Mathématique - Corrigé Devoir Maison n°17

Exercice 1

1. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{2} = \binom{n+3}{3}$

   - *initialisation*
     Pour $n = 0$, on vérifie l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{k+2}{2} = 1 = \binom{0+3}{3}$
   - *hérédité*
     En supposant la proposition établie au rang n, on a au rang $n+1$:
     $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+2}{2} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+2}{2} + \binom{n+3}{2} = \binom{n+3}{3} + \binom{n+3}{2} = \binom{(n+1)+3}{3}$
     D'après la formule de Pascal $\displaystyle\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$

   On a donc montré par récurrence que pour tout n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{2} = \binom{n+3}{3}$

   (b) Sachant que $\displaystyle\binom{k+2}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$ et $\displaystyle\binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$, on vient de montrer que :
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$ ce qui donne la réponse suivante :

   $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3}}$$

2. (a) L'expérience consiste à extraire une boule dans l'urne $\mathscr{U}$ contenant deux boules blanches et une boule noire. Il y a équiprobabilité et $\boxed{P(B_1) = \frac{2}{3}}$

   (b) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$ d'après la formule des probabilités composées.
   En effet, sachant qu'on a pris une blanche au premier tirage, l'urne $\mathscr{U}$ contient alors trois blanches et une noire pour le deuxième tirage. On a donc $P_{B_1}(B_2) = \dfrac{3}{4}$.
   De même $P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P_{N_1}(B_2) = (1 - P(B_1))P_{N_1}(B_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.
   En effet, sachant qu'on a pris une noire au premier tirage, l'urne $\mathscr{U}$ contient alors deux blanches et deux noires pour le deuxième tirage. On a donc $P_{N_1}(B_2) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
   En appliquant la formule des probabilités totales, avec $\{B_1, N_1\}$ système complet d'événements :
   $P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

   (c) En appliquant la définition d'une probabilité conditionnelle :
   $$P_{B_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

3. (a) $P(A_1) = P(N_1) = \dfrac{1}{3}$ est un cas particulier.

$P(A_2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$

D'une manière plus générale, obtenir une première boule noire au k tirage se décompose en :

- obtenir une blanche au premier tirage, de probabilité $P(B_1) = \dfrac{2}{3}$
- puis, obtenir une blanche au deuxième tirage, de probabilité $P_{B_1}(B_2) = \dfrac{3}{4}$

  $\vdots$
- puis obtenir une blanche au $(k-1)$-ème tirage, de probabilité $P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) = \dfrac{k}{k+1}$
- Pour finir, obtenir une première noire au k-ième tirage, de probabilité $P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(N_k) = \dfrac{1}{k+2}$

On applique la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}P(A_k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap N_k)\\ &= P(B_1).P_{B_1}(B_2).P_{B_1 \cap B_2}(B_3).\dots.P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}).P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(N_k)\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{k+2} = \frac{2}{(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(A_k) = \dfrac{2}{(k+1)(k+2)}}$ (valable y compris pour $k = 1$)

(b) $M_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et la réunion est disjointe. On trouve donc :

$$P(M_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

Pour simplifier cette somme, on décompose en éléments simples :

$$\frac{2}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2} = \frac{(a+b)k + 2a + b}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} \right) = 1 - \frac{2}{n+2} = \frac{n}{n+2}$

car il s'agit d'une somme télescopique.

Donc $\boxed{P(\text{"obtenir au moins une boule noire lors des } n \text{ premiers tirages"}) = \dfrac{n}{n+2}}$

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(M_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+2} = 1$ ce qui s'interprète par « on est quasi-sûr d'avoir une noire un moment ou à un autre ».

Remarque : On aurait pu calculer $P(\overline{M_n})$ car $\overline{M_n} = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$ ce qui donne $P(\overline{M_n}) = \dfrac{2}{n+2}$ avec la formule des probabilités composées.

4. (a) Obtenir successivement k boules blanches puis $n-k$ boules noires se décompose en :

- obtenir une blanche au premier tirage, de probabilité $P(B_1) = \dfrac{2}{3}$
- puis, obtenir une blanche au deuxième tirage, de probabilité $P_{B_1}(B_2) = \dfrac{3}{4}$

  $\vdots$
- puis obtenir une blanche au $k$ème tirage, de probabilité $P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k) = \dfrac{k+1}{k+2}$

- obtenir une première noire au $(k+1)$-ième tirage, de probabilité
$$P_{B_1\cap\cdots\cap B_k}(N_{k+1}) = \frac{1}{k+3}$$
- obtenir une deuxième noire au $(k+2)$-ième tirage, de probabilité
$$P_{B_1\cap\cdots\cap B_k\cap N_{k+1}}(N_{k+2}) = \frac{2}{k+4}$$

