

Chapitre 21 - Variables aléatoires

1 Variables aléatoires

1.1 Définition

environnement $E = \mathbb{R}$

Définition 1.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et E un ensemble.

On appelle variable aléatoire une application définie sur (Ω, P) à valeurs dans $E : X : \Omega \rightarrow E$
 $\omega \mapsto X(\omega)$.

Lorsque E est une partie de \mathbb{R} , on parle de variable aléatoire réelle.

résultat

L'ensemble des valeurs susceptibles d'être prises par X est $X(\Omega)$ défini par $X(\Omega) = \{x \in E \mid \exists \omega \in \Omega : x = X(\omega)\}$

Lorsque Ω est fini, $X(\Omega)$ est fini et on notera souvent $X(\Omega) = (x_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ avec $n = |\Omega|$. ensemble des résultats

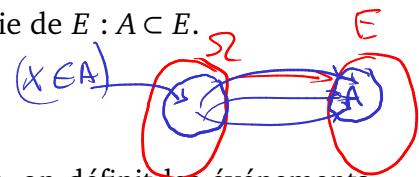
= Univers d'événements

Remarque 1.1. Par défaut, on suppose que les variables aléatoires sont des variables aléatoires réelles (V.A.R.).

Définition 1.2. Soit une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow E$. Soit A une partie de $E : A \subset E$.

On définit l'événement $(X \in A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \subset \Omega$

On a donc $(X \in A) = X^{-1}(A)$ et on le note aussi $(X \in A) = \{X \in A\}$.



Définition 1.3. Pour une variable aléatoire réelle X et pour a, b réels, on définit les événements suivants :

$(X = a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\} = \{ \text{tous les résultats } \omega \text{ tels que } X(\omega) = a\}$

$(X \leq a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\} = \{ \text{tous les résultats } \omega \text{ tels que } X(\omega) \leq a\}$

$(a \leq X < b) = \{\omega \in \Omega \mid a \leq X(\omega) < b\} = \{ \text{tous les résultats } \omega \text{ tels que } a \leq X(\omega) < b\}$



Exemple : on lance 2 D6 au rouge et au vert
 $S = \text{La somme des deux dés est une V.A.R. (variable aléatoire)}$

On a $S(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 10, 11, 12\}$

L'événement $(S = 8)$ est $\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

$P(S=8) = \frac{5}{36}$ car on a équidistribution des 36 résultats de deux dés.

On a $X = \text{le plus grand numéro sorti}$

On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $P(X=3) = \frac{5}{36}$

car $(X=3) = \text{"le plus grand numéro sorti au 3"}$
 $= \{(3,1), (3,2), (3,3), (2,3), (1,3)\}$

Exemple : On s'intéresse aux m premières naissances de l'année et à la répartition fille/garçon. et on pose X la variable aléatoire égale au nombre de filles nées.

$$X(\Omega) = \{0, m\} \quad (\text{c'est une v.s.r}) \quad (\text{réelle})$$

Toutes les naissances sont indépendantes on note p la probabilité d'obtenir une fille on suppose que cette probabilité est la même pour chaque naissance $p \approx \frac{97}{200}$

Il est connu que X "suit une loi binomiale" car "on compte le nombre de succès dans la répétition de m expériences identiques et indépendantes ayant deux résultats possibles succès de probabilité p et échec avec une probabilité $1-p$ ".

$$P(X=k) = \binom{m}{k} \cdot p^k (1-p)^{m-k} \quad \text{avec } k \in \{0, m\}$$

$\Omega = \{F, G\}^m = \{FFF\dots F, FF\dots FG, FFG\dots, GGG\}$
 où $\binom{m}{k}$ listes de m lettres prises parmi F et G avec k . F chacun des résultats correspondant à la même probabilité $p^k \cdot (1-p)^{m-k}$

1.2 Exemples

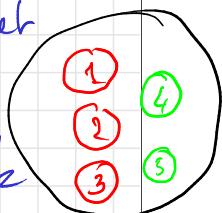
A large rectangular area filled with a uniform grid of small squares, designed for students to write their answers or examples.

suite page 6 : Cas 2 : on tire simultanément 3 boules

alors $\mathbb{U} = 2V + 3R$. Loi de $X = \text{nb de vertes}$

(calcul en tenant compte de l'ordre (on écrit le résultat pour X mais pas compte de l'ordre))

on suppose que les boules sont discriminables ; par exemple numérotées de 1 à 5.



on choisit $\Omega =$ l'ensemble des listes de 3 éléments

distingués pris parmi 5 (arrangements de 3 parmis 5) donc $|\Omega| = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3$

$$P(X=0) = \frac{3!}{|\Omega|} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \text{ car il y a équivalibilité des tirages et } 3! \text{ listes équivalentes avec } 1, 2, 3 \text{ sans répétition}$$

$$P(X=1) = \frac{2 \text{ choix du rouge au 1er rang} \times 3 \text{ tirages} \times 3 \text{ choix pour le 1er rang} \times 2 \text{ pour la 2e rang}}{|\Omega|}$$

$$= \frac{36}{60} = \frac{6}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{(\text{3 choix de position V} \times 2 \text{ choix pour la 1ere V} \times 3 \text{ choix pour la 2e V})}{|\Omega|}$$

$$= \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \text{ on vérifie } P(X=1) + P(X=2) + P(X=0) = \frac{60}{60}$$

Cas 3 : on tire jusqu'à obtenir une rouge. Loi de X

$\mathbb{U} = 2V + 3R$ $X = \text{nb de V tirées}$. sans remise.

On note $R_i =$ "obtenir une rouge au i -tirage".

alors $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$$(X=0) = R_1 \text{ donc } P(X=0) = P(R_1) = \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$$

$$(X=1) = \overline{R_1} \cap R_2 \quad P(X=1) = P(\overline{R_1}) \cdot P_{R_1}(\overline{R_2}) \quad \begin{array}{l} \text{formule des} \\ \text{probabilités} \\ \text{conditionnelles} \end{array}$$

$$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

$$(X=2) = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3 \quad P(X=2) = P(\overline{R_1}) \cdot P_{R_1}(\overline{R_2}) \cdot P_{R_1 \cap \overline{R_2}}(R_3)$$

donc $P(X=2) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{20}$$

1.3 Loi de probabilité d'une v.a. réelle finie

$\text{Soit } (\Omega, \mathcal{P}) \text{ un espace probabilisé}$

Définition 1.4. Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire finie. L'application $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité appelée loi de probabilité de la v.a. X et $(X(\Omega), P_X)$ est un espace probabilisé.

Définition 1.5. Soit X une v.a. finie $X : \Omega \rightarrow E$. On appelle loi de probabilité de X la donnée de toutes les valeurs prises par $X : X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ et de toutes les probabilités $(P(X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$.

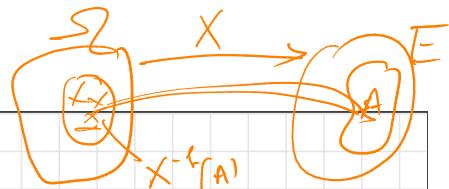
Remarque 1.2. On peut utiliser un tableau

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\dots
$P(X = x)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$	$P(X = x_4)$	$P(X = x_5)$	\dots

$\mathcal{P}(E)$
= ensemble des parties de E

Théorème 1.1. Soit $\{(x_i, p_i) | i \in I\}$ une partie finie de \mathbb{R}^2 telle que les x_i soient distincts.

$\{(x_i, p_i) | i \in I\}$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in I, \quad p_i \geq 0 \\ \sum_{i \in I} p_i = 1 \end{array} \right. .$$


Exemple On lance 2 dés à 6 faces équilibrées
on note S la V.A égale à la somme des 2 manches obtenus
Loi de S ?

On a $S(\Omega) = \{2, 12\}$ l'univers image
On calcule

$$P(S=2) = \frac{1}{36} \quad P(S=3) = \frac{2}{36}$$

$|\Omega| = 36$
égalité de probabilité

$$\text{car } (S=2) = \{(1,1)\} \quad \text{car } (S=3) = \{(1,2), (2,1)\}$$

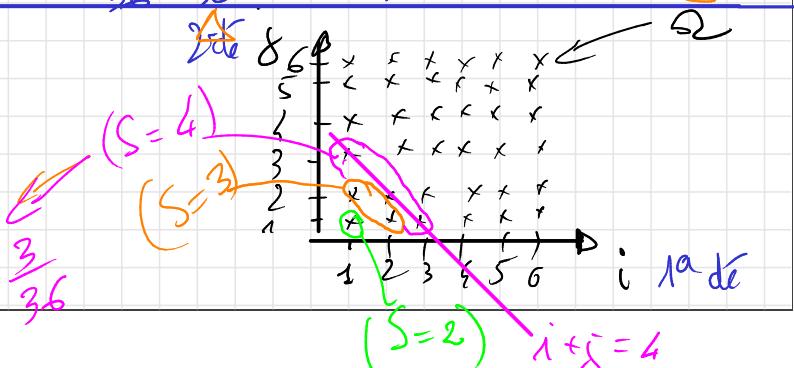
on peut les ranger dans un tableau

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$P(S=n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$

$(S=x)$ est un CE

$$P(S=6) = \frac{5}{36}$$

$$E(S) = \sum_{x \in S(\Omega)} x \cdot P(S=x) = 7$$



$$(S=2) \quad i+j=4$$

Exemple Une urne contient 5 boules: 3 rouges et 2 vertes

On appelle X la v.a. égale au nombre de boules vertes tirées

Cas 1: on tire successivement avec remise 3 boules

Loi de X ?

on a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. On répète 3 fois la même expérience, demande indépendante (l'urne contient à chaque fois les mêmes boules), X compte le nombre de succès: "tirer une boule verte" et l'expérience n'a que 2 résultats possibles: boule verte ou boule rouge.

Alors X suit la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{2}{5}=P(\text{"verte"})$

$$P(X=k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$$

$$P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \quad \text{avec } R_i: \text{"tirer une rouge au } i^{\text{ème tirage}}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P((R_1 \cap R_2 \cap \overline{R}_3) \cup (R_1 \cap \overline{R}_2 \cap R_3) \cup (\overline{R}_1 \cap R_2 \cap R_3)) \\ &= P(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R}_3) + P(R_1 \cap \overline{R}_2 \cap R_3) + P(\overline{R}_1 \cap R_2 \cap R_3) \quad \text{car les} \end{aligned}$$

3 sorties sont indépendantes. Et les 3 ont la même probabilité:

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = P(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R}_3) = P(R_1 \cap \overline{R}_2 \cap R_3) = P(\overline{R}_1 \cap R_2 \cap R_3)$$

$$P(X=1) = 3 \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Cas 2: on tire simultanément 3 boules. Loi de X ?

$$\text{on a } X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

On utilise Ω l'ensemble des tirages de 3 boules parmi les 5 boules qu'on suppose numérotées (discriminables) sans tenir compte de l'ordre

On a donc $\binom{5}{3}$ tirages possibles $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

ce qui correspond à l'ensemble des parties à 3 éléments

de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et tous ces tirages sont également probables.

$$P(X=0) = \frac{|X=0|}{|\Omega|} = \frac{1}{10} \quad P(X=1) = \frac{6}{10} = \frac{2 \text{ choix de V + 3 sur de R}}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{|X=2|}{|\Omega|} = \frac{3}{10} \quad \text{qui vérifie } \sum_{k=0}^2 P(X=k) = 1$$



1.4 Système complet associé à une v.a. finie

Proposition 1.2. Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une v.a. sur un espace probabilisé fini.

