Chapitre 21 - Variables aléatoires

1 Variables aléatoires

1.1 Définition

en général $E=\mathbb{R}$

Définition 1.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et E un ensemble.

On appelle variable aléatoire une application définie sur (Ω, P) à valeurs dans E : $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$.

résultat — valeur

Lorsque E est une partie de $\mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

L'ensemble des valeurs susceptibles d'être prises par X est $X(\Omega)$ défini par $X(\Omega) = \{x \in E \mid \exists \omega \in \Omega : x = X(\omega)\}$.

Lorsque Ω est fini, $X(\Omega)$ est fini et on notera souvent $X(\Omega) = (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ avec $n = |\Omega|$.

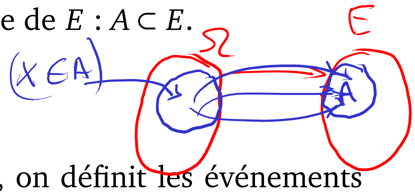
ensemble des images = univers image

Remarque 1.1. Par défaut, on suppose que les variables aléatoires sont des variables aléatoires réelles (V.A.R).

Définition 1.2. Soit une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow E$. Soit A une partie de E : $A \subset E$.

On définit l'événement $(X \in A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \subset \Omega$

On a donc $(X \in A) = X^{-1}(A)$ et on le note aussi $(X \in A) = \{X \in A\}$.



Définition 1.3. Pour une variable aléatoire réelle X et pour a, b réels, on définit les événements suivants :

$(X = a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\} = \{$ tous les résultats ω tels que $X(\omega) = a\}$

$(X \leqslant a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\} = \{$ tous les résultats ω tels que $X(\omega) \leqslant a\}$

$(a \leqslant X < b) = \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) < b\} = \{$ tous les résultats ω tels que $a \leqslant X(\omega) < b\}$

Exemples : on lance 2D6 un rouge et un vert

$S =$ la somme des deux dés est une V.A.R (var aléa réelle)

On a $S(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 10, 11, 12\}$

L'événement $(S = 8)$ est $\{(2,6), (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)\}$

$P(S=8) = \dfrac{5}{36}$ car on a équiprobabilité des 36 résultats de deux dés.

~~X =~~ X est égale au le plus grand numéro sorti

On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad P(X=3) = \dfrac{5}{36}$

car $(X=3) =$ « le plus grand numéro sorti est un 3 »

$= \{(3,1), (3,2) (3,3) (2,3) (1,3)\}$

Exemple : On s'intéresse aux n premières naissances de l'année et à la répartition fille/garçon.
et on pose X la variable aléatoire égale au nombre de filles nées.

$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (c'est une v.a.r) (réelle)

Toutes les naissances sont indépendantes
on note p la probabilité d'obtenir une fille
on suppose que cette probabilité est la même pour chaque naissance $p \simeq \frac{97}{200}$
il est connu que X "suit une loi binomiale"
car "~~X~~ compte le nombre de succès" dans la répétition de n expériences identiques et indépendantes ayant deux résultats possibles succès de probabilité p et échec avec une probabilité $1-p$."

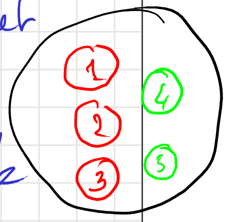
$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec } k \in [\![0, n]\!]$$

$\Omega = \{F, G\}^n = \{FFF\cdots F, FF\cdots FG, FFG\,GF, \ldots, GGGG\}$
il y a $\binom{n}{k}$ listes de n lettres prises parmi F et G avec k F
chacun des résultats correspondants à la même probabilité $p^k \times (1-p)^{n-k}$

1.2 Exemples

suite page 6 : **Cas 2** : on tire simultanément 3 boules dans $U = 2V + 3R$. Loi de X = nb de vertes

(Calcul en tenant compte de l'ordre (à éviter car le résultat pour X ne tient pas compte de l'ordre))



on suppose que les boules sont discernables, par exemple numérotées de 1 à 5.

on choisit Ω = l'ensemble des listes de 3 éléments distincts pris parmi 5 (arrangements de 3 parmi 5) donc $|\Omega| = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3$

$P(X=0) = \frac{3!}{|\Omega|} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ car il y a équiprobabilité des tirages et $3!$ listes constituées avec 1, 2, 3 sans répétition

$P(X=1) = \dfrac{2 \text{ choix du numéro vert} \times 3 \text{ tirages} \times 3 \text{ choix pour la 1re rouge} \times 2 \text{ choix pour la 2e R}}{|\Omega|}$

$= \frac{36}{60} = \frac{6}{10}$

$P(X=2) = \dfrac{\binom{3}{2} \text{ choix des position V} \times 2 \text{ choix pour la 1ère V} \times 3 \text{ choix pour la rouge}}{|\Omega|}$

$= \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$ on vérifie $P(X=1) + P(X=2) + P(X=0) = \frac{60}{60}$

Cas 3 : on tire jusqu'à obtenir une rouge, sans remise. Loi de X

$U = 2V + 3R$ $\quad X$ = nb de V tirées.

On note R_i = "a tiré une rouge au i-ème tirage".

on a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$(X=0) = R_1$ donc $P(X=0) = P(R_1) = \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$

$(X=1) = \overline{R_1} \cap R_2$ $\quad P(X=1) = P(\overline{R_1}) . P_{\overline{R_1}}(R_2)$ formule des probas conditionnelles

$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$

$(X=2) = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3$ $\quad P(X=2) = P(\overline{R_1}) . P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) . P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(R_3)$

donc $P(X=2) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3)$ $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{20}$

1.3 Loi de probabilité d'une v.a. réelle finie

Soit (Ω, P) un espace probabilisé

Définition 1.4. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire finie. L'application $P_X : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(X^{-1}(A)) \end{array}$ est une probabilité appelée loi de probabilité de la v.a. X et $(X(\Omega), P_X)$ est un espace probabilisé.

Théorique

$P_X(A)$

MQ

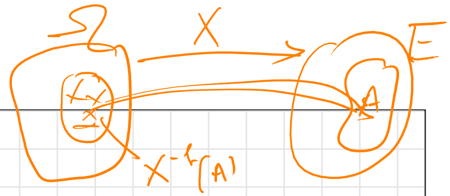
Définition 1.5. Soit X une v.a. finie $X : \Omega \longrightarrow E$. On appelle loi de probabilité de X la donnée de toutes les valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$ et de toutes les probabilités $(P(X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$.

Remarque 1.2. On peut utiliser un tableau

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	…
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$P(X=x_3)$	$P(X=x_4)$	$P(X=x_5)$	…

$\mathscr{P}(E)$ = ensemble des parties de E

Théorème 1.1. *Soit $\{(x_i, p_i) | i \in I\}$ une partie finie de $\mathbb{R}^2$ telle que les x_i soient distincts. $\{(x_i, p_i) | i \in I\}$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie si et seulement si*
$$\begin{cases} \forall i \in I, \quad p_i \geqslant 0 \\ \sum_{i\in I} p_i = 1 \end{cases}.$$



Exemple On lance 2 dés à 6 faces équilibrés
on note S la V.A égale à la somme des 2 nombres obtenus
Loi de S ?

