中南大学考试试卷A及答案

2022 -- 2023 学年 上学期 时间100分钟 2023年2月22 日晚上9-10节

离散数学 课程 48 学时 3 学分 考试形式：闭 卷

专业年级：计科，图灵，信安，大数据2022 总分100分，占总评成绩 60 %

注：此页不作答题纸，请将答案写在答题纸上

一、填空题（每小题2分，共20分）

1．拥有5个原子的布尔代数的元素个数为 32 。

2．12条边的图G，度数为3的顶点6个，其余度数均小于3，则该图至少有 9 个顶点。

3．A={a,b,c,d,e}上具有自反和对称性的关系的个数为 1024 个。

4．设R为实数集，函数f,g：R×R→R×R，并且f(<x,y>)=<x+2y,2x-y>, g(<x,y>)=<5x,5y>, 则gf-1(<x,y>)=<x+2y,2x-y>。

5．设简单连通无向图G有10个顶点，其中2个1度，3个2度，3个4度，其余度数为3，则其对应的平面图有多少面？ 5

6．三元命题公式P∧Q→R的主合取范式= M6 。

7．A={x|x∈N∧x<16},R为模5等价关系，设规范映射f: A→A/R,则f(1) = {1,6,11} 。

8.设A={2,3,9},A上的二元运算\*定义为a\*b=min{a,b}，则在独异点<A,\*>中，么元是 9 。

9.设无向图G=<V,E>,|V|=n,设其点独立数是β0，则其点覆盖数α0是 n-β0

10．[a,b]表示a到b实数闭区间，||[0,1]|\*(|有理数集|+|[10,20]|)|= c

二、真假判断题（每小题1分，共10分）

1.能与自己的子集建立起双射的集合一定是无限集合。T

2.非空集上的空关系是自反、对称和传递的。F

3.简单无向连通图有21条边且结点度数均为2，则该图结点数为42。F

4.无向图G的最小点割集是唯一的。F

5.102的所有正因子构成的集合为S102，D为整除关系，<S102,D>是布尔代数。T

6.质数阶的群一定是循环群，且生成元的阶和群阶相等。T

7.n个元素的集合可以定义n!个置换。T

8.如果A⊆B，则A∉B一定为真。F

9.如果R1和R2是反对称和传递的，那么R1∪R2也是反对称和传递的。F

10．设G(V,E)是无向简单图，G的极大独立集一定是G的极小支配集。反之，也成立。F

三、多选题（每小题2分，共10分）

1．下列哪些关系可以构成函数？ CD

A．f={<x,y>|x,y∈N且x+y=10} B．f={<x,y>|x,y∈R且x=y2}

C．f={<x,x+10>|x∈N} D．f={<x,|x|>|x∈R}

2．选择下列正确的说法： AC

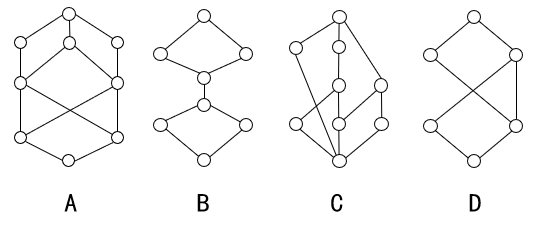
A.若有向图G是连通的，则其底图必是连通的。

B.若图G是连通的，则其子图必是连通的。

C.若图G是不连通的，则其补图G’必是连通的。

D.若图G是连通的，则其补图G’必是不连通的。

3．下列哈斯图中， BD 是模格。



4．设fg是合成函数，下面说法正确的是？ AB

A. 如果fg是满射的，则f是满射的，g可以不是满射的。

B. 如果fg是双射的，则f是满射的，g是单射的。

C. 如果fg是双射的，则f是双射的，g可以是满射的。

D. 如果fg是单射的，则g是单射的，f是单射。

5．集合A={1,2,3,...,10}上的关系R={<x, y>|x+y=10, x,y∈A}，则R的性质是 BC

A. 自反的 B. 对称的 C. 非传递的 D.反自反的

四、解答或计算题（每小题6分，共30分）

1．请给出下面推理的形式化证明：∀x(A(x)→ B(x)∧C(x)),∃x(A(x)∧D(x))⇒ ∃x(A(x)∧B(x)∧D(x))

