Mathématique - Devoir Maison n°14

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$: $\quad (E)\ e^x + x - n = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution unique dans $\mathbb{R}_+$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\quad u_n \sim \ln(n)$.
4. On pose $v_n = u_n - \ln(n)$. Déterminer un équivalent simple de v_n.
5. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel qu'au voisinage de $+\infty$:

$$u_n = a\ln(n) + b\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Exercice 2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est **cyclique d'ordre** p s'il existe un élément $\vec{a}$ de E vérifiant les trois conditions :

- $f^p(\vec{a}) = \vec{a}$. *On rappelle que $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (p fois) et que $f^0 = Id_E$*
- la famille $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a})\right)$ est génératrice de E.
- la famille $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a})\right)$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a})\right)$ est appelée alors cycle de E.

1. *Premier exemple :* Dans $E = \mathbb{R}^2$ on pose $f : (x, y) \longmapsto (-y, x)$. On admet que f est un endomorphisme de E.
   En considérant $\vec{a} = (1, 0)$, observer que f est cyclique d'ordre p, l'entier p étant à préciser.
2. *Deuxième exemple :* On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^3$ défini par :
   $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-3x + 6y + 5z, -2x + 3y + 2z, x - y)$. On admet que f est linéaire.
   (a) On pose $\vec{a} = (0, -1, 1)$. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = \left(\vec{a}, f(\vec{a}), f^2(\vec{a})\right)$ est une base de E.
   Observer que f est cyclique d'ordre p, en précisant la valeur de p.
   (b) On note $\mathscr{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec f.
   Autrement dit : $\mathscr{C}(f) = \left\{g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \mid f \circ g = g \circ f\right\}$.
      i. Prouver que $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$
      ii. Vérifier que Id_E, f et f^2 sont des éléments de $\mathscr{C}(f)$. En déduire que $Vect(Id_E, f, f^2) \subset \mathscr{C}(f)$
      iii. Soit $g \in \mathscr{C}(f)$. On note (α, β, γ) les coordonnées de $g(\vec{a})$ dans la base $\mathscr{B}'$.
      Exprimer $g(f(\vec{a}))$ et $g(f^2(\vec{a}))$ en fonction de (α, β, γ) et des vecteurs $f^i(\vec{a})$ (pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$)
      iv. En déduire que $g = \alpha Id_E + \beta f + \gamma f^2$. Que vient-on de démontrer ?
3. *Étude du cas général :* Dans cette question E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p. Soit $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a})\right)$ un cycle de E.
   (a) Montrer que $p \geqslant n$.
   (b) Observer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^p(f^k(\vec{a})) = f^k(\vec{a})$. En déduire que $f^p = Id_E$.
   (c) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
4. On note m le plus grand des entiers naturels i tels que la famille $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{i-1}(\vec{a})\right)$ soit libre.
   (a) Montrer que $f^m(\vec{a})$ est combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{m-1}(\vec{a})$.
   (b) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $k \geqslant m$, le vecteur $f^k(\vec{a})$ est combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{m-1}(\vec{a})$.
   (c) En déduire que $m = n$ et que la famille $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{m-1}(\vec{a})\right)$ est une base de E.
   (d) On pose $\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \ / \ f \circ g = g \circ f \}$. Montrer que $\mathscr{C}(f) = \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.