

# Chapitre 16 - Analyse asymptotique

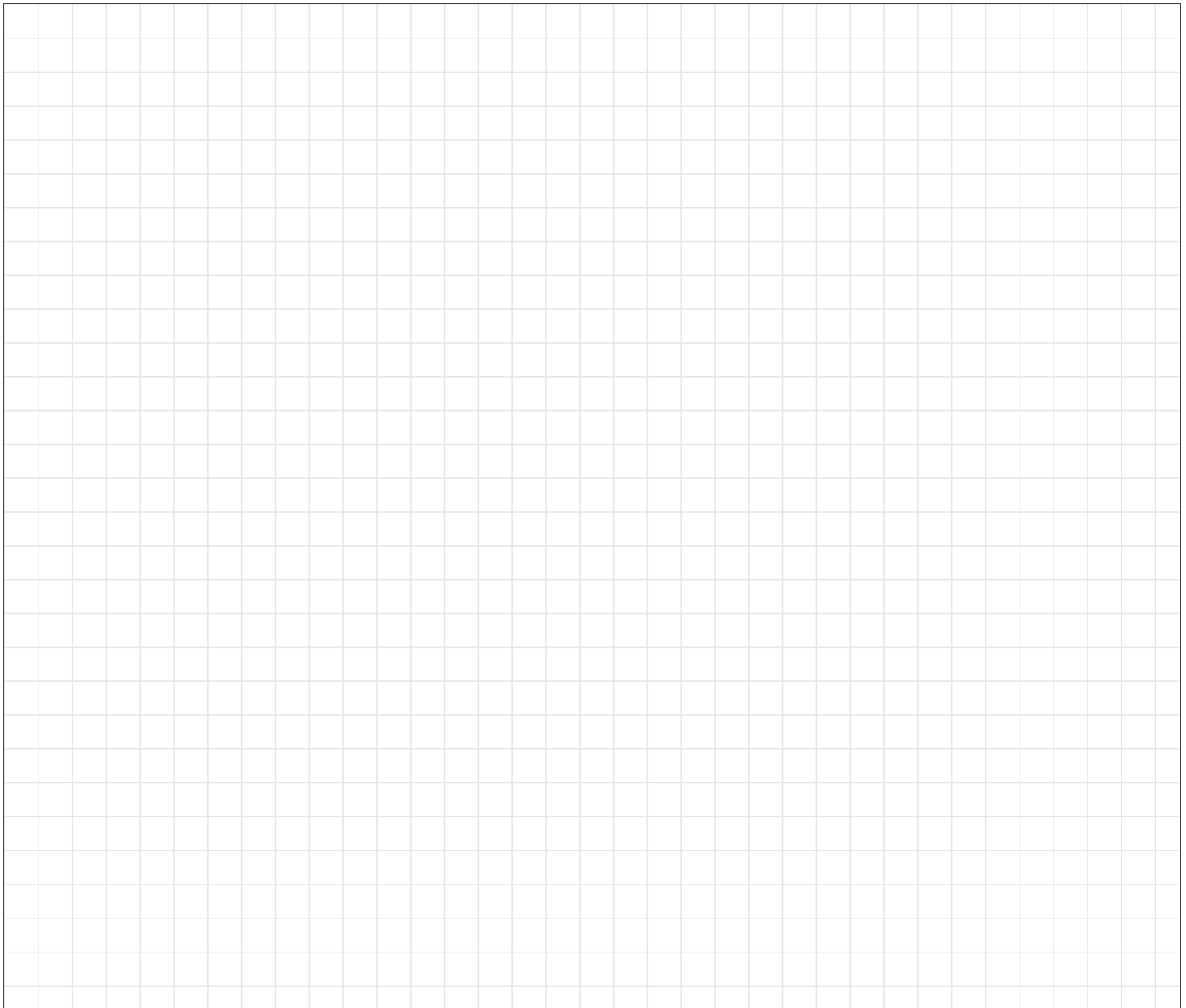
## 1 Comparaison des suites

### 1.1 Relations de comparaison

Uniquement pour les suites réelles : on se place dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

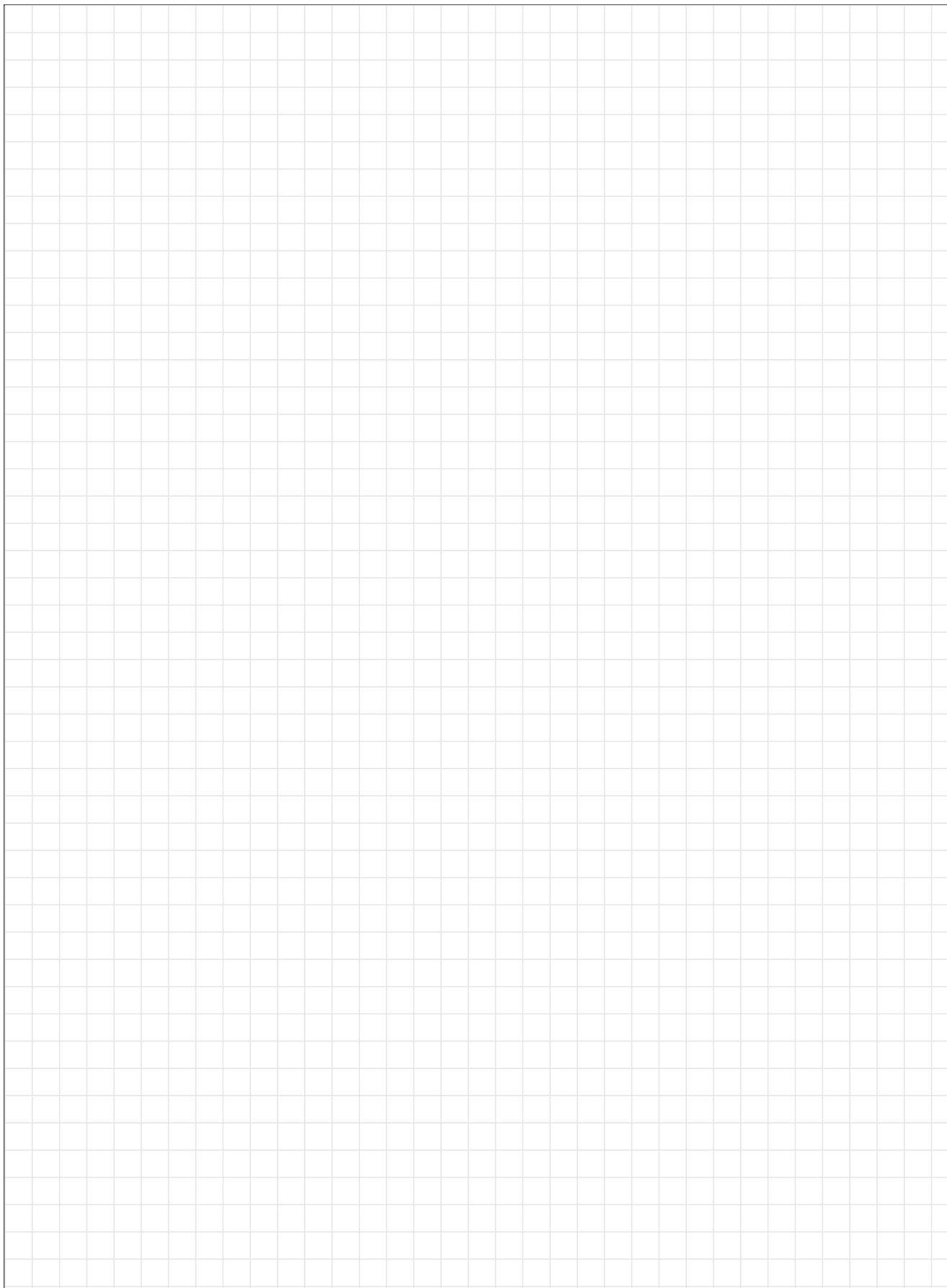
**Définition 1.1.** Soit  $(v_n)$  une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang  $N_0$  et  $(u_n)$  une suite de réels. On dit que :

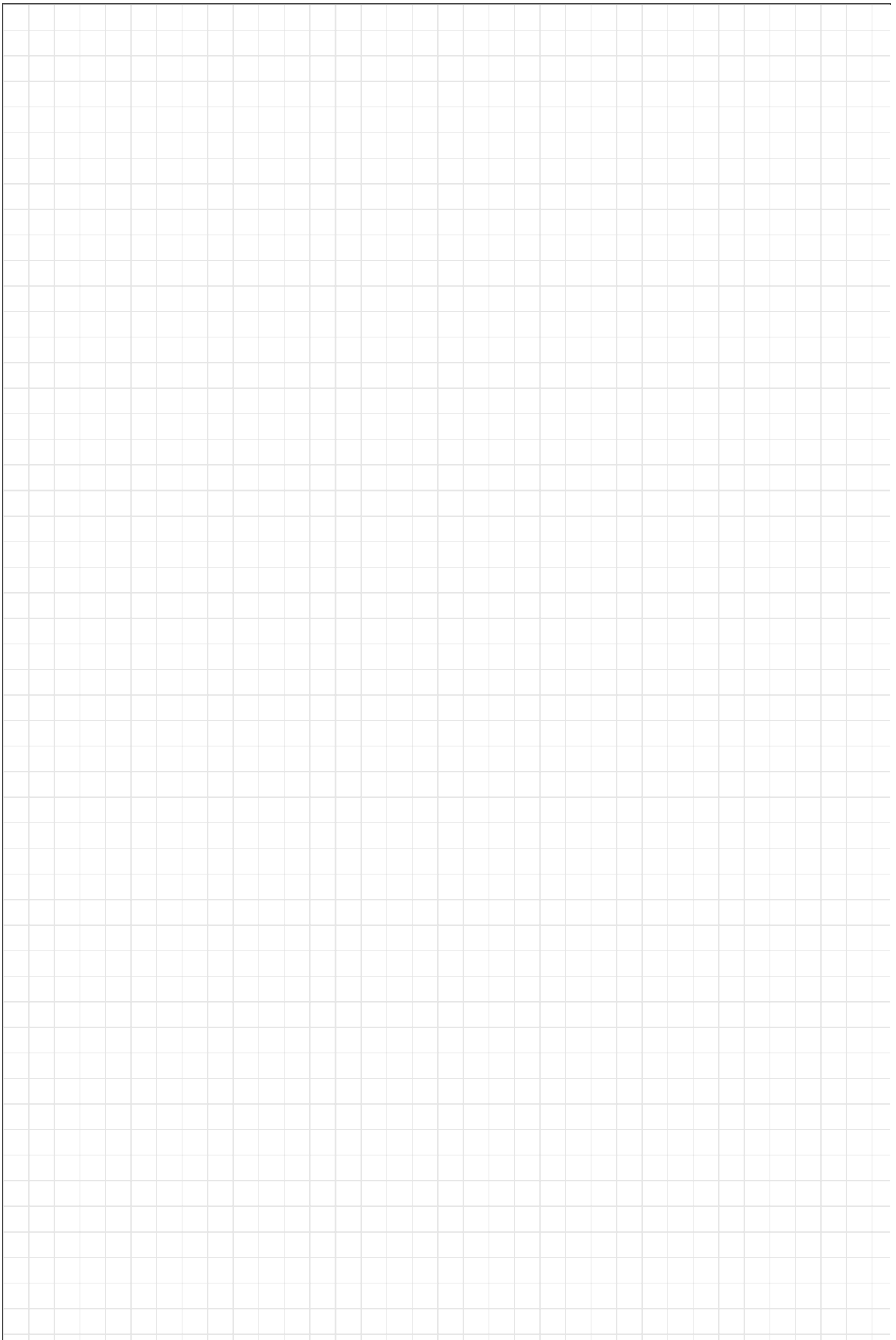
- $(u_n)$  est dominée par  $(v_n)$  si à partir du rang  $N_0$   $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est bornée. On note alors  $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ .
- $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$  si  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers 0. On note alors  $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ .
- $(u_n)$  est équivalente à  $(v_n)$  si  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers 1. On note alors  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ .



**Théorème 1.1.** Soit  $(v_n)$  une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang  $N_0$  et  $(u_n)$  une suite de réels.

$(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$  si et seulement si il existe une suite  $(\varepsilon_n)$  qui tend vers 0 telle que  $u_n = v_n \cdot \varepsilon_n$ .





## 1.2 Propriétés des relations de comparaison

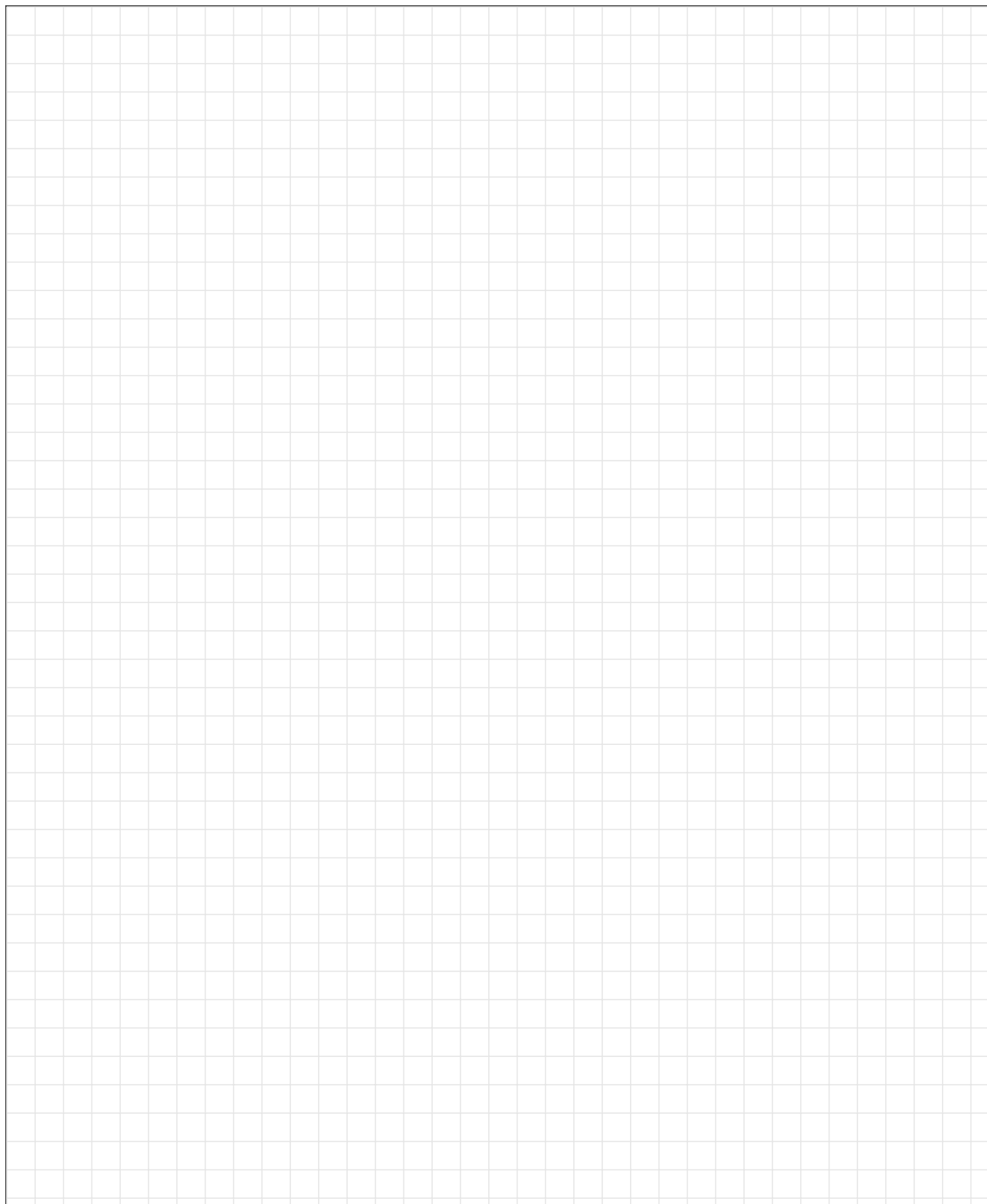
**Proposition 1.2.** Soit  $(u_n), (v_n), (w_n)$  des suites réelles.

Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  alors  $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ .

Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et  $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$  alors  $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ .

Si  $u_n$  et  $v_n$  ne s'annulent pas, alors  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$ .

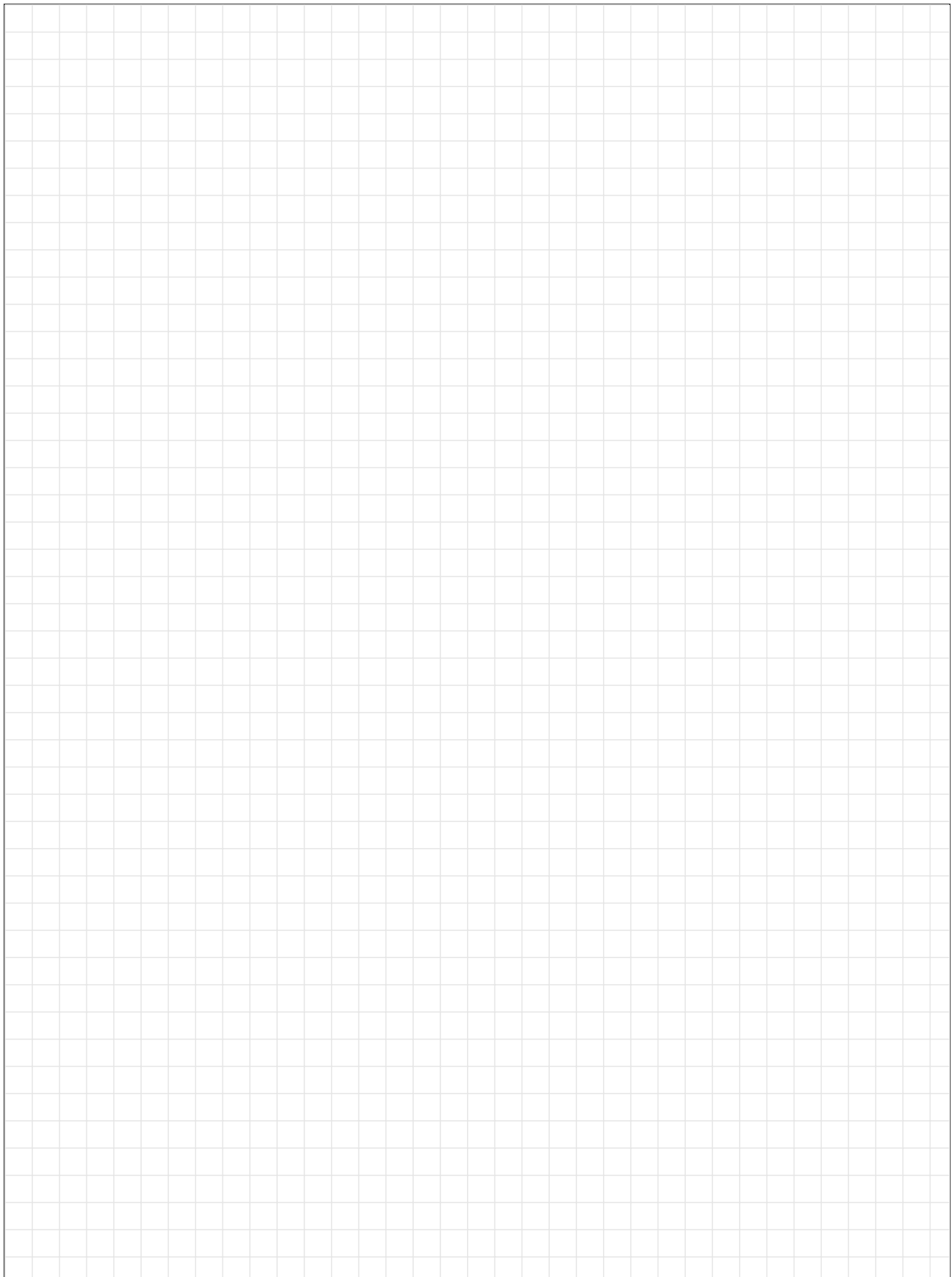
Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  alors  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = O(u_n)$ .

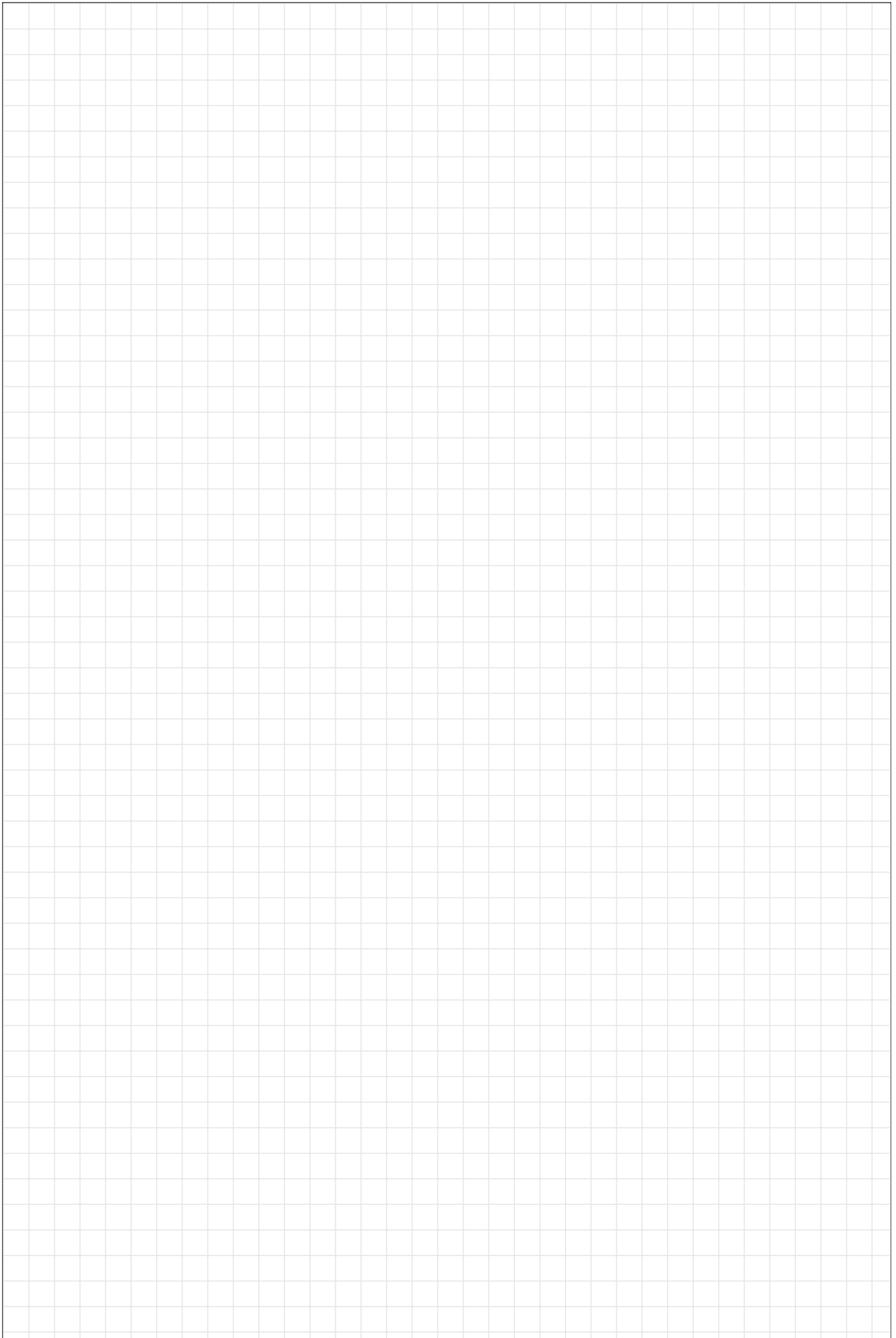


### 1.3 Suites de référence

**Proposition 1.3.** *Pour tous  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ , on a*

$$\ln^\beta(n) \underset{+\infty}{=} o(n^\alpha) \text{ et } n^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma n}) \quad \text{et pour } q > 1, \text{ on a } n^\alpha = o(q^n).$$





