Column Space and Null Space

Vector Spaces and Subspaces

Tenho interesse em 2 subespaços : null / column.

① Q é um espaço vetorial? ⇒ Conjunto de vetores onde sou permitida adicionar qqr 2 vetores do espaço, a resposta continua no espaço. Multiplico qqr vetor dele por uma constante e o result. tá no subespaço.

$\left.\begin{array}{l} v+w \\ cv \end{array}\right\}$ are in the space

$\boxed{cv + dw}$ are in the space $\Rightarrow$ I can take linear combinations

stay in the space.

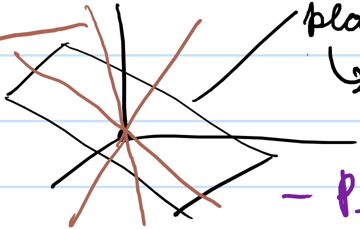
Estou em 3D. Um espaço é o 3D. $\mathbb{R}^3$.

Subespaços - vectors inside the given space.

Dentro de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ q ainda faz um espaço.

- vector space inside vector space.

Lines are subspaces of $\mathbb{R}^3$



plano q passa pela origem

$\hookrightarrow$ infinito

é subespaço

— Plane through $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Se tenho 2 vetores no plano, somo-o resultado fica no plano.

União de 2 subespaços P e L (plane, line)

P ∪ L = all vectors in P or L or both

a união ñ é um subespaço, mas P ∩ L é subespaço. É subespaço!

Se L ñ tá no plano, a interseção é (0,0,0)

Se tá, a interseção é L.

tb é subespaço.

P/ quaisquer subespaços S e T

$S \cap T$ é subespaço.

Se pego vetores na interseção. Pq a soma tá na interseção?

→ v e w estão ambos em S e ambos em T.

└ v + w está em S. Pq S é subespaço.

Tb estará em T pelo mesmo motivo.

v + w está na interseção.

→ Qd pega a interseção de 2 subespaços vc fica com subespaços menores, mas é subespaço.

Column Space of A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

→ O Espaço coluna dessa matriz é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

3 vetores de 4 dimensões

4 componentes em uma coluna.

column-space of A

q é um subespaço em $\mathbb{R}^4$.

$C(A)$ → nesse subespaço estão contidos 3 vetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Mas ñ tenho um subespaço só com 3 vetores.
O subespaço será todas as combinações lineares desses 3 vetores.
L all liniar combinations of the columns.

tem 3 colunas e suas combinações.
→ How big is that space? $\mathbb{R}^4$ inteiro?
Ou um subespaço dentro dele?
comb. lineares de 3 vetores ñ preenchem o $\mathbb{R}^4$.

$Ax = b$ sempre tem solução $\forall b$?

4 equações, 3 incógnitas / tem vários vetores b q̄ n̄ são comb. das 3 colunas.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

p/ alguns b's posso resolver. Quais?

Which b's allow this system to be solved?

$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$ ↗ se $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$

$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$ ↗ se $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$

Dará p/ resolver p/ $\underline{b}$ se b for comb. linear do Espaço-coluna.

Posso resolver o sistema qd $\underline{\underline{b}}$ é um vetor no Espaço - coluna.

$Ax=b$ qd b é combinação de colunas.

I can solve $Ax=b$ exactly when b is in the column space.

Pq o column space contém todas as combinações, todos os Ax.

All vectors → A times any x.

As colunas são independentes?

→ Se pego combinações das 3 colunas, fico com um $\mathbb{R}^3$?

Posso jogar 1 coluna fora e ficar c/ o msm subespaço?

Se ñ for LI, sim.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ñ colabora com nada novo.
Posso jogar ela fora.
Pivot column.

Col 3 = col 1 + col 2.

Poderia jogar fora a 1? Sim. col3 - col2.

Está no mesmo plano q as 2 primeiras.

Column-Space of A:
Subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^4$.

Null Space

Null space of A

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

→ Contem todos os x q solucionam $Ax = 0$

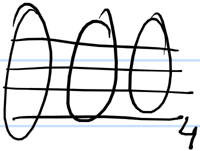
Estou interessada nos x.

null space is a subspace de $\mathbb{R}^3$.

① column - Space was in $\mathbb{R}^4$.