On a $S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ l'univers image

On calcule

$P(S=2) = \frac{1}{36}$ $\quad$ $P(S=3) = \frac{2}{36}$

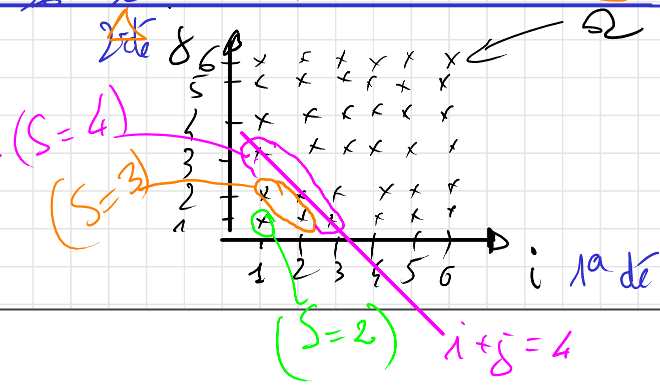
car $(S=2) = \{(1,1)\}$ $\quad$ car $(S=3) = \{(1,2),(2,1)\}$

$|\Omega| = 36$
équiprobabilité

on peut les ranger dans un tableau

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	total
$P(S=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$

$(S=x)_{x\in[\![2,12]\!]}$ est un SCE



$P(S=4) = \frac{3}{36}$

$E(S) = \sum_{x\in S(\Omega)} x \cdot P(S=x) = 7$

Exemple Une urne contient 5 boules : 3 rouges et 2 vertes
On appelle X la v.a. égale au nombre de boules vertes tirées

Cas 1 : on tire successivement avec remise 3 boules
Loi de X ?

On a $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. On répète 3 fois la même expérience, de manière indépendante (l'urne contient à chaque fois les mêmes boules), X compte le nombre de succès : "tirer une boule verte" et l'expérience n'a que 2 résultats possibles : boule verte ou boule rouge.

Alors X suit la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{2}{5}=P(\text{"verte"})$

$$P(X=k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$$

$P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$ avec R_i : "on tire une rouge au i-ème tirage"

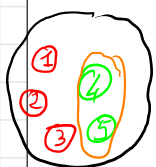
$P(X=1) = P\left((R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) \cup (R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) \cup (\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3)\right)$

$= P(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) + P(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) + P(\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3)$ car ces 3 sont incompatibles. Et ces 3 ont la même probabilité :

$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = P(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) = P(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) = P(\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3)$

$$P(X=1) = 3\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Cas 2 : On tire simultanément 3 boules. Loi de X ?



On a $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

On utilise Ω l'ensemble des tirages de 3 boules parmi les 5 boules qu'on suppose numérotées (discernables) sans tenir compte de l'ordre.

On a donc $\binom{5}{3}$ tirages possibles $\binom{5}{3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$

ce qui correspond à l'ensemble des parties à 3 éléments de $[\![1,5]\!]$ et tous ces tirages sont équiprobables.

$P(X=0) = \frac{|(X=0)|}{|\Omega|} = \frac{1}{10}$ | $P(X=1) = \frac{6}{10} = \frac{2 \text{ choix de V} \times 3 \text{ choix de R}}{10}$

$P(X=2) = \frac{|(X=2)|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}$ on vérifie $\sum_{k=0}^{2} P(X=k) = 1$

1.4 Système complet associé à une v.a. finie

infini en PT

Proposition 1.2. *Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une v.a. sur un espace probabilisé fini.*
$\omega \mapsto x_i$
$$((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)} \text{ est un système complet d'événements.}$$

Corollaire 1.3. *On en déduit que* $\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1$.

somme finie (PTSI)

somme infinie = série en PT

Démonstration

Pour $x_i \in X(\Omega)$, l'événement $(X=x_i) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$ est une partie de Ω : $(X=x_i) \subset \Omega$

Donc $\bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X=x_i) \subset \Omega$

Soit $\omega \in \Omega$, on pose $x_{i_0} = X(\omega)$ et $\omega \in (X = x_{i_0})$

donc $\omega \in \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X=x_i)$ donc $\Omega \subset \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X=x_i)$

ce qui prouve que $\Omega = \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X=x_i)$

Soit $\omega \in (X=x_i) \cap (X=x_j)$ avec $x_i, x_j \in X(\Omega)$

$\Rightarrow X(\omega) = x_i$ et $X(\omega) = x_j$ mais X est une application, $X(\omega)$ ne peut prendre qu'une valeur

donc $x_i = x_j$

Cela prouve que pour $x_i \neq x_j$ $(X=x_i) \cap (X=x_j) = \emptyset$

alors $((X=x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$ est un SCE.

Exemple : Dans un groupe de n personnes, on compte le nombre de personnes nées le 11 février. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 personnes nées le 11 février ?

On note X la v.a.r égale au nombre de personnes nées le 11 février. On veut $P(X \geq 2)$.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - P(X < 2)$

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p = \frac{1}{365})$

$= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n - n \times \frac{1}{365} \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}$

1.5 Loi d'une fonction d'une variable aléatoire finie

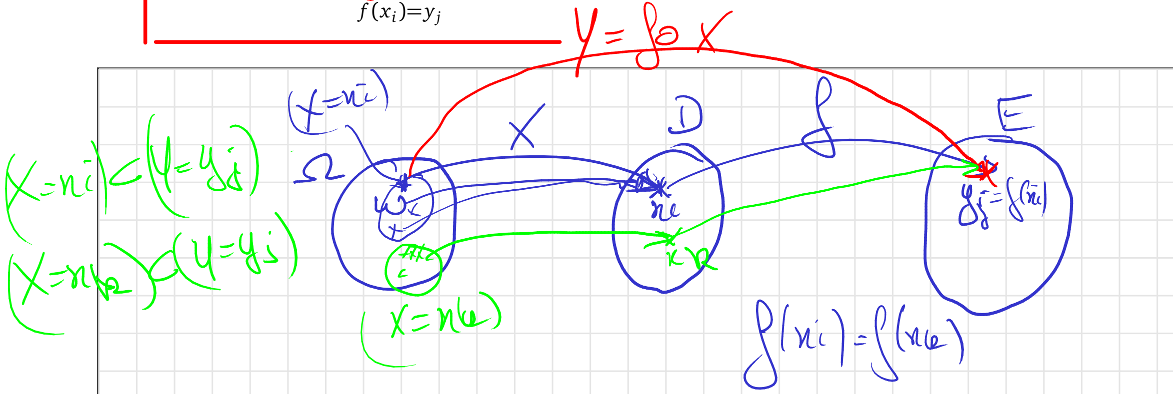
Définition 1.6. Soit X une v.a. finie sur (Ω, P) avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Soit $f : D \subset E \longrightarrow E$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset D$.
Alors $Y = f \circ X$ est une v.a. finie sur Ω.
De plus,

$$Y(\Omega) = (f \circ X)(\Omega) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

et

somme sur toutes les valeurs x_i de X telles que $f(x_i) = y_j$

$$P(Y = y_j) = \sum_{f(x_i)=y_j} P(X = x_i) \text{ (somme sur toutes les valeurs } x_i \text{ telles que } f(x_i) = y_j).$$



Exemple : On joue à Pile ou Face 2 fois de suite.
On note X la va égale au nombre de piles obtenus
et on gagne 1€ par Face, on perd 2€ par pile
On note G la va égale au gain algébrique de la partie.
Quelle est la loi de G ?

