Chapitre 18 - Séries numériques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ suite des sommes partielles

1 Sommes partielles d'une série

série de terme général (u_n) $\sum u_n$

1.1 Sommes partielles, somme et reste

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

On appelle série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

nouvelle notation

S_n s'appelle la somme partielle d'indice n.

Si la série converge, sa limite s'appelle somme de la série et on la note $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

(S_n) converge

On appelle reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Exemple 1.1. $\cancel{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}}$

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}$ série de terme général $v_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

de sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k^2}$

Exemple 1.2. Soit $a \in \mathbb{R}$. fixé La série $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$. C'est la série exponentielle.

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$ est convergente car $S_n = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}$

la fonction exp est C^∞ alors d'après la formule de Taylor en 0

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \exp^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$

on pose $x = a$

$e^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a e^t \frac{(a-t)^n}{n!}\,dt$

On encadre le reste intégral pour $a>0$

On prend $t\in[0,a]$

$0\leq e^t\leq e^a$ d'où $0\leq e^t\frac{(a-t)^n}{n!}\leq e^a\frac{(a-t)^n}{n!}$

L'intégrale est croissante et $0\leq a$ et les 3 fonctions sont continues d'où

$$\int_0^a 0\,dt\leq\int_0^a e^t\frac{(a-t)^n}{n!}dt\leq\int_0^a e^a\frac{(a-t)^n}{n!}dt$$

pour $a>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $$0\leq e^a-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\leq e^a\left[\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a=e^a\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty}e^a\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=0$

donc par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}=e^a$

ce qui prouve que la série converge vers e^a pour $a>0$

$S_n\to e^a$

Proposition 1.1. *Pour tout entier n_0, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0}u_n$ sont de même nature.*

Preuve : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature

Exemple 1.3. Les séries arithmétiques : $\sum_{n\geqslant 0} na$ avec $a \in \mathbb{C}^*$

Exemple 1.4. Les séries géométriques : $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ avec $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| < 1$ convergent.

Ecrivons les sommes partielles de cette série :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

On peut conclure pour $|q| < 1$:

alors $q^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car suite géométrique de raison q

donc (S_n) converge vers $\dfrac{1}{1-q}$

alors $\sum q^n$ converge et la somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

1.2 Linéarité de la somme

Proposition 1.2. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, et si $\alpha \in \mathbb{K}$ est un scalaire, alors $\sum(\alpha u_n + v_n)$ est convergente et* $\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha u_n + v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

conjugué

Proposition 1.3. *Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors $\sum \overline{u_n}$ est convergente et* $\overline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n}$

Proposition 1.4. *Une série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.*

En cas de convergence, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$

Exemple 1.5. Étudions la série : $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{n(-1/2+i)}$

on écrit les sommes partielles

$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{k(-\frac{1}{2}+i)} = \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{1}{2}k} e^{ik}$

$= \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-\frac{1}{2}+i}\right)^k$ c'est une série géométrique

de raison $q = e^{-\frac{1}{2}+i}$ et $|q| = |e^{-\frac{1}{2}}||e^{i}| = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

on a $|q| < 1$ donc $\sum q^n$ converge

donc la série $\sum e^{n(-\frac{1}{2}+i)}$ est convergente

Exemple 1.6. Étudions la somme de ces deux séries : $\sum_{n\in\mathbb{N}} n + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\right)$

la série $\sum n$ est divergente : série arithmétique de raison 1 la série $\sum\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\right)$ diverge car :

les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - k\right)$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Mais $n + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

1.3 Limite du terme général d'une série convergente

Théorème 1.5.
Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors le terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0.

Démonstration.

les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ de la série $\sum u_n$ vérifient $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = u_n \Leftrightarrow S_n = S_{n-1} + u_n$

Si la série $\sum u_n$ CV, alors (S_n) converge vers une limite ℓ et $S_n - S_{n-1} \to \ell - \ell = 0$ par opération sur les suites CV

alors (u_n) converge vers 0

□

Définition 1.2. Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Exemple 1.7. Les séries géométriques : $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ avec $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| \geqslant 1$ divergent.

