

**Chapitre 15 - TD - 23 mars 2020****Exercice 18 :**

Soit  $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P' - (X-2)P \end{array}$  et  $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \psi(P) = P - (X-2)P' \end{array}$

Montrer que  $\varphi$  et  $\psi$  sont linéaires et déterminer leurs noyau et image. Étudier l'application  $\varphi \circ \psi$  (rang, noyau, image).



$$\psi(P) = P - (X-2)P'$$

\* Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$   $P - (X-2)P'$  est un polynôme  
 on a  $\deg((X-2)P') = \deg(X-2) + \deg(P') \leq \deg(P) \leq 2$   
 alors par somme  $\deg P - (X-2)P' \leq 2$  donc  $\psi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ .

\* Soit  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  et on calcule

$$\psi(\alpha P_1 + P_2) = \alpha P_1 + P_2 - (X-2)(\alpha P_1 + P_2)'$$

la dérivation est linéaire donc

$$\begin{aligned} \psi(\alpha P_1 + P_2) &= \alpha(P_1 - (X-2)P_1') + P_2 - (X-2)P_2' \\ &= \alpha\psi(P_1) + \psi(P_2) \end{aligned}$$

donc  $\psi$  est linéaire.

\* Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$   $P \in \ker \psi \Leftrightarrow \psi(P) = 0$

$$\Leftrightarrow P - (X-2)P' = 0 \Leftrightarrow P = (X-2)P'$$

$$\text{on pose } P = aX^2 + bX + c \Leftrightarrow aX^2 + bX + c - (X-2)(2aX + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow -aX^2 + (b - b + 4a) + c + 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 0 \\ 4a = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{équations} \\ \text{de } \ker \psi \end{array}$$

on résout ces équations: on paramétrise avec  $b = \alpha \in \mathbb{R}$

$$(a, b, c) = \alpha(0, 1, -2) \Leftrightarrow P = \alpha(X-2)$$

on en déduit  $\ker \psi = \text{Vect}((X-2))$  droite engendrée par  $X-2$ .

\* Pour  $\text{Im } \psi$ , on voit que  $\psi(aX^2 + bX + c) = -aX^2 + 4aX + 2b + c$   
 $\text{Im } \psi = \{ -aX^2 + 4aX + 2b + c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \}$

$$\text{mais } \psi(aX^2 + bX + c) = \underline{a(-X^2 + 4X)} + \underline{(2b + c)1}$$