On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ $P(X=0) = \frac{1}{4}$ $P(X=1) = \frac{2}{4}$
$P(X=2) = \frac{1}{4}$. $(X=0) \subset (G=2)$ (si X vaut 0 alors G vaut 2)
$(X=1) \subset (G=-1)$ $(X=2) \subset (G=-4)$

C'est à dire que $(X=0) = (G=2)$, $(X=1) = (G=-1)$
$(G=-4) = (X=2)$

Exemple : On joue 2 fois à Pile ou Face. On gagne 1 € pour chaque Pile, on perd 1 € pour chaque Face.
On note X le gain après avoir joué deux fois et $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

On a $X(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$ et la loi

x	-2	0	2
$P(X=x)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$

On a $Y(\Omega) = \{0, 4\}$
et $(Y=0) = (X=0)$ et $(Y=4) = (X=2) \cup (X=-2)$
$P(Y=0) = 2/4$ et $P(Y=4) = P(X=2) + P(X=-2)$
$= 1/4 + 1/4 = 2/4$

Exemple : On note S la v.a égale à la somme des résultats du lancer de 2D6.
et on pose $T = S \bmod 3$ (reste de la division de S par 3)
Quelle est la loi de T ?

On a $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
on connaît la loi de S

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	total
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$
valeur de T	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	

On a $(T=0) = (S=3) \cup (S=6) \cup (S=9) \cup (S=12)$ et les 4 sont incompatibles donc $P(T=0) = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36}$

$(T=1) = (S=4) \cup (S=7) \cup (S=10)$ $P(T=1) = \frac{3}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{12}{36}$

$P(T=2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ T suit une loi uniforme sur $\{0,1,2\}$

2 Lois usuelles

2.1 Loi uniforme

Définition 2.1. On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$. ← notation pour "X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$"

Définition 2.2. On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$.

Exemple : Dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n, on tire un par un les jetons sans remise jusqu'à obtenir le 1 et on note X la v.a égale au nombre de tirages effectués. Alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$

$P(X=k) = \frac{1}{n}$ $k \in [\![1,n]\!]$

On note A_k = "on tire le numéro 1 au $k^{\text{ème}}$ tirage"

$(X=k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$

on utilise la formule des probabilités composées :

$P(X=k) = P(\overline{A_1}) \cdot P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdot P_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}(\overline{A_3}) \ldots P_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k)$

$= \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-2}} \times \ldots \times \frac{\cancel{n-(k-1)}}{n-(k-2)} \times \frac{1}{\cancel{n-(k-1)}} = \frac{1}{n}$

2.2 Loi de Bernoulli

Définition 2.3. On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$ donc $P(X = 0) = 1 - p$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

2 résultats possibles

Définition 2.4. Soit A une partie d'un ensemble Ω. On appelle fonction indicatrice de A notée χ_A la fonction $\chi_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ définie pour $\omega \in \Omega$ par

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Remarque 2.1. Lors d'une expérience aléatoire, soit un événement A qui est réalisé (succès) ou qui ne l'est pas (échec), on peut modéliser cette situation avec une variable aléatoire X telle que l'événement $(X = 1) = A$ modélise le succès et l'événement $(X = 0) = \overline{A}$, l'échec de l'expérience. X est alors la fonction indicatrice de A.

Exemple : Dans une urne qui contient N boules numérotées de 1 à N, on en tire k simultanément.
On note X la v.a qui vaut 1 si on a tiré la boule n°1 et 0 sinon.

X ne peut prendre que 2 valeurs 0 ou 1 alors X suit une loi de Bernoulli.
Quelle est la probabilité de $(X=1)$?

On utilise Ω l'ensemble des tirages simultanés de k boules parmi les N. On a $|\Omega| = \binom{N}{k}$ car tirages sans tenir compte de l'ordre et sans remise (combinaisons)
Il y a équiprobabilité de ces tirages.
L'événement $(X=1)$ correspond aux tirages de la boule 1 et $k-1$ autres boules parmi $N-1$

Alors $|(X=1)| = \binom{1}{1}\binom{N-1}{k-1}$

d'où $P((X=1)) = \dfrac{\binom{N-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} = \dfrac{(N-1)!\,k!\,(N-k)!}{(k-1)!\,(N-k)!\,N!} = \dfrac{k}{N}$

et $P((X=0)) = 1 - P((X=1)) = 1 - \dfrac{k}{N}$

2.3 Loi Binomiale

Définition 2.5. On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi binomiale de paramètre n et p avec $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}$ si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

$\mathcal{B}(p) \neq \mathcal{B}(n,p)$

Remarque 2.2. On vérifie $$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1^n = 1.$$

$\sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

Remarque 2.3. Une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ modélise le nombre de succès lors de la répétition de n expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Remarque 2.4. Une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ modélise le nombre d'obtention de boules rouges pour n tirages avec remise dans une urne contenant une proportion p de boules rouges.

la remarque 2.3 justifie que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Démonstration : Une expérience a 2 résultats "Succès" ou "Echec" avec $P(\text{"succès"}) = p$. On la répète identiquement de manière aléatoire et de manière indépendante. On appelle X la v.a égale au nombre de succès après n expériences.

On utilise Ω l'ensemble des listes de n lettres (= mots) S ou E $\quad \Omega = \{S, E\}^n$. Soit $k \in [\![0,n]\!]$

$(X=k)$ correspond aux listes avec $k \times$ "S" et $(n-k) \times$ "E"

il y en a $\binom{n}{k}$ correspondant aux choix de k places parmi n places.

On remarque chacun de ces résultats avec $k \times$ "S" et $(n-k) \times$ "E" ont la même probabilité : qui est

$P(\underbrace{SSSS\,S}_{k}\,\underbrace{E \ldots E}_{(n-k)}) = P(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_k \cap \overline{S_{k+1}} \cap \ldots \cap \overline{S_n})$

où S_j est un succès à la j^e expérience ; Les $(S_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ sont indépendants car les expériences correspondantes sont indépendantes.

$= P(S_1).P(S_2).P(S_3) \ldots P(S_k) P(\overline{S_{k+1}}) \ldots P(\overline{S_n})$

$= p^k (1-p)^{n-k}$ ce qui justifie que les résultats $k \times$ "S" et $(n-k)$ "E" ont la même probabilité.

d'où $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Exemple : Une machine fabrique des pièces avec 1 défaut tous les 1000 pièces en moyenne. Dans une caisse de 100 pièces, calculer la probabilité d'avoir au moins 2 pièces défectueuses ?

D'après l'énoncé la probabilité pour une pièce d'avoir un défaut est $\frac{1}{1000} = p$.

On fait l'hypothèse (fausse) qu'on répète $n = 100$ fois l'expérience dont les résultats sont indépendants.

