Mathématique - Devoir Maison n°15

Exercice 1

1. On pose $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x) - \ln(1+x)}{x^2}$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   (b) Prouver que f est prolongeable par continuité en $x = 0$, puis, ainsi prolongée, que f est dérivable en $x = 0$. Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de 0.
2. (a) Déterminer le développement limité de $f(x) = x^2 \operatorname{ch}(x) - \cos(x)$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 4.
   (b) Soit $g(x) = \dfrac{1}{x}\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On pose $h = \dfrac{1}{x}$. Exprimer $g(x)$ à l'aide de $f(h)$.
   Que peut-on en conclure concernant le graphe de g au voisinage de $+\infty$?
3. A l'aide d'un développement limité calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$
4. Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\left(\sum \dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right)$.

Exercice 2

1. Soit une application $f \in C^1([a,b])$ et un réel $\lambda > 0$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = \frac{f(b)\sin(\lambda b)}{\lambda} - \frac{f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t$
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = 0$
2. Exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(\frac{t}{2})\cos(kt)$ en fonction de $\cos(\frac{2k+1}{2}t)$ et $\cos(\frac{2k-1}{2}t)$.
3. En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$
4. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\sin(k)}{k} = (-1)^n\int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}$
5. En déduire que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n\sin(n)}{n}$ converge et que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\frac{1}{2}$

Exercice 3

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
   Montrer que si la série $\sum x_n$ converge, alors la série $\sum x_n^2$ converge aussi.
   On pourra, par exemple, commencer par montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $\forall n \geqslant N, \quad x_n^2 \leqslant x_n$.

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\operatorname{ch}(u_n)}$.

2. Donner le développement limité de la fonction ch au voisinage de 0 à l'ordre 2.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+v_k)$. En déduire que la série $\sum v_n$ est divergente.
5. (a) Montrer que $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.
   (b) En déduire que la série $\sum u_n^2$ est divergente.
   (c) Conclure sur la nature de la série $\sum u_n$.