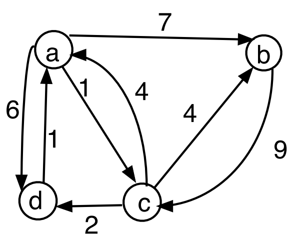
Analisi e progettazione di algoritmi

(III anno Laurea Triennale - a.a. 2021/22)

Prova scritta 8 luglio 2022

Esercizio 1 Si esegua l'algoritmo di Floyd-Warshall sul seguente grafo pesato:



Più precisamente:

- Si scrivano cinque matrici con righe e colonne indiciate `a`, `b`, `c`, `d` corrispondenti a considerare come nodi intermedi nei cammini: nessun nodo, solo `a`, anche `b`, anche `c`, anche `d`. Per semplicità scrivete per ogni iterazione $k = 0, \ldots, 4$ un'unica matrice le cui caselle contengono sia la distanza (matrice $\mathtt{D}^k$ nelle note) sia il predecessore (matrice Π^k nelle note). Per scrivere meno, potete indicare in ogni matrice solo le caselle modificate rispetto alla precedente.
- Si disegni il sottografo dei cammini minimi determinato dalla matrice.
- Si disegni l'albero dei cammini minimi a partire dal nodo `a`.

Soluzione

- Matrici (n sta per "nessun predecessore" e gli elementi cambiati sono evidenziati, nella casella in alto a sinistra è indicato l'insieme di nodi intermedi utilizzato):

$\emptyset$	a	b	c	d
a	0 n	7 a	1 a	6 a
b	∞ n	0 n	9 b	∞ n
c	4 c	4 c	0 n	2 c
d	1 d	∞ n	∞ n	0 n

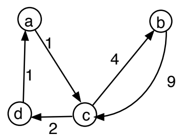
$\{a\}$	a	b	c	d
a	0 n	7 a	1 a	6 a
b	∞ n	0 n	9 b	∞ n
c	4 c	4 c	0 n	2 c
d	1 d	**8 a**	**2 a**	0 n

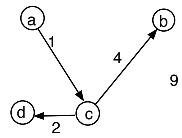
$\{a,b\}$	a	b	c	d
a	0 n	7 a	1 a	6 a
b	∞ n	0 n	9 b	∞ n
c	4 c	4 c	0 n	2 c
d	1 d	8 a	2 a	0 n

$\{a,b,c\}$	a	b	c	d
a	0 n	**5 c**	1 a	**3 c**
b	**13 c**	0 n	9 b	**11 c**
c	4 c	4 c	0 n	2 c
d	1 d	**6 c**	2 a	0 n

$\{a,b,c,d\}$	a	b	c	d
a	0 n	5 c	1 a	3 c
b	**12 d**	0 n	9 b	11 c
c	**3 d**	4 c	0 n	2 c
d	1 d	6 c	2 a	0 n

- Sottografo dei cammini minimi determinato dalla matrice, e albero dei cammini minimi a partire dal nodo `a`:



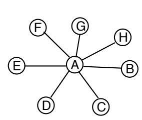


Esercizio 2 Rispondere alle seguenti domande.

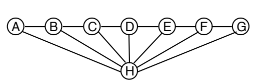
1. Consideriamo la visita in profondità iterativa di un grafo connesso con nodi A, B, C, D, E, F, G, H.
   (a) Si dia, se possibile, un esempio di grafo tale che ogni nodo entri nella pila esattamente una volta.
   (b) Si dia, se possibile, un esempio di grafo tale che che il nodo H entri nella pila sette volte.
2. Si consideri un grafo orientato con nodi s, u, v, w e archi (s, u), (s, v), (v, u), (u, w). Si diano, se possible, dei pesi agli archi, di cui solo uno negativo, tali che l'algoritmo di Dijkstra con nodo sorgente s non funzioni.
3. In un ordine topologico di un grafo orientato, è vero che:
   (a) se $u < v$ allora esiste l'arco (u, v)
   (b) se u è un nodo sorgente allora $u < v$ per ogni altro nodo v
4. Assumiamo che sia $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$. Allora, è vero che:
   (a) non esiste un algoritmo che risolva SAT
   (b) non esiste un algoritmo che risolva SAT in tempo polinomiale

Soluzione

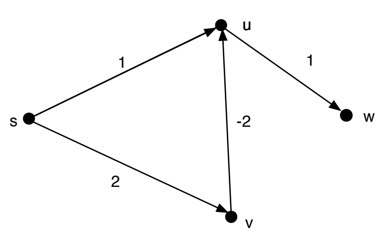
1. (a)



   (b)



2.



Infatti, alla prima iterazione si ha $d(u) = 1$ e $d(v) = 2$, alla seconda iterazione viene estratto il nodo u e si ha $d(w) = 2$, alla terza iterazione viene estratto il nodo v e si ha $d(u) = 0$, che è correttamente il costo minimo di un cammino dalla sorgente a u, ma la distanza provvisoria di w non viene aggiornata e resta 2 invece di 1[1].

3. (a) Falso, per esempio in un grafo senza archi qualunque sequenza dei nodi è un ordine topologico.
   (b) Falso, per esempio in un grafo senza archi qualunque sequenza dei nodi è un ordine topologico e tutti i nodi sono sorgente, quindi qualche nodo sorgente viene dopo un altro.
4. (a) Falso, esiste un ovvio algoritmo esponenziale che risolve SAT provando tutte le tabelle di verità possibili.
   (b) Vero, perché se esistesse si avrebbe $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Esercizio 3

- Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

  verifica, senza eseguire il prodotto AB, se $AB = C$.
- Se A, B e C fossero 10000×10000, determina quante verifiche sarebbero necessarie per affermare che $AB = C$ con probabilità pari al 99.9%.

[1] Infatti la prova di correttezza fallisce, in quanto non è più vero che quando estraggo u la sua distanza provvisoria è il costo minimo di un cammino dalla sorgente a u.