Chapitre 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

4 Applications linéaires

4.1 Morphismes d'espaces vectoriels

Soit E, F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Définition 4.1. Une application f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est dite linéaire si

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \qquad f(\alpha.x) = \alpha.f(x).$$

Théorème 4.1. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \qquad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$
$$\Longleftrightarrow \forall (x,y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \qquad f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Remarque 4.1. *L'image d'une combinaison linéaire de vecteurs par une application linéaire est la combinaison linéaire des images des vecteurs.*

Définition 4.2. Une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ s'appelle un endomorphisme de E.

notations 4.3. On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

4.2 Exemples

4.3 Généralités sur les applications

Dans ce paragraphe, E et F sont deux ensembles.

Définition 4.4. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
Pour $x \in E$, $y = f(x)$ s'appelle l'image de x et x est un antécédent de y.
On appelle image directe par f d'une partie A de E, l'ensemble des images des éléments de A noté $f(A)$:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

On appelle image réciproque par f d'une partie B de F, l'ensemble des antécédents (éventuels) des éléments de B noté $f^{-1}(B)$: $\qquad f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$

Remarque 4.2. Attention : rien n'indique ici que f est bijective ni que son application réciproque f^{-1} existe.

Définition 4.5. Soit f une application de E dans F.
f est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

f est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall z \in F, \exists x \in E : \quad z = f(x).$$

f est bijective si f est injective et surjective ce qui est équivalent à tout élément de l'ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent par f.

Lemme 4.2. *Soit f une application de E dans F.*
f est bijective de E dans F si et seulement si il existe une application $u : F \longrightarrow E$ telle que $u \circ f = id_E$ et $f \circ u = id_F$.

4.4 Noyau et image d'une application linéaire

E et F sont deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Proposition 4.3. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
L'image directe d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 4.6. Étant donné une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, on appelle :

- noyau de f le sous-espace vectoriel de E défini par
$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}\{\overrightarrow{0}\} = \left\{x \in E \mid f(x) = \overrightarrow{0}\right\}.$$
C'est l'ensemble des antécédents du vecteur nul par f.
- image de f le sous-espace vectoriel de F défini par
$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E : \ y = f(x)\}.$$
C'est l'ensemble des images de E par f.

Théorème 4.4. *Si f est une application linéaire de E dans F, alors*
$$f \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{0}\} \qquad \text{et par ailleurs,} \qquad f \text{ est surjective} \iff \operatorname{Im} f = F.$$

Exercice 4.1. Déterminer le noyau et l'image de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x + y - z, x - 2y + z)$ Vu en classe

Correction :
Soit $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs. On calcule
$$f(u+v) = (2(x_1+x_2) + (y_1+y_2) - (z_1+z_2), (x_1+x_2) - 2(y_1+y_2) + (z_1+z_2))$$
soit par propriété du calcul vectoriel :
$$f(u+v) = (2x_1 + y_1 - z_1, x_1 - 2y_1 + z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2, x_2 - 2y_2 + z_2)$$
On reconnaît
$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^2$. On calcule
$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y - \alpha z, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z) = \alpha(2x + y - z, x - 2y + z)$$
On a donc $\underline{f(\alpha u) = \alpha f(u)}$

Les deux résultats prouvent que $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

On détermine le noyau de f : soit $u \in \mathbb{R}^3$, $\quad u \in \operatorname{Ker} f \iff f(u) = \overrightarrow{0}$.
On note $u = (x,y,z)$, on a alors :
$$u \in \operatorname{Ker} f \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x + y - z &=& 0 \\ x - 2y + z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + z &=& 0 \\ 5y - 3z &=& 0 \end{array}\right.$$
On a trois inconnues et deux pivots, alors on a un paramètre : $z = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

$u \in \operatorname{Ker} f \iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{5}\alpha \\ y &=& \frac{3}{5}\alpha \\ z &=& \alpha \end{array}\right.$

On en déduit que le noyau de f est la droite vectorielle dirigée par $(1,3,5)$: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,3,5))$

