

Chapitre 17 - Espaces Vectoriels de Dimension Finie

On note \mathbb{K} pour \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Bases en dimension finie

1.1 Dimension finie

Définition 1.1. On dit qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple :

* \mathbb{R}^2 est de dimension finie car
 $(1,0), (0,1)$ est une famille génératrice finie à 2 vecteurs
 tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$
 (Card famille = 2)

* \mathbb{R}^3 est de dimension finie car
 $(1,0,0), (0,1,0), (0,2,0), (0,3,0), (0,4,0), (0,0,0), (0,0,1)$
 est une famille génératrice à 7 vecteurs
 (mais elle n'est pas libre)

* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ens des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R})
 est de dimension infinie

* $\mathbb{R}[x]$ l'ens de tous les polynômes
 est de dimension infinie

Preuve : Supposons que (P_1, P_2, \dots, P_m) est une famille génératrice finie de $\mathbb{R}[x]$. On note q le plus grand des m degrés $\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_m$

$$q = \max(\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_m)$$

alors x^{q+1} ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de P_1, \dots, P_m ce qui contredit le fait que (P_1, \dots, P_m) est génératrice

- * $\mathbb{R}_3[x]$ est de dimension finie car $(1, x, x^2, x^3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$
- * $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est de dimension infinie.

1.2 Existence de bases en dimension finie

Théorème 1.1 (Théorème de la base incomplète). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Corollaire 1.2. Tout \mathbb{K} -espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.

$E = \{ \vec{0} \}$
l'espace nul

Corollaire 1.3 (Théorème de la base extraite). De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E , on peut extraire une base de E .

Remarques :

on prend E engendré (g_1, g_2, \dots, g_p) famille génératrice
 (x_1, x_2, \dots, x_r) une famille libre.

on étudie $(x_1, x_2, \dots, x_r, g_1) \rightarrow$ liée (pas libre)
 $g_1 = \sum_{i=1}^r x_i$
 libre \swarrow $(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1})$ \swarrow (x_1, x_2, \dots, x_r) libre

et on recommence avec g_2

exemple : Dans \mathbb{R}^4 , et on pose

$$G = \text{Vect}((0, 0, 0, 0), (-1, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (2, -2, 0, 0), (2, 0, -1, 0), (0, 2, -1, 0))$$

G est un sev donc G est un ev qui a une famille génératrice à 6 vecteurs donc G est de dimension finie. Cherchons une base :

on pose $x_1 = (1, -1, 0, 0)$ (x_1) est une famille libre car $x_1 \neq 0$

$x_2 = (1, 0, 0, 1)$ (x_1, x_2) est une famille libre (pas colinéaires)

$x_3 = (2, -2, 0, 0)$ est combinaison linéaire de (x_1, x_2) $x_3 = 2x_1$

$x_4 = (2, 0, -1, 0)$. On étudie (x_1, x_2, x_4) : on suppose que

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_4 = \vec{0} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \text{ réels}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \text{ alors } (x_1, x_2, x_4) \text{ est libre}$$

$x_5 = (0, 2, -1, 0)$ est combinaison linéaire
de (x_1, x_2, x_4) : $x_5 = x_4 - 2x_2$

$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ sont combinaisons linéaires
de (x_1, x_2, x_4) donc (x_1, x_2, x_4)
est une famille génératrice de G
et (x_1, x_2, x_4) est libre alors c'est une base de G

1.3 Cardinal des familles libres

Lemme 1.4. Si (x_1, x_2, \dots, x_n) est une famille libre et la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ est liée, alors x_{n+1} est combinaison linéaire de (x_1, x_2, \dots, x_n) i.e. $x_{n+1} \in \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Démonstration.

Il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \vec{0}$ car la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ est liée.

Si $\alpha_{n+1} = 0$, alors on a la relation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \vec{0}$. Comme la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre, on obtient $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i = 0$. C'est une contradiction avec l'hypothèse que les scalaires $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n+1}$ sont non tous nuls.

Donc, $\alpha_{n+1} \neq 0$, alors on peut écrire $x_{n+1} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} x_i$. □

Proposition 1.5. Si E est un espace vectoriel admettant une famille génératrice à n vecteurs avec n entier non nul, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

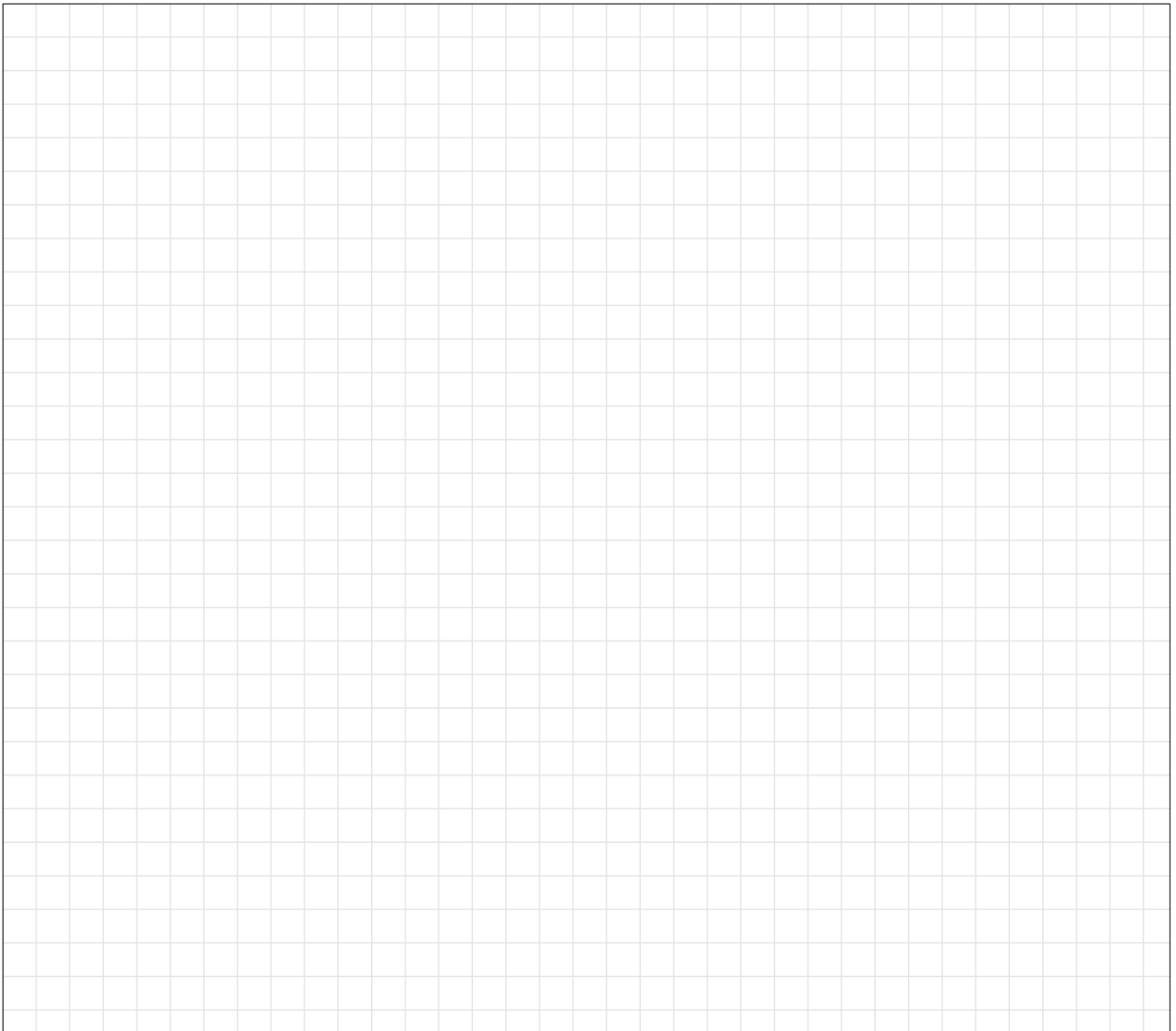
Corollaire 1.6. Dans un espace de dimension finie, toute famille libre a moins d'éléments qu'une famille génératrice.

