

Chapitre 15 - TD - 23 mars 2020

Exercice 18 :

Soit $\varphi: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$
 $P \mapsto \varphi(P) = P' - (X-2)P$ et $\psi: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $P \mapsto \psi(P) = P - (X-2)P'$.

Montrer que φ et ψ sont linéaires et déterminer leurs noyau et image. Étudier l'application $\varphi \circ \psi$ (rang, noyau, image).

Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P' - (X-2)P$ est un polynôme.

et $\deg(P') \leq \deg(P) - 1 \leq 1$ et $\deg(X-2)P = \deg(X-2) + \deg(P) \leq 3$
 donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

on calcule $\varphi(P_1 + P_2) =$

par linéarité de la dérivation: $\varphi(P_1 + P_2) =$
 $= \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$

De même $\varphi(\alpha P_1) = (\alpha P_1)' - (X-2)(\alpha P_1)$
 $= \alpha (P_1' - (X-2)P_1) = \alpha \varphi(P_1)$

Alors φ est linéaire.

Calcul préliminaire: Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ qu'on écrit

$P = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c réels. Et on calcule

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= 2aX + b - (X-2)(aX^2 + bX + c) = -aX^3 + (2a-b)X^2 + (2b-c+2a)X + (b+2c) \\ \varphi(aX^2 + bX + c) &= -aX^3 + (2a-b)X^2 + (2a+2b-c)X + (b+2c) \end{aligned}$$

$(X^3, X^2, X, 1)$

$$P \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \varphi(P) = 0$$

Méthode 1 avec le degré: $\Leftrightarrow P' = (X-2)P$ mais $\deg P' \leq \deg P$ et $\deg(X-2)P \geq \deg P$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow P = 0 \\ \text{Méthode 2: } &\Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 0 \\ 2a - b = 0 \\ 2a + 2b - c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = 0 \\ &\text{donc } \text{Ker } \varphi = \{0\} \end{aligned}$$

Remarque: φ est injective.

Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ avec $Q = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels

$$Q \in \text{Im } \varphi \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(ax^2 + bx + c) = Q$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} -a = \alpha \\ 2a - b = \beta \\ 2a + 2b - c = \gamma \\ b + 2c = \delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \delta + 2\gamma + 5\beta + 14\alpha = 0 \text{ est une équation de } \text{Im } \varphi.$$

$$14L_4 + 2L_3 + 5L_2 + 14L_1$$

On résout l'équation : il y a 3 paramètres : $\delta = -14\alpha - 5\beta - 2\gamma$

$Q \in \text{Im } \varphi \Leftrightarrow$ les coefficients de Q vérifient

$$\Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Alors $\Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in \mathbb{R}^3 : Q = \alpha_1(X^3 - 14) + \beta_1(X^2 - 5) + \gamma_1(X - 2)$

$$\text{Im } \varphi = \text{Vect}(X^3 - 14, X^2 - 5, X - 2)$$

Autre méthode on peut écrire pour tous $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\varphi(ax^2 + bx + c) = -aX^3 + (2a - b)X^2 + (2a + 2b - c)X + (b + 2c)1.$$

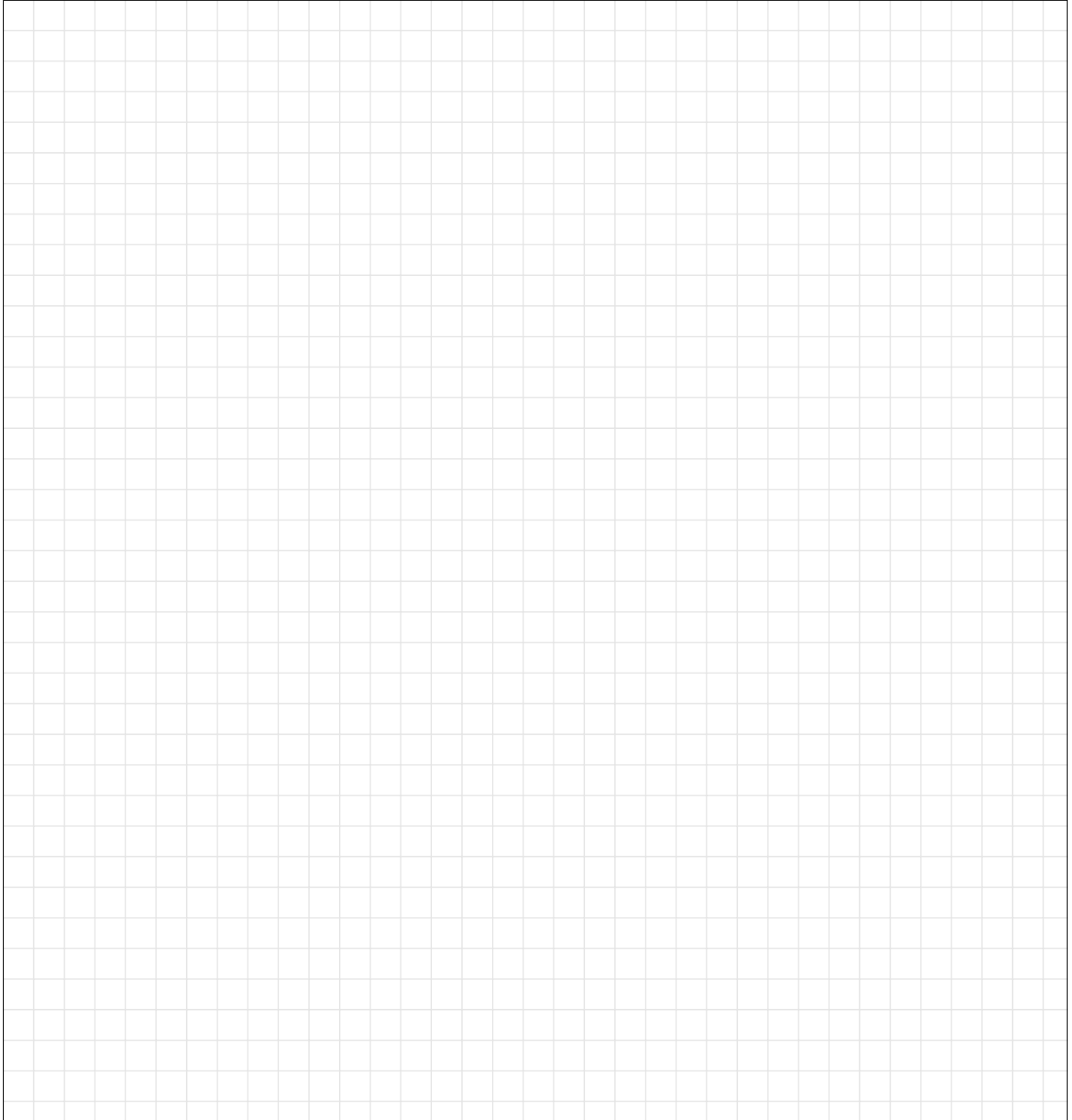
$$\rightarrow \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta = a(-X^3 + 2X^2 + 2X) + b(-X^2 + 2X + 1) + c(-X + 2)$$