Si $|q| \geq 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|q^n| \geq 1 \Rightarrow |q^n - 0| \geq 1$

donc (q^n) ne converge pas 0.

donc $\sum q^n$ est divergente

exemple : $\sum (-1)^n$

les sommes partielles valent : 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

Exemple 1.8. La série harmonique : $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n}$ est une série divergente. mais $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On va montrer que $\forall x>-1$, $\ln(1+x)\leq x$

on pose $\varphi(x)=x-\ln(1+x)$

φ est dérivable sur $]-1,+\infty[$

et $\varphi'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$

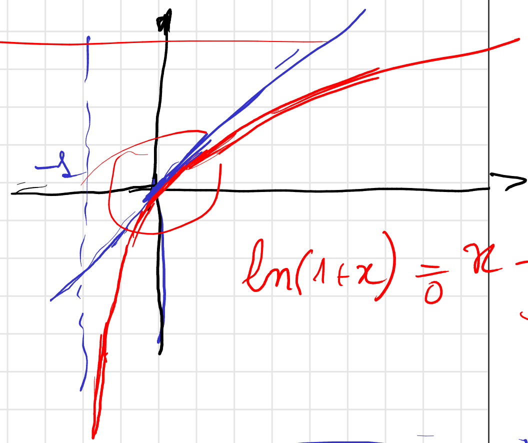
$\varphi'(x)\geq 0 \iff \frac{x}{1+x}\geq 0$

$\iff x(1+x)\geq 0$ et $x\neq -1$

$\iff$ $\cancel{x<-1}$ ou $x\geq 0$

valeur interdite

et $\varphi(0)=0$



$\ln(1+x) \underset{0}{=} x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a $\forall x>-1$, $\ln(1+x)\leq x$

On a les sommes partielles de $\sum\frac{1}{n}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$ en posant $x=\frac{1}{k}>0$

$$\geq\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln(k)\right)$$

on reconnait une somme télescopique :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n\geq\ln(n+1)-\ln(1)=\ln(n+1)$

donc par théorème de divergence par minoration

$S_n\longrightarrow+\infty$ donc $\boxed{\sum\frac{1}{n}\text{ diverge}}$

et elle n'est pas grossièrement divergente

1.4 Séries géométriques

Théorème 1.6. *La série* $\sum q^n$ *avec* $q \in \mathbb{C}$ *converge si et seulement si* $|q| < 1$.

Corollaire 1.7. *Si la série* $\sum q^n$ *converge, alors sa somme est* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Exemple 1.9. $\sum \frac{1}{(-2)^n}$

Exemple 1.10. $\sum e^{-n}$

* $\sum \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente car $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ et la somme (= limite) de la série géométrique est $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$
* $\sum e^{-n}$ est une série convergente car $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$
* $\sum \frac{2^k}{k!}$ série exponentielle $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2$

1.5 Télescopage

Proposition 1.8. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.*

Démonstration.

Les sommes partielles de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont

$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)$ qui est une somme télescopique

$S_n = u_{n+1} - u_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

alors (S_n) CV $\Leftrightarrow$ (u_n) converge

□

Exemple 1.11. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(n-1)}$. Déterminer la valeur de sa somme.

On a $\frac{1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$ pour tout $n\geq 2$

alors $S_N = \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ est télescopique

alors $\forall N\geq 2$ $S_N = 1 - \frac{1}{N}$

donc $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$ et $\sum\frac{1}{n(n-1)}$ est convergente

et $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = 1$

Exemple 1.12. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

on a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1+1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

car $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}+\sqrt{n} = 2$

ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

car $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}$

on calcule

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2 \sum_{n=1}^{N} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

on reconnait une somme telescopique : $2\left(\sqrt{N+1}-\sqrt{1}\right)$

et $\lim\limits_{N \to +\infty} \sqrt{N+1}-\sqrt{1} = +\infty$ alors $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$

et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ DV

Exercice 1.1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente et déterminer la valeur de sa somme.

