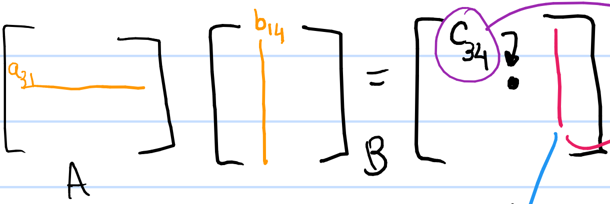
Multiplication and Inverse Matrix

· idéia da inversa: a matriz faz uma transfor. linear e a inversa tem q desfazer.



é filho do row 3 de A com column 4 de B

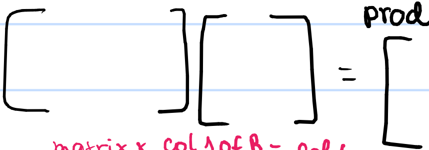
col n = A · col n de B

$c_{34} = (\text{row } 3 \text{ of } A) \cdot (\text{col } 4 \text{ of } B) = a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} + \dots = \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k4}$

↳ dot product

col of C are combinations of columns of A

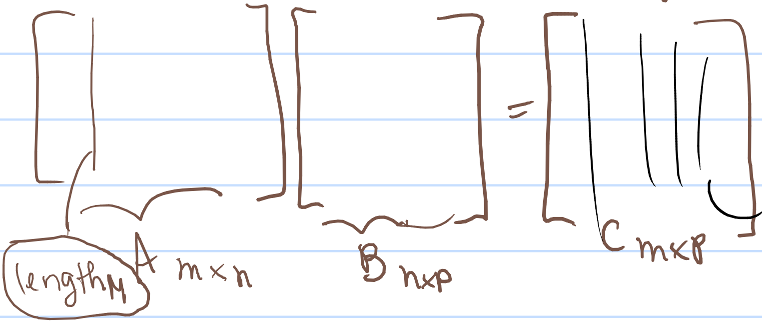
(todas vem de A · col B



matrix × col 1 of B = col 1 C

Pensemos em mult. uma matriz por um vetor. - Já sei fazer.

Columns of C are combinations of cols of A



• every col of C is some combination of the columns of A

length m

length m

Combin. of col of A.

3ª forma - olhar como rows:

row of A mult. all these rows and producing a row of the product.

Combinations of rows of b.

row of A mult. by rows of B

these rows produce a row of the product.

4.ª forma:

col of A × row of B
(m×1)   (1×p)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times1} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}}_{1\times2} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

row of B

todas múltiplas de row of B.

colunas são múltiplas da coluna de A.

AB = $\sum$ ((Sum of cols A) × (rows of B))

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\text{1st column}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}}_{\text{1st row}} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

se eu fizer um desenho desses row vectors, they're all the same direction (line through (1,6)).

- linhas são múltiplas de linhas de B
- colunas são multiplas das cols de A

row space → all the combinations of the rows, is just a line through vector (1,6) for this matrix.

All the rows lie in that line.

→ column space is also a line.

all columns lie on the line through vector (2,3,4)

Vc pode dividir sua matriz em blocos e fazer por blocos a multiplicação.

Block multiplication

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right]}_{A\ (\text{square})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right]}_{B\ (\text{square})} = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline & \end{array}\right]$$

10x10

- É como Block Rows

Inverses

Square matrices first.

$A A^{-1} = I = A^{-1} A$ for square matrices, se A tem inversa!

↓ ↳ if this matrix exists!

pode ou ñ ter inversa, certo?

For rectangular matrix, right inverse isn't the left inverse.

Invertible or non-singulars.

- Quero ser capaz de saber se e qd uma matriz é invertível (ñ-singular).

Singular case - no inverse

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ → Pq ñ tem inversa? Possíveis respostas

① $\det A = 0$

② Suppose $A \cdot X = I$. Pq ñ é possível?

O resultado teria q ser múltiplo das colunas de A, certo? Can I get I? No way. Columns of I, eg. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ñ é combinação dessas colunas because those 2 columns both lie on the same line.

Every combination is going to be on that line and I can't get one zero.

③ A square matrix won't have an inverse if I can find a vector x que dê $Ax = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 3x_2 = 0$

$2x_1 + 6x_2 = 0$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{matrix}\right\}$ zera!

I can find an $x \neq 0 \mid Ax = 0 \Rightarrow$ se existisse...

But x is not zero!

$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow 3 \times \text{col}\,1 - 1 \times \text{col}\,2 =$ ZERO COLUMN.

Colunas ñ podem ser comb. lineares umas das outras.

The matrix can't have inverse if some combination of the columns GIVES NOTHING.

$Ax = 0 \qquad A^{-1}Ax = A^{-1}0 \qquad Ix = 0$

$x = 0$

non-invertible matrices, singular matrices, some combinations of their columns gives the zero column.

→ Transforma um vetor x em zero e não tem jeito da inversa de A recuperar isso, desfazer isso!

$Ax = 0$

↳ transformação q age em x e transforma ele em zero.

• mas qd multiplico por A^{-1}, nunca poderei escapar do zero.

Non-invertible matrices (SINGULAR)

↳ some combinations of their columns give zero column. They take some vector X into zero. And there's no way A inverse can recover, right?

Qd multiplico usa matriz que transforma X em zero por outra "inversa", ñ poderia escapar de zero.

row 1 + 3 · row 2

A → tem inversa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

tinha:
row2
└ tirei

- det ≠ 0!
- columns point in ≠ directions → I can get anything.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tinha row 2

↓

2 · row1 + 7 · row2

− 1 row1 − 7 row2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \times$ column j of A^{-1} = col j of I

We're back to Gauss. But now we have 2 columns do lado direito. Aí vem Jordan.

Gauss-Jordan solves 2 equations at once.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{se posso resolver os 2, tem invertible.}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

→ faço elimination steps p/ aparecer a identidade aqui e a inversa aparece do outro lado.

I

2. linha 1 - linha 2

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

→ Gauss would quit, but Jordan says "keep going!" → upper triangular form já temos!

row 1 − 3. row 2

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

→ Gauss - Jordan Idea!

será A^{-1}

Por que isso acontece? Elim. in $[A|I]$

E's! lembrar das Elimination matrices.

teve uma E que subtraiu 2x isso disso. Depois outra q subtraiu 3x aquela linha da outra...

→ Produto de todas as little pieces. Together, they gave me $\underline{\underline{E}}$ that does both steps.

↳ the net result was to get an I in the left side.

$$\underbrace{E}_{\forall E} \cdot A = I$$ tells us that $E = A^{-1}$. No right hand side,

$$\underbrace{A^{-1}}_{E} \cdot I = A^{-1}$$

//

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to 1 \times row1 + 3 \cdot row2 \\ \to \underbrace{2 \times row1 + 7 \cdot row2}_{\text{operações que a inversa terá que desfazer!}} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

achava q era assim, mas ñ é!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rascunho!