

# Chapitre 19 - Matrices et applications linéaires

## 1 Matrices d'une application linéaire

### 1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

**Définition 1.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $x \in E$ , on appelle matrice de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ , la matrice colonne notée  $M_{\mathcal{B}}(x)$  dont les coefficients sont les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$\text{Si } x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, \text{ alors } M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

La matrice dans la base  $\mathcal{B}$  d'une famille de vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $E$  notée  $M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$  est la matrice dont la  $j$ -ième colonne pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  est constituée des  $n$  coordonnées de  $x_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Si pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$  alors

$$M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p) = (a_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

**Remarque 1.1.** La matrice de la famille  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice identité  $I_n$ .

**Exemple 1.1.** Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , on note  $(e_1, e_2)$  une base. Soit  $u = 4e_1 - 3e_2$  et  $v = 2e_1 - e_2$ . Donner les matrices  $M_{(e_1, e_2)}(u, v)$  et  $M_{(u, v)}(e_1, e_2)$ .

La première matrice se trouve directement en écrivant, en colonne, les coordonnées dans la base  $(e_1, e_2)$  de chaque vecteur  $u, v$  :

$$M_{(e_1, e_2)}(u, v) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** On pourra noter au brouillon les vecteurs en colonne haut dessus de la matrice et sur

le côté les vecteurs de la base

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u & v \\ e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

Mais, CELA NE DOIT PAS APPARAÎTRE SUR VOTRE COPIE DE DEVOIR.

Pour la matrice  $M_{(u, v)}(e_1, e_2)$ , il faut d'abord calculer les coordonnées de  $(e_1, e_2)$  : on cherche  $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$  tels que

$$\begin{cases} e_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v \\ e_2 = \alpha_2 u + \beta_2 v \end{cases}$$

On résout le système suivant par opérations sur les lignes :

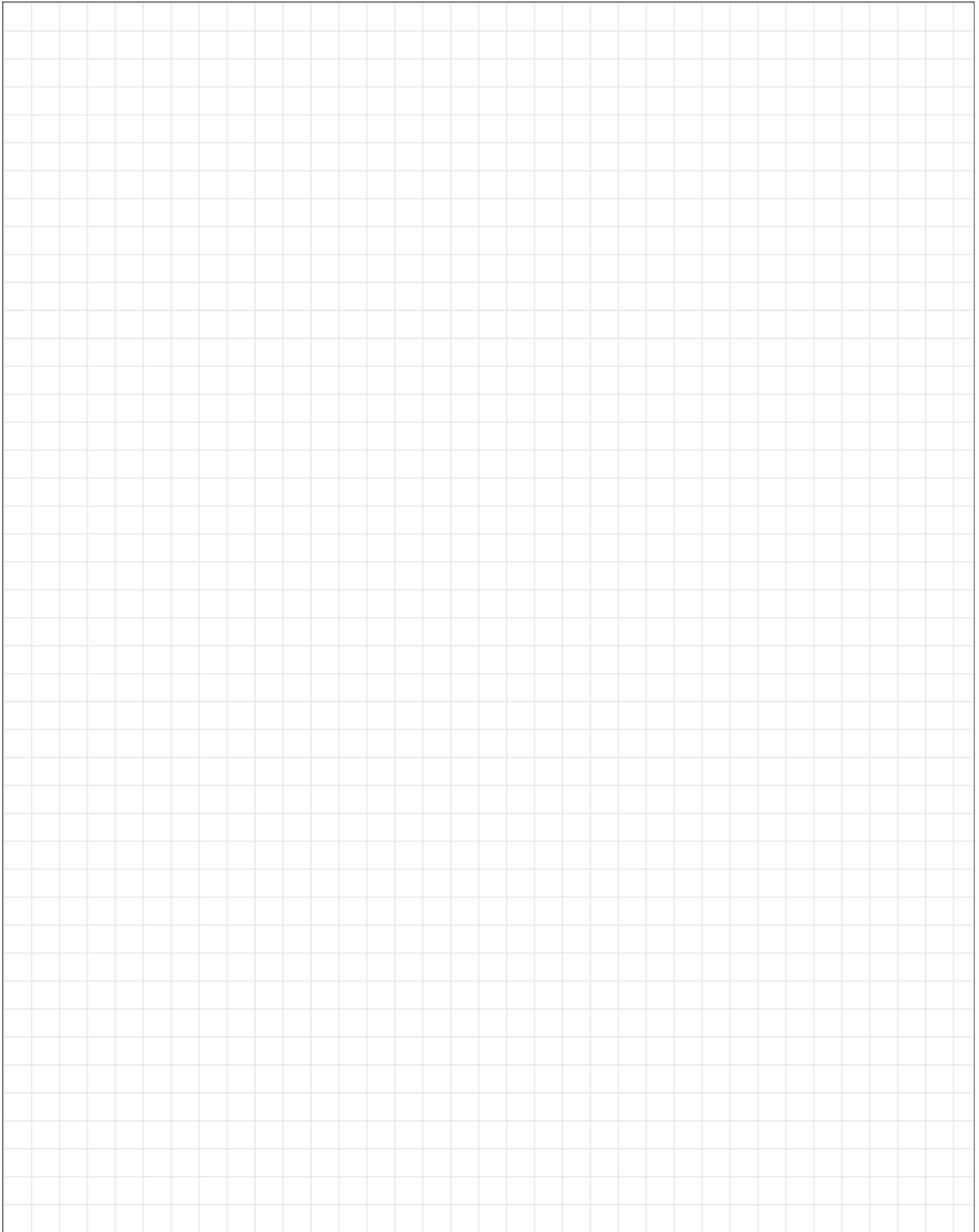
$$\begin{cases} u = 4e_1 - 3e_2 \\ v = 2e_1 - e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - 3v = -2e_1 \\ u - 2v = -e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(-u + 3v) \\ e_2 = -u + 2v \end{cases}$$

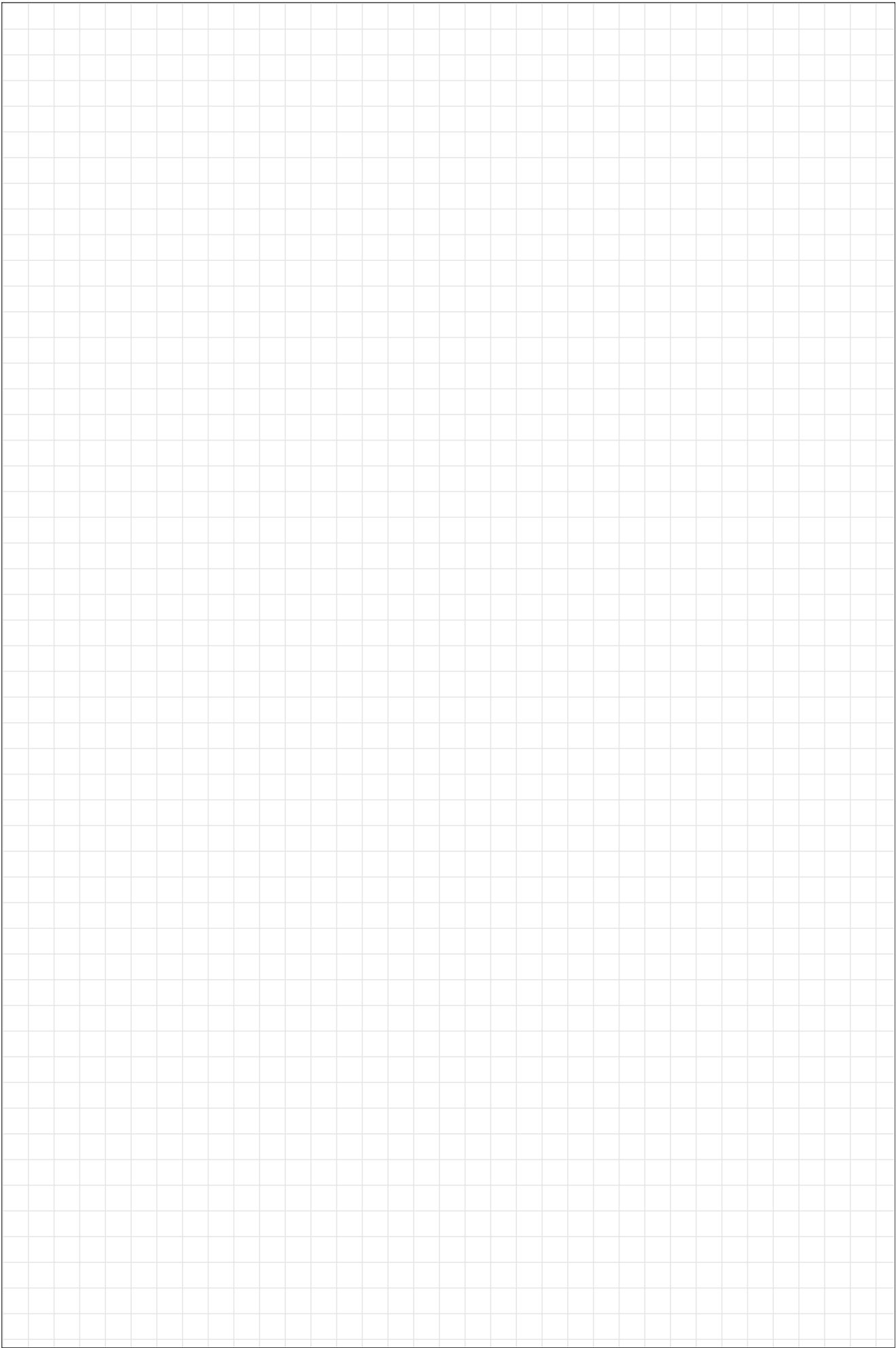
Ce qui nous donne la matrice

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ u \\ v \end{matrix} \text{ soit } M_{(u, v)}(e_1, e_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**Exemple 1.2.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , écrivons la matrice de  $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 3, 0)$ ,  $\mathbf{w} = (-2, 0, 1)$ , et  $\mathbf{t} = (0, 0, -1)$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0$  de  $\mathbb{R}^3$ .

On trouve 
$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} & \mathbf{t} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{matrix} \end{pmatrix} \text{ soit } M_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$





## 1.2 Matrice d'une application linéaire

**Définition 1.2.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \dots, f_q)$  une base de  $F$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

On appelle matrice de l'application linéaire  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ , la matrice, notée  $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$ , de la famille de vecteurs  $(u(\mathcal{B}_1))$  dans la base  $\mathcal{B}_2$  :

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) = M_{\mathcal{B}_2}(u(\mathcal{B}_1)) = M_{\mathcal{B}_2}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$$

On a  $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ .

Si on note  $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  et  $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i$  où  $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$  sont les coordonnées du vecteur  $u(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B}_2$ ,

$$\text{alors } M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_j) & u(e_p) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{np} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_i \\ f_n \end{matrix}$$

*Remarque 1.2.* Le nombre de lignes de la matrice est égal à la dimension de l'espace d'arrivée. Le nombre de colonnes est égal à la dimension de l'espace de départ.

**Exemple 1.3.** Soit  $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \longmapsto (x + 2y - z, 3x - 2y + 4z)$ .

Donnons la matrice de  $g$  dans les bases canoniques  $\mathcal{B}_3$  et  $\mathcal{B}_2$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ .

On calcule les images des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_3$  par  $g$  :

$$g(1, 0, 0) = (1, 3), \quad g(0, 1, 0) = (2, -2) \quad g(0, 0, 1) = (-1, 4)$$

Les images donnent directement les coordonnées dans la base canonique  $\mathcal{B}_2 : (1, 3) = 1(1, 0) + 3(0, 1) \dots$

Alors, on a la matrice :

$$M_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(g) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$$

**Exercice 1.1.** Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , soit  $(e_1, e_2)$  une base. On pose  $u = 2e_1 + e_2$  et  $v = e_1 - e_2$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $f(e_1) = u$  et  $f(e_2) = 3v$ . Calculer  $M_{(e_1, e_2)(u, v)}(f)$  et  $M_{(u, v)(e_1, e_2)}(f)$ .

On remarque que  $u$  et  $v$  ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de  $\mathbb{R}^2$ .

On a directement les coordonnées des images de  $(e_1, e_2)$  dans la base  $(u, v)$ , alors,

$$M_{(e_1, e_2)(u, v)}(f) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$$

Pour l'autre matrice, il faut calculer  $f(u)$  et  $f(v)$ .

