S-MI3

Concours EAMAC	Cycle INGENIEUR	MATHEMATIQUES

Exercice S-MI3-1 : (5 *points*)

On considère le système (S) suivant

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = 1 \\ x + y + mz + t = 1 \\ x + y + z + mt = 1 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de m le système (S) est-il de Cramer ? Compatible ? Incompatible ?
2. Lorsqu'il est de Cramer, résoudre (S).

Exercice S-MI3-2 : (5 points)

On considère la fonction numérique f telle que : $f(x) = (x^2 - 1)\, Arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right)$;

et on appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. Exprimer, sur $D\backslash\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.
3. Montrer que : $\forall x \epsilon R;\ 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice S-MI3-3 : (5 points)

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à ${}^1\!/_x$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice S-MI3-4 : (*5 points*) :

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser la matrice A et calculer A^n pour tout n$\in N$.