

Chapitre 16 - Analyse asymptotique

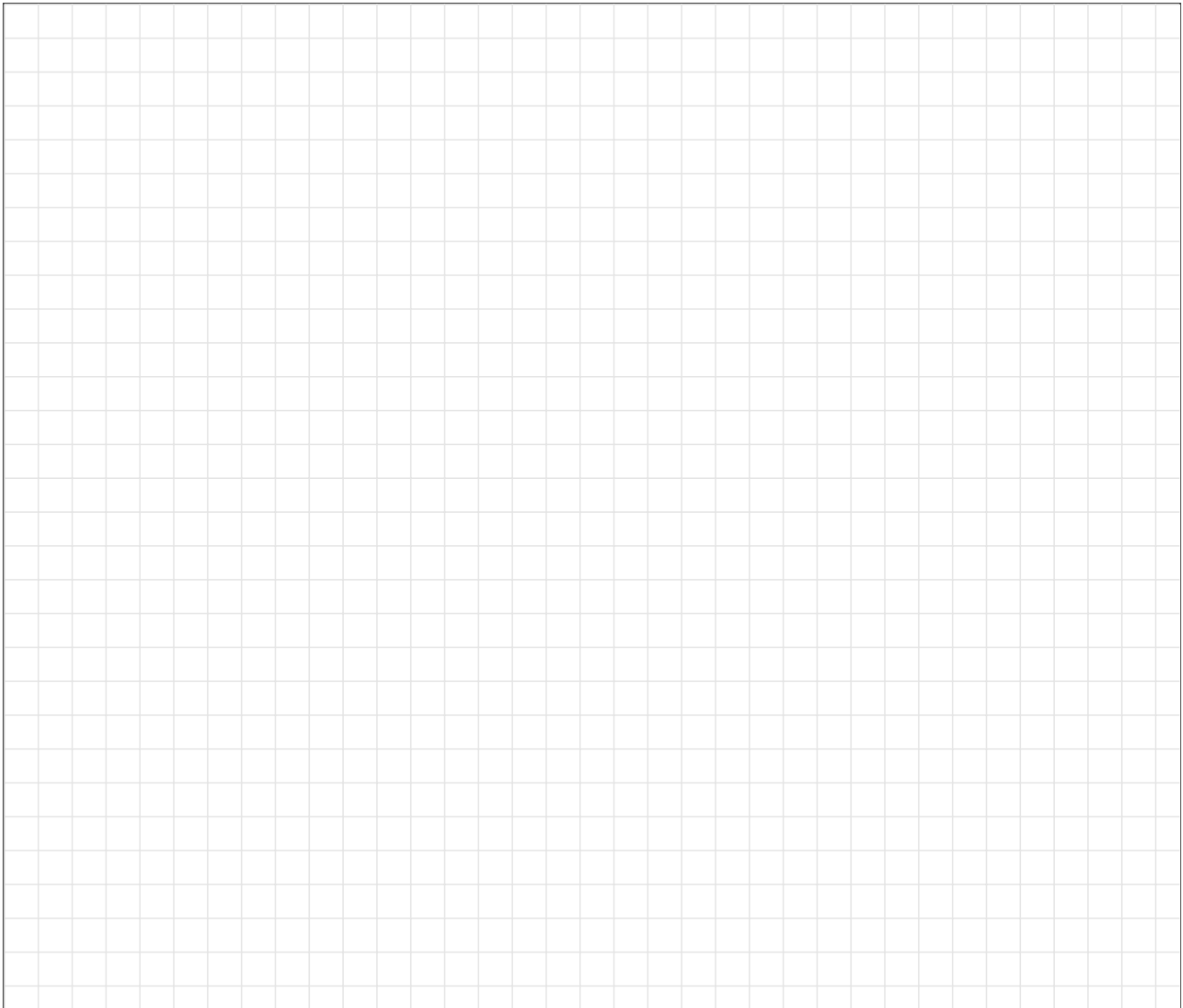
1 Comparaison des suites

1.1 Relations de comparaison

Uniquement pour les suites réelles : on se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

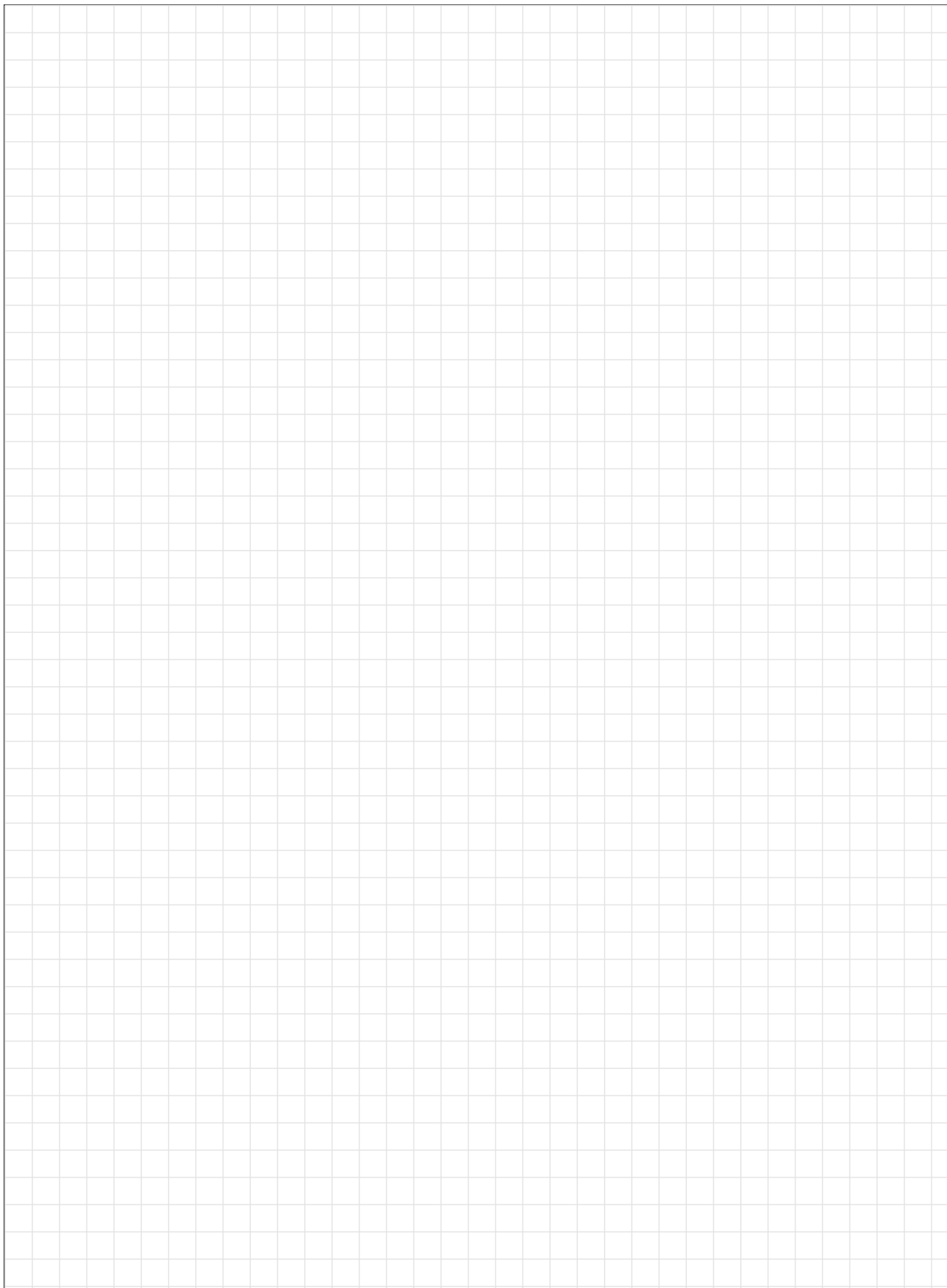
Définition 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels. On dit que :

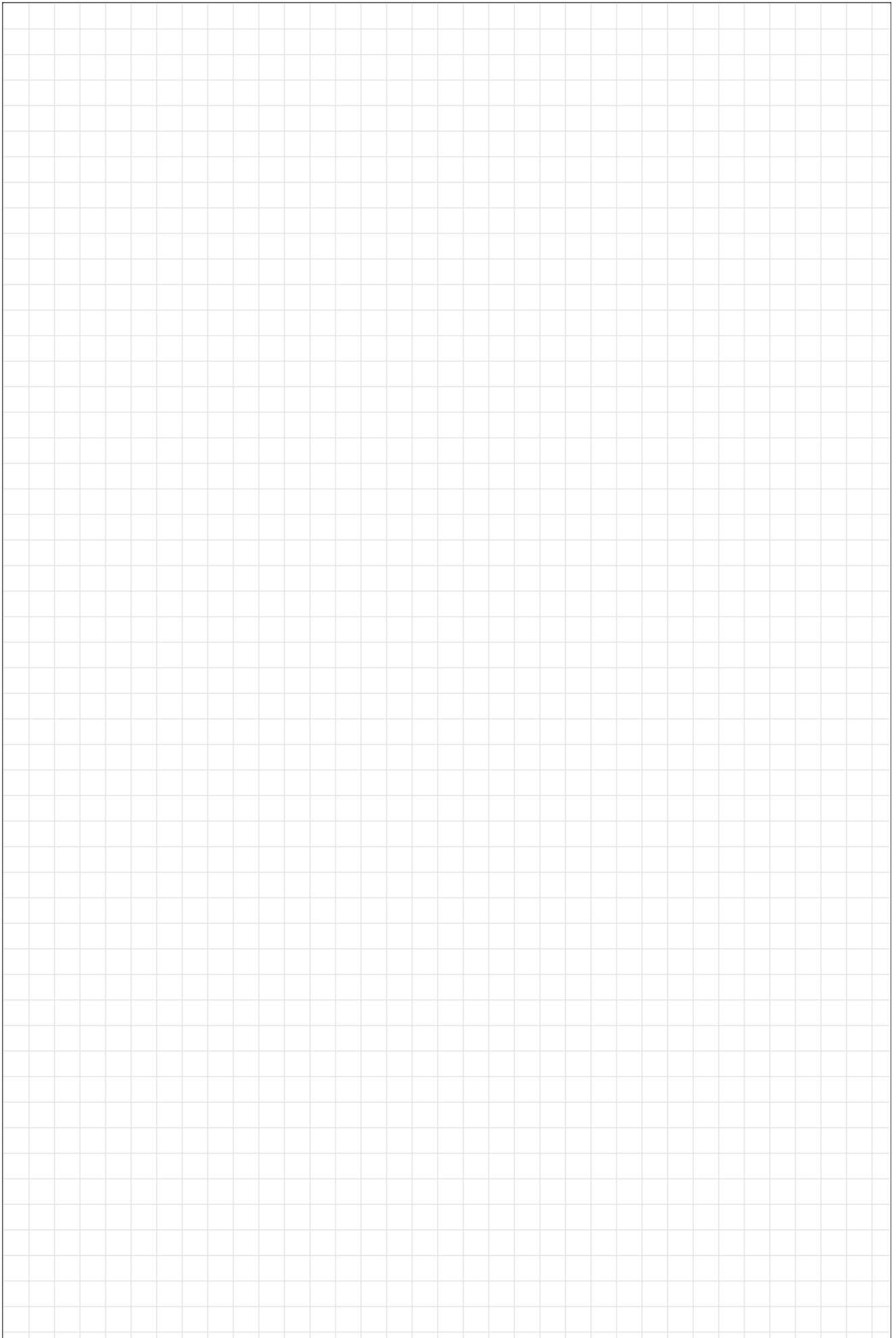
- (u_n) est dominée par (v_n) si à partir du rang N_0 $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.
- (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
- (u_n) est équivalente à (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.



Théorème 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels.

(u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 telle que $u_n = v_n \cdot \varepsilon_n$.





1.2 Propriétés des relations de comparaison

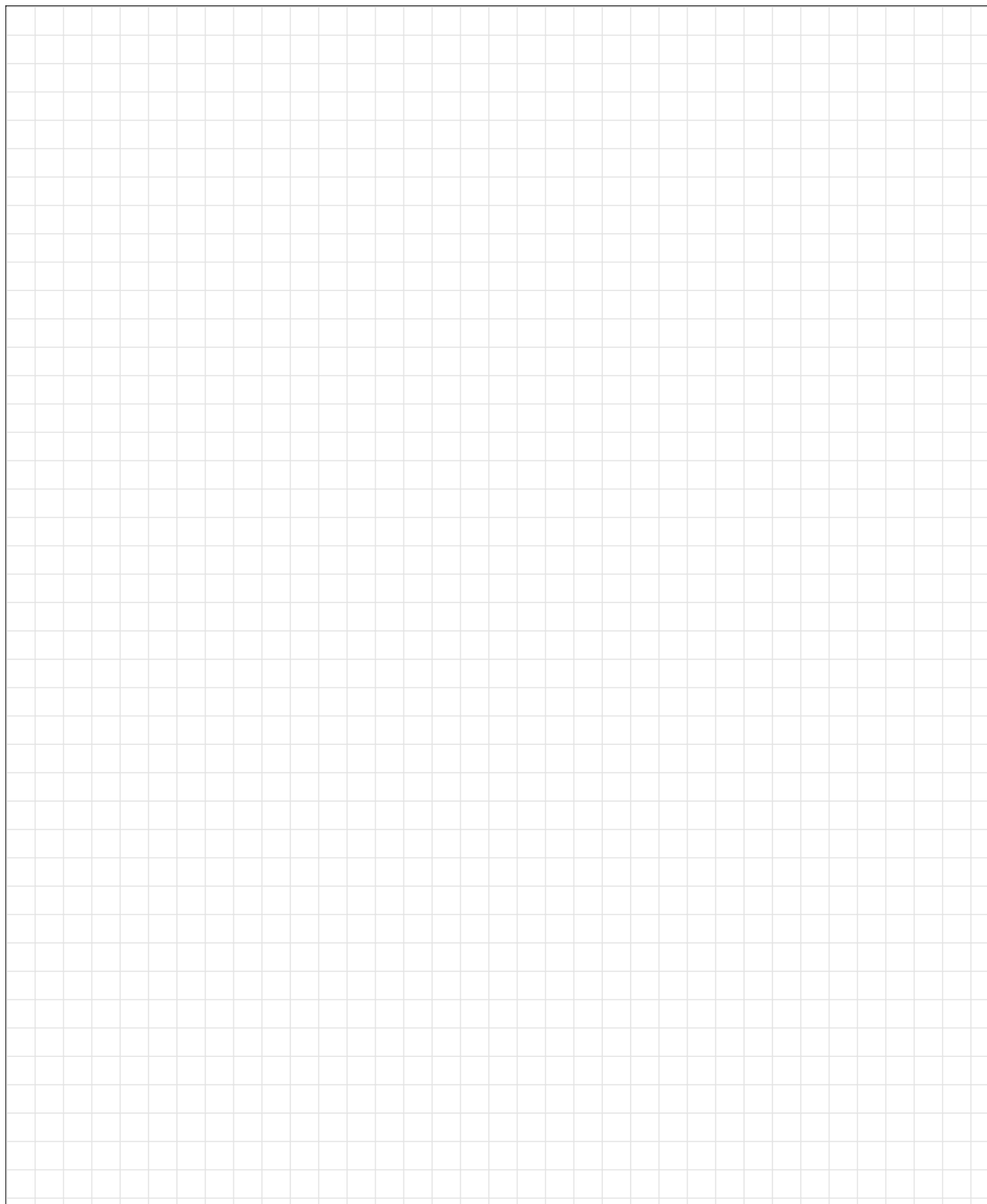
Proposition 1.2. Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites réelles.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$.

Si u_n et v_n ne s'annulent pas, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.

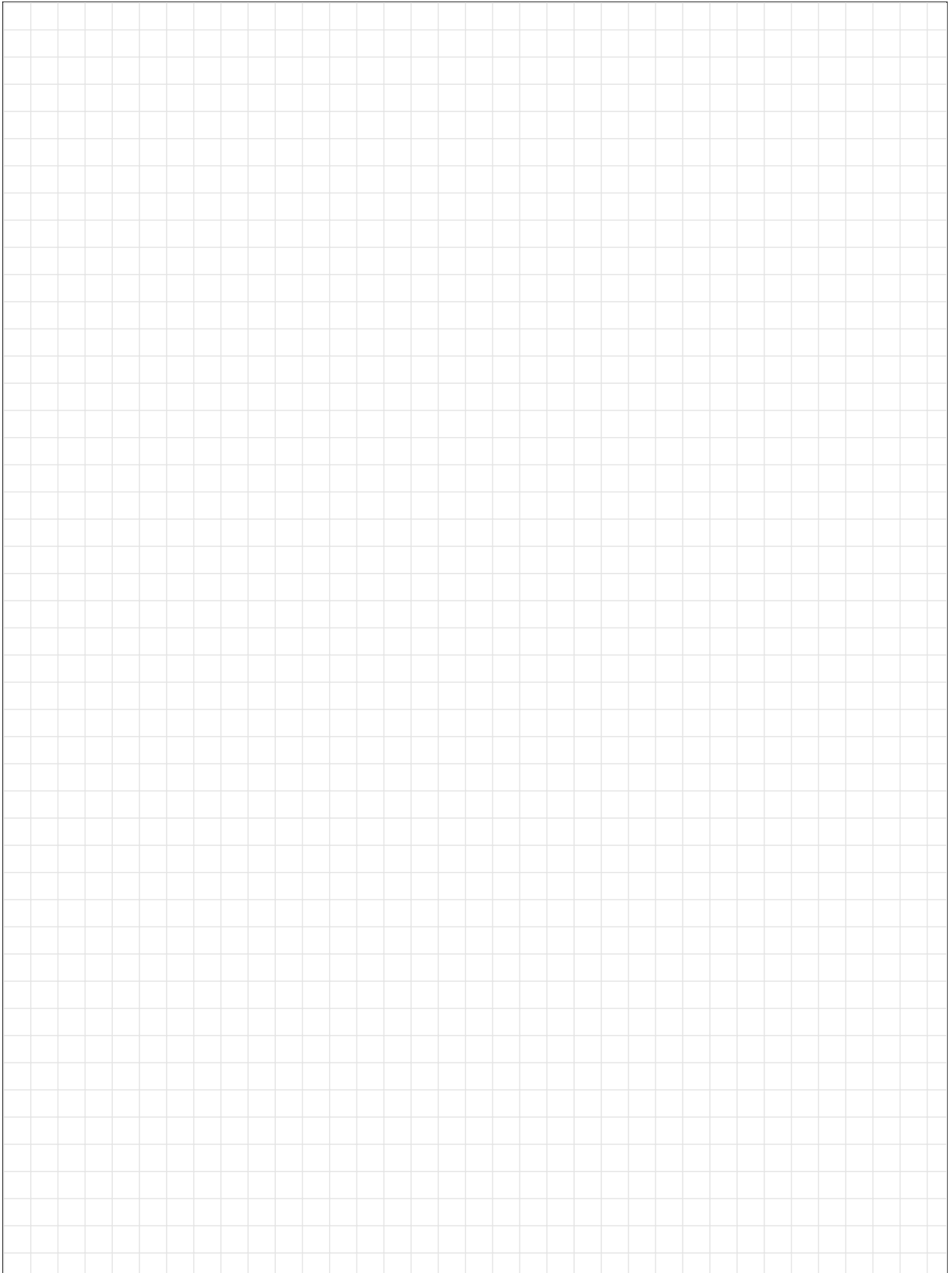
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

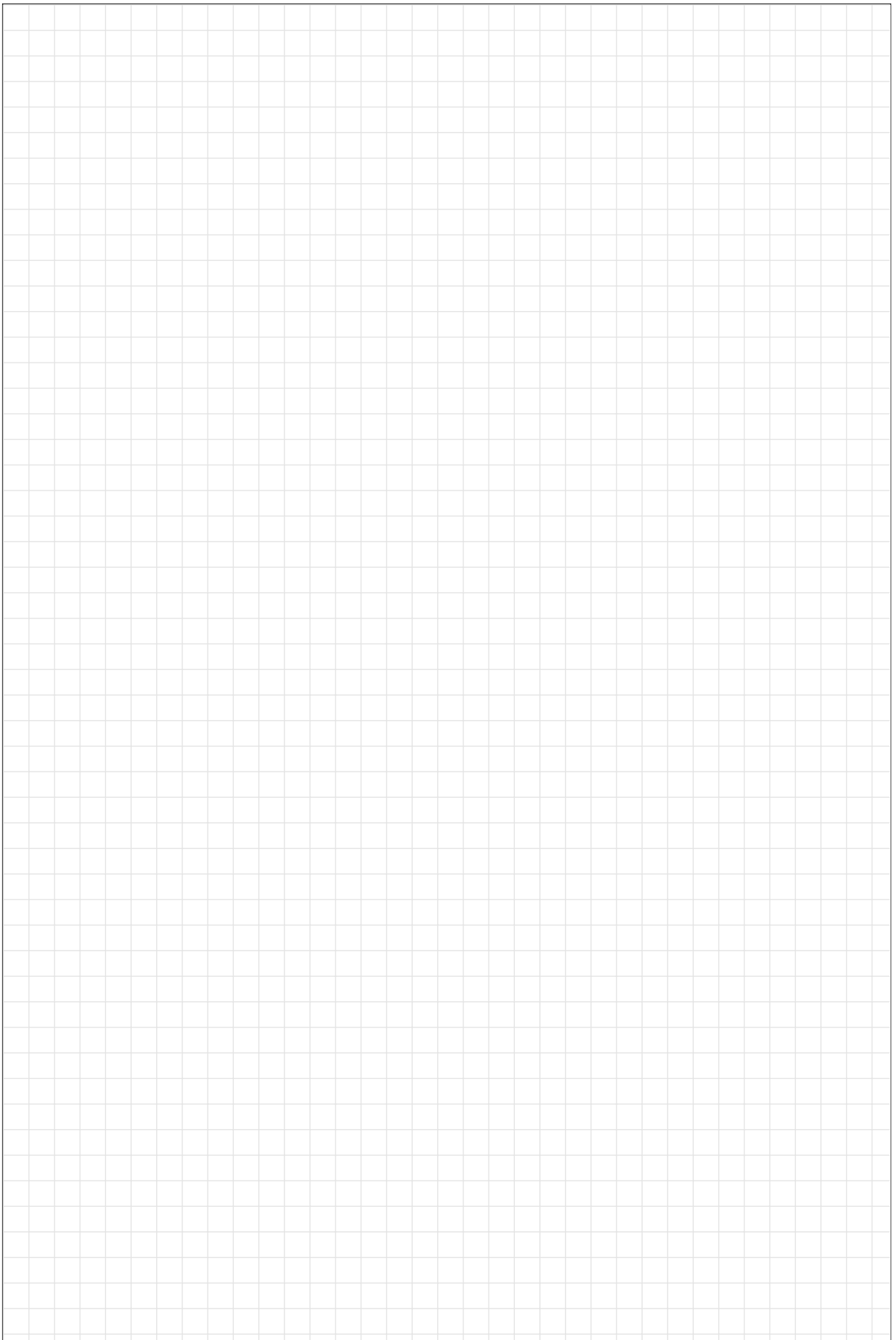


1.3 Suites de référence

Proposition 1.3. *Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, on a*

$$\ln^\beta(n) \underset{+\infty}{=} o(n^\alpha) \text{ et } n^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma n}) \quad \text{et pour } q > 1, \text{ on a } n^\alpha = o(q^n).$$





