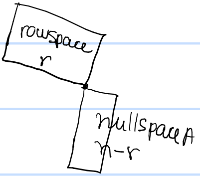
Orthogonal Vectors and Subspaces

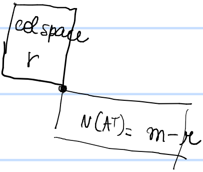
Orthogonality → 90° chapter

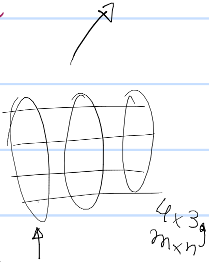
$A^T = 3 \times 4$

Subspaces

matriz $m \times n$







$\dim N(A) = n - r$

Quis dizer q o ângulo entre esses subespaços é 90°. Subespaços serem ortogonais. O q quer dizer?

$\dim C(A) = r$

$\dim N(A^T) = m - r$

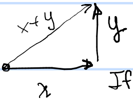
$\dim R(A) = r$

rowspace

dot product of orthogonal vectors is zero.

Orthogonal vectors

Formam 



Pythagoras → Se ve me dá 2 vetores, como sei se são ortogonais? I take the dot product.

If $x^T y = 0$ → orthogonal.

Se ortogonal, vale Pitágoras.

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$$

true when have right angle.

$$x^T x + y^T y = (x+y)^T (x+y)$$

$$\cancel{x^T x} + \cancel{y^T y} = \cancel{x^T x} + x^T y + y^T x + \cancel{y^T y}$$

$$x^T y + y^T x = 0$$

São iguais: Dot product!

$$2x^T y = 0$$

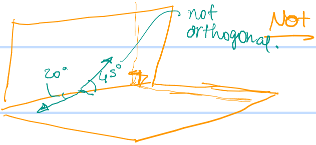
$x^T y = 0$ qd for reto!

Se um dos caras é o zero vector. E o outro é whatever. Are they orthogonal? Sure!
Zero vector is orthogonal to everybody.

Pense em subespaços. Algum subespaço ser ortogonal a outro. O que significa?

Definition: $\boxed{\text{Subspace } S \text{ is orthogonal to subspace } T.}$
Orthogonal vectors / Orthogonal subspaces?

means that every vector in S is orthogonal to every vector in T.



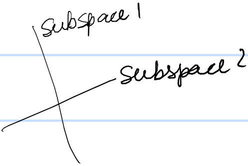
Not orthogonal.

Se 2 subespaços se encontram num vetor, ñ são ortogonais. Se digo q 2 subespaços são ortogonais, quero dizer que they don't intersect in any nonzero vector.

When do we have orthogonal subspaces in the plane?

- Zero vector
- whole plan
- line through the origin

Qd uma linha q passa na origem é ortogonal ao whole plan? Never. Line through the origin ⊥ to zero? Always. 2 lines through the origin → aí sei dizer qd são ortogonais.



they only meet at zero.
they're orthogonal.

2 subspaces are orthogonal. Agora sei o q é.

$\boxed{\text{Rowspace}}$ is orthogonal to the $\boxed{\text{nullspace}}$

Estão cortando o espaço todo em 2 subespaços q são perpendiculares.

nullspace: Vectors that solve $Ax=0$.

$$Ax=0 \quad \begin{bmatrix} \text{— row 1 —} \\ \text{— row 2 —} \\ \text{— row 3 —} \\ \vdots \\ \text{— row } m \text{ —} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ Cada vetor do rowspace é perpendicular ao x no nullspace. Dot product:

$$\left.\begin{array}{l} \text{row 1} \cdot x^T = 0 \\ \vdots \\ \text{row } m \cdot x^T = 0 \end{array}\right\} \text{x is orthogonal to all the rows.}$$

Mas vale p/ Every vector in the rowspace?