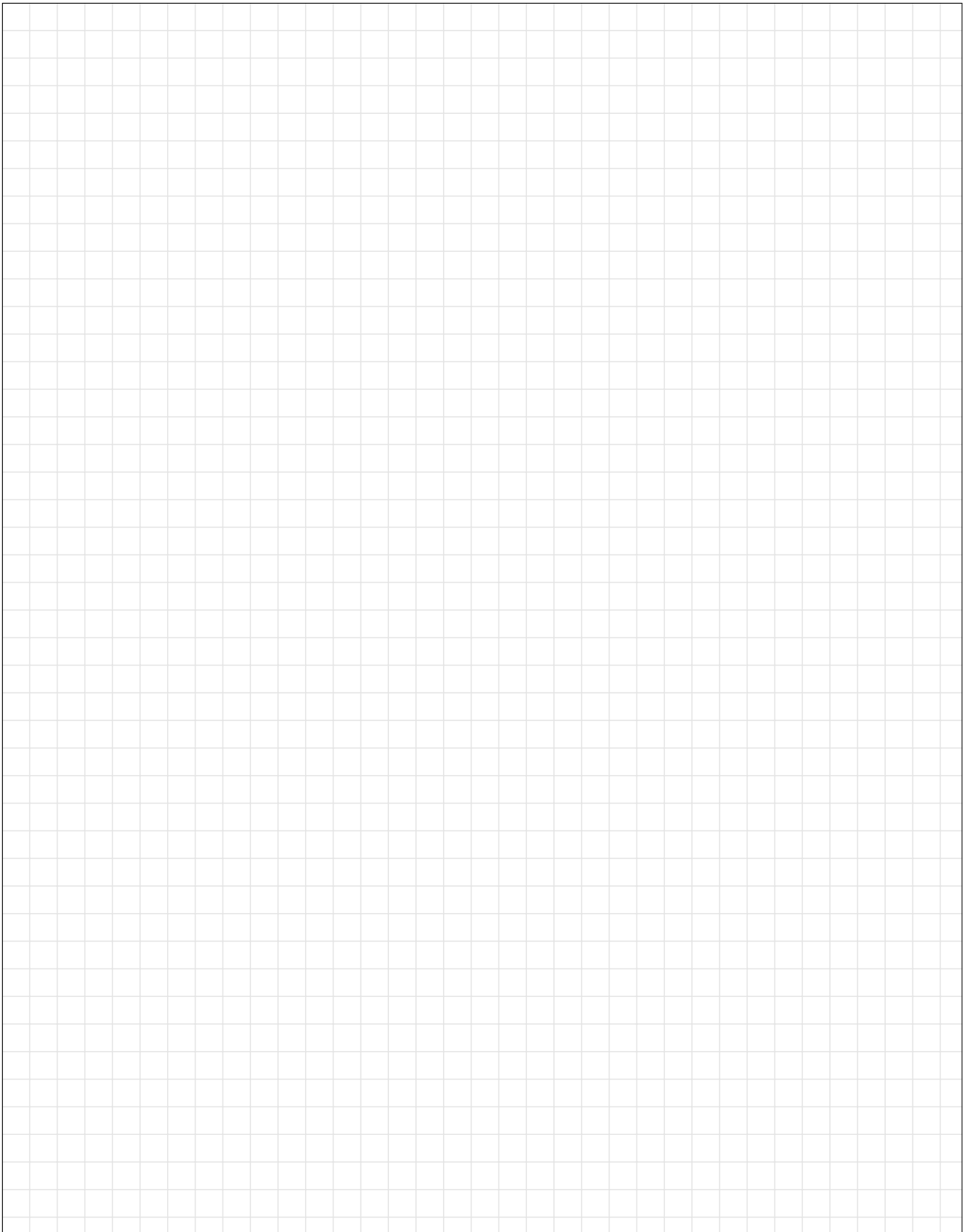
B_1 base de E et B_2 base de E avec E de dimension finie

B_1 est libre et B_2 est génératrice $|B_1| \leq |B_2|$

B_1 est génératrice de E et B_2 est libre $|B_2| \leq |B_1|$

$$\Rightarrow |B_1| = |B_2|$$





1.4 Dimension

Théorème 1.7. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.2. Ce nombre n s'appelle la dimension de E sur \mathbb{K} noté $n = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim E$.
Par convention, $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Exemple 1.1. On a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n + 1$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

- * L'espace nul $\{\vec{0}\}$ est le seul espace de dimension nulle
- * $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ car une base de \mathbb{R}^2 est $((1,0), (0,1))$
- * $\dim \mathbb{R}^3 = 3$
- * $\dim \mathbb{C}^2$? $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}\}$
donc une base de \mathbb{C}^2 est $((1,0), (0,1))$
car tout couple s'écrit $(z_1, z_2) = z_1(1,0) + z_2(0,1)$
et cette écriture est unique.
donc $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$
si les scalaires sont des nombres complexes
- Mais $\mathbb{C}^2 = \{(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \mid (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4\}$
et $(z_1, z_2) = x_1(1,0) + y_1(i,0) + x_2(0,1) + y_2(0,i)$
et il y a unicité donc les 4 vecteurs forment une base
donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$
si les scalaires sont des réels
- * $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ car une base est $(1, X, X^2)$ car des polynômes de degré ≤ 2

*

Exemple Donner la dimension de
 $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$ homogène = sans 2nd membre nul

♥ F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène donc F est un sev de \mathbb{R}^4

On résout : le système est échelonné il ya 2 pivots
 4 inconnues donc deux inconnues secondaires (paramètres) dim F
 On paramétrise la solution $z = \alpha \quad y = \beta$

$$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \\ t = \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z, t) = \alpha(1, 0, 1, 1) + \beta(-2, 1, 0, 1)$$

alors $F = \text{Vect}((1, 0, 1, 1), (-2, 1, 0, 1))$

Ces deux vecteurs sont une famille génératrice de F
 et ils sont libres car :

ils ne sont pas colinéaires

Méthode à connaître

$$\alpha(1, 0, 1, 1) + \beta(-2, 1, 0, 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc les 2 vecteurs sont une base de F

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} F = 2$$

Exemple Donner la dimension de

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

homogène = sans 2nd membre nul

en fait, $F = \text{Ker } \varphi$ avec $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z, t) \mapsto (x + 2y - z, y + z - t)$

1.5 Familles en dimension finie

Théorème 1.8. Si E est un espace vectoriel de dimension FINIE n et \mathcal{F} une famille de n vecteurs de E , alors \mathcal{F} est une base de E si et seulement si \mathcal{F} est libre si et seulement si \mathcal{F} est génératrice de E .

Si E est de dim finie, $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ n vecteurs avec $n = \dim E$.

\mathcal{F} est une base \iff \mathcal{F} est libre $\overset{\text{H.1.8}}{\iff} \mathcal{F}$ est libre et \mathcal{F} est génératrice $\overset{\text{H.1.8}}{\iff} \mathcal{F}$ est génératrice
 avec $|\mathcal{F}| = n$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, montrons que $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$ est une base de E

Ici E est de dimension 3 et la famille a 3 vecteurs

Montrons qu'elle est génératrice de E .

Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$. On cherche 3 scalaires (u, v, w) tels que $P = u(X-1) + v(X^2+7X-2) + w(X^2+3)$

$$aX^2 + bX + c = (v+w)X^2 + (u+7v)X + 3w - 2v - u$$

$$\iff \begin{cases} v+w = a \\ u+7v = b \\ -u-2v+3w = c \end{cases} \iff \begin{cases} u+7v = b \\ v+w = a \\ -2w = c+b-5a \end{cases}$$

le système est échelonné et il n'y a pas d'équation de compatibilité donc il a au moins une solution.