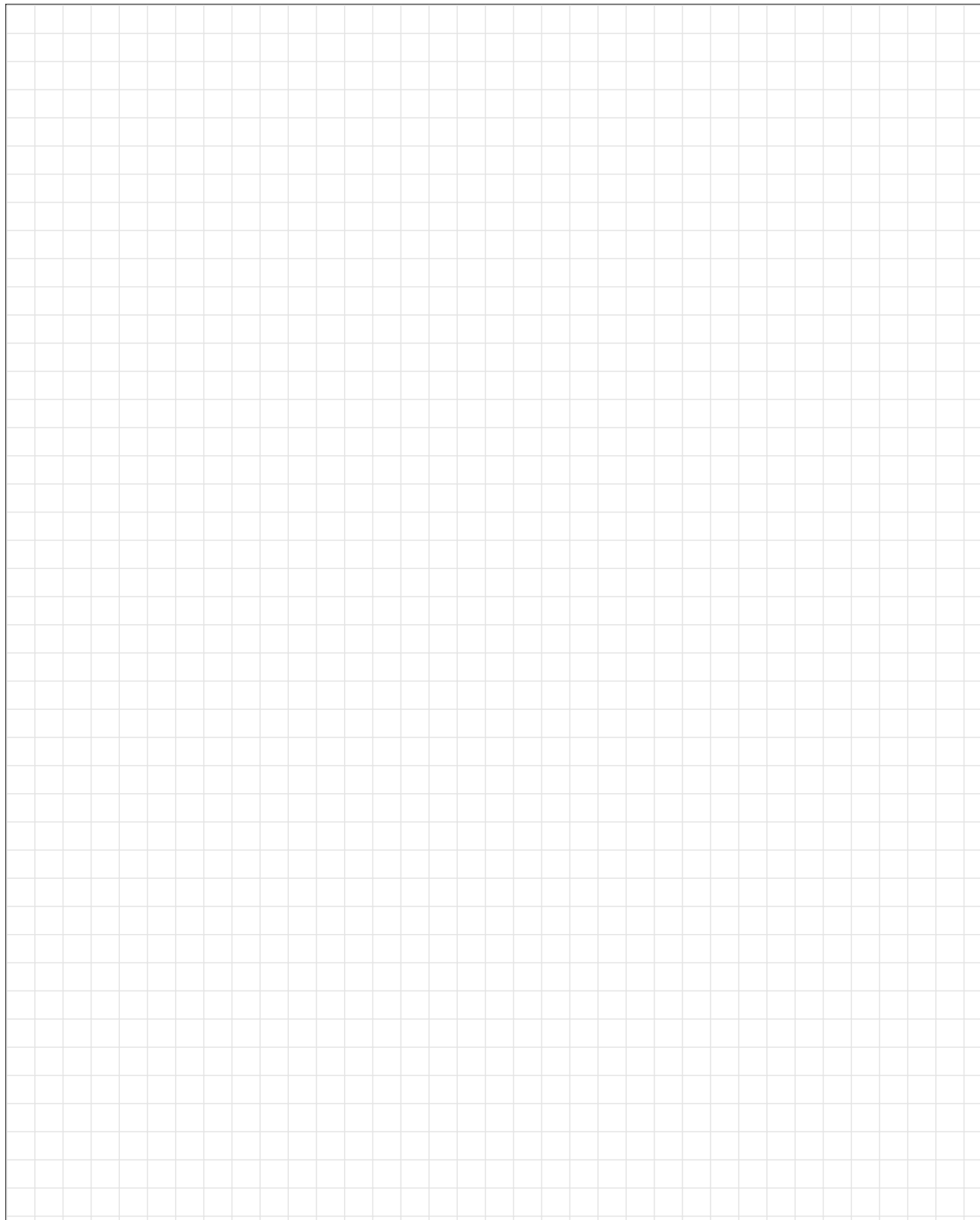
1.4 Opérations sur les équivalents

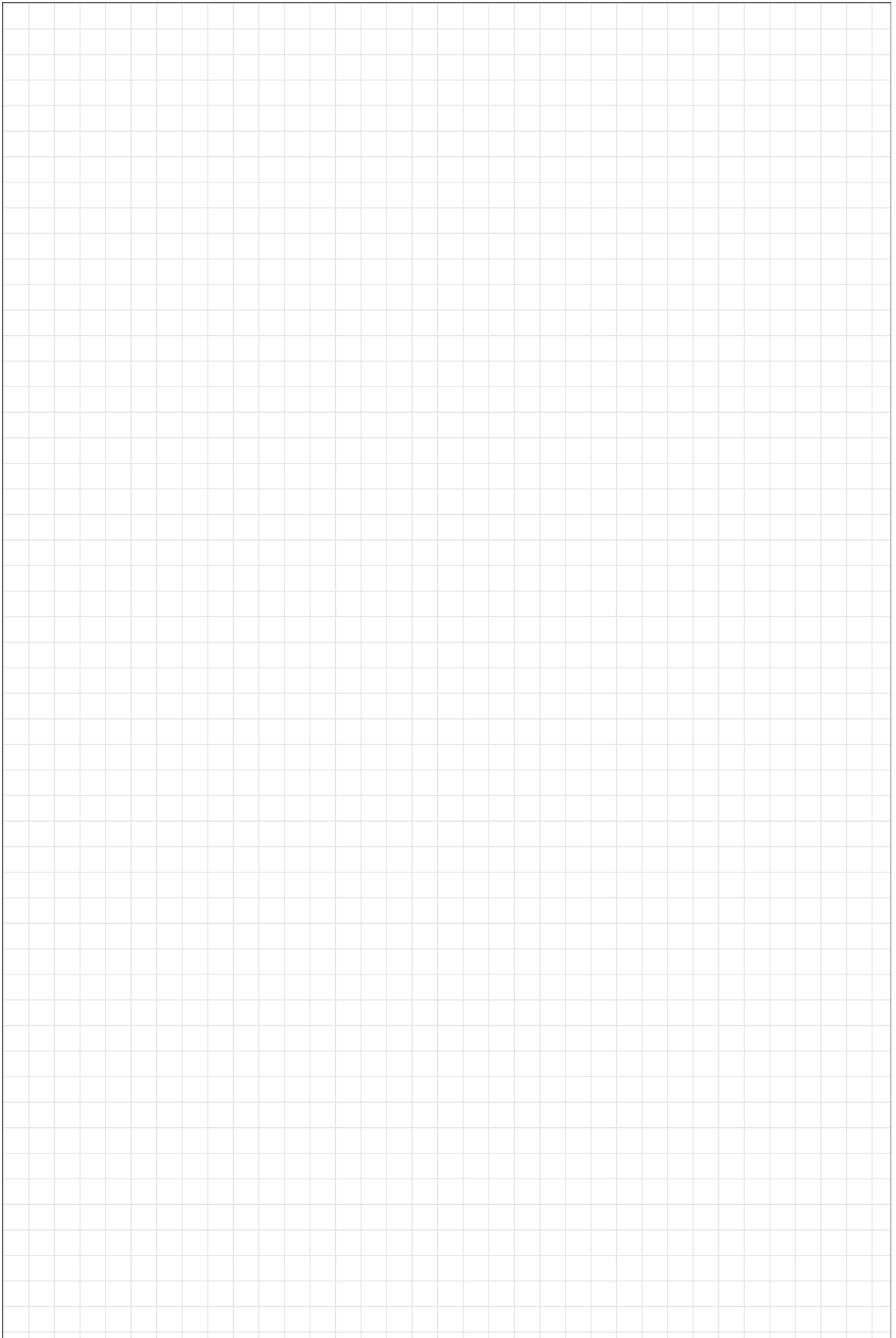
Proposition 1.4. Soit $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ des suites réelles.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ alors $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n x_n$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ et si w_n et x_n ne s'annulent pas alors $\frac{u_n}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{v_n}{x_n}$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si p est un entier $p \in \mathbb{N}$ alors $u_n^p \underset{+\infty}{\sim} v_n^p$.





1.5 Relations de comparaison et limites

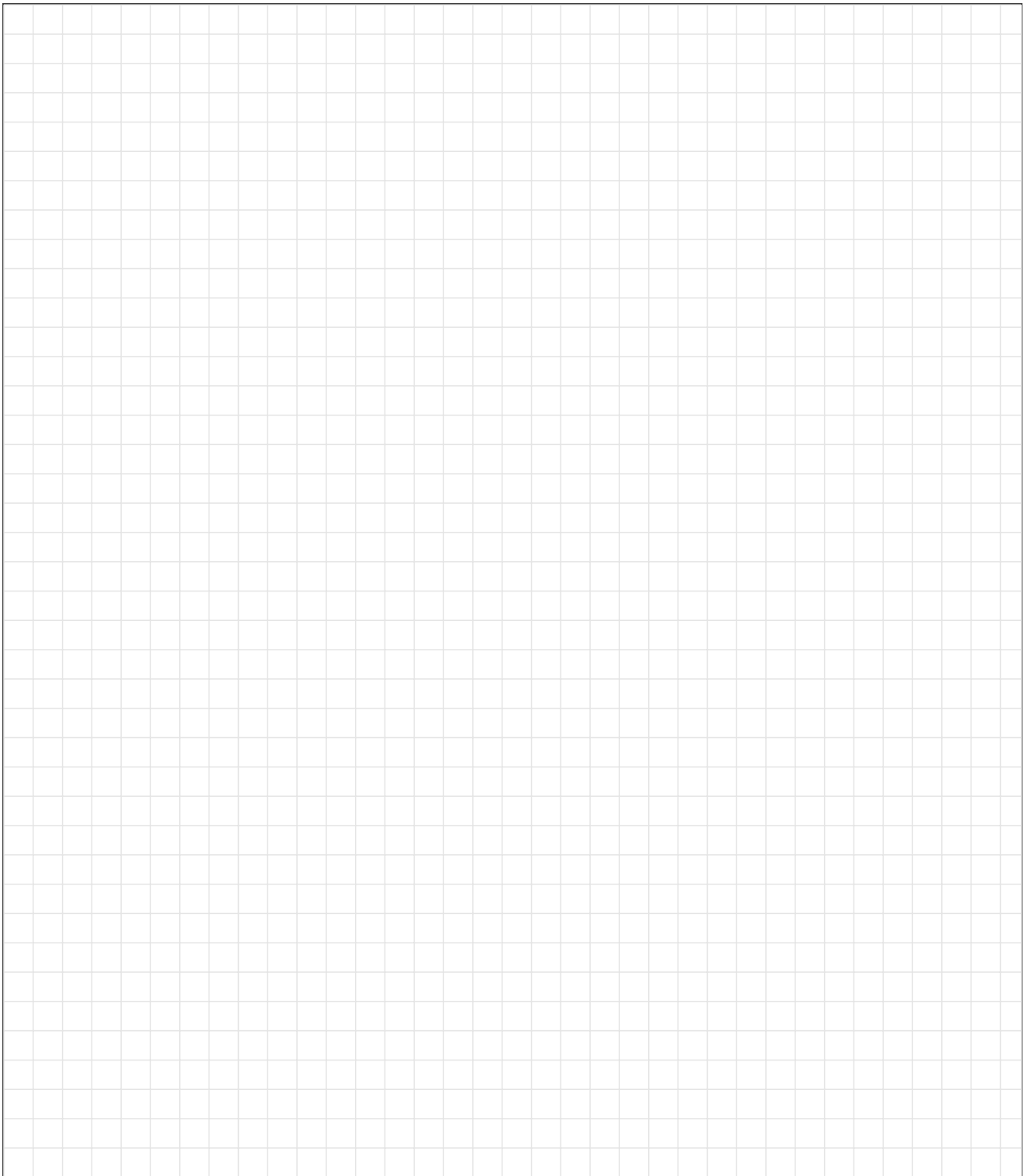
Théorème 1.5. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a $u_n \xrightarrow{+\infty} \ell \iff v_n \xrightarrow{+\infty} \ell$

En particulier, (u_n) est convergente si et seulement si (v_n) est convergente.

Proposition 1.6. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) converge, alors (u_n) converge vers 0.
- Si $u_n = o(v_n)$ et (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.



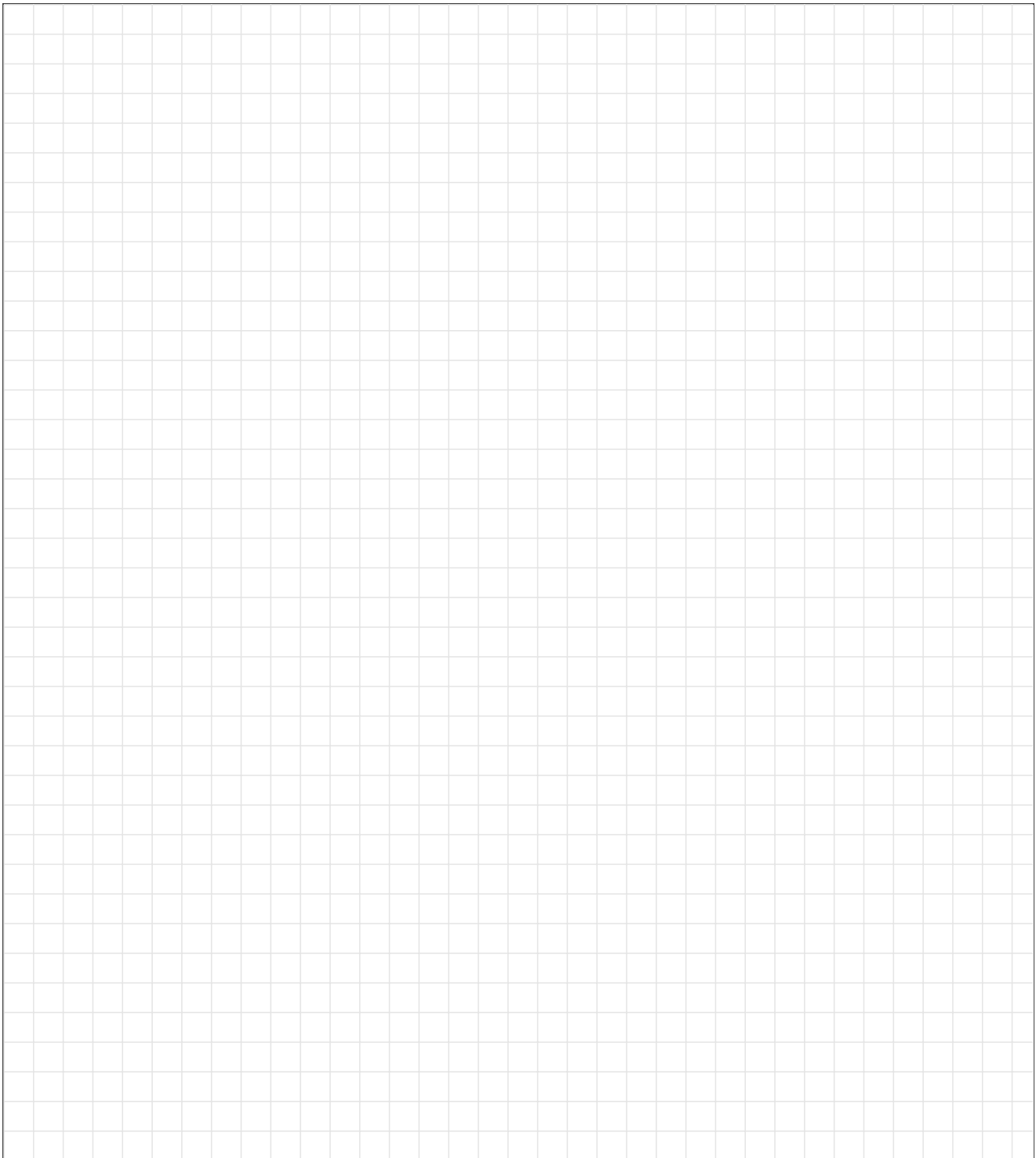
2 Relations de comparaison appliquées aux fonctions

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ élément ou extrémité de I .

2.1 Fonction dominée par une autre

Définition 2.1. Soit f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a . On note $f \underset{a}{=} O(g)$

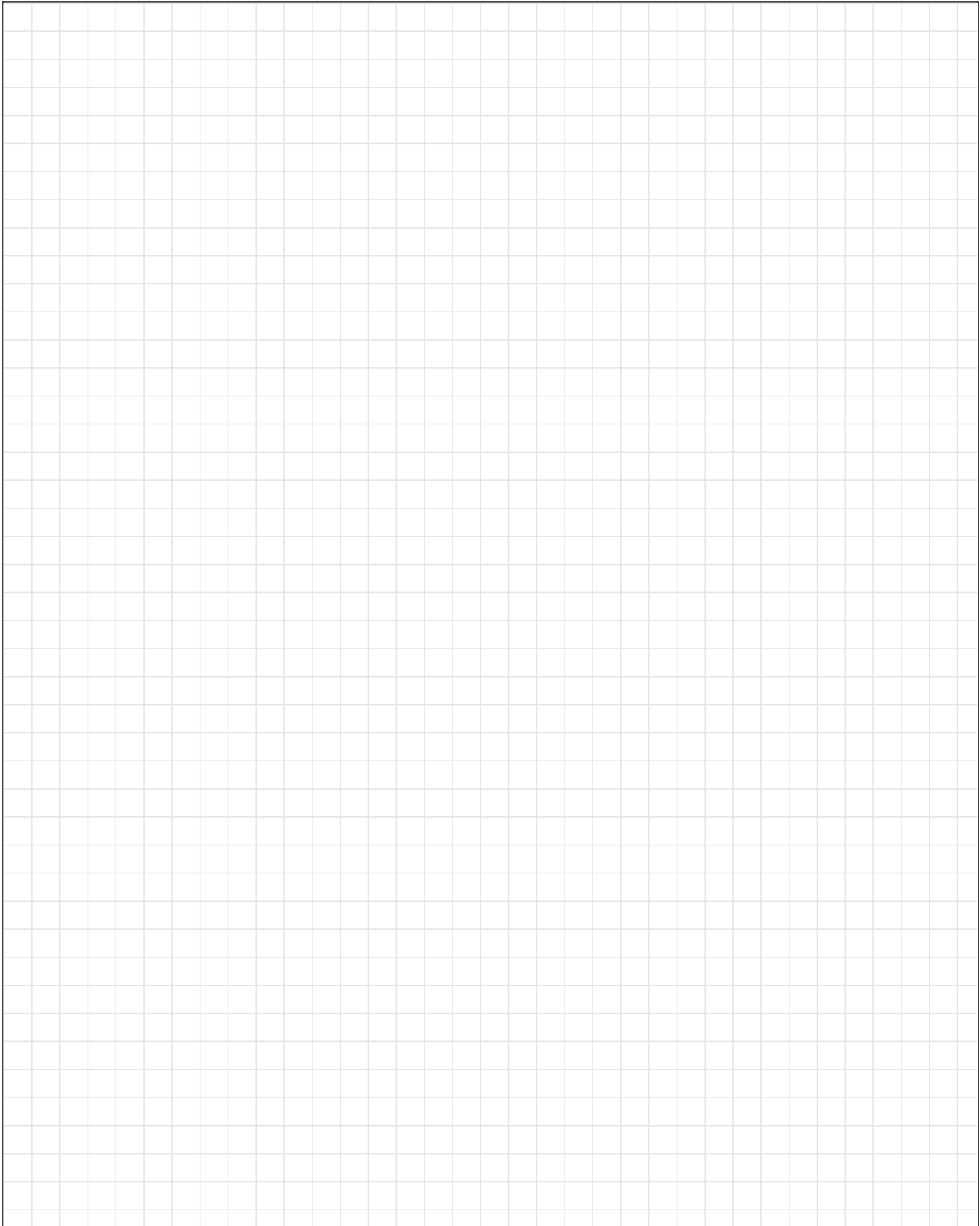


2.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2.2. Soit f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en a .

On note $f = o(g)$ ou bien $f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$



2.3 Fonctions équivalentes

Définition 2.3. Soit f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

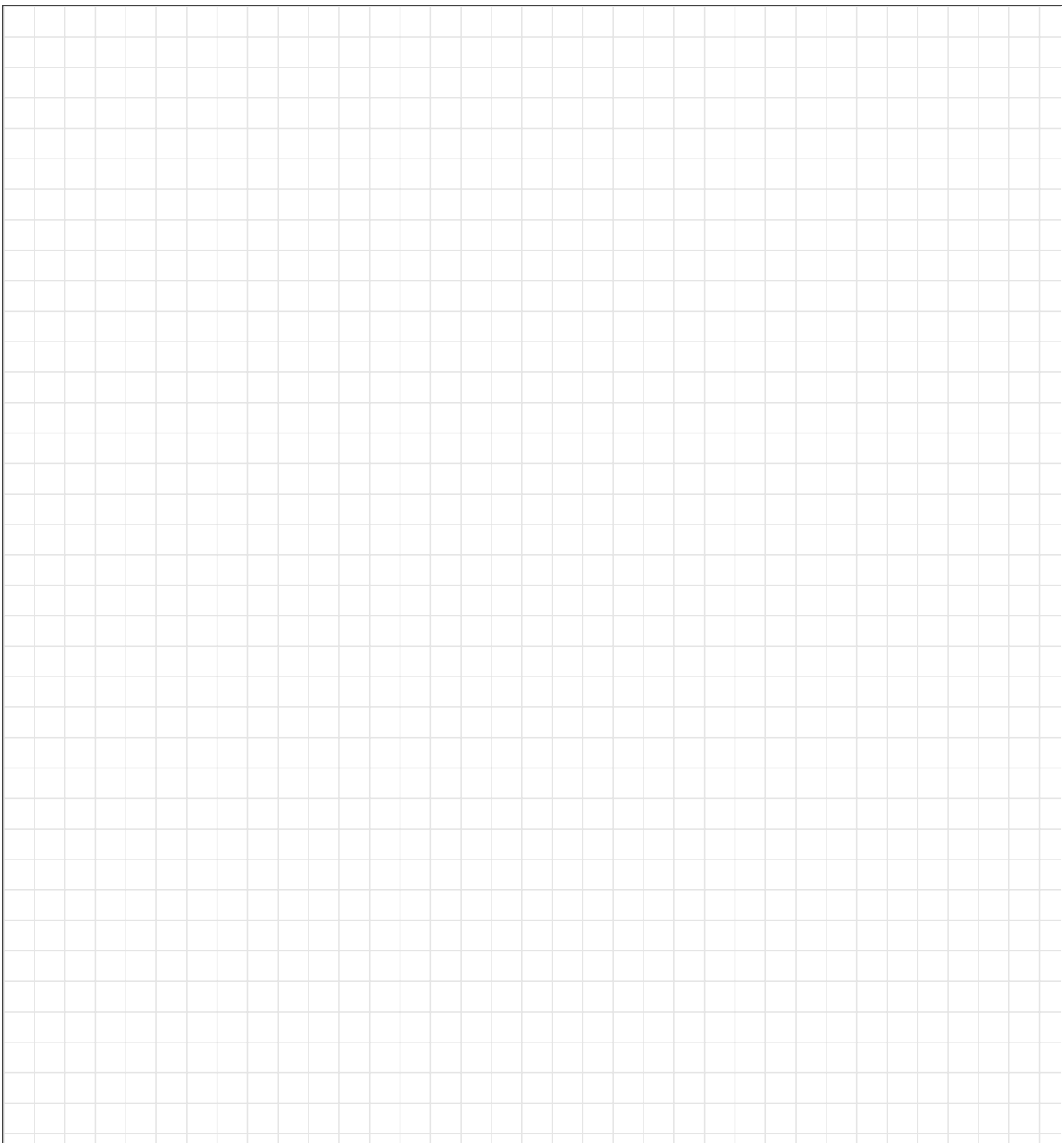
On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a . On note $f \underset{a}{\sim} g$

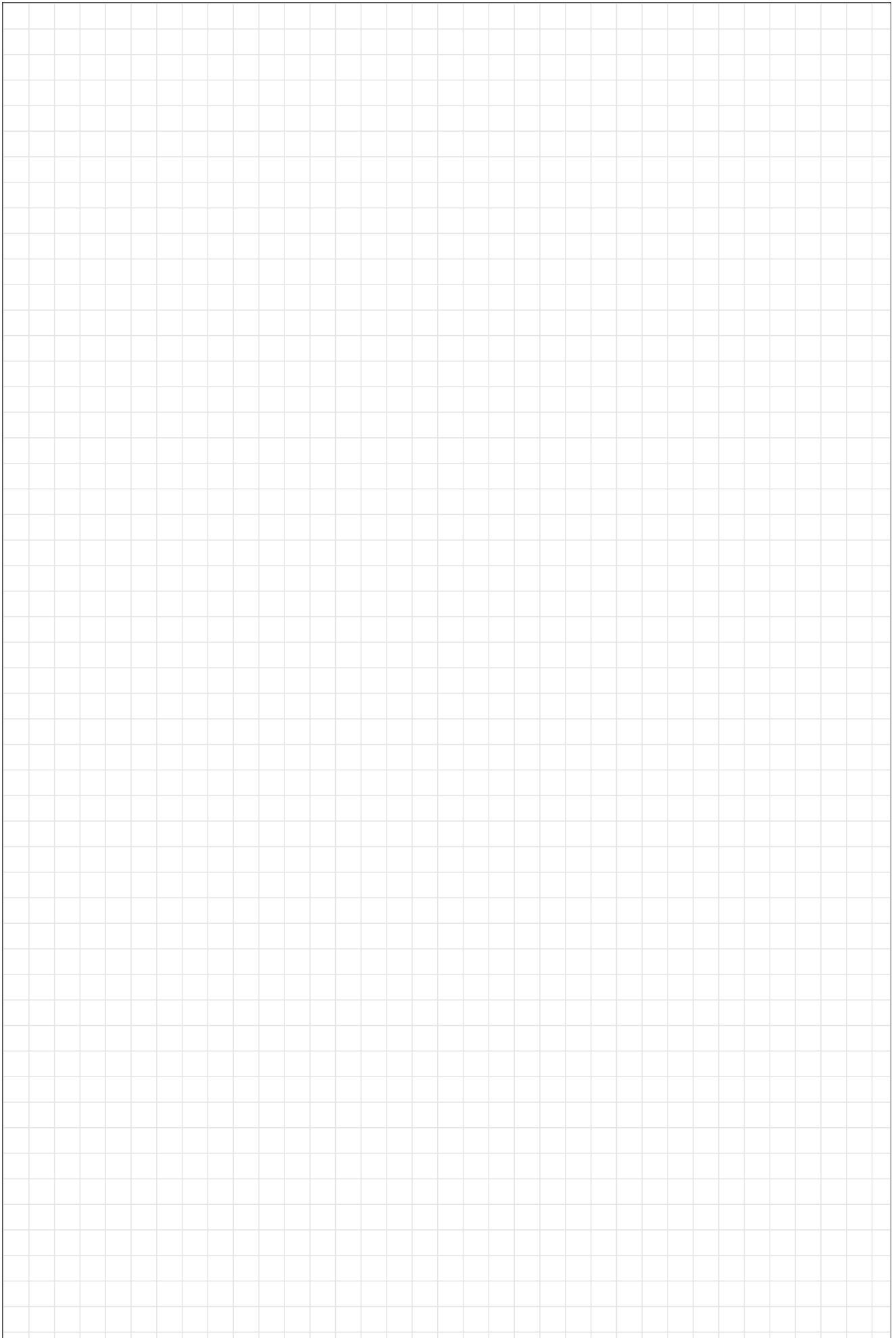
Proposition 2.1. Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

Si $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a)$.

