9

禁止位置的安排

*作者:*John G. Michaels，纽约州立大学数学系，布罗克波特学院。

*先决条件:*本章的先决条件是基本的计数技术和包容-排斥原理。参见《*离散数学及其应用*》*第*5.1、5.3 *和*7.5 节。

介绍

在本章中，我们将讨论物体的排列计数问题，在这些物体可以放置的某些位置有限制。例如，我们可能需要将申请人与工作相匹配，其中一些申请人不能担任某些工作;或者我们可能希望将玩家配对组成两人团队，但有些玩家无法与其他玩家配对。

诸如此类的问题，我们想要找出“禁止”位置的安排次数，这是一个由来已久的问题。它们可以追溯到

18 世纪初，法国数学家皮埃尔・德・*蒙蒙*特*研究了配对问题。在这个问题中，一个瓮包含 *n* 个球，编号为 1、2、…， n，每次抽出一个。德蒙蒙特想要找出在这个过程中没有匹配的概率;也就是说，那个球 I *不是抽*到的第 I 个球。这个问题实际上是一个计算错乱的问题——一个*集合的排列*，其中没有元素留在它自己的位置上。(n 个对象的*排列数* Dn 的公式见《离散数学及其应用》第 7.6 节。)

另一个排列问题称为 *probl 'eme des m ' enages*(家庭问题)，要求将 *n* 对夫妇排列在一张桌子周围，使两性交替，没有丈夫和妻子坐在一起，有多少种方法。这个问题在 1891 年被 E.卢卡斯解决了。我们将通过定义一个称为“车多项式”的多项式并*展示如何使用它来计数排列来*解决诸如此类的问题。

禁止位置的排列

例 1:假设一位办公室经理登了一则招聘兼职人员的广告:键盘操作员(K)、档案员(F)、速记员(S)、送货员(D)和仓库工作人员(W)。有五个人回应了报纸上的广告，并接受了这些工作的面试。图 1 显示了 5 个求职者(1、2、3、4、5)每个人都有资格处理哪些工作。

该图中的每个方块要么是阴影，要么是未阴影。阴影的方块代表“禁止进入的位置”;也就是说，这个人不能做那个工作。无阴影的正方形代表“允许的位置”。例如，申请人 1 不能担任速记员的工作，但可以担任其他任何工作。办公室经理可以用多少种方法把 5 个申请人安排到他们能胜任的职位上?

---

*皮埃尔・雷蒙德・德・蒙蒙特(1678-1719)出生于法国贵族家庭，22 岁时继承了父亲的大笔财产，跟随尼古拉斯・德・马勒布兰奇神父学习哲学和数学，并在巴黎圣母院担任教长。他结了婚，并开始了他对概率的研究，这可能是因为他与伯努利家族的接触。1708 年，他发表了《*Essai d ' analyse sur les Jeux de Hasard*》。在这本著作中研究的游戏之一是配对游戏奖。他在数学上的贡献的意义在于他使用代数方法来研究机会博弈。

**爱德华・卢卡斯(1842-1891)，法国数论家。1876 年他证明了梅森数 $M_{67} = 2^{67}-1$ 不是素数。同年他还证明了 $M_{127} = 2^{127}-1$ 是素数;75 年来，这是被证明为素数的最大数。卢卡斯给斐波那契数列 1,1,2,3,5,8，…加上了“斐波那契”这个名字。并研究了密切相关的卢卡斯序列 1,3,4,7,11,18，.. ..

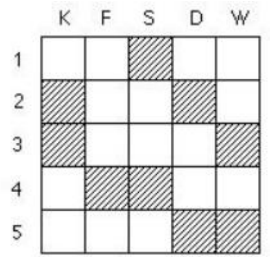


图 1 所示。求职者和可能的工作。

解决方案:求职者与工作的匹配被称为**禁忌职位的安排**。两种可能的工作安排是:

> 1 -键盘，2 -速记员，3 -快递，4 -仓库，5 -文件员，1 -仓库，2 -速记员，3 -文件员，4 -快递，5 -键盘。

我们可以把图 1 想象成一个 5 ×5 的棋盘，去掉了 9 个方格。**车**是一种水平或垂直移动的棋子，如果该棋子位于与车同一行或同列的方块上(假设没有中间的棋子)，则可以夺取(或捕获)该棋子。例如，方格(2,*F*)上的车可以在第 2 行或 *F* 列的任何方格上夺取对手的棋子，但不能在方格(1,*K*)上夺取棋子。申请人与工作的匹配对应于在无阴影的方格上放置五辆车，这样就没有车可以夺取任何其他车。这些被称为“不取”的车。因此，可接受的工作分配的数量等于在棋盘上放置五辆不取车的方法的数量，这样就没有一辆车处于禁止的位置。

确定这一排列数的关键是包含-排除原则。为了设置问题以便我们可以使用包含-排除原则，我们让

A_i=*禁止方格*中第 i 行 5 辆未取车的所有排列的集合，

对于 *I=1,2,3,4,5*。

如果我们设 *U* 是所有可能的作业分配的集合，那么我们问题的解是$|U-(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)|$。将包含-不相容原理应用于$|A1 \cup \cdots \cup A5|$*得到*

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_5| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| \qquad (1)$$
$$- \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|,$$

其中我们对适当的下标集合求和。

在允许的方格上放置不取车的问题现在已经简化为一系列计算在禁止的方格上放置不取车的方法的问题。我们需要确定(1)右侧 31 个集合中每个集合的大小，为了简化解决方案，我们引入一些符号。让

设 R_i=将 I 辆不取车放在棋盘上禁止的方格上的方法数。

如果我们需要强调我们正在处理一个特定的棋盘 B 的事实，我们将写 $r_i(B)$而不是 r_i。

右边的五个*表达式*都*可以用* r_i *来表示，对于* $i = 1,2,3,4,5$。*数字*$|A_i|$计算 5 辆不取车的摆放方式，第 i 行车在禁止方块上。例如，$|A_3| = 2 \cdot 4!$既然有两种方法把车放在禁区上?第 3 行和第 4 行方块!放 4 的方法?其他不取车。?因此$|A_i| = r_1 \cdot 4!$类似的吗?推理*适用于*$|A_i \cap A_j| = r_2 \cdot 3!$，$|A_i \cap A_j \cap A_k| = r_3 \cdot 2!$,

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = r_4 \cdot 1!$、$|A_1 \cap \cdots \cap A_5| = r_5 \cdot 0!$。通过这些替换，我们可以将(1)重写为

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_5| = r_1 \cdot 4! - r_2 \cdot 3! + r_3 \cdot 2! - r_4 \cdot 1! + r_5 \cdot 0!.$$

因此，问题的解可以写成

$$5! - (r_1 \cdot 4! - r_2 \cdot 3! + r_3 \cdot 2! - r_4 \cdot 1! + r_5 \cdot 0!). \tag{2}$$

很容易看出 $r_1 = 9$，因为有九种方法可以把车放在禁止的方格上。*通过*计算将两辆不取车放在禁止方格上的 28 种方法，也不难看出 $r_2 = 28$。然而，当我们试图找到系数 r_3, r_4 和 r_5 时，问题变得越来越困难。这促使我们寻找有助于简化计数过程的技术。

我们的简化技术是一种经常用于计数问题的技术——将给定的问题与一系列较小的问题联系起来，每个问题都更容易解决。我们首先取给定的棋盘，改变行和列的顺序，得到图 *2* 中的棋盘 B。

通过这种重新排列，禁止方块的原 *B* 板可以被分成两个不相交的子板 B_1 和 B_2，*如图* 2 所示。(*如果两个棋盘没有*共同的行或列，我们说它们是不相交的。)通过在 B 的禁止方块上放置非取车来计算(1)的右侧的问题被简化为两个更小的问题:在 B_1 的禁止方块上放置*非*取车和在 B_2 的禁止方块上放置非取车。

