Chapitre 19 - TD - 25 mai 2020

TD 19 - Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A.

- 1. Déterminer l'image et le noyau de f avec le minimum de calcul.
- 2. Déterminer une base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) 6 m a Im f = Veet ((3, -2, 1), (3, -2, 1), (-3, 2, -1))

car l'image d'une bose est une famille génératrice de Im f. Im] = Vect ((3, -2, 1)) et (3, -2, 1) es man mil danc il est une famille libre alas il sorme une base de Im(f) et dim Im f=1. D'après le théorème du rang, dim 123 = dim Im f + dim Ker [=> dim Ker [= 2 fluigiz dans la lose canarque On remarque que f(1,0,1) = 5 et f(0,1,1) = 5 ces deux vecteurs me sont pas colinéaires chaffantiement à Kee f alors de sont une lare de Kee f. Ker (= Vect ((1,0,1), (0,1,1)) 2) On lit dans A': \(\int_{\(\lambda \)} = \(\cdot \under \varphi \cdot \varphi \cdot \under \und

cer f(v)=u rignific verture i mage et vertur autécertent de u ch on n'outstie pas que (u, r, w) doit être une base. car g(r)=(3,-2,1)=u et w=(0,1)=(0Pamatrice des 3 vecteurs est P = (3 00) - elle a 3 probs et eset de rang 3 donc Post inversible coquiprouve que (u, v, w) est u la re et May 1, 1 / 1 = 1 = 1010 | et A = PIAP Soul (alb,c) E123 antécédal (mage (a,b,c) E Im (> 3 (x,y) = (a,b,c) $= 3(x|y|3) \in |R^2| = 3x + 3y - 3z = 0$)-ln-ly+2z=b $2(n_{19},3) \in 10^{3}$ $2(n_{19},3) \in 10^{3}$ $\begin{cases} b = -2c \\ a = 3c \end{cases}$ eg de l'image de s



TD 19 - Exercice 6

Soit $f_1: x \mapsto e^{2x}$, $f_2: x \mapsto xe^{2x}$ et $f_3: x \mapsto x^2e^{2x}$ trois fonctions de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

- 1. On pose $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et donner la dimension de E.
- 2. On considère $\varphi: E \longrightarrow E$, définie par $f \mapsto \varphi(f) = f'$. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
- 3. Déterminer la matrice de φ dans la base (f_1, f_2, f_3) . Montrer que φ est un automorphisme, donner la matrice de sa réciproque et déterminer une primitive de $x \mapsto (7-8x+3x^2)e^{2x}$.

On chit & fix Ble + Y f3 = 5 * FREIR, Afile) + Ble (n) + Y fall) = 5 < > \fresh, (\alpha + \beta x^2) \end{a} = > \delta \coll \coll \coll \delta x \coll \beta x^2 = 0 car e^{2x} est mon mul => le olyname x+BX+8x² est mul => L=B=V=0 Cequi prouve que (fi, /2, /3) est libre et (f1, f2, f3) est une famille générative de E alars (f. f. f. f.) est une lare de E On endéduét d'in E = 3 2) Per lineaire car la derivation est Cinéaire: Costadire jour tous g, h e E el x e 1 R 4 (x g+h) = (xg+h) 1 = /g/+l/ = & \(\text{(a)} \(\text{(h)} \) Soit $J \in E$. $J \in Curt$ J = X J = P J = X J = A J =doi P(S)= & P(S1) + BP(P2) + & P(P3) la l'inéaute danc ((()) E Ved (P1, 2, 1/3) = E Ou en déduit que l'est un endamoiphisme de É

A= \(\langle \langle \langle \langle \rangle \langle \	3. La matrie de l'dans (fi, fe, f3 lest
La matria A est citalomie et a 3 pivots donc elle de rung 3 alors elle est inversible et juittréverne, 1 pest un automorphisme de E 2 m (7-8 n e 3 x²) e 2 n ajour matrie (2) dans (1-f2, f3) une frimitive de cette faction est son timage jai p-1 on certaile la matrice de p-1: A-1 = (2-14 1) on a l'in A A-1 = I3 O 1/2-1/2)	$A: T_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{car } P(\beta_1) = 2\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_2$
2 - $(7-8n + 3x^2)e^{2n}$ efour metrie $\binom{7}{4}$ day $\binom{7}{4}$ $\binom{1}{5}$ une primitive de cette fanction est son image far 9^{-1} on certaile le matrice de 9^{-1} : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 14 & 14 \\ 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ on a l'an $AA^{-1} = I_3$	La matria A est chelonie et a 3 pivots donc elle de rong 3 alors elle est inversible et juittièreme,
$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ on a Cieu $AA^{-1} = I_2$	2 - (7-8 n & 3 x²) e² n ce peu matrice (7) daus (1, f², f²) une primitive de cette fanction est son image par 9-1 on coolaile la matrice de p-1.
	$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{on a lieu } AA^{-1} = I_2$
$de^{-3n+3n^2}e^{-2n+3n^2}$	
	$de \times -7 + 3 \times 2 = 2$

