Practical Session 5
Root Finding Pt. 2

Timoteo Dinelli[*], Marco Mehl[†]

4th of November 2025

1 Boeing 737

Un Boeing 737 tocca la pista d'atterraggio ad una velocità $v = 210\ \frac{km}{h}$. Vengono subito attivati gli inversori di spinta per deviare i gas di scarico dell'aereo nella stessa direzione del moto, ottenendo di conseguenza un'azione frenante. Si chiede di calcolare la velocità d'uscita dei gas di scarico (relativa) che permette all'aereo di fermarsi in un tempo $t = 15\ s$.

Dati:

- massa iniziale BOEING = 35000 kg
- f = 0.97
- Sezione d'uscita gas di scarico = 0.085 m^2
- Area frontale investita dall'aria = 25 m^2

Soluzione:

$$\frac{d(mv)}{dt} = -2\dot{m}_{out}v_{out} - \frac{1}{2}f\rho v^2 A \tag{1}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -2\dot{m}_{out}(v_{out} - v) - \frac{1}{2}f\rho v^2 A \tag{2}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -2\dot{m}_{out}v_r - \frac{1}{2}f\rho v^2 A \tag{3}$$

$$m(t) = m_0 - 2\dot{m}t \tag{4}$$

$$(m_0 - 2\dot{m}_{out}t)\frac{dv}{dt} = -2\dot{m}_{out}v_r - \frac{1}{2}f\rho v^2 A \tag{5}$$

$$\int_{v_0}^{0} \frac{dv}{2\dot{m}_{out}v_r + \frac{1}{2}fv^2 A} = -\int_0^t \frac{dt}{m_0 - 2\dot{m}_{out}t} \tag{6}$$

$$\dot{m}_{out} = \rho S v_r \tag{7}$$

$$\int_{v_0}^{0} \frac{dv}{2Sv_r^2 + \frac{1}{2}fv^2 A} = -\rho\int_0^t \frac{dt}{m_0 - 2\rho S v_r t} \tag{8}$$

$$\alpha = 2Sv_r^2, \quad \beta = \frac{1}{2}fA, \quad \gamma = m_0, \quad \delta = 2\rho S v_r.$$

[*]timoteo.dinelli@polimi.it
[†]marco.mehl@polimi.it

$$\int_{v_0}^{0} \frac{dv}{\alpha + \beta v^2} = -\rho \int_0^t \frac{dt}{\gamma - \delta t} \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{\alpha + \beta x^2} dx = \frac{atan\left(\sqrt{x\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{\sqrt{\alpha\beta}} + c \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\gamma - \delta x} dx = -\frac{log\left(\gamma - \delta x\right)}{\delta} + c \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} atan\left(v_0\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) + \frac{\rho}{\delta} ln\left(1 - \frac{\delta}{\gamma}t\right) = 0 \tag{12}$$

Rearrange equation number 12 as $\delta = \ldots$, after some simple steps we obtain:

$$\delta = \frac{\gamma}{t}\left(1 - exp\left(-\frac{\delta}{\rho\sqrt{\alpha\beta}} atan\left(v_0\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right)\right) \tag{13}$$

$$\delta = 2\rho S v$$

$$v = \frac{\gamma}{2\rho S t}\left(1 - exp\left(-\frac{\delta}{\rho\sqrt{\alpha\beta}} atan\left(v_0\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right)\right) \tag{14}$$

2 Due serbatoi di Nafta (Esercitazione 5, Esercizio 9, MdF)

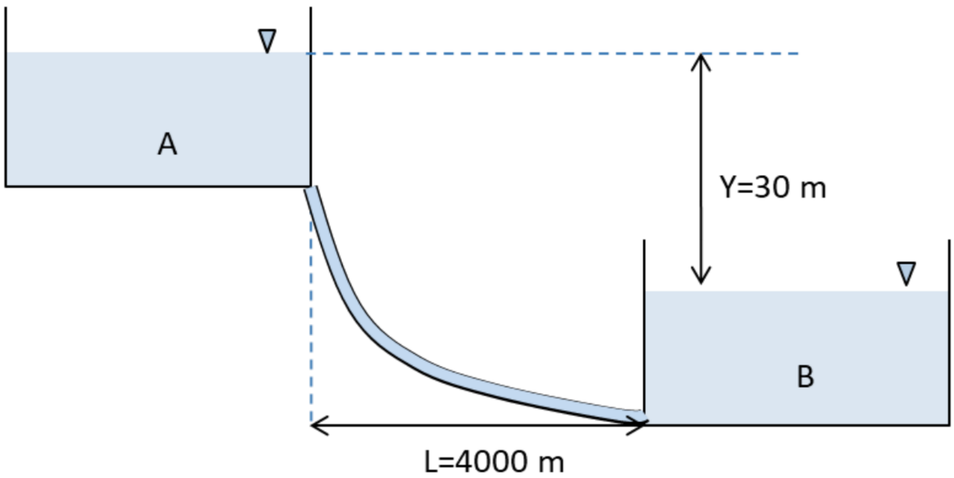

Figure 1: Schematizzazione del sistema di collegamento di due serbatoi.

