Projection matrices and least squares

$P = A(A^TA)^{-1}A^T$

↳ Esta fórmula é p/ produzir uma projeção.

P.b é a projeção de b em A

Project b to the nearest point in the column space. P é a identidade

has the form Ax

Se b tá no col(A), $Pb = b$

Se b é perpendicular a col(A) → Se n̄ tiver componentes no column-space- $Pb = 0$

Extreme cases!

O que significa isso? Está em um outro espaço: $N(A^T)$.

Proj: $Pb = A(A^TA)^{-1}A^T b$ ← Ax

$A \cancel{(A^TA)^{-1}(A^TA)} x$

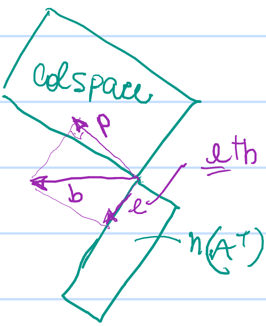
$Pb = A\underbrace{x}$ → $Pb = b$

$\underbrace{Ax}_{b}$

$\underset{Pb}{p} + e = b$

the rest of the vector: $\underbrace{(I-P)b}$

projection onto ⊥ space.



e tb é uma projeção. No nullspace.

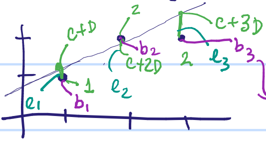
Se P é projeção, $I-P$ tb. Se P é simétrica, $I-P$ é simétrica.

Se P é simétrico, $(I-P)$ é simétrico.

Se $P^2 = P$, $(1-P)^2 = 1-P$

Find the best straight line:

$y = C + Dt$



$C + D = 1$

$C + 2D = 2$

$C + 3D = 2$

os pontos do vetor $\underline{b}$ que quero projetar.

$Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Least squares solution

Minimize $\|A\underset{\sim}{x} - b\|^2 = \|e\|^2$ error vector

é um vetor, por isso, a norma!

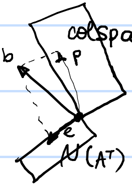
Proj.

It's linear regression!

$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \rightarrow$ erro total

Least squares sofre muito com a influência de outliers.

Vector b $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$



Pb

$(I-P)b$

$p + e = b$

Colspace $\rightarrow$ Spanned by $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

whenever you got error/noise, this is the estimate that you use first.

Find $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix}$, P

$$\boxed{A^T A \hat{x} = A^T b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

A^Tb

$$\underset{2\times3}{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}}\underset{3\times1}{\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}5\\11\end{bmatrix}$$

normal eqns

$$\begin{cases}3C+6D=5\\6C+14D=11\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}6C+14D=11\\-6C-12D=-10\\\hline 0+2D=1\end{array}\qquad\begin{array}{l}3C+3=5\\3C=2\\C=2/3\end{array}$$

Pelo calculo: $\|Ax-b\|^2=\|e\|^2$

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2$$

fç de $(C+D-1)^2+(C+2D-2)^2+(C+3D-2)^2$

$\to$ 2 variáveis C e D, quero o mínimo

$$\frac{\partial}{\partial C}=0$$

Vai ser linear $\to$ derivada dos quadrados!

$$\frac{\partial}{\partial D}=0$$

eq2 $-3.$eq1 $\to$ $2D=1 \quad \therefore D=1/2$

$$6C+7=11 \therefore C=2/3$$

Best line: $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}t$

Cálculos dos erros:

error vector

$$e_1=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}$$

$$e_2=\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{2}-2=\frac{2}{3}+1-2=\frac{2}{3}-1=\frac{2-3}{3}=-1/3$$

$$e_3=\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{2}-2=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{2}{1}=\frac{4+9-12}{6}=1/6$$

$\vec{e} + \vec{p} = \vec{b}$

$$(-1/6, +2/6, -1/6) + \underbrace{\left(7/6, \frac{10}{6}, \frac{13}{6}\right)}_{} \stackrel{?}{=} (1,2,2)$$

$p = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}t$

- $t=1$ — $p = 7/6$
- $t=2$ — $p = 10/6$
- $t=3$ — $p = 13/6$

Sim!

p e e devem tb ser perpendiculares. São?

$$-\frac{7}{36} + \frac{20}{36} - \frac{13}{36} = 0$$

e é perpendicular a p no column-space mas tb perpendicular a todos os vetores no column-space.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e é $\perp$ a $(1,1,1)$?

$$-\frac{1}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = 0 \quad \text{Sim!}$$

é $\perp$ a $(1,2,3)$?

$$-\frac{1}{6} + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = 0 \quad \text{Sim!}$$

Resumindo:

$$\begin{cases} A^T A \hat{x} = A^T b \\ p = A\hat{x} \end{cases}$$

If A has independent columns, then A^TA is invertible. Pq?

Quero provar

Se ñ for invertível, então o q ocorre?

Proof: Suppose $A^TA\,x=0$

↳ Quero chegar que se tem q ser zero - aí chego que A^TA é invertible. Pq se é invertible, o nul(A) só contem $x=0$.

· A matrix was invertible when its nullspace is only the zero vector.

IDEA: $\underbrace{x^TA^T}_{(Ax)^T}\underbrace{Ax}=0$

$$\underbrace{(Ax)^T(Ax)}=0$$

isso é o tamanho ao quadrado, tá me dizendo que se o tamanho ao quadrado é zero, $(Ax)(Ax)$, $Ax=0$!

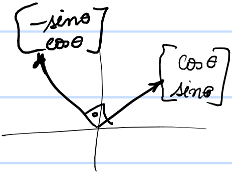
Se $Ax=0$, e se A tem cols independentes, nul(A) $=0$. Só tem $x=\{0\}$ no espaço nulo! Então $x=0$!

C.Q.D. //

Assim, A^TA tem q ser invertível pq suas cols são independentes.

Columns are __definitely__ independent if they're perpendicular unit vectors, like

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Nesse caso, $A^T A$ é a identidade.

If we're dealing w/ perpendicular unit vectors

orthonormal

falo n ortog. $\underbrace{}$ pq são vetores unitários

Próx. lição - ver pq são bons qd ortonormais e como transformar vetores em ortonormais através da escolha correta da base!