Chapitre 17, 18 et 19 - TD - 11 mai 2020

TD 19 - Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de E et $\mathscr{B}'$ la base de E formée des vecteurs $v_1 = (-1,1,-3)$, $v_2 = (3,2,1)$ et $v_3 = (2,1,1)$ dans la base $\mathscr{B}$.

1. Calculer la matrice du vecteur $(5,1,2)$ dans la base $\mathscr{B}'$.
2. Calculer la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ de l'endomorphisme f défini dans $\mathscr{B}$ par
$$f(x,y,z) = (2x+z, x-3y, -x+z).$$
3. Calculer la matrice de l'endomorphisme g défini par $g(v_i) = i.v_i$ pour $i = 1,2,3$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

On cherche les coordonnées de $(5,1,2)$ dans la base B'

On cherche $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(5,1,2) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$$\iff \begin{cases} -\alpha + 3\beta + 2\gamma = 5 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 1 \\ -3\alpha + \beta + \gamma = 2 \end{cases} \underset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3-3L_1}}{\iff} \begin{cases} -\alpha + 3\beta + 2\beta = 5 \\ 5\beta + 3\beta = 6 \\ -8\beta - 5\beta = -13 \end{cases}$$

$$\underset{5L_3+8L_2}{\iff} \begin{cases} -\alpha + 3\beta + 2\gamma = 5 \\ 5\beta + 3\gamma = 6 \\ -\gamma = -17 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 17 \\ \beta = \frac{6-51}{5} = -9 \\ \alpha = -27 + 34 - 5 = 2 \end{cases}$$

alors $(5,1,2) = 2v_1 - 9v_2 + 17v_3$

Donc
$$\boxed{M_{B'}((5,1,2)) = \begin{array}{c} (5,1,2) \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 17 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ B' \end{array}} \qquad M_B((5,1,2)) = \begin{array}{c} (5,1,2) \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \\ B \end{array}$$

2. La matrice de f dans la base B est

$$M_B(f) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(1,0,0) \\ \times(0,1,0) \\ \times(0,0,1) \end{array} \end{array} = M_{B,B}(f)$$

car $f(x,y,z) = (2x+z, x-3y, -x+z)$

$f(1,0,0) = (2,1,-1)$ $\quad f(0,1,0) = (0,-3,0)$

La matrice de f dans les bases B' (départ) et B (arrivée)

$$M_{B',B}(f) = \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) & \\ \left(\begin{array}{ccc} -5 & 7 & 5 \\ -4 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{array}\right) & & & \begin{array}{l} \times(1,0,0) \\ \times(0,1,0) \\ \times(0,0,1) \end{array} \end{array}$$

$f(u_1) = f(-1,1,-3) = (-5,-4,-2)$

La matrice de f dans la base B'

$$M_{B'}(f) = M_{B',B'}(f) = \begin{array}{cc} f(u_1) & \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & ? & ? \\ -6 & ? & ? \\ 7 & ? & ? \end{array}\right) & \begin{array}{l} \times u_1 \\ \times u_2 \\ \times u_3 \end{array} \end{array}$$

$f(u_1) = (-5,-4,-2)$ on calcule ses coordonnées dans la base B'. Après calculs, on trouve

$f(u_1) = 1 \cdot u_1 - 6u_2 + 7u_3$

à suivre

TD 17 - Exercice 6

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2+bx+c)e^{4x}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit D l'application définie sur E par $D : f \longmapsto f'$. Montrer que D est un automorphisme de E. Déterminer son application réciproque.

1. E est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui s'écrivent $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2e^{4x} + bxe^{4x} + ce^{4x}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Donc $\boxed{E = \text{Vect}(x \mapsto x^2e^{4x}, x \mapsto xe^{4x}, x \mapsto e^{4x})}$

car c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des 3 fonctions $g_2 : x \mapsto x^2e^{4x}$, $g_1 : x \mapsto xe^{4x}$, $g_0 : x \mapsto e^{4x}$

Alors E est un sev de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Bonus : on cherche la dimension de E :

⚠ vecteurs = fonctions

Si on a $\alpha g_0 + \beta g_1 + \gamma g_2 = \vec{0}$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha g_0(x) + \beta g_1(x) + \gamma g_2(x) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)e^{4x} = 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$ car $e^{4x} \neq 0$

un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$

alors (g_0, g_1, g_2) est libre : c'est une base de E

donc $\boxed{\dim E = 3}$

2.)

