Mathématique - Corrigé DS n°8

Exercice 1

1. (a) On calcule $f(1,0)=\dfrac{1}{13}(5,-12)$ et $f(0,1)=\dfrac{1}{13}(-12,-5)$.

   Alors, $\boxed{A=M_{\mathscr{B}_0}(f)=\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}5&-12\\-12&-5\end{pmatrix}}$

   (b) On calcule $A^2=\dfrac{1}{169}\begin{pmatrix}25+144&-60+60\\-60+60&14425\end{pmatrix}=I_2$. On a donc $\underline{f\circ f=id_{\mathbb{R}^2}}$.

   Alors, par théorème, f est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(f-id)$ parallèlement à $\text{Ker}(f+id)$.
   On calcule ces deux noyaux :

$$(x,y)\in\text{Ker}(f-id)\iff\left\{\begin{array}{rcl}5x-12y-13x&=&0\\-12x-5y-13y&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}-8x-12y&=&0\\-12x-18y&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff 2x+3y=0\iff\exists\alpha\in\mathbb{R},\quad(x,y)=\alpha(3,-2)$$

   Donc $\underline{\text{Ker}(f-id)=\text{Vect}((3,-2))}$
   Ensuite,

$$(x,y)\in\text{Ker}(f+id)\iff\left\{\begin{array}{rcl}5x-12y+13x&=&0\\-12x-5y+13y&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}18x-12y&=&0\\-12x+8y&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff 3x-2y=0\iff\exists\alpha\in\mathbb{R},\quad(x,y)=\alpha(2,3)$$

   Donc $\underline{\text{Ker}(f+id)=\text{Vect}((2,3))}$

   Alors $\boxed{f \text{ est la symétrie par rapport à } \text{Vect}(3,-2) \text{ parallèlement à } \text{Vect}(2,3)}$.

   (c) On a $(3,-2)\perp(2,3)$ donc les sous-espaces $\text{Ker}(f-id)=\text{Vect}(3,-2)$ et $\text{Ker}(f+id)=\text{Vect}(2,3)$ sont orthogonaux ce qui prouve que

$$\boxed{f \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à } \text{Vect}(3,-2).}.$$

2. On cherche les vecteurs invariants de g :

$$(x,y,z)\in\text{Ker}(g-id)\iff\left\{\begin{array}{rcl}-\sqrt{2}y+\sqrt{2}z-2x&=&0\\\sqrt{2}x+y+z-2y&=&0\\-\sqrt{2}x+y+z-2z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}-2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}z&=&0\\\sqrt{2}x-y+z&=&0\\-\sqrt{2}x+y-z&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&0\\y-z&=&0\end{array}\right.\iff\exists\alpha\in\mathbb{R}:(x,y,z)=\alpha(0,1,1)$$

   Alors, on pose $\overrightarrow{n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ Puis on pose $\overrightarrow{a}=(1,0,0)$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{n}$. Enfin, on calcule $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$. La famille $(\overrightarrow{n},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ est une base orthonormée directe.

   La matrice de passage P de la base canonique à la base $(\overrightarrow{n},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$.
   On remarque que $P^tP=I_3$ donc $P^{-1}={}^tP$

   On calcule ensuite la matrice de g dans la base $(\overrightarrow{n},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$:

$$g(\overrightarrow{a})=\frac{1}{2}(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)=\overrightarrow{b}\quad\text{et}\quad g(\overrightarrow{b})=\frac{1}{2\sqrt{2}}(-2\sqrt{2},0,0)=(-1,0,0)=\overrightarrow{a}$$

   et, on sait que $g(\overrightarrow{n})=\overrightarrow{n}$.

   On en déduit la matrice B' de g dans la base $(\overrightarrow{n},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\text{ qui est de la forme : }\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\0&\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

avec $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = 1$ soit $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

On a prouvé que $\boxed{g \text{ est une rotation vectorielle autour de } \overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \text{ d'angle } \dfrac{\pi}{2}}$.

