Mathématique - Corrigé DS n°6

Exercice 1

1. On transforme l'équation de $\mathcal{S}$: $x^2+y^2+z^2-4x-2y+1=0 \iff (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=2^2$
   $M(x,y,z)\in\mathcal{S} \iff ||\overrightarrow{\Omega M}||=2$ avec $\Omega(2,1,0)$.
   Alors, $\boxed{\mathcal{S} \text{ est la sphère de centre } \Omega(2,1,0) \text{ et de rayon } R=2}$.

2. On étudie la droite $\mathcal{D}$: $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2y+1 \\ z &=& y+4 \end{array}\right. \iff \exists\alpha\in\mathbb{R} : \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 4\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$
   Donc $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A(1,0,4)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(2,1,1)$.
   On étudie la droite $\mathcal{D}'$:
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+1 &=& 0 \\ 2x-y+9 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} z=8+x \\ y=2x+9 \end{array}\right. \iff \exists\beta\in\mathbb{R} : \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 9\\ 8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$
   Donc $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A(0,9,8)$ et dirigée par $\overrightarrow{v}(1,2,1)$.

3. On cherche un ou des plans $\mathcal{P}$ qui sont parallèles à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ alors ce plan $\mathcal{P}$ sera dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui ne sont pas colinéaires.
   Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$: $(2,1,1)\wedge(1,2,1)=(-1,-1,3)$ on trouve $\overrightarrow{n}(-1,-1,3)$.
   Un plan est tangent au point K à une sphère de centre Ω si le rayon $\overrightarrow{\Omega K}$ est orthogonal au plan et si $||\overrightarrow{\Omega K}||=R$.
   On trouve deux points possibles : K et K' tels que $\overrightarrow{\Omega K}=\dfrac{R}{||\overrightarrow{n}||}\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\Omega K'}=-\dfrac{R}{||\overrightarrow{n}||}\overrightarrow{n}$
   On trouve $K\left(2-\dfrac{2}{\sqrt{11}}, 1-\dfrac{2}{\sqrt{11}}, \dfrac{6}{\sqrt{11}}\right)$ et $K'\left(2+\dfrac{2}{\sqrt{11}}, 1+\dfrac{2}{\sqrt{11}}, -\dfrac{6}{\sqrt{11}}\right)$
   Ce qui donne les deux plans
   $$\boxed{x+y-3z-3+2\sqrt{11}=0 \quad \text{et} \quad x+y-3z-3-2\sqrt{11}=0}$$
   Les points de contact sont $\boxed{K\left(2-\dfrac{2}{\sqrt{11}}, 1-\dfrac{2}{\sqrt{11}}, \dfrac{6}{\sqrt{11}}\right) \text{ et } K'\left(2+\dfrac{2}{\sqrt{11}}, 1+\dfrac{2}{\sqrt{11}}, -\dfrac{6}{\sqrt{11}}\right)}$

Exercice 2

1. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. On note F l'une d'entre elles. On en déduit alors que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
   $$f(x)=\int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t = F(ax)-F(0)$$
   (b) Puisque F est dérivable en tant que primitive d'une fonction continue, on en déduit à l'aide de l'égalité précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
   $$f'(x)=aF'(ax)=af(ax).$$
   (c) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(x)=a^{n(n+1)/2}f(a^nx)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   - Initialisation : f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ par hypothèse, et on a bien $f(x)=a^0f(a^0x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
   - Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que la propriété est vraie au rang n, c'est à dire f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(x)=a^{n(n+1)/2}f(a^nx)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = af(ax)$. Or $x \mapsto af(ax)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Donc f' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = a^{n(n+1)/2}a^n f'(a^n x)$$

avec $f'(a^n x) = af(aa^n x) = af(a^{n+1}x)$

D'où $f^{(n+1)}(x) = a^{n(n+1)/2}a^{n+1}f(a^{n+1}x) = a^{n(n+1)/2+(n+1)}a^n f(a^{n+1}x)$

$f^{(n+1)}(x) = a^{(n+1)(n/2+1}f(a^{n+1}x) = a^{(n+2)(n+1)/2}f(a^{n+1}x)$

D'où la propriété au rang $n+1$.