2 Séries à termes positifs

Norme bornée fixe

2.1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2.1. *Une série à termes réels positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.*

Remarque 2.1. Une série à termes réels positifs est croissante.

Démonstration.

Si $\forall n$ $u_n \geqslant 0$, la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est croissante car $\forall n$ $S_{n+1} - S_n = u_n \geqslant 0$.

D'après le th de la limite monotone (S_n) converge si et seulement si elle est majorée.

□

Exemple 2.1. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^n}$.

On a pour $k \geqslant 2$ entier, $k^k \geqslant 2^k$ car la fonction $u \longmapsto u^k$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

d'où $\frac{1}{k^k} \leqslant \frac{1}{2^k}$ alors les sommes partielles

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^k}$ sont majorées par

$$S_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \leqslant 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

la série $\sum \frac{1}{n^n}$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées, alors elle converge

et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \leqslant 3$

Exemple 2.2. Monter que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

2.2 Critère de comparaison des séries à termes positifs (CCSTP)

Théorème 2.2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites positives et si pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$ et de plus,*

$0 \leq u_n \leq v_n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration.

limite des sommes partielles de Σv_n

Si Σv_n CV, alors pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Alors les sommes partielles de Σu_n sont majorées donc Σu_n, qui est à termes positifs, converge.

□

Théorème 2.3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites positives et si pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors, $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.*

Démonstration.

On a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$$

Comme Σu_n est à termes positifs et diverge, la suite de des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

donc $\sum_{n=0}^{N} v_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ par th de div par minor°

□

Exemple Étudions $\Sigma \frac{1}{n^2}$

on a pour $n \geq 2$ $\quad n^2 \geq n \times (n-1)$

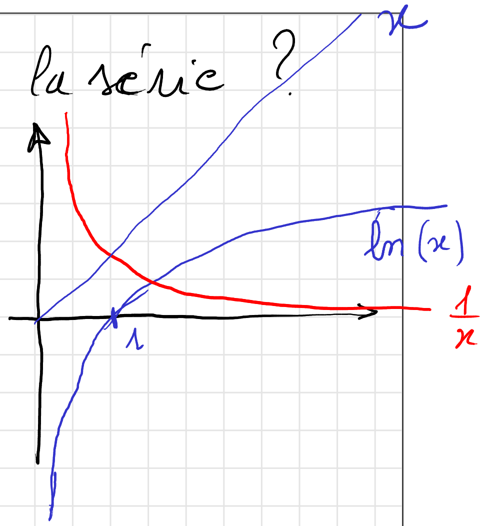
donc $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente (vu à la TV)

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs alors par le critère de comparaison à termes positifs

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge

(rappel on peut montrer (difficile) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ culture)

Exemple $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$ nature de la série ?



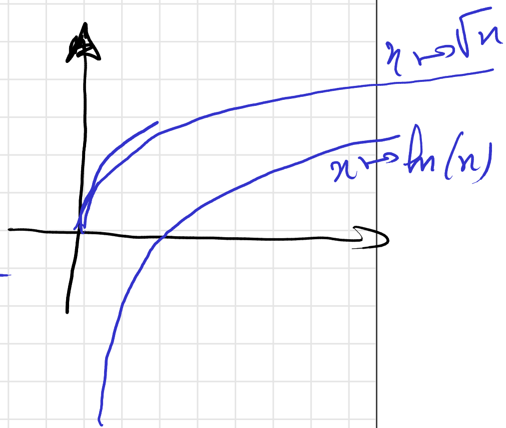
On a $\frac{\ln(n)}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente alors par le crit de comp des STP,

$$\boxed{\sum \frac{\ln(n)}{n^3} \text{ converge}}$$

Exemple $\sum \ln(n)$ diverge grossièrement car $\ln(n)$ ne tend pas vers 0.

