Orthogonal matrices and Gram - Schmidt

Last class on orthogonality

Vimos :

- orthogonal vectors
- orthogonal subspaces (eg. nullspace , rowspace)

VEREMOS:

↳ orthogonal basis , orthogonal matrix

Orthogonal basis $q_1, \dots, q_n$

Orthogonal matrix Q

Gram-Schmidt $A \to Q$

Every q is orthogonal to every other q. / $q_j^T q_i = 0$ (ortho!)

ORTHONORMAL VECTORS

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

→ ORTHO FOR THIS

→ NORMAL FOR THIS ($q_i^T q_i = 1$)

↳ é a norma

Vamos tentar trabalhar com orthonormal vectors.

se as colunas de A (basis) are not orthonormal, how do I make them so?

Tenho uma base ortogonal. Vou encaixar na matriz Q.

$$Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$q_i^T q_j = 0$

$Q^T Q \rightarrow$ $$Q^T Q = \begin{bmatrix} - & q_1^T & - \\ - & q_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & q_n^T & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ \ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^T Q = I$$

Se temos colunas ortonormais
e a matriz ñ precisa ser square.

$Q^T Q$, $A^T A \to$ asks for all the dot products

ñ são simplesmente orthogonal matrices.

matrices w/ orthonormal columns:

$Q \to$ orthonormal matrix (pq suas colunas são ortonormais)?
Não.

Matriz $Q \to$ se for quadrada, $\boxed{\text{orthogonal matrix}}$
SQUARE

Quando Q é quadrada, tenho a inversa dela.

If Q is square, $Q^TQ = I$

$$\downarrow$$
$$Q^T = Q^{-1}$$

a inversa é a transposta!

Examples: perm $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a 1ª col. do resultado será a col. 3 de A. a 2ª col. será a 1ª de A. a 3ª col. será a col 2 de A.

- has unit vectors in its cols, $\perp$ to each other

the transpose is also

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ → tenho cols ortogonais. Mas ñ é orthogonal matrix.

dot products w/ themselves é 2.

length squared.

length-squared é 2.

$[1 \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$

$[1 \;\; -1]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2$

$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ Adhmar's matrix

Pq é bom ter matrizes ortogonais?

$Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$1^2 + 2^2 + 2^2 \rightarrow 9$

$$\begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix}$$

one unit vector

→ We have a basis for the orthonormal spaces that are 2-Dimensional

Orthonormal vectors have got to be independent. Since they're headed off all at ninety degrees → there's no combination that gives zero.

Que fórmulas se tornam + fáceis por eu ter um Q?

Suppose Q has orthonormal columns.

I wanna project onto its colspace.

when we have orthon. basis in the col.

$P = Q(Q^TQ)^{-1}Q^T$ → Pq fica bacana qd tenho orthonormal basis? $Q^TQ = I$!

$$\underbrace{(Q^TQ)^{-1}}_{I}$$

$P = QQ^T$ → Projection matrix

Properties: $P^2 = P$ e É simétrica.

$QQ^T = I$ se Q é square!

Se a matriz é quadrada, cols independentes, ortonormais.

↓

Colspace is the whole space.

Qual a matriz de projeção no whole space?

↳ The Identity matrix!

Se eu tô projetando no whole space, every vector b is right where it's supposed to be.

Se Q é quadrada, $QQ^T = I$

$P = Q\underbrace{(Q^TQ)}_{I}^{-1}Q^T = QQ^T = I$ if Q is square

↓

$Q^T = Q^{-1}$

P

$\underbrace{(QQ^T)(QQ^T)}_{I} = QQ^T$

$Q^TQ = I$ p/ orthonormal matrices

$QQ^T = QQ^T$ ✓ OK

Pensa na equação normal:

matrix of inner products

$A^TA\hat{x} = A^Tb$

Agora: $\underbrace{Q^TQ}_{I}\hat{x} = Q^Tb$

$\boxed{\hat{x} = Q^Tb}$

Resposta direta! É só um dot product.

Projeção na i-ésima base de vetores.

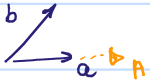
$\hat{x}_i = q_i^T b$

Começo com vetores independentes. Quero torná-los ortonormais.

Gram-Schmidt.

