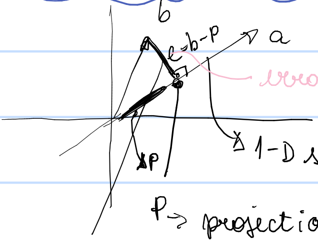
Projections onto subspaces



Point on the line closest to b.

erro - quão errado estou → $b-p$

1-D subspace

$P \to$ projection onto the line

Perpendicular to $\underline{\underline{a}}$

p está em $\underline{\underline{a}}$. $\quad p = \alpha a$ — múltiplo de a

$\boxed{e = b - \alpha a}$ é perpendicular a a:

$$a^T(b - \alpha a) = 0$$

$$\alpha a^T a - a^T b = 0$$

$$\alpha a^T a = a^T b$$

$$\alpha = \frac{a^T b}{a^T a}$$

$$\boxed{\text{Projection: } p = a\,\frac{a^T b}{a^T a}}$$

Se eu mudar b p/ 2b, o que acontece?
duplicate!

Se eu mudar a, a projeção ñ muda. A projeção será feita na mesma linha.

A projeção é uma matriz q age no input b a ser projetado.

$$\text{proj} = \underbrace{P}_{\text{matriz de projeção}}\, b$$

$p = a\dfrac{a^Tb}{a^Ta}$ → projection → $P\,b$

$\dfrac{aa^T}{a^Ta}$

aa^T → uma matriz, col. line = matrix

a^Ta → um número, o tamanho de a^2.

aa^T é uma matriz. Qual o rank? Qual seu column-?

Se multiplico vetor b por uma matriz, vai sempre ter um resultado no espaço-coluna da matriz.

$p = \dfrac{aa^T}{a^Ta}\,b$ $\quad p = P\,b$

→ a resposta estará no espaço-coluna de $P = \dfrac{aa^T}{a^Ta}$

$C(P)$ = line through a — sempre vou cair no a.

rank$(P) = 1$ → column × row - rank 1 matrix

→ a coluna é a base p/ o espaço-coluna.

5×1, 1×5 → 5×5

Essa matriz é simétrica?

$(aa^T)^T = (a^T)^T a^T = aa^T$ → Sim!

→ O que ocorre se eu fizer a projeção 2×? P^2

Pego P, multiplico por b. Chego na projeção. Se eu projeto de novo, a resposta é a mesma.

$\boxed{P^T = P \quad P^2 = P}$ → requisitos

Generalização:
Para subespaços n-dimensionais.

Why project? Pq mtas vezes $Ax=b$ pode ñ ter solução!

Por exemplo, se tenho + eqs q incógnitas. ñ consigo resolver.
Resolvo o problema + parecido que eu puder.

$A\cancel{x}$ sempre estará no espaço-coluna de A.

$A\cancel{x}$ tem q estar no espaço-coluna e b provavelmente não estará.
Troco b pelo q?
↳ I choose the closest vector in the column-space. Solve $Ax=p$ instead.
Because $Ax=b$ may have no solution,
I solve $A\hat{x}=p$ instead. p é a projeção de b no espaço-coluna.

↓

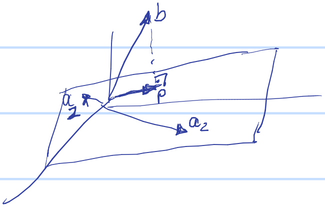
$\hat{x}$ é o melhor x que consigo. Não é o x. x não existe.

Qual o melhor p? Que esteja no espaço-coluna e seja bem próximo (o + possível) de b. Aí terá solução.

Tenho um plano → espaço-coluna. E tenho um b que ñ está no plano. Quero projetar b no plano.

P/ chegar na fórmula, tenho q conhecer o plano.
→ Como sei q é um plano? Se te dei 2 vetores independentes que te dão uma base.

* plane of a_1, a_2 (2 vetores independentes)



O plano é o espaço-coluna de A.

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

Essas 2 colunas descrevem o plano, o espaço-coluna e eu quero projetar.

E recebi um b que $\notin$ ao $C(A)$. Se b tá no $C(A)$, a projeção seria ele mesmo. não conta! Mas normalmente tenho um erro $\underbrace{e}= b - p \neq 0$

↳ is perpendicular to the plane.