$((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

infini en PT
sous infini

sous infini
= déni en PT

Corollaire 1.3. On en déduit que $\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1$.

somme finie (PTsi)

Démonstration

Pour $x_i \in X(\Omega)$, l'événement $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$
est une partie de Ω : $(X = x_i) \subset \Omega$

Dans $\bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X = x_i) \subset \Omega$

Soit $\omega \in \Omega$, on pose $x_0 = X(\omega)$ et $\omega \in (X = x_0)$

dans $\omega \in \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X = x_i)$ donc $\Omega \subset \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X = x_i)$

Ce que prouve que

$$\boxed{\Omega = \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X = x_i)}$$

Soit $\omega \in (X = x_i) \cap (X = x_j)$ avec $x_i, x_j \in X(\Omega)$

$\Rightarrow X(\omega) = x_i$ et $X(\omega) = x_j$ mais X est une
(Q) fonction, $X(\omega)$ ne peut prendre qu'une valeur
dans $x_i = x_j$

Cela prouve que $\boxed{\text{pour } x_i \neq x_j \quad (X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset}$

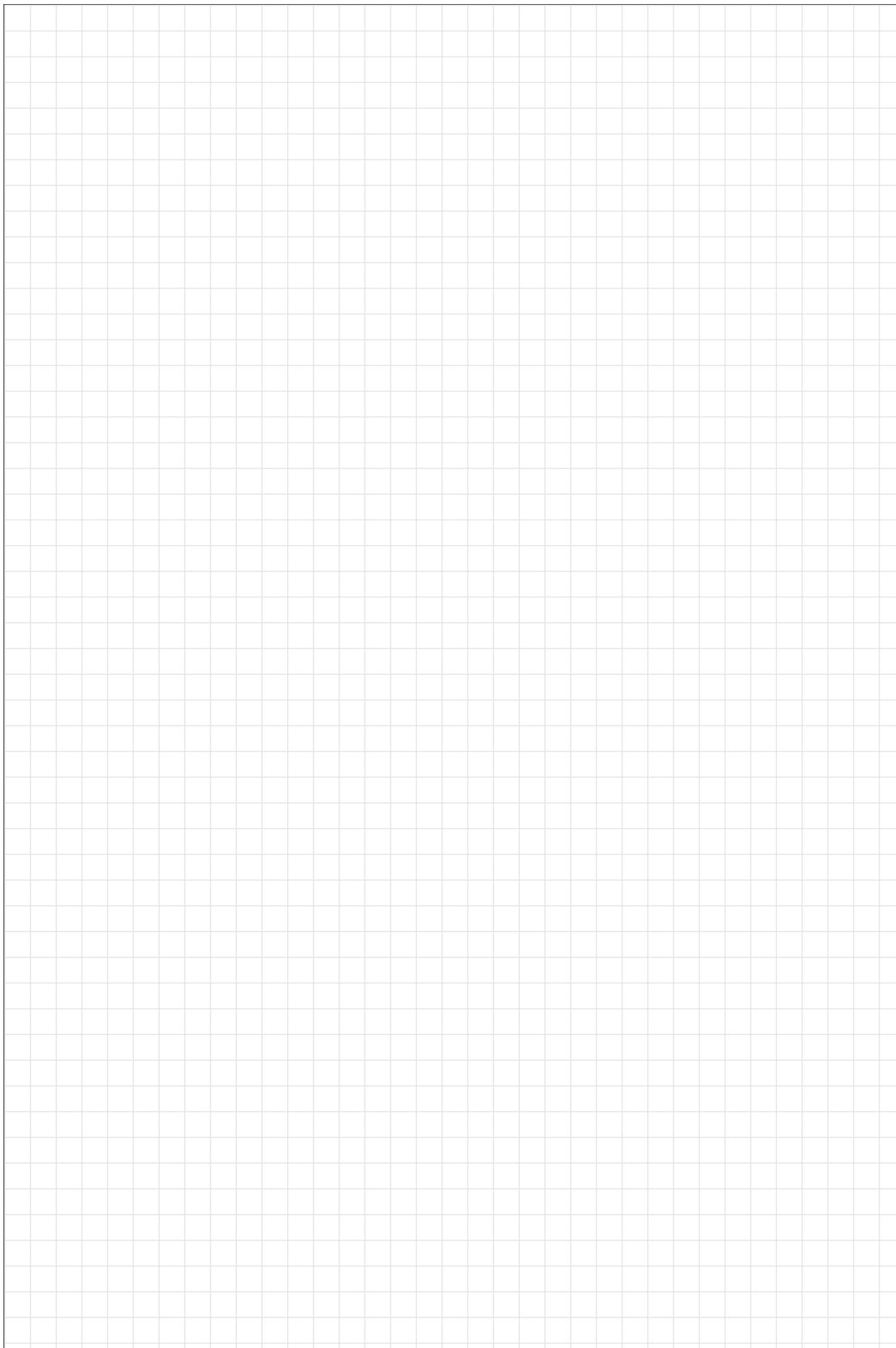
alors $(X = x_i)_{x_i \in X(\Omega)}$ est un SGE.

Exemple: Dans un groupe de n personnes, on compte le
nombre de personnes nées le 11 février. Quelle est
la probabilité d'avoir au moins 2 personnes nées le 11 février?

on note X la v.a. n'égale au nombre de personnes nées le
11 février. On veut $P(X \geq 2)$ -

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - P(X < 2)$$

$$X \sim \text{binomiale } B(m, p = \frac{1}{365}) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^m - m \times \frac{1}{365} \left(\frac{364}{365}\right)^{m-1}$$



1.5 Loi d'une fonction d'une variable aléatoire finie

Définition 1.6. Soit X une v.a. finie sur (Ω, P) avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Soit $f : D \subset E \rightarrow E$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset D$.

Alors $Y = f \circ X$ est une v.a. finie sur Ω .

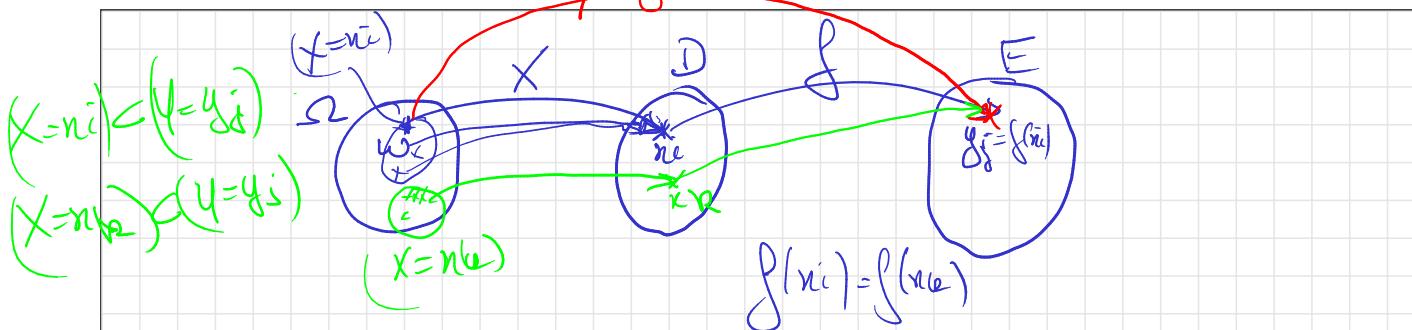
De plus,

$$Y(\Omega) = (f \circ X)(\Omega) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

et Somme sur toutes les valeurs x_i de X telles que $f(x_i) = y_j$

$$P(Y = y_j) = \sum_{f(x_i) = y_j} P(X = x_i) \quad (\text{somme sur toutes les valeurs } x_i \text{ telles que } f(x_i) = y_j).$$

$y = f \circ X$



Exemple: On joue à Pile ou Face 2 fois de suite.
on note X la va égale au nombre de piles obtenus
cb on gagne 1€ par Face, on perd 2€ par pile
on note G la va égale au gain algébrique de l'autre.

Quelle est la loi de G ?

$$\text{on a } X(\Omega) = \{0, 1, 2\} \quad P(X=0) = \frac{1}{4} \quad P(X=1) = \frac{2}{4}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4} \quad (X=0) \subset (G=2) \quad (\text{si } X \text{ vaut 0 alors } G=2)$$

$$(X=1) \subset (G=-1) \quad (X=2) \subset (G=-4)$$

C'est à dire que $(X=0) = (G=2)$, $(X=1) = (G=-1)$

$$(G=-4) = (X=2)$$

Exemple: On jette 2 fois à Pile ou Face. On gagne 1 € pour chaque Pile, on perd 1 € pour chaque Face.

On note X le gain après avoir fait deux fois et $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

On a $X(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$ et l'on a

x	-2	0	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

on a $Y(\Omega) = \{0, 4\}$

et $(Y=0) = (X=0)$ et $(Y=4) = (X=2) \cup (X=-2)$

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= \frac{2}{4} \quad \text{et} \quad P(Y=4) = P(X=2) + P(X=-2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \end{aligned}$$

Exemple: On note S la variable égale à la somme des résultats du lancer de 2 D6.

et on pose $T = S \bmod 3$ (reste de la division de S par 3)

Quelle est la loi de T ?

On a $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

on connaît la loi de S

6	7	8	9	10	11	12	Total
$P(S=6)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

val de T 2 0 1 2 0 1 2 0

on a $(T=0) = (S=3) \cup (S=6) \cup (S=9) \cup (S=12)$ et les

$$4 \text{ sont incompatibles donc } P(T=0) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$(T=1) = (S=4) \cup (S=7) \cup (S=10) \quad P(T=1) = \frac{3}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(T=2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

T n'est pas uniforme sur $\{0, 1, 2\}$

2 Lois usuelles

2.1 Loi uniforme

Définition 2.1. On dit que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$.

On note $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. *← motivation pour "X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket"$*

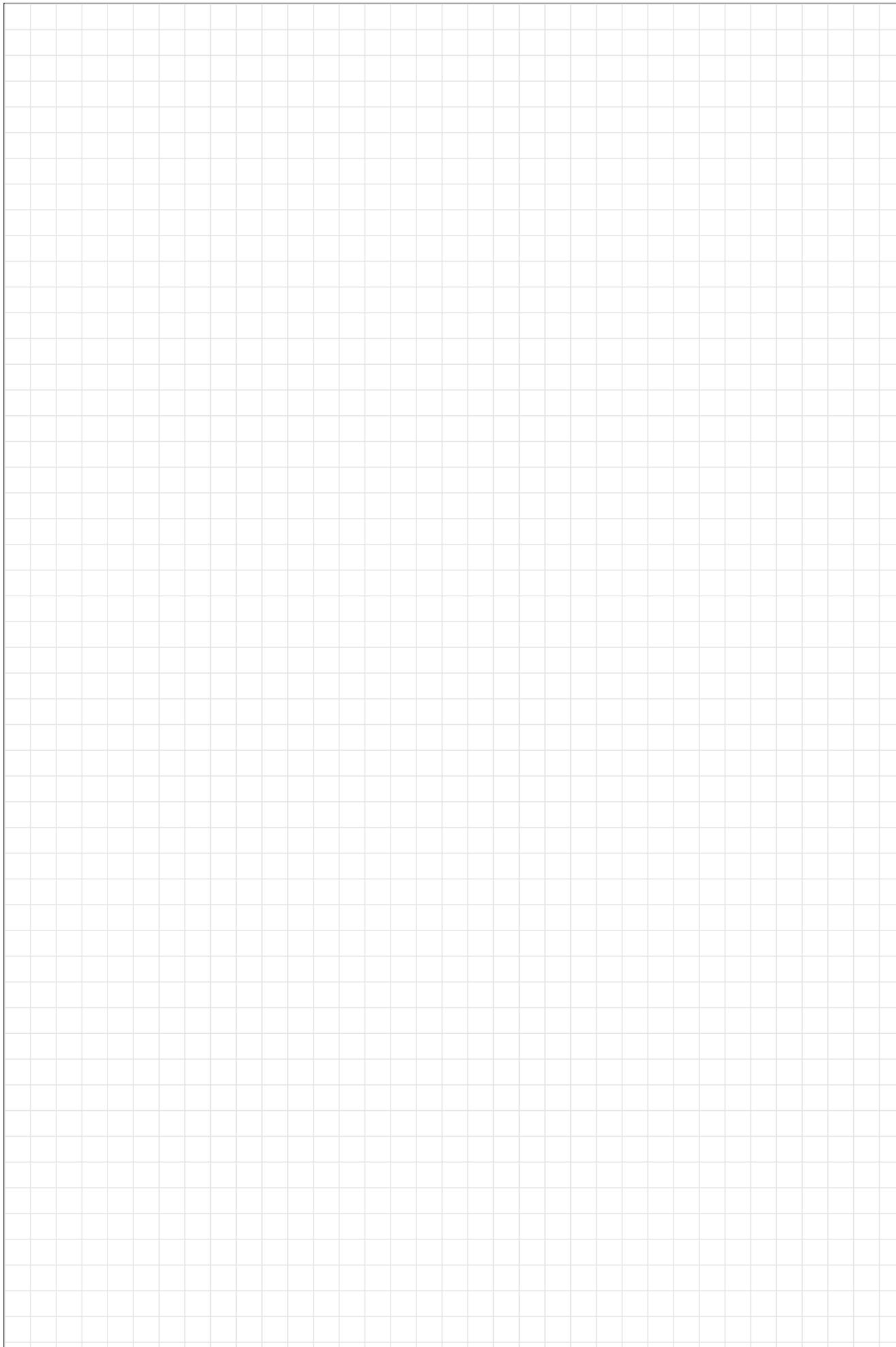
Définition 2.2. On dit que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$.

On note $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$.

Exemple: Dans une urne contenant m jetons numérotés de 1 à m , on tire un par un les jetons sans remise jusqu'à obtenir le 1. On note X la v.a. égale au nombre de tirages effectués. Alors X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, m \rrbracket$ $P(X = k) = \frac{1}{m} \quad k \in \llbracket 1, m \rrbracket$

On note $A_k =$ "on tire le numéro k au $k^{\text{ème}}$ tirage"
 $(X = k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$
 on utilise la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{A_1}) \cdot P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdot P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(\overline{A_3}) \cdots P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}}(\overline{A_k}) \\ &= \cancel{\frac{m-1}{m}} \times \cancel{\frac{m-2}{m-1}} \times \cancel{\frac{m-3}{m-2}} \times \cdots \times \cancel{\frac{m-k+1}{m-(k-1)}} \times \frac{1}{m-(k-1)} = \frac{1}{m} \end{aligned}$$



2.2 Loi de Bernoulli

Définition 2.3. On dit que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$ donc $P(X = 0) = 1 - p$.