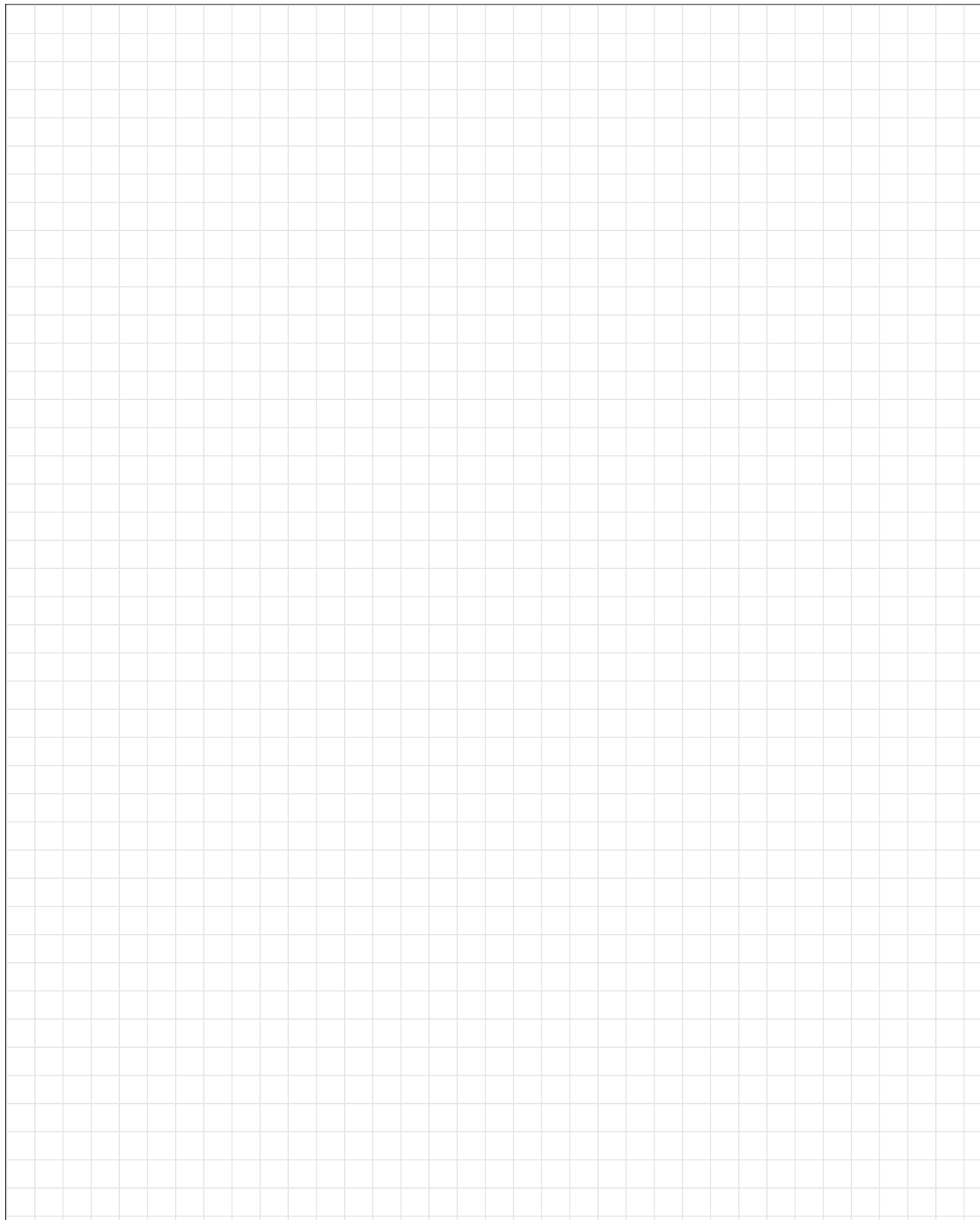
## 1.4 Opérations sur les équivalents

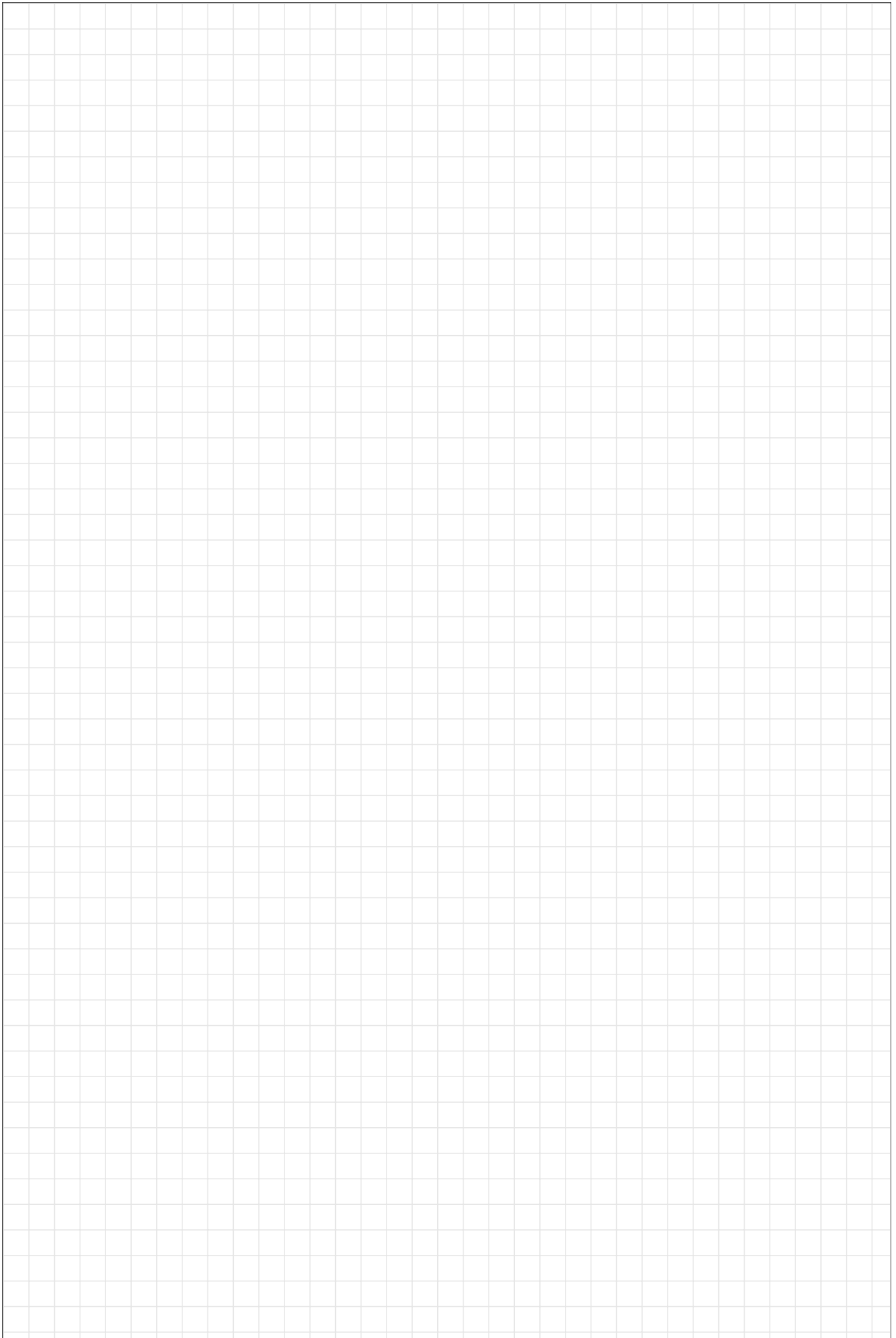
**Proposition 1.4.** Soit  $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$  des suites réelles.

Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et  $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$  alors  $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n x_n$ .

Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et  $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$  et si  $w_n$  et  $x_n$  ne s'annulent pas alors  $\frac{u_n}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{v_n}{x_n}$ .

Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et si  $p$  est un entier  $p \in \mathbb{N}$  alors  $u_n^p \underset{+\infty}{\sim} v_n^p$ .







## 1.5 Relations de comparaison et limites

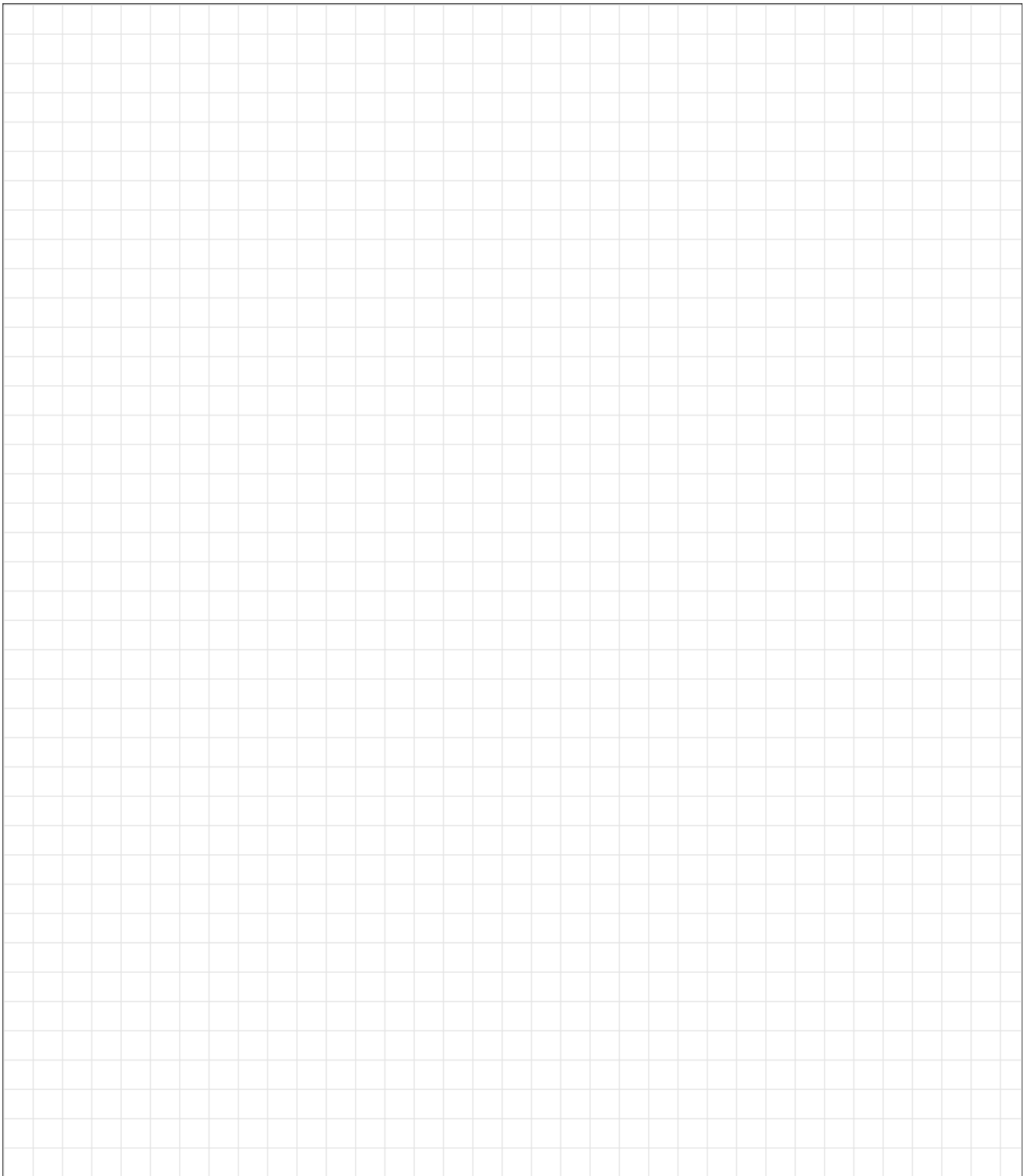
**Théorème 1.5.** Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ .

Alors, pour tout  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , on a  $u_n \xrightarrow{+\infty} \ell \iff v_n \xrightarrow{+\infty} \ell$

En particulier,  $(u_n)$  est convergente si et seulement si  $(v_n)$  est convergente.

**Proposition 1.6.** Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles.

- Si  $u_n = o(v_n)$  et  $(v_n)$  converge, alors  $(u_n)$  converge vers 0.
- Si  $u_n = o(v_n)$  et  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors  $(v_n)$  diverge.
- Si  $u_n \sim v_n$ , alors à partir d'un certain rang,  $u_n$  et  $v_n$  sont de même signe.



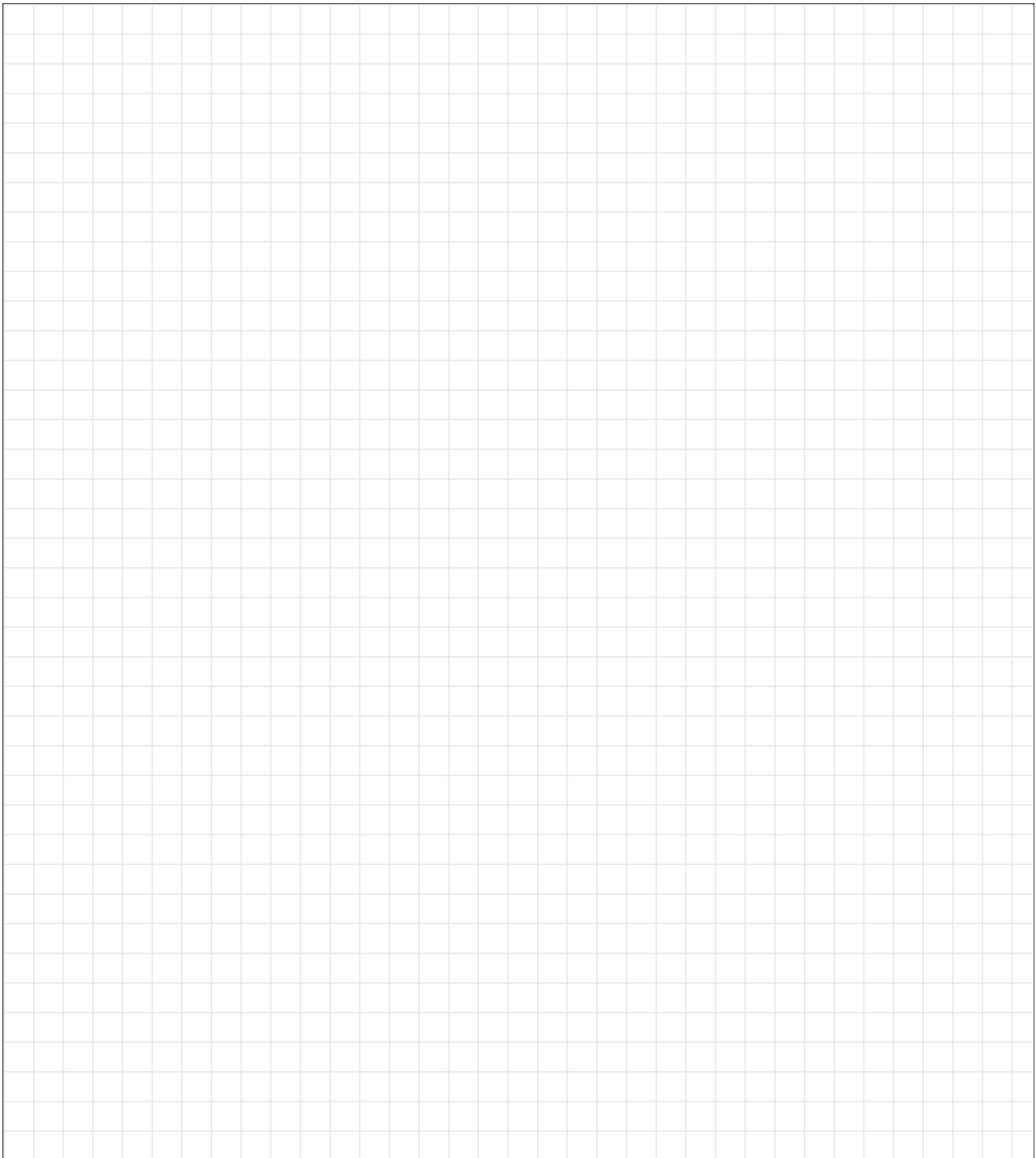
## 2 Relations de comparaison appliquées aux fonctions

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  élément ou extrémité de  $I$ .

### 2.1 Fonction dominée par une autre

**Définition 2.1.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur  $I \setminus \{a\}$ .

On dit que  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  si la fonction  $\frac{f}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$ . On note  $f \underset{a}{=} O(g)$

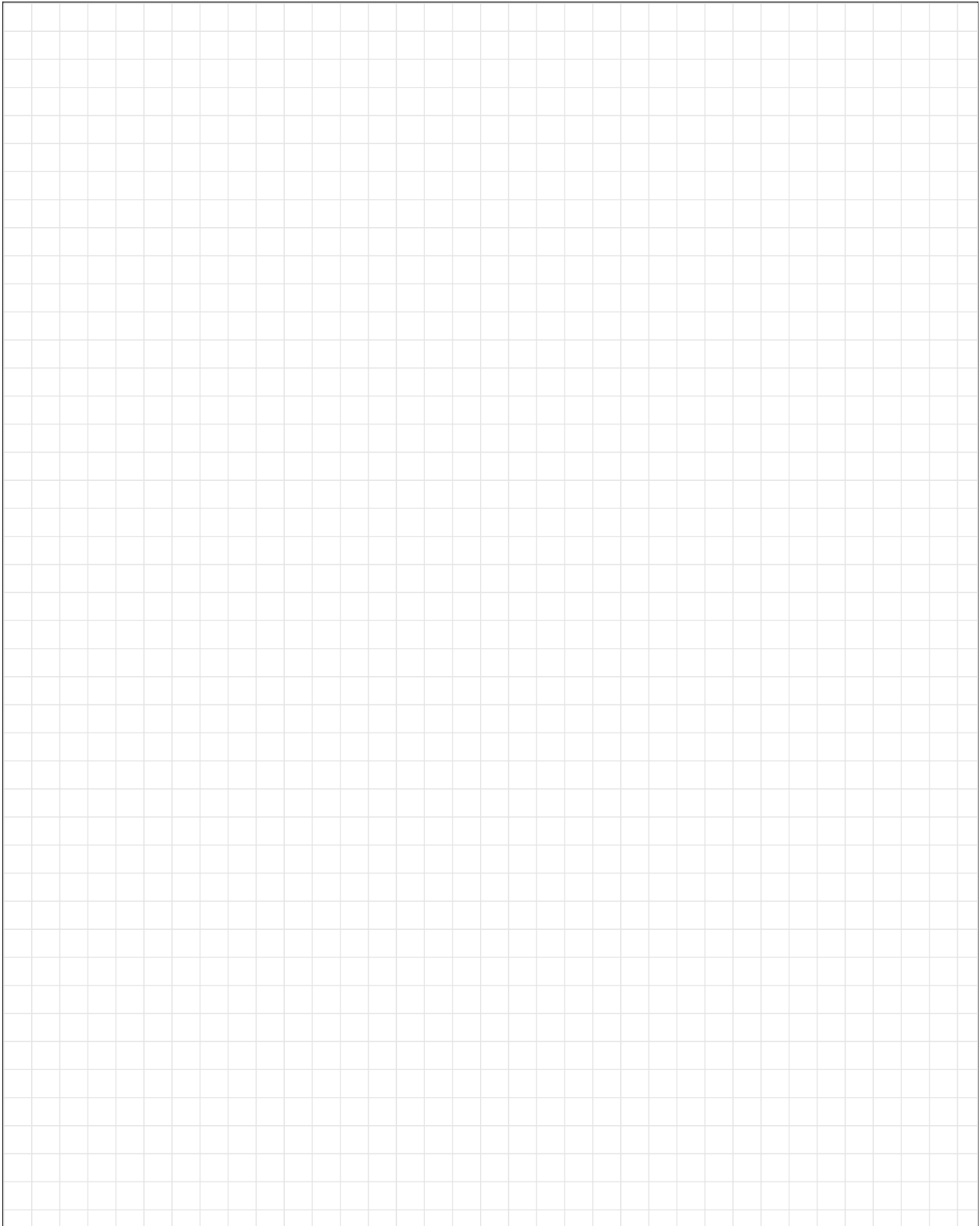


## 2.2 Fonction négligeable devant une autre

**Définition 2.2.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur  $I \setminus \{a\}$ .

On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  si la fonction  $\frac{f}{g}$  tend vers 0 en  $a$ .

On note  $f = o(g)$  ou bien  $f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$



## 2.3 Fonctions équivalentes

**Définition 2.3.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur  $I \setminus \{a\}$ .

On dit que  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $a$  si la fonction  $\frac{f}{g}$  tend vers 1 en  $a$ . On note  $f \sim_a g$

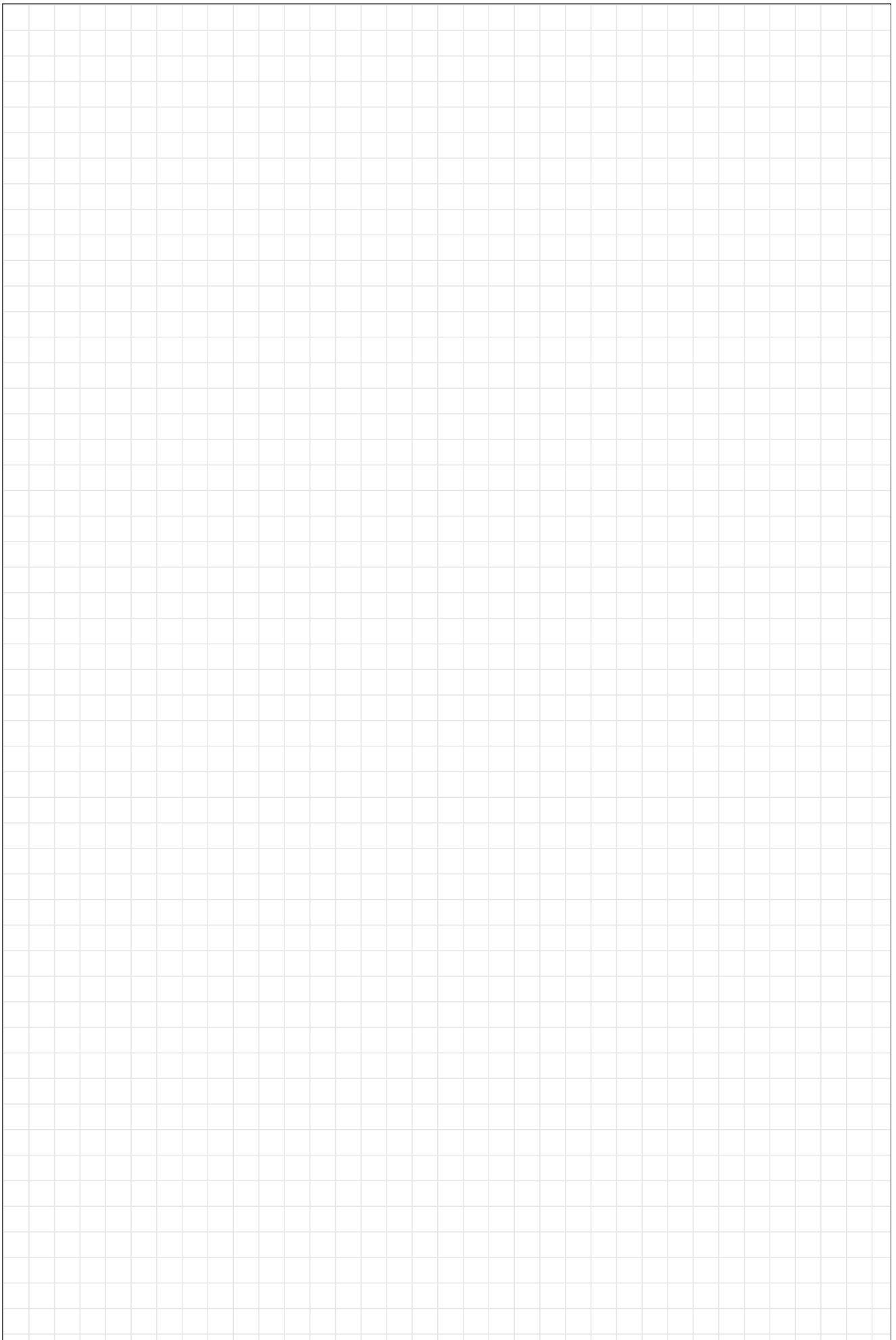
**Proposition 2.1.** Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a \in \mathbb{R}$ .

Si  $f'(a) \neq 0$ , alors  $f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$ .

