Chapitre 19 - Matrices et applications linéaires

dim finie

1 Matrices d'une application linéaire

vecteur

base — matrice

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E. Soit $x\in E$, on appelle matrice de x dans la base $\mathscr{B}$, la matrice colonne notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x)$ dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$:

Si $x=a_1e_1+a_2e_2+\dots+a_ne_n$, alors $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x)=\begin{array}{cl} x & \\ \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\to e_1\\ \\ \to e_n\end{array}\end{array}.$ $\Big\}$ n lignes avec $n=\dim E$.

La matrice dans la base $\mathscr{B}$ d'une famille de vecteurs $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p)$ de E notée $\mathrm{M}_B(x_1,x_2,\dots,x_p)$ est la matrice dont la j-ième colonne pour $j\in[\![1,p]\!]$ est constituée des n coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$.

Si pour $j\in[\![1,p]\!]$, $\vec{x}_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$ alors

p vecteurs

$$\mathrm{M}_B(x_1,x_2,\dots,x_p)=\left(a_{i,j}\right)_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,p]\!]}=\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_j & & x_p\end{array}} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \boxed{a_{1j}} & \dots & a_{1p}\\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np}\end{pmatrix} & \begin{array}{l} e_1\\ \vdots\\ e_n\end{array}\end{array}\Bigg\}\ n \text{ lignes}$$

a_{ij} = coordonnées selon e_i de x_j

Remarque 1.1. La matrice de la famille $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice identité I_n.

Exemple 1.1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on note $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ une base. Soit $\vec{u}=4\vec{e}_1-3\vec{e}_2$ et $\vec{v}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$.
Donner les matrices $\mathrm{M}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}(\vec{u},\vec{v})$ et $\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1,e_2)$.

La première matrice se trouve directement en écrivant, en colonne, les coordonnées dans la base (e_1,e_2) de chaque vecteur u,v : $\mathrm{M}_{(e_1,e_2)}(u,v)=\begin{pmatrix}4&2\\-3&-1\end{pmatrix}$ $=\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u,v)$

Remarque : On pourra noter au brouillon les vecteurs en colonne haut dessus de la matrice et sur le côté les vecteurs de la base $\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u & v\end{array} & \\ \begin{pmatrix}4&2\\-3&-1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}e_1\\ e_2\end{array}\end{array}$

Mais, CELA NE DOIT PAS APPARAÎTRE SUR VOTRE COPIE DE DEVOIR.

Pour la matrice $\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1,e_2)$, il faut d'abord calculer les coordonnées de (e_1,e_2) : on cherche $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)\in\mathbb{R}^4$ tels que $\begin{cases} e_1 &=\alpha_1u+\beta_1v\\ e_2 &=\alpha_2u+\beta_2v\end{cases}$

On résout le système suivant par opérations sur les lignes :

$$\begin{cases} u &=4e_1-3e_2\\ v &=2e_1\ -e_2\end{cases}\iff\begin{cases} u-3v &=-2e_1\\ u-2v &=-e_2\end{cases}\iff\boxed{\begin{cases} e_1 &=\dfrac{1}{2}(-u+3v)\\ e_2 &=-u+2v\end{cases}}$$

Ce qui nous donne la matrice $\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} e_1 & e_2\end{array} & \\ \begin{pmatrix}-1/2&-1\\3/2&2\end{pmatrix} & \begin{array}{l}u\\ v\end{array}\end{array}$ soit $\boxed{\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1,e_2)=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}}$

Exemple 1.2. Dans $\mathbb{R}^3$, écrivons la matrice de $\boldsymbol{u} = (1,2,-1)$, $\boldsymbol{v} = (1,3,0)$, $\boldsymbol{w} = (-2,0,1)$, et $\boldsymbol{t} = (0,0,-1)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

4 vecteurs

On trouve
$$\begin{array}{cccccc} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} & \boldsymbol{t} & \\ \left(\right. & 1 & 1 & -2 & 0 & \left.\right) \boldsymbol{e}_1 \\ & 2 & 3 & 0 & 0 & \boldsymbol{e}_2 \\ & -1 & 0 & 1 & -1 & \boldsymbol{e}_3 \end{array}$$
dim 3

soit $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_0}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exemple: Dans $\mathbb{R}_2[X]$, matrice de $P = -5X^2+7X+1$ dans la base canonique $B_0 = (X^2, X, 1)$ puis dans la base $(1, (X-2), (X-2)^2) = B_1$.

$P' = -10X+7$

$P'' = -10$

on a
$$P = P(2)\times 1 + P'(2)(X-2) + \frac{P''(2)}{2}(X-2)^2$$
$$= -5 - 13(X-2) - \frac{2}{5}(X-2)^2$$

$$M_{B_0}(P) = \begin{array}{c|c} P & \\ \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X^2 \\ X \\ 1 \end{array} \end{array} \qquad M_{B_1}(P) = \begin{array}{c|c} P & \\ \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{array} \end{array}$$

Remarque :
$$M_{B_1}(B_1) = M_{B_1}(1, X-2, (X-2)^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{B_0}(B_0)$$

Généralement $M_B(B) = I_n$ pour B une base.

TD ©

$E, \mathcal{B}_1 \xrightarrow{u} F, \mathcal{B}_2$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E dans F.

