Chapitre 16 - Analyse asymptotique

1 Comparaison des suites

1.1 Relations de comparaison

Uniquement pour les suites réelles : on se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels. On dit que :

- (u_n) est dominée par (v_n) si à partir du rang N_0 $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.
- (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
- (u_n) est équivalente à (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

$n \longrightarrow +\infty$

exemple $u_n = n + n^2$, $v_n = 2n^2 + 1$, $w_n = \sin(n)$, $x_n = -n^2$

On a

$u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(v_n)$ car $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+n^2}{2n^2+1}$ et $0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1$

car pour $n \geq 1$ $n \leq n^2$

$w_n \underset{n \to +\infty}{=} o(u_n)$ car $\frac{w_n}{u_n} = \frac{\sin(n)}{n^2+n} \longrightarrow 0$

$\lfloor n \rfloor \underset{n \to +\infty}{\sim} n$ car $\frac{\lfloor n \rfloor}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ $\lfloor n \rfloor \leq n < \lfloor n \rfloor + 1$

On a $n \underset{n \to +\infty}{=} o(n^3)$ et $n^2 \underset{n \to +\infty}{=} o(n^3)$ alors $n + n^2 \underset{n \to +\infty}{=} o(n^3)$

car $\frac{n+n^2}{n^3} = \frac{n}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Ou encore $u_n = o(n^3)$ $v_n = o(n^3)$ alors $2u_n - v_n = o(n^3)$

car $\frac{2u_n - v_n}{n^3} = \frac{2u_n}{n^3} - \frac{v_n}{n^3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Théorème 1.1. *Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels.*
(u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 telle que $u_n = v_n.\varepsilon_n$.

petit "o"

la notation $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$ est equivalente à

$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$u_n = \varepsilon_n . v_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

1.2 Propriétés des relations de comparaison

Proposition 1.2. *Soit* $(u_n), (v_n), (w_n)$ *des suites réelles.*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *alors* $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$. symétrie

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ *alors* $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$. transitivité

Si u_n *et* v_n *ne s'annulent pas, alors* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *alors* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(u_n)$.

- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff (v_n)$ ne s'annule pas et $\frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1 \iff (u_n)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang $\frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \iff v_n \sim u_n$

- $\frac{u_n}{w_n} = \frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{w_n}{v_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$

- si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1$ comme $u_n \sim v_n$ $\frac{u_n}{v_n} \to 1$

alors $\frac{u_n - v_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n - v_n = o(v_n)$

si $u_n - v_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n - v_n + v_n}{v_n} = \frac{u_n - v_n}{v_n} + 1$

donc $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ soit $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

- si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est une suite convergente donc elle est bornée : $u_n = O(v_n)$

exemple : $u_n = n^2 - \sqrt{n}$ $v_n = n^2 + \cos(n)$

$u_n - v_n = \sqrt{n} - \cos(n) = o(n^2 + \cos(n))$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

exemple : Mq si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$

si $u_n = o(v_n)$ alors $\frac{u_n}{v_n} \to 0$ donc $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est une suite bornée d'où $u_n = O(v_n)$

1.3 Suites de référence

Remarque $e^{\gamma n} = (e^{\gamma})^n$ suite géométrique

Proposition 1.3. *Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, on a*

$$\ln^{\beta}(n) \underset{+\infty}{=} o(n^{\alpha}) \text{ et } n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma n}) \quad \text{et pour } q > 1, \text{ on a } n^{\alpha} = o(q^n).$$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha}} = 0$ pour $\alpha > 0, \beta > 0$ d'où $\ln^{\beta}(n) \underset{+\infty}{=} o(n^{\alpha})$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha}}{(e^{n})^{\gamma}} = 0$ pour $\alpha > 0, \gamma > 0$ d'où $n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma n})$

On a également : géométrique $\to b^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$ $n! = o(n^n)$

$n^{\alpha} = o(b^n)$ pour $b > 1$

Lemme : Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = A$ avec $0 \leq A < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

(idée montrer à chaque fois : 3)

Soit $B \in]A, 1[$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to A$, à partir d'un certain rang N $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq B \iff u_{n+1} \leq B . u_n$

