Chapitre 16 - Cours - Exemple de développement asymptotique

Exercice de cours :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie l'équation $(E_n) : x^n + nx - 1 = 0$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution positive x_n. Montrer que $x_n \in]0;1[$.
2. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrer que (x_n) converge vers 0.
3. En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. En utilisant des développements limités, montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{n+1}}\right)$.

1. On pose $f_n(x) = x^n + nx - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $a < b$. Comme $n > 0$, on a

$a^n < b^n$ car $u \mapsto u^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

et $na < nb$ d'où par somme, $a^n + na - 1 < b^n + nb - 1$

$f_n(a) < f_n(b)$

donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Et, f_n est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de bijection, f_n est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $f_n(\mathbb{R}_+) = [f_n(0), \lim\limits_{+\infty} f_n[= [-1, +\infty[$

On a $0 \in [-1, +\infty[$ alors l'équation (E_n) : $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$

On a $f_n(0) = -1$ $f_n(1) = 1 + n - 1 = n > 0$

alors $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$ et $0, x_n, 1 \in \mathbb{R}_+$

et comme f_n est strictement croissante : $\boxed{0 < x_n < 1}$

$x_n \in]0,1[$

2) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n + n x_n - 1 = 0 \iff x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{x_n^n}{n}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n^n < 1$ car $u \mapsto u^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $0^n = 0$ et $1^n = 1$

$x_n^n \times \frac{1}{n}$

(x_n^n) est une suite bornée dans $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n^n}{n} = 0$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{x_n^n}{n} = 0$ donc (x_n) converge vers 0

3) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^n}{n}$ et $\frac{x_n^n}{n} > 0$

d'où $0 < x_n < \frac{1}{n}$ et la fonction $u \mapsto u^n$ est croissante

alors $0 < x_n^n < \frac{1}{n^n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n x_n = 1 - x_n^n \longrightarrow 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n x_n = 1 \iff x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$x_n - \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$n\left(x_n - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$

$n x_n - 1 \longrightarrow 0$

On a alors (*) $x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

4) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^n}{n}$ et $0 < x_n^n < \frac{1}{n^n}$

on a donc $\forall n$ $0 < \dfrac{\frac{x_n^n}{n}}{\frac{1}{n^n}} < \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{x_n^n}{n}}{\frac{1}{n^n}} = 0$

ce qui implique $\frac{x_n^n}{n} = o\left(\frac{1}{n^n}\right)$

donc (2) $x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^n}\right)$

on a $x_n^n = e^{n\ln(x_n)} = e^{n \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^n}\right)\right)}$

$= e^{n\ln\left(\frac{1}{n}\left(1 + o\left(\frac{1}{n^{n-1}}\right)\right)\right)} = e^{n\ln\frac{1}{n} + n\ln\left(1 + o\left(\frac{1}{n^{n-1}}\right)\right)}$

$1 + u$

mais $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$ d'où $\ln\left(1 + o\left(\frac{1}{n^{n-1}}\right)\right) = o\left(\frac{1}{n^{n-1}}\right)$

Alors $x_n^n = \underbrace{e^{n\ln\left(\frac{1}{n}\right)}}_{\frac{1}{n^n}} e^{n\, o\left(\frac{1}{n^{n-1}}\right)} = \frac{1}{n^n} \cdot e^{o\left(\frac{1}{n^{n-2}}\right)}$

mais $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o(u)$ donc $e^{o\left(\frac{1}{n^{n-2}}\right)} = 1 + o\left(\frac{1}{n^{n-2}}\right)$

on trouve $x_n^n = \frac{1}{n^n} + o\left(\frac{1}{n^{2n-2}}\right)$ soit $x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{2n-1}}\right)$