$p = \dim E$ $\quad q = \dim F$

On appelle matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$, de la famille de vecteurs $(u(\mathcal{B}_1))$ dans la base $\mathcal{B}_2$:

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(u(\mathcal{B}_1))} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p))$$

On a $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Si on note $\mathcal{B}_2 = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \ldots, \boldsymbol{f_q})$ et $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\quad u(\boldsymbol{e_j}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} a_{ij}\boldsymbol{f_i}$ où $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ sont les coordonnés du vecteur $u(\boldsymbol{e_j})$ dans la base $\mathcal{B}_2$,

$u(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + a_{31} f_3 + \cdots + a_{q1} f_q$

$$\text{alors } \mathrm{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = \begin{array}{cccc} u(\boldsymbol{e_1}) & u(\boldsymbol{e_j}) & u(\boldsymbol{e_p}) & \\ \left(\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{ip} \\ \vdots \\ a_{qp} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \boldsymbol{f_1} \\ \\ \boldsymbol{f_i} \\ \\ \boldsymbol{f_q} \end{matrix} \end{array}$$

← moyen mnemotechnique

Remarque 1.2. Le nombre de lignes de la matrice est égal à la dimension de l'espace d'arrivée. Le nombre de colonnes est égal à la dimension de l'espace de départ.

$\mathcal{B}_3 = ((1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1))$

Exemple 1.3. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, 3x-2y+4z) \end{array}$.

Donnons la matrice de g dans les bases canoniques $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

On calcule les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_3$ par g :

$g(1,0,0) = (1,3), \quad g(0,1,0) = (2,-2) \quad g(0,0,1) = (-1,4)$

Les images donnent directement les coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_2$: $(1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$...

Alors, on a la matrice :

$= g(1,0,0) \quad = g(0,1,0) \quad = g(0,0,1)$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(g) = \begin{array}{cccc} g(\boldsymbol{e_1}) & g(\boldsymbol{e_2}) & g(\boldsymbol{e_3}) & \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \boldsymbol{f_1} = (1,0) \\ \boldsymbol{f_2} = (0,1) \end{matrix} \end{array}$$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2, B_1 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2, B_2$

$\mathbb{R}^2, (e_1,e_2) \xrightarrow{A_1} \mathbb{R}^2, (u,v)$

$\mathbb{R}^2, (u,v) \xrightarrow{A_2} \mathbb{R}^2, (e_1,e_2)$

> **Exercice 1.1.** Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ une base. On pose $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$.
> Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{u}$ et $f(\boldsymbol{e_2}) = 3\boldsymbol{v}$.
> Calculer $\underbrace{\mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(f)}_{A_1}$ et $\underbrace{\mathrm{M}_{(u,v)(e_1,e_2)}(f)}_{A_2}$.

On remarque que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

On a directement les coordonnées des images de $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ dans la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, alors,

$$A_1 = \mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(f) = \begin{array}{ccc} f(\boldsymbol{e_1}) & f(\boldsymbol{e_2}) & \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{matrix} \end{array}$$

$f(e_1) = u = 1 \times u + 0 \times v$

$f(e_2) = 0 \times u + 3 \times v$

Pour l'autre matrice, il faut calculer $f(\boldsymbol{u})$ et $f(\boldsymbol{v})$.

car f est linéaire

On a $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ qui donne $f(\boldsymbol{u}) = 2f(\boldsymbol{e_1}) + f(\boldsymbol{e_2})$ soit $f(\boldsymbol{u}) = 2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$ et finalement,

$f(\boldsymbol{u}) = 2(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + 3(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = 7\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 = u - 3v = f(v)$

De même, on calcule $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2) = (2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) - 3(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$

Alors,

$$A_2 = \mathrm{M}_{(u,v)(e_1,e_2)}(f) = \begin{array}{cc} f(\boldsymbol{u}) & f(\boldsymbol{v}) & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{array} \end{array}$$

A₁ et A₂ sont 2 matrices de f dans des bases différentes

On peut également calculer les deux matrices

$$A_3 = \mathrm{M}_{(u,v)(u,v)}(f) = \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & \\ 2 & 1 & u \\ 3 & -3 & v \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{(e_1,e_2)(e_1,e_2)}(f) = \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & \\ 2 & 3 & e_1 \\ 1 & -3 & e_2 \end{array} = A_4$$

où on utilise la même base au départ et à l'arrivée. Cela est possible car f est un endomorphisme.

1.3 Matrice d'un endomorphisme

Définition 1.3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
On appelle matrice de l'endomorphisme v dans la base $\mathscr{B}$, la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v)$, de l'application linéaire v dans le couple de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v(e_1), v(e_2), \ldots, v(e_p))$$

Remarque 1.3. $\boxed{\text{On utilise la même base au départ et à l'arrivée.}}$ ⚠ ♡
La matrice de l'identité id_E est la matrice identité I_p.

Exercice 1.2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & 2P - 2(X+1)P' + X^2P'' \end{array}.$$

On commence par calculer l'image des vecteurs de la base par φ :
$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(X) = 2X - 2(X+1) = -2, \quad \varphi(X^2) = 2X^2 - 2(X+1)2X + 2X^2 = -4X,$
$\varphi(X^3) = 2X^3 - 2(X+1)3X^2 + 6X^3 \cancel{= 2X^3} - 6X^2$
Alors, on peut écrire la matrice de φ dans la base canonique :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array} \quad \text{soit} \quad \mathrm{M}_{(1,X,X^2,X^3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ peut aussi s'écrire dans l'ordre décroissant des puissances : $(X^3, X^2, X, 1)$. C'est une autre base.