On montre par récurrence

$\forall n \geq N$, $u_n \leq B^n . \frac{u_N}{B^N}$

C'est vrai pour $n = N$: $u_N = B^N . \frac{u_N}{B^N}$. Si c'est vrai pour un rang $n \geq N$ alors $u_{n+1} \leq B . u_n \leq B . B^n . \frac{u_N}{B^N} = B^{n+1} \frac{u_N}{B^N}$: c'est héréditaire et initialisée. Donc

$\forall n \geq N$, $0 \leq u_n \leq \boxed{\left(\frac{u_N}{B^N}\right) . B^n}$ on reconnait une suite géométrique qui tend vers 0 de raison $0 < B < 1$

donc par théorème d'encadrement $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemples de référence :

* $u_n = \frac{n^{\alpha}}{a^n}$ avec $\alpha > 0$ $a > 1$. En utilisant le lemme, on a $u_n \to 0$

donc $\boxed{n^{\alpha} \underset{n \to +\infty}{=} o(a^n)}$! utilisable

$$\frac{\frac{(n+1)^{\alpha}}{a^{n+1}}}{\frac{n^{\alpha}}{a^n}}$$

Preuve : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \frac{a^n}{a^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \frac{1}{a} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 . \frac{1}{a}$

Car $u \mapsto u^{\alpha}$ est continue en 1 : $\lim_{u \to 0} (1+u)^{\alpha} = 1$

et $0 < \frac{1}{a} < 1$ donc d'après le lemme $u_n \to 0$.

* $u_n = \frac{b^n}{n!}$ d'après le lemme $u_n \to 0$ donc $\boxed{b^n \underset{n \to +\infty}{=} o(n!)}$ utile

* $u_n = \frac{n!}{n^n}$ d'après le lemme $u_n \to 0$ donc $\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{=} o(n^n)}$ utile

Preuve.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n}{n+1}^n$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

on calcule : ~~il est connu que~~ :

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$ car $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

et on sait que $\frac{\ln(1+u)}{u} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 1$: c'est une limite usuelle.

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \frac{1}{e}$ avec $0 < \frac{1}{e} < 1$ donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Culture taupine :

formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

1.4 Opérations sur les équivalents

on peut multiplier et diviser et c'est TOUT !

Proposition 1.4. *Soit $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ des suites réelles.*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ alors $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n x_n$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ et si w_n et x_n ne s'annulent pas alors $\dfrac{u_n}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{x_n}$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si p est un entier $p \in \mathbb{N}$ alors $u_n^p \underset{+\infty}{\sim} v_n^p$.

⚠ on n'ajoute pas les équivalents

exemple : $u_n = n^2 + n$ on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2$

$v_n = -n^2 + 1$ $v_n \underset{+\infty}{\sim} -n^2$

$u_n + v_n = n + 1$ et $u_n + v_n \underset{+\infty}{\sim} n$

exemple $u_n = \dfrac{3n^2 - 8n + 2\ln(n)}{2n - \cos(n)}$ $u_n \underset{+\infty}{\sim} ?$

On a $3n^2 - 8n + 2\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} 3n^2$ et $2n - \cos(n) \underset{+\infty}{\sim} 2n$

d'où par quotient d'équivalents $u_n \sim \dfrac{3}{2} n$

note : $\dfrac{3n^2 - 8n + 2\ln(n)}{3n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par CC

Equivalents usuels :

♡ $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ car $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$

Exemple : $u_n = \left(2 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$ équivalent de u_n ? $n \to +\infty$

on a

$u_n = e^{n^2 \ln\left(2 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n^2 \ln\left(1 + \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)\right)}$

et $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\ln\left(1 + \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

On a $1 - \cos(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$ car $1 - \cos(u) = 2\sin^2\left(\dfrac{u}{2}\right)$ et $\dfrac{\sin(v)}{v} \underset{v\to 0}{\longrightarrow} 1$

$1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{1}{2n}\right)^2$ car $\sin\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ avec $v = \frac{1}{2n}$

$2 \times \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2 \times \frac{1}{2n} \times \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n^2}$

On a $\ln\left(2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ par transitivité

par produit $n^2 \ln\left(2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} n^2 \times \frac{1}{2n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$

ce qui veut dire $n^2 \ln\left(2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

la fonction exponentielle est continue en $\frac{1}{2}$ alors

$$e^{n^2 \ln\left(2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{1}{2}}$$

d'où $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{e}} \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{e}$