On détermine ensuite l'image de f :

un vecteur $v = (a,b)$ appartient à l'image de f si et seulement si il existe un vecteur $u = (x,y,z)$ tel que $f(u) = v$

$(a,b) \in \operatorname{Im} f \iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& a \\ x-2y+z &=& b \end{array}\right.$

$\iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+z &=& a \\ 5y-3z &=& a-2b \end{array}\right.$

Le système est échelonné et a deux équations et trois inconnues (x,y,z). Il n'a pas d'équation de compatibilité, alors il a toujours des solutions (sous-entendu : il a des solutions pour toutes valeurs de a et b).

Alors, tous les vecteurs (a,b) de $\mathbb{R}^2$ sont dans $\operatorname{Im} f$: on a $\underline{\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{Im} f}$.

Et, on sait que $\underline{\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2}$ par définition de f. Alors, $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2}$ et il s'ensuit que f est surjective.

Exercice 4.2. Déterminer le noyau et l'image de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y) = (x - 2y, x + 3y, 2y)$

En cours ...

Correction :

Soit $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs.

Exercice 4.3. Déterminer le noyau et l'image de $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $h(x, y) = (x + 2y - z, 2x + y - 2z, x - y - z)$

En cours ...

Correction :

On montre d'abord que g est linéaire : soit deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Autre exercice

Exercice 4.4. Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $\varphi(P) = (2X-1)P' + 3XP$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

À faire

4.5 Combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 4.5. *Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et des scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\alpha f + \beta g$ est une application linéaire de E dans F.*

Corollaire 4.6. *$\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.*

$\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel (les endomorphismes sont des vecteurs)

4.6 Composition d'applications linéaires

Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Proposition 4.7. *Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g \circ f$ est linéaire de E dans G.*

Démonstration.

□

Exemple 4.1. On considère les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$f(x,y)=\frac{1}{5}(x+2y,2x+4y),\quad g(x,y)=\frac{1}{5}(4x-2y,-2x+4y)\text{ et }\quad h(x,y)=(x,0)$$

Calculer les différentes composées : $f\circ g$, $f\circ f$, $h\circ f$ et $f\circ h$

4.7 Isomorphismes et automorphismes

Définition 4.7. Une application linéaire bijective $f:E\longrightarrow F$ s'appelle un isomorphisme.
Un endomorphisme bijectif $f:E\longrightarrow E$ s'appelle un automorphisme.

Proposition 4.8. *Soit f une application linéaire de E dans F. Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est aussi linéaire et est un isomorphisme de F dans E.*

Proposition 4.9. *L'ensemble des automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle groupe linéaire de E, noté $\mathscr{GL}(E)$.*

Corollaire 4.10. *Pour $f,g\in\mathscr{GL}(E)$, on a $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.*

Exemple 4.2. Montrons que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - 2y, x + y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4.8 Calcul d'endomorphismes

$f : E \longrightarrow E$

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de E.

On peut effectuer des combinaisons linéaires : $\alpha f + \beta g$ pour tous α et β réels est un endomorphisme de E,

On peut composer les endomorphismes : $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux endomorphismes de E.

On peut également calculer : $f \circ f$ qu'on note f^2, $f \circ f \circ f = f^3$ et par récurrence, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots f \circ f}_{n \text{ fois}}$

Par convention, $f^0 = id_E$.

$f \circ (f+g) = f \circ f + f \circ g$ car f est linéaire

$(f \circ (f+g))(x) = f(f(x) + g(x)) = f(f(x)) + f(g(x))$

$(f+g) \circ f = f \circ f + g \circ f$ par définition de $f+g : E \longrightarrow E$, $x \longmapsto f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

$(f+g) \circ (f+g) = f \circ (f+g) + g \circ (f+g)$
$= f \circ f + f \circ g + g \circ f + g \circ g$

