Foglio 4

5 aprile 2023

E4.1 Mostra che, per a e b costanti, e X variabile aleatoria continua: $E[aX+b] = aE[X]+b$, $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$.
Soluzione:
$E[aX+b] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(ax+b)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)xdx + b\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = aE[X]+b$, mentre per la varianza $Var(aX+b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(ax+b-aE[X]-b)^2 dx = a^2 Var(X)$.

E4.2 Un autobus passa ogni 15 minuti dalle 8 in poi. Calcola la probabilità di aspettarlo meno di 5 minuti e più di 10 minuti arrivando tra le 8 e le 8:30, considerando il tempo di arrivo alla fermata come una distribuzione uniforme tra le 8 e le 8.30.
Soluzione:
Se il tempo di arrivo alla fermata e‘ distribuito uniformemente tra le 8 e le 8:30, aspetti meno di 5 minuti arrivando dopo le 8:10 o dopo le 8:25 e piu‘ di 10 arrivando prima delle 8:05 e delle 8:20. In entrambi i casi hai

$$P\{8:10 < x < 8:15\} + P\{8:25 < x < 8:30\} =$$

$$P\{8:0 < x < 8:05\} + P\{8:15 < x < 8:20\} = 1/3.$$

E4.3 Data una v.a. continua X con pdf $f_X(x)$, si determini la pdf $f_Y(y)$ della v.a. continua Y, definita come $Y = g(X) = |X|$, lasciandola espressa in funzione di $f_X(x)$ (tramite il metodo del passaggio per la cdf).
Soluzione:
Per $y \geq 0$, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\} = F_X(y) - F_X(-y)$. Da cui derivando otteniamo $f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$ per $y \geq 0$.

E4.4 Sia X una variabile casuale distribuita uniformemente sull'intervallo $[0,2]$. Calcola:
a) la pdf di e^X;
b) $E[e^X]$ e $Var[e^X]$.
Solzuione:
Definita la trasformazione $y = f(x) = e^x$, si ha che:
a) $P_Y(y) = P_X(f^{-1}(y))\frac{df^{-1}(y)}{dy} = P_X(\ln y)\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\frac{1}{y}$.
Oppure tramite la cdf $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^x \leq y) = P(x \leq \log y) = F_X(\log y) = \frac{1}{2}\log y$.
Calcolando la derivata si ottiene infine $P_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{\log y}{2} = \frac{1}{2y}$. La nuova pdf e‘ definita in $[e^0, e^2]$.
b) $E[e^X] = \int_0^2 \frac{1}{2}e^x dx = \frac{e^2-1}{2}$.
$E[(e^X)^2] = \frac{e^4-1}{4}$.
$Var[e^X] = \frac{e^2-1}{2}$.
Gli stessi risultati si ottengono usando la pdf $P_Y(y)$.

E4.5 Se X e Y sono due variabili casuali discrete con $P(X=2, Y=3) = 1/3$, $P(X=3, Y=3) = 1/4$, $P(X=3, Y=4) = 1/4$ e $P(X=2, Y=1) = 1/6$, calcola:
a) le probabilità marginali;
b) le medie di X e Y;
c) $E[XY]$;
d) la covarianza $Cov(X,Y)$.
e) le variabili X e Y sono indipendenti? f) calcolare $P(X \leq 3, Y \leq 3)$.

Soluzione:
a) Poichè per v.a. discrete si ha che:

$$p_X(x) = P\{X = x\} = \sum_{y|p(x,y)>0} p(x,y)$$

nel nostro caso si ha che $X \in \{2,3\}$ e che $Y \in \{1,3,4\}$ possiamo scrivere:

$$p_X(X=2) = 1/3 + 1/6 = 1/2, p_X(X=3) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

$$p_Y(Y=1) = 1/6, p_Y(Y=3) = 1/3 + 1/4 = 1/7, p_Y(Y=4) = 1/4.$$

b)

$$E(X) = \sum_{x|p(x)>0} xp(x) = 2 \times 1/2 + 3 \times 1/2 = 5/2,$$

$$E(Y) = 1 \times 1/6 + 3 \times 7/12 + 4 \times 1/4 = 35/12.$$

c)

$$E(XY) = \sum_{x,y} g(x,y)p(x,y) = 2 \times 3 \times 1/3 + 3 \times 3 \times 1/4 + 1 \times 2 \times 1/6 + 3 \times 4 \times 1/4 = 91/12$$

d)

