Отчёт по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний

Тимур Дмитриевич Калинин

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Построить фазовый портрет модели гармонических колебаний в OpenModelica.

2 Задание

Вариант 31

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 17x = 0$.
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 1.7x + 6x = 0$.
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3.6\dot{x} + 8x = 0.6\cos 3t$.

На интервале $t \in [0; 66]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0.3, y_0 = 0.7$

3 Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

где x - переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 собственная частота колебаний, t – время.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консервативного осциллятора, энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$
\begin{cases}
x(t_0) = x_0 \\
\dot{x}(t_0) = y_0
\end{cases}
$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y \\
\dot{y} = -{\omega_0}^2 x
\end{cases}
$$

Начальные условия примут вид:

$$
\begin{cases}
x(t_0) = x_0 \\
y(t_0) = y_0
\end{cases}
$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

4 Выполнение лабораторной работы

1. Напишем код программы (Рис. 4.1). Данная программа моделирует все три случая. Задаются параметры gamma и omega для соответствующих уравнений, переменные, начальные условия и сами уравнения. Зададим параметры симуляции (Рис. 4.2).

```
model oscillations
  parameter Real omega1 = 17;
  parameter Real omega2 = 6;
  parameter Real omega3 = 8;
  parameter Real gamma2 = 1.7;
  parameter Real gamma3 = 3.6;
  Real x1, y1;
  Real x2, y2;
  Real x3, y3;
initial equation
  x1 = 0.3;
  y1 = 0.7;

  x2 = 0.3;
  y2 = 0.7;

  x3 = 0.3;
  y3 = 0.7;
equation
  der(x1) = y1;
  der(y1) = -omega1*x1;

  der(x2) = y2;
  der(y2) = -gamma2*y2-omega2*x2;

  der(x3) = y3;
  der(y3) = -gamma3*y3-omega3*x3+0.6*cos(3*time);
end oscillations;
```