On note X le nombre de pièces défectueuses

X suit une loi binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

On cherche $P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{n} P(X = k) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 1 - (1-p)^n - n\,p(1-p)^{n-1} \simeq$

Exemple : Probabilité que 2 personnes soient nées le 14 juillet dans une classe de 45 personnes ?

(je comprends "au moins 2 personnes")

Y le nombre de personnes nées le 14 juillet suit une loi binomiale de paramètres $n = 45$ et $p = \frac{1}{365}$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$$
$$= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{45} - 45\left(\frac{364}{365}\right)^{44} \cdot \frac{1}{365}$$

3 Couple de variables aléatoires

le couple (X,Y) est une VA

$(X=x_i)$

3.1 Loi conjointe

Définition 3.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X, Y deux v.a. sur Ω.

On appelle couple de v.a. (X, Y) l'application $\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$.

C'est une variable aléatoire sur E^2. On notera $(X = x_i, Y = y_j)$ l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i \text{ et } Y(\omega) = y_j\}$.

Définition 3.2. On appelle loi conjointe du couple (X, Y) la loi de la variable aléatoire (X, Y) c'est-à-dire la donnée de

- toutes les valeurs prises par le couple $(X,Y) = X(\Omega) \times Y(\Omega) = (x_i)_{i\in I} \times (y_j)_{j\in J} = \{(x_i, y_j) \mid x_i \in X(\Omega), y_j \in$
- et de toutes les probabilités
$$p_{i,j} = \big(P(X = x_i, Y = y_j)\big)_{x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\omega)} = \big(P((X = x_i) \cap (Y = y_j))\big)_{x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)}$$

ce que l'on pourra noter $\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big)_{i\in I, j\in J}$.

Théorème 3.1. *Soit $\{((x_i, y_j), p_{i,j}) | i \in I, j \in J\}$ une partie finie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ telle que les x_i soient distincts et que les y_j soient distincts.*

$\{((x_i, y_j), p_{i,j}) | i \in I, j \in J\}$ est la loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles finies si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in I, \forall j \in J, \quad p_{i,j} \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{i\in I, j\in J} p_{i,j} = 1 \end{array} \right.$.

Remarque 3.1. Par définition, comme cette somme est finie, on peut sommer d'abord sur les lignes ou d'abord sur les colonnes :
$$\sum_{i\in I, j\in J} p_{i,j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} p_{i,j} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} p_{i,j} = 1$$

On note $(X=x_i, Y=y_j)$ pour l'événement "$X=x_i$ et $Y=y_j$" soit $(X=x_i) \cap (Y=y_j)$

Exemple : Dans une urne, on place $3R + 2V + 1B$

on note U = le nb de rouges tirées $\rightarrow \mathcal{B}(2, 3/6)$

V = — vertes tirées $\rightarrow \mathcal{B}(2, 2/6)$

Cas 1, on tire successivement 2 boules avec remise.

loi du couple (U, V)

$U \backslash V$	$V=0$	$V=1$	$V=2$	loi de U
$U=0$	$1/36$	$4/36$	$4/36$	$9/36$
$U=1$	$6/36$	$12/36$	0	$18/36$
$U=2$	$9/36$	0	0	$9/36$
loi de V	$16/36$	$16/36$	$4/36$	1

$P(U=0)$

$P(U=1)$

$P(U=2)$

$P(U=0, V=0) = P(\text{"on tire 2B"})$
$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$P(U=1, V=0) = P(\text{"RB ou BR"})$
$= \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\,\frac{3}{6}$

$(U=1) \cap (V=2) = \emptyset$

La loi du couple (U,V) est la donnée des valeurs prises par le couple $(U,V)(\Omega) = \{(0,0)(0,1)(0,2)(1,0)(1,1)(2,0)\} = K$ et les probabilités correspondantes $\big(P(U=i, V=j)\big)_{(i,j)\in K}$

La somme sur les colonnes pour chaque ligne donne la loi de U

<u>Cas n°2</u> on tire simultanément 2 boules (sans remise)

(Urne = $3R + 2V + 1B$)

Loi de (U,V)

U \ V	V=0	V=1	V=2	loi de U
U=0	X	4/30	2/30	6/30
U=1	6/30	12/30	X	18/30
U=2	6/30	X	X	6/30
loi de V	12/30	16/30	2/30	1

marges

$(U=0)\cap(V=0)$ = "on a tiré deux boules bleues" $= \emptyset$

$(U=0)\cap(V=1)$ = "on a tiré VB ou BV"

$P(U=0, V=1) = \frac{1}{6}\times\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{5}$

$= P\big((V_1\cap B_2)\cup(B_1\cap V_2)\big)$

comme les 2 sont incompatibles $= P(V_1\cap B_2) + P(B_1\cap V_2)$

$= P(V_1).P_{V_1}(B_2) + P(B_1).P_{B_1}(V_2)$

$P(U=0, V=2) = P(V_1\cap V_2)$

$= \frac{2}{6}\times\frac{1}{5}$

3.2 Lois marginales

Définition 3.3. Soit (X,Y) un couple de v.a. Les lois de X et Y s'appellent les lois marginales du couple (X,Y).

Proposition 3.2. *On a*

$$\text{pour tout } x_i \in X(\Omega), \qquad P(X=x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X=x_i, Y=y_j) \text{ notée } p_{i,\bullet}$$

toutes les valeurs possibles pour Y

et

$$\text{pour tout } y_j \in Y(\Omega), \qquad P(Y=y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X=x_i, Y=y_j) \text{ notée } p_{\bullet,j}.$$

toutes les valeurs possibles pour X

Exemple : On lance n fois un dé à 6 faces. On note X le nombre de 1 obtenus et Y le nombre de 6 obtenus. Loi de (X,Y) ?

On sait que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p=\frac{1}{6})$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$ (ne sert à rien pour la loi de (X,Y)).

$X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$ donc $(X,Y) = [\![0,n]\!] \times [\![0,n]\!]$ produit cartésien d'ensembles

$= [\![0,n]\!]^2$

pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, on cherche $P(X=i, Y=j)$?

$(X=i)\cap(Y=j) =$ « on a obtenu i fois le 1, j fois le 6 et $n-i-j$ fois autre chose »

On considère Ω ensemble des résultats des lancers de n dés : On a $|\Omega| = 6^n$ résultats équiprobables en tenant compte de l'ordre

$|(X=i)\cap(Y=j)| =$ nombre de résultats avec i fois le 1 et j fois le 6 et $(n-i-j)$ fois 2, 3, 4 ou 5

$= \binom{n}{i} \cdot \binom{n-i}{j} 4^{n-i-j}$

(un résultat est une liste de n nombres pris dans $[\![1,6]\!]$)

$\binom{n}{i}$ choix des lancers donnant 1

$\binom{n-i}{j}$ ——— 6

et 4 choix pour chacun des lancers restants

d'où $\boxed{P(X=i, Y=j) = \dfrac{\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} 4^{n-i-j}}{6^n}}$ avec $i+j \leq n$
$j \leq n-i$

On vérifie
$$\sum_{(i,j)\in (X,Y)(\Omega)} P(X=i, Y=j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} \frac{\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}4^{n-i-j}}{6^n} = \sum_i \sum_j \ldots$$
$$= \frac{1}{6^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}4^{(n-i)-j}1^j$$ on reconnaît deux fois une formule du binôme
$$= \frac{1}{6^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1+4)^{n-i}1^i$$
$$= \frac{1}{6^n}(5+1)^n = 1$$

on n'oublie pas d'ajouter $P(X=i, Y=j) = 0$ si $i+j > n$

Exemple : On a 6 dés de 6 couleurs différentes A B C D E F à 6 faces. On choisit un dé et on le lance. On répète l'expérience n fois.
On note X le nombre de 1 obtenus et Y le nombre de fois où on a lancé le dé A.