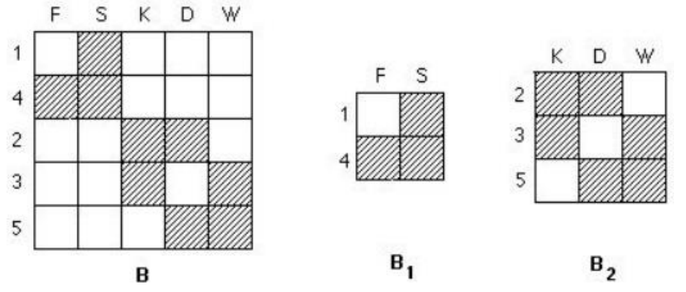


图 2。图 1 板的重排，和两个不接合的子板。

例如，要找到 r1(B)，*要么*我们在 B1 上放 0 个车，在 *B2* 上放 1 个车，要么*我们*在 B1 上放 1 个车，在 B2 上放 0 个车。也就是说,

$$
\begin{aligned}
r_1(B) &= r_0(B_1)\cdot r_1(B_2) + r_1(B_1)\cdot r_0(B_2)\\
&= 1\cdot 6 + 3\cdot 1 = 9.
\end{aligned}
$$

为了求出 r2(B)，我们观察到在 B 的禁止方块上放置两辆不取车给了*我们*三种需要考虑的情况:在 B1 上放置 0，在 *B2* 上放置 2，在 B1 *上*放置 1，在 B2 上放置 1，*或者*在 B1 上放置 2，在 B2 上放置 *0*。也就是说,

$$
\begin{aligned}
r_2(B) &= r_0(B_1)\cdot r_2(B_2) + r_1(B_1)\cdot r_1(B_2) + r_2(B_1)\cdot r_0(B_2)\\
&= 1\cdot 9 + 3\cdot 6 + 1\cdot 1 = 28.
\end{aligned}
$$

类似的推理可以用来说明:

$$
\begin{aligned}
r_3(B) &= \sum_{i=0}^{3} r_i(B_1)\cdot r_{3-i}(B_2)\\
&= 1\cdot 2 + 3\cdot 9 + 1\cdot 6 + 0\cdot 1 = 35,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_4(B) &= \sum_{i=0}^{4} r_i(B_1)\cdot r_{4-i}(B_2)\\
&= 1\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot 9 + 0\cdot 6 + 0\cdot 1 = 15,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_5(B) &= \sum_{i=0}^{5} r_i(B_1)\cdot r_{5-i}(B_2)\\
&= 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 2 + 0\cdot 9 + 0\cdot 6 + 0\cdot 1 = 2.
\end{aligned}
$$

将 *ri(*B)的值代入(2)得到原问题的解:

$$
\begin{aligned}
&5!-(r_1\cdot 4!-r_2\cdot 3!+r_3\cdot 2!-r_4\cdot 1!+r_5\cdot 0!)\\
&\qquad =5!-(9\cdot 4!-28\cdot 3!+35\cdot 2!-15\cdot 1!+2\cdot 0!)\\
&\qquad =15.
\end{aligned}
$$

因此，最初的工作分配问题可以用 15 种方法来解决。

车多项式

例 1 中的数字 $r_0(B)=1, r_1(B)=9, r_2(B)=28, r_3(B)=35, r_4(B)=15, r_5(B)=2$ 可以存储为多项式的系数:

$$1+9x+28x^2+35x^3+15x^4+2x^5.$$

更一般地说，我们有以下几种。

定义 1 如果 B 是任意棋盘，则 B 的车多项式，写为 $R(x, B)$，是这种形式的多项式

$$R(x,B)=r_0(B)+r_1(B)x+r_2(B)x^2+\cdots+r_n(B)x^n$$

其中 $r_i(B)$ =在棋盘的禁止方格上*放置 i 辆不*取车的方法的个数。

车多项式不仅是一种方便的存储系数 $r_i(B)$ 的记账装置，多项式的代数性质也可以用来帮助解决计数排列的问题。

在前面的例子中，系数是通过将 B 板拆分成 2 个不相交的子板 B_1 和 B_2 得到的。这些子板中的每一个都有自己的车多项式:

$$R(x,B_1)=1+3x+x^2,\qquad R(x,B_2)=1+6x+9x^2+2x^3.$$

(请读者在练习 1 中验证这一点。)如果我们将这些多项式相乘，我们得到

$$
\begin{aligned}
R(x,B_1)\cdot R(x,B_2)&=(1+3x+x^2)(1+6x+9x^2+2x^3)\\
&=(1\cdot 1)+(1\cdot 6+3\cdot 1)x+(1\cdot 9+3\cdot 6+1\cdot 1)x^2\\
&\qquad +(1\cdot 2+3\cdot 9+1\cdot 6)x^3+(3\cdot 2+1\cdot 9)x^4+(1\cdot 2)x^5\\
&=1+9x+28x^2+35x^3+15x^4+2x^5\\
&=R(x,B).
\end{aligned}
$$

