Lecture 11 - Bases for new vector spaces

Rank one matrices
Small world graphs

Vector spaces formed by matrices.
└ you can add them and multiply by numbers.

Matrix Space - Space of all 3x3 matrices.

Space: M → all 3x3 matrix
└ se se pode multiplicar por escalares e adicionar.

Poderia multiplicá-las mas ñ farei - not part of vector space picture.
vector space é adicionar as matrizes e multiplicar por números.
fico com espaços de matrizes 3x3
fico com subespaços q me interessam:
symmetric 3x3 / se somo 2 simétricas ou multip. por escalar ✓ ainda será simétrica
upper-triang. 3x3

se multiplico 2 simétricas, o produto é sempre simétrico? No - mas ñ tô multiplicando.

dimension for those subspaces? Dimension of the whole subspace?

a Basis for M: all 3x3

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \dots}_{9\text{-dimensional}}$$

Dentre essas, as simétricas são:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Symmetric matrices as a subspace - qts parâmetros eu escolho nas 3x3 symmetric matrices?

$$\begin{bmatrix}\Delta&\Delta&\Delta\\\Delta&\Delta&\Delta\\\Delta&\Delta&\Delta\end{bmatrix}$$

escolho esses 3,

depois os 3

esses já estarão automaticam. escolhidos (são iguais aos de baixo)

aqui, selecionando algumas matrizes, tem a base para upper triangulars.

$S \cap U$ → symmetric <u>and</u> upper triangular

→ diagonal.

dimension → 3

S → 6-dimensional subspace

U → 6

Simmetric OR upper triangular

$$\begin{bmatrix} A & D & E \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$ — U

$$\begin{bmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{bmatrix}$$ — Simétricas

Sum of the 2 subspaces S+U

anything in S + anything in U

Que tipo de subespaço é este?

I can get anything with this sum!

I get all matrices! All 3x3!

Qual é a diferença de $\underbrace{S \cap U}_{3}$ e $\underbrace{S+U}_{9}$? 9, I get all 3x3.

$$\underbrace{\dim S}_{6} + \underbrace{\dim U}_{6} = \underbrace{\dim (S \cap U)}_{3} + \underbrace{\dim (S+U)}_{9}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

$\llcorner$ $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$

É um nullspace.

Basis. Dimension → how many vectors in the basis? 2

What are all the complete solutions?

$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

$\llcorner$ vector space! What's the basis?

São as únicas bases p/ esse subespaço? Não.

e^{-ix} e e^{ix} tbm.

Têm cara de função, ñ de vetor. Mas posso chamar de vetor, pq podemos adicioná-los, mult. por ctes (pegar comb. lineares).

O nº chave associado c/ essas matrizes é o rank.

→ rank is not bigger than n / not bigger than m

Estou interessado em matrizes de rank 1.

$$A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad r = 1$$

dimension for the column space? Also 1.

$\dim C(A) = \dim C(A^T) = \text{rank}$

posso escrever como $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{2\times1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}}_{1\times3}$

pivot column

Every rank 1 matrix has the form:

$$A = \underbrace{u}_{\text{column}}\ \underbrace{v^T}_{\text{row}}$$

É legal estudar rank 1 pq seu determinante é fácil, seu eigenvalue...

They're the building blocks for all matrices.

Se eu pegar qqr matriz: 5x17 matrix, rank 4

↳ Posso quebrar essa matriz numa combinação de rank 1 matrices. Precisaria de $\underset{= \text{matrices}}{4}$. Pois rank 4.

↓

Four rank 1 matrices.

Poderei produzir every rank 4 matrix out of 4 rank 1 matrices.

→ Would the rank 4 matrices form a subspace?

M = all 5x17 matrices

Subset of all rank 4 matrices in M form a subspace?

(rank 4) x (rank ≤ 4)

If I add 2 rank 4, is the sum rank 4?

not necessarily, could be 5,

rank(A+B) can't be more than rank(A) + rank(B)

Se eu adiciono 2 rank 4, rank n̄ pode ser + que 8 e nem 8.

let me take the subset of rank 1 matrices.