Esp. coluna $C(A)$ in $\mathbb{R}^4$

Esp. ~~[illegible]~~ nulo em $\mathbb{R}^3$.



$4 \times \underset{\sim}{3}$

↓

\# de incógnitas

Nullspace

$$A x = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Quantos x multiplicam as colunas?

É a dimensão do espaço-coluna.

zero é sempre solução

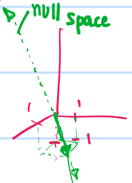
Q que q seja a matriz, seu espaço nulo contém zero. O espaço-nulo contém zero.

$N(A) \rightarrow$ espaço-nulo de A

└ contém $\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -2\end{bmatrix}$

O espaço nulo da matriz é $\begin{bmatrix}c\\ c\\ -c\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ → vetor L.I.

* The null space is a line. no $\mathbb{R}^3$.



Check that the solutions of $Ax=0$ always give a subspace.

(Quer dizer q,
Se tenho uma solução x e outra $\bar{x}$,
$x+\bar{x}$ é tb solução.
Se $Ax=0$ e $A\bar{x}=0$,

$Av=0$ e $Aw=0$

Se v tá no espaço-nulo e w tb, $v+w$ tb estará. Óbvio:

$$\underbrace{A(v+w)=0}$$

$$\underbrace{Av}_{0}+\underbrace{Aw}_{0}=0$$

$\blacksquare$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

outra solução

$$\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

As soluções formam plano q n̄ passa na origem.
Subspaços têm q passa na origem.

Zero vector is not a solution ⇒ the solutions don't form a subspace.

Solutions can't be a vector space

pq n̄ contém [0,0,0]

Lecture 7 -

Algoritmo p/ solucionar $Ax=0$. Nullspace.

→ Posso pegar uma matriz A e descrever

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$c_2 = 2 \cdot c_1$

$l_1 + l_2 = l_3$

↓

td isso vem na eliminação.

No caso retangular, tenho q continuar mesmo se aparecer zero no pivô.

Eliminação - muda o espaço - coluna e ñ muda o espaço-nulo.

pego as linhas e elas interagem

→ ve ñ tá mudando as soluções.

→ As soluções ñ mudam pq tô fazendo eliminação, operações legítimas nas equações.

Quando $Ax=0$, o lado direito é sempre zero nas minhas combinações lineares e p/ ñ ficar escrevendo zero, trabalho do lado esquerdo só.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to -2 \cdot 1^{a} + 2^{a} \\ \to -3 \cdot 1^{a} + 3^{a} \end{array}$$

1st pivot

Free columns - sem pivô.
(colunas 2 e 4

next pivot

ñ tem pivô em (2,2) → 2º column is dependent of 1º column

$$U \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \text{matriz } U$$

se tivesse outro pivô aqui,
staircase would include that.

"matriz U" - upper something !!

echelon form - stairs form

mas aqui só temos 2 pivôs

$Ax = 0$ Same = Solutions $Ux = 0$

Same nullspace

nº de pivôs = 2

Rank of the matrix = nº de pivôs.

3 eq., 4 incógnitas → tenho 2 pivot - columns

→ free columns - posso atribuir qqr número às variáveis x2 e x4. E resolver as equações p/ x1 e x3. Ex: x2 = 1 e x4 = 0.

Pode ser qqr número.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$
$$2x_3 + 4x_4 = 0$$

Este é um vetor no espaço-nulo. Uma solução em $Ax=0$.

$x_4 = 0 \rightarrow x_3 = 0$

$x_1 + 2 \cdot 1 = 0$ ($x_2 = 1$)

$x_1 = -2$

Solução: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

diz q $-2 \cdot 1^{a}$ coluna de 0 + $1 \cdot 2^{a}$ coluna é a coluna zero.

outras soluções são os múltiplos:

$c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

• Vc tem q sempre ver pela eliminação quem são as free columns e quem são as pivot columns

isso descreve uma linha mt longa no espaço 4-dimensional.
Subespaço.

Mas esse é o espaço nulo completo? Não. Tenho 2 variáveis livres. Isso foi o q obtive escolhendo $x_2 = 1$ e $x_4 = 0$. Se for $x_2 = 0$ e $x_4 = 1$:

$$2 \cdot x_3 + 4 \cdot 1 = 0 \quad \therefore \quad x_3 = -2$$
$$x_1 + 0 - 4 + 2 = 0$$
$$x_1 = 2$$

$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Achei outro vetor no espaço-nulo.
(Quais são todas as soluções p/ $Ax=0$?
Pq dei $0,1$ e $1,0$ p/ x_2 e x_4?
Era uma forma de ter certeza de capturar todas as soluções. Pq capturo todas fazendo assim?