$X \hookrightarrow B(n, \frac{1}{6})$ $Y \hookrightarrow B(n, 1/6)$

Calculons la loi de (X, Y) :

on a $(X,Y)(\Omega) = [\![0, n]\!]^2$

et $P(X=i, Y=j) = P((X=i)\cap(Y=j))$
pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$
$$= \binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^j\left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}$$
$$= P(X=i)\cdot P(Y=j)$$

Remarque : Dans les deux exemples, les lois marginales de X et Y sont les mêmes mais les lois conjointes de (X,Y) sont différentes.

3.3 Loi conditionnelles

Th3, ~~Prop 20~~ Si A est un événement avec $P(A)>0$, alors $P_A : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ est une probabilité sur Ω.

Définition 3.4. Soit Y une v.a. sur (Ω, P) telle que $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j\in J}$. Soit A un événement de $\mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.
La loi de Y conditionnée par A ou loi conditionnelle de Y sachant A est l'ensemble des probabilités

$$\left(P_A(Y=y_j)\right)_{y_j\in Y(\Omega)} = \left(\frac{P((Y=y_j)\cap A)}{P(A)}\right)_{y_j\in Y(\Omega)}$$

Définition 3.5. Soit X et Y deux v.a. sur (Ω, P) telles que $X(\Omega) = (x_i)_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j\in J}$.
Soit $j \in J$. La loi de X conditionnée par $(Y = y_j)$ est l'ensemble des valeurs

$$\left(P_{(Y=y_j)}(X=x_i)\right)_{x_i\in X(\Omega)} = \left(\frac{P(Y=y_j\cap X=x_i)}{P(Y=y_j)}\right)_{i\in I}$$

Soit $i \in I$. La loi de Y conditionnée par $(X = x_i)$ est l'ensemble des valeurs

$$\left(P_{(X=x_i)}(Y=y_j)\right)_{y_j\in Y(\Omega)} = \left(\frac{P(X=x_i\cap Y=y_j)}{P(X=x_i)}\right)_{j\in J}$$

Exemple Dans une urne 4 boules numérotées de 1 à 4, on tire 2 fois avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule tirée et Y le plus grand numéro tiré. Donner la loi de X_1 conditionnée par $Y=3$?

On calcule $P_{(Y=3)}(X_1=i)$ avec $i=1,2,3,4$

On peut se servir de la loi conjointe de (X,Y) :

$X_1 \backslash Y$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$Y=4$	
$X_1=1$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$4/16$
$X_1=2$	X	$2/16$	$1/16$	$1/16$	$4/16$
$X_1=3$	X	X	$3/16$	$1/16$	$4/16$
$X_1=4$	X	X	X	$4/16$	$4/16$
	$1/16$	$3/16$	$5/16$	$7/16$	

$P(X_1=1, Y=3) = \frac{1}{16}$

$P(X_1=4, Y=3) = 0$

$\Omega = [\![1,4]\!]^2$

$|\Omega| = 16$ résultats équiprobables

$P(X_1=2, Y=3) = P(\text{"}2,3\text{"}) = \frac{1}{16}$

$P(X_1=3, Y=3) = P(\text{"}(3,3),(3,2),(3,1)\text{"}) = \frac{3}{16}$

$P_{(Y=3)}(X_1=1) = \frac{P((X_1=1)\cap(Y=3))}{P(Y=3)} = \frac{1/16}{5/16} = \frac{1}{5} = P_{(Y=3)}(X_1=2)$

$P_{(Y=3)}(X_1=3) = \frac{3}{5}$ Loi de X_1 conditionnée par $(Y=3)$

	1	2	3
	$1/5$	$1/5$	$3/5$

3.4 Fonction de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux v.a. réelles sur Ω. Comme le couple (X, Y) est une variable aléatoire réelle sur Ω, on peut définir pour une fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par $Z = g(X, Y)$.
On a $Z(\Omega) = \{g(x_i, y_j) | x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)\}$: ensemble des valeurs prises par Z
Les $g(x_i, y_j)$ ne sont pas nécessairement distincts.

On a $P(Z = z_k) = \displaystyle\sum_{\substack{(x_i, y_j) \text{ tels que} \\ g(x_i, y_j) = z_k}} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

Exemple : $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto (x+y)y$ $Z = (X+Y)Y$

alors

$$E(Z) = \sum_{\substack{(x_i, y_j) \in (X,Y)(\Omega) \\ \text{avec } g(x_i, y_j) = z_k}} z_k . P(X = x_i, Y = y_j)$$

Exemple : On lance 1 D6. On note X le numéro obtenu et Y la VA qui vaut 0 si le numéro obtenu est pair et 1 sinon.
On pose $Z = (Y+1)X$. Loi de Z ? $E(Z)$?

on calcule la loi de (X, Y) :

$X \to$	1	2	3	4	5	6
$Y=0$	0	1/6	0	1/6	0	1/6
$Y=1$	1/6	0	1/6	0	1/6	0

$Z=2$ $Z=2$ $Z=6$ $Z=4$ $Z=10$ $Z=6$

Ensuite
$Z(\Omega) = \{2, 4, 6, 10\}$
$(Y+1)(\Omega) = \{1, 2\}$
$P(Z=6) = 1/6 + 1/6$
$P(Z=10) = 1/6$

d'où $P(Z=2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ $P(Z=4) = P(X=4, Y=0) = \frac{1}{6}$ Loi de Z

car $(Z=2) = ((X=1) \cap (Y=1)) \cup ((X=2) \cap (Y=0))$ ...

$$E(Z) = \sum_{(x_i, y_j) \in (X,Y)(\Omega)} (y_j+1) x_i P(X = x_i, Y = y_j) = \frac{1}{6}(1+1)1 + \frac{1}{6}(0+1)2 + \frac{1}{6}(1+1)3 + \frac{1}{6}(0+1)4 + \frac{1}{6}(1+1)5 + \frac{1}{6}(0+1)6$$

par théorème de transfert

PT

Def covariance de X et Y est

$$\rho(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

th de transfert

4 Variables aléatoires indépendantes

4.1 Indépendance d'un couple de variables aléatoires

Définition 4.1. Soit (X, Y) un couple de v.a. sur (Ω, P) avec $X(\Omega) = (x_i)_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j\in J}$.
On dit que X et Y sont indépendantes pour la probabilité P si

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j) \text{ pour tout } x_i \in X(\Omega) \text{ et } y_j \in Y(\Omega).$$

$P((X=x_i)\cap(Y=y_j))$

Proposition 4.1. *Si X et Y sont 2 v.a. indépendantes sur (Ω, P) alors pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a*

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A).P(Y \in B).$$

Rappel $P(X=x_i, Y=y_j)$ est une notation pour $P((X=x_i)\cap(Y=y_j))$

Exemple Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On en tire 3 avec remise. On note X_1, X_2, X_3 les numéros tirés. X_1, X_2 indépendants ?