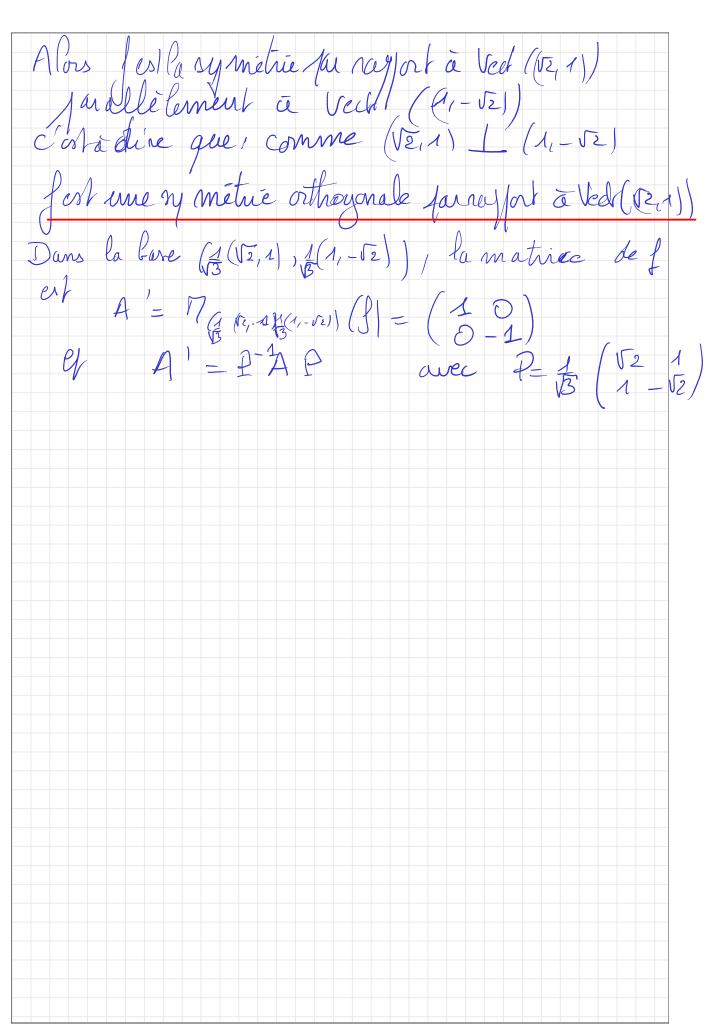
TD 19 - Exercice 11.1

Reconnaître l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 défini par l'expression analytique suivante :

1.
$$\begin{cases} 3x' = x + 2\sqrt{2}y \\ 3y' = 2\sqrt{2}x - y \end{cases}$$

$$(x,y)$$
 $\xrightarrow{\xi}$ (x',y')

[(nig)=1(2+202y, 252n-y) 1001(nig) ER2 fertlinéaire car les coordonnées de l'émage de biry) sont des combinaisons linéaires de n'ety. onécut sa matrice dans la lure canonique Bo=((1,0)(0,1)) A=1(25) matrice du votation du me Bon D (coso -sino) 3(252-1) friest pas une votation. Oncalare 801. A2 1 [1+8 202-252] 2(10) = I2 alors fof = id₁₁₂2 et fertlinéaire donc festure ry mêtre On cherche les vecteurs invariants f(n y/g) = (n,y) = (n,y) Eker(g-id) (xiy) Exa(2f-3id) => [x + 2vzy - 3 x = 0 On cherche lis vedeurs chagés en leur oforé: = y=-J2x => (n/= x(1) Ker(P+id/122)=Veck(4,-V2))