Exercice 2

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, $P(\frac{X}{2})$ et $P(\frac{X+1}{2})$ sont des polynômes et par somme $f(P)$ est un polynôme. De plus, $\deg(P(\frac{X}{2})) = \deg(P(\frac{X+1}{2})) = \deg(P)$ et par somme, $\deg(f(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant 2$, donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
   Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= \frac{1}{2}\left((\alpha P + Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\alpha P + Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \\ &= \alpha \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \text{ par propriété des polynômes.} \end{aligned}$$
   Alors, $f(\alpha P + Q) = \alpha f(P) + f(Q)$.
   On en déduit que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$.
2. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(1) = \alpha P(1) + Q(1)$ par propriété des polynômes. On en déduit $\varphi(\alpha P + Q) = \alpha\varphi(P) + \varphi(Q)$ donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$.
   On a $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = 1$, $\varphi(X^2) = 1$ donc $\boxed{M_{\mathscr{B}_0,(1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.
3. On a $f(1) = 1$, $f(X) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X}{2} + \dfrac{X+1}{2}\right) = \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{4}$ et
   $$f(X^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{4} + \frac{(X+1)^2}{4}\right) = \frac{1}{8}\left(X^2 + X^2 + 2X + 1\right) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{8}.$$
   On en déduit que la matrice de f dans la base canonique est $\boxed{A = M_{\mathscr{B}_0}(f) = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$
4. La matrice A est échelonnée et elle a 3 pivots donc elle est de rang 3.
   Alors, A est de rang maximal donc elle est inversible. Il s'ensuit que $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$.
   Donc $\boxed{f \text{ est injective et surjective}}$.
5. On résout $\varphi(P) = 0$ avec $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a
   $$P \in \operatorname{Ker}\varphi \iff P(1) = 0 \iff 1 \text{ est racine de } P \iff P \text{ est multiple de } X - 1$$
   Et comme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que $P = (aX + b)(X-1) = aX(X-1) + b(X-1)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   Alors, $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(X(X-1),(X-1))}$
   Les deux polynômes $X(X-1)$ et $(X-1)$ sont échelonnés en degré, alors ils forment une famille libre. Comme ils forment une famille génératrice de $\operatorname{Ker}\varphi$, $\boxed{(X(X-1),(X-1)) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\varphi}$ et $\boxed{\dim\operatorname{Ker}\varphi = 2}$.
6. Comme $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{\overrightarrow{0}\}$, $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$
   Alors, comme φ est un endomorphisme en dimension finie, φ n'est pas surjective.
7. $\mathscr{B}'$ est une famille de polynômes échelonnés en degré, alors elle est libre.
   Comme $\mathscr{B}'$ a trois vecteurs et comme $\dim\mathbb{R}_2[X] = 3$, on en déduit que $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$.

8. On écrit la matrice Q de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$: $Q = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

   On a la relation de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme : $M = Q^{-1}AQ$ où M est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ et A est la matrice de f dans $\mathscr{B}$.

   On calcule Q^{-1} : on résout le système $Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ -2y-6z & = & b \\ 6z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & a-c/6 \\ -2y & = & b+c \\ z & = & c/6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a+b/2+c/3 \\ y & = & -b/2-c/2 \\ z & = & c/6 \end{array}\right.$$

   Ce qui donne $Q^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Puis, on calcule $Q^{-1}A = \dfrac{1}{48}\begin{pmatrix} 48 & 24 & 16 \\ 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Et enfin,

   $Q^{-1}AQ = \dfrac{1}{48}\begin{pmatrix} 48 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ Soit $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}}$.

9. M est diagonale, alors, par propriété, pour $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix}$.

   Par ailleurs, on sait que $M = Q^{-1}AQ$ ce qui donne $A = QM\,Q^{-1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que M^n est la matrice de f^n dans la base $\mathscr{B}'$ et A^n est la matrice de f^n dans la base $\mathscr{B}$, alors on a la relation de changement de base : $\underline{A^n = QM^nQ^{-1}}$.