≠ do elimination (em q o objetivo era transf. em triangular), agora nosso obj. é transformar a matriz em ortogonal.

→ Colunas ortonormais



quero produzir vetores ortonormais a partir de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Orthogonal A, B.

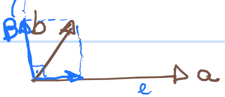
↳ * orthonormal $q_1 = \frac{A}{\|A\|}$

$q_2 = B/\|B\|$

a can be A. But the second direction (b) is not fine

ñ é ortogonal a A.

era nosso "e" error vector.



Como checo que esta matriz é perpendicular a A?

Se $A^T B = 0$, é ⊥

$A^T\left(b - \frac{A^T b}{A^T A} A\right)$

$A^T b - \frac{A^T b}{\cancel{A^T A}} \cancel{A^T A} = 0$ //

$\underset{e}{\tilde{B}} = b - p$

$B = b - xA$

$B = b - \frac{A^T b}{A^T A} A$

É perpendicular!

Se tenho 3 vetores a, b, c → looking for orthogonal vectors A, B, C → the third guy will be $\frac{C}{\|C\|}$

→ já tenho fórmula p/ B e p/ A. E C?

Começo com o c, subtraio

c – componentes em A e B.

$$C = \overset{\text{cezinho}}{c} - \underbrace{\frac{A^T c}{A^T A} A}_{\text{its component in A direction}} - \underbrace{\frac{B^T c}{B^T B} B}_{\text{its component in B direction}}$$

C tem q ser ⊥ a A e ⊥ a B.

Te dou 2 vetores, ve me dá a Gram-Schmidt orthonormal basis.

Ache A e B.

$A^TA = [1 \ 1 \ 1]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$a = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$

$A^TA\hat{x} = A^Tb$

$x = \frac{A^Tb}{A^TA}$

$B = b - \hat{x}A$

$A = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ → q_1

Capital A pode ser a.

$B = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} - \frac{1}{\underbrace{3}_{A^TA}}\underbrace{[1 \ 1 \ 1]\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}}_{A^Tb}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{A}$

$B = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} - \frac{1}{3}(3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}}_{q_2}$

A e B are ⊥

$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

$\boxed{\text{Original:}}$

$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$

$\boxed{\text{ortonormais:}}$

$Q = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ ← Facilita muito!

How's the $C(Q)$ related to $C(A)$?

it's the same.

Expression of Graham Schmidt

$A = QR$ → R é upper triangular

?

$A = QR$ → Expressão de Gram-Schmidt

$$\begin{bmatrix} | & | \\ a & b \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^T q_1 & * \\ a^T q_2 & * \end{bmatrix}$$

Pq é zero? Construí os q's p/ serem perpendiculares aos earlier vectors

Se eu tenho uma matriz de colunas indep., Graham-Schmidt produz uma matriz com colunas ortonormais e a conexão entre elas é uma matriz triangular.

Entender $A = QR$. Quem é Q?

Khan academy:

Set $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ — have length of 1 — all are orthogonal to each other

$\|\vec{v}_i\| = 1$ for $i = 1, 2, \dots k$.

$\|\vec{v}_i\|^2 = 1$ ou $v_i \cdot v_i = 1$

All the vectors in B have length 1

→ They have all been normalized.

if you dot it w/ itself, se vc pega o vetor e dota ele com qqr outro, $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ for $i \neq j$

→ B is linearly independent set.

$\vec{v}_i, \vec{v}_j \in B \quad i \neq j$

→ $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ / São perpendiculares.

Assuma que v_i e v_j são L.D. como $\vec{v}_i \neq 0$, $c \neq 0$

assim, posso expressar $\vec{v}_i = c\,\vec{v}_j$

$$c\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j = 0$$

$$c(\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j) = c\,\|\vec{v}_j\|^2 \Rightarrow \|\vec{v}_j\|^2 = 0$$

Como $c \neq 0$, $\|v_j\|$ teria q ser zero.

Contradição!

Assim, eles têm que ser linearmente independentes;

B is the basis for V

$V = \text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$

B is an ord basis for V.

teste:

- a norma é 1
- São ortogonais entre eles?

$V_1 = \text{span}(\vec{v}_1)$

↳ vector $\vec{v}_1$ is the basis for the subspace V_1

Como saber se é ortonormal?

