Mathématique - Devoir Maison n°17

Exercice 1

On dispose d'une urne $\mathscr{U}$ contenant initialement deux boules blanches et une boule noire. Par ailleurs, on dispose également d'une réserve de boules blanches et d'une réserve de boules noires, toutes deux supposées inépuisables.

On considère des tirages successifs d'une boule dans l'urne $\mathscr{U}$. Le nombre de tirages n'est pas *a priori* fixé. Après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne $\mathscr{U}$ avec, en plus, une boule prélevée dans la réserve de la même couleur que la boule tirée. Par exemple, si on tire une boule noire, alors on remettra dans l'urne deux boules noires.

Soit n un entier naturel non nul. On notera les événements suivants :

B_n "obtenir une boule blanche au n-ième tirage" et N_n "obtenir une boule noire au n-ième tirage".

1. (a) Établir la formule, pour tout n entier naturel : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k+2}{2}=\binom{n+3}{3}$

   (b) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)$

2. (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage ?

   (b) Déterminer $P(B_1\cap B_2)$ et $P(N_1\cap B_2)$. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage ?

   (c) Sachant que le second tirage a donné une boule blanche, quelle est la probabilité que le premier ait lui aussi donné une boule blanche ?

3. *Probabilité d'obtenir au moins une boule noire en n tirages pour $n\in\mathbb{N}^*$.*

   (a) On note A_k l'événement "une première boule noire sort au k-ième tirage". Calculer $P(A_k)$.

   (b) En déduire la probabilité de l'événement M_n "obtenir au moins une boule noire lors des n premiers tirages" (simplifier la somme obtenue). Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

4. *Probabilité d'obtenir k boules blanches lors des n premiers tirages pour $n\in\mathbb{N}^*$.*

   Dans les questions (a) et (b), on ne cherchera pas à simplifier les quotients obtenus. k désigne un entier naturel tel que $0\leq k\leq n$.

   (a) Quelle est la probabilité qu'on tire successivement k boules blanches puis $n-k$ boules noires ?

   (b) Déterminer la probabilité qu'au cours des n premiers tirages on obtienne (exactement) k boules blanches dans un ordre que l'on a préalablement choisi.

   (c) En déduire que la probabilité de l'événement C_k "obtenir k boules blanches lors des n premiers tirages" est donnée par : $P(C_k)=\dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$

5. *Probabilité d'obtenir une boule blanche au $(n+1)$-ième tirage pour $n\in\mathbb{N}^*$.*

   (a) Montrer que les événements C_k (pour $0\leq k\leq n$) forment un système complet.

   (b) En déduire la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(n+1)$-ième tirage.

Exercice 2 (pour le jeudi 11 juin)

Question préliminaire : Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. En considérant un résultat connu sur une loi usuelle, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ (on ne demande pas de calcul).

On dispose de deux pièces : la pièce A qui est équilibrée et la pièce B telle que la probabilité d'obtenir *"pile"* à chaque lancer est $\dfrac{2}{3}$.

On commence par lancer un dé non truqué : si on obtient 1 ou 2, on décide de jouer uniquement avec la pièce A ; si on obtient 3, 4, 5 ou 6, on décide de jouer uniquement avec la pièce B.

On effectue alors une série de n lancers avec la pièce choisie.

1. Calculer la probabilité d'obtenir *"pile"* au premier lancer.
2. Calculer la probabilité de jouer avec la pièce A sachant que l'on a obtenu *"pile"* au premier lancer.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de *"pile"* obtenus lors des n lancers.

   (a) Déterminer la loi de X sachant que l'on joue avec la pièce A.

   (b) Déterminer la loi de X.

   (c) Calculer la probabilité que la pièce choisie soit A sachant que l'on a obtenu aucun pile au cours des n lancers.

   (d) Calculer $E(X)$.