**Proposition 2.2.** Soit  $f$  et  $g$  définies sur  $I$ , ne s'annulant pas sur  $I \setminus \{a\}$ . On a :

$$f \sim_a g \iff f - g = o_a(g).$$

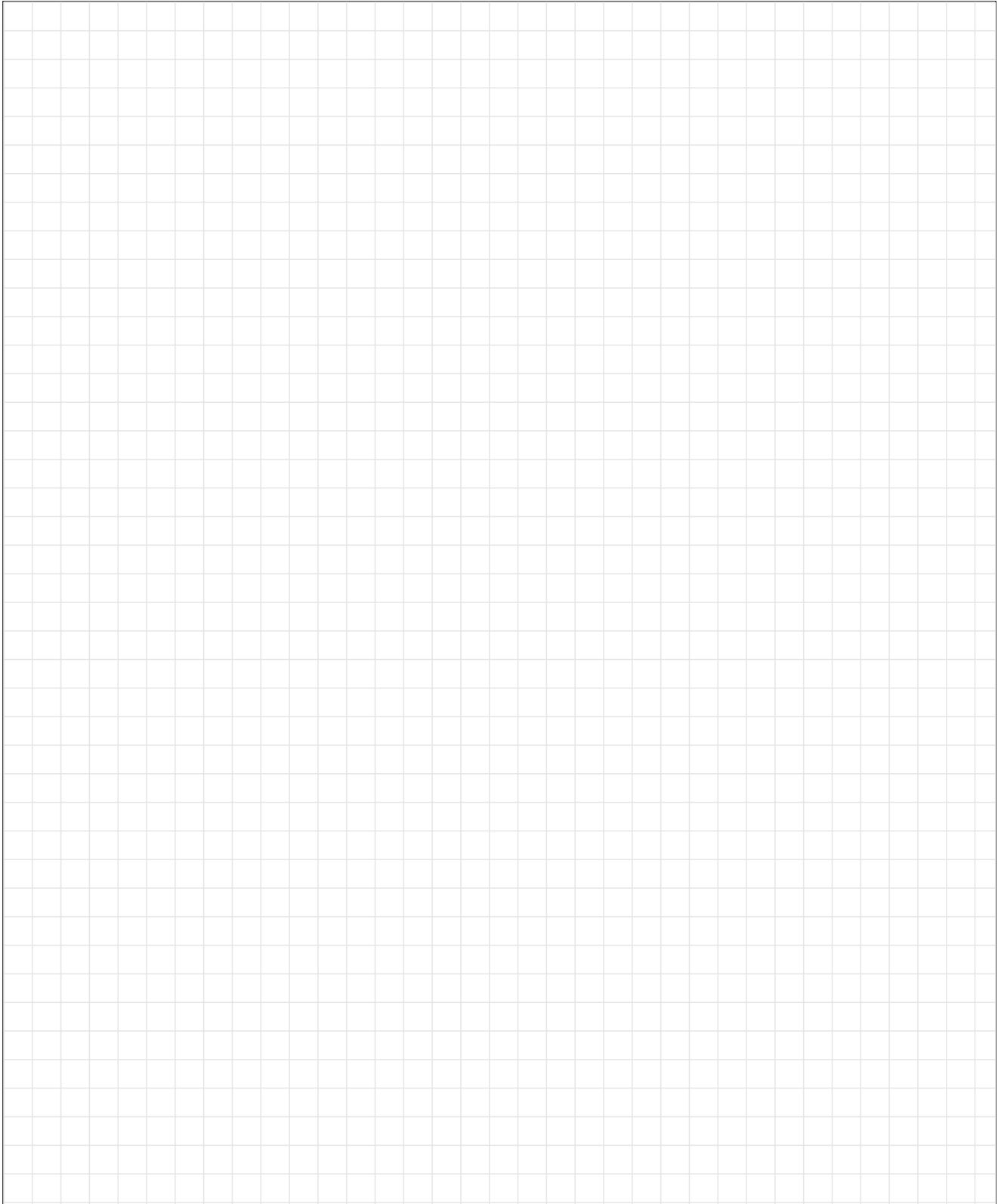


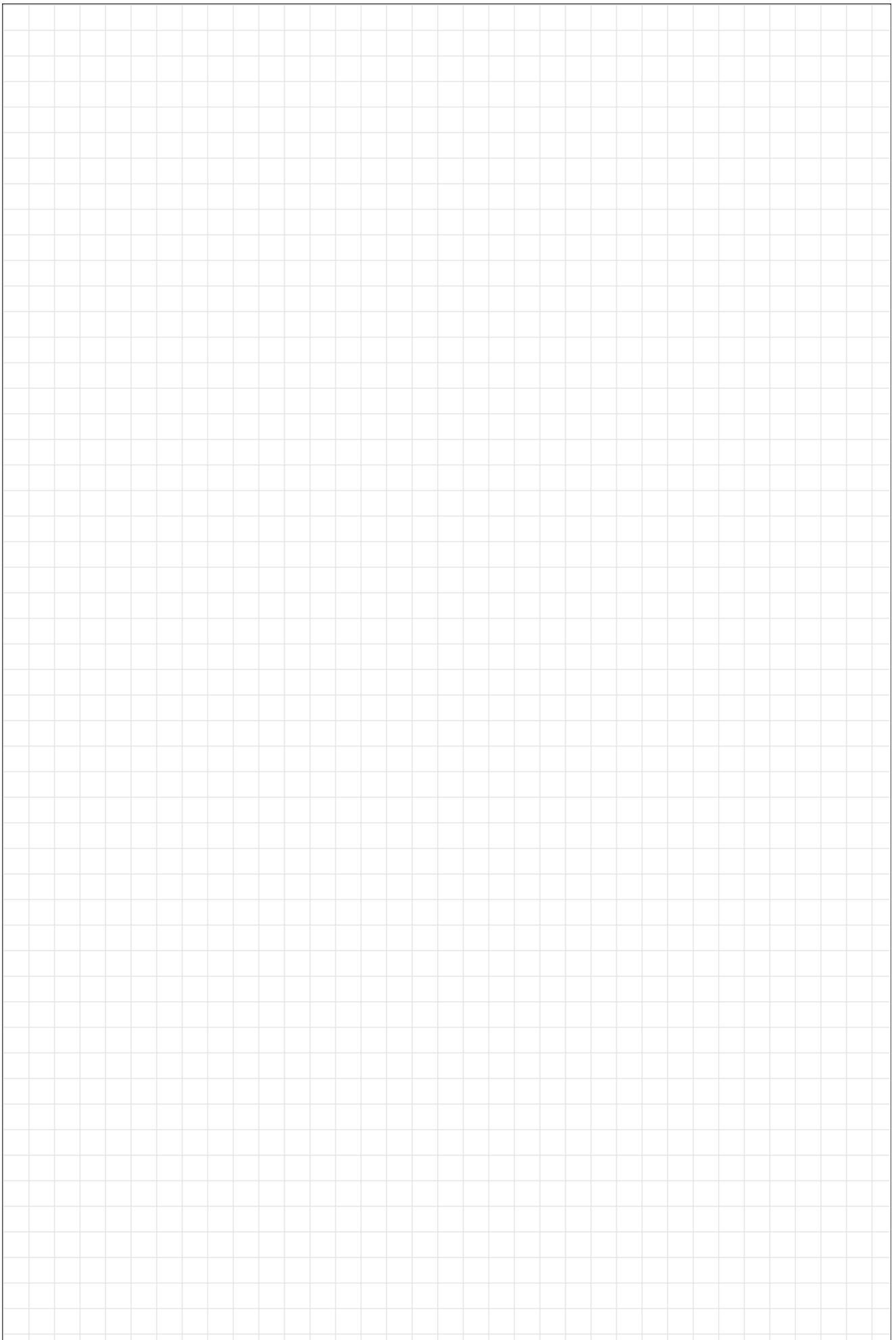


## 2.4 Opérations sur les équivalents

**Proposition 2.3.** Si  $f, g, h, f_1, g_1, f_2, g_2$  sont des fonctions définies au voisinage de  $a$ , on a :

- $f \underset{a}{\sim} g \implies g \underset{a}{\sim} f$
- $f \underset{a}{\sim} g$  et  $g \underset{a}{\sim} h \implies f \underset{a}{\sim} h$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$  et  $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \implies f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$  et  $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \implies \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$





## 2.5 Utilisation des équivalents

**Proposition 2.4.** *Étant donnés deux fonctions  $f$  et  $g$  équivalentes en  $a$  :  $f \sim_a g$ .*

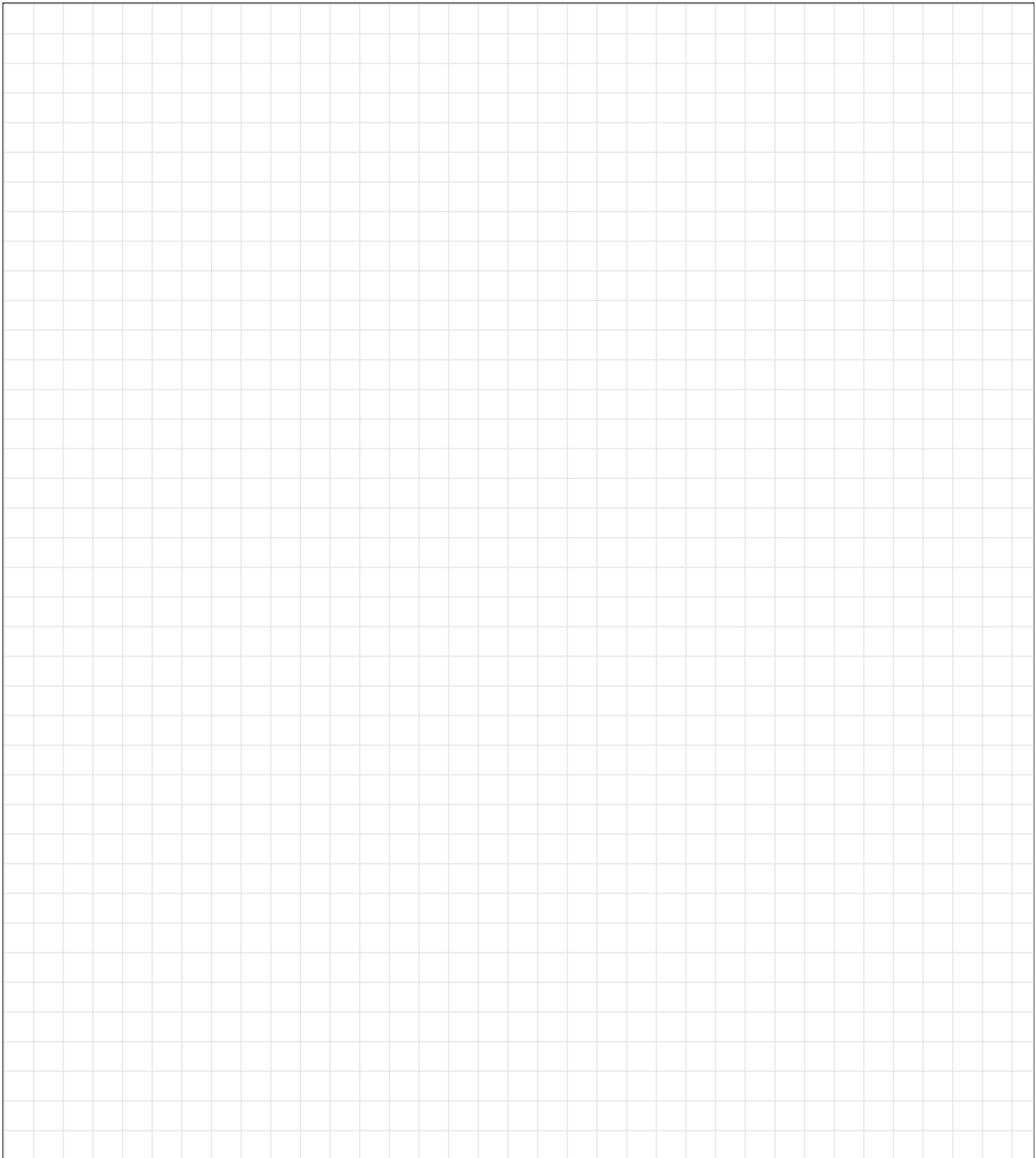
*Si  $g$  a une limite finie ou infinie en  $a$  alors  $f$  aussi et  $\lim_a f = \lim_a g$ .*

**Proposition 2.5.** *Étant donnés deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $I$  et équivalentes en  $a$  :  $f \sim_a g$ .*

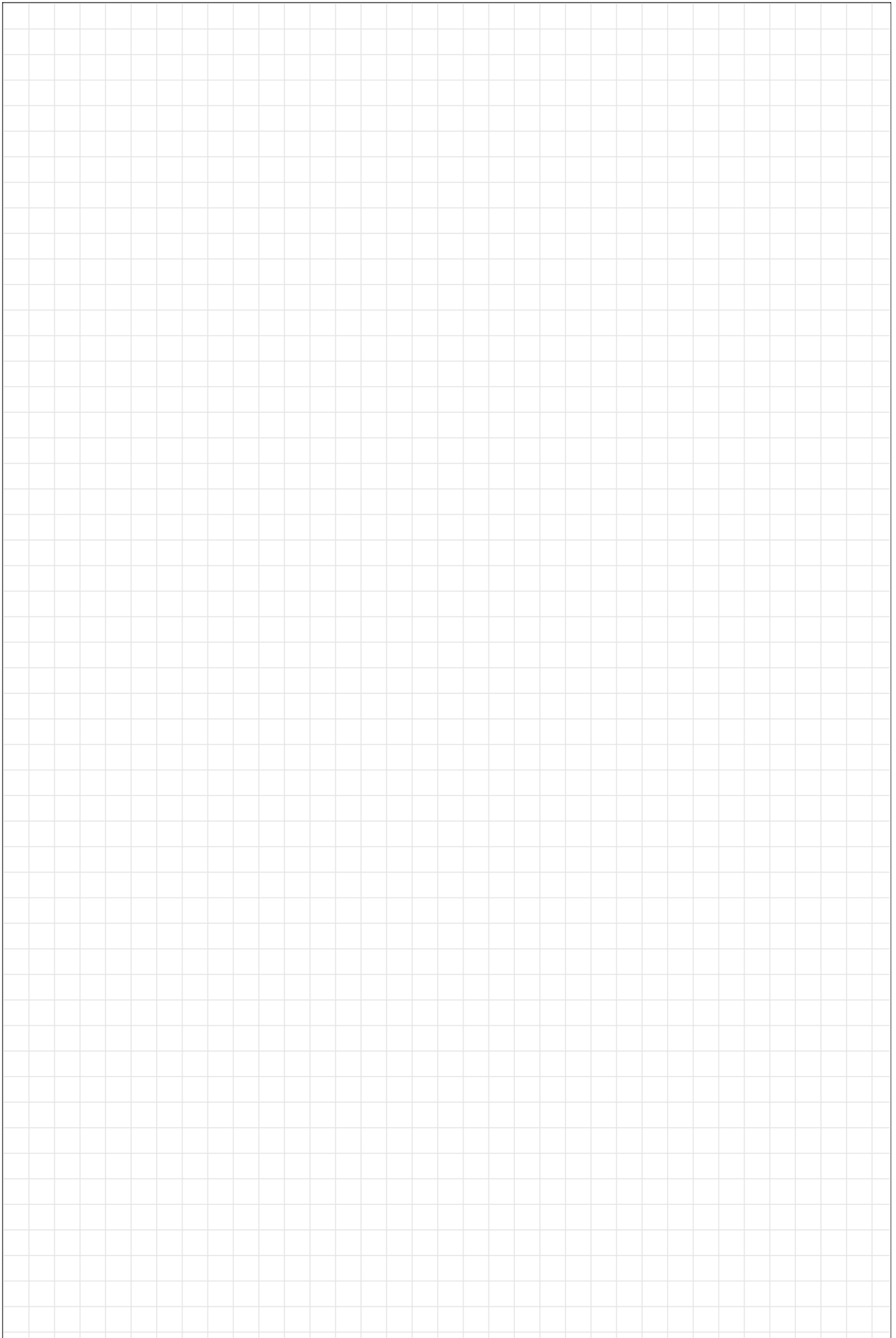
*Si  $g$  est positive sur  $I$  alors  $f$  est positive au voisinage de  $a$ .*

*Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ .*

*Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I \setminus \{a\}$ , alors la restriction de  $f$  à  $I \setminus \{a\}$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ .*







### 3 Développements limités

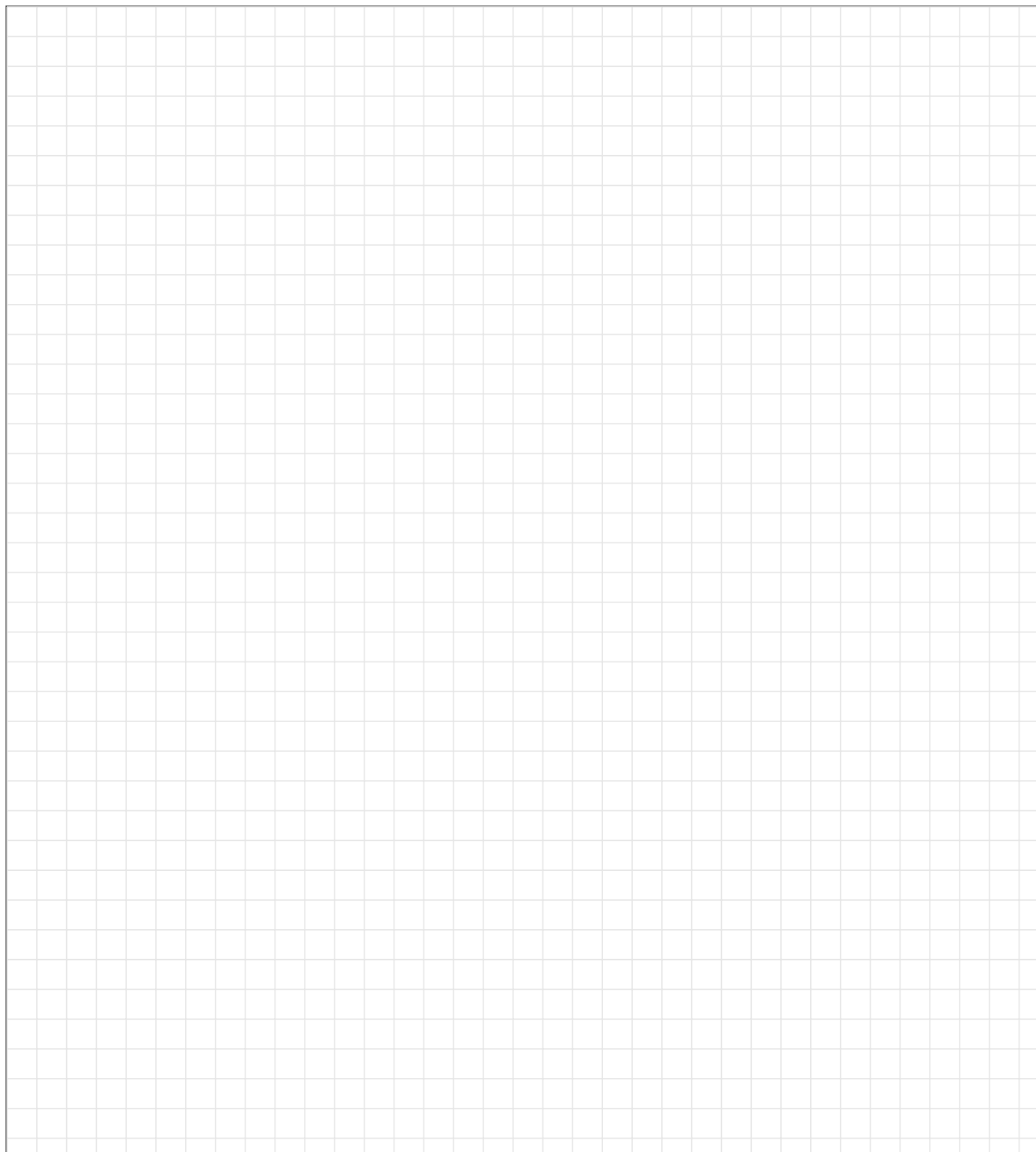
#### 3.1 Définition

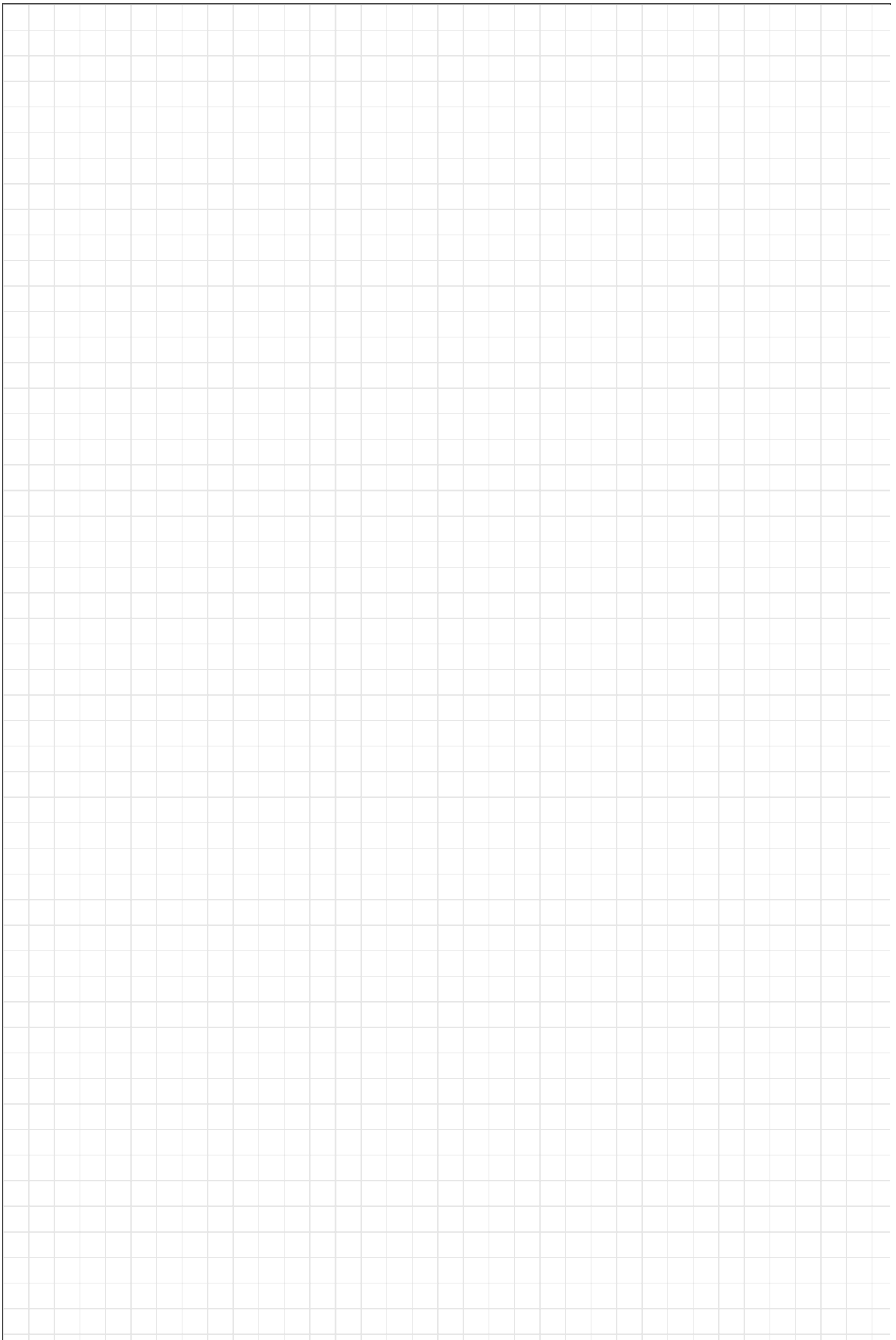
**Définition 3.1.** On dit qu'une fonction  $f$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  admet un développement limité d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  au voisinage de  $a \in \mathbb{R}$  élément ou extrémité de  $I$  si il existe un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que  $f(a+h) = P(h) + o(h^n)$  au voisinage de 0 (pour  $h$ ).

C'est à dire 
$$f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_{n-1}h^{n-1} + a_nh^n + o(h^n)$$

ou 
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

On le note  $DL_n(a)$  de  $f$ .

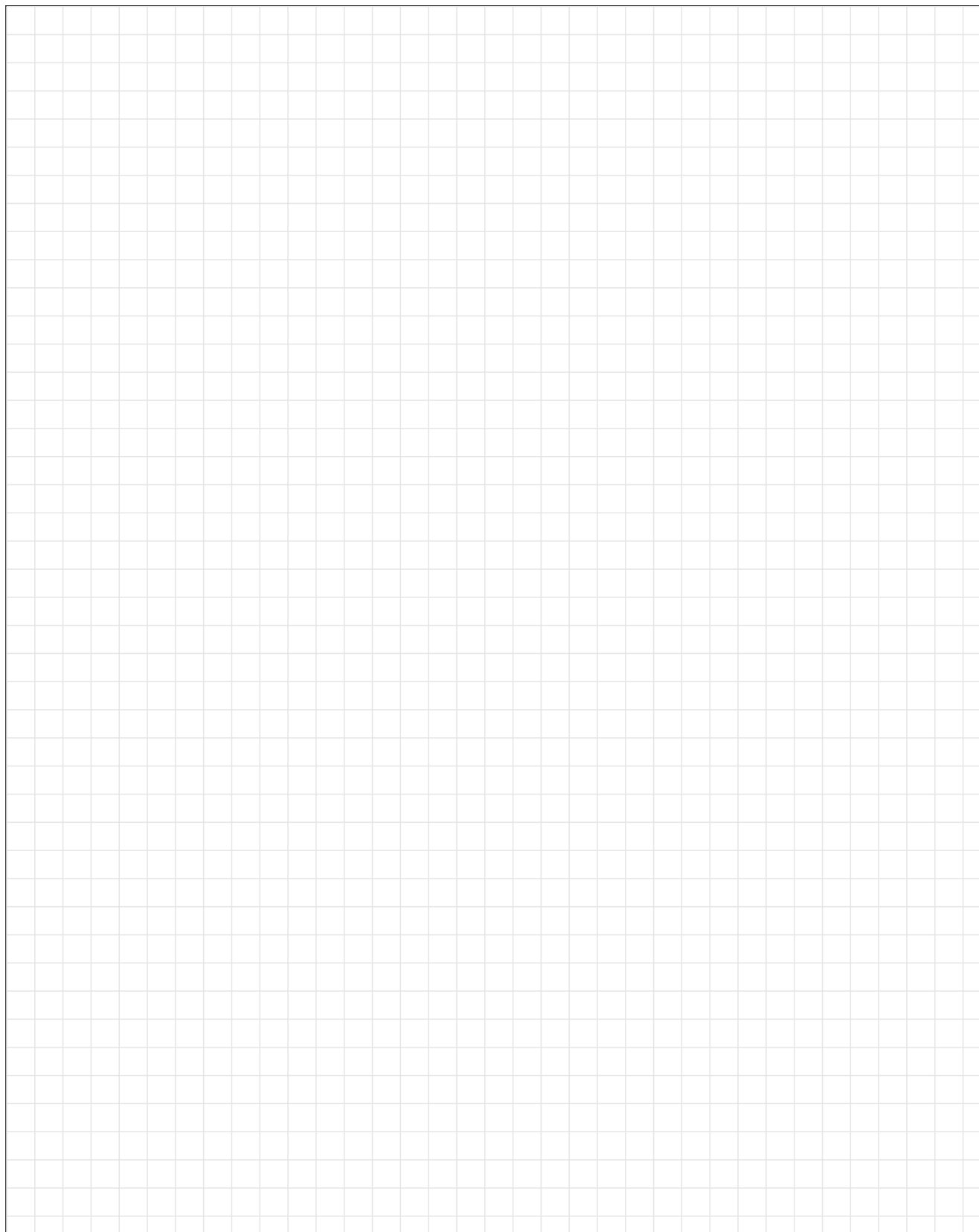


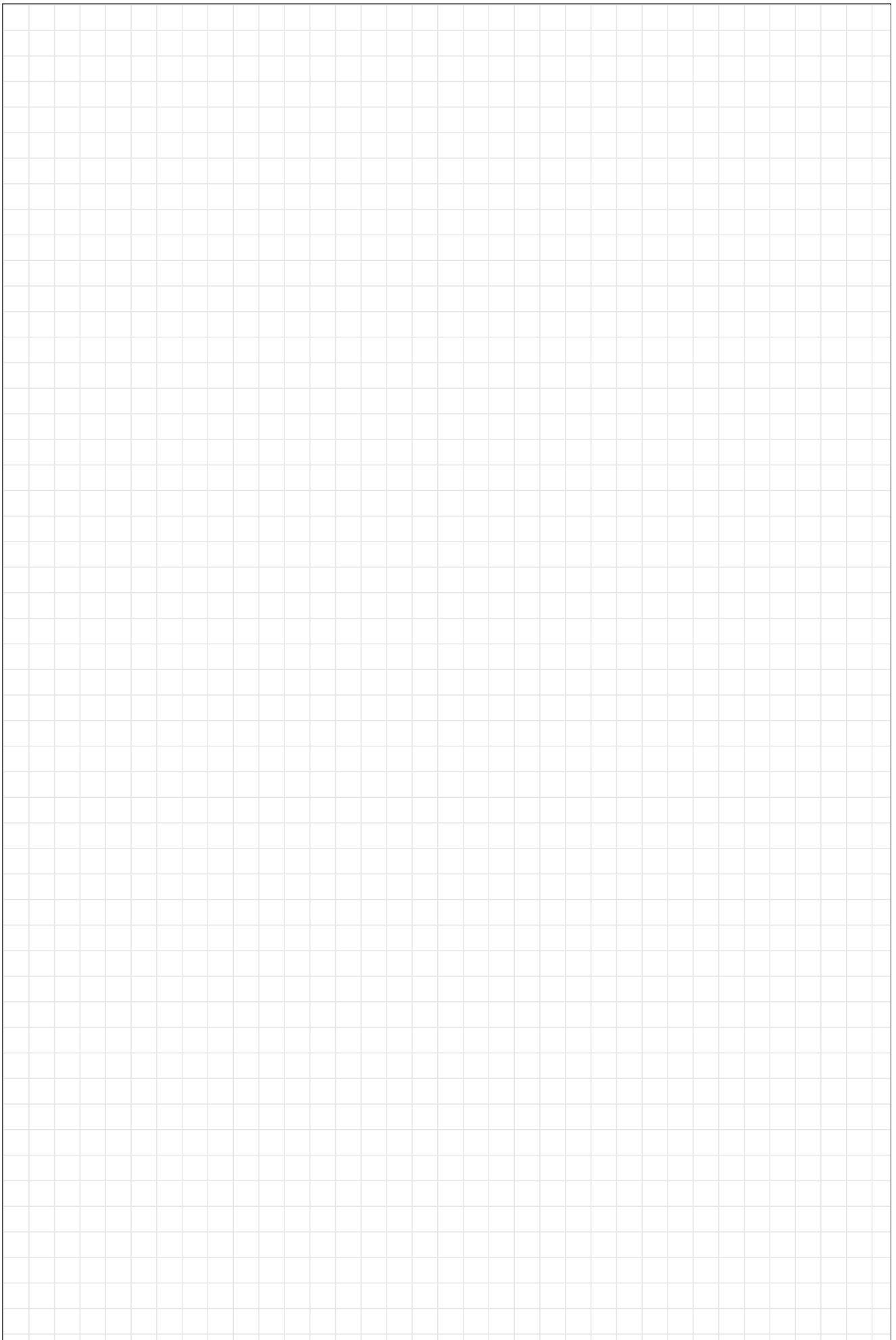


## 3.2 Exemple fondamental

**Proposition 3.1.** La fonction  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $u \mapsto \frac{1}{1-u}$  admet des développements limités  
à l'ordre  $n$ , pour tout entier  $n$ , au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n)$$