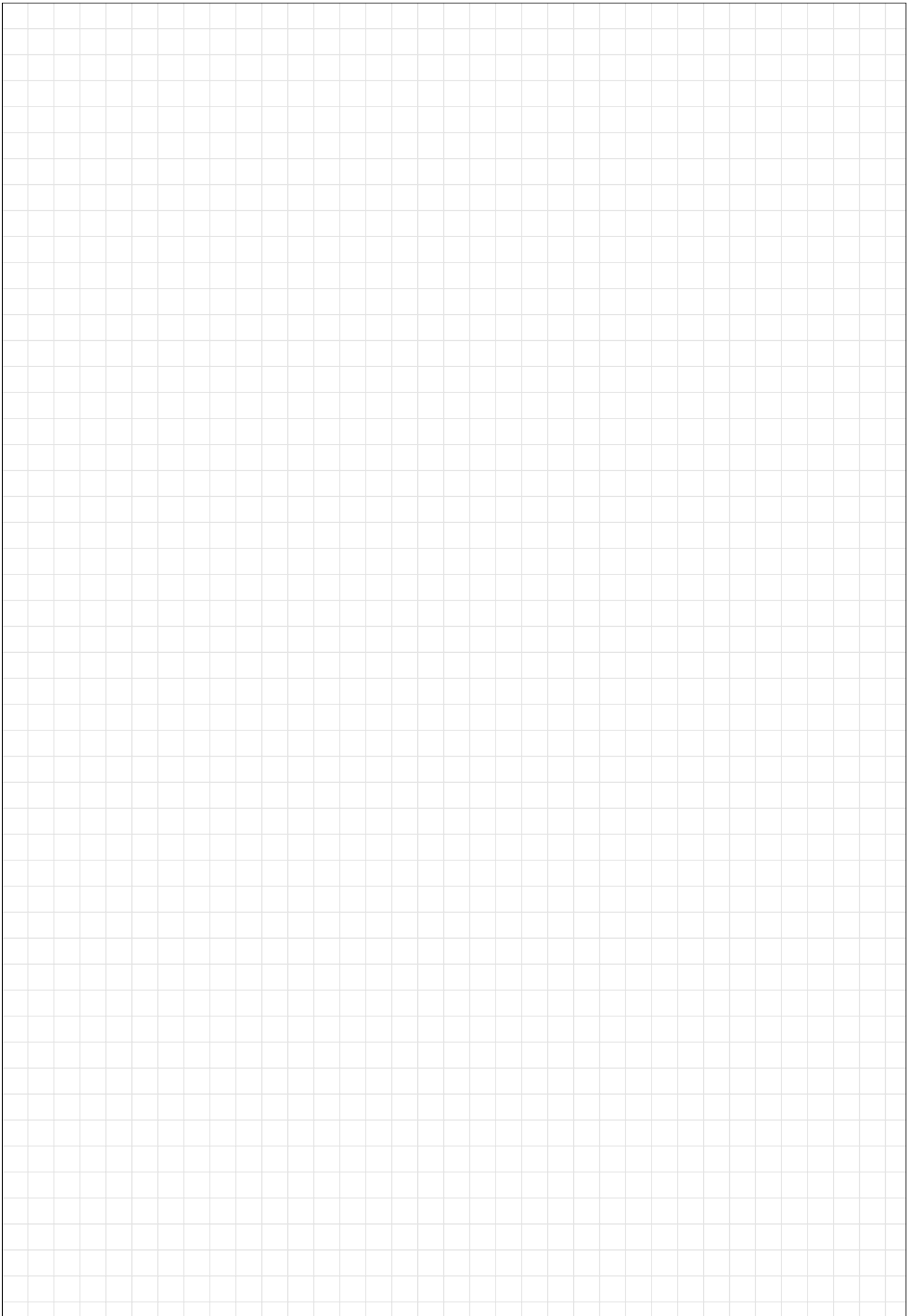
alors on a une représentation paramétrique de $\text{Im } \varphi$

$$\text{et } \text{Im } \varphi = \text{Vect}((-X^3 + 2X^2 + 2X), (-X^2 + 2X + 1), (-X + 2))$$

Exercice 19 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer le noyau et l'image de f .





Exercice 9 :

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $M_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et une base de G .

$$\Pi_2(\mathbb{R}) = F \oplus G \Leftrightarrow \Pi_2(\mathbb{R}) = F + G \text{ et } F \cap G = \{0\}$$

Soit $\Pi \in M_2(\mathbb{R})$. $\Pi \in F \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \Pi = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 donc $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ donc F est un sev de $M_2(\mathbb{R})$

De même, $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et G est un sev.

$$\Pi \in G \Leftrightarrow \exists (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2 : \Pi = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\Pi \in \Pi_2(\mathbb{R})$ avec $\Pi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ -
 on cherche $\Pi_F \in F$ et $\Pi_G \in G$ telles que $\Pi = \Pi_F + \Pi_G$
 ça revient à chercher $(a, b, a_1, b_1) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\Pi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + a_1 = x \\ 2a + b + 3a_1 + b_1 = y \\ -b - b_1 = z \\ -a - 2a_1 + b_1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + a_1 = x \\ b + a_1 + b_1 = y - 2x \\ -b - b_1 = z \\ -a_1 + b_1 = z + t + x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + a_1 = x \\ b + a_1 + b_1 = y - 2x \\ a_1 = -2x + y + z \\ b_1 = t - x + y + z \end{cases}$$

