3 Sistemes Lineals. Mètodes Iteratius

1. (a) Justifiqueu si el mètode de Jacobi per al sistema

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3 &=& 12 \\ 5x_1+2x_2+5x_3 &=& 12 \\ 5x_1+5x_2+2x_3 &=& 12 \end{cases}$$

partint de $x^{(0)} = (0,0,0)^\top$ és convergent.

2. Volem resoldre pel mètode iteratiu de Jacobi el sistema $Ax = b$ partint de $x^{(0)} = 0$ i tenim la informació següent sobre les dades:

$$|a_{ii}| > \alpha \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1,...,n, \quad \alpha > 1,$$

$$0 < \gamma < |a_{ii}|, \quad i = 1,...,n, \quad \|b\|_\infty = \beta$$

   (a) Quantes iteracions k del mètode calen per tal de garantir un error en la norma del màxim $\|x^{(k)} - x\|_\infty$ menor que ε?

   (b) Aplicació: Quant val k si $\alpha = 2$, $\beta = 10$, $\gamma = 1$ i $\varepsilon = 10^{-6}$?

3. Sigui B_n una matriu de la forma

$$B_n = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots & b_{n-1} & b_n \\ a & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a & 0 \end{pmatrix}$$

amb $b_j = \frac{K}{2^j}$, $j = 1,...,n$. Considereu un mètode iteratiu general del tipus

$$x^{(k+1)} = B_n x^{(k)} + c$$

per c qualsevol. Estudieu la convergència per $|a| < 1$ i $|K| < 1$.

Indicació. Useu el Teorema de Gerschgorin: els valors propis d'una matriu $A \in M_n(\mathbb{C})$ es troben localitzats al pla complex a $\mathscr{F} \cup \mathscr{C}$, on $\mathscr{F}$ i $\mathscr{C}$ són la unió dels següents discs:

$$\mathscr{F} = \bigcup_{i=1\div n} F_i, \quad F_i = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\},$$

$$\mathscr{C} = \bigcup_{j=1\div n} C_j, \quad C_j = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - a_{jj}| \le \sum_{i\neq j} |a_{ij}| \right\}.$$

A més, si una component connexa de $\mathscr{F}$ o $\mathscr{C}$ està formada per d discs F_i ó C_j aleshores conté exactament d valors propis d'A, comptats amb multiplicitat.

4. Donat el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

justifiqueu si el mètode de Gauss-Seidel és convergent.

5. Donada una matriu $A \in M_n(\mathbb{C})$, es defineix *radi espectral d'A* com $\rho(A) := \max_{1\le k\le n} |\lambda_k|$ a on $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ són els vaps d'A.

(a) Demostreu que $\rho(A) < 1 \iff \lim_{j\to+\infty} A^j = 0$.

(b) Considereu la matriu $S_m = \sum_{j=0}^{m} A^j$. Demostreu que $\lim_{m\to+\infty} S_m$ existeix $\iff \rho(A) < 1$. A més, en aquest cas, comproveu que $\lim_{m\to\infty} S_m = (I-A)^{-1}$.
Indicació. Useu l'apartat anterior i la identitat $(I-A)S_m = I - A^{m+1}$.

(c) Demostreu que si per a una determinada norma (consistent amb una norma vectorial donada) es té $\|A\| < 1$, aleshores $I-A$ és invertible i es compleix que

$$(I-A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j, \qquad \|(I-A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A\|} = 1 + \|A\| + \|A\|^2 + \ldots$$

6. Considereu el sistema lineal amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Analitzeu la convergència dels mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel per a la seva resolució.

7. Doneu condicions suficients sobre el paràmetre β per tal que els mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel convergeixin en aplicar-los per trobar la solució del sistema que té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ \beta & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Per a resoldre un sistema lineal $Ax = b$ amb $A \in M_n(\mathbb{C})$ $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^\top$ calculeu, per $k \ge 0$,

$$r_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$
$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \omega \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}},$$

per $i = 1 \div n$ i amb $\omega \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Abusant de notació, si $i = 1$ prenem $\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} \equiv 0$ a la primera fórmula.

(a) Trobeu la forma explícita de la matriu d'iteració corresponent.

(b) Demostreu que si aquest mètode convergeix aleshores $0 < \omega < 2$.

(c) Comproveu que si prenem $\omega = 1$ aquest mètode es redueix al mètode de Gauss-Seidel. En el cas que $1 < \omega < 2$ aquest mètode s'anomena *de successiva sobre-relaxació* (en anglès, SOR, de *successive over-relaxation*).

