

Soluzioni - foglio 9

23 maggio 2023

E9.1 Data la seguente funzione

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{4}{\theta^2}x, & \text{se } 0 \leq x \leq \theta/2 \\ \frac{4}{\theta^2}(\theta - x), & \text{se } \theta/2 < x \leq \theta \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

verificare se f_{θ} rappresenta una pdf.

Inoltre, dato un campione i.i.d. (X_1, \dots, X_n) estratto da f_{θ} , stabilire se $T = (2/n) \sum_{i=1}^n X_i$ è uno stimatore corretto.

Soluzione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\theta}(x) dx = \frac{1}{2} \theta \frac{2}{\theta} = 1.$$

Dato che $E[X] = \theta/2$, si ha

$$E[T] = E[2/n \sum_i X_i] = \frac{2}{n} \sum_i E[X_i] = \frac{2}{n} n E[x_i] = \frac{2}{n} n \frac{\theta}{2} = \theta.$$

E9.2 Sia data la variabile casuale unidimensionale X con la seguente pdf ($\theta > 0$):

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{18\theta^4} e^{-\frac{\sqrt{x_i}}{3\theta^2}}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato un campione casuale i.i.d. (X_1, \dots, X_n) , calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ .

Inoltre, calcolare la densità di probabilità della variabile casuale $Y = \sqrt{X}$.

Soluzione:

$$L(\mathcal{D}, X) = \prod_i \frac{1}{18\theta^4} e^{-\frac{\sqrt{x_i}}{3\theta^2}} = \frac{1}{(18\theta^4)^n} e^{-\frac{\sum_i \sqrt{x_i}}{3\theta^2}}.$$

Si ha

$$\frac{d}{d\theta} \log L = \frac{d}{d\theta} (-n \log 18 - 4n \log \theta - \frac{\sum_i \sqrt{x_i}}{3\theta^2}).$$

Quindi

$$-\frac{4n}{\theta} + \frac{2}{3\theta^3} \sum_i \sqrt{x_i} = 0 \rightarrow \theta^* = \sqrt{\frac{\sum_i \sqrt{x_i}}{6n}}.$$

Inoltre,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = F_X(y^2).$$

Quindi

$$\frac{d}{dy} F_X(y) = 2y f_X(y^2) \rightarrow f_Y(y) = \frac{y}{9\theta^4} e^{-\frac{y}{3\theta^2}}.$$

9.3 Il numero di interruzioni (crash) di un personal computer segue una distribuzione di Poisson di parametro λ . Sia (X_1, \dots, X_n) un campione casuale di ampiezza n estratto dalla distribuzione di Poisson data. Il costo di riparazione è dato da

$$Y_n = 3\bar{X}_n + \bar{X}_n^2,$$

con \bar{X}_n la media campionaria. Calcolare $E[Y_n]$.

Soluzione:

Data la pfm di Poisson $P_\lambda(x)$, abbiamo $E[X] = \lambda$ e $Var[X] = \lambda$. Quindi

$$E[Y_n] = E[3\bar{X}_n + \bar{X}_n^2] = 3E[\bar{X}_n] + E[\bar{X}_n^2] = 3\lambda + E[\bar{X}_n^2].$$

Dato che

$$E[\bar{X}_n^2] - E[\bar{X}_n]^2 = Var[\bar{X}_n], \quad Var[\bar{X}_n] = \frac{Var[X]}{n} = \frac{\lambda}{n},$$

si ha

$$E[Y_n] = 3\lambda + \frac{\lambda}{n} + \lambda^2 \rightarrow 3\lambda + \lambda^2.$$