### 3.3 Unicité du développement limité

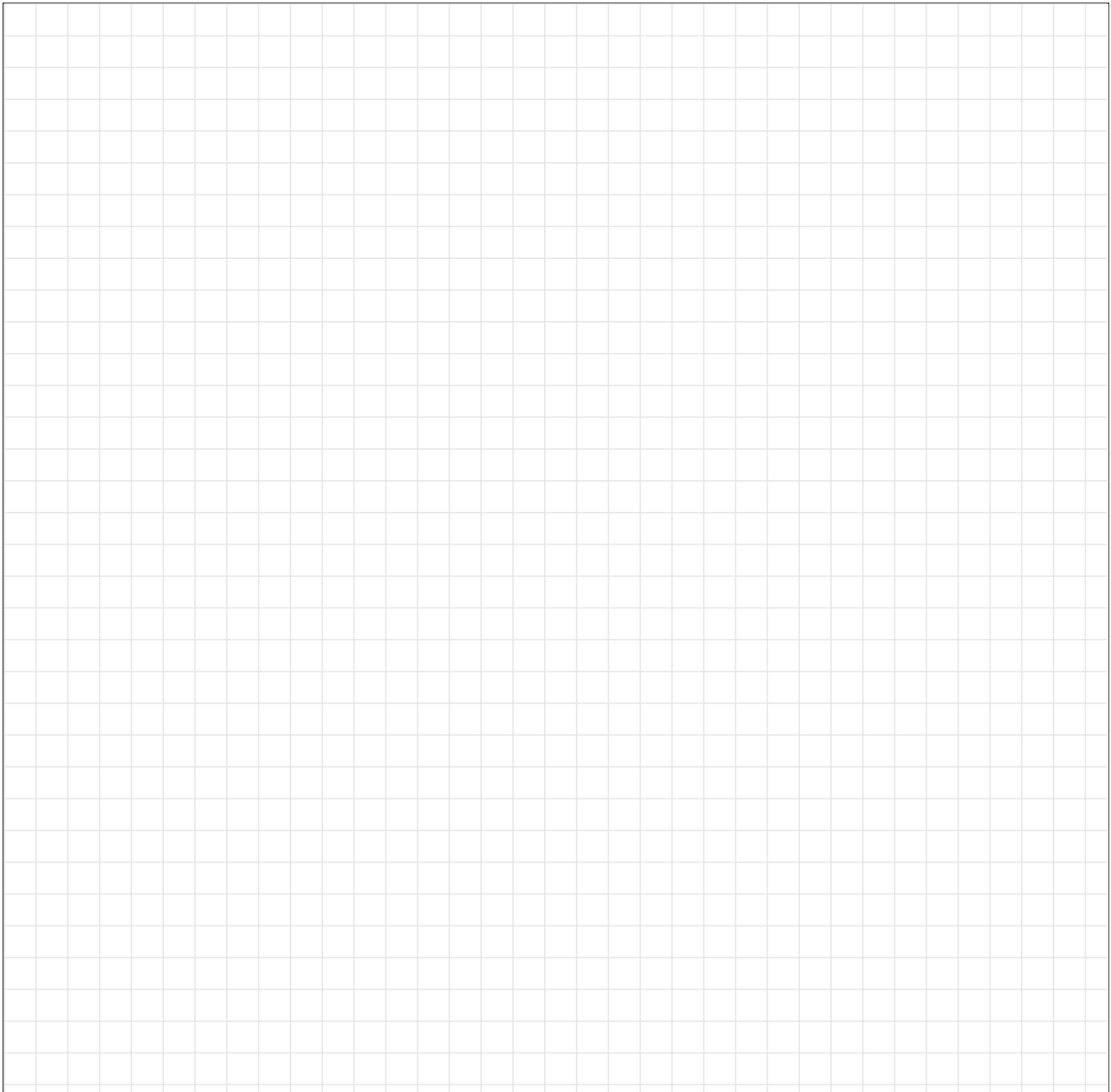
**Proposition 3.2.** *Si  $f$  est une fonction admettant deux développements limités à l'ordre  $n$  au voisinage de  $a \in \mathbb{R}$ , alors ces développements sont égaux.*

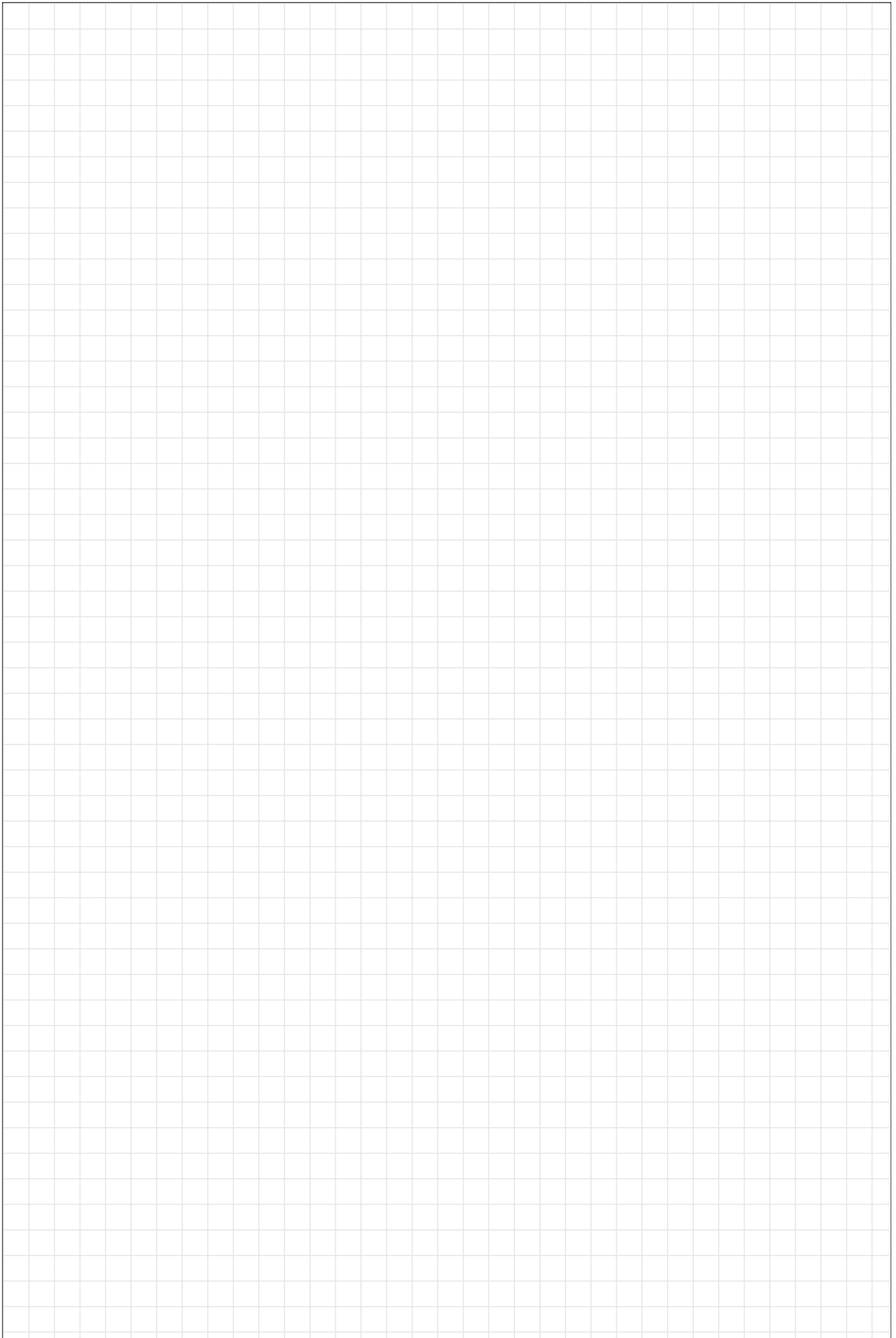
*Si  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$  et  $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ , alors  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = b_k$ .*

*On appellera le polynôme  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$  la partie régulière du DL de  $f$  à l'ordre  $n$  en  $a$ .*

**Corollaire 3.3.** *Si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ , alors pour tout entier  $p \leq n$ ,  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $p$  obtenu en tronquant le développement d'ordre  $n$ .*

**Corollaire 3.4.** *Soit  $f$  admettant un développement limité en 0 de partie régulière  $P$ . Si  $f$  est paire, alors  $P$  est pair. Si  $f$  est impaire, alors  $P$  est impair.*



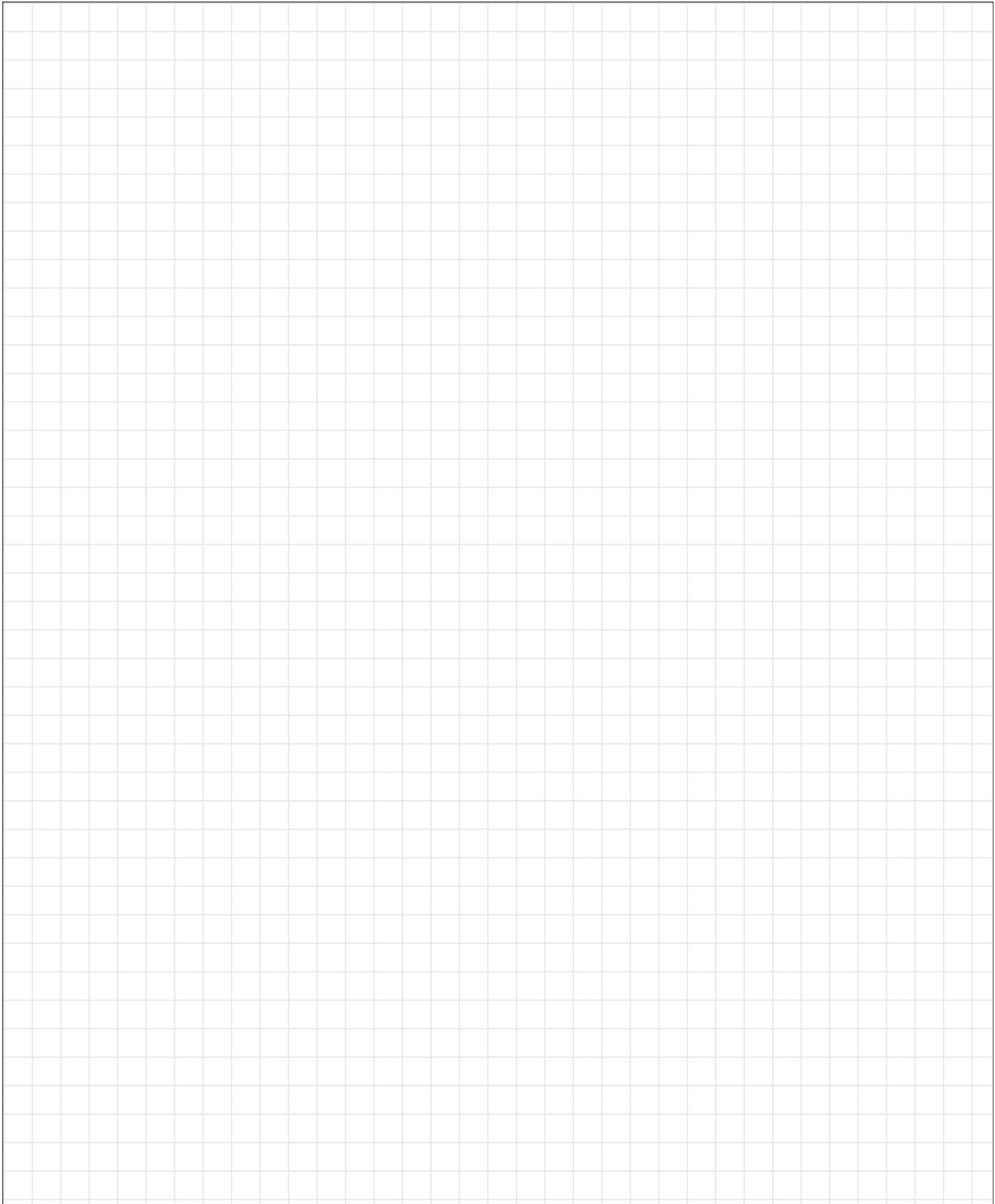


### 3.4 Forme normalisée d'un développement limité

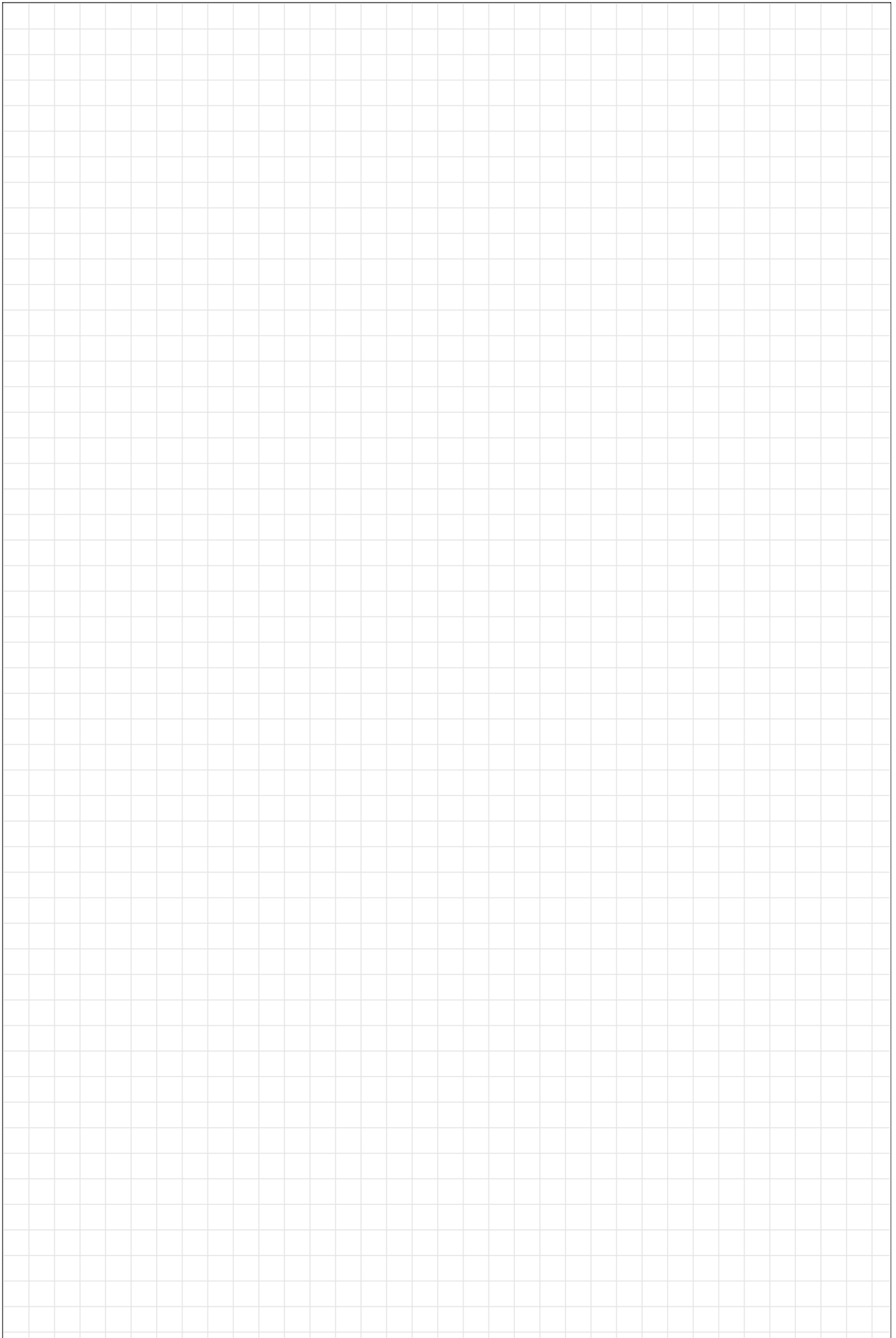
**Définition 3.2.** Soit  $f$  une application admettant un développement limité l'ordre  $n + p$  au voisinage de  $a$ . On appelle forme normalisée du développement limité de  $f$ , l'écriture :

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)) \text{ où } a_0 \neq 0.$$

**Proposition 3.5.** Si  $f$  a un développement limité normalisé  $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n))$  où  $a_0 \neq 0$ , alors  $f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$  et  $f$  est de même signe que  $a_0 h^p$ .

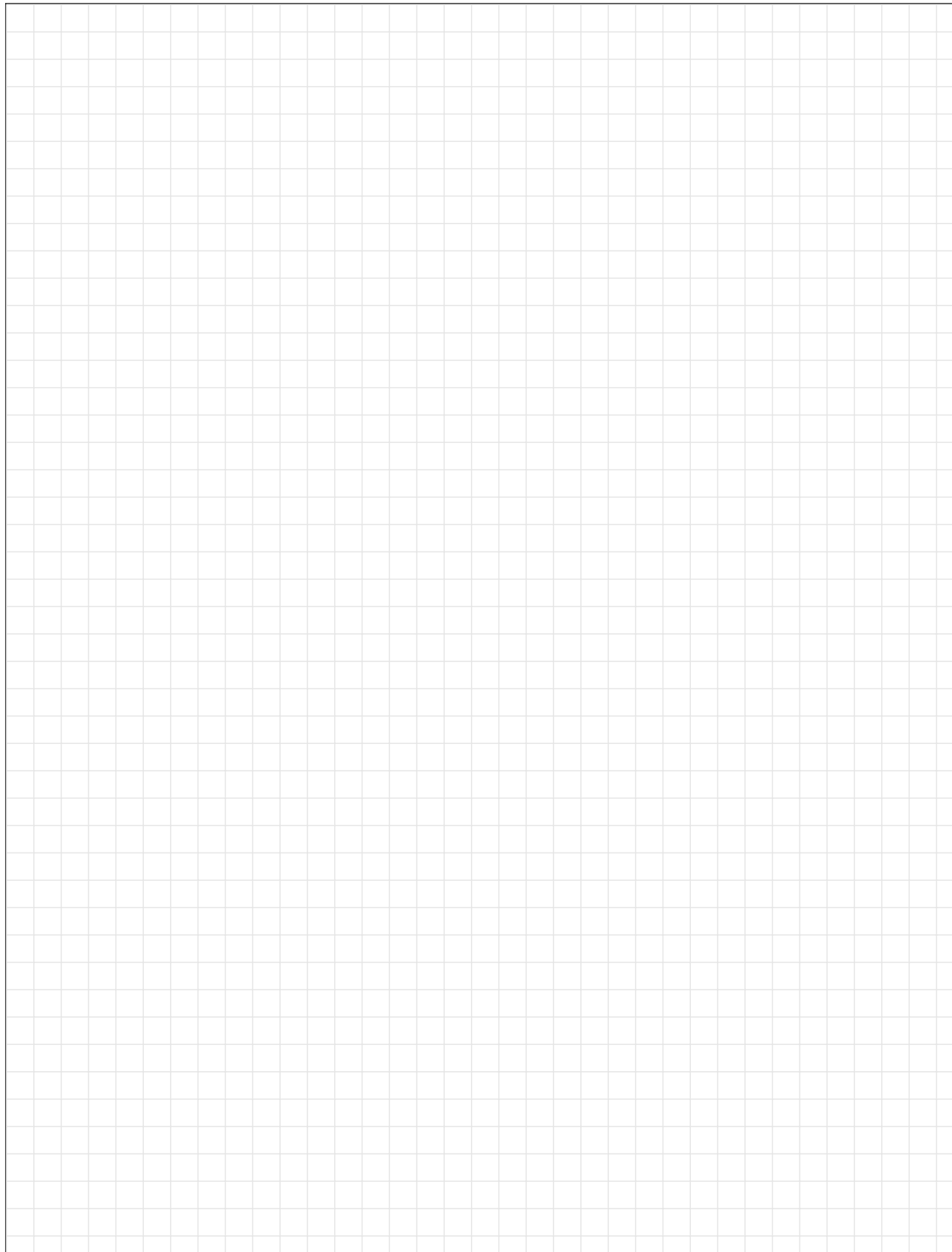


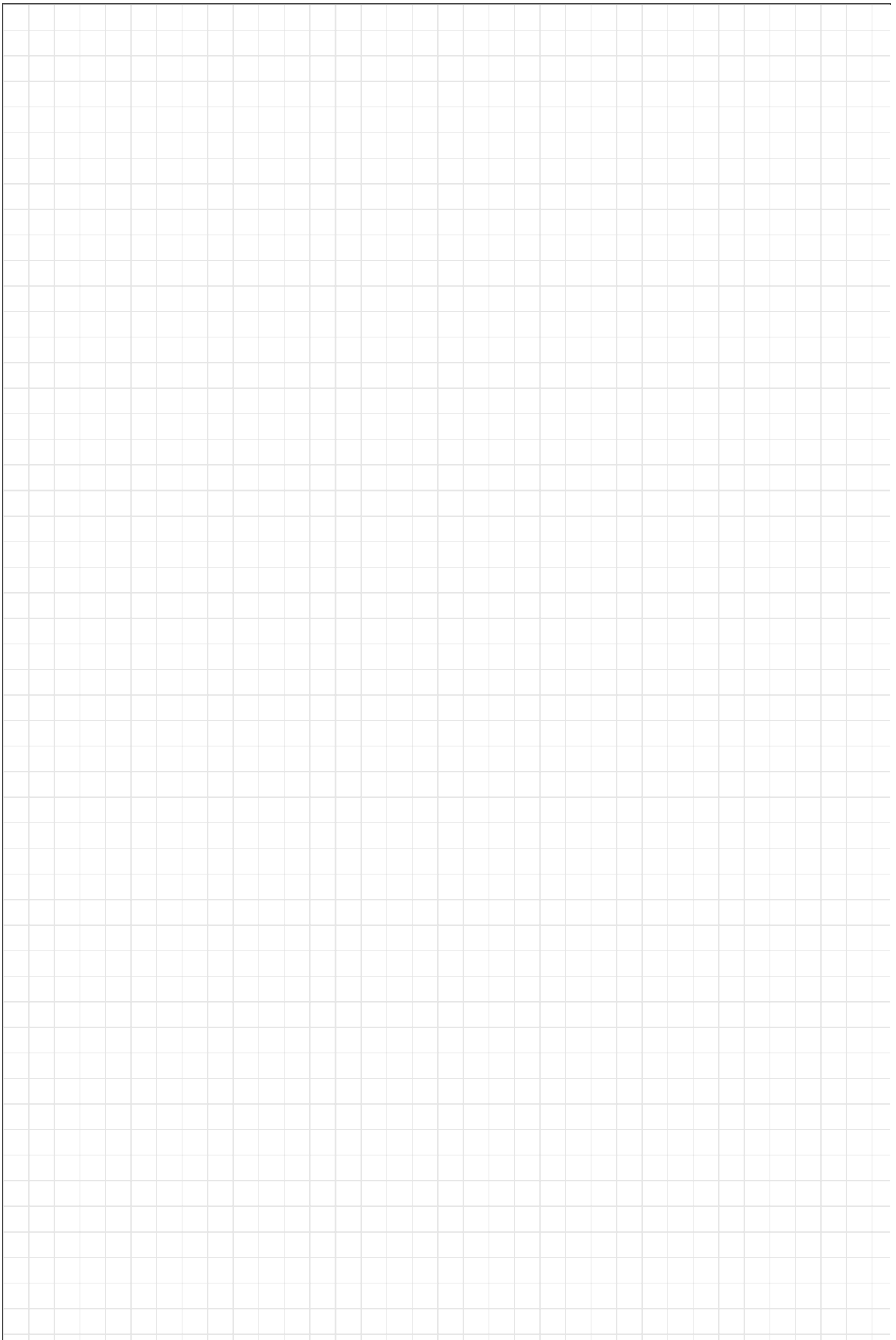




### 3.5 Translation d'un développement limité

**Proposition 3.6.** Si  $f$  est une fonction vérifiant  $f(a+h) = g(h)$  pour tout  $h$  dans l'intervalle  $I$  contenant 0, et si  $g$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 :  $g(x) = P(x) + o(x^n)$ . Alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  :  $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$ .