La matrice de φ dans cette base s'écrit : $\mathrm{M}_{(X^3,X^2,X,1)}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(X^3) & \varphi(X^2) & \varphi(X) & \varphi(1) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X^3 \\ X^2 \\ X \\ 1 \end{array} \end{array}$

$id_E : E \longrightarrow E$ et $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E

$$M_B(id_E) = M_{B,B}(id_E) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} id(e_1) & id(e_2) & & id(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \\ e_p \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & & (0) \\ 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ 0 & & (0) & 1 \end{pmatrix} \end{array} = I_p$$

pour un endomorphisme base de départ = base d'arrivée

matrice de départ

arrivée

appli linéaire

Les matrices d'un endomorphisme sont carrées

exemple exo 6 du TD17

$E = Vect(g_0, g_1, g_2)$ avec $g_i(x) = x^i e^{4x}$ pour $x \in \mathbb{R}$ $i = 0, 1, 2$

et $D : E \longrightarrow E$ on avait calculé
$f \longmapsto f'$

$(a, b, c)_{(g_0, g_1, g_2)} \longmapsto (4a, 2a+4b, b+4c)_{(g_0, g_1, g_2)}$

$$D(x \longmapsto (ax^2+bx+c)e^{4x}) = (x \longmapsto (4ax^2+(2a+4b)x+(b+4c))e^{4x})$$

Quelle est la matrice de D dans la base (g_0, g_1, g_2) ?

$$D(g_0) = D(x \mapsto e^{4x}) = (x \mapsto 4e^{4x}) = 4g_0$$

$(\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{D(g_0)}_{\text{fonction}}(x) = 4e^{4x} = 4g_0(x))$

$(xe^{4x})'$

on calcule également

$$D(g_1) = (x \mapsto (4x+1)e^{4x}) = 4g_1 + g_0$$

$$D(g_2) = (x \mapsto (2x+4x^2)e^{4x}) = 4g_2 + 2g_1$$

d'où

$$M_{(g_0, g_1, g_2)}(D) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} D(g_0) & D(g_1) & D(g_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{array} \end{array}$$

$g_2(x) = x^2 e^{4x}$

D envoie le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ sur le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 4c+b \\ 4b+2a \\ 4a \end{pmatrix}$

$\times M_{(g_0, g_1, g_2)}(D)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c+b \\ 4b+2a \\ 4a \end{pmatrix}$$

1.4 Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 1.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie de base $\mathscr{B}$. soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a*

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\alpha x + y) = \alpha \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) + \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(y)$$

Proposition 1.2. *Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie.*

$u : E \to F$
$v : E \to F$

Soit $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base de F.

Soit $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\alpha u + v) = \alpha \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u) + \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(v).$$

La matrice d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des matrices de ces vecteurs

De même pour les combinaisons linéaires d'applications linéaires.

⚠ attention aux bases !!

2 Matrices et applications linéaires

$$E, B_1 \xrightarrow{u} F, B_2$$
$$x \longmapsto y$$

2.1 Calcul des coordonnées de l'image

Proposition 2.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension p et q, $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base de F.*

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$: $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u)$.

Si $\boldsymbol{x} \in E$ a pour matrice X dans $\mathscr{B}_1$ et $\boldsymbol{y} = u(\boldsymbol{x})$ a pour matrice Y dans $\mathscr{B}_2$, alors on a

$$Y = AX \quad \text{soit} \quad \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\boldsymbol{x})) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\boldsymbol{x}).$$

Démonstration. $X = M_{B_1}(x)$ $Y = M_{B_2}(y)$ $A = M_{B_1 B_2}(u)$

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ et $B_1 = (e_1, \dots, e_p)$ $B_2 = (f_1, \dots, f_q)$

soit $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ et $y = \sum_{k=1}^{q} y_k f_k = u(x)$

la matrice A de u dans B_1, B_2 a pour coeff (a_{ij}) $i = 1, \dots, q$ $j = 1, \dots, p$

On a

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} f_i$$

$$\begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_j) & u(e_p) & \\ & a_{1j} & & f_1 \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{ij} & \text{- - - -} & f_i \leftarrow i \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{qj} & & f_q \end{array}$$

on calcule

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \text{ car } u \text{ est linéaire}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{q} a_{ij} f_i\right)$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right) f_i$$ en échangeant les signes somme

ce qui donne $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$ car $(f_1, \dots, f_q)$ est une base. On reconnaît la formule du produit

$$AX = \begin{pmatrix} \boxed{\quad a_{ij} \quad} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \end{pmatrix} \leftarrow i = Y$$

□

Exemple 2.1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $U = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $U = M_{B_0}(u) = M_{B_0,B_0}(u) = \begin{pmatrix} \overset{u(1,0)}{\boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}}} & \begin{matrix}-1\\4\end{matrix} \end{pmatrix}$

u linéaire

Pour calculer l'image du vecteur $\vec{a} = (x,y)$ on multiplie la matrice de u par la matrice de $\vec{a}$ (matrices dans la base canonique).