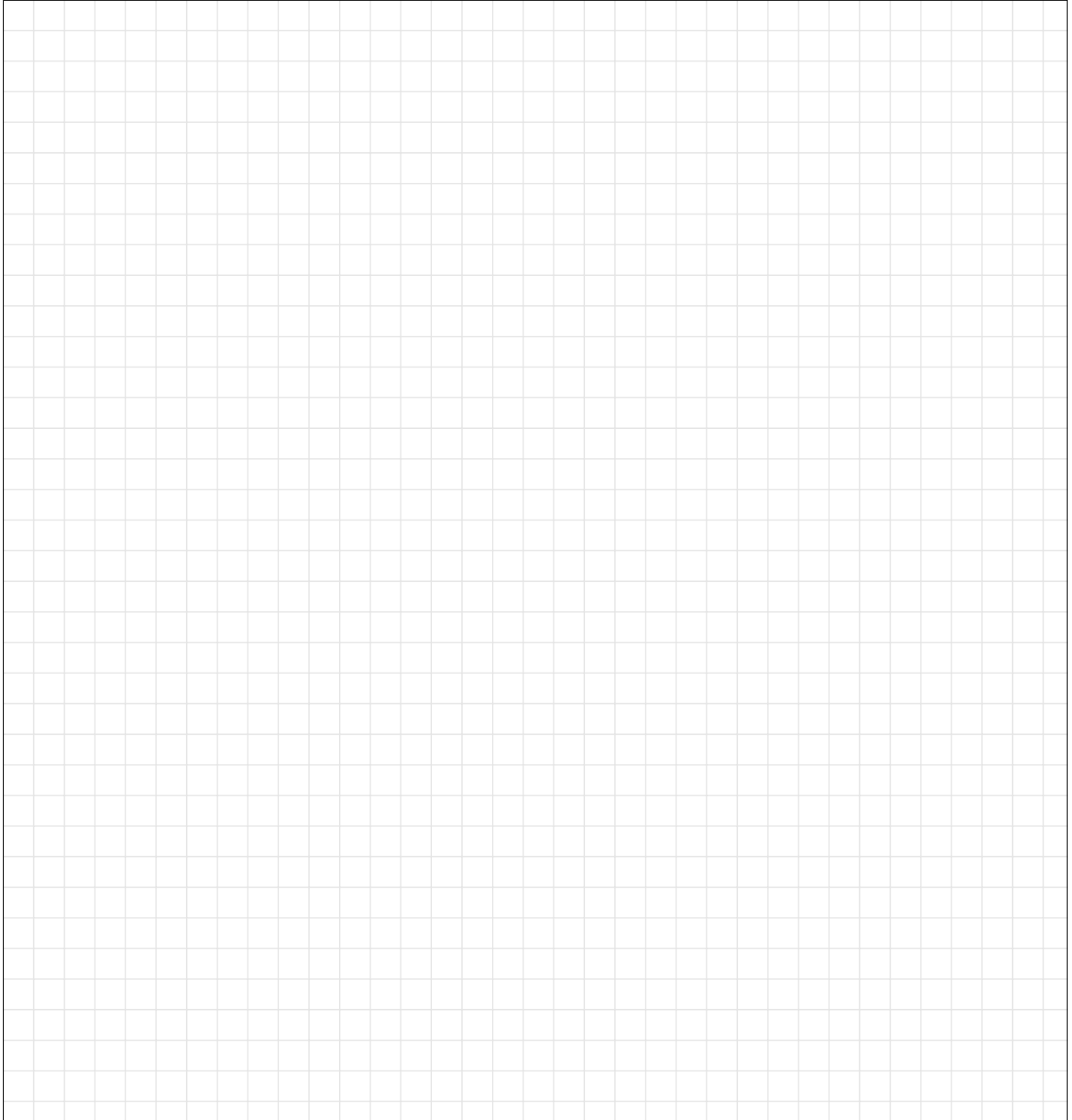
on en déduit

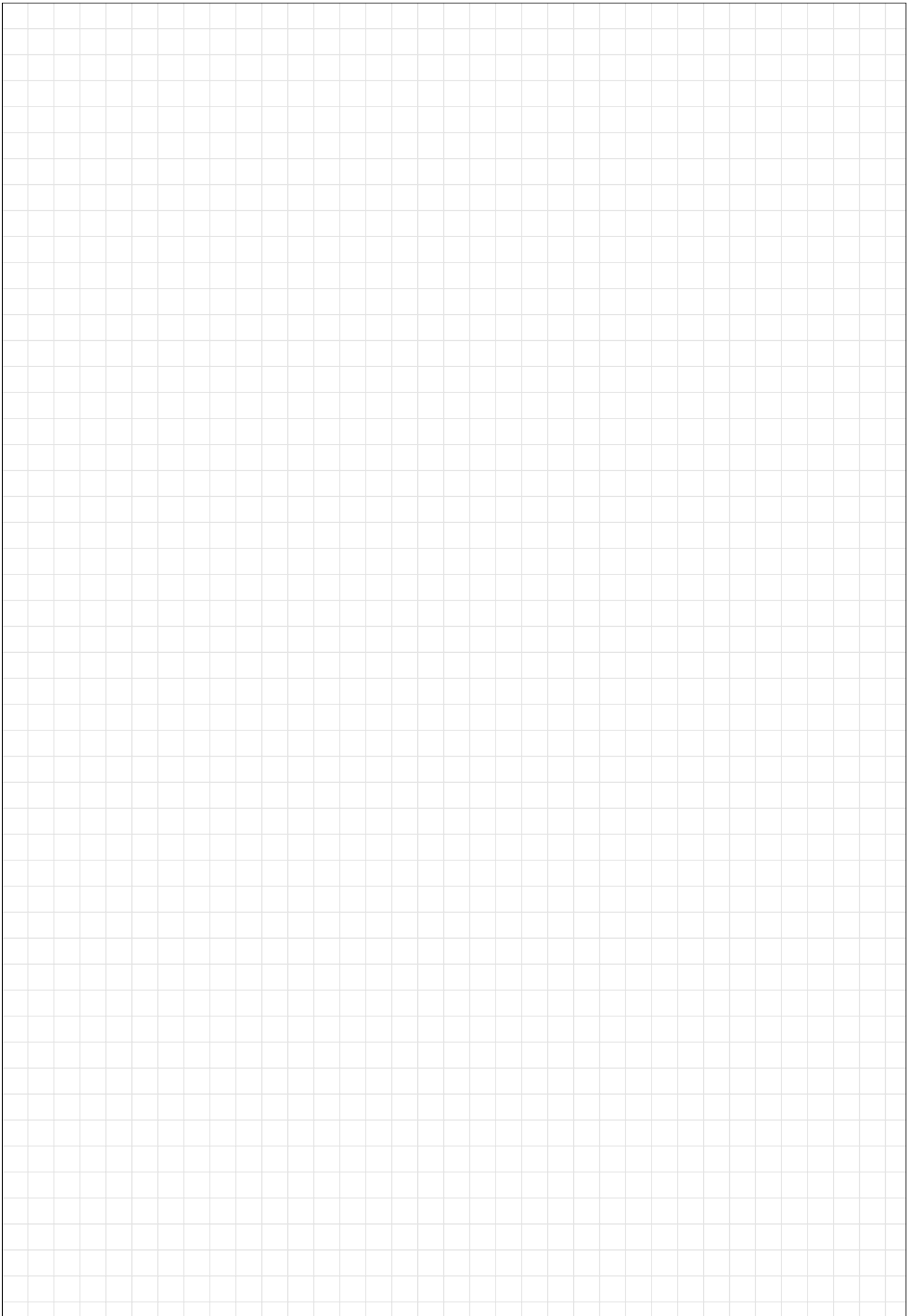
$$\underline{\text{Im } \psi = \text{Vect}((-X^2 + 4X), 1)}$$

les deux polynômes  $-X^2 + 4X$  et  $1$  ne sont pas colinéaires  
 donc  $\text{Im } \psi$  est un plan

**Exercice 19 :**

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'application de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = AM$ . Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

