TD 21 - Variables aléatoires

Exercice 1 : Un étudiant fait, en moyenne, une faute d'orthographe tous les 600 mots. Calculer la probabilité pour qu'il ne dépasse pas 5 fautes sur un devoir de 1800 mots.

Exercice 2 :

Soient X et Y deux v.a.r. de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p ($p \in]0,1[$). Soient $U = X+Y$ et $V = X-Y$.

Déterminer la loi du couple (U, V) ainsi que celles de U et V, leurs espérances et variance.

Exercice 3 :

On lance 2 dés à 6 faces équilibrés simultanément. On appelle X_1 la v.a.r. représentant le résultat du premier dé et Y la v.a.r. représentant la valeur maximale obtenue.

Déterminer la loi du couple (X_1, Y) et en déduire la loi de Y et son espérance.

Exercice 4 :

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules vertes et 6 boules bleues.

1. On tire 4 boules successivement, sans remise. On désigne par X la v.a.r. égale au nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On tire maintenant 4 boules successivement avec remise. Reprendre les questions précédentes avec la v.a.r. Y égale au nombre de boules rouges obtenues.
3. Comparer $E(X)$ et $E(Y)$. Commenter ce résultat.
4. Comparer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. En admettant que l'écart-type est un indice de dispersion de la v.a.r. autour de son espérance, commenter le résultat obtenu.

Exercice 5 :

Dans une urne il y a 10 boules rouges et 5 boules bleues. Soit $r \in [\![1, 10]\!]$, on appelle X_r le rang de la r-ième boule rouge tirée. Déterminer la loi de X_r dans le cas de tirages sans remise, puis dans le cas de tirages avec remise en limitant le nombre de tirages à $N > r$. *On posera $X_r = N + 1$ si on n'obtient pas de boules rouges.*

Exercice 6 :

Dans un sac, il y a $(n-2)$ boules rouge et 2 boules vertes. On tire les boules une à une sans remise. Soit X la v.a.r. égale au rang de la première boule verte tirée et Y au rang de la seconde boule verte tirée.

1. Déterminer les lois de X et Y, $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, et $V(Y)$.
2. Calculer $E(XY) - E(X)E(Y)$. Conclure.

Exercice 7 : Un dé A parfaitement équilibré porte le nombre $+1$ sur quatre faces et -2 sur les deux autres. Soit X la variable aléatoire qui à un lancer du dé A associe le nombre obtenu.

Un dé B porte les nombres $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Les probabilités d'obtenir ces nombres sont, dans l'ordre indiqué, en progression géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

On lance une fois simultanément les deux dés A et B. On note S la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la somme des deux nombres obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X, S). 2. Quelle est la loi marginale de S ? 3. X et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 :

k urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de chaque urne et on note X_n la v.a.r. égale au plus grand numéro des boules tirées.

Déterminer la loi de X_n. Écrire $E(X_n)$. Montrer que $E(X_n) \sim \dfrac{nk}{k+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 : On dispose d'un dé rouge et d'un dé vert à n faces numérotées de 1 à n. On les lance. Soit X (resp. Y) le plus grand (resp. petit) des deux numéros obtenus, R (resp. V) le numéro obtenu avec le dé rouge (resp. vert).

1. Déterminer la loi de X, puis son espérance. On rappelle la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
2. Déterminer la loi de Y, puis celle de $Z = n+1-Y$. Que remarque-t-on ? En déduire $\mathrm{E}(Y)$.
3. Déterminer $\mathrm{E}(R)$ et $\mathrm{V}(R)$.
4. Calculer XY en fonction de R et V. En déduire $\mathrm{E}(XY)$, montrer que $\mathrm{E}(XY) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ et déterminer cette somme.

5. Donner une expression simple de la somme $X+Y$ en fonction de R et V. En déduire $\mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

Exercice 10 : Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire r en bloc (sans remise) avec $3 \leqslant r \leqslant n$. On appelle X la v.a.r. égale au plus grand des numéros tirés et Y égale au plus petit.

1. Déterminer les lois de X et Y. En déduire la formule $\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{a} = \binom{b+1}{a+1}$. Calculer les espérances de X et Y.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y)
3. On définit la v.a.r. Z : « écart entre le plus grand et le plus petit numéro tirés ». Déterminer la loi de Z.

Exercice 11 : On dispose de d boules rouges et de d boules vertes, les boules rouges sont placées dans une urne U_1, les boules vertes dans une urne U_2.

On répète l'expérience consistant à choisir simultanément une boule dans chaque urne et à changer d'urne les boules tirées. On appelle X_n le nombre de boules rouges, après n expériences, dans l'urne U_1. On pose $Y_n = X_n - X_{n-1}$.

1. Déterminer $\mathrm{P}(Y_n = i | X_{n-1} = j)$. Et, en déduire que $\mathrm{E}(Y_n) = 1 - \frac{2}{d} E(X_{n-1})$.
2. En déduire $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de $\mathrm{E}(X_{n-1})$, puis en fonction de d et n. Commenter.

Exercice 12 : Un mobile évolue de façon aléatoire le long d'un axe gradué. À $t=0$, il est en O. À chaque instant entier $t=k$, avec $k \geqslant 0$, son abscisse varie de $+1$ avec une probabilité p et de -1 avec la probabilité $q = 1-p$.

On note X_n, son abscisse au temps $t=n$.

1. Montrer que les valeurs prises par X_n sont les entier relatifs $2k-n$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. Calculer $P(X_n = 2k-n)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. On pose $Y_n = \dfrac{X_n + n}{2}$. Reconnaître la loi de Y_n. Donner sans calcul $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
4. En déduire $E(X_n)$ puis $V(X_n)$. Pour quelle valeur de p, X_n est-elle centrée, c'est à dire $E(X_n) = 0$?

Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir «pile» est $p \in]0;1[$ et de $(n+1)$ urnes numérotées de 0 à n. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'urne n°k contient k boules vertes et $(n-k)$ boules rouges.

On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante : on lance n fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où «pile» a été obtenu.

Par exemple, si on a obtenu quatre «piles» au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne n°4.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de «piles» obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer $P_{(X=0)}(Y=0)$ et $P_{(X=n)}(Y=0)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\quad P_{(X=k)}(Y=1)$
4. En déduire que : $\quad P(Y=1) = \dfrac{E(X)}{n}$
5. Donner la loi de Y et son espérance.
6. Montrer que $E(XY) = \dfrac{E(X^2)}{n}$. En déduire la covariance du couple (X,Y) : $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On lance n fois une pièce de monnaie donnant «pile» avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et «face» avec la probabilité $q = 1-p$. On appelle k-chaîne de «pile» une suite de k lancers consécutifs ayant tous donnés «pile», cette suite devant être suivie d'un «face» ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note Y_k la VA égale au nombre total de k-chaînes de «pile» obtenues au cours des n lancers.

Par exemple, avec $n=11$, si l'on a obtenu les résultats $PPFFPPPFPFP$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.

1. Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.
2. Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ et donner $E(Y_{n-1})$.
3. Dans cette question, k désigne un entier de$[\![1, n-2]\!]$.
   Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note $X_{i,k}$ la VA qui vaut 1 si une k-chaîne de «pile» commence au i^{eme} lancer et qui vaut 0 sinon.
   (a) Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.
   (b) Soit $i \in [\![2, n-k]\!]$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.
   (c) Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.
   (d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$, puis déterminer $E(Y_k)$.