On note $(f+g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2$ $\quad (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$(f+g)^3 = (f+g) \circ (f+g)^2 = (f+g) \circ (f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2)$
$= f^3 + f^2 \circ g + f \circ g \circ f + f \circ g^2 + g \circ f^2 + g \circ f \circ g + g \circ g \circ f + g^3$

Si $f \circ g = g \circ f$ (si f et g commutent), alors
$(f+g)^3 = f^3 + 3 f^2 \circ g + 3 f \circ g^2 + g^3$

Formule du binôme pour les endomorphismes :

Th : Si $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec $f \circ g = g \circ f$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$$

$g \circ g \circ f = (g \circ g) \circ f = g^2 \circ f$

par associativité de $\circ$

Exemple 4.3. On pose :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y; x+y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y; -x-y) \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y; x-y) \end{array}$$

Calculer $f \circ g$, $g \circ f$ et h^2

déjà vu

E $\vec{0}_E$

Exemple 4.4. Soit f un endomorphisme de E.

$f : E \to E$

exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie

$$f^2 - 4f + 3id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

"$0_{\mathcal{L}(E)}$" ce 0 est la fonction nulle de E dans E

Montrons que f est un automorphisme de E.

On écrit $f^2 - 4f = -3id_E \iff f^2 - 4f + 3id_E = 0$

$\iff \boxed{-\frac{1}{3}f^2 + \frac{4}{3}f = id_E} \iff f \circ \underbrace{\left(-\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}id_E\right)}_{\varphi} = id_E$

et on a également $\iff \underbrace{\left(-\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}id_E\right)}_{\varphi} \circ f = id_E$

on a trouvé un endomorphisme $\varphi = -\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}id_E$ de E tel que

$\varphi \circ f = id_E$ et $f \circ \varphi = id_E$ alors f est bijective et $\varphi = f^{-1}$

alors f est un automorphisme de E et $f^{-1} = -\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}id_E$

on a utilisé $f \circ f = f \circ f$ et $\boxed{f \circ id = id_E \circ f}$

$id_E : E \to E$
$\vec{x} \mapsto \vec{x}$

cette égalité de fonctions équivaut à $\forall \vec{x} \in E \quad (f \circ id_E)(x) = (id_E \circ f)(x)$

id_E est l'élément neutre de la composition des fonctions

$f \circ id_E = f = id_E \circ f$

5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

E

F G

5.1 Somme de sous-espaces vectoriels

même

Définition 5.1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors le plus petit sous-espace vectoriel qui contient F et G est

$$H = \{x + y \,|\, x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

= ensemble des sommes d'un vecteur de F et d'un vecteur de G

On l'appelle somme de F et G et on le note $\boxed{H = F + G}$.

H est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion de F et G.

$\boxed{H = F + G = \text{Vect}(F \cup G)}$

Exemple 5.1. Soit $F = \text{Vect}((1,3,-1),(1,1,1))$ et $G = \text{Vect}((1,0,1),(-1,1,0))$

Déterminer $F + G$ F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. $\vec{u} \in F + G \iff$ il existe $\vec{v} \in F$ et $\vec{w} \in G$ tels que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

mais $\vec{v} \in F \iff$ il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{v} = \alpha(1,3,-1) + \beta(1,1,1)$

$\vec{w} \in G \iff$ il existe $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{w} = \gamma(1,0,1) + \delta(-1,1,0)$

D'où

$\vec{u} \in F + G \iff \exists (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\vec{u} = \alpha(1,3,-1) + \beta(1,1,1) + \gamma(1,0,1) + \delta(-1,1,0)$

ce qui prouve que $F + G = \text{Vect}(\underbrace{(1,3,-1),(1,1,1),(1,0,1),(-1,1,0)}_{\text{famille génératrice de } F+G})$

on pose $\vec{u} = (x,y,z)$ fixé

$\vec{u} \in F + G \iff \exists (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$: $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \delta = x \\ 3\alpha + \beta + \delta = y \\ -\alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}$

$\iff \exists (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$:

$L_2 - 3L_1$

$L_3 + L_1$

$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \delta = x \\ -2\beta - 3\gamma + 4\delta = y - 3x \\ 2\beta + 2\gamma - \delta = x + z \end{cases}$

$\iff$ le système $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \delta = x \\ -2\beta - 3\gamma + 4\delta = y - 3x \\ -\gamma + 3\delta = -2x + y + z \end{cases}$ a au moins une solution $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$

$\iff$ vrai !