Figure 4.1: Код программы

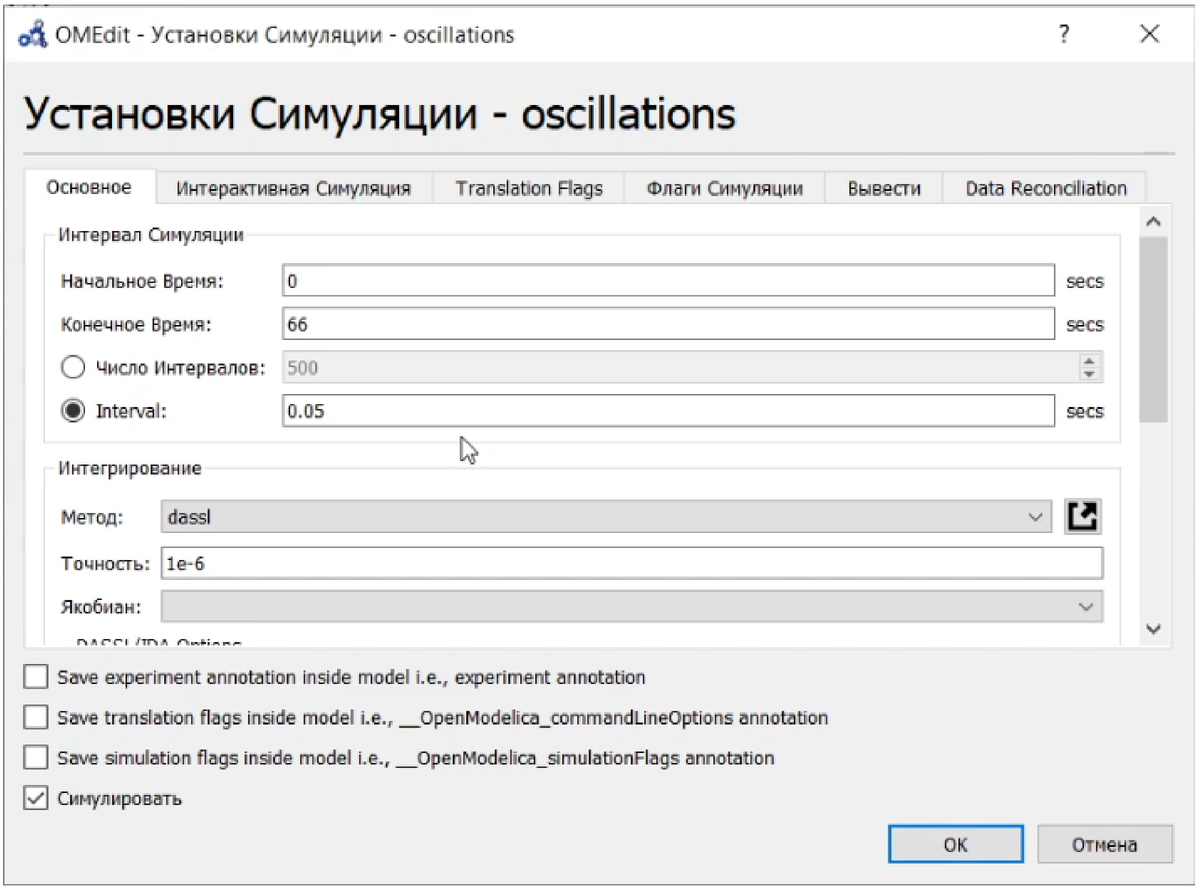

Figure 4.2: Параметры симуляции

2. Запустим программу на исполнение. Посмотрим фазовый портрет для уравнений (Рис. 4.3, Рис. 4.4, Рис. 4.5).