Exemple $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$



On a $\ln(n) \leq \sqrt{n}$ pour $n \geq 1$

d'où $\frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

et on va voir au 2-4 que $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CV

donc par le CCSTP, $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ CV

Exemple $\sum \frac{\ln(n)}{n}$

on a pour $n \geq 3$ $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$

et $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n}$ DV donc par CCSTP $\sum_{n\geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$ DV

et $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

2.3 Critère d'équivalence les séries à termes positifs

Théorème 2.4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives.*

$$\text{Si } u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n, \text{ alors } \quad \sum v_n \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge.}$$

les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Démonstration.

si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$. Donc il existe un rang N tel que $\forall n \geq N$, $\frac{u_n}{v_n} \leq 2 \Rightarrow u_n \leq 2v_n$

* si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq N} v_n$ converge et par CCSTP $\sum_{n\geq N} u_n$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge
* on échange les rôles de (u_n) et (v_n) on a $\sum u_n$ CV $\Rightarrow \sum v_n$ CV

□

Exemple 2.3. * $\sum \frac{n+\sin(n)}{n^3+3}$

On a $n+\sin(n) \underset{+\infty}{\sim} n$ et $n^3+3 \underset{+\infty}{\sim} n^3$

alors $\frac{n+\sin(n)}{n^3+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ est CV et la série $\sum \frac{n+\sin(n)}{n^3+3}$ est à termes positifs alors d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs

$\sum \frac{n+\sin(n)}{n^3+3}$ converge

exemple $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ nature ?

On a $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

d'où $\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ est CV car c'est une de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$

donc par opérations sur les séries convergentes $\sum \frac{1}{2n^2}$ CV

De plus $\frac{1}{2n^2} > 0$ alors $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ est positive au voisinage de $+\infty$ (à partir d'un certain rang)

D'après <u>le critère d'équivalence des STP</u>, $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ <u>CV</u>

2.4 Comparaison à une intégrale

Théorème 2.5. *Si f est une fonction décroissante et continue sur $[n_0,+\infty[$, alors on a pour $n \geqslant n_0+1$:*

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$$

← 2 inégalités

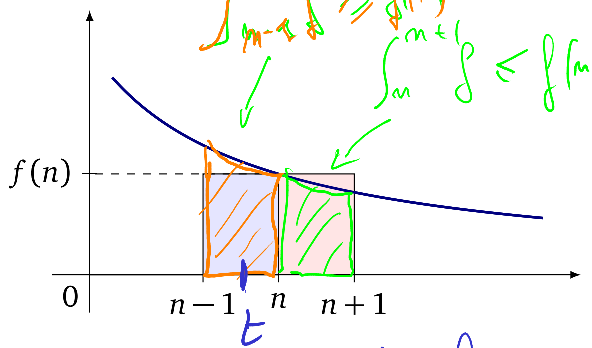
ce qui donne :

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$$

Démonstration.

$\int_{n-1}^{n} f \geqslant f(n)$

$\int_{n}^{n+1} f \leqslant f(n)$



pour $t \in [n-1, n]$

$f(t) \geqslant f(n)$

f est continue, l'intégrale est croissante, les bornes sont $n \geqslant n-1$, alors

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \geqslant \int_{n-1}^{n} f(n)\,dt = f(n) \quad \text{(aire du rectangle bleu)}$$

De même sur $[n, n+1]$ $f(t) \leqslant f(n)$

ce qui donne $\int_{n}^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \int_{n}^{n+1} f(n)\,dt = f(n)$

Exemple $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et décroissante et positive :

On a pour $n \geqslant \cancel{1}\ 2$, par comparaison à une intégrale :

$$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$$

⚠ $n-1 \geqslant 1 > 0 \Rightarrow n \geqslant 2$

□

On somme pour $n=2$ à N :

$$\int_2^{N+1} t^{-\frac{3}{2}}\,dt = \sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt = \int_1^N t^{-\frac{3}{2}}\,dt$$

d'où

$$\left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_2^{N+1} \leqslant S_N \leqslant \left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_1^{N} = 2 - \frac{2}{\sqrt{N}}$$

