Hjemmeopgave 1

Drømme gruppen

May 2023

Straffespark

1.1 Statisk Nulsumsspil

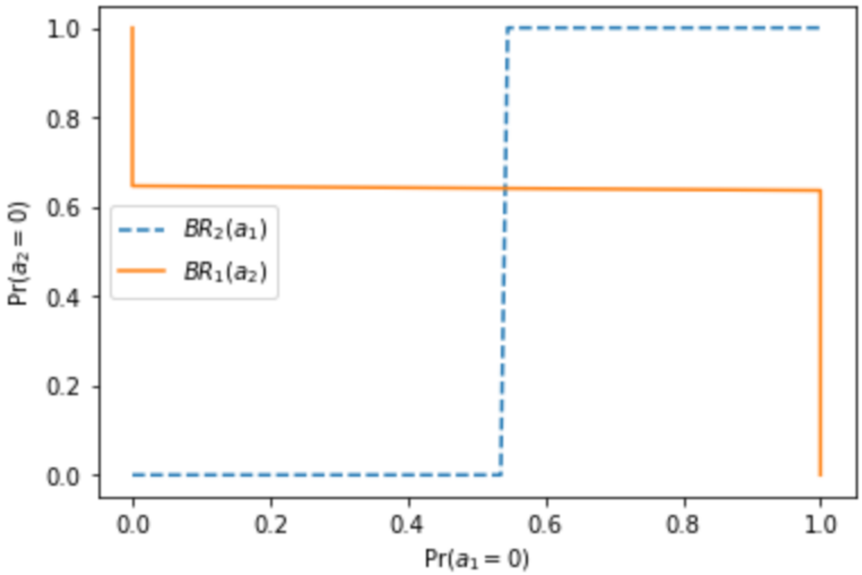
Straffespark i britisk fodbold kan analyseres som et statisk nulsumsspil. Gevinsten for spiller 1 er lig med tabet for spiller 2. Alle payoffs for samtlige deltagende parter vil altid summe til nul dvs. en konstant, $k = 0$. Dette kan betegnes som, hvis U_1, U_2 er payoff-matricerne, er

$$U_2 = -U_1$$

1.2 2x2 spil

Vi betragter 81 straffespark, hvor ingen af spillerne valgte 'C'. Her opstiller vi spillet på normalform. Der er to spillere involveret i spillet, som er 'målmand' og 'sparker'. Hver spiller har to mulige handlingsmængder at vælge i mellem. Handlingsmængderne er 'højre' (R) eller 'venstre' (L). For Spilleren 'sparker' refererer handlingsmæmgden til sparkets retning, hvor spilleren kan vælge at sparke bolden mod venstre eller højre. For spilleren 'målmand' refererer handlingsmængderne til hvilken del af målet målmanden skal dække. Den givne matrice repræsenterer payoffs

	L	**R**
L	$(0.65, 0.35)$	$(0.88, 0.12)$
R	$(0.83, 0.17)$	$(0.56, 0.44)$



Nash-ligevægt i rene strategier

Vi udfører en analyse af payoff-matricen for at identificere eventuelle Nash-ligevægte i rene strategier. Dette giver os mulighed for iterativt at bestemme de bedste svar for hver af de to spillere. Nedenstående matrice illustrerer de bedste svar, som er markeret med fed.

	L	**R**
L	$(0.65, \mathbf{0.35})$	$(\mathbf{0.88}, 0.12)$
R	$(\mathbf{0.83}, 0.17)$	$(0.56, \mathbf{0.44})$

Ud fra det kan vi se at der er ingen Nash-ligevægte i rene strategier.

Nash-ligevægt i blandede strategier

Det vigtig at bemærke at selvom der ikke er en Nash-ligevægt i rene strategier, kan der stadig være Nash-ligevægte i blandede strategier, hvor spillerne har sandsynligheder for at vælge forskellige handlinger. Ved brug at funktionen **support_enumeration()** og python modulet **Nashpy** kan vi beregne alle Nash-ligevægte i blandede strategier. I tabellen nedenunder fremgår der frekvenser, der referer til en spillers sandsynlighed for at vælge en bestemt handling i en Nash-ligevægt i blandede strategier.

