Eigenvalues / Eigenvectors

Eigenvectors - tenho matriz A que age em vetores x

$$\underbrace{Ax}$$

como uma função. Entra x, sai $f(x)$

Estou interessada nos vetores que saem na mesma direção q entraram.
A maioria dos Ax aponta em direções distintas. Tem alguns vetores q Ax sai paralelo a x. Eles são os autovetores.

$$Ax \,//\, x$$

múltiplo

$$\boxed{Ax = \lambda x}$$

— I allow λ to be
or zero.

eigen value

eigenvector

Eigenvalue zero:

Quais são os eigenvectors c/ eigenvalue zero?
↳ Os caras do espaço-nulo! $Ax=0$

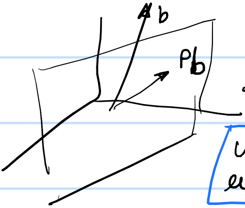
ñ admite inversa

Se a matriz é singular → leva algum x a zero → existe $Ax=0$ → $\lambda=0$ is an eigenvalue.

Como acho esses x e λs?
ñ tenho + uma eq. $Ax=b$. ñ posso usar eliminação. Tenho 2 incógnitas: λ e x.

What are the eigenvalues e eigenvectors for a projection matrix?

Pego um vetor b. O q a matriz faz é projetar Pb. Is b an eigen vector? No.



Because Pb (its projection) is in ≠ direction.

$\boxed{\text{What vectors are eigenvectors of } P?}$

Se o vetor x já estiver no plano, qd ele for projetado, dará o msm vetor.

$$Px = x$$

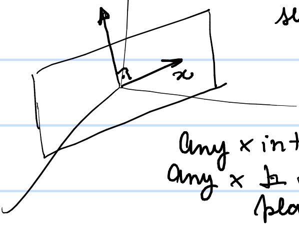
if x is in the plane, is unchanged by P.

Eigenvalues for proj. matrix → 1 e zero.

Me diz que x é um eigenvector e o eigenvalue é 1.

Existirão outros eigenvectors?

↳ perpendicular! Eigenvector q ñ tá no plano - sua projeção é zero!



Any x in the plane: $Px = x$ $\quad \lambda = 1$

Any x $\perp$ to the plane: $\underbrace{Px = 0x}_{\text{eigenvalue}=0}$,

Projection matrices

Permutation matrix $\qquad Px = x$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Q vetor multiplico aqui e termino na msm direção?

(Essa matriz muda os componentes de x.

(x_1, x_2) permutados p/ um múltiplo de $x_1 x_2$?

Eigenvalue 1 → se eu permuto, ñ muda.

$Px = x$ $\qquad$ Ex.: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad Ax = x$

eigenvector

$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, eigenvalue é 1.

2º eigenvalue: $\lambda = -1$ $\qquad Ax = -x$

$Px = -x$

Se eu permuto, fica negativo.

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$Ax = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

they're perpendicular!

nxn matrices will have <u>n</u> eigenvalues.

Sum of eigenvalues $= \Sigma$ na diagonal.

$=$ TRACE

Sum of λs : $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

2x2 case: acho $\lambda = 1$, sei q o outro tem q ser -1.

Como achar x e λ?

eigenvector

eigenvalue

$Ax = \lambda x$

2 unknowns

ñ sei λ, ñ sei x.

$$\underbrace{(A - \lambda I)}_{\text{singular}} x = 0$$

Essa matriz shifted by λ tem q ser singular

Singular

$\Rightarrow$ det $= 0$

$\det(A - \lambda I) = 0$

Eq. característica ou eigenvalue equation

I can find λ first.

Vou achar n λ's diferentes (ou ñ)

Um λ repetido é mta treta!

depois q eu achar o λ, tenho matriz singular q tenho q achar o nullspace (faz eliminação). λ é um # q faz a matriz singular.

Elim. → identify pivot cols → give values to the free variables

traço = 6

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2x2, symmetric

det = 8

$\det(A - \lambda I)$

$$\det \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

6

$9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

traço

det

I get 2 λs.

$(\lambda - 2)(\lambda - 4)$

$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2$

Quais os eigenvectors?

$(A-4I)$ $\lambda_1 = 4$ $(A-2I)$ $\lambda_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se 4 é eigenvalue, $A-4I$ tem q ser singular. Ok.

$Ax_1 = \lambda_1 x_1$

Qual o x correspondente?
Tem q estar no nullspace.

(Basis)

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

corresp. a $\lambda_1 = 4$

Singular matrix

(Basis)

$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Corresp. a $\lambda_2 = 2$

Tinha visto que:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A+3I$:

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\det(A-\lambda I)$

+3 +3

$\lambda_1 = 4$ $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 2$ $x_2 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Qd adiciono $3I$, somo 3 aos autovalores tb!

Os eigenvectors são os mesmos!

Se adiciono $3I$ à matriz:

- eigenvectors doesn't change
- somo 3 aos eigenvalues

Tenho:

$$Ax = \lambda x$$

$$(A+3I)x = \underbrace{Ax}_{\lambda x} + 3x = (\lambda+3)x$$

$$(A+3I)x = (\lambda+3)x$$

autovalor $\lambda+3$ msm autovetor

Se $Ax = \lambda x$ e B tem eigenvalue α,

$Bx = \alpha x$

$(A+B)x = (\lambda+\alpha)x$ → Falso! Qual o problema aqui?

quem disse q o msm x is also an eigenvalue of B.

ñ posso colocar em evidência!

Assim: $\left.\begin{array}{l} Ax = \lambda x \\ By = \alpha y \end{array}\right\}$ Eigenvalues ñ são lineares

Se B é múltiplo da identidade, ok.
Mas se for matriz genérica, ñ.

Rotation matrix: Ex: rotates every vector in $90°$.

$$Q = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90 \\ \sin 90° & \cos 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(pq é ortogonal)

soma = 0

λ

det = 1

Quero eigenvalues e eigenvectors

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_2 \cdot \lambda_1$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 = -1$

$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{array} \right\}$

Conjugados complexos – this can happen!

Que vetor sofre rotação de $90°$ e fica paralelo a ele mesmo?

Eigenvalues come in pairs like that. But they're complex. Pair?

aconteceu com uma matriz perfeitamente real.

Se uma matriz fosse simétrica, isto ñ aconteceria.

Symmetric → eigenvalues stay real.

Se fugir mt do simétrico,

$\boxed{Q^T = -Q \rightarrow \text{Anti-simétrica}}$

0 + longe de ser simétrica

$\boxed{\text{Purely imaginary eigenvalues}}$

$$A = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Eigenvalues:

$$(3-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda = 3$ é repetido (eigenvalue)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = 0$$

singular (OK)

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in the nullspace

$x_2 =$ (correspondente ao λ_2 ($=\lambda_1$)
independente ñ tem.

→ one line of eigenvectors instead of 2.

2x2 but no 2 independ. eigenvectors

Eigenvectors don't give the complete story.