

Chapitre 20 - Espaces probabilisés finis

en PTSI

1 Univers d'une expérience aléatoire

1.1 Notion d'expérience aléatoire

On considère des expériences dont chacune peut avoir plusieurs résultats (ou issues) possibles qui dépendent du hasard.

Exemple :

- lancer d'un D6 (un dé à six faces)

résultats possibles 1, 2, 3, 4, 5, 6

l'univers correspondant est l'ensemble des résultats possibles

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- lancer deux dés à 6 faces

36 résultats possibles

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

on peut aussi utiliser 11 résultats

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots, 12\}$$

si on s'intéresse uniquement à la somme des 2 dés
(celui là n'a pas des résultats équiprobables)

- tirage de boules dans une urne contenant plusieurs boules de plusieurs couleurs

- tirage de numéros dans une urne

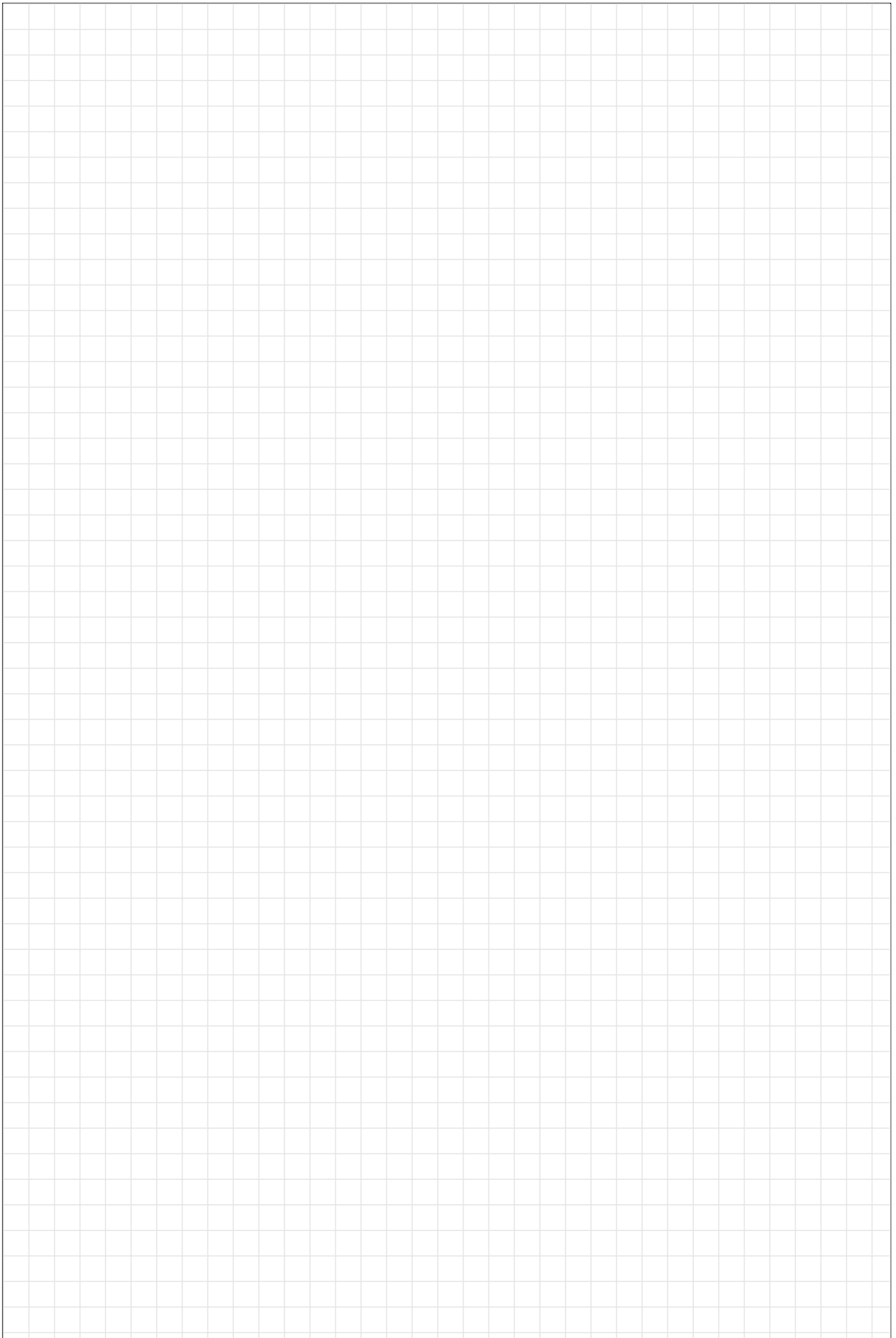
- sondage

- jouer à pile ou face : on lance 4 fois une pièce

on peut utiliser

$$\Omega = \{PPPP, PPPF, PPFP, PPF, \dots\}$$

(attention compte de l'ordre : 2^4 résultats possibles)



1.2 Événements liés à une expérience aléatoire

Un événement lié à une expérience aléatoire est une condition sur le résultat de l'expérience qui est ou qui n'est pas réalisée et que l'on ne peut pas vérifier avant d'avoir réalisé l'expérience.

Exemple 1.1. Exemples d'événement :

« l'un des numéros obtenus est pair », « on a tiré plus de boules rouges que de vertes », « plus de 13 personnes sont entrées en 1 heure », « la pièce est conforme », « l'un des dés donne un 5 » ...

- on lance 2 dés à 6 faces :

$A =$ "les 2 chiffres obtenus sont pairs"

$$= \{(2,2)(2,4)(2,6)(4,2)(4,4)(4,6)(6,2)(6,4)(6,6)\}$$

c'est un événement aléatoire = c'est une partie de Ω

on a $|A| = 9$ et $|\Omega| = 36$

cardinal de A = nb d'éléments dans A

$B =$ "le premier chiffre est strictement supérieur au deuxième"

$$B = \{(2,1)(3,2)(3,1)(4,3)(4,2)(4,1) \dots\}$$

$$|B| = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$B = \{(i,j) \in \llbracket 1,6 \rrbracket^2 \mid i > j\}$$

- 3 personnes qui posent leurs 3 chapeaux les mélangent et les reprennent au hasard.

$E =$ "aucune des trois personnes ne retrouve son chapeau"

on peut utiliser

$$\Omega = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), \dots, (3,2,1)\}$$

tout le monde échange de chapeau entre les personnes 2 et 3
à son chapeau

$$= \{(a,b,c) \mid \text{avec } a,b,c \text{ distincts parmi } \llbracket 1,3 \rrbracket\}$$

d'où $|\Omega| = 3! = 6$

et $E = \{(2,3,1), (3,1,2)\}$

$$F = \text{"tout le monde retrouve son chapeau"} \\ = \{(1, 2, 3)\} \quad |F| = 1$$

1.3 Univers

On admet que pour chaque expérience aléatoire, il existe un ensemble, noté Ω , appelé univers, dont les éléments représentent les différentes issues (résultats) possibles de l'expérience.

On note souvent $\omega \in \Omega$ une issue de l'expérience. (ω est un élément de Ω)

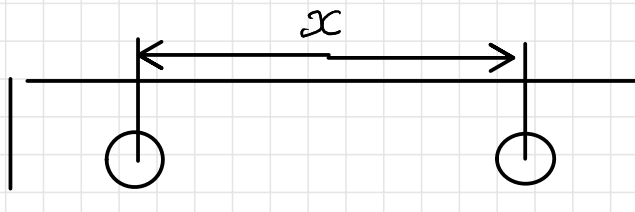
Un événement lié à une expérience aléatoire est représenté par une partie A de l'univers Ω de cette expérience : $A \subset \Omega$. Un événement représente donc un ensemble de résultats possibles.

Parmi toutes les issues possibles, celles pour lesquelles l'événement A est réalisé sont représentées par $\omega \in A$.

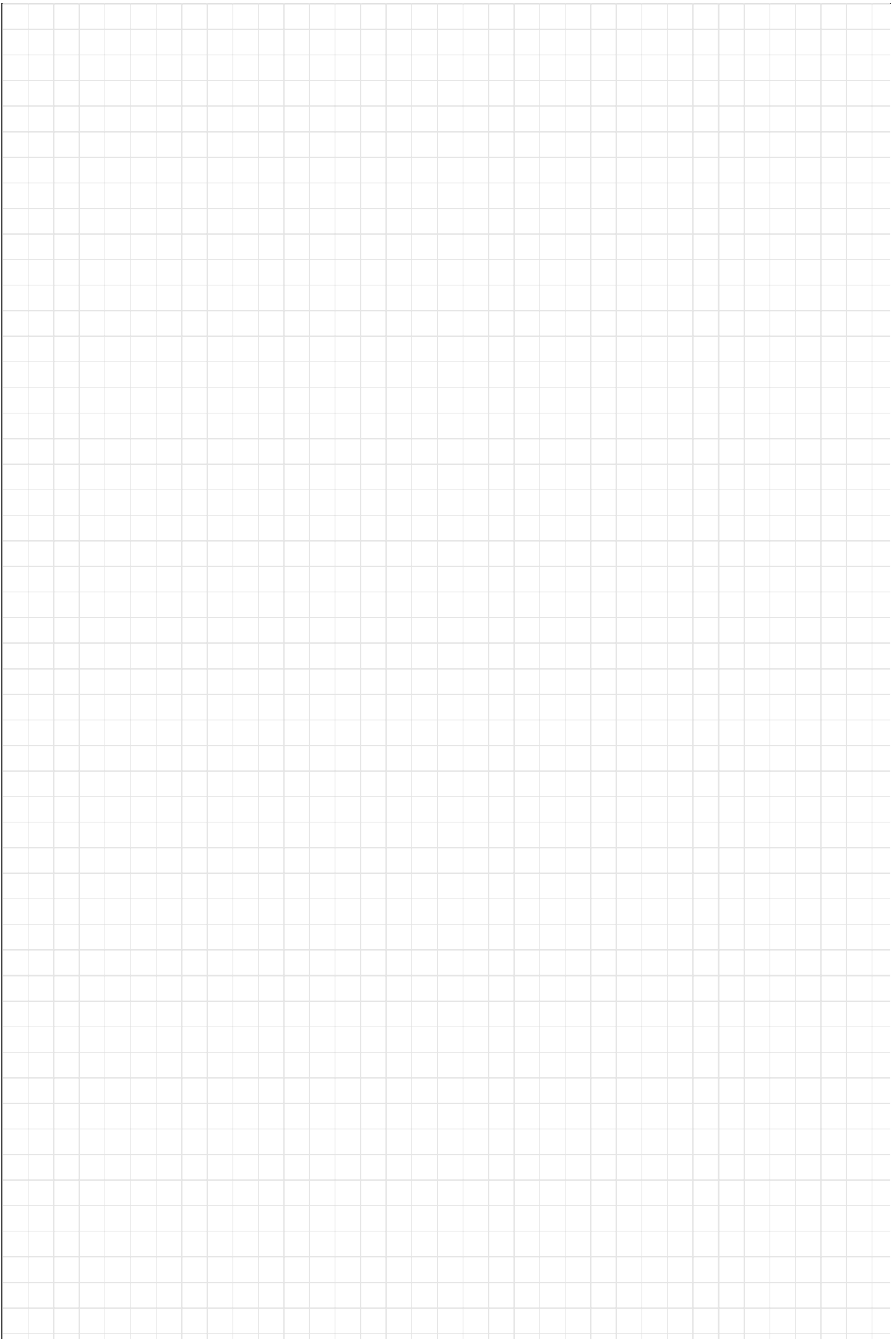
En PTSI, Ω est un ensemble fini et l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$.

*Vous avez le choix de l'univers !
on essaie de choisir l'univers où il y a équiprobabilité si possible*

Exemple



*les valeurs possibles
pour x sont en
nombre infini*



1.4 Langage des événements

Définition 1.1. Un événement A est une partie de Ω : $A \subset \Omega$.

Un événement élémentaire est un événement qui peut être représenté par un singleton $\{\omega\}$.

un seul résultat
" "
 $\omega \in \Omega$

Définition 1.2. À chaque événement A correspond son contraire « non A » que l'on note \bar{A}

A et \bar{A} sont complémentaires dans l'ensemble Ω

L'événement certain est représenté par Ω et son contraire est l'événement impossible qui est représenté par \emptyset .

