Chapitre 19 - Matrices et applications linéaires

1 Matrices d'une application linéaire

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $x \in E$, on appelle matrice de x dans la base $\mathscr{B}$, la matrice colonne notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x)$ dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$:

Si $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$, alors $\quad \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

La matrice dans la base $\mathscr{B}$ d'une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de E notée $\mathrm{M}_B(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est la matrice dont la j-ième colonne pour $j \in [\![1, p]\!]$ est constituée des n coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$.

Si pour $j \in [\![1, p]\!]$, $\quad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ alors

$$\mathrm{M}_B(x_1, x_2, \dots, x_p) = \left(a_{i,j}\right)_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,p]\!]} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.1. La matrice de la famille $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice identité I_n.

Exemple 1.1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on note (e_1, e_2) une base. Soit $u = 4e_1 - 3e_2$ et $v = 2e_1 - e_2$.
Donner les matrices $\mathrm{M}_{(e_1,e_2)}(u, v)$ et $\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1, e_2)$.

La première matrice se trouve directement en écrivant, en colonne, les coordonnées dans la base (e_1, e_2) de chaque vecteur u, v : $\quad \mathrm{M}_{(e_1,e_2)}(u, v) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Remarque : On pourra noter au brouillon les vecteurs en colonne haut dessus de la matrice et sur le côté les vecteurs de la base $\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u & v \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$

Mais, CELA NE DOIT PAS APPARAÎTRE SUR VOTRE COPIE DE DEVOIR.
Pour la matrice $\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1, e_2)$, il faut d'abord calculer les coordonnées de (e_1, e_2) : on cherche $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\begin{cases} e_1 &= \alpha_1 u + \beta_1 v \\ e_2 &= \alpha_2 u + \beta_2 v \end{cases}$
On résout le système suivant par opérations sur les lignes :

$$\begin{cases} u &= 4e_1 - 3e_2 \\ v &= 2e_1 \ - e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - 3v &= -2e_1 \\ u - 2v &= -e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 &= \dfrac{1}{2}(-u + 3v) \\ e_2 &= -u + 2v) \end{cases}$$

Ce qui nous donne la matrice $\quad \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \end{array} \quad$ soit $\quad \mathrm{M}_{(u,v)}(e_1, e_2) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exemple 1.2. Dans $\mathbb{R}^3$, écrivons la matrice de $\boldsymbol{u} = (1,2,-1)$, $\boldsymbol{v} = (1,3,0)$, $\boldsymbol{w} = (-2,0,1)$, et $\boldsymbol{t} = (0,0,-1)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

On trouve $\begin{array}{cc} \begin{matrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} & \boldsymbol{t} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \\ \boldsymbol{e_3} \end{matrix} \end{array}$ soit $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_0}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}_2 = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.

On appelle matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u)$, de la famille de vecteurs $(u(\mathscr{B}_1))$ dans la base $\mathscr{B}_2$:

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\mathscr{B}_1)) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p))$$

On a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Si on note $\mathscr{B}_2 = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \ldots, \boldsymbol{f_n})$ et $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\quad u(\boldsymbol{e_j}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{f_i}$ où $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ sont les coordonnés du vecteur $u(\boldsymbol{e_j})$ dans la base $\mathscr{B}_2$,

$$\text{alors } \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(\boldsymbol{e_1}) & u(\boldsymbol{e_j}) & u(\boldsymbol{e_p}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{f_1} \\ \\ \boldsymbol{f_i} \\ \\ \boldsymbol{f_n} \end{array} \end{array}$$

Remarque 1.2. Le nombre de lignes de la matrice est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.
Le nombre de colonnes est égal à la dimension de l'espace de départ.

Exemple 1.3. Soit $\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, 3x - 2y + 4z) \end{array}$.

Donnons la matrice de g dans les bases canoniques $\mathscr{B}_3$ et $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

On calcule les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}_3$ par g :

$g(1, 0, 0) = (1, 3)$, $\quad g(0, 1, 0) = (2, -2) \quad g(0, 0, 1) = (-1, 4)$

Les images donnent directement les coordonnées dans la base canonique $\mathscr{B}_2$: $(1, 3) = 1(1, 0) + 3(0, 1)$...