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

2 résultats possibles

Définition 2.4. Soit A une partie d'un ensemble Ω . On appelle fonction indicatrice de A notée χ_A la fonction $\chi_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ définie pour $\omega \in \Omega$ par

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarque 2.1. Lors d'une expérience aléatoire, soit un événement A qui est réalisé (succès) ou qui ne l'est pas (échec), on peut modéliser cette situation avec une variable aléatoire X telle que l'événement $(X = 1) = A$ modélise le succès et l'événement $(X = 0) = \bar{A}$, l'échec de l'expérience. X est alors la fonction indicatrice de A .

Exemple: Dans une urne qui contient N boules numérotées de 1 à N , on tire k simultanément. On note $X_{k, N}$ qui vaut 1 si on a tiré la boule n°1 et 0 sinon.

$X_{k, N}$ peut prendre que 2 valeurs donc alors X suit une loi de Bernoulli.

Quelle est la probabilité de $(X=1)$?

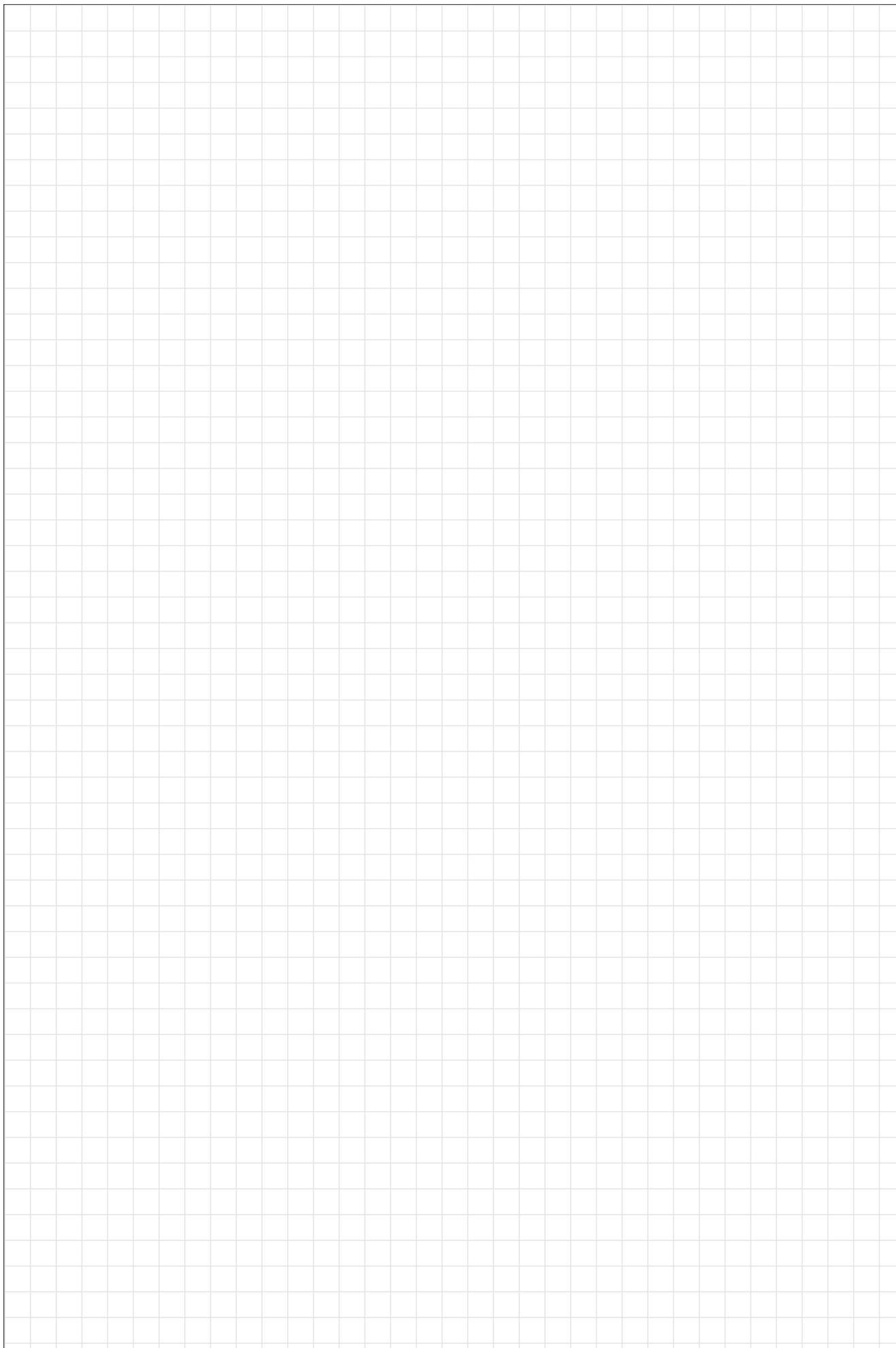
On utilise Ω l'ensemble des tirages simultanés de k boules parmi les N . On a $|\Omega| = \binom{N}{k}$ car tirages sans tenir compte de l'ordre et sans remise (combinaisons). Il y a équiprobabilité de ces tirages.

L'événement $(X=1)$ correspond aux tirages de la boule 1 et $k-1$ autres boules parmi $N-1$.

Alors $|(\chi_{k, N}=1)| = \binom{k}{1} \binom{N-1}{k-1}$

d'où $P((X=1)) = \frac{\binom{k}{1} \binom{N-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} = \frac{(N-1)! \cdot k! \cdot (N-k)!}{(k-1)! \cdot (N-k)! \cdot N!} = \frac{k}{N}$

et $P((X=0)) = 1 - P((X=1)) = 1 - \frac{k}{N}$



2.3 Loi Binomiale

Définition 2.5. On dit que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit une loi binomiale de paramètre n et p avec $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}$ si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$$\mathcal{B}(p) \neq \mathcal{B}(n, p)$$

Remarque 2.2. On vérifie $\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$.

Remarque 2.3. Une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ modélise le nombre de succès lors de la répétition de n expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Remarque 2.4. Une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ modélise le nombre d'obtention de boules rouges pour n tirages avec remise dans une urne contenant une proportion p de boules rouges.

Le remarque 2.3 Justifie que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration : Une expérience de 2 résultats "Succès" ou "Échec" avec $P(\text{"succès"}) = p$. On la répète identiquement de manière aléatoire et de manière indépendante. On appelle X la v.a égale au nombre de succès après n expériences.

On utilise Ω l'ensemble des lettres de n lettres (= mots)

S ou E $\Omega = \{S, E\}^n$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$(X=k)$ correspond aux listes avec $k \times "S"$ et $(n-k) \times "E"$ il y en a $\binom{n}{k}$ correspondant aux choix de k places parmi n places.

On remarque chacun de ces résultats avec $k \times "S"$ et $(n-k) \times "E"$ ont la même probabilité : qui est

$$P(S_{j_1} S_{j_2} \dots S_{j_k} E_{j_{k+1}} \dots E_{j_n}) = P(S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \dots \cap S_{j_k} \cap E_{j_{k+1}} \cap \dots \cap E_{j_n})$$

où S_j est un succès à la j^{e} expérience : Les (S_j) $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$

sont indépendants car les expériences sont indépendantes.

$$= P(S_{j_1}) \cdot P(S_{j_2}) \cdot P(S_{j_3}) \dots P(S_{j_k}) \cdot P(E_{j_{k+1}}) \dots P(E_{j_n})$$

$$= p^k (1-p)^{n-k}$$

ce qui justifie que les résultats $k \times "S"$ et $(n-k) \times "E"$ ont la même probabilité.

$$\text{d'où } P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple: Une machine fabrique des pièces avec 1 défaut tous les 1000 pièces en moyenne. Dans une boîte de 100 pièces, calculer la probabilité d'avoir au moins 2 pièces defectueuses ?

D'après l'énoncé la probabilité pour une pièce d'avoir un défaut est $\frac{1}{1000} = p$.

On fait l'hypothèse (fausse) qu'on rejette $n=100$ fois cette évidence dont les résultats sont indépendants.

On note X le nombre de pièces defectueuses

X suit une loi binomiale $X \sim B(m, p)$

$$\begin{aligned} \text{On cherche } P(X \geq 2) &= \sum_{k=2}^m P(X=k) = 1 - P(X=0) - P(X=1) \\ &= 1 - (1-p)^m - m \cdot p (1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

Exemple : Probabilité que 2 personnes soient nées le 14 juillet dans une classe de 45 personnes ?

(je comprends "au moins 2 personnes")

Y le nombre de personnes nées le 14 juillet suit une loi binomiale de paramètres $m=45$ et $p=\frac{1}{365}$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) \\ &= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{45} - 45 \left(\frac{364}{365}\right)^{44} \cdot \frac{1}{365} \end{aligned}$$

3 Couple de variables aléatoires

3.1 Loi conjointe

Définition 3.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X, Y deux v.a. sur Ω .

On appelle couple de v.a. (X, Y) l'application $\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$.

C'est une variable aléatoire sur E^2 . On notera $(X = x_i, Y = y_j)$ l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i \text{ et } Y(\omega) = y_j\}$.

Définition 3.2. On appelle loi conjointe du couple (X, Y) la loi de la variable aléatoire (X, Y) c'est-à-dire la donnée de

- toutes les valeurs prises par le couple $(X, Y) = X(\Omega) \times Y(\Omega) = (x_i)_{i \in I} \times (y_j)_{j \in J} = \{(x_i, y_j) | x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)\}$
- et de toutes les probabilités

$$p_{i,j} = (P(X = x_i, Y = y_j))_{x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)} = (P((X = x_i) \cap (Y = y_j)))_{x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)}$$

ce que l'on pourra noter $((x_i, y_j), p_{i,j})_{i \in I, j \in J}$.

Théorème 3.1. Soit $\{(x_i, y_j), p_{i,j} | i \in I, j \in J\}$ une partie finie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ telle que les x_i soient distincts et que les y_j soient distincts.

$\{(x_i, y_j), p_{i,j} | i \in I, j \in J\}$ est la loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles finies si et seulement si $\begin{cases} \forall i \in I, \forall j \in J, \quad p_{i,j} \geq 0 \\ \sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = 1 \end{cases}$.

Remarque 3.1. Par définition, comme cette somme est finie, on peut sommer d'abord sur les lignes ou d'abord sur les colonnes :

$$\sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{i,j} = 1$$

On note $(X = x_i, Y = y_j)$ l'événement " $X = x_i$ et $Y = y_j$ " soit $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$

Exemple. Dans une urne, on place 3R + 2V + 1B

on note $U =$ nombre de rouges tirées

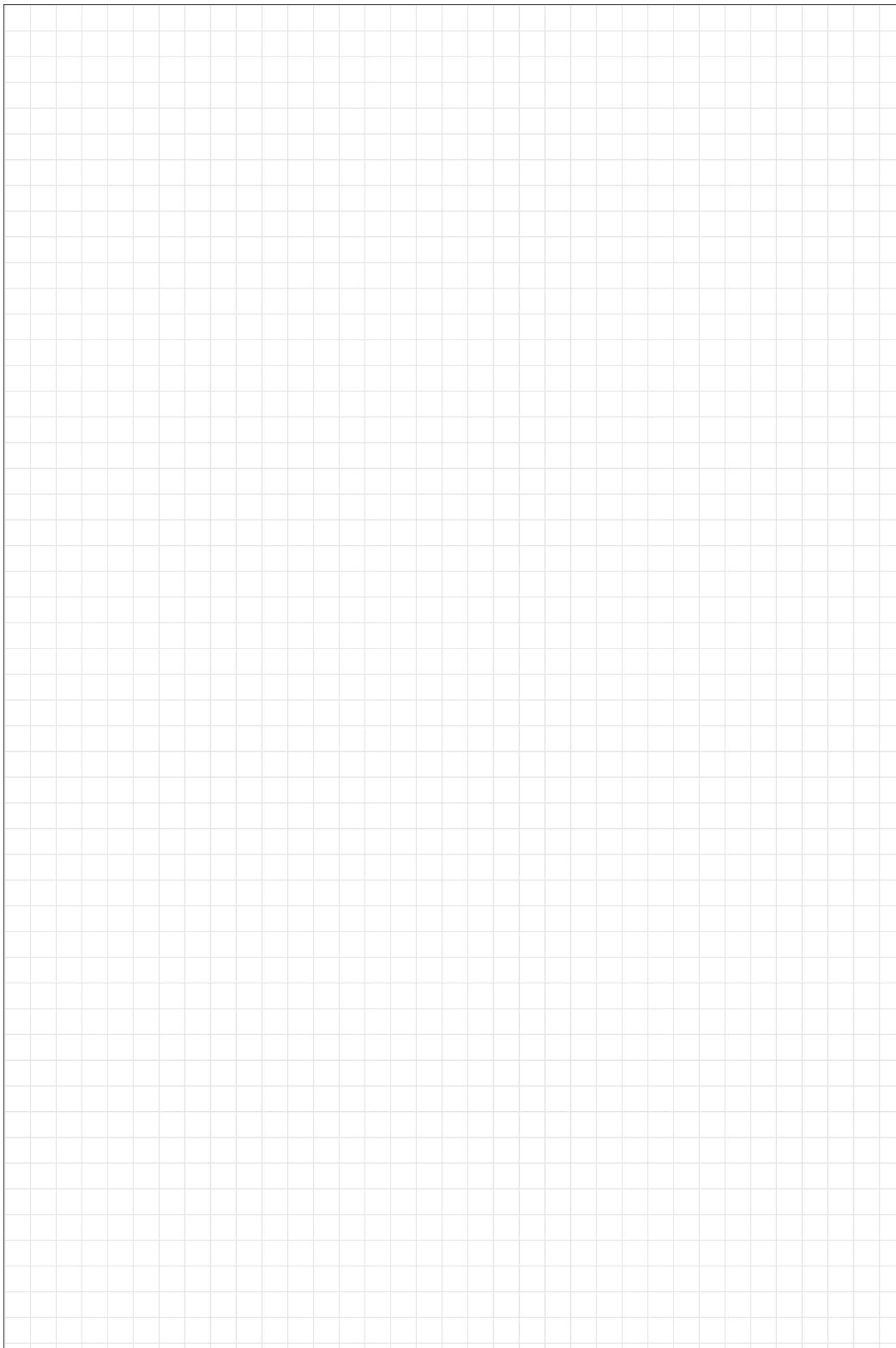
$V =$ nombre de vertes tirées

cas 1, on tire successivement 2 boules avec remise.