$U \cdot M_{B_0}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$ matrice de $u(\vec{a})$

d'où $u(x,y) = (3x - y, 2x + 4y)$

On a $u(1,0)$ qui a pour matrice $U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$u((1,0)) = (3,2)$

et $u((0,1)) = (-1,4)$

Exemple : $\left| \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \longmapsto (2x + y, x - y, 3x + 2y) \end{array} \right.$ expression analytique $M_{B_0,B'_0}(\varphi)$

avec B_0 base canonique de $\mathbb{R}^2$ B'_0 base canonique de $\mathbb{R}^3$

et calculer l'image de $(5,-7)$

on a $\varphi((1,0)) = (2,1,3)$ $\varphi((0,1)) = (1,-1,2)$

$A = M_{B_0,B'_0}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi(\ ) & \varphi(\ ) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array}$ on calcule $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varphi((5,-7))$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

$u = (1,-2)$ $v = (1,1)$ matrice de φ $M_{(u,v),B'_0}(\varphi) = A'$

$\varphi(u) = (0,3,-1)$ $\varphi(v) = (3,0,5)$

$A' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi(u) & \varphi(v) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$

matrice de $\varphi(x,y)$ est

$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$

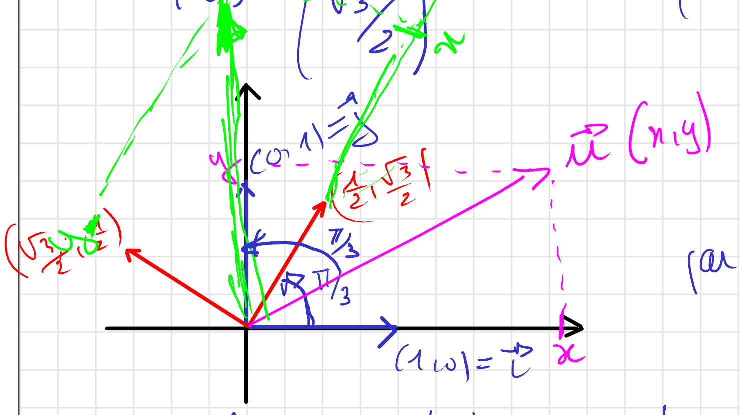
Exemple 2.2. Soit r la rotation de matrice $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$ $B_0 = ((1,0),(0,1))$

Calculer l'image des vecteurs $(1,0)$ puis $(0,1)$. En déduire l'angle de la rotation.

Calculer l'image du vecteur de coordonnése $(2,3)$.

Déterminer la matrice d'une rotation d'angle θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$R \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} \Rightarrow r(1,0) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ et de même $r(0,1) = \left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$



$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$r(\vec{u}) = x\,r(\vec{i}) + y\,r(\vec{j})$

car calcul dans la BOND $(\vec{i},\vec{j})$

et $\|\vec{u}\| = \|r(\vec{u})\|$

$(\vec{u}, r(\vec{u})) = (\vec{i}, r(\vec{i})) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

r est une rotation vectorielle (= autour de l'origine) d'angle $\pi/3$

2.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires

Théorème 2.2. *Soit n, p, q des entiers non nuls. Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimensions respectives n, p et q et ayant pour bases respectives $\mathscr{B}_1$ $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.*

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ de matrice B dans les bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.

Alors BA est la matrice de $v \circ u$ dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_3$:

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).$$

Démonstration. On a par définition de la matrice de l'application linéaire $v \circ u$:

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) &= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_3}(v \circ u)(\mathscr{B}_1) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_3}(v(u(\mathscr{B}_1))) \\ &= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\mathscr{B}_1)) \quad \text{par propriété du calcul de l'image d'un vecteur par } v \\ &= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) \quad \text{par calcul de l'image d'un vecteur par } u\end{aligned}$$

Or, on a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1)$ qui est la matrice identité d'où

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).$$

□

$$\begin{tikzcd} E, B_1 \arrow[r, "u\,,\,A"] \arrow[rr, bend right, "v\circ u\;,\;B\,A"'] & F, B_2 \arrow[r, "v\,;\,B"] & G, B_3 \end{tikzcd}$$

$A = \Pi_{B_1 B_2}(u)$

$B = \Pi_{B_2 B_3}(v)$

Exemple $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \longmapsto (3x - y, x + 2y, x - y)$ $\quad v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (2x + y - z, x - y + 3z)$

On utilise les bases canoniques B_2 de $\mathbb{R}^2$ et B_3 de $\mathbb{R}^3$. On calcule les matrices de $u \circ v$ puis $v \circ u$ dans les bases canoniques

On a

$$U = \Pi_{B_2, B_3}(u) = \begin{array}{cc|l} u(1,0) & u(0,1) & \\ 3 & -1 & (1,0,0) \\ 1 & 2 & (0,1,0) \\ 1 & -1 & (0,0,1) \end{array} \quad \text{et} \quad V = \Pi_{B_3, B_2}(v) = \begin{array}{ccc} v(1,0,0) & & \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}$$

Alors $u \circ v$ a pour matrice $U \times V = \Pi_{B_3, B_3}(u \circ v) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$(u \circ v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3)$

et $v \circ u$ a pour matrice $V \times U = \Pi_{B_2, B_2}(v \circ u) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

on évite le calcul de $v \circ u(x, y) = v(\overset{X}{\overbrace{3x - 2y}}, \overset{Y}{\overbrace{x + 2y}}, \overset{Z}{x - y}) = (2X + Y - Z, X - Y + 3Z)$

