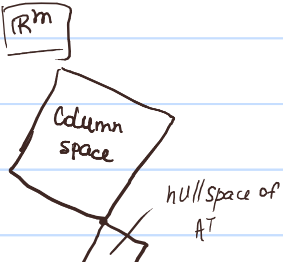
Ñ entendi! — solved!

Exemplo:

4 subspaces

nullspace e rowspace - aqui tem vectors w/ n components.





Para cada um dos subespaços, qual a base? qual a dimensão?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{\substack{4\times 3 \\ m\times n}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

O espaço-nulo é vetor em $\mathbb{R}^n$, pois são comb. lineares de vetores $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ tais que $Ax = 0$.

O espaço coluna está em $\mathbb{R}^4$ ($\to \in \mathbb{R}^m$) pois é composto por combinações dos vetores-coluna de A:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{\substack{n\times m \\ 3\times 4}} \to$$

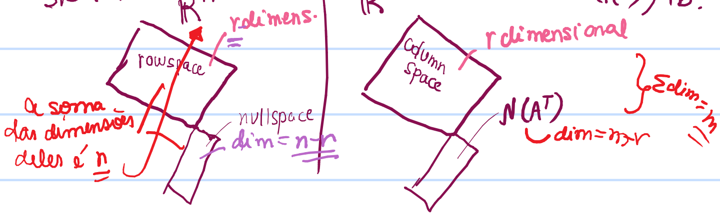
Espaço-nulo de A^T $\hookrightarrow \in \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^m$

Row space $\to C(A^T) \to \in \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$

→ Espaço-Coluna de A $\in \mathbb{R}^4$ ($\to \mathbb{R}^m$), espaço-nulo de A^T tb.

→ Espaço-nulo de A $\in \mathbb{R}^n$, rowspace de A (ou $col(A^T)$) tb.

$\mathbb{R}^n$ Sketch:



Quais seriam as bases desses subespaços e as dimensões?

do espaço-col $C(A) \to$ dim = rank

espaço-nulo $N(A) \to n - \text{rank}$

rowspace (ou $C(A^T)$) $\to$ is also rank

rowspace and column space have the same dim.

for the null space, the basis will be the special solutions. Uma p/ cada free variable.

- as special solutions formam uma base e nos diz exatamente a dimensão do espaço-nulo.
  - $\to n-r$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} = R$$

I — Row red. echelon: — F

What happened to the row space?

O espaço-coluna de R ñ é o msm de A. Ex.: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tá no column-space de A mas ñ tá no de R.

$\to$ I did row operations!

- row operations preserve the row space!

$C(A) \neq C(R)$, but same row spaces!

A base do Rowspace será as 2 1ªs linhas de R.

Basis for rowspace is first rows of R.

O rowspace é gerado pelas 3 rows de R.
$\to$ inteiro!

Mas a base será composta pelas 2 1ªs linhas.
$\to$ independence!

$\to$ só que esse número também é o rank, a dimensão do espaço-coluna!

The row space is sitting there in R, in its cleanest possible form.

E o nullspace de A^T?

$\underset{n\times m}{A^T} \to R \to \dim.\ col(A^T) = r$

$\dim N(A^T) = m - r$

Prova: $N(A^T)$

row vector

$A^T y = 0 \to y^T A^{T^T} = 0^T$

$$\underset{\text{matrix}}{\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}} \underset{\text{column}}{\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$y^T A = 0$

$$\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \overset{A}{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

multiplying by left
(por isso, left nullspace)

E agora, cara? Como vou tirar base de um left nullspace?

nullspace de AT tb é chamado de left nullspace.

Lembra do Gauss-Jordan?

histórico de operações

$$\text{rref}\begin{bmatrix} A_{m\times n} & I_{m\times m} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} R_{m\times n} & E_{m\times m} \end{bmatrix}$$

esse cara conterá a gravação do que eu fiz.

$EA = R$

row reduction steps to transform A into R.

no cap. 2, R era I. E was A^{-1}

Fiz isso p/ descobrir o left nullspace.

Basis for the left nullspace.

New vector space

All 3x3 matrices! My matrices are the vectors. Cada matriz 3×3 é um dos meus vetores.

There are vectors in the vector space because they obey the rules.

↳ posso somar matrizes e multiplicar por escalares? Sim.

Posso construir comb. lineares de matrizes.

Se somo simétricos dá simétrica, se somo triang. dá triang, se somo diag. dá diag.

→ comb. lineares tb são sim; triang., diagonais.

Matriz com zeros tá inclusa.

as oito regras do espaço vetorial são satisfeitas.

Posso fazer A+B e c.A. Por enquanto, esqueço AB. ñ é relevante p/ o espaço vetorial.

Upper triangular matrices são subespaços desse espaço? All symmetric matrices.

A intersecção: simétricas ∩ triangulares

$\underbrace{\hspace{8em}}$
diagonais

└ dimensão = 3

Estendi a ideia de $\mathbb{R}^n$ p/ a ideia de $\mathbb{R}^{n\times n}$

Produzir uma dimensão é produzir uma base.

Contar qts vetores preciso p/ produzir as bases

Exemplo:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A I

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

R E

pivôs

free variables

EA

a matriz E, sua 3ª linha diz: pega a L1 (-1) + L2 . (0) + L3 = 0 as outras 2 ñ dão 0.

dimensão do espaço-nulo é 1, dimensão do rank é 2.

Exemplos de Bases p/ matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

they span a subspace for diagonal matrices.

Stretches the idea from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^{n \times n}$