Transposes, Permutations, spaces $\mathbb{R}^n$ (Problem set 1)

Última parte desse capítulo - 2-7

Beginning of real linear algebra

↳ Bigger picture of vector spaces, not vectors.

Permutations - P → execute row exchanges

Perfectly good matrix

matriz A - invertível, ~~possa~~ eu resolver $Ax=b$

→ mas às vezes posso me permitir trocar linhas se aparecer zero na pos. de pivô.

- $A=LU$ ñ inclui matrizes de permutação aí no meio. Assume q ñ precisaremos de row exchanges.
- O P nessa fatoração é a identidade.

Como Matlab faz eliminação?

→ Checa se tem pivô zero e se o pivô ñ é pequeno pq ñ quer pivô pequeno.

Pivots close to zero are numerically bad!

Se pedir p/ matlab fazer eliminação ele vai fazer as row exchanges.

faz row exchange

$$\boxed{PA = LU}$$ → any invertible A

→ escondido!

Pega as linhas na ordem certa e faz LU

Todas essas matrizes são invertíveis pq sempre podemos recuperar e reordenar essas linhas na ordem normal.

$$\boxed{P^{-1} = P^T} \rightarrow P^T P = I$$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Matriz Simétrica $\quad A^T = A$

↳ unchanged by transposing.

Rectangular matrix

$R =$ $\qquad$ $R^T =$ $\qquad$ → Se multiplicar, dá uma matriz simétrica.

$R^T R$ is always symmetric!

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1\times1+3\times3 & 1\times2+3\times3 & 4\times1+3\times1 \\ 2\times1+3\times3 & 2\times2+3\times3 & 4\times2+3 \\ 4\times1+3\times1 & 4\times2+3\times1 & 4\times4+1\times4 \end{bmatrix}$$

$l_1, c_3 = l_3, c_1$

Simétrica!

$$(R^TR)^T = R^T(R^T)^T = R^TR$$

!!!

Sempre obterei matrizes simétricas assim!

$R^TR = A$

$A^T = A \rightarrow$ Simétrica!

We're ready for chapter 3!

Vector Spaces

Vetores - o q fazemos com eles? Adicionamos. multiply them by numbers, usually called scalars.

Se temos $\vec{v}$, conhecemos $3\vec{v}$.

Se temos $\vec{v}$ e $\vec{w}$, conhecemos $\vec{v}+\vec{w}$.

A grosso modo, falar sobre espaços de vetores tem requerimentos q são adicionar elementos, multiplicar por números, e mais umas reguinhas a serem satisfeitas.

Vetor Spaces → O que "space" quer dizer aqui?

"vetores formam um espaço de vetores. Mas ñ qualquer coleção de vetores.

espaço tem q me permitir fazer as operações ficas.

→ adicionar e multiplicar vetores

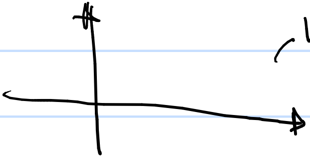
→ ou seja, combinações lineares.

Ex:

$\mathbb{R}^2$ → all two dim. real vectors   Ex: $(3,2)$

$(0,0)$

(π, e)



whole plane is $\mathbb{R}^2$ (x-y plane)

It's a vector space because all those vectors are in there.
Suponha q removi $(0,0)$.

Se eu tiro um ponto, o q acontece?

Olha, no espaço, eu preciso multiplicar qqr vetor por qqr nº. Se eu pego um vetor e multiplico por zero e o resultado tem q estar ali no espaço, Eu sou permitido, no espaço, multiplicar por zero e meu espaço tem q estar ali. ~~n~~ posso fazer isso sem o ponto (0, 0).

Posso sempre tb somar o cara com ele mult. por (-1). Recairia na origem de novo. Assim, todo vector space tem q conter zero.

$\mathbb{R}^3$ - vectors w/ 3 real components

Vector $(3,2,0) \rightarrow \in \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^n$ - all vectors w/ n components.

└ "column vectors w/ real components"

Mais sobre espaços:

Ex: $\mathbb{R}^2$ - adiciono, multiplico e continuo no $\mathbb{R}^2$.

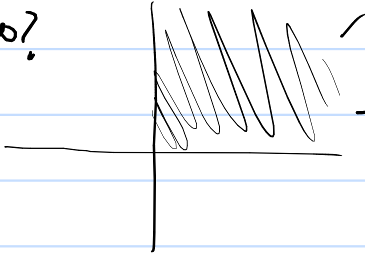
É o mesmo p/ $\mathbb{R}^n$.

Estas operações de adicionar e multiplicar têm a obedecer certas regras.

The book lists the 8 rules that addition and multiplication have to satisfy.

Podemos fazer estas somas e permanecer no espaço?

