频率域响应：

其中是反射系数，z是接受点在z轴上的位置，h是发射线圈的高度，r是接受点距离发射线圈中心点的半径，a是发射线圈的半径。

并且在准静态的条件下，存在。

上式为0到无穷的bessel函数积分问题

这里主要方法：1.利用数值计算中的积分外推法进行计算(又叫QWE方法)，参考文献：Kerry key的《Is the fast Hankel transform faster than quadrature?》；

2.利用数字滤波法，将其中的一个Bessel函数作为核函数的一部分，参考文献：赵越的《航空瞬变电磁三维成像解释方法研究》。

QWE方法（积分外推法）

首先对于0到无穷的积分式子：

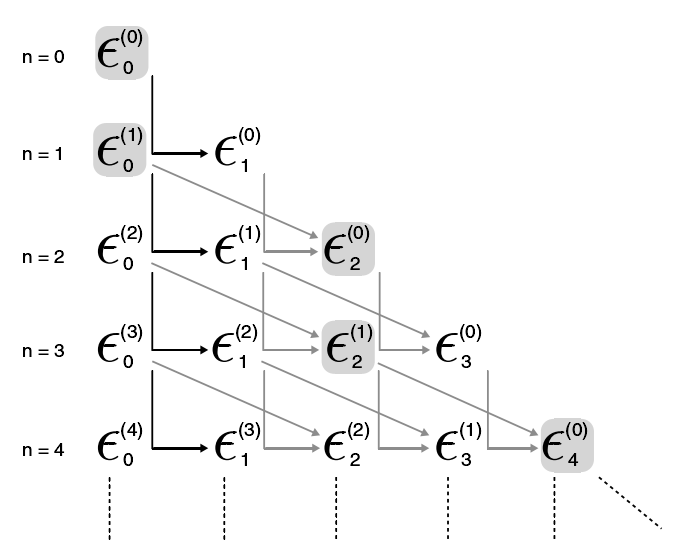
其中为核函数，是震荡型缓慢衰减的Bessel函数或者发散函数，可以将上式得无穷积分分成无数个有限积分：

其中：

然后令

利用ϵ 算法进行外推：如下形式

如图：



为了实行与数字滤波方法一样的直接利用滤波系数进行快速计算，将上式的式子：

利用高斯求积公式可以近似得到：

其中m是高斯积分的节点数，是高斯积分节点的横坐标，是高斯积分节点的权重。

从上式可以看出，和是相对于r变量是独立的，所以可以将二者一起计算出来存储起来，所以有：

而对于

令x是n行m列的矩阵，而则是n行的列向量的第i个元素，而为了方便matlab计算，设计为m行n列的矩阵，这样在进行QWE算法时，可以先预计算这些值。

详细计算过程：

如上面的图，首先计算每行的值，当n=奇数时则是最后的结果，若n=偶数时，则时最后的结果，若此时计算的结果不满足精度要求，则令（之前已经预计算完了），继续计算下一行的结果，直至结果满足精度要求。

所需要满足的精度要求的式子为：

其中时相对误差，是绝对误差。

时频转换

本程序利用正余弦变换：参考文献：吴琼《大回线源电磁场正演与波场变换理论研究》或者赵越《航空瞬变电磁三维成像解释方法研究》

公式如下：

其中是时，，

其相应的上阶跃时间导数是：

对于求取时间导数来说，由于采用正弦变换要由于余弦变换(详细原因参考文献)，所以程序采用的是250点的正余弦变换。

原理类似于hankel变换的数字滤波法

对于：

利用得到数字滤波的方法

其中：

所以最终表达式可以表示为：

其中为采样间隔，和是正余弦变换滤波系数(王华军的《正余弦变换的数值滤波算法》)，这里n选取的是-149到100的滤波系数。

附部分代码：

Main：

% 提示：w和r可以是一组数组，若r是数组，则它测量的是一条高度恒定的剖面线；

% 返回值hz是矩阵，行代表不同的测量点，列代表各频率域响应；

clear;

clc;

format long;

%++++++++++++++++++++++++++++++++++ 参数设置 +++++++++++++++++++++++++++++++++%

n=3;H(1:n)=[4.d1 4.d1 1.d20];econ(1:n)=[0.01 0.01 0.01];

z=0;

miu0=4.d-7\*pi;

% I0是电流大小(A)

I0=1;

%a代表回线源半径，r代表距离回线源中心的距离

a=100; %5;

r=0.1; %linspace(.1,10,51);

%flag判断是频率域还是时间域响应

%flag=1是时间域响应，2为单点的频率域响应，3为单频率下不同偏移的响应

flag=1;