Quem é a projeção p? É um múltiplo da base.

$$p = \underbrace{\hat{x}_1 a_1 + \hat{x}_2 a_2}$$

p é um múltiplo das colunas de A, tá no col (A).

$$p = A\hat{x}$$

Agora, meu problema é achar uma combinação das colunas tal que o vetor de erro seja perpendicular ao plano. $p = A\hat{x}$ Find $\hat{x}$

Key: $\underbrace{b - A\hat{x}}_{e}$ is perpendicular to the plane ($\perp$ to a_1 and to a_2) perpendicular a tudo no plano.

* $a_1^T (b - A\hat{x}) = 0$

* $a_2^T (b - A\hat{x}) = 0$

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix} (b - A\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T (b - A\hat{x}) = 0$$

$A^T(\underbrace{b - A\hat{x}})=0$

↳ Esse cara é perpendicular ao Espaço-coluna de A. Ele tá em q subespaço?

Porque $A^T e = 0$...

... e in $N(A^T)$!

O que sei sobre $N(A^T)$? $\perp$ Ortogonal ao espaço coluna de A.

$e \perp C(A)$? YES!

$A^T b = \underbrace{A^T A}_{n \times n} \hat{x}$ → daqui tiro o $\hat{x}$!

$(A^T A)^{-1} A^T b = \hat{x}$

$p = A\hat{x}$ → a solução é a combinação de colunas de A que me dá a projeção.

$p = A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T b}_{\hat{x}}$ → no começo da lição, tínhamos achado em 1-D $P = \frac{aa^T}{a^Ta}$ ← projection matrix

Que matriz está multiplicando b para dar a projeção?

Agora, $P = A\underbrace{(A^T A)^{-1}}_{A^{-1}(A^T)^{-1}} A^T$

Inversa de um produto:

$P = AA^{-1}(A^T)^{-1}A^T = I$! Ué, seria a identidade! / Não tem inversa!

↳ E agora?

• O erro está no fato de que A não tem inversa, ~~mas~~ é uma square matrix!

Tenho q deixar quieto pq A não tem inversa!

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T$$

A tem mtas linhas, poucas colunas (variáveis)

Como ñ é quadrada, I'm not allowed

A^TA é quadrada, rola inverter.

Mas A, ñ rola inverter!

Se A for uma matriz quadrada, # de eq. = # de incógnitas, projection = I. b, será o próprio b, pertencerá ao col(A).

Pq? Se A é nice square invertible, seu espaço-coluna será o $\mathbb{R}^n$ inteiro!

Se tô projetando no whole space, the projection matrix é a identidade.

Se tô projetando b no whole space, ñ no plano, b já estará no column-space. $P = I$.

Mas se tô projetando num subespaço, ñ posso ficar com essa fórmula desmembrada de P.

E essa será a cara dela em n-dimensões.

Que propriedades P deve ter?

(1) $P^T = P$

$P^T = (A^T)^T (A(A^TA)^{-1})^T$

$P^T = A((A^TA)^{-1})^T A^T$ → é igual?

Sim. A^TA é simétrica e a inversa tb é.

Testar se $P^2 = P$

$$A(A^TA)^{-1}\underbrace{\cancel{A^TA(A^TA)^{-1}}}_{I}A^T$$

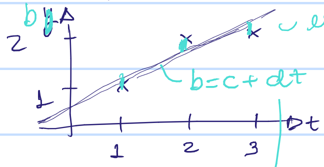
$$= A(A^TA)^{-1}A^T = P$$

Se tenho várias equações e quero achar $\hat{x}$.

Applications:

- Least squares
- Fitting by a line

Problema:
Tenho um monte de pontos que ñ ficam numa linha. Ficam próximos a ela.



erros menores que eu puder.

Se eu achar a matriz A, as fórmulas tô procurando darão tal. do C e D.

Fit the points

(1, 1)

(2, 2)

(3, 2)

1º ponto: $t=1$

2º ponto:

$$\left.\begin{aligned} C + D &= 1 \\ C + 2D &= 2 \\ C + 3D &= 2 \end{aligned}\right\}$$ Equações q gostaria de resolver se possível fosse.

Qual a matriz, o x e o right-hand side?

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$Ax = b$ ñ tem sol.
Resolvo então da melhor forma:
$A^TA\hat{x} = A^Tb$.