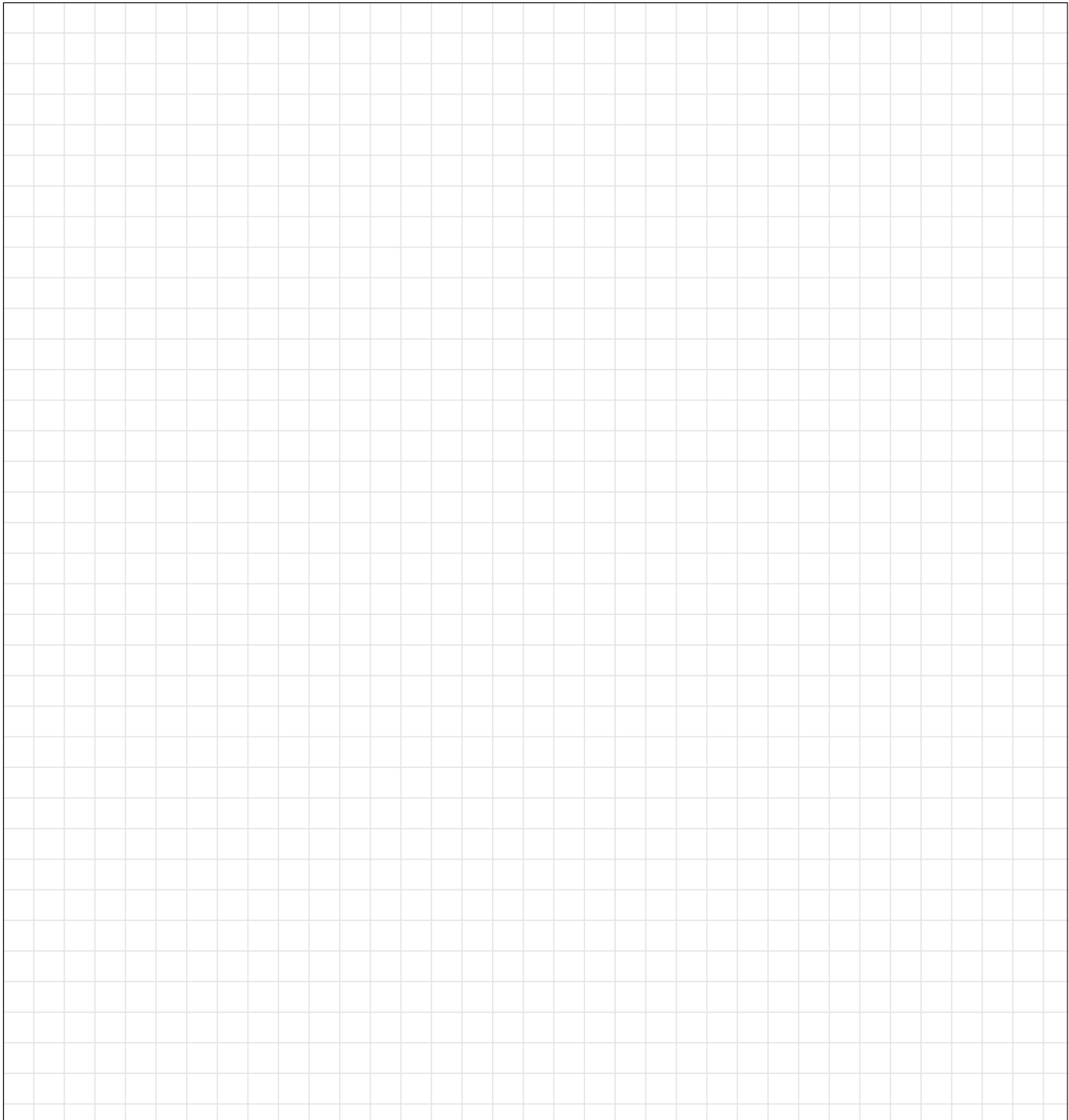


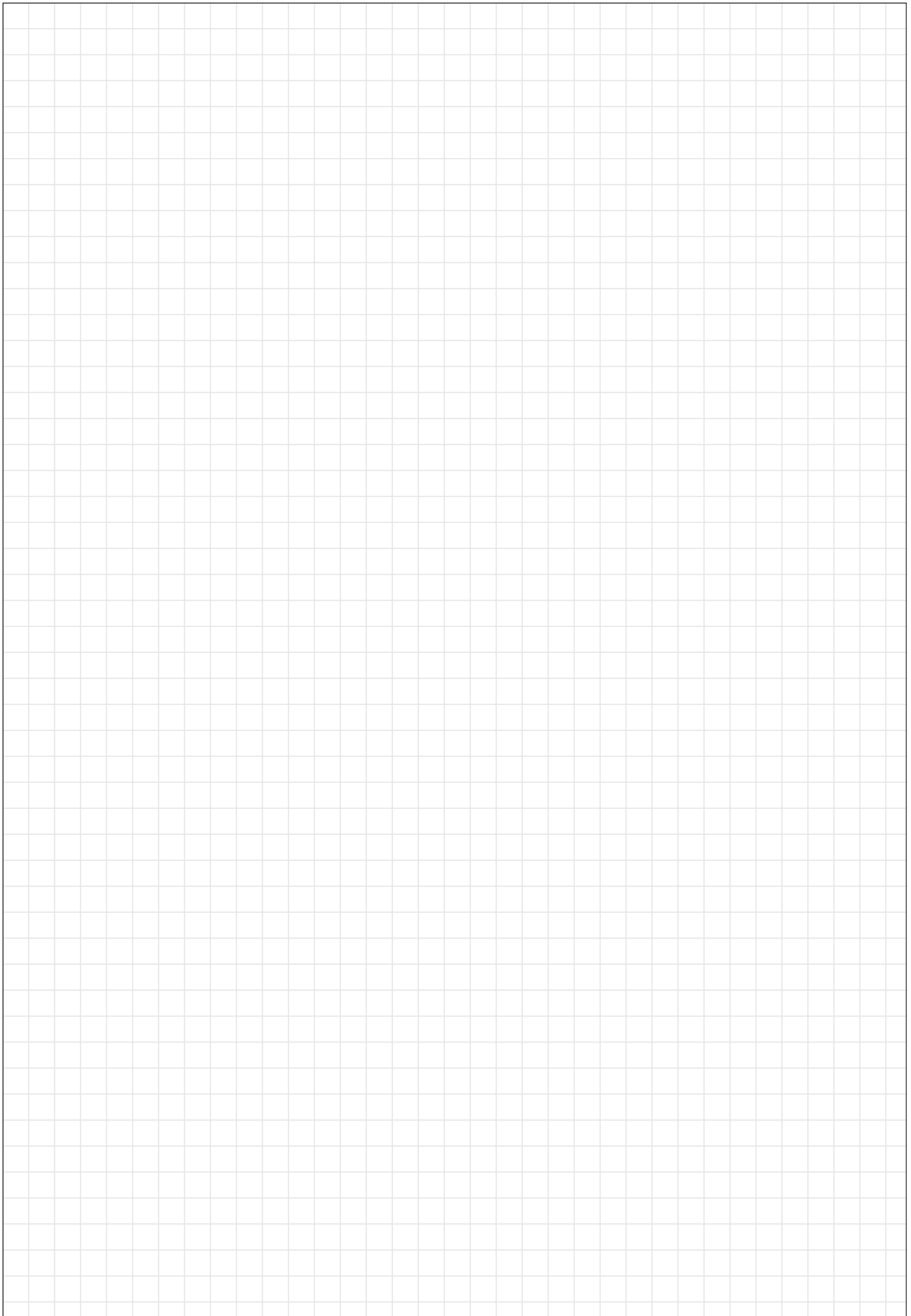


**Exercice 9 :**

Soit  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \middle| (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$  et  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \middle| (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sev supplémentaires de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Déterminer une base de  $F$  et une base de  $G$ .