Exemple

$u_n = n+1$ et $v_n = n$. On a $u_n \sim v_n$

mais $e^{u_n} = e^{n+1}$ et $e^{v_n} = e^n$

donc $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \to e$ et $e^{u_n} \cancel{\sim} e^{v_n}$

on ne peut pas composer un équivalent par une fonction

mais on a $\ln(u_n) = \ln(1+n)$ $\ln(v_n) = \ln(n)$

on calcule $\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}$

par propriété fonctionnelle de ln

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \to 1$$

alors $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$

Exercice Déterminer un équivalent de $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n - 1$

1.5 Relations de comparaison et limites

Théorème 1.5. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.*
Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, on a $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell \iff v_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$
En particulier, (u_n) est convergente si et seulement si (v_n) est convergente. et dans ce cas, elles ont la même limite.

Proposition 1.6. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*

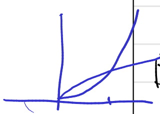
- M *Si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) converge, alors (u_n) converge vers 0.*
- M *Si $u_n = o(v_n)$ et (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge.*
- *Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

* en particulier si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

négligeable devant 1

* si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ avec (v_n) qui ne s'annule pas
alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \times \ell = 0$

* $u_n = -n^2 \longrightarrow -\infty$ mais $u_n \underset{+\infty}{=} o(e^n)$



Exercice : On définit une suite de réels (x_n) par
pour $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique solution de $\boxed{x^n + nx - 1 = 0 \quad (E_n)}$
dans $]0,1[$. Trouver un équivalent de x_n.

nx^{n-1}

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \longmapsto x^n + nx - 1$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors, d'après le théorème de bijection elle est bijective de
$]0,1[$ dans $f_n(]0,1[) =]f_n(0), f_n(1)[=]-1, n\cancel{+1}[$ 0
Alors, elle s'annule en un unique $x_n \in]0,1[$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0^n < x_n^n \leq 1^n$ car la fonction $u \mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$
et $\boxed{x_n^n + n x_n - 1 = 0} \iff x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Alors, par définition de la limite, en posant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N$ $|x_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow 0 < x_n < \frac{1}{2}$
alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < (x_n)^n < \frac{1}{2^n}$ donc par théorème d'encadrement
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$ alors $n x_n = 1 - x_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \Rightarrow \boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

2 Relations de comparaison appliquées aux fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ élément ou extrémité de I.

2.1 Fonction dominée par une autre

Définition 2.1. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} O(g)$ (éventuellement pas définie en a)

exemple $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{=} O(x^2)$ car $\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

et $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est borné sur $\mathbb{R}^*$

On a aussi $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{2}{=} O(x^2)$

2.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2.2. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a.

On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou bien $f(x) = g(x).\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

exemple : $\ln(1+x) \underset{+\infty}{=} o(x)$ car $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

et $\cancel{\ln(1+x) \underset{1}{=} o(x)}$ $\cancel{\text{car } \dfrac{\ln(1+x)}{x}}$ $\not\to$

⚠ $x^3 \underset{+\infty}{=} o(x^5)$ et $x^5 \underset{0}{=} o(x^3)$

2.3 Fonctions équivalentes

Définition 2.3. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a. On note $f \underset{a}{\sim} g$

Proposition 2.1. *Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.*

$$\text{Si } f'(a) \neq 0, \text{ alors } f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

par définition de $f'(a)$

Proposition 2.2. *Soit f et g définies sur I, ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$. On a :*

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} o(g).$$

exemple $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ limite usuelle $\quad 1-\cos(u) \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ en précédent

$e^x \underset{+\infty}{\sim} e^{x+\frac{1}{x}}$ limite

exemple

$\ln(1+x) \underset{-1}{\sim} ?$

$\boxed{\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x}$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

$\boxed{\ln(1+x) \underset{1}{\sim} \ln(2)}$ $\frac{\ln(1+x)}{\ln(2)} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$

$\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$ $\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \longrightarrow 1$ vu précédent

$\ln(1+x) \underset{1}{\sim} \ln(2x)$ car $\frac{\ln(1+x)}{\ln(2x)} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$