Ainsi tout vecteur P de $\mathbb{R}_2[X]$ est combinaison linéaire des 3 vecteurs $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$

donc la famille $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$

Comme elle a 3 vecteurs et $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, montrer que
 $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$ est une base de E

Montrer que la famille est libre.

on considère 3 scalaires $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$

$$u(X-1) + v(X^2+7X-2) + w(X^2+3) = 0$$

$$\Rightarrow (v+w)X^2 + (u+7v)X + 3w - u - 2v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v+w=0 \\ u+7v=0 \\ -u-2v+3w=0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{+L_2 \\ -5L_1}]{L_3} \begin{cases} u+7v=0 \\ v+w=0 \\ -2v=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u=v=w=0 \text{ donc la famille est libre.}$$

La famille est libre et a 3 vecteurs dans un espace
 $E = \mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3 donc c'est une base

2 Relations entre les dimensions

2.1 Rappel : Image d'une base par une application linéaire

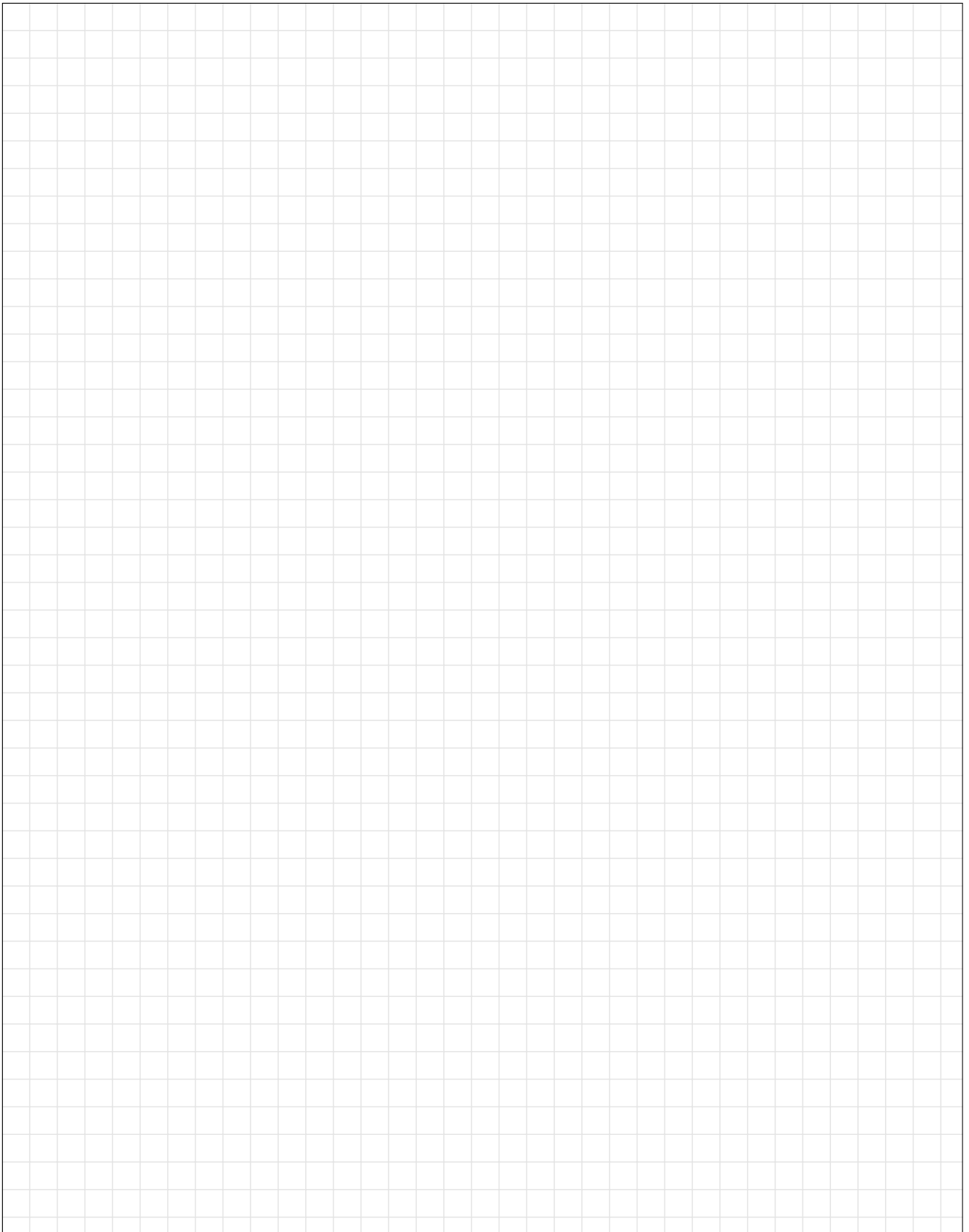
Théorème 2.1. Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E .

- La famille $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
- u est surjective $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est génératrice de F .
- u est injective $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est libre dans F .
- u est bijective $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une base de F .

Corollaire 2.2. Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

u est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F .





2.2 Dimension et isomorphisme

Proposition 2.3. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Un espace vectoriel F est isomorphe à E si et seulement si F est de dimension finie et $\dim F = \dim E$.

Corollaire 2.4. Tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .

il existe une application linéaire bijective de E dans F

Preuve
Remarque: Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et φ bijective
et si $\dim E = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors soit $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ une base de E .

Alors $(\varphi(e_i))_{i=1, \dots, n}$ est une base de F car φ est un isomorphisme.

Fa une base qui a n vecteurs alors F est de dimension finie et $\dim F = n = \dim E$.

Exemple: Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $E = \{ (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \}$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$. (a, b, c fixes).

Montrons que $\dim_{\mathbb{C}} E = 2$

Soit $\varphi: E \rightarrow \mathbb{C}^2$
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ ① φ est linéaire (à prouver proprement)
 $\varphi(\alpha(u_n) + (v_n)) = \alpha \varphi(u_n) + \varphi(v_n)$

② une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E appartient au noyau de φ

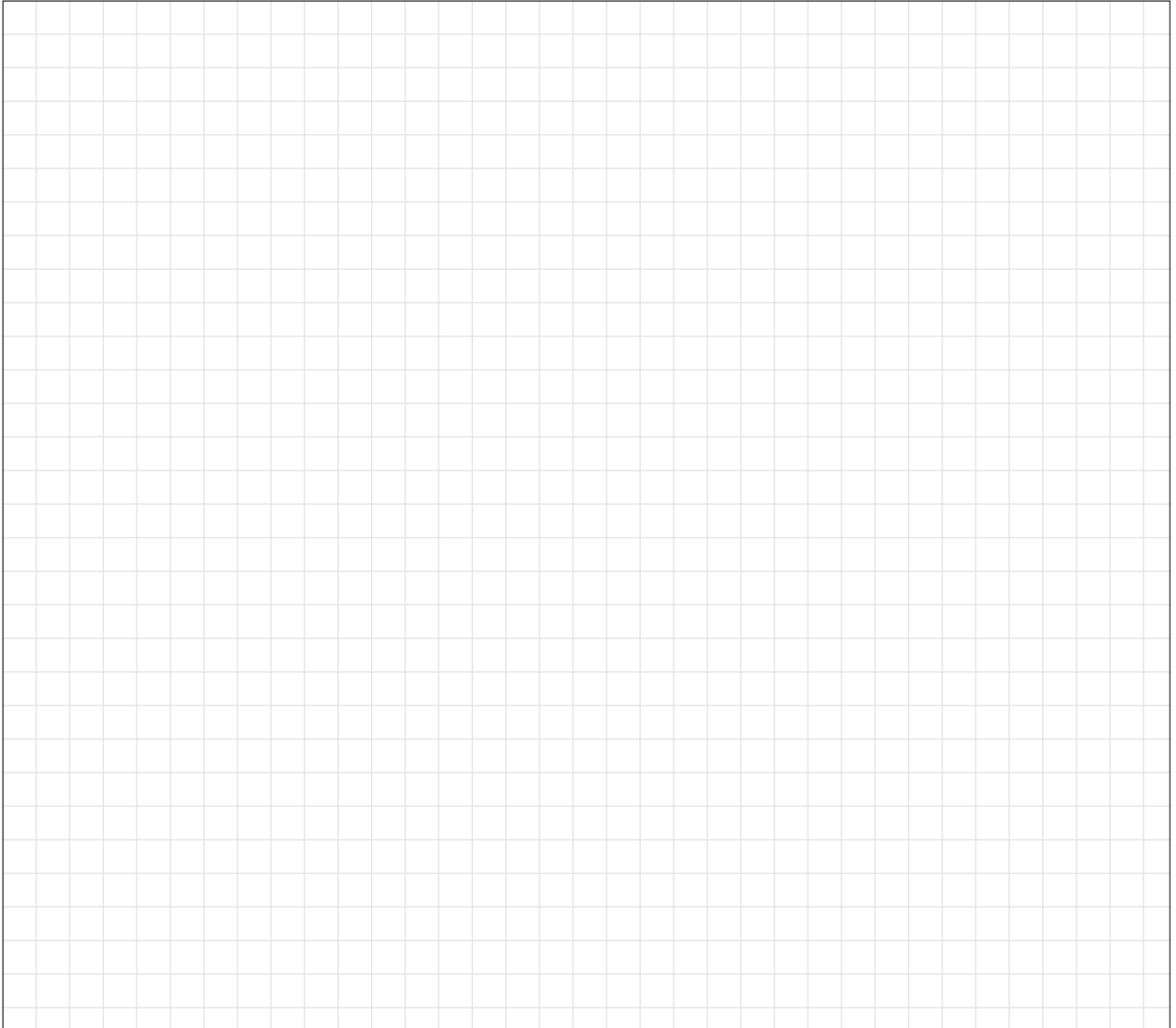
$\Leftrightarrow \varphi(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_0 = u_1 = 0$ alors par récurrence double montrons que (u_n) est nulle. On suppose que $u_n = u_{n+1} = 0$ alors $a u_{n+2} = 0$ et $a \neq 0$ donc $u_{n+2} = 0$ et $u_{n+1} = 0$. La propriété est initiale et héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 0$ donc $\text{Ker } \varphi = \{ \vec{0} \}$

