Foglio 2

21 marzo 2023

E2.1 Un test di laboratorio rileva la presenza di una patologia il 95% delle volte. L'1% delle volte il test rileva la presenza erroneamente. Se la patologia affligge lo 0.5% della popolazione con quale probabilità un individuo positivo al test è affetto dalla patologia?
Soluzione:
Se indichiamo con D l'evento "l'individuo è affetto dalla patologia" e con E l'evento "l'individuo è risultato positivo al test", hai $P(E|D) = 95\%$, $P(E|D^c) = 1\%$ e $P(D) = 0.5\%$ per cui applicando la formula di Bayes ottieni

$$P(D|E) = \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.95 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995} \approx 0.323.$$

E2.2 Sul totale degli iscritti all'università, la probabilità di laurearsi di uno studente è $p = 0.4$. Si determini la probabilità che, su 5 studenti:

1. Nessuno riesca a laurearsi.
2. Uno solo riesca a laurearsi.
3. Almeno uno riesca a laurearsi.

Soluzione:
Sia X la v.a. che indica il numero di studenti che riescono a laurearsi su 5 studenti. La v.a. X ha una distribuzione binomiale con parametri $n = 5$ e $p = 0.4$.

1. $P(X = 0) = (0.6)^5 = 0.07776$
2. $P(X = 1) = 5(0.4)(0.6)^4 = 0.2592$
3. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.92224$

E2.3 Dimostra che $Var(X) = (1 - p)/p^2$ è la varianza della variabile casuale geometrica X.
Soluzione:
Per una variabile casuale geometrica

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}p = \frac{1}{p}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2(1-p)^{i-1}p = \sum_{i=1}^{\infty}(i+1-1)^2(1-p)^{i-1}p \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)^2(1-p)^{i-1}p + \sum_{i=1}^{\infty} 2(i-1)(1-p)^{i-1}p + \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}p \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} j^2(1-p)^j p + \sum_{j=0}^{\infty} 2j(1-p)^j p + 1 = (1-p)E[X^2] + 2(1-p)E[X] + 1
\end{aligned}$$

per cui

$$E[X^2] = \frac{2(1-p)E[X]+1}{p} = \frac{\frac{2}{p}-1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

e, quindi, $Var(X) = (1-p)/p^2$.

E2.4 La probabilità che un iscritto passi il test pratico per la patente è ad ogni tentativo pari a $p = 0.75$. Qual'è la probabilità che un iscritto passerà finalmente il test pratico al quarto tentativo?
Soluzione:
Sia $X = 4$ e $\theta = 0.75$, abbiamo una distribuzione geometrica dunque $P(\text{successo al quarto tentativo}) = 0.75(1-0.75)^3 = 0.0117$.

E2.5 Prendiamo l'esercizio 1.5 ed ipotizziamo che ogni tiro costi 1 euro e che ogni centro dia in premio 3 euro. Qual è il valore medio vinto da un partecipante con un singolo tiro?
Soluzione:
Chiamiamo G la variabile aleatoria che esprime il guadagno *netto* del partecipante al gioco, questa ha come possibili realizzazioni $3 - 1 = 2$ euro e $0 - 1 = -1$ euro. Vogliamo quindi calcolare $E[G]$ dove G ha la seguente distribuzione di probabilità:

$$G = \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } P(\mathcal{C}) \\ +2 & \text{con probabilità } P(\mathcal{C}^c), \end{cases}$$

con $\mathcal{C}$ l'evento {il cliente fa centro in una prova}. Abbiamo già calcolato $P(\mathcal{C})$ con il il teorema della probabilità assoluta e abbiamo ottenuto $P(\mathcal{C}) = 0.3775$. Di conseguenza, $P(\mathcal{C}^c) = 1 - P(\mathcal{C}) = 0.6225$.

A questo punto possiamo calcolare il valore medio $E[G] = -1 \cdot P(\mathcal{C}) + 2 \cdot P(\mathcal{C}^c) = -1 \cdot 0.6225 + 2 \cdot 0.3775 = 0.1325$. Il gioco è in media conveniente per il giocatore.

E2.6 Se $P\{X = -1\} = 0.2$, $P\{X = 0\} = 0.5$ e $P\{X = 1\} = 0.3$, calcola $E[3X^2 + 1]$.
Soluzione:
Poiché $E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$ hai che $E[3X^2 + 1] = E[3X^2] + 1 = [3 \cdot (-1)^2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0 \cdot 0.5 + 3 \cdot (1)^2 \cdot 0.3] + 1 = 2.5$.