   On calcule $QM^n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2^n & 1/4^n \\ 0 & -2/2^n & -6/4^n \\ 0 & 0 & 6/4^n \end{pmatrix}$ $Q^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   et $\boxed{A^n = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3-3/2^n & 2-3/2^n+1/4^n \\ 0 & 6/2^n & 6/2^n-6/4^n \\ 0 & 0 & 6/4^n \end{pmatrix}}$. $A = M_{\mathscr{B}_0}(f) = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1. (a) On cherche $P_{S_k}(S_{k+1})$ pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, c'est la probabilité de franchir la salle «$k+1$» sachant qu'on a franchi la salle «k». La salle «$k+1$» contient $k+1$ portes équiprobables, alors $\boxed{\text{pour } k \in [\![1,N-1]\!], \quad P_{S_k}(S_{k+1}) = \dfrac{1}{k+1}}$.

   (b) On a $X(\Omega) = [\![2, N]\!]$ car on peut échouer à chacune des salles entre 2 et N et $(X = N)$ représente la réussite à toutes les salles.

   (c) On a pour $k \in [\![1,N-1]\!]$, $(X = k) = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{k-1} \cap S_k \cap \overline{S_{k+1}}$
   On utilise la formule des probabilités totales :
   $$P(X=k) = P\left(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{k-1} \cap S_k \cap \overline{S_{k+1}}\right)$$
   $$= \mathrm{P}(S_1) \times \mathrm{P}_{S_1}(S_2) \times \mathrm{P}_{S_1\cap S_2}(S_3) \times \ldots \times \mathrm{P}_{S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_{k-1}}(\overline{S_k}) \times \mathrm{P}_{S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_k}(\overline{S_{k+1}})$$
   $$P(X=k) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$$

Soit $\boxed{\forall k \in [\![1, N-1]\!], \quad P(X=k) = \dfrac{k}{(k+1)!}}$.

(d) L'événement $(X=N)$ correspond à la réussite du jeu, c'est à dire au passage de tous les niveaux.
On a $(X=N) = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{N-1} \cap S_N$
En utilisant la formule des probabilités totales, on trouve :
$P(X=k) = \mathrm{P}(S_1) \times \mathrm{P}_{S_1}(S_2) \times \mathrm{P}_{S_1 \cap S_2}(S_3) \times \ldots \times \mathrm{P}_{S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{N-1}}(S_N)$
$P(X=k) = 1 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} \times \cdots \times \dfrac{1}{N-1} \times \dfrac{1}{N}$ Donc $\boxed{P(X=N) = \dfrac{1}{N!}}$.

2. On calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} P(X=k) = \sum_{k=1}^{N-1} P(X=k) + P(X=N) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{1}{N!}$
On utilise $k = (k+1) - 1$ soit $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{k+1}{(k+1)!} - \dfrac{1}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$
Alors, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$ est une somme télescopique donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{N!}$
On trouve donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} P(X=k) = 1 - \frac{1}{N!} + \frac{1}{N!}$ Soit $\boxed{\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = 1}$

3. (a) L'événement S_3 correspond au passage des salles 1, 2 et 3 donc on a $S_3 = S_1 \cap S_2 \cap S_3$ ou encore $S_3 = \overline{(X=3)}$.
La probabilité de S_3 est donnée par la formule des probabilités composées :
$P(S_3) = P(S_1) \times P_{S_1}(S_2) \times P_{S_1 \cap S_2}(S_3) = 1 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ $\boxed{P(S_3) = \dfrac{1}{6}}$

(b) On remarque que S_3 est exactement l'événement «on atteint ou on dépasse la salle 4».
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de fois où on atteint la salle 4. On répète 4 fois la même expérience «jouer au jeu», de manière indépendante, avec deux issues possibles : «atteindre la salle 4» ou «ne pas atteindre la salle 4» et Y compte le nombre de succès alors <u>Y suit une loi binomiale de paramètres</u> $n=4$ et $p = \dfrac{1}{6}$.
On a donc $P(Y \geqslant 3) = P(Y=3) + P(Y=4) = \dbinom{4}{3} \dfrac{1}{6^3} \times \dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{6^4} = \dfrac{21}{6^4} = \dfrac{7}{432}$