	L	**R**
L	0.54	0.46
R	0.64	0.36

1.3 Empiriske Frekvenser

De empiriske frekvenser i Nash-ligvægten er:

$$G_{NE} = [(0.54, 0.64), (0.46, 0.36)]$$

Hvis markspilleren vælger at sparke til højre, forventes markspilleren at få en payoff på 0.54 og et payoff på 0.64 for at sparke til venstre. Hvis målmanden vælger at dække målet højre for, forventes målmanden at få en payoff på 0.46 og et payoff på 0.36 for at dække målet venstre for. Hvis markspilleren ønsker at maksimere sit payoff, bør han vælge at sparke til venstre. Hvis målmanden ønsker at maksimere sit payoff, bør han vælge at dække målet til højre, da dette giver en forventet payoff på 0.46.

1.4 Normalform

Der eksisterer én nash-ligevægt som ser ud som følgende

$$G_{NE} = [(0.47, 0.52), (0.21, 0.18), (0.30, 0.29)]$$

Vi kan se ved at kigge på vores fundne NE og frekvensen fra dataen at markspilleren vælger venstre lige så meget som NE men vælger center for lidt og for meget til højre i følge NE. Målmanden er dog væsentlig længere fra den fundne NE, her vælger målmanden center markant mindre end NE, og både venstre og højre bliver der hoppet til hyppigere end den blandede strategi indikerer er optimalt.

1.5 Empiriske Frekvenser / 1.6 Intuitiv Forklaring

Vi kan se at målmanden bør begynde at hoppe mere i midten og mindre til højre og venstre. Vi kan se at markspilleren også skyde mindre til venstre men markspilleren skal dog skyde mere til både center og højre.
Vi har altså fundet frem til at både markspilleren og målmanden begge ikke spiller NE, årsagen til dette kan være eksternaliteter så som favorit ben eller had fra holder eller tilskuere hvis man bare bliver stående.

Ud fra empirien kan vi altså se at det er til markspillerens fordel at målmanden ikke spiller NE fordi de hopper for meget til siderne og står center for lidt. Så det være en forbedring for målmandens rednings procent hvis de står lidt mere center.

1.7 Analyse af datasættet

Ud fra Tabel 1 kan man se at man tidligere havde en mindre tendens til at stå center, og altså spillede en strategi længere væk fra nutidsens NE, altså kan der være nogle analytikere der har hjulpet nogle af de engelske målmænd.

Vi kan også opserverer ved at bruege IESDS på andel af mål i tabel 1 at både

L og R for målmanden er en domineret strategi, og for markspilleren er C en domineret strategi, altså vil svarmængden være (L,C),(R,C). Dette betyder altså at markspilleren aldrig skal skyde center.

Hearthstone

2.1 Nulsumspil

Vi har opstillet et nulsumspil med to spillere. For at identificere de strengt dominerede strategier skal vi sammenligne payoffs for hver strategi parvis. Eftersom der er en strategi, der har en lavere udbetaling end en anden strategi i alle scenarier, kan den første strategi siges at være strengt domineret. Ved brug af IESDS-algoritmen kan vi finde de strengt dominerede strategier. De følgende strategier er strengt dominerende:

'Aggro Shaman'
'Control Warrior'
'Miracle Rogue'
'Other Mage'
'Ping Mage'
'Rally Priest'
'Spell Damage Mage'
'Token Druid'

2.2 k'te ordens rationel spiller

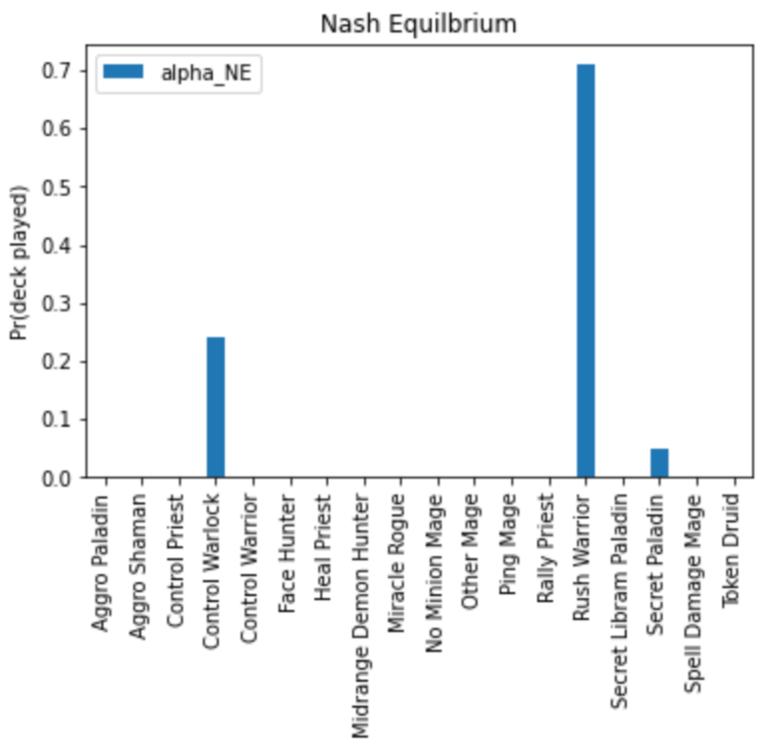
En første ordens rationel spiller vil maksimere sin egen nytte baseret på tilgængelig information. I dette tilfælde vil en først ordens rationel spiller vælge **Secret Palandin**, da den har den gennemsnitlig højeste payoff. Spilleren vil nu antage, at de andre spillere vælger deres deck baseret på den første ordens rationel strategi. Eftersom spilleren valgte Secret Palandin vil modspillerens best response være **Rush Warrior** for en anden ordens rationel spiller. Man følger mønstret baseret på sandsynlighederne for, at de andre spillere vælger et bestemt deck.

