Chapitre 19 - Matrices et applications linéaires

dim finie

1 Matrices d'une application linéaire

vecteur
base — matrice

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $x \in E$, on appelle matrice de x dans la base $\mathscr{B}$, la matrice colonne notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x)$ dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$:

Si $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$, alors $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{array}{c} x \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$. n lignes avec $n = \dim E$.

La matrice dans la base $\mathscr{B}$ d'une famille de vecteurs $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ de E notée $\mathrm{M}_B(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est la matrice dont la j-ième colonne pour $j \in [\![1, p]\!]$ est constituée des n coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$.

Si pour $j \in [\![1, p]\!]$, $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ alors

p vecteurs

$$\mathrm{M}_B(x_1, x_2, \dots, x_p) = \left(a_{i,j}\right)_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,p]\!]} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & & x_j & & x_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

n lignes

a_{ij} = coordonnées selon e_i de x_j

Remarque 1.1. La matrice de la famille $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice identité I_n.

Exemple 1.1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base. Soit $\vec{u} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ et $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Donner les matrices $\mathrm{M}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1, e_2)$.

La première matrice se trouve directement en écrivant, en colonne, les coordonnées dans la base (e_1, e_2) de chaque vecteur u, v : $\mathrm{M}_{(e_1,e_2)}(u, v) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u,v)$

Remarque : On pourra noter au brouillon les vecteurs en colonne haut dessus de la matrice et sur le côté les vecteurs de la base $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$

Mais, CELA NE DOIT PAS APPARAÎTRE SUR VOTRE COPIE DE DEVOIR.
Pour la matrice $\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1, e_2)$, il faut d'abord calculer les coordonnées de (e_1, e_2) : on cherche $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\begin{cases} e_1 &= \alpha_1 u + \beta_1 v \\ e_2 &= \alpha_2 u + \beta_2 v \end{cases}$
On résout le système suivant par opérations sur les lignes :

$$\begin{cases} u &= 4e_1 - 3e_2 \\ v &= 2e_1 - e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - 3v &= -2e_1 \\ u - 2v &= -e_2 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} e_1 &= \frac{1}{2}(-u + 3v) \\ e_2 &= -u + 2v \end{cases}}$$

Ce qui nous donne la matrice $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \end{array}$ soit $\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1, e_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exemple 1.2. Dans $\mathbb{R}^3$, écrivons la matrice de $\boldsymbol{u} = (1,2,-1)$, $\boldsymbol{v} = (1,3,0)$, $\boldsymbol{w} = (-2,0,1)$, et $\boldsymbol{t} = (0,0,-1)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

4 vecteurs

On trouve $\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} & \boldsymbol{t} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array} \end{array}$ dim 3 soit $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_0}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exemple : Dans $\mathbb{R}_2[X]$, matrice de $P = -5X^2 + 7X + 1$ dans la base canonique $B_0 = (X^2, X, 1)$ puis dans la base $(1, (X-2), (X-2)^2) = B_1$.

$P' = -10X + 7$

$P'' = -10$

on a $P = P(2) \times 1 + P'(2)(X-2) + \underline{P''(2)}(X-2)^2$

$= -5 - 13(X-2) - 5(X-2)^2$

$M_{B_0}(P) = \begin{array}{cc} P & \\ \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X^2 \\ X \\ 1 \end{array} \end{array}$ $\qquad M_{B_1}(P) = \begin{array}{cc} P & \\ \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{array} \end{array}$

Remarque :

$M_{B_1}(B_1) = M_{B_1}(1, X-2, (X-2)^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{B_0}(B_0)$

Généralement $M_B(B) = I_n$ pour B une base.

TD ©

$E, \mathscr{B}_1 \xrightarrow{u} F, \mathscr{B}_2$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}_2 = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.

$p = \dim E$ $q = \dim F$

On appelle matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u)$, de la famille de vecteurs $(u(\mathscr{B}_1))$ dans la base $\mathscr{B}_2$:

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\mathscr{B}_1))} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$$

On a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Si on note $\mathscr{B}_2 = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \dots, \boldsymbol{f_q})$ et $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $u(\boldsymbol{e_j}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} a_{ij}\boldsymbol{f_i}$ où $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ sont les coordonnés du vecteur $u(\boldsymbol{e_j})$ dans la base $\mathscr{B}_2$,

$u(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + a_{31} f_3 + \cdots + a_{q1} f_q$

$$\text{alors } \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(\boldsymbol{e_1}) & u(\boldsymbol{e_j}) & u(\boldsymbol{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{qp} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{f_1} \\ \\ \boldsymbol{f_i} \\ \\ \boldsymbol{f_q} \end{array}$$

moyen mnémotechnique

Remarque 1.2. Le nombre de lignes de la matrice est égal à la dimension de l'espace d'arrivée. Le nombre de colonnes est égal à la dimension de l'espace de départ.

$\mathscr{B}_3 = ((1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1))$

Exemple 1.3. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, 3x - 2y + 4z) \end{array}$.

Donnons la matrice de g dans les bases canoniques $\mathscr{B}_3$ et $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

On calcule les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}_3$ par g :

$g(1,0,0) = (1,3)$, $g(0,1,0) = (2,-2)$ $g(0,0,1) = (-1,4)$

Les images donnent directement les coordonnées dans la base canonique $\mathscr{B}_2$: $(1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$...

Alors, on a la matrice :

$= g(1,0,0)$ $= g(0,1,0)$ $= g(0,0,1)$

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(\boldsymbol{e_1}) & g(\boldsymbol{e_2}) & g(\boldsymbol{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \boldsymbol{f_1} = (1,0) \\ \boldsymbol{f_2} = (0,1) \end{array}$$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2, B_1 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2, B_2$

$\mathbb{R}^2, (e_1, e_2) \xrightarrow{A_1} \mathbb{R}^2, (u, v)$

$\mathbb{R}^2, (u, v) \xrightarrow{A_2} \mathbb{R}^2, (e_1, e_2)$

> **Exercice 1.1.** Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ une base. On pose $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$.
> Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{u}$ et $f(\boldsymbol{e_2}) = 3\boldsymbol{v}$.
> Calculer $\underbrace{\mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(f)}_{A_1}$ et $\underbrace{\mathrm{M}_{(u,v)(e_1,e_2)}(f)}_{A_2}$.