Alors, on a la matrice :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(g) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} g(\boldsymbol{e_1}) & g(\boldsymbol{e_2}) & g(\boldsymbol{e_3}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{f_1} \\ \boldsymbol{f_2} \end{array} \end{array}$$

> **Exercice 1.1.** Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ une base. On pose $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$.
> Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{u}$ et $f(\boldsymbol{e_2}) = 3\boldsymbol{v}$.
> Calculer $\mathrm{M}_{(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}(f)$ et $\mathrm{M}_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2})}(f)$.

On remarque que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

On a directement les coordonnées des images de $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ dans la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, alors,

$$\mathrm{M}_{(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(\boldsymbol{e_1}) & f(\boldsymbol{e_2}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{array} \end{array}$$

Pour l'autre matrice, il faut calculer $f(\boldsymbol{u})$ et $f(\boldsymbol{v})$.

On a $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ qui donne $f(\boldsymbol{u}) = 2f(\boldsymbol{e_1}) + f(\boldsymbol{e_2}) \quad$ soit $f(\boldsymbol{u}) = 2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$ et finalement,

$f(\boldsymbol{u}) = 2(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + 3(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = 7\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$
De même, on calcule $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2) = (2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) - 3(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$
Alors,

$$\mathrm{M}_{(u,v)(e_1,e_2)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\boldsymbol{u}) & f(\boldsymbol{v}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{array}$$

On peut également calculer les deux matrices

$$\mathrm{M}_{(u,v)(u,v)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{(e_1,e_2)(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

où on utilise la même base au départ et à l'arrivée. Cela est possible car f est un endomorphisme.

1.3 Matrice d'un endomorphisme

Définition 1.3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\dots,e_p)$ une base de E. Soit $v\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
On appelle matrice de l'endomorphisme v dans la base $\mathscr{B}$, la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v)$, de l'application linéaire v dans le couple de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v)=\mathrm{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(v)=\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v(e_1),v(e_2),\dots,v(e_p))$$

Remarque 1.3. On utilise la même base au départ et à l'arrivée.
La matrice de l'identité id_E est la matrice identité I_p.

Exercice 1.2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'endomorphisme
$$\begin{array}{rccl}\varphi: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X]\\ & P & \longmapsto & 2P-2(X+1)P'+X^2P''\end{array}.$$

On commence par calculer l'image des vecteurs de la base par φ :
$\varphi(1)=2,\quad \varphi(X)=2X-2(X+1)=-2,\quad \varphi(X^2)=2X^2-2(X+1)2X+2X^2=-4X,$
$\varphi(X^3)=2X^3-2(X+1)3X^2+6X^3=-4X=2X^3-6X^2$
Alors, on peut écrire la matrice de φ dans la base canonique :

$$\begin{array}{cc}\begin{array}{cccc}\varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3)\end{array} & \\ \begin{pmatrix}2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} & \begin{array}{c}1\\ X\\ X^2\\ X^3\end{array}\end{array} \quad \text{soit} \quad \mathrm{M}_{(1,X,X^2,X^3)}(\varphi)=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Remarque : La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ peut aussi s'écrire dans l'ordre décroissant des puissances : $(X^3,X^2,X,1)$. C'est une autre base.

La matrice de φ dans cette base s'écrit : $\mathrm{M}_{(X^3,X^2,X,1)}(\varphi)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ -6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$

1.4 Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 1.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie de base $\mathscr{B}$. soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a*

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\alpha x + y) = \alpha \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) + \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(y)$$

Proposition 1.2. *Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie.*
Soit $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base de F.
Soit $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\alpha u + v) = \alpha \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1 \mathscr{B}_2}(u) + \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1 \mathscr{B}_2}(v)$.

