TD 22 - Déterminants

Exercice 1 : Utiliser des déterminants pour les questions suivantes :

1. La matrice A suivante est-elle inversible ?
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
2. Les vecteurs $(1,-1,2)$, $(2,-1,-1)$ et $(-1,2,1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. La matrice B suivante est-elle inversible ?
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
4. Soit $f(x,y,z) = (2x+3y+4z, 4x+y+3z, x+2y+4z)$. f est-elle une application bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$?
5. La matrice suivante C est-elle inversible ? $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 8-\lambda & -5 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 11 & 0 & 3 \\ -15 & -4 & -3 \\ -21 & -12 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 11-\lambda & 0 & 3 \\ -15 & -4-\lambda & -3 \\ -21 & -12 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Exercice 3 : Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ ab & bc & ca \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 4 : Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & e^{-ia} & e^{ib} \\ e^{ia} & 1 & e^{-ic} \\ e^{-ib} & e^{ic} & 1 \end{vmatrix}$$ où a, c, b sont réels et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 5 : Calculer par récurrence le déterminant de taille n suivant avec $a > 2$: $D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

Exercice 6 : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Démontrer que le déterminant $\Delta(x)$ est un polynôme de degré 1 en x. Calculer $\Delta(-a)$ et $\Delta(-b)$, en déduire la valeur du déterminant $D_n(a,b,c)$ lorsque $a \neq b$. Calculer $D_n(a,a,c)$.

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} c+x & b+x & \dots & b+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & a+x & c+x \end{vmatrix} \qquad D_n(a,b,c) = \begin{vmatrix} c & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{vmatrix}$$

Exercice 7 : On considère trois réels distincts x_1, x_2 et x_3.

1. En utilisant un déterminant, montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$ est de rang 3.
2. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ prenant les valeurs y_1, y_2 et y_3 en x_1, x_2 et x_3.