

Chapitre 16 - TD - 6 avril 2020

TD 16 - Exercice 2 :

Écrire les développements limités des fonctions f suivantes à l'ordre et au point indiqué :

a) $DL_3(2)$ de $f(x) = \ln x$, e) $DL_2(0)$ de $f(x) = \frac{\sinh x}{\sin x}$ f) $DL_3(0)$ de $f(x) = x(\cosh x)^{\frac{1}{x^2}}$

a) on pose $x = 2 + h$ avec $x \rightarrow 2 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$
 on a $\ln(x) = \ln(2+h) = \ln\left(2\left(1+\frac{h}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{h}{2}\right)$
 on pose $u = \frac{h}{2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$
 on trouve : $\ln(x)_{x \rightarrow 2} = \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3)$
 $\ln(x)_{x \rightarrow 2} = \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3)$

Autre méthode :

\ln est de classe C^3 sur $]0, +\infty[$ (voisinage de 2)
 alors on peut utiliser la formule de Taylor :

$$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f(2) = \ln(2) \quad f'(2) = \frac{1}{2} \quad f''(2) = -\frac{1}{4} \quad f'''(2) = \frac{1}{4}$$

Alors $\ln(x)_{x \rightarrow 2} = \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1/4}{2!}(x-2)^2 + \frac{1/4}{6}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$

e) on a $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ gratuit
 $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
 on a $\frac{\sinh(x)}{\sin(x)} = \frac{x(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3))}{x(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3))} = \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}\right)$
 on calcule $\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{1-u}$ avec $u = +\frac{x^2}{6} + o(x^3)$

on a $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u) = 1 + u + u^2 + o(u^2)$

$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$ car $u \sim \frac{x^2}{6}$
 donc $\frac{\sinh(x)}{\sin(x)}_{x \rightarrow 0} = \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$
 $\frac{\sinh(x)}{\sin(x)}_{x \rightarrow 0} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$

$$f) \quad x (ch(n))^{\frac{1}{n^2}} \underset{0}{=} x e^{\frac{1}{n^2} \ln(ch(n))}$$

on a $ch(n) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(n^5)$ ↗ gratuit 1. = 1 + u

puis en posant $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ et $u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

on a $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

avec $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$, $u^3 = \frac{x^6}{8} + o(n^6)$ et $o(u^3) = o(n^6)$

d'où $\ln(ch(n)) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) + o(n^5) + o(n^5)$

$$\ln(ch(n)) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$$

ensuite

$$\frac{1}{n^2} \ln(ch(n)) \underset{0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(n^3)$$

$$(ch(n))^{\frac{1}{n^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(n^3)} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{12} + o(n^3)} = e^{\frac{1}{2}} e^v$$

On pose $v = -\frac{x^2}{12} + o(n^3)$ et $e^v = 1 + v + o(v)$

on a $o(v) = o(x^2)$ alors $e^v \underset{n \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{12} + o(\underline{x^2})$

d'où

$$(ch(n))^{\frac{1}{n^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{12} + o(n^2) \right) \text{ avec } e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

