Chapitre 21 - Variables aléatoires

1 Variables aléatoires

1.1 Définition

engendré $E = \mathbb{R}$

Définition 1.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et E un ensemble.

On appelle variable aléatoire une application définie sur (Ω, P) à valeurs dans E : $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$.

résultat valeur

Lorsque E est une partie de $\mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

L'ensemble des valeurs susceptibles d'être prises par X est $X(\Omega)$ défini par $X(\Omega) = \{x \in E \mid \exists \omega \in \Omega : x = X(\omega)\}$.

Lorsque Ω est fini, $X(\Omega)$ est fini et on notera souvent $X(\Omega) = (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ avec $n = |\Omega|$.

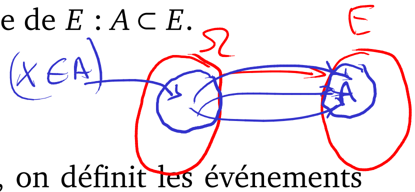
ensemble des images = univers image

Remarque 1.1. Par défaut, on suppose que les variables aléatoires sont des variables aléatoires réelles (V.A.R).

Définition 1.2. Soit une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow E$. Soit A une partie de E : $A \subset E$.

On définit l'événement $(X \in A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \subset \Omega$

On a donc $(X \in A) = X^{-1}(A)$ et on le note aussi $(X \in A) = \{X \in A\}$.



Définition 1.3. Pour une variable aléatoire réelle X et pour a, b réels, on définit les événements suivants :

$(X = a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\} = \{$ tous les résultats ω tels que $X(\omega) = a\}$

$(X \leqslant a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\} = \{$ tous les résultats ω tels que $X(\omega) \leqslant a\}$

$(a \leqslant X < b) = \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) < b\} = \{$ tous les résultats ω tels que $a \leqslant X(\omega) < b\}$

Exemples : on lance 2D6 un rouge et un vert

$S =$ la somme des deux dés est une V.A.R (var aléa réelle)

On a $S(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 10, 11, 12\}$

L'événement $(S = 8)$ est $\{(2,6), (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)\}$

$P(S = 8) = \frac{5}{36}$ car on a équiprobabilité des 36 résultats de deux dés.

X est égale au ~~$X =$~~ le plus grand numéro sorti

On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $P(X = 3) = \frac{5}{36}$

car $(X = 3) =$ " le plus grand numéro sorti est un 3 "

$= \{(3,1), (3,2) (3,3) (2,3) (1,3)\}$

Exemple : On s'intéresse aux n premières naissances de l'année et à la répartition fille/garçon.
et on pose X la variable aléatoire égale au nombre de filles nées.

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad (\text{c'est une v.a } \underline{\mathbb{R}}) \text{ (réelle)}$$

Toutes les naissances sont indépendantes
on note p la probabilité d'obtenir une fille
on suppose que cette probabilité est la même pour chaque naissance $p \simeq \frac{97}{200}$

il est connu que X "suit une loi binomiale"
car "$\cancel{X}$ compte le nombre de succès" dans la répétition de n expériences identiques et indépendantes ayant deux résultats possibles succès de probabilité p et échec avec une probabilité $1-p$."

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec } k \in [\![0, n]\!]$$

$\Omega = \{F, G\}^n = \{FFF\cdots F, FF\cdots FG, FFG\,GF, \ldots, GGGG\}$

il y a $\binom{n}{k}$ listes de n lettres prises parmi F et G avec k . F

chacun des résultats correspondants à la même probabilité $p^k \times (1-p)^{n-k}$

1.2 Exemples

1.3 Loi de probabilité d'une v.a. réelle finie

Soit (Ω, P) un espace probabilisé

Définition 1.4. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire finie. L'application $P_X : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(X^{-1}(A)) \end{array}$ est une probabilité appelée loi de probabilité de la v.a. X et $(X(\Omega), P_X)$ est un espace probabilisé.

$P_X(A)$

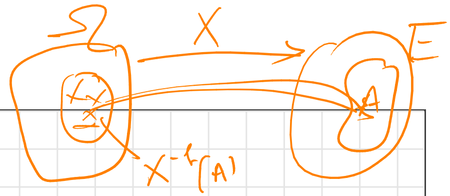
Définition 1.5. Soit X une v.a. finie $X : \Omega \longrightarrow E$. On appelle loi de probabilité de X la donnée de toutes les valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ et de toutes les probabilités $(P(X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$.

