Lec. 8- Completely Solve linear equations

$Ax=b$ ⇒ Se tiver solução.

Como sabemos se terá solução?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

l_1

→ tem uma condição p/ b_1, b_2, b_3 p/ o sistema ter uma solução

$b_1 = 1$

$b_2 = 5$

$b_3 = ? \to 6$

Pq $L_1 + L_2 = L_3$

$b_1 + b_2$ será b_3 se queremos solução.

O q ocorre do lado esq. tem q ocorrer no direito.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right]$$

Augmented matrix $[A\,b]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3-3b_1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-b_2-b_1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{b_3-b_2-b_1=0}_{\text{condition for solvability}}$$

Para o caso de

$$b=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

* Solvability: Condition on b.

→ $Ax=b$ is solvable if - when b is in the column-space $C(A)$

→ Se uma comb. das linhas de A derem zero e a comb. corresp. das linhas de b tb der zero.

To find the complete solution for $Ax=b$.

Solução particular:

a tenho 4 incógnitas, 3 eq (2 na vdd)

→ vou achar uma família de soluções.

Uma s/ç particular

1. $x_{particular}$: set all free var. to zero. Solve $Ax=b$ for pivot variables.

Quais são as variáveis q podemos chamar de free?

x_1 e $x_3 \rightarrow$ pivô $\qquad x_2$ e x_4 - free

$x_2 = 0 \qquad$ e $x_4 = 0$

$x_1 + \cancel{2x_2} + 2x_3 + \cancel{2x_4} = 1 \nearrow x_1 + 2x_3 = b_1$

$2x_3 + 4x_4 = 3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \rightarrow x_1 + 3 = 1 \rightarrow x_1 = -2 \\ 2x_3 = 3 \rightarrow x_3 = 3/2 \end{cases}$$

$x_{part} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sol. Geral = Sol. part. + nullspace

$X = X_p + X_N$

→ Posso adicionar em x qqr elemento do espaço-nulo

2 $X_{nullspace}$ $\qquad$ A. $x_{particular}$

Pq?

$A x_p = b$

$+ \quad A . x_N = 0$

$x_N \rightarrow$ x do espaço-nulo

$A(x_p + x_N) = b$

Do exemplo anterior, temos o nullspace.

$$X_{complete} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 . \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 . \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alguma constante multiplica x_{part}? No way.

x_p solves $Ax_p = b$.

→ I'm not allowed to multiply that by 3.

one particular guy

Mas $Ax_n = 0$, posso multipl. x_n por 3 por exemplo.
ou adicionar coisas no x_n que continuo em zero.

+ one entire subspace } whole subspace

Plot all solutions → 4 incógnitas → tem 4 dimensões

x in $\mathbb{R}^4$ minhas soluções formam um subespaço
não formam!

→ Shifted away from the origin!

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{subspace (espaço-nulo)}}$$

2 dim. subspace dentro do $\mathbb{R}^4$.

o espaço-nulo aqui tem 2 dimensões (2 parâmetros) inside $\mathbb{R}^4$

# of free independent constants - size of the subspace

→ Um cara de 2 dimensões q passava pela origem e foi transladado pelo x particular e deixou de passar na origem → não é subespaço!

Bigger picture

rank = # of pivots

m×n matrix A of rank r

Se tenho m linhas e r pivots, $r \leq m$.

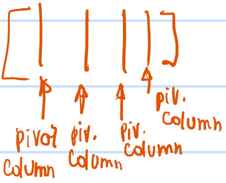
Se tenho n colunas, r pivots, $r \leq n$

uma coluna ñ pode ter + de 1 pivô.

• Caso de full rank, onde rank é o maior possível.

→ Full column rank ⇒ $r = n$

O que implica nas nossas soluções?



★ O que isso diz sobre nosso espaço-nulo?

→ ñ tem free variables ⇒ nosso espaço-nulo só terá zeros.

N(A) = Only the zero vector

Solution to $Ax = b$ = $\underline{x_{particular}}$ ↗ just one solution. if it exists!!

↳ zero or one solution.

Qual a cara da matriz q é full column-rank?

Tall and thin.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \\ 0 & -17 \\ 0 & -14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos R - row reduced echelon form

I

$r = n < m$

2 pivots

limpo td aqui p/ virar zero

2 independent rows!

full-column rank, cada coluna tem seu pivô.

Full Column Rank

ñ tem nada no espaço nulo, ñ tem comb. de colunas q dê zero-column (exceto (0,0))

ñ tem nada no espaço-nulo, mas haverá sempre uma solução p/ $Ax=b$?

→ tenho 4 equações, só 2 x.

→ nem sempre haverá solução.

→ e.g. I make a random choice, I have no solutions.

→ unique solution

Uma solução particular:

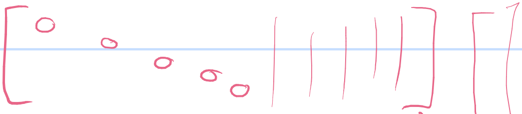
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \to$$ Soma das colunas. x seria $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ → $1 \cdot col.1 + 1 \cdot col2$

Full row rank - Baixa e gorda

$r=m$ → m pivots after elimination.

$r=m<n$

Every row has a pivot.



$m \times n$

pode ser grande.

∞ solutions → pq sempre teremos null space

Posso ter mais incógnita q equação.

pode ter de m a infinitas incógnitas.

↳ infinitas soluções,

special solutions in null space

I don't get any zero rows after elimination.

↳ I can solve $Ax=b$ for every b. Exists!

How many free variables?

$(n - \text{rank})$ free variables.

Free variables

sei q rank = 2

$4-2=2$ free variables

o msm A do exemplo anterior, só q T. → $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

F

$R=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & -5 & -17 & -14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & - & - \end{bmatrix}$

Agora uma com $r=m=n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

↳ Square matrix, full rank,
→ ñ tem free variables,
null space tem só o vetor zero.

É Invertível!

Esse é o caso das matrizes invertíveis.

Row echelon form is the identity matrix!

Que right hand sides b are OK?
↳ nenhuma!

→ $r=m$ → I can solve for every b.

→ $r=n$ → there's a unique solution.

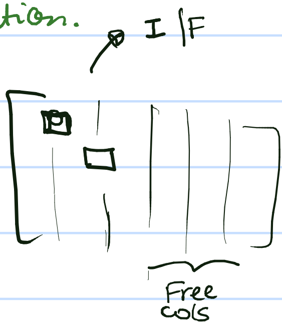
$R=I$ → One solution.

—— // ——

$r<m$, $r<n$

tem nullspace

0 or ∞ solutions.



The rank tells you everything about the number of solutions.

Resumo:

$r = m = n$	$r = n < m$	$r = m < n$	$r < m,\ r < n$
$R = I$	$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1 solution to $Ax = b$	$\Rightarrow$ 0 or 1 solution	∞ solutions	0 or ∞ solutions