4. On utilise le théorème de transfert : $E(f(X)) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} f(k) P(X=k)$:

$$E(X+1) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k+1) P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} (k+1) P(X=k) = \sum_{k=1}^{N-1} (k+1) \frac{k}{(k+1)!} + \frac{N+1}{N!}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{(N-1)!} + \frac{1}{N!} = \sum_{j=0}^{N-2} \frac{1}{j!} + \frac{1}{(N-1)!} + \frac{1}{N!} \quad \text{soit} \quad \boxed{E(X+1) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} = U_N}$$

Par linéarité, $E(X) = E(X+1) - E(1) = E(X+1) - 1$.
Ce qui donne : $\boxed{E(X) = U_N - 1}$.

5. En utilisant le théorème de transfert,

$$E((X+1)(X-1)) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k+1)(k-1) P(X=k) = \sum_{k=1}^{N-1} (k+1)(k-1) \frac{k}{(k+1)!} + \frac{(N-1)(N+1)}{N!} =$$

$$0 + 0 + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{(N-1)N}{N!} + \frac{(N-1)}{N!} = \sum_{k=0}^{N-3} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(N-2)!} + \frac{1}{(N-1)!}$$

Finalement, $\boxed{E\left((X+1)(X-1)\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} = U_{N-1}}$.

On a $E\left((X+1)(X-1)\right) = E(X^2-1) = E(X^2)-1$ par linéarité et par formule de l'espérance pour une VA constante.

Puis, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ par la formule de Koenig-Huyghens, d'où $\boxed{V(X) = U_{N-1}+1-(U_N-1)^2}$.

Exercice 4

1. On a $\boxed{P(X=1) = \frac{1}{n}}$ car il y a dans l'urne 1 boule verte et n boules en tout.

   $(X=2) = R_1 \cap V_2$ d'où $P(X=2) = P(R_1) \times P_{R_1}(V_2)$ avec $P(R_1) = \frac{n-1}{n}$ et $P_{R_1}(V_2) = \frac{1}{n-1}$ car après avoir tiré une boule rouge, l'urne contient une boule verte et $n-1$ boules en tout.

   On a donc $\boxed{P(X=2) = \frac{1}{n}}$.

   $(X=3) = R_1 \cap R_2 \cap V_3$ et en utilisant la formule des probabilités conditionnelles : $P(X=3) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R_1 \cap R_2}(V_3)$

   On trouve $P(X=3) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2}$ qui donne $\boxed{P(X=3) = \frac{1}{n}}$.

2. On a $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Aucun des rangs d'apparition de la boule verte n'est privilégié : elle a la même probabilité d'être tirée à chaque rang, donc $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{n}$.

   Si on veut le prouver formellement, pour $k \in [\![1,n]\!]$,
   $(X=k) = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_{k-1} \cap V_k$ et en utilisant la formule des probabilités conditionnelles :
   $P(X=k) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times \ldots \times P_{R_1 \cap R_2 \ldots \cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times P_{R_1 \cap R_2 \cap .. \cap R_{k-1}}(V_k)$

   On a $P_{R_1 \cap R_2 \ldots \cap R_j}(R_{j+1}) = \frac{n-j-1}{n-j}$ car après j tirages d'une boule rouge, l'urne contient $n-j$ boules dont $n-j-1$ rouges et 1 verte.

   On trouve $P(X=k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \frac{N-k}{n-(k-1)} \times \frac{1}{n-k}$ et après simplification, comme le produit est télescopique, $P(X=k) = \frac{1}{n}$.

   $\boxed{\text{La variable aléatoire } X \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1,n]\!]}$.

3. On sait que l'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ est $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$.

   Calcul : $\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \frac{n(n+1)}{2} \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$

4. Si on choisit l'urne U_A, on est dans la configuration de la première partie, alors la variable aléatoire suit la même loi que la variable X : $P_{U_A}(Y=j) = P(X=j)$ soit $\boxed{P_{U_A}(Y=j) = \frac{1}{n}}$.

