Mathématique - Corrigé Devoir Maison n°16

Exercice 1

Cherchons l'ensemble des vecteurs invariants par f :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(f - Id) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda u_1 \text{ avec } u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ On a donc } Ker(f - Id) = Vect(u_1)$$

L'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite vectorielle engendrée par u_1.

Soit le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $u_1 \perp u_2$ et $||u_1|| = ||u_2|| = 1$. On pose alors $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

La famille $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est $P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Son inverse est $P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} = {}^tP_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

La matrice de f dans la nouvelle base est donnée par la formule : $Mat_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} Mat_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$.

Ce qui fait, après calculs : $Mat_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ puis $Mat_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On reconnait la matrice d'une rotation $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale directe.

$\boxed{f \text{ est la rotation d'axe } Vect(u_1), \text{ orienté par } u_1, \text{ et d'angle } \theta = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$

Exercice 2

I- Étude d'une application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

1. φ_B est une application de l'espace vectoriel $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ dans lui-même telle que :
   $\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_B(X_1 + \lambda X_2) = B \times (X_1 + \lambda X_2) = B \times X_1 + \lambda B \times X_2 = \varphi_B(X_1) + \lambda \varphi_B(X_2)$
   Donc φ_B est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
2. (a) Par un calcul de pivot $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour tout $Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, l'équation $\varphi_B(X) = B \times X = Y$ admet une unique solution $X = B^{-1} \times Y$.
   φ_B est bijective et donc surjective.

(b) $\varphi_B(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times E_{1,1} + 0 \times E_{1,2} + 2 \times E_{2,1} + 0 \times E_{2,2}$

$\varphi_B(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \times E_{1,1} + 1 \times E_{1,2} + 0 \times E_{2,1} + 2 \times E_{2,2}$

$\varphi_B(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times E_{1,1} + 0 \times E_{1,2} + 3 \times E_{2,1} + 0 \times E_{2,2}$

$\varphi_B(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \times E_{1,1} + 1 \times E_{1,2} + 0 \times E_{2,1} + 3 \times E_{2,2}$

La matrice de φ_B dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est constituée colonne par colonne des coordonnées (dans cette base) des images des vecteurs de cette base.

$Mat(\varphi_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Pour toute matrice $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on a

$\varphi_B(X) = B \times X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2z & 2y-2t \\ 2x-2z & 2y-2t \end{pmatrix}$.

Une matrice comme $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ne peut pas avoir d'antécédent par φ_B car $1 \neq 3$.

φ_B n'est pas surjective et donc φ_B n'est pas bijective.

II- Calcul des puissances n-ième d'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

4. $M_a = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 2 & -a & 2 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$

5. Par la méthode du pivot de Gauss :

$M_a \underset{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -a & 2 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \underset{\ell_2 \leftarrow 2\ell_2 + a\ell_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -a & 2 \\ 0 & 2-a^2 & 2a \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \underset{\ell_3 \leftrightarrow \ell_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -a & 2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 2-a^2 & 2a \end{pmatrix}$

$\underset{\ell_3 \leftrightarrow \ell_3 + (a^2-2)\ell_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -a & 2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 4a-a^3 \end{pmatrix}$

On remarque que $4a - a^3 = 0 \Longleftrightarrow a = -2$ ou $a = 0$ ou $a = 2$.

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ alors le rang de M_a vaut 3.
- si $a \in \{-2, 0, 2\}$ alors le rang de M_a vaut 2.

6.
- si $a = -2$ alors :

$(x, y, z) \in \text{Ker } f_{-2} \Longleftrightarrow f_{-2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc Ker $(f_{-2}) = \text{Vect}(u_3)$.

- si $a = 0$ alors :

$(x, y, z) \in \text{Ker } f_0 \Longleftrightarrow f_0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc Ker $(f_0) = \text{Vect}(u_1)$.

- si $a=2$ alors :

  $(x,y,z)\in \text{Ker } f_2 \Longleftrightarrow f_2\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x+y=0\\ 2x-2y+2z=0\\ y-2z=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

  Donc Ker $(f_2)=\text{Vect}(u_2)$.

Pour la suite, on choisit $a=-2$ et on définit les vecteurs $u_1=(1,0,-1)$, $u_2=(1,2,1)$ et $u_3=(1,-2,1)$.

7. (a) Le produit mixte des trois vecteurs : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0$

   Donc $\mathscr{B}_1=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $P_{\mathscr{B}_0\mathscr{B}_1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et il faut calculer son inverse. On pose $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$

   et on résout le système : $\begin{cases} x & +y & +z & = & a\\ & 2y & -2z & = & b\\ -x & +y & +z & = & c\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} & x & = & (a-c)/2\\ 2y & -2z & = & b\\ y & +z & = & (a+c)/2\end{cases}$

   $\Longleftrightarrow \begin{cases} x & = & (a-c)/2\\ y & = & (a+b+c)/4\\ z & = & (a-b+c)/4\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2\\ 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

   (c) $f_{-2}(u_1)=(2,0,-2)=2.u_1$ $\quad f_{-2}(u_2)=(4,8,4)=4.u_2$ $\quad f_{-2}(u_3)=(0,0,0)=0.u_3$

   On a donc $D_{-2}=Mat_{\mathscr{B}_1}(f_{-2})=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

   (d) Pour tout $n\geqslant 1$ on a ${D_{_2}}^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0\\ 0 & 4^n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\left(Mat_{\mathscr{B}_1}(f_{-2})\right)^n=Mat_{\mathscr{B}_1}((f_{-2})^n)$

   Par les formules de changement de base :

   $(M_{-2})^n=\left(Mat_{\mathscr{B}_0}(f_{-2})\right)^n=Mat_{\mathscr{B}_0}((f_{-2})^n)=P_{\mathscr{B}_0\mathscr{B}_1}\times {D_{_2}}^n\times P_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_0}$

   Ce qui fait ${M_{-2}}^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1}+4^{n-1} & 4^{n-1} & -2^{n-1}+4^{n-1}\\ 4^n/2 & 4^n/2 & 4^n/2\\ -2^{n-1}+4^{n-1} & -4^{n-1} & 2^{n-1}+4^{n-1}\end{pmatrix}$

   (e) On constate que pour $n=0$, la formule ne donne pas ${M_{-2}}^0=I$.

   De plus, le rang de M_{-2} : $\text{rg}(M_{-2})=2$ n'est pas maximal, alors M_{-2} n'est pas inversible.

   L'expression de ${M_{-2}}^n$ ainsi obtenue ne peut pas se généraliser à tout entier relatif n.