Chapitre 22 - Déterminants

1 Déterminant d'une matrice carrée

1.1 Linéarité par rapport aux colonnes de la variable

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note ses colonnes $M = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ et on note C'_j une autre colonne.

matrice carrée nombre

Définition 1.1. Soit $j \in [\![1, n]\!]$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est linéaire par rapport à la colonne C_j si pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, pour toute matrice M et pour toute colonne C'_j,

$$f\left(C_1|C_2|\dots|\alpha C_j + C'_j|\dots|C_n\right) = \alpha f\left(C_1|C_2|\dots|C_j|\dots|C_n\right) + f\left(C_1|C_2|\dots|C'_j|\dots|C_n\right)$$

la j colonne est une combinaison linéaire

Exemple : le produit mixte est linéaire par rapport à chacun de ses vecteurs :

$$[\vec{u}, \vec{v_1} + \vec{v_2}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v_2}, \vec{w}]$$ linéarité par rapport à la 2e variable.

Exemple : Soit $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune des colonnes.

Calculons

$$f\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4 f\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 2 f\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 1 f\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

car $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← arbitraire

$$f\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4 f\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 4 \times 3 \times f\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 4 \times 2 \times f\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+ 2 f\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \dots$$

1.2 Antisymétrie par rapport aux colonnes

Définition 1.2. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable si pour toute matrice $M = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ et pour tous indices i, j

$$f\left(C_1|C_2|\dots|C_i|\dots|C_j|\dots|C_n \right) = -f\left(C_1|C_2|\dots|C_j|\dots|C_i|\dots|C_n \right)$$

la fonction f est antisymétrique quand elle change de signe à chaque échange de colonne.

Exemple : le produit mixte est antisymétrique.

Exemple : si f est antisymétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$:

$$f\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Proposition : Si f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable, alors f s'annule quand sa variable a deux colonnes égales.

$$A = f\left(C_1 \dots |C_{i-1}| C_i | C_{i+1} \dots C_{j-1} | C_i | C_{j+1} | \dots | C_n \right)$$

$$\Rightarrow \quad A = -A \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

1.3 Théorème d'existence et d'unicité

matrice carrée — nombre

Théorème 1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. *f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de la matrice,*
2. *f est antisymétrique par rapport aux colonnes de la matrice,*
3. *$f(I_n) = 1$.*

Cette application s'appelle déterminant et on la note $\det(M)$ pour une matrice carrée M.

notations 1.3. Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$, on note $\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Démonstration : pour $n = 3$

Analyse : on suppose qu'il existe une application f qui vérifie les conditions.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & j & \ell \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$f(M) = f\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & j & \ell \end{pmatrix}\right) = a\, f\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & g \\ 0 & j & \ell \end{pmatrix} + d\, f\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 1 & e & g \\ 0 & j & \ell \end{pmatrix} + h\, f\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & g \\ 1 & j & \ell \end{pmatrix}$$

par linéarité par rapport à la 1ère colonne

$$= \cancel{ab\, f\begin{pmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & \ell \end{pmatrix}} + ac\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & \ell \end{pmatrix} + aj\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 1 & \ell \end{pmatrix} + db\, f\begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ 1 & 0 & g \\ 0 & 0 & \ell \end{pmatrix} + \dots$$

par antisymétrie, 3 termes s'annulent
il en reste 6

$$f(M) = aec \underbrace{\cancel{f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}_{0} + aeg \underbrace{\cancel{f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}_{0} + ae\ell\, \underbrace{f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=1}$$

$$+ ajc \cdot 0 + ajg\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + aj\ell \cdot 0 + db\ell\, f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots$$

par antisymétrie il reste 6 termes

et $f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = f(I_3) = 1 \qquad f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$

$$f\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} = -\left(-f\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right) = f(I_3) = 1$$

Finalement

$$f\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&g\\h&j&\ell\end{pmatrix} = +ae\ell - ajg - db\ell + djc + hbg - hec$$

$$= [(a,d,h),(b,e,j),(c,g,\ell)]$$ produit mixte

ce qui prouve l'unicité de f

Synthèse : si f est cette fonction (avec l'expression ci-dessus)

f est une application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

f est linéaire par rapport à chacune des colonnes

f est antisymétrique par rapport aux colonnes

et $f(I_n) = 1$. alors il existe une application f qui vérifie le théorème

On note

la même verticale

$$\det\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&g\\h&j&\ell\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&g\\h&j&\ell\end{vmatrix} = +ae\ell + bgh + djc - hec - db\ell - gja$$

règle de Sarrus

$$\det\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&5&3\\1&2&0\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}3&-1&1\\2&5&3\\1&2&0\end{vmatrix} = 0 + (-3) + 4 - 5 - 0 - 18 = -22$$

$$= 1\times(-1) + 3\times(-7) + 0$$

1.4 Dimension 2 et 3

$\ominus$ $\oplus$

Proposition 1.2. *Pour* $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, *on a*

$$\det M = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Proposition 1.3. *Pour* $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, *on a*

$$\det(M) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_1 w_2 v_3 - v_1 u_2 w_3 - w_1 v_2 u_3.$$

1.5 Propriétés du déterminant

Proposition 1.4. *Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.*

$$\det\Big(C_1|C_2|\dots|C_{i-1}|C|C_{i+1}|\dots|C_{j-1}|C|C_{j+1}|\dots|C_n\Big)=0$$

Proposition 1.5.
Si une des colonnes d'une matrice est combinaison linéaire des autres alors son déterminant est nul.