2.3 Arnes deck

Vi antager at Arne ønsker at vinde mest muligt ved at vælge det deck, der har det højeste forventede payoff. Arne vil spille Secret Paladin, fordi det har det højeste forventede payoff baseret på sandsynlighederne.

2.4 Lineær Programmering

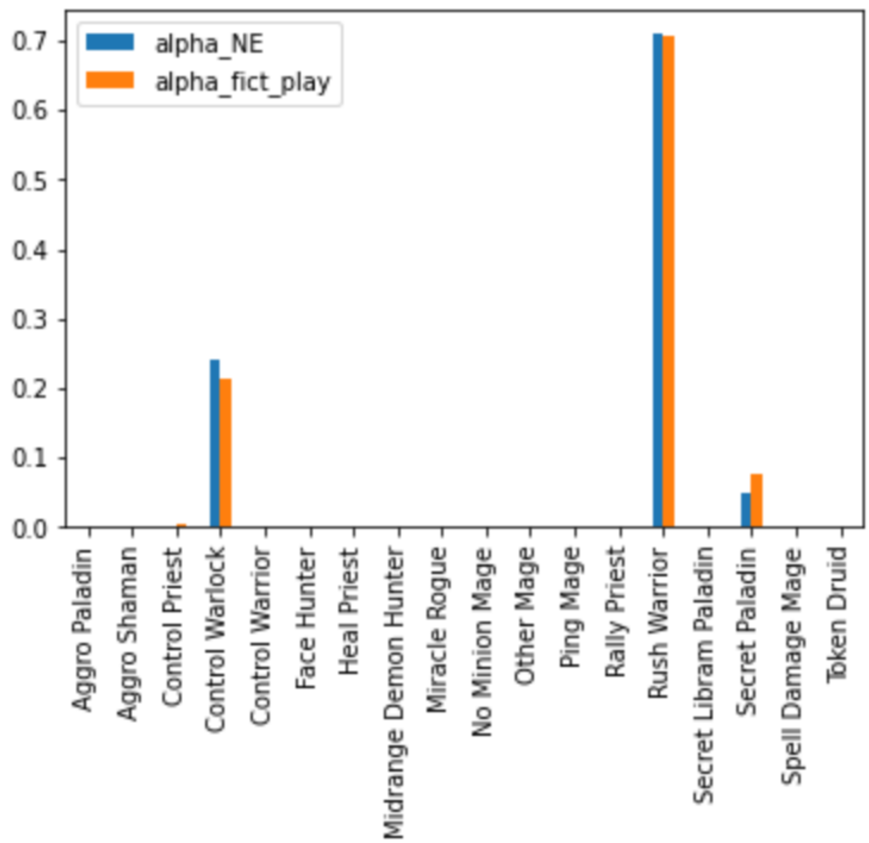
Vi anvender løsningsalgoritmen, lineær programmering til at finde Nash-ligevægten i blandede strategier pga. dets evne til at finde optimale løsninger. I nedenstående tabel har vi identificeret Nash-ligevægte i nulsumspillet.



Vi ser at tabellen refererer til sandsynligheden for at spille et bestemt deck i Nash-ligevægten. Heraf er der 24% ssh. for at spille **Control Warlock**, 70% ssh. for at spille **Rush Warrior** og 5% ssh. for at spille **Secret Paladin**.