9. Es considera el següent sistema lineal (de joguina) $Ax = b$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Calculeu la primera iteració, a partir de $x^{(0)} = (1, 1/2)^\top$, usant

(a) Jacobi.

(b) Gauss-Seidel.

10. Considereu el sistema lineal $Ax = b$ amb $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$ i $a_{ii} = 1$ per $i = 1 \div n$. Descomposeu $A = L + I + U$ a on L és estrictament triangular inferior i U estrictament triangular superior. Definiu el següent mètode iteratiu:
$$x^{(k+1)} = M(\alpha,\Omega)x^{(k)} + (I + \alpha\Omega L)^{-1}\,\Omega b,$$
on
$$M(\alpha,\Omega) = (I + \alpha\Omega L)^{-1}\,[(I - \Omega) - (1-\alpha)\Omega L - \Omega U]$$
és la matriu d'iteració, $\Omega = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ és la matriu diagonal de relaxació, $\omega_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ per $i = 1 \div n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

(a) Comproveu que, si el mètode convergeix, ho fa cap a la solució del sistema. Si suposem $\omega_i = \omega$ per $i = 1 \div n$, quins mètodes s'obtenen quan $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$? I si $\omega = 1$?

(b) Demostreu que el polinomi característic de $M(\alpha,\Omega)$ és
$$P(\lambda) = \det\big((1-\lambda)I - \Omega - (1-\alpha+\lambda\alpha)\Omega L - \Omega U\big) =: \det B(\lambda).$$

(c) Siguin
$$\ell_i = \sum_{j\neq i} |\ell_{ij}|, \qquad u_i = \sum_{j\neq i} |u_{ij}|$$
i suposeu que $|\omega_i\alpha|\ell_i < 1$ per $i = 1 \div n$. Demostreu la següent fita del radi espectral de $M(\alpha,\Omega)$:
$$\rho(M(\alpha,\Omega)) \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{|1-\omega_i| + |\omega_i|(|1-\alpha|\ell_i + u_i)}{1 - |\omega_i\alpha|\ell_i} =: K(\alpha,\Omega).$$

Indicació. Si $|\lambda| > K(\alpha,\Omega)$ llavors $B(\lambda)$ és estrictament diagonal dominant per files, és a dir, si
$$|b_{ii}| > \sum_{j\neq i} |b_{ij}|$$
per $i = 1 \div n$.

(d) Si $0 \leq \alpha \leq 1$, $\max\limits_{1\leq i\leq n} |\ell_i + u_i| < 1$ i $0 < \omega_i < 2/(1+\ell_i+u_i)$ aleshores el mètode és convergent.

P1 / a) $B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Vemos que $B_J \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

↳ $\frac{5}{2} \in sp(B_J) \Rightarrow \rho(B_J) > 1$

$\Rightarrow$ Jacobi no converge

2/a)

$$x^{(k)} - x = B_J{}^k (x^{(0)} - x) = - B_J{}^k x$$

$$\Rightarrow \|x^{(k)} - x\|_\infty \underset{\substack{\uparrow \\ \|.\|_\infty \text{ es sub-aditiva} \\ \text{para matrices}}}{\leq} \|B_J\|_\infty^k \|x\|_\infty$$

• Cota de $\|B_J\|_\infty$:

$$B_J = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B_J\|_\infty = \max_{i=1 \div n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |(B_J)_{i,j}| \right\}$$

$$= \max_{i=1\div n} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right\}$$

$$< \frac{1}{\alpha}$$

• Cota de $\|x\|_\infty$:

$$x = B_J x + C_J$$

$$\|x\|_\infty = \|B_J x + C_J\|_\infty \underset{\substack{\text{desigualdad} \\ \text{triangular} \\ \downarrow}}{\leq} \|B_J x\|_\infty + \|C_J\|_\infty$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sub-aditividad} \\ \text{de } \|.\|_\infty}}{\leq} \|B_J\|_\infty \|x\|_\infty + \|C_J\|_\infty$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(1 - \|B_J\|_\infty)}_{1 - \frac{1}{\alpha} \leq 1 - \|B_J\|_\infty} \|x\|_\infty \leq \|C_J\|_\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)}_{>0 \text{ ya que } \alpha > 1} \|x\|_\infty \leq \|C_J\|_\infty \quad \text{i.e. } \|x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \|C_J\|_\infty$$

- Cota de $\|G_J\|_\infty$:

término a término

$$C_J = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\gamma} \\ \frac{\beta}{\gamma} \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \|G\|_\infty < \frac{\beta}{\gamma}$$

