Corrigé TD 15 - Exercices 9, 10, 13, 18, 19

Exercice 9 :

Soit $R \in F$, R s'écrit $R = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dont on tire que $F = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour $S \in G$, S s'écrit $S = c \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $G = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Alors F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et écrivons $M = R + S$ avec $R \in F$ et $S \in G$. On cherche donc a, b, c, d tels que

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 2a+b+3c+d \\ -b-d & -a-2c+d \end{pmatrix}.$$

On en déduit le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a+c \\ y & = & 2a+b+3c+d \\ z & = & -b-d \\ t & = & -a-2c+d \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a+c \\ -2x+y & = & b+c+d \\ z & = & -b-d \\ x+t & = & -c+d \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a+c \\ -2x+y & = & b+c+d \\ -2x+y+z & = & c \\ -x+y+z+t & = & d \end{array} \right.$$

Le système d'inconnues a, b, c, d admet quatre pivots non nuls alors il admet une unique solution. Donc il existe une unique matrice R dans F et une unique matrice S dans F telles que $M = R + S$.

Alors $\boxed{\text{les sous-espaces } F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires.}}$

Les matrices $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$ ne sont pas colinéaires et engendrent F :

elles $\boxed{\text{forment une base de } F}$.

Les matrices $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$ ne sont pas colinéaires et engendrent G :

elles $\boxed{\text{forment une base de } G}$.

Exercice 10 :

La fonction nulle vérifie $0(x) = 0(2a - x) = 0$ pour tout x, alors $x \in F$. Soit $f \in F$, $g \in F$ et $\alpha \in R$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $(\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) = \alpha f(2a - x) + g(2a - x) = (\alpha f + g)(2a - x)$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E.

La fonction nulle vérifie $0(x) = 3b - 0(2a - x)$ si et seulement si $b = 0$. On a alors $G = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(2a - x)\}$ et pour $(f, g) \in G^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on montre que $\alpha f + g \in G$.

$$\boxed{G \text{ est un sev de } E \text{ si et seulement si } b = 0.}$$

Soit $h \in E$, on suppose qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $h = f + g$,

Alors, on a $h(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x et $h(2a - x) = f(2a - x) + g(2a - x)$ pour tout x.

Mais $f(x) = f(2a - x)$ car $f \in F$ et $g(2a - x) = -g(x)$ car $f \in G$. On obtient un système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x) + g(x) & = & h(x) \\ f(x) - g(x) & = & h(2a - x) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{1}{2}(h(x) + h(2a - x)) \\ g(x) & = & \frac{1}{2}(h(x) - h(2a - x)) \end{array} \right.$$

Soit $h \in E$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(2a - x))$ et $g(x) = \frac{1}{2}(h(x) - h(2a - x))$. On a alors $h(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x, donc $h = f + g$.

Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(2a-x)=\frac{1}{2}(h(2a-x)+h(2a-(2a-x)))=\frac{1}{2}(h(2a-x)+h(x))=f(x), \text{ donc } f\in F.$$

Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$g(x)=\frac{1}{2}(h(2a-x)-h(2a-(2a-x)))=\frac{1}{2}(h(2a-x)-h(x))=-g(x) \text{ donc } g\in G.$$

On a montré que $E=F+G$.

Soit $f\in F\cap G$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(2a-x)$ car $f\in F$ et $f(2a-x)=-f(x)$ car $f\in G$, on a donc $f(x)=-f(x)$ d'où $f(x)=0$ pour tout x. Alors $f=0$. On a montré que $F\cap G\subset\{0\}$. Et réciproquement, $0\in F$ et $0\in G$, car ce sont des sev. Donc $\{0\}\subset F\cap G$. Finalement $\{0\}=F\cap G$.