On a  $u = 2e_1 + e_2$  qui donne  $f(u) = 2f(e_1) + f(e_2)$  soit  $f(u) = 2u + 3v$  et finalement,

$$f(u) = 2(2e_1 + e_2) + 3(e_1 - e_2) = 7e_1 - e_2$$

$$\text{De même, on calcule } f(v) = f(e_1) - f(e_2) = (2e_1 + e_2) - 3(e_1 - e_2) = -e_1 + 4e_2$$

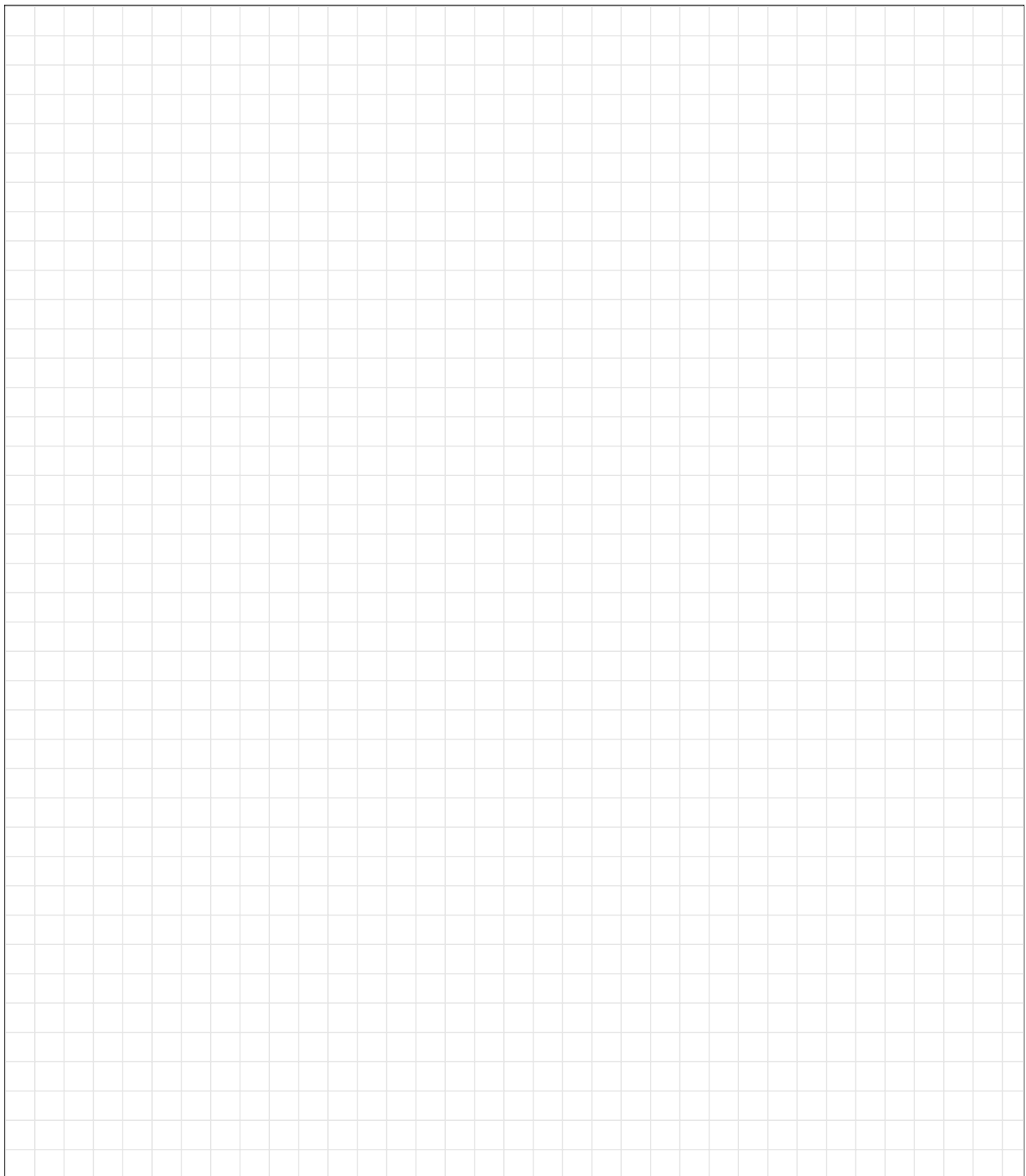
Alors,

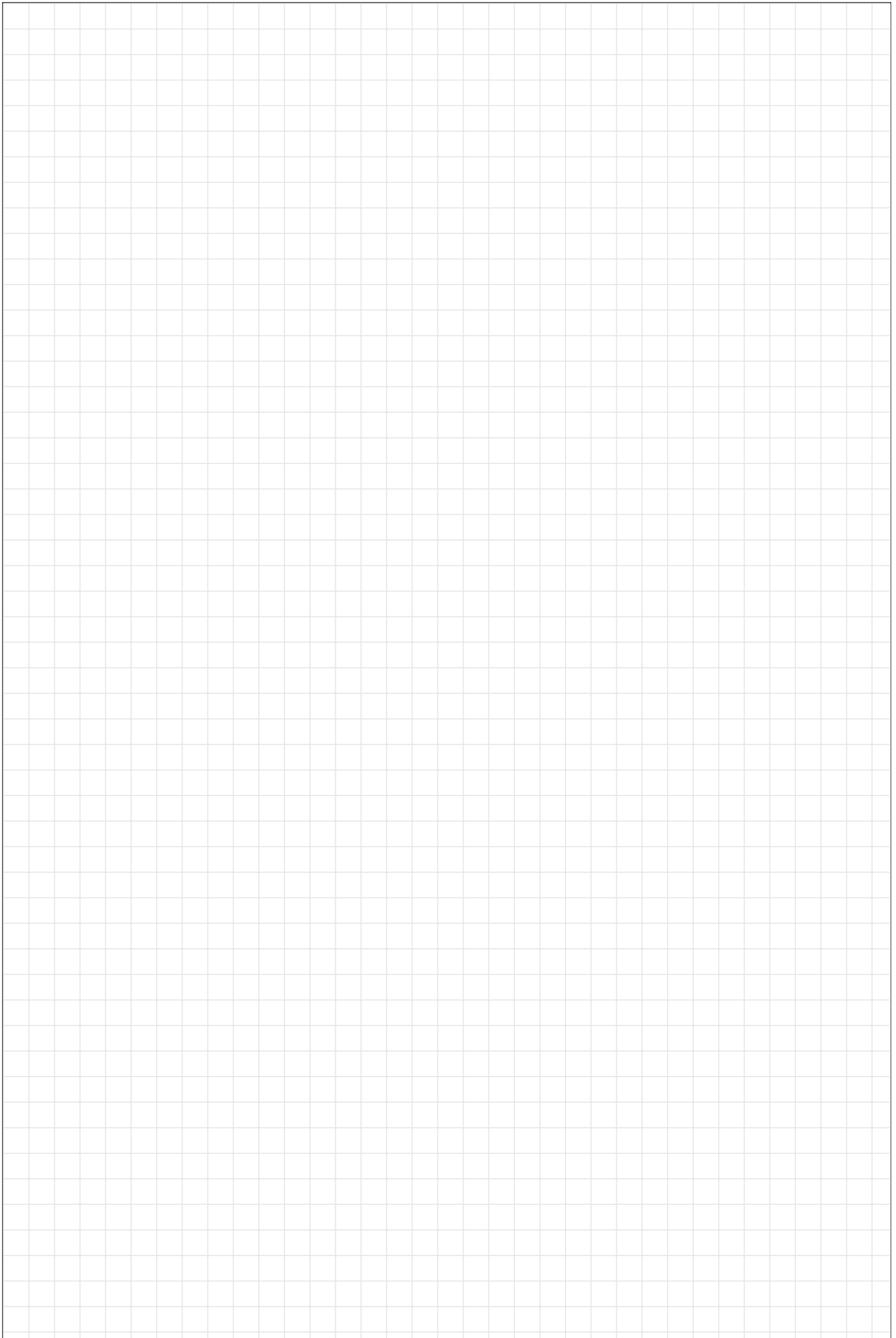
$$M_{(u,v)(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} f(u) & f(v) \\ 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

On peut également calculer les deux matrices

$$M_{(u,v)(u,v)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{(e_1,e_2)(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

où on utilise la même base au départ et à l'arrivée. Cela est possible car  $f$  est un endomorphisme.





### 1.3 Matrice d'un endomorphisme

**Définition 1.3.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $v \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ .

On appelle matrice de l'endomorphisme  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ , la matrice, notée  $M_{\mathcal{B}}(v)$ , de l'application linéaire  $v$  dans le couple de bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}$

$$M_{\mathcal{B}}(v) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(v) = M_{\mathcal{B}}(v(e_1), v(e_2), \dots, v(e_p))$$

*Remarque 1.3.* On utilise la même base au départ et à l'arrivée.

La matrice de l'identité  $id_E$  est la matrice identité  $I_p$ .

**Exercice 1.2.** Donner la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  de l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto 2P - 2(X+1)P' + X^2P'' \end{aligned}$$

On commence par calculer l'image des vecteurs de la base par  $\varphi$  :

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(X) = 2X - 2(X+1) = -2, \quad \varphi(X^2) = 2X^2 - 2(X+1)2X + 2X^2 = -4X,$$

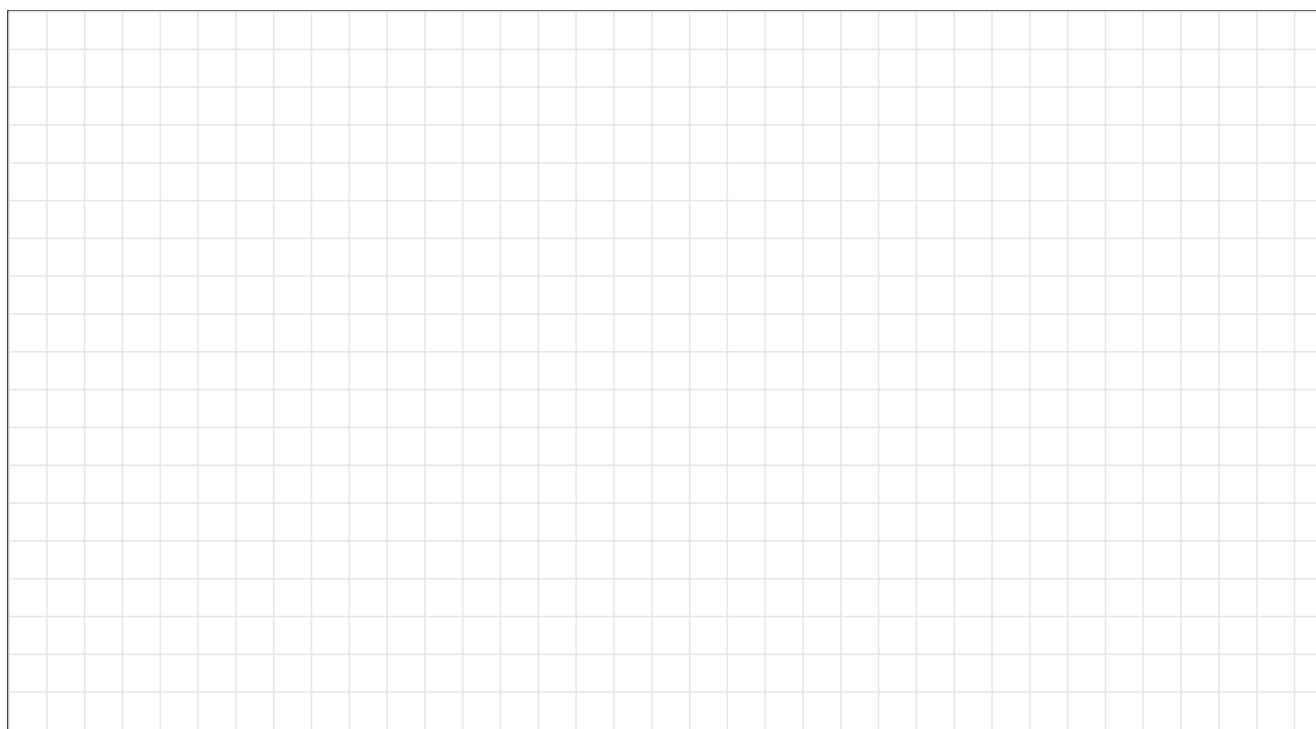
$$\varphi(X^3) = 2X^3 - 2(X+1)3X^2 + 6X^3 = -4X = 2X^3 - 6X^2$$

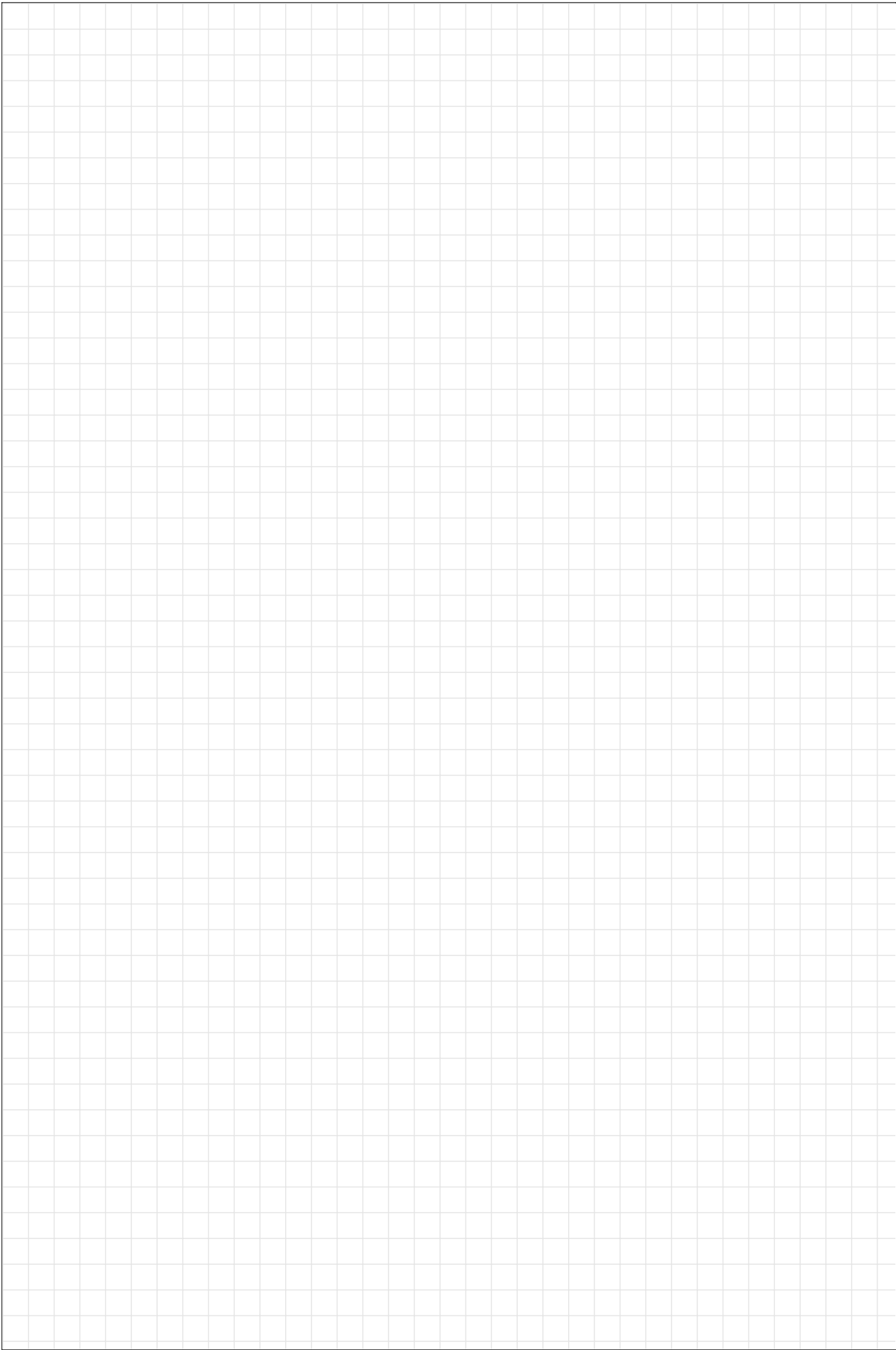
Alors, on peut écrire la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{matrix} \quad \text{soit} \quad M_{(1, X, X^2, X^3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** La base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  peut aussi s'écrire dans l'ordre décroissant des puissances :  $(X^3, X^2, X, 1)$ . C'est une autre base.

