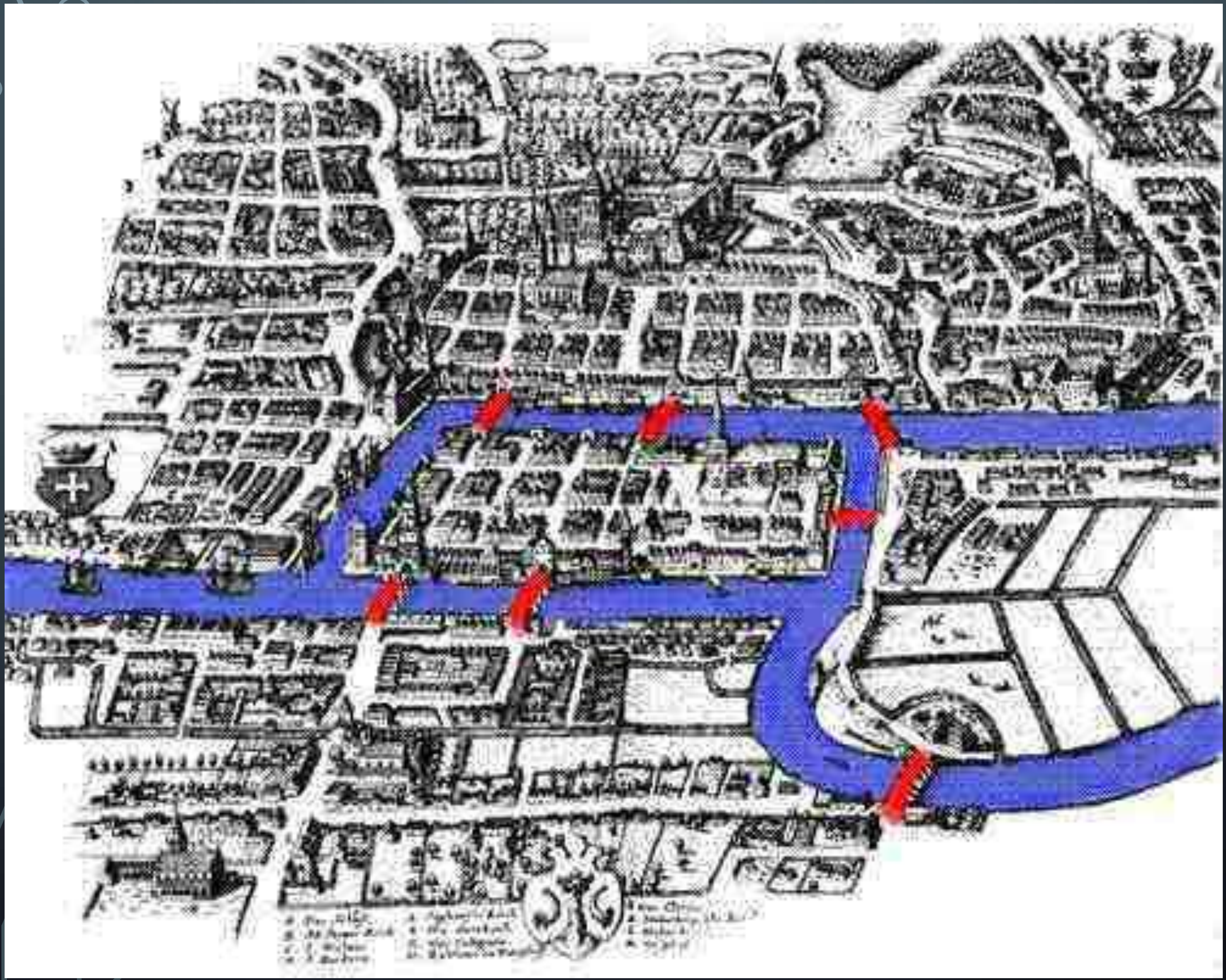
# MATEMÁTICA DISCRETA

# GRAFOS



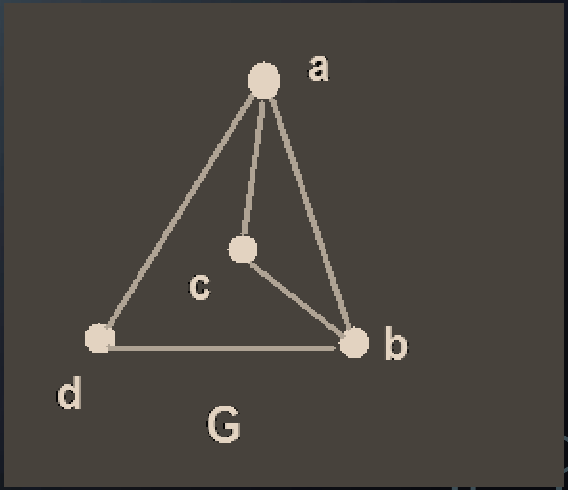
# TIPOS DE GRAFOS

- Un grafo G es un par (V,E) donde:
  - $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de vértices
  - $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ es un conjunto de aristas,

    con cada $e_k \in \{v_i, v_j\}$, con $v_i, v_j \in V$, $v_i \neq v_j$

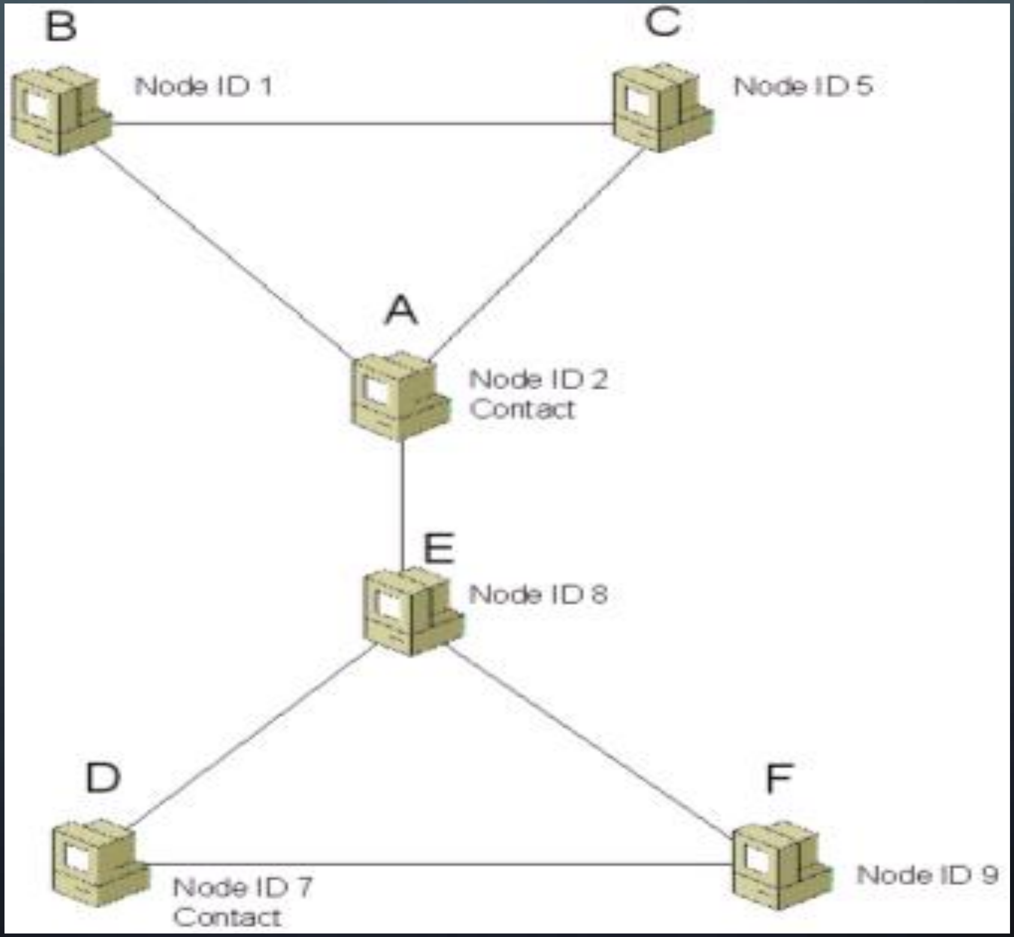
- Los vértices se representan como puntos y las aristas como líneas entre vértices

- Ejemplo:
  - G = (V,E)
  - V = {a,b,c,d }
  - E = {{a,b}, {b,c}, {a,c}, {a,d}, {d,b} }