Loi du couple (U, V)

U \ V	0	1	2
0	1/9	2/9	2/9
1	2/9	4/9	2/9
2	2/9	2/9	1/9

$$P(U=0, V=0) =$$



3.2 Lois marginales

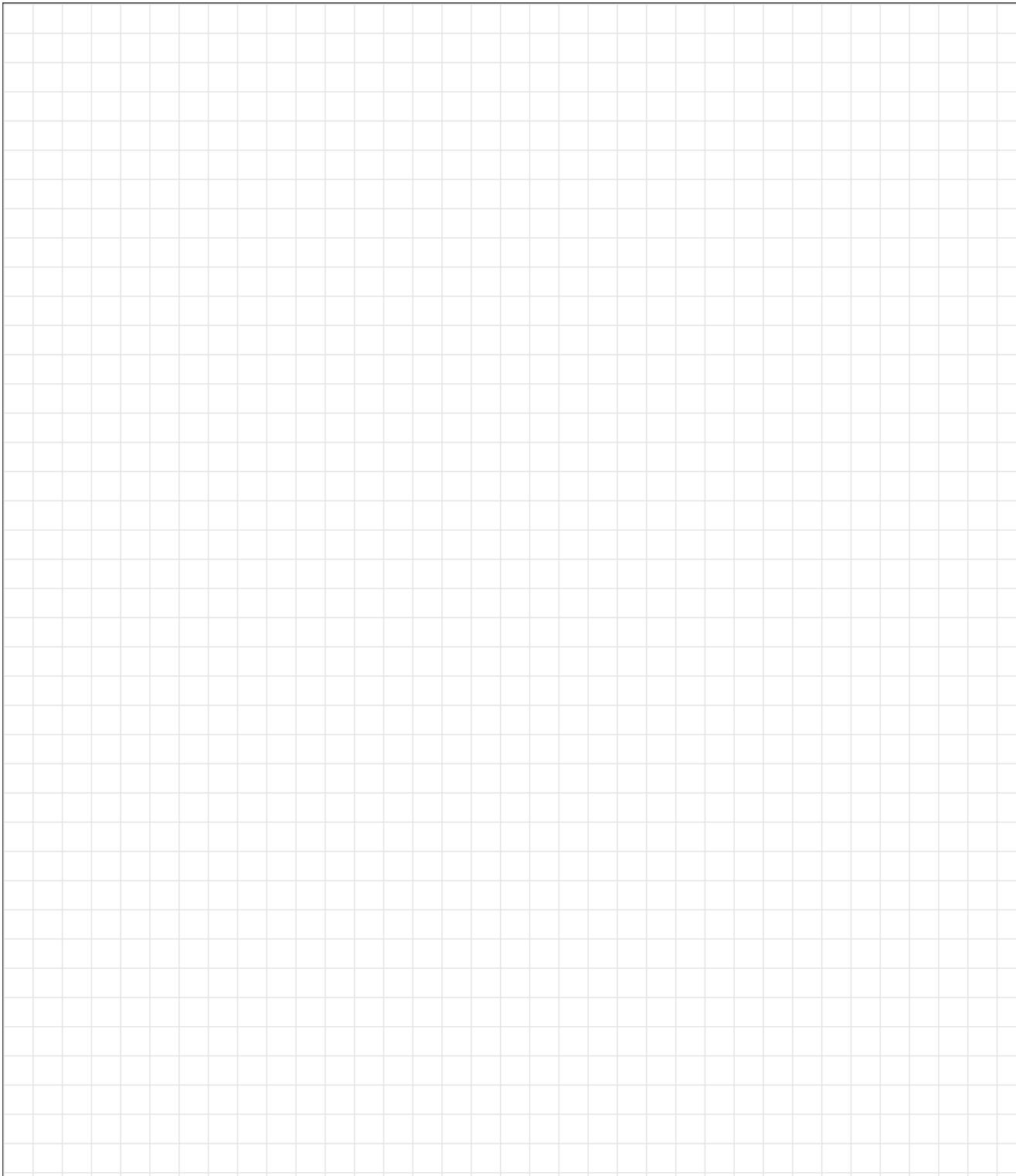
Définition 3.3. Soit (X, Y) un couple de v.a. Les lois de X et Y s'appellent les lois marginales du couple (X, Y) .

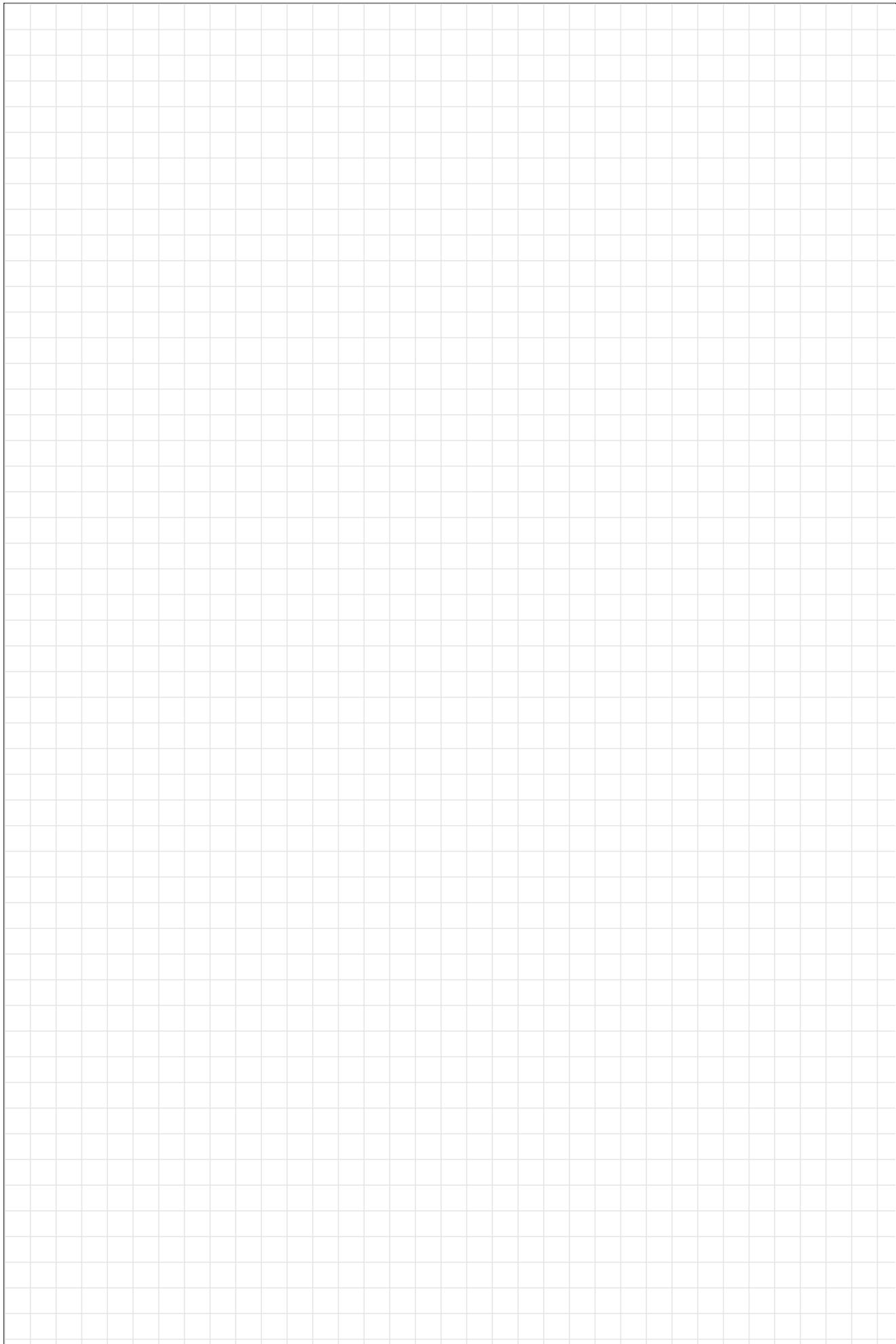
Proposition 3.2. On a

$$\text{pour tout } x_i \in X(\Omega), \quad P(X = x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) \text{ notée } p_{i,\bullet}$$

et

$$\text{pour tout } y_j \in Y(\Omega), \quad P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) \text{ notée } p_{\bullet,j}.$$





3.3 Loi conditionnelles

Définition 3.4. Soit Y une v.a. sur (Ω, P) telle que $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$. Soit A un événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

La loi de Y conditionnée par A ou loi conditionnelle de Y sachant A est l'ensemble des probabilités

$$(P_A(Y = y_j))_{y_j \in Y(\Omega)} = \left(\frac{P((Y = y_j) \cap A)}{P(A)} \right)_{y_j \in Y(\Omega)}$$

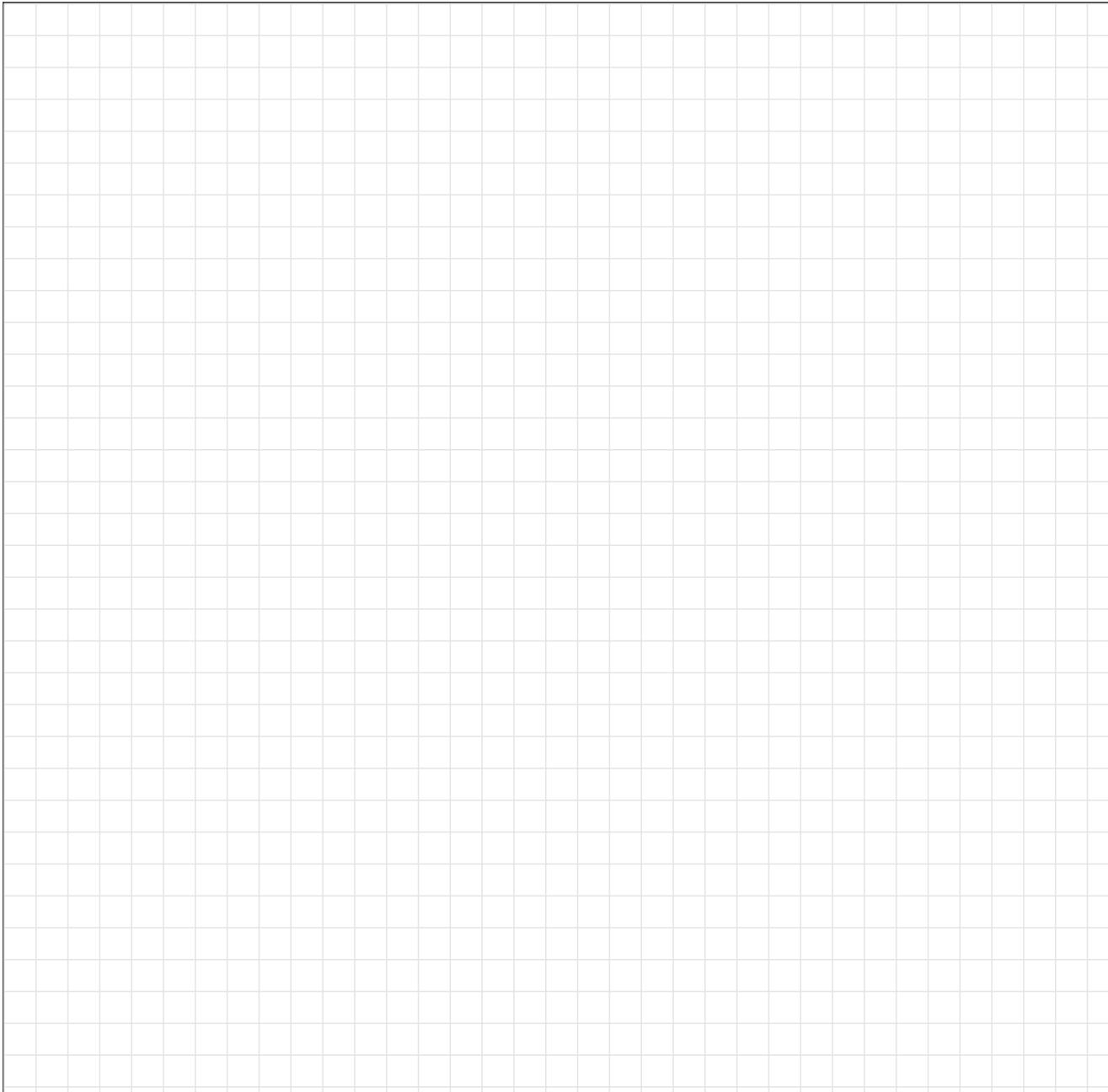
Définition 3.5. Soit X et Y deux v.a. sur (Ω, P) telles que $X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j \in J}$.