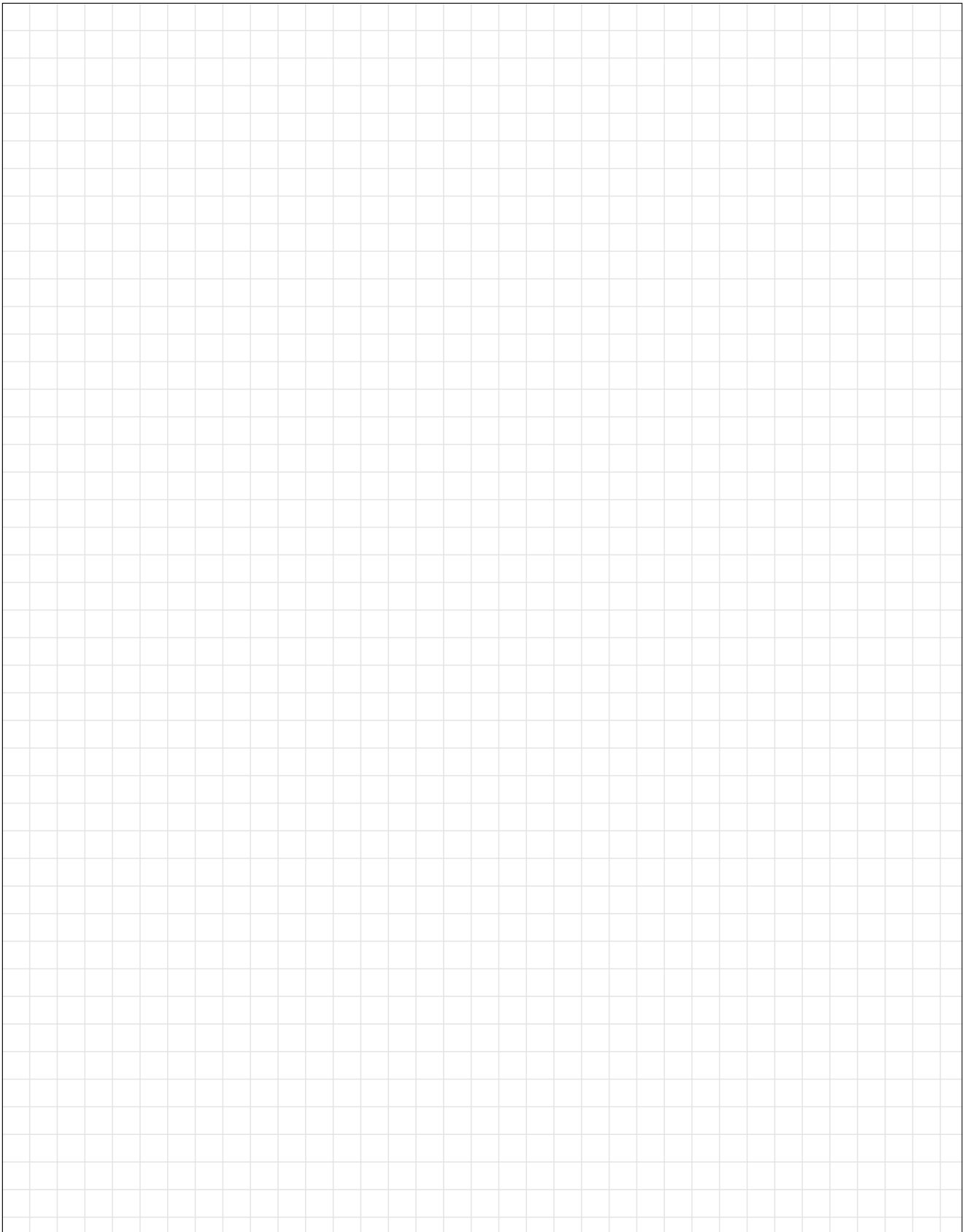
③ Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. On construit une suite (u_n) par $u_0 = z_1, u_1 = z_2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -\frac{b}{a} u_{n+1} - \frac{c}{a} u_n$
on a trouvé une suite $(u_n) \in E$ et $\varphi(u_n) = (z_1, z_2)$ par construction
Donc (z_1, z_2) a un antécédent dans E : φ est surjective.

④ Alors φ est isomorphisme de E dans \mathbb{C}^2 : $\dim_{\mathbb{C}} E = 2$

(voir le chap 6 suites récurrentes linéaires)

~~2.3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels~~





2.4 Dimension des sous-espaces vectoriels

Théorème 2.5. Si E est un espace vectoriel de dimension finie n , alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

De plus, F est égal à E si et seulement si $\dim F = \dim E$.

Exemple dans $E = \mathbb{R}^3$: $\dim E = 3$

les sev de \mathbb{R}^3 sont de dimension :

dimension 0 : un seul sev $\{\vec{0}_E\}$

dimension 1 : une droite : $\text{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$

dimension 2 : un plan $\text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ avec \vec{v} et \vec{w} libres

dimension 3 : un seul sev \mathbb{R}^3

Idem dans un espace de dimension n : si $\dim E = n$

dimension 0 : $\{\vec{0}_E\}$

1 : les droites vectorielles

$n-1$: les hyperplans : sev de dimension $n-1$

n : un seul sev : E

Exemple : Déterminer la dimension de

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[x] \mid \int_0^2 P = 0 \right\}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$ avec $P = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + b$
 α, β, γ, b réels

$$P \in H \Leftrightarrow \int_0^2 P = 0 \xRightarrow{\text{eq de } H} \int_0^2 (\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + b) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha + \frac{8}{3}\beta + 2\gamma + 2b = 0 \quad \text{équation de } H$$

$$\Leftrightarrow b = -2\alpha - \frac{4}{3}\beta - \gamma$$

$$\Rightarrow P = \alpha(x^3 - 2) + \beta(x^2 - \frac{4}{3}) + \gamma(x - 1)$$

Donc $H = \text{Vect} \left((x^3 - 2), (x^2 - \frac{4}{3}), (x - 1) \right)$

ces 3 polynômes sont une famille génératrice de H

Les 3 polynômes sont de degré échelonné (tous différents)
 alors ils forment une famille libre

donc $(x^3 - 2, x^2 - \frac{4}{3}, x - 1)$ est une base de H

et $\dim H = 3$ dans $\mathbb{R}_3[x]$ de dimension 4
 donc H est un hyperplan.

2.5 Dimension de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 2.6. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

♥ F et G sont supplémentaires dans $E \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ E = F + G \end{cases}$

$E = F \oplus G$

Théorème 2.7. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

♥ Si (f_1, f_2, \dots, f_p) est une base de F et (g_{p+1}, \dots, g_n) est une base de G , alors

$$E = F \oplus G \iff (f_1, f_2, \dots, f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n) \text{ est une base de } E.$$

On dit que cette base est adaptée à la décomposition en sous-espaces supplémentaires.

Théorème 2.8.

♥ Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Rappel

$$E = F \oplus G \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} E = F + G & (\text{la décomposition existe}) \\ F \cap G = \{\vec{0}\} & (\text{la décomposition est unique}) \end{cases}$$

Exemple : $E = \mathbb{R}_2[x]$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid \int_0^2 P = 0\}$
 et $F = \text{Vect}(X-7)$ $\forall \gamma \quad F \oplus H = E$

E est un ev de dimension finie et $\dim E = 3$

F est un ser de E et $\dim F = 1$

on étudie H : soit $P = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$P \in H \iff \int_0^2 P(t) dt = 0 \iff \frac{8}{3}a + 2b + 2c = 0$$

$$\iff \exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a = -\frac{3}{4}\beta - \frac{3}{4}\gamma \\ b = \beta \\ c = \gamma \end{cases}$$

$$\iff \exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2, P = \beta \left(-\frac{3}{4}x^2 + x\right) + \gamma \left(-\frac{3}{4}x^2 + 1\right)$$

Donc $H = \text{Vect}\left(\left(-\frac{3}{4}x^2 + x\right), \left(-\frac{3}{4}x^2 + 1\right)\right)$ et des 2 polynômes ne sont pas colinéaires donc $\dim H = 2$

$$\text{on a } \dim F + \dim H = 1 + 2 = 3 = \dim E$$

soit $P \in F \cap H$ alors $P = u(X-7)$ avec $u \in \mathbb{R}$

$$\text{et } \int_0^2 P(t) dt = 0 \Rightarrow u \int_0^2 (t-7) dt = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow P = 0$$

donc $F \cap H = \{\vec{0}\}$ et $\dim F + \dim H = \dim E$ alors $E = F \oplus H$

Exemple Dans \mathbb{R}^3 , montrer que F d'équation $2x + 3y - z = 0$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ sont supplémentaires.

