Properties of determinants

Agora vamos nos concentrar em square matrices.

- Determinants - det A

Properties 1, 2, 3, 4 — 10

± signs

Próximo bloco: Determinantes e eigenvalues

determinante é um número associado a cada square matrix.

$\det A = |A|$

the matrix is invertible when $\det \neq 0$.

É singular quando $\det = 0$.

det é teste p/ invertibilidade.

determinant is a test for invertibility.

1) $\det I = 1$

2) Se inverto 2 filas da matriz A, $\det A = -\det A'$

Exchange rows → reverts the signs of the determinants.

$\det P = \begin{cases} 1 & \text{even} \\ -1 & \text{odd} \end{cases}$

permutation matrix

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(3) a) $\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

(behaves as a linear function of the first row if all the other rows stay the same.

ñ tô dizendo que $\det(A+B) = \det A + \det B$

NÃO!

If two rows are equal, the det = 0.

(4) 2 equal rows $\to$ det = 0

Suponha q tenho matriz e 2 rows are equal.

Como vejo que esse determin. tem q ser zero?

Troco essas linhas. A matriz continua igual (pq se são iguais, ñ faz diferença).

$\to$ o det ñ mudou. mas $\det A = -\det \underbrace{A'}_{=A}$

tem q ser zero!

2 equal rows

|

det 0

|

matrix isn't invertible

|

rank is less than $\underline{\underline{n}}$.

5- Quando se subtrai $l \times$ row 1 from row k.

the determinant doesn't change!

All the steps of elimination don't change the determinant.

Se faço eliminação em A, $\det A = \det U$.

It just has the pivots on the diagonal.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c-la & d-lb \end{vmatrix} = ad - \cancel{alb} - bc + \cancel{alb} = ad - bc$$

↓ Equivale a

Prop. 3b

3a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -la & -lb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - l \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_{\text{linhas iguais} \Rightarrow \det = 0}$$

⑥ row of zeros $\Rightarrow$ det $= 0$ $\quad t \neq 0$

$$t\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 \cdot t & 0 \cdot t \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix}$$

$t \cdot \det = \det \quad \therefore \det = 0$

⑦ $U = \begin{vmatrix} d_1 & & \cdots \\ & d_2 & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$

Just the product of the pivots!

if there is no row exchanges
if it's a simple LU

Se pivots $\neq 0$, ... faço o processo p/ se tornar diagonal matrix. Why is the right determinant?

Rule 5 (elimination), 3a (fatorar) e rule 1.

$$U = d_1 d_2 d_3 \cdots d_n \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix}}_{\det I = 1} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

Se algum d é zero - row inteira é zero $\Rightarrow$ det é zero.
(singular case. det é zero exactly when A is singular.

E se A ñ é singular (invertível), $\det A \neq 0$.

Elimination:

$$A \to U$$

Se a matriz é singular, o que acontece?

(By elimination, I get a row of zeros.

$$\Downarrow$$

$$\det = 0.$$

Se ñ é singular, I don't get zero.

$\det A \neq 0$ when A is invertible.

cap. 2, it's invertible when elimination produces a full set of pivots

intertibel - $U \to D \to d_1, d_2 \dots d_n$

Checando:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{vmatrix} \to ad - bc$$

9 $$\det AA^{-1} = \det A \det A^{-1}$$

$$\frac{1}{\det A} = \det A^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\det A^2 = (\det A)^2$$

$\det 2A = 2^n \det A$

$n \times n$

I double all entries of the matrix

Quando det A é zero, A ñ é inversa...

$\det A^{-1} = 1/\det A$ → fórmula ñ funciona mais

(10) $\det A^T = \det A$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

$ad - bc \qquad ad - bc$

Se uma linha de zeros se torna coluna de zeros qd transposto,

Se tem coluna de zeros, o det é zero.

Todas essas propriedades de rows

↳ alterar rows, → alterar colunas tb reverte o sinal

Prova:

$|A^T| = |A|$ $A = LU$

$|U^T L^T| = |LU|$

$|U^T||L^T| = \overbrace{|L||U|}$ ✓

$d_1 d_2 d_3 \ldots = d_1 d_2 d_3 \ldots$

L é lower, com 1
com uns na diagonal

det L = 1

det L^T

1

triangular also

det U → prod. das
diag.

If I transpose,
doesn't matter.