# Chapitre 17 - Espaces Vectoriels de Dimension Finie

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Bases en dimension finie

### 1.1 Dimension finie

**Définition 1.1.** On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que $E$ est de dimension infinie.

Exemple :

* $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie car $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice finie à 2 vecteurs
tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$
(Card famille $= 2$)

* $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie car
$((1,0,0),(0,1,0),(0,2,0)(0,3,0),(0,4,0),(0,0,0),(0,0,1))$
est une famille génératrice à 7 vecteurs
(mais elle n'est pas libre)

* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ens des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
est de dimension infinie

* $\mathbb{R}[X]$ l'ens de tous les polynômes
est de dimension infinie

Preuve : Supposons que $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{R}[X]$. On note $q$ le plus grand des $n$ degrés $\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_n$
$q = \max(\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_n)$
alors $X^{q+1}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de $P_1, \dots, P_n$ ce qui contredit le fait que $(P_1, \dots, P_n)$ est génératrice

- $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension finie car $(1, X, X^2, X^3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ens des suites réelles est de dimension infinie.

## 1.2 Existence de bases en dimension finie

**Théorème 1.1** (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E. Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.*

**Corollaire 1.2.** *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.*

**Corollaire 1.3** (Théorème de la base extraite)**.** *De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E, on peut extraire une base de E.*

Remarques :

on prend $E$ engendré $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ famille génératrice
$(x_1, x_2, \dots x_r)$ une famille libre.

on étudie $(x_1, x_2, \dots, x_r, g_1) \longrightarrow$ liée (pas libre)

$g_1 = \sum_{i=1}^{r} g_{1,i}\, x_i$

libre $(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1})$ $\quad (x_1, x_2, \dots, x_r)$ libre

et on recommence avec $g_2$

exemple : Dans $\mathbb{R}^4$, et on pose

$G = \mathrm{Vect}\big(\cancel{(0,0,0,0)}, (-1,-1,0,0), (1,0,0,1), \cancel{(2,-2,0,0)}, (2,0,-1,0), (0,2,-1,0)\big)$

G est un sev donc G est un ev qui a une famille génératrice à 6 vecteurs donc G est de dimension finie. Cherchons une base :

on pose $x_1 = (1,-1,0,0)$ $\quad (x_1)$ est une famille libre car $x_1 \neq 0$

$x_2 = (1,0,0,1)$ $\quad (x_1, x_2)$ est une famille libre (pas colinéaires)

$x_3 = (2,-2,0,0)$ est combinaison linéaire de $(x_1, x_2)$ $\quad x_3 = 2x_1$

$x_4 = (2,0,-1,0)$. On étudie $(x_1, x_2, x_4)$ : on suppose que

$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_4 = \vec{0}$ avec $\alpha, \beta, \gamma$ réels

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ alors $(x_1, x_2, x_4)$ est libre

$x_5 = (0,2,-1,0)$ est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, x_4)$ : $x_5 = x_4 - 2x_1$

$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ sont combinaisons linéaires de $(x_1, x_2, x_4)$ donc $(x_1, x_2, x_4)$ est une famille génératrice de $G$

et $(x_1, x_2, x_4)$ est libre alors c'est une base de $G$

## 1.3 Cardinal des familles libres

**Lemme 1.4.** *Si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une famille libre et la famille $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ est liée, alors $x_{n+1}$ est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ i.e. $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

*Démonstration.*

Il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0}$ car la famille $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ est liée.

Si $\alpha_{n+1} = 0$, alors on a la relation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0}$. Comme la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre, on obtient $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \alpha_i = 0$. C'est une contradiction avec l'hypothèse que les scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ sont non tous nuls.

Donc, $\alpha_{n+1} \neq 0$, alors on peut écrire $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} x_i$. □

**Proposition 1.5.** *Si $E$ est un espace vectoriel admettant une famille génératrice à $n$ vecteurs avec $n$ entier non nul, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.*

**Corollaire 1.6.** *Dans un espace de dimension finie, toute famille libre a moins d'éléments qu'une famille génératrice.*

## 1.4 Dimension

**Théorème 1.7.** *Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de $E$ ont le même nombre d'éléments $n \in \mathbb{N}^*$.*

**Définition 1.2.** Ce nombre $n$ s'appelle la dimension de $E$ sur $\mathbb{K}$ noté $n = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim E$.
Par convention, $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

**Exemple 1.1.** On a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n+1$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

## 1.5 Familles en dimension finie

**Théorème 1.8.** *Si $E$ est un espace vectoriel de dimension FINIE $n$ et $\mathscr{F}$ une famille de $n$ vecteurs de $E$, alors $\mathscr{F}$ est une base de $E$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice de $E$.*