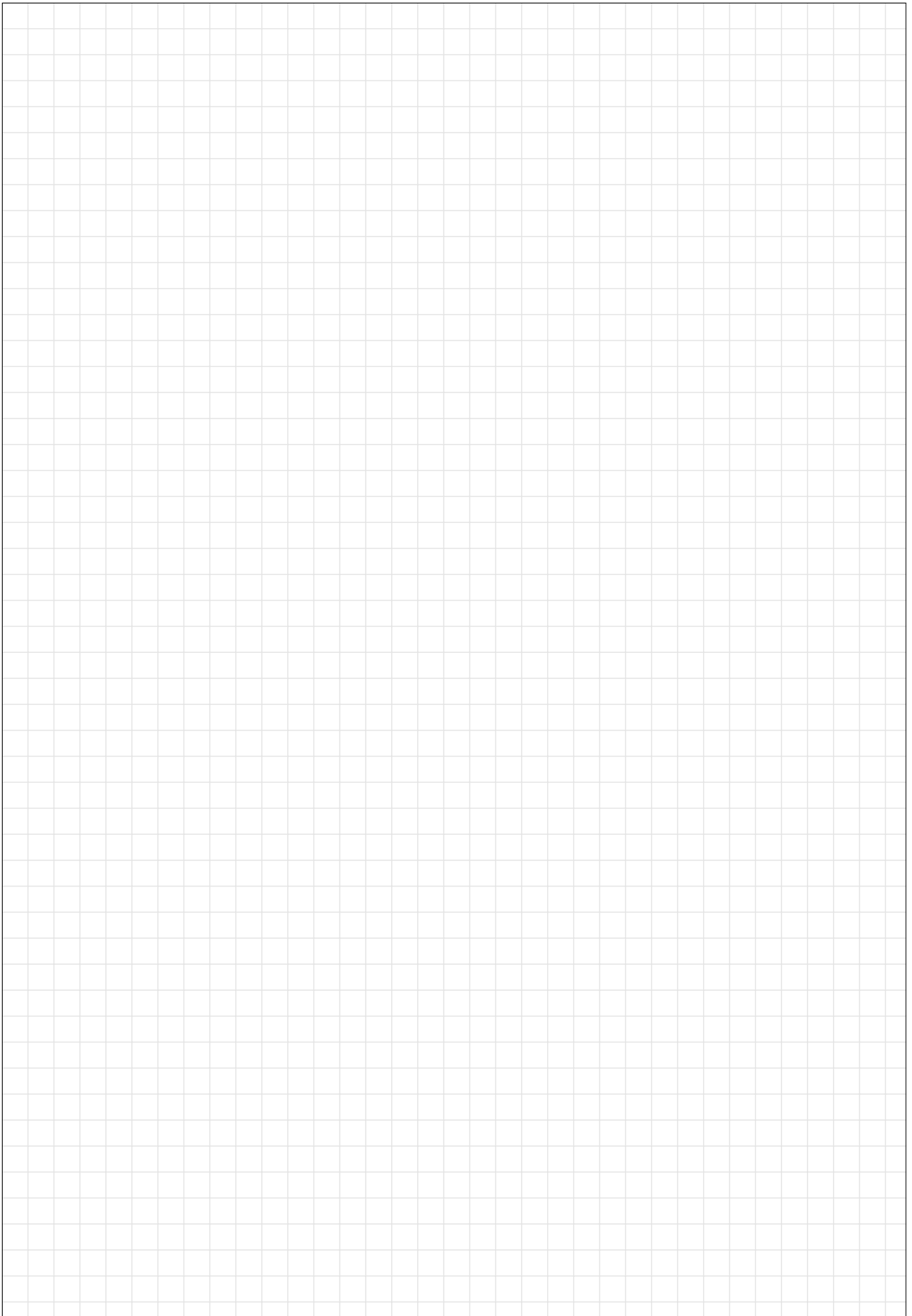
puis

$$x (ch(n))^{\frac{1}{n^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{e} x - \sqrt{e} \frac{x^3}{12} + o(x^3) \quad \Delta_3(0)$$

Δ $e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + o(v^2)$ avec $v = -\frac{x^2}{12} + o(x^3)$