# TIPOS DE GRAFOS

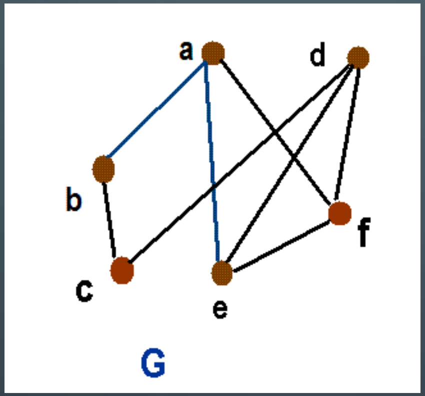
- Ejemplo: red de computadoras

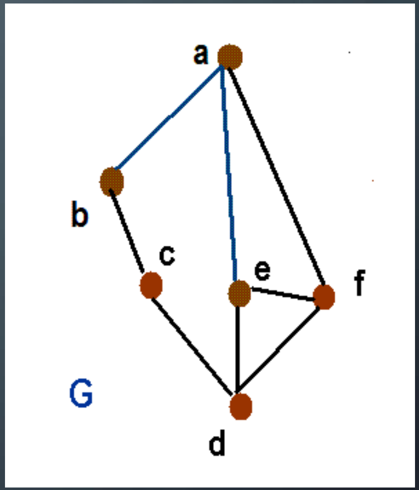


# TIPOS DE GRAFOS

- Es importante recordar que un mismo grafo puede tener diferentes representaciones gráficas

- Ejemplo:



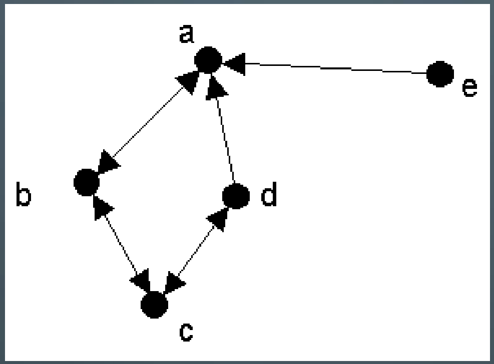




- Dos representaciones del mismo grafo

G=({a,b,c,d,e,f},{{a,b},{a,e},{a,f}{e,f},{b,c},{c,d},{e,d},{d,f}})

# TIPOS DE GRAFOS

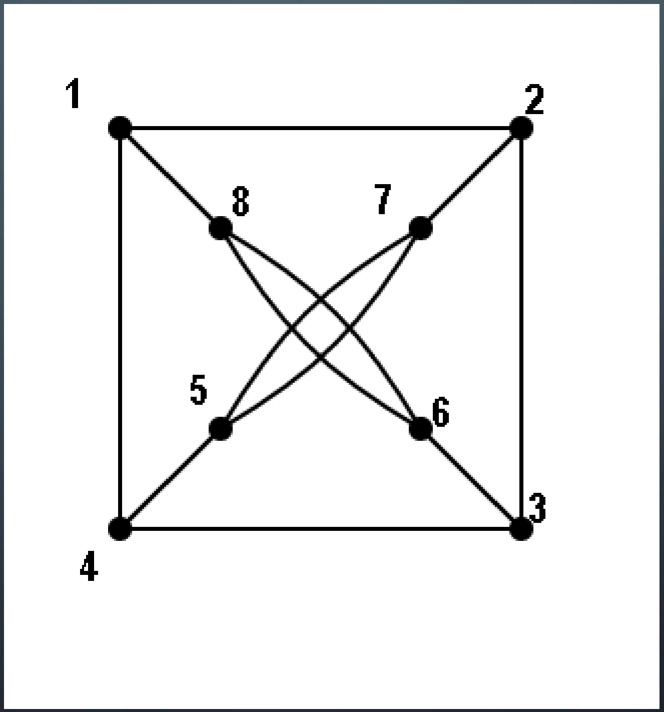
- Si el orden influye en la aristas se habla de grafos dirigidos:




- En este caso a las aristas se les llama arcos y se representan como pares ordenados para indicar el orden:
  - V = { a,b,c,d,e}
  - A ={(e,a), (a,b), (b,a), (d,a), (c,d), (d,c),(b,c),(c,b) }

# TIPOS DE GRAFOS

- Si se permite que haya más de una arista se habla de multigrafos:

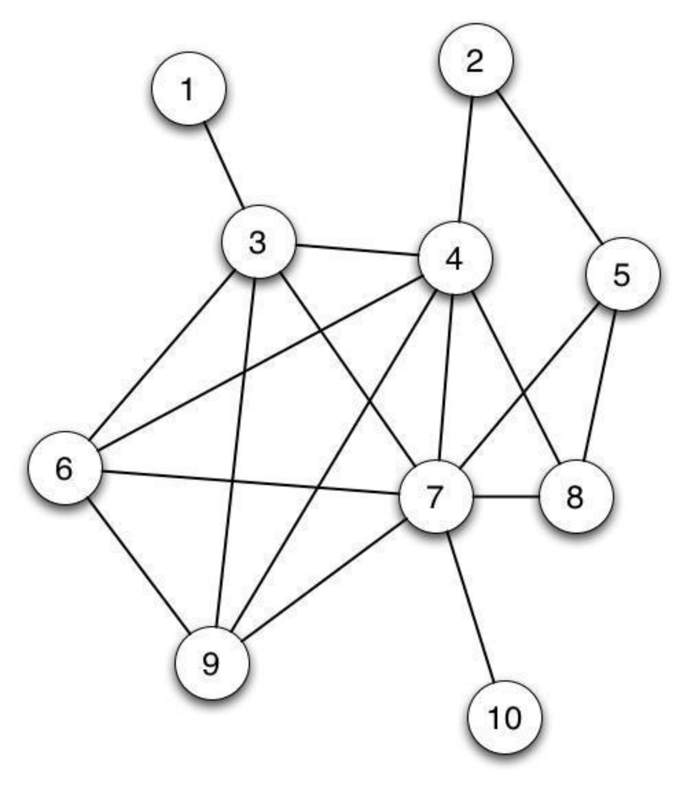


# CONCEPTOS BÁSICOS

- Dos vértices se dicen **adyacentes** si existe una arista que los une;
- Los vértices que forman una arista son los extremos de la arista;
- Si “v” es un extremo de una arista “a”, se dice que “a” es incidente con “v”;
- El **grado de un vértice** “v”, gr(v) es el número de aristas incidentes en “v”.

# CONCEPTOS BÁSICOS

- Ejemplo:




gr(6)= ________        gr(1) = __________

# CONCEPTOS BÁSICOS

- **Teorema** (de los "apretones de manos")

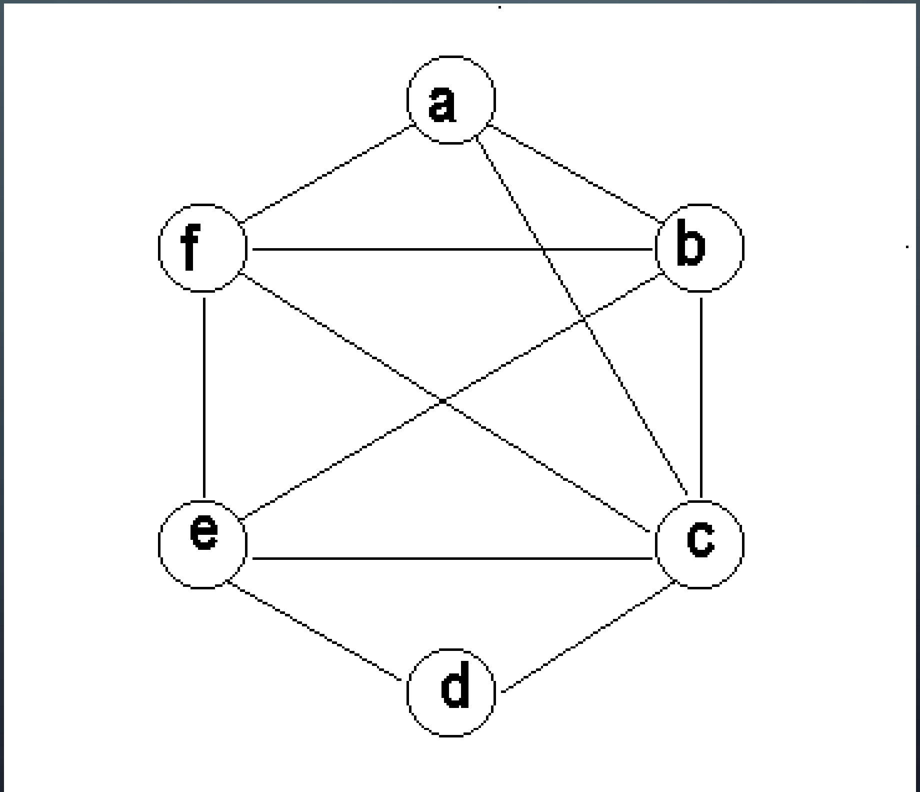
Sea G=(V,A) un grafo. Entonces:

$$\sum gr(v) = 2|A|, \text{ para todo } v \in V.$$

- Significado: la suma de los grados de todos los vértices es igual a 2 veces el número de aristas.