Proposition 2.2. Soit f et g définies sur I , ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$. On a :

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} o(g).$$

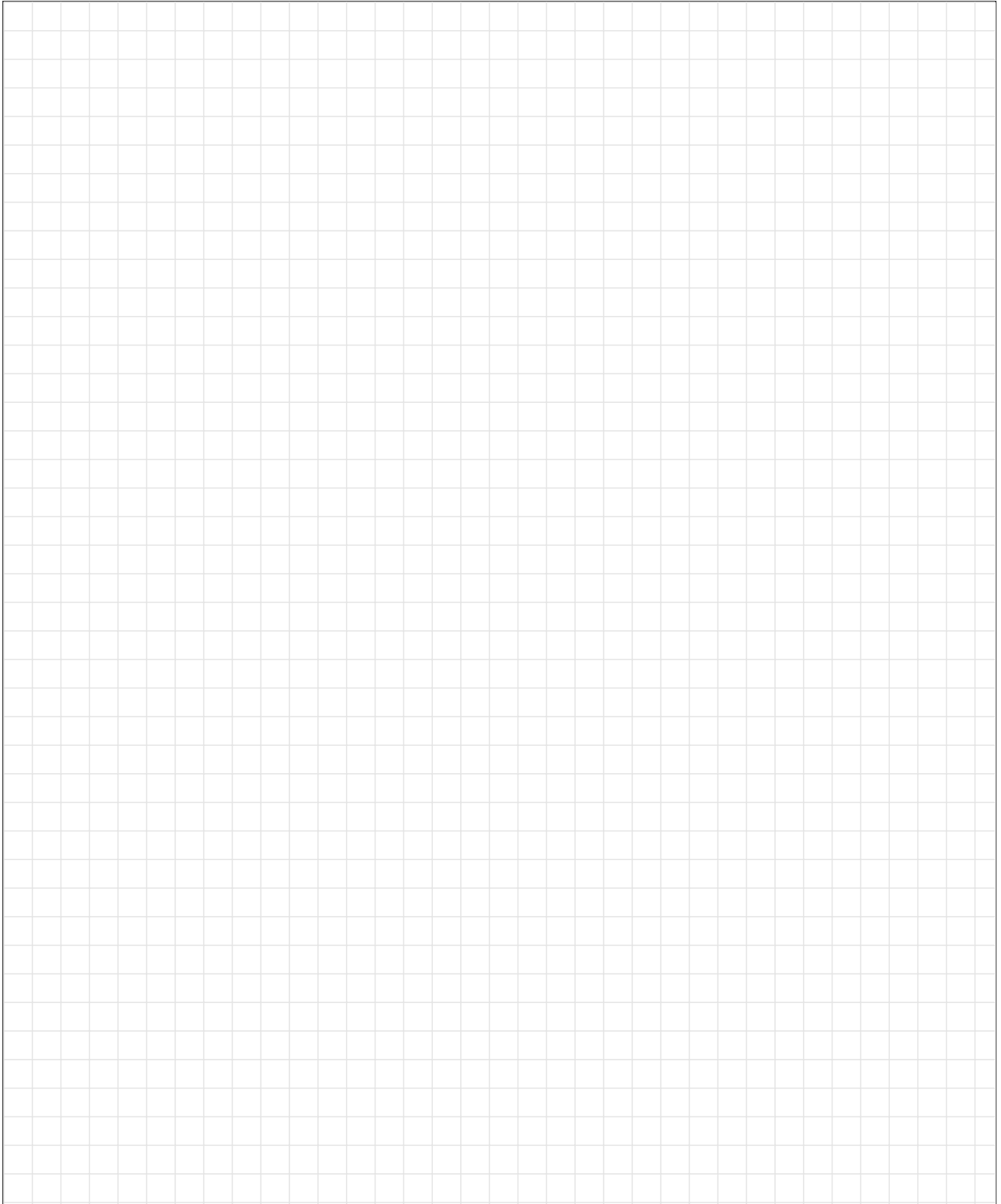


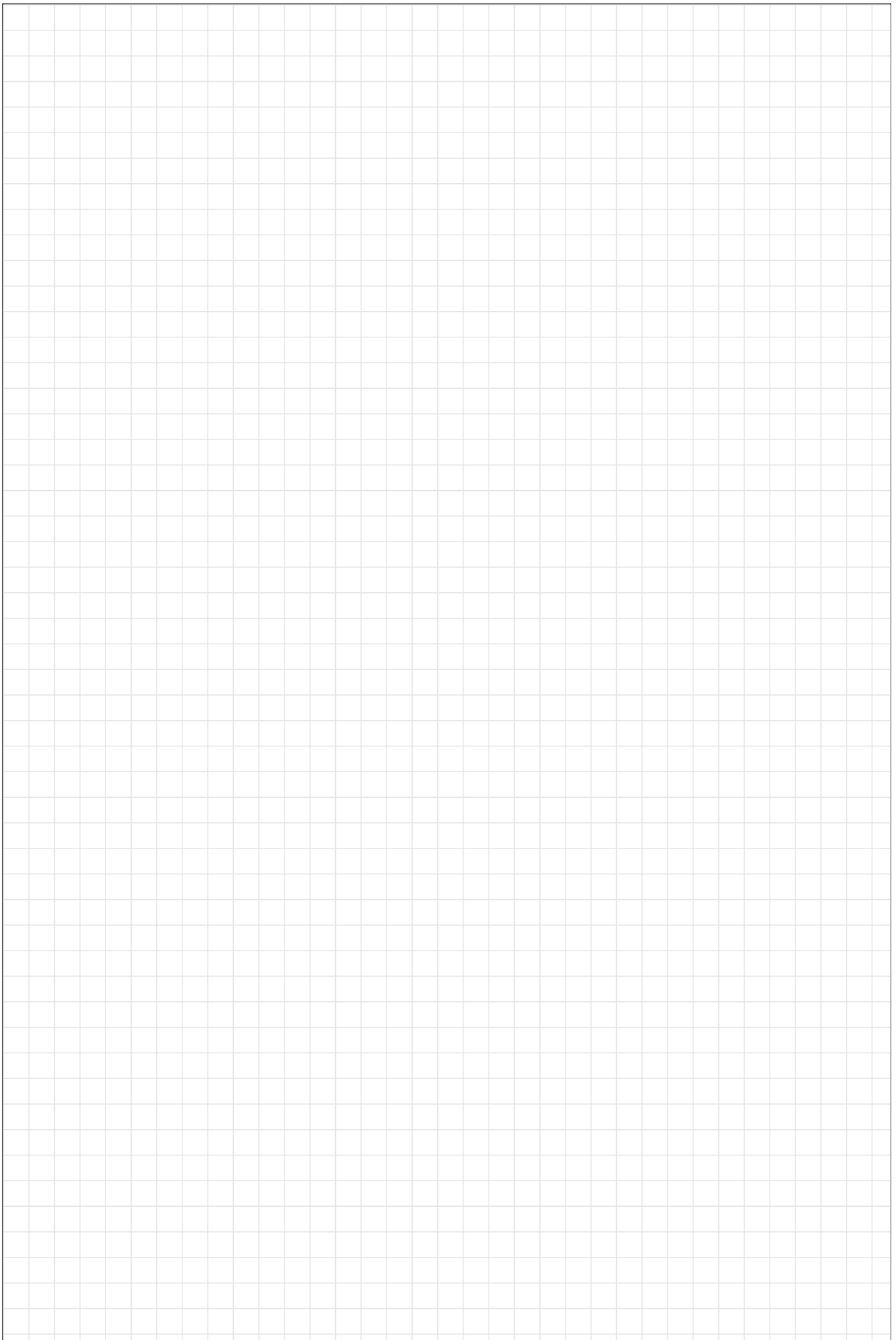


2.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 2.3. Si $f, g, h, f_1, g_1, f_2, g_2$ sont des fonctions définies au voisinage de a , on a :

- $f \underset{a}{\sim} g \implies g \underset{a}{\sim} f$
- $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h \implies f \underset{a}{\sim} h$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \implies f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \implies \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$





2.5 Utilisation des équivalents

Proposition 2.4. *Étant donnés deux fonctions f et g équivalentes en a : $f \sim_a g$.*

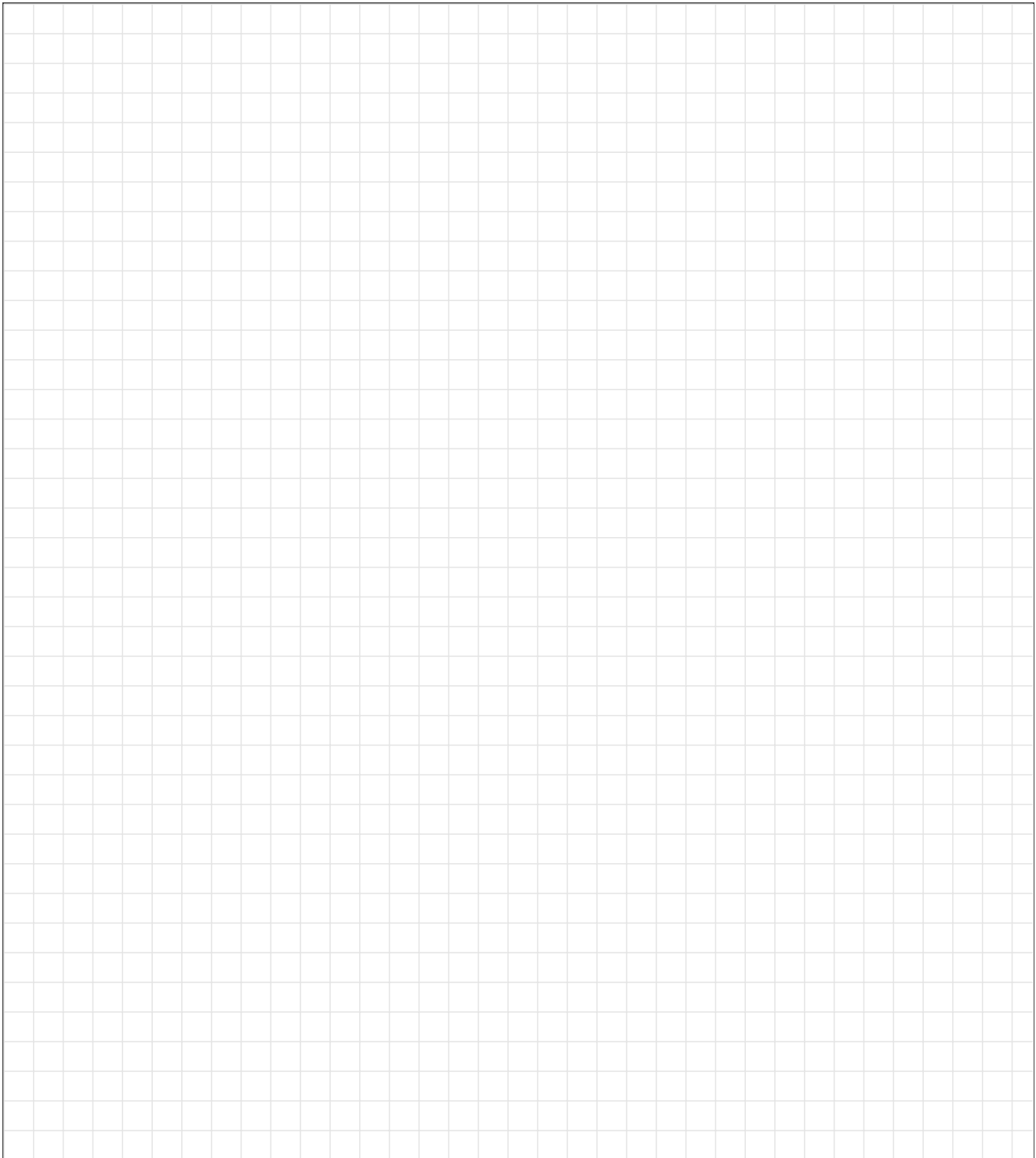
Si g a une limite finie ou infinie en a alors f aussi et $\lim_a f = \lim_a g$.

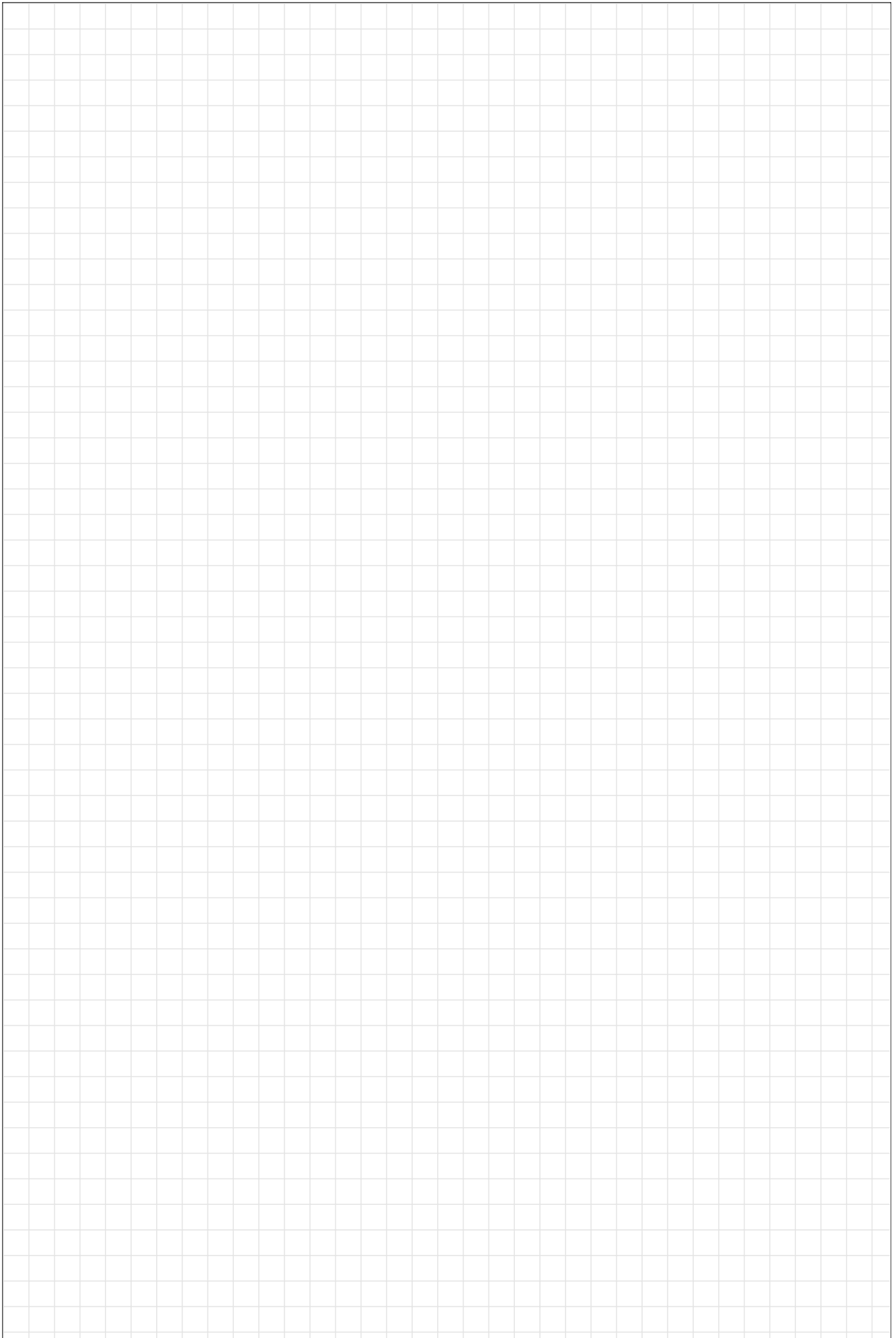
Proposition 2.5. *Étant donnés deux fonctions f et g définies sur I et équivalentes en a : $f \sim_a g$.*

Si g est positive sur I alors f est positive au voisinage de a .

Si g ne s'annule pas sur I , alors f ne s'annule pas au voisinage de a .

Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, alors la restriction de f à $I \setminus \{a\}$ ne s'annule pas au voisinage de a .





3 Développement limités

3.1 Définition

Définition 3.1. On dit qu'une fonction f de I dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ élément ou extrémité de I si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(a+h) = P(h) + o(h^n)$ au voisinage de 0 (pour h).

C'est à dire $f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_{n-1}h^{n-1} + a_nh^n + o(h^n)$ n = ordre

ou $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

On le note $DL_n(a)$ de f .

polynôme en $x-a$

reste

Exemple $g(x) = 1 + x^2 + x^3 \sin(x)$.

on a $\frac{x^3 \sin(x)}{x^2} = x \sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $x^3 \sin(x) = o(x^2)$

alors on a $g(x) = 1 + (x-0)^2 + o((x-0)^2)$

a

$g(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$

$DL_2(0)$: à l'ordre 2 en 0 deg

autre écriture $g(x) = 1 + x^2 + x^2 E_1(x)$ avec $E_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

On a également

$g(x) = 1 + (x^2 + x^2 E_1(x)) = 1 + o(x)$ car $x^2 + x^2 E_1(x) = o(x)$

$g(x) = 1 + o(x)$ est un DL à l'ordre 1 deg

Autre idée $\sin(x) = \sin(0) + \sin'(0) \cdot (x-0) + o(x-0)$

car \sin est dérivable en 0 (c'est un DL_1)

soit $\sin(x) = x + o(x)$ et $g(x) = 1 + x^2 + x^3(x + o(x))$

d'où $g(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^3 o(x)$

Δ $x^3 o(x)$ s'écrit $x^3 o(x) = x^3 x E_2(x)$ avec $E_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

car $o(x) = x E_2(x)$ donc $x^3 o(x) = x^4 E_2(x) = o(x^4)$

♥ Règle : $f(x) \cdot o(h(x)) = o(f(x) \cdot h(x))$ $f(x-a) \cdot o(h(x-a)) = o(f(x-a) \cdot h(x-a))$

Alors $g(x) = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$ on a DL_4 en 0 deg

$$g(x) = 1 + x^2 + x^3 \sin(x) \quad \text{au voisinage de } 1$$

On pose $x = 1+h$ $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$ $h = x - 1$

ce qui donne $g(x) = 1 + (1+2h+h^2) + (1+3h+3h^2+h^3)\sin(1+h)$

$f(h) = g(1+h) =$

mettre
fonction

On utilise $\sin(1+h) = \sin(1)\cos(h) + \cos(1)\sin(h)$

$\sin(h) \underset{0}{\sim} h \Leftrightarrow \sin(h) = h + o(h)$

$\cos(h) \underset{0}{\sim} 1 \Leftrightarrow \cos(h) = 1 + o(1)$

fonction constante = 1

$\Delta o(1) =$ qui tend vers 0

~~On termine le calcul $\sin(1+h) = \sin(1) + o(1) + \cos(1)(h + o(h))$~~

~~$g(1+h) = 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1) + \cos(1))h$~~

~~$+ (1 + 3\sin(1) +$~~

on obtient

$\sin(1+h) = \sin(1)(1 + o(1)) + \cos(1)(h + o(h))$

$= \sin(1) + \sin(1)o(1) + o(1) + \cos(1)h + \cos(1)o(h)$

$\sin(1+h) \underset{0}{=} \sin(1) + o(1)$

alors

$g(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 2 + 2h + h^2 + (1 + 3h + 3h^2 + h^3)(\sin(1) + o(1))$

$= 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1))h + o(1)$

$+ h^2 + 3h.o(1) + (3h^2 + h^3)(\sin(1) + o(1))$

on a $(2 + 3\sin(1))/h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ donc $(2 + 3\sin(1))h = o(1)$

$h^2 + 3h.o(1) + (3h^2 + h^3)(\sin(1) + o(1)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

$g(1+h) \underset{0}{=} 2 + \sin(1) + o(1)$

$g(x) \underset{1}{=} 2 + \sin(1) + o(1)$ DL à l'ordre 0 en 1 deg

3.2 Exemple fondamental

Proposition 3.1. La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ admet des développements limités
à l'ordre n , pour tout entier n , au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} \underbrace{1+u+u^2+\dots+u^n}_{\text{}} + o(u^n)$$

Pour $u \neq 1$, on a $\sum_{k=0}^n u^k = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} = \frac{1}{1-u} - \frac{u^{n+1}}{1-u}$

D'où

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\dots+u^n + \frac{u^{n+1}}{1-u} \quad \text{pour } u \neq 1$$

On montre $\frac{u^{n+1}}{1-u} = o(u^n)$: On calcule donc pour $u \neq 0$

$$\frac{\frac{u^{n+1}}{1-u}}{u^n} = \frac{u}{1-u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \quad \text{alors} \quad \frac{u^{n+1}}{1-u} \underset{0}{=} o(u^n)$$

D'où

$$\boxed{\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1+u+u^2+\dots+u^n + o(u^n)} \quad \heartsuit$$

Si on pose $u = -x$, on a $\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\dots+u^n + u^n E_1(u)$

$$\text{avec } E_1(u) \underset{u \rightarrow 0}{\rightarrow} 0. \quad \text{Alors } u^n E_1(u) = (-x)^n E_1(-x) = x^n (-1)^n E_1(-x)$$

et on peut poser $E_2(x) = (-1)^n E_1(-x)$. On a $E_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$

Donc $u^n E_1(u) = x^n E_2(x)$ donc $o(u^n) \underset{0}{=} o(x^n)$

alors

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n + o(x^n)}$$

on obtient par primitivation

$$\ln(1+u) \underset{0}{=} K + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + o(u^{n+1})$$

avec K constante d'intégration à déterminer

L'égalité est vraie au voisinage de 0 donc $\ln(1+0) = K + 0$
d'où la formule

$$\heartsuit \quad \boxed{\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + o(u^{n+1})}$$

on pose $u = -x^2$ dans $\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + \dots + u^n + o(u^n)$

on a $u^n = -x^{2n}$ alors $o(u^n) \underset{0}{=} o(x^{2n}) = o(42 \cdot x^{2n})$

D'où au voisinage de 0

$$\text{Anchan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Par intégration, en remarquant que $\text{Anchan}(0) = 0$

$$\text{Anchan}(x) \underset{0}{=} 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Exercice Calculer le $DL_2(0)$ de $g(x) = \frac{1}{1-x} + \sin(x)$ $n \in \mathbb{N}$ entier

On a

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2) \quad n=2 \text{ dans la formule}$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x) \quad \text{vrai mais insuffisant : } DL_1$$

$$\underset{0}{=} x + o(x^2) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{vrai mais trop } DL_3$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x^2) \quad \text{est le } DL_2(0) \text{ de } \sin(x)$$

On somme

$$g(x) \underset{0}{=} 1 + 2x + x^2 + o(x^2)$$

3.3 Unicité du développement limité

Proposition 3.2. Si f est une fonction admettant deux développements limités à l'ordre n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors ces développements sont égaux.

Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = b_k$.

On appellera le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$ la partie régulière du DL de f à l'ordre n en a .

♥ **Corollaire 3.3.** Si f admet un développement limité à l'ordre n en a , alors pour tout entier $p \leq n$, f admet un développement limité à l'ordre p obtenu en tronquant le développement d'ordre n .

♥ **Corollaire 3.4.** Soit f admettant un développement limité en 0 de partie régulière P . Si f est paire, alors P est pair. Si f est impaire, alors P est impair.

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_p(x-a)^p}_{\text{par ordre de négligeabilité croissante}} + \underbrace{a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)}_{o((x-a)^p)}$$

Exercice: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ DL₃ en $a=4$

Méthode 1: on change de variable $x = 4 + h \Leftrightarrow h = x - 4$
 on a $x \rightarrow 4 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

on calcule

$$g(h) = f(4+h) = \frac{1}{5+h} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1+h/5} \text{ puis on pose } u = -\frac{h}{5}$$

on a $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow u \rightarrow 0$ et

$$\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3) \text{ et } u^3 = -\frac{h^3}{125} \text{ donc } o(u^3) = o(h^3)$$

Alors

$$\text{donc } f(4+h) = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{h}{5} + \frac{h^2}{25} - \frac{h^3}{125} + o(h^3) \right)$$

$$\left| f(x) \underset{x \rightarrow 4}{=} \frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-4) + \frac{1}{125}(x-4)^2 - \frac{1}{625}(x-4)^3 + o((x-4)^3) \right|$$

DL à l'ordre 3 en $a=4$ de $f(x) = \frac{1}{1+x}$

Autre méthode : par la formule de Taylor Young
est e^3 en $a=4$ alors

$$f(x) = f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4)^1 + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f^{(3)}(4)}{3!}(x-4)^3 + o((x-4)^3)$$

on calcule les dérivées

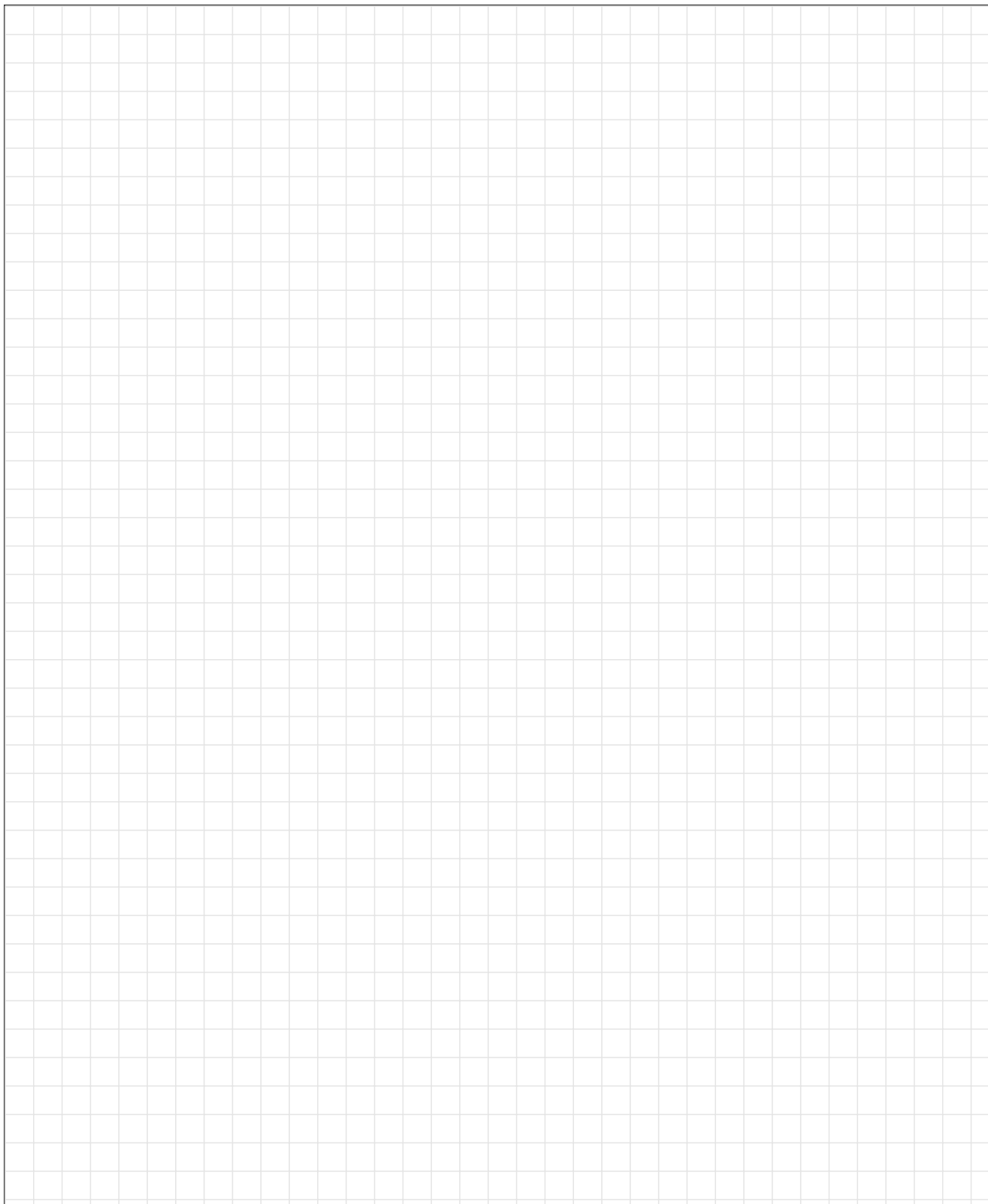
$$f(n) = \frac{1}{1+n} \quad f(4) = \frac{1}{5} \quad f'(n) =$$

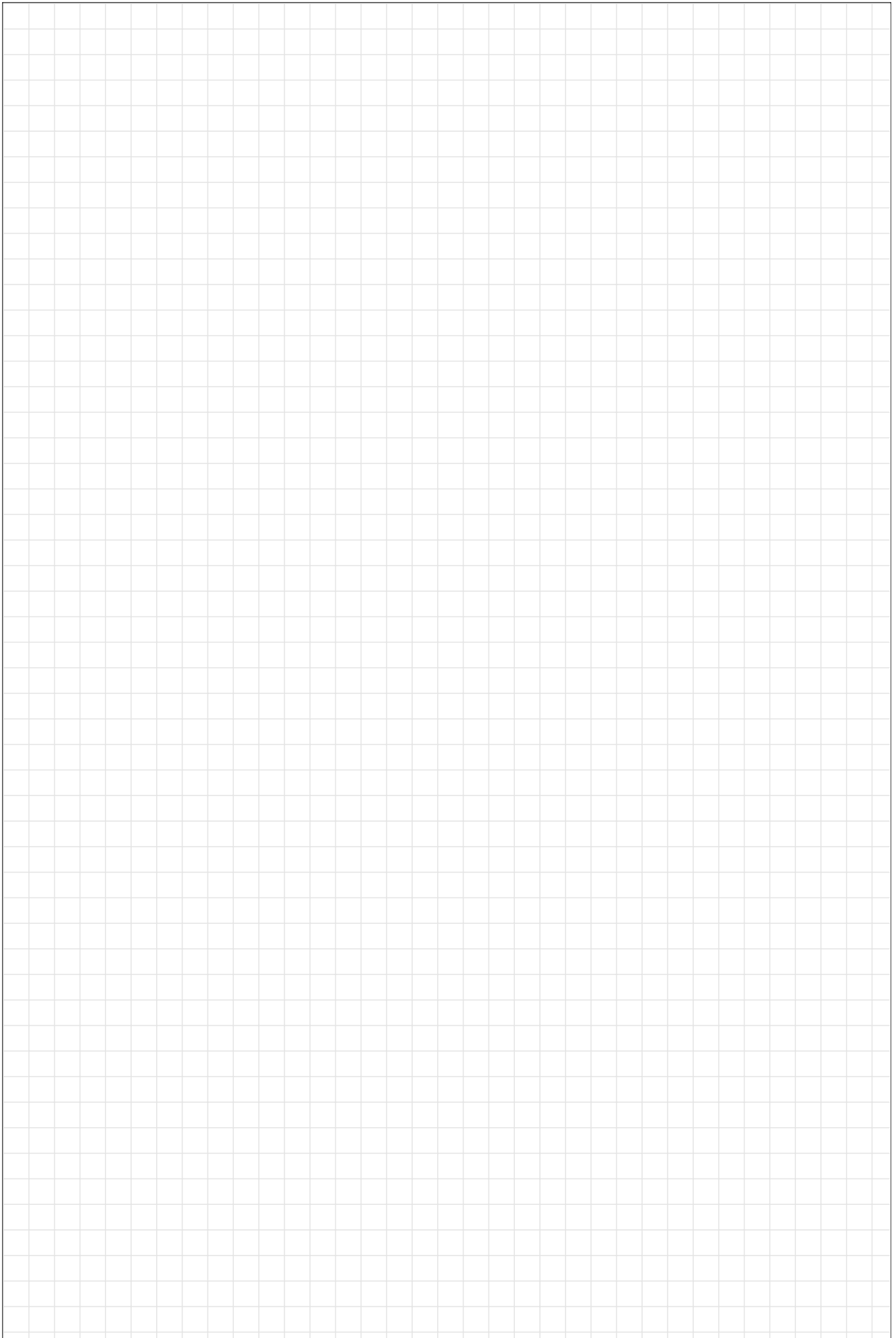
3.4 Forme normalisée d'un développement limité

Définition 3.2. Soit f une application admettant un développement limité l'ordre $n + p$ au voisinage de a . On appelle forme normalisée du développement limité de f , l'écriture :

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)) \text{ où } a_0 \neq 0.$$

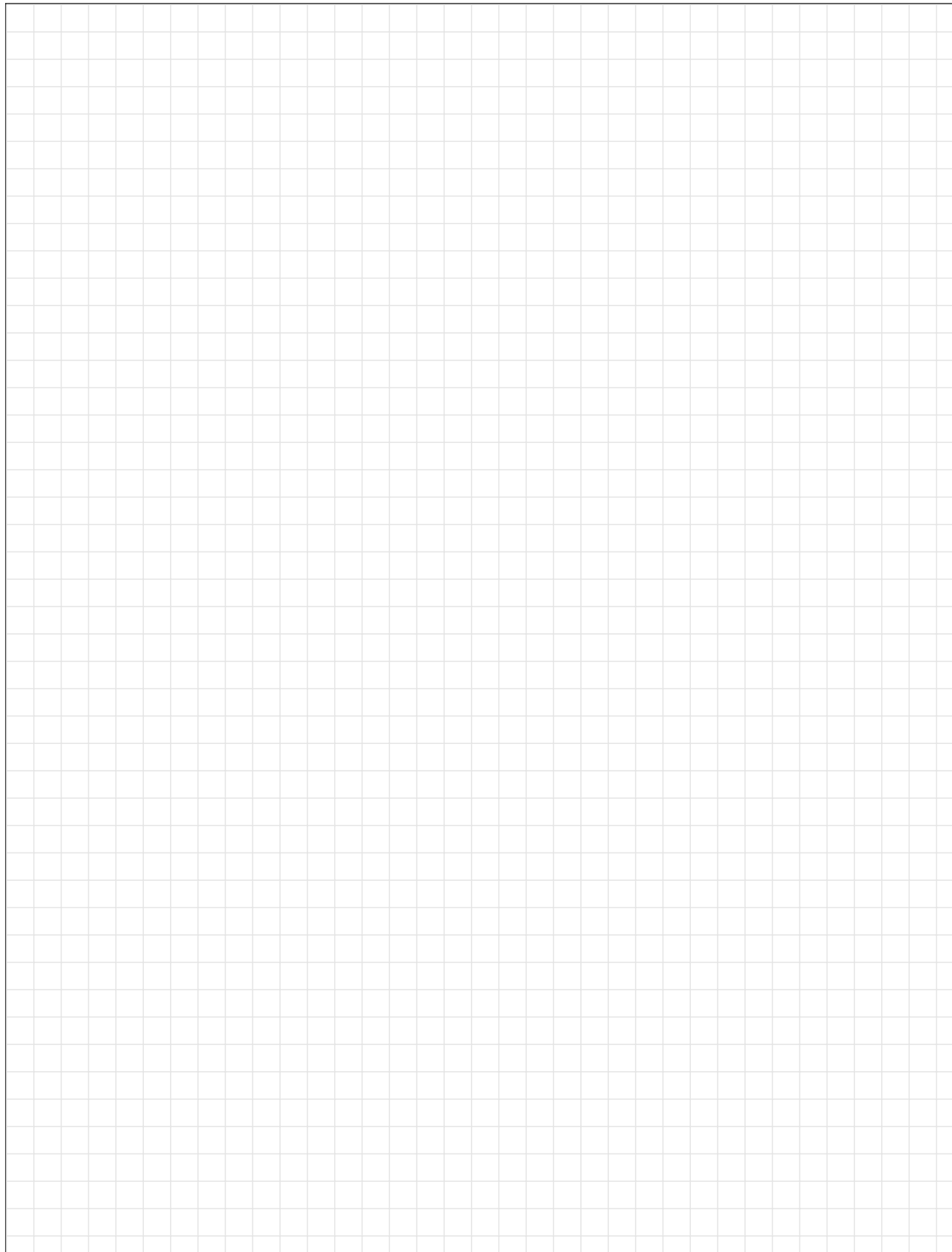
Proposition 3.5. Si f a un développement limité normalisé $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n))$ où $a_0 \neq 0$, alors $f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$ et f est de même signe que $a_0 h^p$.

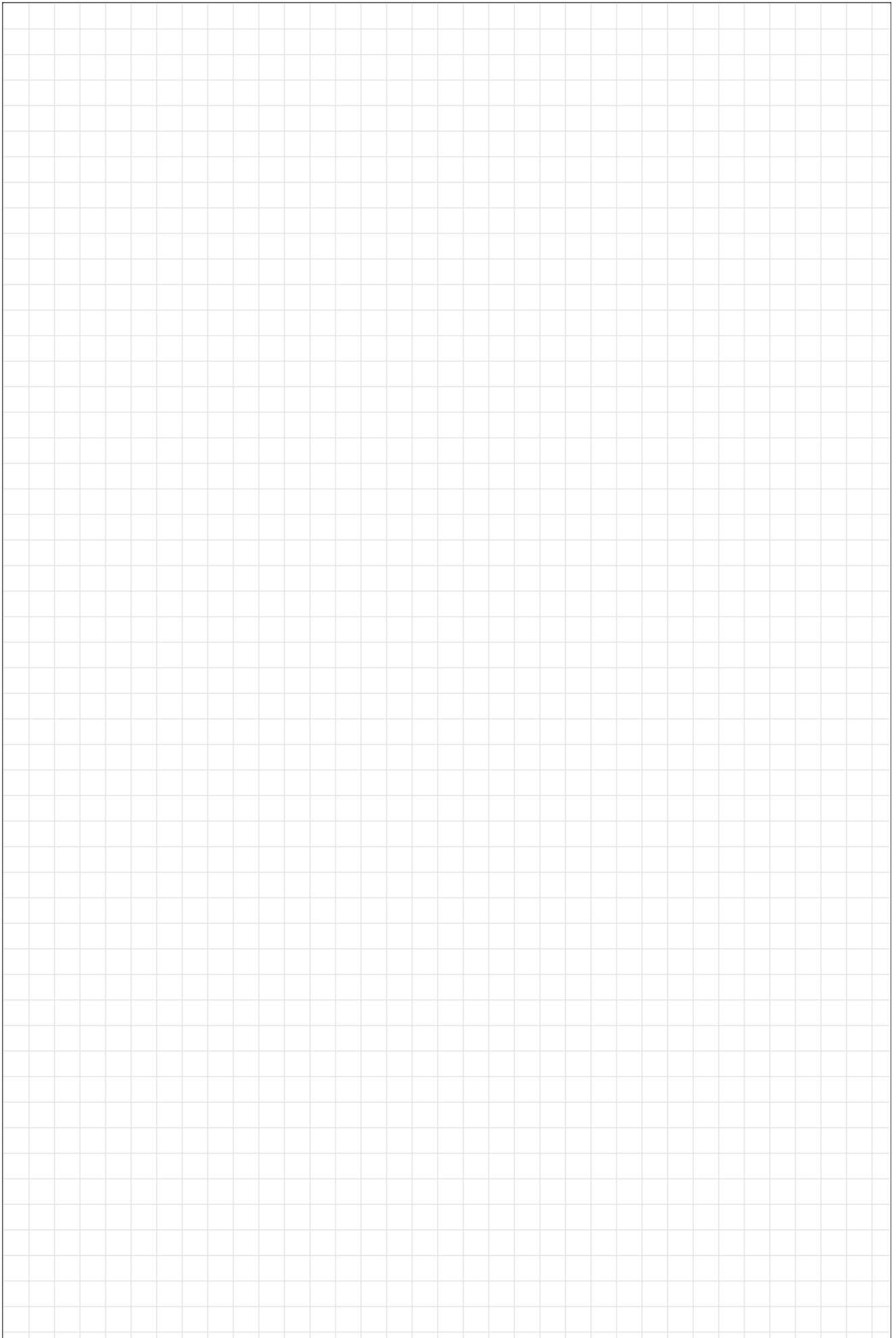




3.5 Translation d'un développement limité

Proposition 3.6. Si f est une fonction vérifiant $f(a+h) = g(h)$ pour tout h dans l'intervalle I contenant 0, et si g admet un développement limité à l'ordre n en 0 : $g(x) = P(x) + o(x^n)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a : $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$.



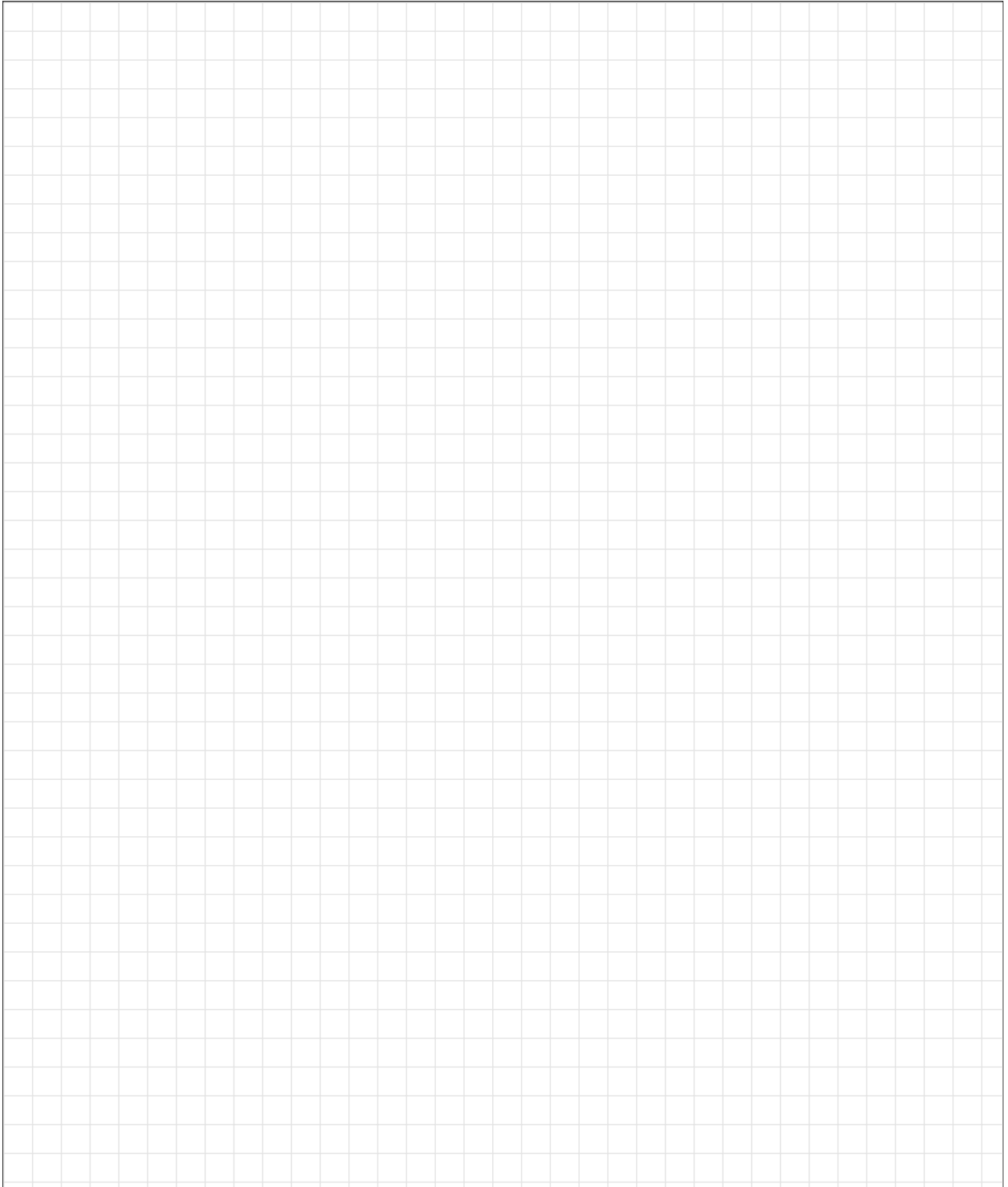


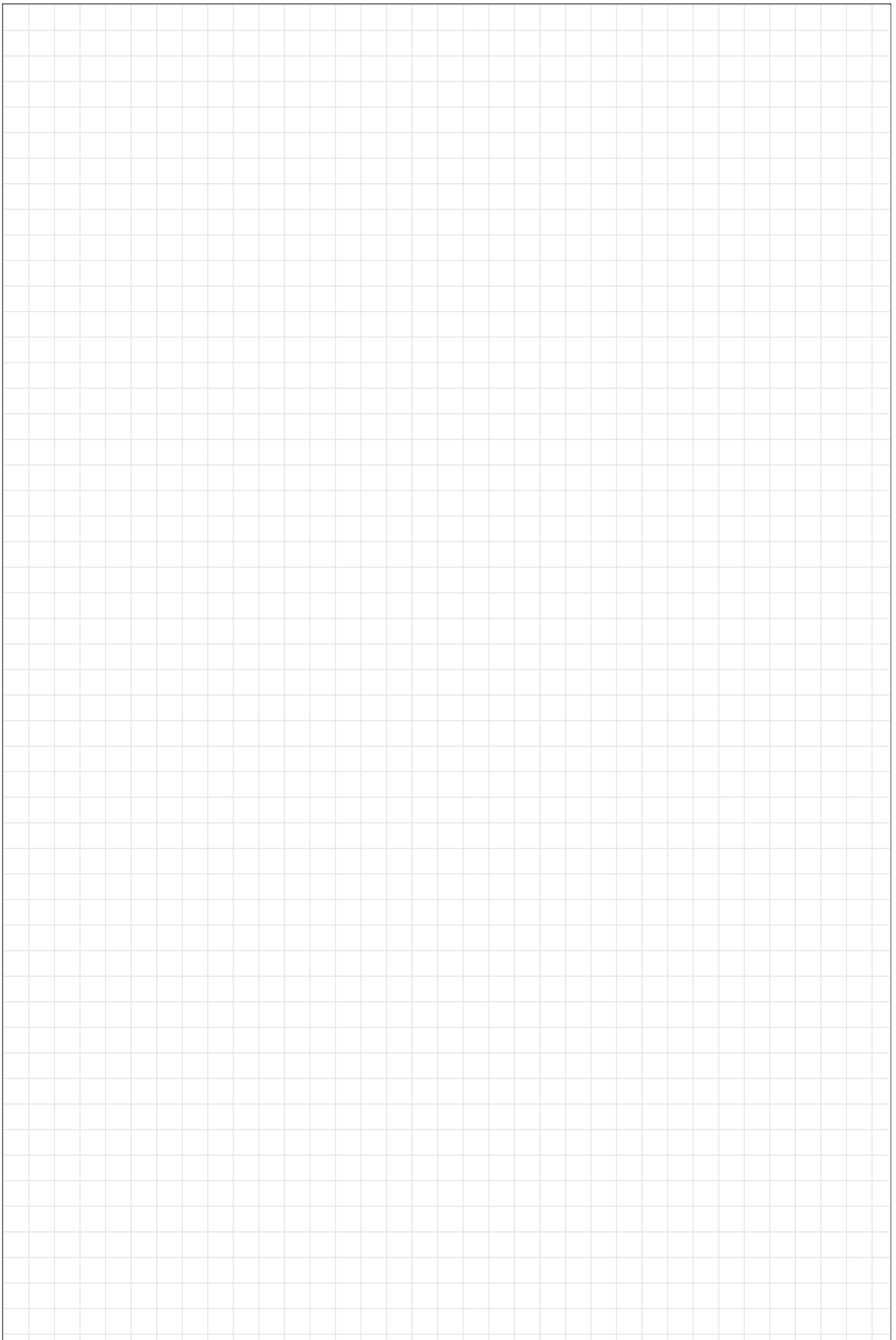
3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si la fonction g définie par $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n sur l'intervalle $J_+ = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in I \cap \mathbb{R}_+^*\right\}$ (respectivement sur $J_- = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in I \cap \mathbb{R}_-^*\right\}$), alors on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Si $g(u) = P(u) + o(u^n)$, alors $f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.