Le système n'a pas d'équation de compatibilité donc il a des solutions

alors a, b, a_1, b_1 existent
 donc Π_F et Π_G existent :

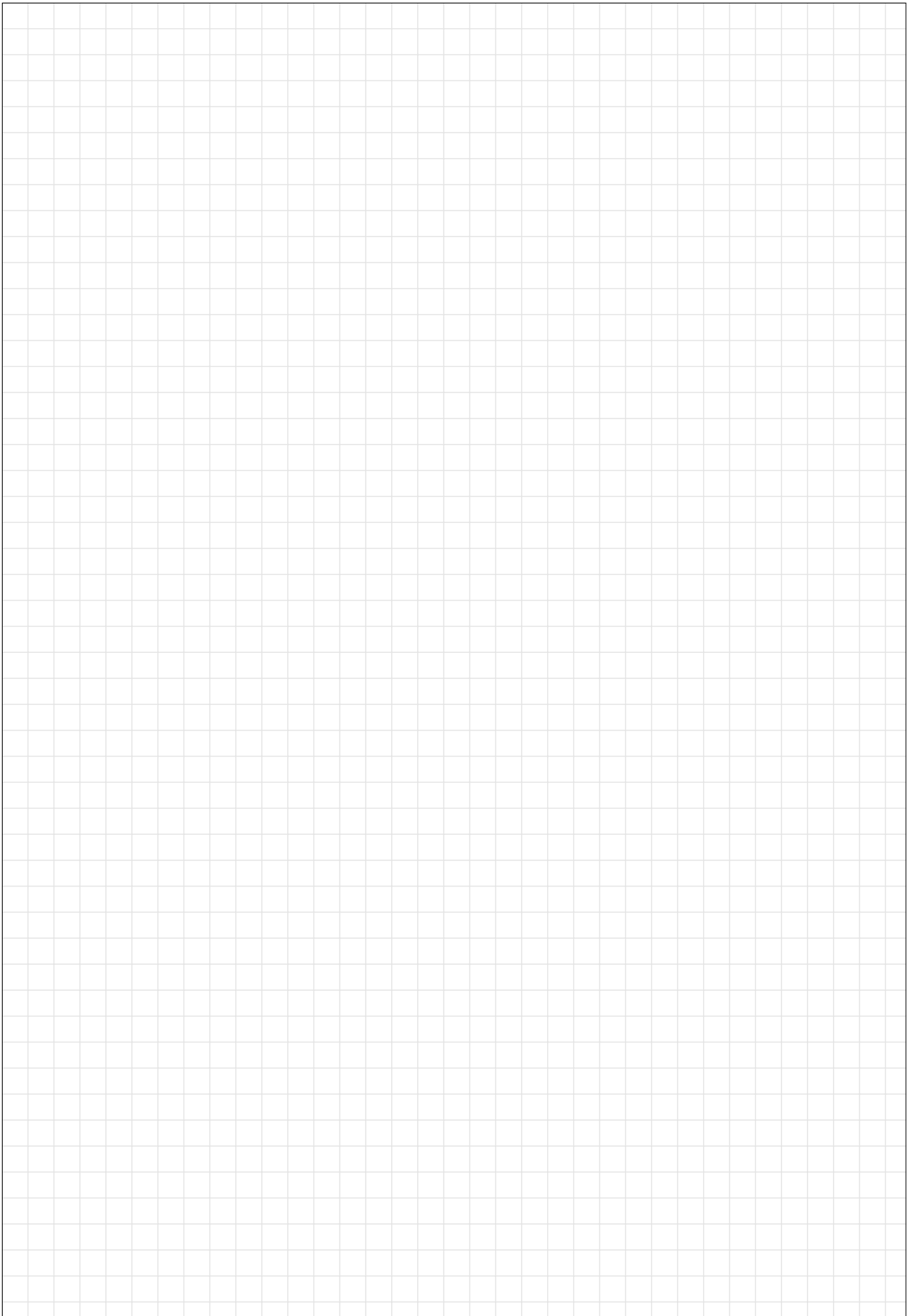
$F = F + G$ toute matrice Π de $\Pi_2(\mathbb{R})$ s'écrit $\Pi = \Pi_F + \Pi_G$ avec $\Pi_F \in F$ et $\Pi_G \in G$

Donc $\Pi_2(\mathbb{R}) = F + G$

Le système précédent a 4 pivots et 4 inconnues donc il a une unique solution alors a, b, a_1, b_1 sont uniques
 donc Π_F et Π_G sont uniques ce qui prouve que la somme est directe $F \oplus G = \Pi_2(\mathbb{R})$ et donc

F et G sont supplémentaires dans $\Pi_2(\mathbb{R})$.