$P(X_1=i) = \frac{1}{n}$ pour $i\in [\![1,n]\!]$ et $P(X_2=j) = \frac{1}{n}$ avec $j\in[\![1,n]\!]$

$P(X_1=i, X_2=j) = \frac{1}{n^2} = P(X_1=i).P(X_2=j)$ $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$

car on considère les 2 premiers tirages pour lesquels on utilise $\Omega = [\![1,n]\!]^2$ soit n^2 tirages équiprobables

et $|(X_1=i)\cap(X_2=j)| = 1$ correspond au tirage (i,j)

Donc X_1 et X_2 sont indépendants.

Dans un cas simple, on peut affirmer directement que des VA sont indépendantes notamment pour des tirages successifs avec remise.

Deuxième cas, on tire 3 boules sans remise. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

On a $P(X_1=1, X_2=1) = 0 \neq P(X_1=1).P(X_2=1) = \frac{1}{n}.\frac{1}{n}$

donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes

Pour les 2 premiers tirages, on a Ω l'ensemble des listes de 2 éléments distincts pris dans $[\![1,n]\!]$

$$\Omega = \{(a,b) \mid a \neq b \text{ et } 1 \leq a \leq n \text{ et } 1 \leq b \leq n\}$$

on a $|\Omega| = n \times (n-1)$ listes possibles qui sont équiprobables

or $(X_2 = 1) = \{(i,1) \text{ avec } 2 \leq i \leq n\}$ donc $|(X_2=1)| = n-1$

$$P(X_2=1) = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

4.2 Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition 4.2. Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des v.a. sur un même espace probabilisé (Ω, P).
On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes pour la probabilité P si $\forall x_1 \in X_1(\Omega)$, $\forall x_2 \in X_2(\Omega)$, ..., $\forall x_n \in X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1).P(X_2 = x_2)\dots P(X_n = x_n)$$

Théorème 4.2. *Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des v.a. mutuellement indépendantes sur (Ω, P), alors quelque soit $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, les événements $(X_i \in A_i)_{i=1,\dots,n}$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P.*

Proposition 4.3. *Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des v.a. mutuellement indépendantes sur (Ω, P), alors elles sont indépendantes deux à deux.*

4.3 Somme de v.a. suivant la loi de Bernoulli

Proposition 4.4. *Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des v.a. mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de même paramètre p avec $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$. Alors la v.a. $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$ binomiale de paramètres n et p.*

Remarque 4.1. On utilise cette proposition pour modéliser n expériences identiques et indépendantes avec 2 issues (succès et échec). La variable aléatoire somme compte le nombre de succès.

4.4 Indépendance de fonctions de v.a. indépendantes

Théorème 4.5. *Soit X, Y deux v.a. sur (Ω, P) fini. Soit f, g deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.*

Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

5 Moments d'une v.a. réelle finie

5.1 Espérance

Définition 5.1. Soit X une v.a.r. sur Ω (Ω, P). On appelle espérance de X le réel $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

Ce qui s'écrit également $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ avec $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$.

On a donc $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$.

Proposition 5.1. *Si pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $a \leqslant x \leqslant b$, alors $a \leqslant E(x) \leqslant b$.*

Démonstration définition 5.1.

On sait $((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'évènements

tout $\omega \in \Omega$ appartient à un et un seul des $((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$

alors $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \times P(\{\omega\})$

$= \sum_{\omega \in (X = x_1)} X(\omega) \times P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in (X = x_2)} X(\omega) P(\{\omega\}) + \dots + \sum_{\omega \in (X = x_m)} X(\omega) P(\{\omega\})$

où on a $X(\omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

pour $\omega \in (X = x_i)$, $X(\omega) = x_i$. Donc chaque somme se simplifie

$E(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\omega \in (X = x_i)} x_i P(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{\omega \in (X = x_i)} P(\{\omega\})$

mais $\sum_{\omega \in (X = x_i)} P(\{\omega\}) = P(X = x_i)$ d'où $E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i)$

$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)$

Exemple : On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les cartes valent 11-As, 4 R, 3 D, 2 V, 10-10, 0 reste

X est la valeur de la carte tirée. Espérance de X ?

On calcule la loi de X

x	0	2	3	4	10	11
$P(X = x)$	3/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Car 4 As dans un jeu de 32

Puis

$E(X) = \frac{30}{8} = 0 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{8} + 11 \times \frac{1}{8} =$

Démonstration prop I. 1. croissance de l'espérance

On suppose que pour tout $x \in X(\Omega)$, $a \leq x \leq b$

alors comme $P(X=x) \geqslant 0$

$$a\,P(X=x) \leq x \cdot P(X=x) \leq b \cdot P(X=x)$$

On somme sur toutes les valeurs possibles pour $x \in X(\Omega)$

$$\sum_{x \in X(\Omega)} a\,P(X=x) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} x\,P(X=x) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} b\,P(X=x)$$

(les valeurs possibles sont en nombre fini)

mais $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} a\,P(X=x) = a \overbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)}^{=\,1} = a \times 1$

D'où $\boxed{a \leq E(X) \leq b}$

5.2 Propriétés de l'espérance : linéarité et croissance

Proposition 5.2. *Soit X, Y deux v.a.r. sur (Ω, P) et a, b réels. On a*

$$E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$$

Proposition 5.3. *Soit X, Y deux v.a.r. sur Ω.*
Si on a $X \leqslant Y$, c'est à dire $\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Démonstration 5.2 :

$$E(aX+bY) = \sum_{\omega \in \Omega} (aX+bY)(\omega)\, P(\{\omega\})$$

$aX+bY$ est une variable aléatoire car fonction de Ω dans $\mathbb{R}$

$$E(aX+bY) = \sum_{\omega \in \Omega} (a\,X(\omega) + b\,Y(\omega))\, P(\{\omega\})$$

$$= a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) + b \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\})$$

$$E(aX+bY) = a\ E(X) + b\ E(Y)$$

Exemple $E(X+1) =$

1 peut être vu comme une variable aléatoire réelle :

$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega \longmapsto 1$ c'est une VAR constante

On a $E(1) = 1 \times P(1=1) = 1$

Donc par linéarité de l'espérance $E(X+1) = E(X) + 1$

Exemple $E(X - E(X))$

par linéarité, $E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X)$

$= 0$

Exemple : espérance de la loi binomiale ?

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ $p \in]0,1[$. $k! = k \cdot (k-1)!$

$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $n! = n(n-1)!$

mais $k\binom{n}{k} = k \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = n \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$

pour $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ $n-k = (n-1)-(k-1)$

D'où $E(X) = 0 + \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$ on pose $j = k-1$

$= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1}$

$= n.p. \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}$

$= np\,(\underbrace{p + (1-p)}_{=1})^{n-1}$ d'après la formule du binôme.