$\ln(1+x) \underset{1}{\sim} x^2 \ln(2x)$

$o(g) = o(-g)$

Exemple prop 2.1 $\quad \sin(u) \underset{0}{\sim} u$, $\quad e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$, $\quad \tan(u) \underset{0}{\sim} u$

exercice : $\frac{\ln(1+x) - \ln(x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} \underset{0}{\sim} ? \quad \underset{1}{\sim} ? \quad \underset{+\infty}{\sim} ?$

on a $\underbrace{\ln(1+x)}_{f-g} \underset{x \to 0}{=} o(\underbrace{\ln(x)}_{-g})$ alors (prop 2.2) $\underbrace{\ln(1+x) - \ln(x)}_{f} \underset{0}{\sim} \underbrace{-\ln(x)}_{g}$

$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} \underset{0}{\sim} 1$ alors $\frac{\ln(1+x) - \ln(x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} \underset{0}{\sim} -\ln(x)$

$\frac{\ln(1+x) - \ln(x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} \underset{1}{\sim} \frac{\ln(2)}{\sqrt{2} - 1}$

Pour f dérivable en a :

$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$

2.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 2.3. *Si $f, g, h, f_1, g_1, f_2, g_2$ sont des fonctions définies au voisinage de a, on a :*

$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \iff \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$

- symétrie $f \underset{a}{\sim} g \Longrightarrow g \underset{a}{\sim} f$
- transitivité $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h \Longrightarrow f \underset{a}{\sim} h$
- produit $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Longrightarrow f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
- quotient $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Longrightarrow \dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$

puissances entières $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f^2 \underset{a}{\sim} g^2$

$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f^n \underset{a}{\sim} g^n \quad n \in \mathbb{N}$

2.5 Utilisation des équivalents

Proposition 2.4. *Étant donnés deux fonctions f et g équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Si g a une limite finie ou infinie en a alors f aussi et $\lim_a f = \lim_a g$.

Proposition 2.5. *Étant donnés deux fonctions f et g définies sur I et équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Si g est positive sur I alors f est positive au voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur I, alors f ne s'annule pas au voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, alors la restriction de f à $I \setminus \{a\}$ ne s'annule pas au voisinage de a.

exemple : $\ln(x) - \ln(2) \underset{2}{\sim} \dfrac{x-2}{2}$

en utilisant $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)\cdot(x-a)$

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)$

(rappel $y = f(a) + f'(a)(x-a)$)

exemple : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

au voisinage de $a = 2$

$f(x) \underset{x \to 2}{\sim} \sqrt{3} - 1$

car $\dfrac{f(x)}{\sqrt{3}-1} \underset{x \to 2}{\longrightarrow} 1$

$f(x) - \sqrt{3} + 1 \underset{x \to 2}{\sim} \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2}\right)(x-2)$

$f(x) - f(2) \sim f'(2)(x-2)$

et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

au voisinage de $+\infty = a$

$f(x) = \dfrac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{x+\cancel{1}} + \sqrt{x-\cancel{1}}} \sim \dfrac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \sim \dfrac{2}{2\sqrt{x}}$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{2\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ car $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

$\dfrac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} + \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}} \longrightarrow \dfrac{2}{2} = 1$

$\longrightarrow 1 \quad + \quad \longrightarrow 1$

3 Développements limités

3.1 Définition

Définition 3.1. On dit qu'une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ élément ou extrémité de I si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(a+h) = P(h) + o(h^n)$ au voisinage de 0 (pour h).

C'est à dire $f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_{n-1}h^{n-1} + a_nh^n + o(h^n)$ $h = x - a$

ou $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

On le note $DL_n(a)$ de f.

reste négligeable devant $(x-a)^n$ au voisinage de a

$\dfrac{f(x) - P(x-a)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \iff$

exemple : $f(x) = 1 + x^2 + x^3\sin(x)$

on a $\dfrac{x^3\sin(x)}{x^2} = x\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ alors $x^3\sin(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$

On a donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

ce qui prouve que f a un DL à l'ordre 2 en $a=0$

On a également $f(x) = 1 + 0.x + (x^2 + x^3\sin(x))$

avec $x^2 + x^3\sin(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$ alors f a aussi un DL_1 en 0

on peut l'écrire $f(x) = 1 + 0.x + x\,\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1 \xrightarrow[0]{} 0$

et aussi $f(x) = 1 + o(1) = 1 + 1.\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2 \xrightarrow[0]{} 0$

qui est un DL à l'ordre 0 en 0.

