Análisis Combinatorio

Técnicas de Conteo:

PRINCIPIOS BÁSICOS DE CONTEO

Se utilizan dos principios de conteo básicos. El primero implica la adición y el segundo, la multiplicación.

Principio de la regla de la suma:

Suponga que algún evento E puede ocurrir en m formas y que un segundo evento F puede ocurrir en n formas, pero ambos eventos no pueden ser simultáneos. Entonces E o F puede ocurrir en $m + n$ formas.

Principio de la regla del producto:

Suponga que un evento E ocurre en m formas e, independientemente de este evento, hay un segundo evento F que puede ocurrir en n formas. Entonces la combinación de E y F ocurre en $m.n$ formas.
Los principios indicados pueden extenderse a tres o más eventos. Es decir, suponga un evento $E1$ que puede ocurrir en $n1$ formas, un evento $E2$ que puede ocurrir en $n2$ formas, y a continuación de$E2$, un tercer evento, $E3$, puede ocurrir en $n3$ formas y así en lo sucesivo.

Entonces:

Regla de la suma: Si ningún par de eventos puede ocurrir al mismo tiempo, entonces uno de los eventos ocurre en:

n1 + n2 + n3 +· · · formas.

Regla del producto: Si los eventos ocurren uno después del otro, entonces todos los eventos ocurren en el orden indicado en:

n1 · n2 · n3 · . . . formas.

Ejemplos:

Un profesor tiene 7 libros de programación, 4 son de Grimaldi y 3 de García del Valle. De cuántas formas el profesor puede ordenar:

a) Un libro de cada tema   b) Uno de los libros

a) 4.3=12
b) 4+3=7

Función factorial

El producto de los enteros positivos desde 1 hasta n, se denota por n! y se lee "n factorial".

$n! = 1.2.3\ldots(n-2)(n-1)n = n.(n-1).(n-2)\ldots3.2.1$

En consecuencia, $1! = 1$ y $n! = n(n-1)!$
También es conveniente definir $0! = 1$.

EJEMPLO
a) $3! = 3.2.1 = 6$, $4! = 4.3.2.1 = 24$, $5 . 4! = 5(24)= 120$

Permutaciones:

Dado un conjunto finito no vacío, hay una forma de agrupar, seleccionar o distribuir.
Se denomina permutación a cada uno de los conjuntos que se puede formar con estos elementos tales que cada uno de ellos difiere de otro en el orden en que son considerados dichos elementos. (puede ser simple o con repetición)

$Pn=n!$

Ejemplo:
¿De cuantas formas distintas pueden sentarse 5 personas en una fila de 5 asientos vacíos?
n=5

$P5=5!=5.4.3.2.1=$

$$\mathrm{n}P\mathrm{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$5P5=5!/(5-5)!=5.4.3.2.1=120$$

Ejemplo

Si de un estante se toman 2 de 3 libros.¿Cuántas permutaciones es posible realizarse?

3P2= 6

Permutaciones con repetición:

$$\mathrm{n}Pr1,r2,\ldots ri=n!/(r1!.r2!\ldots.ri!)$$

Ejemplo: ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar con las letras de la palabra Google?

$6P_{2,2,1,1}=6!/(2!.2!.1!.1!)=180$

Permutaciones Circulares:

•El número de permutaciones de elementos dispuestos en forma circular es:

$nPc=(n-1)!$

Ejemplo

¿De cuántas maneras podemos ordenar 5 llaves en un llavero?

Combinación:

Dado un conjunto de N elementos se denomina combinaciones de tamaño r a todos los conjuntos que se puedan formar con r elementos tomados entre los N elementos de modo que cada conjunto difiera de los demás en por lo menos un elemento.

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

En una clase de 8 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

$8C_3=8!/(8-3)!.3!=8.7.6.5!5!$

DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Un diagrama de árbol es un instrumento para enumerar todos los resultados posibles de una sucesión de eventos, donde cada evento puede ocurrir en una forma finita de formas.

Ejemplo:

Encuentre el producto A $\times$ B $\times$ C, donde A = {1, 2}, B = {a, b, c}, C = {x, y}.

Binomio de Newton:

El binomio de Newton también llamado teorema binomial es un modelo de algoritmo que te permite obtener potencias a partir de binomios. Para poder obtener esta potencia binomial se utilizan los coeficientes llamados «coeficientes binomiales» los cuales son sucesiones de combinaciones. Las siguientes son las fórmulas generales separadas del binomio de Newton:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a2b + 3\ ab^2 + b^3$

Las fórmulas mencionadas se conocen como entidades notables, donde se crea una fórmula más general que equivale al desarrollo de (a+b)n, siendo «n» un número entero natural cualquiera. Observando todos los coeficientes de cada polinomio resultante podemos ver que siguen esta secuencia:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Esta secuencia se conoce como Triángulo de Tartaglia el cual se obtiene con la escritura en fila de los números combinatorios desde el numerador 1, esto quiere decir, que cada uno de los números que aparecen en el triángulo corresponde al valor de un número combinatorio de la siguiente manera:

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

En esta imagen se puede ver que cada una de las filas empieza y culmina en 1 y los números que aparecen en ella dan origen a una fila simétrica, es decir, que el primero es igual al último y el segundo igual al penúltimo, de la misma manera se observa que cada uno de los números es el resultado de la suma de los dos que tiene sobre él.

Para encontrar el valor de un número combinatorio debe utilizarse la siguiente fórmula:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Con todos estos conocimientos ya puede resolver el binomio de Newton, cuya fórmula general es la siguiente:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad n \geq 1$$

Ejemplo:

$(2x+5y)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3 + \binom{3}{1}(2x)^2.5y + \binom{3}{2}2x.(5y)^2 + \binom{3}{3}(5y)^3 = 8x^3 + 3.4x^2.5y + 3.2x.25y^2 + 125y^3 = 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$

Para encontrar el r-ésimo término del desarrollo se aplica la siguiente expresión:

$$\binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

Ejemplo: Encontrar el 5to término de la siguiente potencia:

$(3a+b)^6$

$T_5 = \binom{6}{4}(3a)^2b^4 = 15.9a^2b^4 = 135a^2b^4$

Ejercicio:

Encontrar el cuarto término de la siguiente expresión

$(x+y)^{20}$

Encontrar el tercer termino de la siguiente expresión

$(2a^4+6b^3)^6$