Analisi e progettazione di algoritmi

(III anno Laurea Triennale - a.a. 2021/22)

Prova scritta 9 febbraio 2023

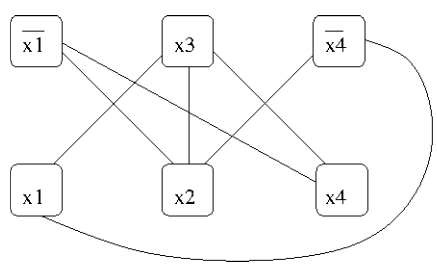
Esercizio 1 Si consideri la seguente istanza ϕ del problema *3SAT*:

$(\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4)$

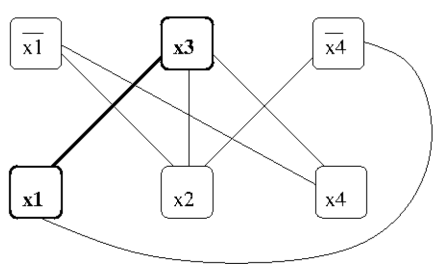
1. Si dia la corrispondente istanza del problema *CLIQUE*, ottenuta attraverso la riduzione vista a lezione.
2. Si dia un'assegnazione di valori di verità che rende vera ϕ e si mostri la corrispondente clique.
3. Come potremmo ottenere in modo semplice una riduzione da *SAT* a *CLIQUE*?

Soluzione

1. La corrispondente istanza del problema *CLIQUE*, ottenuta attraverso la riduzione vista a lezione, è data dalla coppia $(G, 2)$ dove G è il grafo seguente:

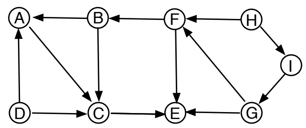


2. Un'assegnazione di valori di verità che rende vera ϕ è, per esempio, $x_1 = T$, $x_2 = F$, $x_3 = T$, $x_4 = F$. La corrispondente clique è evidenziata sotto.



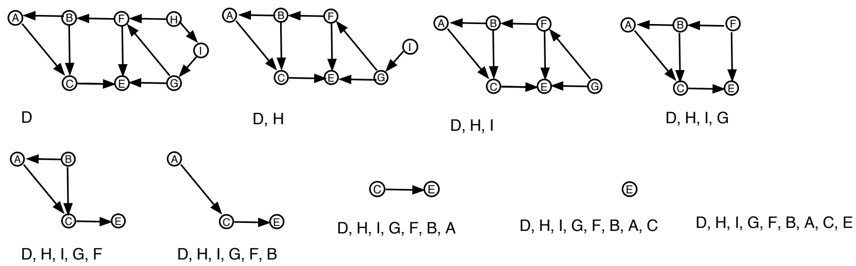
3. Una riduzione da *SAT* a *CLIQUE* si ottiene come composizione della riduzione da *3SAT* a *CLIQUE* con l'altra riduzione da *SAT* a *3SAT* vista a lezione.

Esercizio 2 Si eseguano, sul seguente grafo:

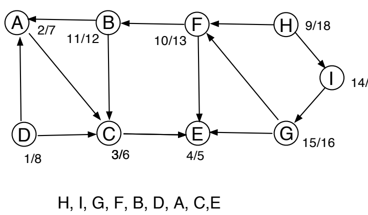


i due algoritmi di ordinamento topologico visti a lezione, spiegando concisamente i passi dei due algoritmi.

Soluzione Il primo algoritmo consiste nell'estrarre di volta in volta dal grafo un nodo sorgente. Si ha quindi:



Il secondo algoritmo consiste nell'effettuare una visita in profondità con timestamp e poi prendere i nodi in ordine inverso di fine visita. Si ha quindi, iniziando per esempio la visita dal nodo D:



Esercizio 3 Risolvi il problema del guardarobiere distratto con $n = 3$ in due modi. Nel primo considera tutte le configurazioni possibili, nel secondo usa la linearità del valore atteso.

Soluzione Per calcolare la probabilità *congiunta* che j amici con $j = 0, 1, 2, 3$ ritirino il proprio cappello, dobbiamo considerare tutte le $3! = 6$ configurazioni possibili (in grassetto il caso in cui l'amico riceve il proprio cappello)

$(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3})$ 3 $(\mathbf{1},3,2)$ 1 $(2,1,\mathbf{3})$ 1 $(2,3,1)$ 0 $(3,1,2)$ 0 $(3,\mathbf{2},1)$ 1

Tenendo presente che ogni configurazione ha probabilità 1/6, dalla tabella risulta che

$$p(0) = \frac{1}{3}, \quad p(1) = \frac{1}{2}, \quad p(2) = 0, \quad p(3) = \frac{1}{6}$$

Per il valore atteso degli amici che ritirano il proprio cappello, pertanto, otteniamo

$$\sum_{j=0}^{3} jp(j) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

Se utilizziamo la linearità del valore atteso, invece

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3} I_i\right] = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}\left[I_i\right] = \sum_{i=1}^{3} p_{I_i}(1) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} = 1$$