G est un s.v. de \mathbb{R}^3 par définition de dimension 1 car $(1, 1, 1) \neq \vec{0}$

On résout l'équation de F : $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow z = 2x + 3y$

$$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui prouve que } F = \text{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 3))$$

Les deux vecteurs sont échelonnés donc ils sont libres donc ils sont une base de F et $\dim F = 2$

Alors $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3$

Soit $\vec{u} \in F \cap G$ avec $\vec{u} = (x, y, z)$ et $2x + 3y - z = 0$

et $(x, y, z) = \alpha (1, 1, 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a donc $2\alpha + 3\alpha - \alpha = 0$

soit $\alpha = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$. Réciproquement $\vec{0} \in F \cap G$

Alors $F \cap G = \{\vec{0}\}$ ensemble $F \cap G = \{\vec{0}\}$

Par théorème, $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $\{\vec{0}\} \subset F \cap G$

Remarque : on a évité d'avoir à montrer que tout vecteur de \mathbb{R}^3 est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G

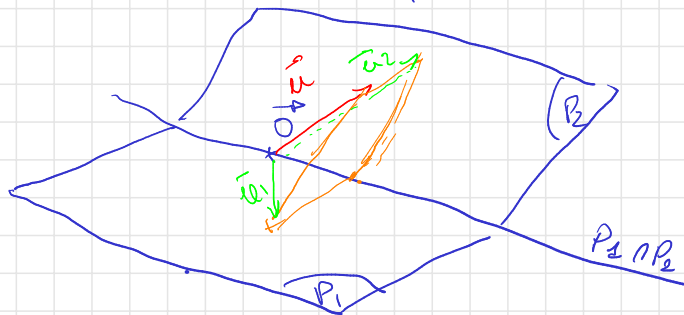
2.6 Dimension d'une somme

Proposition 2.9 (Formule de Grassmann).

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Alors $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Exemple: Soient P_1 et P_2 deux plans vectoriels de \mathbb{R}^3 non confondus.



on a $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$ et $\dim(P_1 + P_2) = 3 = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 \cap P_2)$

Th de Batiște

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G$$

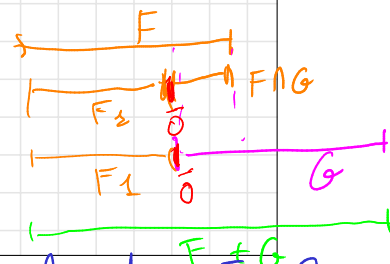
$$\Leftrightarrow F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$$

Preuve: $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F car $F \cap G$ est un sev de F et F est de dimension finie

$$F = F_1 \oplus (F \cap G)$$

alors $\dim(F) = \dim(F_1) + \dim(F \cap G)$



Montrons que $F + G = F_1 \oplus G$ ① F_1 et G sont inclus dans $F + G$

② $F_1 \cap G = \{0\}$ car $F_1 \cap (F \cap G) = \{0\}$

③ soit $x \in F + G$ avec $x = y + z$, $y \in F$ et $z \in G$. Mais $y \in F = F_1 \oplus (F \cap G)$ alors y s'écrit $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F_1$ et $y_2 \in F \cap G \subset G$

d'où $x = y_1 + y_2 + z$ avec $y_1 \in F_1$ et $y_2 + z \in G$

donc $x \in F_1 + G$ On a montré $F + G = F_1 + G$

donc $F + G = F_1 \oplus G \Rightarrow \dim(F + G) = \dim(F_1) + \dim G$

$\Rightarrow \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

3 Rang

3.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.1. On appelle rang d'une famille finie de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_p) d'un espace vectoriel E , la dimension du sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs et on le note $rg(x_1, x_2, \dots, x_p)$:

$$rg(x_1, x_2, \dots, x_p) = \dim(\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)).$$

Lemme 3.1. Pour une famille finie de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_p) d'un espace vectoriel E de dimension finie $n = \dim E$, on a

$$rg(x_1, x_2, \dots, x_p) \leq p \quad \text{et} \quad rg(x_1, x_2, \dots, x_p) \leq n$$

Théorème 3.2. Une famille est libre si et seulement si elle de rang maximal, c'est à dire si son rang est égal à son nombre de vecteurs.

Lemme 3.3. Soit (x_1, x_2, \dots, x_p) une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour tous indices i, j :

$$rg(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = rg(x_1, x_2, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots, x_p)$$

Exemple $rg((1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (1, 1, 1, 0))$?

Ce sont 3 vecteurs de \mathbb{R}^4 : (e_1, e_2, e_3)

$\dim(\text{Vect}(e_1, e_2, e_3))$? on veut le nombre de vecteurs dans une base de $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

Donc, on extrait une base de la famille génératrice (e_1, e_2, e_3)

Vérifions que (e_1, e_2, e_3) est libre :

on suppose que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

donc (e_1, e_2, e_3) est libre

et (e_1, e_2, e_3) est génératrice de $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ alors

c'est une base et $\dim \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = 3$

$\Rightarrow rg(e_1, e_2, e_3) = 3$

Exemple: Calculons le rang de la famille
 $(\overset{P_1}{x^2-7x+1}, \overset{P_2}{5x+2}, \overset{P_3}{x^3-1}, \overset{P_4}{x^2-2x+3})$ dans $(\mathbb{R}_3[x])$
 on va utiliser le théorème:

$$\text{rg}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \text{rg}(\text{matrice des 4 polynômes})$$

ici

$$\text{le rang est } \text{rg} \begin{pmatrix} \overset{P_1}{0} & \overset{P_2}{0} & \overset{P_3}{1} & \overset{P_4}{0} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{matrix}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$L_1 \leftarrow L_3 + 7L_2$
 $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

$$\text{alors } \dim(\text{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)) = 3$$

3.2 Rang d'une application linéaire

u est une application linéaire

Définition 3.2. Soient E et F deux espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de l'application linéaire u , la dimension de l'image de u dans F .

On note $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u)$ lorsque cette dimension est finie et on dit que u est de rang fini.

Remarque 3.1. Si $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.

Il s'ensuit que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.

Exemple $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, x + y - z)$
 $\text{rg}(f)?$

f est linéaire car les coordonnées de l'image $f(x, y, z)$ sont des combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent (x, y, z) alors f est linéaire

On a $f(x, y, z) = x(1, 1) + y(2, 1) + z(-1, -1)$
 alors $\text{Im } f = \text{Vect}((1, 1), (2, 1), (-1, -1))$
 $= \text{Vect}((1, 1), (2, 1))$

les deux vecteurs ne sont pas colinéaires alors ils forment une base de $\text{Im } f$ et $\text{rg}(f) = 2 = \dim(\text{Im } f)$

Lemme 3.4. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $n = \dim E$ et $p = \dim F$, et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $\text{rg}(u) \leq n$ et $\text{rg}(u) \leq p$.



Théorème 3.5. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux applications linéaires de rang fini, $v \circ u$ alors $v \circ u$ est de rang fini et $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

Démonstration. On a toujours $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$: pour toute image $y \in \text{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(u(x))$ donc $y \in \text{Im } v$ ce qui prouve l'inclusion.