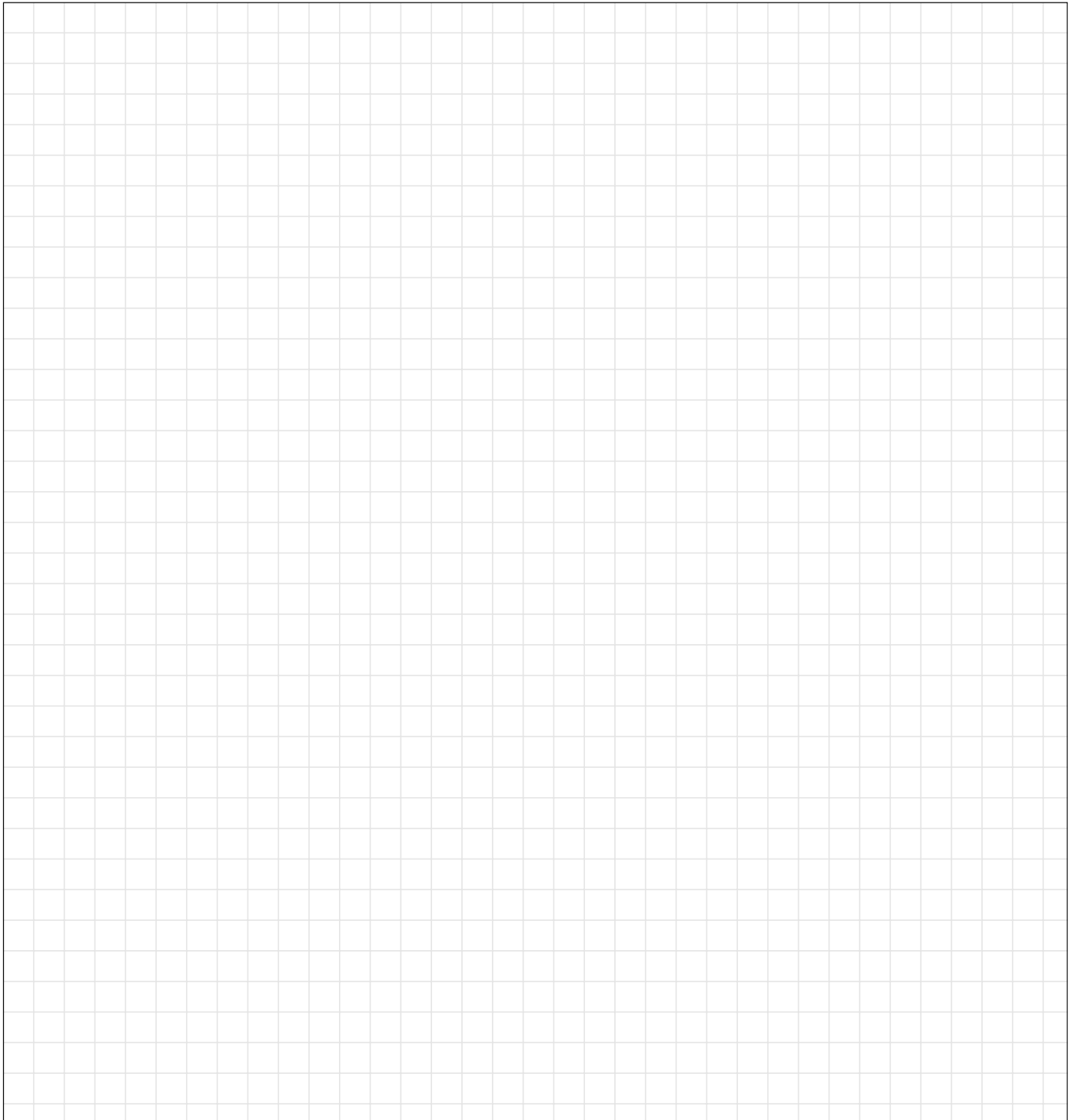


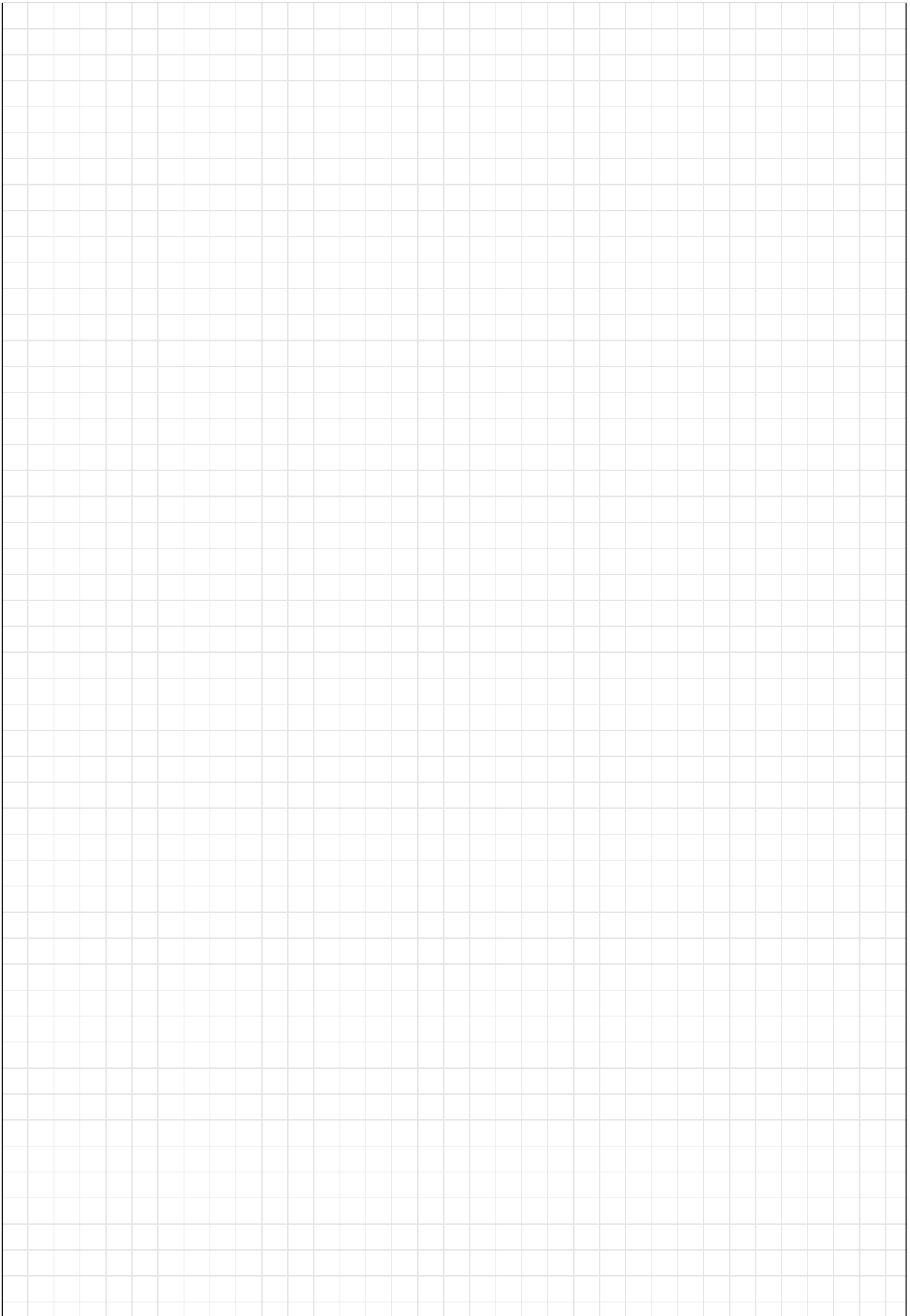


**Exercice 13 :**

Dans l'espace  $E = \mathbb{R}^4$ , on pose  $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, 1, 1, 0)$  et  $\vec{u}_4 = (1, 1, 1, 1)$ . Puis on définit  $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  et  $G = \text{Vect}(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$ .

Déterminer des équations de  $F$  et  $G$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sev supplémentaires de  $E$ .  
Déterminer l'expression analytique de la projection vectorielle  $p$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ .





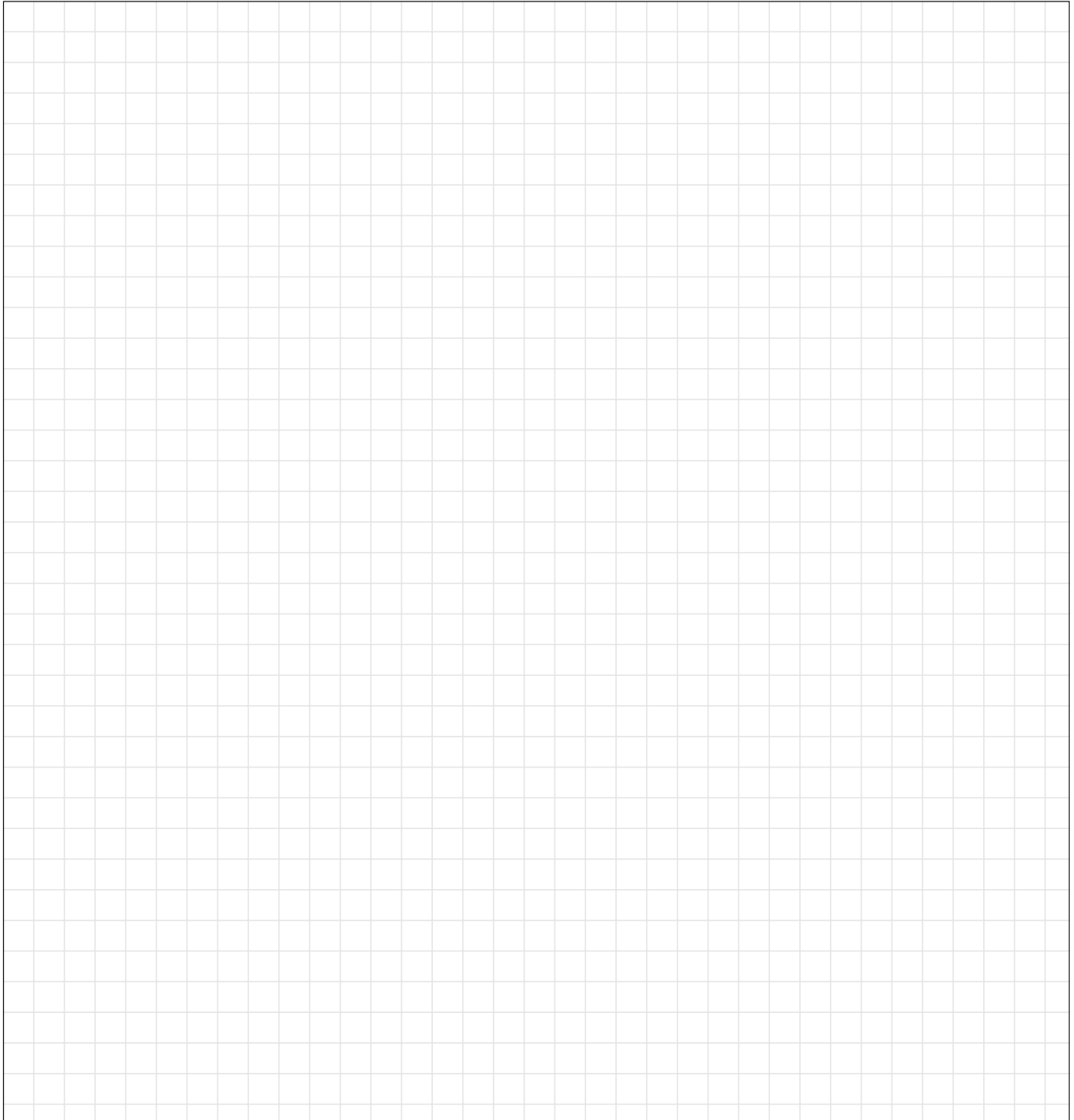


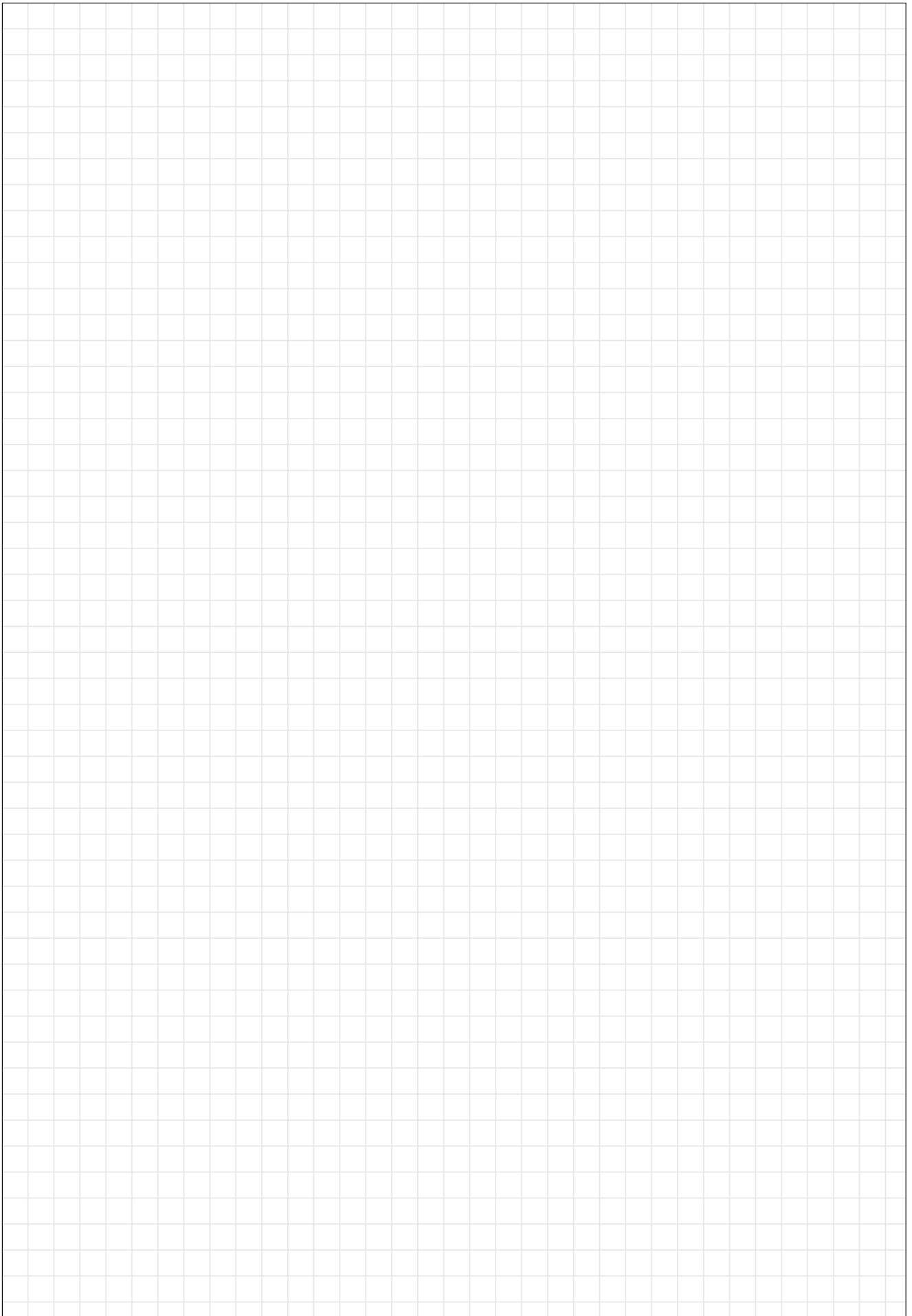
**Exercice 10 :**

Soit  $E$  l'espace des fonctions réelles à valeurs réelles. Soit  $a, b$  deux réels. On définit :

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2a - x)\} \text{ et } G = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2b - f(2a - x)\}$$

Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $b = 0$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