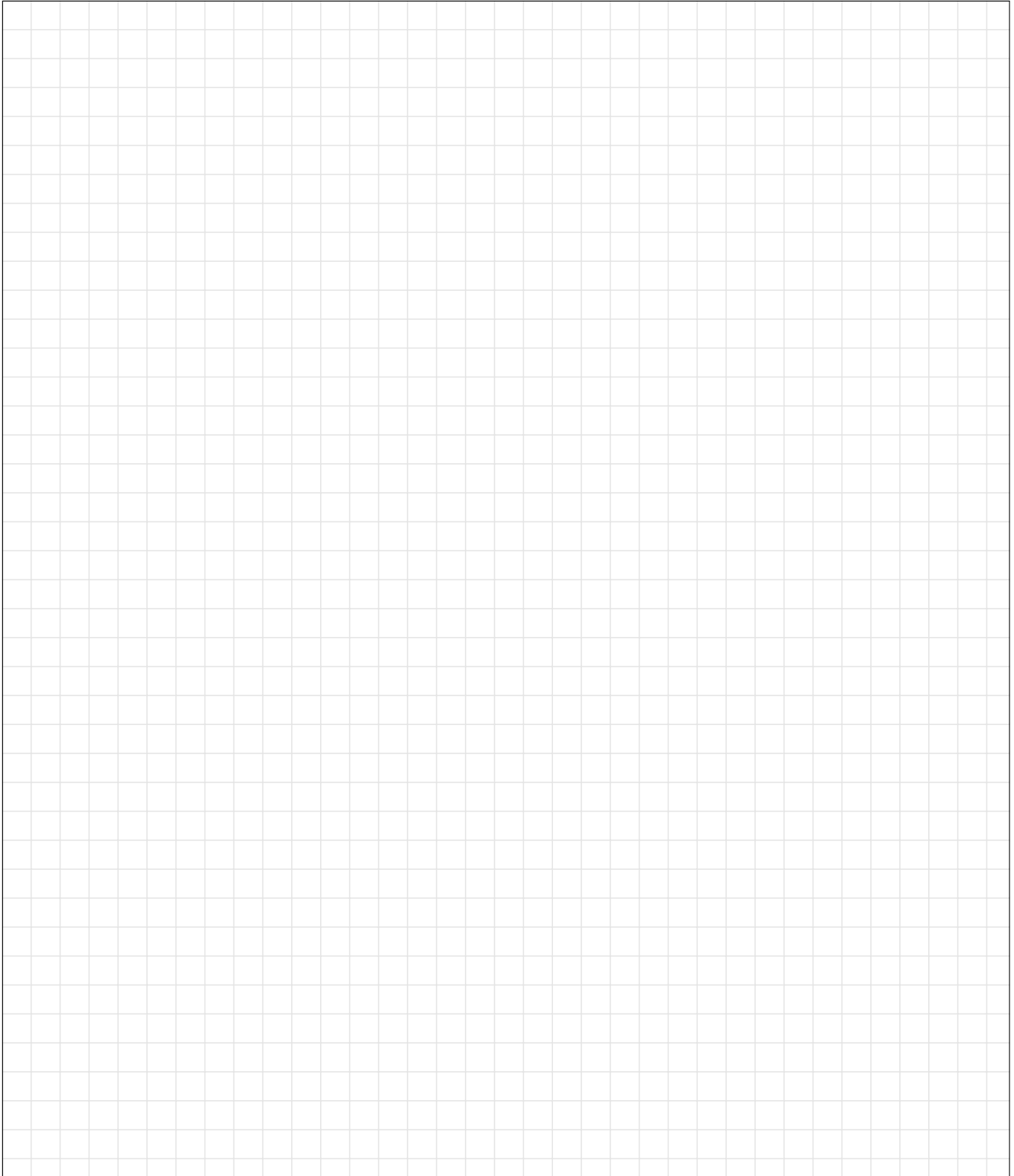
d'où $e^{-\frac{x^2}{12} + o(n^3)} = 1 - \frac{x^2}{12} + o(n^3) + o(x^3) + \frac{v^2}{2} = \frac{x^4}{144} + o(n^4)$ et $o(v^2) = o(x^4)$