Due serbatoi di nafta ($\mu = 0.039\ Pa\ s \quad \gamma = 8335\ m^3$) le cui superfici libere hanno un dislivello Y, sono collegati da una condotta di acciaio di lunghezza $L = 4000\ m$. Supponendo che la condotta abbia diametro costante pari a $D = 0.25\ m$, si determini la portata $\dot{V}$. Supponendo poi che occorra trasferire una portata $\dot{V}' = 1\ \frac{m^3}{s}$, si determini il diametro teorico D_t e si dimensioni la condotta (coefficiente di scabrezza di Kutter $m = 0.5\ m^{0.5}$). Il sistema è schematizzato in Figura 1.

Soluzione

Le perdite di carico distribuite sono calcolate tramite la relazione di Chèzy:

$$\Delta H = \frac{v^2}{C^2 R_h} L \tag{15}$$

$$C = \frac{100\sqrt{R_h}}{m + \sqrt{R_h}} \tag{16}$$

Il teorema di Bernoulli applicato tra i peli liberi dei due serbatoi fornisce:

$$Y = \Delta H = \frac{v^2}{\left(\frac{100\sqrt{D/4}}{m+\sqrt{D/4}}\right) D/4} L \tag{17}$$

Per $D = 0.25\ m$ si ha $\dot{V} = 0.0354\ \frac{m^3}{s}$. Considerando invece una portata pari a $\dot{V}' = 1\ \frac{m^3}{s}$ e inserendo i valori numerici nell' equazione 17 si ottiene:

$$Y = \frac{10.37\left(\sqrt{D/4} + 0.5\right)^2}{D^6} \tag{18}$$

L'equazione 18 si può risolvere tramite sostituzione successive. Ad esempio, isolando il denominatore:

$$D = \sqrt[6]{\frac{10.37\left(\sqrt{D/4} + 0.5\right)^2}{Y}} \tag{19}$$

$$D = 0.837\sqrt[3]{\sqrt{D/4} + 0.5} \tag{20}$$

L'equazione 20 può essere vista come l'uguaglianza tra due funzioni: $y_1 = D$ e $y_2 = 0.837\sqrt[3]{\sqrt{D/4} + 0.5}$ ed essere risolta in maniera efficiente per sostituzioni successive. In realtà a partire dall' equazione 18 si può derivare la seguente equazione isolando il diametro D a partire da $\sqrt{\frac{D}{4}}$:

$$D = 4\left(\sqrt{\frac{YD^6}{10.37}} - 0.5\right)^2 \tag{21}$$

E' facile dimostrare, graficamente, che questa scelta ci porta ad avere problemi di convergenza in quanto si rischia di oscillare tra due soluzioni, matematicamente valide ma fisicamente no.

3 "Rubinetti in Serie"

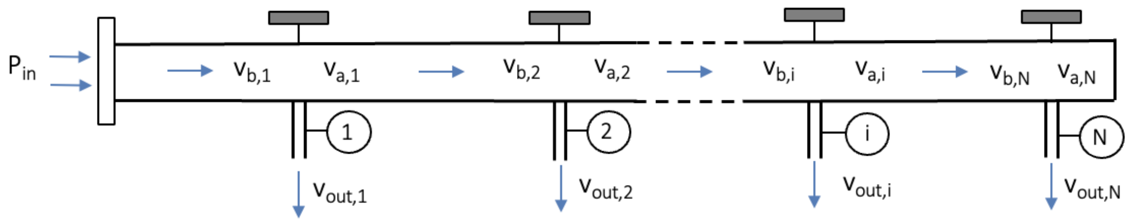

Figure 2: Schematizzazione della serie di rubinetti.

Si consideri una tubazione di diametro $D = 3\ cm$ lungo la quale si trovano dei rubinetti fra loro identici ($d = 1\ cm$), posizionati in serie a una distanza $L = 5\ m$ l'uno dall'altro. Questa è alimentata con una portata alla pressione $P_{in} = 1.5\ bar$. Si considerino sia le perdite di carico distribuite lungo la tubazione ($\epsilon = 10e^{-5}\ m$) sia quelle localizzate in prossimità di ciascun rubinetto ($K = 4$). Per il calcolo delle perdite localizzate si utilizzino le velocità appena prima del corrispettivo rubinetto. Si chiede di:

1. Calcolare la velocità d'uscita dal primo rubinetto, supponendo che sia l'unico rubinetto presente;
2. Calcolare il massimo numero di rubinetti in grado di erogare acqua;
3. Valutare il profilo di pressione assiale lungo la tubazionenelle condizioni del punto 2.