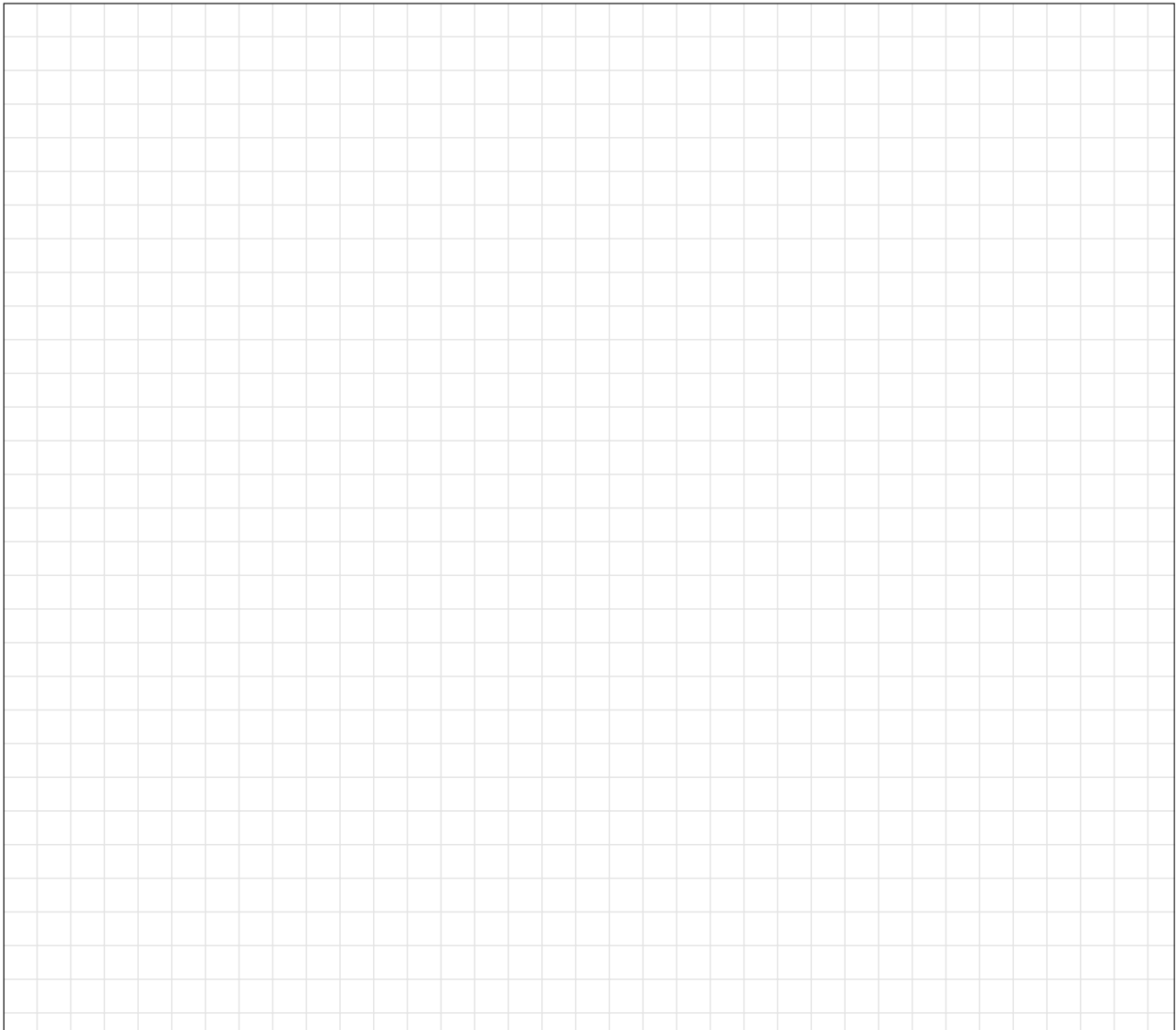
On en déduit $\dim(\text{Im}(v \circ u)) \leq \dim(\text{Im } v)$ soit $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(v)$.

Par ailleurs, soit (f_1, f_2, \dots, f_p) une base de $\text{Im } u$ avec $p = \text{rg}(u)$. Soit $z \in \text{Im}(v \circ u)$ alors il existe

$x \in E$ tel que $z = v(u(x))$. On a $u(x) \in \text{Im } u$ donc $u(x)$ s'écrit $u(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k$ avec $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ des

scalaires. On peut donc écrire $z = \sum_{k=1}^p \lambda_k v(f_k)$.

On en déduit que $(v(f_k))_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(v \circ u)$. Il s'ensuit que $\dim(\text{Im}(v \circ u)) \leq p$ ce qui donne $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(u)$. \square



3.3 Théorème du rang

Proposition 3.6. Soit E et F deux espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F .

Si E_0 est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors l'application u induit un isomorphisme de E_0 sur $\text{Im } u$.

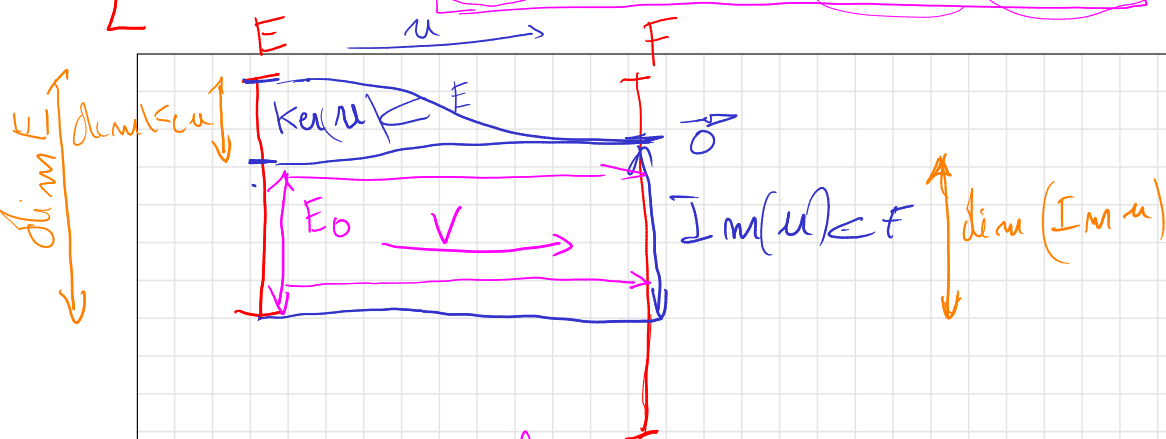
$v : \begin{matrix} E_0 & \longrightarrow & \text{Im } u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{matrix}$ est un isomorphisme.

espace de départ

$$E \xrightarrow{u} F$$

Théorème 3.7 (Théorème du rang). Si E est un espace vectoriel de dimension finie et u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F , alors u est de rang fini et

$$\dim E = \text{rg } u + \dim(\text{Ker } u) = \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u)$$



E_0 est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans $E : E = \text{Ker } u + E_0$

Exemple : $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z) \mapsto (x+y, 2y-z, x-y+z, 2x+z)$

Déterminer $\text{Ker } g, \text{Im } g, \text{rg}(g)$.

g est linéaire car les coordonnées

on détermine $\text{Ker } g$:

$$(x, y, z) \in \text{Ker } g \Leftrightarrow g(x, y, z) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ 2y-z = 0 \\ x-y+z = 0 \\ 2x+z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ 2y-z = 0 \\ -2y+z = 0 \\ -2x+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ 2y-z = 0 \end{cases} \text{ on paramétrise avec } y$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y, z) = \alpha(-1, 1, 2)$$

$$\text{alors } \text{Ker } g = \text{Vect}((-1, 1, 2)) \text{ donc } \dim(\text{Ker } g) = 1$$

L'espace de départ est de dimension 3 alors d'après le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker } g) + \dim(\text{Im } g)$

$$\text{donc } \text{rg}(g) = \dim(\text{Im}(g)) = 2$$

On sait que $\text{Im}(g)$ est un plan de \mathbb{R}^4
alors $\text{Im} g = \text{Vect}(\text{vecteurs images non colinéaires})$
 $\text{Im} g = \text{Vect}((2, 1, 1, 3), (0, -1, 1, 1))$
 $g(1, 1, 1) = (2, 1, 1, 3) \quad g(0, 0, 1) = (0, -1, 1, 1)$