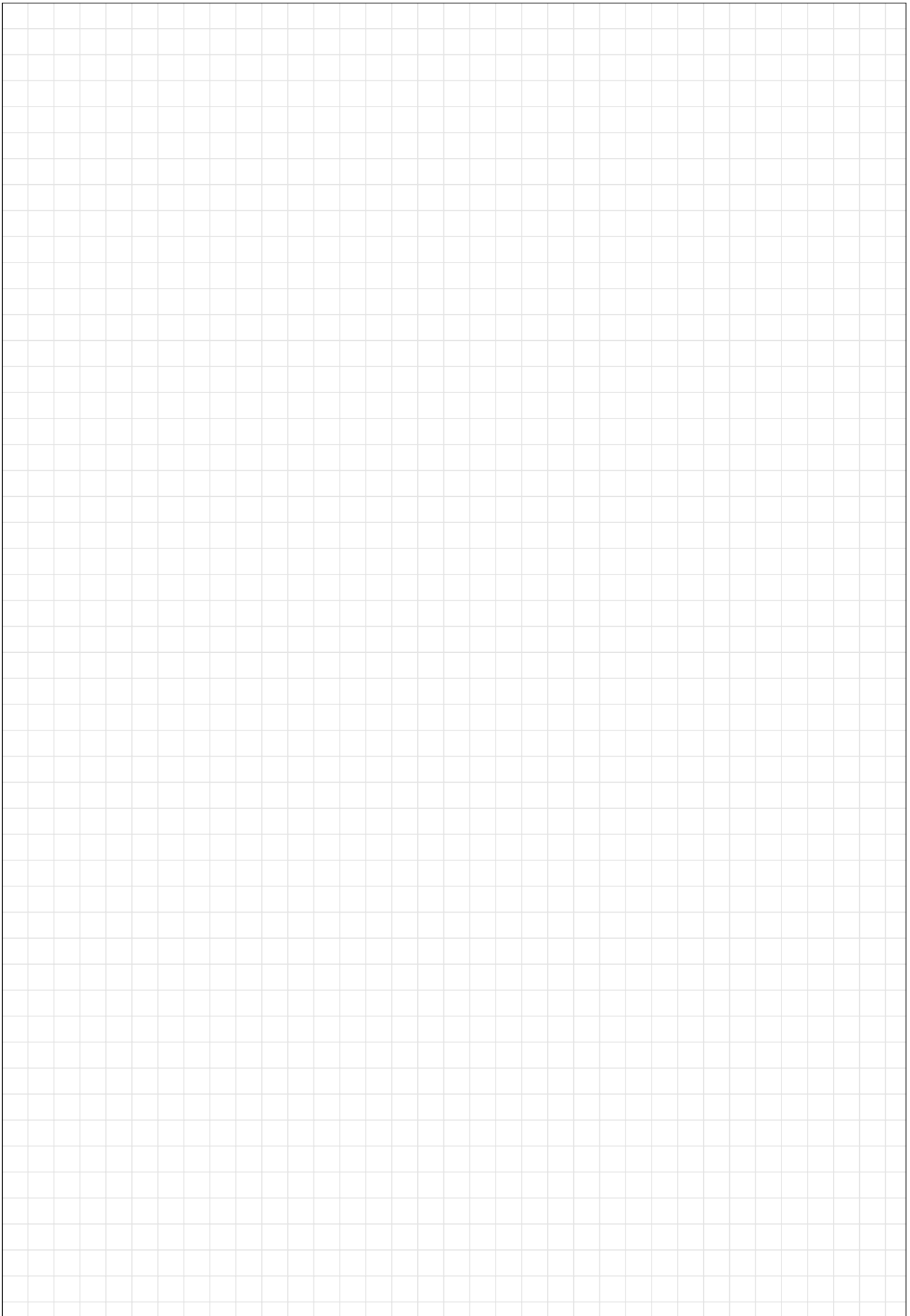
$$\left[e^{-\frac{x^2}{12} + o(n^3)} \right]_{x \rightarrow 0} = 1 - \frac{x^2}{12} + o(\underline{x^3}) \rightarrow x (ch(n))^{\frac{1}{n^2}} = \sqrt{e} \left(x - \frac{x^3}{12} + o(n^4) \right)$$