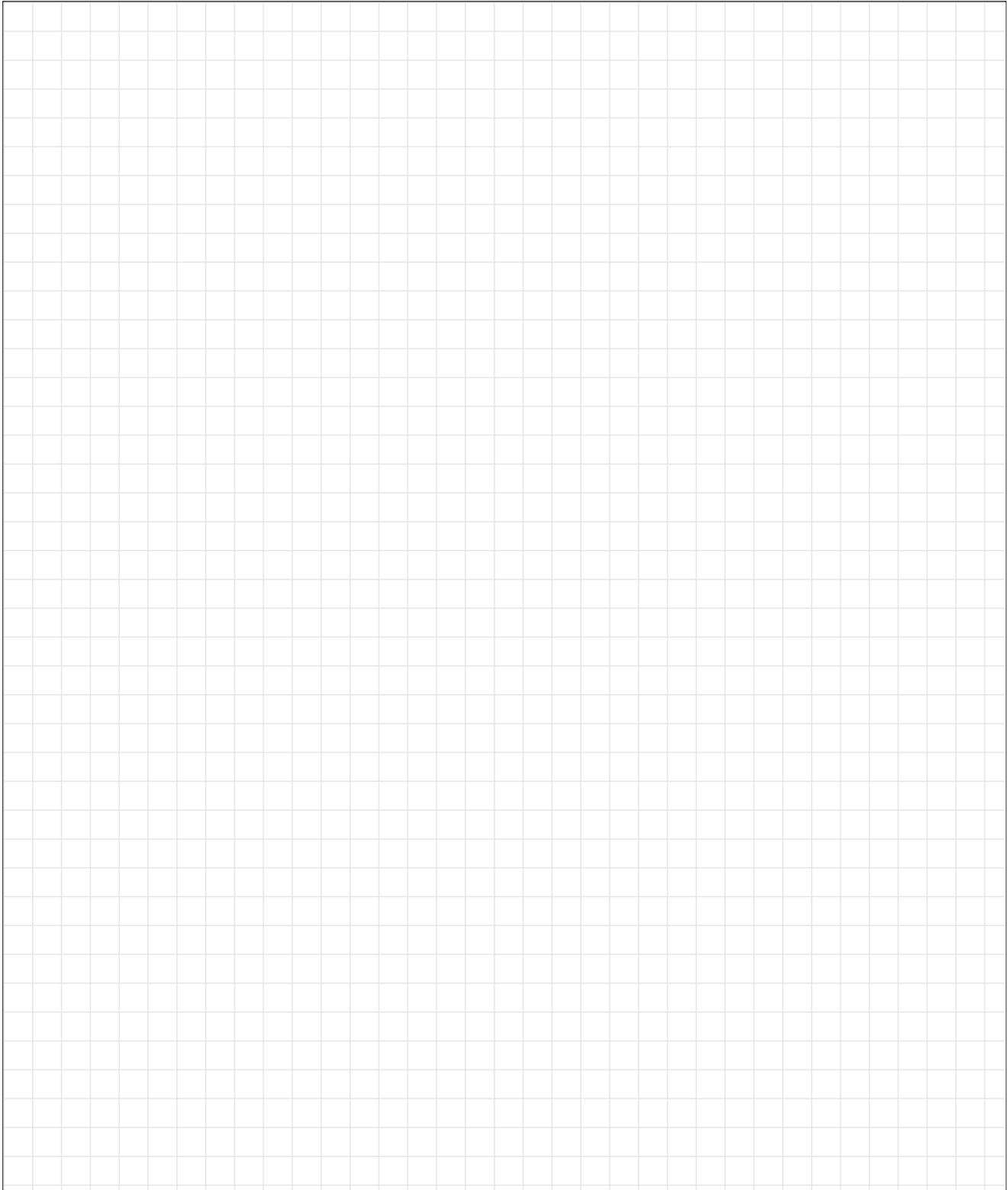


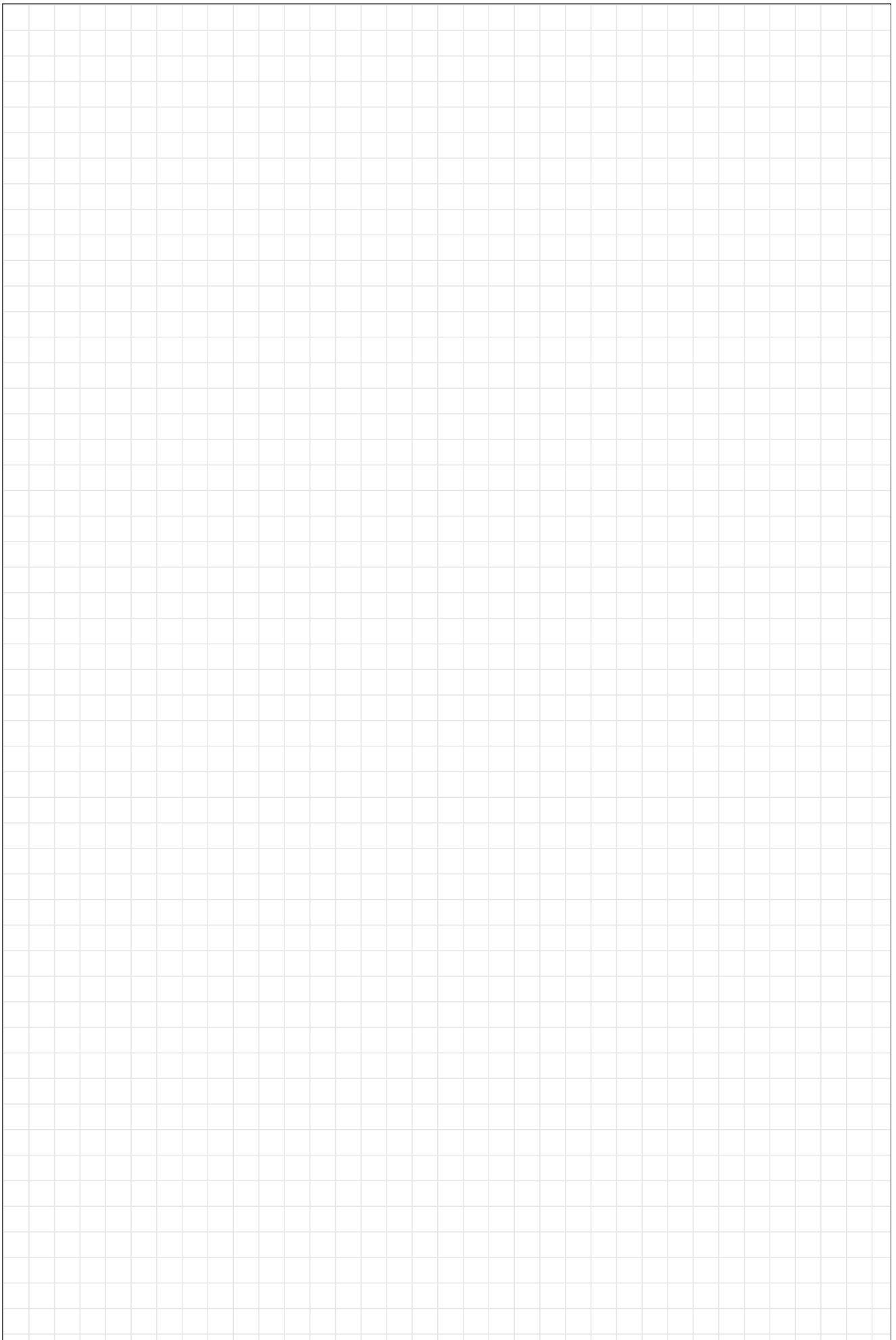
### 3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

**Définition 3.3.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Si la fonction  $g$  définie par  $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$  admet un développement limité en 0 à l'ordre  $n$  sur l'intervalle  $J_+ = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in I \cap \mathbb{R}_+^*\right\}$  (respectivement sur  $J_- = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in I \cap \mathbb{R}_-^*\right\}$ ), alors on dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ).

Si  $g(u) = P(u) + o(u^n)$ , alors  $f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ .





## 4 Formule de Taylor-Young

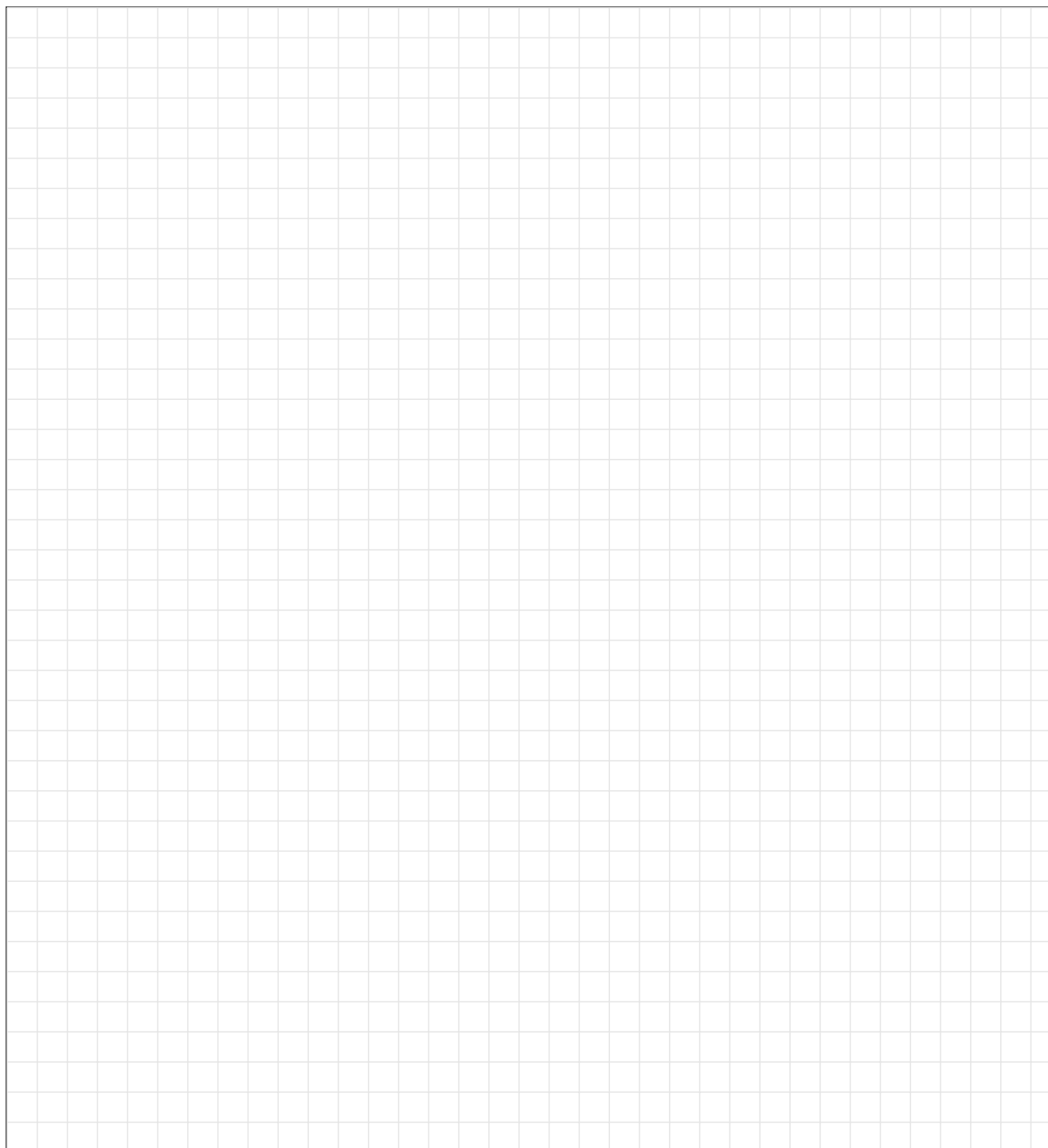
### 4.1 Intégration terme à terme d'un DL

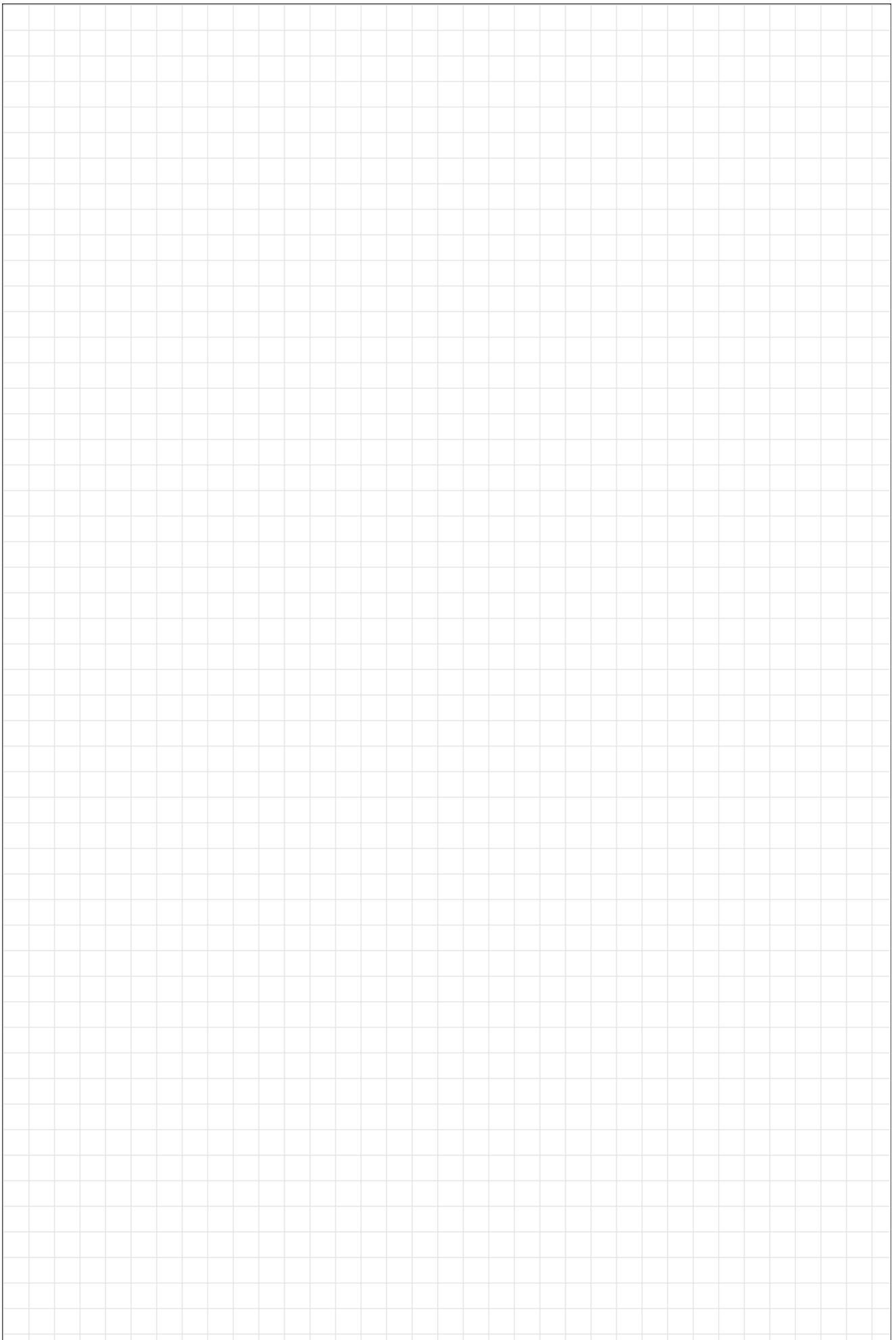
**Théorème 4.1.** Soit  $I$  un intervalle contenant  $a$  et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue possédant un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  qui est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Alors toute primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  possède un développement limité à l'ordre  $n+1$  en  $a$  qui est :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$



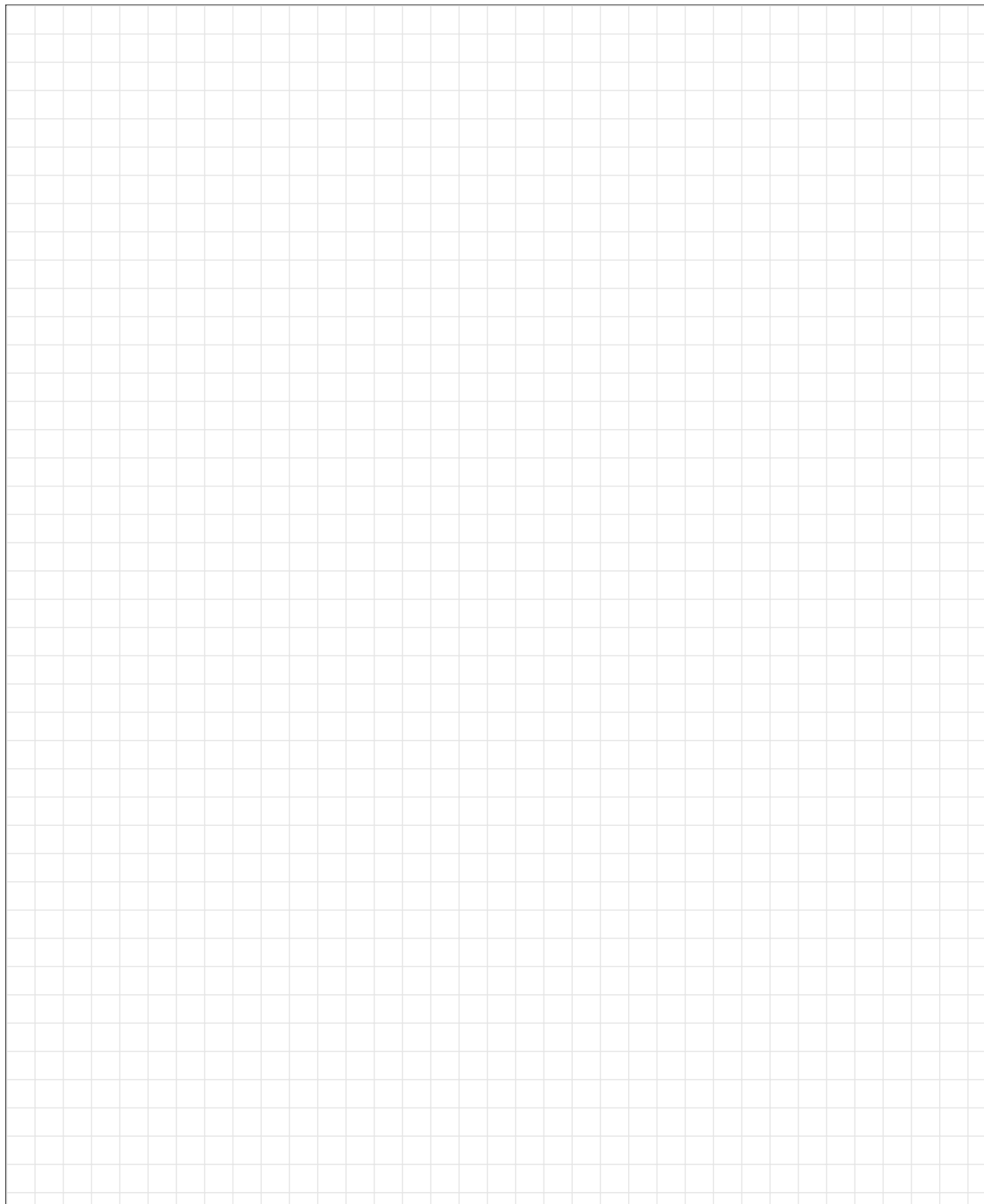


## 4.2 Formule de Taylor-Young

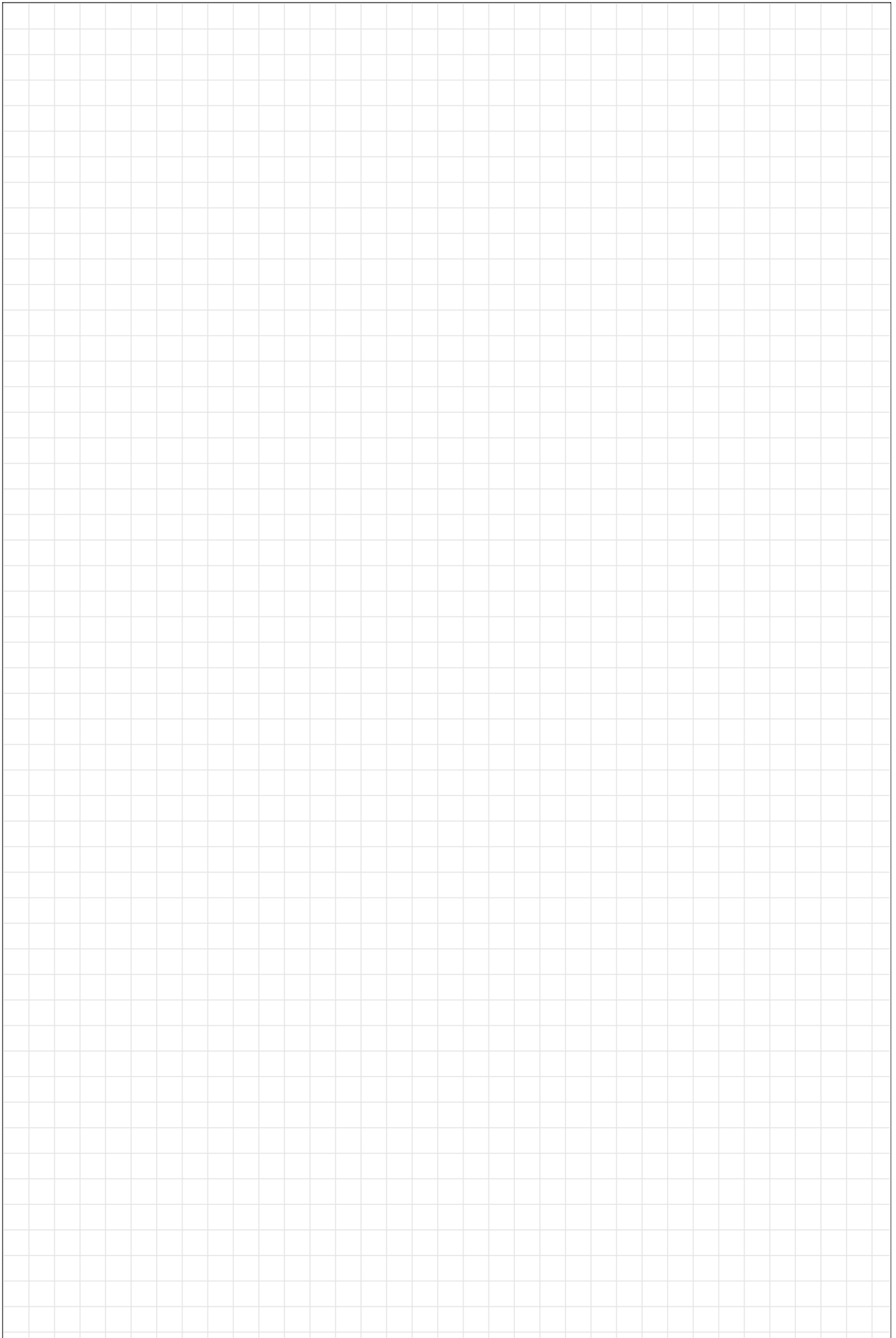
**Théorème 4.2.** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^n$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{K}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .  $f$  possède en tout point  $a$  de  $I$  un développement limité d'ordre  $n$  donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{ou}$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$







## 5 Opérations sur les développements limités

### 5.1 Somme et produit

**Proposition 5.1.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles admettant en  $a$  des développements limités à l'ordre  $n$  :

$$f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \text{ et } g(x) \underset{a}{=} Q(x-a) + o((x-a)^n)$$

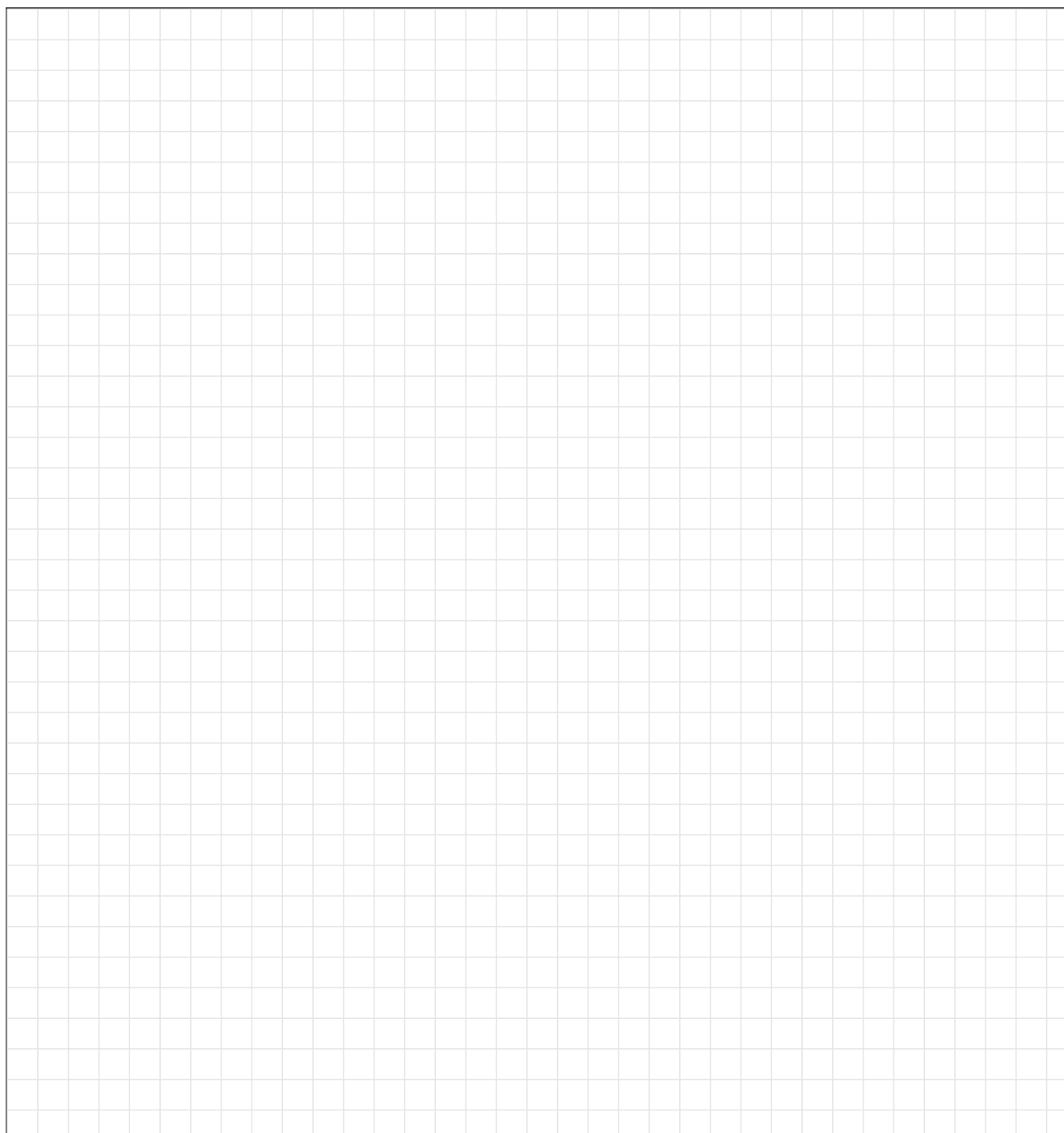
où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes réels de degré au plus égal à  $n$ .