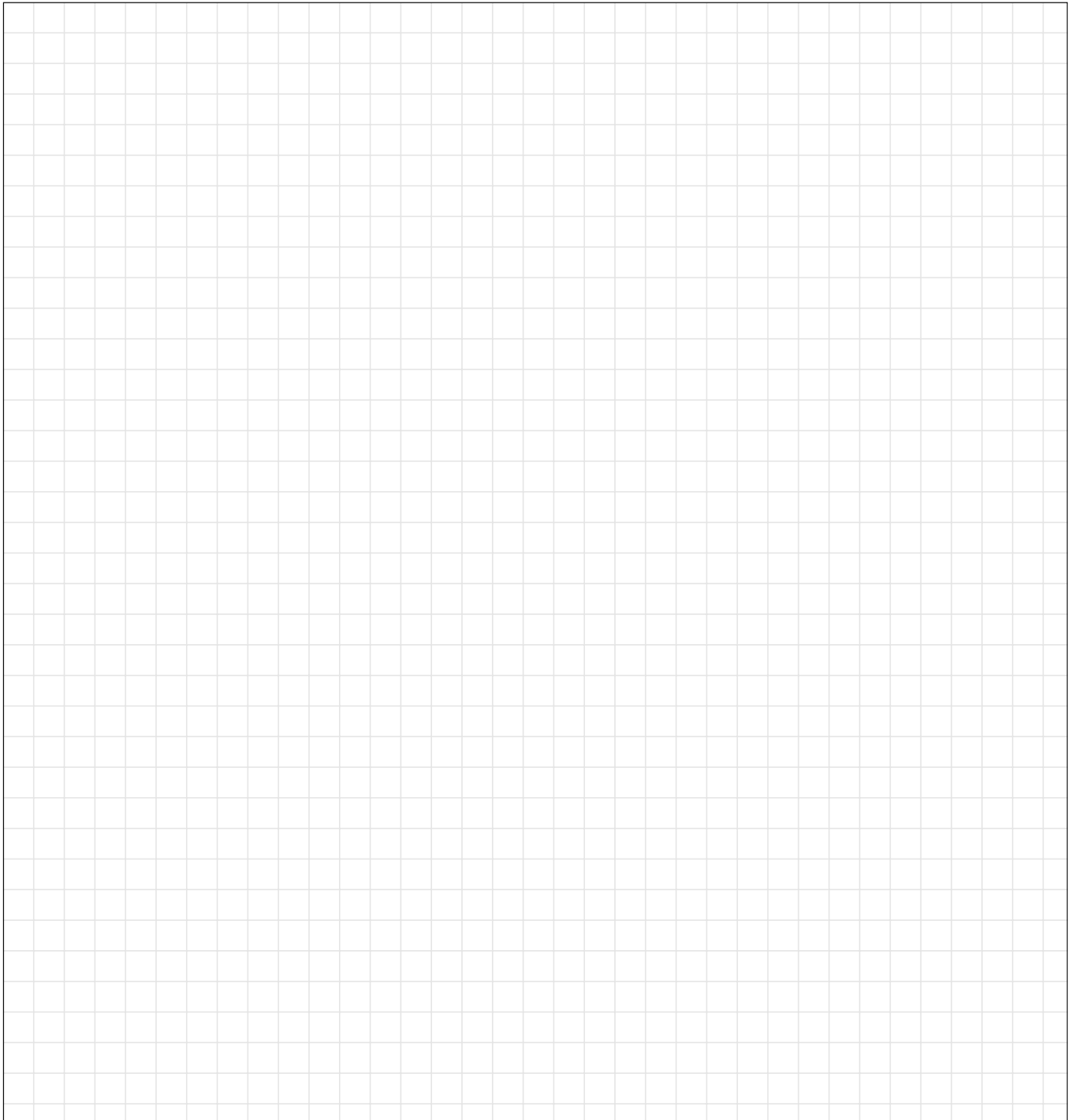
$$F \cap G = \{0\}$$

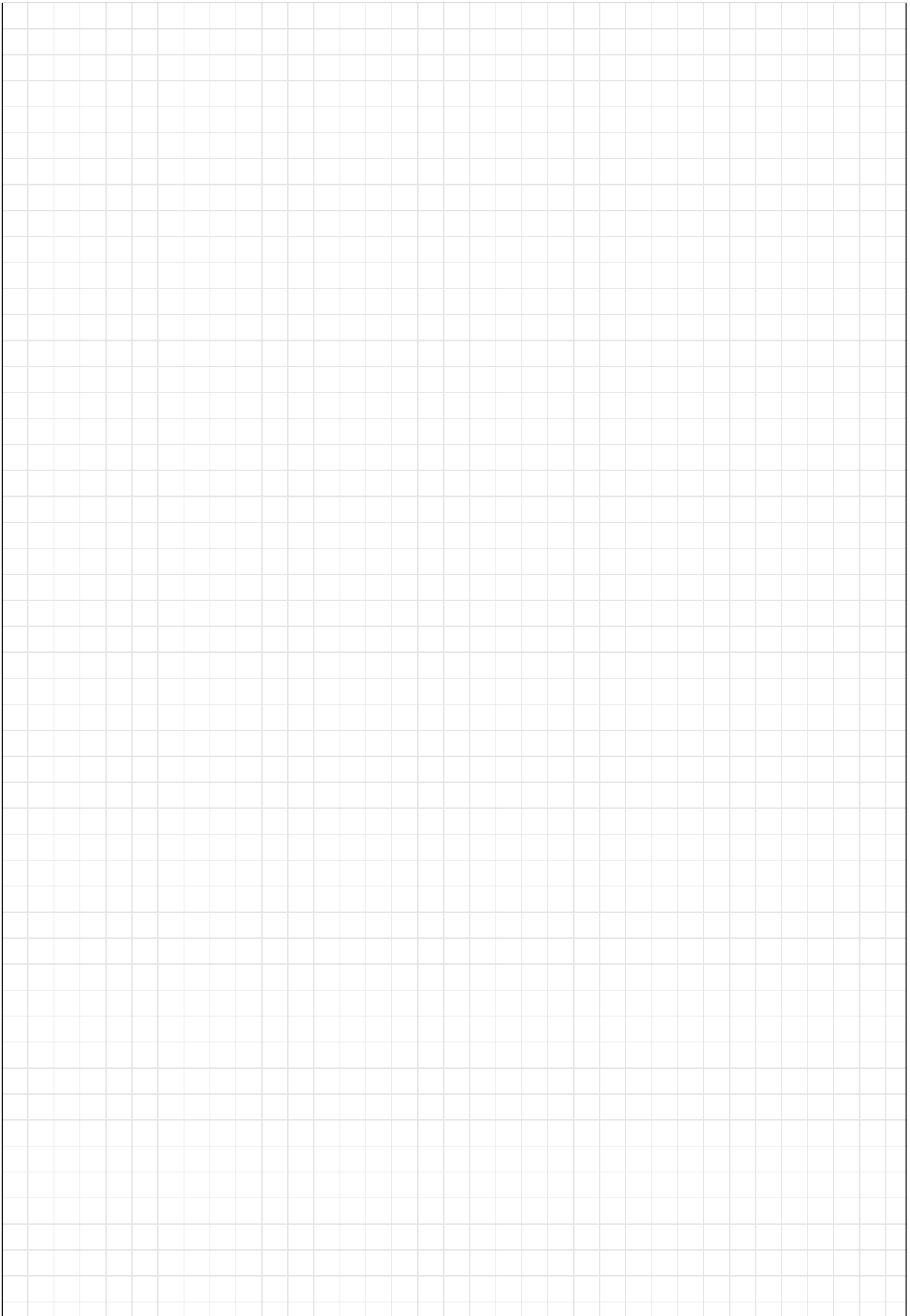


Exercice 13 :

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on pose $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 1, 0)$ et $\vec{u}_4 = (1, 1, 1, 1)$. Puis on définit $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $G = \text{Vect}(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$.