# 2 Relations entre les dimensions

## 2.1 Rappel : Image d'une base par une application linéaire

**Théorème 2.1.** *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de $E$.*

- *La famille $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.*
- *$u$ est surjective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est génératrice de $F$.*
- *$u$ est injective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est libre dans $F$.*
- *$u$ est bijective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une base de $F$.*

**Corollaire 2.2.** *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
*$u$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$ si et seulement si l'image d'une base de $E$ par $u$ est une base de $F$.*

## 2.2 Dimension et isomorphisme

**Proposition 2.3.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Un espace vectoriel $F$ est isomorphe à $E$ si et seulement si $F$ est de dimension finie et* $\dim F = \dim E$.

**Corollaire 2.4.** *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

## 2.3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

## 2.4 Dimension des sous-espaces vectoriels

**Théorème 2.5.** *Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$, alors tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est de dimension finie et* $\dim F \leqslant \dim E$.

*De plus, $F$ est égal à $E$ si et seulement si* $\dim F = \dim E$.

## 2.5 Dimension de sous-espaces vectoriels supplémentaires

**Théorème 2.6.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*

*$F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$* $\Longleftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ E = F + G \end{cases}$

**Théorème 2.7.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*

*Si $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base de $F$ et $(g_{p+1}, \dots, g_n)$ est une base de $G$, alors*

$$E = F \oplus G \Longleftrightarrow (f_1, f_2, \dots, f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n) \text{ est une base de } E.$$

*On dit que cette base est adaptée à la décomposition en sous-espaces supplémentaires.*

**Théorème 2.8.**

*Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.*

## 2.6 Dimension d'une somme

**Proposition 2.9** (Formule de Grassmann)**.**

*Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie.*

*Alors* $\quad \dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

# 3 Rang

## 3.1 Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 3.1.** On appelle rang d'une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un espace vectoriel $E$, la dimension du sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs et on le note $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ :

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p)) .$$

**Lemme 3.1.** *Pour une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n = \dim E$, on a*

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant n$$

**Théorème 3.2.** *Une famille est libre si et seulement si elle de rang maximal, c'est à dire si son rang est égal à son nombre de vecteurs.*

**Lemme 3.3.** *Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel $E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour tous indices $i, j$ :*

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = rg(x_1, x_2, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_p)$$

## 3.2 Rang d'une application linéaire

**Définition 3.2.** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de l'application linéaire $u$, la dimension de l'image de $u$ dans $F$.
On note $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ lorsque cette dimension est finie et on dit que $u$ est de rang fini.

*Remarque* 3.1. Si $(e_i)_{i=1,..,n}$ est une base d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.
Il s'ensuit que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.

**Lemme 3.4.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie $n = \dim E$ et $p = \dim F$, et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $\operatorname{rg}(u) \leqslant n$ et $\operatorname{rg}(u) \leqslant p$.*

**Théorème 3.5.** *Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ sont deux applications linéaires de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et* $\quad \operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

*Démonstration.* On a toujours $\underline{\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v}$ : pour toute image $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(u(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} v$ ce qui prouve l'inclusion.
On en déduit $\dim(\operatorname{Im}(v \circ u)) \leqslant \dim(\operatorname{Im} v)$ soit $\underline{\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v)}$.
Par ailleurs, soit $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de $\operatorname{Im} u$ avec $p = \operatorname{rg}(u)$. Soit $z \in \operatorname{Im}(v \circ u)$ alors il existe $x \in E$ tel que $z = v(u(x))$. On a $u(x) \in \operatorname{Im} u$ donc $u(x)$ s'écrit $u(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k$ avec $(\lambda_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ des scalaires. On peut donc écrire $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v(f_k)$.
On en déduit que $(v(f_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(v \circ u)$. Il s'ensuit que $\dim(\operatorname{Im}(v \circ u)) \leqslant p$ ce qui donne $\underline{\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u)}$. $\square$

### 3.3 Théorème du rang

**Proposition 3.6.** *Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de $E$ dans $F$.*

*Si $E_0$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans $E$, alors l'application $u$ induit un isomorphisme de $E_0$ sur $\operatorname{Im} u$.*

$v : \begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ *est un isomorphisme.*

**Théorème 3.7** (Théorème du rang)**.** *Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie et $u$ une application linéaire de $E$ dans un espace vectoriel $F$, alors $u$ est de rang fini et*

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u)$$

## 3.4 Caractérisation des isomorphismes

**Théorème 3.8.** *Si $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même dimension finie</u> $n = \dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors*

*$u$ est injective* $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0}\}$ $\Longleftrightarrow$ *$u$ est surjective* $\Longleftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} u = 0$ $\Longleftrightarrow$ *$u$ est bijective* $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rg}(u) = n$.

