Laboratorio di Algebra Lineare e Analisi Numerica
Laboratorio 2: Sistemi Lineari

Gruppo:

- Mafodda Edoardo S5302507
- Toscano Mattia S5288636
- Trioli Davide S5316731

Premessa

Per migliorare la leggibilità del codice prodotto è stato creato un file per ogni esercizio proposto, più un file aggiuntivo **`functions.c`**, incluso in ognuno degli altri tre, che contiene tutte le funzioni utili al loro svolgimento.

Esercizio 1

Il salvataggio delle quattro matrici relative a questo esercizio avviene attraverso l'utilizzo di chiamate *new* all'interno del codice, in modo da allocarle dinamicamente per righe e per colonne.

Per quanto riguarda le matrici già definite nel testo dell'esercizio (punto *a*) queste vengono definite staticamente e poi copiate un elemento alla volta all'interno di quelle dinamiche; mentre per quelle definite mediante formule (punti *b* e *c*) queste vengono inizializzate direttamente elemento per elemento.

L'esercizio prevede il calcolo della norma infinito delle quattro matrici proposte, effettuato attraverso una funzione apposita generalizzata che la calcola attraverso la formula esplicita, ossia il massimo delle somme dei moduli per riga.
Nel caso della matrice di Pascal (punto *b*), per effettuare il calcolo del fattoriale necessario al fine di inizializzare la matrice, si è reso necessario l'utilizzo di valori *long unsigned int* per evitare overflow dei valori molto alti da questo prodotti.

Nel caso della matrice tridiagonale (punto *c*) la norma infinito risulta essere 4 indipendentemente dalla dimensione quando maggiore o uguale a 3: per costruzione, una riga, oltre a valori 0, conterrà tre elementi di valori $-1,\ 2,\ 1$ facendo sì che $||T||_{\infty} = |0| +... + |0| + |-1| + |2| + |-1| + |0| +... + |0| = 4$.

Nei casi di dimensione uguale a 2 si avrà $||T||_{\infty} = 3$

e dimensione 1 si avrà $||T||_{\infty} = 2$.

Nel caso specifico, la dimensione è di $10(3 + 1) + 1 = 41$ e la norma infinito indotta calcolata è 4, confermando quanto sopracitato.

```
 - - ESERCIZIO 1 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Norma infinito matrice 1: 14

 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Norma infinito matrice 2: 8

 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Norma infinito matrice 3: 92378

 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Norma infinito matrice 4: 4

 - - FINE ESERCIZIO 1  - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
```

Sopra, l'output (versione minimale) prodotto dall'esercizio 1.

Esercizio 2

Utilizzando le stesse matrici dell'esercizio 1, si procede come primo passo al calcolo del vettore dei termini noti b tramite la formula $A\bar{x} = b$ considerando $\bar{x}$ soluzione teorica del sistema lineare $\bar{x} = (1, ..., 1)^t$.
Successivamente si procede alla risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ tramite un'implementazione dell'algoritmo di eliminazione di Gauß e conseguente sostituzione all'indietro. Il vettore x così calcolato dovrebbe avvicinarsi alla soluzione teorica utilizzata per la costruzione di b, ossia un vettore di valori 1.
Inoltre, l'algoritmo di eliminazione di Gauß implementato prevede anche la realizzazione del pivoting parziale, ossia la ricerca del pivot massimo e conseguente sostituzione in cima, per evitare divisioni per 0 e limitare gli errori di macchina.
I risultati così ottenuti soddisfano per la maggior parte quanto atteso, ossia rispecchiano con una certa fedeltà la somiglianza con un vettore di 1, tranne che per la matrice 3; in questo caso la presenza di numeri alti all'interno della matrice di Pascal fa sì che attraverso le continue divisioni all'interno dell'algoritmo Gaussiano vengano creati degli errori dovuti alla precisione di macchina singola (*float*) che si ripercuotono sul risultato finale, andando a generare un vettore completamente differente rispetto a quanto atteso.

```
 - - ESERCIZIO 2 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 - - Colonna termini noti matrice 1  - - - - - - - - - - - - - - -
[3]     [4]     [4]     [-6]
 - - Soluzione sistema lineare matrice 1 (A|b) - - - - - - - - - -
[1]     [1]     [1]     [1]
 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 - - Colonna termini noti matrice 2  - - - - - - - - - - - - - - -
[4]     [5]     [5]     [2]
 - - Soluzione sistema lineare matrice 2 (A|b) - - - - - - - - - -
[1]     [1]     [1]     [0.999999]
 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 - - Colonna termini noti matrice 3  - - - - - - - - - - - - - - -
[10]    [55]    [220]   [715]   [2002]  [5005]  [11440] [24310] [48620] [92378]
 - - Soluzione sistema lineare matrice 3 (A|b) - - - - - - - - - -
[-31.7278]      [261.07]        [-932.368]      [1979.13]       [-2719.63]      [2514.27]       [-1556.29]      [624.51]        [-145.265]      [16.308]
 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 - - Colonna termini noti matrice 4  - - - - - - - - - - - - - - -
[1]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]
[0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [0]     [1]
 - - Soluzione sistema lineare matrice 4 (A|b) - - - - - - - - - -
[1]     [1]     [1]     [1]     [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999][
0.999999]       [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [0.999999]      [1]     [1]     [1]     [1]
[1]     [1]     [1]     [1]     [1]     [1]     [1]     [1]     [1]     [1]     [1]
 - - FINE ESERCIZIO 2  - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
```