La matrice de  $\varphi$  dans cette base s'écrit :  $M_{(X^3, X^2, X, 1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$







## 1.4 Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

**Proposition 1.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie de base  $\mathcal{B}$ . soit  $x, y \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ , on a

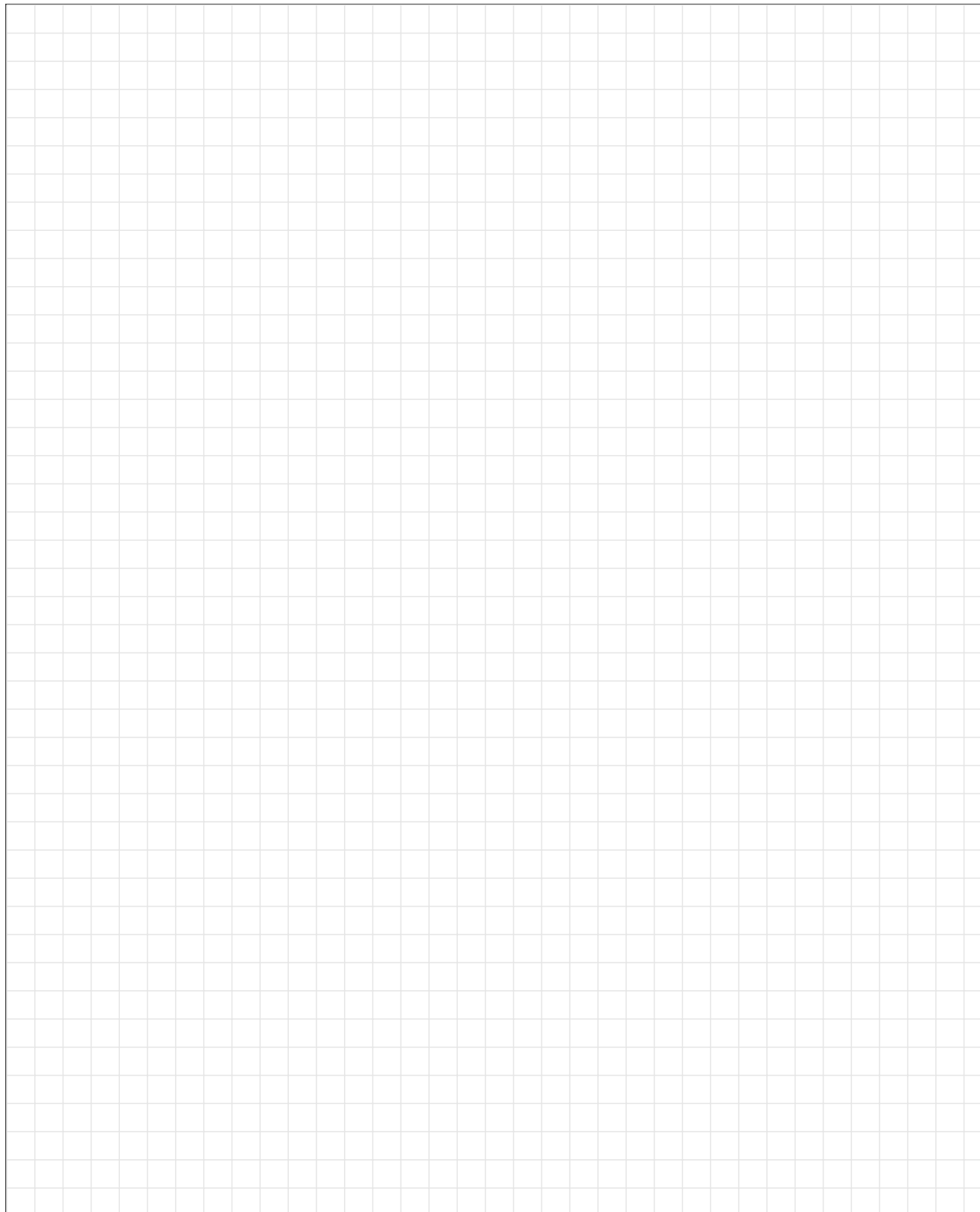
$$M_{\mathcal{B}}(\alpha x + y) = \alpha M_{\mathcal{B}}(x) + M_{\mathcal{B}}(y)$$

**Proposition 1.2.** Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie.

Soit  $\mathcal{B}_1$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_2$  une base de  $F$ .

Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\alpha u + v) = \alpha M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) + M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(v).$$



## 2 Matrices et applications linéaires

### 2.1 Calcul des coordonnées de l'image

**Proposition 2.1.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension  $p$  et  $q$ ,  $\mathcal{B}_1$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_2$  une base de  $F$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de matrice  $A$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  :  $A = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(u)$ .

Si  $\mathbf{x} \in E$  a pour matrice  $X$  dans  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathbf{y} = u(\mathbf{x})$  a pour matrice  $Y$  dans  $\mathcal{B}_2$ , alors on a

$$Y = AX \quad \text{soit} \quad M_{\mathcal{B}_2}(u(\mathbf{x})) = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(u) \cdot M_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{x}).$$

*Démonstration.*

Soit  $\mathbf{x} \in E$  de matrice dans la base  $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p) : X = M_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  avec  $\dim E = p$ .

On note  $\mathbf{y} = u(\mathbf{x})$  de matrice dans la base  $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_q) : Y = M_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$  avec

$\dim F = q$ .

On note  $M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(u) = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} = A$  la matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ ,

c'est à dire  $u(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^q a_{ij} \mathbf{f}_i$  pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$

On a alors,

$$u(\mathbf{x}) = u\left(\sum_{j=1}^p x_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j u(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^q a_{ij} \mathbf{f}_i$$

soit

$$\mathbf{y} = u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^q \left( \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right) \mathbf{f}_i \text{ Mais, on a également, } \mathbf{y} = \sum_{i=1}^q y_i \mathbf{f}_i. \text{ Alors par unicité des coordonnées}$$

dans la base  $\mathcal{B}_2$ , on a  $\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad y_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j$

C'est exactement la définition du produit  $AX$ . On a donc montré  $Y = AX$ .

□

**Exemple 2.1.** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  de matrice  $U = M_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  dans la base canonique.

On peut calculer l'image d'un vecteur  $\mathbf{a} = (x, y)$  en passant par sa matrice par  $U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$

Alors,  $u(\mathbf{a})$  a pour coordonnées  $(3x - y, 2x + 4y)$  ce qui donne ici,  $u(\mathbf{a}) = (3x - y, 2x + 4y)$  car on a utilisé la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

L'expression analytique de  $u$  est :  $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$

**Exemple 2.2.** Soit  $r$  la rotation de matrice  $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0$  de  $\mathbb{R}^2$

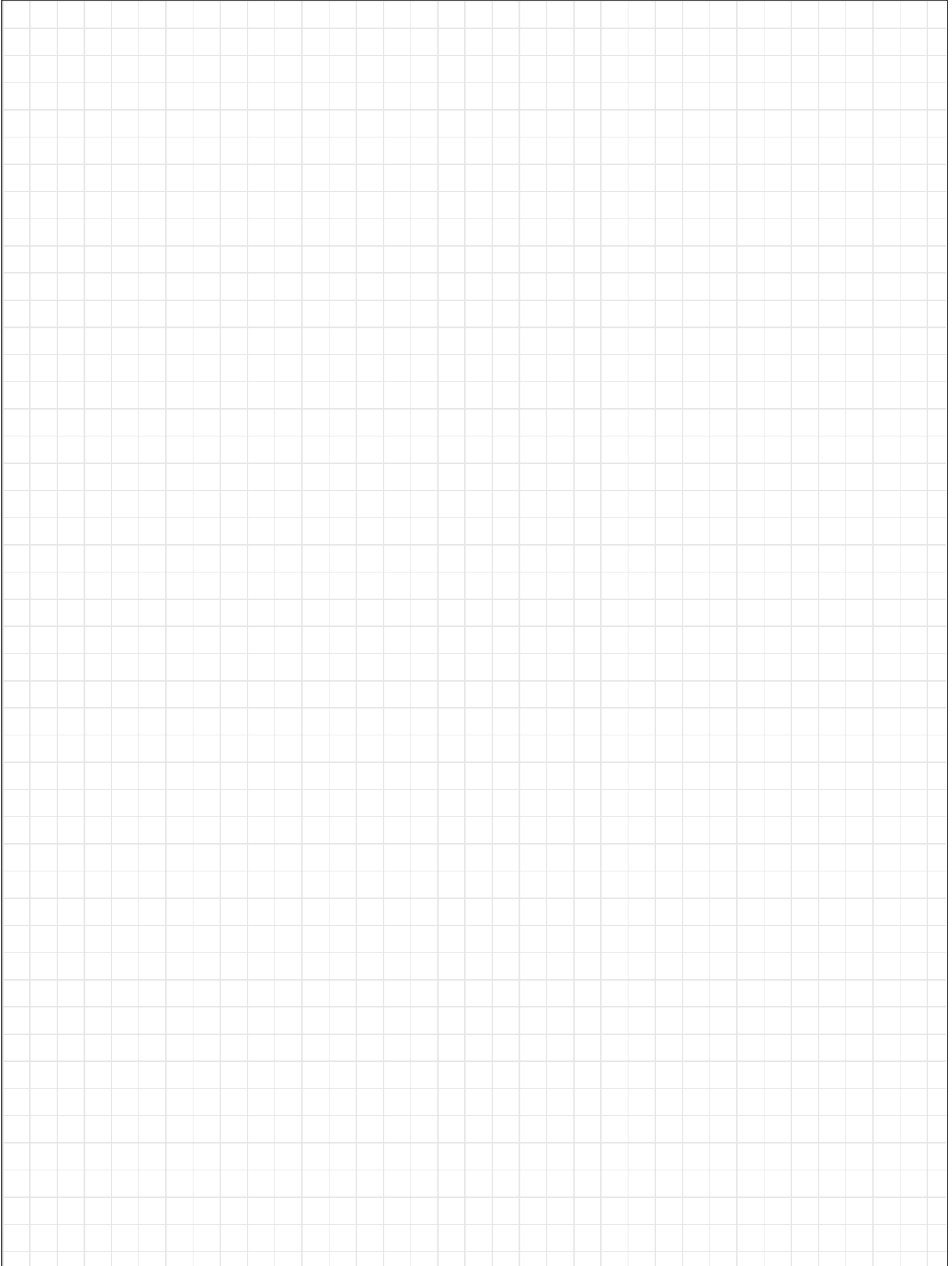
Calculer l'image des vecteurs  $(1, 0)$  puis  $(0, 1)$ . En déduire l'angle de la rotation.

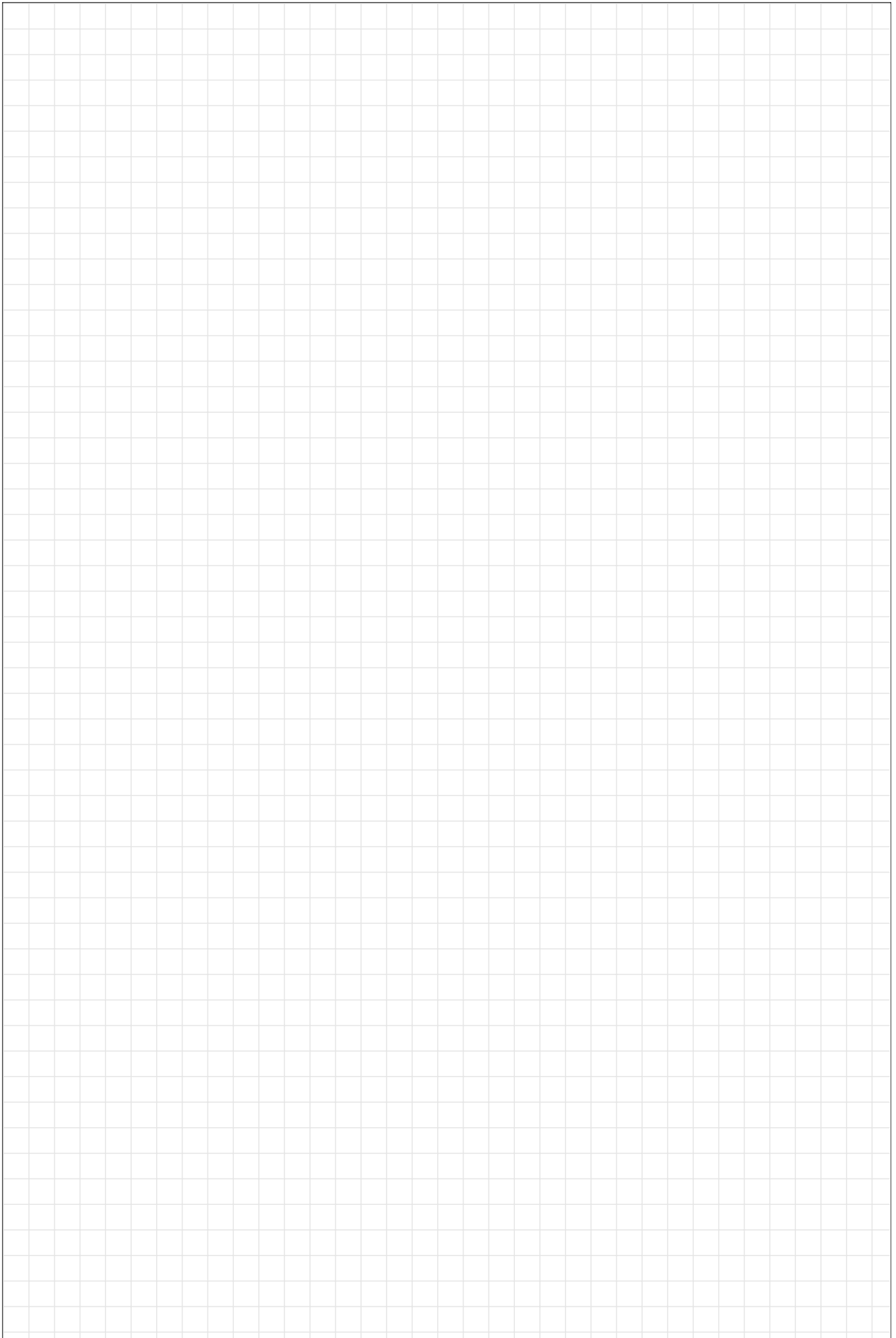
Calculer l'image du vecteur de coordonnées  $(2, 3)$ .

