Mathématique - Séance de TD 16 mars 2020

TD 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1 : Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels. Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

$E_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x+y=0\right\}$ $E_2 = \{(x,0)\,|\, x\in\mathbb{R}\}$ $E_3=\{(0,y)\,|\,y\in\mathbb{R}\}$ $E_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2=xy\right\}$
$E_5=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x-y\geqslant 0\right\}$ $E_6=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x+y+z-t=0\right\}$

Correction :

On montre que chaque ensemble est une partie d'un autre ev, non vide et stable par combinaison linéaire.
Pour $E_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x+y=0\right\}$:
On a d'abord : $\underline{E_1\subset\mathbb{R}^2}$
le vecteur nul $(0,0)$ est solution de l'équation $x+y=0$, alors $\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^2}\in E_1$.
Soit deux vecteurs $u=(x_u,y_u)\in E_1$ et $v=(x_v,y_v)\in E_1$, on a
$u+v=(x_u+x_v,y_u+y_v)=(X,Y)$ et ce vecteur vérifie $X+Y=(x_u+x_v)+(y_u+y_v)=x_u+x_v+y_u+y_v=0$
donc $u+v\in E_1$: E_1 est stable par l'addition.
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
$\alpha u=(\alpha x_u,\alpha y_u)$ vérifie $\alpha x_u+\alpha y_u=0$ donc $\alpha u\in E_1$: E_1 est stable par multiplication par un scalaire.
On en déduit que E_1 est une partie de $\mathbb{R}^2$, stable par combinaison linéaire et non vide
donc $\boxed{E_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.
Autre méthode :
$(x,y)\in E_1$ si et seulement si $x+y=0$
si et seulement si $y=-x$ si et seulement si $(x,y)=x(1,-1)$ avec $x\in\mathbb{R}$
Résumons :
$(x,y)\in E_1$ si et seulement si $(x,y)=\alpha(1,-1)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$
C'est à dire qu'un vecteur $(x,y)\in E_1$ si et seulement si il est combinaison linéaire de $(1,-1)$
Alors, E_1 est la droite vectorielle engendrée par $(1,-1)$ donc $E_1=Vect((1,-1))$ et c'est un sev de $\mathbb{R}^2$.
Bonus : on a trouvé une famille génératrice de E_1 : ((1,-1))

Pour E_2, on a $E_2=Vect((1,0))$ car $(x,0)=x(1,0)$ avec $x\in\mathbb{R}$ ou encore $(x,y)=\dfrac{x}{4}(4,-4)$
ce qui prouve que E_2 est un sev de $\mathbb{R}^2$ et le vecteur $(1,0)$ est une famille génératrice à un seul vecteur.
Attention, $Vect(0)=0$

Pour $E_6=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x+y+z-t=0\right\}$:

Exercice 2 : Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}[X]$ lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?
$A=\{P\in\mathbb{R}[X]\,|\,P(0)=1\}$ $B=\{P\in\mathbb{R}[X]\,|\,P(2)=0\}$ $C=\{P\in\mathbb{R}[X]\,|\,\deg P\geqslant 8\}$ $D=\{P\in\mathbb{R}[X]\,|\,P(1)=P(2)\}$

Correction :

Le polynôme $R=X^2-3X+1$ est dans A car $R(0)=1$.
Dans cet exercice, le vecteur nul est le polynôme nul.
Le polynôme nul N ne vérifie pas $N(0)=1$ mais $N(0)=0$ donc $N\notin A$.
Alors, $\boxed{A \text{ n'est pas un sev de } \mathbb{R}[X]}$.
Pour B, le polynôme nul N vérifie $N(2)=0$ donc $N\in B$ et B est non vide.

Soit $P, Q \in B$. On a $P(2) = 0$ et $Q(2) = 0$ donc $(P+Q)(2) = P(2) + Q(2) = 0$ alors $\underline{P + Q \in B}$ et B est stable par addition.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in B$, on a $P(2) = 0$ alors $(\alpha P)(2) = \alpha P(2) = 0$ donc $\alpha P \in B$.
On en déduit que $\boxed{B \text{ est un sev de } \mathbb{R}[X]}$.
C n'est pas un sev car $0 \notin C$
Pour D, le polynôme nul N vérifie $N(1) = 0$ et $N(2) = 0$, alors $N(1) = N(2)$ donc $N \in D$.
Soit P_1 et P_2 dans D, ...

Exercice 4 : Non traité

TD 14 - Intégration

Exercice 4 : Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

Correction : Comme g est de classe $\mathscr{C}^1$ et comme l'intégrale contient un produit, on a l'idée d'intégrer par parties :
On pose $u(t) = g(t)$ (il n'y a pas vraiment le choix) et $v(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n}$
qui donnent $u'(t) = g'(t)$ et $v'(t) = \cos(nt)$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ donc on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b g(t)\cos(nt)\,dt = \left[g(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b g'(t)\sin(nt)\,dt$$

Fausse Piste : La fonction $t \mapsto g'(t)\sin(nt)$ est continue sur $[a, b]$ donc elle est bornée : il existe $M(n)$ telle que $|g'(t)\sin(nt)| \leqslant M(n)$ et c'est raté ! ! !
Il faut utiliser $|\sin(nt)| \leqslant 1$ qui est une majoration **indépendante** de n
On calcule le crochet $\left[g(t)\dfrac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b = g(b)\dfrac{\sin(nb)}{n} - g(a)\dfrac{\sin(na)}{n}$
On encadre l'intégrale :
Pour $t \in [a, b]$, $|\sin(nt)| \leqslant 1$
D'où
$|g'(t)\sin(nt)| \leqslant |g'(t)|$
L'intégrale est croissante et $a < b$

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b g'(t)\sin(nt)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b \left|g'(t)\sin(nt)\right|\,dt$$

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b g'(t)\sin(nt)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b \left|g'(t)\right|\,dt$$

Comme $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

Autre version :
Pour $t \in [a, b]$,
$|\sin(nt)| \leqslant 1$
Et g est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ donc g' est continue sur $[a, b]$ alors elle est bornée sur $[a, b]$: pour $t \in [a, b]$, on a $|g'(t)| \leqslant M$ avec M réel fixé.
Alors :
$|g'(t)\sin(nt)| \leqslant M$
L'intégrale est croissante et ....

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b g'(t)\sin(nt)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b \left|g'(t)\sin(nt)\right|\,dt$$

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b g'(t)\sin(nt)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b M\,dt = \frac{M(b-a)}{n}$$

Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

Exercice 5 : Non traité