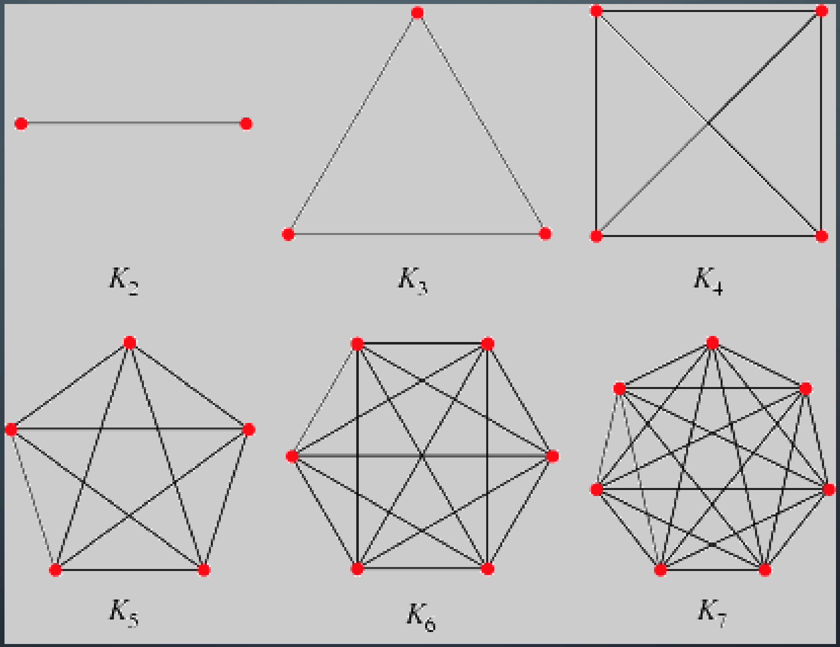
# CONCEPTOS BÁSICOS

- **Ejemplo:**



# CONCEPTOS BÁSICOS

- Para cada **n≥1** se llama **grafo completo** de orden n, y se representa por Kn, al grafo de n vértices conectados de todas las formas posibles:

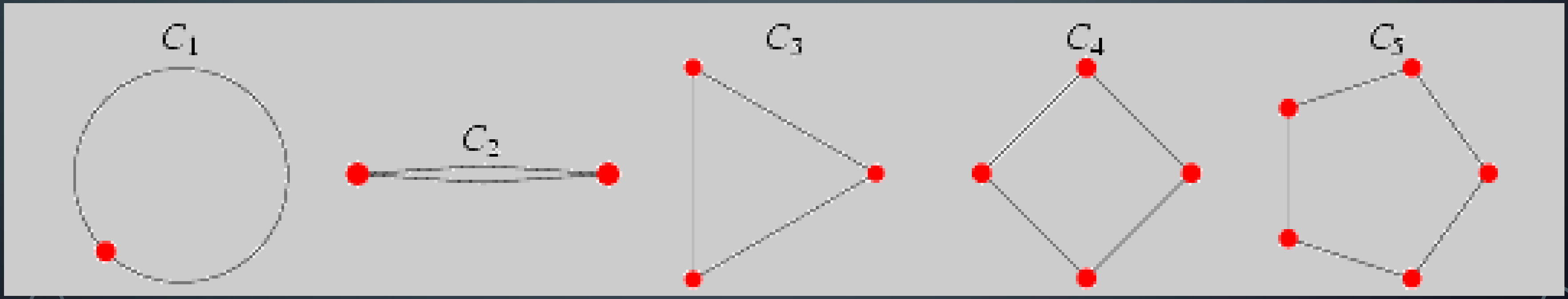



- **Pregunta**: ¿Cuántas aristas tiene en general Kn?

# CONCEPTOS BÁSICOS

- Se llama **ciclo** de grado n, y se denota **Cn**, a $G=(\{v_1,\ldots,v_n\},$

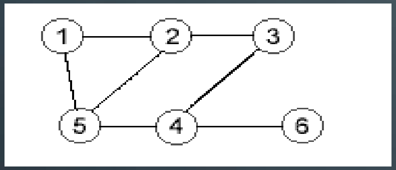
  $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\},\ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\})$




- **Nota**: A menudo sólo se consideran ciclos para n≥3

# REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

- Para representar los grafos a menudo se utiliza la llamada **matriz de adyacencia.**
- Se construye imaginando que en las filas y las columnas corresponden a los vértices. Se pone un 0 para indicar que 2 vértices no son adyacentes, y un 1 para indicar que sí lo son:




G

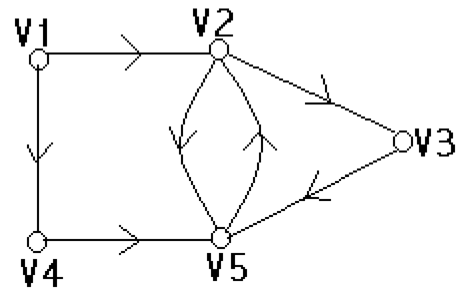
$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Matriz de Adyacencia de G

- Para representarla en una computadora se utiliza una matriz de valores lógicos (*booleanos*). True (1) hay arista, False (0) no hay arista.

# REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

- En el caso de un grafo no dirigido la matriz será simétrica. No ocurre lo mismo para grafos dirigidos:

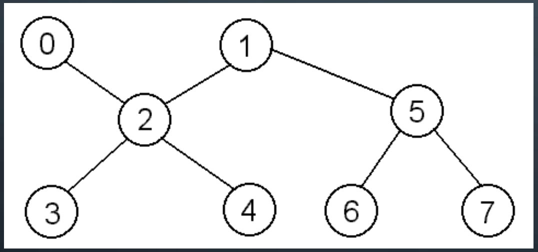



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} V1 & V2 & V3 & V4 & V5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ V5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

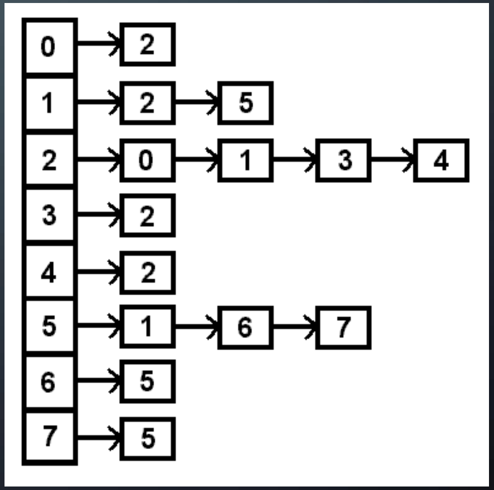
- Se supone que la **fila** representa el vértice **origen**, y la **columna** el vértice **destino** del arco

# REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

- En informática a menudo en lugar de la matriz se usa la **lista de adyacencia.**
- A cada vértice le corresponde una lista con sus adyacentes:




G




Lista de Adyacencia de G

# SUBGRAFOS

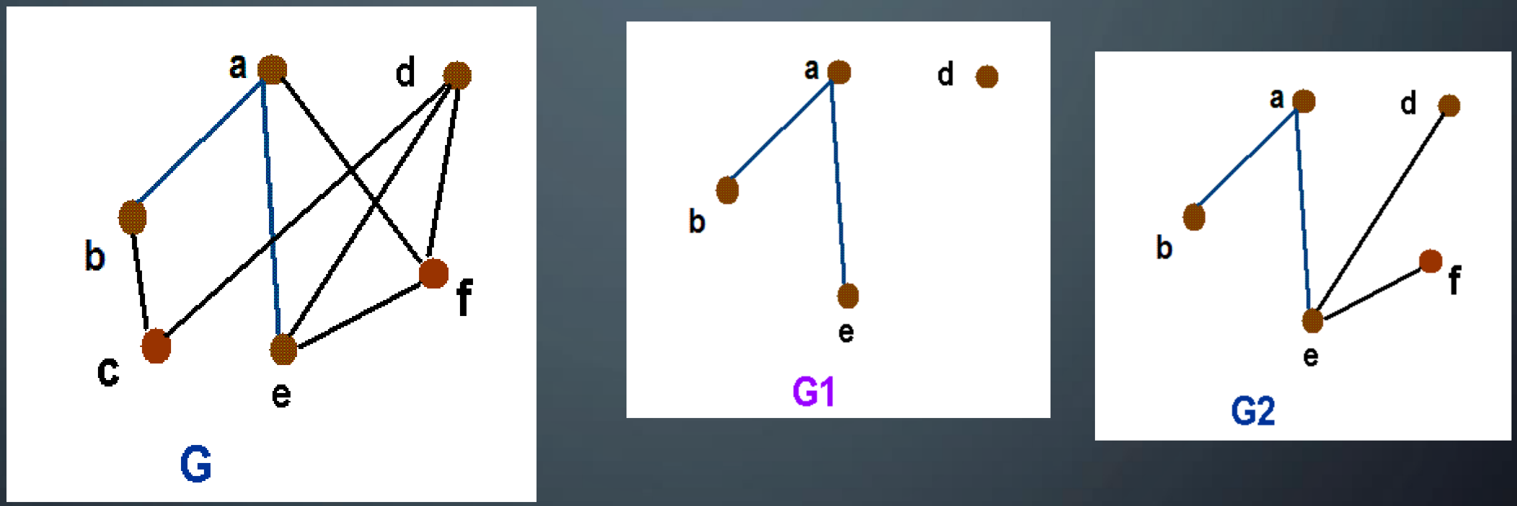
- Sea **G=(V,A)**. **G'=(V',A')** se dice **subgrafo** de **G** si:
  1. **V' ⊆ V**
  2. **A' ⊆ A**
  3. **(V',A')** es un grafo

- Resultado fácil de comprobar:
  - Si **G'=(V',A')** es subgrafo de G, para todo **v ∈ G** se cumple:

$$gr(G',v) \leq gr(G,v)$$

# SUBGRAFOS

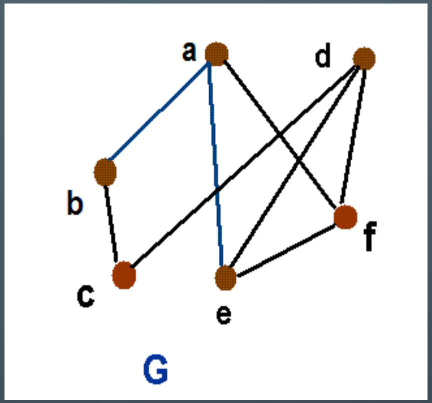
**Ejemplo:**




- G1 y G2 son subgrafos de G

# SUBGRAFOS

- Un grafo se dice cíclico cuando contiene algún ciclo como subgrafo
- Ejemplo:




- Contiene dos ciclos de longitud 3:

{a,e,f,a} y {_, _, _, _}

- Contiene un ciclo de longitud 6:

{_,_,_,_,_,_,_}

- ¿Contiene algún ciclo más? ___

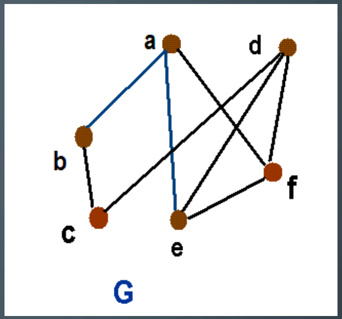
# GRAFO COMPLEMENTARIO

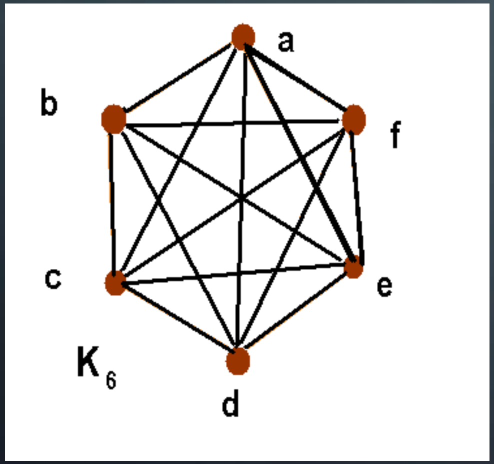
- El complementario **G'** de un grafo **G=(V,A)** tiene:
  - Los mismos vértices que **G**
  - Si **{u,v} ∈ G**, entonces **{u,v} ∉ G'**
  - Si **{u,v} ∉ G**, entonces **{u,v} ∈ G'**

- Una forma de construirlo:
  - Dibujar el grafo completo **Kn**, con **n=|V|**
  - Eliminar de **Kn** las aristas **{u,v} ∈ G**

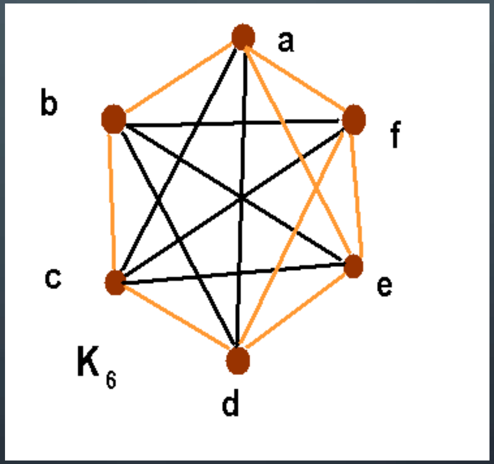
# GRAFO COMPLEMENTARIO

- **Ejemplo** : Complementario de

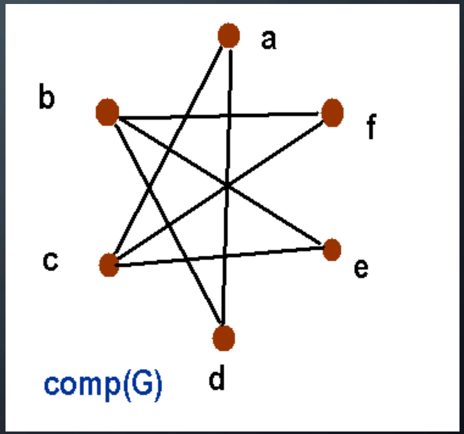



1º Representar K6



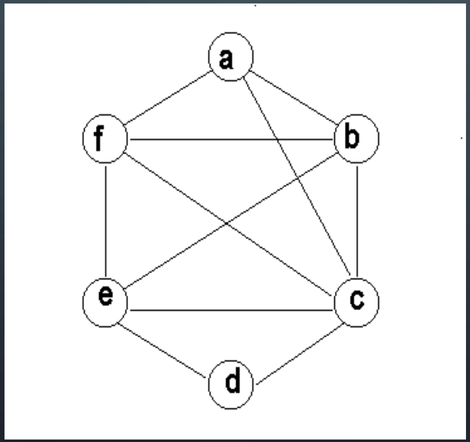

2º Marcar las aristas de G



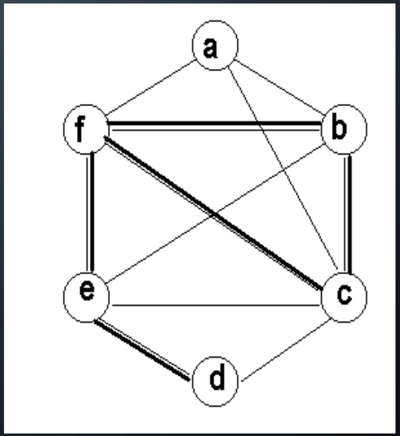

3º Eliminarlas

# CAMINOS Y CONECTIVIDAD

- Un **recorrido** en un grafo **G = (V,A)** es una sucesión de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que $\{v_i,v_{i+1}\} \in A$ para todo $0 \leq i < k$
- La **longitud** de un recorrido $v_0, v_1, \ldots, v_k$ es **k**
- **Ejemplo**:




G



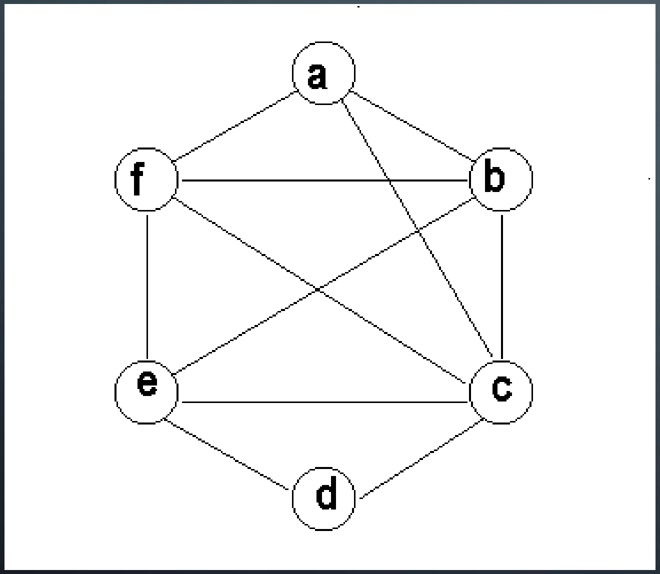

f,b,c,f,e,d es un recorrido de longitud 5 sobre G

# CAMINOS Y CONECTIVIDAD

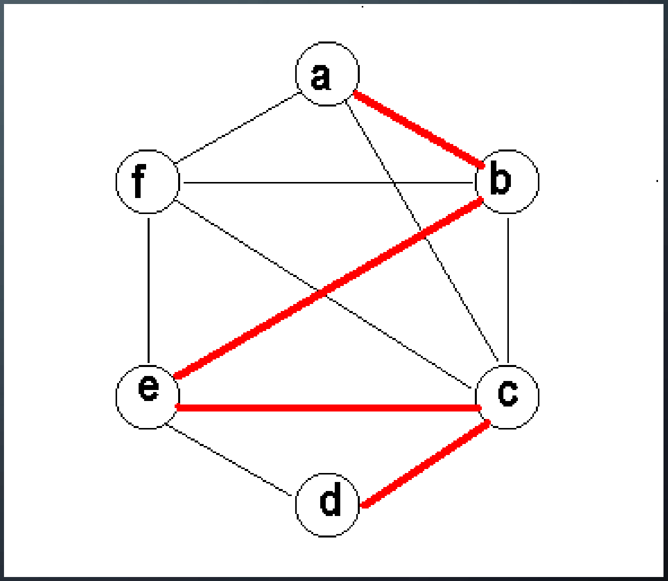
- **Observación**: Un recorrido puede repetir vértices, y puede comenzar y acabar en vértices diferentes
- Un **camino** es un recorrido $\mathbf{v_0, v_1, \ldots, v_k}$ en el que $\mathbf{v_i \neq v_j}$ para $\mathbf{0 \leq i,j \leq k,}$ con $\mathbf{i \neq 0}$ o $\mathbf{j \neq k}$
- Es decir en un camino todos los vértices son **distintos** entre sí, excepto quizás el primero y el último

# CAMINOS Y CONECTIVIDAD

- Ejemplo:




G




a,b,e,c,d es un camino

# CAMINOS Y CONECTIVIDAD

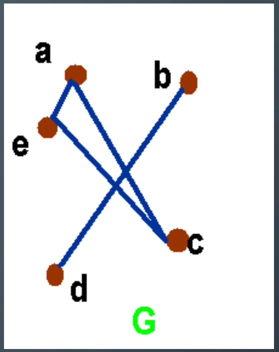
- Si existe un camino entre dos vértices se dice que están **conectados**
- Sea **G=(V,A)** un grafo. La relación

  **xRy ↔ x e y están conectados**

  es de equivalencia ($R \subseteq$ ____)
- Si para todo par de vértices de un grafo están conectados se dice que el grafo es **conexo**.

# CAMINOS Y CONECTIVIDAD

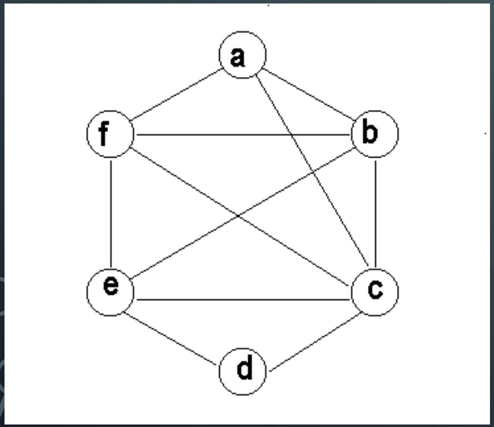
- **Ejemplo**. Consideramos el grafo:



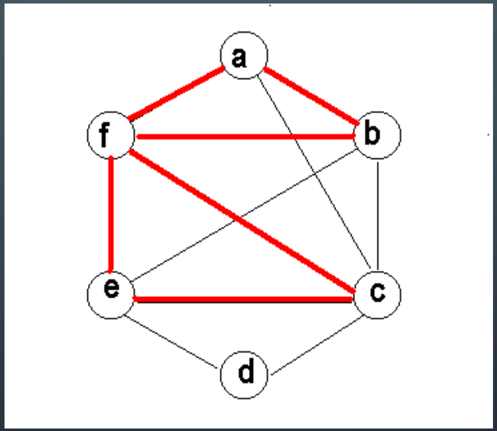

- Se tiene que:
  - G no es conexo: no hay camino entre a y b, por ejemplo.
  - [a] = {a,c,e} [c] = {a,c,e} [e]={a,c,e} [b]={b,d} [d]={b,d}
  - G/R = {[a],[b]}

# CAMINOS Y CONECTIVIDAD

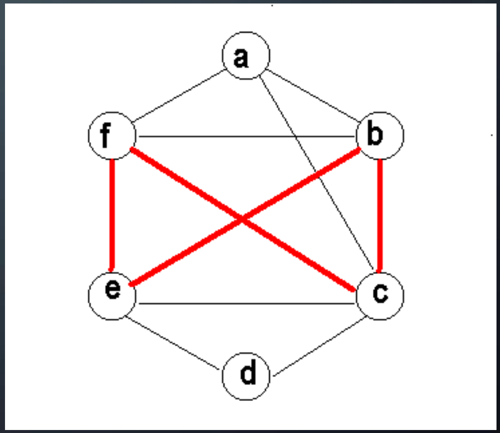
- Un recorrido $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que $v_0 = v_k$ es un **circuito**
- Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que $v_0 = v_k$ es un **ciclo**




G




a,b,f,c,e,f,a es un circuito



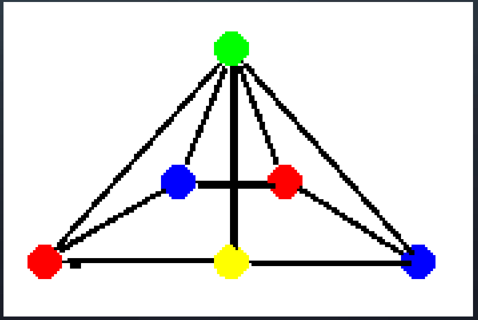

f,c,b,e,f es un ciclo

# GRAFOS BIPARTITOS

- Un problema interesante en un grafo es determinar su **número cromático**:

¿Cuántos colores son necesarios para pintar los vértices de forma que cada arista una siempre colores distintos?

- **Ejemplo**: Grafo con número cromático 4



# GRAFOS BIPARTITOS

- Aplicación: coloreado de mapas
- ¿Cuántos colores se necesitan para colorear un mapa de forma que no haya dos regiones con frontera con el mismo color?

# GRAFOS BIPARTITOS

- **Idea**: Transformar el mapa en un grafo, donde cada vértice representa una región y cada arista un límite entre regiones:

¿Cuántos colores se necesitan? □ ¿número cromático de este grafo?

# GRAFOS BIPARTITOS

- **Resultado**: Todos los mapas se pueden colorear con un máximo de 4 colores
- Solución propuesta en 1879, probada en [1976] por K. Appel y W. Haken con la ayuda de un ordenador.

# GRAFOS BIPARTITOS

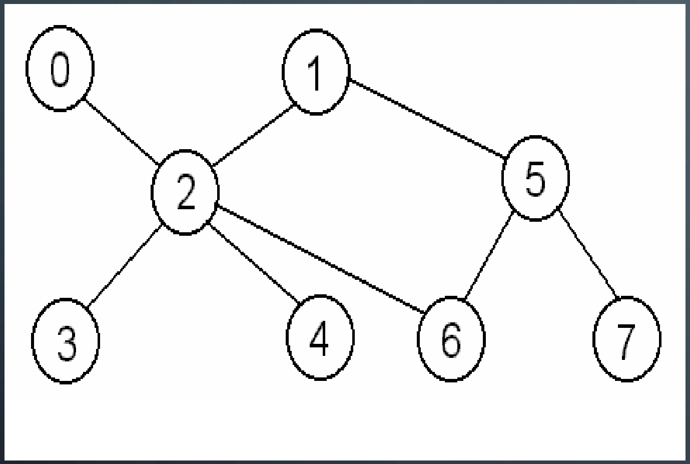
- Vamos a interesarnos en un caso particular: aquellos grafos que se pueden colorear en **dos** colores (**grafos bipartitos)**

- **Definición**: Sea **G=(V,A)**. Se dice que **G** es bipartito si existen $V_1$, $V_2$ tales que:

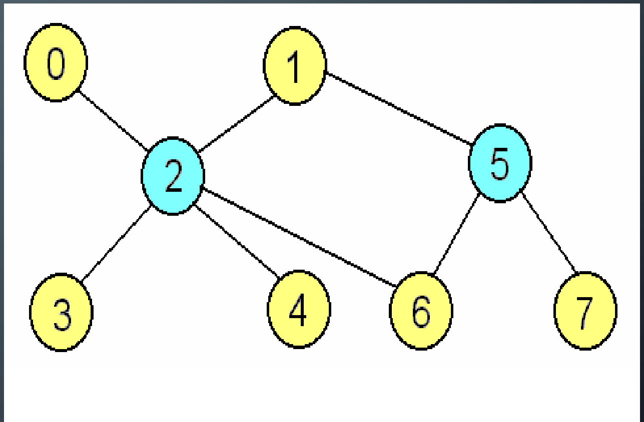
1. $V_1 \cup V_2 = V$
2. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
3. Para toda $\{v_i,v_j\} \in A$ se cumple $v_i \in V_1$, $v_j \in V_2$

# GRAFOS BIPARTITOS

- Ejemplos:



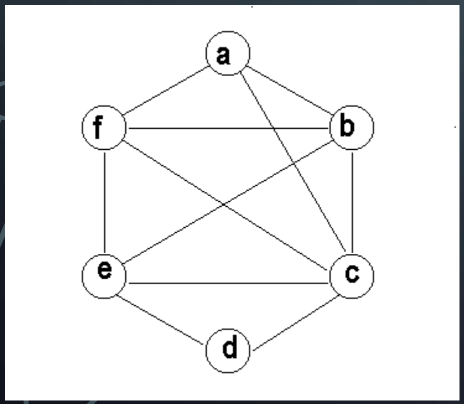

¿Es bipartito ?

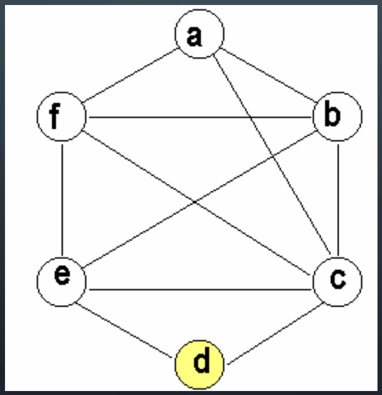


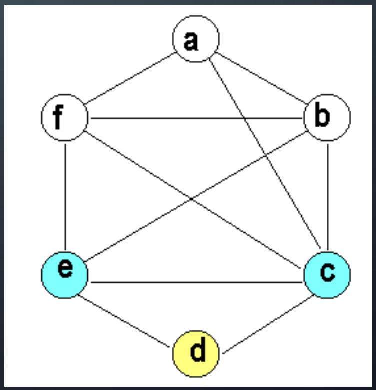

Sí; V1 = {2,5}, V2={0,1,3,4,6,7}

# GRAFOS BIPARTITOS

- **Idea** de cómo pintarlo:
  - Empezar por un vértice cualquiera, de color C1
  - Dibujar todos los adyacentes de color C2
  - Seguir este proceso hasta haber terminado



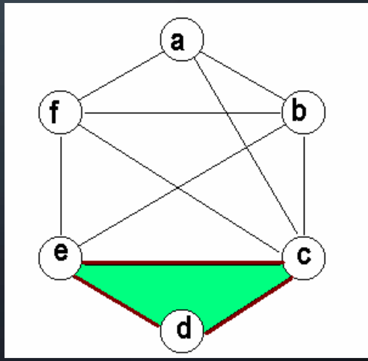

Parece que No es bipartito, pero …

**¿cómo estar seguros?**

# GRAFOS BIPARTITOS

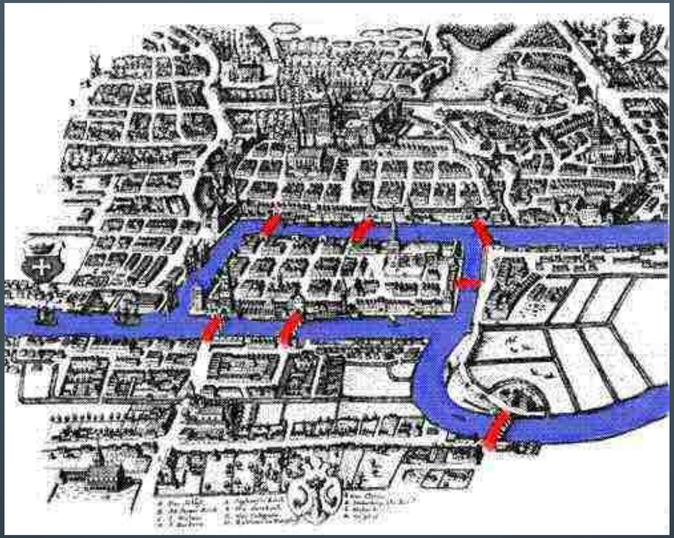
- **Teorema**: Una grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar

- **Ejemplo anterior**: No bipartito; contiene ciclos de longitud impar.



# RECORRIDOS EULERIANOS

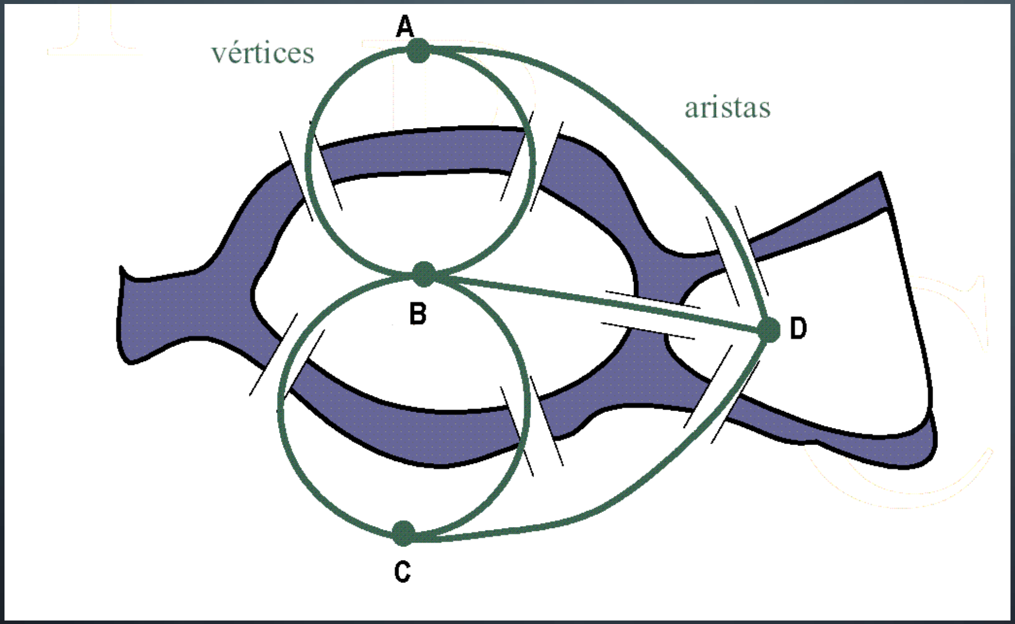
- Ciudad de Könisberg, en XVIII:

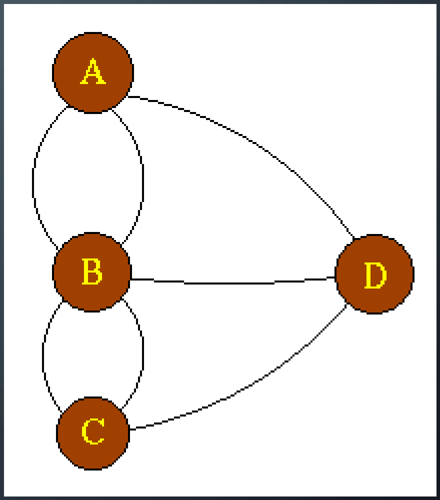


- **Pregunta**: ¿sería posible dar un paseo pasando por cada uno de los siete puentes, sin repetir ninguno, comenzando y acabando en el mismo punto?

# RECORRIDOS EULERIANOS

- Representación propuesta por Leonard Euler en 1736:




- ¿Existe un circuito que pase por todas las aristas una sola vez?

