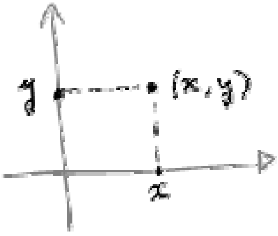
Producto cartesiano.

El nombre *producto cartesiano* fue puesto en honor al matemático, físico y filósofo francés *Rene Descartes*, 1596-1650. El plano euclídeo $R^2 = \{(x; y); x; y \in \mathbb{R}\}$ representado mediante los ejes cartesianos es el plano donde constantemente dibujamos los gráficos de las funciones.



Definición: Sean *A ; B* conjuntos. El producto cartesiano de *A* con *B*, que se nota *A×B*, es el conjunto de *pares ordenados*

$A \times B = \{(a; b) \in U / a \in A \wedge b \in B\}$

Ej:

El producto cartesiano de A = $\{1,2,3\}$ *y B* =$\{a, b\}$ *es:*

A x B =$\{(1; a); (1; b); (2; a); (2; b); (3; a); (3; b)\}$

Los gráficos pueden ser:

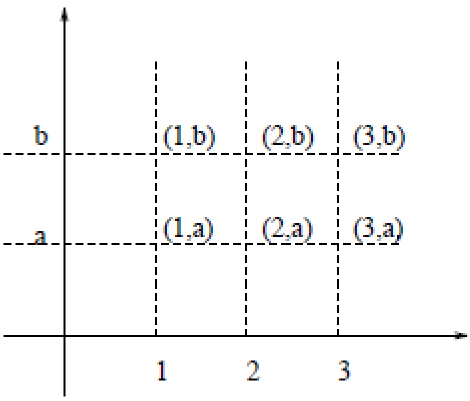


Fig. 1.1: Diagrama cartesiano

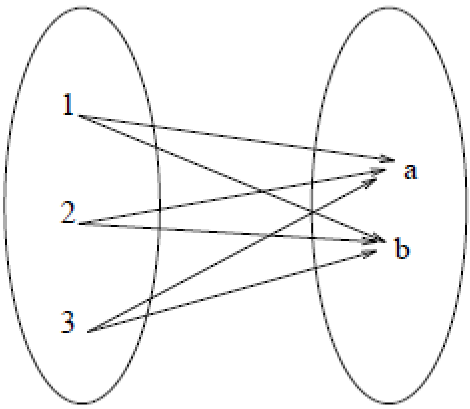


Fig. 1.2: Diagrama sagital

Observación:

- Si $A = B = \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el espacio euclideo $\mathbb{R}^2$.
- Si $A \neq B$, entonces $A \times B \neq B \times A$.
- $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times B = \emptyset$.

Ejemplo:

A={1,2}   B={3,4}

AxB={(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)}

Relación:

Relaciones entre conjuntos:

Se llama relación "**R**" de A en B a todo subconjunto del producto cartesiano de AxB.

En símbolos: $R \subset (AxB), por\ lo\ tanto\ sus\ elementos\ son\ pares\ ordenados$

$$R = \{(x, y)/(x, y) \in AxB\}$$

Ej: $A = \{1,2\}$ $B = \{3,4\}$
Entonces $AxB = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

Por lo tanto, son relaciones posibles de A en B:

$R_1 = \{(1,3), (2,4)\}$ porque $R_1 \subset AxB$

$R_2 = \{(1,3), (1,4), (2,4)\}$ porque $R_2 \subset AxB$

$R_3 = \{(x, y)/y = 2x\}$
$R_3 = \{(2,4)\}$

Se definen también los siguientes conjuntos:

Dominio: Conjunto inicial o conjunto de partida llamado A.

Codominio: es el conjunto final o conjunto de llegada llamado B.

Imagen: es el conjunto formado por los elementos del conjunto final a los que llega alguna flecha. Por lo tanto, el conjunto imagen está incluido en el conjunto final.

Relación inversa: se denota como R^{-1} es el subconjunto de BxA definido como:

$$R^{-1} = \{(y,x)/(y,x) \in BxA\}$$

Ejemplo
A={1,3,4}   B={2,4}

AxB={(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (4,2), (4,4)}

$R_1 = \{(x,y)/x < y\}$

$R_1 = \{(1,2), (1,4), (3,4)\}$
DR_1={1,3}
IR_1={2,4}
Codominio=IR_1
${R_1}^{-1} = \{(2,1), (4,1), (4,3)\}$
${R_1}^{-1} = \{(y,x)/y > x\}$

$A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{9,10\}$
$R = \{(x,y)/x\ es\ divisor\ de\ y\}$ y:x
$R = \{(1,9), (1,10), (2,10), (3,9)\}$
Dominio de R={1,2,3}
Imagen de R={9,10}
$R^{-1} = \{(9,1), (10,1), (10,2), (9,3)\}$

$R_1 = \{(x,y)/x + y = 12\}$
$R_1 = \{(2,10), (3,9)\}$
Dominio de R1= {2,3}

Imagen R_1={9,10}

${R_1}^{-1} = \{(10,2), (9,3)\}$

Relaciones Binarias:

Una relación binaria R definida en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano AxA.
Escribiremos a R b para indicar que "a y b están relacionados según la relación binaria R"
Según la definición: $a\ R\ b \iff (a,b) \in R$

Es decir: $R = \{(x,y)/(x,y) \in AxA\}$
Ejemplo:
$A = \{1,2,3\}$

AxA=$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$R=\{(x,y)/x<y\}$

$R=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

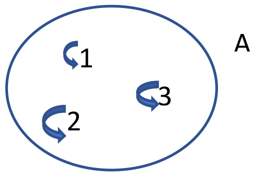
Propiedades:

Una relación binaria R definida en un conjunto A es:

Reflexiva: $\forall x: x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

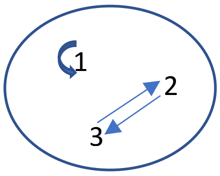
Si $A=\{1,2,3\}$

$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ es reflexiva



No reflexiva: $\exists x / x \in A \wedge (x,x) \notin R$

$R_2 = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$



A reflexiva: $\forall x: x \in A \Rightarrow (x,x) \notin R$

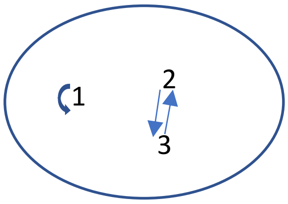
$R=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

Simetría:

R es simétrica $\Leftrightarrow$ $\forall x \, \forall y \in A: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

Ej:

$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$



$(1,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R$

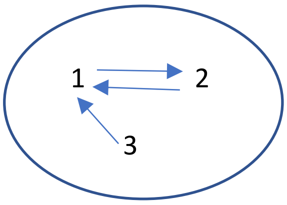
$(2,3) \in R \Rightarrow (3,2) \in R$

$(3,2) \in R \Rightarrow (2,3) \in R$

No **simétrica**:

R es no simétrica $\Leftrightarrow \exists x\, \exists y \in A/(x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R$

$R = \{(1,2), (2,1), (3,1)\}$



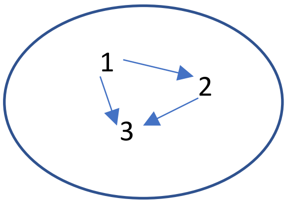
$(1,2) \in R \wedge (2,1) \notin R$

$\exists x\, \exists y \in A/(3,1) \in R \wedge (1,3) \notin R$

Asimetría:

R es asimétrica $\Leftrightarrow \forall x\, \forall y : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$

R=$\{(1,2), (1,3), (2,3)\}$



$(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \notin R$ verdadero

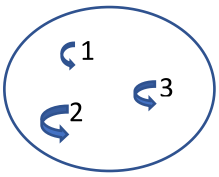
$(1,3) \in R \Rightarrow (3,1) \notin R$ verdadero

$(2,3) \in R \Rightarrow (3,2) \notin R$ verdadero

Antisimetría:

R es antisimétrica $\Leftrightarrow \forall x\, \forall y: (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$

R=$\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$



$(1,1) \in R \wedge (1,1) \in R \Rightarrow 1 = 1$

$(2,2) \in R \wedge (2,2) \in R \Rightarrow 2 = 2$

$(3,3) \in R \wedge (3,3) \in R \Rightarrow 3 = 3$

R=$\{(1,1), (2,2), (3,3), (3,1), (1,3)\}$

$(3,1) \in R \wedge (1,3) \in R \Rightarrow 1 = 3$ es Falsa no es antisimétrico

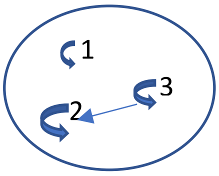
R=$\{(1,1), (2,2), (3,3), (3,1)\}$

$(3,1) \in R \wedge (1,3) \in R \Rightarrow 1 = 3$

Transitiva:

R es transitiva $\Leftrightarrow$ $\forall x\ \forall y\ \forall z$: $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

R=$\{(1,1), (2,2), (3,3), (3,2)\}$



$(1,1) \in R \wedge (1,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R$

$(2,2) \in R \wedge (2,2) \in R \Rightarrow (2,2) \in R$

$(3,3) \in R \wedge (3,3) \in R \Rightarrow (3,3) \in R$

$(3,2) \in R \wedge (2,2) \in R \Rightarrow (3,2) \in R$

$(3,3) \in R \wedge (3,2) \in R \Rightarrow (3,2) \in R$

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

$(1,1) \in R \wedge (1,2) \in R \Rightarrow (1,2) \in R$

$(2,2) \in R \wedge (2,1) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$

$(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R$

$(1,2) \in R \wedge (2,2) \in R \Rightarrow (1,2) \in R$

No transitiva:

R es no transitiva ⇔ $\exists x\ \exists y\ \exists z / (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \wedge (x, z) \notin R$

$R = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$

$(2,3) \in R \wedge (3,2) \in R \wedge (2,2) \notin R$

Relación de Equivalencia:

La relación R ⊂ A^2 es de equivalencia en A si y solo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Notación: $a \sim b$ se lee “a es equivalente a b”

Ejemplo:

$A = \{1,2,3\}$

$\sim = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

Reflexiva

Simétrica

Transitiva