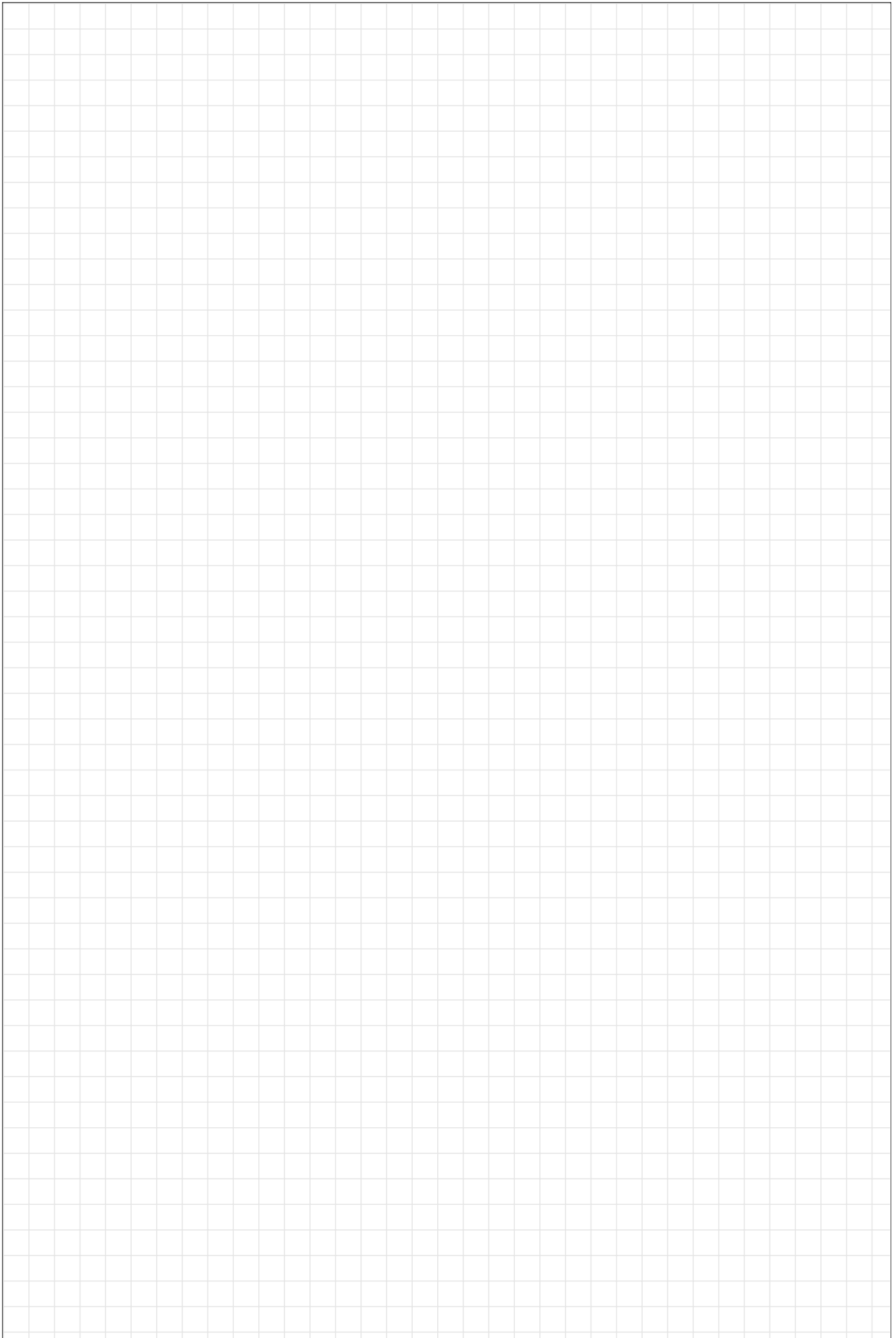
Alors les fonctions  $f+g$  et  $fg$  admettent des développements limités d'ordre  $n$  qui sont :

$$(f+g)(x) \underset{a}{=} P(x-a) + Q(x-a) + o((x-a)^n).$$

$$(fg)(x) \underset{a}{=} R(x-a) + o((x-a)^n)$$

où  $R$  est le polynôme obtenu tronquant le produit  $PQ$  au degré  $n$ .





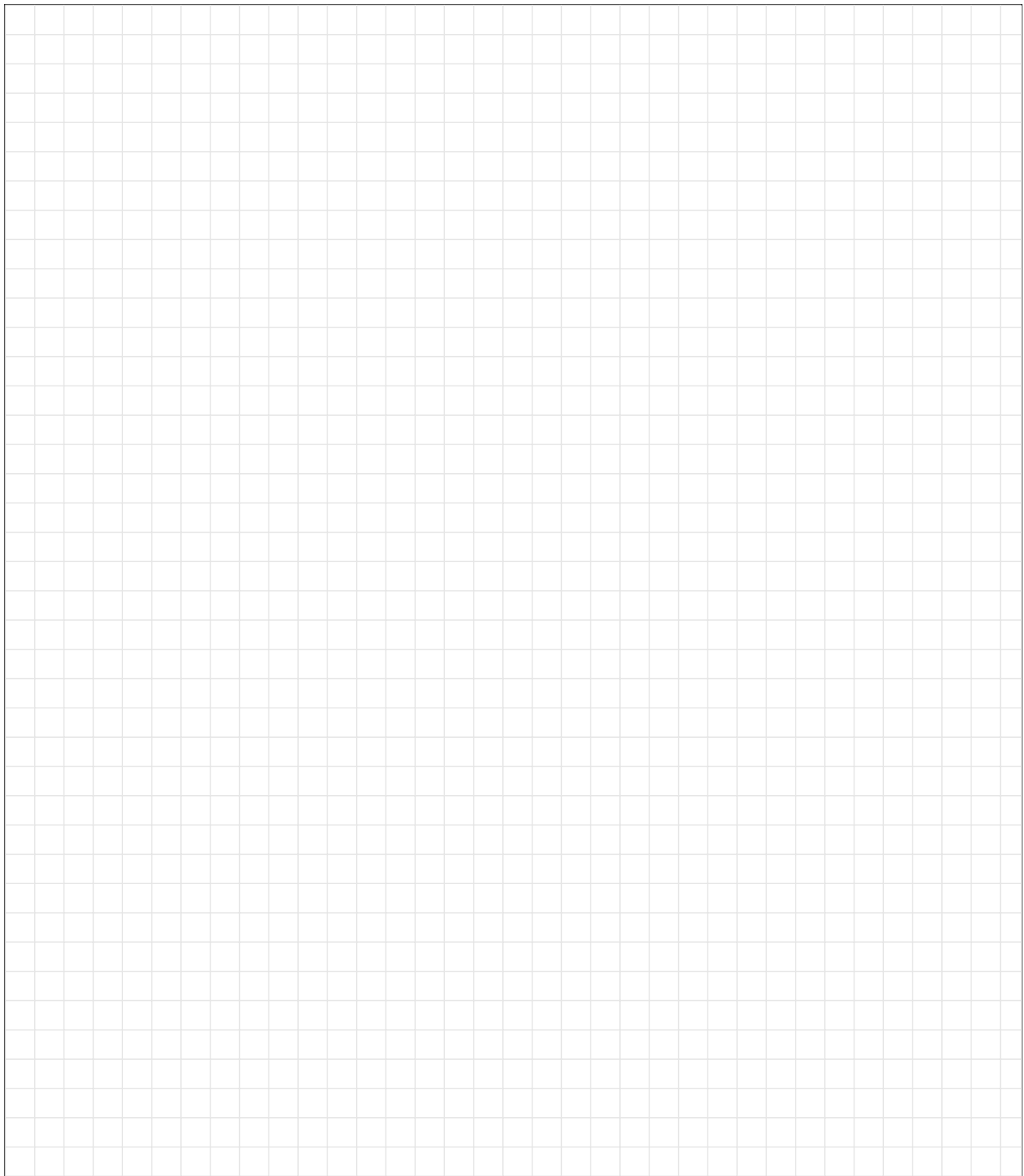
## 5.2 Dérivation d'un développement limité

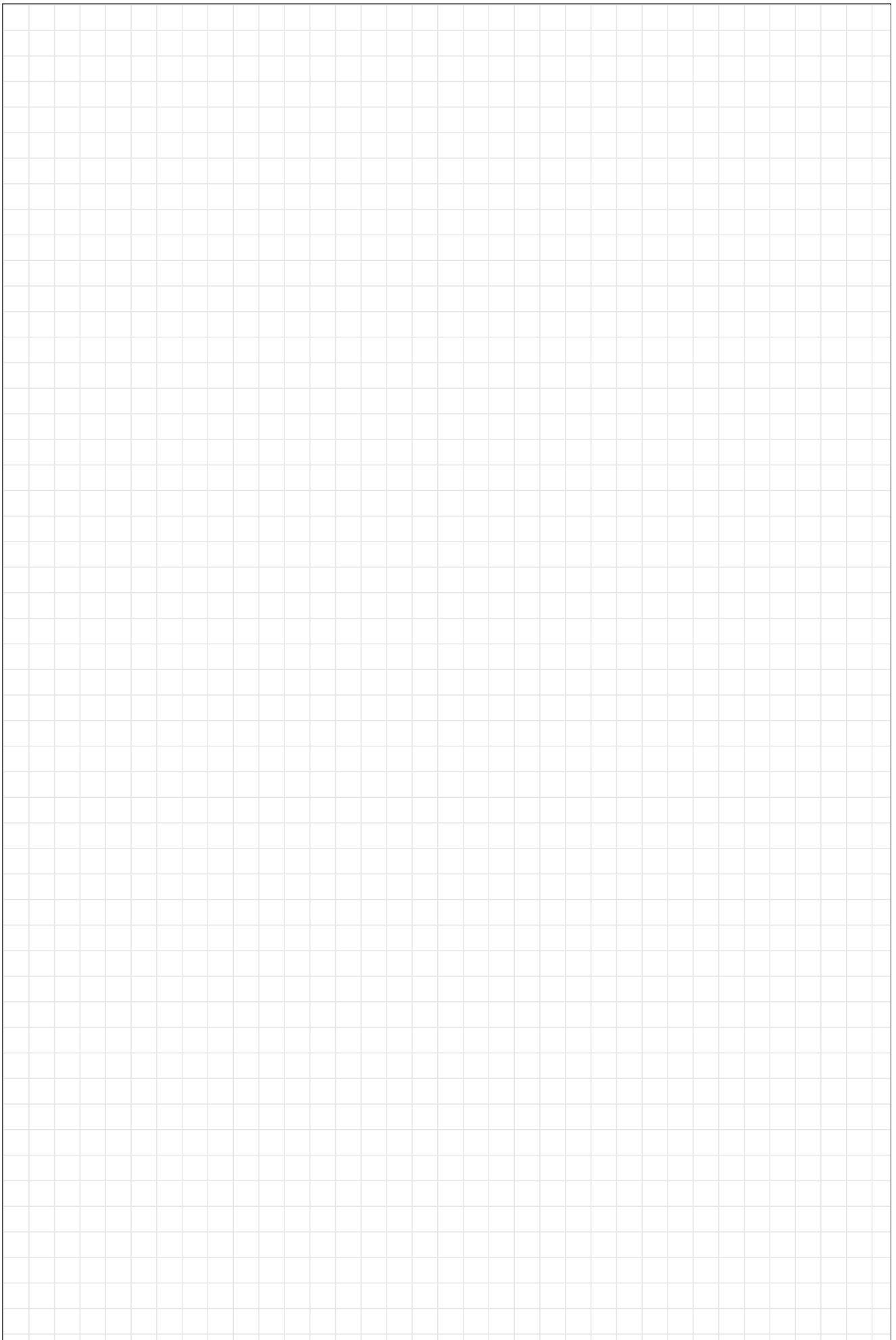
**Proposition 5.2.** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$  contenant  $a$ , admettant un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $a$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Si  $f'$  admet un développement limité d'ordre  $n-1$  en  $a$ , alors ce développement s'obtient en dérivant celui de  $f$  :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k (x-a)^{k-1} + o(x-a)^{n-1}.$$





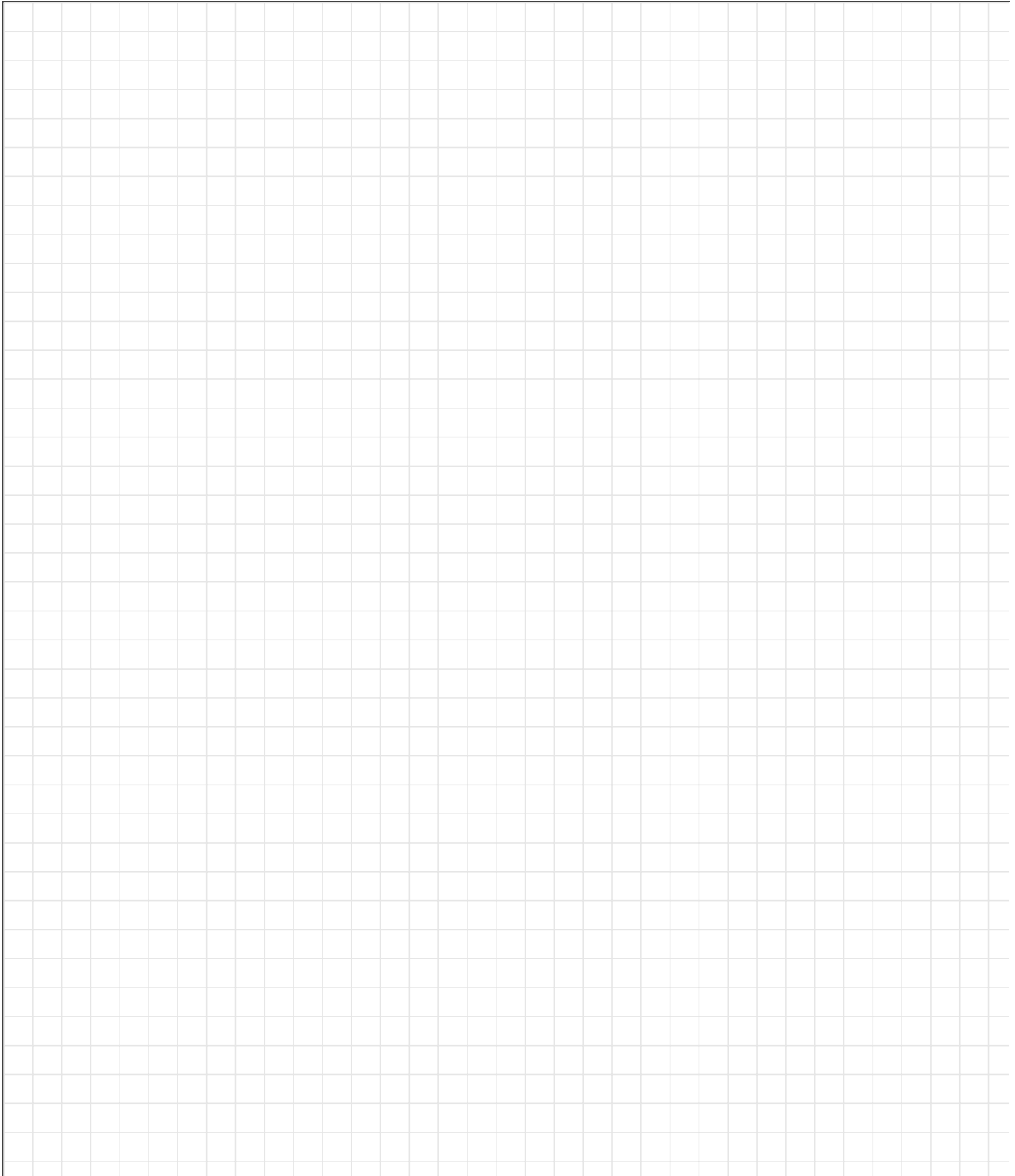
### 5.3 Développement limité d'une fonction composée

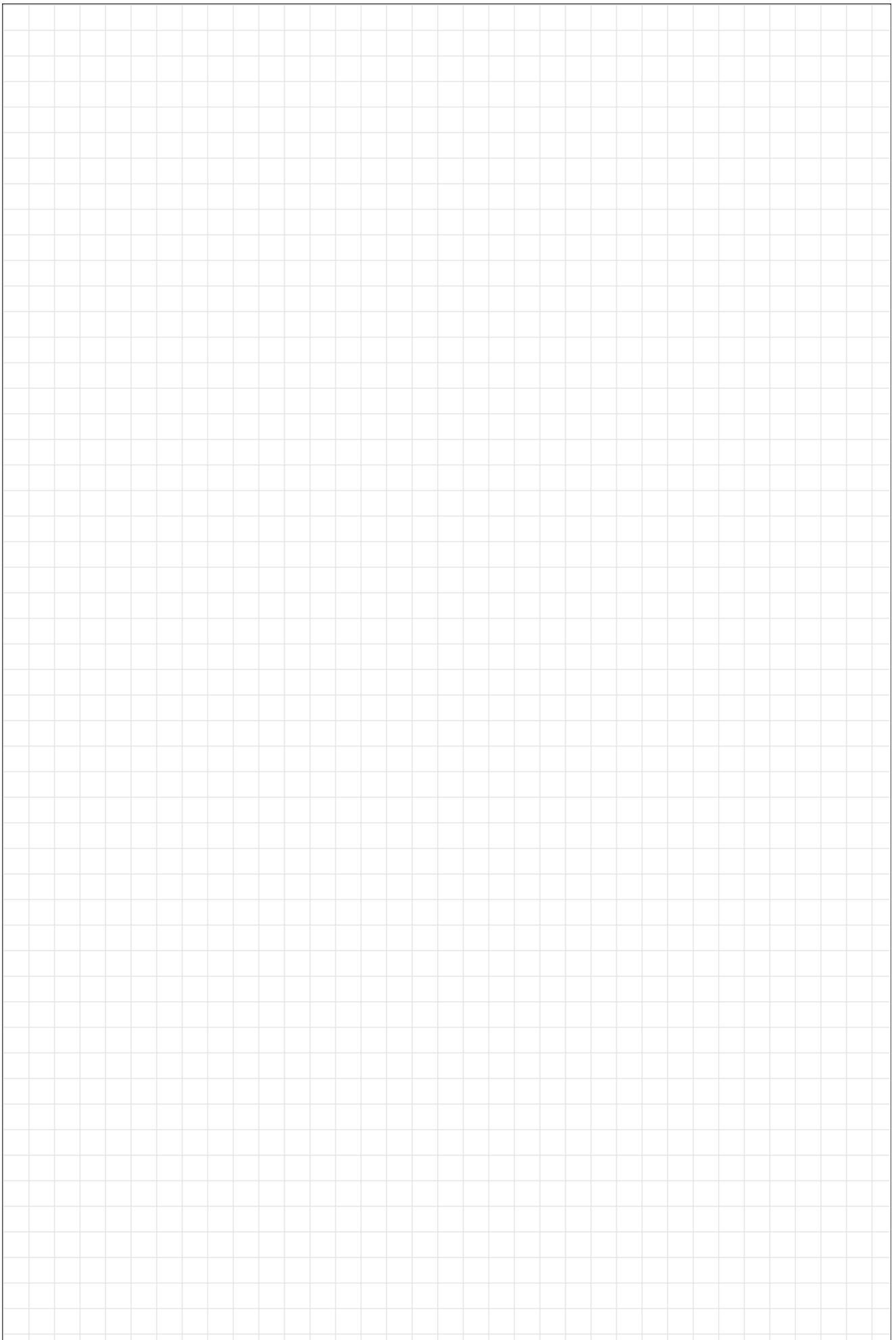
**Proposition 5.3.** *soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  admettant un  $DL_n(a)$  en  $a \in I$ , telle que  $f(I) \subset J$ , avec  $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$ .*

*Soit  $g$  une fonction définie sur  $J$  admettant un  $DL_n$  en  $b = f(a)$  avec  $g(u) \underset{b}{=} Q(u-b) + o(u-b)^n$ .*

*Alors  $g \circ f$  possède un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  obtenu en tronquant à l'ordre  $n$  le polynôme composé  $Q(P(X))$  :*

$$g \circ f(x) \underset{a}{=} \text{reste de la division de } Q(P(x-a)) \text{ par } (x-a)^{n+1} + o((x-a)^n).$$