$E(X) = np$

5.3 Théorème de transfert

Théorème 5.4. *Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$ et X une v.a.r. sur (Ω, P) fini.*
On a $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x) = \sum_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i)$.

On a une va X et une autre $Y = g(X)$
pour calculer l'espérance de Y, on peut calculer
soit la loi de Y
soit directement avec le théorème de transfert.
Démonstration :

$$E(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega)) P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{\omega \in (X = x_i)} g(X(\omega)) P(\{\omega\}) \text{ avec } X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{\omega \in (X = x_i)} g(x_i) P(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{m} g(x_i) \underbrace{\sum_{\omega \in (X = x_i)} P(\{\omega\})}_{P(X = x_i)}$$

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{m} g(x_i) P(X = x_i)$$

Exemple :
On lance 2 fois une pièce et on gagne 1 € pour chaque pile ou perd ~~2~~ 2 € pour chaque face. On note G la va égale au gain. Et on pose $Y = G^2$
$E(Y)$?
la loi de G :

g_i	-4	-1	2
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$(G = -4) = F_1 \cap F_2$
$(G = -1) = (F_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2)$

avec F_i = "on obtient Face au i^e lancer"

Méthode 1 : Théorème de transfert $E(Y) = \sum_{g \in \{-4, -1, 2\}} g^2 P(G = g)$

$$E(Y) = 16 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \cancel{\frac{7}{4}}\ \frac{11}{2}$$

Méthode 2 : (Bovine) on calcule la loi de Y

y_i	16	1	4
$P(Y=y_i)$	1/4	1/2	1/4

d'où $E(Y) = \dots$

Exemple : X est une VA qui suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$. On pose $Y = X^2$. On veut calculer $E(Y)$?

D'après le th de transfert $E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{k^2}_{\text{valeurs de } Y} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On écrit $k^2 = k(k-1) + k$ d'où avec $q = 1-p$

$E(Y) = \sum_{k=0 \to 2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}_{E(X) = np}$

On a $k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1}$
$= n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ pour $k \geq 2$

Alors $E(Y) = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} + np$. On pose $j = k-2$, $n-k = n-2-j$

$= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j q^{n-2-j} + np$

$= n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} + np$ mais $p+q=1$

$$\boxed{E(Y) = np\,[(n-1)p + 1]}$$

Exercice : On place dans une urne n boules rouges ou vertes. On note X le nombre de boules vertes dans l'urne (inconnu). On tire une boule dans l'urne. Calculer la probabilité qu'elle soit verte en fonction de l'espérance de X. On a $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

Les $(X=k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forment un SCE. $P(V) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) \cdot P_{(X=k)}(V)$ (Proba totales)

Or $P_{(X=k)}(V) = \frac{k}{n}$ car si $X=k$ il y a k vertes dans l'urne.

alors $P(V) = \sum_{k \in X(\Omega)} \frac{k}{n} \cdot P(X=k) = \frac{1}{n} \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X=k) = \frac{1}{n} E(X)$

4.4 ~~5.4~~ Espérance et indépendance

Théorème 5.5. *Soit X et Y deux v.a.r. sur Ω.*
Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

5.5 Variance et écart-type

Définition 5.2. Soit X une v.a.r. finie. On appelle variance de X le réel $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$ et écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On a donc $V(X) = \displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$.

$\sigma(X)$ a la même unité

Remarque 5.1. On a $V(X) \geqslant 0$ donc $\sigma(X)$ existe.

Théorème 5.6 (Formule de Kœnig-Huygens).
On a pour une v.a.r. finie X :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Théorème 5.7. *Soit X une v.a. finie. On a pour tous réels a, b*

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

$\sigma(X)$ mesure la dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$.

Démonstration 5.6 X est une VAR

$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2X.E(X) + (E(X))^2\right)$

car X a des valeurs réelles et $E(X) \in \mathbb{R}$

Par linéarité de l'espérance : $E(-2\overset{Cte}{E(X)}.X) = -2E(X)\,E(X)$

$V(X) = E(X^2) - 2E(X).E(X) + (E(X))^2$

et on a utilisé $E(\text{constante réelle}) = \text{constante réelle}$.

ce qui donne $\underline{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$

Remarque $V(C^{te}) = 0$

Démonstration 5.7 on pose $Y = aX + b$ $E(Y) = aE(X) + b$

$V(Y) = E\left((Y - E(Y))^2\right) \overset{calcul}{=} E\left((aX - aE(X))^2\right)$

calculs $= E\left(a^2(X - E(X))^2\right) = a^2 E\left((X - E(X))^2\right)$ par linéarité

Soit $\boxed{V(Y) = a^2 V(X)}$

$X^* = aX + b$

Remarque : si X est une VAR, $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée VA centrée réduite associée à X.

$E(X^*) = 0$ $\sigma(X^*) = 1$

Exemple : X suit la loi

$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X=x_i)$	$1/6$	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/6$

puis $Y = X^2$ $\quad E(X), V(X), E(Y), V(Y)$.

$$E(X) = -\frac{2}{6} - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{1}{12} = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k)$$

$$E(X^2) = 4 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{4} + 0 + 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{144} = \frac{251}{144}$$

$$E(Y) = E(X^2) = \frac{7}{4}$$

$$E(Y^2) = E(X^4) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^4 P(X=k)$$

$$= \frac{16}{6} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{16}{6} = \frac{69}{12}$$

d'où $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 69/12 - 49/16 = 43/16$

5.6 Espérance et variance des lois usuelles finies

— Si X est une v.a. finie constante, $X = c$ avec $P(X = c) = 1$, alors

$$E(X) = c \text{ et } V(X) = 0.$$

— Si X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$: $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ alors

$$E(X) = \frac{1+n}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

— Si X suit la loi uniforme sur $\Omega : X(\omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, alors

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

— Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $\mathcal{B}(p)$, alors

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p).$$

trivial

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

— Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p : $\mathcal{B}(n,p)$, alors

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p).$$

pas trivial à apprendre

— loi de Poisson :

— loi géométrique :

Démonstration. $P(X=k) = \frac{1}{n}$ car n valeurs équiprobables

— Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

Alors $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{n} \Longrightarrow \boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$.

On calcule également $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

où on a utilisé $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $\sum_{k=2}^{n+2}\binom{k+1}{2} = \binom{n+3}{3} = \sum_{k=2}^{n+2}\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \sum_{k=2}^{n+2}\frac{k^2+3k+2}{2}$

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$.

On trouve

$$V(X) = \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} \Longrightarrow \boxed{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}.$$

— Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

X prend les valeurs 0 avec la probabilité $1-p$ et la valeur 1 avec p.

Alors $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p$ soit $\boxed{E(X) = p}$. On calcule également $E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$.

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2$ soit $\boxed{V(X) = p(1-p)}$.

— Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Alors $E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Mais on sait que $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ pour $k \geqslant 1$.