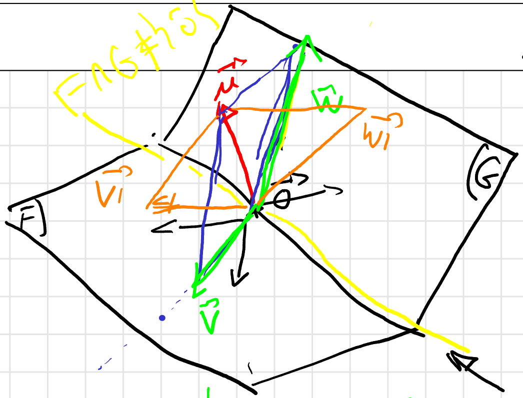
donc tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont dans $F+G$: $\boxed{F + G = \mathbb{R}^3}$

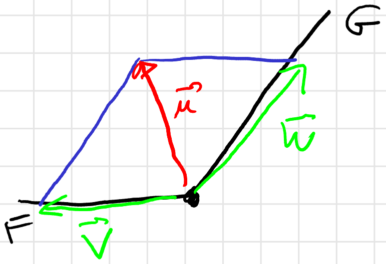
$F = \text{Vect}((1,3,-1),(1,1,1))$ $G = \text{Vect}((1,0,1),(-1,1,0))$

on a $F \subset \mathbb{R}^3$ et $G \subset \mathbb{R}^3$ donc $F + G \subset \mathbb{R}^3$

$\vec{u} = \vec{v_1} + \vec{w_1}$ avec $\vec{v_1} \in F$ et $\vec{w_1} \in G$

$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in F$ et $\vec{w} \in G$





$\vec{v}$ est une projection sur F parallèlement à G de $\vec{u}$

⚠ $\vec{v}$ n'est pas unique

Cette somme n'est pas directe !

Si G est un sev de F et F est un sev de E, alors
$F + G = F$ (somme de sev)

5.2 Somme directe

Définition 5.2. On dit que deux sev F et G d'un espace vectoriel E, sont en somme directe si tout vecteur u de $F+G$ s'écrit de manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. On note alors la somme $F \oplus G$.

$\oplus$ veut dire somme directe

Proposition 5.1. *Deux sev F et G d'un espace vectoriel E, sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.*

$A \subset B$ et $B \subset A \Leftrightarrow A = B$

$\Rightarrow$ si F et G sont en somme directe, alors

on sait que $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$ donc $\vec{0}_E \in F \cap G$: $\{\vec{0}_E\} \subset F \cap G$

Soit $\vec{u} \in F \cap G$, alors $\vec{u} \in F$ et $\vec{u} \in G$. On peut écrire

$\vec{u} = \vec{u} + \vec{0}_E$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{0}_E \in G$

et $\vec{u} = \vec{0}_E + \vec{u}$ avec $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{u} \in G$

mais F et G sont en somme directe, donc la décomposition est unique

donc $\vec{u} = \vec{0}_E$ On a prouvé $F \cap G \subset \{\vec{0}_E\}$ donc $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$

si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ alors on prend $\vec{u} \in F + G$

on suppose que $\vec{u} = v_1 + w_1$ et $u = v_2 + w_2$ avec $v_1, v_2 \in F$ / $w_1, w_2 \in G$

alors $v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \Longleftrightarrow v_1 - v_2 = w_2 - w_1 = z$