因此，B 的车多项式是子板 B_1 和 B_2 的车多项式的乘积。定理 1 中陈述了一个类似的结果总是成立的事实。

定理 1 如果一个棋盘 B 被分成两个不相交的子棋盘 B_1 和 B_2，则 $R(x, B) = R(x, B_1) \cdot R(x, B_2)$。

证明: 我们将证明 $R(x, B)$ 和 $R(x, B_1) \cdot R(x, B_2)$ 这两个多项式是相等的。为此，我们将证明，对于每一个 i, $R(x, B)$ 的第 x^i 项等于乘积 $R(x, B_1) \cdot R(x, B_2)$ 的第 x^i 项。为了证明这总是成立的，我们考虑两个车多项式的乘积

$$R(x,B_1) \cdot R(x,B_2) = (r_0(B_1) + r_1(B_1)x + \cdots + r_m(B_1)x^m) \\ \cdot (r_0(B_2) + r_1(B_2)x + \cdots + r_n(B_2)x^n).$$

将这两个多项式相乘并将相似项组合就得到 x^i 项

$$(r_0(B_1) \cdot r_i(B_2) + r_1(B_1) \cdot r_{i-1}(B_2) + \cdots + r_i(B_1) \cdot r_0(B_2))x^i.$$

这个和给出了放置 i 只不取白嘴鸦在 B 上的方法个数，根据 B_1 上的白嘴鸦的个数和 B_2 上的白嘴鸦的个数分解为 $i+1$ 种情况。因此这个系数等于 $r_i(B)$，得到 $r_i(B)x^i$ ($R(x, B)$)项，由于 $R(x, B_1) \cdot R(x, B_2)$ 和 $R(x, B)$ 的对应项相等，我们有 $R(x,B) = R(x, B_1) \cdot R(x, B_2)$。

下面的例子说明了这一定理的技巧。

例 2 一位女士在一次销售旅行中带来了四条裙子(蓝色、棕色、灰色格纹、绿色条纹)和五件衬衫(黄色、粉色、白色、棕褐色和蓝色)。有些裙子不能和有些衬衫搭配，如图 3 中阴影的方块所示。她用四件裙子搭配五件衬衫中的四件，有多少种方法可以做成四套衣服?

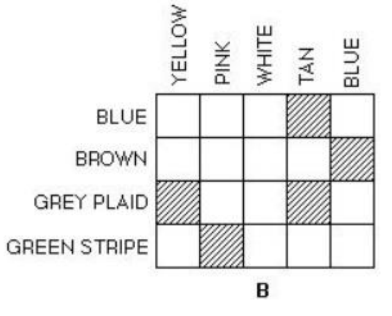


图 3。可能的裙装和衬衫套装。

解决方案:(注意，在这个例子中，我们将一个包含四个对象的集合匹配到一个包含五个对象的集合。我们将找到棋盘 B 的车多项式，然后*使用*包含-排除原理来完成计数过程。由于棋盘不是正方形的，我们在使用包容不相容原理时需要适当调整我们的计数。)