On obtient :

$$E(X)=0+\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

On reconnait une formule du binôme :

$E(X)=np\,(p+1-p)^{n-1}$ soit $\boxed{E(X)=np}$. (résultat facile à obtenir par linéarité)

On calcule maintenant $E(X(X-1))$ qui donnera $E(X^2)-E(X)$:

$E(X(X-1))=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Mais on sait que $k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ pour $k \geqslant 2$.

On obtient :

$$E(X(X-1))=0+0+\sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k}=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}.$$

On reconnait une formule du binôme :

$$E(X(X-1))=n(n-1)p^2\,(p+1-p)^{n-2}=n(n-1)p^2.$$

Et,

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=E(X(X-1))+E(X)-E(X)^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np\,((n-1)p+1-np).$$

D'où $\boxed{V(X)=np(1-p)}$.

$\square$

Exercice Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![p,q]\!])$, alors calculer $E(X)$ et $V(X)$? pour $p<q$ entiers.

On pose $Y = X-p+1$ et $n = q-p+1$

alors $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$

donc $E(Y) = \frac{n+1}{2}$ $\quad V(Y) = \frac{n^2-1}{12}$

et $E(X) = E(Y)+p-1 =$

$\underline{V(X) = V(Y+p-1) = V(Y) =}$

$(X=x_i)_{i\in K}$

$(X=x_i)_{i\in I\setminus K}$

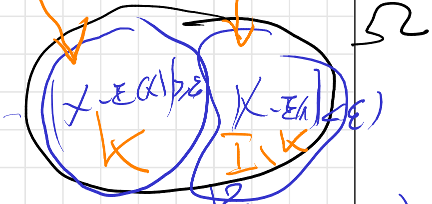
Démonstration de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev

On note $X(\Omega) = (x_i)_{i\in I}$ ensemble des valeurs prises par X.

On a $V(X) = E\left((X-E(X))^2\right) = \sum_{i\in I}(x_i-E(X))^2 P(X=x_i)$ théorème de transfert

on note $K=\{i\in I \mid |x_i - E(X)|\geq \varepsilon\}$ ensemble des indices des valeurs de X vérifiant l'inégalité. Alors

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon) = \sum_{i\in K}P(X=x_i)$$



On trouve

$$V(X) = \sum_{i\in I\setminus K}\underbrace{(x_i-E(X))^2}_{\geq 0}\underbrace{P(X=x_i)}_{\geq 0} + \sum_{i\in K}(x_i-E(X))^2P(X=x_i)$$

On a alors

$$V(X)\geq \sum_{i\in K}(x_i-E(X))^2P(X=x_i)$$

mais pour $i\in K$ $\quad |x_i-E(X)|\geq\varepsilon \Rightarrow (x_i-E(X))^2\geq\varepsilon^2$

d'où $V(X)\geq\sum_{i\in K}\varepsilon^2 P(X=x_i) = \varepsilon^2\cdot\sum_{i\in K}P(X=x_i)$

mais $P(|X-E(X)|\geq\varepsilon) = \sum_{i\in K} P(X=x_i)$

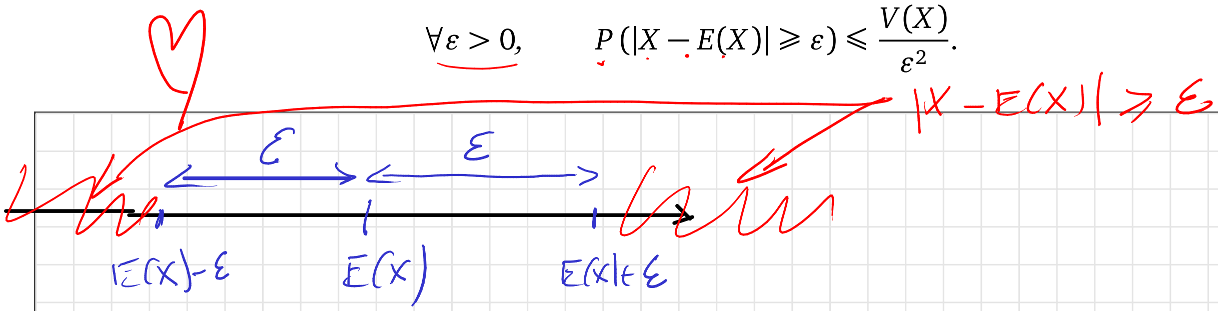
d'où

$$\boxed{\frac{V(X)}{\varepsilon^2}\geq P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)}$$

5.7 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 5.8. *Si X est une v.a.* réelle *définie sur un espace probabilisé* (Ω, P) *d'espérance* $E(X)$ *et de variance* $V(X)$*, alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$



Exemple : On lance un dé à 6 faces équilibré n fois. On compte le nombre d'As (= $\boxed{\cdot}$) obtenus. S est la VA égale au nombre d'As obtenus.

On note X égale à la fréquence d'apparition de l'As au cours des n lancers : $X = \frac{S}{n}$

On sait que $E(X) = \frac{1}{6}$ car $E(X) = \frac{1}{n}E(S)$ et S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$ car S compte le nombre d'apparitions de l'As quand on répète n fois la même expérience de manière indépendante et qui n'a que deux résultats : $E(S) = np = \frac{n}{6}$

⚠ $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$

$X(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \mid k \in [\![0, n]\!] \right\}$

Si $n = 3000$, et si on obtient $S = 400$ as en 3000 lancers que doit on en penser ? $X = \frac{S}{n} = \frac{4}{30} \simeq 0,1333$ $\quad E(X) = \frac{1}{6} \simeq 0,1666$

est-ce probable ?

Suite : on veut le nombre de lancers n pour être sûr à 98 % que la fréquence d'apparition de l'as ne s'écarte pas de $\frac{1}{6}$ de plus de 0,05. On veut

$$P(|X - E(X)| < 0,05) \geqslant 98\,\% = 0,98$$

$\Leftrightarrow 1 - P(\underline{|X - E(X)| \geq 0{,}05}) \geq 98\%$

car $\overline{(|X - E(X)| < 0{,}05)} = (|X - E(X)| \geq 0{,}05)$

$\Leftrightarrow 2\% = 1 - 98\% \geq P(|X - E(X)| \geq 0{,}05)$

mais $E(X) = \frac{1}{6}$ $V(X) = V\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(S) = \frac{1}{n^2} n p(1-p)$

d'où $V(X) = \frac{5}{36n}$ avec $p = \frac{1}{6}$, $1-p = \frac{5}{6}$

L'inégalité de Bienaymé Tchebychev donne :

$$P(|X - E(X)| \geq 0{,}05) \leq \frac{V(X)}{(0{,}05)^2} \leq 2\%$$

on cherche n tel que

$$\frac{V(X)}{(0{,}05)^2} \leq 0{,}02 \Leftrightarrow \frac{5}{36n(0{,}05)^2} \leq 0{,}02$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{36(0{,}05)^2(0{,}02)} \leq n \Leftrightarrow 2777{,}7 \leq n$$

Pour $n \geq 2778$, la probabilité d'avoir $\left|X - \frac{1}{6}\right| \leq 0{,}05$ est supérieure à 98%.