Foglio 3

28 marzo 2023

E3.1 Data la v.a. continua X con pdf $f(x) = Cx^3$ definita nell'intervallo $0 \leq x \leq 3/2$, si chiede di:
- Determinare il valore di C;
- Determinare la probabilità $P(1/2 \leq X \leq 3/2)$;
- Calcolare $E[X^2]$ e $Var(X)$.

Soluzione:
- $\int_0^{3/2} Cx^3 dx = 1 \Leftrightarrow C = 64/81$
- $\int_{1/2}^{3/2} Cx^3 = 80/81$
- $E[X^2] = \int_0^{3/2} Cx^5 dx = 1.5$.

Per la varianza: $E[X] = \int_0^{3/2} Cx^4 dx = 1.2$, quindi $E[X^2] - E[X]^2 = 1.5 - 1.44 = 0.06$.

E3.2 Sia X una variabile casuale distribuita uniformemente sull'intervallo $[0, 2]$. Calcolare $E[2^X]$ e $Var[2^X]$.

Soluzione:
- $E[2^X] = .5 \int_0^2 2^x = .5 \frac{2^x}{\log 2}|_0^2 = \frac{3}{\log 4}$.
- $E[(2^X)^2] = .5 \int_0^2 2^{2x} dx = \frac{15}{4 \log 2}$. Dunque $E[X^2] - E[X]^2 = ...$

E3.3 Un'urna contiene 2 palline verdi, 3 rosse e 5 bianche; estraiamo casualmente 3 palline senza reinserimento. Guadagniamo 1 euro per ogni pallina verde, nulla per ogni pallina bianca e perdiamo 1 euro per ogni pallina rossa. Calcola la funzione di probabilità di massa e il valore atteso della vincita X.

Soluzione:

La vincita di X euro è una variabile casuale i cui possibili valori sono $0, \pm 1, \pm 2, -3$. I risultati possibili dell'esperimento sono le combinazioni di 3 palline scelte tra 10. Nell'assunzione di equiprobabilità, la probabilità con la quale X assume un possibile valore si riduce al calcolo dei casi favorevoli corrispondenti. Limitandoci ai casi in cui $X \leq 0$, osserviamo che $X = 0$ si ottiene con 3 palline bianche o 1 di ognicolore, $X = -1$ con 1 rossa e 2 bianche o 2 rosse e 1verde, $X = -2$ con 2 rosse e 1 biancae $X = -3$ con 3 rosse. Avremo pertanto

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{40}{120},\ P(X = -1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{5} + \binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120}$$

$$P(X = -2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{15}{120},\ P(X = -3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}.$$

La probabilità di non vincere è $(40+36+15+1)/120 = 92/120 = 0.7\bar{6}$. Similmente, la probabliità di vincere risulta essere pari a $28/120 = 0.2\bar{3}$ o $1 - 0.7\bar{3}$. Il valore atteso è pari a

$$E[X] = \sum_{X \in \Omega} XP(X) \approx -0.3,$$

con Ω tutti i risultati possibili. Se il numero di palline rosse nell'urna è uguale al numero di palline verdi, la probabilità di vincita è uguale a quella di perdita e quindi il valore atteso di X è zero.

E3.4 Si supponga di lanciare sei volte un dado a sei facce onesto. Qual è la probabilità di ottenere una solta volta ciascuno dei seguenti risultati: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Soluzione:

$$P = (\frac{1}{6})^6 \times 6!.$$

E3.5 Data una variabile casuale di Poisson X con valore atteso λ, dimostrare che anche la varianza di X è uguale a λ.
Soluzione:

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} (j+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda(\lambda+1)$$

e, quindi, $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda$.

E3.6 Un cassetto contiene due dadi a sei facce onesti e sette dadi a sei facce con $P(1) = P(2) = P(3) = 1/9$ e $P(4) = P(5) = P(6) = 2/9$. Pescando un dado a caso dal cassetto e lanciandolo, qual è la probabilità di ottenere 1 o 2? Supponiamo di aver ottenuto 1 o 2. Qual è la probabilità di aver pescato un dado onesto?
Soluzione:
Chiamiamo evento A l'estrazione del dado onesto ed evento B l'estrazione del dado disonesto. Abbiamo:

$$P(i) = P(i|A)P(A) + P(i|B)P(B) = \frac{1}{6}\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\frac{7}{9} = \frac{10}{81},\ i = 1, 2.$$

Quindi

$$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) = 2P(1) = \frac{20}{81}.$$

$$P(A|2) = P(2|A)P(A)/P(2) = \frac{1/6 \times 2/9}{0.12} = \frac{3}{10}.$$