Soluzioni - foglio 1

16 marzo 2023

E1.1 Dimostra che per tutti gli eventi E e F
1. $P(E^c) = 1 - P(E)$
2. Se $E \subseteq F$, $P(E) \leq P(F)$
3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$

Soluzione (dalle note):
1. Per $A3$ $P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$ e per $A2$ $P(E \cup E^c) = P(S) = 1$.
2. Hai che $F = E \cup (E^c F)$. Per $A3$ $P(F) = P(E) + P(E^c F)$ e per $A1$ $P(E^c F) \geq 0$.
3. Osserva che per $A3$ $P(E \cup F) = P(E) + P(E^c F)$ e $P(F) = P(EF) + P(E^c F)$.

E1.2 Calcolare gli anagrammi di:
1. PROCURARE
2. PARACADUTE
3. STATISTICA

Soluzione:
1. $\frac{9!}{3!}$
2. $\frac{10!}{3!}$
3. $\frac{10!}{2!3!2!2!}$

E1.3 Partendo da un gruppo di 9 donne e 5 uomini, quanti comitati di 3 donne e 2 uomini si possono formare?
Soluzione:

$$\frac{9!}{6!3!} \times \frac{5!}{3!2!} \tag{1}$$

E1.4 Calcola la probabilità che, pescando a caso 9 numeri dall'insieme dei numeri N_{40} (insieme dei numeri interi positivi minori o uguali di 40) si ottenga una sequenza che contiene esattamente tre numeri pari e sei numeri dispari?
Soluzione:
Per pescare 3 numeri pari sui 20 disponibili ci sono $\binom{20}{3}$ diversi modi per farlo e per ognuna di queste scelte abbiamo $\binom{20}{6}$ modi per scegliere sei numeri dispari. In totale dunque ci sono $\binom{20}{3}\binom{20}{6}$ modi per pescare la sequenza di numeri richiesta.
Il numero totale di possibilitá di pescare 9 numeri dai 30 disponibili é pari a $\binom{30}{9}$. Pertanto la probabilitá di pescare la sequenza richiesta é pari a $\frac{\binom{20}{3}\binom{15}{6}}{\binom{30}{9}}$

E1.5 Al tiro a segno, tra coloro che sparano: il 15% hanno probabilitá $p_1 = 0.75$ di colpire il bersaglio (tipo 1); il 45% hanno probabilitá $p_2 = 0.5$ di colpire il bersaglio (tipo 2); il 40% hanno probabilitá $p_3 = 0.1$ di colpire il bersaglio (tipo 3). Si calcoli:
a) Si calcoli la probabilitá che un cliente colpisca il bersaglio in un singolo tiro.
b) Un cliente spara 7 volte: le prime 6 manca il bersaglio ed alla settima volta lo colpisce. Qaul é la probabilitá che il cliente sia di tipo 1? Di tipo 2? Di tipo 3?
Soluzione:
a) Definiamo il seguente evento:

$$\mathcal{C} = \{\text{Il cliente fa centro in una prova}\} \tag{2}$$

Indicando con T_1, T_2 e T_3 il tipo del cliente, in base al teorema della probabilitá totale possiamo scrivere:

$$P(\mathcal{C}) = P(\mathcal{C}|T_1)P(T_1) + P(\mathcal{C}|T_2)P(T_2) + P(\mathcal{C}|T_3)P(T_3) \tag{3}$$

$$= p_1 \cdot 0.15 + p_2 \cdot 0.45 + p_3 \cdot 0.4 = 0.3775 \tag{4}$$

dove si é notato che il fatto he il 10% delle persone é di tipo 1 significa che $P(T_1) = 0.15$ (e similmente per $P(T_2)$ e $P(T_3)$)) e, ovviamente, $P(\mathcal{C}|T_i) = p_i, i = 1, 2, 3$.

b) Definiamo il seguente evento:

$$\Omega = \{\text{Il cliente fa centro al settimo tiro}\} \tag{5}$$

$$= \{\text{6 insuccessi nelle prime prove ed 1 successo alla settima prova}\} \tag{6}$$

Applicando il teorema della probabilitá totale possiamo scrivere:

$$P(\Omega) = P(\Omega|T_1)P(T_1) + P(\Omega|T_2)P(T_2) + P(\Omega|T_3)P(T_3) \tag{7}$$

$$= (1-p_1)^6 p_1 \cdot 0.1 + (1-p_2)^6 p_2 \cdot 0.4 + (1-p_3)^6 p_3 \cdot 0.5 \simeq 0.024785 \tag{8}$$

A questo punto, applicando il teorema di Bayes, possiamo concludere:

$$P(T_1|\Omega) = \frac{P(\Omega|T_1)P(T_1)}{P(\Omega)} \simeq 0.001 \tag{9}$$

$$P(T_2|\Omega) = \frac{P(\Omega|T_2)P(T_2)}{P(\Omega)} \simeq 0.14 \tag{10}$$

$$P(T_3|\Omega) = \frac{P(\Omega|T_3)P(T_3)}{P(\Omega)} \simeq 0.859 \tag{11}$$

A questo punto, possiamo cocnludere che, dato che un cliente che spara 7 volte le prime 6 manca il bersaglio ed alla settima volta lo colpisce, é piú probabile che sia di tipo 3.

E1.6 Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?

Soluzione:

Possiamo scegliere Ω = insieme dei sottoinsiemi di r elementi dell'insieme degli n biglietti. Se A é l'evento in questione, A^c é l'insieme dei sottoinsiemi di r elementi degli $n-m$ biglietti non vincenti. Allora:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{n-m}{r}}{\binom{n}{r}} \tag{12}$$

E1.7 Si supponga che il 55% degli studenti che si presentano ad un esame abbiano preparazione sufficiente. L'esame viene superato dal 90% degli sutdenti preparati e dal 15% degli studenti impreparati. Si calcolino:

a) la probabilitá che uno studente scelto a caso superi l'esame;

b) la probabilitá che uno studente che ha passato l'esame sia in effetti impreparato.

Soluzione:

Poiché il 55% degli studenti che si presentano ad un esame ha preparazione sufficiente possiamo dire che considerando l'esperimento aleatorio *"uno studente si presenta all'esame"*, l'evento $E = \{studentepreparato\}$ ha probabilitá pari a $P(E) = 0,55$.

Definiamo poi gli ulteriori eventi:

$$I = \{\text{studente impreparato}\} \text{ e } \Omega = \{\text{studente supera l'esame}\}. \tag{13}$$

Quindi:

a)per il teorema della probabilitá totale si ha:

$$P(\Omega) = P(\Omega|E)P(E) + P(\Omega|I)P(I) = 0,5625 \tag{14}$$

b) per la formula di Bayes si ha:

$$P(I|\Omega) = \frac{P(\Omega|I)P(I)}{P(\Omega)} = 0.12 \tag{15}$$

E1.8 Lancia un dado onesto due volte. Sia E l'evento "la somma dei due risultati è 7", F_1 "il primo risultato è 4" e F_2 "il secondo risultato è 3". Dimostra che gli eventi E e F_1 e gli eventi E e F_2 sono indipendenti, ma non gli eventi E e $F_1 F_2$.

Soluzione:

Sai che $P(E) = 6/36 = 1/6$, $P(F_1) = 1/6$ e $P(F_2) = 1/6$ e che $P(EF_1) = P(EF_2) = 1/36$. Invece $P(E|F_1 F_2) = 1 \neq P(E)$.