Correlazione di Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4log_{10}\left(\frac{\frac{\epsilon}{D}}{3.71} + \frac{1.256}{Re\sqrt{f}}\right)$$

Il sistema in esame di può schematizzare come riportato in Figura 2: la pressione in ingresso P_{in} genera una portata nella tubazione, a stazionario, proporzionale alla caduta di pressione $P_{in} - P_{atm}$.

Soluzione

Se prendiamo in esame il caso in cui solo il primo rubinetto (1) è presente, possiamo considerare le seguenti 4 incognite del problema:

1. $v_{b,1}$: velocità media del fluido prima (il pedice **b** sta per before) del rubinetto 1;
2. $v_{a,1}$: velocità media del fluido dopo (il pedice **a** sta per after) il rubinetto 1;
3. $v_{out,1}$: velocità media del fluido in uscita dal rubinetto 1;
4. f_1 : il fattore d'attrito (basato sulla velocità $v_{b,1}$).

Le 4 equazioni che risolvono il problema sono:

1. Equazioni di Bernoulli tra ingresso e uscita dal rubinetto 1:
$$\frac{p_{in}}{\gamma} + \frac{v_{b,1}^2}{2g} = \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{v_{out,1}^2}{2g} + 4f_1\frac{L}{D}\frac{v_{b,1}^2}{2g} + K_1\frac{v_{b,1}^2}{2g}$$
2. Continuità:
$$v_{b,1}D^2 = v_{out,1}d^2 + v_{a,1}D^2$$
3. Fattore d'attrito:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{f_1}} & = \left(-4log_{10}\left(\frac{\epsilon}{3.71D} + \frac{1.256}{\frac{\rho v_{b,1}D}{\mu}\sqrt{f_1}}\right)\right) \quad per \quad Re_1 > 2000 \\ f_1 & = \frac{16\mu}{\rho v_{b,1}D} \quad per \quad Re_1 < 2000 \end{cases}$$
4. Condizione di uscita (tubazione con un solo rubinetto, quindi chiusa in fondo):
$$v_{a,1} = 0$$

Si tratta di un sistema algebrico non lineare, da azzerare numericamente. Si ottiene:

$$v_{b,1} = 1.066\ \frac{m}{s}; \quad v_{a,1} = 0\ m/s; \quad v_{out,1} = 9.59\ \frac{m}{s}; \quad f_1 = 0.00601$$

Nel caso siano presenti più rubinetti, il procedimento è sostanzialmente analogo: per ogni rubinetto aggiuntivo andranno scritte quattro nuove equazioni, ottenendo un sistema algebrico non lineare di $4N$ equazioni, dove N è il numero di rubinetti. Per ogni rubinetto i si ha quindi:

1. Equazioni di Bernoulli tra ingresso e uscita dal rubinetto i (ricordarsi che le perdite di carico vanno sommate fino al rubinetto i):
$$\frac{p_{in}}{\gamma} + \frac{v_{b,i}^2}{2g} = \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{v_{out,i}^2}{2g} + \sum_{j=1}^{j=i} 4f_j\frac{L}{D}\frac{v_{b,j}^2}{2g} + \sum_{j=1}^{j=i} 4f_jK\frac{v_{b,j}^2}{2g}$$
2. Continuità:
$$v_{b,i}D^2 = v_{out,i}d^2 + v_{a,i}D^2$$
3. Fattore d'attrito:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{f_i}} & = \left(-4log_{10}\left(\frac{\epsilon}{3.71D} + \frac{1.256}{\frac{\rho v_{b,i}D}{\mu}\sqrt{f_i}}\right)\right) \quad per \quad Re_i > 2000 \\ f_i & = \frac{16\mu}{\rho v_{b,i}D} \quad per \quad Re_i < 2000 \end{cases}$$
4. Condizione di uscita: si tratta stavolta dell'uguaglianza tra la portata dopo il rubinetto i e quella prima del rubinetto $i+1$, per tutti i rubinetti "interni" ($i < N$), mentre la condizione di chiusura per l'ultimo rubinetto ($i = N$):
$$\begin{cases} v_{a,i} = v_{b,i+1} \quad per \quad i < N \\ v_{a,i} = 0 \quad per \quad i = N \end{cases}$$

Per trovare il massimo numero di rubinetti in grado di erogare acqua è necessario ipotizzare un numero N, risolvere il sistema di dimensione $4N \times 4N$e verificare che la portata $v_{out,N} > 0$. Analogamente, si può verificare che la pressione dopo il rubinetto N soddisfi $p_{a,N} > p_{atm}$. È un procedimento dispendioso, ed è necessario affidarsi ad un risolutore numerico dato l'alto numero di equazioni in gioco.