Chapitre 15 - TD - 23 mars 2020

Exercice 18 :

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P' - (X-2)P \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \psi(P) = P - (X-2)P' \end{array}$.

Montrer que φ et ψ sont linéaires et déterminer leurs noyau et image. Étudier l'application $\varphi \circ \psi$ (rang, noyau, image).

$\psi(P) = P - (X-2)P'$

* Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ $P-(X-2)P'$ est un polynôme
on a $\deg((X-2)P') = \deg(X-2) + \deg(P') \leq \deg(P) \leq 2$
alors par somme $\deg P-(X-2)P' \leq 2$ donc $\psi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
* Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ et on calcule
$\psi(\alpha P_1 + P_2) = \alpha P_1 + P_2 - (X-2)(\alpha P_1 + P_2)'$
la dérivation est linéaire donc
$\psi(\alpha P_1 + P_2) = \alpha(P_1 - (X-2)P_1') + P_2 - (X-2)P_2'$
$= \alpha\psi(P_1) + \psi(P_2)$
donc ψ est linéaire.
* Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ $P \in \operatorname{Ker}\psi \iff \psi(P) = 0$
$\iff P-(X-2)P' = 0 \iff P = (X-2)P'$
on pose $P = aX^2 + bX + c$ $\iff aX^2 + bX + c - (X-2)(2aX+b) = 0$
$\iff -aX^2 + (b - b + 4a) + c + 2b = 0$

$$\iff \begin{cases} -a = 0 \\ 4a = 0 \\ 2b+c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ 2b+c = 0 \end{cases}$$ équations de $\operatorname{Ker}\psi$

on résout ces équations : on paramètre avec $b = \alpha \in \mathbb{R}$
$(a,b,c) = \alpha(0,1,-2) \iff P = \alpha(X-2)$
on en déduit $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Vect}((X-2))$ droite engendrée par $X-2$.

* Pour $\operatorname{Im}\psi$, on suit que $\psi(aX^2+bX+c) = -aX^2 + 4aX + 2b + c$
$\operatorname{Im}\psi = \{-aX^2 + 4aX + 2b + c \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$
mais $\psi(aX^2+bX+c) = a(-X^2+4X) + (2b+c)1$
on en déduit $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Vect}((-X^2+4X), 1)$
les deux polynômes $-X^2+4X$ et 1 ne sont pas colinéaires
donc $\operatorname{Im}\psi$ est un plan

Exercice 19 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 9 :

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et une base de G.

Exercice 13 :

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on pose $\overrightarrow{u}_1 = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{u}_3 = (1,1,1,0)$ et $\overrightarrow{u}_4 = (1,1,1,1)$. Puis on définit $F = \text{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ et $G = \text{Vect}(\overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$.

Déterminer des équations de F et G. Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E. Déterminer l'expression analytique de la projection vectorielle p sur F parallèlement à G.

Exercice 10 :

Soit E l'espace des fonctions réelles à valeurs réelles. Soit a,b deux réels. On définit :

$$F = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2a - x)\} \text{ et } G = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2b - f(2a - x)\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $b = 0$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 21 :

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2id_E = 0$.

1. Montrer que u est un automorphisme et calculer u^{-1}.
2. Montrer que $\forall x \in E, u(x) - 2x \in \mathrm{Ker}(u - id_E)$ et $u(x) - x \in \mathrm{Ker}(u - 2id_E)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - id_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - 2id_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice xx :

Exercice xx :