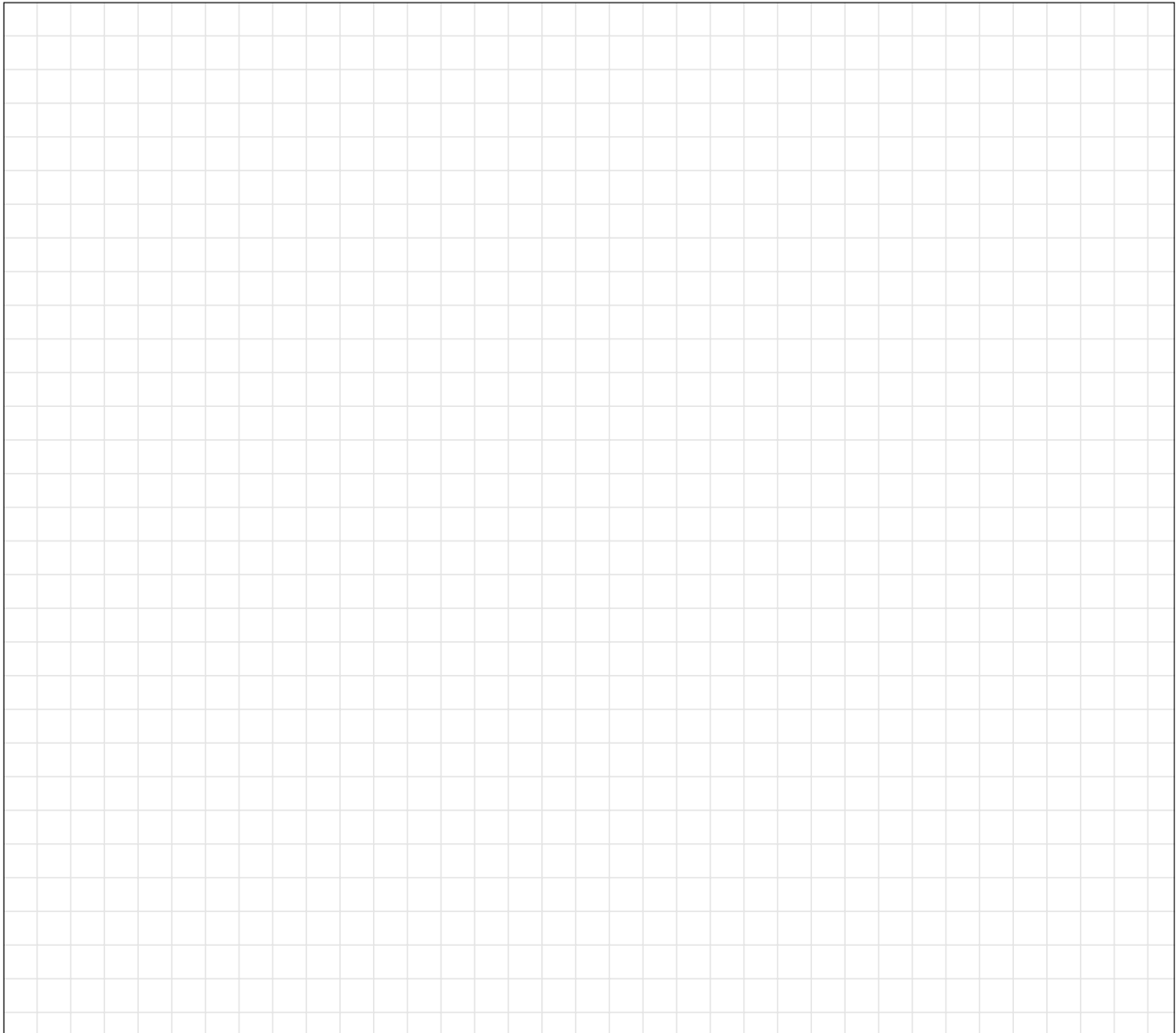
3.4 Caractérisation des isomorphismes

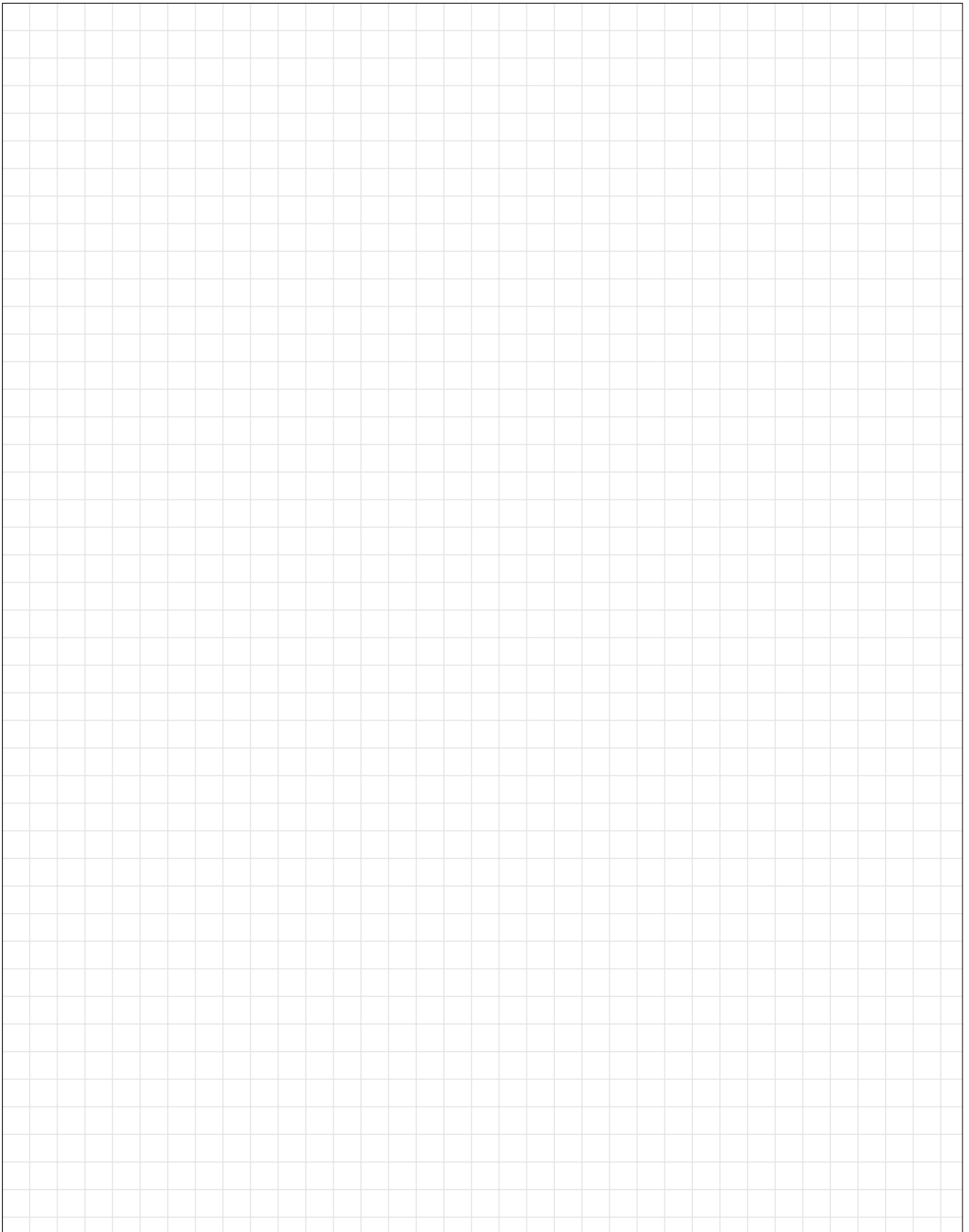
Théorème 3.8. Si E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension finie $n = \dim E = \dim F$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

u est injective $\iff \text{Ker } u = \{ \vec{0} \} \iff u$ est surjective $\iff \dim \text{Ker } u = 0 \iff u$ est bijective $\iff \text{rg}(u) = n$.

Corollaire 3.9. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, alors

u est injective $\iff u$ est surjective $\iff u$ est bijective.





Lemme 3.10. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . Si il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$, alors f est injective.

Démonstration. Soit g telle que $g \circ f = \text{id}_E$. Soit $a, b \in E$. Si $f(a) = f(b)$ alors $g(f(a)) = g(f(b))$ donc $\text{id}(a) = \text{id}(b)$ soit $a = b$. Deux éléments de l'ensemble de départ ne peuvent avoir la même image donc f est injective. \square

Lemme 3.11. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . Si il existe $h : F \rightarrow E$ telle que $f \circ h = \text{id}_F$, alors f est surjective.

Démonstration. Soit h telle que $f \circ h = \text{id}_F$. Soit $a \in F$. On a $f(h(a)) = a$ donc a a un antécédent. Tout élément de F a un antécédent donc f est surjective. \square

Théorème 3.12. Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ alors f est bijective et $f \circ g = \text{id}_F$.