Déterminer la matrice d'une rotation d'angle  $\theta$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

Remarque 2.1. On considère 
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longmapsto (2x + y, x - y, 3x + 2y) .$$

Calculer la matrice de  $g$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .





## 2.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires

**Théorème 2.2.** Soit  $n, p, q$  des entiers non nuls. Soit  $E, F, G$  des espaces vectoriels de dimensions respectives  $n, p$  et  $q$  et ayant pour bases respectives  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_3$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de matrice  $A$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$  de matrice  $B$  dans les bases  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_3$ .

Alors  $BA$  est la matrice de  $v \circ u$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_3$  :

$$M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}(v) \cdot M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(u).$$

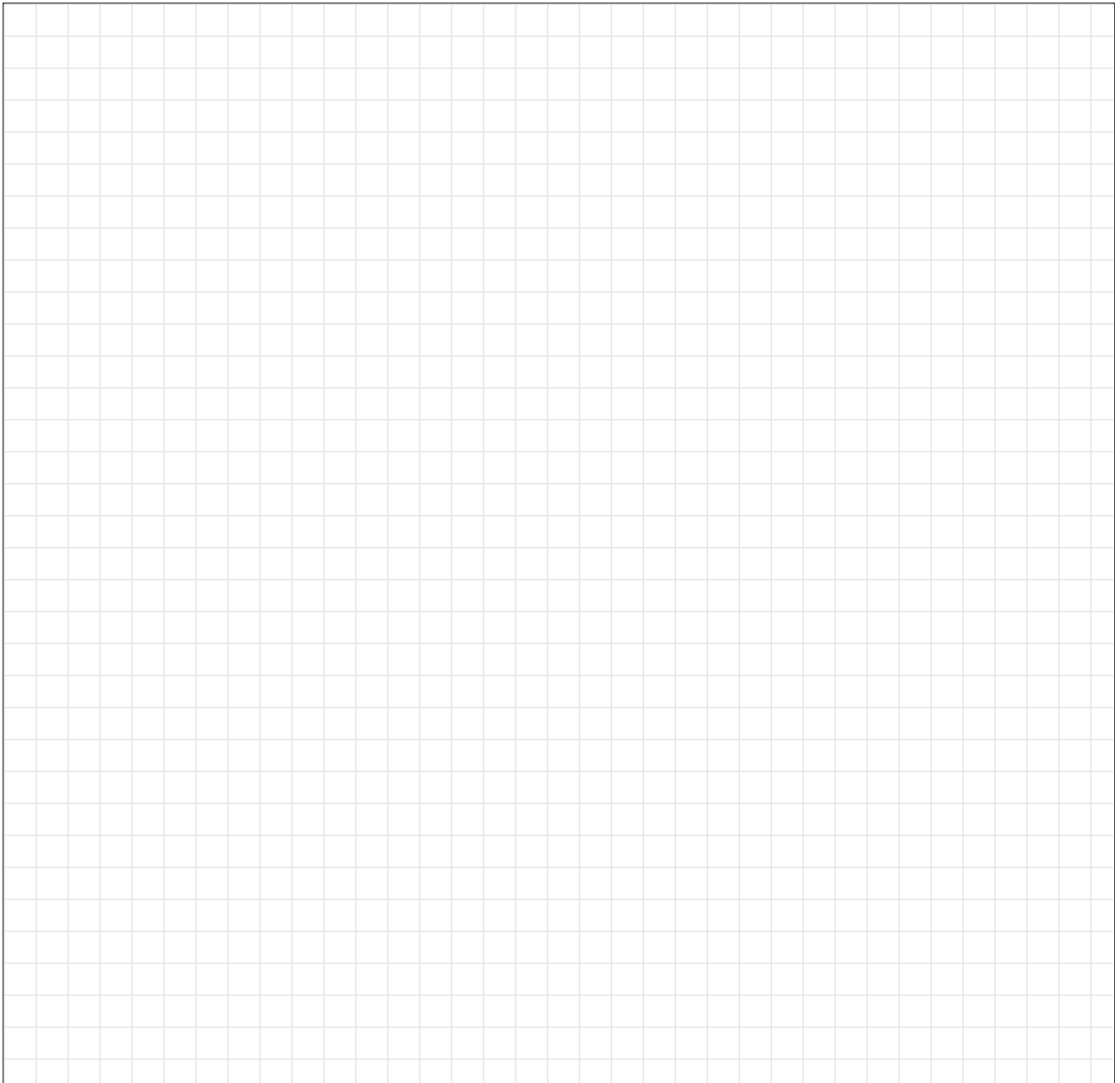
*Démonstration.* On a par définition de la matrice de l'application linéaire  $v \circ u$  :

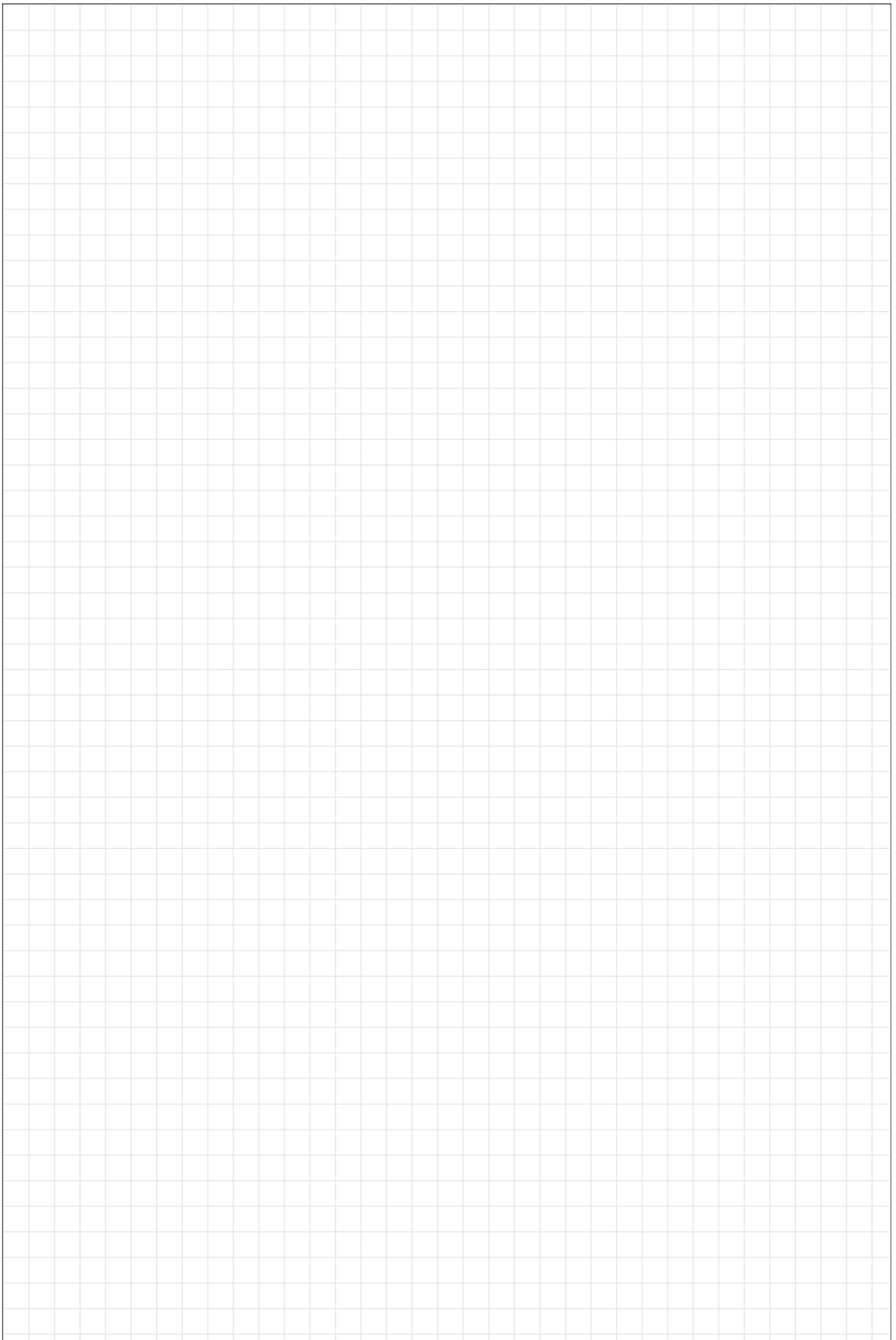
$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3}(v \circ u) &= M_{\mathcal{B}_3}(v \circ u)(\mathcal{B}_1) = M_{\mathcal{B}_3}(v(u(\mathcal{B}_1))) \\ &= M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}(v) \cdot M_{\mathcal{B}_2}(u(\mathcal{B}_1)) \quad \text{par propriété du calcul de l'image d'un vecteur par } v \\ &= M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}(v) \cdot M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(u) \cdot M_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) \quad \text{par calcul de l'image d'un vecteur par } u \end{aligned}$$

Or, on a  $M_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1)$  qui est la matrice identité d'où

$$M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}(v) \cdot M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(u).$$

□





## 2.3 Matrices inversibles et isomorphismes

**Théorème 2.3.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies de bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$f$  est un isomorphisme si et seulement si la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est carrée et inversible.

Dans ce cas, la matrice de l'application réciproque  $f^{-1}$  est la matrice inverse de la matrice de l'application  $f$  :

$$M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f))^{-1}$$

*Démonstration.*

Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ , alors  $f$  a une réciproque  $f^{-1}$  de  $F$  dans  $E$  et  $f^{-1}$  est linéaire.

On a  $f \circ f^{-1} = id_F$ .

De plus,  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels de même dimension  $n$  car ils sont isomorphes. Alors les matrices de  $f$  et  $f^{-1}$  dans n'importe quelles bases sont carrées.

En utilisant les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ , on a  $M_{\mathcal{B}_2}(f \circ f^{-1}) = M_{\mathcal{B}_2}(id_F) = I_n$

Mais la matrice de la composée de deux applications est le produit des matrices des applications :

$$M_{\mathcal{B}_2}(f \circ f^{-1}) = M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \cdot M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f^{-1})$$

$$\text{On a donc } M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \cdot M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f^{-1}) = I_n$$

Ce qui prouve que la matrice de  $f$  est inversible et  $M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f))^{-1}$

Réciproquement, si la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est carrée et inversible, alors soit  $B$  son inverse.

On sait que  $E$  et  $F$  ont la même dimension car la matrice de  $f$  est carrée.

$B$  est une matrice carrée qui correspond à une unique application linéaire  $g$  de  $F$  dans  $E$  dont  $B$  est la matrice dans les bases  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_1$  :  $B = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(g)$ .

En effet, une application linéaire est définie de manière unique par l'image d'une base et chaque colonne de  $B$  définit l'image d'un des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_2$ .

Alors, on a  $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \cdot M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(g) = I_n$  qui donne  $M_{\mathcal{B}_2}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}_2}(id_F)$

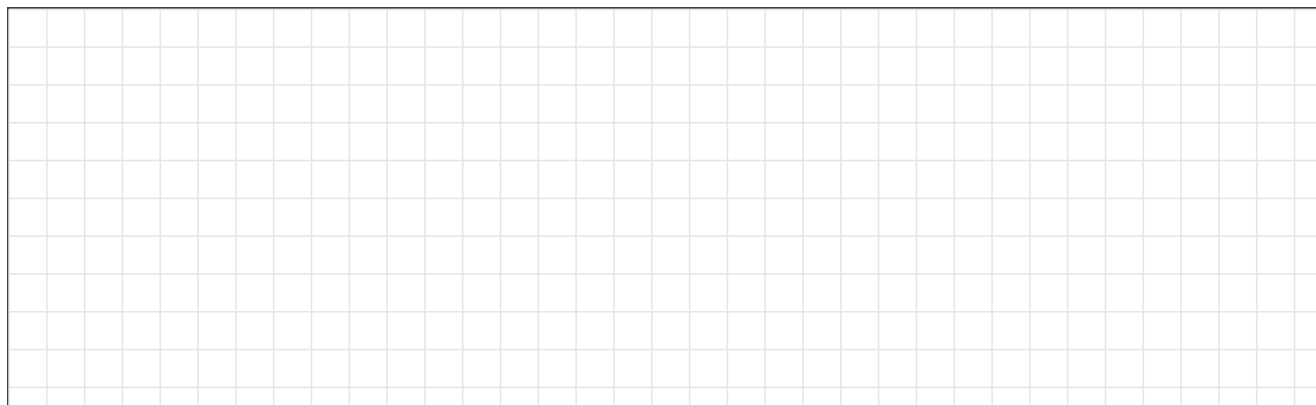
et  $M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(g) \cdot M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = I_n$  qui donne  $M_{\mathcal{B}_1}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_1}(id_E)$