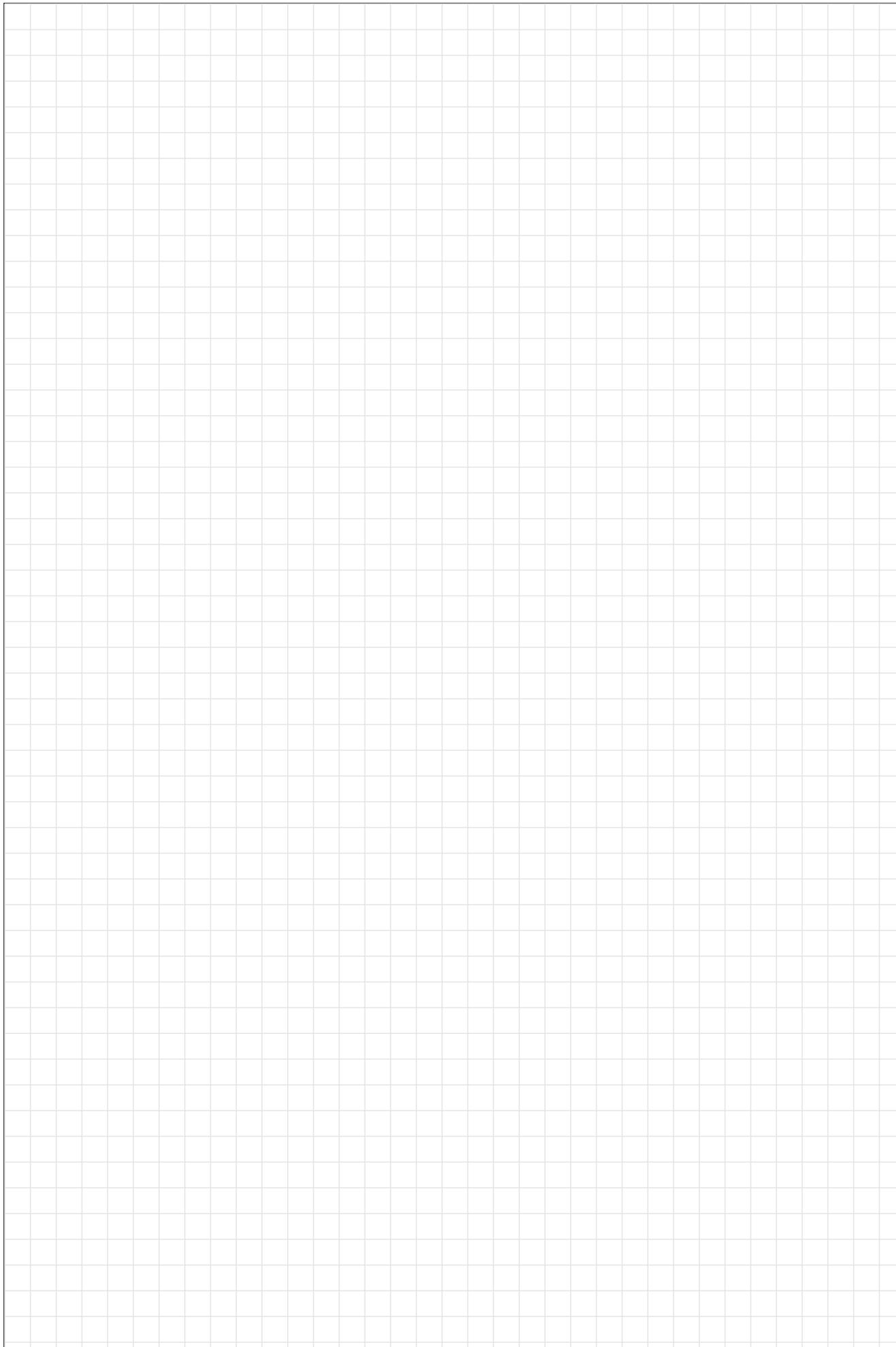
Soit $j \in J$. La loi de X conditionnée par $(Y = y_j)$ est l'ensemble des valeurs

$$(P_{(Y=y_j)}(X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)} = \left(\frac{P(Y = y_j \cap X = x_i)}{P(Y = y_j)} \right)_{i \in I}$$

Soit $i \in I$. La loi de Y conditionnée par $(X = x_i)$ est l'ensemble des valeurs

$$(P_{(X=x_i)}(Y = y_j))_{y_j \in Y(\Omega)} = \left(\frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(X = x_i)} \right)_{j \in J}$$





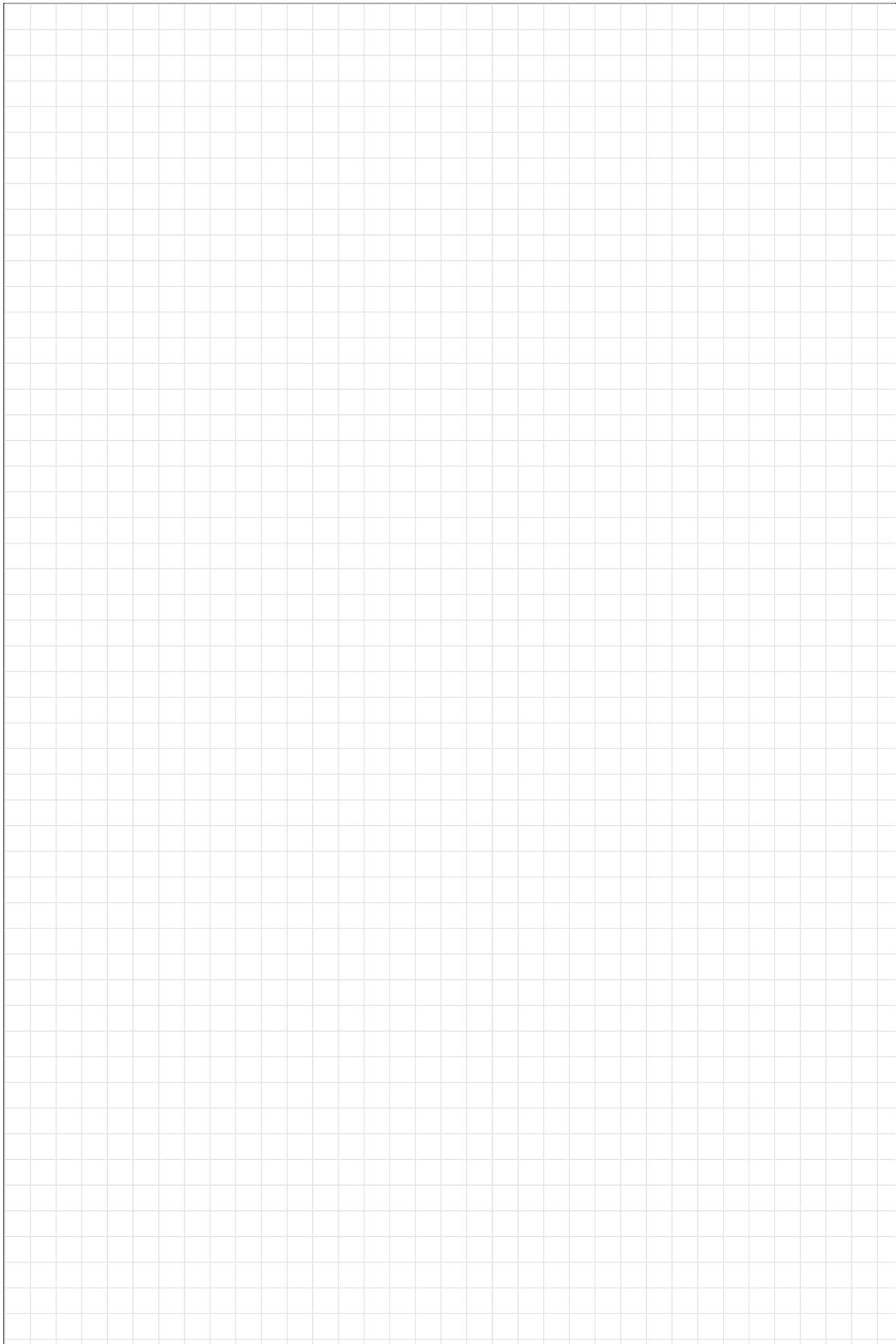
3.4 Fonction de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux v.a. réelles sur Ω . Comme le couple (X, Y) est une variable aléatoire réelle sur Ω , on peut définir pour une fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par $Z = g(X, Y)$.

On a $Z(\Omega) = \{g(x_i, y_j) | x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)\}$: ensemble des valeurs prises par Z

Les $g(x_i, y_j)$ ne sont pas nécessairement distincts.

On a $P(Z = z_k) = \sum_{\substack{(x_i, y_j) \text{ tels que} \\ g(x_i, y_j) = z_k}} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$



4 Variables aléatoires indépendantes

4.1 Indépendance d'un couple de variables aléatoires

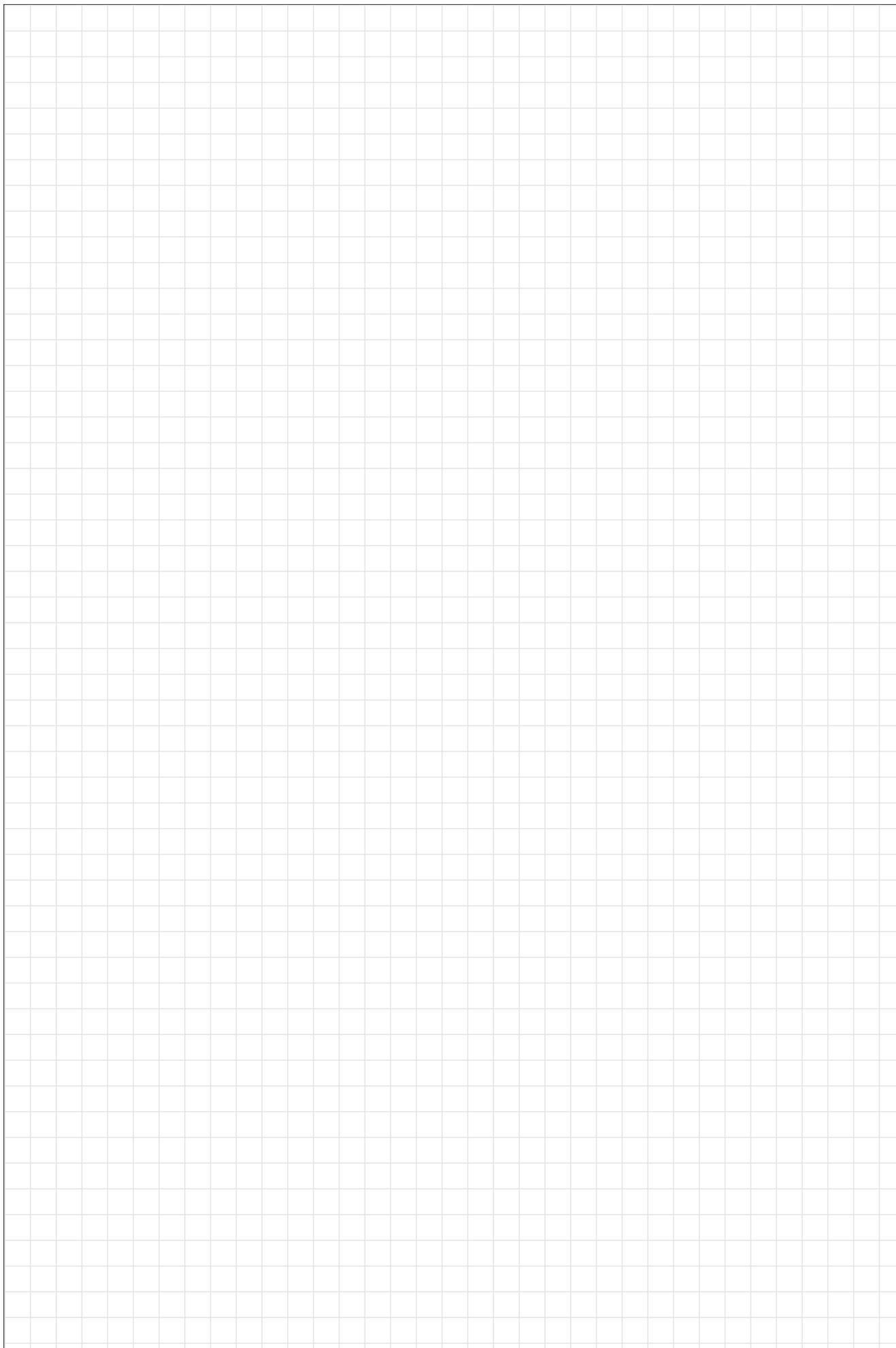
Définition 4.1. Soit (X, Y) un couple de v.a. sur (Ω, P) avec $X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j \in J}$.

