Soluzioni - foglio 5

11 aprile 2023

E5.1 Se X e Y sono due variabili casuali discrete con $P(X=1, Y=3)=1/4$, $P(X=2, Y=3)=1/2$, $P(X=3, Y=4)=1/20$ e $P(X=1, Y=4)=1/5$, calcola:
a) le probabilita‘ marginali;
b) le medie di X e Y;
c) $E[XY^2]$;
d) la covarianza $Cov(X, Y)$.
e) Le variabili X e Y sono indipendenti?
Soluzione:
a) Poichè per v.a. discrete si ha che:

$$p_X(x) = P\{X = x\} = \sum_y p(x, y)$$

nel nostro caso si ha che $X \in \{1, 2, 3\}$ e che $Y \in \{3, 4\}$ possiamo scrivere:

$$p_X(X=1) = 1/4 + 1/5 = 9/20,\ p_X(X=2) = 1/2,\ p_X(X=3) = 1/20,$$

$$p_Y(Y=3) = 1/4 + 1/2 = 3/4,\ p_Y(Y=4) = 1/20 + 1/5 = 1/4.$$

b)

$$E(X) = \sum_x xp(x) = 1 \times 9/20 + 2 \times 1/2 + 3 \times 1/20 = 32/20,$$

$$E(Y) = 3 \times 3/4 + 4 \times 1/4 = 13/4$$

c)

$$E(XY^2) = \sum_{x,y} g(x, y)p(x, y) = \sum_{x,y} xy^2 p(x, y)$$

$$= 1 \times 3^2 \times 1/4 + 2 \times 3^2 \times 1/2 + 3 \times 4^2 \times 1/20 + 1 \times 4^2 \times 1/5$$

$$= 9/4 + 9 + 12/5 + 16/5 = 16.85$$

d) Per il calcolo della covarianza, poichè $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, prima di tutto calcoliamo $E(XY)$:

$$E(XY) = 1 \times 3 \times 1/4 + 2 \times 3 \times 1/2 + 3 \times 4 \times 1/20 + 1 \times 4 \times 1/5 = 3/4 + 3 + 3/5 + 4/5 = 5.15.$$

Quindi sostituendo nel calcolo della covarianza otteniamo che:

$$Cov(X, Y) = 5.15 - 32/20 \times 13/4 = -0.05.$$

E5.2 Data la variabile aleatoria X con distribuzione $f(x) = C(4x - 2x^2)$ per $0 \leq x \leq 2$, calcolare $E[X]$ e $P\{1 < X < 2\}$.
Soluzione:
Affinché $f(x)$ sia una pdf deve soddisfare la condizione di normalizzazione per cui: $P(X \in [0, 2]) = 1$, cioé: $\int_0^2 f(x)dx = 1$. Quindi in questo caso:

$$\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = \frac{1}{C}$$

Da cui si ottiene: $C = \frac{3}{8}$.

$$E[X] = \int_0^2 (3/8)(4x - 2x^2)xdx = 1$$

$$P\{1 < X < 2\} = \int_1^2 (3/8)(4x - 2x^2)dx = 1/2.$$

E5.3 Si supponga di avere un mazzo di 45 carte di cui 35 blu e 10 rosse. Si estrare una carta: se è blu si lancia una moneta, altrimenti due dadi onesti. Si calcolino le probabilità che:
a) esca testa;
b) esca il numero 6 (in somma).
Soluzione:
Definiamo i seguenti eventi: B = "esce carta blu", T = "esce testa nel lancio della moneta" e D_i = "esce somma i nel lancio dei dadi" , i = 2, 3, 4,....
a) Per calcolare la probabilità dell'evento E = "esce testa nel gioco" osserviamo che $E = B \cap T$, pertanto:
$P(E) = P(T|B)P(B) = 1/2 \cdot 35/45 = 35/90 \approx 0.39$
b) la probabilità dell' evento F = "la somma dei dadi sia 6" si calcola in modo analogo al caso precedente notando che $F = D_6 \cap B^c$ (avendo due dadi dobbiamo calcolare correttamente la molteplicità):

