Clase 7 /03

Introducción histórica

La lógica matemática surge como el resultado de la convergencia de cuatro líneas de pensamiento:

1. La lógica antigua (Aristóteles, megárico-estoica).

2. La idea de un lenguaje completo y automático para el razonamiento.

3. Los nuevos progresos en álgebra y geometría acaecidos después de 1825.

4. La idea de que hay partes de la matemática que son sistemas deductivos, esto es, cadenas de razonamientos que se conforman a las reglas de la lógica.

   ¿Para qué se usa?

   • En matemáticas, la lógica es una herramienta útil para demostrar teoremas e inferir resultados, así como para resolver problemas.
   • En la computación, la lógica se aplica en la elaboración y revisión de programas, en el estudio de lenguajes formales y la relación existente entre ellos, así como en la obtención de resultados en forma recursiva.
   • En inteligencia artificial se logra que una máquina tome decisiones precisas.

¿De qué trata la lógica?

En una primera aproximación al tema, podremos dar la siguiente definición:

La lógica investiga la relación de *consecuencia* que se da entre
una serie de premisas y la conclusión de un argumento correcto.
Se dice que un argumento es *correcto* (válido) si su conclusión *se sigue* o es *consecuencia* de sus premisas; de otro modo es *incorrecto*.

Por un *argumento* entendemos un sistema de enunciados, de un lenguaje determinado. Uno de esos enunciados es designado como la *conclusión* y el resto como las *premisas*.

Un *enunciado* se define como una expresión lingüística que establece un pensamiento completo:

• Interrogativos,
• Imperativos,
• Declarativos:

- Enunciados de acción: sujeto no determinado. Ejemplos: "es verano";

"hace calor".

- Enunciados de atribución de propiedades a sujetos determinados.

Ejemplos: "Luis es alto"; "El verano es caluroso".

- Enunciados de relación entre sujetos. Ejemplos: "Luis es hermano de Juan" (Relación binaria); "Los Pirineos están entre España y Francia" (Relación Ternaria).

Forma de presentación de los sistemas lógicos

Los diferentes sistemas lógicos elementales tienen en común, en su presentación, una etapa previa de simbolización que suele hacerse a dos niveles:
Lógica proposicional: Frases declarativas simples, enunciados y proposiciones.
Lógica de predicados: Se toma como base los componentes de una proposición, términos, cuantificadores ...

Lógica proposicional

Proposición:

Una proposición o enunciado es una oración, frase o expresión matemática que puede ser falsa (representada con la letra F) o verdadera (representada con la letra V), pero no ambas a la vez. Se clasifica en proposiciones simples y proposiciones compuestas.

Variables de enunciado (letras enunciativas, o también letras proposicionales):
p, q, r, . . .

Conectivos: Para combinar proposiciones y formar nuevas proposiciones más complejas usamos los llamados conectivos lógicos.

1. Negación (¬). La forma enunciativa ¬*p* permite simbolizar un enunciado del tipo:
no p;
no es cierto que p;
es falso que p.

~ p

2. Conjunción (^). La forma enunciativa *p* ^ *q*, simboliza enunciados de la forma:
p y q;
p pero q;
p no obstante q;
p sin embargo q.

3. Disyunción (V). La forma enunciativa *p* V *q* simboliza enunciados de la forma:
p o q;
al menos p o q.

4.Disyución exclusiva. Sólo se puede cumplir una de las dos proposiciones integrantes, pero no ambas a la vez se representa como p $\veebar$ q y se lee como
p o bien q ;
p o exclusiva q

5.Condicional (→). La forma enunciativa p → q simboliza enunciados de la forma:
Si p entonces q;
si p, q;
p implica q;
p sólo si q;

p suficiente para q;
q si p;
q necesario para p

$\Longrightarrow$

6.Bicondicional (↔). p ↔ q denota enunciados de la forma:
p si y sólo si q; p necesario y suficiente para q
$\Leftrightarrow \ / \ p \Rightarrow q \ \wedge \ q \Rightarrow p$