On dit que X et Y sont indépendantes pour la probabilité P si

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j) \text{ pour tout } x_i \in X(\Omega) \text{ et } y_j \in Y(\Omega).$$

Proposition 4.1. Si X et Y sont 2 v.a. indépendantes sur (Ω, P) alors pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A).P(Y \in B).$$



4.2 Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition 4.2. Soit X_1, X_2, \dots, X_n des v.a. sur un même espace probabilisé (Ω, P) .

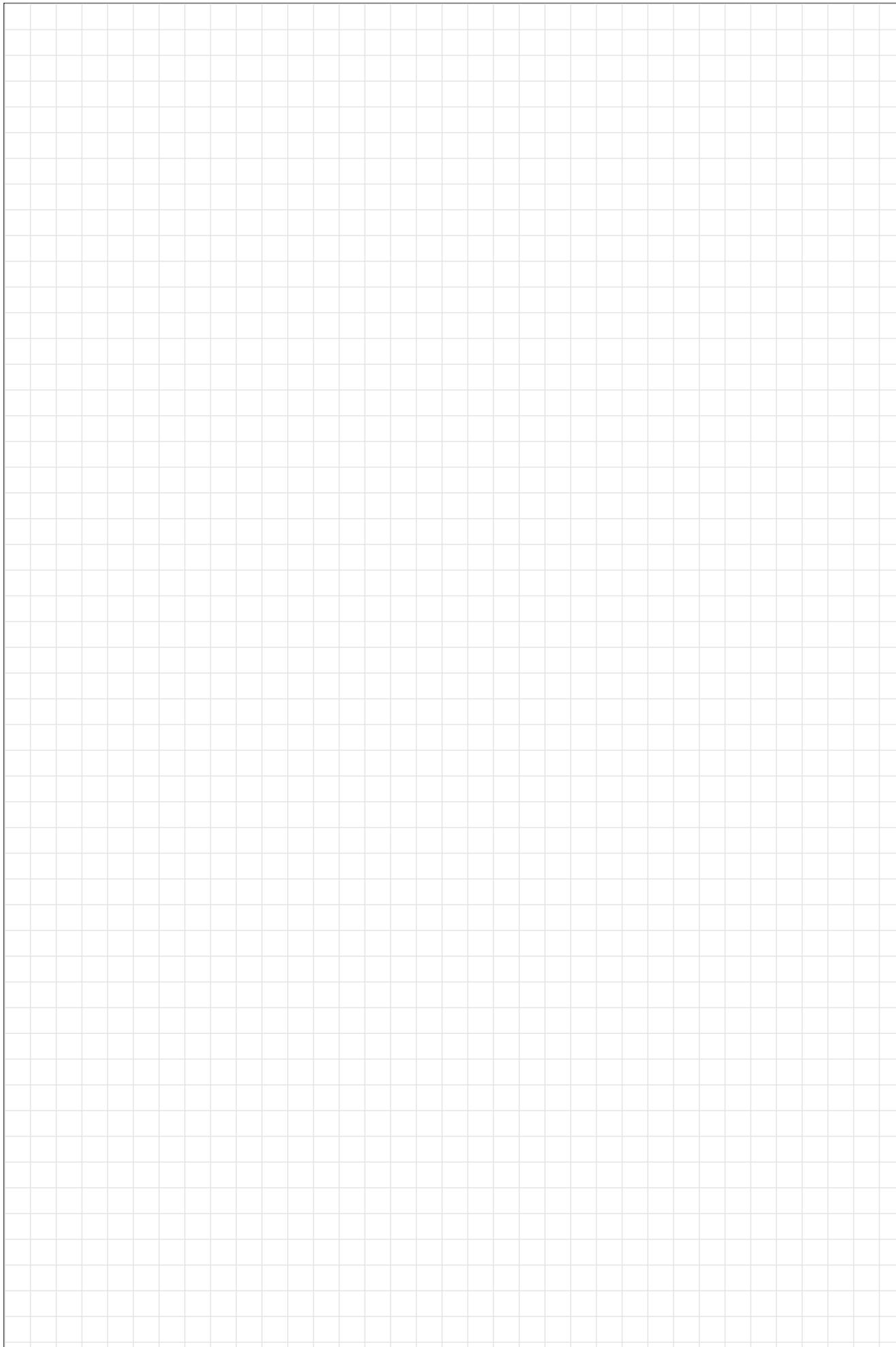
On dit que X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes pour la probabilité P si $\forall x_1 \in X_1(\Omega)$, $\forall x_2 \in X_2(\Omega), \dots, \forall x_n \in X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1).P(X_2 = x_2) \dots P(X_n = x_n)$$

Théorème 4.2. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des v.a. mutuellement indépendantes sur (Ω, P) , alors

quelque soit $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$, les événements $(X_i \in A_i)_{i=1, \dots, n}$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P .

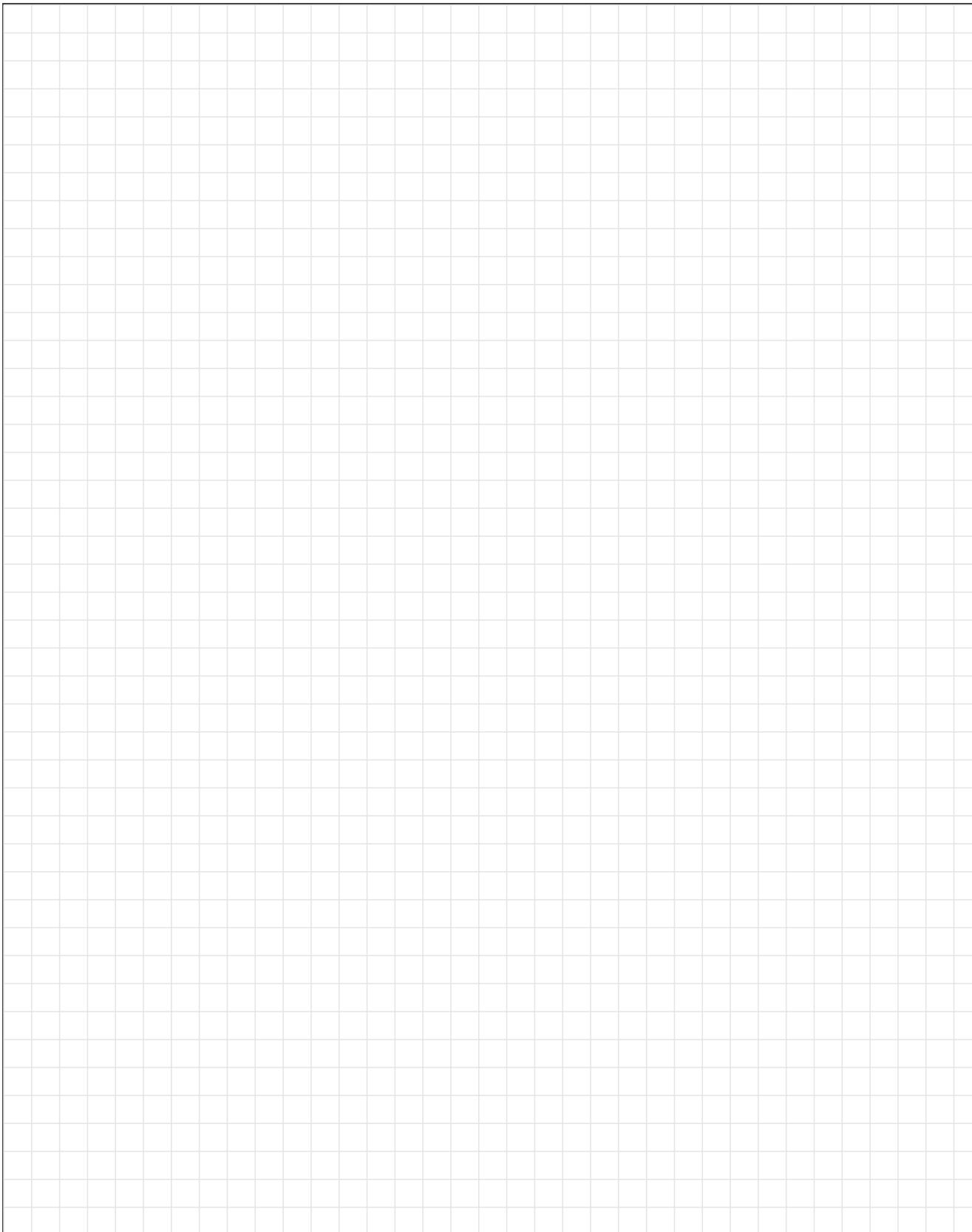
Proposition 4.3. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des v.a. mutuellement indépendantes sur (Ω, P) , alors elles sont indépendantes deux à deux.

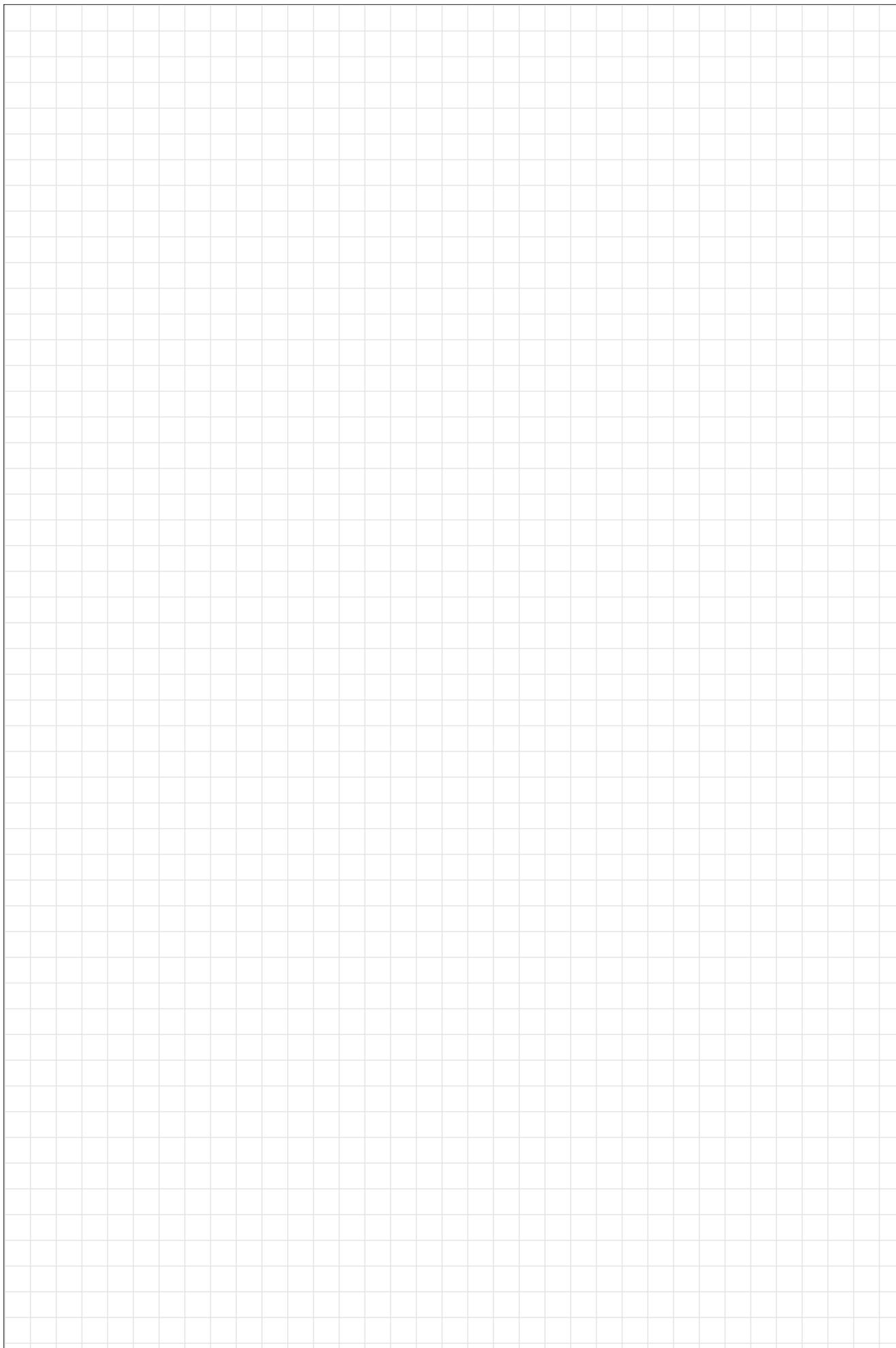


4.3 Somme de v.a. suivant la loi de Bernoulli

Proposition 4.4. Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) des v.a. mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de même paramètre p avec $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$. Alors la v.a. $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ binomiale de paramètres n et p .