Proposition 1.6. *Pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$*

$$\det(\lambda.A)=\lambda^n\det(A)$$

Démonstration prop 1.5

$C_k=\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n}\alpha_i C_i$ avec (α_i) scalaires

$$\det\Big(C_1,\dots,C_{k-1},\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n}\alpha_i C_i, C_{k+1},\dots,C_n\Big)=\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n}\alpha_i\det\Big(C_1,\dots,C_{k-1},C_i,C_{k+1},\dots,C_n\Big)$$

ici C_i apparaît 2 fois donc le déterminant est nul car det antisymétrique.

$$=0$$

Exemple :

$$\det\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}2/3&2/3&1/3\\1/3&2/3&-1/3\\2/3&-1/3&2/3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix}2&2/3&1/3\\1&2/3&-1/3\\2&-1/3&2/3\end{pmatrix}=\underbrace{\frac{1}{3^3}}_{=27}\det\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{27}(8-4-1-4-4-2)=-\frac{7}{27}$$

2 Déterminant et opérations élémentaires

2.1 Opérations élémentaires sur les colonnes

Proposition 2.1. *L'opération élémentaire sur les matrices $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, ne change pas la valeur du déterminant.* transvection

Proposition 2.2. *L'opération élémentaire $C_i \longleftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant.* transposition

Proposition 2.3. *L'opération $C_i \leftarrow \mu C_i$, $\mu \in \mathbb{K}$ multiplie le déterminant par μ.* dilatation.

Proposition 2.4. *Soit M une matrice carrée et E_1 une matrice d'opération élémentaire.*
On a $\det(M.E_1) = \det(M)\det(E_1)$.
Si E est une matrice produit de matrices d'opérations élémentaires, alors $\det(M.E) = \det(M)\det(E)$.

Proposition 2.5. *Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure ou supérieure est le produit de ses coefficients diagonaux.*

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Application : Calcul du déterminant par opérations sur les colonnes.

Démonstration

colonne i

$\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i + \lambda C_j, C_{i+1}, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$ déterminant de la matrice

$= \det(C_1, C_2, \ldots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n) + \lambda \underbrace{\det(\ldots C_j \ldots, C_j, \ldots)}_{0}$

déterminant de la matrice après transvection

Démonstration 2.4 :

La matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda & (0) \\ & & & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$

$= I_n + \lambda E_{ji}$

$\det(E) = \det(I_n) = 1$

$\underset{M}{\begin{pmatrix} C_i & C_j \end{pmatrix}} \times \underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} C_i \end{pmatrix}$

E est la matrice I_n à laquelle on a appliqué $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$

Pour une transposition $C_i \leftrightarrow C_j$, la matrice correspondante est

$$E = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et } \det(E) = -\det(I_n) = -1$$

Pour une dilatation $C_i \leftarrow \mu C_i$ avec $\mu \in \mathbb{K}^*$

$$E = \begin{array}{c} i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \mu & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \det(E) = \mu \det(I_n) = \mu \times 1 = \mu$$

Exemple

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 42 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -6 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$= 1 \times 2 \times (-3)$$

$+$

$-$

2.2 Matrices inversibles et déterminant

Théorème 2.6. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

une matrice carrée A est inversible $\Leftrightarrow$ par opérations élémentaires sur les colonnes, on peut transformer A en l'identité. $\Leftrightarrow$ il existe une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires telle que $AE = I_n$

$\Rightarrow$ $\det(AE) = \det(I_n)$ $\Rightarrow$ $\det(A) \times \det(E) = 1$

$\Rightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

Si A n'est pas inversible, alors on peut obtenir

$$AE = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & 1 & \\ (?) & & & (0) \end{pmatrix} = J_r \quad (r = \text{rang}(A))$$

Matrice échelonnée réduite par colonnes

On a $\det(J_r) = 0$ car J_r est triangulaire inférieure

et $\det(A) \cdot \det(E) = 0$ $\Rightarrow$ $\det(A) = 0$

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

on calcule $\det(A) =$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-4) \times 1 = -4$$

$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$
$C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ ne changent pas le déterminant

$\det(A) = -4 \neq 0$ donc A est inversible

2.3 Développement selon une ligne ou une colonne

Proposition 2.7. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.*
On note Δ_{ij} le déterminant extrait de A en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.
On peut calculer $\det A$ en développant par rapport à n'importe quelle ligne p :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{pj}}_{\text{coefficient}} \underbrace{(-1)^{p+j}}_{\text{signe}} \underbrace{\Delta_{pj}}_{\text{"mineur" = déterminant de taille } n-1} \text{ pour tout } p \in [\![1,n]\!],$$

ou en développant par rapport à n'importe quelle colonne q :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{iq}(-1)^{i+q}\Delta_{iq} \text{ pour tout } q \in [\![1,n]\!].$$

Lemme 2.8. *Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, on a*

$$\det\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det B$$

Exemple

Δ_{21} c'est un mineur

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-(-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{i+j} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

développement selon la 2e ligne.