$= (2(3x - 2y) + (x + 2y) - (x - y), \;\dots\;)$

$v \circ u(x, y) = (6x + y, 5x - 6y)$

Exemple : Calculer φ^2 avec $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x,y,z) = \left(x+y-z,\ -x-y+z,\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z\right)$$

On utilise la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^3$.

et on écrit la matrice de φ dans cette base :

$$A = M_{B_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1/2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{car } \varphi((1,0,0)) = \left(1,-1,\frac{1}{2}\right) \text{ et}\dots$$

On calcule A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ 1/2 & 1/2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -1/4 & +\frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A \text{ d'où } \boxed{\varphi\circ\varphi = -\frac{1}{2}\varphi}$$

2.3 Matrices inversibles et isomorphismes

Théorème 2.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies de bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

f est un isomorphisme si et seulement si la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est carrée et inversible.

Dans ce cas, la matrice de l'application réciproque f^{-1} est la matrice inverse de la matrice de l'application f :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1}(f^{-1}) = \left(\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)\right)^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \\ E & F \arrow[l, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration.

① la matrice de f est carrée $\Longleftrightarrow$ $\dim E = \dim F$.

② $\Longrightarrow$ si f est un isomorphisme, alors il existe une réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui est linéaire et $f \circ f^{-1} = id_F$

et $M_{B_1B_2}(f) . M_{B_2B_1}(f^{-1}) = M_{B_2B_2}(id_F) = I_{\dim F} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & 1 \end{pmatrix}$

donc $M_{B_1,B_2}(f)$ est inversible

et son inverse est $\left(M_{\underline{\underline{B_1,B_2}}}(f)\right)^{-1} = M_{\underline{\underline{B_2,B_1}}}(f^{-1})$

$\Longleftarrow$ à faire

☐

Exemple ex 6 du TD 17

$D : E \to E$ de matrice dans (g_0, g_1, g_2)
$f \mapsto f'$

$$\Pi = \Pi_{(g_0, g_1 g_2)}(D) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On sait que Π est inversible car elle est de rang maximal (= autant de pivots que de lignes)
donc D est bijective

On calcule Π^{-1} :
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & +1/8 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & -1/16 & 1/32 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/16 & 1/32 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

D^{-1} est l'application de matrice Π^{-1} dans (g_0, g_1, g_2)
c'est-à-dire
$$D^{-1}(g_0) = \frac{1}{4} g_0 \qquad D^{-1}(g_1) = \frac{1}{4} g_1 - \frac{1}{16} g_0$$
$$D^{-1}(g_2) = \frac{1}{32} g_0 - 1/8\, g_1 + 1/4\, g_2$$

Exemple

$$\Pi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \varphi(X^2) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ X \\ X^2 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

est inversible car elle est de rang maximal (nb pivots = taille)

C'est la matrice de

$\varphi : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$
$P \longmapsto$
$(1, X, X^2, X^3, X^4)$

$\varphi(\overset{X^0}{1}) = 1 = (1+X)^0 \quad \varphi(X) = X + 1 \quad \varphi(X^2) = 1 + 2X + X^2 = (1 + X)^2$

$\varphi(X^3) = 1+3X+3X^2+X^3 = (1+X)^3$

$\varphi(X^4) = (1+X)^4$ ce qui prouve que $\varphi(P) = P(X+1) = Q(X)$

car $P(X) = \sum_{k=0}^{k} a_k X^k$ et $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{4} a_k (1+X)^k = P(X+1)$

Alors, on sait que φ est bijective et $\varphi^{-1}(Q) = Q(X-1) = P(X)$

Or on

$$M_{(1,X,X^2,X^3,X^4)}(\varphi^{-1}) = M^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(X) & \dots & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{matrix} \end{array}$$

$\varphi^{-1}(1) = (X-1)^0 = 1$, $\varphi^{-1}(X) = X-1$

$\varphi^{-1}(X^2) = (X-1)^2$, $\varphi^{-1}(X^k) = (X-1)^k$

$(X-1)^3 = -1+3X-3X^2+X^3$

$(X-1)^4 = 1-4X+6X^2-4X^3+X^4$

$$A' = Q^{-1}AP$$

$$\begin{tikzcd} E, B_1 \arrow[r, "u, A"] & F, B_2 \\ E, B'_1 \arrow[u, "id_E", "P = P_{B_1 \to B'_1}"'] \arrow[r, "u, A'"'] & F, B'_2 \arrow[u, "id_F", "Q"'] \end{tikzcd}$$

x, X

$y = u(x), Y$

x, X'

$y = u(x), Y'$

$M_{B'_1, B_1}(id_E) =$

$X = M_{B_1}(x)$

$X = PX'$

$X' = M_{B'_1}(x)$

$Y = QY'$

3 Changements de bases

3.1 Matrices de passage (matrices de changement de base)

Définition 3.1. Soit E un espace de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
ancienne nouvelle

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée $P_{B\to B'}$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$: $P_{B\to B'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ matrice des vecteurs de B' exprimés dans la base B.