Si il existe $h : F \rightarrow E$ telle que $f \circ h = \text{id}_F$ alors f est bijective et $h \circ f = \text{id}_E$.

Théorème 3.13. Si u est une application linéaire de rang fini et si φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors, dans les cas où cela a un sens,

$$\text{rg}(u \circ \varphi) = \text{rg } u \text{ ou } \text{rg}(\varphi \circ u) = \text{rg}(u).$$

On ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant par un isomorphisme.

Démonstration. Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} .

— Soit φ un isomorphisme de F dans G et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.

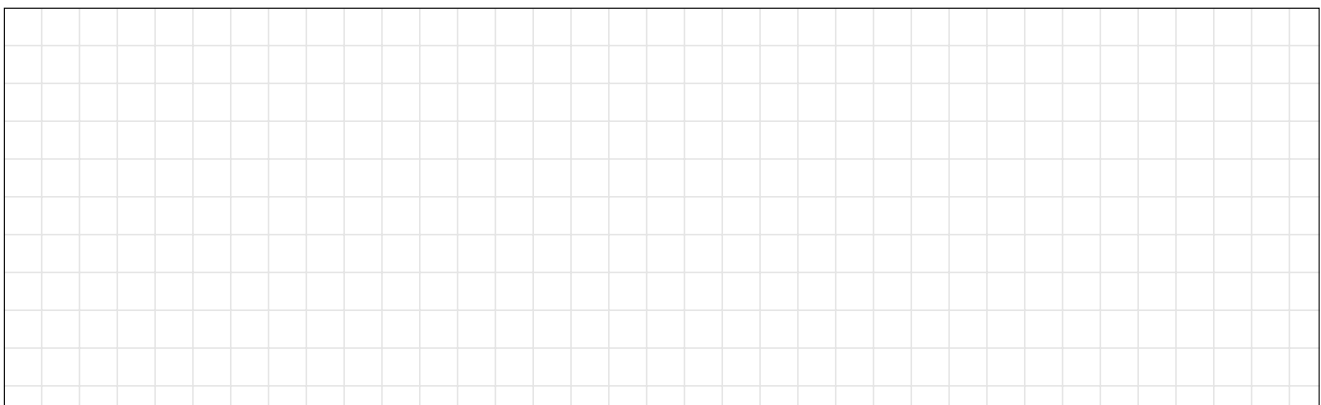
Soit B une base de $\text{Im } u$ (qui est de dimension finie). Alors $\varphi(B)$ est une base de $\varphi(\text{Im } u)$ car φ induit un isomorphisme de $\text{Im } u$ dans $\varphi(\text{Im } u)$. De plus, on a l'égalité triviale : $\varphi(\text{Im } u) = \text{Im}(\varphi \circ u)$. Alors, $\dim(\text{Im}(\varphi \circ u)) = \dim(\text{Im } u)$ soit $\boxed{\text{rg}(\varphi \circ u) = \text{rg}(u)}$.

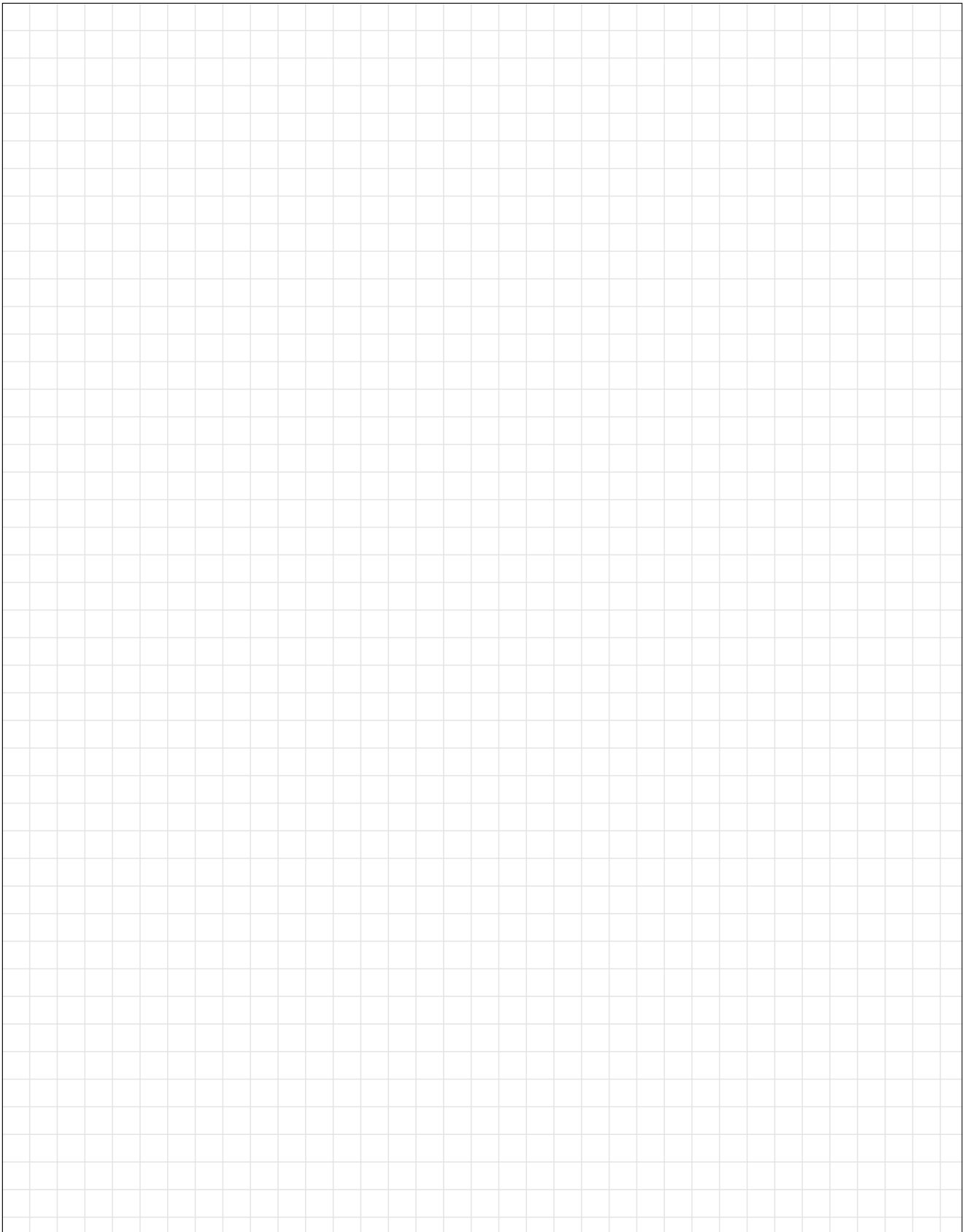
— Soit φ un isomorphisme de E dans F et $u \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini.

On a toujours $\text{Im}(u \circ \varphi) \subset \text{Im } u$ car toute image par $u \circ \varphi$ est une image par u .

Réciproquement, soit $z \in \text{Im } u$, alors il existe $y \in F$ tel que $z = u(y)$. Comme φ est une bijection de E dans F , il existe un unique $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Alors, $z = u \circ \varphi(x)$ et $z \in \text{Im}(u \circ \varphi)$ ce qui prouve $\text{Im } u \subset \text{Im}(u \circ \varphi)$.

On a montré $\text{Im}(u \circ \varphi) = \text{Im } u$ donc $\dim(\text{Im}(u \circ \varphi)) = \dim(\text{Im } u)$ soit $\boxed{\text{rg}(u \circ \varphi) = \text{rg}(u)}$. \square





3.5 Équations linéaires

Définition 3.3. Une équation linéaire est une équation du type $u(x) = b$ où

- u est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F ,
- x est un vecteur inconnu dans E ,
- b est un vecteur de F appelé second membre de l'équation.

Théorème 3.14 (Structure de l'ensemble des solutions).

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F , soit $b \in F$.

On note S_0 l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = \vec{0}_F$ et \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$.

- S_0 est un sous-espace vectoriel de E . En particulier, il est donc non vide : il contient $\vec{0}_E$.
- Soit \mathcal{S} est vide, soit $\mathcal{S} = x_0 + S_0 = \{x_0 + h \mid h \in S_0\}$ où x_0 est une solution de l'équation avec second membre.

Remarque 3.2. Si E est de dimension finie n (n inconnues) et si u est de rang fini r (r pivots), alors l'ensemble des solutions \mathcal{S}_0 est de dimension $n - r = \text{nombre d'inconnues} - \text{nombre de pivots}$.

