Chapitre 16 - Analyse asymptotique

1 Comparaison des suites

1.1 Relations de comparaison

Uniquement pour les suites réelles : on se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels. On dit que :

- (u_n) est dominée par (v_n) si à partir du rang N_0 $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.
- (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
- (u_n) est équivalente à (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Théorème 1.1. *Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels.*

(u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 telle que $u_n = v_n.\varepsilon_n$.

1.2 Propriétés des relations de comparaison

Proposition 1.2. *Soit* $(u_n), (v_n), (w_n)$ *des suites réelles.*
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *alors* $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ *alors* $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$.
Si u_n *et* v_n *ne s'annulent pas, alors* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *alors* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(u_n)$.

1.3 Suites de référence

Proposition 1.3. *Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, on a*

$$\ln^{\beta}(n) \underset{+\infty}{=} o(n^{\alpha}) \text{ et } n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma n}) \qquad \text{et pour } q > 1, \text{ on a } n^{\alpha} = o(q^{n}).$$

1.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 1.4. *Soit* $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ *des suites réelles.*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ *alors* $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n x_n$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ *et si* w_n *et* x_n *ne s'annulent pas alors* $\dfrac{u_n}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{x_n}$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et si* p *est un entier* $p \in \mathbb{N}$ *alors* $u_n^p \underset{+\infty}{\sim} v_n^p$.

1.5 Relations de comparaison et limites

Théorème 1.5. *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles telles que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*, on a* $\quad u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$
En particulier, (u_n) *est convergente si et seulement si* (v_n) *est convergente.*

Proposition 1.6. *Soit* (u_n)*et* (v_n) *deux suites réelles.*

- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* (v_n) *converge, alors* (u_n) *converge vers* 0.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* (u_n) *diverge vers* $+\infty$*, alors* (v_n) *diverge.*
- *Si* $u_n \sim v_n$*, alors à partir d'un certain rang,* u_n *et* v_n *sont de même signe.*

2 Relations de comparaison appliquées aux fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ élément ou extrémité de I.

2.1 Fonction dominée par une autre

Définition 2.1. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} O(g)$

2.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2.2. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a.

On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou bien $f(x) = g(x).\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

2.3 Fonctions équivalentes

Définition 2.3. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a. On note $f \underset{a}{\sim} g$

Proposition 2.1. *Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.*

$$\text{Si } f'(a) \neq 0, \text{ alors } f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

Proposition 2.2. *Soit f et g définies sur I, ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$. On a :*

$$f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g).$$

2.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 2.3. *Si $f, g, h, f_1, g_1, f_2, g_2$ sont des fonctions définies au voisinage de a, on a :*

- $f \underset{a}{\sim} g \Longrightarrow g \underset{a}{\sim} f$
- $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h \Longrightarrow f \underset{a}{\sim} h$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Longrightarrow f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Longrightarrow \dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$

2.5 Utilisation des équivalents

Proposition 2.4. *Étant donnés deux fonctions f et g équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Si g a une limite finie ou infinie en a alors f aussi et $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g$.

Proposition 2.5. *Étant donnés deux fonctions f et g définies sur I et équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Si g est positive sur I alors f est positive au voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur I, alors f ne s'annule pas au voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, alors la restriction de f à $I \setminus \{a\}$ ne s'annule pas au voisinage de a.

3 Développements limités

3.1 Définition

Définition 3.1. On dit qu'une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ élément ou extrémité de I si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(a+h) = P(h) + o(h^n)$ au voisinage de 0 (pour h).

n = ordre

C'est à dire $$f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_{n-1}h^{n-1} + a_n h^n + o(h^n)$$

ou $$f(x) \underset{a}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_n(x-a)^n}_{\text{polynôme en } \cancel{x}\ X-a} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{reste}}$$

On le note $DL_n(a)$ de f.

Exemple $g(x) = 1 + x^2 + x^3 \sin(x)$.

on a $\dfrac{x^3 \sin(x)}{x^2} = x \sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $x^3 \sin(x) \underset{0}{=} o(x^2)$

alors on a $g(x) \underset{0}{=} 1 + (x-0)^2 + o((x-0)^2)$ ($a \to 0$)

$g(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + o(x^2)$ $DL_2(0)$: à l'ordre 2 en 0 de g

autre écriture $g(x) = 1 + x^2 + x^2 \varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

On a également

$g(x) = 1 + (x^2 + x^2\varepsilon_1(x)) = 1 + o(x)$ car $x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \underset{0}{=} o(x)$