Lemme 3.1. *La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P_{B\to B'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E)$.*

Théorème 3.2. *Une matrice de passage est inversible et $P_{B'\to B} = (P_{B\to B'})^{-1}$.*

Démonstration. $P_{B\to B'}$ est la matrice de l'application identité qui est un isomorphisme, alors $P_{B\to B'}$ est inversible et

$$(P_{B\to B'})^{-1} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E^{-1})\mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E) = P_{B'\to B}.$$

☐

Lemme 3.3. *Soit $\mathscr{B}$ une base de E de dimension n et $x_1, x_2, \dots, x_n$ une famille de vecteurs de E. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est inversible.*

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, soit $(e_1, e_2) = B_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On pose $u = 2e_1 - 3e_2$, $v = e_1 + e_2$ et $a = u - v$, $b = u + 2v$
Ecrire les matrices de passage :

$$P_{(e_1,e_2)\to(u,v)} = \begin{array}{cc|c} u & v & \\ 2 & 1 & e_1 \\ -3 & 1 & e_2 \end{array}$$

$$P_{(u,v)\to(a,b)} = \text{———} = \begin{array}{cc|c} a & b & \\ 1 & 1 & u \\ -1 & 2 & v \end{array}$$

$$P_{(e_1,e_2)\to(a,b)} = \begin{array}{cc|c} a & b & \\ 1 & 4 & e_1 \\ -4 & -1 & e_2 \end{array}$$

$a = (2e_1 - 3e_2) - (e_1 + e_2)$
$= e_1 - 4e_2$
$b = 4e_1 - e_2$

On a

$$\begin{cases} u = 2e_1 - 3e_2 \\ v = e_1 + e_2 \end{cases} \underset{\substack{L_1+3L_2 \\ 2L_2-L_1}}{\iff} \begin{cases} 5e_1 = u + 3v \\ 5e_2 = -u + 2v \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}(u + 3v) \\ e_2 = \frac{1}{5}(-u + 2v) \end{cases}$$

Alors

$$\overset{\mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(id_{\mathbb{R}^2})}{\overset{\shortparallel}{P_{(u,v)\to(e_1,e_2)}}} = \frac{1}{5}\begin{array}{cc|c} id(e_1) & id(e_2) & \\ e_1 & e_2 & \\ 1 & -1 & u \\ 3 & 2 & v \end{array} = \left(P_{(e_1,e_2)\to(u,v)}\right)^{-1}$$

inverses l'une de l'autre

$$P_{B\to B'} = \mathrm{M}_B(B') = \mathrm{M}_B(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = \mathrm{M}_B(id_E(e'_1), id_E(e'_2), \dots, id_E(e'_n))$$

$$\overset{B'}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_B = \overset{id(B')}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_B = \mathrm{M}_{B',B}(id_E) = P_{B\to B'}$$

3.2 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur

Théorème 3.4. *Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.* $P = P_{B\to B'}$

Si $x \in E$, on note $X = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors, on a la relation $\boxed{X = PX'}$ *qui donne les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base.*

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)$$

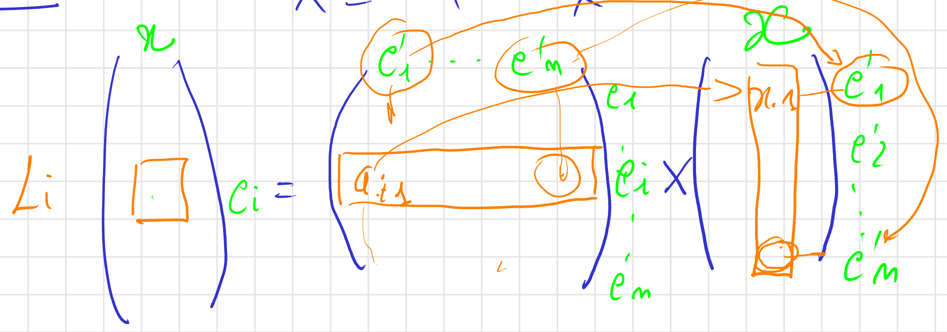
Démonstration.

Pour $x \in E$ $id_E(x) = x$ et la matrice de $id_E(x)$ se calcule par $M_{B',B}(id_E) \times M_{B'}(x)$

ce qui donne $M_B(x) = M_{\underset{\|}{B',B}}(id_E) \times M_{B'}(x)$

$M_B(x) = P_{B\to B'} \times M_{B'}(x)$

Schéma : $X = P \quad X'$



$Li(X) = Li(PX') = Li(P) \times X'$

Exemple : dans $\mathbb{R}^2$, on note $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ une base

$\vec{u} = 2e_1 - 3e_2$ $\vec{v} = e_1 + e_2$. $\vec{W} = 7\vec{e_1} - 5\vec{e_2}$

coordonnées de $\vec{W}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

$P = P_{(\vec{e_1},\vec{e_2}) \to (\vec{u},\vec{v})} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $W = M_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(\vec{W}) = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

on cherche $W' = M_{(\vec{u},\vec{v})}(\vec{w})$. On a la formule $\boxed{W = PW'}$

$W = PW' \iff P^{-1}W = W'$. On calcule P^{-1} :

$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ alors $W' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\vec{W}' = \frac{12}{5}\vec{u} + \frac{11}{5}\vec{v}$

☐

Exemple : Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de E.

On note $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mq (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base et calculer les coordonnées de I_2 dans cette base.