$$P(F) = P(D_6|B^c)P(B^c) = 5/36 \cdot 10/45 = 5/162 \approx 0.031$$

E5.4 Attualmente, in Italia, le targhe dei motoveicoli sono formate da 2 lettere (tra 22) e 5 cifre (tra 10). Per evitare duplicazioni con il sistema in vigore fino all'anno 1993, le 2 lettere non possono essere uguali alle sigle delle provincie (che sono in tutto 76). Con queste condizioni dire quante targhe di motoveicoli si possono formare.
Soluzione:
Il numero di targhe possibili per motoveicoli sará dato dal prodotto: $n_l \times n_c$, dove n_l rappresenta il numero delle possibili coppie di lettere, mentre n_c rappresenta il numero delle possibilitá per le 5 cifre successive.
In questo caso $n_l = 22^2 - 76$ (cioé tutte le possibili coppie di lettere, prese tra 22, considerando ripetizioni, escluse le sigle di provincia) e $n_c = 10^5$. Quindi $n_l \times n_c = (22^2 - 76) \times 10^5 = 40800000$.

E5.5 Calcola Var(X) se X è il risultato del lancio di un dado onesto.
Soluzione:
Poiché le 6 facce di un dado onesto sono equiprobabili, si ha che

$$P(X) = \frac{1}{6}, \text{ per } X = 1, ..., 6$$

Detto questo é facile calcolare il valore atteso di X partendo dalla definizione:

$$E(X) = \sum_x xp(x) = \sum_1^6 x\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

Ora partendo dalla definizione di varianza e usando il valore atteso appena calcolato possiamo scrivere:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = \sum_1^6 x^2\frac{1}{6} - (\frac{7}{2})^2 = \frac{35}{12}$$

E5.6 Si consideri la v.a. discreta X con pmf del tipo $p(x) = Cx$ per $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Si calcoli il valore di C che rende $p(x)$ una pmf valida. Per tale valore di C, si calcolino le probabilità $P(X \geq 4)$ e $P(X \leq 3)$.
Soluzione:
Poiché, per una pmf, deve essere sempre verificato il vincolo per cui $\sum_i P(x_i) = 1$, abbiamo che $\sum_0^4 Cx = 1$. Quindi $C\sum_0^4 x = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{0+1+2+3+4} = \frac{1}{10}$.

$$P(X \geq 4) = p(4) = 4/10.$$

$$P(X \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = \frac{0+1+2+3}{10} = \frac{6}{10}.$$

E5.7 Supponiamo che, in una certa comunità, il 15% di famiglie non abbia figli, il 20% abbia un figlio, il 35% abbia 2 figli, e che il 30% abbia 3 figli. Supponiamo inoltre che in ogni famiglia ogni figlio ha la stessa probabilità (indipendentemente) di essere maschio o femmina. Indichiamo con M e F le variabili casuali che rappresentano rispettivamente il numero di maschi e il numero di femmine in una famiglia estratta a caso dalla comunità. Calcolare la probabilità congiunta di M e F.

Soluzione:

In ogni famiglia gli eventi di avere un maschio o una femmina sono indipendenti e equiprobabili. Indichiamo con N la variabile casuale che rappresenta il numero di figli in una famiglia estratta a caso dalla comunità. Evidentemente $M+F=N$ e la distribuzione condizionata $P(F=j|N=n)$ è una binomiale di parametro $1/2$, perciò

$$\forall j \in \{0,1,2,\dots,n\}, \quad P(F=j|N=n) = \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Quindi, per ogni $i,j \in \{0,1,2,3\}$ si ha

$$\begin{aligned}
P(M=i,F=j) &= P(F=j,N=i+j) \\
&= P(F=j|N=i+j)P(N=i+j) \\
&= \binom{i+j}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} P(N=i+j) \\
&= \frac{(i+j)!}{i!j!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} P(N=i+j) \\
&= \begin{cases} P(N=0) & \text{if } i+j=0 \\ \frac{1}{2}P(N=1) & \text{if } i+j=1 \\ \frac{2!}{i!j!}\frac{1}{4}P(N=2) & \text{if } i+j=2 \\ \frac{3!}{i!j!}\frac{1}{8}P(N=3) & \text{if } i+j=3 \\ 0 & \text{if } i+j>3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Allora la probabilità congiunta di M e F è data dalla seguente tabella

	0	1	2	3
0	0.15	0.10	0.0875	0.375
1	0.10	0.175	0.1125	0
2	0.0875	0.1125	0	0
3	0.0375	0	0	0