Définition 1.3. L'événement « A et B » est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés au cours de la même expérience aléatoire. L'événement « A et B » est représenté par $A \cap B$.

Définition 1.4. Deux événements A et B sont dits incompatibles si et seulement si A et B sont disjoints, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$.

$A = \text{"boule jaune"}$ $B = \text{"boule bleue"}$

Définition 1.5. L'événement « A ou B » est réalisé si et seulement si au moins l'un des 2 événements A ou B est réalisé au cours de la même expérience aléatoire. L'événement « A ou B » est représenté par $A \cup B$.

Définition 1.6. La condition « l'événement A implique l'événement B » est représenté par $A \subset B$.

Définition 1.7. On appelle système complet d'événements une famille $(B_i)_{i \in I}$ d'événements de Ω vérifiant :

$$\forall i \in I, \quad B_i \neq \emptyset \text{ et } \forall (i, j) \in I^2 \text{ tels que } i \neq j, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$$

exemple 2D6

$A = \text{"les 2 résultats sont pairs"}$

$B = \text{"le premier est strictement supérieur au deuxième"}$

$$A \cap B = \{(6, 2), (6, 4), (4, 2)\} = \text{"A et B"}$$

$$|A \cap B| = 3$$

$$A \cup B = \text{"A ou B"} = \overbrace{\{(2, 2), (2, 4), \dots\}}^A \cup \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \text{formule du double}$$

$$= 9 + 15 - 3 = 21$$

Exemple: On tire 3 cartes d'un jeu de 52 cartes
 $E =$ "on a tiré au moins un as"

On a $\bar{E} =$ "on n'a tiré aucun as"

ou encore en notant $E_i =$ "on a tiré exactement i as" $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\rightarrow \bar{E} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

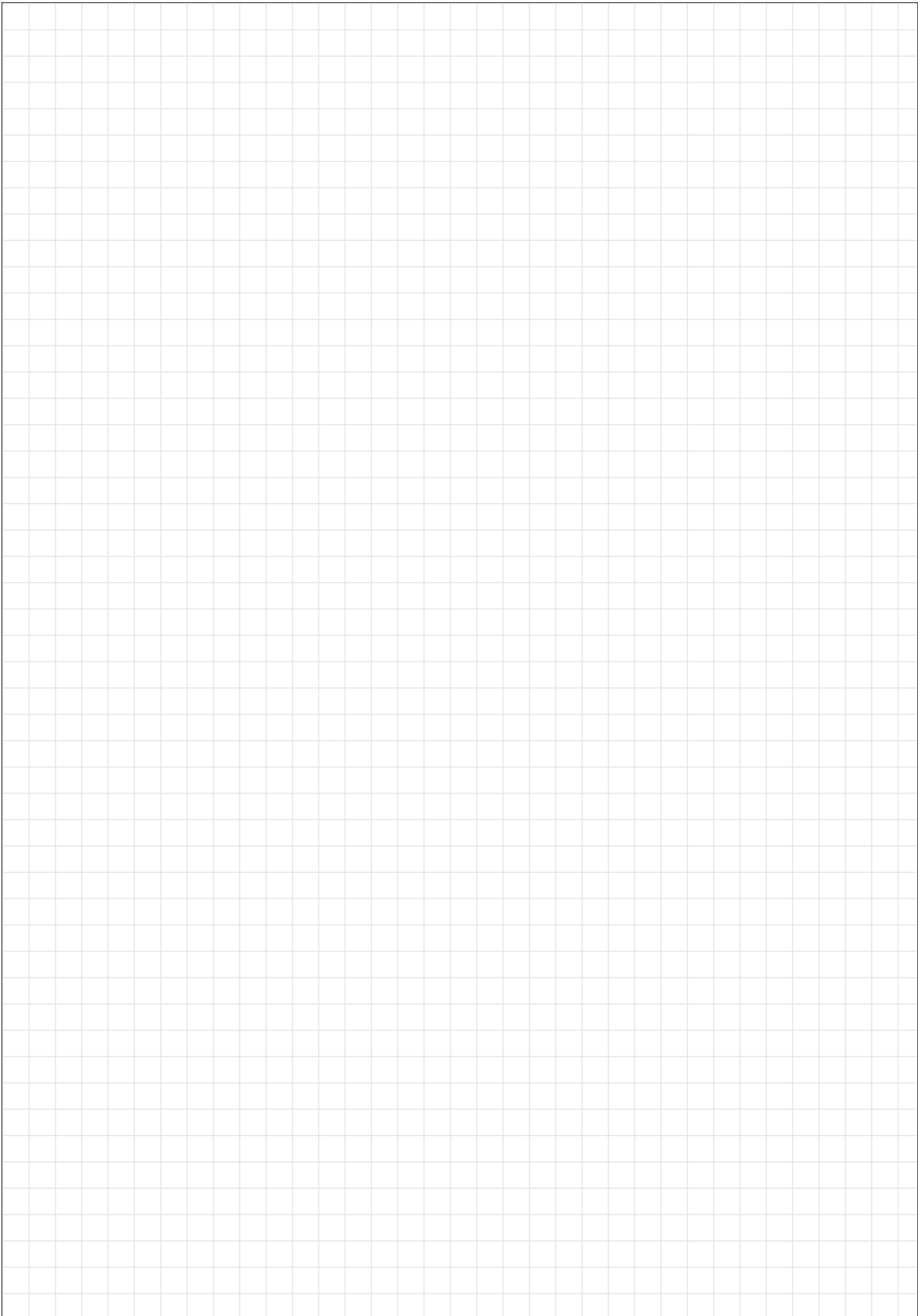
$$E_4 = \emptyset (!)$$

ici les E_1, E_2, E_3 sont incompatibles
 ou encore en notant

E_T, E_C, E_K, E_P les événements "on a tiré l'as de" trèfle, carreau, cœur ou pique.

$$\rightarrow \bar{E} = E_T \cup E_C \cup E_K \cup E_P \quad \text{ici } E_T, E_C, \dots \text{ sont équiprobables}$$

2 Espace probabilisé fini



2.1 Probabilité

Définition 2.1. Une probabilité sur un univers fini Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie :

$$\begin{cases} P(\Omega) = 1 \\ \text{pour tous événements } A \text{ et } B \text{ tels que } A \cap B = \emptyset, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases} \quad \text{\textcolor{red}{}\sigma\text{-additivité}}$$

Un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω s'appelle un espace probabilisé fini.

Note: $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω
comme Ω est fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements

Exemple: on lance 1 D6 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
et $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $P(\text{"pair"}) = \frac{|\{2, 4, 6\}|}{6}$
on dit que P est "l'équiprobabilité" sur Ω .

Exemple on lance 1 D6 non équilibré avec
 $P(\{6\}) = \frac{1}{5}$ $P(\{k\}) = \frac{4}{25}$ $\frac{1}{5} + 5 \times \frac{4}{25} = 1$
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mais il n'y a pas d'équiprobabilité

Exemple: On met des boules numérotées de 1 à n dans une urne
On tire k boules simultanément $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$
Probabilité de $A_i = \text{"on a tiré la boule } n^{\circ} i \text{"}$ $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

On utilise Ω tel que $|\Omega| = \binom{n}{k}$ tirages de k boules parmi n
sans remise et sans ordre.

Tous les tirages sont équiprobables

Parmi ces tirages, combien comptent la boule $n^{\circ} i$?

on compte les tirages de k boules sans ordre sans remise contenant la boule $n^{\circ} i$ $|A_i| = 1 \times \binom{n-1}{k-1}$

$$P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{\text{nb de tirages favorables}}{\text{nb de tirages total}} = \frac{k}{n}$$

Exemple: Même urne, on tire k boules successivement et sans remise. $P(A_i)$?

On utilise Ω l'ensemble des tirages de k boules successivement et sans remise et $|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$ nb de tirages de k boules sans remise en tenant compte de l'ordre

$A_{i,r}$ = "on a tiré la boule i au $r^{\text{ème}}$ tirage"
 $1 \leq r \leq k$

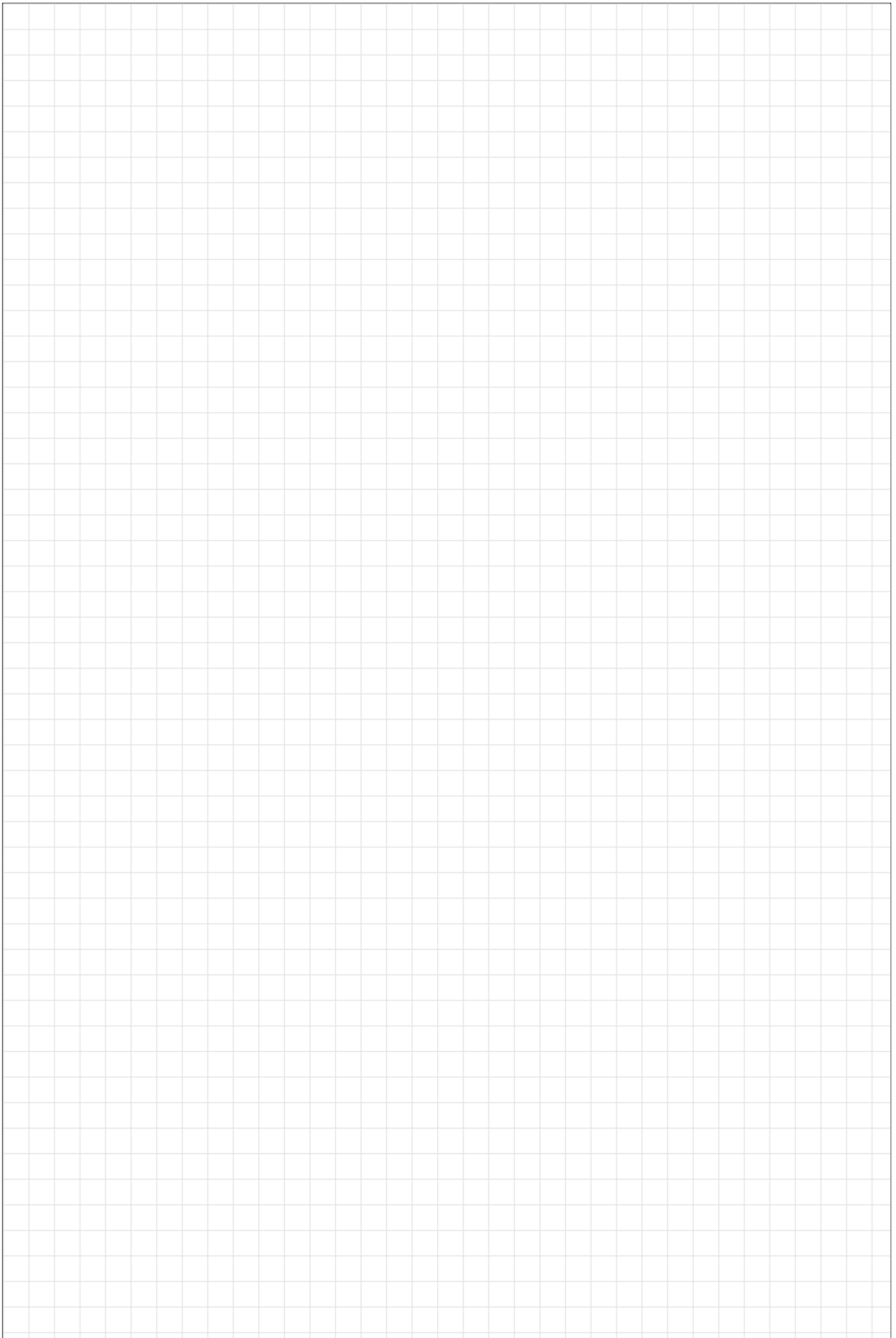
$P(A_{i,r})$?

$$|A_{i,r}| = (n-1) \times (n-2) \times \dots \times \overset{\text{tirage } r-1}{(n-(r-1))} \times \overset{\text{r}^{\text{ème}} \text{ tirage}}{1} \times (n-r) \times \dots \times (n-(k-1))$$

$$= \overset{\text{pas la boule } i}{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}} \times \overset{\text{choix de } i}{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}} = \frac{1}{n}$$

$$P(A_i) = P\left(\bigcup_{r=1}^k A_{i,r}\right) = \sum_{r=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \sum_{r=1}^k P(A_{i,r})$$

car les $(A_{i,r})_{r \in \{1, \dots, k\}}$ sont incompatibles.