Finalmente:

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \|B_J\|_\infty^k \|x\|_\infty < \underline{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \cdot \frac{\beta}{\gamma}}$$

$$\hookrightarrow \varepsilon \geq \alpha^{-k+1} \cdot \underbrace{\frac{\beta}{\gamma(\alpha-1)}}_{\geq 0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{-k+1} \leq \frac{(\alpha-1)\gamma\varepsilon}{\beta} \quad \text{si } \beta \neq 0 \quad (\text{i.e. } x = x^{(0)})$$

$$\Leftrightarrow 1-k \leq \frac{\ln\left(\frac{(\alpha-1)\gamma\varepsilon}{\beta}\right)}{\ln(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow K \geq 1 - \frac{\ln\left(\frac{(\alpha-1)\gamma\varepsilon}{\beta}\right)}{\ln(\alpha)} = \underline{1 + \frac{\ln\left(\frac{\beta}{(\alpha-1)\gamma\varepsilon}\right)}{\ln(\alpha)}}$$

b) $$K \geq 1 + \frac{\ln\left(\frac{10}{1 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}\right)}{\ln(2)} = 24,25.$$

<u>Hacen falta 25 iteraciones</u>

3/ $F_1 = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - b_1| \leq \sum_{j \geq 2} |b_j| = |k| \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{2^j}$

$$= |k| \cdot \left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= |k| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \right) \}$$

$F_i = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq a < 1 \} \quad \forall i = 2, \dots n.$

Si $\lambda \in sp(A)$, entonces $\begin{cases} |\lambda| \leq a < 1 \\ \text{o} \\ |\lambda - b_1| \leq |k| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \right) < \frac{1}{2} \end{cases}$

Por desigualdad triangular:

$|\lambda| - |b_1| \leq |\lambda - b_1| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{2} + |b_1| = \frac{1}{2} + \frac{|k|}{2} < 1$

Por tanto, $sp(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq B(0, 1) \Rightarrow \rho(A) < 1$

4/ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ edd por filas $\Rightarrow$ G-S converge

5/ a) $\Leftarrow$] Suponemos que $A^j \to 0$

Sea $\lambda \in sp\, A$, entonces $\exists\, v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$

Tenemos $A^j v = \lambda^j v$

Por tanto $\lambda^j v \longrightarrow 0$. $v \neq 0 \Rightarrow \lambda^j \to 0$

$\Rightarrow |\lambda| < 1$

Por tanto, $\forall \lambda \in sp(A), |\lambda| < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1$

$\Rightarrow$] Sea $A = PJP^{-1}$ donde J es la forma de Jordan de A.

Supp. que $\rho(A) < 1$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix}$$

$$A^j = PJ^jP^{-1}. \qquad J^j = \begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{J_1^j}}^{m_1} & & & 0 \\ & \overbrace{\boxed{J_2^j}}^{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overbrace{\boxed{J_m^j}}^{m_m} \end{pmatrix}$$

Sea $J_i = \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}}^{m_i}$. Sea $L = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

binomio de Newton para $(\lambda_i Id + L)^j$

$$J_i^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \lambda_i^{j-k} \cdot Id^{k} \cdot L^{k}$$

$L^k = 0 \quad \forall k > m_i$

Si $j > m_i$

$$= \frac{1}{\lambda^k} \sum_{k=0}^{m_i} \binom{j}{k} \lambda^j \cdot L^k$$

$\binom{j}{k} \lambda_i^j \longrightarrow 0$ en $+\infty$ ya que $|\lambda_i| < 1$.

y $\binom{j}{k}$ es un polinomio en j contra λ_i^j que es exponencial

b) $\Rightarrow$] Suppo. que $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m$ existe

$$S_m v = \sum_{j=0}^{m} A^j v = \sum_{j=0}^{m} \lambda v = \begin{cases} m v & \text{si } \lambda = 1 \\ \dfrac{1-\lambda^{m+1}}{1-\lambda} v \end{cases}$$

Si $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m$ existe entonces $\begin{cases} \dfrac{1-\lambda^{m+1}}{1-\lambda} \text{ converge} \Rightarrow |\lambda| < 1 \\ \qquad\qquad \Rightarrow \rho(A) < 1 \\ m \text{ converge !!} \Rightarrow \lambda \neq 1 \end{cases}$

$\Leftarrow$] Supp. que $\rho(A) < 1$

$\Rightarrow A^j \to 0$

$$(I-A) S_m = I - A^{m+1}$$

$$1 \notin S_p(A) \Leftrightarrow \chi_A(1) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A-I) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow I - A \text{ invertible}$$