我们观察到，这个禁止位置的棋盘 *B* 可以被分解成两个不相交的子棋盘 *B1* 和 B2，*如图* 4 所示。

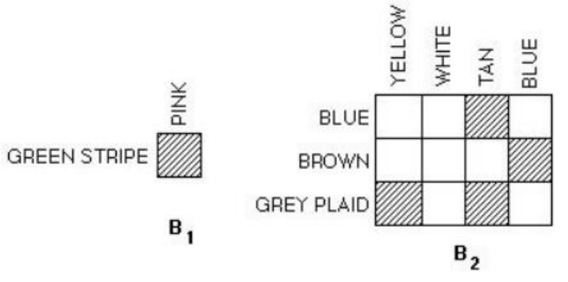


图 4。图 3 的板子不接合。

计算这些板子的车多项式并不难:

$$R(x,B_1)=1+x$$
$$R(x,B_2)=1+4x+4x^2+x^3.$$

(这个留作习题 2)根据定理 1，

$$\begin{aligned}R(x,B)&=R(x,B_1)\cdot R(x,B_2)\\&=(1+x)(1+4x+4x^2+x^3)\\&=1+5x+8x^2+5x^3+x^4.\end{aligned}$$

因此 $r_0=1, r_1=5, r_2=8, r_3=5, r_4=1$。现在我们知道了在禁止方块上放置非取车的方法个数，我们使用包容-不相容原理来获得最终答案:

$$\begin{aligned}|U-(A_1\cup\cdots\cup A_4)|&=|U|-|A_1\cup\cdots\cup A_4|\\&=|U|-\Big(\sum|A_i|\ -\ \sum|A_i\cap A_j|\\&\qquad+\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|-\ |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|\Big)\\&=5\cdot4\cdot3\cdot2-\big(5(4\cdot3\cdot2)-8(3\cdot2)+5(2)-1(1)\big)\\&=39.\end{aligned}$$

(注意 $|U|=5\cdot4\cdot3\cdot2$，因为 $|U|$ 等于?4 $\times$5 棋盘上放置 4 个不取车的方法数。还有，$|A_i|=5(4\cdot3\cdot2)$ since $r_1=5$

还有 4 • 3 • 2 种方式来放置另外三辆不取车在另外四列中的三列。)

下面的定理总结了使用车多项式和包容-不相容原理对禁止位置的排列进行计数的技术。

定理 2 *在 m 个*位置(其中 m ⩾n)中排列 n 个物体*的方法数等于*

$$P(m,n)-\big[r_1(B)\cdot P(m-1,n-1)-r_2(B)\cdot P(m-2,n-2)+\cdots$$
$$+(-1)^{n+1}r_n(B)\cdot P(m-n,0)\big]$$

其中数字 *ri(*B*)*是禁止位置的棋盘的车多项式的系数。

特别地，如果 *m* = *n*，排列的数目为

$$n!-\big[r_1(B)\cdot(n-1)!-r_2(B)\cdot(n-2)!+\cdots+(-1)^{n+1}r_n(B)\cdot 0!\big].$$ ∎

例 3 Probl’eme des rencontres 一个瓮包含 *n* 个球，编号为 1、2、⋯， n.每次取出一个球，放在标有 1、*2*、⋯位置的托盘中*。*， *n*，第一个取出的球放在位置 1 上，第二个取出的球放在位置 2 上，以此类推。当第 i 个球恰好*被*放在第 i 个位置时，*就发生了 rencontre，或匹配*。有多少*种方法*可以从瓮中取出球，从而没有匹配?

解决方案:我们需要找到 Dn =1, 2，⋯，n 的排列次数。*我们将*通过使用车多项式来实现这一点。由于当球 i 在位置 *i* 时发生匹配，因此我们为棋盘 *B* 的 i = 1,2，⋯，*n 遮挡正方形*(i, i)，如图 5 所示。

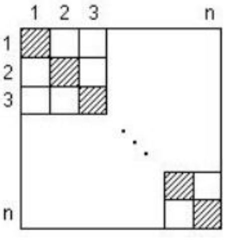


图 5。一个 ×*n* 板。

B 板可拆分成 *n 个*不相交的子板 *B1*、*B2*、 ⋯， *Bn*，每个子板由单个正方形(i, i)组成*。*

每个子板都有车多项式 $R(x, B_i) = 1 + x$，*定理* 1 在这里适用(用 n 代替 2)，我们有

$$\begin{aligned} R(x,B) &= R(x,B_1)\cdot R(x,B_2)\ldots R(x,B_n) \\ &= (1+x)(1+x)\ldots(1+x) \\ &= (1+x)^n \\ &= C(n,0)+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots+C(n,n)x^n \end{aligned}$$