Sopra, i risultati prodotti dall'esercizio 2 (versione minimale).

Esercizio 3

Calcolando $\delta b = ||b||_{\infty} \cdot (-\ 0.01,\ 0.01,\ \ -\ 0.01,\ ...,\ 0.01)^{t}$ come perturbazione sui termini noti e risolvendo il sistema lineare ora perturbato $A\tilde{x} = b + \ \delta b$ tramite le stesse funzioni utilizzate per l'esercizio 2 si può osservare il comportamento di $\tilde{x}$ rispetto a x (calcolata precedentemente) e $\bar{x}$ (la soluzione teorica).
Si può notare che siccome il calcolo della perturbazione tiene conto della norma infinito di b, più questo valore è alto e più è grande la perturbazione inserita, provocando un errore in output conseguentemente maggiore.
Difatti si può riscontrare che per quanto riguarda le matrici 1, 3 e 4 la perturbazione sui termini noti modifichi il risultato finale ma in maniera abbastanza moderata: per la matrice 1 si ha un errore massimo di circa $2\ \cdot\ 10^{-2}$; per la matrice 2 un errore massimo di circa $5\ \cdot\ 10^{-2}$; per la matrice 4 di circa $5\ \cdot\ 10^{-3}$.
Differente la questione relativa alla matrice 3: nonostante l'errore di macchina precedentemente esposto nell'esercizio 2, l'errore in input qui provoca una differenza sul risultato incredibilmente maggiore, con valori in modulo che assumono dimensioni fino a un massimo di quasi $4\ \cdot\ 10^{9}$, ben lontani dal valore 1 di partenza che gli si doveva avvicinare.

```
 - - ESERCIZIO 3 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 - - Colonna termini noti matrice 1 (con errore) - - - - - - - - -
[2.94]  [4.06]  [3.94]  [-5.94]
 - - Soluzione sistema lineare matrice 1 (A|b̃) - - - - - - - - -
[0.975868]      [1.0057]        [0.993306]      [0.991322]
 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 - - Colonna termini noti matrice 2 (con errore) - - - - - - - - -
[3.95]  [5.05]  [4.95]  [2.05]
 - - Soluzione sistema lineare matrice 2 (A|b̃) - - - - - - - - -
[0.95]  [1.015] [1.005] [1.055]
 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 - - Colonna termini noti matrice 3 (con errore) - - - - - - - - -
[-913.78]       [978.78]        [-703.78]       [1638.78]       [1078.22]       [5928.78]       [10516.2]       [25233.8]       [47696.2]       [93301.8]
 - - Soluzione sistema lineare matrice 3 (A|b̃) - - - - - - - - -
[-4.62621e+07]  [3.66405e+08]   [-1.31375e+09]  [2.78344e+09]   [-3.82762e+09]  [3.53548e+09]   [-2.19046e+09]  [8.7694e+08]    [-2.05699e+08]  [2.15266e+07]
 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 - - Colonna termini noti matrice 4 (con errore) - - - - - - - - -
[0.99]  [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.
01]     [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [-0.01] [0.01]  [0.99]
 - - Soluzione sistema lineare matrice 4 (A|b̃) - - - - - - - - -
[0.995] [1]     [0.995] [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.
994999] [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.
999999] [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [0.999999]      [0.994999]      [1]     [0.995] [1]     [0.995] [1]     [0.995]
 - - FINE ESERCIZIO 3  - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
```

Sopra, il risultato in output (versione minimale) dell'esercizio 3.