On en déduit que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

Exercice 13 :

Un vecteur $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ appartient à F si et seulement, si il existe α, β tels que $\vec{x}=\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2$ ce qui donne le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x_1&=&\alpha+\beta\\ x_2&=&\beta\\ x_3&=&0\\ x_4&=&0\end{array}\right.$. Les équations de compatibilité du système sont les équations de F

$\boxed{F:\left\{\begin{array}{rcl} x_3&=&0\\ x_4&=&0\end{array}\right.}$.

De même pour G, on écrit le système $\vec{x}=\alpha\vec{u}_3+\beta\vec{u}_4$ et on obtient $\boxed{G=\left\{\begin{array}{rcl} x_1-x_2&=&0\\ x_1-x_3&=&0\end{array}\right.}$.

Pour trouver la décomposition $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ avec $\vec{y}\in F$ et $\vec{z}\in G$. On écrit que $\vec{y}=a\vec{u}_1+b\vec{u}_2$ (car être dans F, c'est être combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$) et $\vec{z}=c\vec{u}_3+d\vec{u}_4$ avec a,b,c,d réels. On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c+d&=&x_1\\ b+c+d&=&x_2\\ c+d&=&x_3\\ d&=&x_4\end{array}\right.$$

Ce système a 4 inconnues, 4 équations et 4 pivots non nuls donc il admet une unique solution (a,b,c,d). Alors comme a et b existent et sont uniques, $\vec{y}$ existe et est unique, de même pour z. Donc la décomposition $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ avec $\vec{y}\in F$ et $\vec{z}\in G$ existe et est unique.

$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

Pour la projection sur F parallèlement à G, on résout le système : $d=x_4$ puis $c=x_3-x_4$, $b=x_2-x_3$ et $a=x_1-x_2$. Le projeté du vecteur $\vec{x}$ sur F parallèlement à G est $\vec{y}=a\vec{u}_1+b\vec{u}_2=(x_1-x_2)\vec{u}_1+(x_2-x_3)\vec{u}_2$. On obtient les coordonnées suivantes : $p(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_3,x_2-x_3,0,0)$.

Exercice 14 :

F et G sont des sev de E. Un vecteur $\vec{y}$ appartient à F si et seulement si il s'écrit $\vec{y}=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2$. De même $\vec{z}\in G$ si et seulement si il existe γ tel que $\vec{z}=\gamma e_3$.

Soit $\vec{x}\in E$. $\vec{x}$ se décompose de manière unique sur F et G si et seulement si il existe $\vec{y}\in F$et $\vec{z}\in G$ tels que $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ si et seulement si il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\vec{x}=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2+\gamma\vec{e}_3$. Ce qui est équivalent au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1&=&\alpha+\beta+\gamma\\ x_2&=&\beta+2\gamma\\ x_3&=&-\alpha\quad+3\gamma\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_3&=&\beta+4\gamma\\ x_2&=&\beta+2\gamma\\ x_3&=&-\alpha\quad+3\gamma\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3&=&\gamma\\ -x_1+2x_2-x_3&=&\beta\\ \frac{3}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3&=&\alpha\end{array}\right.$$

Le système admet une unique solution donc la décomposition existe et est unique. Alors F et G sont supplémentaires dans E.

La projection sur F parallèlement à G s'écrit $p(x_1,x_2,x_3)=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2$ ce qui donne

$$p(x_1,x_2,x_3)=(\alpha+\beta,\beta,-\alpha)=\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3,-x_1+2x_2-x_3,-\frac{3}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)$$

Matriciellement, si Y est la matrice de $p(\overrightarrow{x})$ et X la matrice de $\overrightarrow{x}$: $Y = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Ce qui donne en utilisant un produit de matrices : $Y = PX$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On trouve $q(x_1, x_2, x_3) = \gamma \overrightarrow{e}_3 = \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right).(1, 2, 3)$ ce qui donne la matrice suivante

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 :

• On montre que φ et ψ sont linéaires car .... (à faire)