Nullspace:

2 special solutions pq tem 2 free variables.

$$x = c\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

na verdade tô resolvendo $Ux=0$.

The null space contains exactly all the combinations of the special solutions

↳ Quantas special solutions tem?

$\underbrace{\# \text{ de } \overset{n}{\text{Colunas}} - \text{rank}}_{n-r \text{ free variables}} = \#$ de free variables $= \#$ de special solutions

Resposta do algoritmo completo p/ achar all the solutions to $Ax=0$.

echelon form

$$U = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\0 & 0 & 2 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Reduced row echelon form

a linha 3 desapareceu pq era uma comb. linear de L1 e L2! a eliminação descobriu isto!

↳ Esta forma tem zeros em cima e embaixo dos pivôs.

$$L_1 - L_2 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\0 & 0 & 2 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \text{Fazer pivôs} = 1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{=R}$$

Comando matlab: rref(A) → reduced row echelon form

↳ se eu coloco matriz original A

Se pegar pivot rows and columns, dá a matriz identidade.

Esse R me dá:

- Pivot rows (1 e 2, as linhas q contêm pivô)
- pivot columns (1 e 3, colunas q têm pivô)

→ a última linha foi zerada pois a elimin. denuncia que ela é comb. linear das demais.
(mostra q de fato temos só 2 linhas.

↳ posso ver de cara as soluções especiais.

→ x_2 e x_4 eram os livres. Sem pivô.

Repare que:

$$
\begin{array}{rcccc}
A = & \left[\begin{matrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] & & & \\
 & \text{fixa} \quad & \text{livre} \quad & \text{fixa} \quad & \text{livre} \\
\text{multip.} \rightarrow & x_1 & x_2 & x_3 & x_4
\end{array}
$$

Fixa — identidade | Livres

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

0 0 0 0

x_1 e x_3 — x_1 e x_3 — coluna do x_2 — coluna do x_4

Os nº livres aparecem na solução geral com sinal invertido pois passam p/ o outro lado da igualdade.

Serão:

$$
\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}
$$

x_2 e x_4 — x_2 e x_4

Solução geral:

$$
c \begin{bmatrix} -2 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \underline{0} \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ \underline{0} \\ -2 \\ \underline{1} \end{bmatrix}
$$

x_2 e x_4 ⇒ free

Reduced row echelon form

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

free

} pivot rows

Pivot columns

n−r free cols

Se quero resolver $Rx=0$

Crio $\underbrace{\text{nullspace matrix}}_{N}$ → suas colunas são as special solutions

$$RN=0$$

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow N \text{ será } \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

Para produzir null basis no matlab. Calcula R, pega os pivôs, coloca zeros e uns nas var. livres e copia as pivot variables.

$$Rx=0$$

$$\begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{pivot} \\ x_{free} \end{bmatrix} = 0$$

$$I \cdot x_{pivot} \cdot F \cdot x_{free} = 0$$

$$\boxed{x_{pivot} = -F \cdot x_{free}}$$

x_{free} → escolho 1 e 0

$x_{pivot} = -F$

Outro exemplo: transposta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

tenho 3 colunas. terei 3 pivôs?

col 3 = col 1 + col 2

col 3 será free column.

ROW reduced echelon form:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L1 - L2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot cols — free column

→ x_1 e x_2 → piv

x_3 → free

→ rank = 2

→ 1 special solution

$$R = \begin{array}{c|c} I & F \\ \hline 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}^{I} & \overbrace{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}}^{F} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

I give x_3 convenient variable ($x_3 = 1$)

↓

$x_2 = -1$

$x_1 = -1$

$$-F = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$N = c \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ I = 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

→ whole nullspace!

→ nullspace matrix N, 'nullspace é o cara q tem colunas = special solutions

$\# \underbrace{\text{de pivôs}}_{\text{rank}} \text{ de } A = \# \underbrace{\text{pivôs}}_{\text{rank}} \text{ de } A^T$