Déterminer des équations de F et G . Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E .
Déterminer l'expression analytique de la projection vectorielle p sur F parallèlement à G .



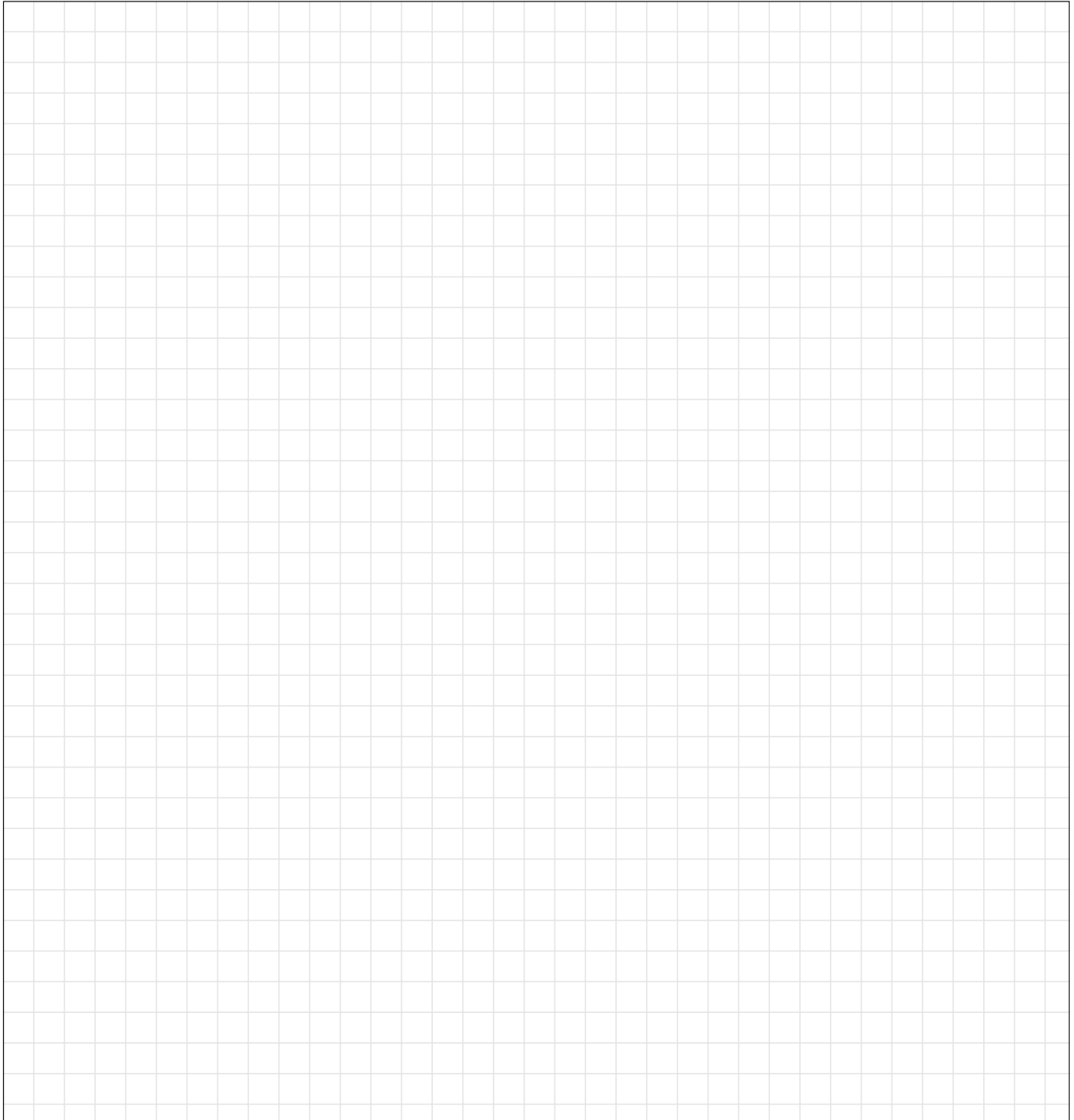


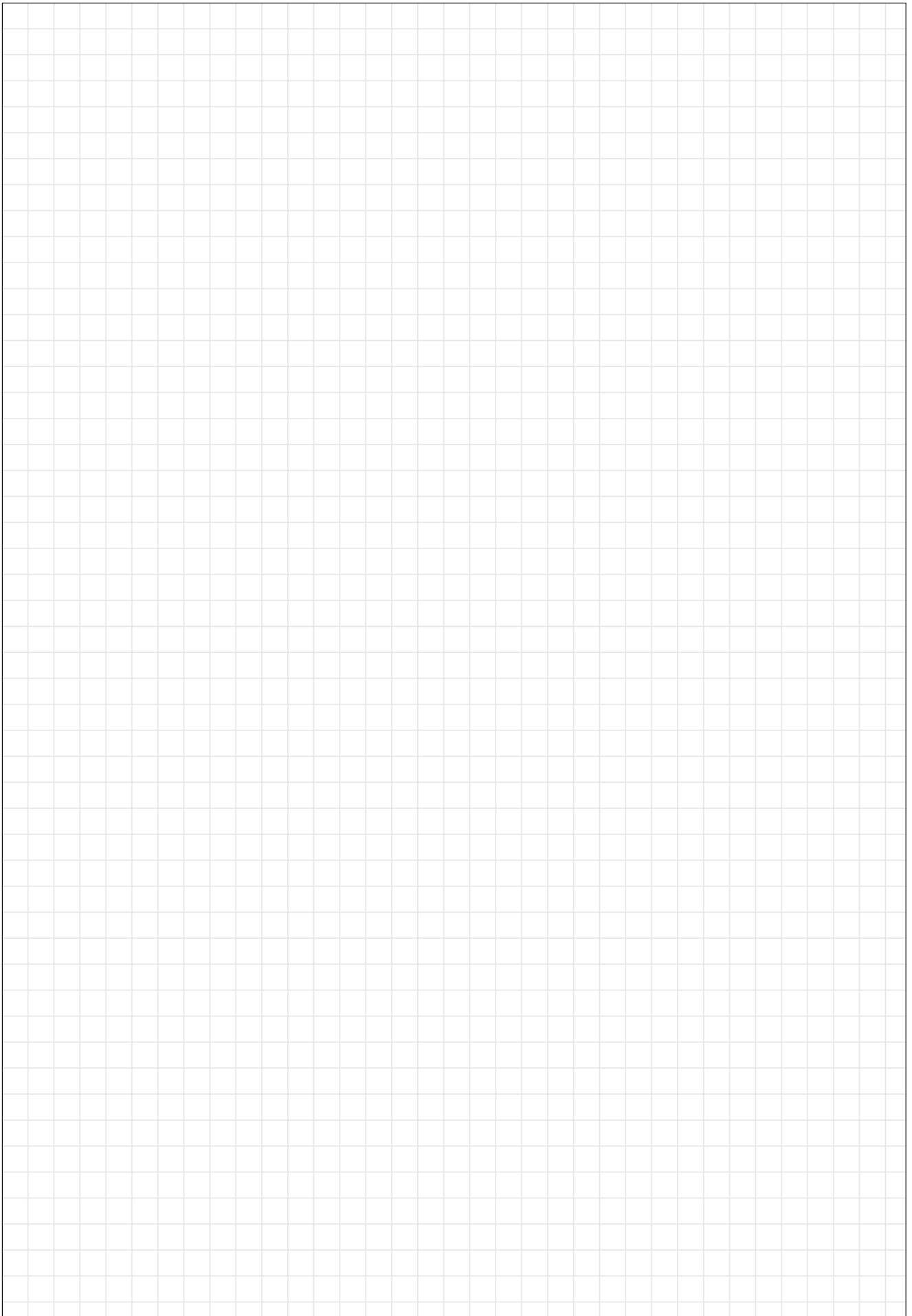
Exercice 10 :

Soit E l'espace des fonctions réelles à valeurs réelles. Soit a, b deux réels. On définit :

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2a - x)\} \text{ et } G = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2b - f(2a - x)\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $b = 0$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