Pour montrer que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base, on dit qu'il y a 4 vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ et on prouve que c'est une famille libre

---

Autre version avec les matrices,

on écrit la matrice de (A_1, A_2, A_3, A_4) dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array}$$

et on montre que P est inversible

car $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$

$$(P|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

AP A

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & +2 \end{array}\right)$$

on trouve que P est inversible donc (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

on a $I_2 = 1E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 1E_{22}$

$X' = P^{-1}X$

$\mathcal{M}_{B_0}(I_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $\mathcal{M}_{(A_1 A_2 A_3 A_4)}(I_2) = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

soit $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2A_1 + A_2 - A_3 + 3A_4 = I_2}$

3.3 Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Théorème 3.5. *Soit E un espace de dimension finie et deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$.*
Soit F un espace vectoriel de dimension finie et deux bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}'_2$.
Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}'_1$. Soit Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}'_2$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et de matrice A' dans les bases $\mathscr{B}'_1$ à $\mathscr{B}'_2$.
On a $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$ *soit* $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}'_2}(id_F).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}_1}(id_E)$

$$A = M_{B_1,B_2}(u)$$

$$\begin{tikzcd} E, B_1 \arrow[rr, "u"] & & F, B_2 \\ E, B'_1 \arrow[u, "id_E"'] \arrow[rr, "u"] & & F, B'_2 \arrow[u, "id_F"'] \end{tikzcd}$$

$P = M_{B'_1,B_1}(id_E) = P_{B_1 \to B'_1}$

$Q = P_{B_2 \to B'_2} = M_{B'_2,B_2}(id_F)$

$x \qquad u(x)$

$$A' = M_{B'_1,B'_2}(u)$$

$$u = id_F \circ u \circ id_E^{-1} \Rightarrow M_{B'_1 B'_2}(u) = M_{B'_1 B'_2}(id_F \circ u \circ id_E^{-1})$$

$$u = id_F^{-1} \circ u \circ id_E \Rightarrow M_{B'_1, B'_2}(u) = M_{B'_1 B'_2}(id_F^{-1} \circ u \circ id_E)$$

$$\Rightarrow M_{B'_1 B'_2}(u) = M_{B_2 B'_2}(id_F^{-1}) \times M_{B_1 B_2}(u) \times M_{B'_1 B_1}(id_E)$$

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

Exemple. Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \longmapsto \left(3x+y-z, \frac{9}{2}x+y-\frac{5}{2}z\right)$$

On note B_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ B_2 la base canonique de $\mathbb{R}^2$

on sait que

$$A = \mathcal{M}_{\underset{\longleftarrow \text{départ} \longrightarrow}{B_3}\, B_2}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 9/2 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \updownarrow \text{arrivée}$$

$u(0,0,1) = (-1,-5/2)$

on note $v_1 = (1,0,1)$ $v_2 = (2,0,0)$ $v_3 = (0,1,0)$

$(v_1,v_2,v_3) = B'_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (à vérifier)

et $w_1 = (1,1)$ $w_2 = (2,3)$ $B'_2 = (w_1,w_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car ils ne sont pas colinéaires.

Donner les matrices de u dans B'_3 et B'_2 et aussi dans B_3 et B'_2

on note $P = P_{B_3 \to B'_3} = \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right) \end{array}$ est de rang 3 donc inversible donc B'_3 est bien une base.

et $Q = P_{B_2 \to B'_2} = \begin{array}{cc} w_1 & w_2 \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right) \end{array}$

on cherche $A' = \mathcal{M}_{B'_3, B'_2}(u)$. On sait $\underline{A' = Q^{-1} A P}$

on calcule $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 9/2 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} P$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} u(v_1) & u(v_2) & u(v_3) & \\ \left(\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix} \end{array} = \underline{\mathcal{M}_{B'_3\, B'_2}(u)}$$

$$= \mathcal{M}_{(v_1,v_2,v_3)\,(w_1,w_2)}(u)$$

$u(v_1) = 2w_1$ $u(v_2) = 3w_2$ $u(v_3) = w_1$

on vérifie $u(1,0,1) = \left(3+0-1, \frac{9}{2}+0-\frac{5}{2}\right) = (2,2) = 2(1,1) = 2w_1$

3.4 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Théorème 3.6. *Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*

Soit u un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathscr{B}$ et de matrice A' dans la base $\mathscr{B}'$.

On a $A' = P^{-1}AP.$ *soit* $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E)$

4 Rang d'une matrice

4.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 4.1. Soit A matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A, l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A.

4.2 Image et noyau d'une matrice

Définition 4.2. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle noyau et image de A notés $\text{Ker} A$ et $\text{Im} A$ les noyaux et images de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 4.1. *Le noyau d'une matrice A est l'ensemble des solutions du système $AX = 0$.*

L'image d'une matrice A est l'ensemble des seconds membres B pour lesquels le système $AX = B$ a au moins une solution.

4.3 Rang d'une matrice

Théorème 4.2. *Le rang d'une matrice* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *qui est le nombre de pivots de sa matrice échelonnée réduite par lignes est égal au rang de l'application linéaire associée à A.*

On a $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A.$

Corollaire 4.3. *Le rang d'une matrice* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est égal au rang des vecteurs colonnes de A dans* $\mathbb{K}^n$.