2.2 Propriétés d'une probabilité

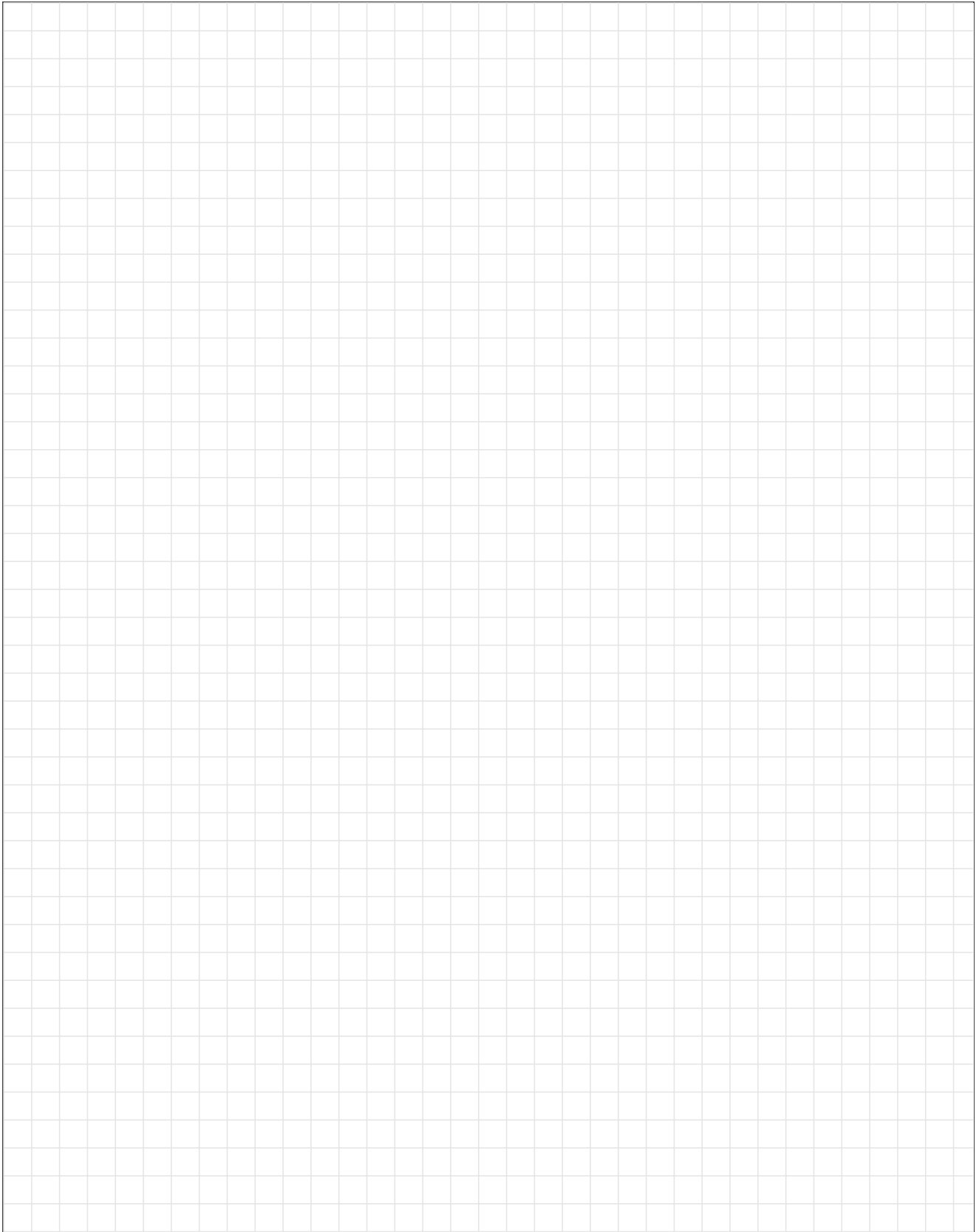
Proposition 2.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et soit A et B deux événements. On a

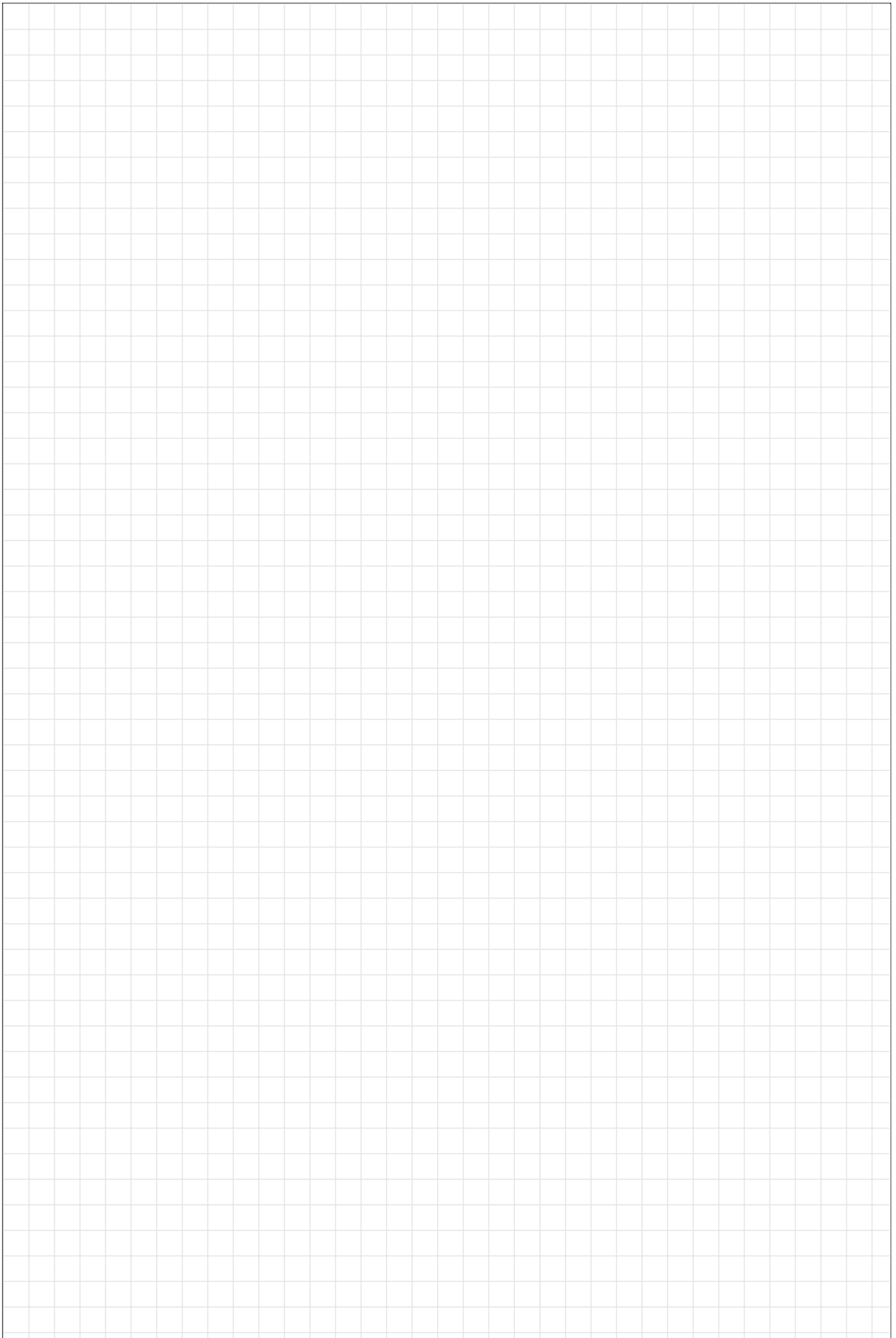
- $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ car A est la réunion disjointe des événements élémentaires $\{\omega\}$ où ω est élément de A .
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, *passage du complémentaire*
- $P(\emptyset) = 0$,
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$, *croissance de la probabilité*
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. *formule du crible*

$A \subset B$: l'événement A implique l'événement B

Proposition 2.2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- Pour A, B, C trois événements, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$,
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$.
- Si $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{i \in I} P(B_i) = 1$.