证明：（要点：形式化证明。并需列出每步的依据。）

1. ∃x(A(x)∧ D(x)) P

2. A(c)∧ D(c) ES规则，1.

3. ∀x(A(x)→ B(x)∧C(x)) P

4. A(c)→ B(c)∧C(c) US规则,3

5. A(c) 2

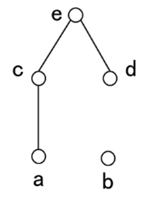
6. D(c) 2

7. B(c) 4,5

8. A(c)∧B(c)∧D(c) 5,6,7,合取

9. ∃x(A(x)∧B(x)∧D(x)) EG规则，8

2.已知偏序集<A,R>的哈斯图如下图所示, 请给出集合A的表达式，R的关系图和关系矩阵，并求R-1和R2。



要点：

（1）A={a,b,c,d,e},R={<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<e,e>,<a,c>,<a,e>,<c,e>,<d,e>}

（2）关系图和关系矩阵（略）

（3）R-1（将集合R中的序偶反向）

（4）R2={IA, <a,c>, <a,e>, <c, e>, <d,e>}

3.请给出无向简单连通图G(4,3)（4个顶点，3条边）的所有极小支配集和最小支配集。

（解答要点：G（4，3）是树，有两种不同构的树结构。分别列出其所有的极小支配集和最小支配集）

解：（这是G（5，4）的：



对结点进行标注，每种情况下红色结点集为极小支配集

4．请证明：两个正规子群的交集必可构成相关的商群。

要点：（1）证明两个正规子群的交集还是正规子群

（2）基于该正规子群，可以定义商代数（定义方法）

证明1：（1）假设<H,\*>和〈K，\*〉都是〈G，\*〉的正规子群，需证明对G中的任意元素a, a(H∩K)=(H∩K)a

对任意x∈a(H∩K),存在h1∈(H∩K),x=ah1,由于a H=Ha,a K=Ka,所以，存在h2∈H, h3∈K, x=h2a=h3a,所以，h2=h3. 所以x=h2a∈(H∩K)a，故a(H∩K)包含于(H∩K)a。同理可证，(H∩K)a包含于a(H∩K)。所以，(H∩K)a=(H∩K)a. 所以，H∩K是正规子集。

（2） H∩K是正规子群，由此可以定义商群。设H∩K的陪集关系是R，（即陪集相同的元素相互有关系，此关系是等价关系，还是同余关系）。商群为<G/R,\*’>,其中，G/R={a(H∩K)|a∈G}, a(H∩K)\*’b(H∩K)=(a\*b)(H∩K)

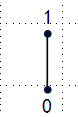
(a(H∩K))-1=a-1(H∩K)

证明2：设H1和H2为群G的两个正规子群，令H=H1∩H2，∀a,b∈H，有：

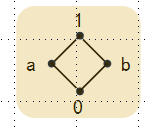
a,b∈H1∧ a,b∈H2；ab-1∈H1∧ab-1∈H2，ab-1∈H；显然aH=Ha，H为正规子群，依据商群定义，存在关于H的商群。

5.请证明：二元布尔代数是四元布尔代数的同态象。

要点：（1）写出二元布尔代数和四元布尔代数的形式；

二元的布尔代数：<{0,1},∩,∪,-,0,1>

四元布尔代数<{0,1,a,b},\*,⊕,’,0,1>：



（2）写出一个从四元布尔代数到二元布尔代数的满同态（即一个满射，需验证其满足运算保持， 常数对应的特征）

设f: {0,1,a,b}→{0,1}的函数。其中，f(0)=0,f(1)=1,f(a)=0,f(b)=1.