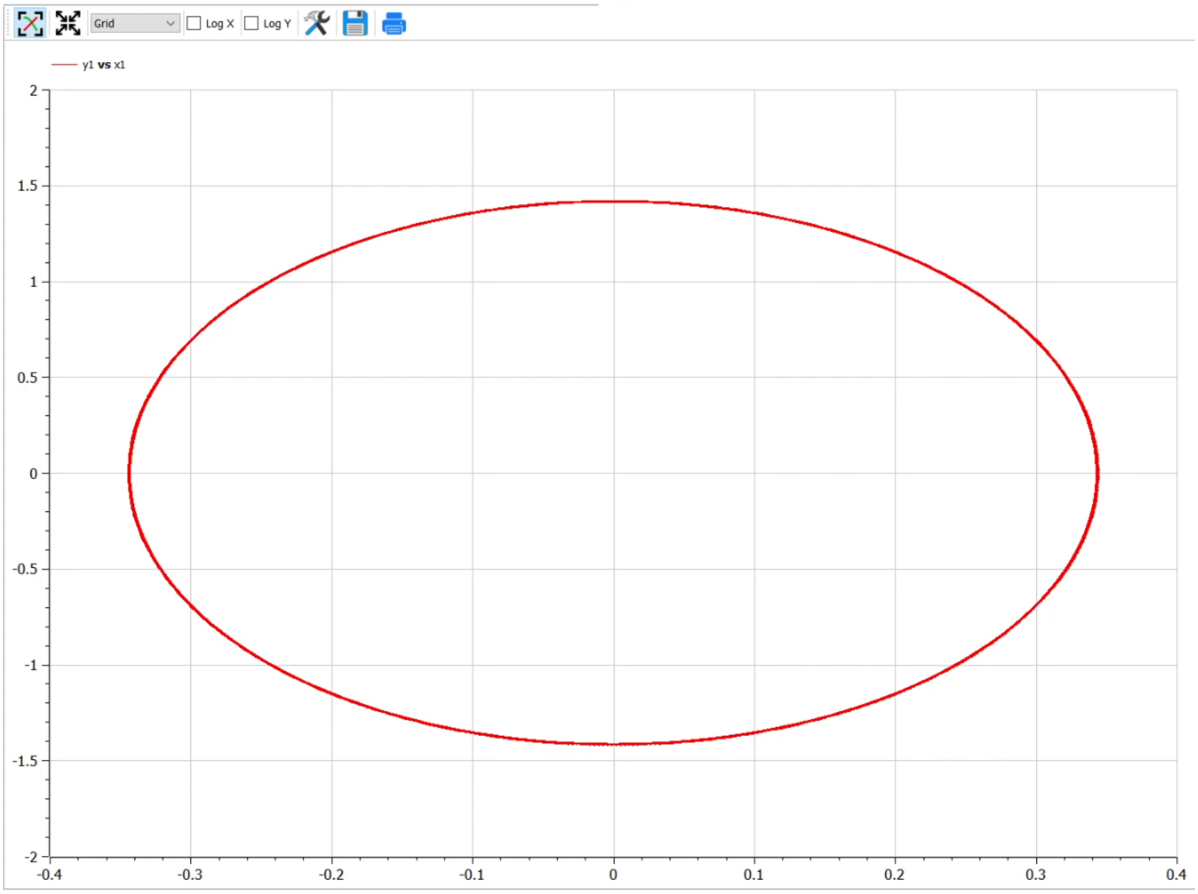

Figure 4.3: 1-й случай

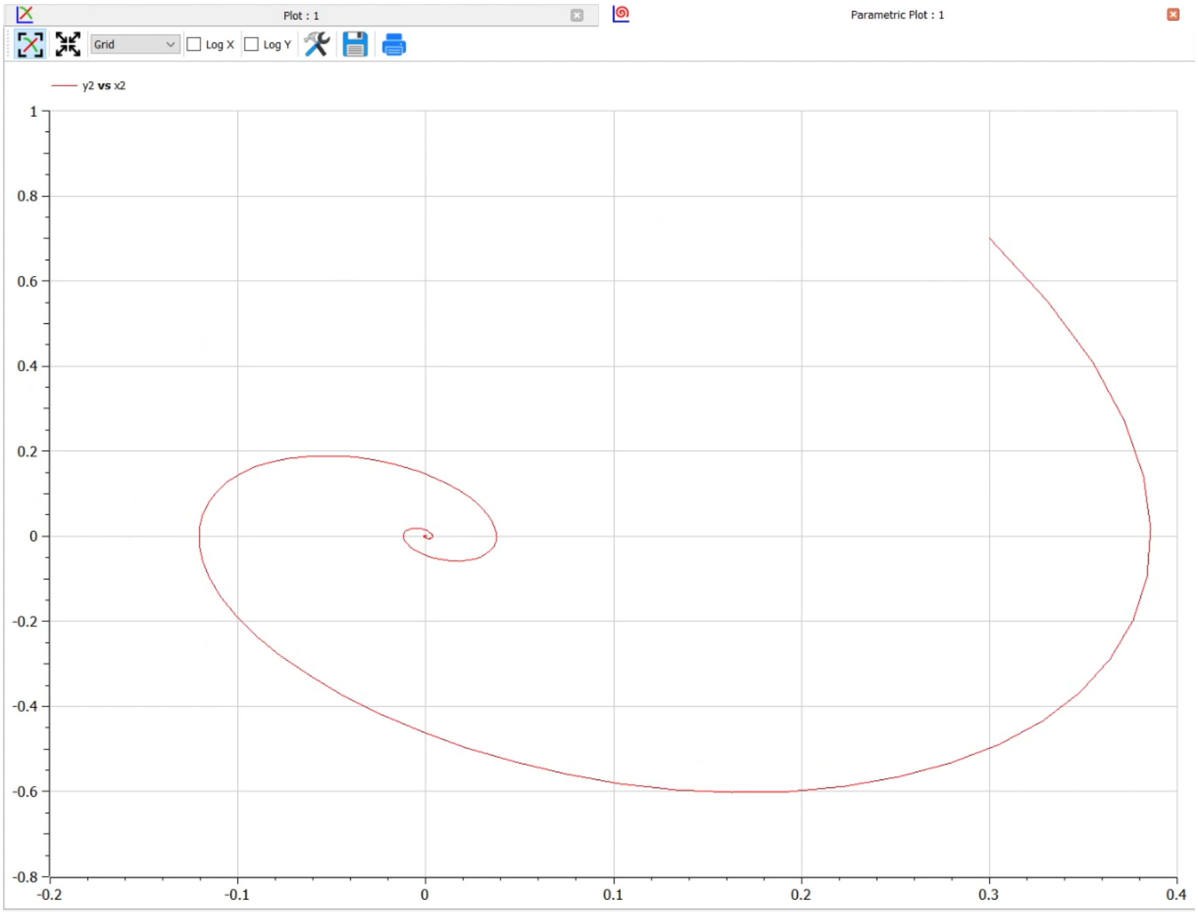

Figure 4.4: 2-й случай

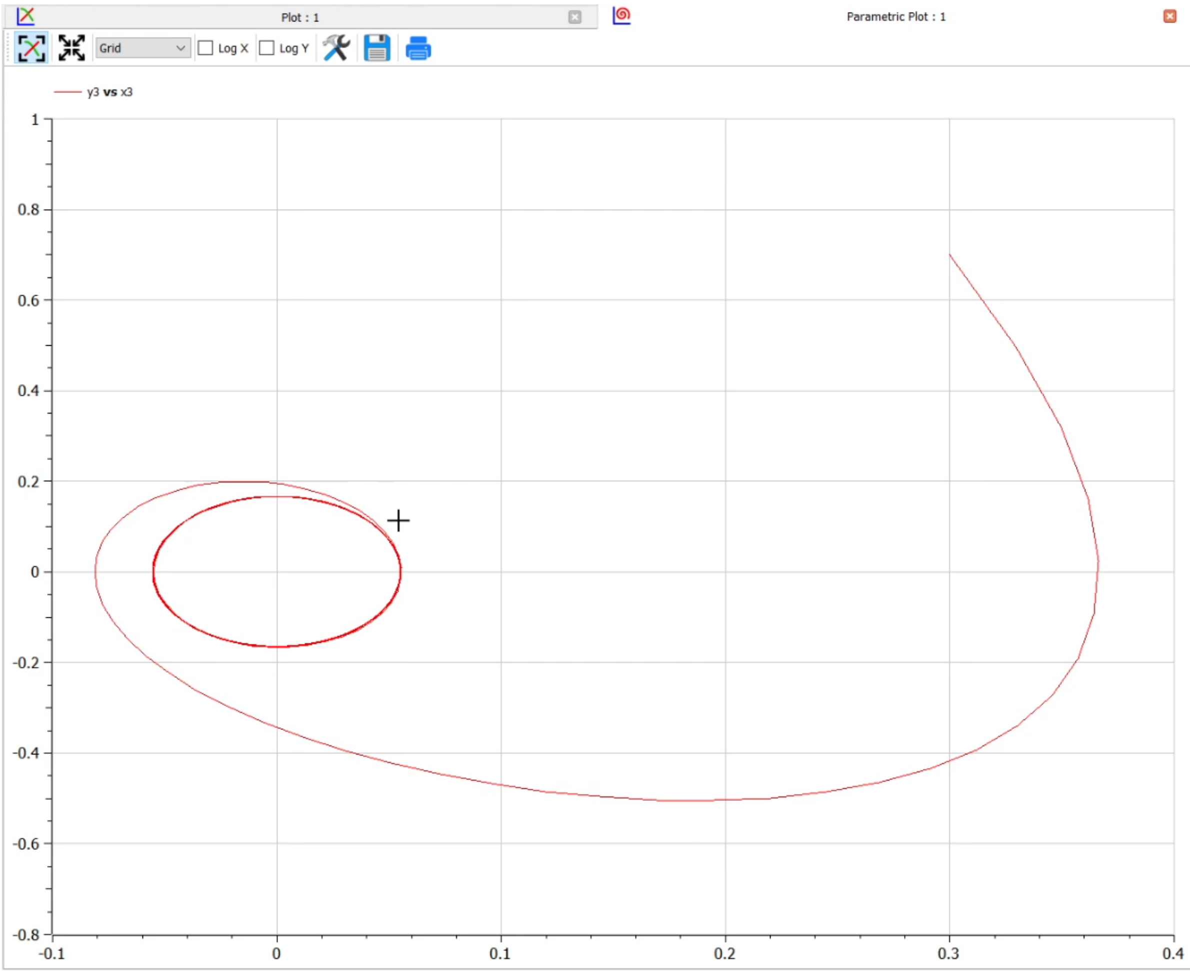

Figure 4.5: 3-й случай

5 Ответы на вопросы

1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

2. Дайте определение осциллятора

Осциллятор — система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

3. Запишите модель математического маятника

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка.

Нужно произвести замену производной второго порядка на переменную (первое уравнение) и выразить производную этой переменной из изначального уравнения (второе уравнение).

5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовый портрет - это геометрическое представление траекторий динамической системы на фазовой плоскости. Каждый набор начальных условий представлен отдельной кривой или точкой.

Фазовая траектория - гладкая кривая в фазовой плоскости, которая отвечают решению уравнения движения как функции времени.

6 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы мы написали модель гармонических колебаний в OpenModelica.

7 Библиография

1. OpenModelica User's Guide. URL: https://www.openmodelica.org/doc/OpenModelicaUsersGuide/latest/
2. Лабораторная работа №4. - 4 с. URL: https://esystem.rudn.ru/mod/resource/view.php?id=831115