Mathématique - Devoir Maison n°12

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'étudier l'efficacité de la méthode de Simpson pour le calcul approché d'intégrales. Lorsque f est une fonction continue sur le segment $[-1,1]$, on définit les réels :

$$I(f)=\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S(f)=\frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3}$$

1. Déterminer $I(f)$ et $S(f)$ quand :
   (a) f est une fonction continue et impaire sur $[-1,+1]$.
   (b) $f(t)=t^4$. (c) $f(t)=\dfrac{1}{t+2}$ (d) $f(t)=\dfrac{1}{t^2+2t+3}$.
2. Vérifier que $I(f)=S(f)$ si $f(x)=1$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$ ou $f(x)=x^3$ (on pourra utiliser certains des calculs précédents pour abréger dans certains cas).
   En déduire que l'égalité reste vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

On revient au cas général et on suppose désormais que f est de classe C^4 sur $[-1,1]$.

3. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_f\in\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_f(1)=f(1)$, $P_f(0)=f(0)$, $P_f(-1)=f(-1)$ et $P_f'(0)=f'(0)$.
   Exprimer les coefficients de P_f en fonction de $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$ et $f'(0)$.
4. On considère un réel $\alpha\in]0,1[$, et on pose $h(x)=f(x)-P_f(x)-kx^2(x^2-1)$, où k est une constante réelle fixée telle que $h(\alpha)=0$.
   (a) Vérifier que $h'(0)=0$.
   (b) Pour quelles valeurs de x peut-on affirmer que $h(x)=0$?
   (c) Montrer que h' s'annule en quatre points distincts de l'intervalle $[-1,1]$.
   (d) En déduire que $h^{(4)}$ s'annule en un certain point $\beta\in[-1,1]$,et prouver que $k=\dfrac{f^{(4)}(\beta)}{4!}$.
   (e) Montrer que $\left|f(\alpha)-P_f(\alpha)\right|\leqslant\dfrac{M_4}{4!}\alpha^2(1-\alpha^2)$, où M_4 est la valeur maximale prise par $|f^{(4)}|$ sur $[-1,1]$.
5. En déduire que $\forall t\in[0,1]$, $\left|f(t)-P_f(t)\right|\leqslant\dfrac{M_4}{4!}t^2(1-t^2)$. On admet que le résultat reste vrai sur $[-1,0]$.
6. En intégrant le résultat précédent, prouver que $|I(f)-S(f)|\leqslant\dfrac{M_4}{90}$
7. Comparer $|I(f)-S(f)|$ avec $\dfrac{M_4}{90}$ dans le cas où $f(t)=t^4$. En déduire que la majoration précédente ne peut pas être améliorée.

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$ on pose $u_0=(1,-1,1)$ et on donne les sous-ensembles :

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y-z=0\}\ \text{et}\ G=\text{Vect}\,(u_0)$$

1. (a) Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.
   (c) Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, calculer l'expression de $p(x,y,z)$ où p est la projection de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à la direction de F.
2. Soit l'application $g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3\,;\,(x,y,z)\longmapsto(-6x-2y+4z,-3x-y+2z,-9x-3y+6z)$
   (a) Montrer que g est une application linéaire.
   (b) Déterminer Ker(g) le noyau de g. g est-il un automorphisme ?
   (c) Déterminer Im(g) l'image de g.
   (d) Vérifier que Im$(g)\subset F$ et $G\subset$ Ker (g). A-t-on les égalités ?
   (e) En déduire l'expression de $p\circ g$ et $g\circ p$.
   (f) Déterminer $g\circ g=g^2$ en fonction de g. En déduire, pour $k\in\mathbb{N}$, l'expression de g^k en fonction de k et g.
3. On étudie l'ensemble $\mathscr{H}$ des applications linéaires sur $\mathbb{R}^3$ f qui s'écrivent $f=ap+bq$ où a et b sont des réels :

$$\mathscr{H}=\{f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)\ /\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ \text{t.q.}\ f=a\,p+b\,g\}$$

   (a) Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Soit $(f_1,f_2)\in\mathscr{H}^2$, déterminer $f_1\circ f_2$ en fonction de p et g .
   (c) Soit $f\in\mathscr{H}$, $f=ap+bg$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout entier naturel n, déterminer f^n en fonction de n, a, b, g et p.