% 当频率域响应时，w需要给出，而时间域时，是不需要给出w

% 计算频率域相关的子程序有：wsamp：给出对数均匀采样的频率；

% draw\_rhz：给出固定频率域下偏移距和hz的关系图；

% deaw\_whz：给出固定偏移距下的频率域响应以及关系图；

% 只有计算时间域响应时，t才有用

if flag==1

t\_a=1d-5;

t\_b=1d-1;

t\_n=41;

t=tsamp(t\_a,t\_b,t\_n);

elseif flag==2

w=wsamp(1d-6,1d8,141); %

elseif flag==3

w=1d-1;

r=linspace(.01\*a,2\*a,50);

%注意：这里若在奇点处明显跳跃了，说明n\_qmax取得不够大，是需要适当进行调整

% 从试验来说，越接近奇点，所需要得n\_qmax越大!

end

% --------------------------------不建议修改的常数-----------------------------%

% n\_gauss是求高斯积分时的积分系数个数，

% 对于频率域来说，一般9个足以满足精度要求，一般不修改

% 但对于时间域响应，需要进行相应的调整

if flag==1

n\_gauss=30;

else

n\_gauss=9;

end

% n\_qmax是积分序列的最大个数，太大可能会拖慢计算速度，但太小会达不到所要求的精度

% 建议与relTol和absTol相互协调修改

% 当n\_qmax远离边框时计算所需的积分部分很小，一般在10左右，靠近边框时会显著增加

n\_qmax=200;

% nu是以第nu阶的第一类bessel函数的零点作为断点，不修改

nu=1;

% --------------------------------不建议修改的常数-----------------------------%

% relTol是qwe相对容忍误差，absTol是qwe绝对容忍误差，根据精度要求可以进行适当修改

% 当relTol>1d12时，它的改变能明显地改变运算速度

relTol = 1d-8;

absTol = 1d-30;

% 调用draw\_rhz子程序时是数组，否则为一个数

%++++++++++++++++++++++++++++++++++ 参数设置 +++++++++++++++++++++++++++++++++%

%%

% 调用要计算的函数类

if flag==2

hz=draw\_whz(n\_gauss,n\_qmax,nu,w,n,econ,H,miu0,I0,a,r,z,relTol,absTol); %

elseif flag==3

hz=draw\_rhz(n\_gauss,n\_qmax,nu,w,n,econ,H,miu0,I0,a,r,z,relTol,absTol);

elseif flag==1

hz\_t=tft\_qwe(n\_gauss,n\_qmax,nu,t,n,econ,H,miu0,I0,a,r,z,relTol,absTol);

bz\_t=hz\_t\*miu0;

%%

figure;

plot(log10(t),log10(bz\_t),'ko');

legend('dBzdt');

xlabel('Time (s)');

ylabel('dBzdt (T)');

title('QWE for loop source');

% set(gca,'ytick',10.^[-16:1:0]);

set(gcf,'paperposition',[2 2 4.3 5]);

%%

% 文件输出

outfile=strcat(num2str(n),'层','\_',num2str(a),'\_',num2str(r),'\_',date,'.txt');

fid=fopen(outfile,'wt');

fprintf(fid,'%s%e %s%e','I0=',I0,'r=',r);

fprintf(fid,'\n');

fprintf(fid,'%s','每层厚度分别为：');

for k=1:n

fprintf(fid,'%e\t',H(k));

end

fprintf(fid,'\n');

fprintf(fid,'%s','每层电导率分别为：');

for k=1:n

fprintf(fid,'%e\t',econ(k));

end

fprintf(fid,'\n');

fprintf(fid,'%s\n','正演数据：');

nt=length(t);

for k=1:nt

fprintf(fid,'%e %e',t(k),bz\_t(k));

fprintf(fid,'\n');

end

fclose(fid);

end %end if

% 程序结束

% 注意事项：一般来说对于频率域，n\_gauss=9精度时足够了，但对于时间域来说并不一定

% 尤其对于高阻的晚期来说，电阻率越大，其误差也会越大，出现误差的时间会

% 越早。

% 调整技巧：先观测f\_qwe子程序中n\_ext，如若未超过n\_qmax，则说明不需要对n\_qmax进行

% 修改，然后可对relTol，absTol进行修改，若变小时图变换大，说明时该处的

% 问题，但一般来说时足够的。对于时间域，可根据电阻率适当修改n\_gauss，一

% 般来说，电阻率越高或者需要的时期越晚，n\_gauss应越大

% 程序可改善的地方：

% 1.返回计算所使用中n\_qmax的最大积分数量；

% 2.为了模块化，导致在进行时间域计算时，n\_qmax个积分重复计算

% 3.根据《勘查地球物理学》书中所说的，在数值计算时往往前面几个积分需要更多的高斯积分节点，

% 而后面的所需高斯积分节点要少些，而本程序这里是采用的是使用统一数量的节点数，所以理论上

% 可以分开使用不同的高斯节点从而加快运算速度。

% 4.时频转换是否也能用qwe方法实现？