Por tanto $S_m = (I-A)^{-1}(I - A^{m+1})$

en $+\infty$ $A^{m+1} \to 0 \Rightarrow S_m \to (I-A)^{-1}$

c) Sea $v \in sp\, A$

$$1 > \|A\| = \min_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Av\|}{\|v\|} = |\lambda| \frac{\|v\|}{\|v\|} = |\lambda|$$

$\Rightarrow \rho(A) < 1 \Rightarrow I - A$ invertible (Ya visto en b))

$$(I-A)^{-1} = \lim_{m\to+\infty} S_m = \sum_{j=0}^{+\infty} A^j$$

$j=0$

desigualdad triangular

$$\|(I-A)^{-1}\| = \|\sum_{j=0}^{+\infty} A^j\| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \|A^j\|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \|A\|^j$$

sub-multiplicativa

$$= \frac{1-\|A\|^{+\infty}}{1-\|A\|}$$

$\|A\|<1$

$$\rightarrow = \frac{1}{1-\|A\|}$$

6/ Jacobi:

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

veps: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

vaps: $\frac{1}{\alpha}$ $-\frac{1}{\alpha}$ 0

Método converge $\Leftrightarrow \underbrace{\rho(A)}_{=\frac{1}{|\alpha|}} < 1 \Leftrightarrow |\alpha| > 1 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus [-1;1]$

Gauss - Seidel:

$P = L + D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ α debe ser $\neq 0$ para que $\exists P^{-1}$.

$$B_{GS} = -P^{-1} U = -\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} \alpha x = 1 \\ \alpha y = 0 \\ x + \alpha z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{\alpha} \\ z = -\frac{1}{\alpha^2} \end{cases}$$

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix}$$

veps: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

vaps: 0 $\quad 0$ $\quad \frac{1}{\alpha^2}$ $\Rightarrow \rho(B_{GS}) = \frac{1}{\alpha^2} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$

7/ Si $|\beta| < 10$, A edd por columnas $\Rightarrow \begin{cases} \rho(B_{GS}) < 1 \\ \rho(B_J) < 1 \end{cases}$

Afinando:

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & +\frac{1}{5} \\ -\frac{\beta}{5} & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_{B_J}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\beta}{25}$$

$$= \left(\lambda - \frac{\sqrt{\beta}}{5} i\right)\left(\lambda + \frac{\sqrt{\beta}}{5} i\right)$$

$$\Rightarrow \rho(B_J) = \frac{\sqrt{\beta}}{5} < 1 \Leftrightarrow \beta < 25$$

Como es tridiagonal, no singular para $\beta \neq 25$ y sin ceros en la diagonal, $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2 < 1 \Leftrightarrow \beta < 25$

10/

a) $x^{(k+1)} = M(\alpha, \Omega)\, x^{(k)} + (I + \alpha \Omega L)^{-1} \Omega b$

$\Leftrightarrow (I + \alpha \Omega L)\, x^{(k+1)} = \left[(I - \Omega) - (1-\alpha)\Omega L - \Omega U\right] x^{k} + \Omega b$

Si converge a y:

$$(I + \alpha \Omega L)\, y = \left[(I - \Omega) - (1-\alpha)\Omega L - \Omega U\right] y + \Omega b$$

$\cancel{\Leftrightarrow [I + \alpha \Omega L - I + \Omega}$

$\cancel{\Omega I - \Omega - \Omega L - \Omega U + \alpha \Omega L}$

$\Leftrightarrow \left[I + \alpha \Omega L + (-I + \Omega + \Omega L + \Omega U - \alpha \Omega L)\right] y = \Omega b$

$\Leftrightarrow \Omega (I + L + U)\, y = \Omega b$

Como $\omega_i \neq 0$, $\exists\, \Omega^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{A y = b.}}$

b) Si $\omega_i = \omega$. $\Omega = \omega I$

Si $\alpha = 0$:

$M(0, \omega I) = \left[(1-\omega) I - \omega (L + U)\right]$

$= I - \omega A = \omega\left(\frac{1}{\omega} I - A\right)$

Entonces $x^{(k+1)} = \omega\left(\frac{1}{\omega} I - A\right) + \omega b$

$= \left(\frac{1}{\omega} I\right)^{-1}\left(\frac{1}{\omega} I - A\right) + \left(\frac{1}{\omega} I\right)^{-1} b$

$P = \frac{1}{\omega} I \Rightarrow$ Método del gradiente.