最后一步用二项式定理展开$(1+x)^n$。因此，根据定理 2，没有匹配的排列数等于

$$n! - \left[C(n,1)(n-1)! - C(n,2)(n-2)! + \cdots + (-1)^{n+1}C(n,n)0!\right]$$

$$\begin{aligned} &= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!} \\ &= n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}). \end{aligned}$$ □

通过将一个棋盘分解成两个或多个不相交的子棋盘来简化计数过程的方法，在可以做到的情况下效果很好，如例 2 和例 3。但是假设一个给定的棋盘不可能被分解?下面的例子说明了如何处理这样的问题。

例 4 假设一个人有四件礼物(1、2、3、4)要送给四个人——凯西(K)、弗雷德(F)、戴夫(D)和温迪(W)。图 6 中阴影的方块表示哪些礼物不能送给不同的人。假设每个人都要收到一份礼物，找出这四份礼物可以给这四个人的方式。

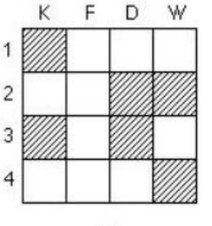


图 6。可能的礼物分配。

解决方案:在这种情况下，不可能将棋盘分成两个不同的子板。(要了解原因，请考虑第 1 行。如果正方形(1,*K*)在子板 *B1 中,*

这将迫使被禁止的方格(3,*K*)也在 *B1* 棋盘上。这将强制禁止方块(3,*D)*在 B1 中。这迫使第二行的禁止方块在 B1 中，这反过来又迫使方块(4,W)在 B1 中。*因此* B1 就是*整个*棋盘 B，我们*没有*简化这个问题。)

为了解决涉及这样一个棋盘的问题，我们通过考察案例来简化问题。我们想要找到车多项式 R(*x*,*B)*，为了找到 ri(B)，*我们*首先选择一个禁止的方块，比如(3,K)，要么*我们*在这个方块上放一个车(因此在第 3 行或第 K 列没有其他车)，要么我们不在这个方块上放一个车。在这两种情况下，我们都剩下了更小的棋盘来考虑。

如果我们把一辆车放在方格(3,*K*)上，那么剩下的 *i* −1 辆车必须放在棋盘 *B* 的禁止方格上。图 7 中。这可以通过 *ri*–*1* (B*?)*的方式完成。如果我们不把一辆车放在方格(3,*K)*上，那么这 i 辆车必须全部放在棋盘 B?? ?的禁止方格上。图 7 中。这可以通过 ri(B??)种方式完成。

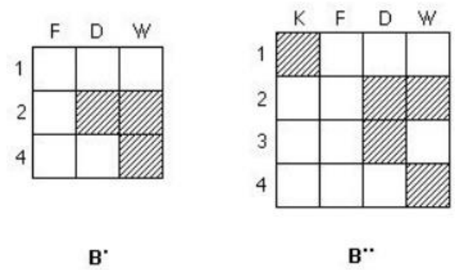


图 7。图 6 板的子板。

由于这两种情况穷尽了所有的可能性，我们有

$$r_i(B) = r_{i-1}(B') + r_i(B''). \tag{3}$$

这个递归关系可以用来构建 B 的白车多项式。因为 ri(B)*是* B 的白*车*多项式中 xi 的系数，将*式*(3)乘以 xi 得到

$$r_i(B)x^i = r_{i-1}(B')x^i + r_i(B'')x^i. \tag{4}$$

将 *i*= 1,2,3,4 的方程(4)求和得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} r_i(B)x^i &= \sum_{i=1}^{4} r_{i-1}(B')x^i + \sum_{i=1}^{4} r_i(B'')x^i \\ &= x\sum_{i=1}^{4} r_{i-1}(B')x^{i-1} + \sum_{i=1}^{4} r_i(B'')x^i \\ &= x\sum_{i=0}^{3} r_i(B')x^i + \sum_{i=1}^{4} r_i(B'')x^i.\end{aligned}$$

利用 *r0(B)*x0= 1 这一事实，我们把 r0*(B)*x0 加到左边，把 *r0(B)x0* 加到右边的第二个和上，得到

$$\sum_{i=0}^{4} r_i(B)x^i = x\sum_{i=0}^{3} r_i(B')x^i + \sum_{i=0}^{4} r_i(B'')x^i,$$