— Conclusion : On conclut par le principe de récurrence que f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2}f(a^n x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}+$.

(d) En prenant $x = 0$ dans l'égalité précédente, on obtient que $f^(n)(0) = a^{n(n+1)/2}f(0) = F(0) - F(0) = 0$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a montré que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Alors, on peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre n en tout point a de $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t$$

Cette formule devient pour $a = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t$$

Mais pour tout entier k, on a $f^{(k)}(0) = 0$ ce qui simplifie la formule :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t}$$

3. (a) Toute fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment (et y atteint ses bornes). Appliqué à f sur le segment $[-A; A]$ où f est bien continue, ce théorème permet d'affirmer que $\exists M \in \mathbb{R}+, \forall x \in [-A; A], \quad |f(x)| \leqslant M$

On sait, d'après 1.c, que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2}f(a^n x)$.

En prenant les valeurs absolues dans cette égalité et la restreignant au segment $[-A; A]$, on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-A; A], \ |f^{(n)}(x)| = |a|^{n(n+1)/2}|f(a^n x)|.$$

D'une part, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a|^{n(n+1)/2} \leqslant 1$ puisque $a \in [-1; 1]$.

D'autre part, pour tout $x \in [-A; A]$, on a $a^n x \in [-A; A]$ puisque $a \in [-1; 1]$.

Donc, on peut affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-A; A], \quad |f(a^n x)| \leqslant M$$

La combinaison de tous ces résultats nous dit alors que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-A; A], \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant M}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad |f(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t \right|$ d'aprés 2.

Pour $x \geqslant 0$, on a $\quad |f(x)| \leqslant \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t$ car l'intégrale est croissante et $0 \leqslant x$.

Or pour $t \in [0, x]$, on a $\left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| \leqslant M\frac{(x-t)^n}{n!}$

Alors, $\quad |f(x)| \leqslant \int_0^x M\frac{(x-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t = \left[-M\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Pour $x < 0$, $\quad |f(x)| \leqslant \int_x^0 \left|\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right| \mathrm{d}t$ car l'intégrale est croissante et $x \leqslant 0$.

Or pour $t \in [x, 0]$, on a $\left|\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M\frac{(t-x)^n}{n!}$

Alors, $\quad |f(x)| \leqslant \int_x^0 M\frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{d}t = \left[M\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_x^0 = M\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$

Il s'ensuit que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad |f(x)| \leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

Comme $x \in [-A; A]$, on a $|x| \leqslant A$, ce qui donne finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-A; A], \quad |f(x)| \leqslant M\frac{A^n}{(n+1)!}$$

(c) Soit $x \in [-A, A]$. En passant à la limite dans l'inégalité de la question 3.b, on obtient $f(x) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [-A, A]$, $\quad |f(x)| = 0$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$.

4. Le résultat de la question précédente nous dit que f est la fonction nulle sur $[-A; A]$ pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$ et donc que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. (a) Tout d'abord, F ne contient que des vecteurs que de $\mathbb{R}^3$: $F \subset \mathbb{R}^3$.

Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ vérifie l'équation $z = 0$ donc $\overrightarrow{0} \in F$.

Soit $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de F. On a donc $z_1 = z_2 = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\alpha\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2) = (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, 0)$ donc $\alpha\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in F$.

F est stable par combinaison linéaire.

F est non vide et stable par combinaison linéaire, alors $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

Le système linéaire $z = 0$ a trois inconnues et un pivot, donc on utilise deux inconnues secondaires pour paramétrer l'ensemble des solutions, alors une représentation paramétrique de F est $(x, y, z) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Alors, $\boxed{F = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)}$: F est le sev engendré par ces deux vecteurs.