$g(x) \underset{0}{=} 1 + o(x)$ est un DL à l'ordre 1 de g

Autre idée $\sin(x) \underset{0}{=} \sin(0) + \sin'(0).(x-0) + o(x-0)$

car sin est dérivable en 0 (c'est un DL_1)

soit $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$ et $g(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + x^3(x + o(x))$

il vient $g(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + x^4 + x^3 o(x)$

⚠ $x^3 . o(x)$ s'écrit $x^3 o(x) = x^3 x \varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

car $o(x) = x\,\varepsilon_2(x)$ donc $x^3 o(x) = x^4 \varepsilon_2(x) = o(x^4)$

♡ Règle : $f(x) . o(h(x)) \underset{0}{=} o(f(x) . h(x))$ $f(x-a)\, o(h(x-a)) \underset{a}{=} o(f(x-a)\, h(x-a))$

Alors $g(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$ on a DL_4 en 0 de g

$g(x) = 1 + x^2 + x^3 \sin(x)$ au voisinage de 1

On pose $x = 1 + h$ $\quad x \to 1 \iff h \to 0 \quad h = x - 1$

ce qui donne $g(x) = 1 + (1 + 2h + h^2) + (1 + 3h + 3h^2 + h^3)\sin(1+h)$

nouvelle fonction $f(h) = g(1+h) =$

$=$

On utilise $\sin(1+h) = \sin(1)\cos(h) + \cos(1)\sin(h)$

$\sin(h) \underset{0}{\sim} h \iff \sin(h) \underset{0}{=} h + o(h)$

$\cos(h) \underset{0}{\sim} 1 \iff \cos(h) \underset{0}{=} 1 + o(1)$ fonction constante $= 1$

$\triangle\!!$ $o(1) =$ qui tend vers 0

~~On termine le calcul $\sin(1+h) = \sin(1) + o(1) + \cos(1)(h + o(h))$~~

~~$g(1+h) = 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1) + \cos(1))h$~~

~~$+ (1 + 3\sin(1) +$~~

on obtient $\sin(1+h) = \sin(1)(1 + o(1)) + \underbrace{\cos(1)(h + o(h))}_{h \to 0}$

$= \underbrace{\sin(1)}_{\text{cte}} + \underbrace{\underbrace{\sin(1)}_{\text{cte}}\, o(1) \to 0 + \underbrace{o(1)}_{\to 0}}$

$\sin(1+h) \underset{0}{=} \sin(1) + o(1)$ $\to 0$

alors

$g(1+h) \underset{h \to 0}{=} 2 + 2h + h^2 + (1 + 3h + 3h^2 + h^3)(\sin(1) + o(1))$

$= 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1))h + o(1)$

$+ h^2 + 3h.o(1) + (3h^2 + h^3)(\sin(1) + o(1))$

on a $(2 + 3\sin(1))h \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ donc $(2 + 3\sin(1))h \underset{0}{=} o(1)$

$h^2 + 3h\,o(1) + (3h^2 + h^3)(\sin(1) + o(1)) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$g(1+h) \underset{0}{=} 2 + \sin(1) + o(1)$

$g(x) \underset{1}{=} 2 + \sin(1) + o(1)$ DL à l'ordre 0 en 1 deg

3.2 Exemple fondamental

Proposition 3.1. *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \dfrac{1}{1-u} \end{array}$ *admet des développements limités à l'ordre* n*, pour tout entier* n*, au voisinage de* 0 *:*

$$\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} \underbrace{1+u+u^2+\cdots+u^n}+o(u^n)$$

Pour $u \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} = \frac{1}{1-u} - \frac{u^{n+1}}{1-u}$

D'où

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\dots+u^n + \frac{u^{n+1}}{1-u} \quad \text{pour } u \neq 1$$

On montre $\dfrac{u^{n+1}}{1-u} = o(u^n)$: On calcule donc pour $u \neq 0$

$$\frac{\frac{u^{n+1}}{1-u}}{u^n} = \frac{u}{1-u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0 \quad \text{alors} \quad \frac{u^{n+1}}{1-u} \underset{0}{=} o(u^n)$$

D'où

$$\left| \frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1+u+u^2+\dots+u^n + o(u^n) \right.$$

Si on pose $u=-x$, on a $\dfrac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\dots+u^n+u^n\varepsilon_1(u)$

avec $\varepsilon_1(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Alors $u^n\varepsilon_1(u) = (-x)^n\varepsilon_1(-x)$

$$= x^n(-1)^n\varepsilon_1(-x)$$

et on peut poser $\varepsilon_2(x) = (-1)^n\varepsilon_1(-x)$. On a $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Donc $u^n\varepsilon_1(u) = x^n\varepsilon_2(x)$ donc $o(u^n) \underset{0}{=} o(x^n)$

alors

$$\left| \frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n + o(x^n) \right.$$

par théorème

on obtient par primitivation

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} K + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

avec K constante d'intégration à déterminer

L'égalité est vraie au voisinage de 0 donc $\ln(1+0) = K + 0$

d'où la formule

$$\left| \ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \right.$$

On pose $u = -x^2$ dans $\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + \dots + u^n + o(u^n)$