On sait que comme sin est dérivable en 0, sin a un DL_1 en 0

CHAP 10

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sin(0) + \sin'(0)(x-0) + x\,\varepsilon_3(x)$ avec $\varepsilon_3 \to 0$

$o(x)$

$\sin(x) = x + o(x) = x + x\,\varepsilon_3(x)$

on calcule alors

$f(x) = 1 + x^2 + x^3(x + o(x))$

$x^3 o(x) \underset{0}{=} o(x^4)$

$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$ car $x\,\varepsilon_3(x).x^3 = x^4\varepsilon_3(x)$

donc f a un $DL_4(0)$ (DL d'ordre 4 en 0)

$f(x) = 1 + x^2 + x^3 \sin(x)$

si on veut calculer un DL en $a = 1$. on cherche

$b_0, b_1, \dots$ $\quad f(x) \underset{x \to 1}{=} b_0 + b_1(x-1) + \dots + b_n(x-1)^n + o((x-1)^n)$

On change de variables on pose $x = 1 + h \iff h = x - 1$

$x \to 1 \iff h \to 0$

Alors $f(1+h) = 1 + (1+h)^2 + (1+h)^3 \sin(1+h)$

$= 1 + 1 + 2h + h^2 + (1 + 3h + 3h^2 + h^3)\sin(1+h)$

$f(1+h) = \underbrace{2 + 2h + h^2}_{\text{poly} = DL} + (\underbrace{1 + 3h + 3h^2 + h^3}_{\text{poly} = DL})(\sin(1)\cos(h) + \cos(1)\sin(h))$

on utilise $\sin(h) \underset{h \to 0}{=} h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$ d'après une formule du cours.

et $\cos(h) \underset{h \to 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ d'après la formule de Taylor.

On calcule arbitrairement un DL à 2

$f(1+h) \underset{h \to 0}{=} 2 + 2h + h^2 + (1 + 3h + 3h^2 + h^3)\left(\sin(1)\, 1 - \sin(1)\frac{h^2}{2} + o(h^2) + \cos(1) h - \cos(1)\frac{h^3}{6} + o(h^3)\right)$

$= 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1) + \cos(1))h + \left(1 + 3\cos(1) + 3\sin(1) - \frac{\sin(1)}{2}\right)h^2$

$+ \underbrace{\left(\sin(1) h^3 + 3\cos(1) h^3 + \frac{3\sin(1)}{2} h^4 + o(h^2) + o(h^3) + \dots\right)}_{\text{tous ces termes sont négligeables devant } h^2 \text{ quand } h \to 0.}$

$f(1+h) \underset{h \to 0}{=} 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1) + \cos(1))h + \left(1 + 3\cos(1) + \frac{5}{2}\sin(1)\right)h^2 + o(h^2)$

c'est un DL à l'ordre 2 en 1 de f

$f(x) \underset{x \to 1}{=} 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1) + \cos(1))(x-1)$
$+ \left(1 + 3\cos(1) + \frac{5}{2}\sin(1)\right)(x-1)^2$
$+ o((x-1)^2)$

3.2 Exemple fondamental

Proposition 3.1. *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \dfrac{1}{1-u} \end{array}$ *admet des développements limités à l'ordre n, pour tout entier n, au voisinage de* 0 :

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n)$$

On utilise la formule : pour $u \neq 1$

$$1+u+u^2+u^3+u^4+\cdots+u^n = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} = \frac{1}{1-u} - \frac{u^{n+1}}{1-u}$$

alors

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\cdots+u^n+\frac{u^{n+1}}{1-u} \quad / \text{ pour } u\neq 1$$

on calcule

$$\frac{\frac{u^{n+1}}{1-u}}{u^n} = \frac{u}{1-u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0 \quad \text{donc } \frac{u^{n+1}}{1-u} \underset{u\to 0}{=} o(u^n)$$

alors on a le $DL_n(0)$ de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$

$$\boxed{\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n)}$$

Mieux : on pose $x=-u$, on obtient

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

car si $f(u)=o(u^n)$ alors $\frac{f(u)}{u^n} \xrightarrow[u\to 0]{} 0 \Rightarrow \frac{f(-x)}{(-x)^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\Rightarrow \frac{f(-x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \Rightarrow f(-x)=o(x^n)$

Encore mieux on peut intégrer les équivalents : au voisinage de 0 $1+x>0$

$$\left[\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \ln(1+0)+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})\right.$$