$\vdots$

- obtenir une $(n-k)$ième noire au n-ième tirage, de probabilité
$$P_{B_1\cap\cdots\cap B_k\cap N_{k+1}\cdots N_{n-1}}(N_n) = \frac{n-k}{n+2}$$

On applique la formule des probabilités composées et cela donne :
P("on tire successivement k boules blanches puis $n-k$ boules noires")
$= \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{k+1}{k+2}\times\frac{1}{k+3}\times\frac{2}{k+4}\times\cdots\times\frac{n-k}{n+2} = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$

(b) Cette probabilité vaut la précédente, car le produit des numérateurs (aux permutations près dues aux ordres d'apparitions successifs de s blanches et/ou noires) fera $2\times 3\cdots\times(k+1)\times 1\times 2\times\cdots\times(n-k)$ et le produit des dénominateurs donnera $3\times\cdots\times(n+2)$.

$$\boxed{P(\text{"lors des } n \text{ premiers tirages, on a } k \text{ blanches en tout dans un ordre choisi"}) = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}}.$$

(c) Il y a $\binom{n}{k}$ façons de sélectionner k rangs parmi n. Il y a donc $\binom{n}{k}$ façons de choisir un ordre d'apparition de k blanches et de $n-k$ noires.

C_k est la réunion disjointe des $\binom{n}{k}$ événements du type de la question précédente. Chacun de ces événements à une probabilité de $\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$.

Donc $P(C_k) = \binom{n}{k}\times\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$

5. (a)
- Pour tout k compris entre 0 et n, on a $C_k \neq \emptyset$ (car sa probabilité est non nulle par exemple)
- Pour tout $(i,j)\in[[0,n]]^2$ avec $i\neq j$, on a $C_i\cap C_j = \emptyset$: il n'y a qu'un seul nombre de blanches obtenues lors des n tirages.
- On a $\bigcup_{k=0}^{n} C_k = \Omega$: tous les résultats de l'expérience sont dans un des C_k (celui qui correspond au nombre de blanches obtenues).

Donc $\boxed{\text{les événements } C_k \text{ (pour } 0\leq k\leq n) \text{ forment un système complet.}}$

(b) On remarque que, sachant C_k, l'urne contient $k+2$ blanches et $n-k+1$ noires pour le $(n+1)$-ième tirage.

Dans ces conditions $P_{C_k}(A_{n+1}) = \frac{k+2}{n+3}$

On utilise la formule des probabilités totales :
$$P(B_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} P(C_k)P_{C_k}(A_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2(k+1)(k+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{2}{3}$$

Donc $\boxed{P(B_{n+1}) = \frac{2}{3}}$ et on constate que cette probabilité ne dépend pas de n...

Exercice 2

Question préliminaire :

Il s'agit de l'espérance d'une V.A.R. suivant une loi $\mathscr{B}(n,p)$: $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np}$

1. On définit les événements :
   - A " on joue avec la pièce A",
   - $B = \overline{A}$ " on joue avec la pièce A"
   - pour $k \geqslant 1$, H_k "obtenir "pile" au k-ième lancer.

   On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{A, B\}$.
   $P(H_1) = P(A)P_A(H_1) + P(B)P_B(H_1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{11}{18}$
2. Par la définition d'une probabilité conditionnelle :
   $P_{H_1}(A) = \dfrac{P(A \cap H_1)}{P(H_1)} = \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{18}} = \dfrac{3}{11}$
3. (a) Sachant que l'on joue avec la pièce A, X compte le nombre de succès dans une suite de n expériences identiques et indépendantes à deux issues (avec la probabilité de succès qui vaut $\frac{1}{2}$).

   On en déduit que $X_{|A}$ suit une loi binomiale. Plus précisément $\boxed{X_{|A} \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{2})}$

   (b)
   - L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = [[0, n]]$
   - $\forall k \in [[0, n]]$, en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{A, B\}$:
     $P(X = k) = P(A)P_A(X = k) + P(B)P_B(X = k) = \dfrac{1}{3}\binom{n}{k}\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{2}{3}\binom{n}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k}$

     D'où $\boxed{P(X = k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{3}\left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{2^{k+1}}{3^n}\right)}$

   (c) Par définition $P_{X=0}(A) = \dfrac{P(A \cap (X = 0))}{P(X = 0)} = \dfrac{\frac{1}{3}\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}\frac{1}{2^n} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

   D'où $\boxed{P_{X=0}(A) = \dfrac{3^n}{3^n + 2^{n+1}}}$

   (d) Par définition
   $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \dfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{2}{3}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2n}{3}$

   D'où $\boxed{E(X) = \dfrac{11n}{18}}$