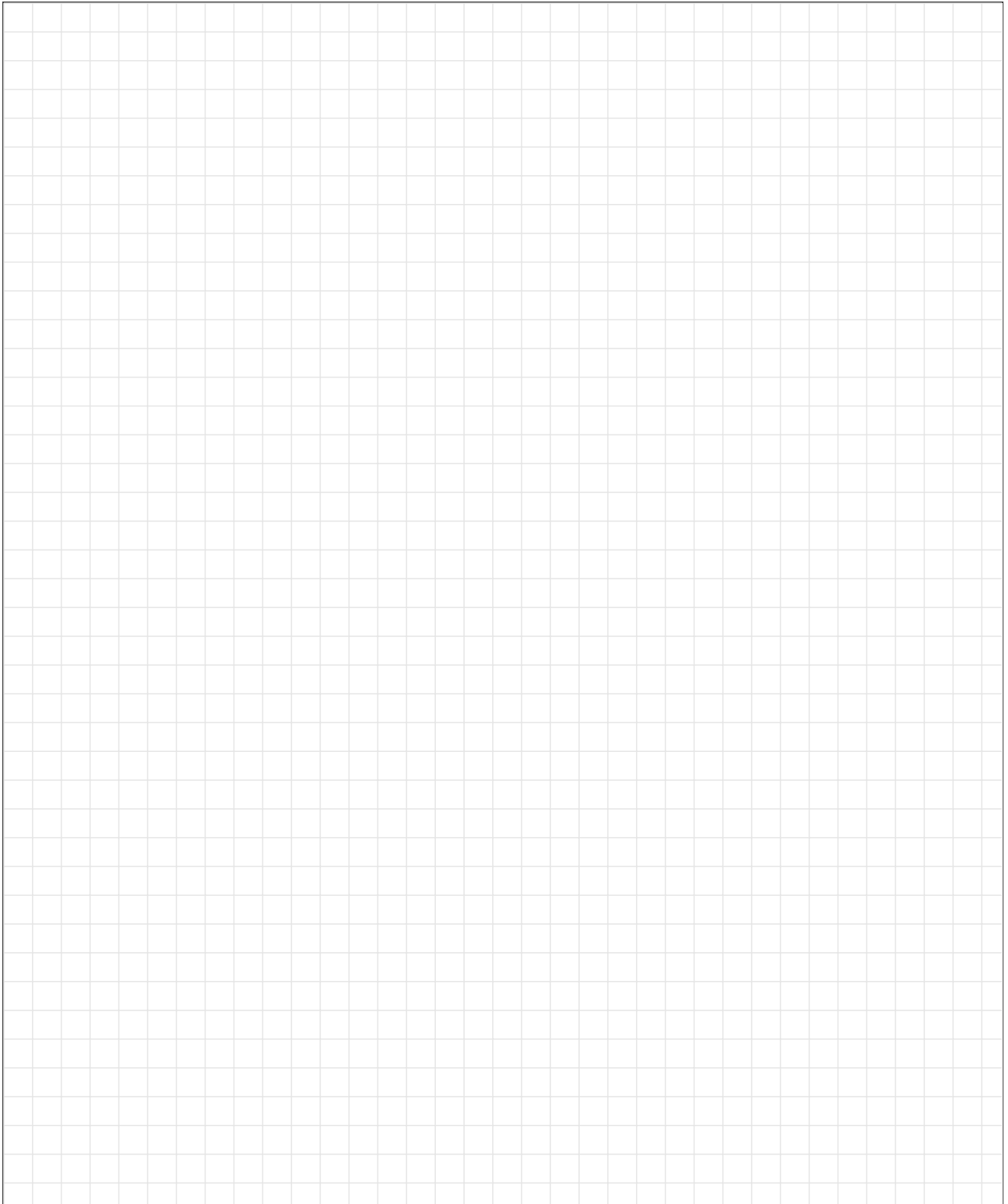




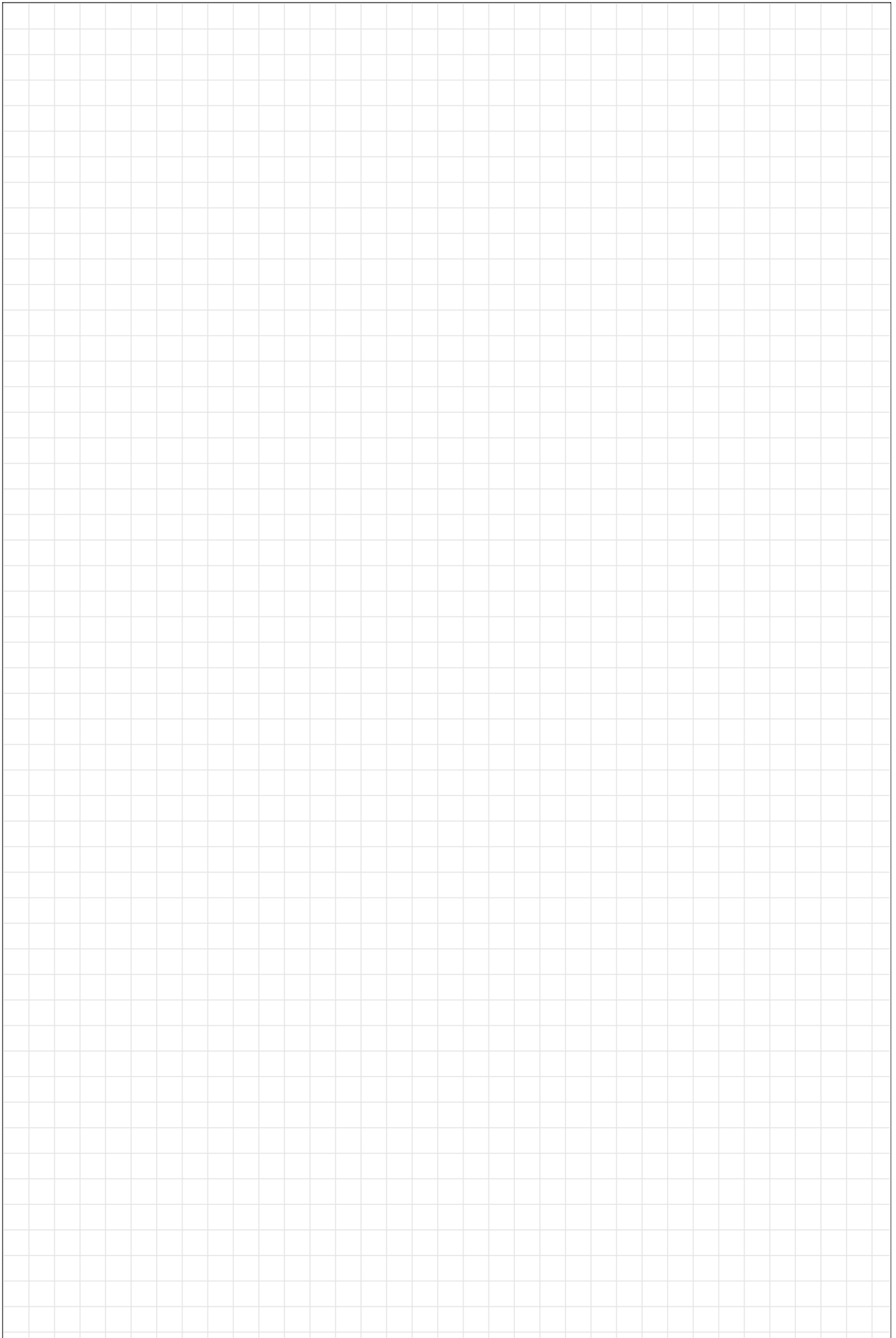
## 5.4 Développement limité d'un quotient

**Proposition 5.4.** Si  $u$  est une fonction telle que  $\lim_a u = 0$  et si  $u$  a un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ , alors la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1 - u(x)}$  admet un  $DL_n(a)$ .

Si  $u(x) = P(x - a) + o(x - a)^n$ , alors  $\frac{1}{1 - u(x)} = 1 + P(x - a) + P^2(x - a) + P^3(x - a) + \cdots + P^n(x - a) + o(x - a)^n$  : le développement limité s'obtient en tronquant à l'ordre  $n$  le polynôme  $1 + P(X) + P^2(X) + \cdots + P^n(X)$ .







## 6 Formulaire

$$\frac{1}{1-x} =_0 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha =_0 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) =_0 x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\arctan x =_0 x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + (-1)^p \frac{1}{2p+1}x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

$$e^x =_0 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

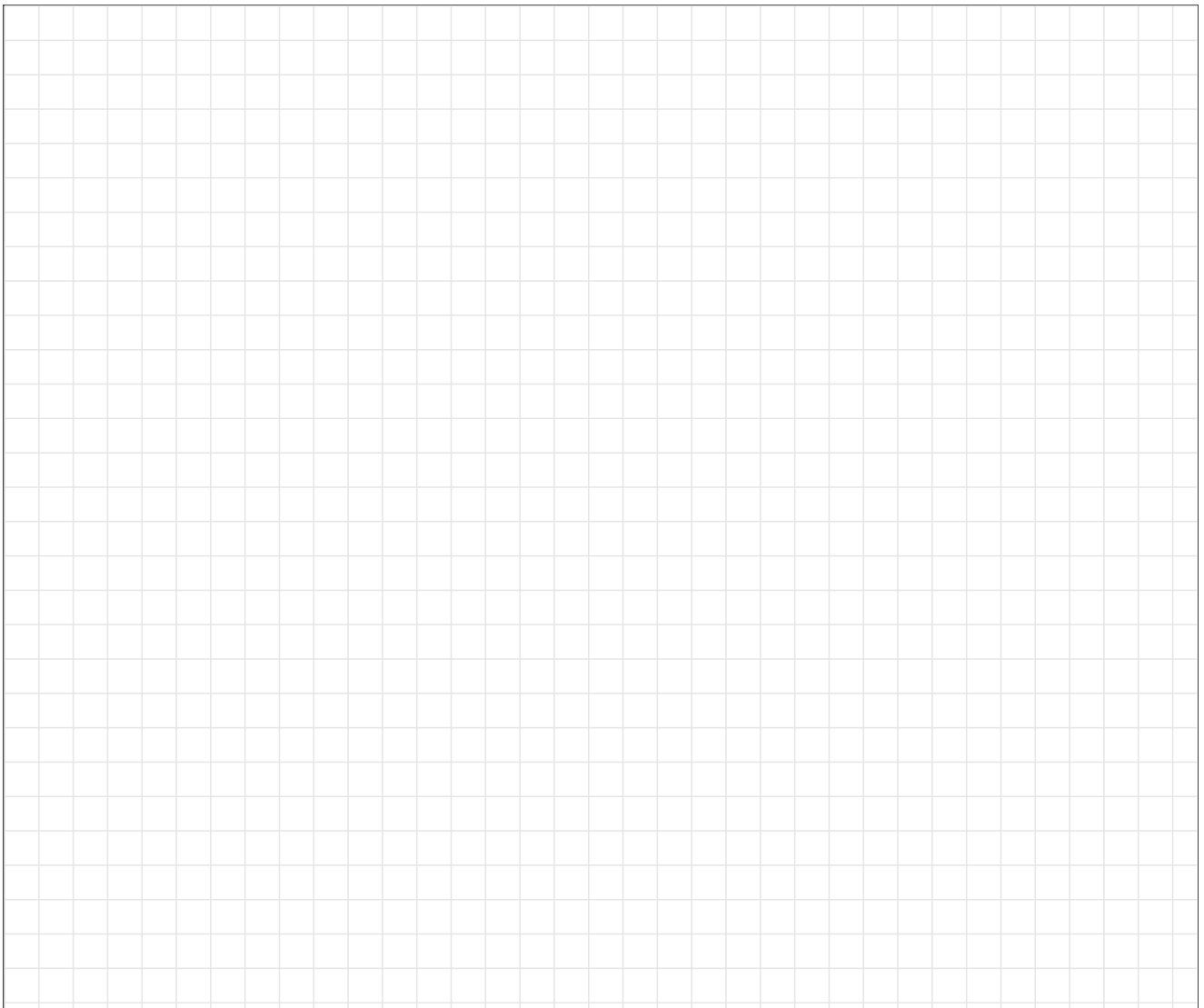
$$\operatorname{ch} x =_0 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p})$$

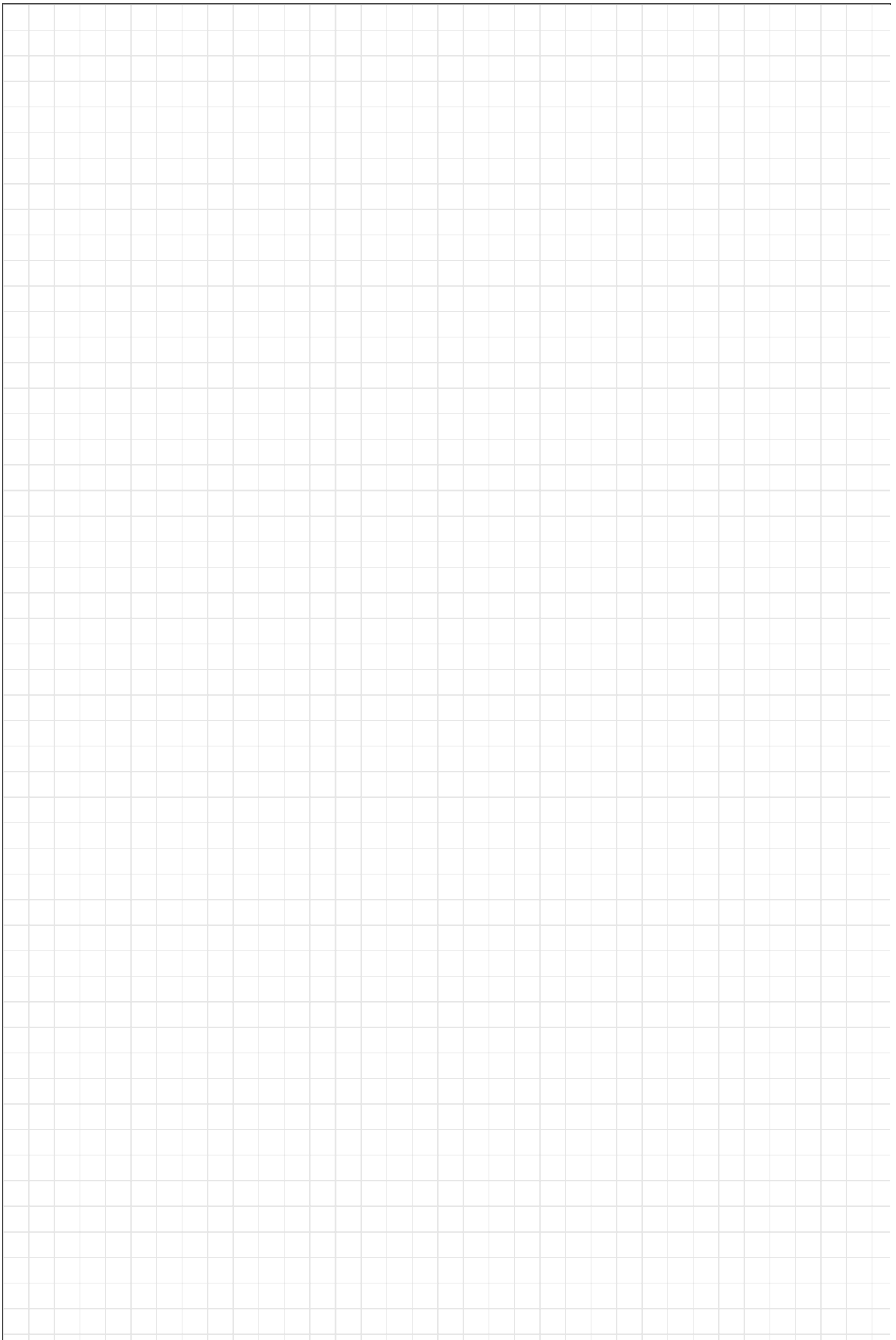
$$\operatorname{sh} x =_0 x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos x =_0 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^p \frac{1}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p})$$

$$\sin x =_0 x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^p \frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

$$\tan x =_0 x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

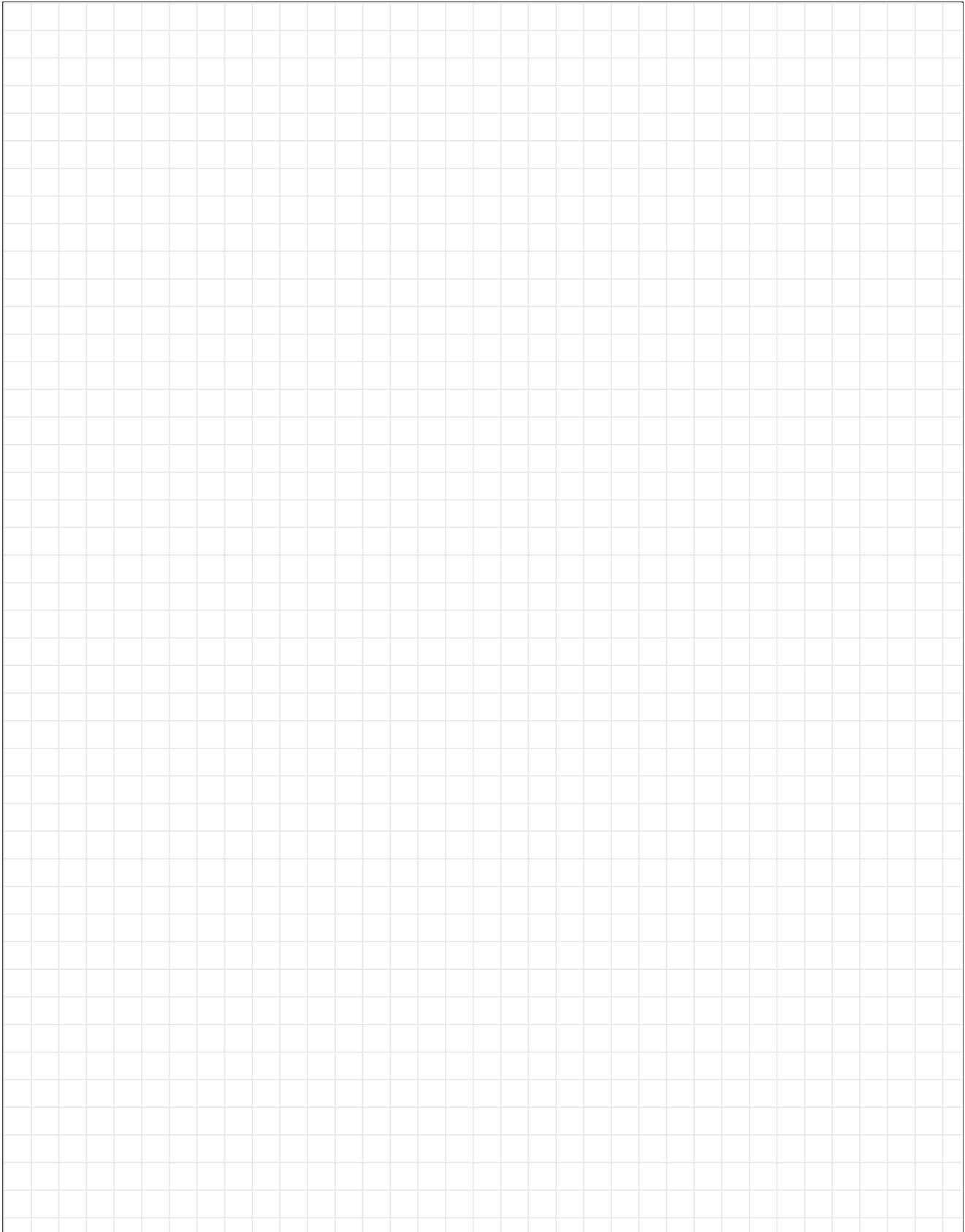


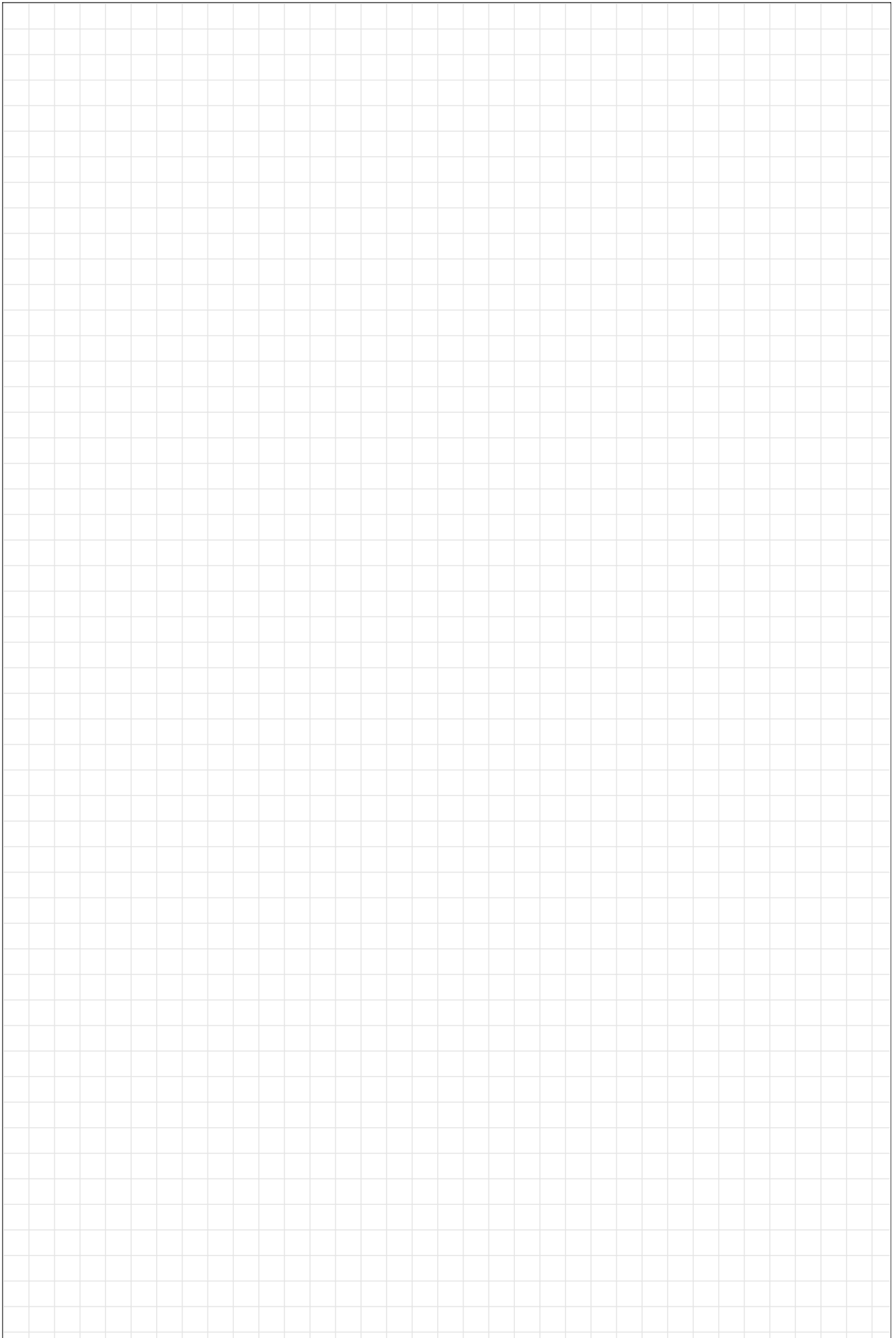


## 7 Applications

### 7.1 Étude de limites

**Proposition 7.1.** *Si une fonction  $f$  a un développement limité de la forme  $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$  au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $f$  a une limite en  $a$  qui vaut  $a_0$ .*

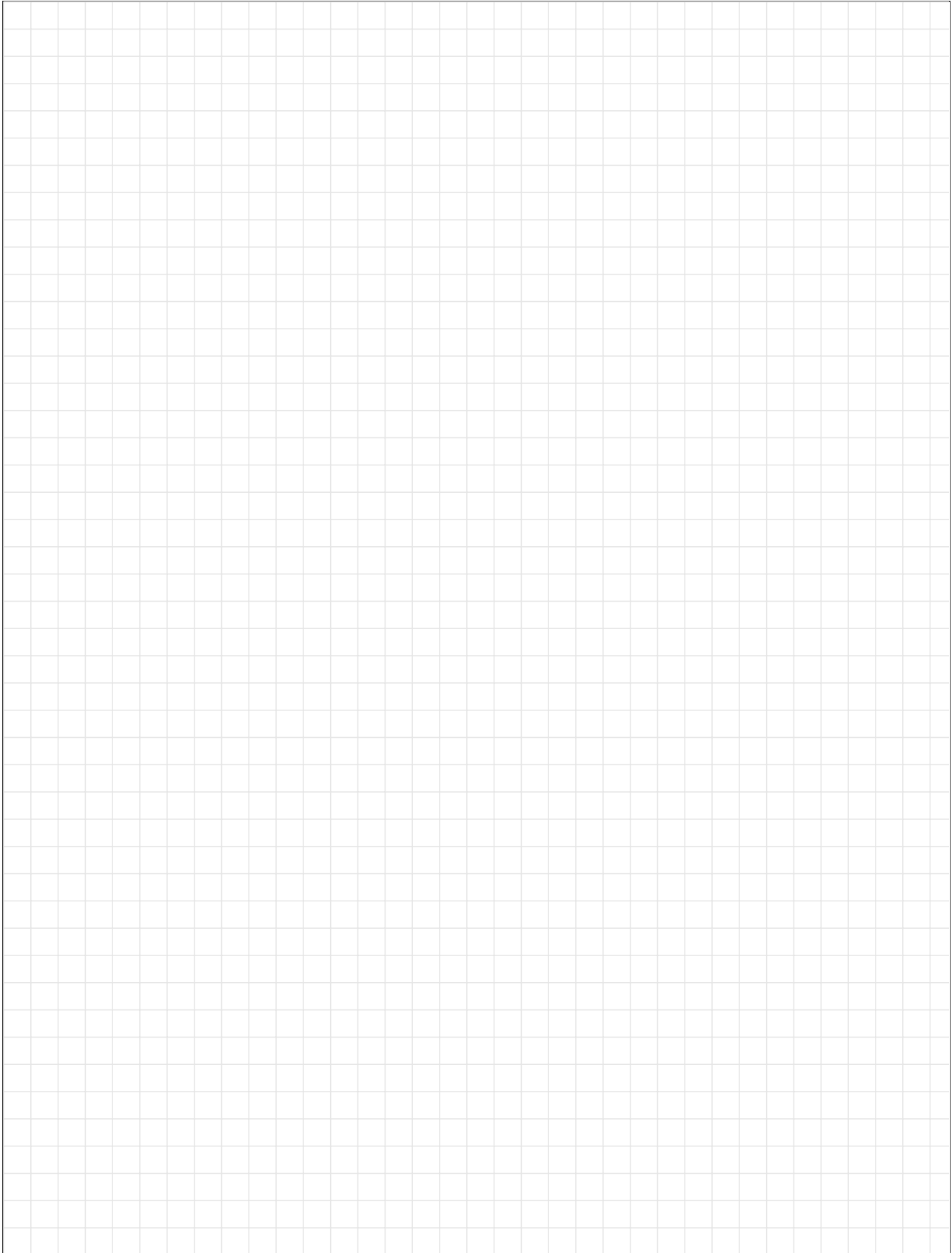


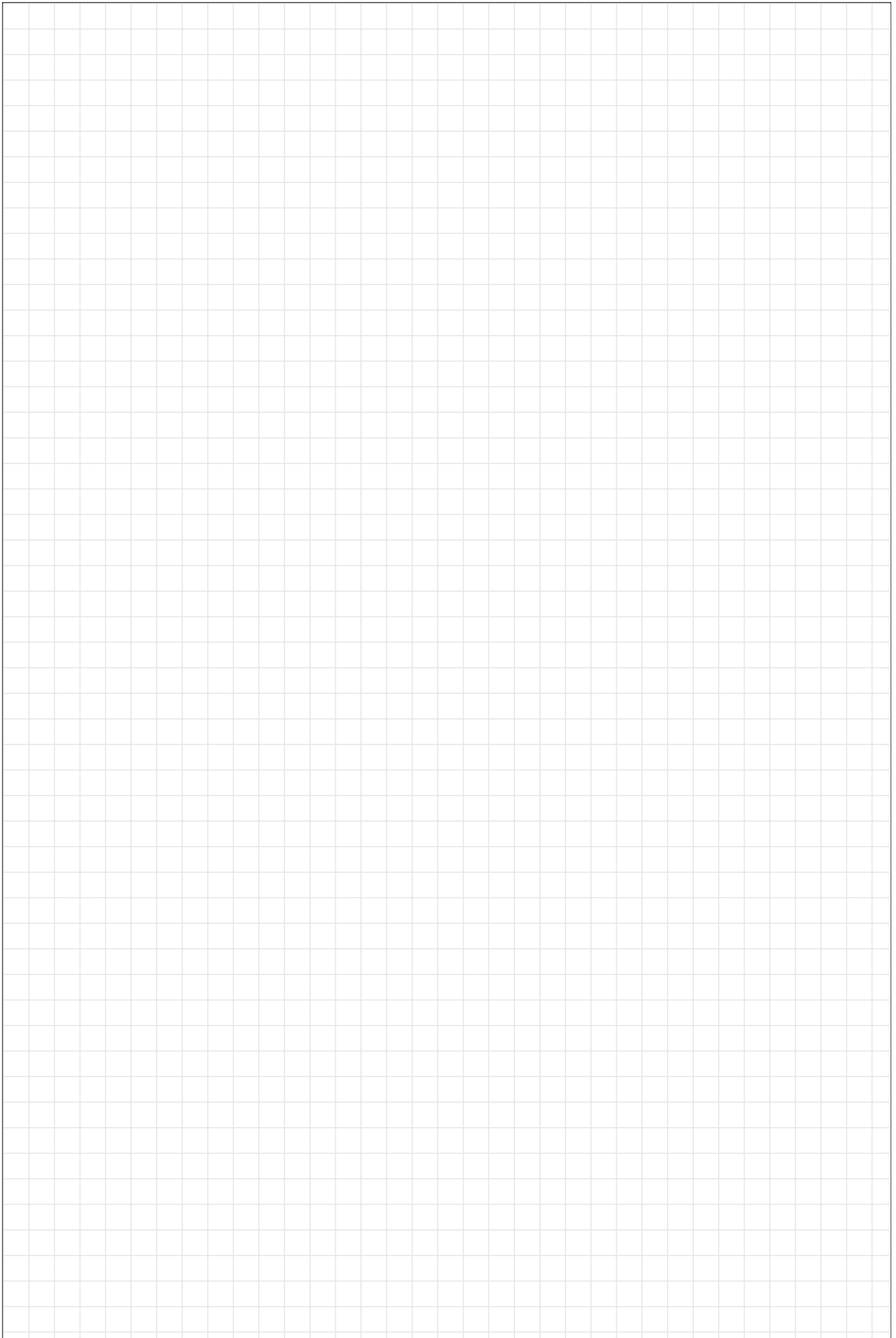


## 7.2 Prolongement par continuité

**Proposition 7.2.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Si une fonction  $f$  définie sur  $I \setminus \{a\}$ , a un développement limité de la forme  $f(x) = a_0 + o(1)$  au voisinage de  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  en posant  $f(a) = a_0$ .