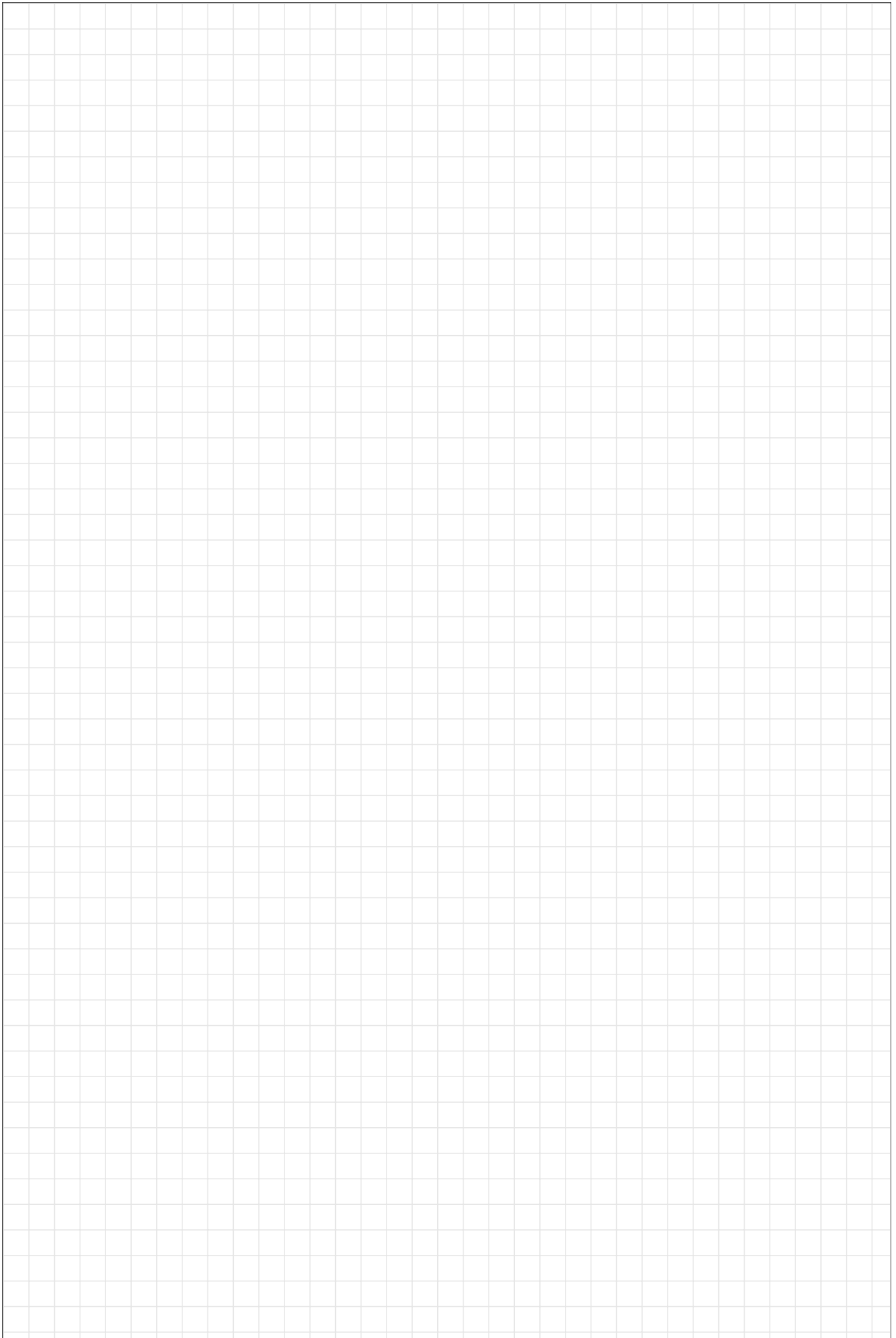
On en déduit, par isomorphisme entre l'application linéaire et sa matrice quand les bases sont fixées, que  $f \circ g = id_F$  et  $g \circ f = id_E$  ce qui prouve que  $f$  est bijective et  $f^{-1} = g$ . Donc  $f$  est un isomorphisme.

On a bien prouvé l'équivalence :

$f$  est un isomorphisme si et seulement si la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est carrée et inversible.

□







### 3 Changements de bases

#### 3.1 Matrices de passage

**Définition 3.1.** Soit  $E$  un espace de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ .

On appelle matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  notée  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  la matrice de la famille  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$  :  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

**Lemme 3.1.** La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}' \mathcal{B}}(id_E)$ .

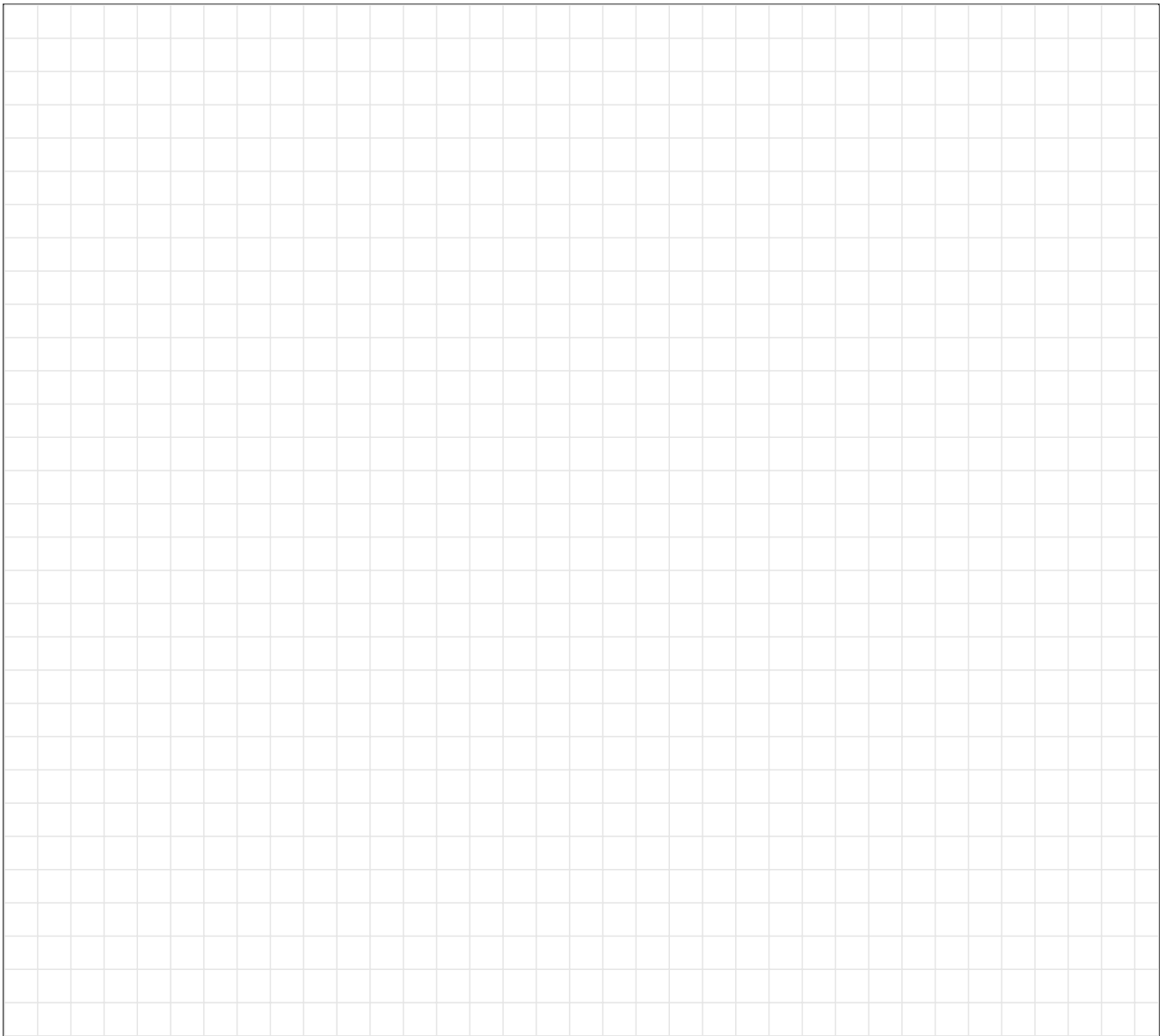
**Théorème 3.2.** Une matrice de passage est inversible et  $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1}$ .

*Démonstration.*  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  est la matrice de l'application identité qui est un isomorphisme, alors  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  est inversible et

$$(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = M_{\mathcal{B} \mathcal{B}'}(id_E^{-1}) M_{\mathcal{B}' \mathcal{B}}(id_E) = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}.$$

□

**Lemme 3.3.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  de dimension  $n$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  une famille de vecteurs de  $E$ .  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une base de  $E$  si et seulement si  $M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est inversible.



### 3.2 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur

**Théorème 3.4.** Soit  $E$  un espace de dimension finie,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

Si  $x \in E$ , on note  $X = M_{\mathcal{B}}(x)$  et  $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$ , alors, on a la relation  $X = PX'$  qui donne les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base.

$$M_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}(id_E) \cdot M_{\mathcal{B}'}(x)$$

*Démonstration.* La relation :

$$X = M_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{B}}(id_E(x)) = M_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}(id_E) \cdot M_{\mathcal{B}'}(x) = P_{B \rightarrow B'} \cdot M_{\mathcal{B}'}(x) = PX'$$

prouve le théorème. □

*Démonstration.* Par calcul direct :

Soit  $x \in E$ .  $x$  s'écrit  $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  ce qui donne la matrice de  $x$  dans

$$\mathcal{B} : X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ avec } \dim E = p.$$

Mais  $x$  s'écrit aussi  $x = \sum_{j=1}^p x'_j e'_j$  dans la base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$

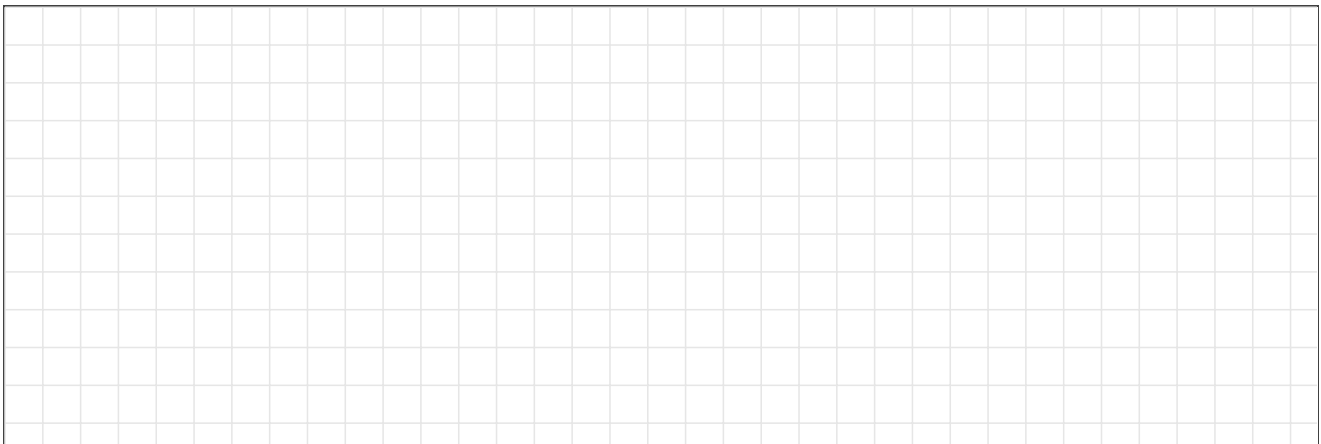
$$\text{On note } X' \text{ la matrice dans la base } \mathcal{B}' \text{ de } x : X' = M_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}.$$

On note la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  :  $P = P_{B \rightarrow B'} = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$  avec  $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, e'_j = \sum_{i=1}^p a_{ij} e_i$

$$\text{Alors, } x = \sum_{j=1}^p x'_j e'_j = \sum_{j=1}^p x'_j \left( \sum_{i=1}^p a_{ij} e_i \right) \text{ soit } x = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^p a_{ij} x'_j \right) e_i$$

$$\text{On reconnaît les coefficients de la matrice } PX' \text{ car } PX' = \left( \sum_{j=1}^p a_{ij} x'_j \right)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}.$$

$$\text{Alors, } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} x'_j \text{ ce qui prouve que } X = PX'. \quad \square$$



### 3.3 Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

**Théorème 3.5.** Soit  $E$  un espace de dimension finie et deux bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}'_1$ .

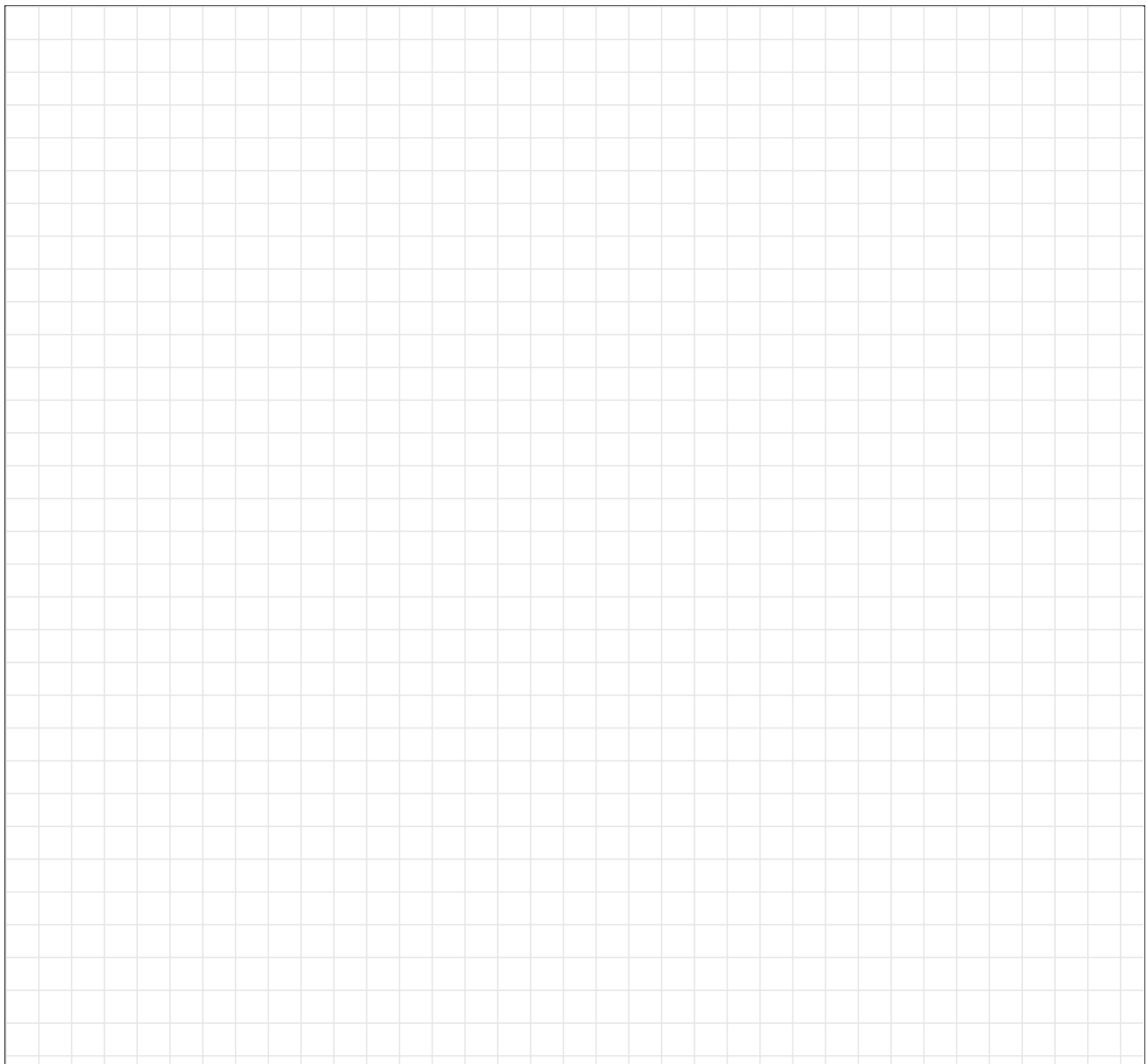
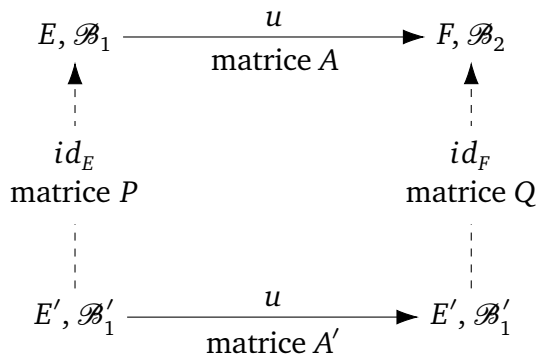
Soit  $F$  un espace vectoriel de dimension finie et deux bases  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}'_2$ .

Soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}'_1$ . Soit  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_2$  à  $\mathcal{B}'_2$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de matrice  $A$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  et de matrice  $A'$  dans les bases  $\mathcal{B}'_1$  à  $\mathcal{B}'_2$ .

On a  $A' = Q^{-1}AP$  soit  $M_{\mathcal{B}'_2 \mathcal{B}'_1}(u) = M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}'_2}(id_F) \cdot M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(u) \cdot M_{\mathcal{B}'_1 \mathcal{B}_1}(id_E)$

*Remarque 3.1.* On a le schéma suivant qui n'a aucune valeur sauf mnémotechnique :

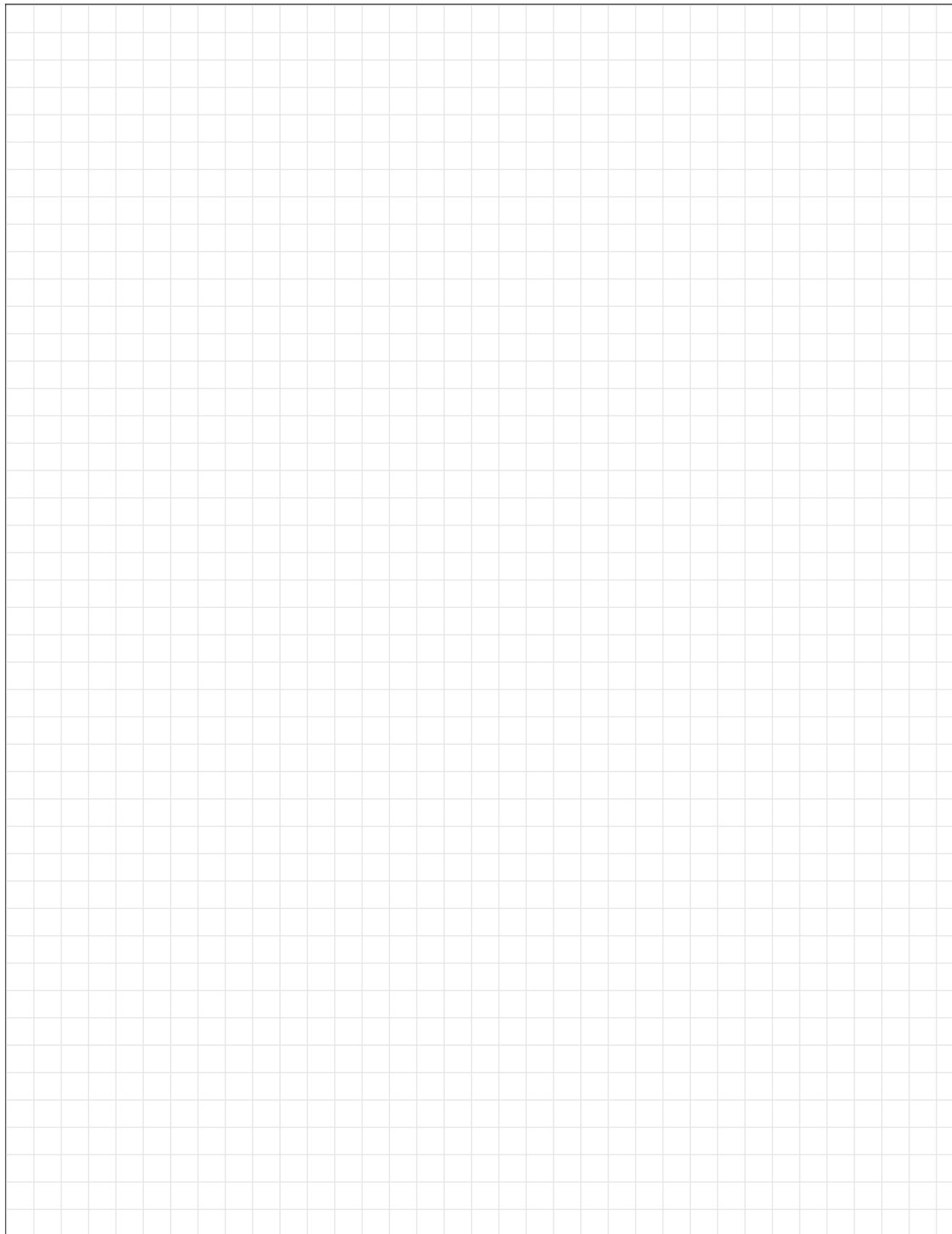


### 3.4 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

**Théorème 3.6.** Soit  $E$  un espace de dimension finie,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  de matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$  et de matrice  $A'$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

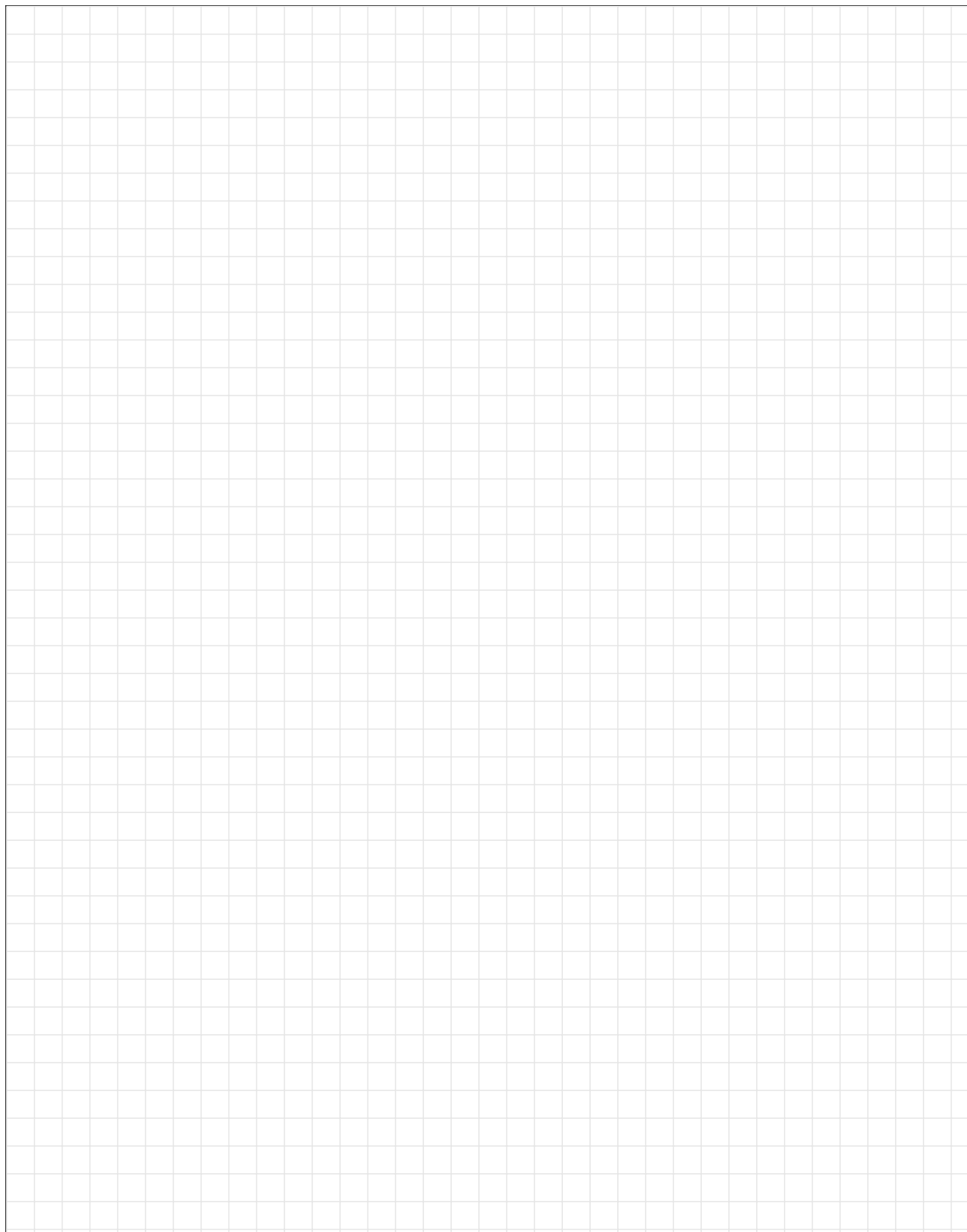
On a  $A' = P^{-1}AP$ . soit  $M_{\mathcal{B}'}(u) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_E) \cdot M_{\mathcal{B}}(u) \cdot M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_E)$

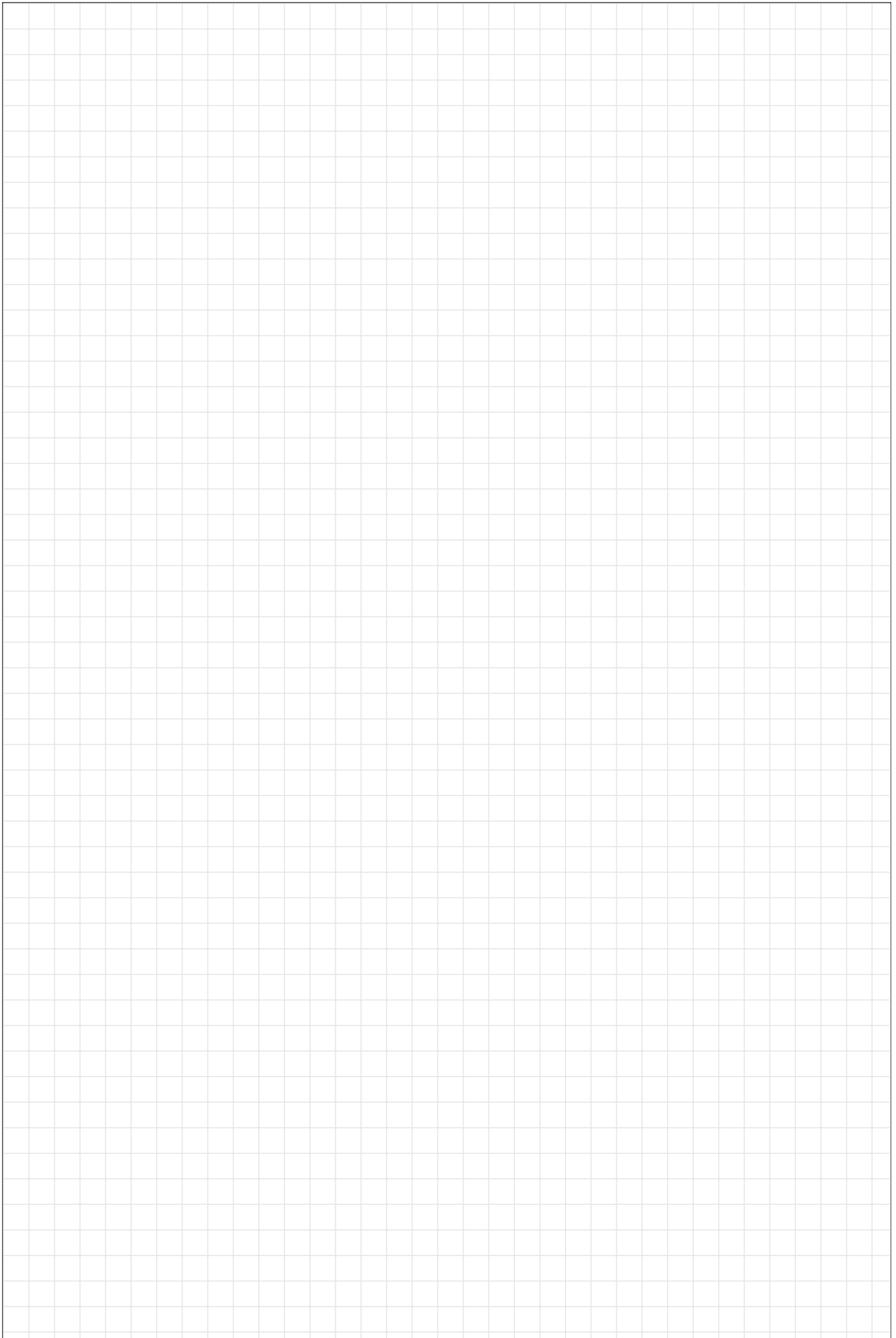


## 4 Rang d'une matrice

### 4.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

**Définition 4.1.** Soit  $A$  matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . On appelle application linéaire canoniquement associée à  $A$ , l'unique application linéaire de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$  dont la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathbb{K}^n$  est  $A$ .