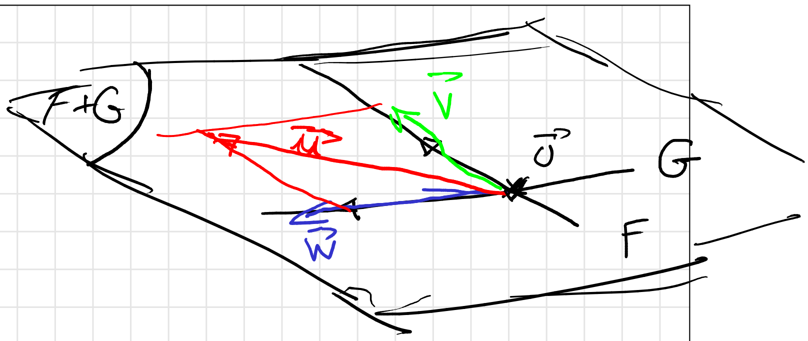
z est CL de vecteurs de F donc $z \in F$ et z est CL de w_1 et w_2 dans G

alors $z \in G$ On a $z \in F \cap G \Rightarrow z = \vec{0}_E \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 \\ w_1 = w_2 \end{cases}$

on a prouvé que toute décomposition dans F+G est unique

donc F et G sont en somme directe. on pourra écrire $F \oplus G$ au lieu de $F + G$

Exemple 5.2. Soit $F = \text{Vect}((1,3,-1))$ et $G = \text{Vect}((1,0,1))$. Montrer que F et G sont en somme directe et déterminer $F+G$. dans $E = \mathbb{R}^3$.



Exemple 5.3. Soit $F = \mathrm{Vect}(X^2+1)$ et $G = \mathrm{Vect}(3X-7)$. Montrer que F et G sont en somme directe et déterminer $F+G$.

5.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 5.3. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si $E = F + G$ et si F et G sont en somme directe : $E = F \oplus G$.

$\exists!$ "il existe un unique"

Théorème 5.2. *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$E = F \oplus G \iff \forall x \in E,\ \exists! y \in F : \exists! z \in G : \quad x = y + z \text{ avec } y \in F \text{ et } z \in G$$

$$E = F \oplus G \iff E = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}$$

$E = F \oplus G \iff$ tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G

Exemple 5.4. Soit F le sev de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ et $G = \text{Vect}((1,0,1))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. $E = \mathbb{R}^3$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on cherche $v \in F$ et $w \in G$ tel que $u = v + w$

mais $w \in G \iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $w = \alpha(1,0,1)$

$v \in F \iff 2x_v + y_v - z_v = 0$ avec $v = (x_v, y_v, z_v)$

on cherche α, x_v, y_v, z_v tels que $u = v + w$

$\iff \begin{cases} x_v + \alpha = x \\ y_v + 0 = y \\ z_v + \alpha = z \\ 2x_v + y_v - z_v = 0 \end{cases}$ on résout le système :

on trouve $2(x - \alpha) + y - (z - \alpha) = 0$

d'où $-\alpha + 2x + y - z = 0 \Rightarrow \alpha = 2x + y - z$

puis $x_v = x - \alpha$, $y_v = y$, $z_v = z - \alpha$

on a trouvé $w = (2x + y - z)(1,0,1) \in G$ et $v = (-x - y + z, y, -2x - y + 2z) \in F$

Tels que $u = v + w$ on a prouvé que $\mathbb{R}^3 \subset F + G$

et comme on a $F \subset \mathbb{R}^3$, $G \subset \mathbb{R}^3$, on a $F + G \subset \mathbb{R}^3$ $\boxed{F + G = \mathbb{R}^3}$

Soit $u \in F \cap G$ alors $u = (\alpha, 0, \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ car $u \in G$

et les coordonnées de u vérifient l'éq $2x + y - z = 0$

ce qui donne $2\alpha + 0 - \alpha = 0 \iff \alpha = 0$ donc $u = \vec{0}$

On a prouvé $F \cap G \subset \{\vec{0}\}$ et on a toujours $\{\vec{0}_E\} \subset F \cap G$

donc $F \cap G = \{\vec{0}\} \iff$ $\boxed{\text{F et G sont en somme directe}}$

donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$: $\boxed{\text{F et G sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$

Exemple 5.5. Montrer que les fonctions paires et les fonctions impaires sont deux sev supplémentaires de l'espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5.4 Base adaptée à une somme directe.