或

$$R(x,B) = xR(x,B') + R(x,B''). \tag{5}$$

这很容易看出

$$R(x,B') = 1 + 3x + x^2.$$

找到 B??的车多项式也并不难。，因为它的棋盘已经表现为不相交的子棋盘:

$$\begin{aligned} R(x,B'') &= (1+x)(1+4x+3x^2) \\ &= 1+5x+7x^2+3x^3. \end{aligned}$$

将这些代入式(5)得到

$$\begin{aligned} R(x,B) &= xR(x,B') + R(x,B'') \\ &= x(1+3x+x^2) + (1+5x+7x^2+3x^3) \\ &= 1+6x+10x^2+4x^3. \end{aligned}$$

根据定理 2，四份礼物的分配方式为

$$4! - (6\cdot 3! - 10\cdot 2! + 4\cdot 1!) = 4. \qquad \square$$

式(5)的类比对所有棋盘都成立，由此得出以下定理。

定理 3 如果*(a, b)*是棋盘 *b* 上的正方形，如果棋盘 *b ?*是通过移除 *a* 行和 *B* 列的所有正方形从 *B* 中得到的，并且如果 *B* 板*?? ?*从 *B* 中移除一个正方形*(a, B)*得到，则

$$R(x,B) = xR(x,B') + R(x,B''). \qquad \blacksquare$$

例 5 一位网球教练想让五名男子(1、2、3、4、5)和五名女子(6、7、8、9、10)配对进行一些训练，为一场混合双打锦标赛做准备。根据球员的日程安排和能力水平，教练决定

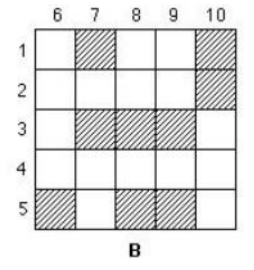


图 8。网球选手可能的配对。

教练知道某些组合不能组成，如图 8 中阴影的方块所示。五男五女有多少种组合方式?

解决方案:由于不可能将 *B* 板分成不相交的子板(读者应该检查一下)，我们使用定理 3 来求 R(*x*,*B)*。

如果我们从定理 3 中的平方*(3,8)*开始，我们就得到了棋盘 *B?*和 *B ??*的图 9。

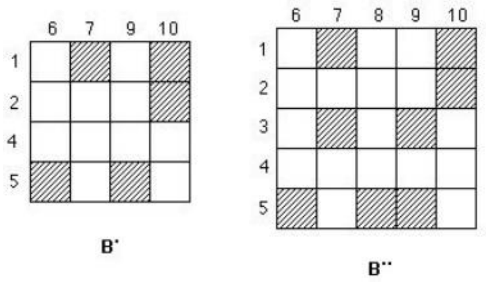


图 9。图 8 板的子板。

董事会 *B ?*可以拆分成两个不相交的子板(用方格*(5,6)*和*(5,9)*作为一个板)，它的车多项式是

$$\begin{aligned} R(x, B') &= (1+2x)(1+3x+x^2) \\ &= 1+5x+7x^2+2x^3. \end{aligned}$$

但是，*B* 板是不可能破的*?? ?*变成不接合的副板。

求出 B 板的车多项式??，我们需要再次用到定理 3。利用定理*中的*平方(5,9)，我们得到

$$\begin{aligned} R(x, B'') &= x(1+4x+3x^2) + (1+2x)(1+5x+6x^2+x^3) \\ &= 1+8x+20x^2+16x^3+2x^4. \end{aligned}$$

(细节留习题 8。)因此,

$$\begin{aligned} R(x,B) &= xR(x,B') + R(x,B'') \\ &= x(1+5x+7x^2+2x^3)\ +\ (1+8x+20x^2+16x^3+2x^4) \\ &= 1+9x+25x^2+23x^3+4x^4. \end{aligned}$$

