Diagonalization and powers of A

Achei os autovalores e autovetores de $Ax = \lambda x$. E aí? Diagonaliza a matriz.

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

eigenvectors in the cols of S

(tem q ser invertível S.)

P/ isso, preciso de n independent eigenvectors.

Suppose we have n linearly independent eigenvectors of A.

↓

put in the cols of S. eigenvector matrix

$$AS = A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\text{diagonal matrix}}$$

(eigenvalue matrix Λ

λ maiúsculo

$$AS = S\Lambda$$

$$S^{-1}AS = \underbrace{S^{-1}S}_{I}\Lambda$$

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

LU from elimination

QR from Gram-Schmidt

If

$$Ax = \lambda x$$

$$AAx = A\lambda x$$

$$AAx = \lambda Ax$$

$$A^2x = \lambda \underbrace{Ax}_{\lambda x}$$

$$A^2x = \lambda^2 x$$

Os autovalores de A^2 são λ^2.

Só vale p/ n indep. eigenvectors.

$$A^2 = S\Lambda \underbrace{S^{-1}S}_{I}\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$$

me diz que o S é o mesmo de A (os autovetores ñ mudaram) e os autovalores estão ao quadrado.

Generalizando:

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

Quando as potências da matriz vão p/ zero?

$$A^k \to 0 \quad \text{as } k \to \infty$$

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

S e S^{-1} ñ alteram com k.

Quem muda é Λ. Tem q ficar pequeno.

→ all $|\lambda_i| < 1$.

Vou elevando e eles vão p/ zero.

→ td q tô analisando aqui depende de termos n eigenvalues independentes. Senão, nada funciona.

→ n independent eigenvectors
└ Se ñ for assim, dá ruim!

ñ podemos diagonalizar a matriz e assim ter infos sobre powers of the matrix imediatamente dos eigenvalues.

→ Que matrizes são diagonalizáveis?

A is sure to have $\underline{\underline{n}}$ indep. evectors (and be diagon.) *if* all the λs are different.

└ NO REPEATED E VALUES

>>eig(rand(10,10))

└ se tiver 10 indep. eigenvalues, os eigenvectors serão independentes tb.

Repeated possibility:

→ λ may or may not have $\underline{n}$ indep. eigenvectors.

- Ex: 10x10 I. Eigenvalues are all 1.
  (Eigenvalue 1 is repeated 10 times. Mas ñ tem falta de eigenvectors p/ a identidade. Todo vetor é autovetor da identidade.

Posso pegar 10 independentes.

$S^{-1} I S = \Lambda$

$S^{-1} S = \Lambda$

$I = \Lambda$ já era diagonal!

o Λ é o mesmo da matriz!

Posso escolher 10 indep. vectors, cols of S.

Caso triangular:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- evalues: 2 e 2

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$$

$\lambda = 2$, $\lambda = 2$.

algebraic multiplicity is two.

- eigenvectors:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nullspace?

nullspace of $A - \lambda I$. Nullspace is one-dimensional.

geometric multiplicity is one vectors

Só tem o $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ no nullspace.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ñ tá no nullspace.

Só consigo achar um independent eigenvector. ñ dá p/ diagonalizar.

P/ cada eigenvalue tem pelo menos 1 eigenvector.

first order pq conecta k com $k+1$ (só sobe 1 nível!)

Equation $u_{k+1} = A u_k$

Comece com um vetor u_0.

$u_1 = A u_0$

$u_2 = A^2 u_0$

$u_k = A^k u_0$

first order system - only goes up one level.

To really solve, write

$u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

first vector

$A u_0 = c_1 \underbrace{A x_1}_{\lambda_1 x_1} + c_2 \underbrace{A x_2}_{\lambda_2 x_2} + \cdots + c_n A x_n$

$c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + c_n \lambda_n x_n$

$A^{100} u_0 = c_1 \lambda_1^{100} x_1 + c_2 \lambda_2^{100} x_2 + \cdots + c_n \lambda_n^{100} x_n$

$= \Lambda^{100} S c$

Fibonacci's example:

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \; F_{100} = ?$

$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ — Preciso de um sistema! E de 1ª ordem!

$F_{k+1} = F_{k+1}$

macete: trocar 2^{nd} order scalar problem to first-order system.

$$u_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} \qquad u_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{agora é um sistema de 1ª ordem!}} u_k$$

Quais os eigenvectors e evalues dessa matriz?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$-\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$1{,}618$

$-0{,}618$

devem somar 1.

2 distinct evalues.

É diagonalizável?

Sim. 2 distinct eigenvalues, terei pelo -2 evectors independentes.

$F_{100} = ?$

Eigenvalues q estão controlando esse crescimento.

$$F_{100} \approx c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100} + c_2\underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{100}}_{\text{menor q 1 elevado a 100 é quase nada.}} \to 0$$

Evectors ∈ ao espaço nulo de $A - \lambda I$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1^{os} termos

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

assim acho as constantes.

Qd as coisas evoluem no tempo por um sist. de 1^a ordem, começando por u_0, the key is,

find evalue e evector of A. Evalue já te diz o q acontece (se menor q 1, vai p/ zero).

$u_k = A^k u_0$

$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$

(Eq. de diferenças: $u_k = A^k u_0$