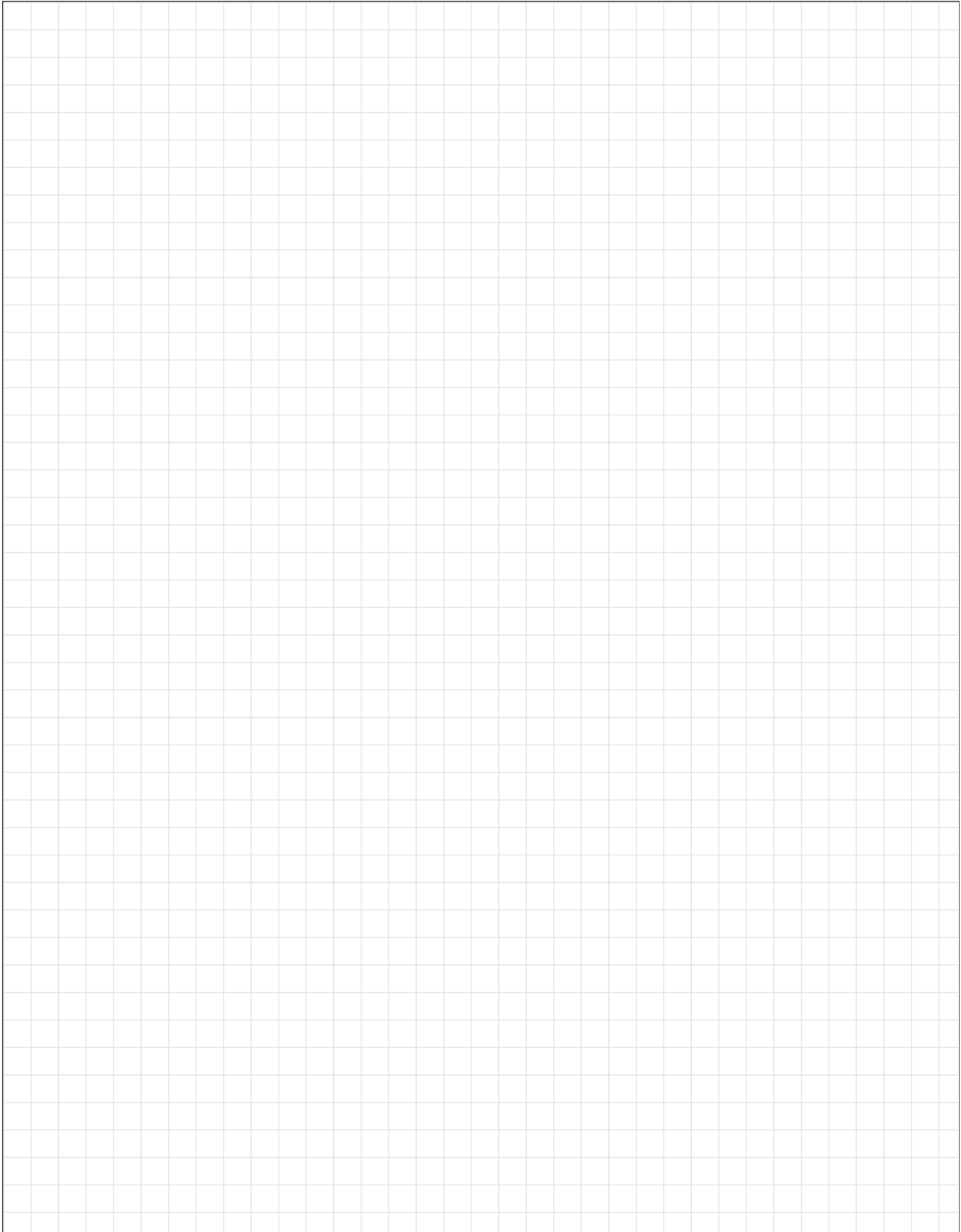




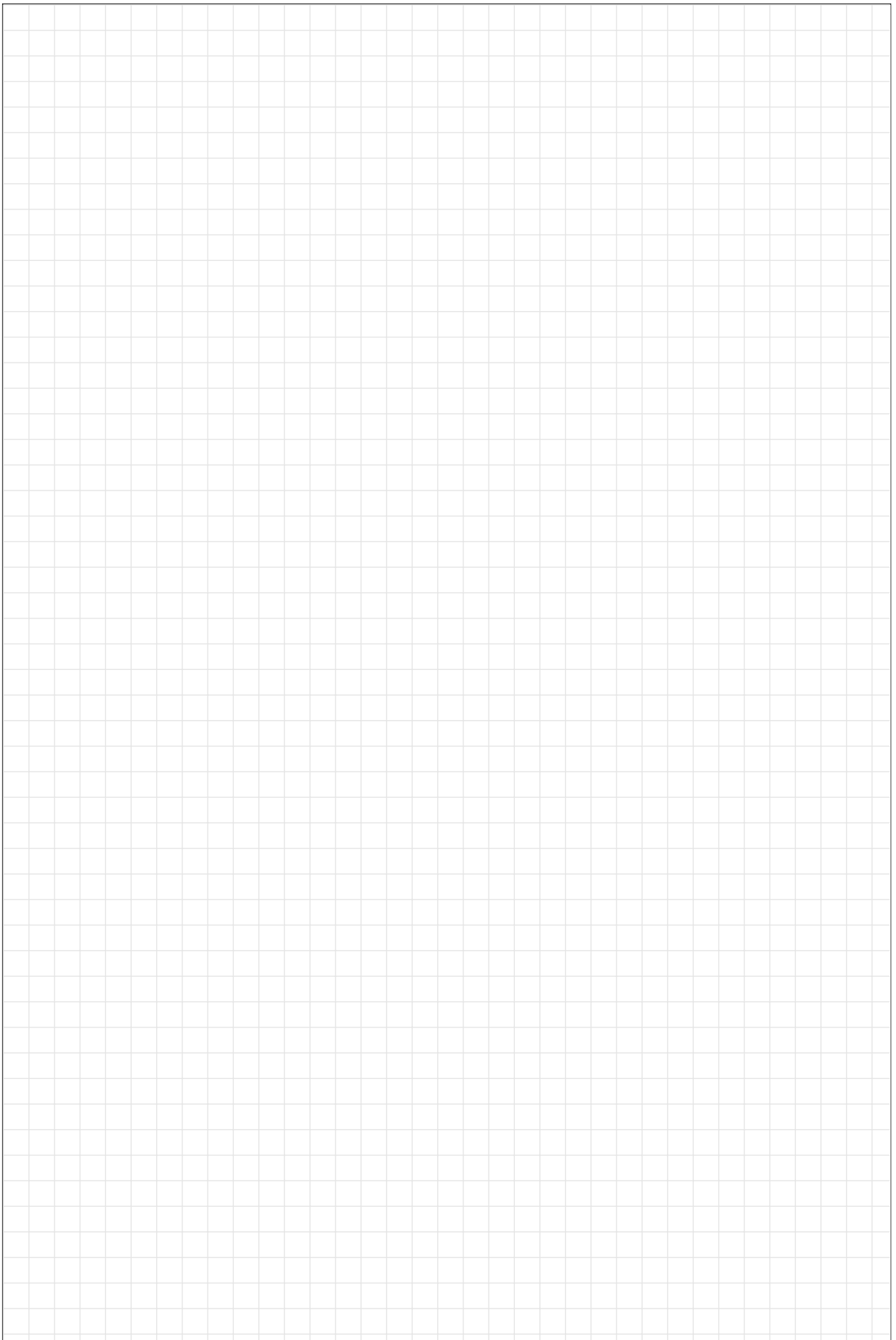
### 7.3 Dérivabilité d'un prolongement par continuité

**Proposition 7.3.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

Si une fonction  $f$  définie sur  $I \setminus \{a\}$ , a un développement limité de la forme  $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o(x - a)$ , alors  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  en posant  $\tilde{f}(a) = a_0$  et le prolongement  $\tilde{f}$  est dérivable en  $a$  avec  $\tilde{f}'(a) = a_1$ .





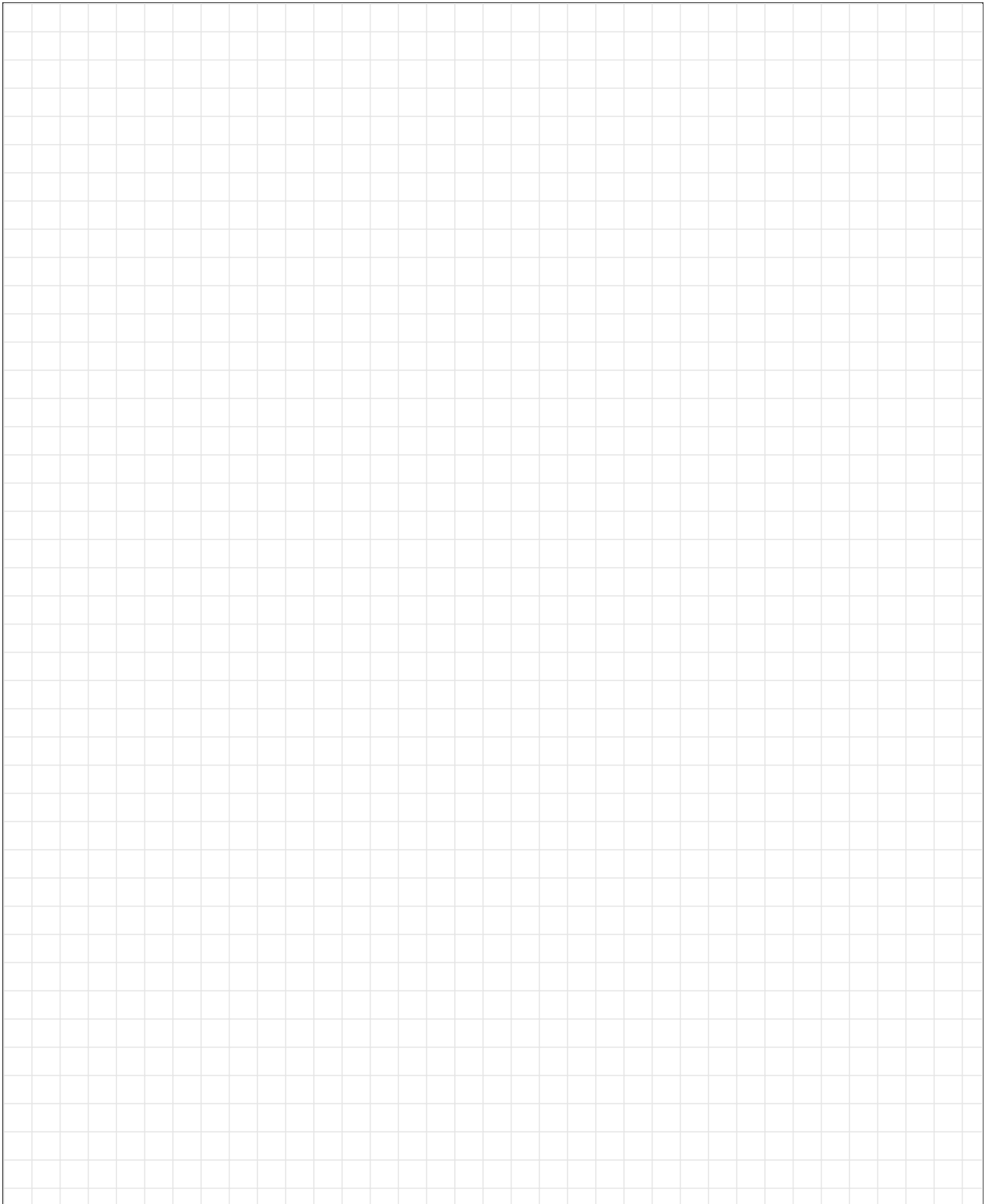


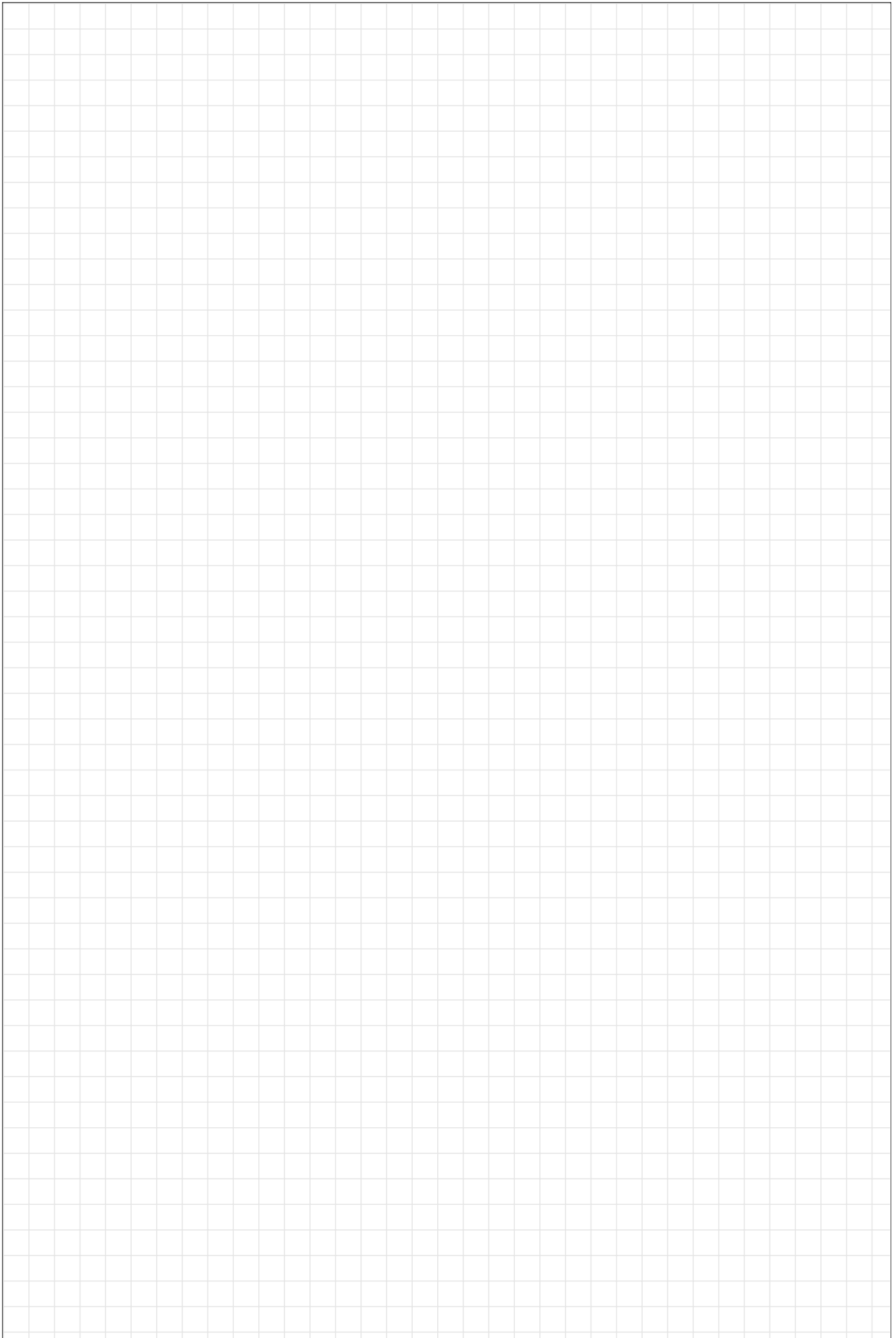
## 7.4 Position relative de la courbe et de la tangente

**Proposition 7.4.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

Si une fonction  $f$  définie sur  $I$  a un développement limité de la forme  $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_p(x - a)^p + o((x - a)^p)$  avec  $p \geq 2$  et  $a_p \neq 0$ , alors la droite  $y = a_0 + a_1(x - a)$  est tangente à la courbe représentative de  $f$  en  $a$ .

De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point  $a$  est donnée par le signe de  $a_p(x - a)^p$  : au-dessus si  $a_p(x - a)^p \geq 0$ .

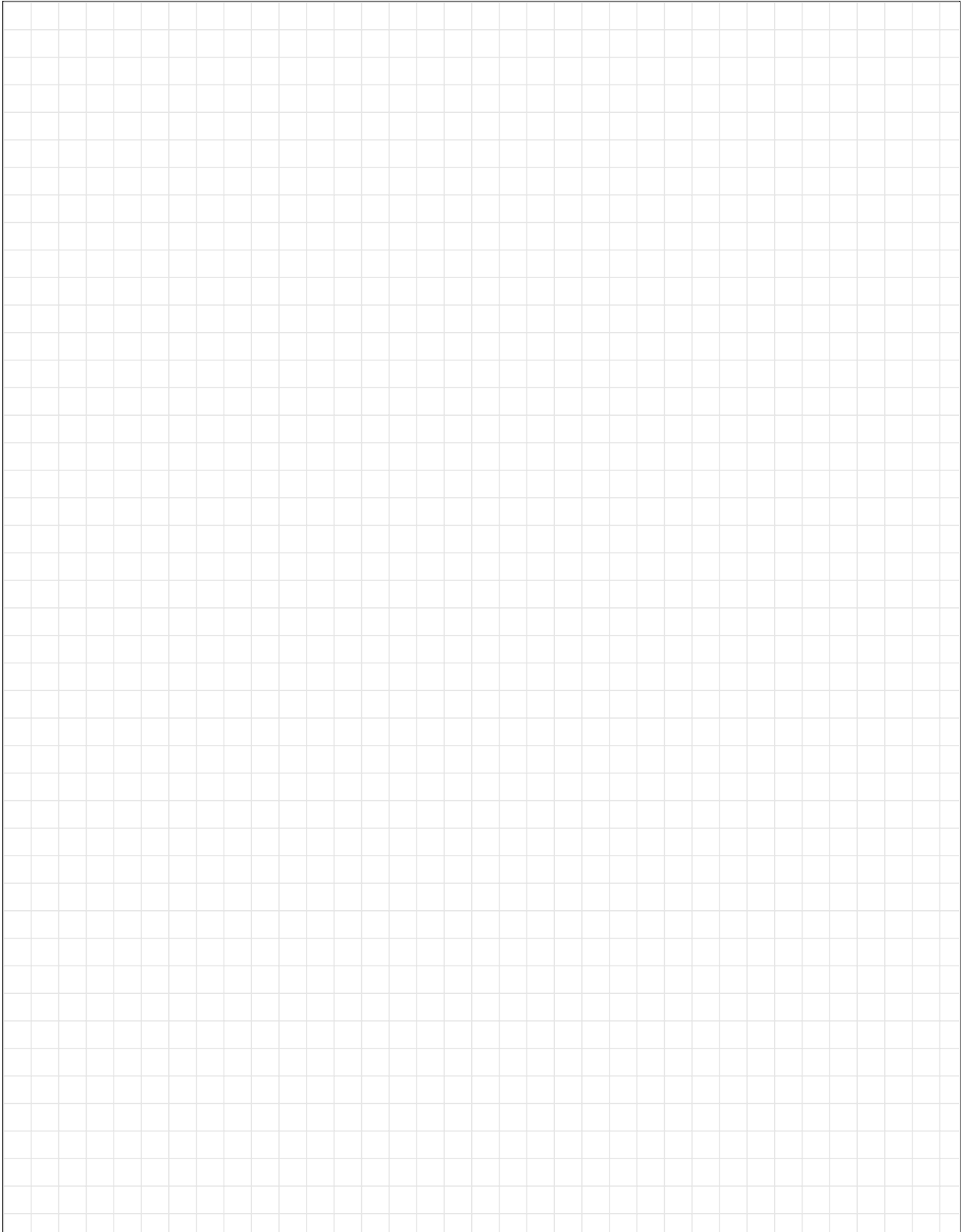


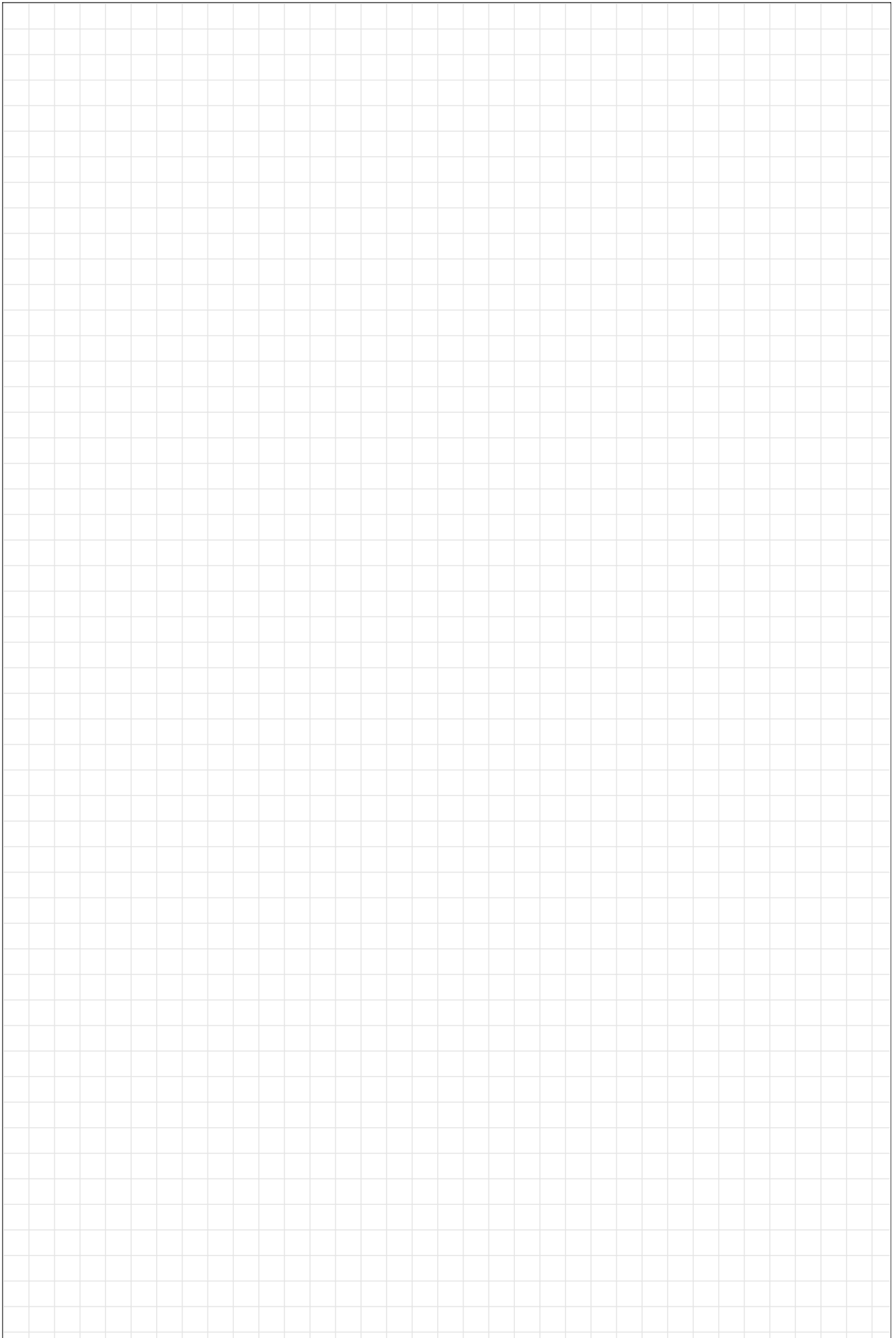


## 7.5 Étude d'un extremum

**Proposition 7.5.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

Si une fonction  $f$  définie sur  $I$  a un développement limité de la forme  $f(x) = a_0 + a_2(x - a)^2 + o((x - a)^2)$  avec  $a_2 \neq 0$ , alors la fonction  $f$  a un extremum local en  $a$  : maximum local si  $a_2 < 0$  et minimum local si  $a_2 > 0$ .





## 7.6 Asymptotes

**Proposition 7.6.** Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $+\infty$  ( ou  $-\infty$ ).

Si il existe un réel  $k$  tel que  $f(x) - kx \underset{+\infty \text{ ou } -\infty}{=} a_0 + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$  avec  $a_p \neq 0$ ,

alors la droite  $y = kx + a_0$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $+\infty$  ( ou  $-\infty$ ). De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de  $\frac{a_p}{x^p}$  au voisinage de  $+\infty$  ( ou  $-\infty$ ).

