频率域响应：

其中是反射系数，z是接受点在z轴上的位置，h是发射线圈的高度，r是接受点距离发射线圈中心点的半径，a是发射线圈的半径。

并且在准静态的条件下，存在。

上式为0到无穷的bessel函数积分问题

这里主要方法：1.利用数值计算中的积分外推法进行计算(又叫QWE方法)，参考文献：Kerry key的《Is the fast Hankel transform faster than quadrature?》和《Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series》;

2.利用数字滤波法，将其中的一个Bessel函数作为核函数的一部分，参考文献：赵越的《航空瞬变电磁三维成像解释方法研究》。

这里经过比较，我们发现，如果只使用Hz的虚部计算的话，那么二者的精度都是足够的，由于本人是使用的matlab编的程序，所以这里使用了赵越里面的Guptasarma算法，利用的是J1的140位滤波系数。

故本程序中直接用Gupstasarma算法的J1的140位滤波系数来计算频率域。

时频转换法

本程序使用得是QWE方法来进行时频转换

QWE方法（积分外推法）

首先对于0到无穷的积分式子：

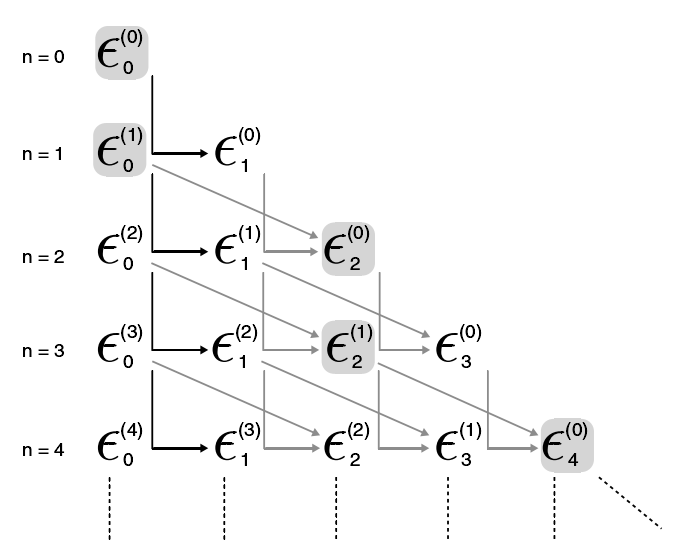
其中为核函数，是震荡型缓慢衰减的Bessel函数或者发散函数，可以将上式得无穷积分分成无数个有限积分：

其中：

然后令

利用ϵ 算法进行外推：如下形式

如图：



为了实行与数字滤波方法一样的直接利用滤波系数进行快速计算，将上式的式子：

换元法得：

利用高斯求积公式可以近似得到：

其中m是高斯积分的节点数，是高斯积分节点的横坐标，是高斯积分节点的权重。

从上式可以看出，和是相对于r变量是独立的，所以可以将二者一起计算出来存储起来，所以有：

而对于

令x是n行m列的矩阵，而则是n行的列向量的第i个元素，而为了方便matlab计算，设计为m行n列的矩阵，这样在进行QWE算法时，可以先预计算这些值。

详细计算过程：

如上面的图，首先计算每行的值，当n=奇数时则是最后的结果，若n=偶数时，则时最后的结果，若此时计算的结果不满足精度要求，则令（之前已经预计算完了），继续计算下一行的结果，直至结果满足精度要求。

所需要满足的精度要求的式子为：

其中时相对误差，是绝对误差。

时频转换

本程序利用正余弦变换变换式子，再利用QWE方法进行计算：参考文献：吴琼《大回线源电磁场正演与波场变换理论研究》或者赵越《航空瞬变电磁三维成像解释方法研究》和Kerry key的《Is the fast Hankel transform faster than quadrature?》。

公式如下：

其中是时，，

其相应的上阶跃时间导数是：

对于求取时间导数来说，由于采用正弦变换要优于余弦变换(详细原因参考文献)。

从这里开始利用QWE进行计算

对于：

换元法替换：

本文对任意上下限的高斯积分采用的是根据上下限为-1到1的高斯积分公式变换得到的：

其中m是高斯节点数

这样子，对于不同的上下限a、b，如果高斯节点数m是固定的话，那么始终有一样的和。

那么将上式的分部积分代入上面的高斯积分公式中，可得：

这样再根据前面的QWE算法进行求解，直到达到精度要求。