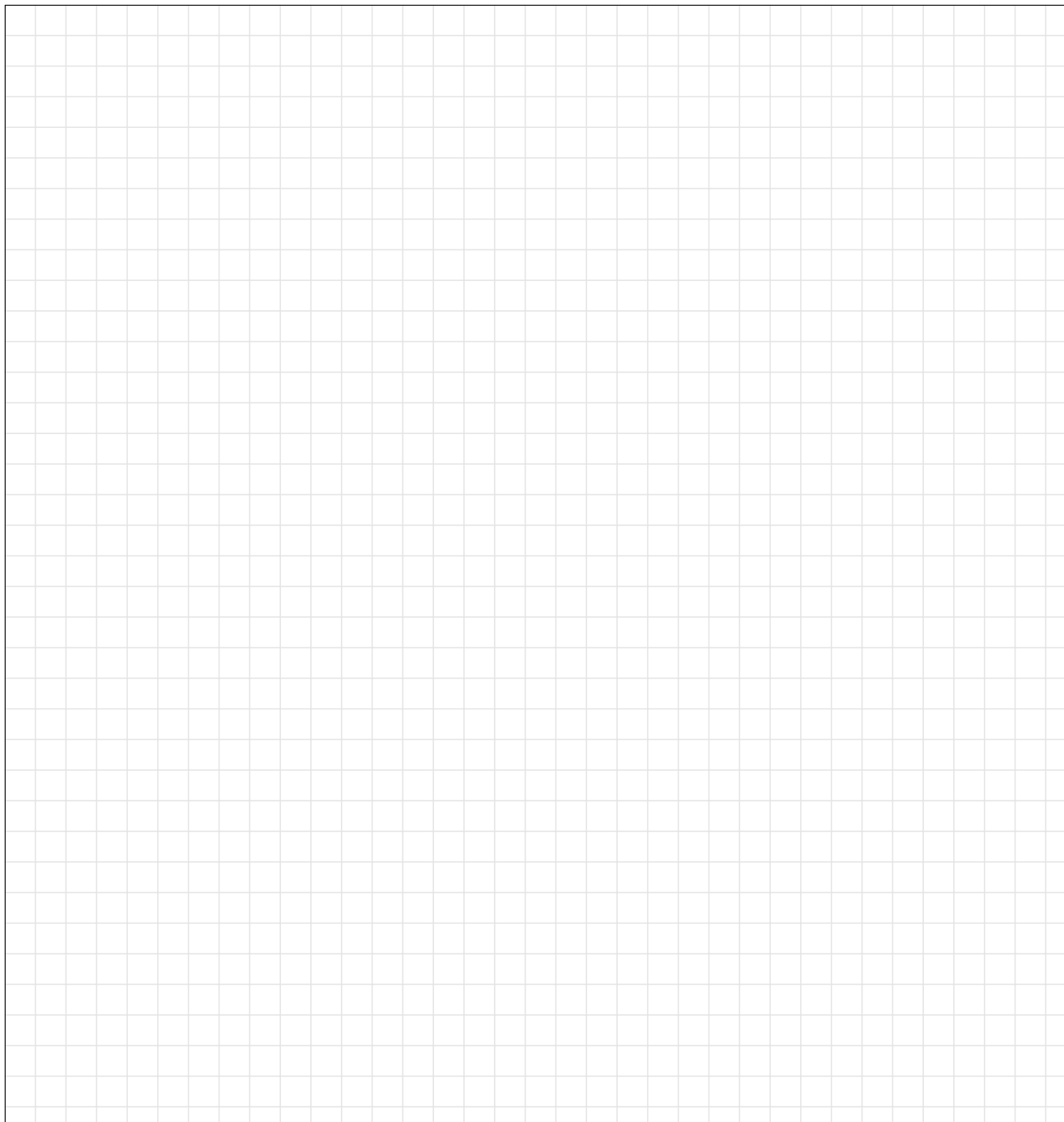


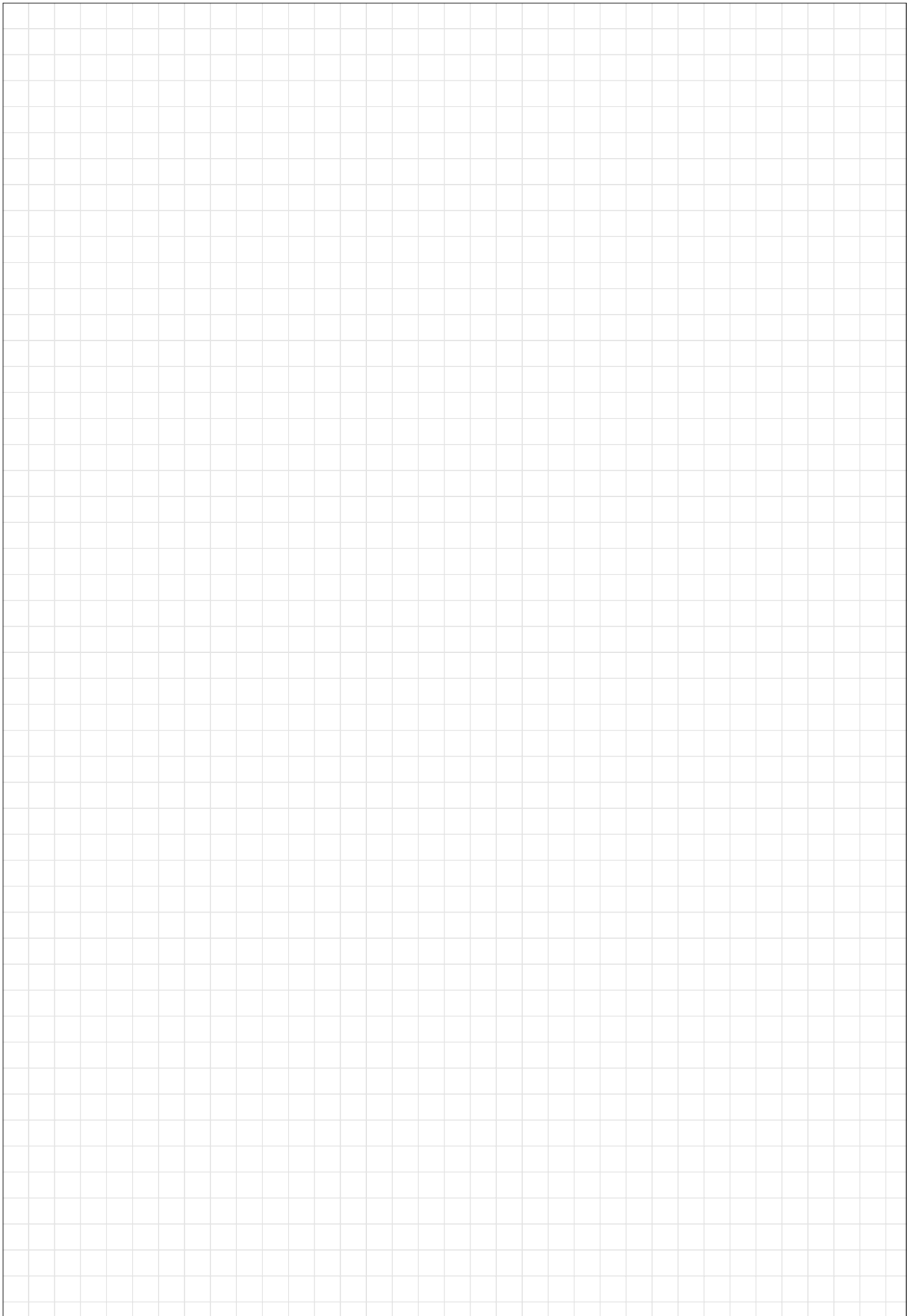


Exercice 21 :