TD 16 - Exercice 4 : Étudier la limite en a des fonctions suivantes :

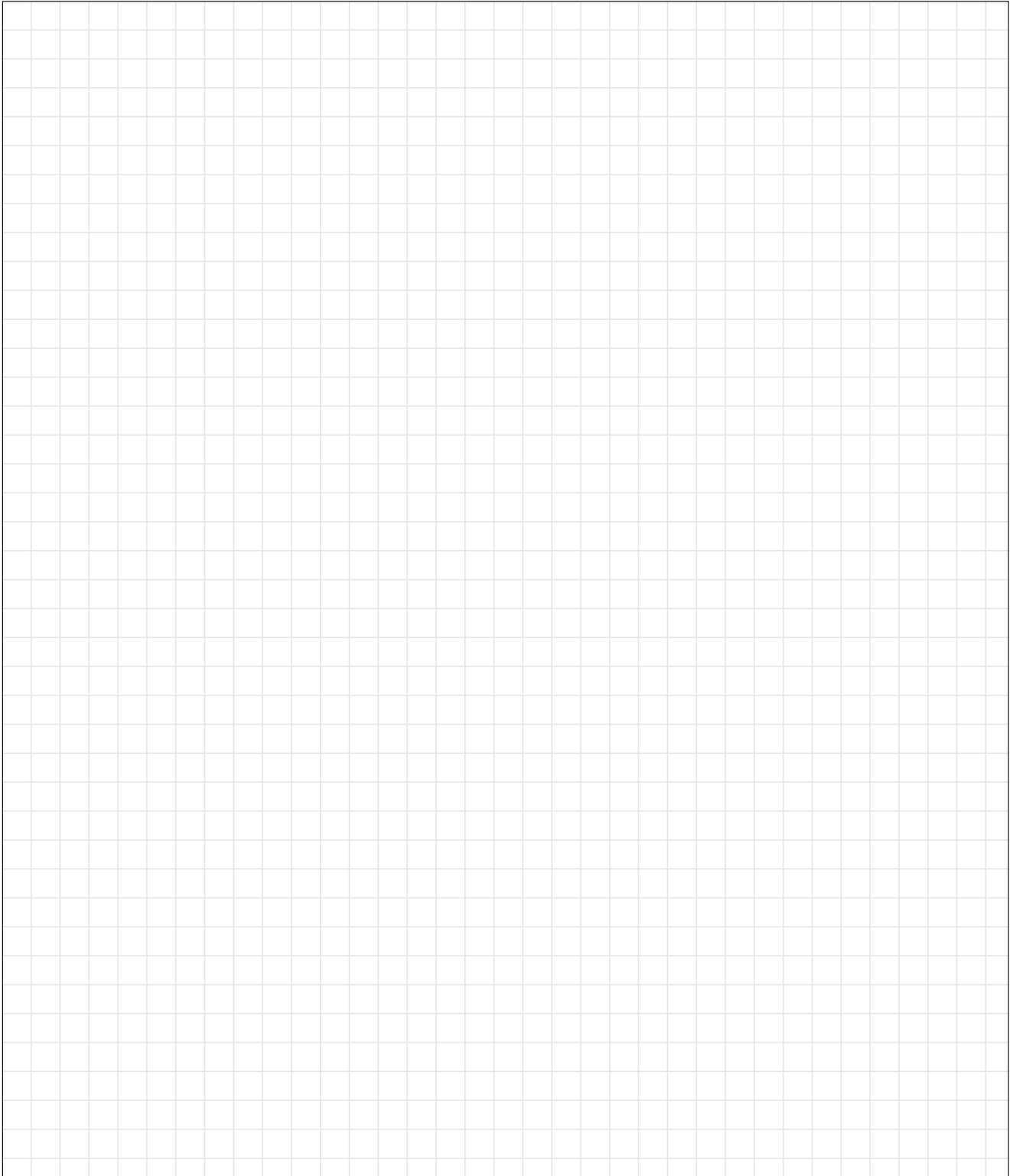
$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\arctan x)^2} \text{ en } a = 0,$$