2 Matrices et applications linéaires

2.1 Calcul des coordonnées de l'image

Proposition 2.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension p et q, $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base de F.*
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$: $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u)$.
Si $\boldsymbol{x} \in E$ a pour matrice X dans $\mathscr{B}_1$ et $\boldsymbol{y} = u(\boldsymbol{x})$ a pour matrice Y dans $\mathscr{B}_2$, alors on a

$$Y = AX \quad \text{soit} \quad \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\boldsymbol{x})) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\boldsymbol{x}).$$

Démonstration.

Soit $\boldsymbol{x} \in E$ de matrice dans la base $\mathscr{B}_1 = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_p})$: $X = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ avec $\dim E = p$.

On note $\boldsymbol{y} = u(\boldsymbol{x})$ de matrice dans la base $\mathscr{B}_2 = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \ldots, \boldsymbol{f_q})$: $Y = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ avec $\dim F = q$.
On note $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) = (a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,q]\!] \\ j\in[\![1,p]\!]}} = A$ la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$,

c'est à dire $u(\boldsymbol{e_j}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} a_{ij}\boldsymbol{f_i}$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$
On a alors,
$u(\boldsymbol{x}) = u\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j \boldsymbol{e_j}\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{q} a_{ij}\boldsymbol{f_i}$
soit
$\boldsymbol{y} = u(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{f_i}$ Mais, on a également, $\boldsymbol{y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} y_i \boldsymbol{f_i}$. Alors par unicité des coordonnées dans la base $\mathscr{B}_2$, on a $\forall i \in [\![1,q]\!], \quad y_j = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j$
C'est exactement la définition du produit AX. On a donc montré $Y = AX$.

□

Exemple 2.1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $U = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On peut calculer l'image d'un vecteur $\boldsymbol{a} = (x,y)$ en passant par sa matrice par $U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$
Alors, $u(\boldsymbol{a})$ a pour coordonnées $(3x-y, 2x+4y)$ ce qui donne ici, $u(\boldsymbol{a}) = (3x-y, 2x+4y)$ car on a utilisé la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

L'expression analytique de u est : $\begin{cases} x' &= 3x-2y \\ y' &= 2x+4y \end{cases}$

Exemple 2.2. Soit r la rotation de matrice $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$
Calculer l'image des vecteurs $(1,0)$ puis $(0,1)$. En déduire l'angle de la rotation.
Calculer l'image du vecteur de coordonnése $(2,3)$.

Déterminer la matrice d'une rotation d'angle θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 2.1. On considère $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y, 3x+2y) \end{array}$.

Calculer la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires

Théorème 2.2. *Soit n, p, q des entiers non nuls. Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimensions respectives n, p et q et ayant pour bases respectives $\mathscr{B}_1$ $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.*
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ de matrice B dans les bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.
Alors BA est la matrice de $v \circ u$ dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_3$:

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).$$

Démonstration. On a par définition de la matrice de l'application linéaire $v \circ u$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) &= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_3}(v \circ u)(\mathscr{B}_1) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_3}\left(v\left(u(\mathscr{B}_1)\right)\right) \\
&= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}\left(u(\mathscr{B}_1)\right) \quad \text{par propriété du calcul de l'image d'un vecteur par } v \\
&= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) \quad \text{par calcul de l'image d'un vecteur par } u
\end{aligned}$$

Or, on a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1)$ qui est la matrice identité d'où

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).$$

□

2.3 Matrices inversibles et isomorphismes

Théorème 2.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies de bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

f est un isomorphisme si et seulement si la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est carrée et inversible.

Dans ce cas, la matrice de l'application réciproque f^{-1} est la matrice inverse de la matrice de l'application f :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1}(f^{-1}) = \left(\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)\right)^{-1}$$

Démonstration.

Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f a une réciproque f^{-1} de F dans E et f^{-1} est linéaire. On a $f \circ f^{-1} = id_F$.

De plus, E et F sont des espaces vectoriels de même dimension n car ils sont isomorphes. Alors les matrices de f et f^{-1} dans n'importe quelles bases sont carrées.