(b) Soit $\overrightarrow{u_1} = (x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

On a $f(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -x_1 - x_2 - y_1 - y_2, 0)$

Et par ailleurs, $f(\overrightarrow{u_1}) + f(\overrightarrow{u_2}) = (x_1 + x_2, -x_1 - x_2 - y_1 - y_2, 0)$

Ainsi, $f(\overrightarrow{u_1}) + f(\overrightarrow{u_2}) = f(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2})$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha\overrightarrow{u_1}) = (\alpha x_1, -\alpha x_1 - \alpha y_1, 0) = \alpha(x_1, -x_1 - y_1, 0) = \alpha f(\overrightarrow{u_1})$

On en déduit que pour tous $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha\overrightarrow{u_1}) = \alpha f(\overrightarrow{u_1})$ et $f(\overrightarrow{u_1}) + f(\overrightarrow{u_2}) = f(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2})$. Donc $\boxed{f \text{ est linéaire de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^3}$.

(c) On résout l'équation $f(x, y) = (0, 0) \iff x = 0$ et $y = 0$.

On en déduit que $\mathrm{Ker}\, f = \{(0, 0)\}$ et donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

(d) On détermine $\mathrm{Im}\, f$:

$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathrm{Im}\, f \iff \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (v_1, v_2, v_3)$ soit $(x, -x - y, 0) = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\iff \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & v_1 \\ y & = & -v_1 - v_2 \\ 0 & = & v_3 \end{array}\right. \iff v_3 = 0$$

On obtient donc un vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}\, f$ si et seulement si $\overrightarrow{v} \in F$. On en déduit $\boxed{\mathrm{Im}\, f = F}$.

2. (a) On utilise la linéarité de g :
pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $g(x,y,z)=xg(1,0,0)+yg(0,1,0)+zg(1,0,0)$
D'où $\boxed{\text{pour } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad g(x,y,z)=(x+z,-x-y+z).}$

(b) On résout le système $g(x,y,z)=(0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x-y+z & = & 0 \\ x \quad +z & = & 0 \end{array}\right.$
Le système a deux équations et deux pivots et trois inconnues, alors on a une inconnue secondaire qui paramètre l'ensemble des solutions :
$\iff$ il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\alpha \\ y & = & 2\alpha \\ z & = & \alpha \end{array}\right.$
On en déduit que $\boxed{\operatorname{Ker} g \text{ est la droite vectorielle } \operatorname{Vect}((-1,2,1))}$.

(c) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on cherche $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $g(x,y,z)=(a,b)$. On résout le système correspondant :
$\left\{\begin{array}{rcl} -x-y+z & = & a \\ x \quad +z & = & b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x-y+z & = & a \\ -y+2z & = & a+b \end{array}\right.$
Ce système n'a pas d'équation de compatibilité alors il a toujours une solution.
On en déduit que tout vecteur (a,b) de $\mathbb{R}^2$ a au moins un antécédent donc $\boxed{\operatorname{Im} g=\mathbb{R}^2}$.

(d) On remarque d'abord que $\operatorname{Ker} g\subset\mathbb{R}^3$ et $\operatorname{Im} f\subset\mathbb{R}^3$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
On a $(x,y,z)=z(-1,2,1)+(x+z,y-2z,0)$. Or $z(-1,2,1)\in\operatorname{Vect}((-1,2,1))=\operatorname{Ker} g$ et $(x+z,y-2z,0)\in\operatorname{Im} f$ qui a pour équation $z=0$. On a montré que
tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est la somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} g$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} f$.
On montre que cette décomposition est unique : soit $\overrightarrow{v}\in\operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f$. Alors, $\overrightarrow{v}=\alpha(-1,2,1)$ et $\overrightarrow{v}$ vérifie l'équation $z=0$.
On en déduit que $\alpha=0$ donc $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.
On a donc $\operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f\subset\{\overrightarrow{0}\}$ et comme les deux sont des sous-espaces vectoriels, on a l'inclusion réciproque $\{\overrightarrow{0}\}\subset\operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f$.
Finalement, $\operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f=\{\overrightarrow{0}\}$ On a prouvé que $\boxed{\operatorname{Ker} g\oplus\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^3}$.

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On note $(X,Y,0)=f(x,y)$ soit $X=x, Y=-x-y$. Puis, $g(X,Y,0)=(X,-X-Y)=(x,-x-(-x-y))=(x,y)$. Soit $g\circ f(x,y)=(x,y)$
On en déduit que $\boxed{g\circ f=id_{\mathbb{R}^2}}$.