Remarque 4.1. On utilise cette proposition pour modéliser n expériences identiques et indépendantes avec 2 issues (succès et échec). La variable aléatoire somme compte le nombre de succès.

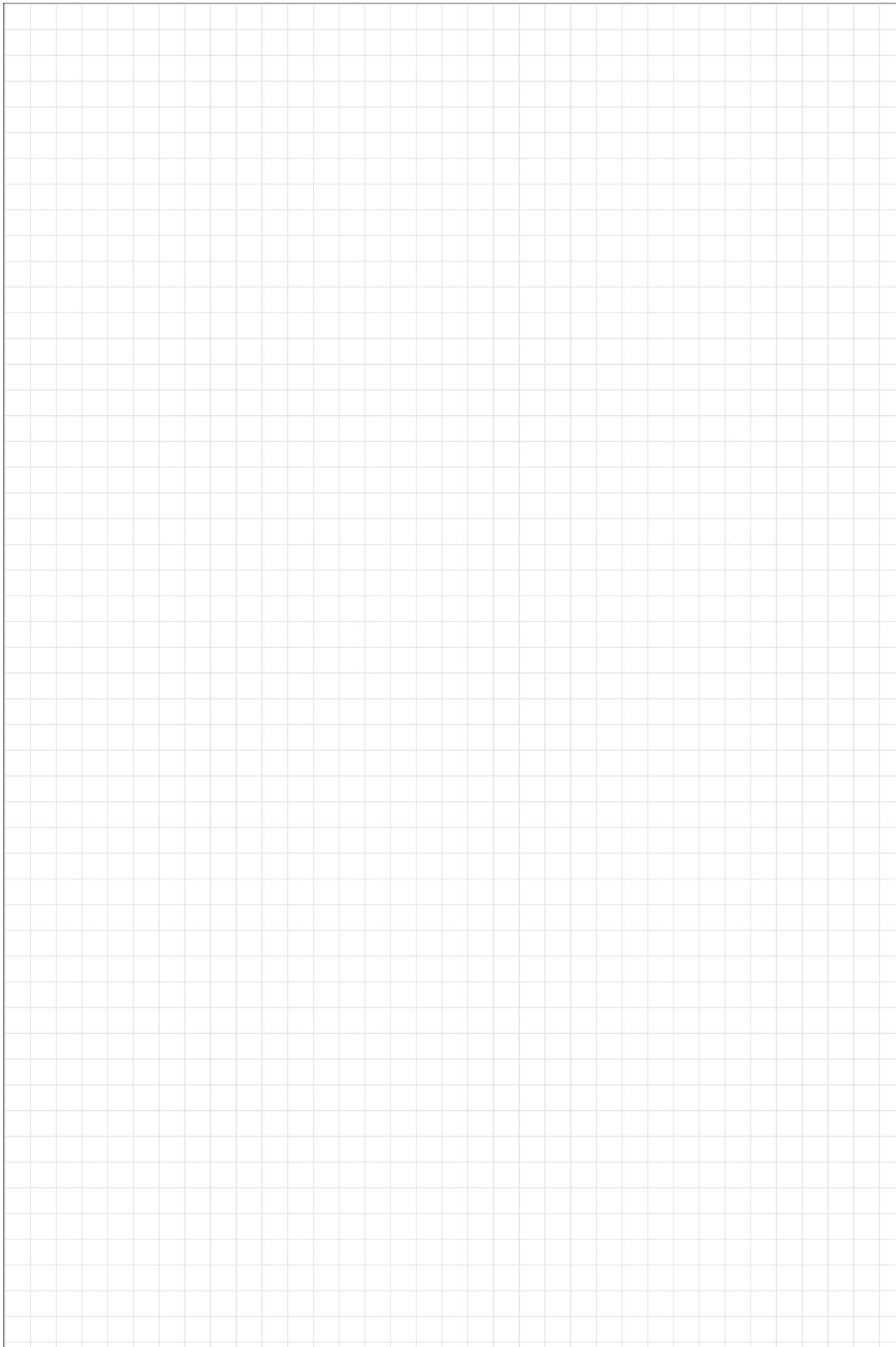




4.4 Indépendance de fonctions de v.a. indépendantes

Théorème 4.5. Soit X, Y deux v.a. sur (Ω, P) fini. Soit f, g deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.



5 Moments d'une v.a. réelle finie

5.1 Espérance

(S2, P)

Définition 5.1. Soit X une v.a.r. sur Ω . On appelle espérance de X le réel $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

Ce qui s'écrit également $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ avec $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$.

On a donc $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$. ♡

Proposition 5.1. Si pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $a \leq x \leq b$, alors $a \leq E(x) \leq b$.

Démonstration définition 5.1.

On sait $(X=x_i)_{i \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements tels que $\omega \in \Omega$ appartient à un et un seul des $(X=x_i)_{i \in X(\Omega)}$

alors

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) * P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{\omega \in (X=x_1)} X(\omega) * P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in (X=x_2)} X(\omega) * P(\{\omega\}) + \dots + \sum_{\omega \in (X=x_m)} X(\omega) * P(\{\omega\})$$

ou alors $X(\omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

pour $\omega \in (X=x_i)$, $X(\omega) = x_i$. Donc chaque somme se simplifie

$$E(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{\omega \in (X=x_i)} x_i * P(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{\omega \in (X=x_i)} P(\{\omega\})$$

Mais $\sum_{\omega \in (X=x_i)} P(\{\omega\}) = P(X=x_i)$ d'où $E(X) = \sum_{i=1}^m x_i P(X=x_i)$

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X=x_i)$$

Exemple: On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les cartes valent 11-As, 14R, 3D, 2V, 10, 10, 0 reste. X est la valeur de la carte tirée. Espérance de X ?

On calcule la loi de X

x	0	2	3	4	10	11
$P(X=x)$	$\frac{3}{38}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{38}$

Car 14 As dans un jeu de 32

puis

$$E(X) = \frac{30}{8} = 0 \cdot \frac{3}{38} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{8} + 11 \cdot \frac{1}{8} =$$

Démonstration prop I. 1 . croissance de l'espérance

On suppose que pour tout $x \in X(\Omega)$, $a \leq x \leq b$
alors comme $P(X=x) \geq 0$

$$a \cdot P(X=x) \leq x \cdot P(X=x) \leq b \cdot P(X=x)$$

On somme sur toutes les valeurs possibles pour $x \in X(\Omega)$

$$\sum_{x \in X(\Omega)} a \cdot P(X=x) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X=x) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} b \cdot P(X=x)$$

(les valeurs possibles sont un nombre finie)

mais

$$\sum_{x \in X(\Omega)} a \cdot P(X=x) = a \underbrace{\left| \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) \right|}_{= 1} = a \times 1 \quad \heartsuit$$

Donc $a \leq E(X) \leq b$

5.2 Propriétés de l'espérance : linéarité et croissance

 Proposition 5.2. Soit X, Y deux v.a.r. sur (Ω, P) et a, b réels. On a

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$



Proposition 5.3. Soit X, Y deux v.a.r. sur Ω .

Si on a $X \leq Y$, c'est à dire $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Démonstration 5.2 :

$$E(aX + bY) = \sum_{\omega \in \Omega} (aX + bY)(\omega) P(\{\omega\})$$

$aX + bY$ est une variable aléatoire au sens de la définition

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX(\omega) + bY(\omega)) P(\{\omega\}) \\ &= a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) + b \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\}) \\ E(aX + bY) &= a E(X) + b E(Y) \end{aligned}$$

Exemple $E(X+1) =$

1 peut être vu comme une variable aléatoire nulle :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\quad} & \{1, 2\} \\ \omega & \mapsto & 1 \end{array} \text{ c'est une VAR constante}$$

$$\text{On a } E(1) = 1 \times P(1=1) = 1$$

Dans la linéarité de l'espérance $E(X+1) = E(X) + 1$

Exemple $E(X - E(X))$

$$\text{Par linéarité, } E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$$

Exemple : espérance de la loi binomiale ?

Soit $X \sim B(m, p)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$. $k! = k \cdot (k-1)!$

$$E(X) = \sum_{k=0}^m k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^m k \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

mais $\binom{m}{k} = k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} = \binom{m-1}{k-1}$
 pour $k \geq 1$ et $m \geq 1$ $m-k = (m-1)-(k-1)$

$$\text{D'où } E(X) = 0 + \sum_{k=1}^m m \binom{m-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-k} \text{ on pose } j = k-1$$

$$= m \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{m-j-1}$$

$$= m \cdot p \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} p^j (1-p)^{m-1-j}$$

$$= mp \left(\underbrace{p + (1-p)}_{=1} \right)^{m-1} \text{ d'après la formule du binôme.}$$

$$\boxed{E(X) = mp}$$

5.3 Théorème de transfert

Théorème 5.4. Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$ et X une v.a.r. sur (Ω, P) fini.

$$\text{On a } E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i).$$

on a une v.a. X et une autre $Y = g(X)$

pour calculer l'espérance de Y , on peut calculer
soit la loi de Y

Soit directement avec le théorème de transfert.

Démonstration :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega)) \cdot P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{\omega \in \{X=n_i\}} g(X(\omega)) \cdot P(\{\omega\}) \text{ avec } X(\Omega) = \{n_1, \dots, n_m\} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{\omega \in \{X=n_i\}} g(n_i) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^m g(n_i) \underbrace{\sum_{\omega \in \{X=n_i\}} P(\{\omega\})}_{P(X=n_i)} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(g(X)) = \sum_{i=1}^m g(n_i) P(X=n_i)}$$

Exemple :

On lance 2 fois une pièce et gagne 1 €/tête
chaque tête on perd 2 €/tête chaque face. On note
 G la va égale au gain. Et on pose $Y = G^2$
 $E(Y)$?

g_i	-4	-1	2
$P(G=g_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} (G=-4) &= F_1 \cap F_2 \\ (G=-1) &= (F_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2) \end{aligned}$$

avec $F_i = \text{"on obtient Face au } i^{\text{e}} \text{ lancer"}$

Méthode 1 : Théorème de transfert $E(Y) = \sum_{g \in \{-4, -1, 2\}} g^2 P(G=g)$

$$E(Y) = 16 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \cancel{+} \frac{11}{2}$$

Méthode 2 : (Bovine) on calcule la loi de Y

y_i	16	1	4	d'où $E(Y) = \dots$
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

Exemple : X est une VA qui suit la loi $B(n, p)$. On pose $Y = X^2$. On veut calculer $E(Y)$?

♡ D'après le théorème fait $E(Y) = \sum_{k=0}^n k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$\text{on écrit } k^2 = k(k-1) + k \text{ d'où avec } q = 1-p$$

$$E(Y) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

mais $k(k-1) \binom{n}{k} = m(m-1) \binom{n-1}{k-1}$ avec $m = n-1$

$$= m(m-1) \binom{n-1}{k-2}$$

$$E(X) = np$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } E(Y) &= \sum_{k=2}^m m(m-1) \binom{n-1}{k-2} p^k q^{m-k} + mp \cdot \text{on pose } j = k-2 \\ &= m(m-1) p^2 \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} p^j q^{m-2-j} + mp \\ &= m(m-1) p^2 (p+q)^{m-2} + mp \text{ mais } p+q=1 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = mp[(m-1)p + 1]}$$

Exercice : On place dans une urne n boules rouges ou vertes.

On note X le nombre de boules vertes dans l'urne (inconnu).

On tire une boule dans l'urne. Calculer la probabilité qu'elle soit verte en fonction de l'espérance de X . On a $X(\Omega) = \{0, m\}$

Les $(X=k)$ pour $k \in \{0, m\}$ forment un SCE. $P(V) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) \cdot P_{(X=k)}(V)$ (Probabilités totales)

On a $P_{(X=k)}(V) = \frac{k}{m}$ car si $X=k$ il y a k vertes dans l'urne.