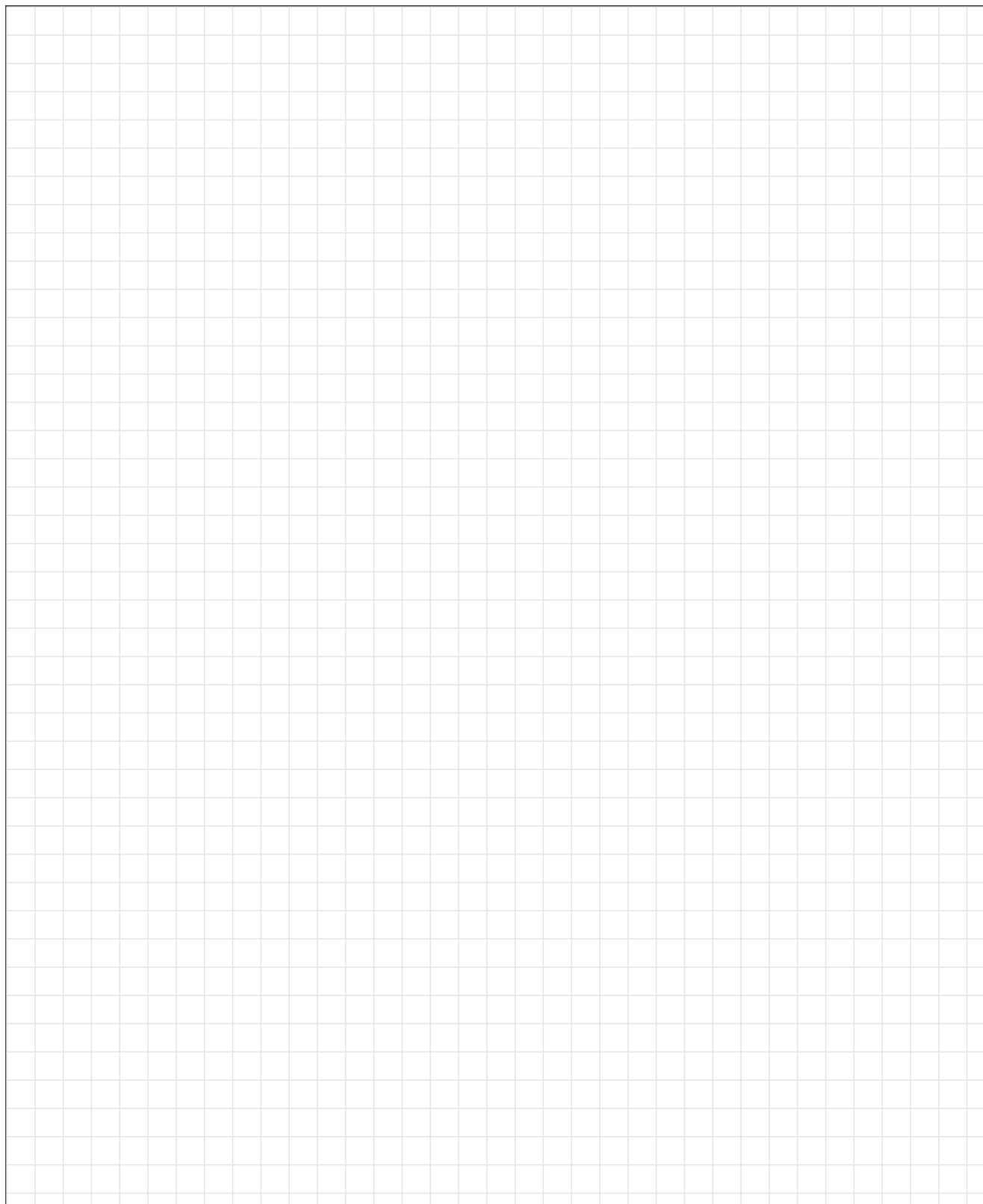
2.3 Germes de probabilité

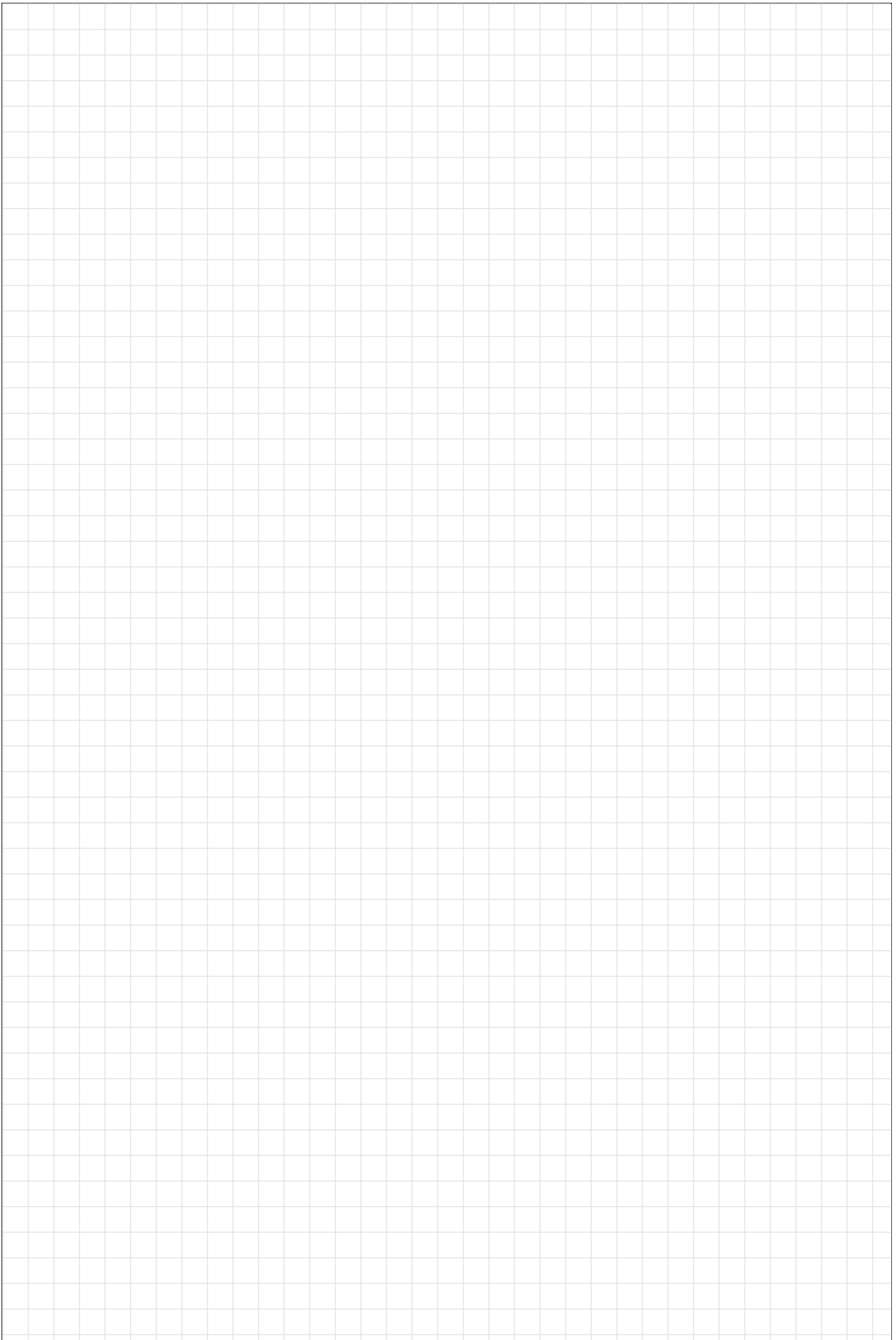
Théorème 2.3. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ et p_1, p_2, \dots, p_n des réels.

Il existe une probabilité P sur Ω telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si $\forall i, p_i \geq 0$ et

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Dans ce cas, la probabilité P est unique et pour tout événement A , on a $P(A) = \sum_{i \text{ tq } \omega_i \in A} p_i$.





2.4 Équiprobabilité

Définition 2.2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. On dit qu'il y a équiprobabilité si les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

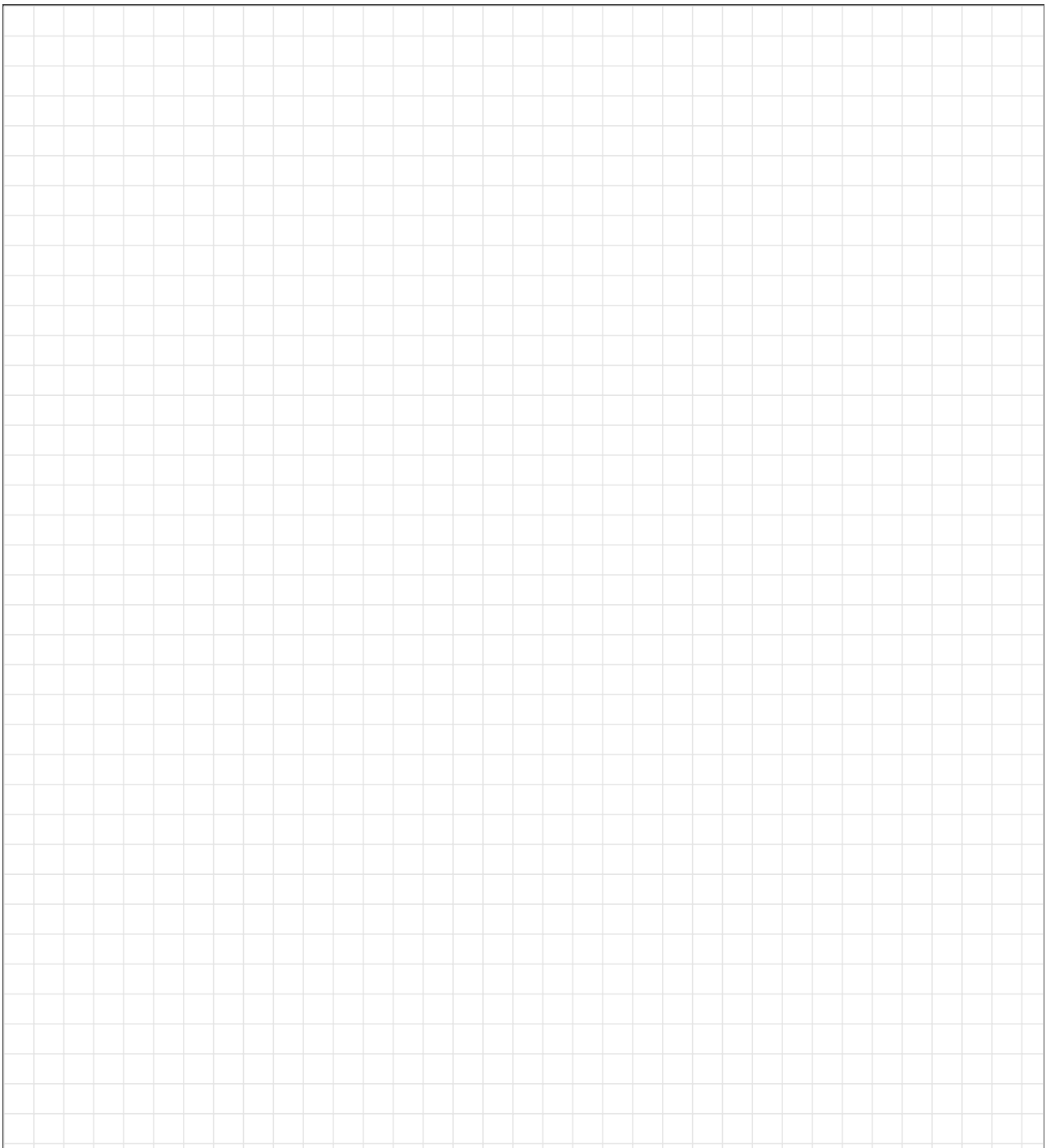
$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$$

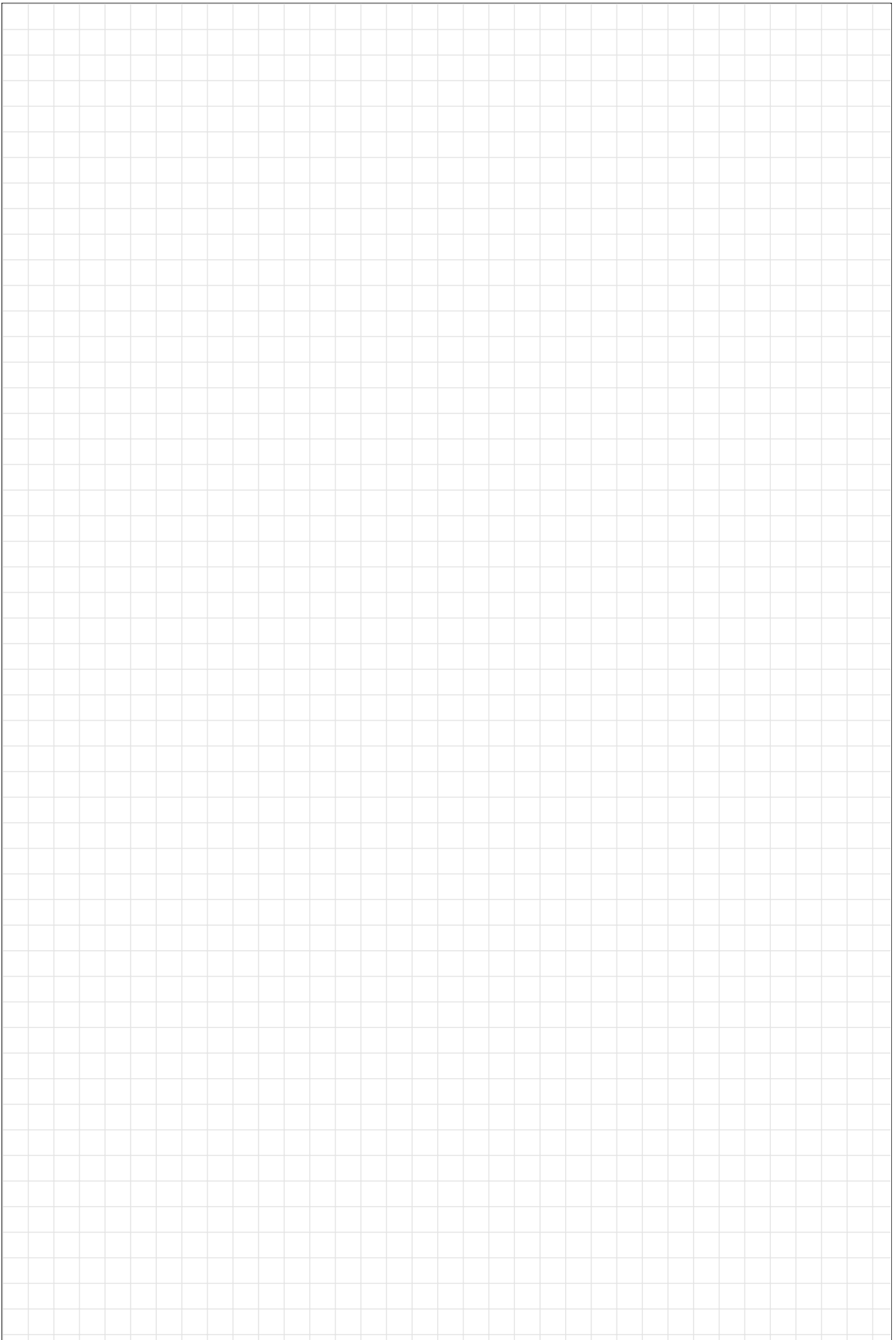
On dit que P est la probabilité uniforme.