4. (a) Soit $u,v\in E$ tels que $f(u)=f(v)$, alors $g(f(u))=g(f(v))$ ce qui donne $u=v$.
On en déduit que $\boxed{f \text{ est injective}}$.
Soit $v\in E$. on a $g\circ f(v)=id_E(v)$ donc $g(f(v))=v$ alors $f(v)$ est un antécédent de v. Donc, $v\in\operatorname{Im}(g)$. Donc $E\subset\operatorname{Im}(g)$.
Et comme on a évidemment, $\operatorname{Im}(g)\subset E$, on a montré
$\boxed{\operatorname{Im}(g)=E}$ ce qui équivaut à $\boxed{g \text{ est surjective}}$.

(b) f est linéaire et g est linéaire alors par composition, $g\circ f$ est linéaire.
On calcule, en utilisant l'associativité de la compositions des fonctions :
$$(f\circ g)\circ(f\circ g)=f\circ(g\circ f)\circ g=f\circ id_E\circ g=f\circ g \quad \text{où } f\circ id_E=f.$$
$f\circ g$ est linéaire et $(f\circ g)\circ(f\circ g)=f\circ g$ alors $\boxed{f\circ g \text{ est un projecteur de } E}$.

(c) Soit $u\in\operatorname{Ker} g$, alors $g(u)=\overrightarrow{0}$ donc $f(g(u))=f(\overrightarrow{0})=\overrightarrow{0}$ car f est linéaire. On en déduit que $u\in\operatorname{Ker}(f\circ g)$. On a prouvé $\operatorname{Ker} g\subset\operatorname{Ker}(f\circ g)$.
Si $u\in\operatorname{Ker}(f\circ g)$ alors $f\circ g(u)=\overrightarrow{0}$ donc $g(f\circ g(u))=\overrightarrow{0}$ car g est linéaire. On réécrit : $((g\circ f)\circ g)(u)=\overrightarrow{0}$.

Mais $g \circ f = id_E$ et $id_E \circ g = g$ alors, on a $g(u) = \overrightarrow{0}$ donc $u \in \operatorname{Ker} g$. On a prouvé $\operatorname{Ker}(f \circ g) \subset \operatorname{Ker} g$.

On en déduit par double inclusion que $\boxed{\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g}$.

Soit $v \in \operatorname{Im}(f \circ g)$ alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(g(u))$ qui est l'image par f de $g(u)$ donc $v \in \operatorname{Im} f$. On a montré $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} f$.

Réciproquement, soit $v \in \operatorname{Im}(f)$, alors il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$. On a donc en composant par g : $(g \circ f)(u) = g(v)$ mais $g \circ f = id_E$ donc $id_E(u) = g(v)$ soit $u = g(v)$.

on a donc $v = f(g(v))$ ce qui prouve que $v \in \operatorname{Im}(f \circ g)$. On a montré $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f \circ g)$. Par double inclusion, on en déduit que $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f \circ g)}$.

(d) Comme $f \circ g$ est un projecteur, $f \circ g$ projette sur $\operatorname{Im}(f \circ g)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f \circ g)$ donc $\operatorname{Im}(f \circ g)$ et $\operatorname{Ker}(f \circ g)$ sont supplémentaires dans E.

Il s'ensuit que $\boxed{\operatorname{Ker}(g) \text{ et } \operatorname{Im}(f) \text{ sont supplémentaires dans } E : \operatorname{Ker}(g) \oplus \operatorname{Im}(f)}$.

Exercice 4

1. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto e^{-x\sin(t)}$ est continue sur [0,] comme composée de fonctions continues.

   Cela prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(-x\sin(t))\, \mathrm{d}t$ a bien un sens pour tout $x \in [0, +\infty[$.

   Ainsi, $F(x)$ a bien un sens pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $\boxed{F \text{ est définie sur } [0, +\infty[}$.

2. Considérons x et y deux réels tels que $0 \leqslant x < y$. On a $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin(t) \geqslant 0$.

