Informatique - Congestion de l'autoroute A7 - Décryptage

On modélise le trafic routier de manière macroscopique en considérant que l'écoulenent du trafic sur une voie est similaire à celui d'un fluide dans un canal. L'écoulement est supposé homogène et unidimensionnel suivant la variable x, son évolution temporelle étant représentée par la variable t.

On étudie les trois grandeurs suivantes :

— $Q(x,t)$: débit en nombre de véhicules par seconde à la position x et au temps t,

— $C(x,t)$: densité linéique de véhicules (appelée concentration dans la suite), c'est à dire nombre de véhicules par mètre à la position x et au temps t,

— $v(x,t)$: vitesse moyenne des véhicules en mètre par seconde à la position x et au temps t. On utilise en général la vitesse moyenne spatiale qui est la moyenne des vitesses des véhiicules entre x et $x+\Delta x$ à l'instant t plutôt que la vitesse moyenne temporelle qui est la moyenne des vitesses des véhicules passant en un point x entre les instants t et $t+\Delta t$.

Les trois variables Q, C, v sont reliées entre elles par des lois d'écoulement bâties sur le même principe que les lois de la mécanique des fluides :

Équation de conservation du nombre de véhicules

On considère un volume de contrôle entre les temps t et $\mathrm{d}t$, pour la portion de route entre x et $x+\mathrm{d}x$. D'après la définition de Q, le nombre de véhicules entrant (algébriquement) dans la portion de route de longueur $\mathrm{d}x$ entre t et $t+\mathrm{d}t$ est donné par :

$$Q(x,t)\mathrm{d}t - Q(x+\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}t = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

(on néglige la variation de Q avec t : approximation de premier ordre).

Ce nombre est égal à la variation du nombre de véhicules dans la longueur de route $\mathrm{d}x$ entre t et $t+\mathrm{d}t$, soit

$$(C(x,t+\mathrm{d}t)-C(x,t))\mathrm{d}x = \frac{\partial C}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Finalement, on a : $-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial C}{\partial t}(x,t)$ soit l'équation de conservation suivante :

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial C}{\partial t}(x,t) = 0}.$$

Équation du débit

On considère une surface de contrôle à la position x entre les temps t et $\mathrm{d}t$. Le nombre de véhicules qui traversent cette surface doit être égal, par définition, à $Q(x,t)\times \mathrm{d}t$ (on a fait ici une première approximation : le débit ne varie pas en temps pendant l'instant $\mathrm{d}t$: $Q(x,t) \simeq Q(x,t+\mathrm{d}t)$).

Par ailleurs, les véhicules qui vont traverser la surface de contrôle sont tous ceux qui sont situés avant cette surface entre les positions $x - v(x,t)\times \mathrm{d}t$ et x (on fait l'approximation que la vitesse est constante au voisinage de x : $v(x+\mathrm{d}x,t) \simeq v(x,t)$). Le nombre de ces véhicules est $C(x,t)\times v(x,t)\times \mathrm{d}t$ (où on a supposé $C(x,t) \simeq C(x-\mathrm{d}x,t)$ et également $C(x,t) \simeq C(x,t+\mathrm{d}t)$).

On trouve donc l'équation du débit : $\boxed{Q(x,t) = C(x,t)\times v(x,t)}$.

Relation fondamentale

On a donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial C}{\partial t}(x,t) & = & 0 \\ Q(x,t) - C(x,t)\times v(x,t) & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système doit être complété par une troisième équation indépendante qui décrit le comportement des véhicules. Cette troisième équation est appelée «relation fondamentale du modèle». Il s'agit d'une relation qui exprime le débit Q en fonction de la concentration C.

Cette relation est construite de manière empirique. Un exemple de cette relation est donné ci-dessous.

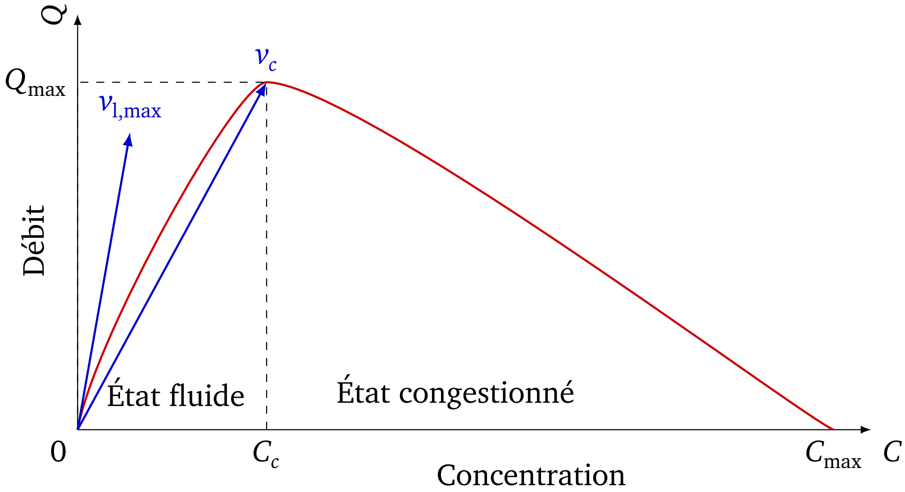

Figure : Diagramme fondamental : relation entre le débit Q et la concentration C

— Lorsque le nombre de véhicules est très faible, les interactions entre les véhicules sont limitées. Chaque véhicule peut atteindre sa vitesse maximale appelée vitesse libre maximale : $v_{l,max}$.
— Lorsque la concentration est faible, les véhicules peuvent encore rouler à une vitesse proche de leur vitesse maximale mais sans l'atteindre : le trafic est dit «fluide»,
— Il existe une concentration appelée «concentration critique» C_c pour laqelle le débit est maximal Q_{max},
— Lorsque la concentration augmente, les interactions s'amplifient ce qui entraîne une diminution franche de la vitesse moyenne des véhicules. La vitesse devient décroissante en fonction de la concentration. Le trafic est dit «congestionné»,
— Il existe un cas limite correspondant à la formation d'une file d'attente : la vitesse devient nulle et la concentration est maximale C_{max}.

Système à résoudre

On a donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)+\frac{\partial C}{\partial t}(x,t) & = & 0 \\ Q(x,t)-C(x,t)\times v(x,t) & = & 0 \\ Q(x,t) & = & \varphi(C(x,t)) \end{array}\right.$$

Bibliographie L. LECLERCQ - Modélisation dynamique du trafic et applications à l'estimation du bruit routier - Thèse Insa de Lyon - 2002 - Chapitre 4 - `http://theses.insa-lyon.fr/publication/2002ISAL0070/these.pdf`