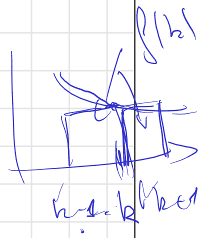
d'où $\forall N \geqslant 2$ $S_N \leqslant 2 - \frac{2}{\sqrt{N}} \leqslant 2$ donc la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CV par le th de la lim monotone

Exemple 2.4. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. En déterminer un équivalent.

on compare à une intégrale. On pose $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$

f est continue, décroissante alors

on a pour $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$



on somme ces inégalités pour k allant de 2 à n

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$$

Par relation de Chasles

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leq \int_1^{n} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n - 1 \leq \ln(n) - \ln(1)$$

On a donc pour $n \geq 2$

$$\boxed{\ln(n+1) + 1 - \ln(2) \leq H_n \leq \ln(n) + 1}$$

on montre que $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$:

on calcule $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

alors $\forall n \geq 2$ $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{1 - \ln(2)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$

Par théorème d'encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$

ce qui prouve $\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}$

$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

Exemple 2.5. Étudier la série $\sum \frac{1}{1+n^2}$.

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est la dérivée de Arctan

autre idée

on a pour $n \in \mathbb{N}$ $n^2 \leq 1+n^2$ $\cancel{\leq (1+n)^2}$ inutile

d'où $0 \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente (série de Riemann)

donc par critère de comparaison des STP

$\sum \frac{1}{1+n^2}$ CV

Exemple 2.6. Étudier la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\quad \sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge

$n \leq n\ln(n) \leq n\sqrt{n}$ pour $n \geq 3$

$\frac{1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{1}{n}$

Reflexions

On compare à une intégrale. On pose $f(t) = \frac{1}{t\ln(t)}$ sur $]1, +\infty[$. f est continue et décroissante.

Donc pour $k \geq 3$ entier

$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$ qui donne en sommant de 3 à n

$$\int_3^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \int_2^{n} f(t)\,dt$$

$\frac{1}{t\ln(t)} = \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)} = \frac{u'(t)}{u(t)}$

Soit pour $n \geq 3$ $\quad \int_3^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_2^{n} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$

$$\left[\ln|\ln(t)|\right]_3^{n+1} \leq S_n \leq \left[\ln|\ln(t)|\right]_2^{n}$$

d'où $\forall n \geq 3$

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq S_n$$

Or $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc par théorème de divergence par minoration, avec $S_n \to +\infty$ Donc $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge

classique

$\sum \frac{1}{n^{3/2}} = \sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $\sum \frac{1}{n^3}$ $\sum \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n}$

2.5 Séries de Riemann (tout des séries de référence)

Définition 2.1. On appelle série de Riemann, les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.6. *La série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration.

Pour $\alpha \leq 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ne tend pas vers 0 donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est grossièrement DV

Pour $\alpha = 1$ $\sum \frac{1}{n}$ DV

Pour les autres cas $\alpha \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on utilise une comparaison à une intégrale, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et décroissante.

et on a

$$\int_2^{n+1} t^{-\alpha} dt = \int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{pour } n \geq 2$$

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_2^{n+1} \leq S_n - 1 \leq \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) + 1 \leq S_n \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) + 1$$

si $\alpha > 1$, $S_n \leq \left(1 - \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha-1}}}_{\leq 0}\right) \underbrace{\frac{1}{\alpha-1}}_{>0} + 1 \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1$

donc (S_n) est majorée. Comme la série est à termes positifs (S_n) converge

si $\alpha < 1$ $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \longrightarrow +\infty$ donc (S_n) diverge

Exemple 2.7. Étude de $\sum \frac{1}{n^2+4n+1}$

On a $\frac{1}{n^2+4n+1} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2+4n+1} \sim \frac{1}{n^2}$ (au choix)

puis ...

