Chapitre 17 - Espaces Vectoriels de Dimension Finie

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Bases en dimension finie

1.1 Dimension finie

Définition 1.1. On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

1.2 Existence de bases en dimension finie

Théorème 1.1 (Théorème de la base incomplète). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.
Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Corollaire 1.2. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.*

Corollaire 1.3 (Théorème de la base extraite). *De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E, on peut extraire une base de E.*

1.3 Cardinal des familles libres

Lemme 1.4. *Si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une famille libre et la famille $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ est liée, alors x_{n+1} est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ i.e. $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Démonstration.

Il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0}$ car la famille $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ est liée.

Si $\alpha_{n+1} = 0$, alors on a la relation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0}$. Comme la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre, on obtient $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = 0$. C'est une contradiction avec l'hypothèse que les scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ sont non tous nuls.

Donc, $\alpha_{n+1} \neq 0$, alors on peut écrire $x_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} x_i$. □

Proposition 1.5. *Si E est un espace vectoriel admettant une famille génératrice à n vecteurs avec n entier non nul, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.*

Corollaire 1.6. *Dans un espace de dimension finie, toute famille libre a moins d'éléments qu'une famille génératrice.*

1.4 Dimension

Théorème 1.7. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments $n \in \mathbb{N}^*$.*

Définition 1.2. Ce nombre n s'appelle la dimension de E sur $\mathbb{K}$ noté $n = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim E$.
Par convention, $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Exemple 1.1. On a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n+1$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

1.5 Familles en dimension finie

Théorème 1.8. *Si E est un espace vectoriel de dimension FINIE n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.*

2 Relations entre les dimensions

2.1 Rappel : Image d'une base par une application linéaire

Théorème 2.1. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E.*

- *La famille $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.*
- *u est surjective $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est génératrice de F.*
- *u est injective $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est libre dans F.*
- *u est bijective $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une base de F.*

Corollaire 2.2. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

u est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

2.2 Dimension et isomorphisme

Proposition 2.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un espace vectoriel F est isomorphe à E si et seulement si F est de dimension finie et $\dim F = \dim E$.*

Corollaire 2.4. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

2.3 Dimension des sous-espaces vectoriels

Théorème 2.5. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.*

De plus, F est égal à E si et seulement si $\dim F = \dim E$.

2.4 Dimension de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 2.6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ E = F + G \end{cases}$$

Théorème 2.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.*

Si $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base de F et $(g_{p+1}, \dots, g_n)$ est une base de G, alors

$$E = F \oplus G \iff (f_1, f_2, \dots, f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n) \text{ est une base de } E.$$

On dit que cette base est adaptée à la décomposition en sous-espaces supplémentaires.

Théorème 2.8.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

2.5 Dimension d'une somme

Proposition 2.9 (Formule de Grassmann).

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Alors $\quad \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

3 Rang

3.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.1. On appelle rang d'une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un espace vectoriel E, la dimension du sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs et on le note $rg(x_1, x_2, \dots, x_p)$:

$$\operatorname{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \dim(\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)) .$$

Lemme 3.1. *Pour une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie $n = \dim E$, on a*

$$\operatorname{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) \leqslant p \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) \leqslant n$$

Théorème 3.2. *Une famille est libre si et seulement si elle de rang maximal, c'est à dire si son rang est égal à son nombre de vecteurs.*

Lemme 3.3. *Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour tous indices i, j :*

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = rg(x_1, x_2, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_p)$$

3.2 Rang d'une application linéaire

Définition 3.2. Soient E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de l'application linéaire u, la dimension de l'image de u dans F.

On note $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ lorsque cette dimension est finie et on dit que u est de rang fini.

Remarque 3.1. Si $(e_i)_{i=1,..,n}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$. Il s'ensuit que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$.

Lemme 3.4. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $n = \dim E$ et $p = \dim F$, et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $\mathrm{rg}(u) \leqslant n$ et $\mathrm{rg}(u) \leqslant p$.*

Théorème 3.5. *Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux applications linéaires de rang fini,*
alors $v \circ u$ est de rang fini et $\quad \mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

Démonstration. On a toujours $\underline{\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v}$: pour toute image $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(u(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}\, v$ ce qui prouve l'inclusion.
On en déduit $\dim(\mathrm{Im}(v \circ u)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, v)$ soit $\underline{\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)}$.
Par ailleurs, soit $(f_1, f_2, ..., f_p)$ une base de $\mathrm{Im}\, u$ avec $p = \mathrm{rg}(u)$. Soit $z \in \mathrm{Im}(v \circ u)$ alors il existe $x \in E$ tel que $z = v(u(x))$.
On a $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$ donc $u(x)$ s'écrit $u(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k$ avec $(\lambda_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ des scalaires. On peut donc écrire $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v(f_k)$.
On en déduit que $(v(f_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(v \circ u)$. Il s'ensuit que $\dim(\mathrm{Im}(v \circ u)) \leqslant p$ ce qui donne $\underline{\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)}$. $\square$