On a $u^n = -x^{2n}$ alors $o(u^n) \underset{0}{=} o(x^{2n}) = o(42 . x^{2n})$

D'où au voisinage de 0

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Par intégration, en remarquant que $\mathrm{Arctan}(0) = 0$

on a

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})}$$

$n \in \mathbb{N}$ entier

Exercice Calculer un $DL_2(0)$ de $g(x) = \frac{1}{1-x} + \sin(x)$

On a

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2) \quad n = 2 \text{ dans la formule}$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x) \quad \text{vrai mais insuffisant : } DL_1$$

$$\underset{0}{=} x + 0 . x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{vrai mais trop } DL_3$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x^2) \quad \text{est le } DL_2(0) \text{ de } \sin(x)$$

On somme

$$\boxed{g(x) \underset{0}{=} 1 + 2x + x^2 + o(x^2)}$$

3.3 Unicité du développement limité

Proposition 3.2. *Si f est une fonction admettant deux développements limités à l'ordre n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors ces développements sont égaux.*

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ et $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$.

On appelera le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ la partie régulière du DL de f à l'ordre n en a.

Corollaire 3.3. *Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors pour tout entier $p \leqslant n$, f admet un développement limité à l'ordre p obtenu en tronquant le développement d'ordre n.*

Corollaire 3.4. *Soit f admettant un développement limité en 0 de partie régulière P. Si f est paire, alors P est pair. Si f est impaire, alors P est impair.*

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_p(x-a)^p + \underbrace{a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)}_{o((x-a)^p)}$$

par ordre de négligeabilité croissante

Exercice : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ DL_3 en $a = 4$

Méthode 1 : on change de variable $x = 4 + h \iff h = x - 4$

on a $x \to 4 \iff h \to 0$

on calcule

$g(h) = f(4+h) = \dfrac{1}{5+h} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{1 + h/5}$ puis on pose $u = -\dfrac{h}{5}$

on a $h \to 0 \iff u \to 0$ et

$\dfrac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$ et $u^3 = -\dfrac{h^3}{125}$ donc $o(u^3) \underset{0}{=} o(h^3)$

Alors

$f(4+h) \underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{5}\left(1 - \dfrac{h}{5} + \dfrac{h^2}{25} - \dfrac{h^3}{125} + o(h^3)\right)$

Soit

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 4}{=} \frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-4) + \frac{1}{125}(x-4)^2 - \frac{1}{625}(x-4)^3 + o((x-4)^3)}$$

DL à l'ordre 3 en $a = 4$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Autre méthode : par la formule de Taylor Young

f est $\mathcal{C}^3$ en $a=4$ alors

$$f(x) \underset{4}{=} f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4)^1 + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f^{(3)}(4)}{3!}(x-4)^3 + o\left((x-4)^3\right)$$

on calcule les dérivées

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad f(4) = \frac{1}{5}$ $\quad f'(x) =$

3.4 Forme normalisée d'un développement limité

Définition 3.2. Soit f une application admettant un développement limité l'ordre $n+p$ au voisinage de a. On appelle forme normalisée du développement limité de f, l'écriture :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)\right) \text{ où } a_0 \neq 0.$$

Proposition 3.5. *Si f a un développement limité normalisé $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\,(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o($ où $a_0 \neq 0$, alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$ et f est de même signe que $a_0 h^p$.*

3.5 Translation d'un développement limité

Proposition 3.6. *Si f est une fonction vérifiant $f(a+h) = g(h)$ pour tout h dans l'intervalle I contenant 0, et si g admet un développement limité à l'ordre n en 0 : $g(x) \underset{0}{=} P(x) + o(x^n)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$.*

3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si la fonction g définie par $g(u) = f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n sur l'intervalle $J_+ = \left\{\frac{1}{x}\middle| x \in I \cap \mathbb{R}_+^*\right\}$ (respectivement sur $J_- = \left\{\frac{1}{x}\middle| x \in I \cap \mathbb{R}_-^*\right\}$), alors on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Si $g(u) \underset{0^+}{=} P(u) + o(u^n)$, alors $f(x) \underset{+\infty}{=} P(\frac{1}{x}) + o(\frac{1}{x^n})$.