Proposition 2.4. Soit (Ω, P) un univers fini. La probabilité uniforme P sur Ω est définie par

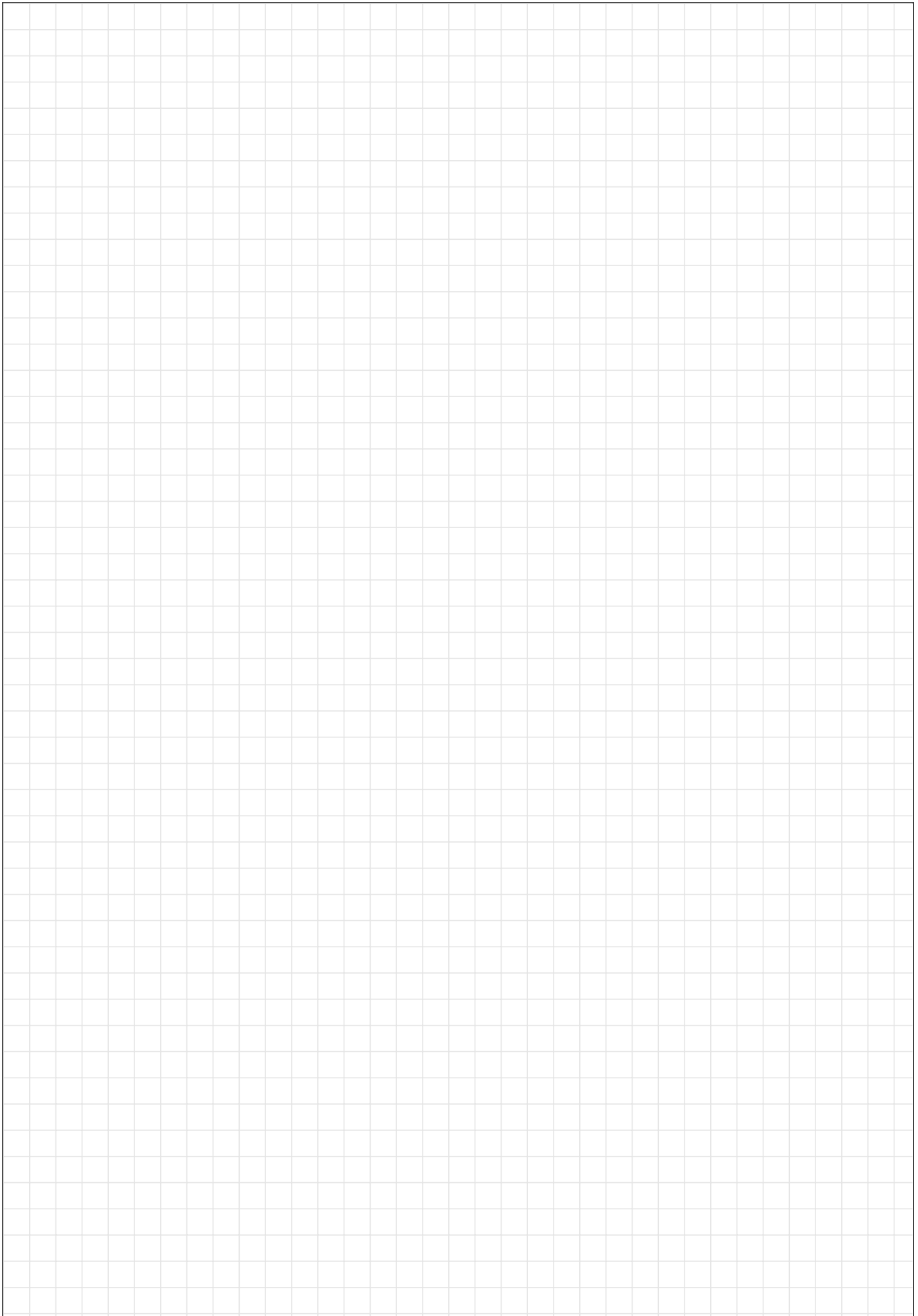
$$\text{pour tout événement } A, \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$$

Remarque 2.1. L'équiprobabilité est souvent une hypothèse que l'on pose pour adapter un modèle probabiliste à une expérience.





3 Probabilités conditionnelles



3.1 Définition

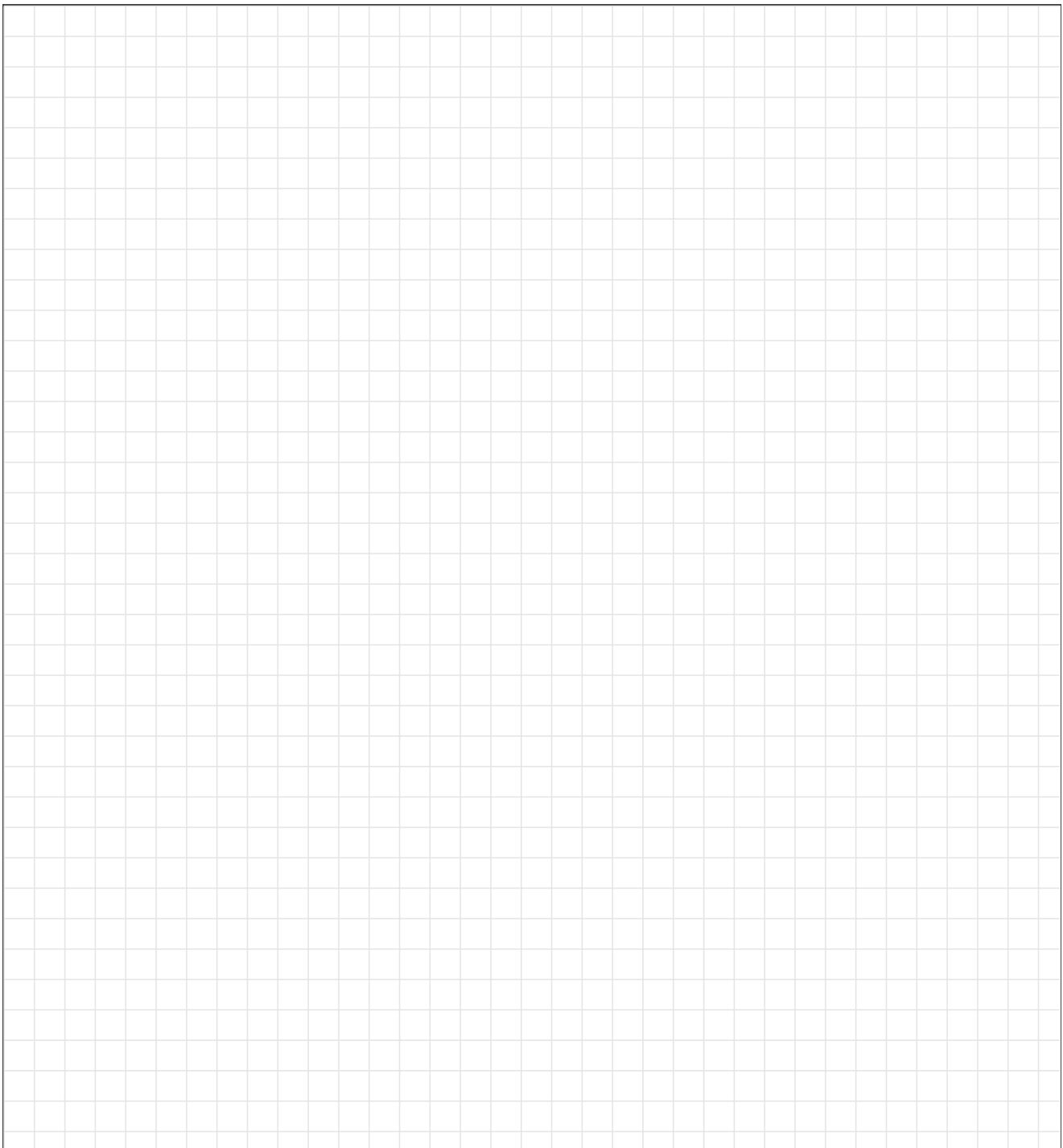
Définition 3.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement tel que $P(B) > 0$. On appelle probabilité de l'événement A sachant B (sachant que l'événement B est réalisé) :

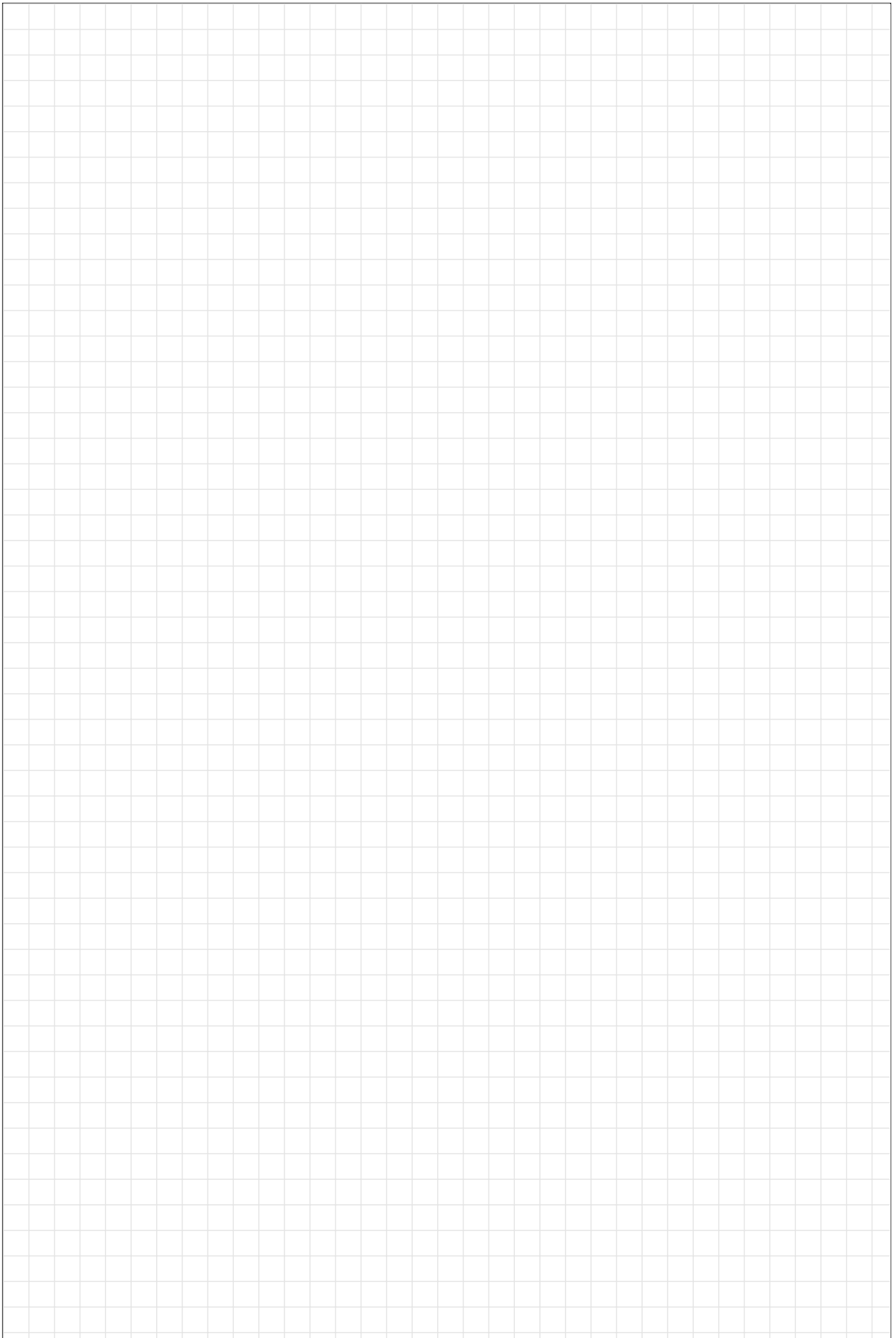
$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Théorème 3.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement avec $P(B) > 0$.

L'application $P_B : \begin{array}{ll} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow [0, 1] \\ A & \longmapsto P(A|B) \end{array}$ est une probabilité sur Ω appelée probabilité conditionnée à l'événement B .

Proposition 3.2. Pour A, B, C des événements avec $P(B) > 0$, on a $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$ et $P_B(A \cup C) = P_B(A) + P_B(C) - P_B(A \cap C)$.