5. On a $P_{U_B}(Y=j) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$ car si on choisit l'urne U_B, on tirera toutes les boules donc Y prendra la valeur n et donc $\boxed{P_{U_B}(Y=n) = 1}$.

6. Les événements U_A et U_B forment un système complet d'événements car $U_A \cap U_B = \emptyset$ et $U_A \cup U_B = \Omega$.
   Alors, on peut utiliser la formule des probabilités totales avec $P(U_A) = P(U_B) = \frac{1}{2}$,

Pour $j \in [\![1, n-1]\!]$, $\quad P(Y=j) = P(U_A)P_{U_A}(Y=j) + P(U_B)P_{U_B}(Y=j) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2} \times 0 = \dfrac{1}{2n}$.

Et $P(Y=n) = P(U_A)P_{U_A}(Y=n) + P(U_B)P_{U_B}(Y=n) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$.

On a donc $\boxed{\text{pour } j \in [\![1, n-1]\!], \quad P(Y=j) = \dfrac{1}{2n} \quad \text{et} \quad P(Y=n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}}$.

7. $E(Y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} jP(Y=j) = \sum_{j=1}^{n-1} jP(Y=j) + nP(Y=n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{2n} + n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$

$E(Y) = \dfrac{n(n-1)}{2}\dfrac{1}{2n} + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{n-1}{4} + \dfrac{2n}{4} + \dfrac{2}{4}$ d'où $\boxed{E(Y) = \dfrac{3n+1}{4}}$.

D'après le théorème de transfert, $\quad E(Y^2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} j^2 P(Y=j) + n^2 P(Y=n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j^2}{2n} + n^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$

$E(Y^2) = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{12n} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} = \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{12} + \dfrac{6n^2}{12} + \dfrac{6n}{12} = \dfrac{8n^2 + 3n + 1}{12}$

Puis, d'après la formule de Koenig-Huyghens, $\quad V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \dfrac{8n^2 + 3n + 1}{12} - \dfrac{(3n+1)^2}{16}$

Ce qui donne : $\quad V(Y) = \dfrac{32n^2 + 12n + 4}{48} - \dfrac{3(9n^2 + 6n + 1)}{48}$ $\quad$ On trouve $\boxed{V(Y) = \dfrac{5n^2 - 6n + 1}{48}}$

Exercice 5

1. (a) On a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

   On pose $x = \dfrac{1}{n}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x = 0$ et $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$

   On a donc $v_n = -1 + 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ soit $v_n = -\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ce qui prouve que $\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}}$.

   (b) La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors $\sum \frac{1}{2n}$ est également divergente.

   On a $-v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ donc $(-v_n)$ est une suite positive à partir d'un certain rang.

   Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum -v_n$ diverge donc $\boxed{\sum v_n \text{ diverge}}$.

   Comme $\sum v_n$ est une série à termes négatifs, d'après le théorème de la limite monotone, $\sum v_n$ tend vers $-\infty$.

   On a donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty}$.

2. (a) On a pour tout entier naturel non nul n, $M_n > 0$. On calcule

   $\dfrac{M_{n+1}}{M_n} = \dfrac{n!}{(n+1)!}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\dfrac{e^n}{e^{n+1}} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

   Alors, $\ln\left(\dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right) = \ln(e^{-1}) + n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

   Soit $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \ln\left(\dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right)}$.

   (b) On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = -\infty$ d'après la question précédente.

Mais, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(M_{k+1}) - \ln(M_k)$ est une somme télescopique.

On trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \ln(M_{n+1}) - \ln(M_1)$ soit $\displaystyle\ln(M_{n+1}) = \ln(M_1) + \sum_{k=1}^{n} v_k = \ln(M_1) + V_n$.

En prenant l'exponentielle de chaque membre : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $M_{n+1} = M_1 e^{V_n}$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$, alors par composition de limites, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n = 0}$.

On en déduit que $\boxed{n^n e^{-n} \underset{+\infty}{=} o(n!)}$.