Exemple :

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

on peut le développer par rapport à la 3e colonne

$$= +0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 0$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = +0 - 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1(11) + 5(3) = 4$$

idée de démonstration :

$$\det(A) = \det(\underbrace{C_1, C_2, \dots, C_q}_{q \text{ transpositions}}, \dots, C_n)$$

$$= (-1)^q \det(C_q, C_1, C_2, \dots, C_{q-1}, C_{q+1}, \dots, C_n)$$

$$C_q = \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ a_{3q} \\ \vdots \\ a_{iq} \\ \vdots \\ a_{nq} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^q a_{iq} \det \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \vdots & C_1 & C_2 \dots C_{q-1} & C_{q+1} \dots & C_n \\ 1 & a_{i1} & a_{i2} \dots & & a_{in} \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \text{ème ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+q} a_{iq} \det \begin{pmatrix} 1 & a_{i1} & a_{i2} \dots a_{i,q-1} & \dots & a_{in} \\ 0 & & & & \\ \vdots & C'_1 & C'_2 & \dots & C' \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+q} a_{iq} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & C'_1 & C'_2 \dots & C'_n \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

coefficients de Δ_{iq} (matrice A sans la ligne i et sans la colonne q)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+q} a_{iq} \det(C'_1, \dots, C'_n)$$

exemple

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ en développant par rapport à la 2ème colonne

$=$

3 Déterminant d'un produit de matrices

3.1 Déterminant d'un produit

Théorème 3.1. *Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a* $\det(AB) = \det A . \det B$.

Exemple :

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -6 & 15 \\ -14 & 20 \end{pmatrix} = -120 + 210 = 90$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = 5 \times 18 = 90$$

Exemple : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$

groupe linéaire = matrices inversibles de taille n

$$\det(\underbrace{P^{-1} A P}_{\text{chgt de base}}) = \det(A) \longleftarrow \text{à prouver !}$$

$$\det(P^{-1} A P) = \det(P^{-1}) . \det(AP)$$
$$= \det(AP) . \det(P^{-1})$$ car ce sont des nombres
$$= \det(A P P^{-1})$$
$$= \det(A I_n) = \det(A)$$

3.2 Déterminant de l'inverse

Théorème 3.2. *Une matrice A est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$ *et dans ce cas, on a* $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

$$-3\det\begin{pmatrix}1&-1&4\\2&1&0\\0&2&5\end{pmatrix} \neq \det\left(-3\begin{pmatrix}1&-1&4\\2&1&0\\0&2&5\end{pmatrix}\right)$$

$$-27\times\det\begin{pmatrix} & \\ \end{pmatrix}$$

exemple

$$\det A = \det\begin{pmatrix}1&0&-1&4\\2&0&1&0\\0&3&2&5\\2&-3&1&0\end{pmatrix}$$ en développant sur rapport à la 2ème colonne

$$= -0\left|\ ?\ \right| + 0\left|\ ?\ \right| - 3\begin{vmatrix}1&-1&4\\2&1&0\\2&1&0\end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix}1&-1&4\\2&1&0\\0&2&5\end{vmatrix}$$

$$= (-3)\left(0\right) + (-3)\left(+4\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix} - 0 + 5\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\right)$$

car il y a 2 fois la même ligne

$$= -12\times 4 - 15\times 3 = -48-45 = -93$$

3.3 Déterminant de la transposée

Théorème 3.3. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a* $\det A^T = \det A$.

3.4 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B}$ une base E. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de E.
On appelle déterminant de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ le scalaire :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det A \qquad \text{où } A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Proposition 3.4. *On a* $\det_B(B) = 1$.

3.5 Caractérisation des bases

Théorème 3.5. *Soit* $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ *une famille de* n *vecteurs d'un espace vectoriel* E *de dimension* n *muni d'une base* $\mathscr{B}$.

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ *est une base de* E *si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0$.

4 Déterminant d'un endomorphisme

4.1 Définition

Définition 4.1.
On appelle déterminant d'un endomorphisme f de E le déterminant de la matrice de f dans une base B de E :
$$\det f = \det(M_B(f)).$$
La valeur du déterminant ne dépend pas de la base choisie.

4.2 Propriétés

Proposition 4.1. *Pour tout* $f, g \in \mathscr{L}(E)$ *avec* $\dim E = n$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\det(f \circ g) = \det f . \det g \qquad \det(\alpha f) = \alpha^n \det f$$

Corollaire 4.2. *Soit* $f \in \mathscr{L}(E)$ *avec* E *de dimension finie.*

f *est bijective si et seulement si* $\det f \neq 0$. *Alors* $\det f^{-1} = \dfrac{1}{\det f}$.

Théorème 4.3. *Soit* $f \in \mathscr{L}(E)$ *avec* E *de dimension* n *finie. Soit* B *une base de* E *et* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *une famille de vecteurs de* E. *On a*

$$\det_B(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) = \det f \times \det_B(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$