As combinações lineares! Tenho q checar q x é perpendicular a todas as combinações

$$\left.\begin{array}{l} c_1(\text{row 1})^T x = 0 \\ + \; c_2(\text{row 2})^T x = 0 \\ \vdots \\ c_m(\text{row } m)^T x = 0 \end{array}\right\} \text{vai continuar dando zero!}$$

$(c_1 \text{row}_1 + c_2 \text{row}_2 + \dots + c_m \text{row}_m)^T x = 0$

Assim:

Why is that orthogonality? The same statement for A^T.

Ex: Subespaços ortogonais em 3 dimensões.

Ex: Couple of orthogonal lines.

Estou em $\mathbb{R}^3$. Tenho uma linha: 1-D subspace

Could I be in 3 Dimensions and have a perpendicular one.

rowspace q é uma linha ($\mathbb{R}^1$) e um nullspace q é uma linha? ($\mathbb{R}^1$)

No. Dimensions are R e n-R. Tem q somar 3.

Se rowspace is one-dimensional.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \qquad n = 3, \quad \underbrace{r = 1}, \quad \underbrace{N(A) = 2}$$

rowspace é dim. 1.

dimensão do nullspace é 2 → é um plano! Qual plano? Perpendicular ao rowspace: $[1\ 2\ 5]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Qual equação me dá o nullspace?

$$\underbrace{[1 \quad 2 \quad 5]}_{\downarrow} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0]$$

normal vector!

nullspace and rowspace are orthogonal and their dimensions add to the whole space.

Nullspaces and rowspaces are said to be orthogonal complements in $\mathbb{R}^n$.

Ser complemento ortogonal significa conter ñ somente alguns vetores ortogonais ao subespaço, mas TODOS.

Nullspace contains ALL vectors that are perpendicular to the rowspace!

Fundam. theorem of linear Algebra - part 1 -

About the four subspaces - about the dimensions

part 1.

→ about their orthogonality - part 2

→ Part 3 - about orthogonal basis

$Ax = b$ → Como resolver qd ñ há solução?

↳ mt comum na prática!

Solve when there's no solution

* When $\underline{b}$ is not in the column space.

$m > n$

$\underbrace{m}_{\#\text{ of equations}} > \underbrace{n}_{\#\text{ of unknowns}}$

Vai ter um monte de right hand sides w/ no solutions.

Quero medir a pulsação. Pra melhorar a info devido ao ruído, terei várias equações. Mas só uma incógnita.

- Many measurements
- noise in the right hand side

$Ax = b$ → ñ posso esperar exatidão aqui.
Sem saber o erro na medida b.
Mas tem informação tb.
Quero separar o noise, junk... da informação.

→ Problema direto

Quero achar as melhores soluções.

$A^T A$

$A \to m \times n$, rectangular

is square, symmetric

$\hookrightarrow B^T = B$

$$(\underline{A^T A})^T = A^T (A^T)^T = \underline{A^T A}$$

symmetric!

Is it invertible? Se ñ, qual o nullspace?

$Ax = b$ — Solução melhor consigo $\to \hat{x}$.

$\underbrace{A^T A}_{\text{good matrix}} \hat{x} = A^T b$

A melhor solução $\hat{x}$ resolve essa equação e por isso estou tão interessada nessa matriz $A^T A$ e em sua invertibilidade.

When is it invertible?

Exemplo:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$m = 3$, $n = 2$

rank $= 2$

Espera-se resolver $Ax = b$? Não. geral.

Solving 3 equations w/ just 2 unknowns geralmente ñ dá. Usually b is not in $C(B)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_{A^T A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 30 \end{bmatrix}$$

is invertible

linhas L.I., rank = 2

$N(A^TA) \to N(A)$

Nem sempre A^TA é invertible!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 27 \end{bmatrix} \times 3$$

rank = 1

not invertible!

Se tenho produto de matrizes de rank 1, o produto ñ terá um rank > 1.

rank A^TA = rank A → assim, decidimos se é invertível ou ñ.

$N(A^TA) = N(A)$

rank of A^TA = rank of A

this square symmetric matrix is invertible exactly

$\underbrace{\text{square symmetric}}_{A^TA}$

if A has independent cols.

Pense bastante sobre A^TA.