Is that a vector space?

Se eu adiciono 1 matriz rank 1 com outra rank 1 → Subspace? No. Pode ser q tenha rank 2.

→ tenho essa matriz A, quero o nullspace dela.

not a subspace

One more subspace question →

Estou no $\mathbb{R}^4$. Meu vetor tem 4 componentes:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Pego os subespaços cujos componentes somam zero.

em q $A = [1\ 1\ 1\ 1]$ pois $[1\ 1\ 1\ 1]\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$

Basta olhar nullspace de A.

null space of A

S = all V, all vectors V in $\mathbb{R}^4$ with $v_1+v_2+v_3+v_4=0$

É subespaço?

Se eu tenho um vetor e seus componentes somam zero, se multiplico por 6 continuarão somando zero.

$$v_1+v_2+v_3+v_4=0$$
$$w_1+w_2+w_3+w_4=0$$
$$+\ \vdots \qquad =0$$
$$\text{Soma} = 0$$

→ O zero tb tá neles.

OK, é um subespaço.

Dimensão e base?

Dimension-3 → Pq?

Como isso se conecta ao nosso $Ax=0$? É o nullspace de algo? De $A=[1 \ 1 \ 1 \ 1]$

A tem rank 1.

Qual a fórmula do rank do nullspace?

matriz $m \times n$ de rank r:

Quantos independent guys no nullspace?

$n-r$.

Aqui, $4-1 \to 3$ Nullspace has 3 dimensions.

The rowspace is in $\mathbb{R}^4$. Is one-dimensional.
Nullspace is 3 dimensional.

Vamos pegar os 4 subespaços fundamentais dessa matriz?

Base p/ espaço-nulo:

To find the special solutions, I look for the free variables.

$$\underbrace{1}_{\text{Pivot}} \quad \underbrace{1 \quad 1 \quad 1}_{\text{free variables}}$$

$v_1 + 1 + 0 + 0 = 0$

Basis for S – I'm expecting 3 vectors, 3 special solutions.. Dou o valor 1 p/a free variable, vamos ver:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for subspace S – you list 3 vectors, those would be the natural 3 to list.

não são os únicos 3 possíveis, mas os 3 especiais.

Qual o Espaço-coluna da matriz A?
(Subespaço de $\mathbb{R}^1$, pq $m=1$. Columns only have one component.

Múltiplos da coluna a tem pivô, que é a coluna 1.

Qual o $N(A^T)$?

$N(A^T) \to \{0\}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

look for the combinations of columns now that give 0 for A^T.

Check dimension.

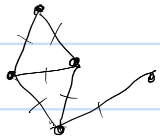
nullspace - dim. 3
rowspace - dim. 1
$\Sigma = 4$ — n - nº of columns

Column Space - dim. 1
$N(A^T) \to \emptyset$
$\Sigma = 1$ — m - nº of rows.

conjunto vazio. dimension is zero!

Graph with 5 nodes, and 6 edges.

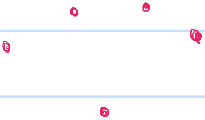
lados, linhas



Small world Graphs -> leads into a lecture abt graphs and linear algebra.

Graph - a bunch of nodes and edges connecting the nodes.

Graphs



E uma matriz com 5 x 6 nos dirá tudo sobre o grafo.

Suponha q o grafo ñ tenha só 5 nodes.

Suponha q cada aluno da sala é um node, E q há uma linha ligando eles se eles forem amigos.

hundred nodes.

Um grafo p/ todas as pessoas do mundo.

Quantos steps p/ uma pessoa chegar à outra?

O máximo de steps?

Minha distância p/ o Clinton.

ñ conheço, mas minha mãe conhece.

Suzana Vieira — $\boxed{\text{mãe}}$ — $\boxed{\text{eu}}$