TD 21 - Variables aléatoires

Exercice 1 : Un étudiant fait, en moyenne, une faute d'orthographe tous les 600 mots. Calculer la probabilité pour qu'il ne dépasse pas 5 fautes sur un devoir de 1800 mots.

Exercice 2 :

Soient X et Y deux v.a.r. de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p ($p \in]0,1[$). Soient $U = X+Y$ et $V = X-Y$.

Déterminer la loi du couple (U,V) ainsi que celles de U et V, leurs espérances et variance.

Exercice 3 :

On lance 2 dés à 6 faces équilibrés simultanément. On appelle X_1 la v.a.r. représentant le résultat du premier dé et Y la v.a.r. représentant la valeur maximale obtenue.

Déterminer la loi du couple (X_1,Y) et en déduire la loi de Y et son espérance.

Exercice 4 :

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules vertes et 6 boules bleues.

1. On tire 4 boules successivement, sans remise. On désigne par X la v.a.r. égale au nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On tire maintenant 4 boules successivement avec remise. Reprendre les questions précédentes avec la v.a.r. Y égale au nombre de boules rouges obtenues.
3. Comparer $E(X)$ et $E(Y)$. Commenter ce résultat.
4. Comparer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. En admettant que l'écart-type est un indice de dispersion de la v.a.r. autour de son espérance, commenter le résultat obtenu.

Exercice 5 :

Dans une urne il y a 10 boules rouges et 5 boules bleues. Soit $r \in [\![1,10]\!]$, on appelle X_r le rang de la r-ième boule rouge tirée. Déterminer la loi de X_r dans le cas de tirages sans remise, puis dans le cas de tirages avec remise en limitant le nombre de tirages à $N > r$. *On posera $X_r = N+1$ si on n'obtient pas de boules rouges.*

Exercice 6 :

Dans un sac, il y a $(n-2)$ boules rouge et 2 boules vertes. On tire les boules une à une sans remise. Soit X la v.a.r. égale au rang de la première boule verte tirée et Y au rang de la seconde boule verte tirée.

1. Déterminer les lois de X et Y, $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, et $V(Y)$.
2. Calculer $E(XY) - E(X)E(Y)$. Conclure.

Exercice 7 : Un dé A parfaitement équilibré porte le nombre $+1$ sur quatre faces et -2 sur les deux autres. Soit X la variable aléatoire qui à un lancer du dé A associe le nombre obtenu.

Un dé B porte les nombres $-2,-1,0,1,2,3$. Les probabilités d'obtenir ces nombres sont, dans l'ordre indiqué, en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On lance une fois simultanément les deux dés A et B. On note S la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la somme des deux nombres obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X,S). 2. Quelle est la loi marginale de S ? 3. X et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 :

k urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de chaque urne et on note X_n la v.a.r. égale au plus grand numéro des boules tirées.

Déterminer la loi de X_n. Écrire $E(X_n)$. Montrer que $E(X_n) \sim \dfrac{nk}{k+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 : On dispose d'un dé rouge et d'un dé vert à n faces numérotées de 1 à n. On les lance. Soit X (resp. Y) le plus grand (resp. petit) des deux numéros obtenus, R (resp. V) le numéro obtenu avec le dé rouge (resp. vert).

1. Déterminer la loi de X, puis son espérance. On rappelle la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
2. Déterminer la loi de Y, puis celle de $Z = n+1-Y$. Que remarque-t-on ? En déduire $\mathrm{E}(Y)$.

3. Déterminer $\mathrm{E}(R)$ et $\mathrm{V}(R)$.
4. Calculer XY en fonction de R et V. En déduire $\mathrm{E}(XY)$, montrer que $\mathrm{E}(XY) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ et déterminer cette somme.
5. Donner une expression simple de la somme $X+Y$ en fonction de R et V. En déduire $\mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

Exercice 10 : Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire r en bloc (sans remise) avec $3 \leqslant r \leqslant n$. On appelle X la v.a.r. égale au plus grand des numéros tirés et Y égale au plus petit.

1. Déterminer les lois de X et Y. En déduire la formule $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{a} = \binom{b+1}{a+1}$. Calculer les espérances de X et Y.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y)
3. On définit la v.a.r. Z : « écart entre le plus grand et le plus petit numéro tirés ». Déterminer la loi de Z.

Exercice 11 : On dispose de d boules rouges et de d boules vertes, les boules rouges sont placées dans une urne U_1, les boules vertes dans une urne U_2.

On répète l'expérience consistant à choisir simultanément une boule dans chaque urne et à changer d'urne les boules tirées. On appelle X_n le nombre de boules rouges, après n expériences, dans l'urne U_1. On pose $Y_n = X_n - X_{n-1}$.

1. Déterminer $\mathrm{P}(Y_n = i | X_{n-1} = j)$. Et, en déduire que $\mathrm{E}(Y_n) = 1 - \dfrac{2}{d} E(X_{n-1})$.
2. En déduire $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de $\mathrm{E}(X_{n-1})$, puis en fonction de d et n. Commenter.

Exercice 12 :

Un mobile évolue de façon aléatoire le long d'un axe gradué. À $t=0$, il est en O. À chaque instant entier $t=k$, avec $k \geqslant 0$, son abscisse varie de $+1$ avec une probabilité p et de -1 avec la probabilité $q = 1-p$.

On note X_n, son abscisse au temps $t=n$.

1. Montrer que les valeurs prises par X_n sont les entier relatifs $2k-n$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. Calculer $P(X_n = 2k-n)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. On pose $Y_n = \dfrac{X_n + n}{2}$. Reconnaître la loi de Y_n. Donner sans calcul $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
4. En déduire $E(X_n)$ puis $V(X_n)$. Pour quelle valeur de p, X_n est-elle centrée, c'est à dire $E(X_n) = 0$?

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'un jeu de $2n$ cartes qui contient deux rois rouges. On envisage deux jeux régis par les protocoles suivants.

1. Premier protocole : Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire et le joueur retourne les cartes une par une jusqu'à obtenir un roi rouge.
   Il donne 1 euro chaque fois qu'il retourne une carte et dès qu'il obtient un roi rouge, il gagne a euros ($a \in \mathbb{N}^*$) et le jeu s'arrête. Son gain est la variable aléatoire X compté positivement si le joueur gagne.
   (a) Quelle est la valeur prise par X si le premier roi rouge obtenu est la k-ième carte retournée ?
   (b) Démontrer que $\forall k \in [\![1, 2n]\!]$, $P(X = a-k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$. Vérifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} P(X = a-k) = 1$.
   (c) Calculer l'espérance de X.
2. Deuxième protocole : Les cartes du jeu sont toujours alignées sur une table de façon aléatoire. Mais cette fois, le joueur n'a le doit de retourner au maximum que n cartes.
   Le joueur gagne toujours a euros pour le premier roi rouge et perd 1 euro à chaque carte et le jeu s'arrête au roi rouge. On note Y le gain du joueur.
   (a) Quelle est la valeur prise par Y si le premier roi rouge obtenu est la k-ième carte retournée ? Quelle est la valeur prise par Y si le joueur ne trouve pas un roi rouge ? En déduire l'univers image $Y(\Omega)$.
   (b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculer $P(Y = a-k)$.
   (c) Calculer $P(Y = -n)$.
   (d) Vérifier que : $P(Y=-n) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(Y = a-k) = 1$.
   (e) Calculer l'espérance de Y.