Chapitre 15 - TD - 23 mars 2020

Exercice 18 :

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P' - (X-2)P \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \psi(P) = P - (X-2)P' \end{array}$.

Montrer que φ et ψ sont linéaires et déterminer leurs noyau et image. Étudier l'application $\varphi \circ \psi$ (rang, noyau, image).

Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P' - (X-2)P$ est un polynôme.

et $\deg(P') \leq \deg(P) - 1 \leq 1$ et $\deg(X-2)P = \deg(X-2) + \deg(P) \leq 3$

donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

on calcule $\varphi(P_1 + P_2) =$

par linéarité de la dérivation : $\varphi(P_1 + P_2) =$

$= \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$

De même $\varphi(\alpha P_1) = (\alpha P_1)' - (X-2)(\alpha P_1)$

$= \alpha\left(P_1' - (X-2)P_1\right) = \alpha\varphi(P_1)$

Alors φ est linéaire.

Calcul préliminaire : Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ qu'on écrit

$P = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c réels. Et on calcule

$\varphi(P) = 2aX + b - (X-2)(aX^2 + bX + c) = -aX^3 + (2a-b)X^2 + (2b - c + 2a)X + (b + 2c)1$

$$\boxed{\varphi(aX^2 + bX + c) = -aX^3 + (2a-b)X^2 + (2a+2b-c)X + (b+2c)1.}$$

$(X^3, X^2, X, 1)$

$P \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \varphi(P) = 0$

Méthode 1 avec le degré : $\iff P' = (X-2)P$ mais $\deg P' < \deg P$ et $\deg(X-2)P \geq \deg P$

$\iff P = 0$

Méthode 2 : $\iff \varphi(P) = 0 \iff \begin{cases} -a = 0 \\ 2a - b = 0 \\ 2a + 2b - c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0 \iff P = 0$

donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

Remarque : φ est injective.

Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ avec $Q = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels

$Q \in \operatorname{Im} \varphi \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(aX^2 + bX + c) = Q$

$$\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} -a = \alpha \\ 2a - b = \beta \\ 2a + 2b - c = \gamma \\ b + 2c = \delta \end{cases}$$

$\iff \boxed{\delta + 2\gamma + 5\beta + 14\alpha = 0 \text{ est une équation de } \operatorname{Im}\varphi.}$

$L_4 + 2L_3 + 5L_2 + 14L_1$

On résout l'équation : il y a 3 paramètres : $\delta = -14\alpha - 5\beta - 2\gamma$

$Q \in \operatorname{Im}\varphi \iff$ les coefficients de Q vérifient

$$\iff \exists (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} X^3 \\ X^2 \\ X \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\iff \exists (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in \mathbb{R}^3 : \boxed{Q = \alpha_1 (X^3 - 14) + \beta_1 (X^2 - 5) + \gamma_1 (X - 2)}$

Alors $\boxed{\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\left((X^3 - 14), X^2 - 5, X - 2 \right)}$

Autre méthode on peut écrire pour tous $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$\varphi(aX^2 + bX + c) = -aX^3 + (2a - b)X^2 + (2a + 2b - c)X + (b + 2c)1.$

$\to \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta = a(-X^3 + 2X^2 + 2X) + b(-X^2 + 2X + 1) + c(-X + 2)$

alors on a une représentation paramétrique de $\operatorname{Im}\varphi$

et $\boxed{\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\left((-X^3 + 2X^2 + 2X), (-X^2 + 2X + 1), (-X + 2) \right)}$

Exercice 19 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 9 :

Soit $F=\left\{\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a\end{pmatrix} \middle| (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ et $G=\left\{\begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b\end{pmatrix} \middle| (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et une base de G.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G \iff \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F+G$ et $F\cap G=\{\vec{0}\}$

Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $M\in F \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2 : M=\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$

donc $F=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ donc F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

De même, $G=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\right)$ et G est un sev.

⚠ $M\in G \iff \exists (a_1,b_1)\in\mathbb{R}^2 ; M = a_1\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $M=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}$ avec $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

on cherche $M_F\in F$ et $M_G\in G$ telles que $M=M_F+M_G$

ça revient à chercher $(a,b,a_1,b_1)\in\mathbb{R}^4$ tels que

$$M=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + a_1 = x \\ 2a+b+3a_1+b_1 = y \\ -b - b_1 = z \\ -a - 2a_1 + b_1 = t \end{cases} \iff \begin{cases} a + a_1 = x \\ b + a_1 + b_1 = y-2x \\ -b - b_1 = z \\ -a_1 + b_1 = t+x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + a_1 = x \\ b + a_1 + b_1 = y-2x \\ a_1 = -2x+y+z \\ b_1 = t-x+y+z \end{cases}$$

Le système n'a pas d'équation de compatibilité donc il a des solutions

alors a, b, a_1, b_1 existent donc M_F et M_G existent :

$E=F+G$ toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit $M=M_F+M_G$ avec $M_F\in F$ et $M_G\in G$

Donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F+G$

Le système précédent a 4 pivots et 4 inconnues donc il a une unique solution alors a, b, a_1, b_1 sont uniques $\Rightarrow F\cap G=\{\vec{0}\}$ donc M_F et M_G sont uniques ce qui prouve que la somme est directe $F\oplus G=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13 :

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on pose $\overrightarrow{u}_1 = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{u}_3 = (1,1,1,0)$ et $\overrightarrow{u}_4 = (1,1,1,1)$. Puis on définit $F = \text{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ et $G = \text{Vect}(\overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$.

Déterminer des équations de F et G. Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E. Déterminer l'expression analytique de la projection vectorielle p sur F parallèlement à G.

Exercice 10 :

Soit E l'espace des fonctions réelles à valeurs réelles. Soit a,b deux réels. On définit :

$$F = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2a-x)\} \text{ et } G = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2b - f(2a-x)\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $b = 0$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 21 :

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2id_E = 0$.

1. Montrer que u est un automorphisme et calculer u^{-1}.
2. Montrer que $\forall x \in E, u(x) - 2x \in \text{Ker}(u - id_E)$ et $u(x) - x \in \text{Ker}(u - 2id_E)$.
3. Montrer que $\text{Ker}(u - id_E)$ et $\text{Ker}(u - 2id_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice xx :

Exercice xx :