On remarque que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

On a directement les coordonnées des images de $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ dans la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, alors,

$$A_1 = \mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\boldsymbol{e_1}) & f(\boldsymbol{e_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{array}$$

$f(e_1) = u = 1 \times u + 0 \times v$

$f(e_2) = 0 \times u + 3 \times v$

Pour l'autre matrice, il faut calculer $f(\boldsymbol{u})$ et $f(\boldsymbol{v})$.

car f est linéaire

On a $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ qui donne $f(\boldsymbol{u}) = 2f(\boldsymbol{e_1}) + f(\boldsymbol{e_2})$ soit $f(\boldsymbol{u}) = 2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$ et finalement,

$f(\boldsymbol{u}) = 2(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + 3(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = 7\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ $= u - 3v = f(v)$

De même, on calcule $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2) = (2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) - 3(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$

Alors,

$$A_2 = \mathrm{M}_{(u,v)(e_1,e_2)}(f) = \begin{array}{cc} f(\boldsymbol{u}) & f(\boldsymbol{v}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{array}$$

A1 et A2 sont 2 matrices de f dans des bases différentes

On peut également calculer les deux matrices

$$A_3 = \mathrm{M}_{(u,v)(u,v)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(u) & f(v) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{(e_1,e_2)(e_1,e_2)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} = A_4$$

où on utilise la même base au départ et à l'arrivée. Cela est possible car f est un endomorphisme.

1.3 Matrice d'un endomorphisme

Définition 1.3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
On appelle matrice de l'endomorphisme v dans la base $\mathscr{B}$, la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v)$, de l'application linéaire v dans le couple de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v(e_1), v(e_2), \dots, v(e_p))$$

Remarque 1.3. On utilise la même base au départ et à l'arrivée.
La matrice de l'identité id_E est la matrice identité I_p.

Exercice 1.2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & 2P - 2(X+1)P' + X^2P'' \end{array}.$$

On commence par calculer l'image des vecteurs de la base par φ :
$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(X) = 2X - 2(X+1) = -2, \quad \varphi(X^2) = 2X^2 - 2(X+1)2X + 2X^2 = -4X,$
$\varphi(X^3) = 2X^3 - 2(X+1)3X^2 + 6X^3 \cancel{= 2X^3} - 6X^2$
Alors, on peut écrire la matrice de φ dans la base canonique :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array} \quad \text{soit} \quad \mathrm{M}_{(1,X,X^2,X^3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ peut aussi s'écrire dans l'ordre décroissant des puissances : $(X^3, X^2, X, 1)$. C'est une autre base.

La matrice de φ dans cette base s'écrit : $\mathrm{M}_{(X^3,X^2,X,1)}(\varphi) = $

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(X^3) & \varphi(X^2) & \varphi(X) & \varphi(1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} X^3 \\ X^2 \\ X \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$id_E : E \longrightarrow E$ et $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E

$$M_B(id_E) = M_{B,B}(id_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} id(e_1) & id(e_2) & \dots & id(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & (0) \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{array} = I_p$$

pour un endomorphisme base de départ = base d'arrivée

matrice de départ, arrivée

appli linéaire

les matrices d'un endomorphisme sont carrées

exemple exo 6 du TD 17

$E = \text{Vect}(g_0, g_1, g_2)$ avec $g_i(x) = x^i e^{4x}$ pour $x \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$

et $D : E \longrightarrow E$, $f \longmapsto f'$ on avait calculé

$(a, b, c)_{(g_0, g_1, g_2)} \longmapsto (4a, 2a+4b, b+4c)_{(g_0, g_1, g_2)}$

$$D\left(x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^{4x}\right) = \left(x \longmapsto \left(4ax^2 + (2a+4b)x + (b+4c)\right)e^{4x}\right)$$

Quelle est la matrice de D dans la base (g_0, g_1, g_2) ?

$$D(g_0) = D(x \mapsto e^{4x}) = (x \mapsto 4e^{4x}) = 4g_0$$

$(\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{D(g_0)}_{\text{fonction}}(x) = 4e^{4x} = 4g_0(x))$

$(xe^{4x})'$

on calcule également

$$D(g_1) = (x \longmapsto (4x+1)e^{4x}) = 4g_1 + g_0$$

$$D(g_2) = (x \mapsto (2x + 4x^2)e^{4x}) = 4g_2 + 2g_1$$

d'où

$$\boxed{M_{(g_0, g_1, g_2)}(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} D(g_0) & D(g_1) & D(g_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{array}}$$

$g_2(x) = x^2 e^{4x}$

D envoie le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ sur le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 4c + b \\ 4b + 2a \\ 4a \end{pmatrix}$

$\times M_{(g_0, g_1, g_2)}(D)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c + b \\ 4b + 2a \\ 4a \end{pmatrix}$$

1.4 Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 1.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie de base $\mathscr{B}$. soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a*

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\alpha x + y) = \alpha \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) + \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(y)$$

Proposition 1.2. *Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie.*

$u : E \longrightarrow F$

$v : E \longrightarrow F$

Soit $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base de F.

Soit $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\alpha u + v) = \alpha \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u) + \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(v).$$

La matrice d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des matrices de ces vecteurs

De même pour les combinaisons linéaires d'applications linéaires.

