**3.3 圆柱坐标系中的分离变量解**

对于拉普拉斯方程：

两边同时除以，所以有：

由于，，都是各自独立的变量

所以，假设各自等于的常数为：

所以：

对于这样的常微分方程来说，解法如程旺盛所提到的那样，当>0时，解为，当=0时，解为，当<0时，解为**。**

而可以类似求得。

所以可以得到表格，书上49页

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | |  | |  | | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 1 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 1 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | z  1 |  |
|  | 1 |  |  | 1 |  | z  1 |  |

疑问？？？？？

为什么没有的情况?

这是因为n是关于角度的函数，而在空间上，旋转一圈或者n圈会回到起点，故它应该是周期函数。所以可以大胆地推断，球坐标系也存在类似的推导，如72页。

通过49页的表我们能很方便的得到形式解

例如60页的题目第1，2题

怎么得到问题的形式解？主要先从一些极限的边界条件得到和的形式解

**亥姆霍兹方程**

瞬变电磁法中，由Maxwell方程组推导出来的方程一般为亥姆霍兹方程，故在这里我们还得研究下亥姆霍兹方程在柱坐标系下的求解：

亥姆霍兹方程:

所以：

可得：

其中n，通过已知条件来确定它们的定义域，书上50页

例题如吴琼师姐的《大回线源电磁场正演与波场变换理论研究》第11页

**贝塞尔方程的求解**

最后关于R变量的常微分方程之前我们没进行求解，那么该如何进行求解呢？

首先我们想简化下式子，令变量个数减少，怎么做呢？

首先两边同乘

然后设，代入其中，这样可以简化方程

其实不光对于拉普拉斯方程能化成这样，亥姆霍兹方程也能化成这种形式。

上面的式子可以化为：

而根据常微分方程理论，对于变系数方程，在x=0附近能展开广义幂级数解：

将上式子代入中，可得：

因为x是自变量，所以要使上式子恒成立，必须要关于x的各次幂的系数=0，所以可得：

从上式中可以的，所以或者，即对应着2个线性无关的解，

**首先讨论情况下的一个解：**

在这种情况下可以解得：

此时，其中的是一个未知常数，为什么是任意值而不影响结果呢，这是因为在求得常微分方程的解形式应为：

和是两个非线性相关的解，而A，B是任意常数，所以，自然可以说是任意常数，为了简便，这里取：

所以，y化简可得：

所以，n代表bessel的阶数

那么这里的解如何变成49页的这几个解呢？

因为前在在变换的时候用了，所以当代入其中，可得：

**1.当等于实数时，即**

**2.当等于0时，即**

由可以看到，只有并且当n=0，才有值，所以，而对于n>0情况下，，所以解是这样的吗？

其实根据在化简时，我们使用了，但是在的情况下时是不成立的！

所以在此处应该单独把原来的方程来进行求解，该方程为：

此时该方程叫做欧拉方程，其解法参考高数一的348页（即用换元进行求解），得到的2个非线性解和书上表格的一样。

**3.当等于虚数时，即**

其中a是实数，而对于51页下面有公式：

和都是常数，所以和前面一样，所以解得到形式如49页中那样。

**然后讨论情况下的一个解：**

求法和上面类似，但是当n=整数时，会得到（即与是线性相关的），并不满足线性无关的条件

所以在此基础上引入了第二类bessel函数（又叫诺伊曼函数）

后面的步骤与前面类似

最后关于大小宗量的一部分应用

对于柱坐标系下求解后的解一般带有bessel函数积分，由于bessel函数衰减缓慢的振荡函数，如果直接利用数值积分来求取的话，将是一项繁重的任务：

但对于单bessel函数积分问题，已有非常成熟的数字滤波法进行快速计算，但它要求核函数是衰减，对非衰减函数处理变为衰减函数如吴琼的《大回线源电磁场正演与波场变换理论研究》。

而对于双bessel函数积分问题，主要有3种方法：

1.将其中的一个bessel函数作为核函数的一部分；

2.利用大宗量，将0到无穷的积分分成0到x和x到无穷的积分，如华军的《双重贝塞尔函数积分的数值计算》；

3.kerry key的《Is the fast Hankel transform faster than quadrature?》中qwe方法，该方法需要计算bessel零点的值，而利用大小宗量近似可以估计大概零点的值，再用数值迭代求解时，会大大加快收敛速度（如不动点迭代法）。