

Chapitre 22 - Déterminants

1 Déterminant d'une matrice carrée

1.1 Linéarité par rapport aux colonnes de la variable

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note ses colonnes $M = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ et on note C'_j une autre colonne.

Définition 1.1. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est linéaire par rapport à la colonne C_j si pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, pour toute matrice M et pour toute colonne C'_j ,

$$f \left(C_1|C_2|\dots|\alpha C_j + C'_j|\dots|C_n \right) = \alpha f \left(C_1|C_2|\dots|C_j|\dots|C_n \right) + f \left(C_1|C_2|\dots|C'_j|\dots|C_n \right)$$

1.2 Antisymétrie par rapport aux colonnes

Définition 1.2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable si pour toute matrice $M = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ et pour tous indices i, j

$$f \left(C_1|C_2|\dots|C_i|\dots|C_j|\dots|C_n \right) = -f \left(C_1|C_2|\dots|C_j|\dots|C_i|\dots|C_n \right)$$

1.3 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. *f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de la matrice,*
2. *f est antisymétrique par rapport aux colonnes de la matrice,*
3. *$f(I_n) = 1$.*

Cette application s'appelle déterminant et on la note $\det(M)$ pour une matrice carrée M .

notations 1.3. Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix},$

on note $\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

1.4 Dimension 2 et 3

Proposition 1.2. *Pour $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a*

$$\det M = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Proposition 1.3. Pour $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$,

on a

$$\det(M) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_1 w_2 v_3 - v_1 u_2 w_3 - w_1 v_2 u_3.$$

1.5 Propriétés du déterminant

Proposition 1.4. Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

$$\det \left(C_1 | C_2 | \dots | C_{i-1} | C | C_{i+1} | \dots | C_{j-1} | C | C_{j+1} | \dots | C_n \right) = 0$$

Proposition 1.5.

Si une des colonnes d'une matrice est combinaison linéaire des autres alors son déterminant est nul.

Proposition 1.6. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\det(\lambda.A) = \lambda^n \det(A)$$

2 Déterminant et opérations élémentaires

2.1 Opérations élémentaires sur les colonnes

Proposition 2.1. *L'opération élémentaire sur les matrices $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, ne change pas la valeur du déterminant.*

Proposition 2.2. *L'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant.*

Proposition 2.3. *L'opération $C_i \leftarrow \mu C_i$, $\mu \in \mathbb{K}$ multiplie le déterminant par μ .*

Proposition 2.4. *Soit M une matrice carrée et E_1 une matrice d'opération élémentaire.*

On a $\det(M.E_1) = \det(M) \det(E_1)$.

Si E est une matrice produit de matrices d'opérations élémentaires, alors $\det(M.E) = \det(M) \det(E)$.

Proposition 2.5. *Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure ou supérieure est le produit de ses coefficients diagonaux.*

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \alpha_i$$

Application : Calcul du déterminant par opérations sur les colonnes.

2.2 Matrices inversibles et déterminant

Théorème 2.6. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.*

2.3 Développement selon une ligne ou une colonne

Proposition 2.7. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$.*

On note Δ_{ij} le déterminant extrait de A en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

On peut calculer $\det A$ en développant par rapport à n'importe quelle ligne p :

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{pj} (-1)^{p+j} \Delta_{pj} \text{ pour tout } p \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

ou en développant par rapport à n'importe quelle colonne q :

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{iq} (-1)^{i+q} \Delta_{iq} \text{ pour tout } q \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Lemme 2.8. *Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, on a*

$$\det \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det B$$

3 Déterminant d'un produit de matrices

3.1 Déterminant d'un produit

Théorème 3.1. *Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

3.2 Déterminant de l'inverse

Théorème 3.2. *Une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et dans ce cas, on a*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

3.3 Déterminant de la transposée

Théorème 3.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a*

$$\det A^T = \det A.$$

3.4 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et \mathcal{B} une base E . Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une famille de E .

On appelle déterminant de (x_1, x_2, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det A \quad \text{où} \\ A = M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Proposition 3.4. *On a $\det_B(B) = 1$.*

3.5 Caractérisation des bases

Théorème 3.5. *Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n muni d'une base B .*

(u_1, u_2, \dots, u_n) est une base de E si et seulement si $\det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0$.

4 Déterminant d'un endomorphisme

4.1 Définition

Définition 4.1.

On appelle déterminant d'un endomorphisme f de E le déterminant de la matrice de f dans une base B de E :

$$\det f = \det(M_B(f)).$$

La valeur du déterminant ne dépend pas de la base choisie.

4.2 Propriétés

Proposition 4.1. *Pour tout $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,*

$$\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g \qquad \det(\alpha f) = \alpha^n \det f$$

Corollaire 4.2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.*

f est bijective si et seulement si $\det f \neq 0$. Alors
$$\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}.$$

Théorème 4.3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n finie. Soit B une base de E et x_1, x_2, \dots, x_n une famille de vecteurs de E . On a*

$$\det_B(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = \det f \times \det_B(x_1, x_2, \dots, x_n).$$