Final lecture for determinants

① Formula for A^{-1} — about applications

$$\det AB = \det A \det B \qquad \begin{aligned} AA^{-1} &= I \\ \det AA^{-1} &= \det I \\ \det A \det A^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

determinants packs so much information in a single number

Fórmula p/ inversa.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\text{determinant}}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

transposta da cofatora - adjunta

Check: $\underbrace{A \cdot \frac{1}{\det A} C^T}_{\text{suposta } A^{-1}} = I \rightarrow AC^T = (\det A) I$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & & C_{n1} \\ \vdots & & \\ C_{1n} & & C_{nn} \end{bmatrix} =$$

cofactor formula for determinant

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n}} \rightarrow \det A & & & \\ & \det A & & \\ & & \det A & \\ & & & \ddots \quad \det A \end{bmatrix}$$

By combining n smaller determinants times -1 or 1 we have cofactor formula.

A razão pq tenho zero é q qd multiplico

por ex. first row of A and the last row of

cofactor matrix.

aplicação:

$$Ax = b$$

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} C^T b$$

Outra forma de ver essa fórmula:

Cramer's Rule -

1st component of the answer:

$$x_1 = \frac{}{\det A} \underbrace{C^T b} = \frac{\det B_1}{\det A}$$

cofatora × numbers → determinants of sth — vou chamar de B_1

$$x_2 = \frac{\det B_2}{\det A} \qquad x_3 = \frac{\det B_3}{\det A} \qquad \dots$$

Quem são $B_1, B_2, \dots$

A w/ col 1 replaced by b $= B_1 = \begin{bmatrix} | & n-1 \\ b & \text{cols of} \\ | & A \end{bmatrix}$

Pausa p/ uma teoria ...

$A \to U$ — upper triangular

$\det A = \pm \det U = \pm$ produto dos pivôs

└ isso vai depender do # de trocas de linhas q fiz.

± 1 é o det da matriz de permutação que troca linhas de A

Sem row exchanges, $P = I$ e $\det P = \det I = 1$

e $\det A = \det U =$ produto dos pivôs

$L \to$ é triangular com 1's na diagonal — $\det L$ é sempre 1.

$$\det AB = \det A \det B$$

$$AA^{-1} = I$$

$$\det AA^{-1} = \det A \det A^{-1} = \det I = 1$$

$$\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$$

$$|AB| = |A||B|$$

Se A é a identidade!

$$|B| = 1 \cdot |B| \qquad \frac{|B|}{|B|} = 1$$

Se troco 2 linhas de A, troco tb 2 linhas de AB.

dot product

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c & d \\ b & a \end{bmatrix}}_{\text{A com as linhas trocadas}} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{2_A} \cdot C_{1_B} & L_{2_A} \cdot C_{2_B} \\ L_{1_A} \cdot C_{1_B} & L_{1_A} \cdot C_{2_B} \end{bmatrix}$$

L_{2_A} L_{1_A}

Quando troco 2 filas de A, troco tb de AB.

$$\underbrace{(PA)}_{\text{A com linhas permutadas}} B = \underbrace{P(AB)}_{\text{AB com linhas permutadas.}}$$

$A' =$ A com ^{2} linhas trocadas

$$|AB| = |A|\,|B|$$

$$|A'B| = |A'|\,|B|$$

$$|A'B| = -|A|\,|B|$$

$$-|A'B| = |A|\,|B| \checkmark$$

AB é singular quando B é singular →

$$|B| = 0 \qquad |AB| = |A|\,\cancel{|B|} \to 0$$

$$|AB| = 0$$

$\det A^T = \det A$

Qd A é singular, A^T tb é.

$\det A = \det A^T = 0$

Se ñ é singular

$PA = LU$

$(PA)^T = (LU)^T$

$A^T P^T = U^T L^T$

$\begin{cases} \det P \det A = \cancel{\det L}\det U \\ \det A^T \det P^T = \det U^T \cancel{\det L^T} \end{cases}$

$\det L = \det L^T = 1$

$\det P \det A = \det U$

$\det P^T \det A^T = \det U^T$

são matrizes triangulares, têm a mesma diagonal!

$\det U = \det U^T$

$\underbrace{\det P}\det A = \underbrace{\det P^T}\det A^T$

$P^T P = I$

$\det P^T \det P = 1$

Propriedade de matriz de permutação

$\det P$ e $\det P^T$ podem ser 1 ou -1.

Assim, L U P têm msm dets que ambos iguais a L^T, U^T e P^T

e assim $\det A = \det A^T$.

Assim, as propriedades passam a valer p/ colunas tb!

Calcule:

$L_1 - L_3$ e $L_2 - L_3$

$$\det \begin{bmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{bmatrix} \rightarrow$$

$C_1 + C_3$ e $C_2 + C_3$

$$\begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & -a & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \\ 1 & 1 & 2-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 3-a \end{bmatrix}$$

$$\det = (-a)(-a)(3-a) = 0 \text{ se } \underbrace{a=0 \text{ ou } a=3}_{\text{aí seria singular!}}$$

→ Esses números, zero e 3 são os autovalores da all-ones

se $a=0$, "all-ones" matrix. Certainly singular!

