Mathématique - DS n°6

L'usage de documents, de calculatrices ou de téléphones portables est interdit.
Les étudiants sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $\mathcal{S}$ la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ et soient

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2y+1 \\ z & = & y+4 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z+1 & = & 0 \\ 2x-y+9 & = & 0 \end{array} \right.$$

deux droites.

1. Déterminer le centre et le rayon de $\mathcal{S}$.
2. Expliciter les caractéristiques géométriques de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
3. Déterminer le ou les plans $\mathcal{P}$ tangents à $\mathcal{S}$ tels que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient parallèles à $\mathcal{P}$.
   On précisera le ou les points de contact entre $\mathcal{S}$ et le ou les plans trouvés.

Exercice 2

Soit $a \in [-1, 1]$. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^{ax} f(t)\, \mathrm{d}t$.

1. Calcul des dérivées successives de f
   (a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et en déduire une expression de $f(x)$ en fonction de x, a et F.
   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = af(ax)$.
   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre entier naturel n, on a
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$
   (d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t$
3. Soit A un nombre réel strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que $\quad \forall x \in [-A; A], \quad |f(x)| \leqslant M$
   et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a $\quad \forall x \in [-A; A], \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant M$.
   (b) Soit x un nombre réel appartenant à $[-A; A]$.
   Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $\quad |f(x)| \leqslant M \dfrac{A^{n+1}}{(n+1)!}$.
   (c) En déduire que $f(x) = 0$ pour $x \in [-A, A]$.
4. Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x, -x-y, 0)$.
   On note F le sous-ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $z = 0$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner une famille génératrice.
   (b) Montrer que f est linéaire.
   (c) Établir que f est injective.
   (d) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

2. Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :
$$g(1,0,0) = (1,-1)\,; \quad g(0,1,0) = (0,-1)\,; \quad g(0,0,1) = (1,1).$$
   (a) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $g(x,y,z)$.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g)$.
   (c) Montrer que g est surjective.
   (d) Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $(g \circ f)(x,y)$. Que peut-on dire de l'application $g \circ f$?

On étudie maintenant le cas général : soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels non nuls et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications linéaires (qui ne sont plus les applications des questions précédentes).
On suppose que $g \circ f = id_E$.

4. (a) Montrer que f est injective et g surjective.
   (b) Établir que $f \circ g$ est un projecteur de F.
   (c) À l'aide d'une double-inclusion établir que : $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f \circ g)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ g)$.
   (d) Que peut-on conclure sur $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f)$?

Exercice 4

Dans cet exercice, on pose $\forall x \in [0, +\infty[$: $\quad F(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(-x\sin(t))\, \mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
2. Montrer (sans dérivation) que F est décroissante sur $[0, +\infty[$ et que l'on a $\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.
3. Montrer en étudiant une fonction et ses deux premières dérivées que l'on a $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad \dfrac{2}{\pi} t \leqslant \sin(t)$.
4. En déduire que l'on a $\forall x \in]0, +\infty[, \quad F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4x}\left(1 - e^{-x}\right)$, puis que l'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.
5. (a) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que l'on a $\forall (a,b) \in [0, +\infty[, \quad \left|e^{-a} - e^{-b}\right| \leqslant |a - b|$.
   (b) En déduire que l'on a $\forall (x,y) \in [0, +\infty[, \quad |F(x) - F(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - y|$.
   (c) En déduire que F est continue sur $[0, +\infty[$.
6. (a) Montrer rigoureusement que F est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que l'équation $F(x) - x = 0$ admet une unique solution notée α sur $[0, +\infty[$.
   (c) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 \in [0, +\infty[$ fixé et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = F(u_n)$.
   Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.