Mathématique - Devoir Maison n°12

Exercice 1

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction f en un point a au rang $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Simplifier cette formule lorsqu'on choisit $f : x \longmapsto \ln(1-x)$ et $a = 0$.
3. Pour tout couple $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, vérifier les inégalités : $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$
4. En déduire la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère les applications f et g de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans lui-même, définies par :

$$f(x,y,z) = (x+2y-z, 2x+4y-2z, -x-2y+z) \text{ et } g(x,y,z) = \left(\frac{x+2y+2z}{3}, \frac{2x+y-2z}{3}, \frac{2x-2y+z}{3}\right)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On admettra que g est également un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Vérifier que g est une symétrie.
   (b) Déterminer les éléments caractéristiques de g.
3. (a) Déterminer un réel λ tel que $p = \lambda f$ soit un projecteur.
   (b) Déterminer les éléments caractéristiques de p.

Exercice 3

On note E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y''' = 3y' - 2y$ d'inconnue y, fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. On pose : $F = \{y \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ \ y'' = 2y' - y\}$ et $G = \{y \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ \ y' = -2y\}$
   (a) Montrer que F et G sont inclus dans E
   (b) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E et déterminer une famille génératrice respective de F et de G.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E (*On pourra raisonner par "analyse-synthèse"*)
4. Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y''' = 3y' - 2y \\ y(0) = 0 \ , \ \ y'(0) = 1 \ \ , \ y''(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 4

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application suivante :

$$f : E \longrightarrow E \ ; \ \ P(X) \longmapsto P(1)(X^2 + X + 1) - P(X)$$

1. (a) Vérifier que f est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer le noyau $Ker(f)$, et l'image $Im(f)$ de l'endomorphisme f. Pour chacun de ces sous-espaces, on donnera une famille génératrice.
   (c) f est-il un automorphisme de E ? Si oui , déterminer l'expression de f^{-1}.
2. On souhaite trouver une expression de f^n. Pour ce faire , on introduit la fonction $g = f + Id_E$.
   (a) Déterminer g^n, pour tout entier naturel n.
   (b) En déduire l'expression de f^n, pour tout entier naturel n.