Chapitre 19 - TD - 25 mai 2020

TD 19 - Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer l'image et le noyau de f avec le minimum de calcul.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) On a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((3,-2,1),(3,-2,1),(-3,2,-1))$ car l'image d'une base est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
d'où $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((3,-2,1))$ et $(3,-2,1)$ est non nul donc il est une famille libre alors il forme une base de $\operatorname{Im}(f)$ et $\dim \operatorname{Im} f = 1$.
D'après le théorème du rang,
$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 2$

Cours ♡ $f(x,y,z)$ a pour matrice $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On remarque que $f(1,0,1) = \vec{0}$ et $f(0,1,1) = \vec{0}$
ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et appartiennent à $\operatorname{Ker} f$ alors ils sont une base de $\operatorname{Ker} f$:
$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$

2) On lit dans A' : $f(u) = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w = \vec{0}$
$f(v) = 1 \times u + 0 \cdot v + 0 w = u$ et $f(w) = \vec{0}$
on cherche donc $u \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, $w \in \operatorname{Ker}(f)$

antécédent image

car $f(v) = u$ signifie u est une image et v est un antécédent de u.
et on n'oublie pas que (u, v, w) doit être une base.

On a $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((3, -2, 1))$ car $(3, -2, 1) \in \ker f$.
on choisit $u = (3, -2, 1)$ puis $v = (0, 0, -1)$
car $f(v) = (3, -2, 1) = u$ et $w = (0, 1, 1) \in \ker f$.
On montre que (u, v, w) est libre :
la matrice des 3 vecteurs est $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: elle a
3 pivots et est de rang 3
donc P est inversible ce qui prouve que (u, v, w) est une base

et $M_{(u,v,w)}(f) = A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A' = P^{-1} A P$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

antécédent image

$(a, b, c) \in \operatorname{Im} f \iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (a, b, c)$

$\iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 3x + 3y - 3z = a \\ -2x - 2y + 2z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$

$\iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} x + y - z = c \\ 0 = b + 2c \\ 0 = a - 3c \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b = -2c \\ a = 3c \end{cases}$ eq de l'image de f

TD 19 - Exercice 6

Soit $f_1 : x \mapsto e^{2x}$, $f_2 : x \mapsto xe^{2x}$ et $f_3 : x \mapsto x^2e^{2x}$ trois fonctions de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

1. On pose $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et donner la dimension de E.
2. On considère $\varphi : E \longrightarrow E$, définie par $f \mapsto \varphi(f) = f'$. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base (f_1, f_2, f_3). Montrer que φ est un automorphisme, donner la matrice de sa réciproque et déterminer une primitive de $x \mapsto (7-8x+3x^2)e^{2x}$.

1) On écrit $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = \vec{0} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) = 0$
$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)e^{2x} = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, \alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$
car e^{2x} est non nul $\iff$ le polynôme $\alpha + \beta X + \gamma X^2$ est nul $\iff \alpha = \beta = \gamma = 0$

Ce qui prouve que (f_1, f_2, f_3) est libre et (f_1, f_2, f_3) est une famille génératrice de E alors (f_1, f_2, f_3) est une base de E

On en déduit $\dim E = 3$

2) φ est linéaire car la dérivation est linéaire : c'est-à-dire pour tous $g, h \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ $\varphi(\alpha g + h) = (\alpha g + h)' = \alpha g' + h'$
$= \alpha \varphi(g) + \varphi(h)$.

Soit $f \in E$. f s'écrit $f = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
et $\varphi(f_1) = 2f_1$ car $f_1'(x) = 2e^{2x}$
$\varphi(f_2) = f_1 + 2f_2$ car $f_2'(x) = (1+2x)e^{2x}$
$\varphi(f_3) = 2f_2 + 2f_3$ car $f_3'(x) = (2x + 2x^2)e^{2x}$
d'où $\varphi(f) = \alpha\varphi(f_1) + \beta\varphi(f_2) + \gamma\varphi(f_3)$ par linéarité
donc $\varphi(f) \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3) = E$.