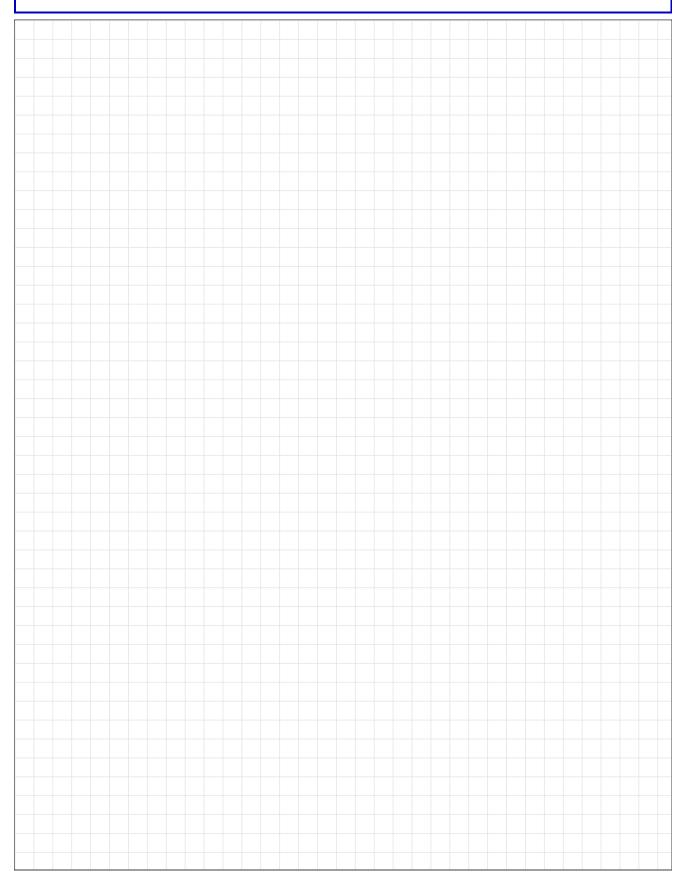


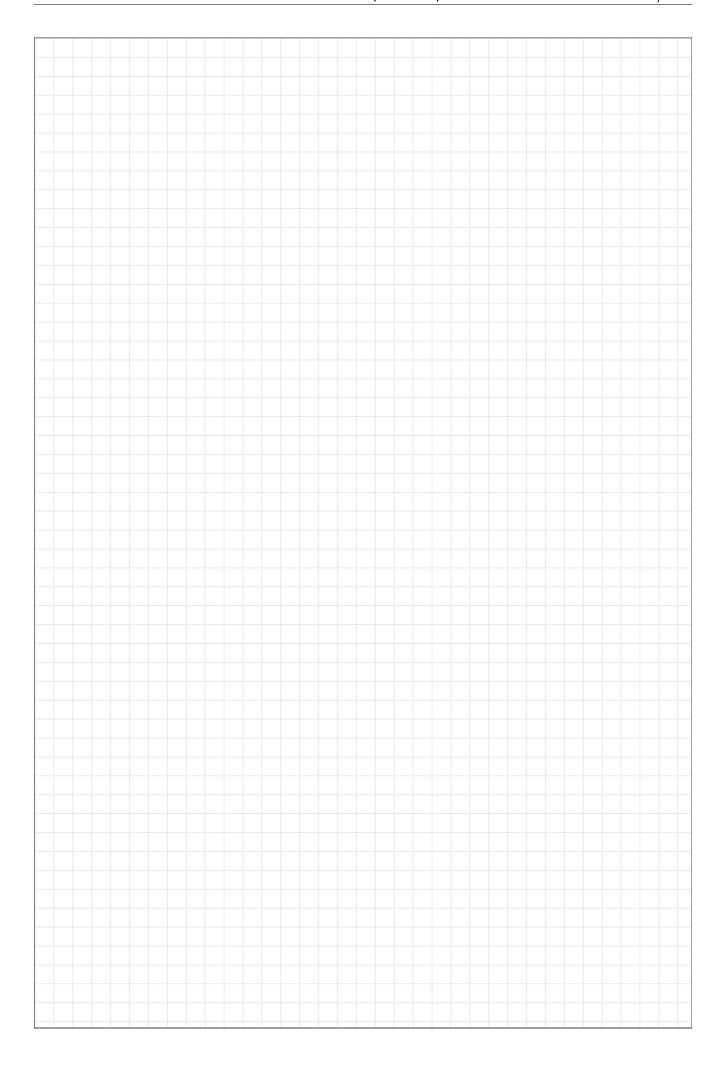


TD 19 - Exercice 13.1

Montrer que la transformations suivante est une rotation dont on donnera l'axe et l'angle :