   On peut donc multiplier terme à terme par $\sin(t)$ ce qui donne $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 0 \leqslant x\sin(t) \leqslant y\sin(t)$.

   On obtient alors $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad -y.\sin(t) \leqslant -x\sin(t) \leqslant 0$.

   En composant par l'application exp qui est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on obtient
   $$\forall t \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad 0 \leqslant e^{-y\sin(t)} \leqslant e^{-x\sin(t)} \leqslant e^0 \text{ avec } e^0 = 1.$$

   Comme $0 < \dfrac{\pi}{2}$, par croissance de l'intégrale, on obtient
   $$\int_0^{\pi/2} 0 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-y\sin(t)}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-x\sin(t)}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} e^0 \, \mathrm{d}t$$
   c'est-à-dire
   $$0 \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-y\sin(t)}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-x\sin(t)}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

   En divisant par $2 > 0$, on obtient donc $0 \leqslant F(y) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

   On vient donc de prouver l'implication : $0 \leqslant x < y \Longrightarrow F(y) \leqslant F(x)$: l'application F est donc décroissante sur $[0, +\infty[$.

   De plus, la relation $0 \leqslant F(y) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ permet aussi d'écrire $\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}}$.

3. Posons pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad \varphi(t) = \sin(t) - \dfrac{2}{\pi}t$. L'application φ est deux fois dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ comme somme de fonctions deux fois dérivables et on a $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,
   $$\varphi'(t) = \cos(t) - \frac{2}{\pi} \text{ et } \varphi''(t) = -\sin(t).$$

   On a $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad \varphi''(t) \leqslant 0. \quad$ On calcule $\varphi'(0) = 1 - \dfrac{2}{\pi}$ et $\varphi'(\frac{\pi}{2}) = -\dfrac{2}{\pi}$

Cela permet de tracer le tableau suivant :

t	0		$\pi/2$
$\varphi''(t)$		$-$	
$\varphi'(t)$	$1-2/\pi$	$\searrow$	$-2/\pi$

L'application φ' est continue (car dérivable) sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi'(0).\varphi'(\frac{\pi}{2}) = \left(1 - \dfrac{2}{\pi}\right).\left(-\dfrac{2}{\pi}\right) < 0$ car $\pi > 3$ et donc $\dfrac{2}{\pi} < 1$ et $1 - \dfrac{2}{\pi} > 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe $t_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\varphi'(t_0) = 0$.

On en déduit le signe de $\varphi'(t)$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Avec les valeurs : $\varphi(0) = \sin(0) - \dfrac{2}{\pi}0 = 0$ et $\varphi\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left[0, \frac{\pi}{2}\right] - 1 = 0$, on peut écrire le tableau de variations de φ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

t	0		t_0		$\pi/2$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	0	$\nearrow$	$\varphi(t_0)$	$\searrow$	0

Le tableau précédent montre donc que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi(t) \geqslant 0$.

On a donc bien $\boxed{\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \dfrac{2}{\pi}t \leqslant \sin(t)}$.

4. Soit $x \in]0, +\infty[$. On a $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \dfrac{2}{\pi}t \leqslant \sin(t)$.

   On multiplie par $x > 0$ ce qui donne $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \dfrac{2}{\pi}xt \leqslant x\sin(t)$.

   On a donc $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad -x\sin(t) \leqslant -\dfrac{2}{\pi}x\,t$.

   On compose par exp qui est croissante sur $\mathbb{R}$ ce qui donne :
$$\forall t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right], \quad e^{-x\sin(t)} \leqslant \exp\left(-\frac{2}{\pi}xt\right).$$
   Enfin, on intègre et par croissance de l'intégrale, avec $0 < \dfrac{\pi}{2}$, on obtient
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \int_0^{\pi/2} e^{-y\sin(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2}{\pi}xt\right)\,\mathrm{d}t$$
   En divisant par $2 > 0$, on obtient donc :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad F(x) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2}{\pi}xt\right)\,\mathrm{d}t$$
   Or, on a $\forall x \in]0, +\infty[$,
$$\int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2}{\pi}xt\right)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\pi}{2x}\exp\left(-\frac{2}{\pi}xt\right)\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2x}\left(\exp(-x) - \exp(0)\right) = \frac{\pi}{2x}\left(1 - e^{-x}\right)$$
   L'inégalité : $\quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad F(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2}{\pi}xt\right)\,\mathrm{d}t$

   s'écrit donc $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4x}\left(1 - e^{-x}\right)}$