En utilisant les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, on a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(id_F) = I_n$

Mais la matrice de la composée de deux applications est le produit des matrices des applications :

$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(f^{-1})$

On a donc $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(f^{-1}) = I_n$

Ce qui prouve que la matrice de f est inversible et $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1}(f^{-1}) = \left(\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)\right)^{-1}$

Réciproquement, si la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est carrée et inversible, alors soit B son inverse.

On sait que E et F ont la même dimension car la matrice de f est carrée.

B est une matrice carrée qui correspond à une unique application linéaire g de F dans E dont B est la matrice dans les bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_1$: $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(g)$.

En effet, une application linéaire est définie de manière unique par l'image d'une base et chaque colonne de B définit l'image d'un des vecteurs de la base $\mathscr{B}_2$.

Alors, on a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(g) = I_n$ qui donne $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(f \circ g) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(id_F)$

et $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(g).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = I_n$ qui donne $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(g \circ f) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(id_E)$

On en déduit, par isomorphisme entre l'application linéaire et sa matrice quand les bases sont fixées, que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$ ce qui prouve que f est bijective et $f^{-1} = g$. Donc f est un isomorphisme.

On a bien prouvé l'équivalence :

f est un isomorphisme si et seulement si la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est carrée et inversible.

□

3 Changements de bases

3.1 Matrices de passage

Définition 3.1. Soit E un espace de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée $P_{B\to B'}$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$: $P_{B\to B'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$

Lemme 3.1. *La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P_{B\to B'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E)$.*

Théorème 3.2. *Une matrice de passage est inversible et $P_{B'\to B} = (P_{B\to B'})^{-1}$.*

Démonstration. $P_{B\to B'}$ est la matrice de l'application identité qui est un isomorphisme, alors $P_{B\to B'}$ est inversible et

$$(P_{B\to B'})^{-1} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E^{-1})\mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E) = P_{B'\to B}.$$

□

Lemme 3.3. *Soit $\mathscr{B}$ une base de E de dimension n et $x_1, x_2, \dots, x_n$ une famille de vecteurs de E.*
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est inversible.

3.2 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur

Théorème 3.4. *Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*
Si $x \in E$, on note $X = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors, on a la relation $\qquad X = PX'$
qui donne les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base.

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)$$

Démonstration. La relation :

$$X = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(id_E(x)) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x) = P_{B\to B'}.\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x) = PX'$$

prouve le théorème.

□

Démonstration. Par calcul direct :

Soit $\boldsymbol{x} \in E$. $\boldsymbol{x}$ s'écrit $\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j \boldsymbol{e_j}$ dans la base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_p})$ ce qui donne la matrice de $\boldsymbol{x}$ dans $\mathscr{B}$: $\quad X = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ avec $\dim E = p$.

Mais $\boldsymbol{x}$ s'écrit aussi $\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x'_j \boldsymbol{e'_j}$ dans la base $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}, \dots, \boldsymbol{e'_p})$

On note X' la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ de $\boldsymbol{x}$: $X' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'_1}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$.

On note la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$: $P = P_{B\to B'} = (a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,p]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ avec $\forall j \in [\![1,p]\!], \quad \boldsymbol{e'_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\boldsymbol{e_i}$

Alors, $\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x'_j \boldsymbol{e'_j} = \sum_{j=1}^{p} x'_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\boldsymbol{e_i}\right)$ $\quad$ soit $\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x'_j\right)\boldsymbol{e_i}$

On reconnaît les coefficients de la matrec PX' car $PX' = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x'_j\right)_{j\in[\![1,p]\!]}$.

Alors, $\forall i \in [\![1,p]\!], \quad x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x'_j$ ce qui prouve que $X = PX'$.