根据定理 3，网球教练可以用 12 种方法将 5 名男子和 5 名女子配对。

建议阅读资料

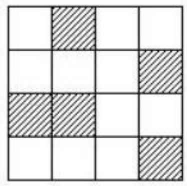
1. R. Grimaldi，*离散与组合数学:应用导论*，第五版，Addison-Wesley，波士顿，2004。
2. J. Riordan，*《组合分析导论》*，Dover Publications，Mineola，ny, 2002。
3. F. Roberts 和 B. Tesman，*《应用组合学》*，第二版，Prentice Hall, Upper Saddle River, n.j.， 2005。
4. A. Tucker，*《应用组合学》*，第四版，John Wiley & Sons, Hoboken, N.J, 2002。

练习

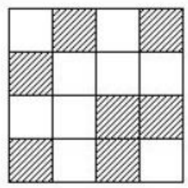
1. 验证图 2 的板子 $R(x, B1)= 1+ 3x + x2$ 和 $R(x, B2)= 1+6x+ 9x2 +2x3$。
2. 验证图 4 的板子 $R(x, B1) = 1 + x$ 和 $R(x, B2) = 1+4x + 4x2 +x3$。
3. 证明不可能将图 8 的 B 板拆成不相交的子板。

在练习 4-7 中，找出给定棋盘上没有物体在禁止位置的车多项式和排列次数。

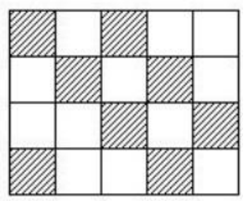
4.



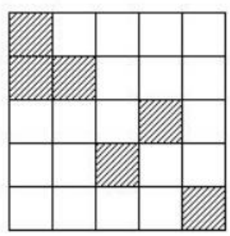
5.



6.



7.



8. 执行示例 5 中查找 R(*x*,*B*??)的细节。

9. 求 1、2、3、4 的排列个数，其中 1 不在位置 3,2 不在位置 3 或 4,4 不在位置 1。

10. 一位教授把离散数学课分成四组。每个小组都要写一本以下数学家的传记: 布尔、德摩根、欧几里得、欧拉、汉密尔顿和帕斯卡。第一组不想写欧拉或帕斯卡，第二组不想写德摩根或汉密尔顿，第三组不想写布尔，德摩根或帕斯卡，第四组不想写布尔或欧拉。如果教授想让每一组写一个不同的数学家，教授给每一组分配不同数学家的方法有多少种?

11. 假设 B 是一个 4×4 棋盘，有四个禁止的位置，都在最后一列。用车多项式的方法证明没有可能的排列。

12. 假设 B 是一个 4×4 棋盘，没有禁止的位置。用车多项式的方法求出四个物体的排列次数。

13. 设 $A=\{1,2,3,4\}$。求 1-1 函数 $f: A\to A$ 的个数，使得 $f(1)\neq 3$, $f(2)<3$, $f(4)>1$。

14. 数学系主任需要布置五门课程的暑期教学任务:数值分析、数学建模、离散数学、微积分预科和应用统计学。布洛赫教授不希望被分配到数学建模或微积分预科，马奥尼教授不愿教应用统计学，中野教授不愿教数值分析或离散数学，罗克希尔教授愿意教除应用统计学以外的任何课程，索默教授愿意教除数值分析以外的任何课程。系主任能通过多少种方式将 5 个教员与 5 门课程相匹配，从而让教员们的意愿得到遵从?

?**15**。(A *probl 'eme des m ' enages*)四对已婚夫妇围坐在一张圆桌周围，这样就不会有两个男人或两个女人挨着坐，也不会有丈夫挨着妻子坐。假设 123 • • • 78 和 234 • • • 81 这样的排列方式不一样，有多少种可能的排列方式?(*提示*:先确定四位女士可以坐多少种方式。然后设置一个板子来确定四名男子的禁忌位置。)

电脑项目

1. 编写一个计算机程序，以禁止位置的棋盘为输入，并确定该棋盘是否可以写入两个不相交的子板。

2. 编写一个计算机程序，使用定理 3 找到一个棋盘禁止位置的车多项式。

3. 编写一个计算机程序，输入一个棋盘上禁止的位置，输出排列的数量，这样就不会有物体处于禁止的位置。