(voir th 4.1)

autre exemple $\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n)$

et on pose $u=-x^2$ alors $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n})$

qui donne par intégration :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \cancel{\operatorname{Arctan}(0)}+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})}$$

exercice :

Calculer un $DL_2(0)$ de $g(x) = \dfrac{1}{1-x} + \sin(x)$

on a $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$ DL_2 de $\dfrac{1}{1-x}$

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ $DL_3(0)$

$\underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$ $DL_2(0)$

on somme :

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + x^2 + o(x^2)}$$

on peut aussi écrire $\sin(x) = x + o(x)$ $DL_1(0)$

qui donne en sommant

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \underbrace{o(x) + x^2 + o(x^2)}_{o(x)}$$

$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + o(x)$ $DL_1(0)$ de g

$O(x)$ $O(x^2)$ $o(x^2)$

Calculons un $DL_3(0)$ de $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{1-x}$

On écrit $h(x) = \sin(x) \times \dfrac{1}{1-x}$

on calcule le produit

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + x + x^2 + o(x^2)\right)$$

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + o(x^3) + o(x^4) + o(x^5) + \dots$$

on simplifie en

$DL_3(0)$ de $\dfrac{\sin(x)}{1-x}$

$$\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)}$$

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + x + o(x)\right) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$+o(x^2)+o(x^4)+o(x^4)$

$DL_2(0)\ h(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + o(x^2)$

3.3 Unicité du développement limité

Proposition 3.2. *Si f est une fonction admettant deux développements limités à l'ordre n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors ces développements sont égaux.*

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ *et* $f(x) \underset{a}{=} \boxed{\sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{reste}}$, *alors* $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = b_k$.

partie régulière

On appelera le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ *la partie régulière du DL de f à l'ordre n en a.*

Corollaire 3.3. *Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors pour tout entier $p \leqslant n$, f admet un développement limité à l'ordre p obtenu en tronquant le développement d'ordre n.*

Corollaire 3.4. *Soit f admettant un développement limité en 0 de partie régulière P. Si f est paire, alors P est pair. Si f est impaire, alors P est impair.*

Exemple $f(x) = \frac{1}{1+x}$ on veut un DL_3 en $a=4$

Méthode n° 1 : on utilise la formule de Taylor-Young.

Méthode n° 2 : on change de variables $h = x-4 \Leftrightarrow x = 4+h$

$f(4+h) = \frac{1}{5+h} = \frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{h}{5}}$

or on sait que $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ (cours)

et on pose $u = \frac{h}{5}$

3.4 Forme normalisée d'un développement limité

Définition 3.2. Soit f une application admettant un développement limité l'ordre $n+p$ au voisinage de a. On appelle forme normalisée du développement limité de f, l'écriture :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)\right) \text{ où } a_0 \neq 0.$$

Proposition 3.5. *Si f a un développement limité normalisé $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)\right)$ où $a_0 \neq 0$, alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$ et f est de même signe que $a_0 h^p$.*

3.5 Translation d'un développement limité

Proposition 3.6. *Si f est une fonction vérifiant $f(a+h) = g(h)$ pour tout h dans l'intervalle I contenant 0, et si g admet un développement limité à l'ordre n en 0 : $g(x) \underset{0}{=} P(x) + o(x^n)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n)$.*

3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si la fonction g définie par $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n sur l'intervalle $J_+ = \left\{ \frac{1}{x} \middle| x \in I \cap \mathbb{R}_+^* \right\}$ (respectivement sur $J_- = \left\{ \frac{1}{x} \middle| x \in I \cap \mathbb{R}_-^* \right\}$), alors on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Si $g(u) \underset{0^+}{=} P(u) + o(u^n)$, alors $f(x) \underset{+\infty}{=} P(\frac{1}{x}) + o(\frac{1}{x^n})$.