□

3.3 Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Théorème 3.5. *Soit E un espace de dimension finie et deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$.*
Soit F un espace vectoriel de dimension finie et deux bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}'_2$.
Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}'_1$. Soit Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}'_2$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et de matrice A' dans les bases $\mathscr{B}'_1$ à $\mathscr{B}'_2$.
On a $A' = Q^{-1}AP$ *soit* $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}'_2}(id_F).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}_1}(id_E)$

Remarque 3.1. On a le schéma suivant qui n'a aucune valeur sauf mnémotechnique :

$$\begin{tikzcd}
E, \mathscr{B}_1 \arrow[r, "u", "\text{matrice } A"'] & F, \mathscr{B}_2 \\
E', \mathscr{B}'_1 \arrow[u, dashed, "\begin{array}{c} id_E \\ \text{matrice } P \end{array}"] \arrow[r, "u", "\text{matrice } A'"'] & E', \mathscr{B}'_1 \arrow[u, dashed, "\begin{array}{c} id_F \\ \text{matrice } Q \end{array}"']
\end{tikzcd}$$

3.4 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Théorème 3.6. *Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*
Soit u un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathscr{B}$ et de matrice A' dans la base $\mathscr{B}'$.
On a $A' = P^{-1}AP.$ *soit* $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E).\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E)$

4 Rang d'une matrice

4.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 4.1. Soit A matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A, l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A.

4.2 Image et noyau d'une matrice

Définition 4.2. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle noyau et image de A notés $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Im}A$ les noyaux et images de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 4.1. *Le noyau d'une matrice A est l'ensemble des solutions du système $AX = 0$.*
L'image d'une matrice A est l'ensemble des seconds membres B pour lesquels le système $AX = B$ a au moins une solution.

4.3 Rang d'une matrice

Théorème 4.2. *Le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est le nombre de pivots de sa matrice échelonnée réduite par lignes est égal au rang de l'application linéaire associée à A.*

On a $\qquad \operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A.$

Corollaire 4.3. *Le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal au rang des vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$.*

Corollaire 4.4. *Étant donnée une base $\mathscr{B}$ d'un espace vectoriel E, le rang d'une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de E est égal au rang de la matrice des vecteurs dans la base $\mathscr{B}$:* $\operatorname{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \operatorname{rg} \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Corollaire 4.5. *Le rang d'une application linéaire u de E dans F est le rang de la matrice de u dans n'importe quelles bases de E et F.*

4.4 Rang et matrice inversible

Théorème 4.6. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est de rang maximal si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de* $\mathbb{K}^n$

Théorème 4.7. *Si* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *sont des matrices inversibles et si* $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est une matrice, alors* $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(MB)$ *: on ne change pas le rang quand on multiplie par une matrice inversible.*

Théorème 4.8. *Deux matrices équivalentes par lignes ont le même rang.*

4.5 Rang de la transposée

Proposition 4.9. *Le rang d'une matrice est égal : au rang de ses vecteurs colonnes et au rang de ses vecteurs lignes et au rang de sa transposée.*

Théorème 4.10. *Deux matrices équivalentes par colonnes ont le même rang.*

5 Exemples de transformations vectorielles du plan euclidien

5.1 Rotations vectorielles

Définition 5.1. Dans le plan euclidien, on appelle rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, l'application r_θ telle que pour tout vecteur $\vec{u}$ on ait $(\vec{u}, r_\theta(\vec{u})) = \theta\ [2\pi]$ et $||\vec{u}|| = ||r_\theta(\vec{u})||$.

Proposition 5.1. *Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien, alors f conserve le produit scalaire si et seulement si f conserve la norme.*

Alors f est un automorphisme. On dit que f est un automorphisme orthogonal.