2.5 Fictitious Play

Efter at have kørt 1000 iterationer af Fictitious Play-algoritmen observerer vi en lighed mellem Nash-ligevægten fundet ved hjælp af lineær programmering og Fictitious Play. Både lineær programmering og Fictitious Play-algoritmen viser en større sandsynlighed for at spille Rush Warrior frem for de andre deck. Dette betyder at spillerne er 2.ordens rationale. Ved at spille Rush Warrior som den foretrukne strategi kan man udnytte modstanders tendens til at spille Secret Paladin og dermed øge chancerne for at vinde.

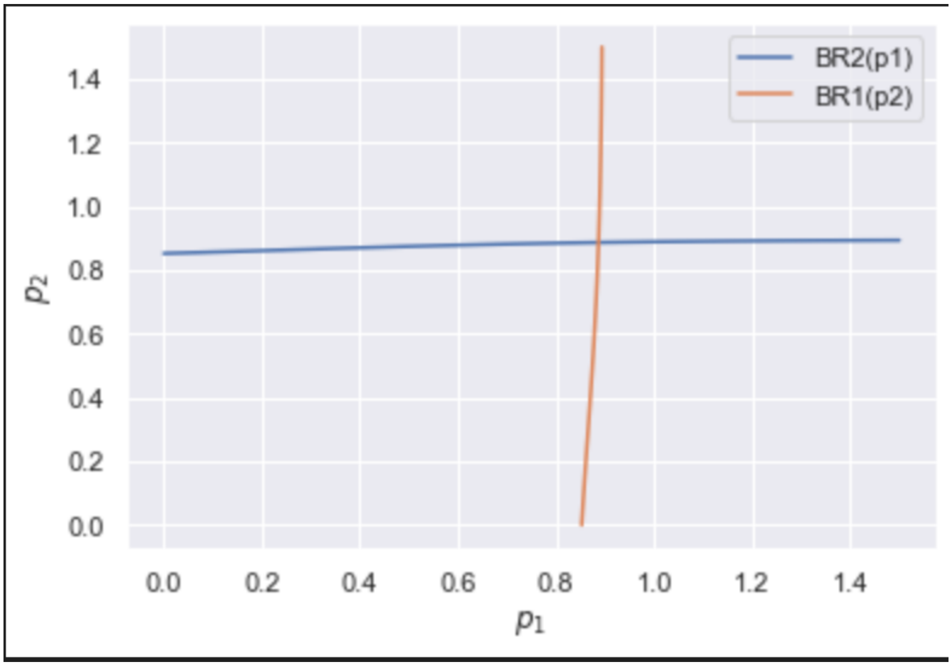


Priskonkurrence i Bilmarkedet

3.1 Teoretisk del

3.1.1 NE og BR i Rene Strategier

Når vi skal finde de bedste svar muligheder for begge virksomheder, brugte vi biblioteket scripy.optimize. Dette gav os muligheden til at finde den mindste scalar af den negative profit funktion. Alternativt kunne man muligvis i stedet for at finde det mindste af en negativ funktion, finde det maximale af en positiv.



For at finde Nash ligevægten, fandt vi punktet hvor de to BR funktioner skær hinanden. I dette skæringspunkt er det ikke muligt at stille en af virksomhederne bedre uden at stille en anden værre. For at finde dette punkt brugte vi bibliotetet scripy.optimize, som numerisk finder rødderne i et ikke lineært ligningssystem.

Player	Nash Equilibrium Price
p1	0.8866...
p2	0.8866...

Table 1: Nash equilibrium prices

3.1.2 Optimale Priser

For at løse for de optimale priser for de to firmaer i kartellet, skal vi maksimere summen af deres profitter. Vi ændre markedsandelen så begge firmaer skal dele om markedet. I profit funktionen for karteller, får de to virksomheder den samme marginal omkostning, da de deles om markedet. Firmaernes samlet maksimeret profit, er givet ved

$$\pi_j\left(p_1, p_2\right) = \frac{\left(p_j - c\right) s_j\left(p_1, p_2\right)}{2}$$

De optimale priser ved kartel dannelse er givet i nedenstående tabel, hvor vi ser

Firm	Cartel Equilibrium Price
Firm 1	0.94...
Firm 2	0.94...

Table 2: Cartel equilibrium prices for the two firms.

at det giver en højere payoff end i vores simultane spil.

3.1.3 Sekventiel Nash-ligevægt

For at finde den sekventielle Nash-ligevægt, skal vi analysere hvordan firmaernes valg påvirker hinanden. Vi antager at firma 1 sætter prisen først. Prisen er fastsat til 0.88. Dernæst skal firma 2 beslutte sig for sin pris under antagelse af, at firma 1 allerede har sat sin pris. Hvis firma 2 sætter sin pris lavere end 0.88 vil firma 2 tiltrække alle kunderne, da de tilbyder den laveste pris. Hvis firma 2 derimod sætter sin pris højere end 0.88, f.eks. 0.89, vil firma 2 miste alle kunderne til firma 1, da firma 1 tilbyder en lavere pris.