4 Formule de Taylor-Young

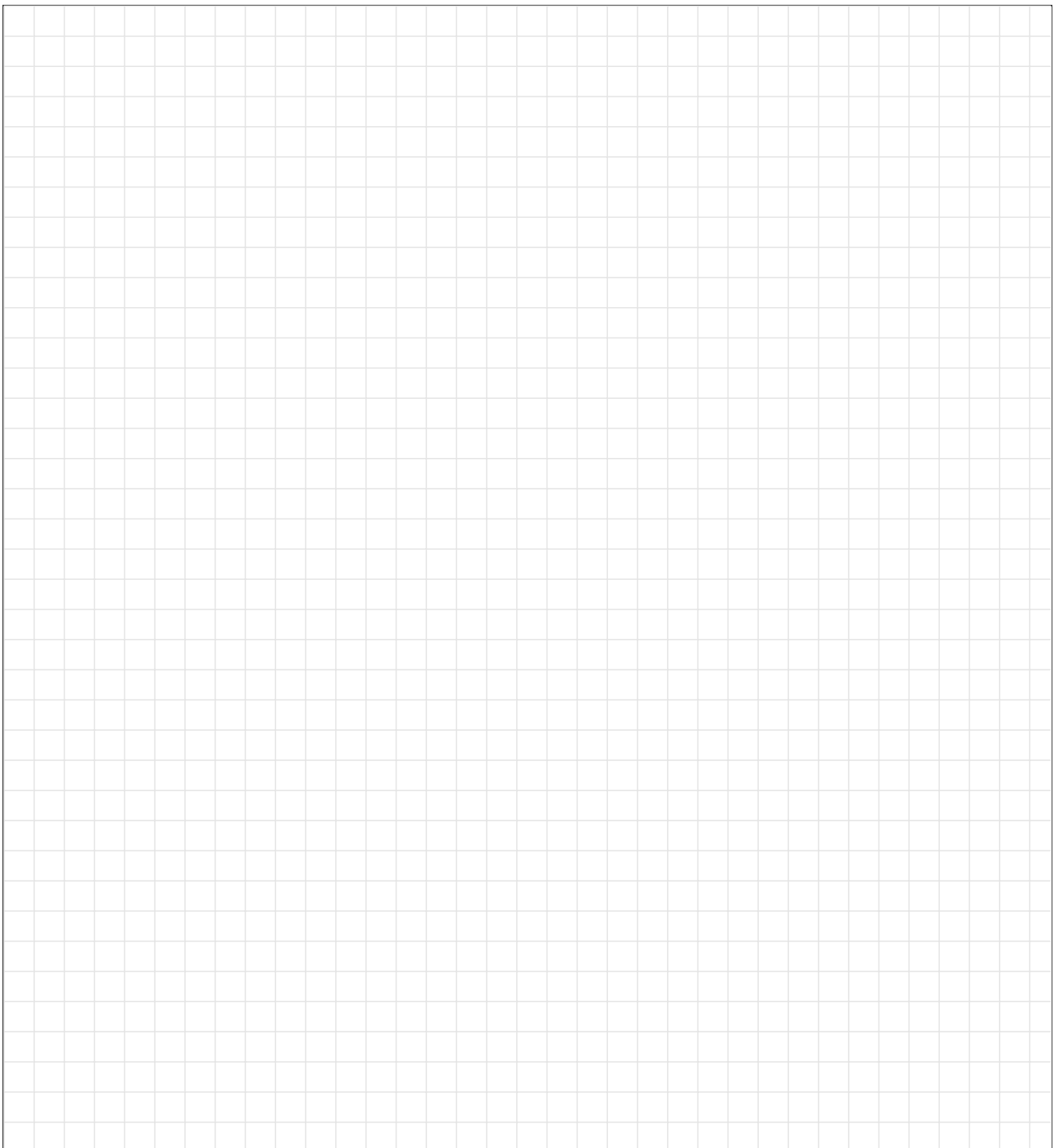
4.1 Intégration terme à terme d'un DL

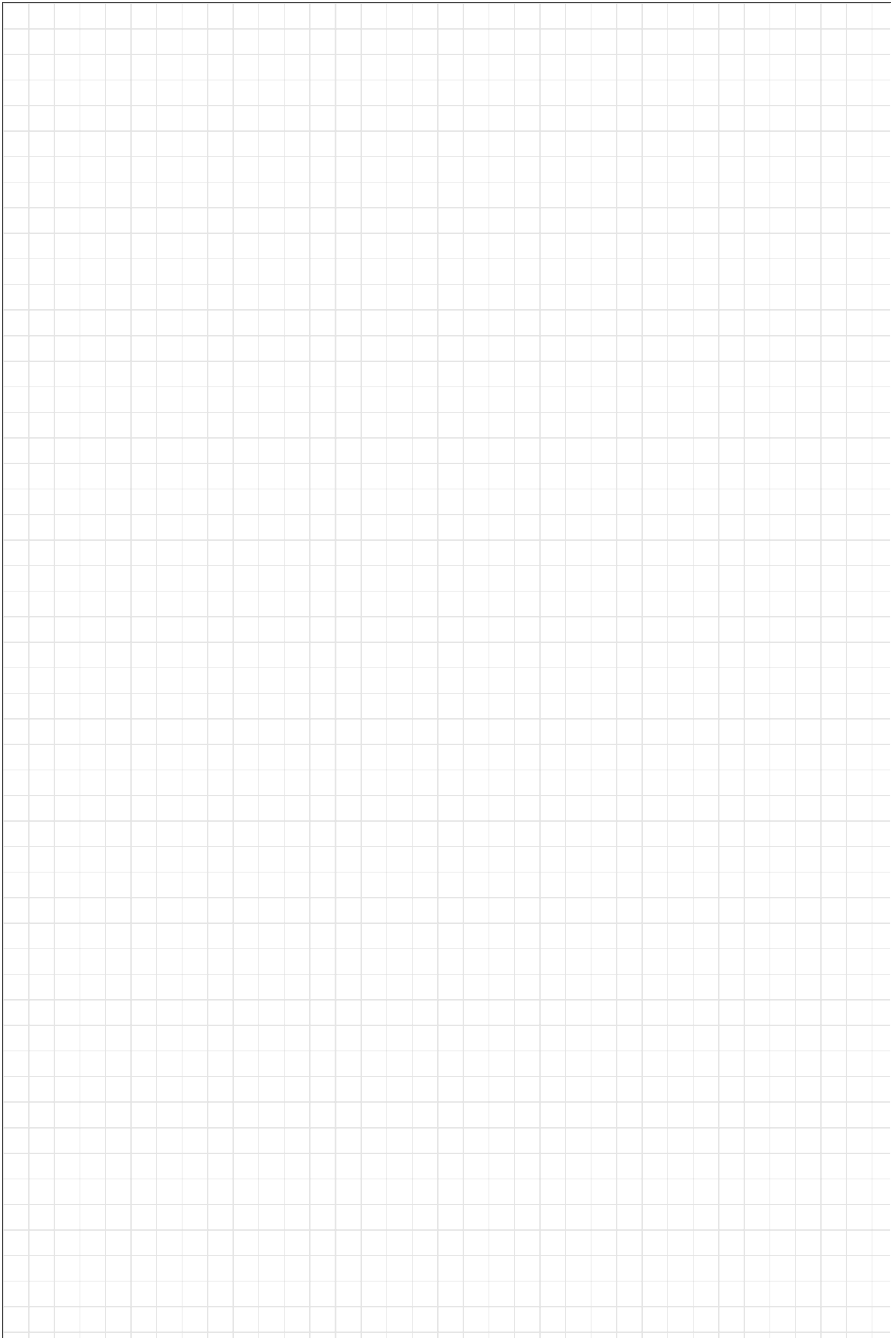
Théorème 4.1. Soit I un intervalle contenant a et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue possédant un développement limité à l'ordre n en a qui est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Alors toute primitive F de f sur I possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en a qui est :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$



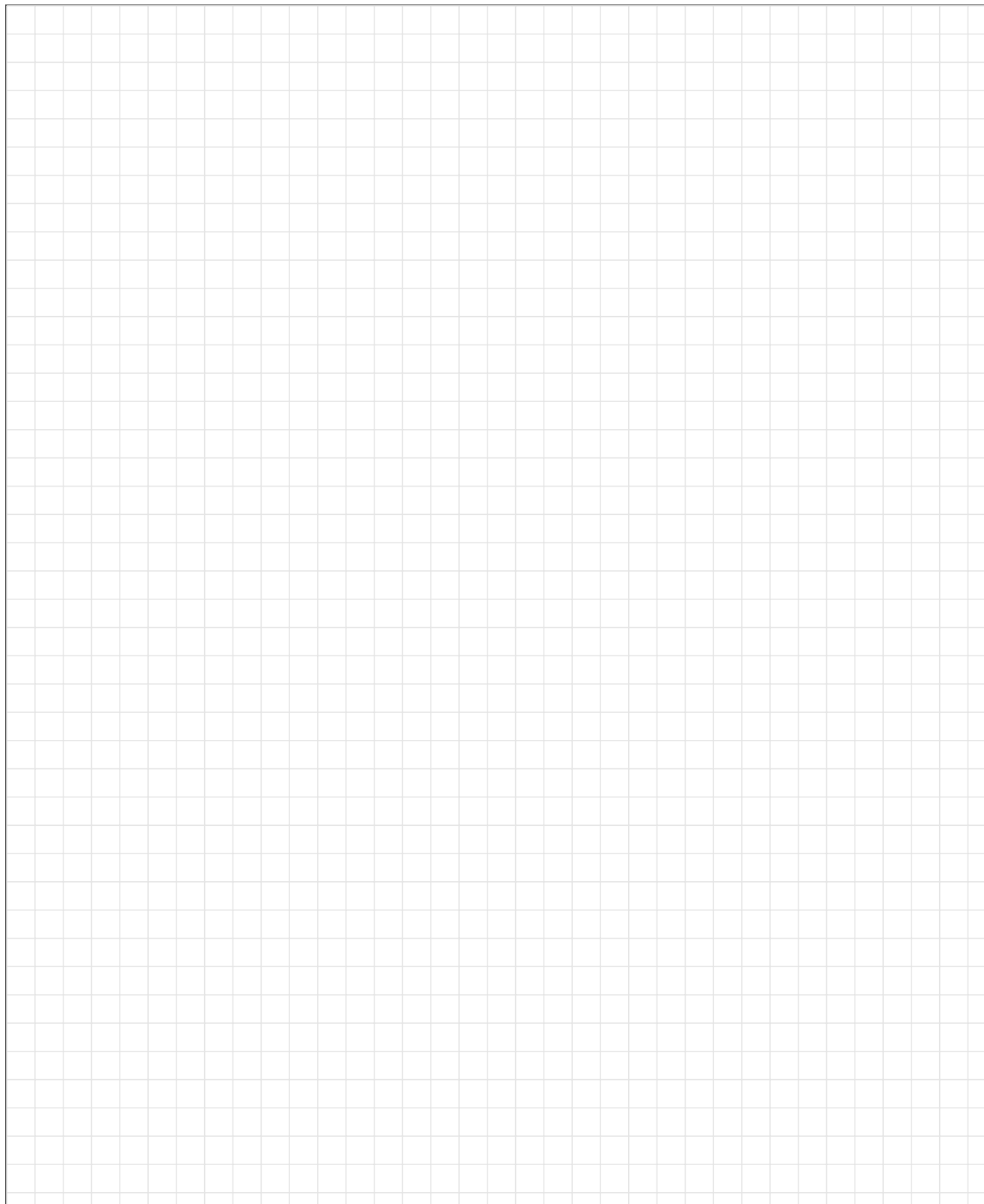


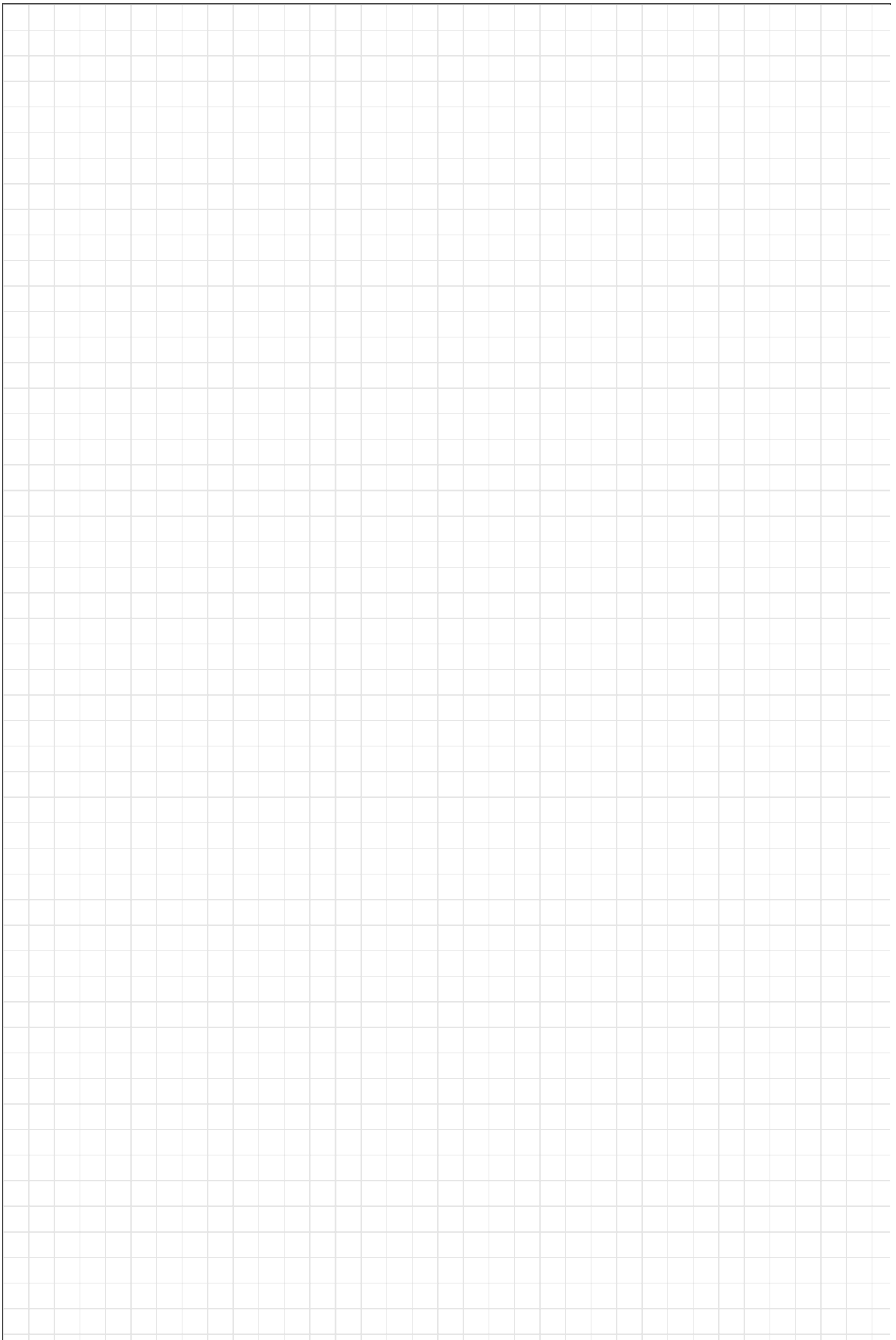
4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.2. Soit f une fonction de classe C^n d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{K} avec $n \in \mathbb{N}$. f possède en tout point a de I un développement limité d'ordre n donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{ou}$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$





5 Opérations sur les développements limités

5.1 Somme et produit

Proposition 5.1. Soit f et g deux fonctions réelles admettant en a des développements limités à l'ordre n :

$$f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \text{ et } g(x) \underset{a}{=} Q(x-a) + o((x-a)^n)$$

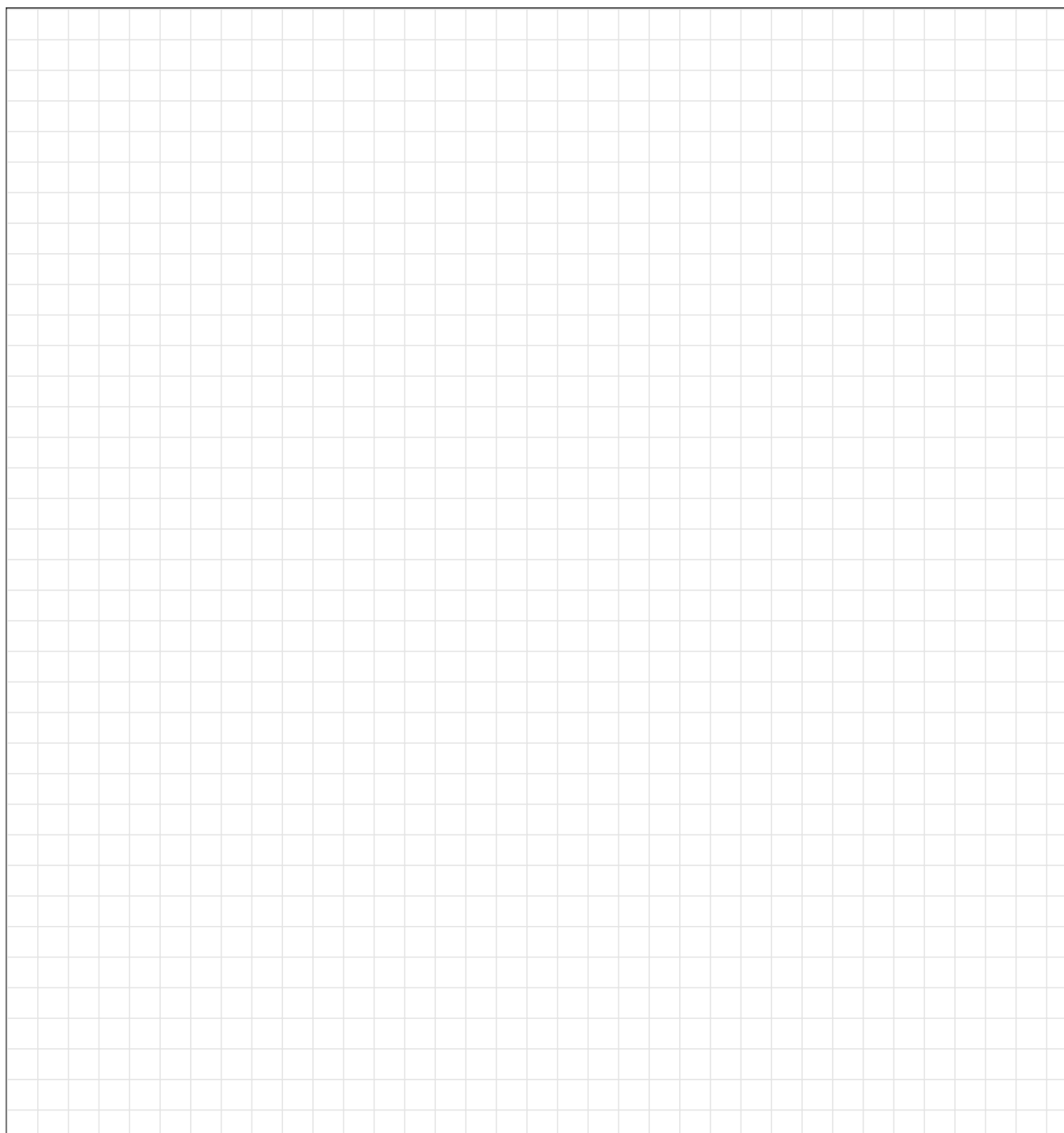
où P et Q sont des polynômes réels de degré au plus égal à n .

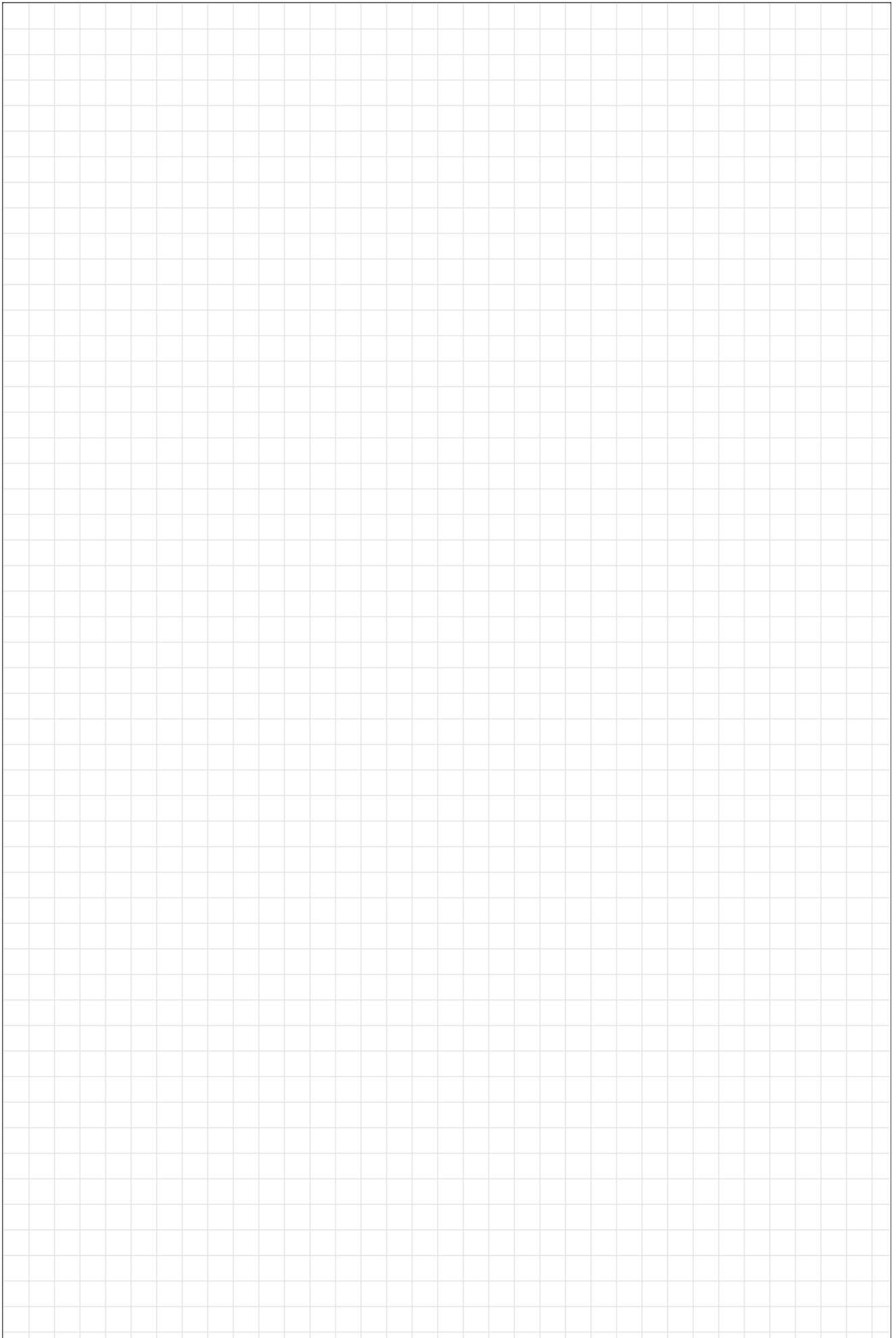
Alors les fonctions $f+g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n qui sont :

$$(f+g)(x) \underset{a}{=} P(x-a) + Q(x-a) + o((x-a)^n).$$

$$(fg)(x) \underset{a}{=} R(x-a) + o((x-a)^n)$$

où R est le polynôme obtenu tronquant le produit PQ au degré n .