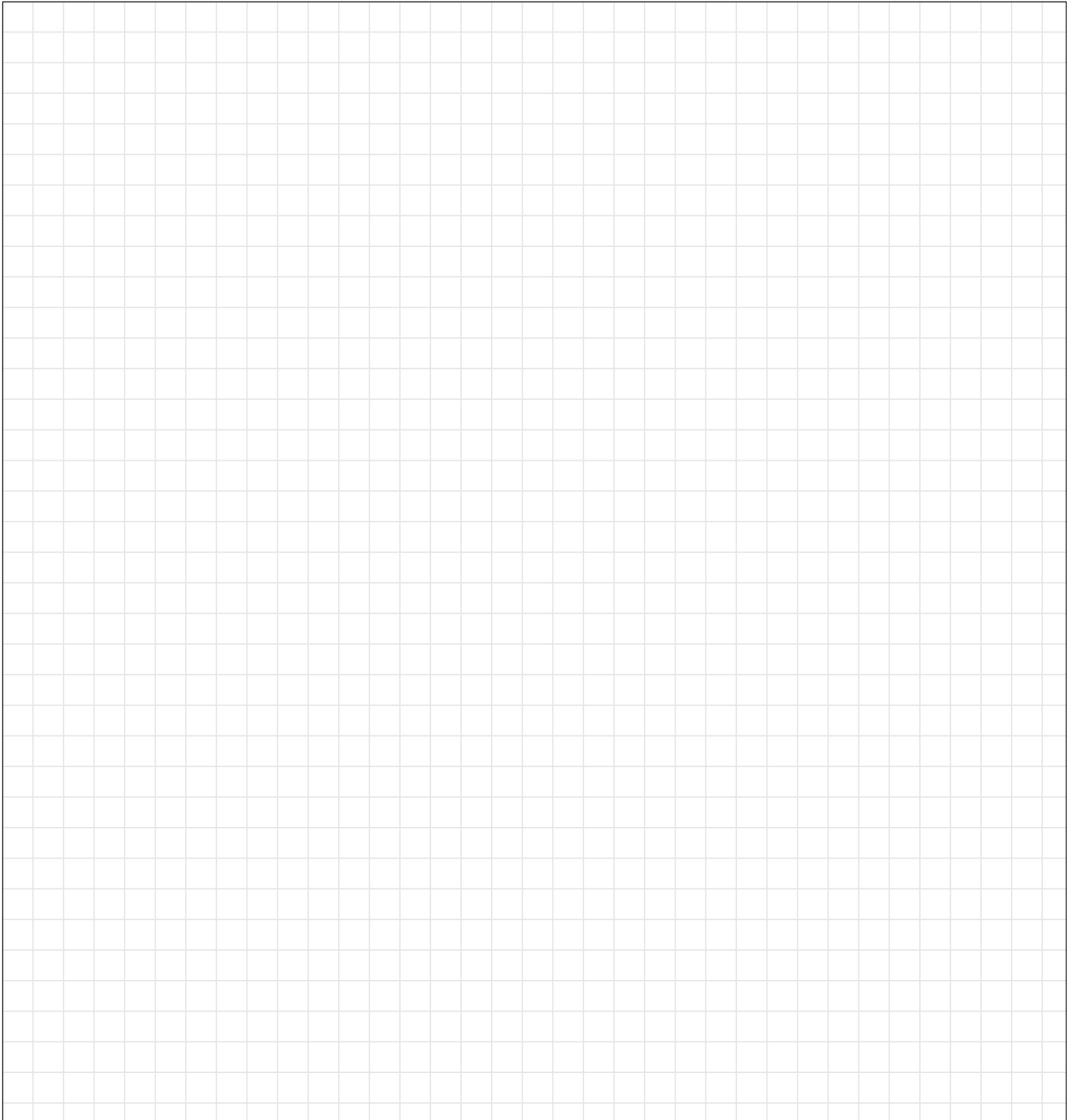
Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2id_E = 0$.