2.6 Comparaison à une série géométrique

Exercice 2.1. Montrer le théorème suivant pour une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs :
« Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ pour tout $n \geqslant n_0$ avec $0 < q < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$ pour tout $n \geqslant n_0$ avec $q > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge. »

$\sum u_n \quad \sum q^n$

exemple : $\sum \dfrac{n}{2^n}$

on pose $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ et on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
car $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $= \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

on a pour $n \geqslant 2$ $\quad \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$

On a $\forall n \geqslant 2$ $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{3}{4} \implies u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} u_n$

on montre que $\forall n \geqslant 2$ $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \cdot \dfrac{u_2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

initialisation : pour $n = 2$, $u_2 \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \dfrac{u_2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$ c'est vrai

hérédité On suppose que $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \cdot \dfrac{u_2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$ pour un $n \geqslant 2$,
Comme on a $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} u_n$, on a $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} \dfrac{u_2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$
La proposition est vraie au rang $n+1$

conclusion : la proposition est vraie, par le principe de récurrence
pour tout $n \geqslant 2$: $\quad u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \dfrac{16}{9} u_2$

La série géométrique $\sum \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ CV car $0 < \dfrac{3}{4} < 1$

Donc $\sum \dfrac{16}{9} u_2 \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ CV et par le théorème de comparaison des séries à termes positifs $\sum u_n$ CV : $\boxed{\sum \dfrac{n}{2^n} \text{ CV}}$

Hyper classique.

Exemples : (exercices) (mq elles convergent)

$\sum \frac{n^3}{n!}$

$\sum \frac{2^n}{n!}$ (Attention, ceci est la série exponentielle)

$\sum \frac{x^k}{k!}$ $\sum \frac{x^n}{n!} \to e^x$

2.7 Comparaison à une série de Riemann

Exercice 2.2. Montrer le théorème suivant pour une série $\sum u_n$ à termes positifs.
« Si il existe $\alpha > 1$ tel que $(u_n \times n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\sum u_n$ converge.
Si il existe $\alpha \leqslant 1$ et $K > 0$ tel que $u_n \geqslant \dfrac{K}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ diverge. »

Si $\forall n \geq n_0$, on a $u_n \leq \dfrac{K}{n^\alpha}$ avec $\alpha \geq 1$.
Comme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente, on peut conclure sur $\sum u_n$ si $K \geq 0$, et $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

exemple $\quad \sum - \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$

on étudie $\sum v_n$ avec $v_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

on a $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV alors par CCSTP $\sum v_n$ CV

Par opération sur les séries convergentes, $\sum(-v_n)$ CV

$\sum u_n$ $\sum |u_n|$

3 Séries absolument convergentes

3.1 Convergence absolue

Définition 3.1. On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

valeur absolue ou module

Théorème 3.1. *Une série absolument convergente est convergente.* $\sum |u_n|$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ CV

Corollaire 3.2. *Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration.

□

Exemple 3.1. Étude de $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ série alternée

On étudie la convergence absolue : On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

on étudie $\sum |u_n| = \sum \frac{1}{n^2}$ qui est convergente.

Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc

$\sum u_n$ est convergente

$\sum |u_n|$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ ACV $\Rightarrow \sum u_n$ CV

Exemple 3.2. Étude de $\sum \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{2^n}$

on pose $u_n = \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{2^n}$ on a $|u_n| = \dfrac{|\sin(\sqrt{n})|}{2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$

on a $\sum \frac{1}{2^n}$ série géométrique convergente car $0 < \frac{1}{2} < 1$

alors par CCSTP $\sum |u_n|$ CV

donc $\sum \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

Exemple 3.3. Étude de $\sum(-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$: cette série n'est pas absolument convergente mais est convergente.