   On sait d'après 2°) que l'on a $\forall x \in]0, +\infty[, \quad F(x) \geqslant 0$,
   ce qui donne finalement $\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4x}\left(1 - e^{-x}\right)$

Or, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, d'où $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi}{4x}\left(1-e^{-x}\right)=0$.

Le théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement donne donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0}$.

5. (a) Posons $\forall x\in[0,+\infty[,\ \psi(x)=e^{-x}$.
   ψ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a $\forall x\in[0,+\infty[,\quad \psi'(x)=-e^{-x}$.
   On a alors $\forall x\in[0,+\infty[,\quad |\psi'(x)|=|-e^{-x}|=e^{-x}$, d'où
   $\forall x\in[0,+\infty[,\quad |\psi'(x)|\leqslant 1$ car $-x\leqslant 0$ et donc $e^{-x}\leqslant 1$.
   L'inégalité des accroissements finis donne donc
   $$\forall(a,b)\in[0,+\infty[^2,\quad |\psi(a)-\psi(b)|\leqslant 1\times|a-b|\ .$$
   On a donc $\boxed{\forall(a,b)\in[0,+\infty[^2,\quad |e^{-a}-e^{-b}|\leqslant|a-b|}$.

   (b) On a $\forall(x,y)\in[0,+\infty[^2$,
   $$|F(x)-F(y)|=\frac{1}{2}\left|\int_0^{\pi/2}e^{-x\sin(t)}-e^{-y\sin(t)}\,\mathrm{d}t\right|\text{ par linéarité de l'intégrale.}$$
   Puis, comme l'intégrale est croissante avec $0<\dfrac{\pi}{2}$:
   $$|F(x)-F(y)|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left|e^{-x\sin(t)}-e^{-y\sin(t)}\right|\,\mathrm{d}t$$
   Or on a $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ et $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ donc $\quad x\sin(t)\geqslant 0\quad$ et $\quad y\sin(t)\geqslant 0$.
   On peut donc d'écrire
   $$|e^{-x\sin(t)}-e^{-y\sin(t)}|\leqslant|x\sin(t)-y\sin(t)|=|(x-y)\sin(t)|.$$
   c'est-à-dire $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$,
   $$|e^{-x\sin(t)}-e^{-y\sin(t)}|\leqslant|x-y|\sin(t)\text{ car }\sin(t)\geqslant 0.$$
   La croissance de l'intégrale avec $0<\dfrac{\pi}{2}$ et la linéarité donnent
   $$\int_0^{\pi/2}\left|e^{-x\sin(t)}-e^{-y\sin(t)}\right|\,\mathrm{d}t\leqslant|x-y|\int_0^{\pi/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$
   On a donc finalement $\forall(x,y)\in[0,+\infty[^2$,
   $$|F(x)-F(y)|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|\int_0^{\pi/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Or, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t=[-\cos(t)]_0^{\pi/2}=1-0=1$.
   On a donc bien $\boxed{\forall(x,y)\in[0,+\infty[^2,\quad |F(x)-F(y)|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|}$.

   (c) Fixons $x_0\in[0,+\infty[$. La question précédente permet d'écrire
   $$\forall x\in[0,+\infty[,\quad 0\leqslant|F(x)-F(x_0)|\leqslant\frac{1}{2}|x-x_0|.$$
   Faisons tendre x vers x_0. On a $\quad\lim\limits_{x\to x_0}x-x_0=0$.
   Alors, d'après le théorème d'encadrement, $\quad\lim\limits_{x\to x_0}F(x)-F(x_0)=0$.
   On a donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$ ce qui prouve que F est continue en x_0.
   Ceci étant vrai pour tout $x_0\in[0,+\infty[$, $\boxed{\text{l'application } F \text{ est donc continue sur } [0,+\infty[}$.