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 91/12 - 5/2 \times 35/12 = (182 - 175)/24 = 7/24.$$

e) Due variabili casuali sono indipendenti se per ogni coppia di insiemi A e B vale: $P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}$. Nel nostro caso subito si vede che:

$$P(X=2, Y=3) = 1/3 \neq 1/2 \times 7/12$$

f) $P(X \leq 3, Y \leq 3) = 1/3 + 1/4 + 1/6$.

E4.6 Sia X una variabile aleatoria casuale continua con densità di probabilità (pdf) uniforme nell'intervallo $[0,1]$ e si consideri la variabile aleatoria Y ottenuta come funzione di X secondo la seguente legge: $Y = g(X) = X2 + 1$. Si determini la pdf di Y.
Soluzione:

- PASSO 1: Si definiscano, qualora implicite nel testo, le $f_X(x)$ e $F_X(x)$.
  Per completare questo passo ci basta notare che X ha una pdf uniforme nell'intervallo $[0,1]$. Questo vuol dire che:

  $$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

  Integrando la $f_X(x)$ possiamo trovare la $F_X(x)$ che risulterá, quindi, definita come segue:

  $$F_X(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

- PASSO 2: Si definisca il dominio della variabile aleatoria Y.
  Considerato che $Y = g(X) = X^2 + 1$, questo vuol dire che $g(0) \leq y \leq g(1)$, cioé $1 \leq y \leq 2$. Di conseguenza le funzioni pdf e cdf di Y saranno definite per $y \in [1,2]$
- PASSO 3: Si determini la cdf per l'intervallo di definizione della Y, riconducendosi alla cdf nota di X.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X^2 + 1 \leq y\} = P\{X^2 \leq y - 1\} =$$
$$= P\{-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}\} =$$

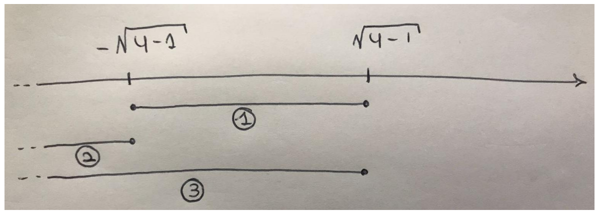

Figura 1:

Si nota dalla figura 1 che calcolare $P\{-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}\}$ equivale a calcolare la probabilitá che X abbia un valore all'interno dell'intervallo 1. Questo a sua volta equivale a calcolare la probabilitá che X sia all'interno dell'intervallo 3 ($X \leq \sqrt{y-1}$) ma non all'interno dell'intervallo 2 ($X \leq -\sqrt{y-1}$). Questo ci permette di scrivere:

$$P\{-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}\} = P\{[X \leq \sqrt{y-1}]\} - P\{[X \leq -\sqrt{y-1}]\} =$$

$$= F_X\{\sqrt{y-1}\} - F_X\{-\sqrt{y-1}\} = F_X\{\sqrt{y-1}\}$$

(Si noti che l'ultima uguaglianza é possibile poiché $F_X\{-\sqrt{y-1}\} = 0$. Infatti $-\sqrt{y-1}$ é sicuramente minore di 0 e la $F_X(x)$ in questo caso ha valori diversi da 0 solo per $x \in [0,1]$)

– PASSO 4: Si determini la pdf di Y a partire dalla cdf, nell'intervallo di definizione della Y.

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}F_X\{-\sqrt{y-1}\}}{\mathrm{d}y} = f_x(\sqrt{y-1})(y-1)^{-\frac{1}{2}}$$

Quindi considerando il dominio della Y calcolato al punto precedente possiamo scrivere che:

$$f_Y(y) = \begin{cases} (y-1)^{-\frac{1}{2}}, & y \in [1,2] \\ 0, & \textit{altrimenti} \end{cases}$$