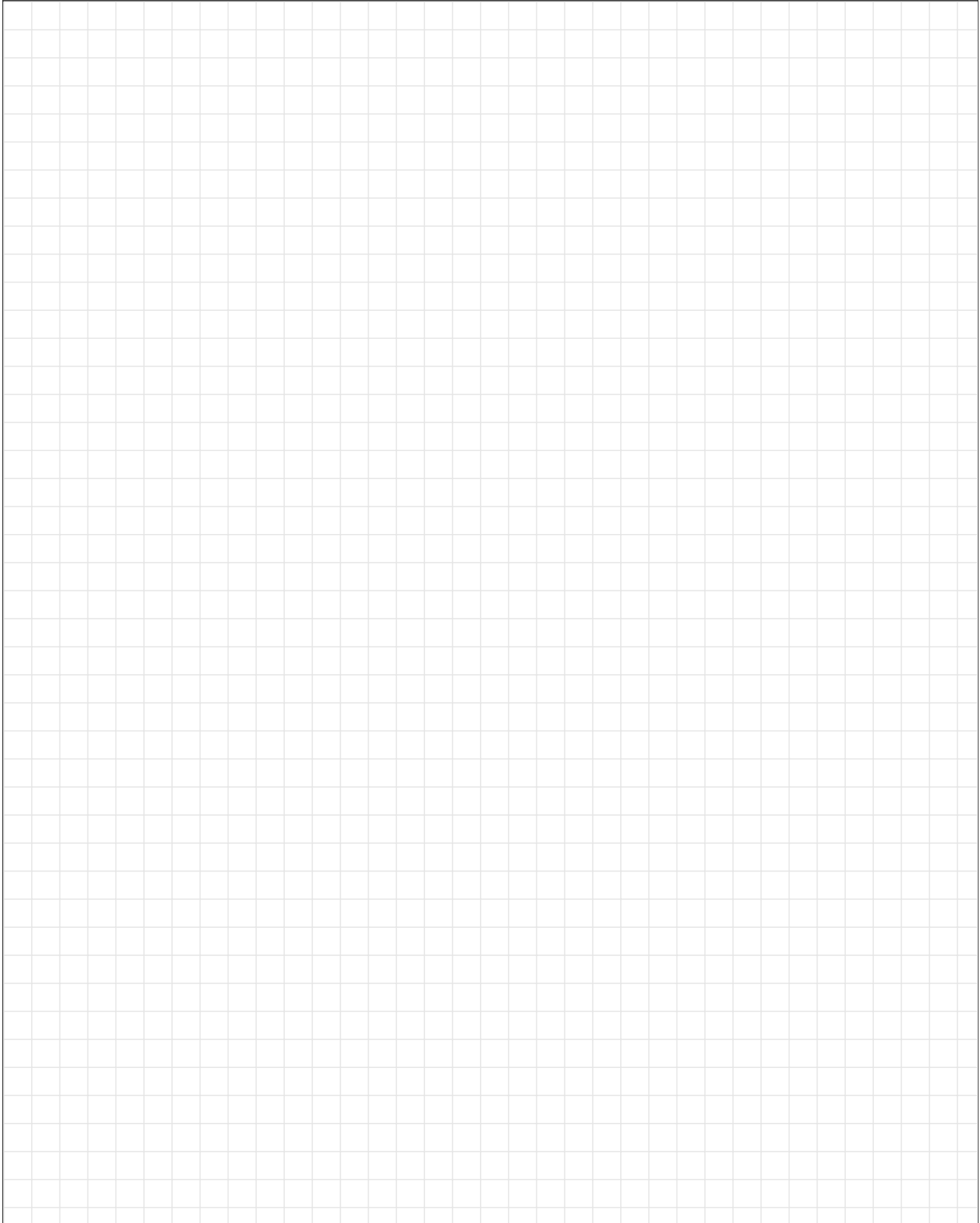


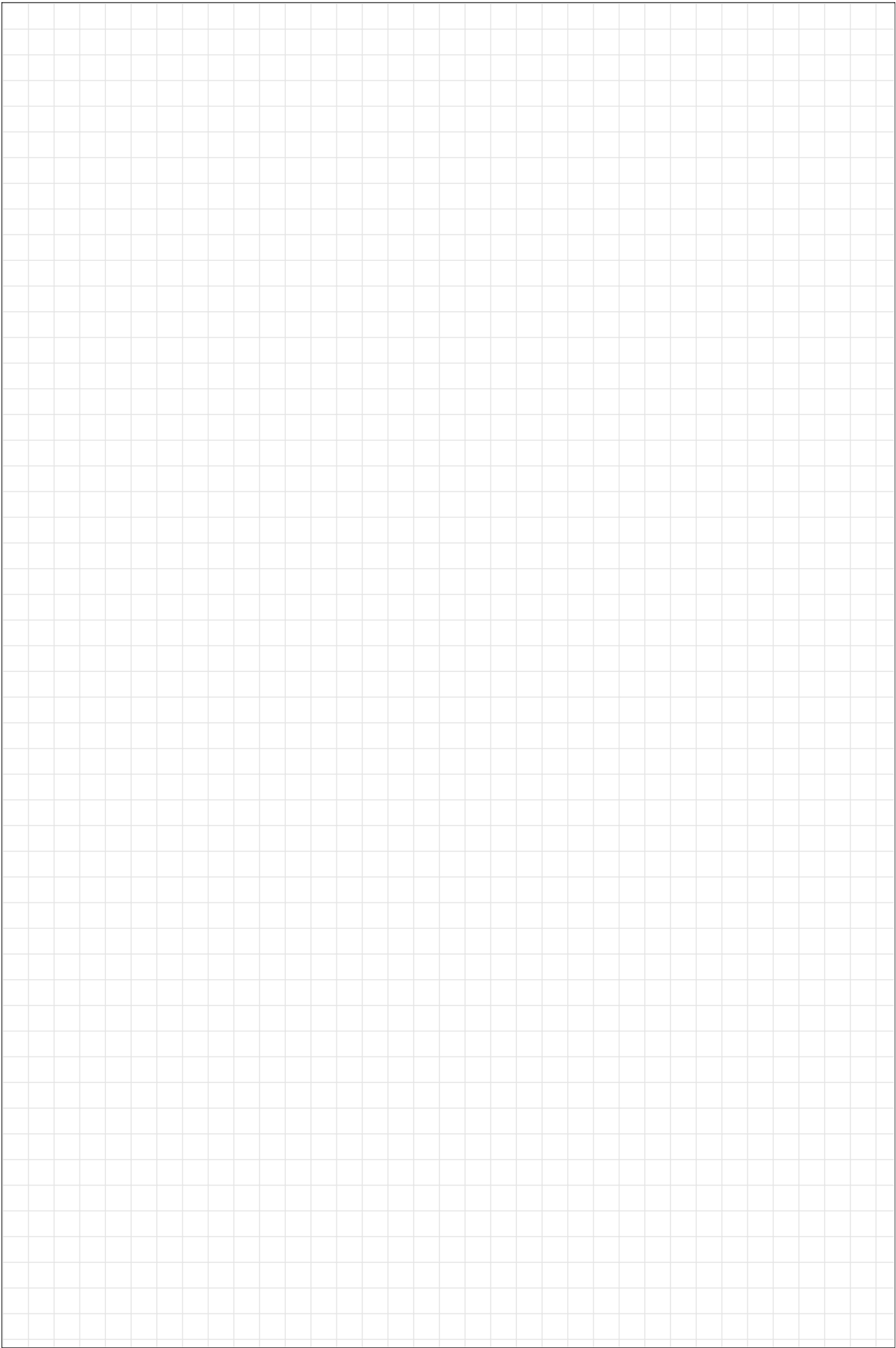
## 4.2 Image et noyau d'une matrice

**Définition 4.2.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  une matrice. On appelle noyau et image de  $A$  notés  $\text{Ker} A$  et  $\text{Im} A$  les noyaux et images de l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

**Proposition 4.1.** *Le noyau d'une matrice  $A$  est l'ensemble des solutions du système  $AX = 0$ .*

*L'image d'une matrice  $A$  est l'ensemble des seconds membres  $B$  pour lesquels le système  $AX = B$  a au moins une solution.*







### 4.3 Rang d'une matrice

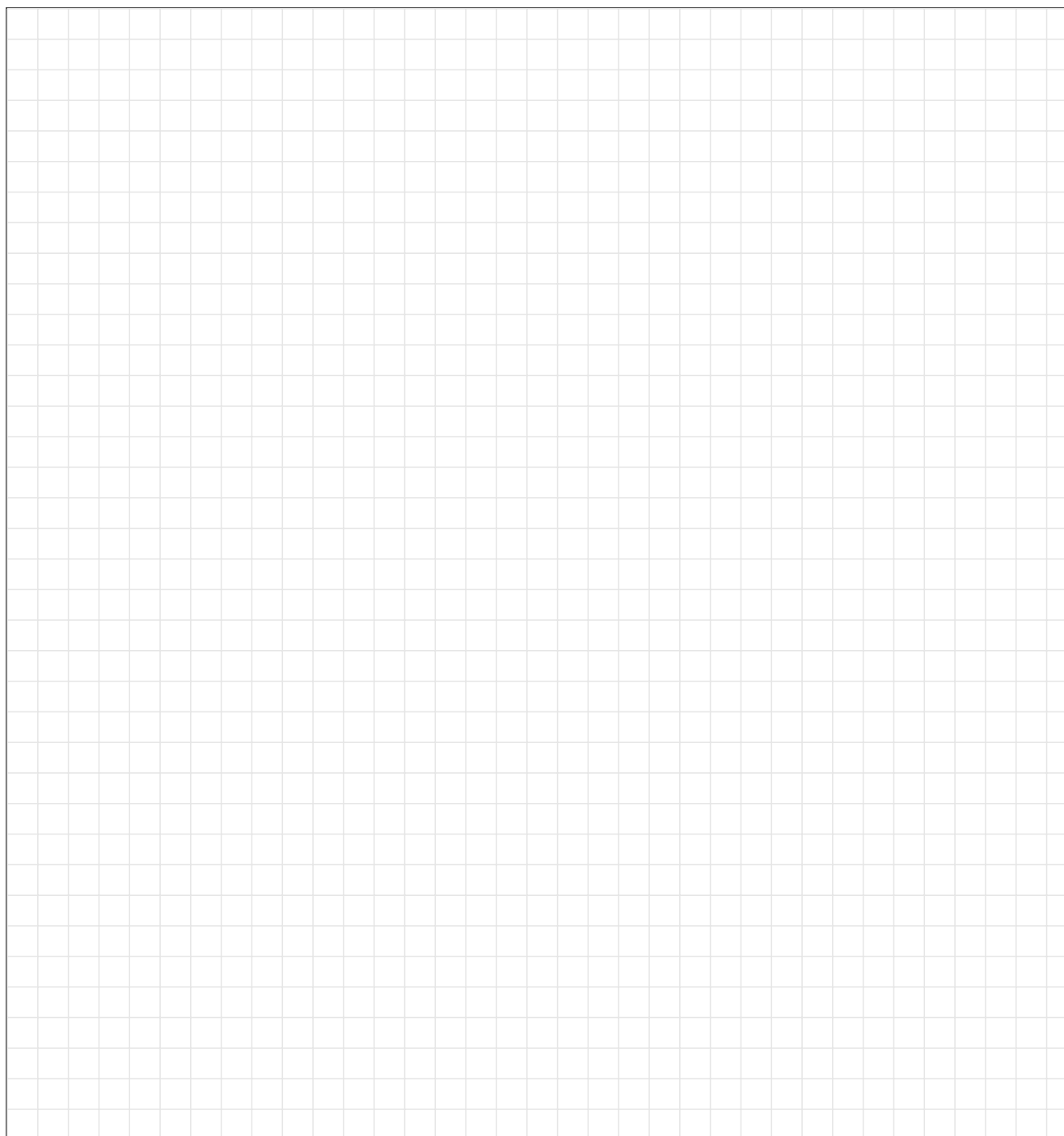
**Théorème 4.2.** *Le rang d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  qui est le nombre de pivots de sa matrice échelonnée réduite par lignes est égal au rang de l'application linéaire associée à  $A$ .*

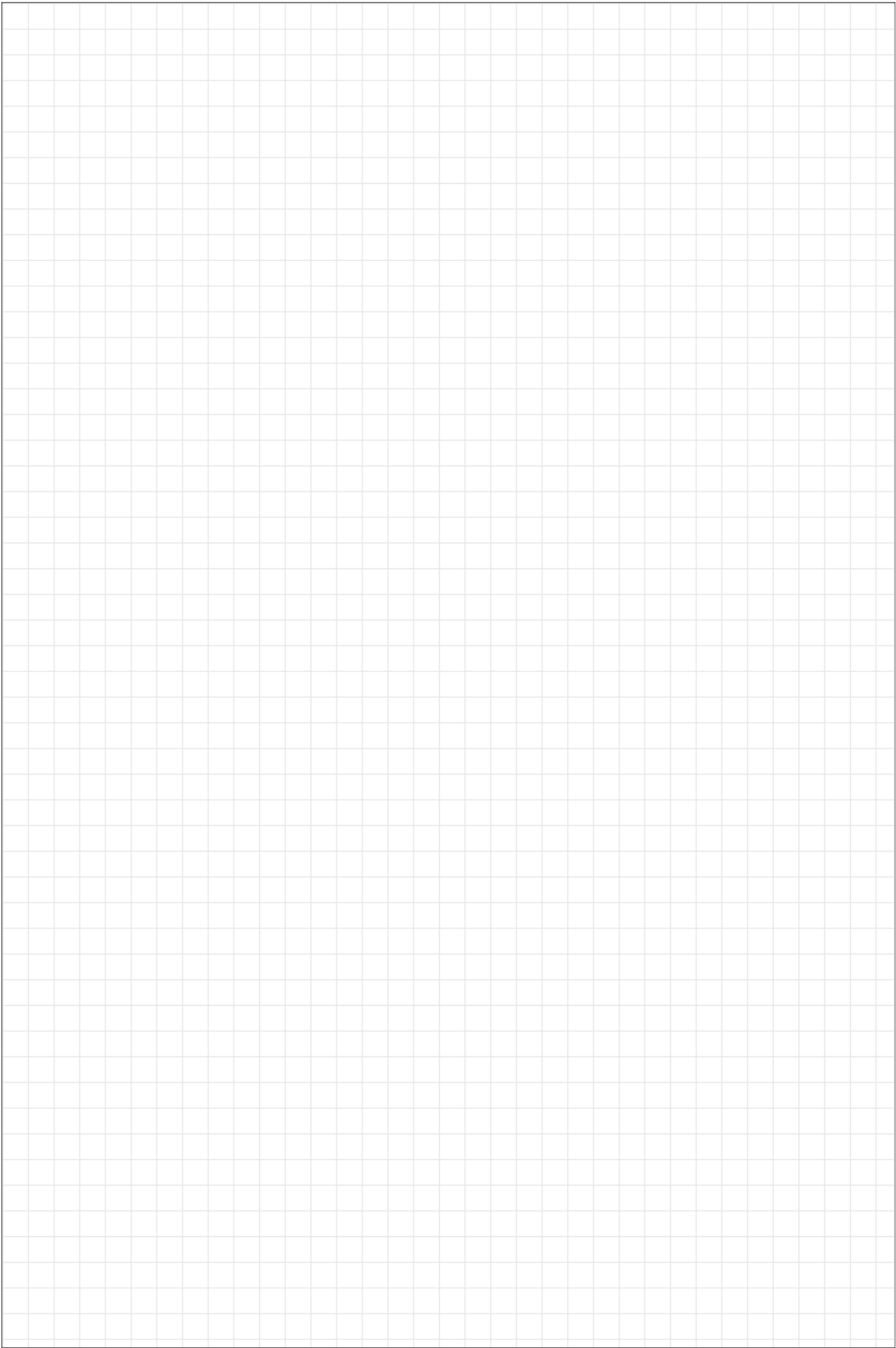
On a  $\text{rg} A = \dim \text{Im} A$ .