2) Soit $f \in E$ qui s'écrit $f(x) = (ax^2+bx+c)e^{4x}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \left(4ax^2 + (2a+4b)x + (4b+c)\right)e^{4x}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Donc $f' \in E$ car f' est combinaison linéaire de g_0, g_1, g_2

Alors D est bien définie de E dans E.

Soit $f_1, f_2 \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$D(\alpha f_1 + f_2) = (\alpha f_1 + f_2)' = \alpha f_1' + f_2' = \alpha D(f_1) + D(f_2)$

alors D est linéaire car la dérivation est linéaire

Donc D est un endomorphisme de E

$f \in \operatorname{Ker} D \iff D(f) = \vec{0} \iff f' = \vec{0}$ avec $f \in E$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}\ \ 4ax^2 + \cdots\cdots = 0$

$\iff 4a\, g_2 + (2a+4b)\, g_1 + (4b+c)\, g_0 = 0$

$\iff \begin{cases} 4a = 0 \\ 2a + 4b = 0 \\ 4b + c = 0 \end{cases}$ car (g_2, g_1, g_0) est libre.

$\iff a = b = c = 0$

$\iff f = 0$

ce qui prouve $\boxed{\operatorname{Ker} D = \{\vec{0}_E\}}$

Donc D est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension fini alors D est bijectif et D est un automorphisme de E

TD 18 - Exercice 2

Déterminer la nature des séries $\sum a_n$ suivantes :

a) $a_n = \ln\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$ b) $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,dt$ c) $a_n = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)\right)$

d) $a_n = \dfrac{2^n+n}{\ln n + 3^n}$, e) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, f) $a_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$,

a) $a_n = \ln\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{n^3+1}{n^3+2} < 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n < 0$

$-a_n = -\ln\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right) = \ln\left(\dfrac{n^3+2}{n^3+1}\right) > 0$

$-a_n = \ln\left(\dfrac{n^3+1+1}{n^3+1}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^3+1}\right)$

On sait que $\ln(1+u) \underset{0}{=} u + o(u)$ avec $u = \dfrac{1}{n^3+1}$

alors

$$-a_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^3+1} + o\left(\frac{1}{n^3+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$$

$\sum \dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 3 > 1$

donc elle converge. Alors par critère d'équivalence des séries à termes positifs $\sum -a_n$ converge

Donc $\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$

b) $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt$

On encadre a_n : pour $t \in [0,1]$

$0 \leq \sin(\pi t).t^n \leq t^n$ et l'intégrale est croissante et $0 \leq 1$ alors

$0 \leq a_n \leq \displaystyle\int_0^1 t^n dt \Rightarrow \boxed{0 \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}}$

On intègre par parties : On pose $u(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v(t) = \sin(\pi t)$ qui sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc on peut appliquer le théorème d'intégration par parties :

$a_n = \cancel{\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\sin(\pi t)\right]_0^1}_{0} - \dfrac{\pi}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\cos(\pi t)\, dt$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = -\dfrac{\pi}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\cos(\pi t)\, dt.}$

On encadre l'intégrale : pour $t \in [0,1]$ $|t^{n+1}\cos(\pi t)| \leq t^{n+1}$ l'intégrale est croissante et $0 < 1$ alors

$\left|\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\cos(\pi t)dt\right| \leq \displaystyle\int_0^1 |t^{n+1}\cos(\pi t)|dt \leq \int_0^1 t^{n+1}dt$

ce qui donne $|a_n| \leq \dfrac{\pi}{n+1}\left[\dfrac{t^{n+2}}{n+2}\right] = \dfrac{\pi}{(n+1)(n+2)} \leq \dfrac{\pi}{n^2}$

Alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0 \text{ et } a_n \leq \frac{\pi}{n^2}}$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente

Alors par le critère de comparaison des séries à termes positifs

$\boxed{\sum a_n \text{ est convergente}}$

c) $a_n = \ln\left(\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right)$

d) $a_n = \frac{2^n + n}{\ln n + 3^n}$,

e) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$,

f) $a_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$,

TD 18 - Exercice 7

On pose $u_0 = v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \quad$ et $\quad v_n = u_n - u_{n-1}$.

1. Déterminer un équivalent de (v_n) et en déduire la nature de $\sum v_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

TD 18 - Exercice 6

Soit $\alpha > 0$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \alpha$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-\frac{1}{u_n}}$.

1. Étudier la suite (u_n).
2. Comparer la série $\sum u_n$ à une série géométrique et en déduire sa nature.