Nombre	Lenguaje natural	Lenguaje formal
Bicondicional	si y solo si…	$\leftrightarrow$
Condicional	si… entonces…	$\rightarrow$
Conjunción	y	$\wedge$
Disyunción (incluyente)	o	$\vee$
Disyunción (excluyente)	o bien… o bien…	$\veebar$
Negación	no	$\sim$ o $\neg$

Tabla de verdad:

El número de casos o filas que tiene la tabla de verdad de una proposición compuesta es siempre 2^n (n: es el número de proposiciones involucradas)

Negación:
p: el cielo es azul

p	$\neg p$
V	F
F	V

Conjunción:

p: hoy es lunes
q: el jueves hay fiesta

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción inclusiva:

p: Estudiamos informática
q: Nos vamos al cine

p $\vee$ q : Estudiamos informática o nos vamos al cine

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción excluyente:

p: vamos en autobús
q: vamos en taxi

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional:
p: Hace buen tiempo
q: Iremos al campo

p$\Rightarrow q$: Si hace buen tiempo entonces iremos al campo

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional:
p: Un triángulo es equilátero

q: Un triángulo tiene los tres lados iguales

p$\Leftrightarrow q$: Un triángulo es equilátero sí y solo sí tiene los tres lados iguales

p	q	p⇒q	q⇒p	p⇒q∧ q⇒p	p⇔ q
v	V	V	V	V	v
v	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Para armar la tabla:
En donde se asignan los valores de verdad:
( ), [ ], { }
~,∧,∨,⊻, ⇒, ⇔

Ejemplo
Construir la tabla de verdad de $(p \Rightarrow \sim q) \vee r$

p	q	r	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$(p \Rightarrow \sim q) \vee r$
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Clasificación:
Según los valores de verdad se define como:

Tautología: Cuando todos los valores de verdad de la tabla son verdaderos.
Contradicción: Cuando todos los valores de verdad de la tabla son falsos.
Indeterminada: Cuando en su tabla de verdad hay verdaderos y falsos.

Construyan la tabla para la siguiente proposición y clasifíquenla:

$q \wedge \sim (q \vee p)$

$(\sim p \rightarrow q) \wedge (\sim r \ \vee q)$

Equivalencia Lógica

Diremos que P y Q son lógicamente equivalentes si toda asignación de verdad que hace verdadera a P hace verdadera a Q y viceversa.

Notación. Denotaremos la equivalencia lógica entre P y Q por P ⟺Q.

Ejemplo:

Comprobar $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge r)]$.

Leyes Lógicas:

Nombre	Ley lógica
1) Doble negación o involución	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
2) Leyes conmutativas	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
3) Leyes asociativas	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
4) Leyes distributivas	$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
5) Leyes de idempotencia	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$
6) Leyes de De Morgan	$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Nombre	Ley lógica
7) Ley de identidad	$p \vee F \Leftrightarrow p$ $p \wedge V \Leftrightarrow p$
8) Ley de dominación	$p \vee V \Leftrightarrow V$ $p \wedge F \Leftrightarrow F$
9) Contrapositiva	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
10) Ley del condicional	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
11) Ley del bicondicional	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
12) Disyunción excluyente	$p \underline{\vee} q \Leftrightarrow \sim(p \leftrightarrow q)$

Nombre	Ley lógica
13) Ley de absorción total	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
14) Ley de absorción parcial	$p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$ $p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$

1.ley del condicional

Ejemplo

$[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge r)]$.

Ley del Complemento

$p \vee \sim p \Leftrightarrow V$

$p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$

Ejemplo:

Simplificar la siguiente proposición:

$\sim (\sim p \vee \sim q)$

Actividad

Simplificar la siguiente proposición:

$\sim (p \vee q) \vee (\sim p \ \wedge q)$