基礎コンピュータ工学
第２章 情報の表現
（パート３：２進数の計算と２の補数）

https://github.com/tctsigemura/TecTextBook

本スライドの入手：

２進数の和差の計算

10 **進数の場合**を思い出してみる．

- 9 より大きくなる時に**桁上げ**が発生する．

$$\begin{array}{rr} & 103 \\ + & 104 \\ \hline & 207 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 105 \\ + & 107 \\ \hline & 212 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 135 \\ + & 127 \\ \hline & 262 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 155 \\ + & 167 \\ \hline & 322 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 099 \\ + & 001 \\ \hline & 100 \end{array}$$

- **桁借り**では 10 借りてくる．

$$\begin{array}{rr} & 207 \\ - & 104 \\ \hline & 103 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 212 \\ - & 107 \\ \hline & 105 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 262 \\ - & 127 \\ \hline & 135 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 322 \\ - & 167 \\ \hline & 155 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 100 \\ - & 001 \\ \hline & 099 \end{array}$$

２進数の和差の計算

2 **進数の場合**は以下のようになる．

- 1 より大きくなる時に**桁上げ**が発生する．

$$\begin{array}{r} 010 \\ +\quad 001 \\ \hline 011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 001 \\ +\quad 001 \\ \hline 010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 010 \\ +\quad 011 \\ \hline 101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 011 \\ +\quad 001 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 011 \\ +\quad 011 \\ \hline 110 \end{array}$$

- **桁借り**では 2 借りてくる．

$$\begin{array}{r} 011 \\ -\quad 001 \\ \hline 010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 010 \\ -\quad 001 \\ \hline 001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101 \\ -\quad 011 \\ \hline 010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ -\quad 001 \\ \hline 011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110 \\ -\quad 011 \\ \hline 011 \end{array}$$

２進数の和差の計算（問題）

問題８： 10 進数の計算と 2 進数の計算をしなさい．

3+8

10 進	2 進
3	0011
+ 8	+ 1000

5+7

10 進	2 進
5	0101
+ 7	+ 0111

11-8

10 進	2 進
11	1011
- 8	- 1000

12-7

10 進	2 進
12	1100
- 7	- 0111

負数の表現

負の数を２進数でどのようにビットで表現するか約束する．

(1) 符号付き絶対値表現
左端のビットを符号（＋／ー）として使用する．

４ビット符号付き絶対値表現の例

負数	２進数	正数	２進数
-7	1111_2	$+7$	0111_2
-6	1110_2	$+6$	0110_2
-5	1101_2	$+5$	0101_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
-1	1001_2	$+1$	0001_2
-0	1000_2	$+0$	0000_2

- ４ビットで－７から＋７の範囲を表現できる．
- ０の表現が二つある（ー０と＋０）．

負数の表現

補数表現

- n 桁の b 進数において
  b^n から x を引いた数 y を x に対する「b の**補数**」と呼ぶ．
  $$y = b^n - x \qquad (y \text{ は } x \text{ に対する } b \text{ の補数})$$
- n 桁の b 進数において
  $b^n - 1$ から x を引いた数 z を x に対する「$(b-1)$ の**補数**」と呼ぶ．
  $$z = b^n - 1 - x \qquad (z \text{ は } x \text{ に対する } (b-1) \text{ の補数})$$

負数の表現

２桁の１０進数における補数の例

$b = 10$進数 $n = 2$桁 $b^n = 100$ $x = 25$	$\begin{array}{r} 100 \\ -25 \\ \hline 75 \end{array}$	75 は 25 に対する 10 の補数
$b = 10$進数 $n = 2$桁 $b^n - 1 = 99$ $x = 25$	$\begin{array}{r} 99 \\ -25 \\ \hline 74 \end{array}$	74 は 25 に対する 9 の補数

負数の表現

4 桁の 2 進数における補数の例

$b = 2$進数		0110_2 は
$n = 4$桁	10000_2	1010_2 に
$b^n = 10000_2$	-1010_2	対する
$x = 1010_2$	0110_2	2 の補数

$b = 2$進数		0101_2 は
$n = 4$桁	1111_2	1010_2 に
$b^n - 1 = 1111_2$	-1010_2	対する
$x = 1010_2$	0101_2	1 の補数