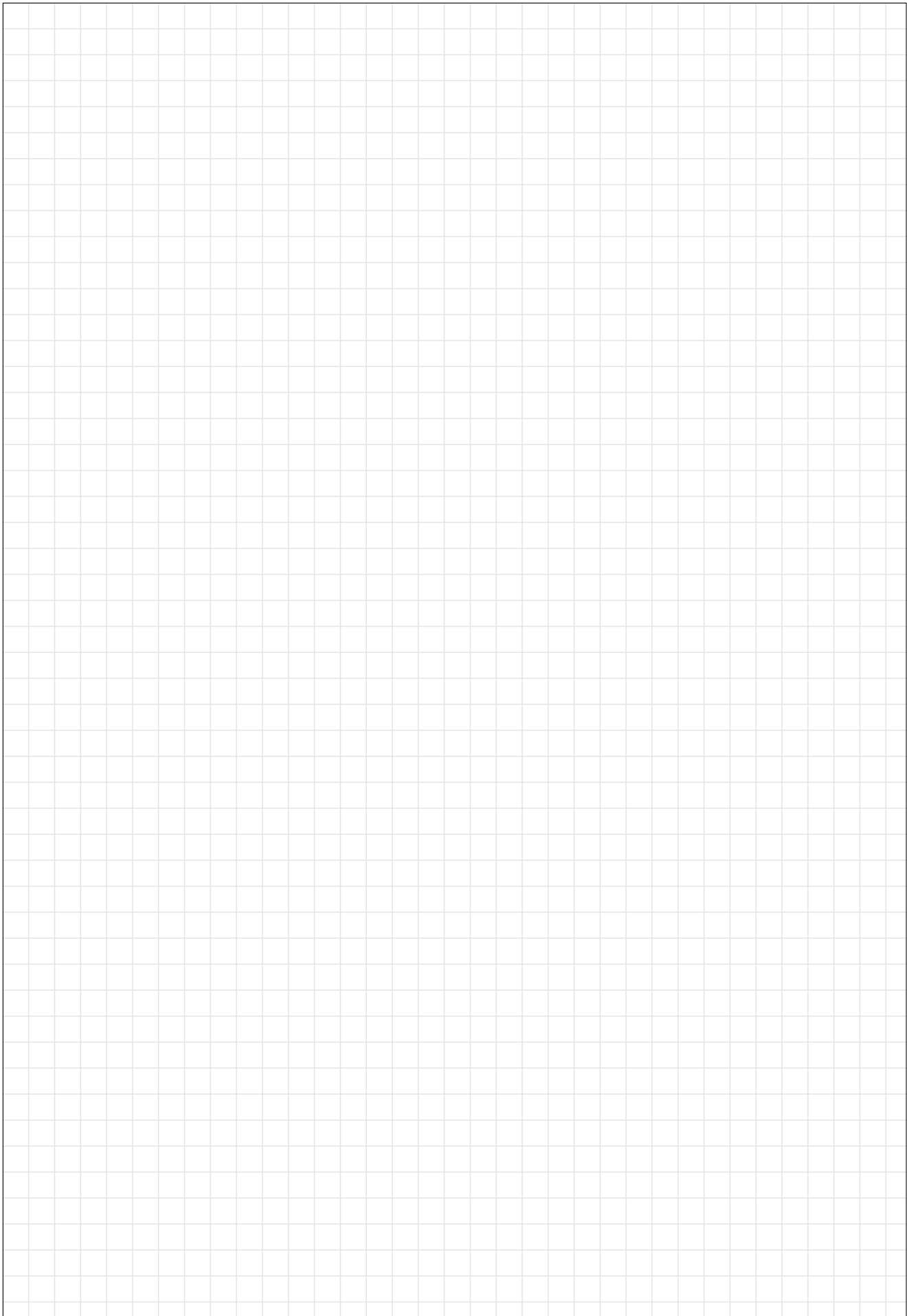




TD 16 - Exercice 5 : Déterminer les limites des suites suivantes :

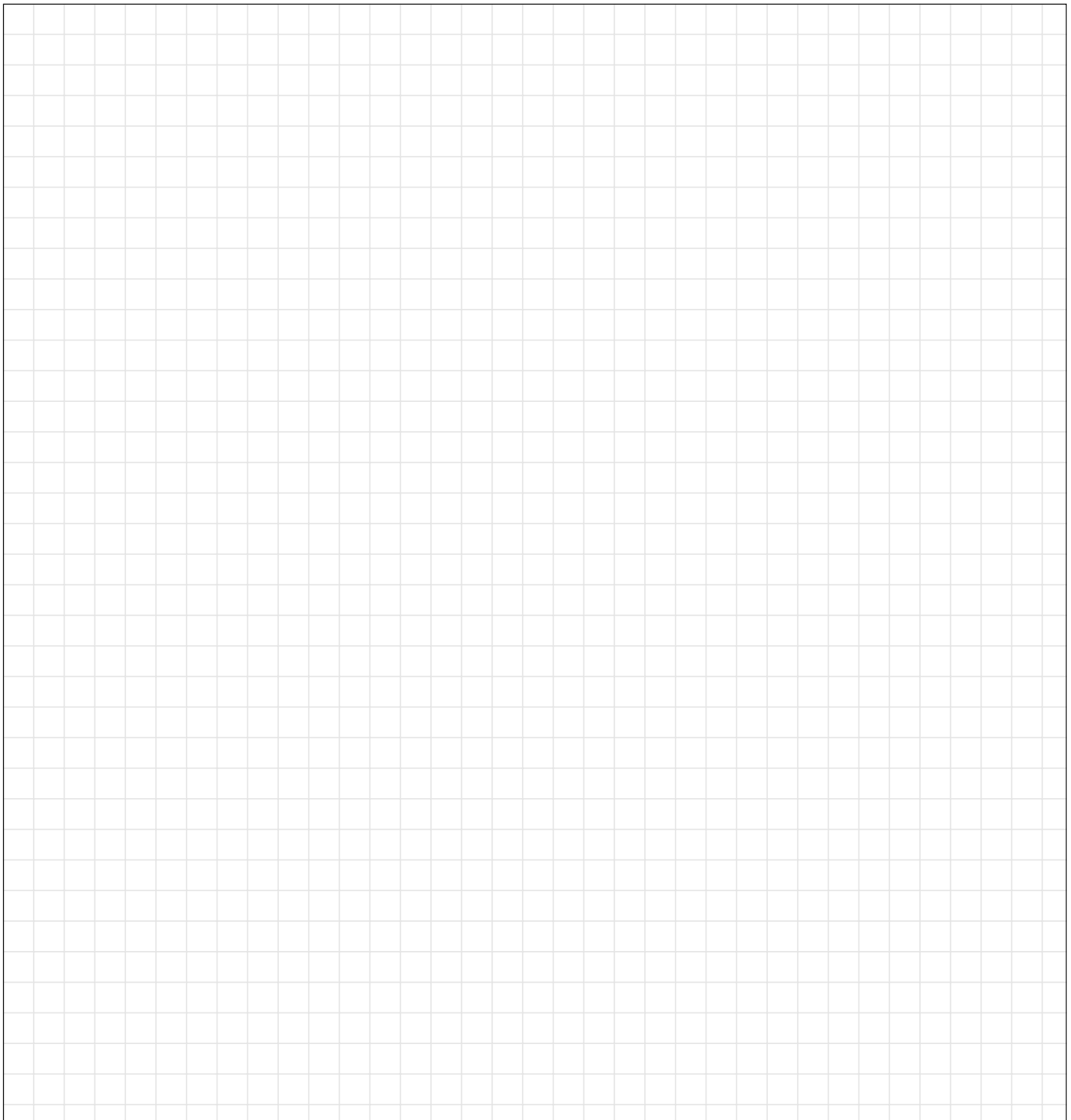
$$v_n = \left(\sqrt{\frac{n+1}{n+3}} \right)^n$$