4 Formule de Taylor-Young

4.1 Intégration terme à terme d'un DL

Théorème 4.1. *Soit I un intervalle contenant a et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue possédant un développement limité à l'ordre n en a qui est :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Alors toute primitive F de f sur I possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en a qui est :

$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.2. *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ avec $n \in \mathbb{N}$.*
f possède en tout point a de I un développement limité d'ordre n donné par :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \qquad \textit{ou}$$

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

5 Opérations sur les développement limités

5.1 Somme et produit

Proposition 5.1. *Soit f et g deux fonctions réelles admettant en a des développements limités à l'ordre n :*

$$f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n \text{ et } g(x) \underset{a}{=} Q(x-a) + o(x-a)^n$$

où Pet Q sont des pllynômes réels de degré au plus égal à n.
Alors les fonctions $f+g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n qui sont :

$$(f+g)(x) \underset{a}{=} P(x-a) + Q(x-a) + o\left((x-a)^n\right).$$

$$(fg)(x) \underset{a}{=} R(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$$

où R est le polynôme obtenu tronquant le produit PQ au degré n.

5.2 Dérivation d'un développement limité

Proposition 5.2. *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I contenant a, admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a, alors ce développement s'obtient en dérivant celui de f :

$$f'(x) \underset{a}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-a)^{k-1} + o(x-a)^{n-1}.$$

5.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 5.3. *soit f une fonction définie sur I admettant un $Dl_n(a)$ en $a \in I$, telle que $f(I) \subset J$, avec $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$.*

Soit g une fonction définie sur J admettant un DL_n en $b = f(a)$ avec $g(u) \underset{b}{=} Q(u-b) + o(u-b)^n$.

Alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme composé $Q(P(X))$:

$$g \circ f(x) \underset{a}{=} \text{ reste de la division de } Q(P(x-a)) \text{ par } (x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^n\right).$$

5.4 Développement limité d'un quotient

Proposition 5.4. *Si u est une fonction telle que $\lim_a u = 0$ et si u a un développement limité à l'ordre n en a, alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un $DL_n(a)$.*

Si $u(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$, alors $\dfrac{1}{1-u(x)} \underset{a}{=} 1 + P(x-a) + P^2(x-a) + P^3(x-a) + \cdots + P^n(x-a) + o(x-a)^n$: le développement limité s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $1 + P(X) + P^2(X) + \cdots + P^n(X)$.

6 Formulaire

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &\underset{0}{=} 1+x+x^2+\cdots+x^n+\circ(x^n)\\
(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)\\
\ln(1+x) &\underset{0}{=} x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}x^n+\circ(x^n)\\
\arctan x &\underset{0}{=} x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^p\tfrac{1}{2p+1}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})\\
e^x &\underset{0}{=} 1+\tfrac{1}{1!}x+\tfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\tfrac{1}{n!}x^n+\circ(x^n)\\
\operatorname{ch} x &\underset{0}{=} 1+\tfrac{1}{2!}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4+\cdots+\tfrac{1}{(2p)!}x^{2p}+\circ(x^{2p})\\
\operatorname{sh} x &\underset{0}{=} x+\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5+\cdots+\tfrac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})\\
\cos x &\underset{0}{=} 1-\tfrac{1}{2!}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^p\tfrac{1}{(2p)!}x^{2p}+\circ(x^{2p})\\
\sin x &\underset{0}{=} x-\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^p\tfrac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})\\
\tan x &\underset{0}{=} x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{2}{15}x^5+\tfrac{17}{315}x^7+\circ(x^8)
\end{aligned}
$$

7 Applications

7.1 Étude de limites

Proposition 7.1. *Si une fonction f a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f a une limite en a qui vaut a_0.*

7.2 Prolongement par continuité

Proposition 7.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.

7.3 Dérivabilité d'un prolongement par continuité

Proposition 7.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $\tilde{f}(a) = a_0$ et le prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = a_1$.

7.4 Position relative de la courbe et de la tangente

Proposition 7.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $p \geqslant 2$ et $a_p \neq 0$, alors la droite $y = a_0 + a_1(x-a)$ est tangente à la courbe représentative de f en a.
De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point a est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$: au-dessus si $a_p(x-a)^p \geqslant 0$.

7.5 Étude d'un extremum

Proposition 7.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$ avec $a_2 \neq 0$, alors la fonction f a un extremum local en a : maximum local si $a_2 < 0$ et minimum local si $a_2 > 0$.

7.6 Asymptotes

Proposition 7.6. *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).*
Si il existe un réel k tel que $f(x)-kx \underset{+\infty \text{ ou } -\infty}{=} a_0 + \dfrac{a_p}{x^p} + o\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$ *avec $a_p \neq 0$,*
alors la droite $y = kx + a_0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$). De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{a_p}{x^p}$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).