• Si $P \in \operatorname{Ker}\varphi$ alors $\varphi(P) = 0$ donc $P' = (X-2)P$ mais si $P \neq 0$, on a $\deg P' < \deg P$ mais $\deg(X-2)P > \deg P$. On obtient $\deg P < \deg P$ ce qui est impossible donc $P = 0$. Alors $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}.}$

• Si $P \in \operatorname{Ker}\psi$, alors $P = (X-2)P'$. On peut écrire $P = aX^2 + bX + c$ ce qui donne $aX^2 + bX + c = (X-2)(2aX+b) = 2aX^2 + (b-4a)X - 2b$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, ce qui donne $a = 2a$ et $b = b - 4a$ et $c = -2b$. On trouve $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $c = -2b$. Alors $P = b(X-2)$. Alors $\operatorname{Ker}\psi \subset \operatorname{Vect}(X-2)$.

Réciproquement, si $P \in \operatorname{Vect}(X-2)$ alors P s'écrit $P = q(X-2)$ d'où $P' = q$ et $(X-2)P' = q(X-2) = P$ donc $\psi(P) = 0$. On en déduit que $\operatorname{Vect}(X-2) \subset \operatorname{Ker}\psi$.

Finalement, $\boxed{\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Vect}(X-2) \text{ c'est une droite vectorielle.}}$

• Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, on cherche P tel que $Q = \varphi(P)$. On écrit $Q = pX^3 + qX^2 + rX + s$ et $P = aX^2 + bX + c$. On a alors $Q = 2aX + b - (X-2)(aX^2 + bX + c) = -aX^3 + (2a-b)X^2 + (2a+2b-c)X + b + 2c$. Ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} p &=& -a \\ q &=& 2a-b \\ r &=& 2a+2b-c \\ s &=& b+2c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} r &=& 2a+2b-c \\ q &=& 2a-b \\ p &=& -a \\ 14p+5q+2r+s &=& 0 \end{array}\right.$$

La dernière équation est l'équation de $\operatorname{Im}\varphi$ qui est un hyperplan de dimension 3.

$$\boxed{\operatorname{Im}\varphi = \left\{pX^3 + qX^2 + rX - 14p - 5q - 2r | (p,q,r) \in \mathbb{R}^3\right\} = \operatorname{Vect}(X^3 - 14, X^2 - 5, X - 2).}$$

• Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $Q = pX^2 + qX + r$. On cherche $P = aX^2 + bX + c$ tel que $\psi(P) = Q$. $\psi(P) = aX^2 + bX + c - (X-2)(2aX+b) = -aX^2 + 4aX + 2b + c$. On en déduit $a = -p$ et $4a = q$ et $2b + c = r$. Il faut donc $-4p = q$. Alors $Q = pX^2 - 4pX + r$.

Donc $\boxed{\operatorname{Im}\psi \text{ a pour équation } 4p+q=0. \text{ C'est un plan de } \mathbb{R}_2[X] \text{ et } \operatorname{Im}\psi = \operatorname{Vect}(X^2-4X, 1).}$

• $\varphi \circ \psi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi \circ \psi(P) = -(X-2)(P'' - (X-2)P' + P)$.

On trouve, après calculs, $\operatorname{Ker}(\varphi\circ\psi) = \operatorname{Vect}(X-2)$ qui est une droite et $\operatorname{Im}(\varphi\circ\psi) = \operatorname{Vect}(X-2, (-X^2+4X)(X-2))$ qui est un plan.

Exercice 19 :

On montre que f est linéaire car d'après les propriétés des matrices $f(\alpha M_1 + M_2) = \alpha f(M_1) + f(M_2)$.

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. L'équation $f(M) = 0$ équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2z & = & 0 \\ 2x-4z & = & 0 \\ -y+2t & = & 0 \\ 2y-4t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2z \\ y & = & 2t \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}$$

Ce système donne $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}}$.

On a $f(M) = x\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\right)$

On constate que $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)}$

car les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. De même, pour $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.