Permutações e cofatores

- Pivot formula:

Se $\det A \neq 0$,

$$PA = LU$$

$$\underbrace{\det P}_{\pm 1} \det A = \overset{1}{\cancel{\det L}}\, \underbrace{\det U}_{} \text{ triangular}$$

$$\det A = \pm(d_1 d_2 d_3 \dots d_n)$$

$$\vdots$$

Pág. 256 do Livro do Strang.

Fórmula dos cofatores

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

Cada cofator C_{ij}, ordem $n-1$ sem a linha i e coluna j, inclui o sinal correto.

COFATOR: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$

Regra de Cramer

GOAL:

Resolver algebricamente $Ax=b$.

E tb inverte A.

Se $\det A = 0$, A^{-1} ñ existe. Nas entradas de A^{-1}, vemos $\det A$ em cada denominador.

Idéia: Substituir a 1^a col. de I por $\vec{x}$.

Teremos uma matriz com $\det = x_1$. Qd vc multiplica por A, veja o que acontece:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = B_1$$

Product rule:

$$\det A \cdot (x_1) = \det B_1$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}}$$

primeiro componente de x na Regra de Cramer.

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A \cdot x_2 = \det B_2$$

$$x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}$$

$\vdots$

$$x_n = \frac{\det B_n}{\det A}$$

Exemplo:

$3x_1 + 4x_2 = 2$ e $5x_1 + 6x_2 = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\det A = -2$ $\quad 18 - 20 = -2$

$$|B_1| = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad |B_2| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$12 - 16 = -4$ $\qquad 12 - 10 = 2$

$x_1 = \frac{-4}{-2} = 2$ $\qquad x_2 = -1$

Teste:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$ OK

Quando b é uma coluna da identidade I, o det de cada B_j é um cofator.

Vamos ver. Solve $AA^{-1} = I$ $\quad$ 1ª coluna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \\ 0 & a_{32} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-\quad -\quad -\qquad +\quad +\quad +$

$$\boxed{= a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}}$$ → Que nada + é q o cofator C_{11}

$|B_1| = C_{11}$ $\qquad |B_2| = C_{12}$

Cofator C_{12} vai ser a entrada (2,1) na

Formula for A^{-1}

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det A} \qquad A^{-1} = \frac{C^T}{\det A}$$

Prova: AC^T

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

det A

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & ? & ? \\ ? & A & ? \\ ? & ? & \det A \end{bmatrix}$$

$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = \det A$

Outros elementos da matriz:

Ex.: Elemento 21

$$a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + a_{23}C_{23}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a_{21}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ &- a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \\ &+ a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \end{aligned}}$$

Pois tem 2 linhas iguais

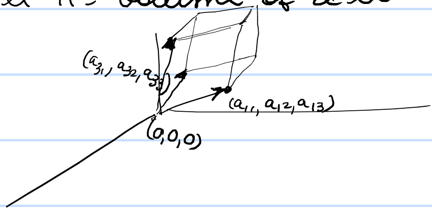
Que é igual ao det da seguinte matriz:

iguais!

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to a_{21}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \dots = 0$$

Determinant gives a volume!

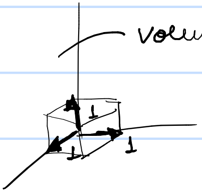
Det A = volume of a box (3×3)



$|\det A| =$ volume

Special case : $A = I$

$A = I$



volume = 1, é um cubo!

Suponha q tenho matriz ortogonal → Q

$A = Q$ (orthogonal matrix)

matriz ortogonal

$\underline{A = Q}$ (orthogonal matrix)

└ matriz com colunas ortonormais

É um outro cubo, rotacionado! vol = 1.

Pq $\det Q = \pm 1$? matriz com orthonormal cols.

$Q^T Q = I$ $\quad \det Q \underbrace{\det Q^T}_{=\det Q} = 1$

$(\det Q)^2 = 1$

$\det Q = \pm 1$

In these special cases of cube, validated!

Caso retangular - multiplica um lado do cubo por um escalar k.

O volume fica k.a.b.c.

Que é o mesmo q multiplicar uma linha da matriz.

|det A| = volume of the box

└ 1- Ident. mat.

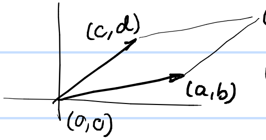
2 - ± sign

3a - mult. port

3b - linearity in row 1 by itself

fórmula p/

Área do Paralelogramo



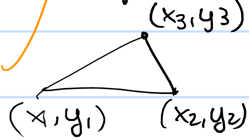
$$\text{área} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

eliminação mata esses "uns"

Área do triangulo: $\frac{1}{2}(ad - bc)$

E se nosso triângulo ñ começar em (0,0)?

$$\text{área} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



área = $\frac{1}{2}$

Lição:

For area and volume, determinant gives us a great formula