TD 17 - Espaces vectoriels Dimension finie

Exercice 1 : Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs

$$\vec{a} = (1,0,1),\ \vec{b} = (-1,-1,2) \text{ et } \vec{c} = (-2,1,-2)$$

forment une base, et calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $\vec{u} = (x,y,z)$.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{a} = (3,2,1,0),\quad \vec{b} = (2,3,4,5),\quad \vec{c} = (0,1,2,3),\quad \vec{d} = (1,2,1,2),\quad \vec{e} = (0,-1,2,1).$$

Exercice 3 : Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure canonique de $\mathbb{R}$-ev. On note

$$e_1 = (1,1,1,0),\ e_2 = (2,1,0,1),\ e_3 = (4,3,2,1),\ v_1 = (1,-1,1,-1),\ v_2 = (2,0,0,-1),\ v_3 = (2,-1,0,0).$$

Soient $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ et $V = \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$. Donner des bases et les dimensions de F, V, $F+V$ et $F\cap V$.

Exercice 4 : Déterminer si la famille (A,B,C,D) suivante est libre ou liée. Donner la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -14 & -12 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, engendré par les fonctions :

$$f_1(x) = \sin^2 x,\ f_2(x) = \cos^2 x,\ f_3(x) = 1,\ f_4(x) = \sin 2x,\ f_5(x) = \cos 2x,\ f_6(x) = \sin x \text{ et } f_7(x) = \cos(x).$$

Déterminer une base et la dimension de E.

Exercice 6 : Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = (ax^2+bx+c)e^{4x}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit D l'application définie sur E par $D : f \longmapsto f'$. Montrer que D est un automorphisme de E. Déterminer son application réciproque.

Exercice 7 : Dans $\mathbb{K}^3$, on donne les sous espaces : $H = \{\vec{X} = (x,y,z) | x+y+z = 0\}$ et $K = \mathrm{Vect}(\vec{k} = (1,1,2))$. Déterminer $\dim H$ et en donner une base. Puis, démontrer que $H \oplus K = \mathbb{K}^3$. Enfin, donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées : π_H et s_H.

Exercice 8 : On considère la famille de polynômes (P_1,P_2,P_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par $P_1 = 1+3X-X^2$, $P_2 = 1+4X$, $P_3 = 2X - X^2$.

1. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(P_1,P_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(P_3)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
2. Déterminer les expressions analytiques des projections sur F et G.

Exercice 9 : Soit f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = P(X+1) - P(X-1) + 2P(X)$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ puis déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. Donner le rang de f.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $P \longmapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est une application linéaire et montrer que $\mathrm{Im}\,\Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Delta$ puis $\mathrm{Im}\,\Delta$. Donner le rang de Δ.
3. En déduire qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n(X+1) - P_n(X) = X^{n-1}$. Calculer P_n pour $n = 2,3,4$.
4. Démontrer que $\Delta^n \neq 0$ puis déterminer Δ^{n+1}

Exercice 11 : On considère l'ensemble de matrices $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en donner une base.
2. Montrer que F est stable par multiplication et qu'il ne contient quasiment que des matrices inversibles.
3. On considère l'ensemble de matrices $G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Montrer que G est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en donner une base.
4. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 12 : Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ forme une base de E.

Exercice 13 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, z)$.

Montrer que f est linéaire. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Déterminer $f(P)$ où P est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 14 :

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \phi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt$.

Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Im} \phi$ et de $\operatorname{Ker} \phi$.

Exercice 15 : Soit n, p deux entiers avec $p < n$ et A un polynôme à coefficients réels de degré p.

Soit $F_A = \{Q \times A | Q \in \mathbb{R}_{n-p}[X]\}$.

1. Montrer que F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que F_A et $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 16 : Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_p X^p$ un polynôme. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on note $P(M)$ la matrice $P(M) = a_0 I_n + a_1 M + a_2 M^2 + \cdots + a_p M^p$.

On dit que P est un polynôme annulateur de M si P est non nul et $P(M) = (0)$.

Démontrer par l'absurde que toute matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à $n^2 + 1$.

Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et u un endomorphisme de E.

Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{\overrightarrow{0}\} \iff \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

Montrer que $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u \iff \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$.

Montrer que si E est de dimension finie, les quatre propriétés sont équivalentes.

Exercice 18 :

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4. On considère un endomorphisme u de E tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

On pose $E_1 = \operatorname{Ker}(u^2 + u + id)$ et $E_2 = \operatorname{Ker} u$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset E_1$ et que E_1 et E_2 sont stables par u.
2. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$ puis que $E_1 = \operatorname{Im} u$ et $E_2 = \operatorname{Im}(u^2 + u + id)$.
3. (a) Montrer que pour tout x non nul de E_1, la famille $(x, u(x))$ est libre.
   (b) Montrer que si il existe deux vecteurs x, y de E_1 tels que la famille $(x, u(x), y)$ est libre, alors la famille $(x, u(x), y, u(y))$ est libre.
   (c) Quelles sont les dimensions possibles de E_1 ?