1.
$$\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$$

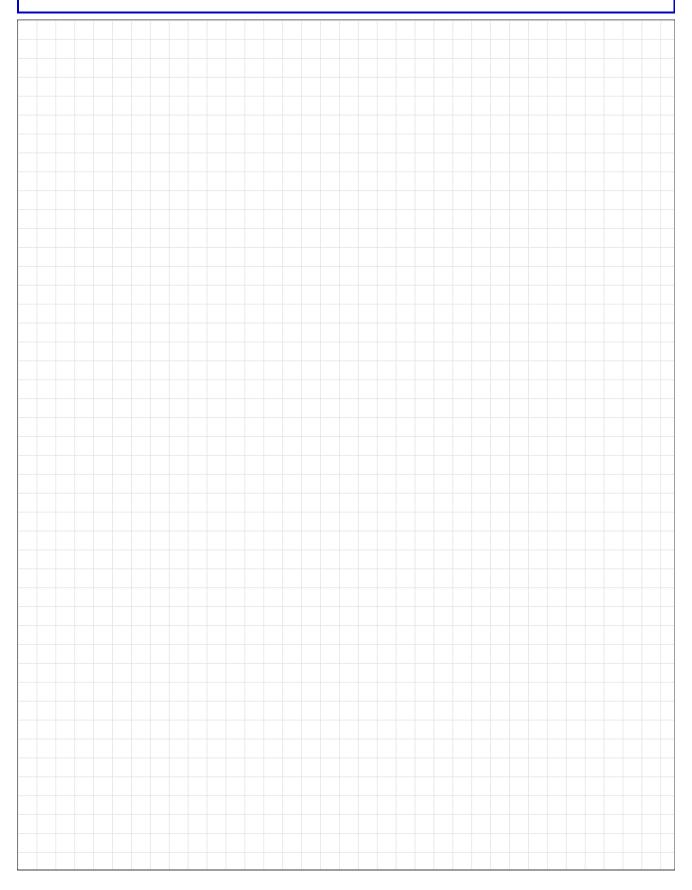


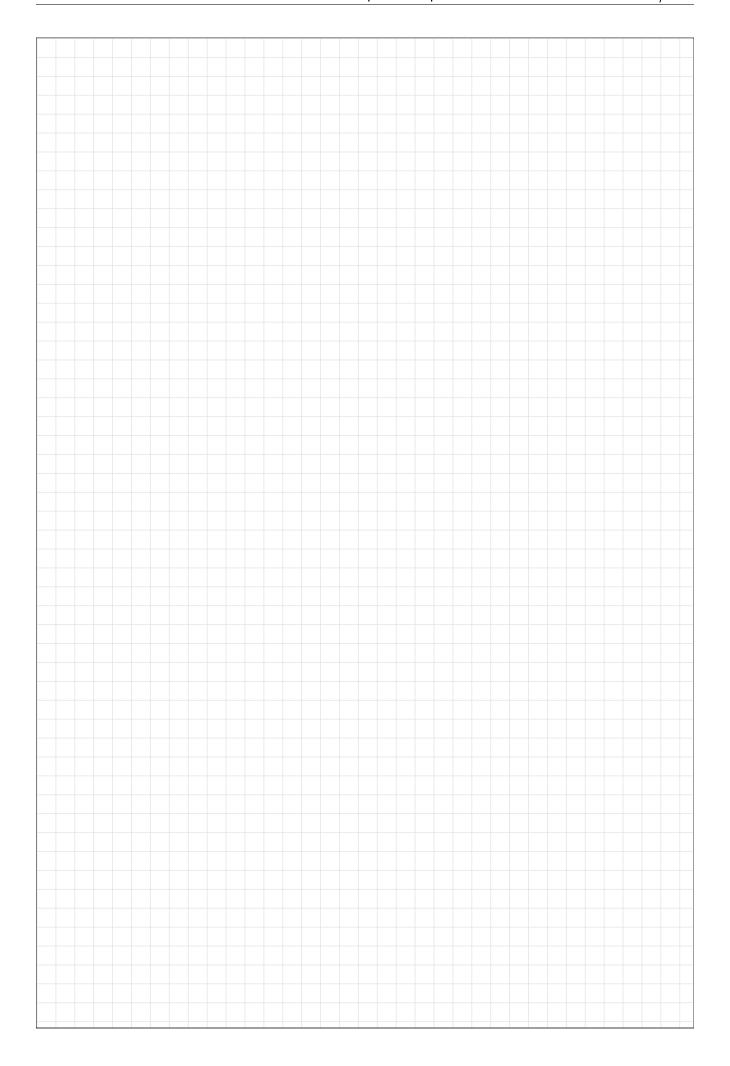


TD 19 - Exercice 13.4

 $Montrer \, que \, la \, transformation \, suivante \, est \, une \, r\'eflexion \, dont \, on \, donnera \, le \, plan \, de \, r\'eflexion \, :$

4.
$$\begin{cases} 3x' = x + 2y + 2z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = 2x - 2y + z \end{cases}$$





TD 19 - Exercice 14

Déterminer la matrice M de la rotation d'axe Vect(1,1,1) et d'angle π dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