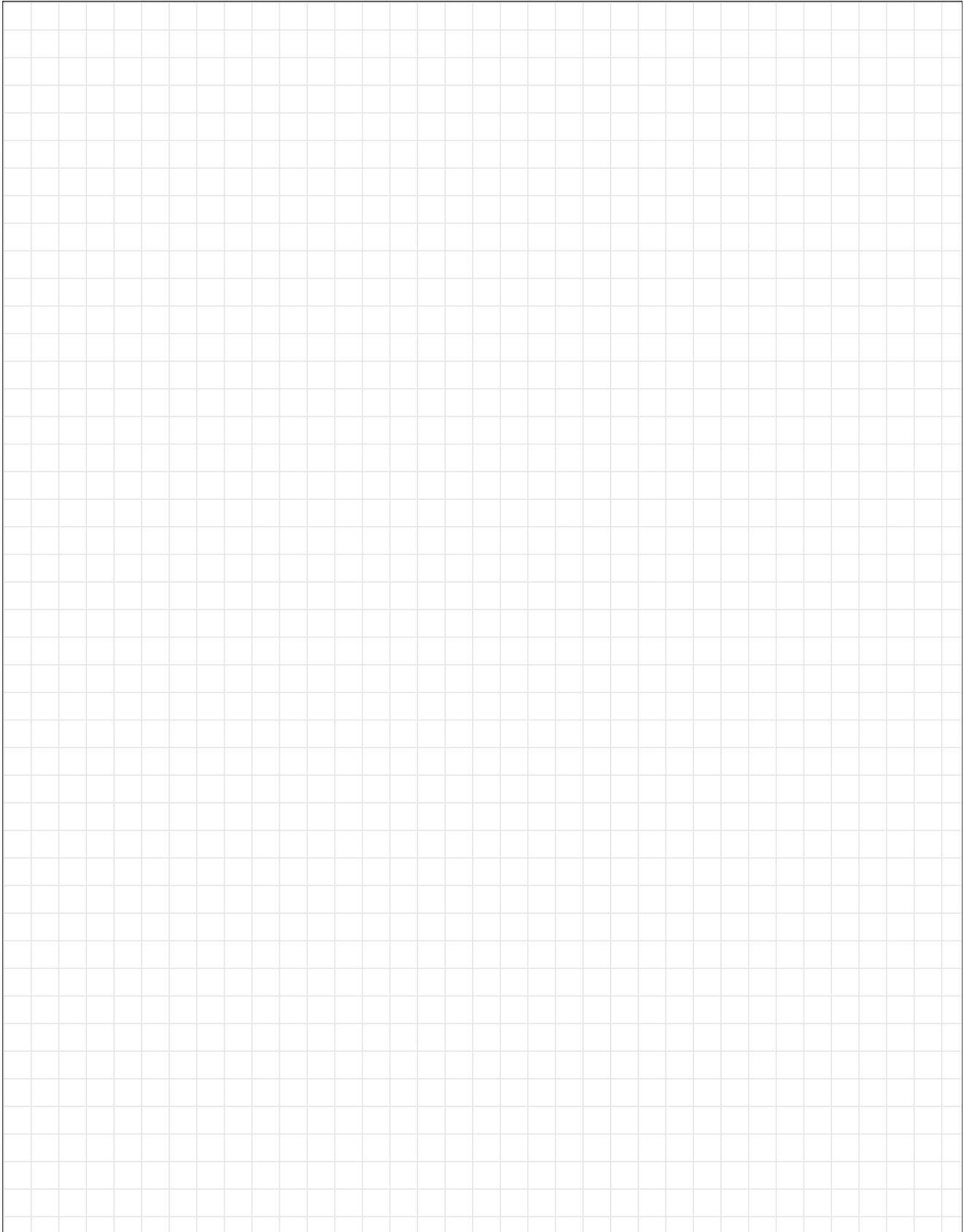
3.2 Formule des probabilités composées

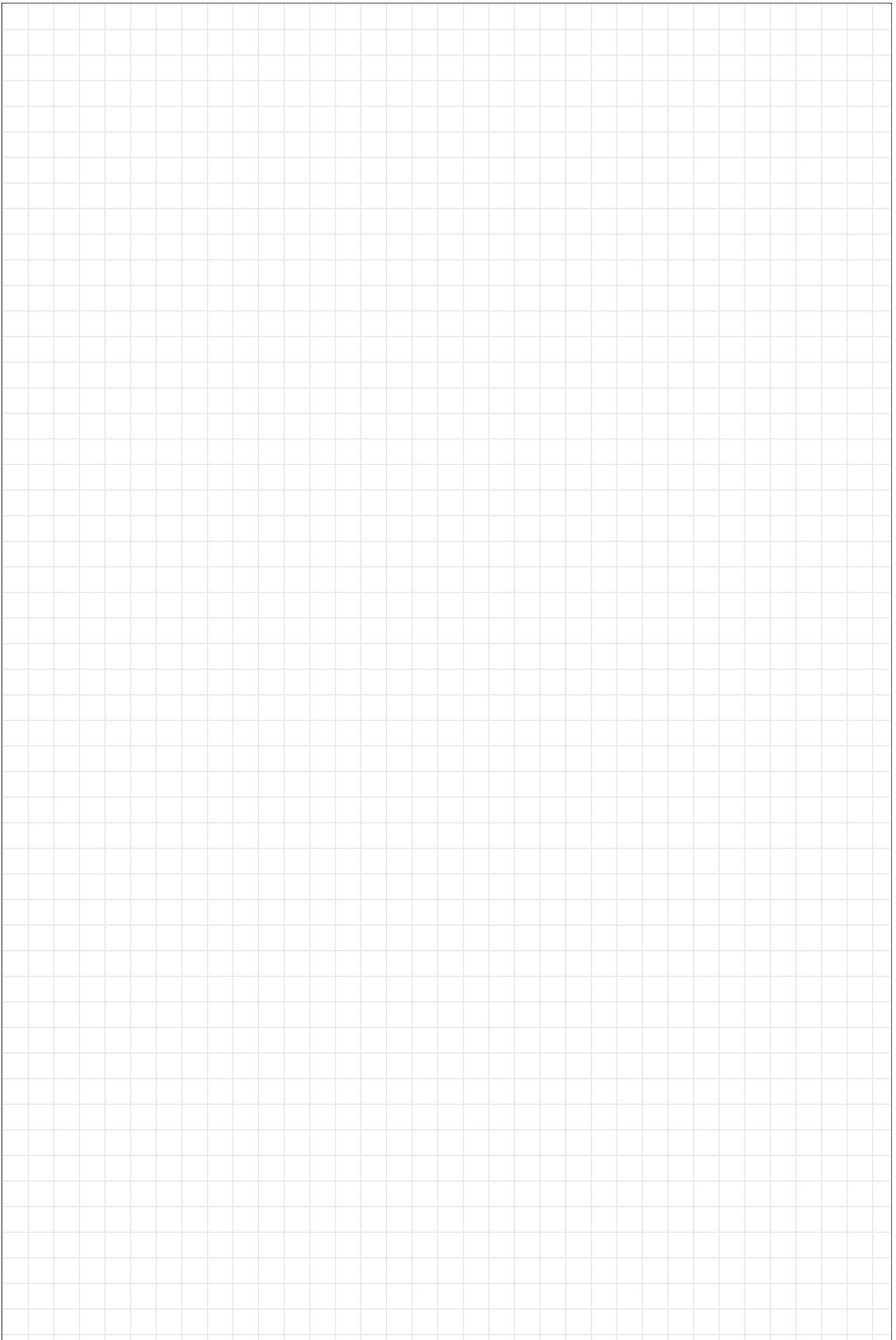
Théorème 3.3.

Pour A, B des événements avec $P(B) > 0$, on a $P(A \cap B) = P_B(A).P(B)$.

Pour A_1, A_2, \dots, A_n des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1).P_{A_1}(A_2).P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$





3.3 Formule des probabilités totales

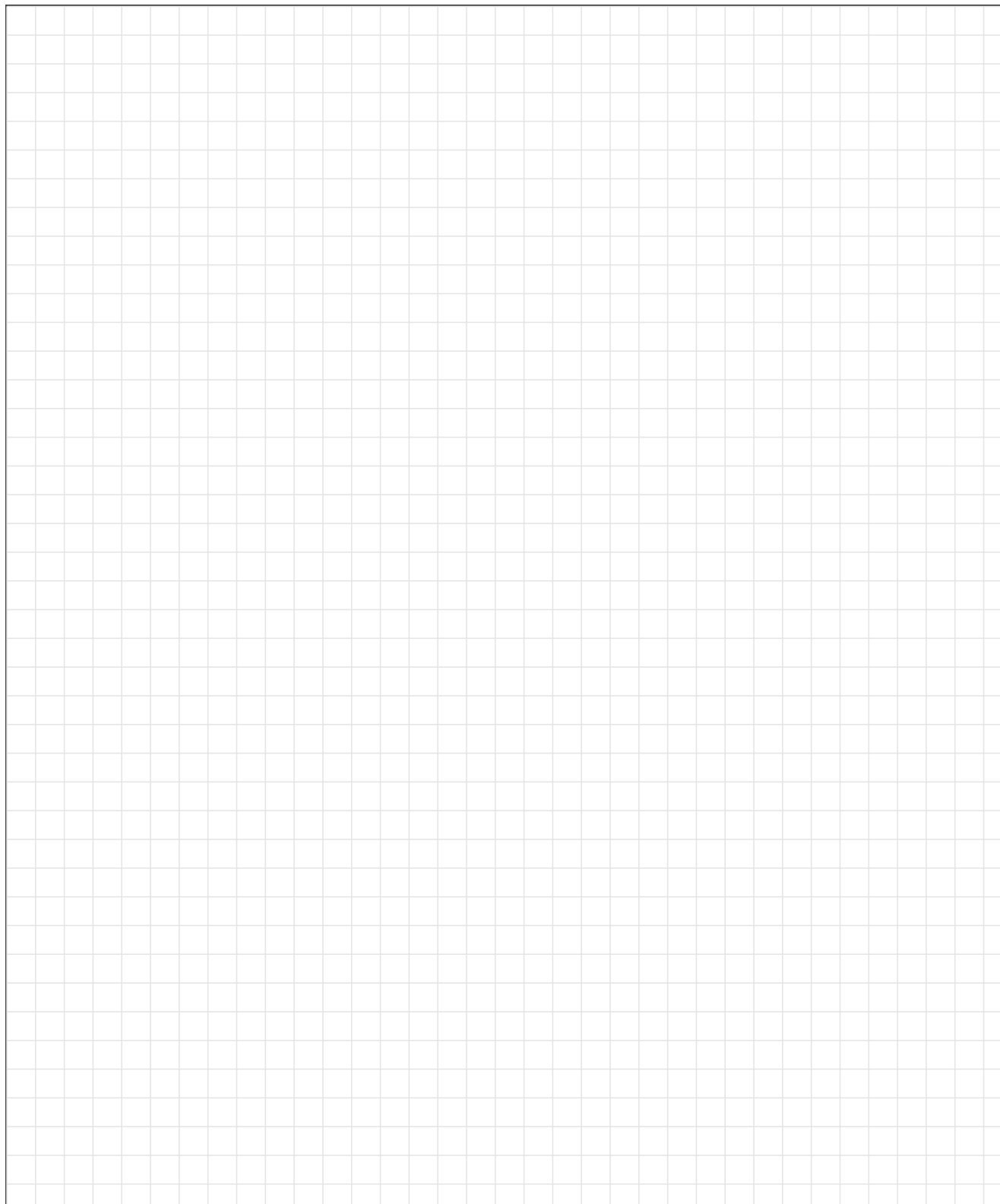
Théorème 3.4. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ un système complet d'événements.