⚠ attention aux bases !!

appli linéaire

base

matrice

2 Matrices et applications linéaires

$$E, \mathcal{B}_1 \xrightarrow{\ u\ } F, \mathcal{B}_2$$
$$x \longmapsto y$$

2.1 Calcul des coordonnées de l'image

Proposition 2.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension p et q, $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base de F.*
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$: $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u)$.
Si $\boldsymbol{x} \in E$ a pour matrice X dans $\mathscr{B}_1$ et $\boldsymbol{y} = u(\boldsymbol{x})$ a pour matrice Y dans $\mathscr{B}_2$, alors on a

$$Y = AX \quad \text{soit} \quad \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\boldsymbol{x})) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\boldsymbol{x}).$$

Démonstration. $X = M_{B_1}(x)$ $\quad Y = M_{B_2}(y)$ $\quad A = M_{B_1 B_2}(u)$

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ et $B_1 = (e_1, \dots, e_p)$ $\quad B_2 = (f_1, \dots, f_q)$

soit $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ et $y = \sum_{k=1}^{q} y_k f_k = u(x)$

la matrice A de u dans B_1, B_2 a pour coeff (a_{ij}) $\quad i = 1, \dots, q$, $\quad j = 1, \dots, p$

On a

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} f_i$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_j) & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & \vdots & \\ & a_{ij} & \\ & \vdots & \\ & a_{qj} & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} f_1 \\ \vdots \\ f_i \leftarrow i \\ \vdots \\ f_q \end{array}$$

on calcule

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \text{ car } u \text{ est linéaire}$$
$$= \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{q} a_{ij} f_i\right)$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right) f_i \quad \text{en échangeant les signes somme}$$

ce qui donne $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$ car $(f_1, \dots, f_q)$ est une base. On reconnaît la formule du produit

$$AX = \begin{pmatrix} \boxed{\quad a_{ij} \quad} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \end{pmatrix} \leftarrow i = Y$$

□

Exemple 2.1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $U = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $U = \mathcal{M}_{B_0}(u) = \mathcal{M}_{B_0,B_0}(u) = \begin{array}{c} u(1,0) \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\4\end{matrix} \end{pmatrix} \end{array}$

u linéaire

Pour calculer l'image du vecteur $\vec{a} = (x, y)$ on multiplie la matrice de u par la matrice de $\vec{a}$ (matrices dans la base canonique).

$U \cdot \mathcal{M}_{B_0}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$ matrice de $u(\vec{a})$

d'où $u(x,y) = (3x - y, 2x + 4y)$

On a $u(1,0)$ qui a pour matrice $U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$u((1,0)) = (3, 2)$

et $u((0,1)) = (-1, 4)$

Exemple : $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ expression analytique $\mathcal{M}_{B_0, B'_0}(\varphi)$

$(x, y) \longmapsto (2x + y,\ x - y,\ 3x + 2y)$

avec B_0 base canonique de $\mathbb{R}^2$ B'_0 base canonique de $\mathbb{R}^3$

et calculer l'image de $(5, -7)$

on a $\varphi((1,0)) = (2, 1, 3)$ $\varphi((0,1)) = (1, -1, 2)$

$A = \mathcal{M}_{B_0, B'_0}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi( ) & \varphi( ) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{matrix}$ on calcule $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varphi((5, -7))$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

$u = (1, -2)$ $v = (1, 1)$ matrice de φ $\mathcal{M}_{(u,v), B'_0}(\varphi) = A'$

$\varphi(u) = (0, 3, -1)$ $\varphi(v) = (3, 0, 5)$

$A' = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(u) & \varphi(v) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$

matrice de $\varphi(x,y)$ est $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$

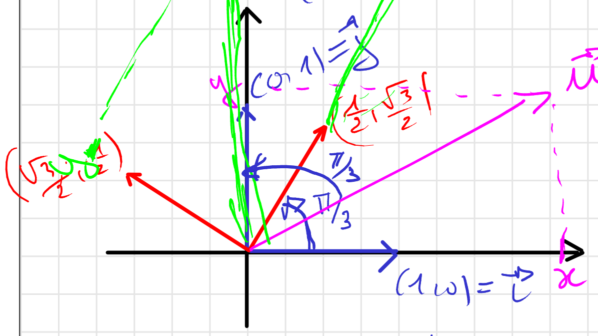
Exemple 2.2. Soit r la rotation de matrice $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B}_0 = ((1,0),(0,1))$

Calculer l'image des vecteurs $(1,0)$ puis $(0,1)$. En déduire l'angle de la rotation.

Calculer l'image du vecteur de coordonnése $(2,3)$.

Déterminer la matrice d'une rotation d'angle θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(1,0) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ et de même $r(0,1) = (-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$



$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$r(\vec{u}) = x\, r(\vec{i}) + y\, r(\vec{j})$

par calcul dans la BOND $(\vec{i}, \vec{j})$

et $\|\vec{u}\| = \|r(\vec{u})\|$

$(\vec{u}, r(\vec{u})) = (\vec{i}, r(\vec{i})) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

r est une rotation vectorielle (= autour de l'origine) d'angle $\pi/3$

2.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires

Théorème 2.2. *Soit n, p, q des entiers non nuls. Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimensions respectives n, p et q et ayant pour bases respectives $\mathscr{B}_1$ $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.*
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ de matrice B dans les bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.
Alors BA est la matrice de $v \circ u$ dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_3$:

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).$$

Démonstration. On a par définition de la matrice de l'application linéaire $v \circ u$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) &= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_3}(v \circ u)(\mathscr{B}_1) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_3}(v(u(\mathscr{B}_1))) \\
&= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\mathscr{B}_1)) \quad \text{par propriété du calcul de l'image d'un vecteur par } v \\
&= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) \quad \text{par calcul de l'image d'un vecteur par } u
\end{aligned}$$

Or, on a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1)$ qui est la matrice identité d'où

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).$$

□

$$\begin{tikzcd}
E, B_1 \arrow[r, "u\,,\,A"] \arrow[rr, bend right, "v\circ u\,,\,BA"'] & F, B_2 \arrow[r, "v\,;\,B"] & G, B_3
\end{tikzcd}$$