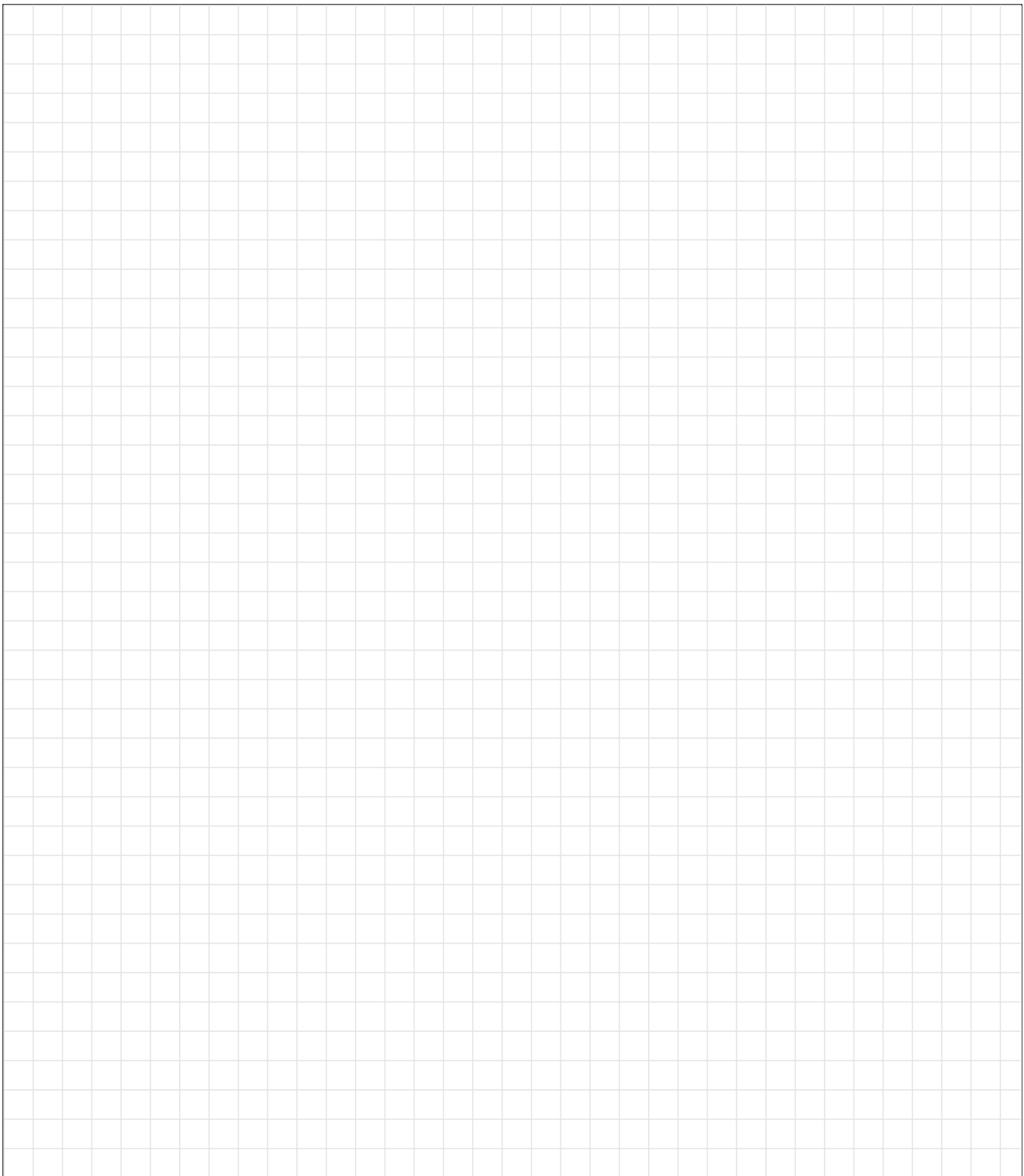
5.2 Dérivation d'un développement limité

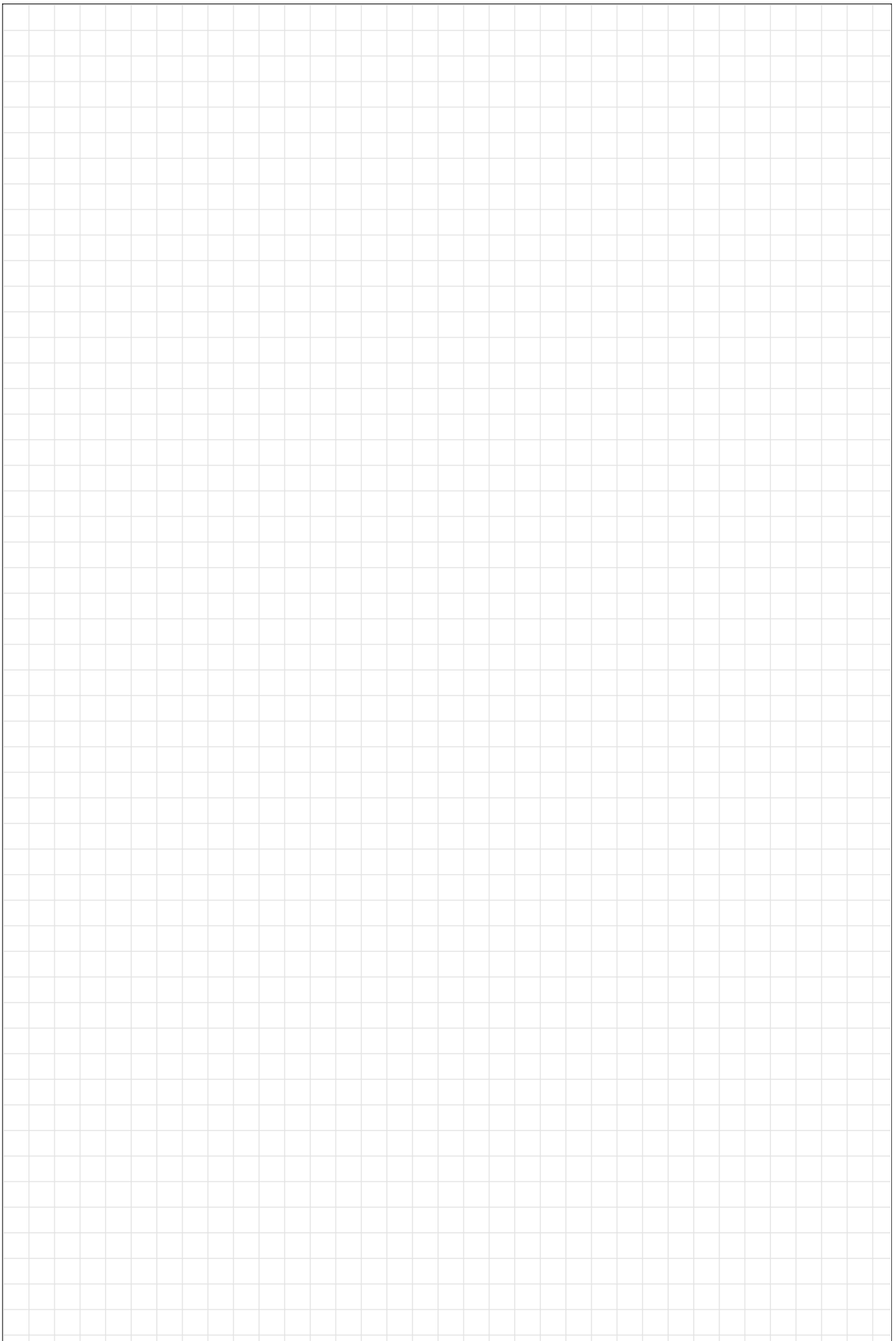
Proposition 5.2. Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I contenant a , admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a , alors ce développement s'obtient en dérivant celui de f :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k (x-a)^{k-1} + o(x-a)^{n-1}.$$





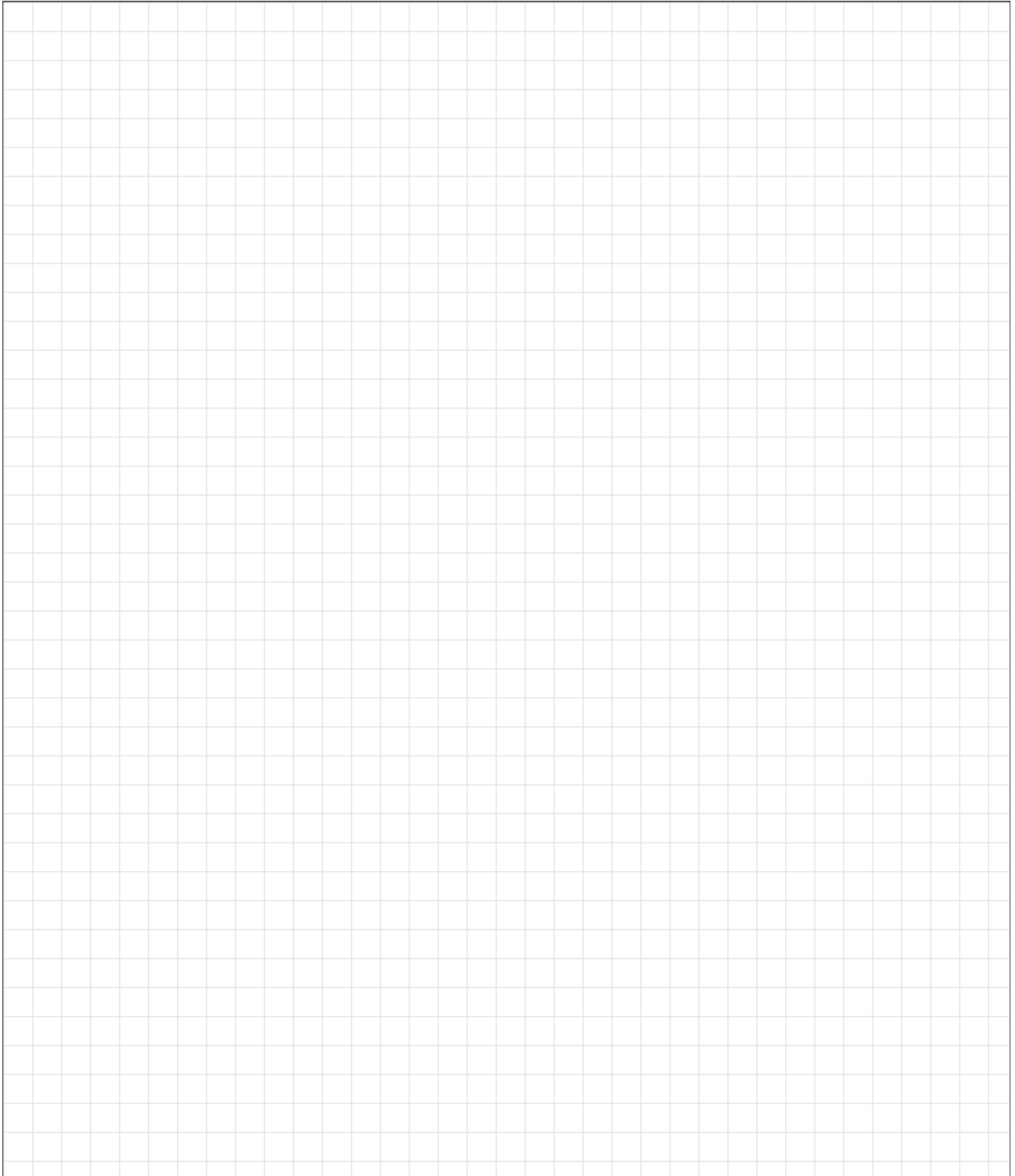
5.3 Développement limité d'une fonction composée

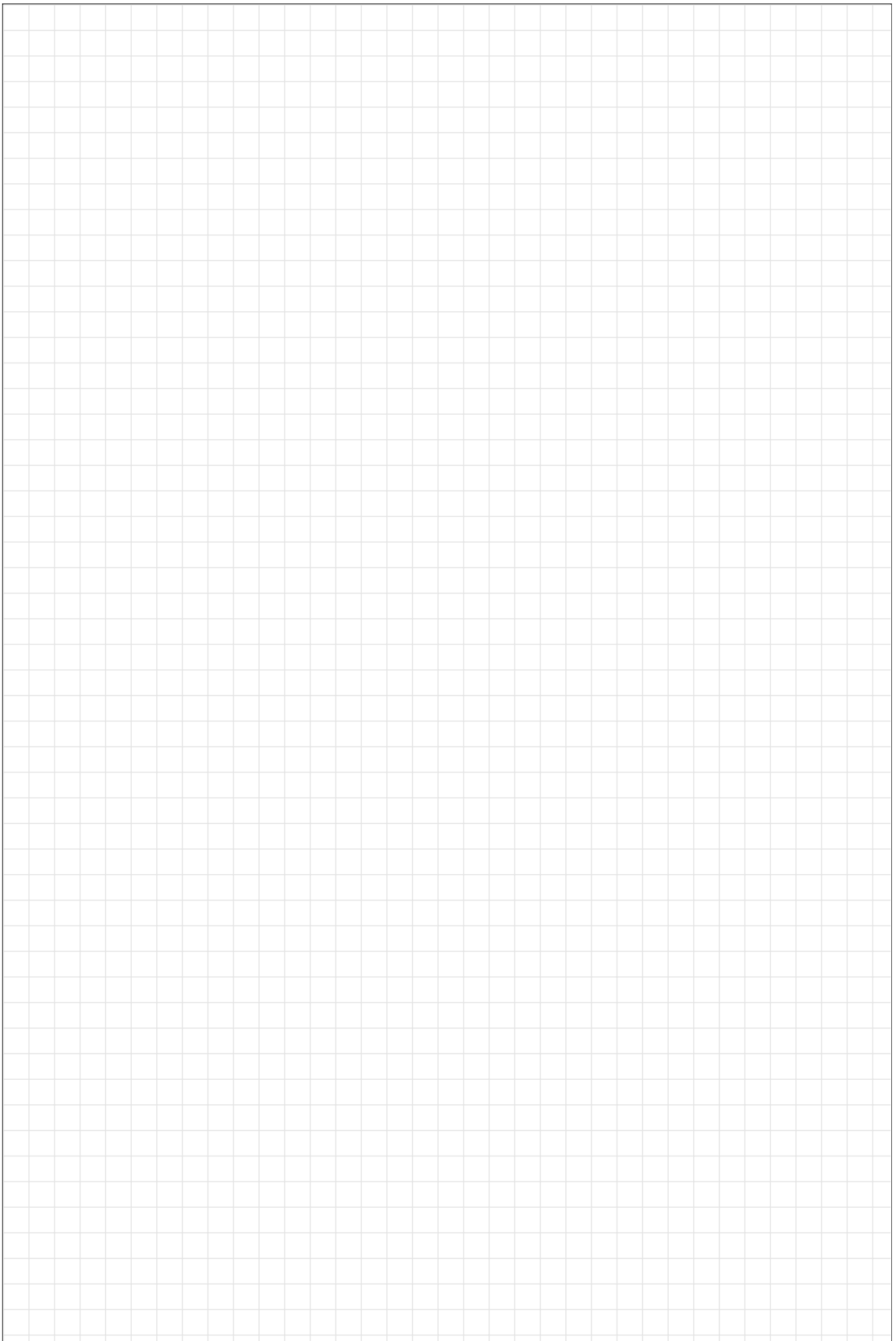
Proposition 5.3. *soit f une fonction définie sur I admettant un $DL_n(a)$ en $a \in I$, telle que $f(I) \subset J$, avec $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$.*

Soit g une fonction définie sur J admettant un DL_n en $b = f(a)$ avec $g(u) \underset{b}{=} Q(u-b) + o(u-b)^n$.

Alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme composé $Q(P(X))$:

$$g \circ f(x) \underset{a}{=} \text{reste de la division de } Q(P(x-a)) \text{ par } (x-a)^{n+1} + o((x-a)^n).$$

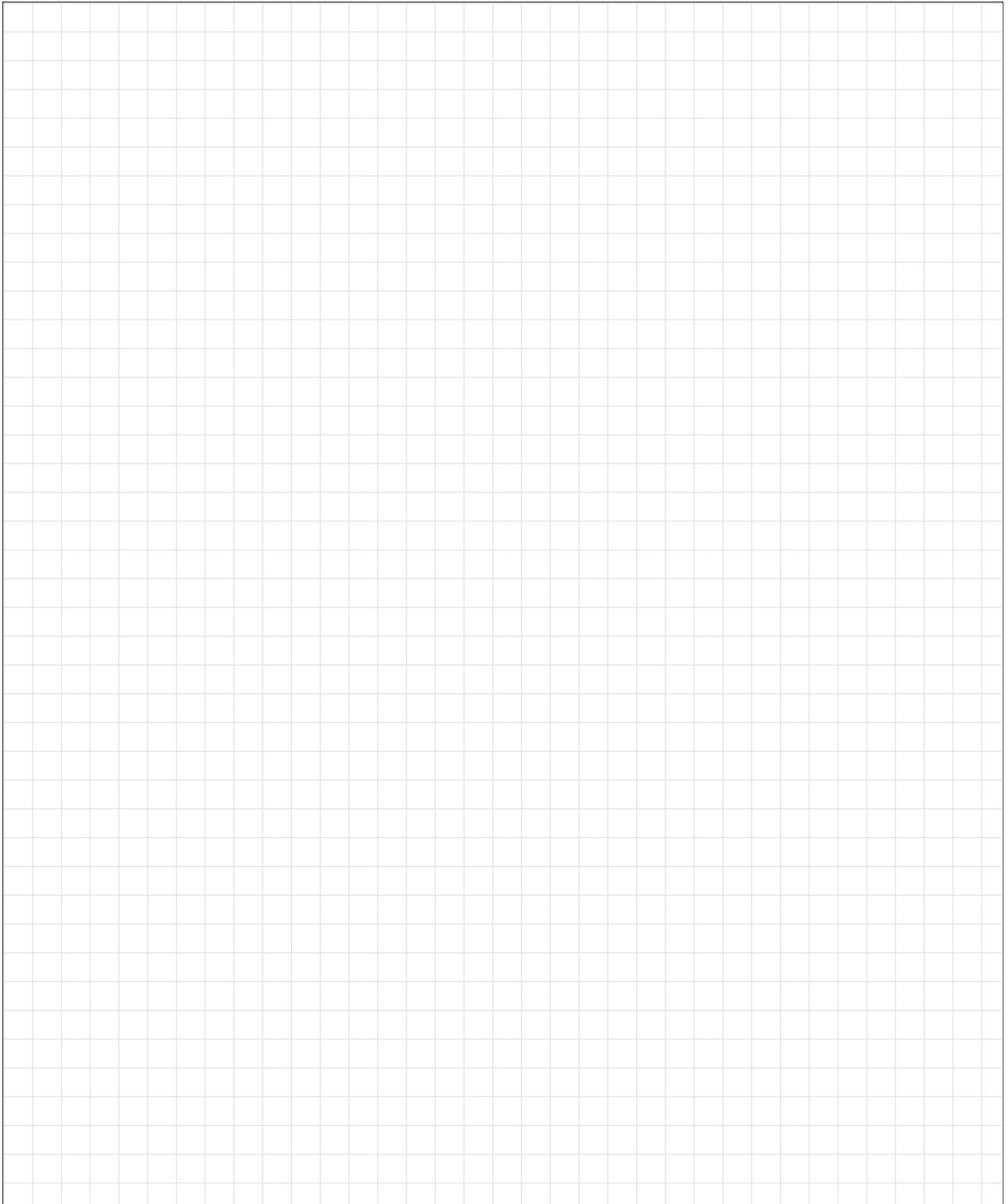


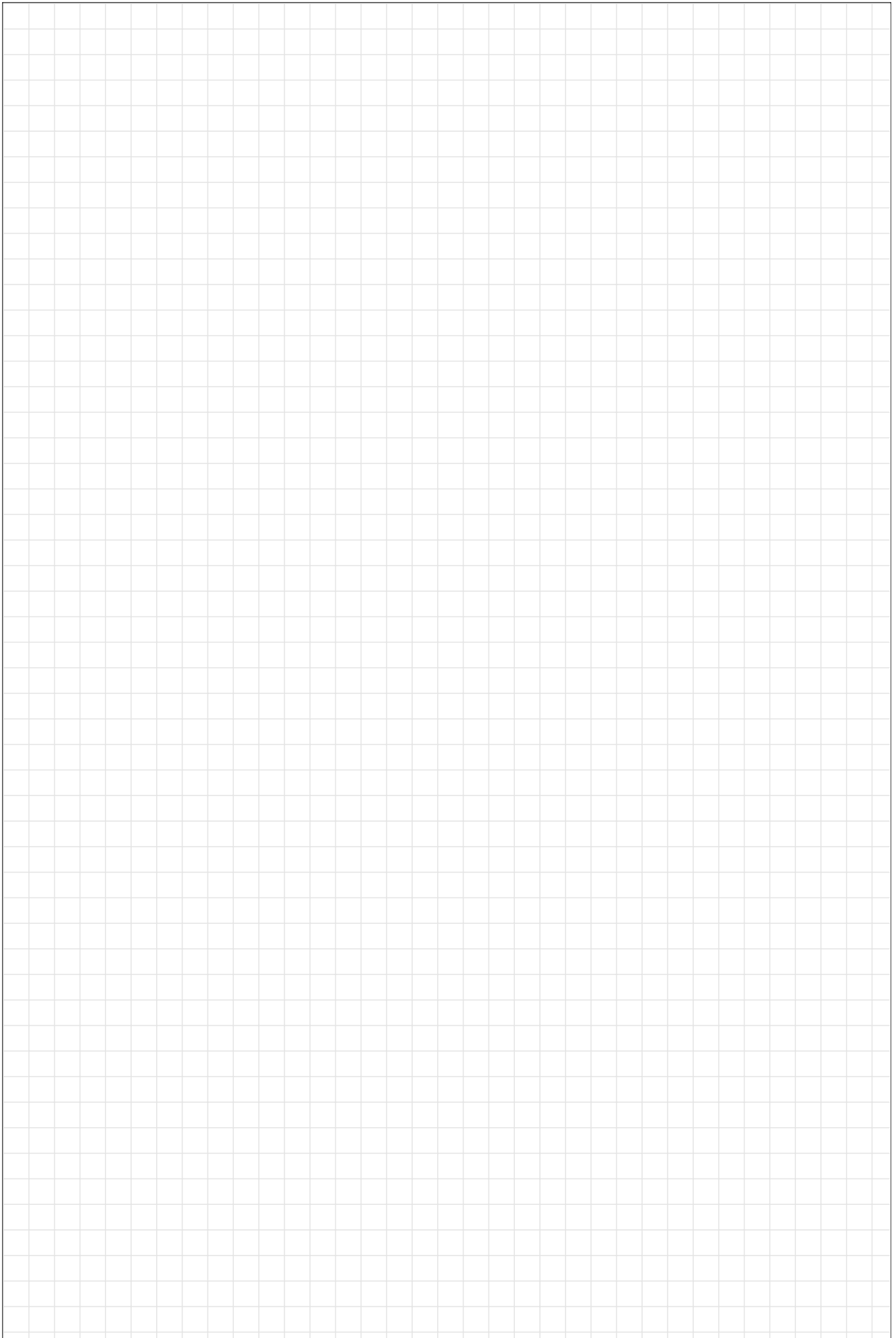


5.4 Développement limité d'un quotient

Proposition 5.4. Si u est une fonction telle que $\lim_a u = 0$ et si u a un développement limité à l'ordre n en a , alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 - u(x)}$ admet un $DL_n(a)$.