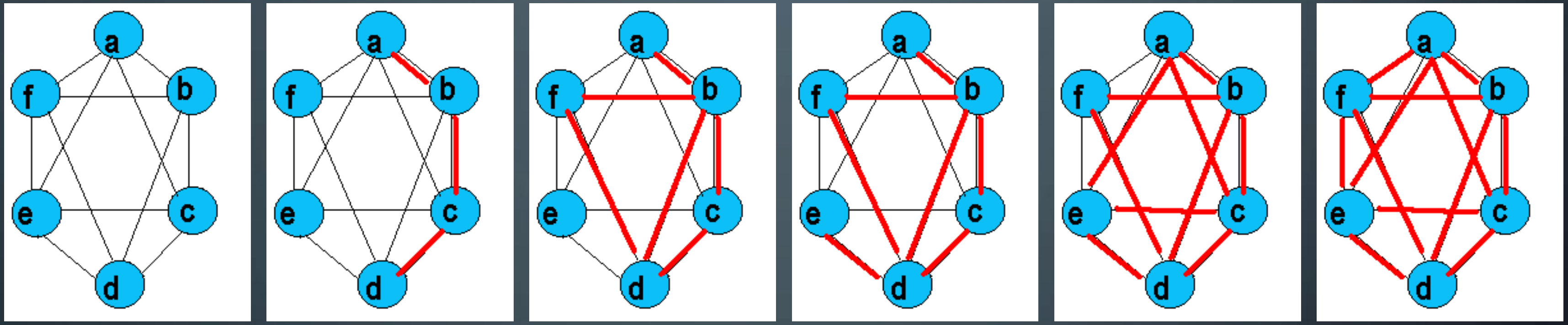
# RECORRIDOS EULERIANOS

- A estos circuitos se les llama **circuitos eulerianos**, y a los grafos que los contienen **grafos eulerianos**

- **Grafo o multigrafo euleriano**: admite un recorrido que pasa por todas las aristas una sola vez, empezando y terminando en el mismo vértice. Los vértices sí se pueden repetir.

# RECORRIDOS EULERIANOS

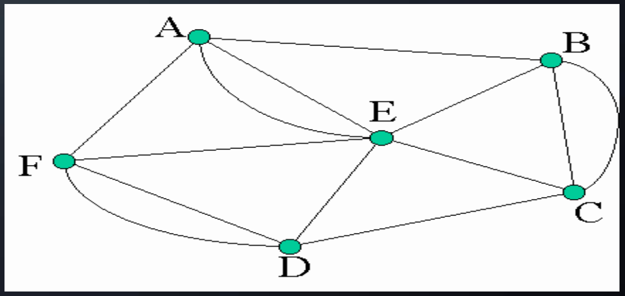
- **Ejemplo**: Grafo euleriano.




Circuito euleariano: **a,b,c,d,b,f,d,e,a,c,e,f,a**

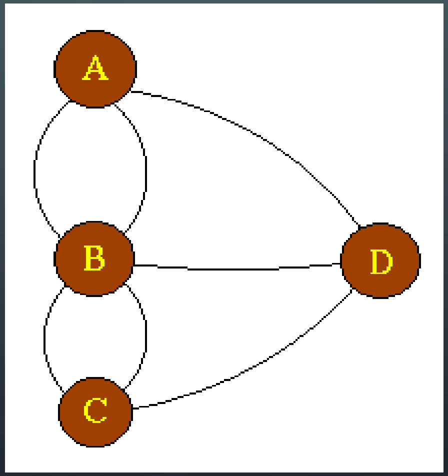
- **Ejemplo**: El siguiente grafo es euleriano

Encuentra un circuito euleriano:



# RECORRIDOS EULERIANOS

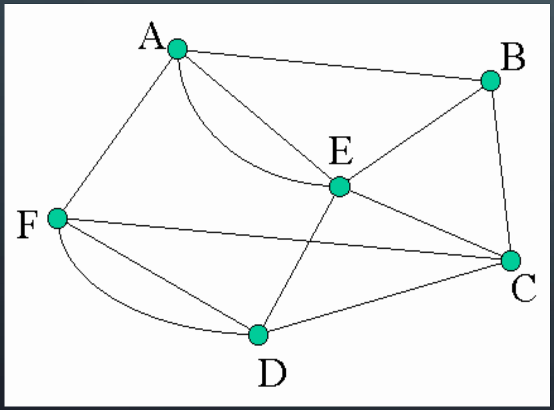
- ¿Cómo saber si un grafo (o multigrafo) es euleriano?
- **Teorema de Euler**: Un grafo conexo es euleriano (no tiene vértices de grado impar)
- **Ejemplo**:




Tiene grado 3, el grafo de los puentes no es euleriano.

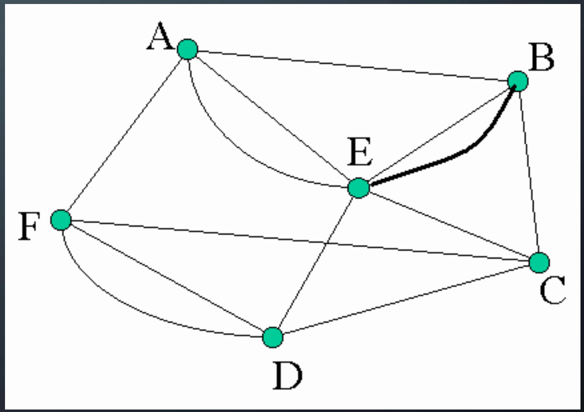
# RECORRIDOS EULERIANOS

- Si el grafo/multigrafo tiene sólo dos vértices de grado impar se llama **semi-euleriano**. Se puede convertir en euleriano añadiéndole una arista:




Semi-euleriano

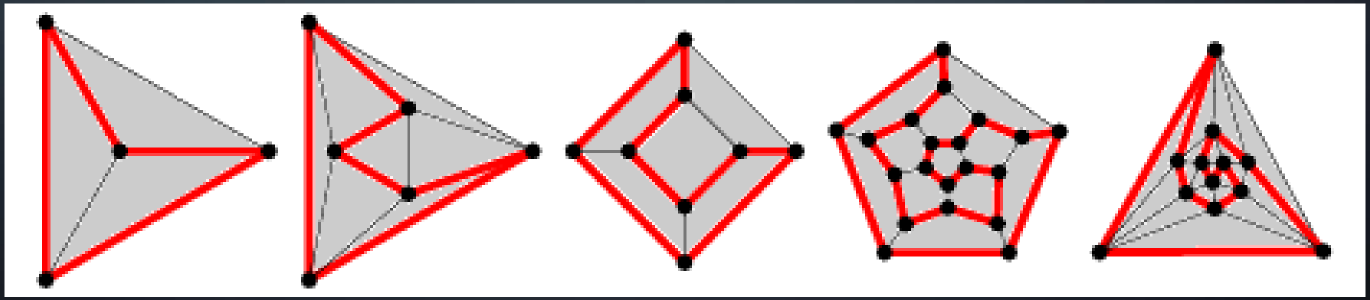
(__,__ grado impar)




Euleriano

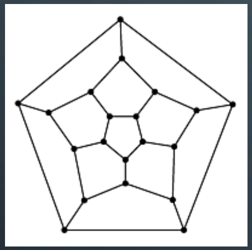
# RECORRIDOS HAMILTONIANOS

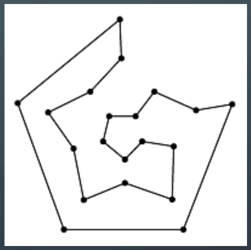
- Un grafo se dice **hamiltoniano** si existe un ciclo que recorre todos sus vértices. Al ciclo se le llama **ciclo hamiltoniano**
- **Ejemplos:**



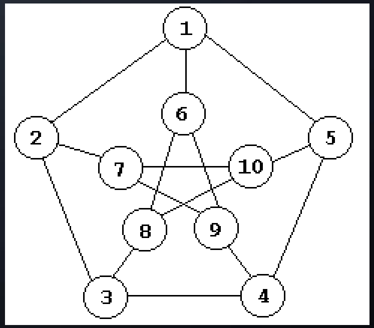
# RECORRIDOS HAMILTONIANOS

- **No existe** un método sencillo para saber si un grafo es no hamiltoniano (problema muy complejo)
- **Ejemplo**: Este grafo es hamiltoniano





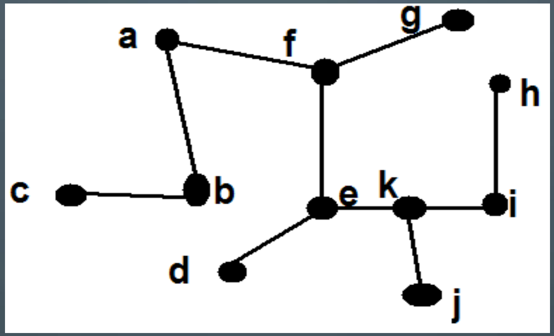
- ...pero este no ¡difícil de probar!