Remarque 1.2. On peut utiliser un tableau

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$P(X=x_3)$	$P(X=x_4)$	$P(X=x_5)$	...

$\mathscr{P}(E)$ = ensemble des parties de E

Théorème 1.1. *Soit $\{(x_i, p_i) | i \in I\}$ une partie finie de $\mathbb{R}^2$ telle que les x_i soient distincts. $\{(x_i, p_i) | i \in I\}$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie si et seulement si*
$$\begin{cases} \forall i \in I, \quad p_i \geqslant 0 \\ \sum_{i \in I} p_i = 1 \end{cases}.$$



Exemple On lance 2 dés à 6 faces équilibrés
on note S la V.A égale à la somme des 2 marques obtenues
Loi de S ?

On a $S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ l'univers image
On calcule

$P(S=2) = \frac{1}{36}$ $\quad P(S=3)$

car $(S=2) = \{(1,1)\}$ $\quad$ car $(S=3) = \{$

on peut les ranger dans un tableau

x	2										
$P(S=x)$	$\frac{1}{36}$										

1.4 Système complet associé à une v.a. finie

Proposition 1.2. *Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une v.a. sur un espace probabilisé fini.*

$$((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)} \text{ est un système complet d'événements.}$$

Corollaire 1.3. *On en déduit que* $\displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1.$

1.5 Loi d'une fonction d'une variable aléatoire finie

Définition 1.6. Soit X une v.a. finie sur (Ω, P) avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Soit $f : D \subset E \longrightarrow E$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset D$.
Alors $Y = f \circ X$ est une v.a. finie sur Ω.
De plus,

$$Y(\Omega) = (f \circ X)(\Omega) = \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$$

et

$$P(Y = y_j) = \sum_{f(x_i)=y_j} P(X = x_i) \text{ (somme sur toutes les valeurs } x_i \text{ telles que } f(x_i) = y_j).$$

2 Lois usuelles

2.1 Loi uniforme

Définition 2.1. On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ si $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

Définition 2.2. On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$.

2.2 Loi de Bernoulli

Définition 2.3. On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$ donc $P(X = 0) = 1 - p$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Définition 2.4. Soit A une partie d'un ensemble Ω. On appelle fonction indicatrice de A notée χ_A la fonction $\chi_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ définie pour $\omega \in \Omega$ par

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Remarque 2.1. Lors d'une expérience aléatoire, soit un événement A qui est réalisé (succès) ou qui ne l'est pas (échec), on peut modéliser cette situation avec une variable aléatoire X telle que l'événement $(X = 1) = A$ modélise le succès et l'événement $(X = 0) = \overline{A}$, l'échec de l'expérience. X est alors la fonction indicatrice de A.

2.3 Loi Binomiale

Définition 2.5. On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi binomiale de paramètre n et p avec $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}$ si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Remarque 2.2. On vérifie $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1.$

Remarque 2.3. Une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ modélise le nombre de succès lors de la répétition de n expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Remarque 2.4. Une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ modélise le nombre d'obtention de boules rouges pour n tirages avec remise dans une urne contenant une proportion p de boules rouges.

3 Couple de variables aléatoires

3.1 Loi conjointe

Définition 3.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X, Y deux v.a. sur Ω.

On appelle couple de v.a. (X,Y) l'application $\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$.

C'est une variable aléatoire sur E^2. On notera $(X = x_i, Y = y_j)$ l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i \text{ et } Y(\omega) = y_j\}$.

Définition 3.2. On appelle loi conjointe du couple (X,Y) la loi de la variable aléatoire (X,Y) c'est-à-dire la donnée de

- toutes les valeurs prises par le couple $(X,Y) = X(\Omega) \times Y(\Omega) = (x_i)_{i\in I} \times (y_j)_{j \in J} = \{(x_i, y_j) \mid x_i \in X(\Omega), y_j \in$
- et de toutes les probabilités
$$p_{i,j} = \big(P(X = x_i, Y = y_j)\big)_{x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\omega)} = \big(P((X = x_i) \cap (Y = y_j))\big)_{x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)}$$

ce que l'on pourra noter $\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big)_{i \in I, j \in J}$.