3.3 Théorème du rang

Proposition 3.6. *Soit E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E dans F.*
Si E_0 est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E, alors l'application u induit un isomorphisme de E_0 sur $\mathrm{Im}\, u$.
$v : \begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ *est un isomorphisme.*

Théorème 3.7 (Théorème du rang)**.** *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, alors u est de rang fini et*

$$\dim E = \mathrm{rg}\, u + \dim(\mathrm{Ker}\, u) = \dim(\mathrm{Im}\, u) + \dim(\mathrm{Ker}\, u)$$

3.4 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 3.8. *Si E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de* même dimension finie $n = \dim E = \dim F$ *et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors*

$$u \text{ est injective} \iff \mathrm{Ker}\, u = \{\overrightarrow{0}\} \iff u \text{ est surjective} \iff \dim \mathrm{Ker}\, u = 0 \iff u \text{ est bijective} \iff \mathrm{rg}(u) = n.$$

Corollaire 3.9. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, alors*

$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective.}$$

Lemme 3.10. *Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$, alors f est injective.*

Démonstration. Soit g telle que $g \circ f = id_E$. Soit $a, b \in E$. Si $f(a) = f(b)$ alors $g(f(a)) = g(f(b))$ donc $id(a) = id(b)$ soit $a = b$. Deux éléments de l'ensemble de départ ne peuvent avoir la même image donc f est injective. $\square$

Lemme 3.11. *Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Si il existe $h : F \to E$ telle que $f \circ h = id_F$, alors f est surjective.*

Démonstration. Soit h telle que $f \circ h = id_F$. Soit $a \in F$. On a $f(h(a)) = a$ donc a a un antécédent. Tout élément de F a un antécédent donc f est surjective.

$\square$

Théorème 3.12. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de* même dimension finie *et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
Si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = id_E$ alors f est bijective et $f \circ g = id_F$.
Si il existe $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = id_F$ alors f est bijective et $h \circ f = id_E$.

Théorème 3.13. *Si u est une application linéaire de rang fini et si φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors, dans les cas où cela a un sens,*

$$\operatorname{rg}(u \circ \varphi) = \operatorname{rg} u \text{ ou } \operatorname{rg}(\varphi \circ u) = \operatorname{rg}(u).$$

On ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant par un isomorphisme.

Démonstration. Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

— Soit φ un isomorphisme de F dans G et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.
Soit B une base de $\operatorname{Im} u$ (qui est de dimension finie). Alors $\varphi(B)$ est une base de $\varphi(\operatorname{Im} u)$ car φ induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ dans $\varphi(\operatorname{Im}(u))$. De plus, on a l'égalité triviale : $\varphi(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im}(\varphi \circ u)$. Alors, $\dim(\operatorname{Im}(\varphi \circ u)) = \dim(\operatorname{Im} u)$ soit $\boxed{\operatorname{rg}(\varphi \circ u) = \operatorname{rg}(u)}$.

— Soit φ un isomorphisme de E dans F et $u \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini.
On a toujours $\underline{\operatorname{Im}(u \circ \varphi) \subset \operatorname{Im} u}$ car toute image par $u \circ \varphi$ est une image par u.
Réciproquement, soit $z \in \operatorname{Im} u$, alors il existe $y \in F$ tel que $z = u(y)$. Comme φ est une bijection de E dans F, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Alors, $z = u \circ \varphi(x)$ et $z \in \operatorname{Im}(u \circ \varphi)$ ce qui prouve $\underline{\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im}(u \circ \varphi)}$.
On a montré $\operatorname{Im}(u \circ \varphi) = \operatorname{Im}(u)$ donc $\dim(\operatorname{Im}(u \circ \varphi)) = \dim(\operatorname{Im} u)$ soit $\boxed{\operatorname{rg}(u \circ \varphi) = \operatorname{rg}(u)}$.

□

3.5 Équations linéaires

Définition 3.3. Une équation linéaire est une équation du type $u(x) = b$ où

- u est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F,
- x est un vecteur inconnu dans E,
- b est un vecteur de F appelé second membre de l'équation.

Théorème 3.14 (Structure de l'ensemble des solutions).
Soit $u : E \longmapsto F$ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, soit $b \in F$.
On note S_0 l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = \overrightarrow{0_F}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$.

- *S_0 est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, il est donc non vide : il contient $\overrightarrow{0_E}$.*
- *Soit $\mathcal{S}$ est vide, soit $\mathcal{S} = x_0 + S_0 = \{x_0 + h | h \in S_0\}$ où x_0 est une solution de l'équation avec second membre.*

Remarque 3.2. Si E est de dimension finie n (n inconnues) et si u est de rang fini r (r pivots), alors l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$ est de dimension $n - r$ = nombre d'inconnues - nombre de pivots.