On en déduit que φ est un endomorphisme de E

3. La matrice de φ dans (f_1, f_2, f_3) est

$$A = \mathcal{M}_{(f_1,f_2,f_3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

car $\varphi(f_1) = 2f_1 + 0f_2 + 0f_3$
$\varphi(f_2) = f_1 + 2f_2$
$\varphi(f_3) = 2f_2 + 2f_3$.

La matrice A est échelonnée et a 3 pivots donc elle de rang 3 alors elle est inversible et par théorème,

φ est un automorphisme de E

$x \mapsto (7 - 8x + 3x^2)e^{2x}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans (f_1, f_2, f_3)

une primitive de cette fonction est son image par φ^{-1}

on calcule la matrice de φ^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$ on a bien $AA^{-1} = I_3$

puis

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/4 \\ -11/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

donc

$x \mapsto \left(\frac{25}{4} - \frac{11}{2}x + \frac{3}{2}x^2\right)e^{2x}$

est l'antécédent par φ donc est une primitive de $x \mapsto (7 - 8x + 3x^2)\,e^{2x}$

TD 19 - Exercice 11.1

Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par l'expression analytique suivante :

1. $\begin{cases} 3x' = x + 2\sqrt{2}y \\ 3y' = 2\sqrt{2}x - y \end{cases}$

$(x,y) \xmapsto{f} (x',y')$

On a $f(x,y) = \frac{1}{3}(x+2\sqrt{2}y,\ 2\sqrt{2}x - y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

f est linéaire car les coordonnées de l'image de (x,y) sont des combinaisons linéaires de x et y.

On écrit sa matrice dans la base canonique $B_0 = ((1,0)(0,1))$

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

matrice d'une rotation dans une BON D $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

f n'est pas une rotation.

On calcule $f\circ f$: $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1+8 & 2\sqrt{2}-2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}-2\sqrt{2} & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

alors $f\circ f = id_{\mathbb{R}^2}$ et f est linéaire donc f est une symétrie

On cherche les vecteurs invariants $f(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow (x,y) \in \operatorname{Ker}(f - id)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \operatorname{Ker}(3f - 3id) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\sqrt{2}y - 3x = 0 \\ 2\sqrt{2}x - y - 3y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2\sqrt{2}y = 0 \\ 2\sqrt{2}x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + \sqrt{2}y = 0$

$\times(-2)$; $\times(-2\sqrt{2})$

donc $\operatorname{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^2}) = \operatorname{Vect}((\sqrt{2},1))$

On cherche les vecteurs changés en leur opposé :

$f(x,y) = -(x,y) \Leftrightarrow (x,y) \in \operatorname{Ker}(f + id)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\sqrt{2}y + 3x = 0 \\ 2\sqrt{2}x - y + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2\sqrt{2}y = 0 \\ 2\sqrt{2}x + 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + y = 0$

$\Leftrightarrow y = -\sqrt{2}x \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\operatorname{Ker}(f + id_{\mathbb{R}^2}) = \operatorname{Vect}((1,-\sqrt{2}))$

Alors f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}((\sqrt{2},1))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((1,-\sqrt{2}))$

c'est à dire que : comme $(\sqrt{2},1) \perp (1,-\sqrt{2})$

f est une symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}((\sqrt{2},1))$

Dans la base $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-\sqrt{2})\right)$, la matrice de f est

$$A' = M_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-\sqrt{2})\right)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $$A' = P^{-1} A P \qquad \text{avec } P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

TD 19 - Exercice 13.1

Montrer que la transformations suivante est une rotation dont on donnera l'axe et l'angle :

1. $\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$

TD 19 - Exercice 13.4

Montrer que la transformation suivante est une réflexion dont on donnera le plan de réflexion :

4. $\begin{cases} 3x' = x + 2y + 2z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = 2x - 2y + z \end{cases}$

TD 19 - Exercice 14

Déterminer la matrice M de la rotation d'axe $\text{Vect}(1,1,1)$ et d'angle π dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.