3. (a) La fonction $x \mapsto x^n$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors par produit et combinaison linéaire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) On a $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{n!}e^{-x} - \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$ qui se factorise en $\boxed{f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{n!}(n-x)e^{-x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+}$.

(c) On a pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) \geqslant 0 \iff 0 \leqslant x \leqslant n$.

On a $f(0) = 0$, $f(n) = \dfrac{n^n}{n!}e^{-n} = M_n$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ car par croissance comparée, pour tout entier n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

4. (a) La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors par théorème, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f_n qui s'annule en 0.

On en déduit que $\boxed{F_n \text{ est définie, dérivable et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

De plus, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F_n'(x) = f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}}$.

On a $F_n' = f_n$ et on a montré précédemment que sur $[0, +\infty[$, on a $f_n \geqslant 0$,

+alors $\boxed{F_n \text{ est croissante sur } [0, +\infty[}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$ qui donne en dérivant :

$$f_{n+1}'(x) = \frac{x^n}{(n)!}e^{-x} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}'(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$ ce qui prouve $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_{n+1}' = f_n - f_{n+1}}$.

(c) Les fonctions f_{n+1}', f_n et f_{n+1} sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+$, alors pour $x > 0$, on peut les intégrer sur $[0, x]$ ce qui donne :

$$\int_0^x f_{n+1}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (f_n(t) - f_{n+1}(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme f_{n+1} est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on a, par théorème, $\displaystyle\int_0^x f_{n+1}'(t)\,\mathrm{d}t = f_{n+1}(x) - f_{n+1}(0)$

Et par définition de F_n et F_{n+1}, on a la relation pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(x) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$.

La relation précédente est encore vraie pour $x = 0$, alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_{n+1} = F_n - F_{n+1}}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\quad f_{k+1} = F_k - F_{k+1}$.

On somme ces relations : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1}(F_k - F_{k+1})$.

La somme est télescopique ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1} = F_1 - F_n$ soit $\underline{F_n = F_1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f_k}$.

On calcule pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad F_1(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x te^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-(1+t)e^{-t}\right]_0^x = 1 - (1+x)e^{-x}$.

Alors, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad F_n(x) = 1 - (1+x)e^{-x} - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}e^{-x} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}e^{-x}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F_n(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}.$$

(e) On a $F_n' = f_n$ dont on connaît le signe et $F_n(0) = 0$. Par croissance comparée, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^k e^{-x} = 0$ pour tout entier k, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = 1$. On obtient le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f_n(x)$	0 +	
$F_n(x)$	0 $\nearrow$	1

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule $u_{n+1} - u_n = F_{n+1}(n+1) - F_n(n) = \displaystyle\int_0^{n+1} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$

$u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^n f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n (f_{n+1}(t) - f_n(t))\,\mathrm{d}t + \int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$

Or $f_{n+1}' = f_n - f_{n+1}$, d'où $u_{n+1} - u_n = -\displaystyle\int_0^n f_{n+1}'(t)\,\mathrm{d}t + \int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = -[f_{n+1}(t)]_0^n + \int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$

$u_{n+1} - u_n = -f_{n+1}(n) + f_{n+1}(0) + \displaystyle\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$. $\quad$ Mais $f_{n+1}(0) = 0$.

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - f_{n+1}(n)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_{n+1} est croissante sur $[0, n+1]$, alors, pour $t \in [n, n+1]$, on a $f(t) \geqslant f(n)$.
L'intégrale est croissante et $n \leqslant n+1$ et les fonctions f_{n+1} et $t \mapsto f_{n+1}(n)$ sont continues sur $[n, n+1]$, alors

$\displaystyle\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} f_{n+1}(n)\,\mathrm{d}t$ $\quad$ Ce qui donne $\quad \displaystyle\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f_{n+1}(n)$

soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. $\quad$ On a $u_n = F_n(n)$ et on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant F_n(x) \leqslant 1$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

La suite (u_n) est croissante et majorée, alors d'après le théorème de la limite monotone,

$\boxed{(u_n) \text{ converge vers une limite réelle } L}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$, par passage à la limite, $\boxed{0 \leqslant L \leqslant 1}$.