5.2 Matrice d'une rotation dans une BOND

Théorème 5.2. *La matrice de r_θ dans une BOND est* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

5.3 Composée de deux rotations

Proposition 5.3. *La composée des rotations r_θ et r_φ donne la rotation $r_{\theta+\varphi}$*

$$r_\theta \circ r_\varphi = r_\varphi \circ r_\theta = r_{\theta+\varphi}$$

Corollaire 5.4. *Matriciellement,* $\quad R_\theta \times R_\varphi = R_\varphi \times R_\theta = R_{\theta+\varphi}$

Théorème 5.5. *Une rotation r_θ est un automorphisme du plan et $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.*

5.4 Symétrie orthogonale vectorielle

Proposition 5.6. *Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du plan euclidien. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$ est un sous-espace vectoriel du plan noté $\vec{v}^{\perp}$.*
De plus, $\mathrm{Vect}\,\vec{v}$ *et $\vec{v}^{\perp}$ sont supplémentaires dans le plan.*

Définition 5.2. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du plan euclidien. On appelle symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{v}$, la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\,\vec{v}$ parallèlement à $\vec{v}^{\perp}$.
C'est à dire que $s_{\vec{v}}$ est définie par $s_{\vec{v}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ où $\vec{u}_1 \in \mathrm{Vect}\,\vec{v}$ et $\vec{u}_2 \in \vec{v}^{\perp}$ avec $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Théorème 5.7. *Pour $\vec{v} \neq 0$, l'application $s_{\vec{v}}$ est un automorphisme du plan vectoriel.*
$s_{\vec{v}}$ conserve le produit scalaire, la norme, change l'orientation des angles et vérifie $s_{\vec{v}} \circ s_{\vec{v}} = id_P$.

5.5 Matrice d'une symétrie orthogonale dans une BOND

Théorème 5.8. *Soit P le plan euclidien muni d'une BOND $(\vec{i}, \vec{j})$.*

Si $\vec{v}$ fait un angle $(\vec{i}, \vec{v}) = \varphi$ avec le vecteur $\vec{i}$, alors $s_{\vec{v}}$ a pour matrice $S_{2\varphi} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$.

5.6 Composée de deux symétries orthogonales

Théorème 5.9. *Soit $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls du plan vectoriel.*
La composée de deux symétries orthogonales $s_{\vec{v}_1}$ et $s_{\vec{v}_2}$ est une rotation d'angle $\theta = 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\ [2\pi]$.

6 Exemples de transformations vectorielles de l'espace euclidien

6.1 Rotation vectorielle de l'espace

Définition 6.1. Soit $\vec{n}$ un vecteur normé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$: $||\vec{n}|| = 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique en $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in \operatorname{Vect}\vec{n}$ et $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$.
On appelle rotation vectorielle d'axe dirigé par $\vec{n}$ et d'angle θ, l'application $r_{\theta,\vec{n}}$ définie par

$$r_{\theta,\vec{n}}(\vec{u}) = \vec{u}_1 + \cos\theta\,\vec{u}_2 + \sin\theta\,\vec{n} \wedge \vec{u}_2.$$

Proposition 6.1. *Une rotation vectorielle est linéaire, bijective, conserve la norme, le produit scalaire et les angles.*

6.2 Matrice d'une rotation dans une BOND adaptée

Théorème 6.2. *Soit $\vec{n}$ un vecteur normé, $\vec{i} \perp \vec{n}$ avec $||\vec{i}|| = 1$, un vecteur normé orthogonal à $\vec{n}$. Alors $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$ est une BOND de l'espace.*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice de la rotation d'angle θ autour de $\vec{n}$, dans la base $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$, est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

6.3 Réflexion

Définition 6.2. On appelle réflexion par rapport au plan P, la symétrie par rapport au plan P parallèlement à la droite vectorielle D orthogonale à P.

C'est à dire l'application s_P telle que pour un vecteur $\vec{x}$ qui se décompose en $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in P$ et $\vec{z} \perp P$, on a $s_P(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$.

6.4 Matrice d'une réflexion dans une BOND adaptée

Théorème 6.3. *Soit P un plan vectoriel et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ une base de P. On note $\vec{n}$ un vecteur normé normal à P : $\vec{n} = \dfrac{1}{||\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2||}.\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.*

Soit $\vec{v}_1 = \dfrac{1}{||\vec{u}_1||}.\vec{u}_1$, la famille $(\vec{n}, \vec{v}_1, \vec{n} \wedge \vec{v}_1)$ est une BOND de l'espace et la matrice de s_P dans cette base est $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.