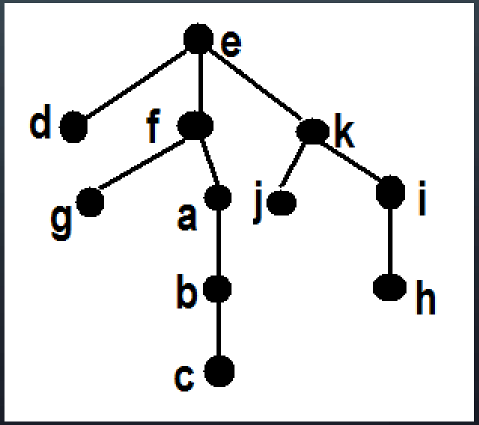
# ÁRBOLES

- **Árbol**: Grafo conexo y sin ciclos

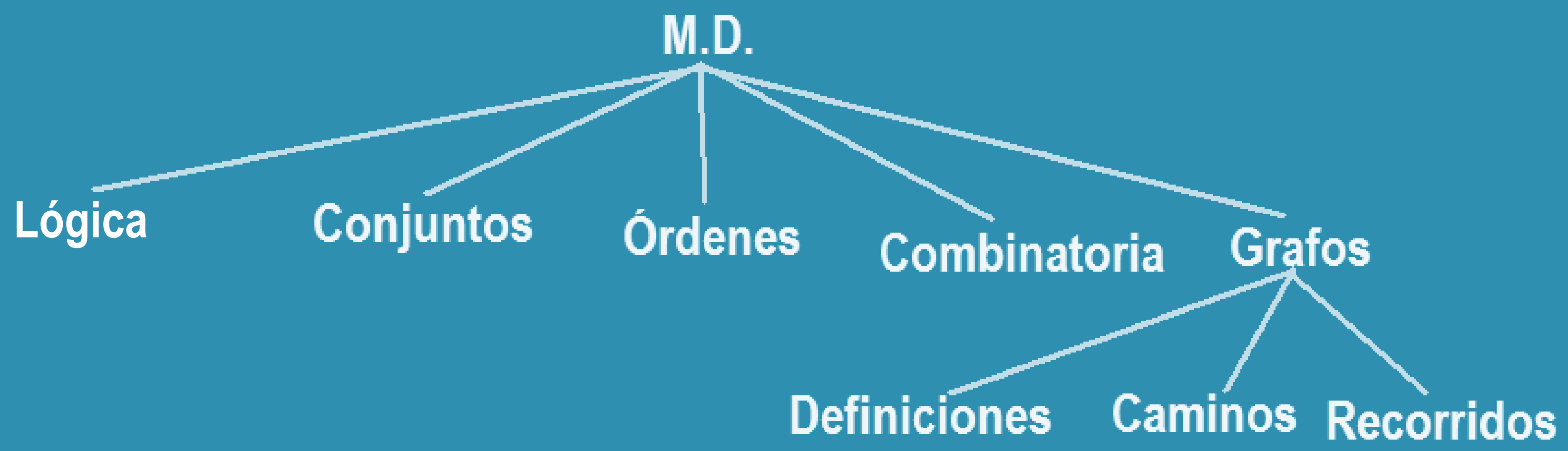
- **Ejemplo**:




- A menudo se selecciona un nodo especial al que se llama **raíz**, y se dibuja con la raíz en la parte superior, sus adyacentes más abajo y así sucesivamente:

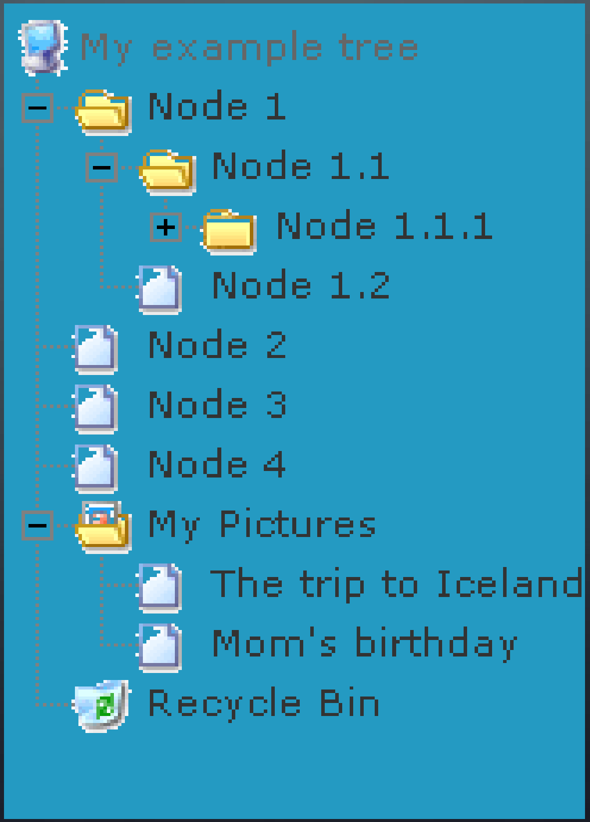


# ÁRBOLES


M.D.
Lógica
Conjuntos
Órdenes
Combinatoria
Grafos
Definiciones
Caminos
Recorridos

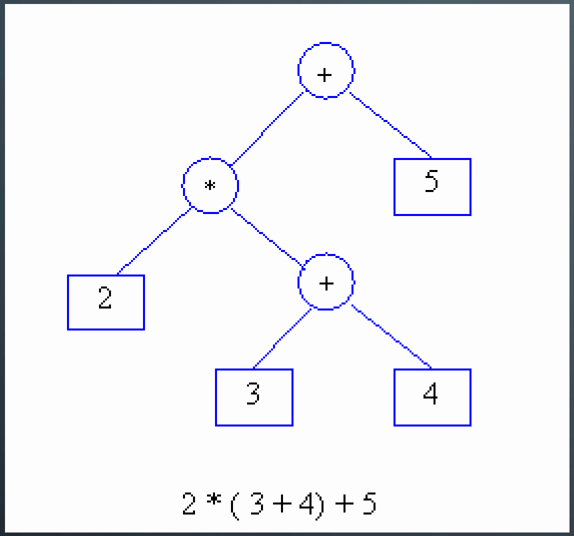
# ÁRBOLES

- **Ejemplo**: Una estructura de carpetas y ficheros es un árbol

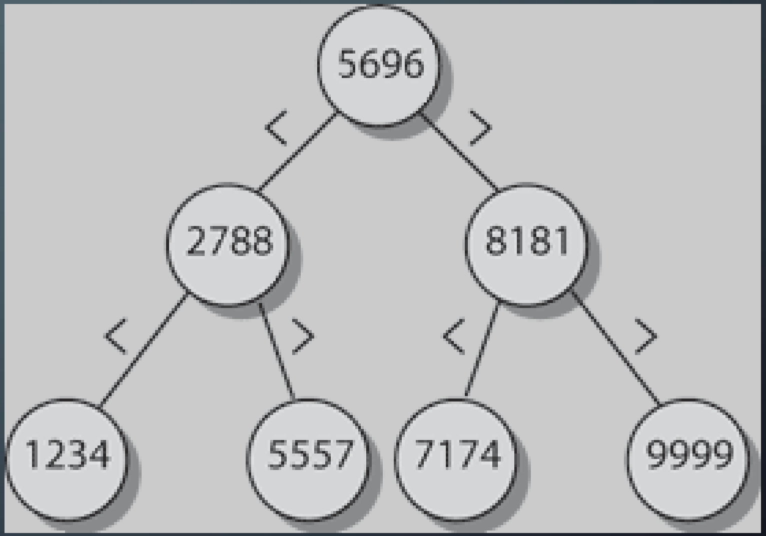


# ÁRBOLES

- **Ejemplos**:




**Análisis de expresiones**




**Árboles de búsqueda**

# ÁRBOLES

- Un poco de **terminología**
  - Los vértices de un árbol se llaman **nodos**
  - Los nodos descendientes inmediatos de un nodo son sus **hijos**, y el nodo superior es el **padre**
  - A una secuencia descendente de nodos se le llama **rama**
  - Los nodos sin hijos se llaman **hojas**, y los que sí tienen hijos **nodos internos**
  - Un conjunto de árboles es un **bosque**

# ÁRBOLES

- Algunas **propiedades**.

  Sea **G =(V,A)** un árbol. Entonces:

  - Entre cada par de vértices x,y hay un único camino
  - Al quitar de A cualquier arista resulta un bosque con 2 árboles
  - Al añadir una arista nueva siempre se obtiene un ciclo
  - $|A| = |V| - 1$