Non Linear System of Equations

Timoteo Dinelli*, Marco Mehl†

14th of November 2024

1 “Bacini comunicanti con perdite di carico”

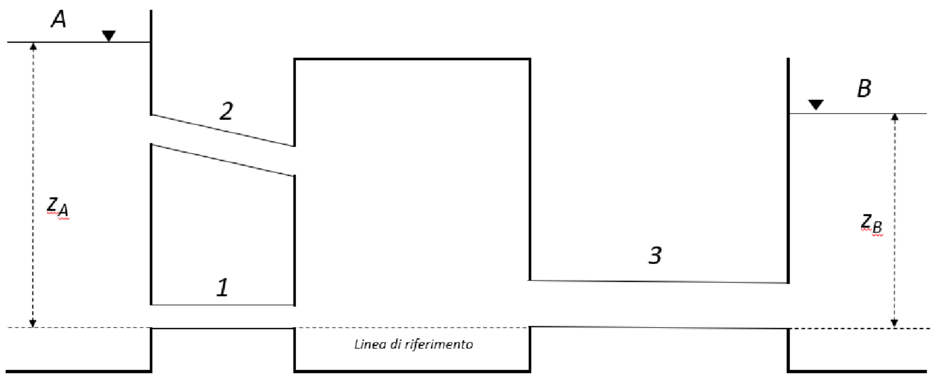

Figure 1: Schematizzazione del sistema di collegamento di due serbatoi.

Due bacini d’acqua (**A** e **B**) sono collegati fra loro con il sistema di tubazioni rappresentato in figura 1. Dal bacino **A** partono due tubazioni (*1* e *2*) di lunghezza e diametro diversi, che si congiungono in un barilotto dal quale un’ unica tubazione (*3*) convoglia l’acqua verso il bacino **B**. Le tubazioni *1* e *2* possono essere utilizzate in alternativa, chiudendone una delle due, o assieme quando entrambe sono aperte. Sulla base dei dati forniti, si chiede di calcolare la portata quando sono aperti i tubi *1* e *3*.
Dati:

- $\frac{\epsilon_1}{D_1} = \frac{\epsilon_2}{D_2} = \frac{\epsilon_3}{D_3} = 0.001$.
- $D_1 = 0.3\,m$, $L_1 = 300\,m$.
- $D_2 = 0.2\,m$, $L_2 = 346.4\,m$.
- $D_3 = 0.4\,m$, $L_3 = 900\,m$.
- $\rho_{H_2O} = 1000\,\frac{kg}{m^3}$.
- $\mu_{H_2O} = 1.141 \times 10^{-3}\,Pa\,s$.
- $z_A = 80\,m$.
- $z_B = 30\,m$.
- Formula di Colebrook-White: $\frac{1}{\sqrt{f}} = -4log\left(\frac{\epsilon}{3.7\,D} + \frac{1.255}{Re\sqrt{f}}\right)$

*timoteo.dinelli@polimi.it
†marco.mehl@polimi.it

Soluzione

A causa delle perdite di carico nelle tubazioni, il trinomio di Bernoulli non si mantiene costante tra i due bacini. Il bilancio dell'energia meccanica tra i peli liberi dei due bacini risulta:

$$z_A = z_B + \Delta H_1 + \Delta H_3 \tag{1}$$

$$\Delta H_1 = 4\frac{L_1}{D_1} f_1 \frac{v_1^2}{2g} \tag{2}$$

$$\Delta H_3 = 4\frac{L_3}{D_3} f_3 \frac{v_3^3}{3g} \tag{3}$$

Uguagliando le portate nei tubi 1 e 3 si ha:

$$v_3 = v_1 \left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 \tag{4}$$

che permette di scrivere il bilancio dell'energia meccanica in funzione della sola incognita v_1:

$$z_A - z_B = \frac{v_1^2}{2g}\left(4\frac{L_1}{D_1} f_1 + 4\frac{L_3}{D_3}\left(\frac{D_1}{D_3}\right)^4 f_3\right) \tag{5}$$

Si noti tuttavia che l'equazione 5 risulta effetivamente un' unica equazione funzione dell'incognita v_1 tuttavia f_1 e f_3 dipendono implicitamente da v_1 pertanto risulta necessario risolvere (numericamente) il seguente sistema di equazioni nelle tre incognite $Q = \frac{v_{1,3}}{\frac{\pi D_{1,3}^2}{4}}$, f_1, f_3:

$$\begin{cases} z_A - (z_B + \Delta H_1 + \Delta H_3) & = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{f_1}} - \left(-4log\left(\frac{\epsilon}{3.7\,D} + \frac{1.255}{Re\sqrt{f_1}}\right)\right) & = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{f_3}} - \left(-4log\left(\frac{\epsilon}{3.7\,D} + \frac{1.255}{Re\sqrt{f_3}}\right)\right) & = 0 \end{cases} \tag{6}$$