$A = \mathrm{M}_{B_1 B_2}(u)$

$B = \mathrm{M}_{B_2 B_3}(v)$

Exemple $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y) \longmapsto (3x-y, x+2y, x-y)$ $\quad v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \longmapsto (2x+y-z, x-y+3z)$

on utilise les bases canoniques B_2 de $\mathbb{R}^2$ et B_3 de $\mathbb{R}^3$. On calcule les matrices de $u \circ v$ puis $v \circ u$ dans les bases canoniques

On a

$$U = \mathrm{M}_{B_2,B_3}(u) = \begin{array}{cc} u(1,0) & u(0,1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array}$$

et

$$V = \mathrm{M}_{B_3,B_2}(v) = \begin{array}{c} v(1,0,0) \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors $u \circ v$ a pour matrice $U \times V = \mathrm{M}_{B_3,B_3}(u \circ v) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$(u \circ v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3)$

et $v \circ u$ a pour matrice $V \times U = \mathrm{M}_{B_2,B_2}(v \circ u) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

on évite le calcul de $v \circ u(x,y) = v(\underbrace{3x-2y}_{X}, \underbrace{x+2y}_{Y}, \underbrace{x-y}_{Z}) = (2X+Y-Z, X-Y+3Z)$

$= (2(3x-2y)+(x+2y)-(x-y), \ \ldots)$

$v \circ u(x,y) = (6x+y, 5x-6y)$

Exemple : Calculer φ^2 avec $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x,y,z) = \left(x+y-z, -x-y+z, \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z\right)$$

On utilise la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^3$.

et on écrit la matrice de φ dans cette base :

$$A = M_{B_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1/2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ car $\varphi((1,0,0)) = \left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$ et...

On calcule A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ 1/2 & 1/2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -1/4 & +\frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A$$ d'où $\boxed{\varphi \circ \varphi = -\frac{1}{2}\varphi}$

2.3 Matrices inversibles et isomorphismes

Théorème 2.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies de bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

f est un isomorphisme si et seulement si la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est carrée et inversible.

Dans ce cas, la matrice de l'application réciproque f^{-1} est la matrice inverse de la matrice de l'application f :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1}(f^{-1}) = \left(\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)\right)^{-1}$$

$E \xrightarrow{f} F$

$E \xleftarrow{f^{-1}} F$

Démonstration.

(1) la matrice de f est carrée $\Leftrightarrow$ $\dim E = \dim F$.

(2) $\Rightarrow$ si f est un isomorphisme, alors il existe une réciproque

$f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui est linéaire et $f \circ f^{-1} = id_F$

et $M_{B_1B_2}(f) \cdot M_{B_2B_1}(f^{-1}) = M_{B_2B_2}(id_F) = I_{\dim F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $M_{B_1B_2}(f)$ est inversible

et son inverse est $\left(M_{B_1B_2}(f)\right)^{-1} = M_{B_2B_1}(f^{-1})$

$\Leftarrow$ à faire

□

Exemple ex 6 du TD 17

$D : E \to E$ de matrice dans (g_0, g_1, g_2)
$f \mapsto f'$

$$M = M_{(g_0,g_1,g_2)}(D) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On sait que M est inversible car elle est de rang maximal ($=$ autant de pivots que de lignes)
donc D est bijective

On calcule M^{-1} : $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & +1/8 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & -1/16 & 1/32 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/16 & 1/32 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

D^{-1} est l'application de matrice M^{-1} dans (g_0, g_1, g_2)
c'est-à-dire
$D^{-1}(g_0) = \frac{1}{4} g_0$ $\quad D^{-1}(g_1) = \frac{1}{4} g_1 - \frac{1}{16} g_0$

$D^{-1}(g_2) = \frac{1}{32} g_0 - \frac{1}{8} g_1 + \frac{1}{4} g_2$

Exemple

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & \varphi(X^2) & & \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

est inversible car elle est de rang maximal (nb pivots = taille)
C'est la matrice de

$\varphi : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$
$P \mapsto$
$(1, X, X^2, X^3, X^4)$

$\varphi(\underset{X^0}{1}) = 1 = (1+X)^0$ $\varphi(X) = X+1$ $\varphi(X^2) = 1 + 2X + X^2 = (1+X)^2$

$\varphi(X^3) = 1 + 3X + 3X^2 + X^3 = (1+X)^3$

$\varphi(X^4) = (1+X)^4$ ce qui prouve que $\varphi(P) = P(X+1) = Q(X)$

car $P(X) = \sum_{k=0}^{4} a_k X^k$ et $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{4} a_k (1+X)^k = P(X+1)$

Alors, on sait que φ est bijective et $\varphi^{-1}(Q) = Q(X-1) = P(X)$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2,X^3,X^4)}(\varphi^{-1}) = M^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(X) & \dots & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{array} \end{array}$$

$\varphi^{-1}(1) = (X-1)^0 = 1$, $\varphi^{-1}(X) = X - 1$

$\varphi^{-1}(X^2) = (X-1)^2$, $\varphi^{-1}(X^k) = (X-1)^k$

$(X-1)^3 = -1 + 3X - 3X^2 + X^3$ $\qquad (X-1)^4 = 1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4$

$$A' = Q^{-1} A P$$

$$\begin{tikzcd} E, B_1 \ (x, X) \arrow[r, "u,\ A"] & F, B_2 \ (y = u(x), Y) \\ E, B_1' \ (x, X') \arrow[u, "\mathrm{id}_E"', "P = P_{B_1 \to B_1'}"] \arrow[r, "u,\ A'"'] & F, B_2' \ (y = u(x), Y') \arrow[u, "\mathrm{id}_F", "Q"'] \end{tikzcd}$$

$X = \mathrm{Mat}_{B_1}(x)$

$X = PX'$ $\qquad \mathrm{Mat}_{B_1', B_1}(\mathrm{id}_E) =$

$X' = \mathrm{Mat}_{B_1'}(x)$

$Y = QY'$

3 Changements de bases

3.1 Matrices de passage (matrices de changement de base)

Définition 3.1. Soit E un espace de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ (ancienne) et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ (nouvelle) deux bases de E.
On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée $P_{B\to B'}$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$:
$P_{B\to B'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ matrice des vecteurs de B' exprimés dans la base B.