On pose $u_n = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right)$ pour $n \geq 1$

* on a $|u_n| = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} \geq \dfrac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ est divergente

alors par critère de comparaison des séries à termes positifs

$\sum |u_n|$ DV donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

* On écrit les sommes partielles : $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1}\right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{(-1)^{k-1}}{k}}_{k} - \underbrace{\frac{(-1)^{k+1-1}}{k+1}}_{k+1}\right)$$

on reconnaît une somme télescopique donc

$S_n = \underset{k=1}{1} - \dfrac{(-1)^n}{\underset{k=n}{n+1}}$ donc (S_n) converge vers 1

et $\sum (-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right)$ est convergente vers 1

Exemple 3.4. Étude de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ en utilisant $\ln(1+x)$

3.2 Convergence absolue par comparaison

Théorème 3.3. *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe et v_n une suite à termes strictement positifs. Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.*

Démonstration. $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée

si $u_n = O(v_n)$ alors il existe $K \in \mathbb{R}$ et un rang n_0 tels que $\forall n \geq n_0$, $|u_n| \leq K v_n$ et $\sum v_n$ CV

$\Rightarrow \sum |u_n|$ CV par le CCSTP

$\Rightarrow \sum u_n$ est ACV donc $\sum u_n$ CV

□

Exemple 3.5. Étude de $\sum \dfrac{\sin(n) + e^{in}}{n^2}$

On a $\left|\dfrac{\sin(n)+e^{in}}{n^2}\right| \leq \left|\dfrac{\sin(n)}{n^2}\right| + \left|\dfrac{e^{in}}{n^2}\right|$ par inégalité triangulaire d'où $\left|\dfrac{\sin(n)+e^{in}}{n^2}\right| \leq \dfrac{2}{n^2}$

et $\sum \dfrac{2}{n^2}$ est une série de Riemann convergente

donc $\sum \dfrac{\sin(n)+e^{in}}{n^2}$ est ACV donc CV.

4 Développement décimal d'un nombre réel

Définition 4.1. Soit x un nombre réel positif, on appelle valeur décimale approchée par défaut à 10^{-n} près de x le nombre $x_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor$ et valeur décimale approchée par excès à 10^{-n} près le nombre $y_n = 10^{-n}(\lfloor 10^n x \rfloor + 1) = x_n + 10^{-n}$.
On a alors $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x < y_{n+1} \leqslant y_n$.

Proposition 4.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Les suites des valeurs décimales approchées par défaut et par excès de x sont adjacentes et convergent vers x.*

Définition 4.2. Soit x un nombre réel positif et n un entier naturel, on appelle développement décimal de x l'écriture de $x - \lfloor x \rfloor$ comme somme de la série convergente $x - \lfloor x \rfloor = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ où la $n^{\text{ième}}$ décimale de x après la virgule définie par $a_n = 10^n(x_n - x_{n-1})$ est un entier entre 0 et 9.
On peut écrire $x = \lfloor x \rfloor + \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \dots$.

Démonstration.

□

Remarque 4.1. On a pour tout entier n_0, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \times \frac{1}{10^{n_0}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{n_0-1}}$.
Alors, le nombre $x = 0,12349999999999\dots.$ (avec une suite infinie de 9) vaut $x = 0,1235$ et la suite des chiffres de son développement décimal est $1, 2, 3, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$

Proposition 4.2. *Le développement décimal d'un réel positif est propre : c'est-à-dire que la suite des (a_n) ne se stabilise pas à 9 au-delà d'un certain rang.*

Proposition 4.3. *Tout nombre décimal a 2 développements l'un propre et l'autre impropre.*

Théorème 4.4.

Un nombre x est décimal si et seulement la suite de son développement décimal (a_n) est nulle à partir d'un certain rang.

Un nombre positif x est rationnel si et seulement si la suite (a_n) de son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Théorème 4.5. *Pour tout nombre $x \in [0,1[$, il existe une unique suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \in [\![0,9]\!] \quad \text{et} \quad (a_n) \text{ n'est pas stationnaire à } 9.$$

On a $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor$. On l'appelle le développement décimal illimité propre de x.