Si $\alpha = 1$:

$x^{(k+1)} = (I + \omega L)^{-1}\left((1-\omega) I - \omega U\right) x^{(k)} + (I + \omega L)^{-1} \omega b$

Gauss-Seidel si $\omega = 1$. En general, ω - sobrerelajación b/

$$\det(M(\alpha,\Omega)-\lambda I) = \det\left((I+\alpha\Omega L)^{-1}[I-\Omega-(1-\alpha)\Omega L-\Omega U] - \lambda I\right)$$

Multiplicamos por $I+\alpha\Omega L$ sin modificar el det ya que tiene 1s en la diagonal

$$= \det\left(I-\Omega-(1-\alpha)\Omega L-\Omega U-\lambda I-\lambda\alpha\Omega L\right)$$

$$= \det\left((1-\lambda)I-\Omega-(1-\alpha+\lambda\alpha)\Omega L-\Omega U\right)$$

c/ Tenemos $B(\lambda) = \underbrace{(1-\lambda)I-\Omega}_{\text{diagonal}} \underbrace{-(1-\alpha+\lambda\alpha)\Omega L-\Omega U}_{\text{resto}}$

$$|b_{ii}| = |1-\lambda-\omega_i| = |\lambda-(1-\omega_i)|$$
$$\underset{\substack{\text{desigualdad}\\ \Delta}}{\geq} |\lambda|-|1-\omega_i| \quad \text{I}$$

$$\sum_{j\neq i}|b_{ij}| = |1-\alpha+\lambda\alpha||\omega_i|l_i+|\omega_i|u_i$$
$$\underset{\substack{\text{desigualdad}\\ \Delta}}{\leq} |\omega_i|(|1-\alpha|l_i+u_i)+|\lambda||\alpha\omega_i|l_i \quad \text{II}$$

Para tener I $>$ II, $\forall i$

Necesitamos $|\lambda|(1-|\alpha\omega_i|l_i) > |1-\omega_i|+|\omega_i|(|1-\alpha|l_i+u_i)$

Como $|\alpha\omega_i|l_i<1$, esto es equivalente a $|\lambda|>K(\alpha,\Omega)$

Por tanto, $\Big(|\lambda|>K(\alpha,\Omega) \Rightarrow B(\lambda)$ edd por filas
$\Rightarrow \det(B(\lambda))\neq 0$
$\Rightarrow P(\lambda)\neq 0$
$\Rightarrow \lambda\notin sp(M(\alpha,\Omega))\Big)$

~~$\Leftrightarrow \forall\lambda\in sp(M(\alpha,\Omega)), |\lambda|\leq K(\alpha,\Omega)$~~

$\Rightarrow \forall\lambda\in sp(A), |\lambda|\leq K(\alpha,\Omega) \Rightarrow \rho(M(\alpha,\Omega))\leq K$

d)

Si $0 \leq \alpha \leq 1$, $|l_i + u_i| < 1$ $\forall i$ y $0 < w_i < \dfrac{2}{1+l_i+u_i}$

$\exists i$ tq:

$$K(\alpha, \Omega) = \frac{|1-w_i| + w_i((1-\alpha)l_i + u_i)}{1 - w_i \alpha l_i}$$

$$= \frac{|1-w_i| + w_i(l_i+u_i) - \alpha w_i l_i}{1 - w_i \alpha l_i}$$

Si $w_i \in (0;1]$:

$$K(\alpha, \Omega) = 1 + \frac{w_i(-1+l_i+u_i)}{1 - w_i \alpha l_i}$$

~~Como $w_i < \frac{2}{1+l_i+u_i}$ tenemos~~

$|l_i + u_i| < 1 \Rightarrow l_i < 1$ ya que $l_i, u_i \underset{\geq 0}{\cancel{\in [0;1]}}$

por tanto $\left.\begin{array}{l} -1+l_i+u_i < 0 \\ 0 < w_i \\ 0 < 1 - w_i \alpha l_i \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{K(\alpha, \Omega) < 1}$

Si $w_i \in \left(1; \dfrac{2}{1+l_i+u_i}\right)$

$$K(\alpha, \Omega) = \frac{w_i - 1 + w_i(l_i + u_i) - \alpha w_i l_i}{1 - w_i \alpha l_i}$$

$$= \frac{w_i(1 + l_i + u_i) - 1 - \alpha w_i l_i}{1 - w_i \alpha l_i}$$

$$< \frac{2 - 1 - \alpha w_i l_i}{1 - w_i \alpha l_i} = 1 \Rightarrow K(\alpha, \Omega) < 1$$