Lemme 3.1. *La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P_{B\to B'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E)$.*

Théorème 3.2. *Une matrice de passage est inversible et $P_{B'\to B} = (P_{B\to B'})^{-1}$.*

Démonstration. $P_{B\to B'}$ est la matrice de l'application identité qui est un isomorphisme, alors $P_{B\to B'}$ est inversible et

$$(P_{B\to B'})^{-1} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E^{-1})\mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E) = P_{B'\to B}.$$

□

Lemme 3.3. *Soit $\mathscr{B}$ une base de E de dimension n et $x_1, x_2, \dots, x_n$ une famille de vecteurs de E. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est inversible.*

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, soit $(e_1, e_2) = B_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On pose $u = 2e_1 - 3e_2$, $v = e_1 + e_2$ et $a = u - v$, $b = u + 2v$
Écrire les matrices de passage :

$$P_{(e_1,e_2)\to(u,v)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u & v \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

$$P_{(u,v)\to(a,b)} = \text{------} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} a & b \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \end{array}$$

$$P_{(e_1,e_2)\to(a,b)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} a & b \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

$a = (2e_1 - 3e_2) - (e_1 + e_2) = e_1 - 4e_2$
$b = 4e_1 - e_2$

On a

$$\begin{cases} u = 2e_1 - 3e_2 \\ v = e_1 + e_2 \end{cases} \underset{\substack{L_1+3L_2 \\ 2L_2 - L_1}}{\iff} \begin{cases} 5e_1 = u + 3v \\ 5e_2 = -u + 2v \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}(u + 3v) \\ e_2 = \frac{1}{5}(-u + 2v) \end{cases}$$

Alors

$$\underbrace{P_{(u,v)\to(e_1,e_2)}}_{\mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(id_{\mathbb{R}^2})} = \frac{1}{5} \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \underset{e_1}{id(e_1)} & \underset{e_2}{id(e_2)} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \end{array} = \left(P_{(e_1,e_2)\to(u,v)}\right)^{-1}$$

inverses l'une de l'autre

$$P_{B\to B'} = \mathrm{M}_B(B') = \mathrm{M}_B(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = \mathrm{M}_B(id_E(e'_1), id_E(e'_2), \dots, id_E(e'_n))$$

$$\left(\;B'\;\right)_B = \left(\;id(B')\;\right)_B = \mathrm{M}_{B',B}(id_E) = P_{B\to B'}$$

3.2 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur

Théorème 3.4. *Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.* $P = P_{B \to B'}$

Si $x \in E$, on note $X = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors, on a la relation $\boxed{X = PX'}$

qui donne les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base.

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)$$

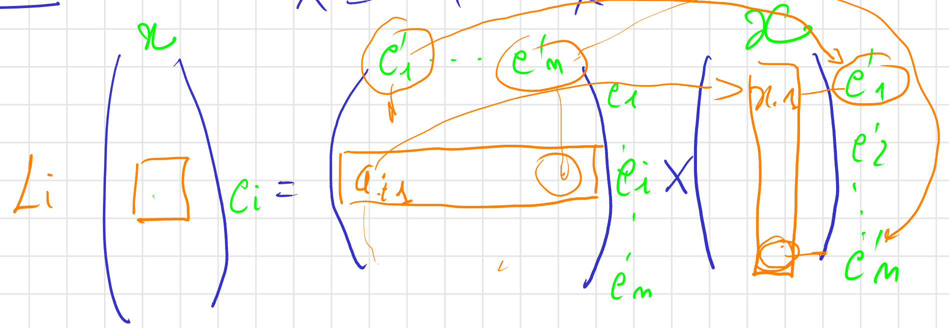
Démonstration.

Pour $x \in E$ $id_E(x) = x$ et la matrice de $id_E(x)$ se calcule par $M_{B',B}(id_E) \times M_{B'}(x)$

ce qui donne $M_B(x) = M_{B',B}(id_E) \times M_{B'}(x)$

$M_B(x) = P_{B \to B'} \times M_{B'}(x)$

schéma : $X = P \quad X'$



$L_i(X) = L_i(PX') = L_i(P) \times X'$

Exemple : dans $\mathbb{R}^2$, on note $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ une base

$\vec{u} = 2e_1 - 3e_2$ $\vec{v} = e_1 + e_2$. $\vec{W} = 7\vec{e_1} - 5\vec{e_2}$

coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

$P = P_{(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \to (\vec{u}, \vec{v})} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $W = M_{(\vec{e_1}, \vec{e_2})}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

on cherche $W' = M_{(\vec{u}, \vec{v})}(\vec{w})$. On a la formule $\boxed{W = PW'}$

$W = PW' \iff P^{-1}W = W'$. On calcule P^{-1} :

$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ alors $W' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\vec{W}' = \frac{12}{5}\vec{u} + \frac{11}{5}\vec{v}$

Exemple : Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de E.

On note $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mq (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base et calculer les coordonnées de I_2 dans cette base.