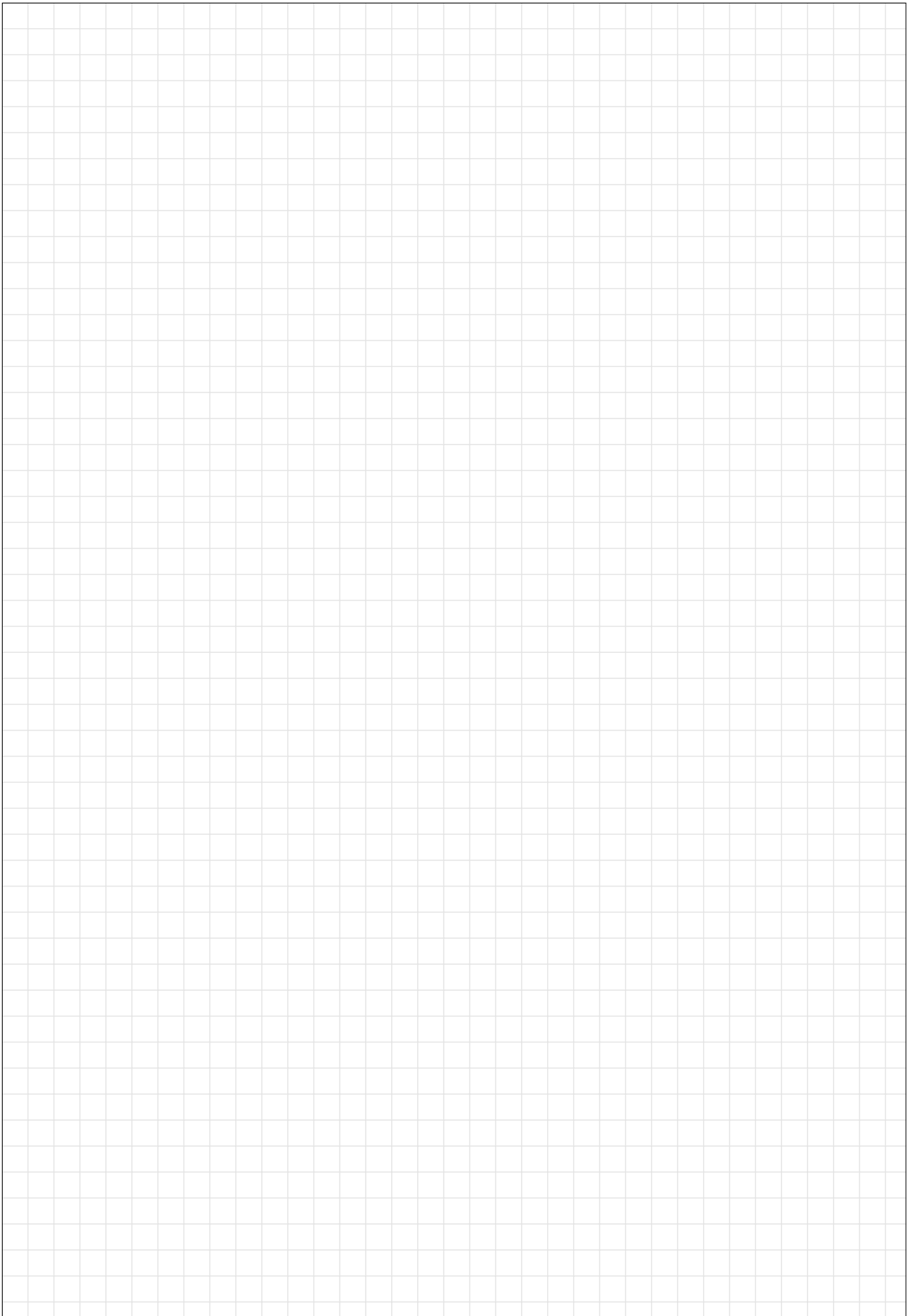
1. Montrer que u est un automorphisme et calculer u^{-1} .
2. Montrer que $\forall x \in E, u(x) - 2x \in \text{Ker}(u - id_E)$ et $u(x) - x \in \text{Ker}(u - 2id_E)$.
3. Montrer que $\text{Ker}(u - id_E)$ et $\text{Ker}(u - 2id_E)$ sont supplémentaires dans E .





Exercice xx :





Exercice xx :