Théorème 3.1. *Soit $\{((x_i, y_j), p_{i,j}) | i \in I, j \in J\}$ une partie finie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ telle que les x_i soient distincts et que les y_j soient distincts.*

$\{((x_i, y_j), p_{i,j}) | i \in I, j \in J\}$ est la loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles finies si et seulement si $\begin{cases} \forall i \in I, \forall j \in J, \quad p_{i,j} \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = 1 \end{cases}$.

Remarque 3.1. Par définition, comme cette somme est finie, on peut sommer d'abord sur les lignes ou d'abord sur les colonnes :
$$\sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{i,j} = 1$$

3.2 Lois marginales

Définition 3.3. Soit (X,Y) un couple de v.a. Les lois de X et Y s'appellent les lois marginales du couple (X,Y).

Proposition 3.2. *On a*

$$\text{pour tout } x_i \in X(\Omega), \qquad P(X=x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X=x_i, Y=y_j) \text{ notée } p_{i,\bullet}$$

et

$$\text{pour tout } y_j \in Y(\Omega), \qquad P(Y=y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X=x_i, Y=y_j) \text{ notée } p_{\bullet,j}.$$

3.3 Loi conditionnelles

Définition 3.4. Soit Y une v.a. sur (Ω, P) telle que $Y(\Omega) = \left\{y_j\right\}_{j \in J}$. Soit A un événement de $\mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.
La loi de Y conditionnée par A ou loi conditionnelle de Y sachant A est l'ensemble des probabilités

$$\left(P_A(Y = y_j)\right)_{y_j \in Y(\Omega)} = \left(\frac{P((Y = y_j) \cap A)}{P(A)}\right)_{y_j \in Y(\Omega)}$$

Définition 3.5. Soit X et Y deux v.a. sur (Ω, P) telles que $X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j \in J}$.
Soit $j \in J$. La loi de X conditionnée par $(Y = y_j)$ est l'ensemble des valeurs

$$\left(P_{(Y=y_j)}(X = x_i)\right)_{x_i \in X(\Omega)} = \left(\frac{P(Y = y_j \cap X = x_i)}{P(Y = y_j)}\right)_{i \in I}$$

Soit $i \in I$. La loi de Y conditionnée par $(X = x_i)$ est l'ensemble des valeurs

$$\left(P_{(X=x_i)}\left(Y = y_j\right)\right)_{y_j \in Y(\Omega)} = \left(\frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(X = x_i)}\right)_{j \in J}$$

3.4 Fonction de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux v.a. réelles sur Ω. Comme le couple (X,Y) est une variable aléatoire réelle sur Ω, on peut définir pour une fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par $Z = g(X,Y)$.
On a $Z(\Omega) = \left\{g(x_i, y_j) | x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)\right\}$: ensemble des valeurs prises par Z
Les $g(x_i, y_j)$ ne sont pas nécessairement distincts.
On a $P(Z = z_k) = \displaystyle\sum_{\substack{(x_i, y_j) \text{ tels que} \\ g(x_i, y_j) = z_k}} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

4 Variables aléatoires indépendantes

4.1 Indépendance d'un couple de variables aléatoires

Définition 4.1. Soit (X,Y) un couple de v.a. sur (Ω, P) avec $X(\Omega) = (x_i)_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j\in J}$.
On dit que X et Y sont indépendantes pour la probabilité P si

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j) \text{ pour tout } x_i \in X(\Omega) \text{ et } y_j \in Y(\Omega).$$

Proposition 4.1. *Si X et Y sont 2 v.a. indépendantes sur (Ω, P) alors pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a*

$$P((X,Y) \in A \times B) = P(X \in A).P(Y \in B).$$

4.2 Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition 4.2. Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des v.a. sur un même espace probabilisé (Ω, P).
On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes pour la probabilité P si $\forall x_1 \in X_1(\Omega)$, $\forall x_2 \in X_2(\Omega)$, …, $\forall x_n \in X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1).P(X_2 = x_2)\dots P(X_n = x_n)$$

Théorème 4.2. *Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des v.a. mutuellement indépendantes sur (Ω, P), alors quelque soit $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, les événements $(X_i \in A_i)_{i=1,\dots,n}$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P.*

Proposition 4.3. *Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des v.a. mutuellement indépendantes sur (Ω, P), alors elles sont indépendantes deux à deux.*

4.3 Somme de v.a. suivant la loi de Bernoulli

Proposition 4.4. *Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des v.a. mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de même paramètre p avec $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$. Alors la v.a. $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$ binomiale de paramètres n et p.*

Remarque 4.1. On utilise cette proposition pour modéliser n expériences identiques et indépendantes avec 2 issues (succès et échec). La variable aléatoire somme compte le nombre de succès.