Si $u(x) = P(x - a) + o(x - a)^n$, alors $\frac{1}{1 - u(x)} = 1 + P(x - a) + P^2(x - a) + P^3(x - a) + \cdots + P^n(x - a) + o(x - a)^n$: le développement limité s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $1 + P(X) + P^2(X) + \cdots + P^n(X)$.





6 Formulaire

$$\frac{1}{1-x} =_0 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \quad \left. \sum n^k = \frac{1-n^{n+1}}{1-n} \right)$$

$$(1+x)^\alpha =_0 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) =_0 x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n) \quad \text{par intégration}$$

$$\arctan x =_0 x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + (-1)^p \frac{1}{2p+1}x^{2p+1} + o(x^{2p+1}) \quad \text{par intégration}$$

$$e^x =_0 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

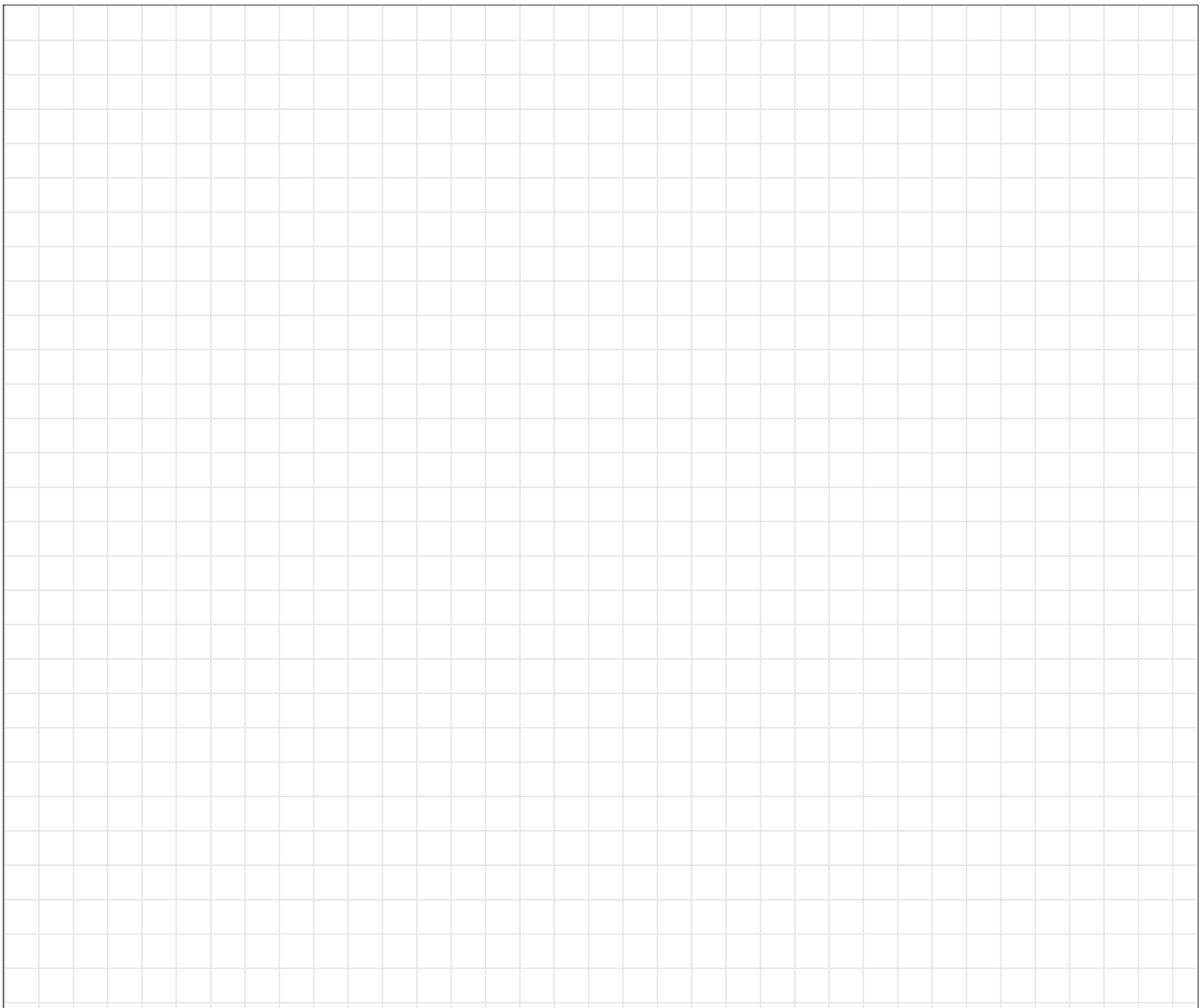
$$\operatorname{ch} x =_0 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p})$$

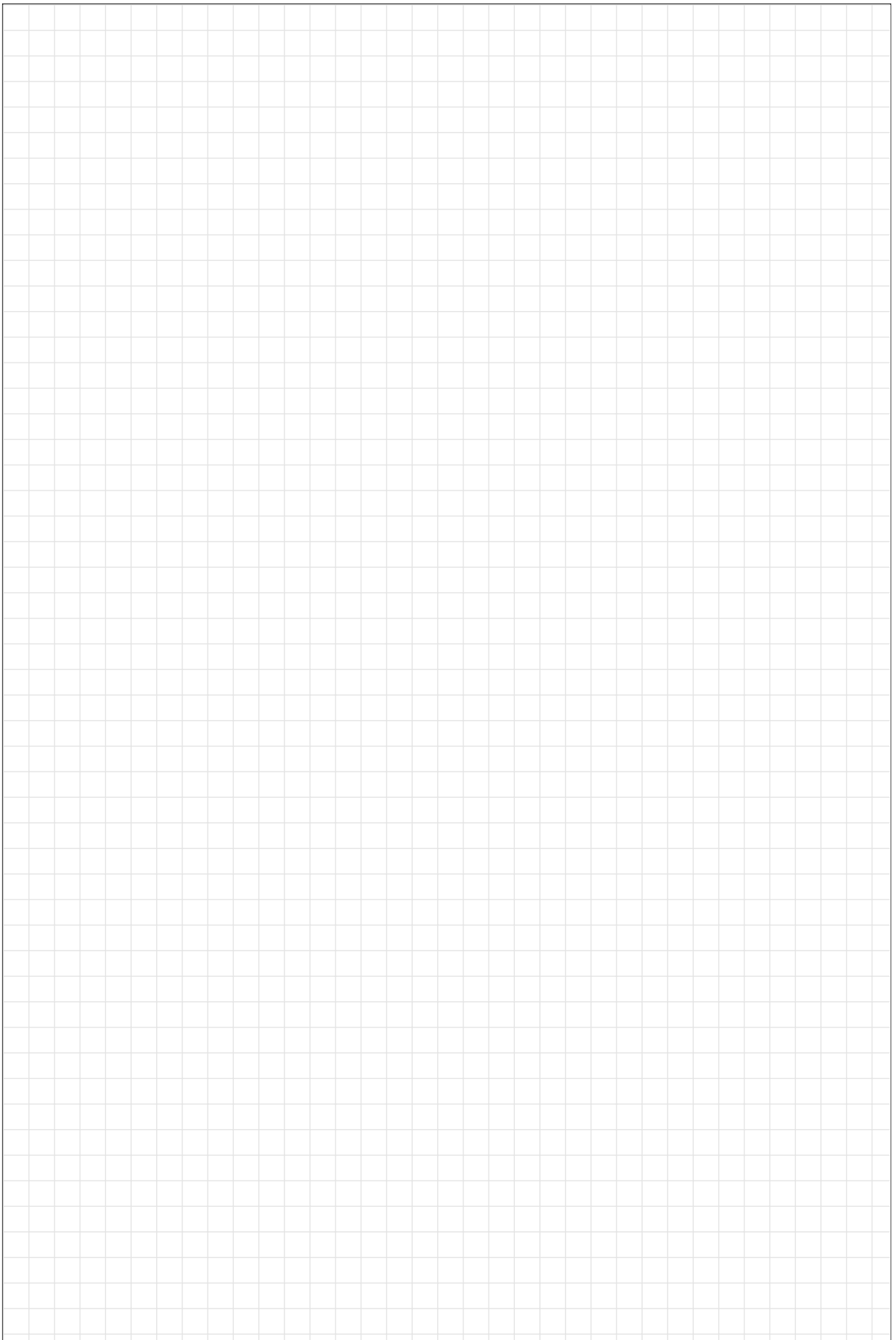
$$\operatorname{sh} x =_0 x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos x =_0 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^p \frac{1}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p})$$

$$\sin x =_0 x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^p \frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

$$\tan x =_0 x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

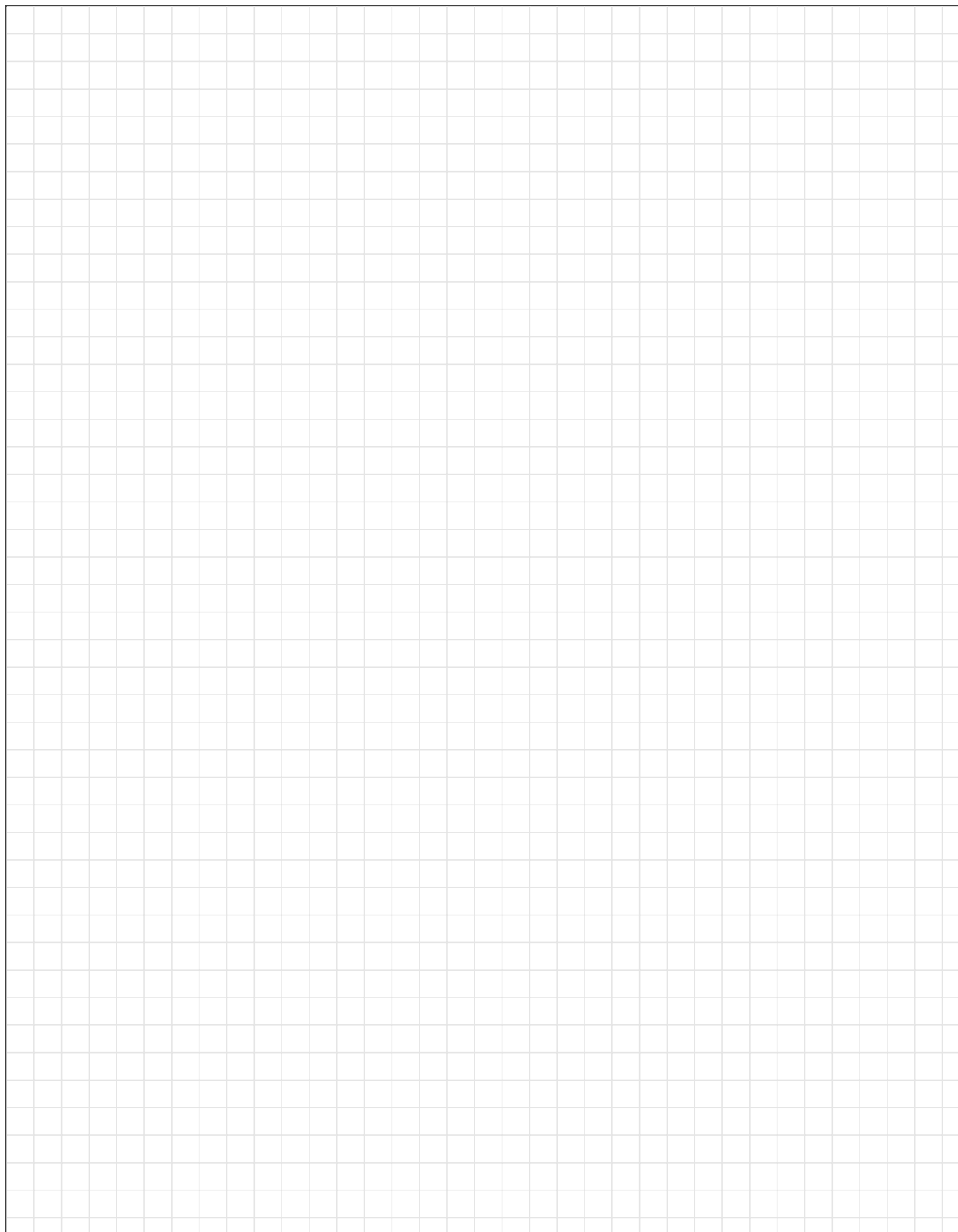


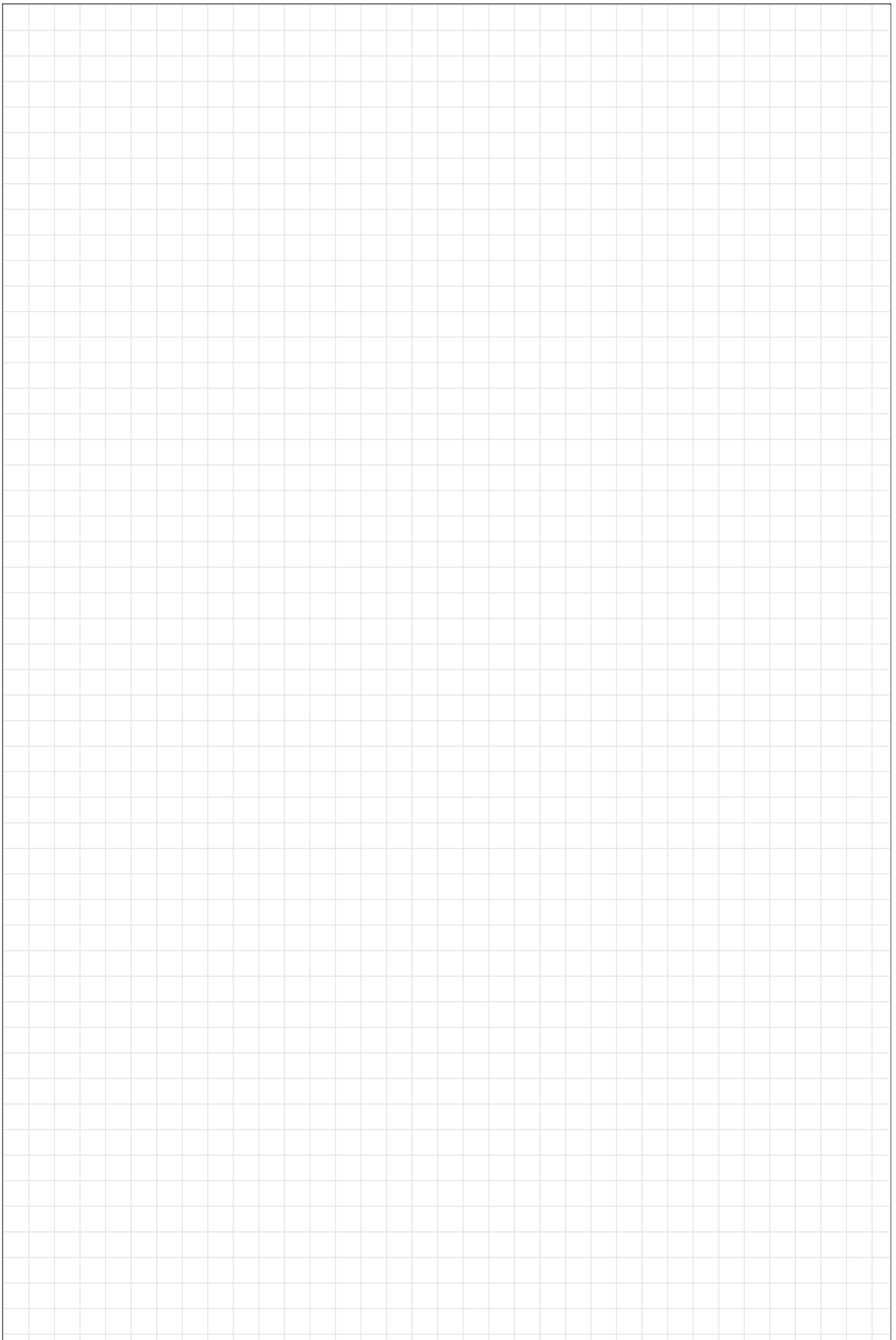


7 Applications

7.1 Étude de limites

Proposition 7.1. *Si une fonction f a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f a une limite en a qui vaut a_0 .*

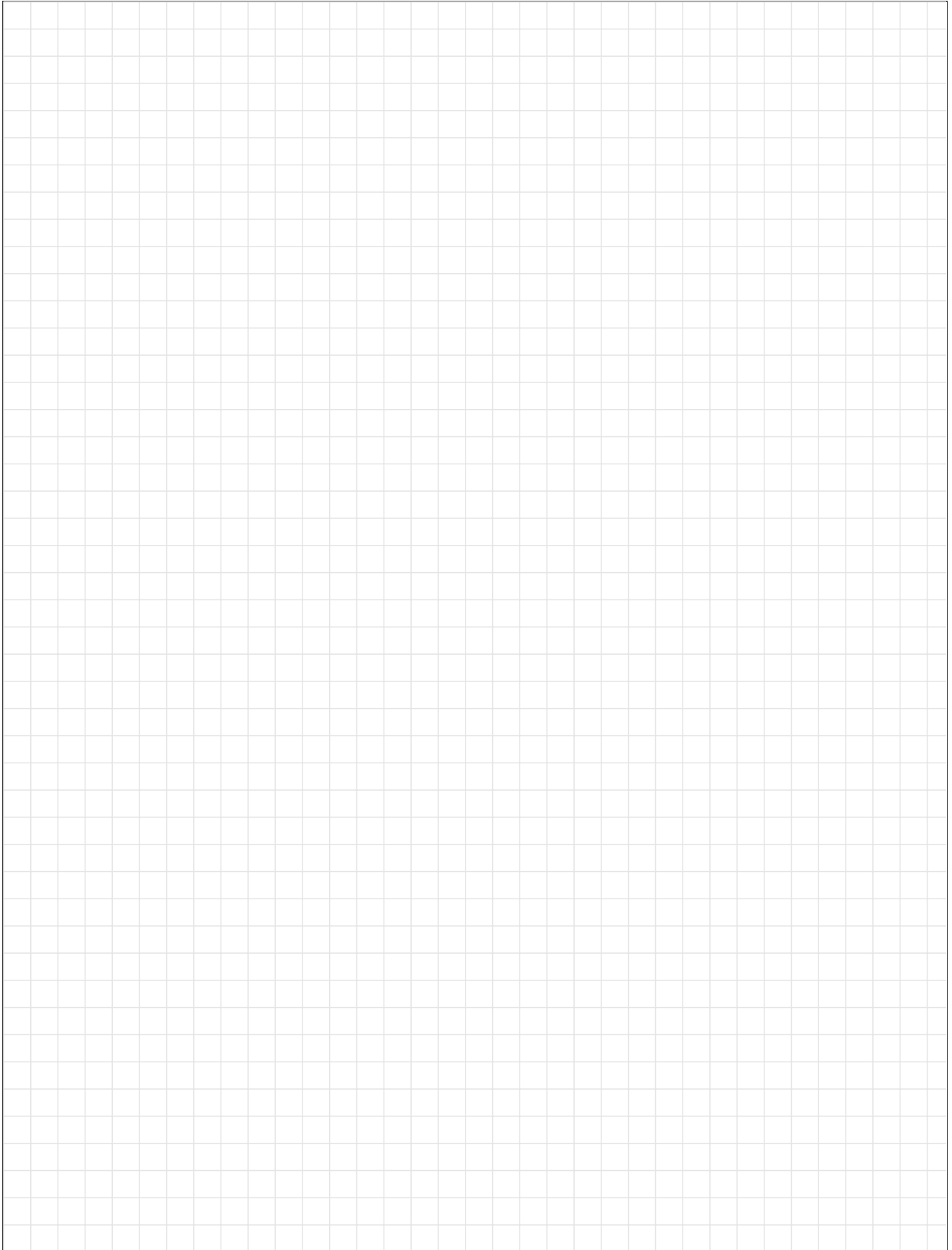


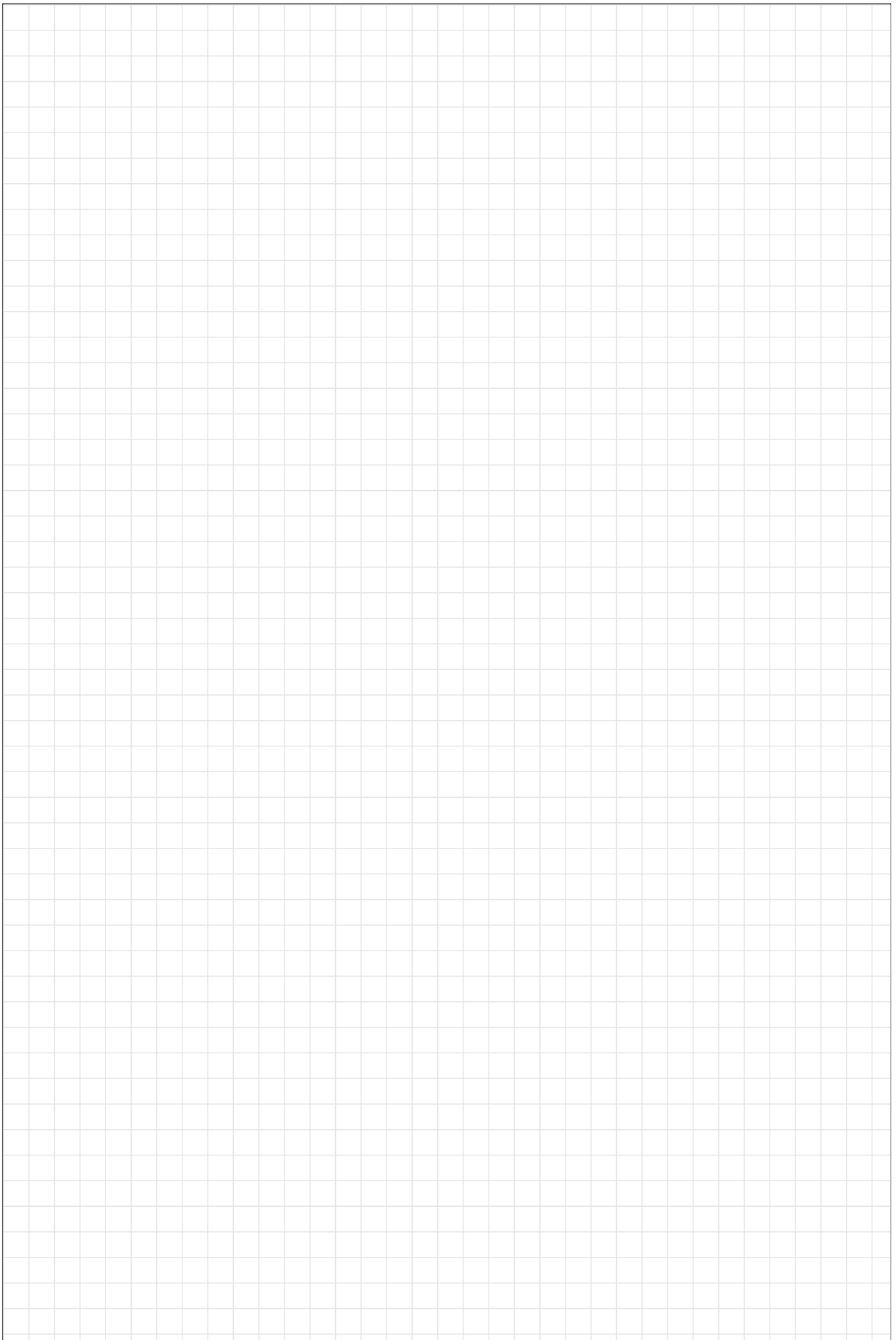


7.2 Prolongement par continuité

Proposition 7.2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) = a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.

