Relación de Equivalencia:

La relación R $\subset A^2$ es de equivalencia en A si y solo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Notación: a $a \sim b$ se lee “a es equivalente a b”

Ejemplo:

$A = \{1,2,3\}$

$\sim = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

es reflexiva: $1 \sim 1$

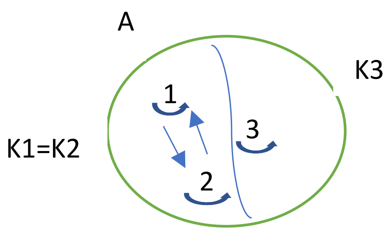
$2 \sim 2$ y $3 \sim 3$

Simétrica: $1 \sim 2 \Rightarrow 2 \sim 1$

Transitiva: $1 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1$

$1 \sim 1 \wedge 1 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1$

$2 \sim 1 \wedge 1 \sim 2 \Rightarrow 2 \sim 2$



Clases de equivalencia y Conjunto Cociente:

Sea $\sim$ una relación de equivalencia y $A \neq \emptyset$ existe un subconjunto de A llamado clase de equivalencia llamado K_a del elemento a $\in A$:

$K_a = \{x \in A \,/\, x \sim a\}$

Con relación al ejemplo:

$K_1 = \{1,2\}$

$K_2 = \{2,1\} \quad K_1 = K_2$

$K_3 = \{3\}$

Existe un nuevo conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia, este conjunto se llama conjunto cociente de A por la relación de equivalencia:

$\frac{A}{\sim} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ las clases de equivalencia constituyen una partición de A

Para el ejemplo:

$\frac{A}{\sim} = \{K_1, K_3\}$

También lo podemos llamar I:

$I = \{1,3\}$

La partición de un conjunto no vacío cumple las siguientes condiciones:

El conjunto $\{ K_u / u \in I\}$ es una partición de A si y solo si:

a) $\forall u: u \in I \Rightarrow K_u \neq \emptyset$

$K_1 \neq \emptyset$

$K_2 \neq \emptyset$

$K_3 \neq \emptyset$

b) $u \neq v \Rightarrow K_u \cap K_v = \emptyset$

Con relación al ejemplo:

$K_1 \cap K_3 = \emptyset$

$K_2 \cap K_3 = \emptyset$

c) $\forall a \in A, \exists u \in I / a \in K_u$ esto significa que la unión de los subconjuntos de A que son los elementos de la partición es A.

En relación al ejemplo:

$K_1 \cup K_3 = A$

Ejemplo:

A=$\{1,2,3,4\}$

R=$\{(x,y) \in A^2 / x = y \vee x + y = 3\}$

a) Definir por extensión
b) Probar que R es una relación de equivalencia
c) Si es de equivalencia nombrar las clases y el conjunto cociente
d) Graficar

Desarrollo:

a) R=$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\}$
b) Reflexiva:

$1R1, 2R2, 3R3, 4R4$

Simetría:

$1R1 \Rightarrow 1R1$

$1R2 \Rightarrow 2R1$

$2R1 \Rightarrow 1R2$

Transitividad:

$1R1 \wedge 1R1 \Rightarrow 1R1$

$1R2 \wedge 2R1 \Rightarrow 1R1$

$2R1 \wedge 1R2 \Rightarrow 2R2$

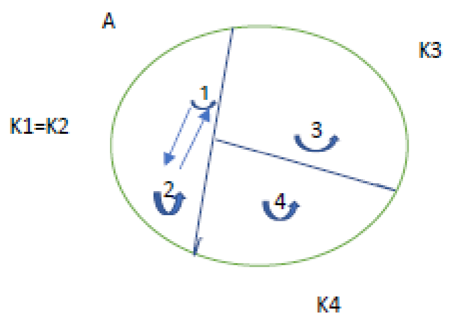
R es una relación de equivalencia

c) $K_1 = \{1,2\} = K_2$

$K_3 = \{3\}$

$K_4 = \{4\}$

d) $\frac{A}{\sim} = \{K_1, K_3, K_4\}$



Relación de Orden

Cuando hablamos de relaciones nos referimos a relaciones de orden amplio o estricto y en cada caso de orden parcial o total.

R es una relación de orden amplio si es: reflexiva, antisimétrica y transitiva

Orden parcial:

Sea R una relación de orden en A.

R es de orden parcial si y solo si existen elementos incomparables

$\exists\, a, \exists\, b \,/\, (a,b) \notin R \;\wedge (b,a) \notin R$

Ejemplo:

Relación de divisor en los N

La división se define en N como: n | a $\Leftrightarrow\ \exists\, m \in N/\, a = m.n$

Es reflexiva: cada número se divide por si mismo

Es antisimétrica: los números que se dividen deben ser iguales

Es transitiva: si un número divide a otro y este a su vez a otro número, el primero divide al último.

Es una relación de orden amplio y parcial.

R es de orden total si todos los elementos de A son comparables

$\forall\, a, \forall\, b:\ (a,b)\ \in R\ \vee (b,a) \in R$

Ejemplo:

$A = \{1,2,3\}$

R: x$\leq y$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$ es reflexivo, es antisimétrico y es transitivo

$1 \leq 2 \wedge 2 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq 3$

Y así demostramos con todos.