**Corollaire 3.9.** *Si $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $E$ de dimension finie, alors*

*$u$ est injective $\Longleftrightarrow$ $u$ est surjective $\Longleftrightarrow$ $u$ est bijective.*

**Lemme 3.10.** *Soit $f$ une application d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$. Si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$, alors $f$ est injective.*

*Démonstration.* Soit $g$ telle que $g \circ f = id_E$. Soit $a, b \in E$. Si $f(a) = f(b)$ alors $g(f(a)) = g(f(b))$ donc $id(a) = id(b)$ soit $a = b$. Deux éléments de l'ensemble de départ ne peuvent avoir la même image donc $f$ est injective. $\square$

**Lemme 3.11.** *Soit $f$ une application d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$. Si il existe $h : F \to E$ telle que $f \circ h = id_F$, alors $f$ est surjective.*

*Démonstration.* Soit $h$ telle que $f \circ h = id_F$. Soit $a \in F$. On a $f(h(a)) = a$ donc $a$ a un antécédent. Tout élément de $F$ a un antécédent donc $f$ est surjective.

$\square$

**Théorème 3.12.** *Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*
*Si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = id_E$ alors $f$ est bijective et $f \circ g = id_F$.*
*Si il existe $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = id_F$ alors $f$ est bijective et $h \circ f = id_E$.*

**Théorème 3.13.** *Si $u$ est une application linéaire de rang fini et si $\varphi$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors, dans les cas où cela a un sens,*

$$\mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}\, u \text{ ou } \mathrm{rg}(\varphi \circ u) = \mathrm{rg}(u).$$

*On ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant par un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soit $E, F, G$ trois espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

- Soit $\varphi$ un isomorphisme de $F$ dans $G$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ de rang fini.
  Soit $B$ une base de $\mathrm{Im}\, u$ (qui est de dimension finie). Alors $\varphi(B)$ est une base de $\varphi(\mathrm{Im}\, u)$ car $\varphi$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, u$ dans $\varphi(\mathrm{Im}(u))$. De plus, on a l'égalité triviale : $\varphi(\mathrm{Im}\, u) = \mathrm{Im}(\varphi \circ u)$. Alors, $\dim(\mathrm{Im}(\varphi \circ u)) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ soit $\boxed{\mathrm{rg}(\varphi \circ u) = \mathrm{rg}(u)}$.
- Soit $\varphi$ un isomorphisme de $E$ dans $F$ et $u \in \mathscr{L}(F, G)$ de rang fini.
  On a toujours $\mathrm{Im}(u \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}\, u$ car toute image par $u \circ \varphi$ est une image par $u$.
  Réciproquement, soit $z \in \mathrm{Im}\, u$, alors il existe $y \in F$ tel que $z = u(y)$. Comme $\varphi$ est une bijection de $E$ dans $F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Alors, $z = u \circ \varphi(x)$ et $z \in \mathrm{Im}(u \circ \varphi)$ ce qui prouve $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}(u \circ \varphi)$.
  On a montré $\mathrm{Im}(u \circ \varphi) = \mathrm{Im}(u)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(u \circ \varphi)) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ soit $\boxed{\mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}(u)}$.

$\square$

## 3.5 Équations linéaires

**Définition 3.3.** Une équation linéaire est une équation du type $u(x) = b$ où

- $u$ est une application linéaire d'un espace vectoriel $E$ dans un espace vectoriel $F$,
- $x$ est un vecteur inconnu dans $E$,
- $b$ est un vecteur de $F$ appelé second membre de l'équation.

**Théorème 3.14** (Structure de l'ensemble des solutions)**.**
*Soit $u : E \longmapsto F$ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, soit $b \in F$. On note $S_0$ l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = \overrightarrow{0_F}$ et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$.*

- *$S_0$ est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, il est donc non vide : il contient $\overrightarrow{0_E}$.*
- *Soit $\mathscr{S}$ est vide, soit $\mathscr{S} = x_0 + S_0 = \{x_0 + h | h \in S_0\}$ où $x_0$ est une solution de l'équation avec second membre.*

*Remarque* 3.2. Si $E$ est de dimension finie $n$ ($n$ inconnues) et si $u$ est de rang fini $r$ ($r$ pivots), alors l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_0$ est de dimension $n - r =$ nombre d'inconnues - nombre de pivots.