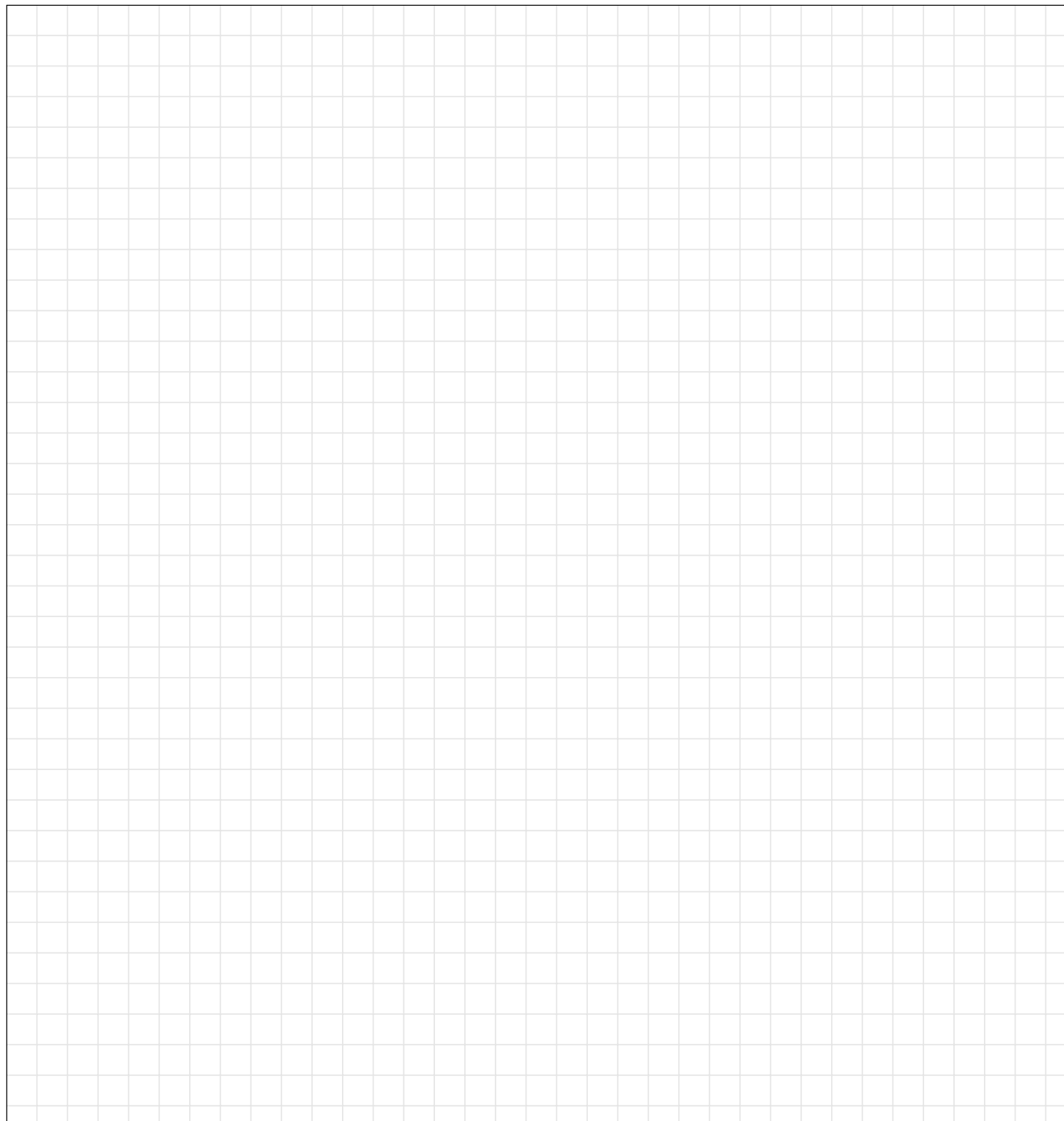


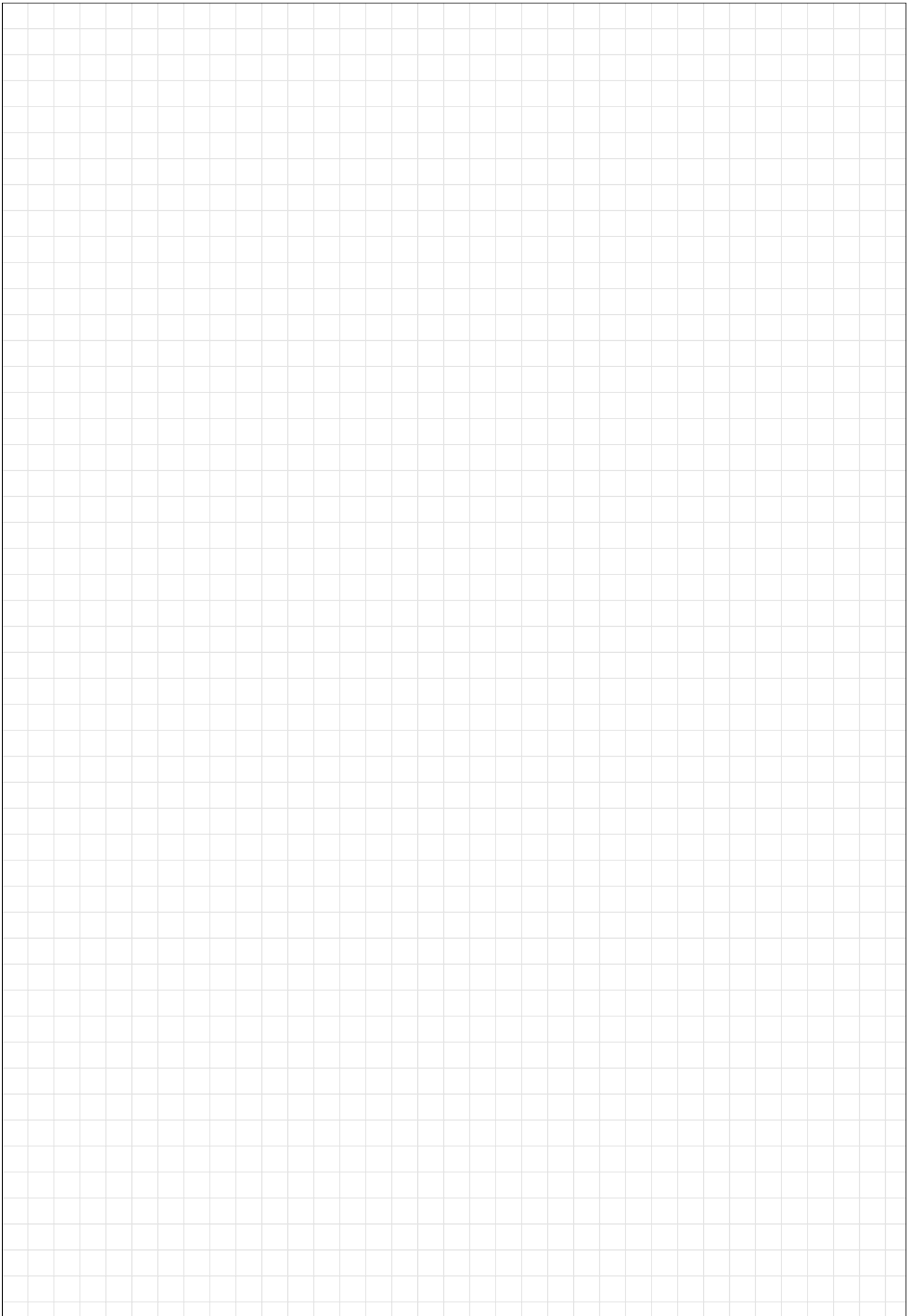


**Exercice 21 :**

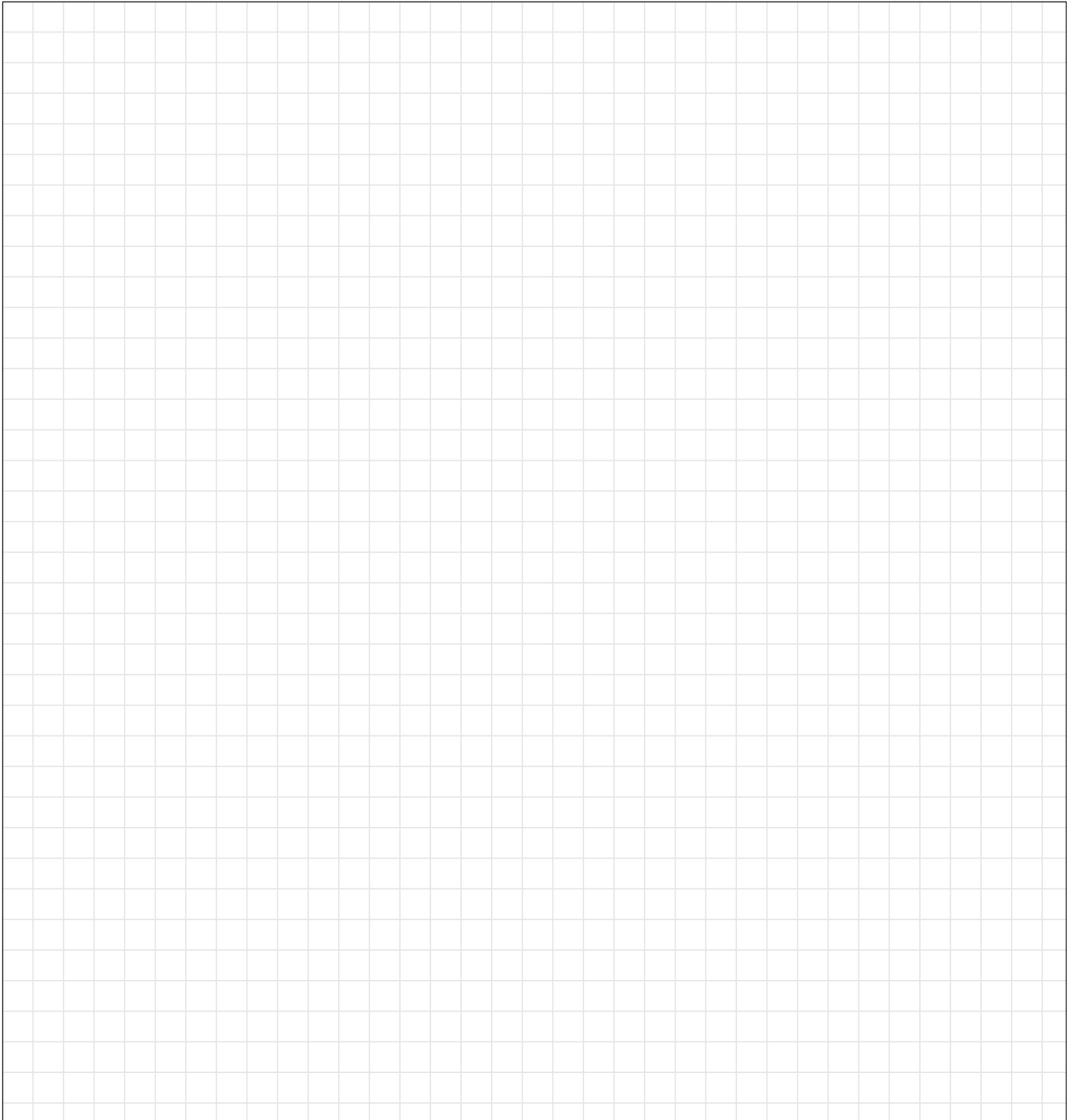
Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 - 3u + 2id_E = 0$ .