4.4 Indépendance de fonctions de v.a. indépendantes

Théorème 4.5. *Soit X, Y deux v.a. sur (Ω, P) fini. Soit f, g deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.*

Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

5 Moments d'une v.a. réelle finie

5.1 Espérance

Définition 5.1. Soit X une v.a.r. sur Ω. On appelle espérance de X le réel $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$.

Ce qui s'écrit également $E(X) = \sum_{i\in I} x_i P(X = x_i)$ avec $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$.

On a donc $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$.

Proposition 5.1. *Si pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $a \leqslant x \leqslant b$, alors $a \leqslant E(x) \leqslant b$.*

5.2 Propriétés de l'espérance : linéarité et croissance

Proposition 5.2. *Soit X, y deux v.a.r. sur (Ω, P) et a, b réels. On a*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Proposition 5.3. *Soit X, Y deux v.a.r. sur Ω.*
Si on a $X \leqslant Y$, c'est à dire $\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

5.3 Théorème de transfert

Théorème 5.4. *Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$ et X une v.a.r. sur (Ω, P) fini.*
On a $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x) = \sum_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i)$.

5.4 Espérance et indépendance

Théorème 5.5. *Soit X et Y deux v.a.r. sur Ω.*
Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

5.5 Variance et écart-type

Définition 5.2. Soit X une v.a.r. finie. On appelle variance de X le réel $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ et écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
On a donc $V(X) = \sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X - x_i)$.

Remarque 5.1. On a $V(X) \geqslant 0$ donc $\sigma(X)$ existe.

Théorème 5.6 (Formule de Kœnig-Huygens)**.**
On a pour une v.a.r. finie X :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Théorème 5.7. *Soit X une v.a. finie. On a pour tous réels a, b*

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

5.6 Espérance et variance des lois usuelles finies

— Si X est une v.a. finie constante, $X = c$ avec $P(X = c) = 1$, alors
$$E(X) = c \text{ et } V(X) = 0.$$

— Si X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$: $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$ alors
$$E(X) = \frac{1+n}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

— Si X suit la loi uniforme sur $\Omega : X(\omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, alors
$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

— Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $\mathscr{B}(p)$, alors
$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p).$$

— Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p : $\mathscr{B}(n,p)$, alors
$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p).$$

Démonstration.

— Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

Alors $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{n} \Longrightarrow \boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$.

On calcule également $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

où on a utilisé $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$.

On trouve

$V(X) = \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} \Longrightarrow \boxed{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$.

— Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

X prend les valeurs 0 avec la probabilité $1-p$ et la valeur 1 avec p.

Alors $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p$ soit $\boxed{E(X) = p}$. On calcule également $E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$.

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2$ soit $\boxed{V(X) = p(1-p)}$.

— Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Alors $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Mais on sait que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour $k \geqslant 1$.

On obtient :

$$E(X) = 0 + \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

On reconnait une formule du binôme :

$$E(X) = np\,(p+1-p)^{n-1} \text{ soit } \boxed{E(X) = np}. \text{ (résultat facile à obtenir par linéarité)}$$

On calcule maintenant $E(X(X-1))$ qui donnera $E(X^2) - E(X)$:

$E(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Mais on sait que $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ pour $k \geqslant 2$.

On obtient :

$$E(X(X-1)) = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}.$$

On reconnait une formule du binôme :

$$E(X(X-1)) = n(n-1)p^2\,(p+1-p)^{n-2} = n(n-1)p^2.$$

Et,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np\,((n-1)p + 1 - np).$$

D'où $\boxed{V(X) = np(1-p)}$.

□

5.7 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 5.8. *Si X est une v.a. définie sur un espace probabilisé (Ω, P) d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$