

Mathématique - Devoir Maison n°15

Exercice 1

- On pose $f : x \mapsto \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{x^2}$
 - Quel est l'ensemble de définition de f ?
 - Prouver que f est prolongeable par continuité en $x = 0$, puis, ainsi prolongée, que f est dérivable en $x = 0$. Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de 0.
- Déterminer le développement limité de $f(x) = x^2 \operatorname{ch}(x) - \cos(x)$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 4.
 - Soit $g(x) = \frac{1}{x} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. On pose $h = \frac{1}{x}$. Exprimer $g(x)$ à l'aide de $f(h)$.
Que peut-on en conclure concernant le graphe de g au voisinage de $+\infty$?
- A l'aide d'un développement limité calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2}$
- Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\left(\sum \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \right)$.

Exercice 2

- Soit une application $f \in C^1([a, b])$ et un réel $\lambda > 0$.
 - Montrer que $\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \frac{f(b) \sin(\lambda b)}{\lambda} - \frac{f(a) \sin(\lambda a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt$
 - En déduire que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$
- Exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.
- En déduire que pour tout $t \in [0, 1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$
- Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sin(k)}{k} = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}$
- En déduire que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$ converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\frac{1}{2}$

Exercice 3

- Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
Montrer que si la série $\sum x_n$ converge, alors la série $\sum x_n^2$ converge aussi.
On pourra, par exemple, commencer par montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $\forall n \geq N$, $x_n^2 \leq x_n$.

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\operatorname{ch}(u_n)}$.

- Donner le développement limité de la fonction ch au voisinage de 0 à l'ordre 2.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante.
 - En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
 - Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
 - Pour tout $n \geq 0$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$. En déduire que la série $\sum v_n$ est divergente.
- Montrer que $v_n \sim_{+\infty} -\frac{u_n^2}{2}$.
 - En déduire que la série $\sum u_n^2$ est divergente.
 - Conclure sur la nature de la série $\sum u_n$.