Como comparamos

$1 \leq 1 \vee 1 \leq 1$

$1 \leq 2 \vee 2 \leq 1$

Otra opción

$(1,2)\ \in R\ \vee (2,1) \in R$

R es una relación de orden estricto si es: arreflexiva, asimétrica y transitiva

También pueden ser de orden total o parcial

Ejemplo:

- La relación $<$ en los R es un orden estricto y total.
- La relación de $\subset$ en las P(A) es de orden estricto y parcial

Actividad:

A = $\{a,b,c\}$

R= $\{(a,b),(a,c),(b,c)\}$

(a,a) $\notin$ R, (b,b) $\notin$ R,(c,c) $\notin$ R ningún elemento esta relacionado consigo mismo es arreflexivo

(a,b) ϵ R $\Rightarrow$(b,a) $\notin$ R es asimétrico

(a,b) ϵ R $\wedge$ (b,c) ϵ R $\Rightarrow$ (a,c) ϵ R es transitivo

¿Es una relación de orden amplio o estricto?

Es una relación de orden estricto

R= $\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c)\}$ no es una relación de orden

Relación Funcional:

Función de A en B es toda relación que haga corresponder a cada elemento del Dominio un único elemento del Codominio. En forma general se representa

$f: A \to B$ se lee: f es una función de A en B, en donde A es el Dominio y B el Codominio

También se dice que una función es un conjunto de pares ordenados tales que el primer componente pertenece a A y la segunda a B, en consecuencia, f es un subconjunto de AxB

Satisface las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

a) Existencia: $\forall\, a \in A, \exists\, b \in B/(a,b) \in f$
b) Unicidad: $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \to b = c$

Si $(a,b) \in f$ diremos que b es el correspondiente o imagen de a por f y suele escribirse como $b = f(a)$
También se puede especificar el par (x,y) se escribe como y= f(x)

una función se puede representar con tablas, gráficos en el eje cartesiano y diagramas de Venn

Ejemplos:

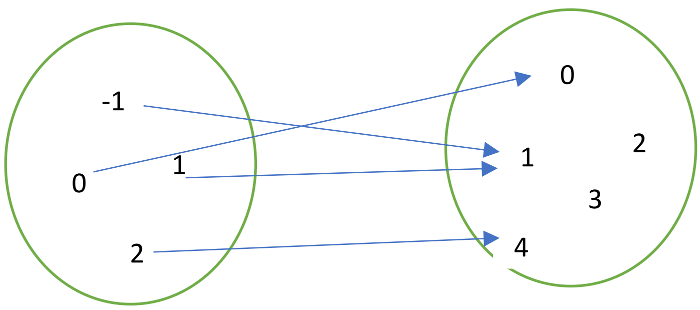
$A = \{-1,0,1,2\}$ $B = \{0,1,2,3,4\}$

R: y= x^2

R=$\{(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$

Existencia:

Unicidad:



Se cumple la existencia

$-1 \in A, \exists\, 1 \;\in B/(-1,1) \;\in f$

$(-1,1) \in f \;\wedge\; (-1,1) \in f \rightarrow 1 = 1$

Clasificación de funciones

Función inyectiva-Sobreyectiva o Biyectiva

Función Inyectiva:

Sea una función f: A→B si ocurre que elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas en el codominio entonces f se llama función inyectiva.

$\forall\, x', \forall\, x'' \in\; A:\; x' \neq x'' \Rightarrow\; f(x') \neq f(x'')$

Ejemplo

$f\!: N \rightarrow N/f(x)$=2x (x,y) f(x)=y o y=f(x) es inyectiva

F(0)=0 (0,0)
F(1) = 2 (1,2)
F(3)= 6 (3,6)
$f\!: R \rightarrow R/f(x)$=2x es inyectiva y sobreyectiva por lo tanto es biyectiva

Función Sobreyectiva:

$$\forall y\; \in B\, \exists\, x\; \in A\, /\, y = f(x)$$

$f\!: R \rightarrow R/f(x) = x^3$ es inyectiva y sobreyectiva entonces es una función biyectiva

$f\!: R \rightarrow R/f(x) = x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva

F(1)=1
F(-1)=1
Imagen= $[0, +\infty) =\; R^+$

$f\!: R \rightarrow R^+/f(x) = x^2$ es sobreyectiva

Función Biyectiva:
F es biyectiva si solo si es inyectiva y sobreyectiva

Función inversa:

Toda función es una relación, pero la relación inversa no siempre es una función
$A = \{-1,0,1,2\},\ B = \{0,1,2,3,4\}$

$f = \{(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$

La inversa de esta relación sería un subconjunto de BxA
$R^{-1} = \{(1,-1),(0,0),(1,1),(4,2)\}$

$B = \{0,1,2,3,4\}$
$Dominio = \{1,0,4\}$
Codominio=$\{-1,0,1,2\}$

Propiedad: una función admite inversa si y solo si es biyectiva

$f: R \to R / f(x) = x^3$

Como es biyectiva entonces es invertible

Despejamos la variable independiente x y luego hacemos un intercambio de variables

$y = x^3$

$\sqrt[3]{y} = x$

Intercambio de variables

$y^{-1} = \sqrt[3]{x}$

$f: R \to R / f(x)$=2x

Y=2x

$\frac{y}{2} = x$

$y^{-1} = \frac{x}{2}$

$f: R \to R / f(x)$=3x-5

y=3x-5

Y+5=3x

$\frac{y+5}{3} = x$

$y^{-1} = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$