Proposition 5.3. *Si F et G sont deux sev en somme directe et si $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_q)$ est une base de G, alors $(e_1, \ldots, e_q)$ est une base de la somme directe $F \oplus G$.*
On dit qu'une telle base est adaptée à la somme directe.

Démonstration.

□

Proposition 5.4. *Si* $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *est une base de* F *et* $(e_{p+1}, \dots, e_q)$ *est une base de* G*, telles que* $(e_1, \dots, e_q)$ *est une base de* E*, alors* $E = F \oplus G$*.*

Théorème 5.5.

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *est une famille libre d'un espace vectoriel, alors* $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ *et* $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ *sont en somme directe.*

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *est une base de* E*, alors* $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) \oplus \mathrm{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ *pour tout* $p \in [\![1, n-1]\!]$*.*

Exemple 5.6. Montrons que $\mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_2[X] \oplus \mathrm{Vect}(X^3)$

6 Applications linéaires et familles de vecteurs

6.1 Image d'une base par une application linéaire

Théorème 6.1. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E.*

- *La famille $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.*
- *u est surjective $\Longleftrightarrow (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est génératrice de F.*
- *u est injective $\Longleftrightarrow (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est libre dans F.*
- *u est bijective $\Longleftrightarrow (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une base de F.*

Démonstration.

□

Corollaire 6.2. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
u est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

6.2 Application linéaire définie par l'image d'une base

Théorème 6.3. *Étant données une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E et une famille d'autant de vecteurs $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ dans F, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad u(e_i) = f_i$.*

Exemple 6.1. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(1) = X^2 + 2X$, $f(X-1) = X^2 + 5$, $f((X-1)^2) = 2X - 4$. Déterminer l'image d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Corollaire 6.4. *Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.*

$$f = g \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(e_i) = g(e_i).$$

Deux applications linéaires sont égales si et seulement si leurs images d'une base sont les mêmes.

Corollaire 6.5. *Une application linéaire est nulle si et seulement si l'image d'une base par cette application linéaire est la famille nulle.*

6.3 Application linéaire définie sur deux sev supplémentaires

Proposition 6.6. *Soit E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit $f_1 : E_1 \longrightarrow F$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$. C'est-à-dire $\forall x_1 \in E_1, \quad f(x_1) = f_1(x_1)$ et $\forall x_2 \in E_2, \quad f(x_2) = f_2(x_2)$.*

7 Applications linéaires essentielles

7.1 Homothéties

Définition 7.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle homothétie toute application $f : E \longrightarrow E$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda.x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ un scalaire non nul fixé.

Proposition 7.1. *Une homothétie de E est un automorphisme de E.*
L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ de l'espace vectoriel E est l'application $\lambda.id_E$.

7.2 Projecteurs

Définition 7.2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On appelle projection sur F parallèlement à G, l'application $p : E \longrightarrow E$ qui à $x \in E$ associe l'unique vecteur $y \in F$ tel que $x = y + z$ avec $z \in G$.

Une telle application est aussi appelée projecteur.

Théorème 7.2. *Soit p une application de E dans E.*

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } p \text{ est linéaire et } p \circ p = p.$$

Dans ce cas, p projette sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Démonstration.