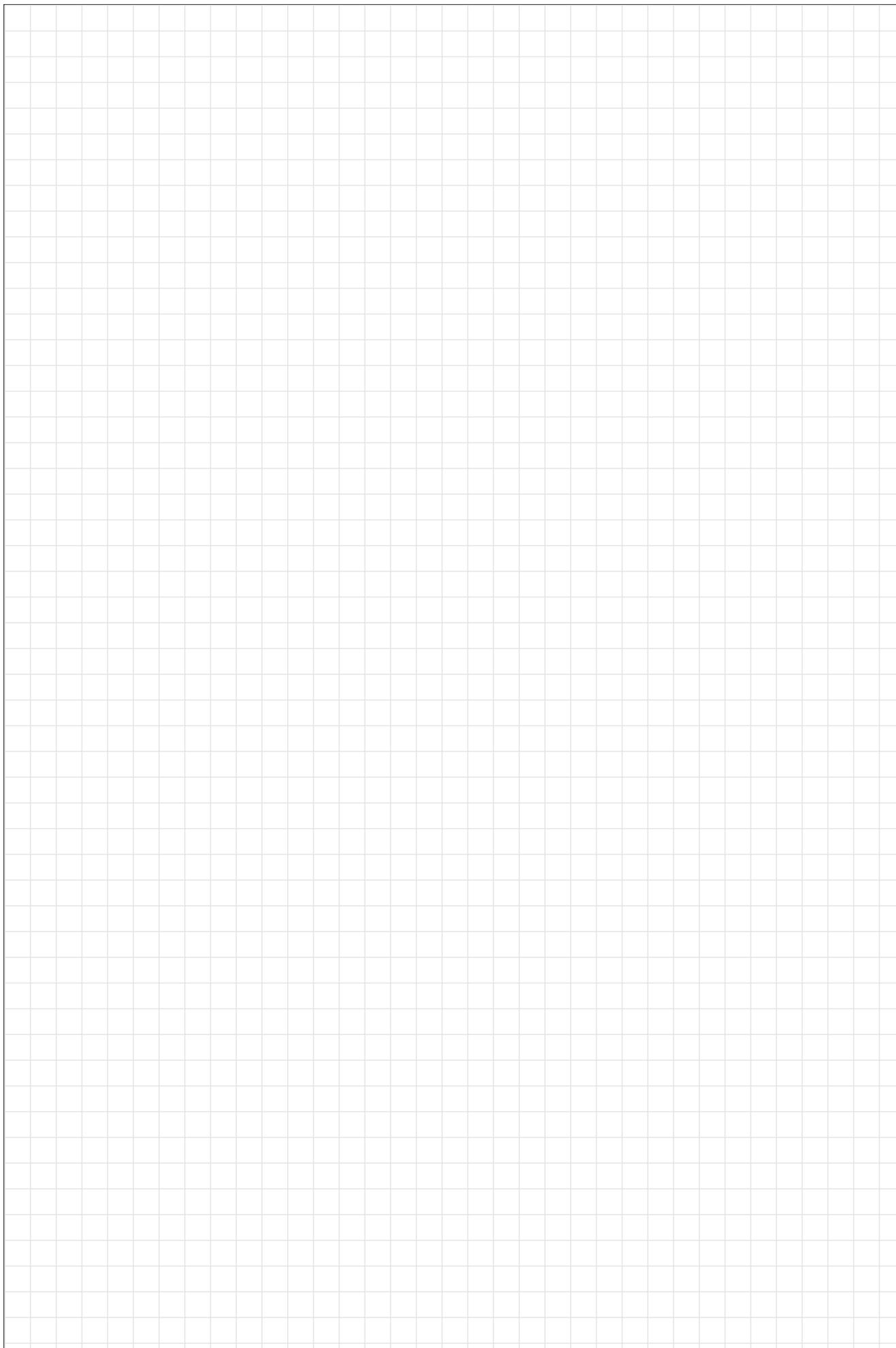
$$\text{alors } P(V) = \sum_{k \in X(\Omega)} \frac{k}{m} \cdot P(X=k) = \frac{1}{m} \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X=k) = \frac{1}{m} E(X)$$

4.4
5.4

5.4 Espérance et indépendance

Théorème 5.5. Soit X et Y deux v.a.r. sur Ω .

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.



5.5 Variance et écart-type

Définition 5.2. Soit X une v.a.r. finie. On appelle variance de X le réel $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On a donc $V(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$.

Remarque 5.1. On a $V(X) \geq 0$ donc $\sigma(X)$ existe.

Théorème 5.6 (Formule de Koenig-Huygens).

On a pour une v.a.r. finie X :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Théorème 5.7. Soit X une v.a. finie. On a pour tous réels a, b

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

$\sigma(X)$ a la même unité

$\sigma(X)$ mesure la dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$.

Démonstration 5-6 X est une VAR

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2X \cdot E(X) + (E(X))^2)$$

car X a des valeurs réelles et $E(X) \in \mathbb{R}$

Puis l'linéarité de l'espérance : $E(-2E(X) \cdot X) = -2E(X) E(X)$

$$V(X) = E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2$$

et on utilise $E(\text{constante réelle}) = \text{constante réelle}$.

ce qui donne $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Remarque $V(0) = 0$

Démonstration 3.7 on pose $Y = aX + b$ $E(Y) = aE(X) + b$

$$V(Y) = E((Y - E(Y))^2) \stackrel{\text{calcul}}{=} E((aX - aE(X))^2)$$

$$\stackrel{\text{calcul}}{=} E(a^2(X - E(X))^2) = a^2 E((X - E(X))^2)$$

Soit $V(Y) = a^2 V(X)$ par linéarité

$$X^* = aX + b$$

Remarque : si X est une VAR, $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

est appelée VA centrée réduite associée à X .

$$E(X^*) = 0 \quad \sigma(X^*) = 1$$

Exemple: X suit la loi

$$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\text{puis } Y = X^2$$

$$E(X), V(X), E(Y), V(Y).$$

$$E(X) = -\frac{2}{6} - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{1}{12} = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X=k)$$

$$E(X^2) = 4 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{4} + 0 + 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{144} = \frac{251}{144}$$

$$E(Y) = E(X^2) = \frac{7}{4}$$

$$E(Y^2) = E(X^4) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^4 P(X=k)$$

$$= \frac{16}{6} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{16}{6} = \frac{69}{12}$$

$$\text{donc } V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{69}{12} - \frac{49}{16} = \frac{43}{16}$$

5.6 Espérance et variance des lois usuelles finies

- Si X est une v.a. finie constante, $X = c$ avec $P(X = c) = 1$, alors

$$E(X) = c \text{ et } V(X) = 0.$$

- Si X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket : \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors

$$E(X) = \frac{1+n}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

- Si X suit la loi uniforme sur $\Omega : X(\omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, alors

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ et } V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p : \mathcal{B}(p)$, alors

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p).$$

- Si X suit une loi binomiale de paramètres n et $p : \mathcal{B}(n, p)$, alors

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p).$$

— loi de Poisson :

— loi géométrique :

Démonstration.

$$P(X=k) = \frac{1}{n} \text{ car } n \text{ valeurs équivalentes}$$

- Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

$$\text{Alors } E(X) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{n} \Rightarrow E(X) = \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{On calcule également } E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{où on a utilisé } \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad \sum_{k=2}^{n+2} (k^2) = \binom{n+3}{3} = \sum_{k=2}^{n+2} (k+1)(k+2) = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

$$\text{Et } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}.$$

On trouve

$$V(X) = \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} \Rightarrow V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

- Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

X prend les valeurs 0 avec la probabilité $1-p$ et la valeur 1 avec p .

Alors $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p$ soit $E(X) = p$. On calcule également $E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$.

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2$ soit $V(X) = p(1-p)$.

— Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Alors $E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Mais on sait que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour $k \geq 1$.

On obtient :

$$E(X) = 0 + \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

On reconnaît une formule du binôme :

$$E(X) = np(p+1-p)^{n-1} \text{ soit } \boxed{E(X) = np}. \text{ (résultat facile à obtenir par linéarité)}$$

On calcule maintenant $E(X(X-1))$ qui donnera $E(X^2) - E(X)$:

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \text{ Mais on sait que } \\ k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \text{ pour } k \geq 2.$$

On obtient :

$$E(X(X-1)) = 0 + 0 + \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} = \\ n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)}.$$

On reconnaît une formule du binôme :

$$E(X(X-1)) = n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} = n(n-1)p^2.$$

Et,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = \\ np((n-1)p + 1 - np).$$

D'où $\boxed{V(X) = np(1-p)}$.

□

Exercice Si $X \sim U([p, q])$, alors

calculer $E(X)$ et $V(X)$, pour $p < q$ entiers.

On pose $Y = X - p + 1$ et $n = q - p + 1$

alors $Y \sim U([1, n])$

$$\text{donc } E(Y) = \frac{n+1}{2} \quad V(Y) = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\text{et } E(X) = E(Y) + p - 1 =$$

$$V(X) = V(Y + p - 1) = V(Y) = \begin{cases} (X = n_i)_{i \in K} \\ (X = n_i)_{i \in I \setminus K} \end{cases}$$

Démonstration de l'inégalité de Biuniforme Tchebychev

On note $X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}$ ensemble des valeurs prises par X .

$$\text{On a } V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \quad \text{Théorème de la moyenne}$$

on note $K = \{i \in I \mid |x_i - E(X)| \geq \varepsilon\}$ ensemble des indices des valeurs de X vérifiant l'inégalité. Alors

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = \sum_{i \in K} P(X = x_i) = \frac{|K|}{n}$$

On trouve

$$V(X) = \sum_{i \in I \setminus K} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) + \sum_{i \in K} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

on a alors

$$V(X) \geq \sum_{i \in K} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

mais pour $i \in K$ $|x_i - E(X)| \geq \varepsilon \Rightarrow (x_i - E(X))^2 \geq \varepsilon^2$

$$\text{d'où } V(X) \geq \sum_{i \in K} \varepsilon^2 P(X = x_i) = \varepsilon^2 \cdot \sum_{i \in K} P(X = x_i)$$

$$\text{mais } P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = \sum_{i \in K} P(X = x_i)$$

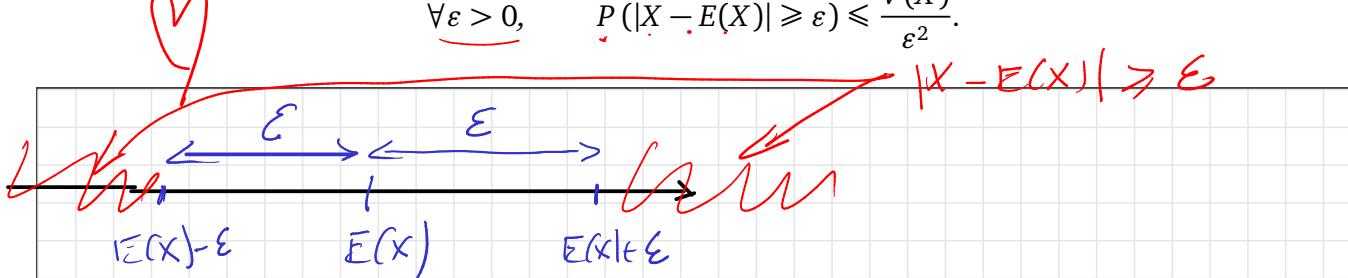
Or

$$\frac{V(X)}{\varepsilon^2} \geq P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$$

5.7 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 5.8. Si X est une v.a. définie sur un espace probabilisé (Ω, P) d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$



Exemple: On lance un dé à 6 faces équilibré n fois. On compte le nombre d'As (= \square) obtenus. S est la VA égale au nombre d'As obtenus.

On note X égale à la fréquence d'apparition de l'As au cours des n lancers : $X = \frac{S}{n}$

On sait que $E(X) = \frac{1}{6}$ car $E(x) = \frac{1}{6}E(s)$ et S suit la loi binomiale $B(n, \frac{1}{6})$ car S complète le nombre d'apparitions de l'As quand on répète n fois la même expérience de manière indépendante et qui m'a que deux résultats : $E(S) = np = \frac{n}{6}$

$$S(2) = \{0, n\} \quad X(2) = \left\{ \frac{b}{n} \mid b \in \{0, n\} \right\}$$

Si $n = 3000$, et si on obtient $S = 400$ as au 3000 lancers que fait-on au penser ? $X = \frac{S}{n} = \frac{400}{3000} \approx 0,1333$ $E(X) = \frac{1}{6} \approx 0,1666$ est-ce probable ?

Suite : on veut le nombre de lancers n pour être sûr à 98% que la fréquence d'apparition de l'as ne s'écarte pas de $\frac{1}{6}$ de plus de 0,05. On veut

$$P(|X - E(X)| < 0,05) \geq 98\% = 0,98$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(|X - E(X)| \geq 0,05) \geq 98\%$$

car $(|X - E(X)| < 0,05) = (|X - E(X)| \leq 0,05)$

$$\Leftrightarrow 2\% \geq P(|X - E(X)| \geq 0,05)$$

mais $E(X) = \frac{1}{6}$ $V(X) = V\left(\frac{S}{m}\right) = \frac{1}{m^2} V(S) = \frac{1}{m^2} mp(1-p)$

ou $V(X) = \frac{5}{36m}$ avec $p = \frac{1}{6}$, $1-p = \frac{5}{6}$

L'inégalité de Bienaymé Tchebychev donne :

$$P(|X - E(X)| \geq 0,05) \leq \frac{V(X)}{(0,05)^2} \leq 2\%$$

on cherche m tel que

$$\frac{V(X)}{(0,05)^2} \leq 0,02 \Leftrightarrow \frac{5}{36m(0,05)^2} \leq 0,02$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{36(0,05)^2(0,02)} \leq m \Leftrightarrow 27777 \leq m$$

Pour $m \geq 2778$, la probabilité d'avoir $|X - \frac{1}{6}| \leq 0,05$ est supérieure à 98%.