Corollaire 4.4. *Étant donnée une base* $\mathscr{B}$ *d'un espace vectoriel E, le rang d'une famille de vecteurs* $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ *de E est égal au rang de la matrice des vecteurs dans la base* $\mathscr{B}$: $\operatorname{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \operatorname{rg} \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Corollaire 4.5. *Le rang d'une application linéaire u de E dans F est le rang de la matrice de u dans n'importe quelles bases de E et F.*

4.4 Rang et matrice inversible

Théorème 4.6. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est de rang maximal si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de* $\mathbb{K}^n$

Théorème 4.7. *Si* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *sont des matrices inversibles et si* $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est une matrice, alors* $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(MB)$ *: on ne change pas le rang quand on multiplie par une matrice inversible.*

Théorème 4.8. *Deux matrices équivalentes par lignes ont le même rang.*

4.5 Rang de la transposée

Proposition 4.9. *Le rang d'une matrice est égal : au rang de ses vecteurs colonnes et au rang de ses vecteurs lignes et au rang de sa transposée.*

Théorème 4.10. *Deux matrices équivalentes par colonnes ont le même rang.*

5 Exemples de transformations vectorielles du plan euclidien

5.1 Rotations vectorielles

Définition 5.1. Dans le plan euclidien, on appelle rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, l'application r_θ telle que pour tout vecteur $\vec{u}$ on ait $(\vec{u}, r_\theta(\vec{u})) = \theta\ [2\pi]$ et $||\vec{u}|| = ||r_\theta(\vec{u})||$.

Proposition 5.1. *Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien, alors f conserve le produit scalaire si et seulement si f conserve la norme.*

Alors f est un automorphisme. On dit que f est un automorphisme orthogonal.

5.2 Matrice d'une rotation dans une BOND

Théorème 5.2. *La matrice de* r_θ *dans une BOND est* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

5.3 Composée de deux rotations

Proposition 5.3. *La composée des rotations* r_θ *et* r_φ *donne la rotation* $r_{\theta+\varphi}$

$$r_\theta \circ r_\varphi = r_\varphi \circ r_\theta = r_{\theta+\varphi}$$

Corollaire 5.4. *Matriciellement,* $\quad R_\theta \times R_\varphi = R_\varphi \times R_\theta = R_{\theta+\varphi}$

Théorème 5.5. *Une rotation* r_θ *est un automorphisme du plan et* $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.

5.4 Symétrie orthogonale vectorielle

Proposition 5.6. *Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du plan euclidien. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$ est un sous-espace vectoriel du plan noté $\vec{v}^{\perp}$.*
De plus, $\operatorname{Vect}\vec{v}$ *et* $\vec{v}^{\perp}$ *sont supplémentaires dans le plan.*

Définition 5.2. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du plan euclidien. On appelle symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{v}$, la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\,\vec{v}$ parallèlement à $\vec{v}^{\perp}$.
C'est à dire que $s_{\vec{v}}$ est définie par $s_{\vec{v}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ où $\vec{u}_1 \in \mathrm{Vect}\,\vec{v}$ et $\vec{u}_2 \in \vec{v}^{\perp}$ avec $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Théorème 5.7. *Pour $\vec{v} \neq 0$, l'application $s_{\vec{v}}$ est un automorphisme du plan vectoriel.*
$s_{\vec{v}}$ conserve le produit scalaire, la norme, change l'orientation des angles et vérifie $s_{\vec{v}} \circ s_{\vec{v}} = id_P$.

5.5 Matrice d'une symétrie orthogonale dans une BOND

Théorème 5.8. *Soit P le plan euclidien muni d'une BOND $(\vec{i},\vec{j})$.*

Si $\vec{v}$ fait un angle $(\vec{i},\vec{v})=\varphi$ avec le vecteur $\vec{i}$, alors $s_{\vec{v}}$ a pour matrice $S_{2\varphi}=\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$.

5.6 Composée de deux symétries orthogonales

Théorème 5.9. *Soit* $\vec{v}_1$ *et* $\vec{v}_2$ *deux vecteurs non nuls du plan vectoriel.*
La composée de deux symétries orthogonales $s_{\vec{v}_1}$ *et* $s_{\vec{v}_2}$ *est une rotation d'angle* $\theta = 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\ [2\pi]$.

6 Exemples de transformations vectorielles de l'espace euclidien

6.1 Rotation vectorielle de l'espace

Définition 6.1. Soit $\vec{n}$ un vecteur normé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$: $||\vec{n}|| = 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique en $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in \operatorname{Vect} \vec{n}$ et $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$.
On appelle rotation vectorielle d'axe dirigé par $\vec{n}$ et d'angle θ, l'application $r_{\theta,\vec{n}}$ définie par

$$r_{\theta,\vec{n}}(\vec{u}) = \vec{u}_1 + \cos\theta \vec{u}_2 + \sin\theta \vec{n} \wedge \vec{u}_2.$$

Proposition 6.1. *Une rotation vectorielle est linéaire, bijective, conserve la norme, le produit scalaire et les angles.*

6.2 Matrice d'une rotation dans une BOND adaptée

Théorème 6.2. *Soit* $\vec{n}$ *un vecteur normé,* $\vec{i}\perp\vec{n}$ *avec* $||\vec{i}|| = 1$*, un vecteur normé orthogonal à* $\vec{n}$*. Alors* $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$ *est une BOND de l'espace.*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$*. La matrice de la rotation d'angle* θ *autour de* $\vec{n}$*, dans la base* $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$*, est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$