Ex:



$\frac{1}{4}$ do vector space

- posso adicionar os vetores aqui e continuar aqui? Sim. E multip. por -1? Continuo no 1º quadrante? Não.

Então ele ñ é um espaço vetorial pq ñ é FECHADO.

Não é fechado p/ a multiplicação de nºs reais.

A vector space has to be closed under multiplic. and addition of vectors.

In other words, linear combinations.

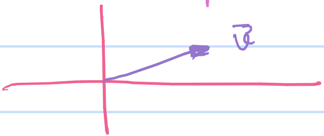
Estamos interessados em vector spaces inside $\mathbb{R}^n$.

Vector spaces that follows the rules

Começamos com $\mathbb{R}^2$, pegamos o 1º quadrante (uma parte dele) e "messed it up".

Vector Space that is part of $\mathbb{R}^2$ and we can multiply, add and stay in this smaller vector space. → Isto se chama Subespaço.

Subespaço de $\mathbb{R}^2$ → suponha q contém v.



Logo, $2\vec{v}, 3\vec{v}, \ldots$ tb estão.

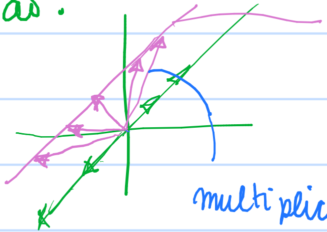
$0, \frac{1}{2}\vec{v}, \frac{1}{5}\vec{v}, \ldots$ tb.

Uma vez q tinho um vetor nesse subespaço, tenho a linha inteira de possíveis múltiplos.

Verificação p/ a adição: posso adicionar quaisquer 2 vetores na linha q continuam na linha.

Ex: uma linha no $\mathbb{R}^2$. → Qualquer linha?

Não.



Esta linha? Veja os vetores dela.

Não é um subespaço!

→ Não contém zero vetor.

multiplico por zero e ñ cai na linha rosa!

Zero tem q estar em todo subespaço tem q conter zero.

Pq tinho q ser capaz de multip. por zero e o result. tem q estar lá.

Subspaces of $\mathbb{R}^2$. → todo o espaço $\mathbb{R}^2$. (ocupam)

- ↳ todo o espaço $\mathbb{R}^2$
- ↳ any line infinitely far in both directions through the zero. (One dimension) → any line through $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  2 for line

  vetores têm 1 componente

  Is this line the same as $\mathbb{R}^1$?

  $\mathbb{R}^1$ é uma linha. Estou falando de uma linha dentro do $\mathbb{R}^2$ (esse subespaço), os vetores dele têm 2 components. Very close but not the same!

- → the zero vector alone. Subspace Z (zero)

The zero vector itself satisfies the rules.

that's always the littlest subspace.

The largest subspace is the whole thing.

$\mathbb{R}^3$ → todo o subespaço $\mathbb{R}^3$
→ planos q passam na origem.
→ zero vector

Quero criar alguns subespaços a partir da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

→ One is from the columns

As colunas de A são vetores em $\mathbb{R}^3$.

As colunas estão no $\mathbb{R}^3$. Quero elas no meu subespaço.

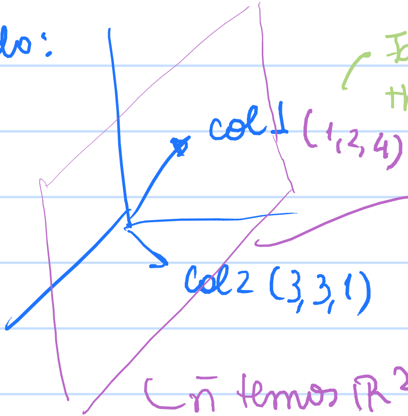
Se coloco 2 colunas, o q + tem q conter esse subespaço?
- as somas
- os produtos
- todas as comb. lineares possíveis

Se eu incluir todos os resultados, tenho um subespaço.

Dou um nome. ESPAÇO COLUNA, C(A) de A

Nosso espaço tá no $\mathbb{R}^3$ e nosso espaço de vetores estará em $\mathbb{R}^3$. → precisamos pegar as combinações deles.

Desenhando:



Take all combinations of those 2 vectors in $\mathbb{R}^3$.

é um plano passando pela origem contendo essas colunas.

(ñ temos $\mathbb{R}^2$ pq nossos vetores têm 3 componentes.

Se nossas 2 colunas estivessem na msm linha, o espaço-coluna seria uma linha.
Aqui calhou de ser um plano.

Como criar um subespaço a partir de uma matriz.
↳ pega as colunas, todas as comb. lineares e se fica
como o espaço - coluna. ⌐ de vectore column spaces?
Como eu entendo $Ax=b$ nesta abordagem?

* e quais os outros subespaços?
↳ o Espaço - coluna é o maior.
Há outros por vir. Aguarde
cenas dos próximos
capítulos... ☺