Pour montrer que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base, on dit qu'il y a 4 vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ et on prouve que c'est une famille libre

Autre version avec les matrices,

on écrit la matrice de (A_1, A_2, A_3, A_4) dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$P = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \end{array}$$

et on montre que P est inversible

car $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$

$$(P|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{array}{cc} AP & A \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

on trouve que P est inversible donc (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

on a $I_2 = 1E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 1E_{22}$ $\quad X' = P^{-1}X$

$\mathcal{M}_{B_0}(I_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $\mathcal{M}_{(A_1 A_2 A_3 A_4)}(I_2) = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

soit $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2A_1 + A_2 - A_3 + 3A_4 = I_2$

3.3 Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Théorème 3.5. *Soit E un espace de dimension finie et deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_1'$.*
Soit F un espace vectoriel de dimension finie et deux bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_2'$.
Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_1'$. Soit Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}_2'$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et de matrice A' dans les bases $\mathscr{B}_1'$ à $\mathscr{B}_2'$.
On a $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$ *soit* $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_2'}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_2'}(id_F).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_1}(id_E)$

$$A = \mathcal{M}_{B_1,B_2}(u)$$

$$\begin{tikzcd}
E, B_1 \arrow[r, "u"] & F, B_2 \\
E, B_1' \arrow[u, "id_E"] \arrow[r, "u"'] & F, B_2' \arrow[u, "id_F"']
\end{tikzcd}$$

$$P = \mathcal{M}_{B_1',B_1}(id_E) = P_{B_1 \to B_1'} \qquad Q = P_{B_2 \to B_2'} = \mathcal{M}_{B_2',B_2}(id_F)$$

$x \qquad u(x)$

$$A' = \mathcal{M}_{B_1',B_2'}(u)$$

$u = id_F \circ u \circ id_E^{-1} \Rightarrow \mathcal{M}_{B_1' B_2'}(u) = \mathcal{M}_{B_1' B_2'}(id_F \circ u \circ id_E^{-1})$

$u = id_F^{-1} \circ u \circ id_E \Rightarrow \mathcal{M}_{B_1', B_2'}(u) = \mathcal{M}_{B_1' B_2'}(id_F^{-1} \circ u \circ id_E)$

$\Rightarrow \mathcal{M}_{B_1' B_2'}(u) = \mathcal{M}_{B_2 B_2'}(id_F^{-1}) \times \mathcal{M}_{B_1 B_2}(u) \times \mathcal{M}_{B_1' B_1}(id_E)$

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

Exemple. Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto \left(3x+y-z, \frac{9}{2}x+y-\frac{5}{2}z\right)$

On note B_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ B_2 la base canonique de $\mathbb{R}^2$

on sait que

$$A = \mathcal{M}_{B_3 B_2}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 9/2 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

départ

arrivée

$u(0,0,1) = (-1, -5/2)$

on note $v_1 = (1,0,1)$ $v_2 = (2,0,0)$ $v_3 = (0,1,0)$

$(v_1, v_2, v_3) = B_3'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (à vérifier)

et $w_1 = (1,1)$ $w_2 = (2,3)$ $B_2' = (w_1, w_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car ils ne sont pas colinéaires.

Donner les matrices de u dans B_3' et B_2' et aussi dans B_3 et B_2'

on note $P = P_{B_3 \to B_3'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ est de rang 3 donc inversible

donc B_3' est bien une base.

et $Q = P_{B_2 \to B_2'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} w_1 & w_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$

on cherche $A' = \mathcal{M}_{B_3', B_2'}(u)$. On sait $\boxed{A' = Q^{-1} A P}$

on calcule $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 9/2 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} P$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(v_1) & u(v_2) & u(v_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix} = \mathcal{M}_{B_3' B_2'}(u)$$

$= \mathcal{M}_{(v_1, v_2, v_3)(w_1, w_2)}(u)$

$u(v_1) = 2w_1$ $u(v_2) = 3w_2$ $u(v_3) = w_1$

on vérifie $u(1,0,1) = \left(3+0-1, \frac{9}{2}+0-\frac{5}{2}\right) = (2,2) = 2(1,1) = 2w_1$

si on veut $\mathcal{M}_{B_3, B_2'}(u) = A''$ on a la formule

$$A'' = Q^{-1} A I_3 \qquad A' = Q^{-1} A P$$

B_3

base de départ la base

matrice de passage dans F espace d'arrivée

matrice de passage dans E espace de départ

on trouve

$$A'' = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}$$

B_2'

On trouve

$$A'' = \mathcal{M}_{B_3 B_2'}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u(e_1) & u(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \end{array}$$

vérification

$u(e_1) = u(1,0,0) = 0 \times w_1 + 3/2\, w_2 = \frac{3}{2}(2,3) = (3, \frac{9}{2})$

$u(e_2) = u(0,1,0) = (1,1) = w_1$

Exemple : $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$P \longmapsto (X+1)P - (2X^2+3)P'$

matrice de φ dans les bases canoniques ~~puis~~ dans les bases :

$B_1' = (1, X-2)$ $\quad B_2' = (1, (X-2), (X-2)^2)$

on note $B_1 = (1, X)$ $\quad B_2 = (1, X, X^2)$

$$A = \mathcal{M}_{B_1 B_2}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi(1) & \varphi(X) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

car $\varphi(1) = 1 + X$

$\varphi(X) = -3 + X - X^2$

On écrit les matrices de passage :

$$P = P_{B_1 \to B_1'} = \mathcal{M}_{B_1}(B_1') = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & X-2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \end{array} \qquad Q = P_{B_2 \to B_2'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & X-2 & (X-2)^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & +4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

on calcule $Q^{-1} = P_{B_2' \to B_2} = \mathcal{M}_{B_2'}(B_2) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & X & X^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{array}$

par calcul $\quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d'où

$$A' = \mathcal{M}_{B_1' B_2'}(\varphi) = Q^{-1}AP = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi(1) & \varphi(X-2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{array}$$

Remarque : $A' = P_{B_2' \to B_2}\, \mathcal{M}_{B_1 B_2}(\varphi) \cdot P_{B_1 \to B_1'}$

$\iff A = (Q^{-1})^{-1} A' (P^{-1})$

Remarque $\quad A' = Q^{-1}AP \iff QA' = AP \iff QA'P^{-1} = A$

3.4 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Théorème 3.6. *Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*

Soit u un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathscr{B}$ et de matrice A′ dans la base $\mathscr{B}'$.