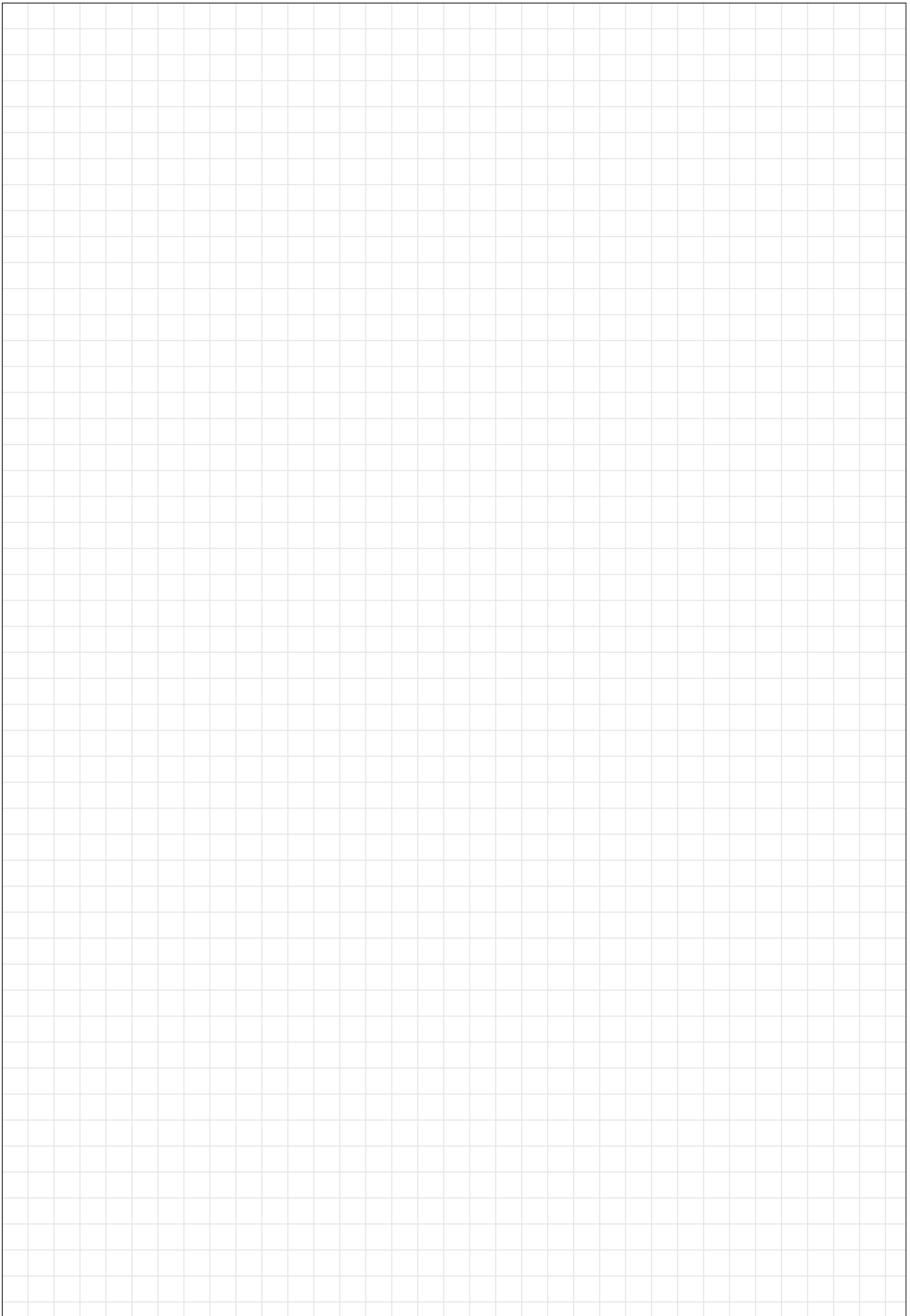
1. Montrer que  $u$  est un automorphisme et calculer  $u^{-1}$ .
2. Montrer que  $\forall x \in E, u(x) - 2x \in \text{Ker}(u - id_E)$  et  $u(x) - x \in \text{Ker}(u - 2id_E)$ .
3. Montrer que  $\text{Ker}(u - id_E)$  et  $\text{Ker}(u - 2id_E)$  sont supplémentaires dans  $E$ .





**Exercice xx :**





**Exercice xx :**