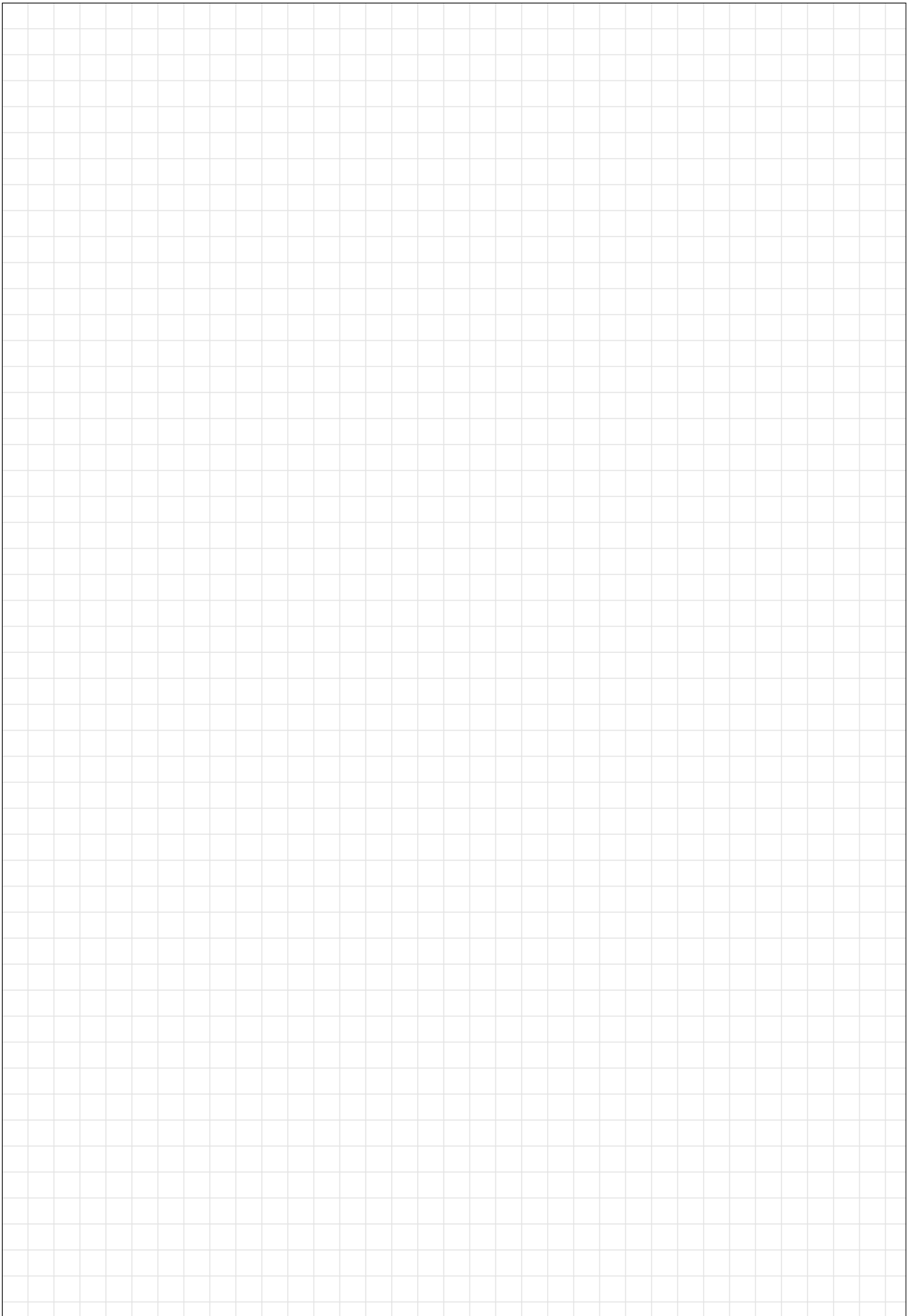


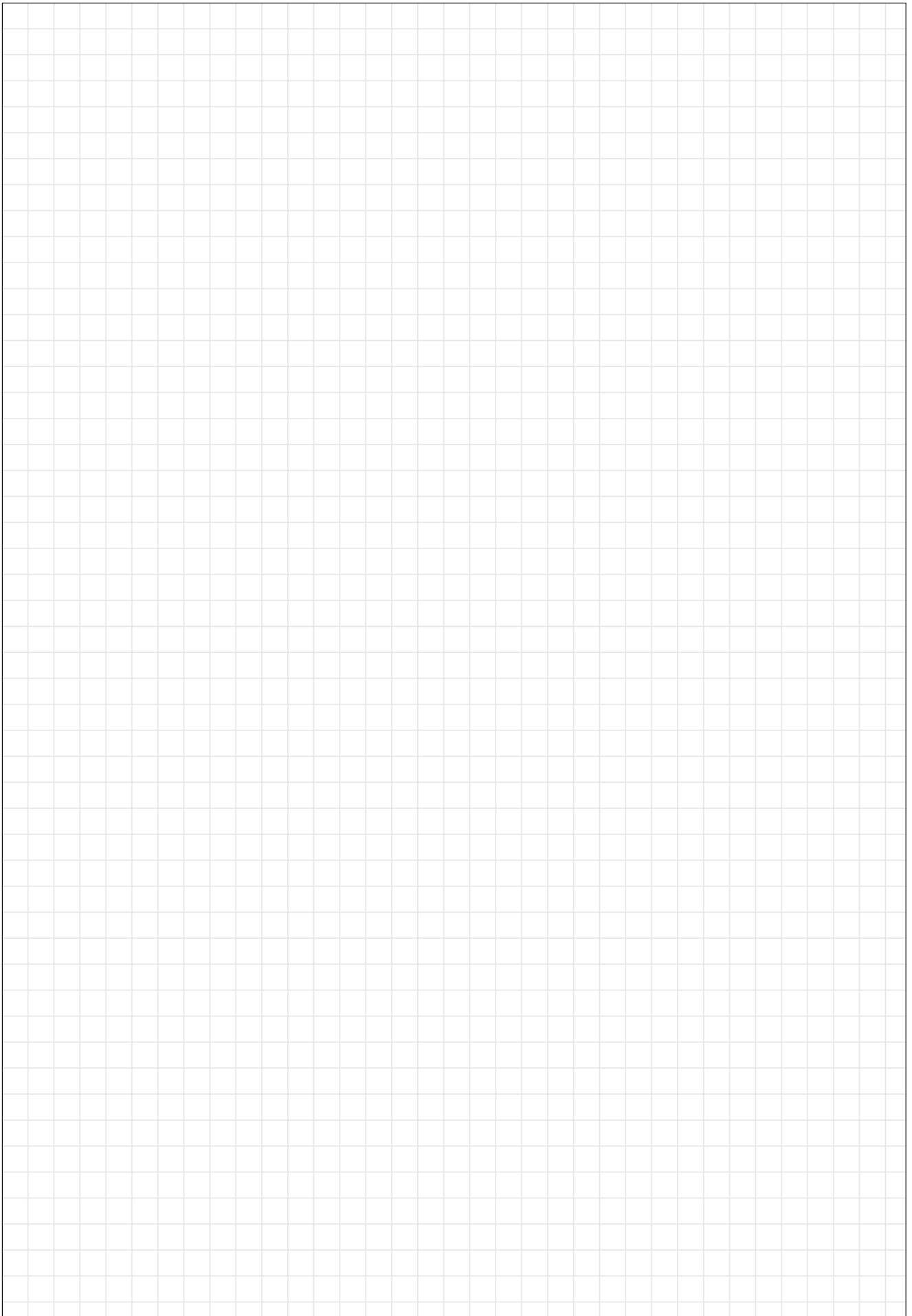


TD 16 - Exercice 8 : Soit la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}^*$, par : $f(x) = \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$.

1. Écrire le développement limité à l'ordre 4 de $f(x)$ en 0. En déduire le prolongement par continuité de f en 0.
2. Montrer que f , ainsi prolongée, est dérivable en 0. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 et au voisinage de ce point.







TD xx - Exercice xx :