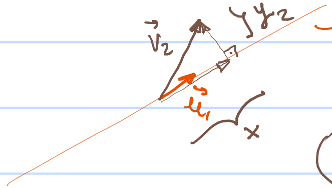
$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$$

$\{\vec{u}_1\}$ é base ortogonal para V_1

Complicando um pouco...

$V_2 = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ / $\vec{v}_1 = \|\vec{v}_1\| \vec{u}_1$

$= \text{span}(\vec{u}_1, \vec{v}_2)$



subspace $\to V_1$

$\vec{v}_2 = \vec{x} + \vec{y}$ where $\vec{x}$ is a member of V_1 e y é ⊥

y is a member of the orthogonal complement of V_1.

$\vec{x} \in V_1$ e $\vec{y} \in V_1^{\perp}$

$\vec{v}_2$ é L.I. com v_1 e u_1

$\vec{y}$ será $\vec{v}_2 - \vec{x}$ → Proj v_2 onto subspace V_1

$$\vec{y}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{V_1} \vec{v}_2$$

$$V_2 = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{v}_2) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{y}_2)$$

v_1 has orthonormal basis

$$\vec{y}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{v_1} \vec{v}_2$$

$V_2 = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{y}_2)$

$$\vec{y}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1)\,\vec{u}_1$$

To normalize $\vec{y}_2$,

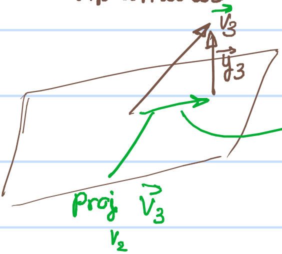
$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}$$

$$\boxed{V_2 = \text{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}$$

$V_3 = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_3)$ → Para acharmos um padrão.

the subspace is going to be a plane c/ as comb. lineares de V_3 que é L.I. dos dois primeiros

* quero um vetor ortogonal



É um membro do plano. É a projeção de $\vec{v}_3$ no subespaço V_2

$$\vec{y}_3 = \vec{v}_3 - \underbrace{\text{Proj}_{V_2} \vec{v}_3}_{(\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2}$$

Como $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ é base ortonormal, posso escrever assim.

$$\vec{y}_3 = \vec{v}_3 - (\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2$$

Posso substituir $\vec{v}_3$ por $\vec{y}_3$.

Mas y_3 ainda ñ foi normalizado.

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|}$$

Assim, $V_3 = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

$$\vec{y}_3 = \vec{v}_3 - (\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2$$

$V_4 = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \cancel{\vec{v}_4})$

$\cancel{\vec{y}_4}$ $\vec{u}_4$

$$\vec{y}_4 = \vec{v}_4 - \text{Proj}_{V_3} \vec{v}_4$$

Esse processo vai criando orthonormal basis. → Se chama Graham-Schmidt process.

Exemplo numérico:

Plano:

$x_1+x_2+x_3=0$

$V=$ plane defined by $x_1+x_2+x_3=0$

$$x_1=-x_2-x_3$$

$$x_2=c_1 \qquad x_3=c_2$$

$$x_1=-c_1-c_2$$

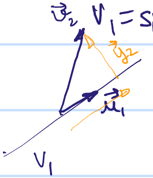
$$V=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$$

$$V=\text{Span}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

orthonormal space for the span of V_1

$V_1=\text{Span}(\vec{v}_1)$ $\quad \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

$V_1=\text{span}(\vec{u}_1)$



$$V_2=\text{span}(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=$$

$P+y_2=V_2$ $\qquad \text{span}(\vec{u}_1,\vec{v}_2)=\text{span}(\vec{u}_1,\vec{y}_2)$

$$y_2=\text{Proj}_{V_1}\vec{v}_2$$

$$y_2=\vec{V}_2-\text{Proj}_{V_1}\vec{v}_2=(V_2\cdot u_1)u_1$$

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$y_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

Mas ainda ñ tem length 1:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = 3/2$$

norma $= \sqrt{3/2}$

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{1}{\|y_2\|} \cdot y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \\ u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Esses 2 têm módulo 1 e são ortogonais entre si (e span V).

Temos aqui então uma base ortonormal para o plano.