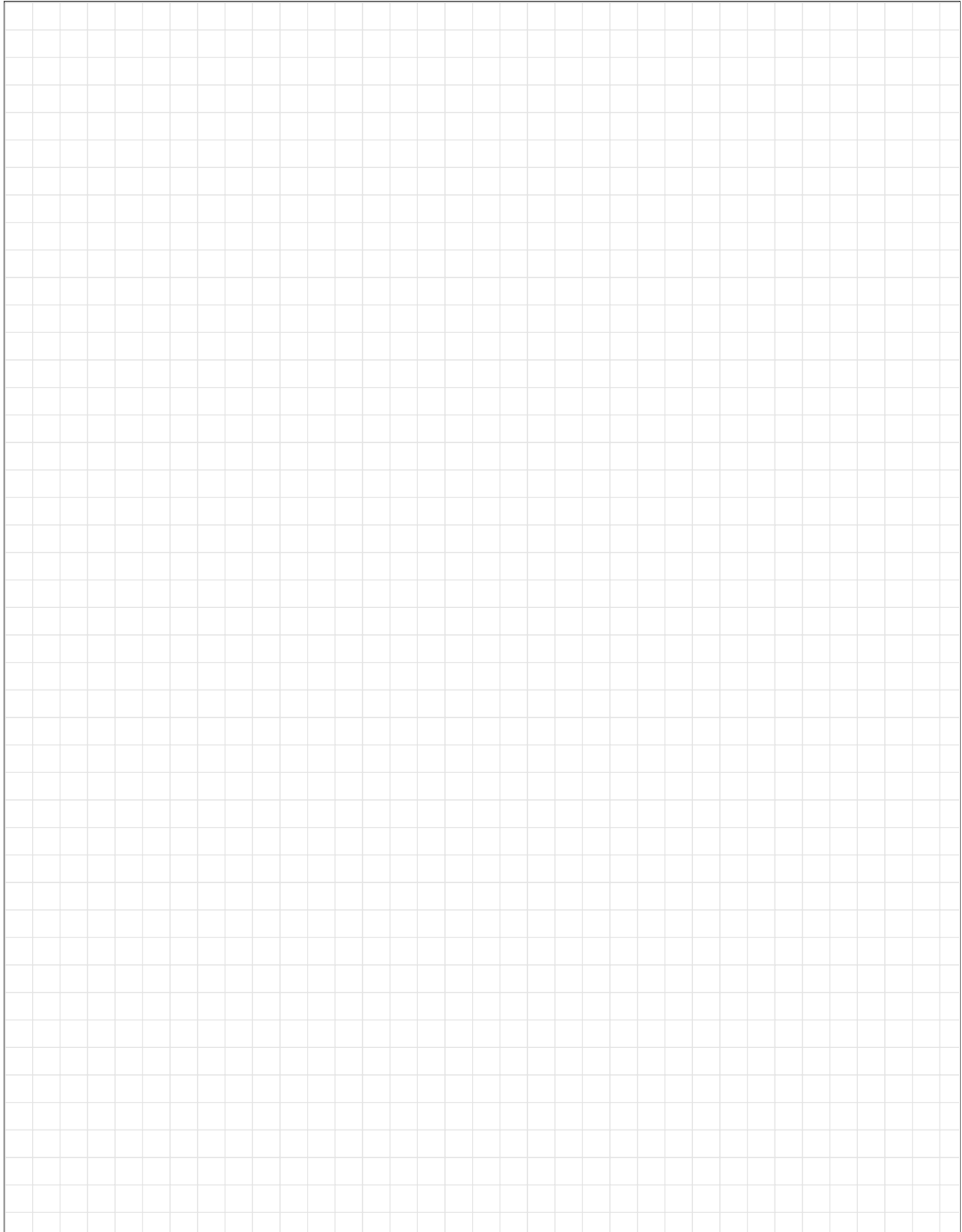


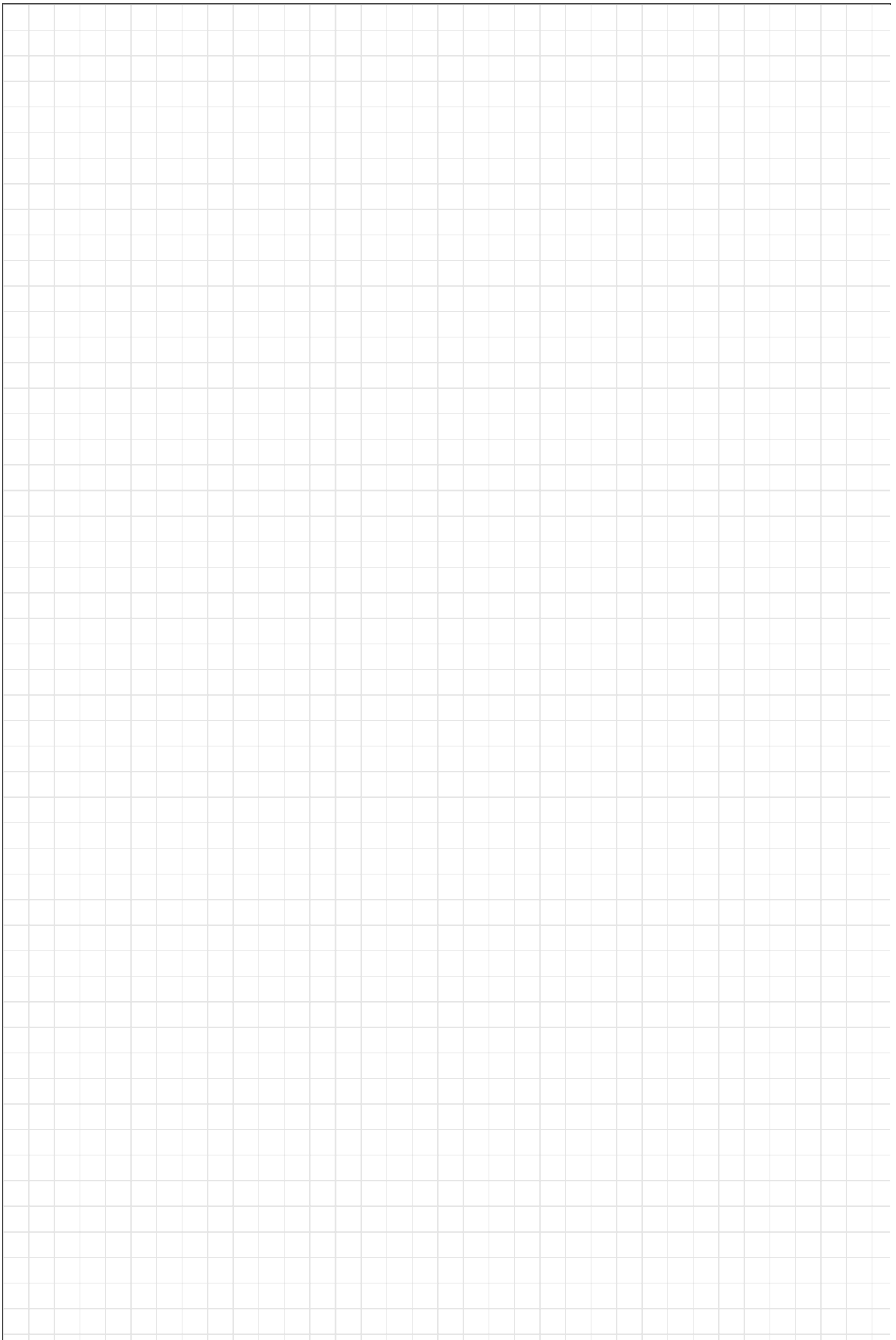


7.3 Dérivabilité d'un prolongement par continuité

Proposition 7.3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in I$.

Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o(x - a)$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $\tilde{f}(a) = a_0$ et le prolongement \tilde{f} est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = a_1$.



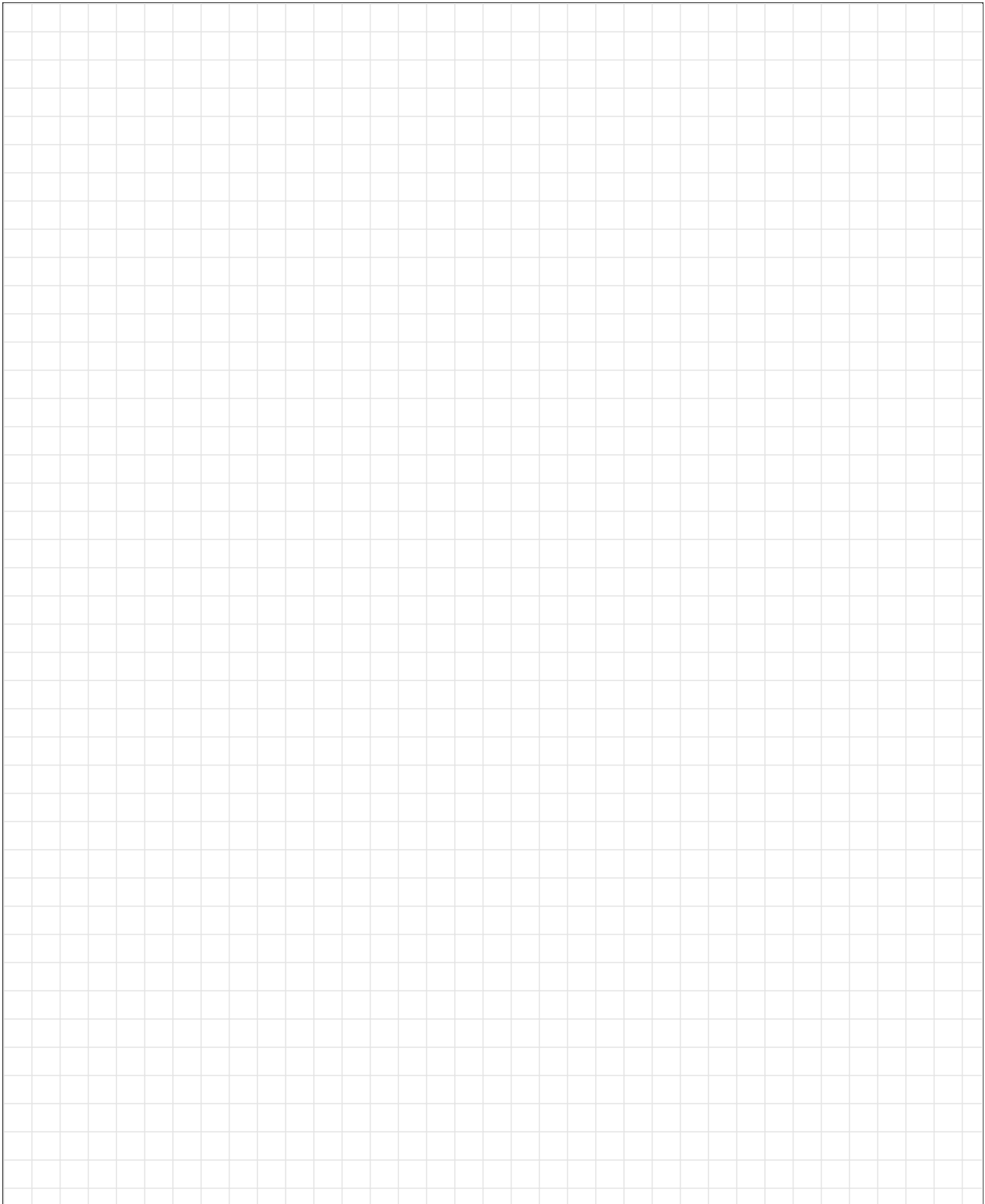


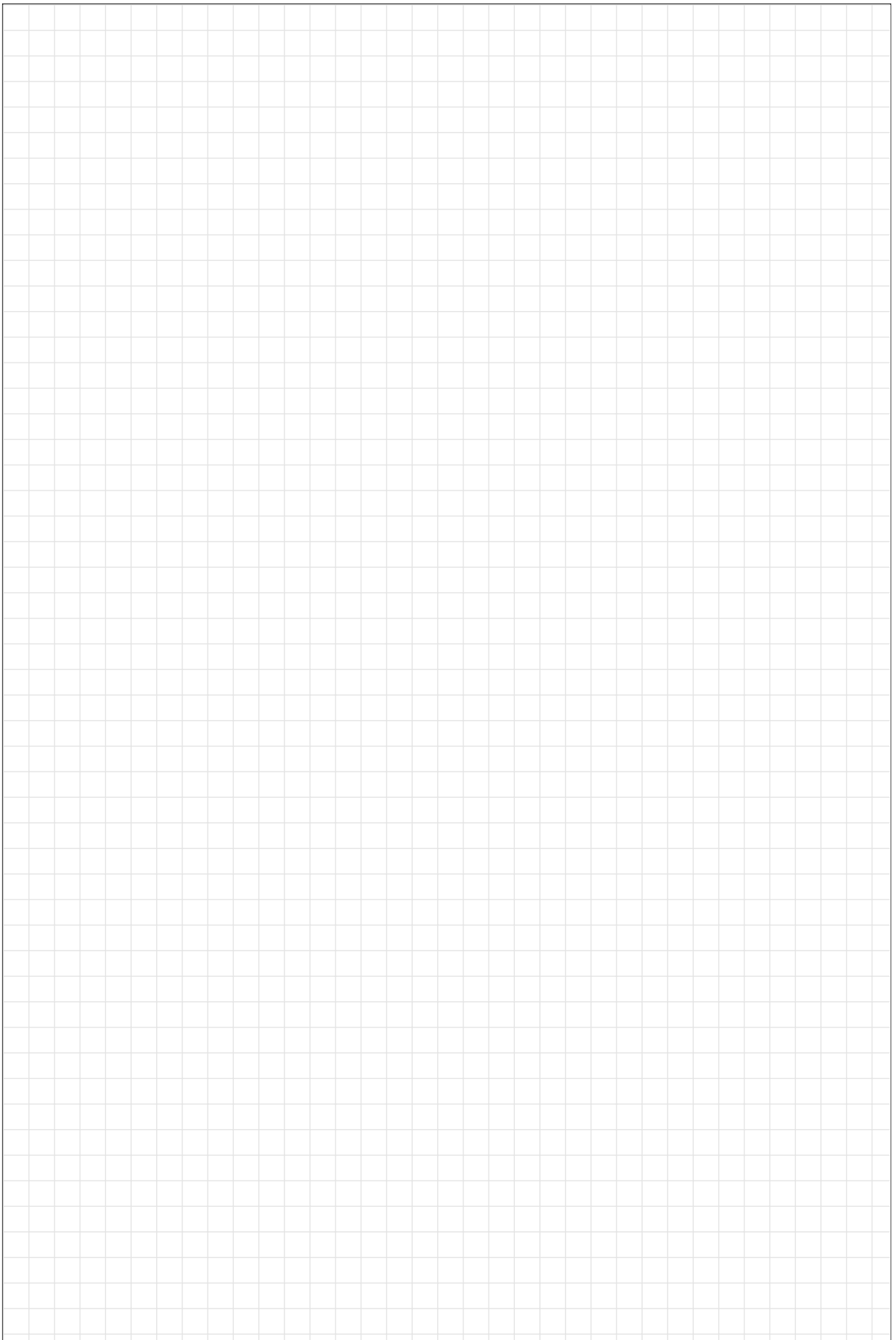
7.4 Position relative de la courbe et de la tangente

Proposition 7.4. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in I$.

Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_p(x - a)^p + o((x - a)^p)$ avec $p \geq 2$ et $a_p \neq 0$, alors la droite $y = a_0 + a_1(x - a)$ est tangente à la courbe représentative de f en a .

De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point a est donnée par le signe de $a_p(x - a)^p$: au-dessus si $a_p(x - a)^p \geq 0$.

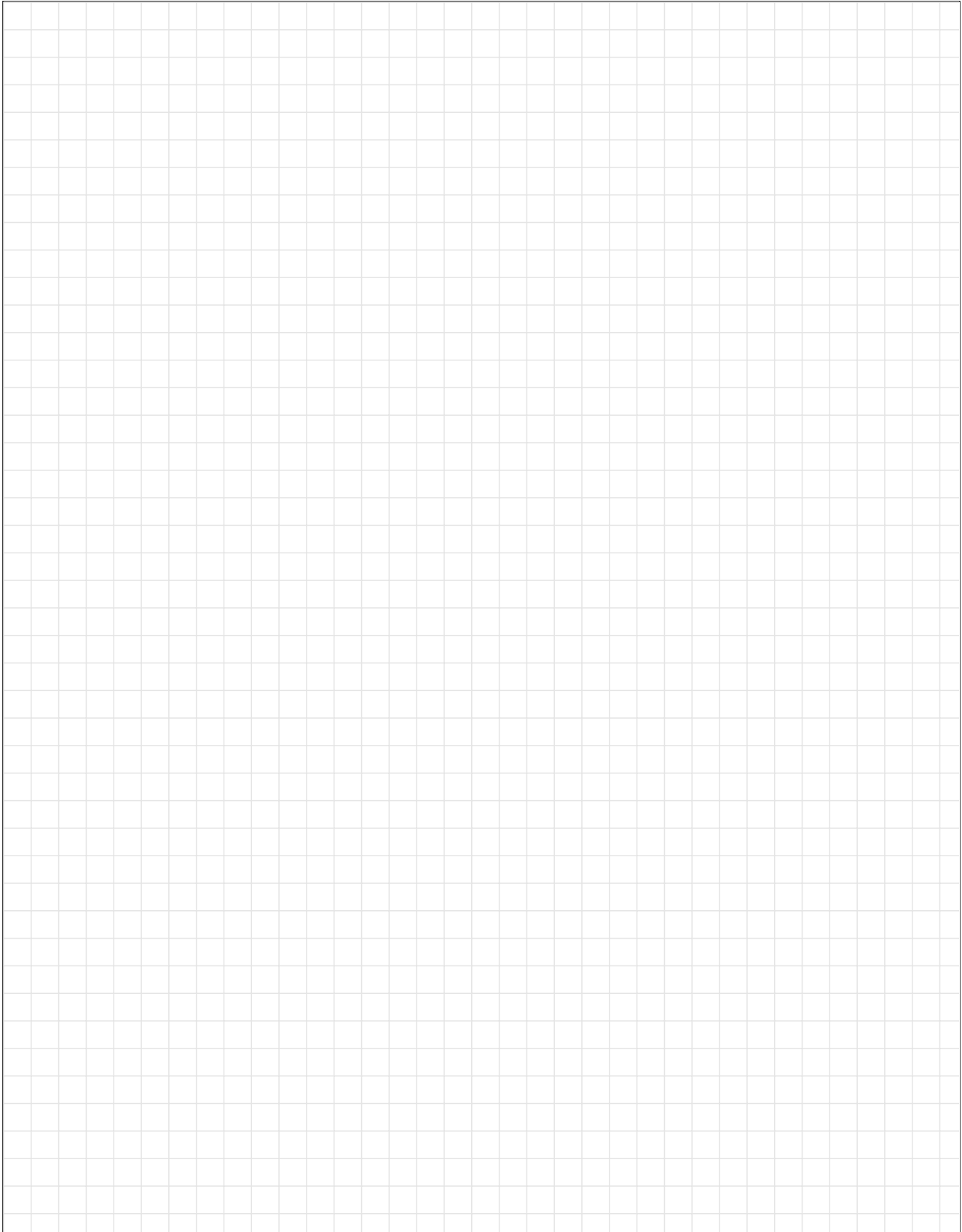


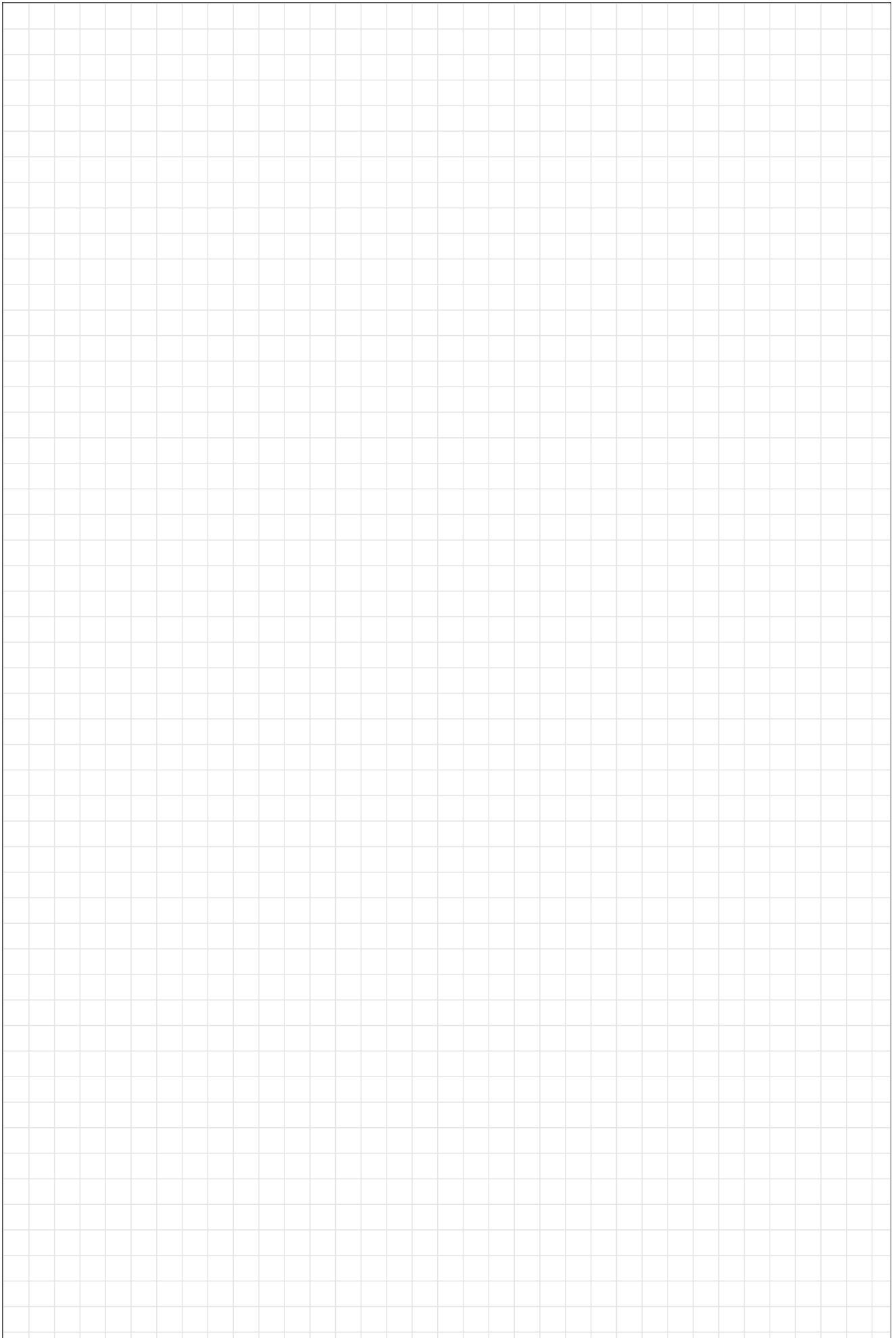


7.5 Étude d'un extremum

Proposition 7.5. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in I$.

Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) = a_0 + a_2(x - a)^2 + o((x - a)^2)$ avec $a_2 \neq 0$, alors la fonction f a un extremum local en a : maximum local si $a_2 < 0$ et minimum local si $a_2 > 0$.





7.6 Asymptotes

Proposition 7.6. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

Si il existe un réel k tel que $f(x) - kx \underset{+\infty \text{ ou } -\infty}{=} a_0 + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$ avec $a_p \neq 0$,

alors la droite $y = kx + a_0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$). De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\frac{a_p}{x^p}$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

