# Chapitre 15 - TD - 23 mars 2020

**Exercice 18 :**

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P' - (X-2)P \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \psi(P) = P - (X-2)P' \end{array}$.

Montrer que $\varphi$ et $\psi$ sont linéaires et déterminer leurs noyau et image. Étudier l'application $\varphi \circ \psi$ (rang, noyau, image).

**Exercice 19 :**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $f$ l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer le noyau et l'image de $f$.

**Exercice 9 :**

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que $F$ et $G$ sont deux sev supplémentaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $F$ et une base de $G$.

**Exercice 13 :**

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on pose $\overrightarrow{u}_1 = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{u}_3 = (1,1,1,0)$ et $\overrightarrow{u}_4 = (1,1,1,1)$. Puis on définit $F = \text{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ et $G = \text{Vect}(\overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$.

Déterminer des équations de $F$ et $G$. Montrer que $F$ et $G$ sont des sev supplémentaires de $E$. Déterminer l'expression analytique de la projection vectorielle $p$ sur $F$ parallèlement à $G$.

**Exercice 10 :**

Soit $E$ l'espace des fonctions réelles à valeurs réelles. Soit $a,b$ deux réels. On définit :

$$F = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2a - x)\} \text{ et } G = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2b - f(2a - x)\}$$

Montrer que $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si $b = 0$. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

## Exercice 21 :

Soit $E$ un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2id_E = 0$.

1. Montrer que $u$ est un automorphisme et calculer $u^{-1}$.
2. Montrer que $\forall x \in E, u(x) - 2x \in \text{Ker}(u - id_E)$ et $u(x) - x \in \text{Ker}(u - 2id_E)$.
3. Montrer que $\text{Ker}(u - id_E)$ et $\text{Ker}(u - 2id_E)$ sont supplémentaires dans $E$.

**Exercice xx :**

**Exercice xx :**