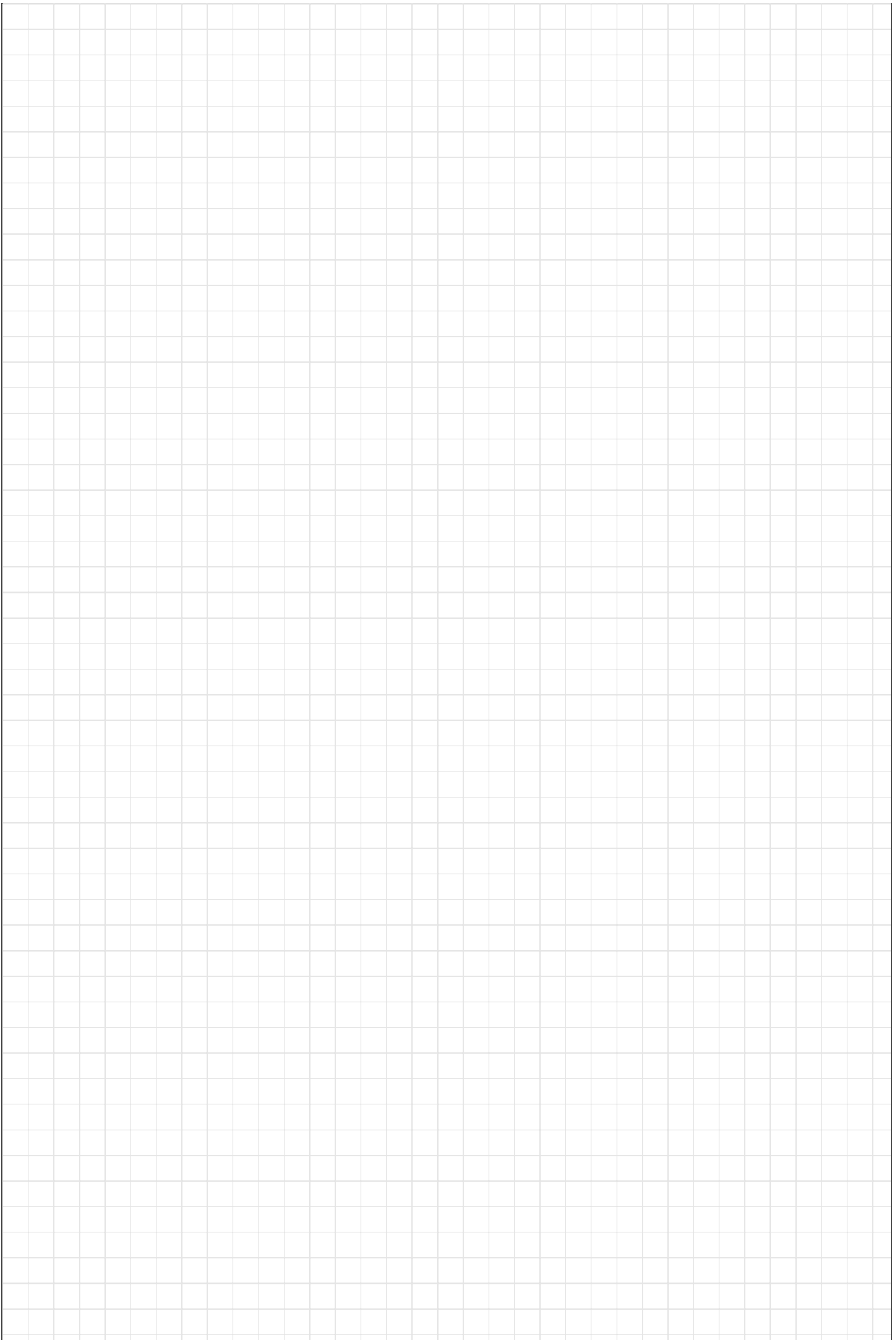
Pour tout événement B , on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Corollaire 3.5. Soit A un événement tel que $0 < P(A) < 1$.

Pour tout événement B , on a $P(B) = P(A).P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$.





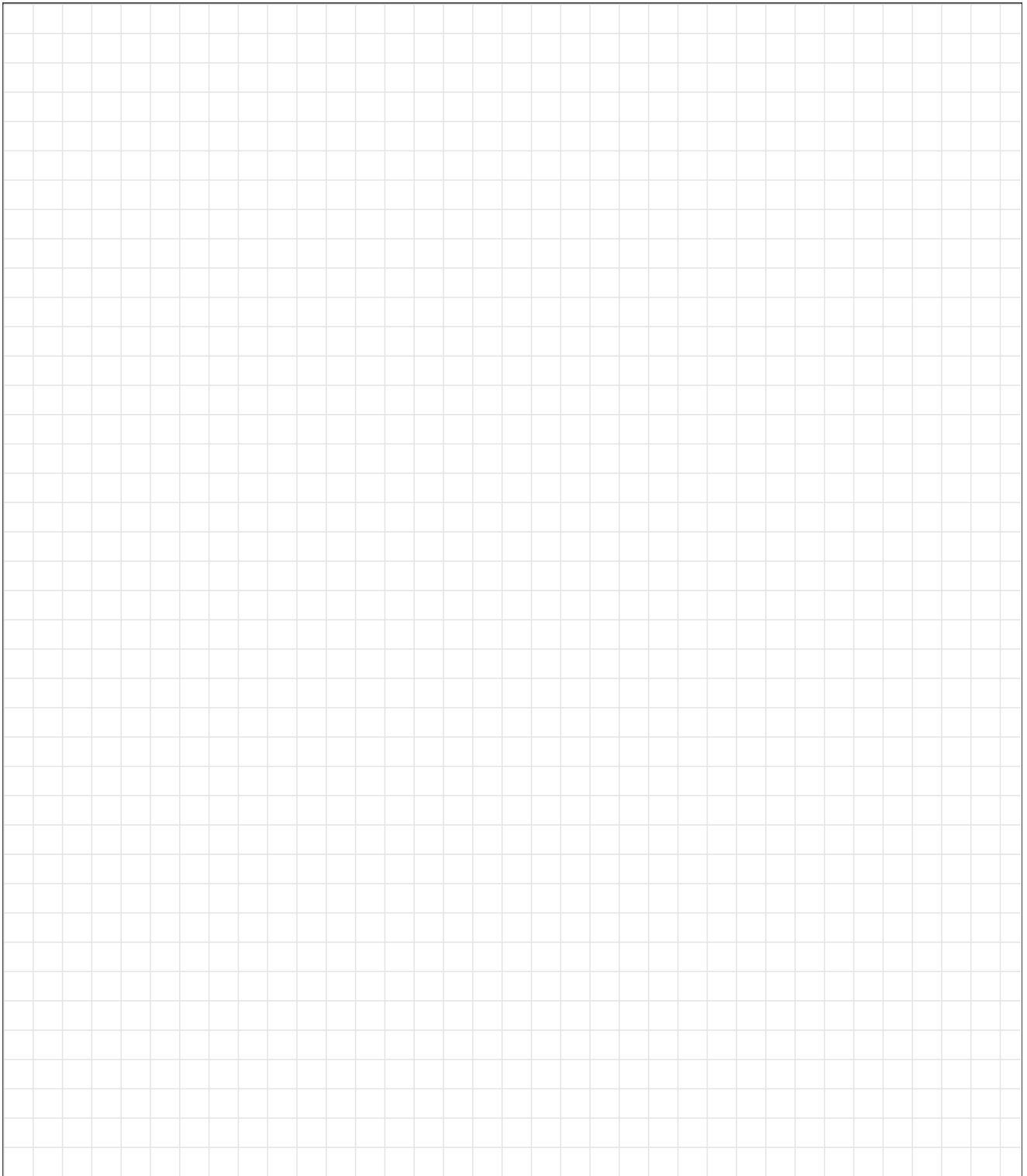
3.4 Formules de Bayes

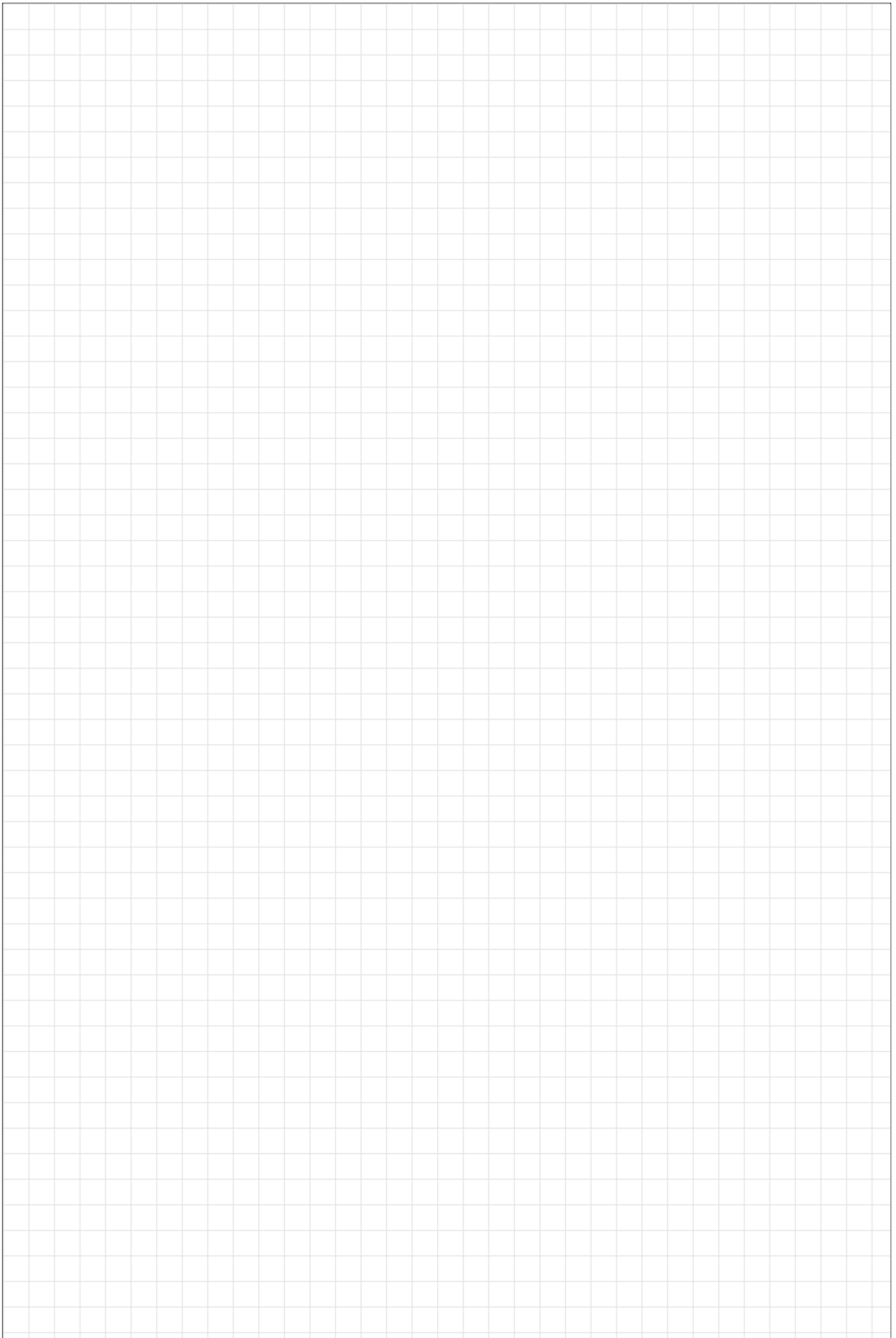
Théorème 3.6. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

Théorème 3.7. Si $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et B est un événement de probabilité non nulle, alors

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$





4 Indépendance

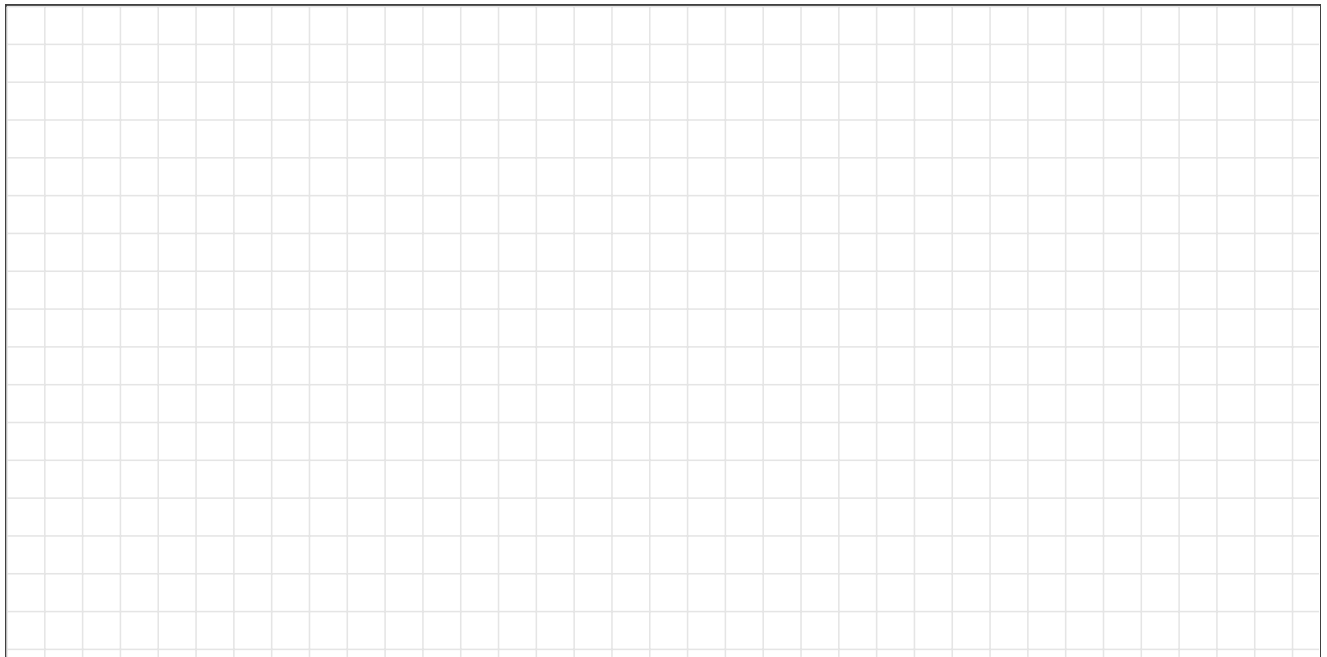
4.1 Indépendance de deux événements

Définition 4.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On dit que 2 événements A et B sont indépendants pour la probabilité P lorsque $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Proposition 4.1. Soit A et B deux événements avec $P(B) > 0$. On a

A et B sont indépendants pour la probabilité P si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Proposition 4.2. Si A et B sont deux événements indépendants, alors \bar{A} et B sont deux événements indépendants ainsi que A et \bar{B} , ainsi que \bar{A} et \bar{B} .