- Si p est la projection sur F parallèlement à G. Soit $x \in E$ et $y \in E$ et $\alpha \in K$.
  Les vecteurs x et y se décomposent en $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ avec $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$. On a $p(x) = x_F$ et $p(y) = y_F$.
  Alors $\alpha x + y$ se décompose en $\alpha x + y = (\alpha x_F + y_F) + (\alpha x_G + y_G)$ avec $\alpha x_F + y_F \in F$ et $\alpha x_G + y_G \in G$ car F, G sont des sev.
  Alors on a $p(\alpha x + y) = \alpha x_F + y_F = \alpha p(x) + p(y)$. $\boxed{\text{L'application } p \text{ est donc linéaire}}$.
  De plus, pour $x \in E$, que l'on écrit $x = x_F + x_G$, on a $p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x_F)$ mais comme $x_F \in F$, on a $x_F = x_F + 0$ donc $p(x_F) = x_F$ et finalement, $p \circ p(x) = p(x)$. On conclut $\boxed{p \circ p = p}$.
- Réciproquement, si p est linéaire et $p \circ p = p$, alors on pose $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p$.
  Soit $y \in F \cap G$, u est une image donc il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ et $y \in G$ donc $p(y) = 0$ $\Longrightarrow y = p(x) = p \circ p(x) = p(p(x)) = p(y) = 0$. Donc $F \cap G \subset \{0\}$.
  Et, comme on a toujours l'inclusion réciproque, $\boxed{F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}}$.
  Soi $x \in E$, alors x s'écrit $\boxed{x = p(x) + (x - p(x))}$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p(-p(x)) = p(x) - p(x) = 0$. Donc $\boxed{E = F + G.}$
  Alors on a $E = F \oplus G$ et la relation $x = p(x) + (x - p(x))$ prouve que p est la projection sur F parallèlement à G.
- Enfin, si p est un projecteur, alors les images sont des éléments de F donc $\operatorname{Im} p \subset F$.
  Et réciproquement tout élément $z \in F$ est sa propre image $p(z) = z$ donc $F \subset \operatorname{Im} p$. On en déduit $\boxed{\operatorname{Im} p = F}$.
  Les éléments $u \in G$ s'écrivent $u = 0 + u$ avec $0 \in F$et $u \in G$ donc $p(u) = 0 \Longrightarrow u \in \operatorname{Ker} p$. On a donc $g \subset \operatorname{Ker} p$.
  Réciproquement, si $p(u) = 0$ pour $u \in E$, alors u s'écrit $u = 0 + u_G$ avec $u_G \in G$. On en déduit que $u \in G$ ce qui prouve $\operatorname{Ker} p \subset G$. On a donc $\boxed{\operatorname{Ker} p = G}$.

□

Remarque 7.1. Pour étudier une projection p, on cherche les vecteurs invariants : $p(x) = x \Longleftrightarrow (p - id)(x) = \overrightarrow{0}$ car, pour une projection, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - id)$.

Exemple 7.1. Montrons que $f(x, y) = \dfrac{1}{5}(6x - 2y, 3x - y)$ est une projection.

On calcule $f \circ f(x, y) = \dfrac{1}{5}(6X - 2Y, 3X - Y)$ avec $X = \dfrac{6x - 2y}{5}$ et $Y = \dfrac{3x - y}{5}$.

Ce qui donne $f \circ f(x, y) = \dfrac{1}{25}(30x - 10y, 15x - 5y) = f(x, y)$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme f est aussi linéaire, $\underline{f \text{ est une projection}}$.

On cherche les vecteurs invariants : $f(x, y) = (x, y) \Longleftrightarrow x - 2y = 0 \Longleftrightarrow (x, y) \in \operatorname{Vect}(2, 1)$. Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((2, 1))$.

Et le noyau de f : $f(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow 3x - y = 0 \Longleftrightarrow (x, y) \in \operatorname{Vect}(1, 3)$. Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1, 3))$.

Conclusion : f est la projection sur $\operatorname{Vect}((2, 1))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((1, 3))$

7.3 Symétries

Définition 7.3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application $s : E \longrightarrow E$ qui à x s'écrivant $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ associe $s(x) = y - z$.

Proposition 7.3. *Une symétrie s de E est un automorphisme involutif de E : i.e. $s \circ s = s^2 = id_E$.*

Théorème 7.4. *Soit s une application de E dans E.*

$$s \text{ est une symétrie si et seulement si } s \text{ est linéaire et } s \circ s = id_E.$$

Dans ce cas, s est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + id_E)$.