4 Formule de Taylor-Young

4.1 Intégration terme à terme d'un DL

Théorème 4.1. *Soit I un intervalle contenant a et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue possédant un développement limité à l'ordre n en a qui est :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Alors toute primitive F de f sur I possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en a qui est :

$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.2. *Soit f une fonction de classe C^n d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ avec $n \in \mathbb{N}$. f possède en tout point a de I un développement limité d'ordre n donné par :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \qquad \textit{ou}$$

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

5 Opérations sur les développement limités

5.1 Somme et produit

Proposition 5.1. *Soit f et g deux fonctions réelles admettant en a des développements limités à l'ordre n :*

$$f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n \text{ et } g(x) \underset{a}{=} Q(x-a) + o(x-a)^n$$

où Pet Q sont des pllynômes réels de degré au plus égal à n.
Alors les fonctions $f+g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n qui sont :

$$(f+g)(x) \underset{a}{=} P(x-a) + Q(x-a) + o\left((x-a)^n\right).$$

$$(fg)(x) \underset{a}{=} R(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$$

où R est le polynôme obtenu tronquant le produit PQ au degré n.

5.2 Dérivation d'un développement limité

Proposition 5.2. *Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I contenant a, admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a, alors ce développement s'obtient en dérivant celui de f :

$$f'(x) \underset{a}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-a)^{k-1} + o(x-a)^{n-1}.$$

5.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 5.3. *soit f une fonction définie sur I admettant un $Dl_n(a)$ en $a \in I$, telle que $f(I) \subset J$, avec $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$.*

Soit g une fonction définie sur J admettant un DL_n en $b = f(a)$ avec $g(u) \underset{b}{=} Q(u-b) + o(u-b)^n$.

Alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme composé $Q(P(X))$:

$$g \circ f(x) \underset{a}{=} \text{ reste de la division de } Q(P(x-a)) \text{ par } (x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^n\right).$$

5.4 Développement limité d'un quotient

Proposition 5.4. *Si u est une fonction telle que $\lim_a u = 0$ et si u a un développement limité à l'ordre n en a, alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un $DL_n(a)$.*

Si $u(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$, alors $\dfrac{1}{1-u(x)} \underset{a}{=} 1 + P(x-a) + P^2(x-a) + P^3(x-a) + \cdots + P^n(x-a) + o(x-a)^n$: le développement limité s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $1 + P(X) + P^2(X) + \cdots + P^n(X)$.

6 Formulaire

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1+x+x^2+\cdots+x^n+\circ(x^n)$$

$\sum x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}x^n+\circ(x^n)$$

par intégration

$$\arctan x \underset{0}{=} x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^p\tfrac{1}{2p+1}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})$$

par intégration

$$e^x \underset{0}{=} 1+\tfrac{1}{1!}x+\tfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\tfrac{1}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{0}{=} 1+\tfrac{1}{2!}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4+\cdots+\tfrac{1}{(2p)!}x^{2p}+\circ(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{0}{=} x+\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5+\cdots+\tfrac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})$$

$$\cos x \underset{0}{=} 1-\tfrac{1}{2!}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^p\tfrac{1}{(2p)!}x^{2p}+\circ(x^{2p})$$

$$\sin x \underset{0}{=} x-\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^p\tfrac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})$$

$$\tan x \underset{0}{=} x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{2}{15}x^5+\tfrac{17}{315}x^7+\circ(x^8)$$

7 Applications

7.1 Étude de limites

Proposition 7.1. *Si une fonction f a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f a une limite en a qui vaut a_0.*

7.2 Prolongement par continuité

Proposition 7.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.

7.3 Dérivabilité d'un prolongement par continuité

Proposition 7.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $\tilde{f}(a) = a_0$ et le prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = a_1$.

7.4 Position relative de la courbe et de la tangente

Proposition 7.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $p \geqslant 2$ et $a_p \neq 0$, alors la droite $y = a_0 + a_1(x-a)$ est tangente à la courbe représentative de f en a.
De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point a est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$: au-dessus si $a_p(x-a)^p \geqslant 0$.

7.5 Étude d'un extremum

Proposition 7.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$ avec $a_2 \neq 0$, alors la fonction f a un extremum local en a : maximum local si $a_2 < 0$ et minimum local si $a_2 > 0$.

7.6 Asymptotes

Proposition 7.6. *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).*

Si il existe un réel k tel que $$f(x) - kx \underset{+\infty \text{ ou } -\infty}{=} a_0 + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right) \text{ avec } a_p \neq 0,$$

alors la droite $y = kx + a_0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$). De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{a_p}{x^p}$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).