6. (a) (Note : cette question technique n'a pas d'utilité pour la suite)
   Soit x et y deux réels tels que $0\leqslant x<y$. On a montré $F(y)\leqslant F(x)$ car F décroissante.
   On a également $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\quad -y\sin(t)\leqslant x\sin(t)$ qui donne par croissance de exp : $e^{-y\sin(t)}\leqslant e^{-x\sin(t)}$.
   On a donc $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\quad 0\leqslant e^{-x\sin(t)}-e^{-y\sin(t)}$.

Supposons que $F(x) = F(y)$, alors $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} e^{-y\sin(t)}\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle\iff 0 = \int_0^{\pi/2} \left(e^{-y\sin(t)} - e^{-x\sin(t)}\right)\,\mathrm{d}t.$

La fonction $t \mapsto e^{-x\sin(t)} - e^{-y\sin(t)}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(e^{-x\sin(t)} - e^{-y\sin(t)}\right)\,\mathrm{d}t = 0.$
Alors, par théorème, la fonction $t \mapsto e^{-x\sin(t)} - e^{-y\sin(t)}$ est nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Il s'ensuit que : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad e^{-x\sin(t)} = e^{-y\sin(t)}$. En particulier, on a $e^{-x\sin(\pi/6)} = e^{-y\sin(\pi/6)}$.
Mais on a $-y < -x$ qui donne $-\dfrac{y}{2} < -\dfrac{x}{2}$ et par stricte croissance de exp : $e^{-y/2} < e^{-x/2}$ ce qui est une contradiction. Alors on $F(x) \neq F(y)$ donc $F(y) < F(x)$ pour tout $x < y$. Cela prouve que $\boxed{F \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

(b) Posons $\forall x \in [0, +\infty[, \quad G(x) = F(x) - x$.
On sait que la fonction F est décroissante sur $[0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
La fonction $G : x \mapsto F(x) - x$ est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ comme somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante.
On a de plus $\displaystyle G(0) = F(0) - 0 = \int_0^{\pi/2} e^{-0\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$
On a enfin $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ grâce à 4°) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) - x = -\infty$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = -\infty$.
On a donc G continue (somme de fonctions continues) et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ avec $G(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.
Le théorème de la bijection prouve que G réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, \dfrac{\pi}{4}]$.
Comme $0 \in]-\infty, \dfrac{\pi}{4}]$, 0 admet un unique antécédent par G dans $[0, +\infty[$.
Il existe donc $\boxed{\text{un unique } \alpha \in [0, +\infty[\text{ tel que } G(\alpha) = 0, \text{ c'est-à-dire tel que } F(\alpha) = \alpha}$.

(c) On sait que l'on a $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \quad |F(x) - F(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - y|$ grâce à la question 5°)b).
Comme on a $\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) \geqslant 0$ et $u_0 \geqslant 0$, on a par récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$.
En prenant $x = u_n$ et $y = \alpha$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |F(u_n) - F(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
Or, on sait que l'on a $F(u_n) = u_{n+1}$ et $F(\alpha) = \alpha$. On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|}$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse de récurrence $H_n : |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.
On a $|u_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^0}|u_0 - \alpha|$, car $\dfrac{1}{2^0} = 1$ et donc H_0 est vérifiée.
Supposons H_n vérifiée pour un $n \in \mathbb{N}$. On suppose donc $|u_n - \alpha \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.
En multipliant par $\dfrac{1}{2} > 0$, cela donne $\dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \alpha|$.
Or, on sait d'après 7°)a) que l'on a $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_n - \alpha|$.
On peut donc écrire $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \alpha|$
Ce qui prouve donc que H_{n+1} est vérifiée (ii) .
Conclusion : (i) et (ii) prouvent que H_n est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|}$.

(d) Comme $\dfrac{1}{2} \in]0,1[$, on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.
Alors, d'après le théoréme d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \alpha = 0$ soit $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha}$.