負数の表現

(2) **1 の補数による負数の表現**

1 の補数を負数の表現に使用する．

4 ビット 2 進数の 1 の補数（$2^4 - 1 - x = z$）

もとの数（x）	補数へ変換		補数（z）
0	$1111_2 - 0000_2$	$=$	1111_2
1	$1111_2 - 0001_2$	$=$	1110_2
2	$1111_2 - 0010_2$	$=$	1101_2
3	$1111_2 - 0011_2$	$=$	1100_2
4	$1111_2 - 0100_2$	$=$	1011_2
5	$1111_2 - 0101_2$	$=$	1010_2
6	$1111_2 - 0110_2$	$=$	1001_2
7	$1111_2 - 0111_2$	$=$	1000_2

負数の表現

1 の補数を用いた符号付き数値

-7	1000_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
-6	1001_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$
-5	1010_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$
-4	1011_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-3	1100_2	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-2	1101_2	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-1	1110_2	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-0	1111_2	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+0$	0000_2	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+1$	0001_2	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+2$	0010_2	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+3$	0011_2	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+4$	0100_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+5$	0101_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$
$+6$	0110_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$
$+7$	0111_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

負数の表現

- １の補数の求め方
  ビット反転
  $x = +3_{10} = 0011_2$（もとの数）
  $y = -3_{10} = 1100_2$（１の補数）

- 表現できる数値の範囲
  4 ビット：$-7 \sim +7$ $(-(2^3-1) \sim +(2^3-1))$
  n ビット：$-(2^{n-1}-1) \sim +(2^{n-1}-1)$

- 正負の判定
  最上位ビットが
  ０：正の値を表現している．
  １：負の値を表現している．

負数の表現

(3) ２の補数による負数の表現

２の補数（$2^n - x$）を負数の表現に使用する.

４ビット２進数の２の補数（$2^4 - x = y$）

もとの数 (x)	補数へ変換		補数 (y)
0	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0000}_2$	$=$	$1\boxed{0000}_2$
1	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0001}_2$	$=$	$\boxed{1111}_2$
2	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0010}_2$	$=$	$\boxed{1110}_2$
3	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0011}_2$	$=$	$\boxed{1101}_2$
4	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0100}_2$	$=$	$\boxed{1100}_2$
5	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0101}_2$	$=$	$\boxed{1011}_2$
6	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0110}_2$	$=$	$\boxed{1010}_2$
7	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0111}_2$	$=$	$\boxed{1001}_2$
8	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{1000}_2$	$=$	$\boxed{1000}_2$

負数の表現

２の補数を用いた符号付き数値

-8	1000_2								
-7	1001_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
-6	1010_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$
-5	1011_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$
-4	1100_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-3	1101_2	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-2	1110_2	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-1	1111_2	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
0	0000_2	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
1	0001_2	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
2	0010_2	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
3	0011_2	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
4	0100_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
5	0101_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$
6	0110_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$
7	0111_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

負数の表現

- ２の補数の求め方
  ビット反転＋１
  $x = +3_{10} = 0011_2$（もとの数）
  $y = -3_{10} = 1100_2 + 1 = 1101_2$（２の補数）
  元に戻すのもビット反転＋１
  $y = -3_{10} = 1101_2$（２の補数）
  $y = +3_{10} = 0010_2 + 1 = 0011_2$（もとの数）
- 表現できる数値の範囲
  4 ビット：$-8 \sim +7$ $(-2^3 \sim +(2^3-1))$
  n ビット：$-2^{n-1} \sim +(2^{n-1}-1)$
- 正負の判定
  最上位ビットが
  ０：正の値を表現している．
  １：負の値を表現している．

負数の表現（問題 1/2）

問題９：次の 10 進数を 2 の補数表現形式の 4 桁の 2 進数に変換しなさい.

1) 4_{10}

2) -4_{10}

3) 5_{10}

4) -5_{10}

5) 6_{10}

6) -6_{10}

負数の表現（問題 2/2）

問題１０：次の 2 の補数表現形式の 4 桁の 2 進数を 10 進数に変換しなさい．

1) 1001_2

2) 0111_2

3) 1101_2

4) 0011_2

5) 1011_2

6) 1100_2