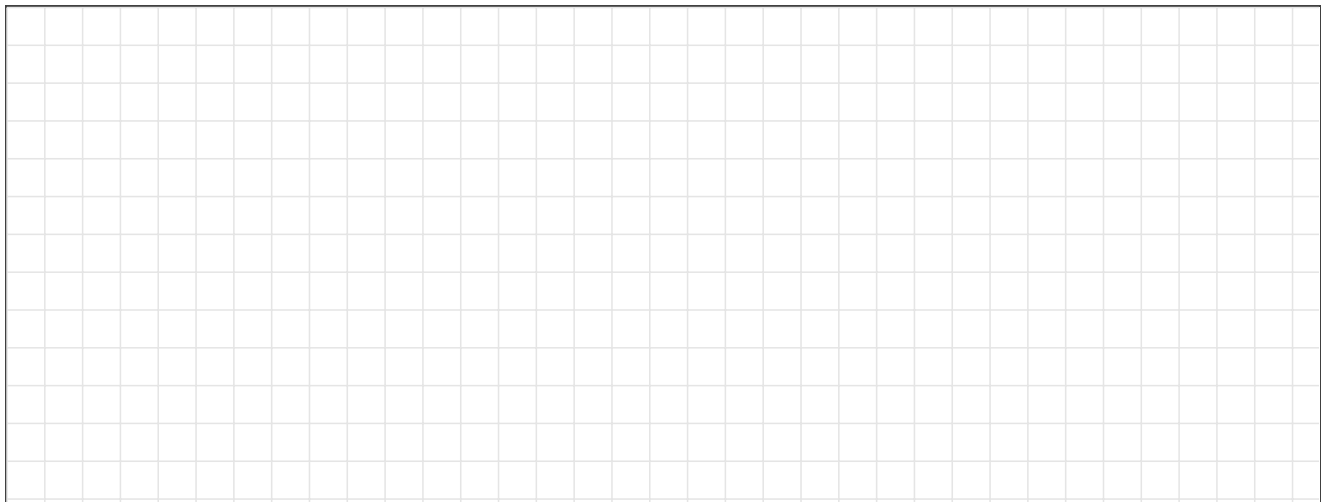
Remarque 4.1. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ un univers fini et deux probabilités P_1 et P_2 :

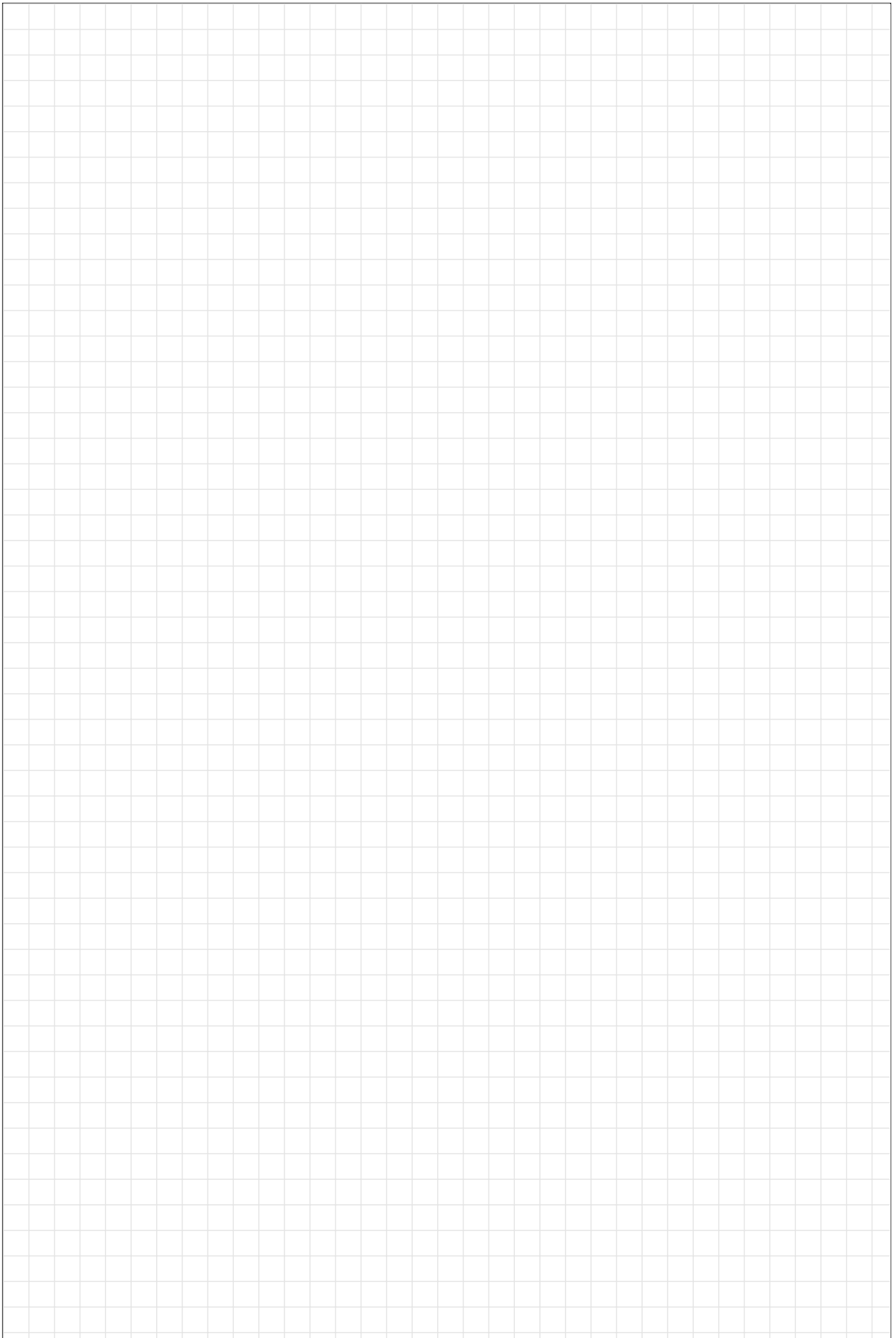
ω	1	2	3	4	5	6
$P_1(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

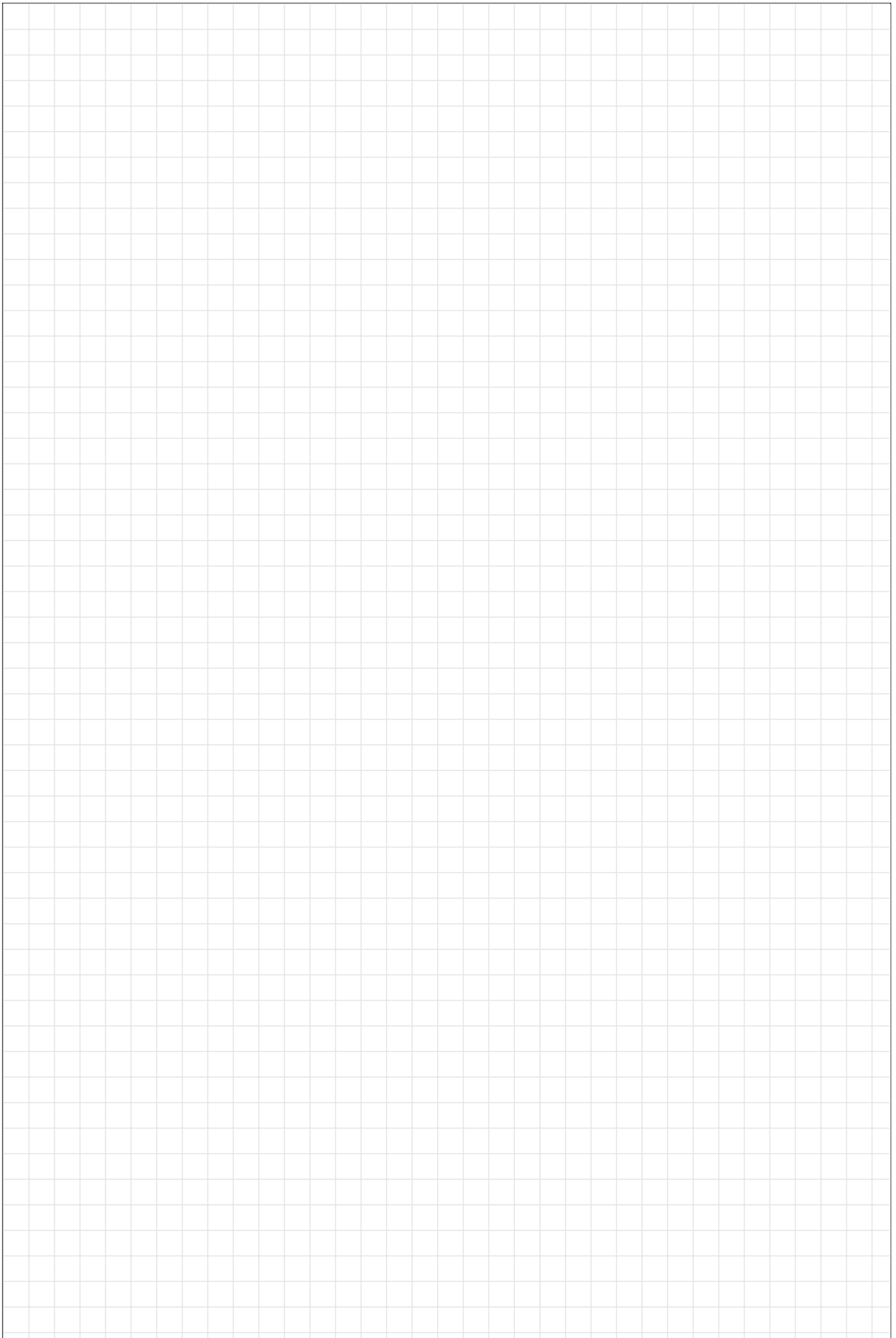
ω	1	2	3	4	5	6
$P_2(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On considère les 2 événements $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$.

On montre que A et B sont indépendants pour la probabilité P_1 mais A et B ne sont pas indépendants pour la probabilité P_2 .







4.2 Indépendance de n événements

Définition 4.2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) des événements.

On dit que les événements A_1, A_2, \dots, A_n sont mutuellement indépendants si pour toute partie $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

On dit que les événements A_1, A_2, \dots, A_n sont indépendants deux à deux si pour tous les indices $(i, j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$, on a

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j)$$

Remarque 4.2. On lance 2 fois un dé cubique parfait. Soient les événements A_1 : “le premier nombre obtenu est pair”, A_2 : “le deuxième nombre obtenu est impair”, A_3 : “la somme des 2 nombres obtenus est paire”.

On montre que A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