On a $A' = P^{-1}AP$. soit $M_{\mathscr{B}'}(u) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E).M_{\mathscr{B}}(u).M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E)$

$$A' = \underbrace{P^{-1}}_{\text{arrivée}} A \underbrace{P}_{\text{départ}}$$

exemple : On étudie $f(x,y) = (x+3y, 4x+2y)$: $f\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
on veut calculer $\ker(f+2id_{\mathbb{R}^2})$ et $\ker(f-5id_{\mathbb{R}^2})$
en déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.
Puis calculer f^n pour n entier.

on utilise la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ car $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$
on note $\mathcal{B}_0$ la base canonique : $f(1,0) = (1,4)$ et $f(0,1) = (3,2)$

$$A = M_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$f+2id_{\mathbb{R}^2}$ a pour matrice $A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

on a $f+2id \neq 0 \Rightarrow rg(f+2id) \geqslant 1 \Rightarrow \dim(\ker(f+2id)) \leqslant 1$
car $\dim(\ker(f+2id)) + rg(f+2id) = 2$

on voit que $(1,-1) \in \ker(f+2id)$ car $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{mat } f+2id} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f(1,-1) = \vec{0}$

$\Rightarrow \dim(\ker(f+2id)) \geqslant 1$ car $\ker(f+2id) \supset Vect((1,-1))$

alors $\boxed{\ker(f+2id) = Vect((1,-1))}$

De même $f-5id_{\mathbb{R}^2}$ a pour matrice $\underbrace{A - 5I_2}_{\text{Mat}(\varphi)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$

On a $Im(f-5id_{\mathbb{R}^2}) = Vect((f-5id_{\mathbb{R}^2})(e_1), (f-5id_{\mathbb{R}^2})(e_2))$
(l'image d'une base de l'espace de départ est une famille génératrice de l'image)
$= Vect((-4,4),(3,-3)) = Vect((-1,1))$

donc $\dim(Im(f-5id_{\mathbb{R}^2})) = 1 \Rightarrow \dim(\ker(f-5id_{\mathbb{R}^2})) = 1$

et $(3,4) \in \ker(f-5id_{\mathbb{R}^2})$ donc $\boxed{\ker(f-5id_{\mathbb{R}^2}) = Vect((3,4))}$

Car $\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

On note $v_1=(1,-1)\in \ker(f-2id_{\mathbb{R}^2}) \iff (f-2id_{\mathbb{R}^2})(v_1)=\vec{0}$

$\iff f(v_1)-2v_1=\vec{0} \iff f(v_1)=2v_1$

et pour $v_2=(3,4)\in \ker(f-5id_{\mathbb{R}^2}) \iff f(v_2)=5v_2$

[HP v_1 et v_2 sont des vecteurs propres des de f = colinéaire à leur image]

(v_1,v_2) n'étant pas colinéaires alors ils forment une base B_1

On note $P=P_{B_0\to B_1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

La matrice de f dans cette base B_1 est

$$\boxed{A'=M_{B_1}(f)=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1\\ v_2\end{array}\end{array}}$$

on vérifie avec la formule $A'=P^{-1}AP$

$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

On a $A'=P^{-1}AP$

$\iff PA'=AP \iff PA'P^{-1}=A$

Par récurrence, on prouve que $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=P(A')^nP^{-1}$

(c'est-à-dire à la récurrence ...)

il se trouve que $(A')^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}$ car A' est diagonale

donc $A^n=P\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2^n & 3.5^n\\ -2^n & 4.5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4.2^n+3.5^n & -3.2^n+3.5^n\\ -4.2^n+4.5^n & 3.2^n+4.5^n\end{pmatrix}$

A' est diagonale et inversible car de rang maximal et $(A')^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

Comme $A=PA'P^{-1}$, A est inversible

et $A^{-1}=(PA'P^{-1})^{-1}=P.A'^{-1}.P^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$

donc f est bijective : c'est un automorphisme (Th 2.3)

et $\boxed{f^{-1}(a,b)=\frac{1}{10}(-2a+3b,\ 4a-b)}$

$(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

4 Rang d'une matrice

4.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 4.1. Soit A matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A, l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A.

Exemple soit
$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) & f(e_5) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{R})$$

est canoniquement associée à

$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ base de l'espace de DÉPART

$$f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z, t, u) \longmapsto (2x + y + 3z + 4t + 7u,\ x - z + 2t + 5u)$$

f est l'application définie par

$f((1,0,0,0,0)) = (2,1)$ $f(0,1,0,0,0) = (1,0)$

$f((0,0,1,0,0)) = (3,-1)$ ....

4.2 Image et noyau d'une matrice

Définition 4.2. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle noyau et image de A notés $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ les noyaux et images de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 4.1. *Le noyau d'une matrice A est l'ensemble des solutions du système $AX = 0$.*
L'image d'une matrice A est l'ensemble des seconds membres B pour lesquels le système $AX = B$ a au moins une solution.

il s'agit bien du noyau et de l'image de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

Exemple $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}$

A est canoniquement associée à $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

et $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$

(les colonnes d'une matrice sont une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$)

$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$ car $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

$\boxed{\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)}$ $\qquad \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

et ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires donc on a une base de $\operatorname{Im} A$. $\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f) = 2$

alors

$\dim(\operatorname{Ker} A) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\operatorname{Im} A) = 2$

$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ et $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc

$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right) \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$

ABUS de notation

$\boxed{\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\big((0,1,-1,1), (-1,2,0,1)\big) \subset \mathbb{R}^4}$

4.3 Rang d'une matrice

Théorème 4.2. *Le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est le nombre de pivots de sa matrice échelonnée réduite par lignes est égal au rang de l'application linéaire associée à A.*

On a $\quad \operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A.$

Corollaire 4.3. *Le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal au rang des vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$.*

Corollaire 4.4. *Étant donnée une base $\mathscr{B}$ d'un espace vectoriel E, le rang d'une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de E est égal au rang de la matrice des vecteurs dans la base $\mathscr{B}$: $\operatorname{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \operatorname{rg} \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*