显然（可验证），该函数对运算\*,⊕,’都保持，而且常数对应。所以，f是一个从<{0,1,a,b},\*,⊕,’,0,1>到<{0,1},∩,∪,-,0,1>的一个同态。而且f({0,1,a,b})={0,1},所以，两元布尔代数是四元布尔代数的同态象。

解法2：构造f(x)是一个从B4={0,a,b,1}到B2={0,1}的满射：f：B4→B2

f(0)=0，f(a)=0，f(b)=1，f(1)=1；容易验证f(x)为满同态映射，故<B2,+,\*,’,0,1>是<B4,+,\*,’,0,1>的同态象。(证毕)】

五、证明题（每小题6分，共30分）

1. 请证明：<Zk,+k>中任意元素a的阶都是|Zk|的因子，Zk={0,1,...,k-1}，+k为模k加。

**要点：（1）**<Zk,+k>是群

1. 对于任意a∈G，设r是a的阶，则〈{a1，a2，…，ar-1，ar}，+k〉是〈Zk,+k〉的子群，并且该子群的阶为r.
2. 由拉格朗日定理，r必是|Zk|的一个因子
3. 有n个城市由k条高速公路网连接(一条高速公路定义为两城市间的直接通路)，请证明：如果有：k＞(n-1)(n-2)/2，则总能通过连接城市的高速公路在任何城市间旅行。

要点：（1）建立图模型（节点：城市，边：城市间的高速公路）

（2）问题转化为：证明该图是连通图。

证明1：

在图G中，它的结点数为n，设v是G中任一结点，若把v去掉后，其它n-1结点，每个结点度数最多有n-2度，因此n-1个结点之间最多只有(n-1)(n-2)/2条边，而k＞(n-1)(n-2)/2,所以至少有一条边连接v和其它结点。

证明2：假设该图不连通。则它至少有两个分支，其中一个分支有n1个点，另一个分支有n-n1个点。则该图至多有n1(n1-1)/2+(n-n1-1)(n-n1)/2条边（两分支都是完全图）。但n1(n1-1)/2+(n-n1-1)(n-n1)/2＜(n-1)(n-2)/2. 所以，不可能有两个及以上分支。

证明3：基于定理8.2-3（教科书第263页），若分图数≥2，则k≤(n-2)(n-1)/2，故k＞(n-2)(n-1)/2时G必连通。（证毕）（证毕）

1. 设x,y,z为布尔代数<{0,1},+,\*,’>的元素，请证明：x+y’(x+z’)=(x+y’+z)(x+y’+z’)(x+y+z’)。

要点：方法1（求出等式两边各自主范式。两个的主范式相同，则二者相等）

方法2（等价变换：左边式子转换成右边形式）

f(x,y,z)=x+y’(x+z’)

=x(y+y’)(z+z’)+y’x(z+z’)+y’z’(x+x’)

=xyz+xyz’+xy’z+xy’z’+xy’z’+x’y’z’

=m7+m6+m5+m4+m0

所以主合取范式：f(x,y,z)=M1\*M2\*M3=(x+y’+z)(x+y’+z’)(x+y+z’)

所以原结论成立

4．请基于图模型证明下面命题：n个球队比赛（n≥4），已经赛完n+1场，则存在一个球队，它至少参加过3场比赛。

要点：（1）将该问题建立图模型。以球队为节点（n个节点），如果两个球队之间已进行一场比赛，则对应的两个节点之间有一条边。

（2）假设所有球队都至多参加2场比赛，即对应的图的所有节点的度都至多为2，所有节点的度之和至多为2n. 但该图有n+1条边。所以，所有节点的度之和为2n+2. 显然，产生矛盾。所以，假设所有球队都至多参加2场比赛是不成立的。即至少存在一个球队，它至少参加过3场比赛。

证明2：若每队至多赛两场，则总比赛场数≤2\*n/2=n＜n+1，与已知矛盾。（证毕）

5．请证明：从环<R,+,\*>到环<Z,+,\*>必存在同态映射，其中R是实数集，Z是整数集，+为普通加法，\*为普通乘法。

要点： **令f(x)=0，可验证，f是一个从<R,+,\*>到环<Z,+,\*>的同态映射)**

**（这是唯一的同态映射）**