Firm	Sequential Equilibrium Price
Firm 1	0.89...
Firm 2	0.88...

Table 3: Sequential equilibrium prices after 1 iteration

3.1.4 Intuitionen af Alpha

Nash ligevægt: Her vil større værdier af alpha øge pris følsomheden i ligevægtspriserne. Dette kan skyldes at virksomheden svarer på sin egen pris stigning.

Kartel: I dette tilfælde hvor priserne allerede er højere, vil et større alpha betyde at der kan ske en endnu større pris stigning fordi virksomhederne igen er mere følsomme over for deres productions omkostninger.

Sekventielle priser: Her vil det et højere alpha også betyde at priserne bliver højere fordi firma 1 overvejer hvordan deres egen pris påvirker firma 2.

Effekten af alpha er størst når der eksisterer virksomheder på markedet, især i tilfælde af et oligopol, hvor hver virksomhed har en betydelig markedsandel. Dette kan ses i eksemplet med karteller. Som f.eks. OPEC, der samarbejder om at fastsætte den globale oliepris. På markeder med sekventielle priser observerer vi et leder-følger system, hvor virksomheder ændrer deres priser for at forblive konkurrencedygtige eller hæver priserne, hvis andre aktører på markedet gør det samme. Et sådant marked kan være eksempelvis oliebranchen, hvor firmaer justerer priserne i overensstemmelse med hinanden for at bevare deres positioner og optimere deres indtjening. Denne dynamik kan også ses i andre sektorer, hvor virksomhederne forsøger at tilpasse sig de skiftende markedsforhold for at bevare deres konkurrenceevne.

3.2 Empirisk del

3.2.1 Simultan Nash-ligevægt

I den beregnede Nash-ligevægt mellem firma 1 og firma 2 viser resultaterne, at begge firmaer har valgt at sætte en højere pris end de observerede priser for deres respektive biler på markedet i Tyskland i 1999. Det er dog vigigt at bemærke at

Brand	**Nash Equilibrium Price (EUR)**
VW	54.047,26
Ford	48.209,55

Table 4: Nash Equilibrium Prices for VW and Ford

der er andre faktorer, som Nash-ligevægten ikke tager højde for. Faktorer såsom prisansættelse og adfærd på markedet, herunder konkurrence, efterspørgsel mm. Dette er faktorer som i dette tilffælde ikke har påvirket prisen, og skyldes den høje prisansættelse i Nash-ligevægten.

3.2.2 Karteldannelse

Vi kan se, at kartellets optimale priser er lidt højere end Nash-ligevægtspriserne for begge virksomheder. En af de potentielle risici ved karteldannelse i bil-

Brand	**Cartel's Optimal Price (EUR)**
VW	54.815,56
Ford	50.960,30

Table 5: Cartel's Optimal Prices for VW and Ford

markedet, er at karteller kan udnytte deres samarbejde til at hæve priserne over det niveau, der ville være opnået i en konkurrencepræget markedsøkonomi.

3.2.3 Forskelle og Ligheder

Brand	**Nash Equilibrium Price**	**Cartel's Nash Equilibrium Price**
VW	2.12	2.25
Opel	1.85	2.10

Table 6: Nash and Cartel's Nash Equilibrium Prices for VW and Opel

Det ses at ved at hæve prisen 10% vil for VW brand vil det nå en højere omsætning men samtidig også give noget af markedet til konkurrenten, som i dette tilfælde er Opel. I situationen hvor de danner kartel ses det at Opel, som ikke hævede deres priser drager størst nytte i det deres ligevægt er steget mere end hos VW.

3.2.4 Diskussion

Vi mener at regressionen som er foretaget ved VW og Ford indeholder variable såsom "bredde" ikke er særlig relevant da de fleste biler mere eller mindre har samme bredde, og at netop disse brand også sælger biler med store motorer. Vi mener det kunne være mere relevant at regressere på cylindere i istedet. Det betyder nemlig at der i højere grad tages højde for modeller i højere prisklasser.

Brand	**Nash Equilibrium Price**	**Cartel's Nash Equilibrium Price**
VW	54.670	54971
Ford	48.771	49.011

Table 7: NE and Cartels NE with cylinder regressor

Der ses også en lille forskel i priserne sammenligned med resultatet fra 3.1-3.2, Vi mener dog denne model forklare bedre.