Corollaire 4.5. *Le rang d'une application linéaire u de E dans F est le rang de la matrice de u dans n'importe quelles bases de E et F.*

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{rg}(A)$

on échelonne A pour calculer le nombre de pivots

ou on détermine dim(Im A)

E^{-1} $\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \\ L_1 - 2L_3 \\ L_2 - 3L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -5 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$

I_3 $\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5/3 & 1/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$ $\quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

matrice échelonnée réduite associée à A

et $E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $\quad R = EA$

et E est inversible car produit de matrices d'opération élémentaires $\quad R = (E^{-1})^{-1} A I_3 \leftarrow$ formule de chgt de base

donc R et A sont les matrices de la même application linéaire donc elles ont le même rang $\operatorname{rg}(A) = 3$

4.4 Rang et matrice inversible

Théorème 4.6. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est de rang maximal si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de* $\mathbb{K}^n$

Théorème 4.7. *Si* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*,* $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *sont des matrices inversibles et si* $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est une matrice, alors* $\operatorname{rg}(AM) = \operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(MB)$ *: on ne change pas le rang quand on multiplie par une matrice inversible.*

Théorème 4.8. *Deux matrices équivalentes par lignes ont le même rang.*

4.5 Rang de la transposée

Proposition 4.9. *Le rang d'une matrice est égal : au rang de ses vecteurs colonnes et au rang de ses vecteurs lignes et au rang de sa transposée.*

Théorème 4.10. *Deux matrices équivalentes par colonnes ont le même rang.*

5 Exemples de transformations vectorielles du plan euclidien

5.1 Rotations vectorielles

Définition 5.1. Dans le plan euclidien, on appelle rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, l'application r_θ telle que pour tout vecteur $\vec{u}$ on ait $(\vec{u}, r_\theta(\vec{u})) = \theta\ [2\pi]$ et $||\vec{u}|| = ||r_\theta(\vec{u})||$.

Proposition 5.1. *Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien, alors f conserve le produit scalaire si et seulement si f conserve la norme.*

Alors f est un automorphisme. On dit que f est un automorphisme orthogonal.

5.2 Matrice d'une rotation dans une BOND

Théorème 5.2. *La matrice de r_θ dans une BOND est* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

5.3 Composée de deux rotations

Proposition 5.3. *La composée des rotations r_θ et r_φ donne la rotation $r_{\theta+\varphi}$*

$$r_\theta \circ r_\varphi = r_\varphi \circ r_\theta = r_{\theta+\varphi}$$

Corollaire 5.4. *Matriciellement,* $R_\theta \times R_\varphi = R_\varphi \times R_\theta = R_{\theta+\varphi}$

Théorème 5.5. *Une rotation r_θ est un automorphisme du plan et $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.*

5.4 Symétrie orthogonale vectorielle

Proposition 5.6. *Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du plan euclidien. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$ est un sous-espace vectoriel du plan noté $\vec{v}^{\perp}$.*
De plus, $\operatorname{Vect}\vec{v}$ *et $\vec{v}^{\perp}$ sont supplémentaires dans le plan.*

Définition 5.2. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du plan euclidien. On appelle symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{v}$, la symétrie par rapport à $\text{Vect}\,\vec{v}$ parallèlement à $\vec{v}^{\perp}$.
C'est à dire que $s_{\vec{v}}$ est définie par $s_{\vec{v}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ où $\vec{u}_1 \in \text{Vect}\,\vec{v}$ et $\vec{u}_2 \in \vec{v}^{\perp}$ avec $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Théorème 5.7. *Pour $\vec{v} \neq 0$, l'application $s_{\vec{v}}$ est un automorphisme du plan vectoriel.*
$s_{\vec{v}}$ conserve le produit scalaire, la norme, change l'orientation des angles et vérifie $s_{\vec{v}} \circ s_{\vec{v}} = id_P$.

5.5 Matrice d'une symétrie orthogonale dans une BOND

Théorème 5.8. *Soit P le plan euclidien muni d'une BOND $(\vec{i},\vec{j})$.*

Si $\vec{v}$ fait un angle $(\vec{i},\vec{v}) = \varphi$ avec le vecteur $\vec{i}$, alors $s_{\vec{v}}$ a pour matrice $S_{2\varphi} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$.

5.6 Composée de deux symétries orthogonales

Théorème 5.9. *Soit $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls du plan vectoriel.*
La composée de deux symétries orthogonales $s_{\vec{v}_1}$ et $s_{\vec{v}_2}$ est une rotation d'angle $\theta = 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\ [2\pi]$.

6 Exemples de transformations vectorielles de l'espace euclidien

6.1 Rotation vectorielle de l'espace

Définition 6.1. Soit $\vec{n}$ un vecteur normé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$: $||\vec{n}|| = 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique en $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in \operatorname{Vect}\vec{n}$ et $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$.
On appelle rotation vectorielle d'axe dirigé par $\vec{n}$ et d'angle θ, l'application $r_{\theta,\vec{n}}$ définie par

$$r_{\theta,\vec{n}}(\vec{u}) = \vec{u}_1 + \cos\theta\,\vec{u}_2 + \sin\theta\,\vec{n} \wedge \vec{u}_2.$$

Proposition 6.1. *Une rotation vectorielle est linéaire, bijective, conserve la norme, le produit scalaire et les angles.*

6.2 Matrice d'une rotation dans une BOND adaptée

Théorème 6.2. *Soit $\vec{n}$ un vecteur normé, $\vec{i}\perp\vec{n}$ avec $||\vec{i}|| = 1$, un vecteur normé orthogonal à $\vec{n}$. Alors $(\vec{n},\vec{i},\vec{n}\wedge\vec{i})$ est une BOND de l'espace.*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice de la rotation d'angle θ autour de $\vec{n}$, dans la base $(\vec{n},\vec{i},\vec{n}\wedge\vec{i})$, est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$