**Corollaire 4.3.** *Le rang d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est égal au rang des vecteurs colonnes de  $A$  dans  $\mathbb{K}^n$ .*

**Corollaire 4.4.** *Étant donnée une base  $\mathcal{B}$  d'un espace vectoriel  $E$ , le rang d'une famille de vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $E$  est égal au rang de la matrice des vecteurs dans la base  $\mathcal{B}$  :  $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \text{rg} M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$*

**Corollaire 4.5.** *Le rang d'une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  est le rang de la matrice de  $u$  dans n'importe quelles bases de  $E$  et  $F$ .*



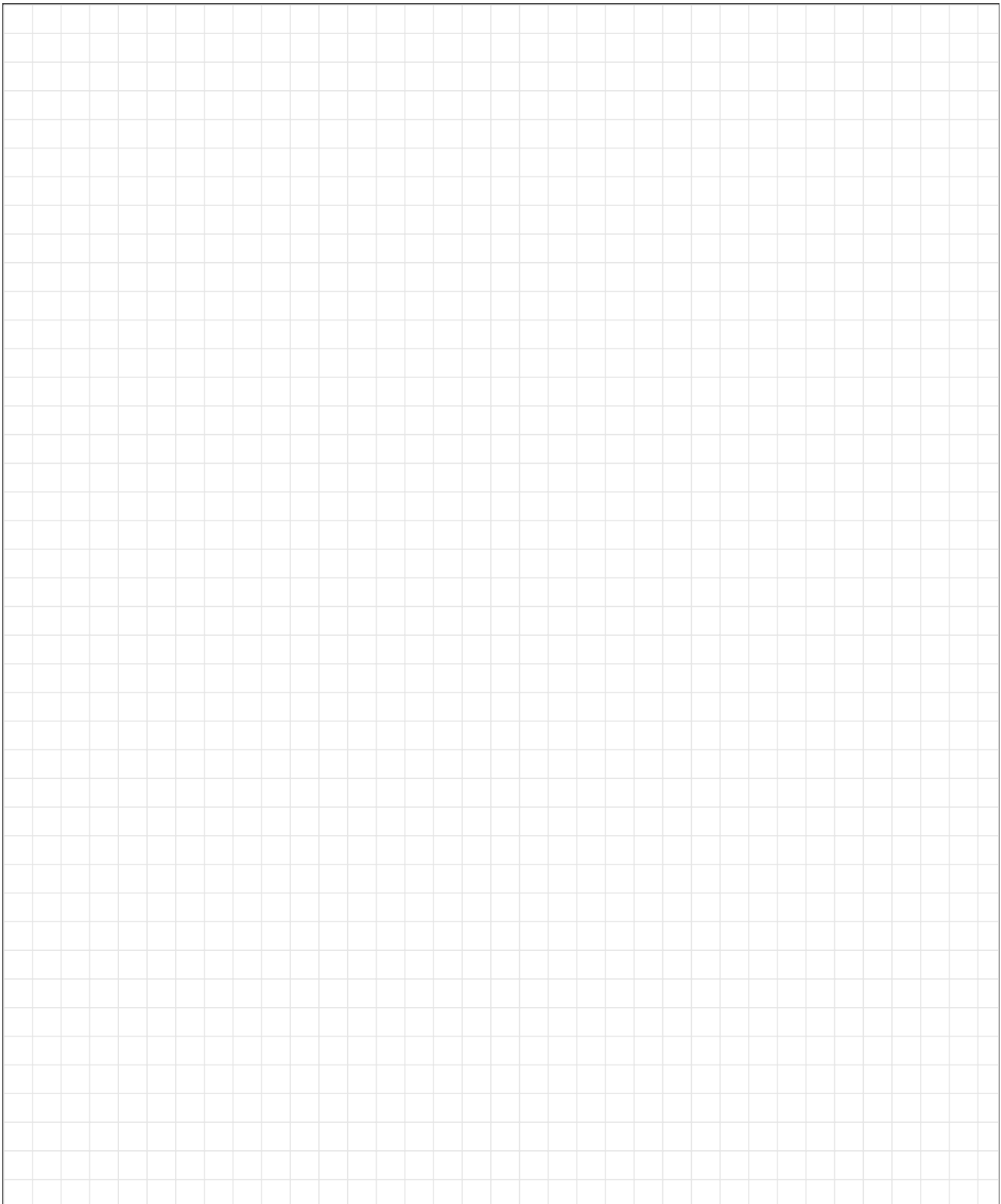


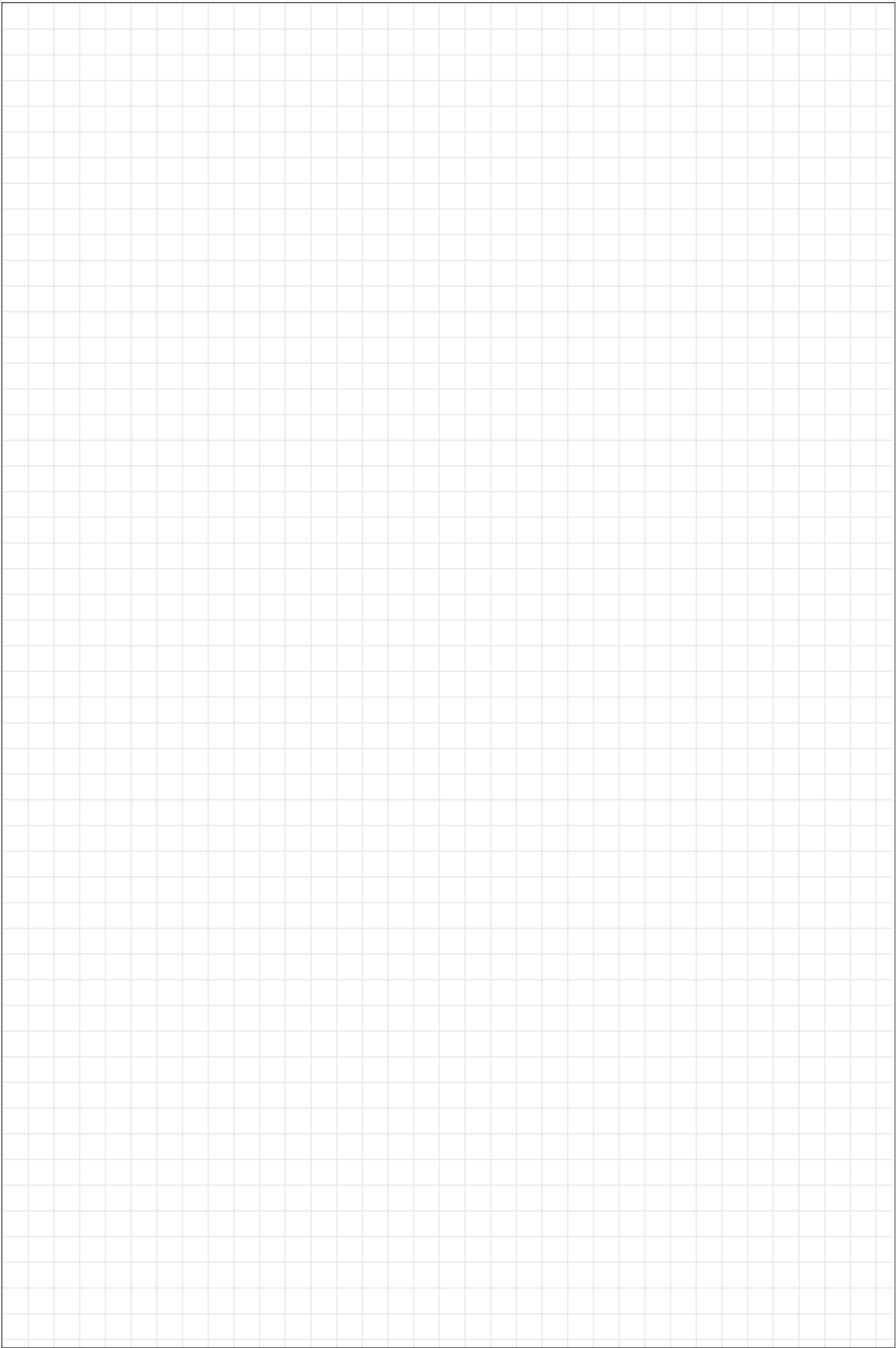
## 4.4 Rang et matrice inversible

**Théorème 4.6.** *Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est de rang maximal si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de  $\mathbb{K}^n$*

**Théorème 4.7.** *Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  sont des matrices inversibles et si  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est une matrice, alors  $\text{rg}(AM) = \text{rg}(M) = \text{rg}(MB)$  : on ne change pas le rang quand on multiplie par une matrice inversible.*

**Théorème 4.8.** *Deux matrices équivalentes par lignes ont le même rang.*

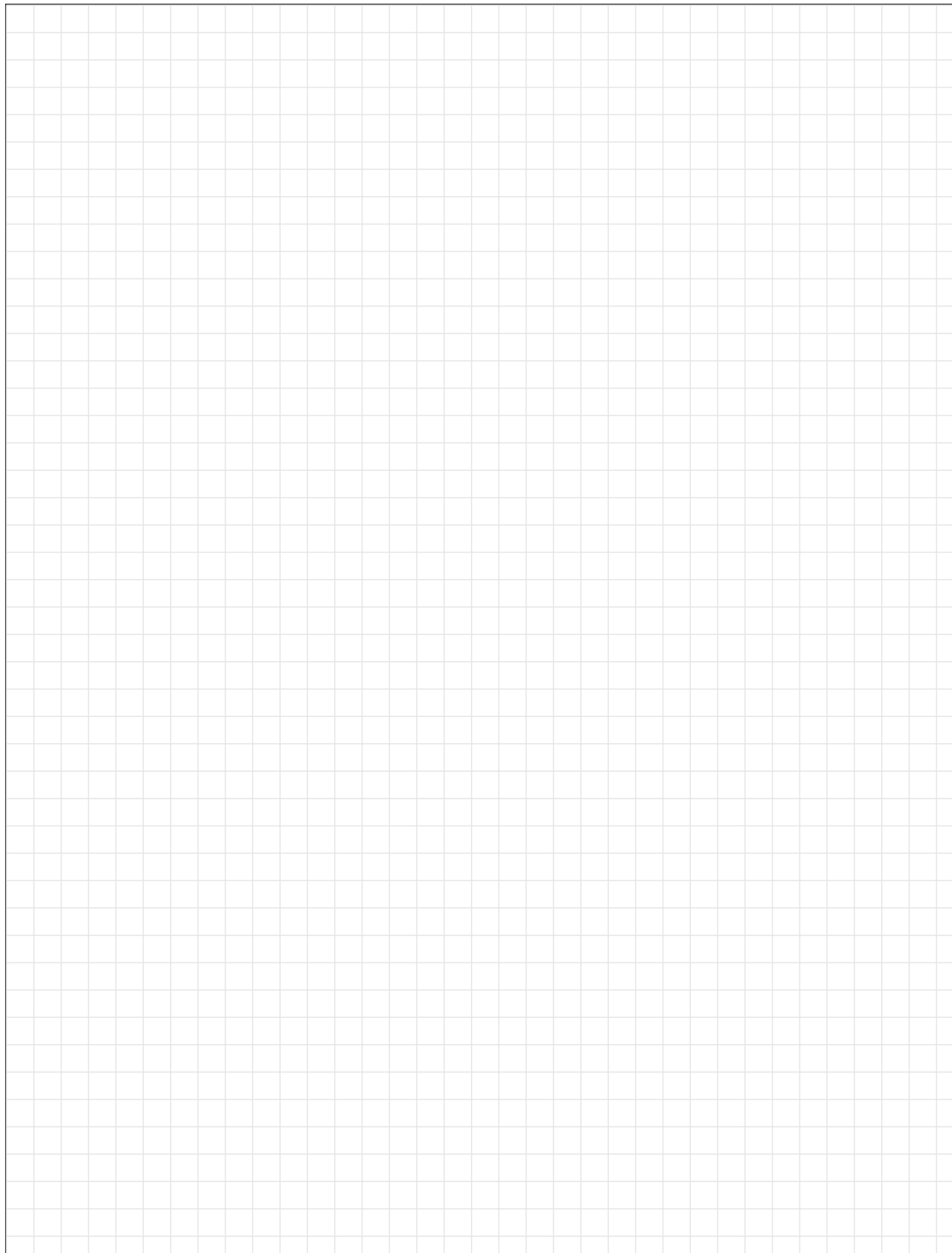




## 4.5 Rang de la transposée

**Proposition 4.9.** *Le rang d'une matrice est égal : au rang de ses vecteurs colonnes et au rang de ses vecteurs lignes et au rang de sa transposée.*

**Théorème 4.10.** *Deux matrices équivalentes par colonnes ont le même rang.*



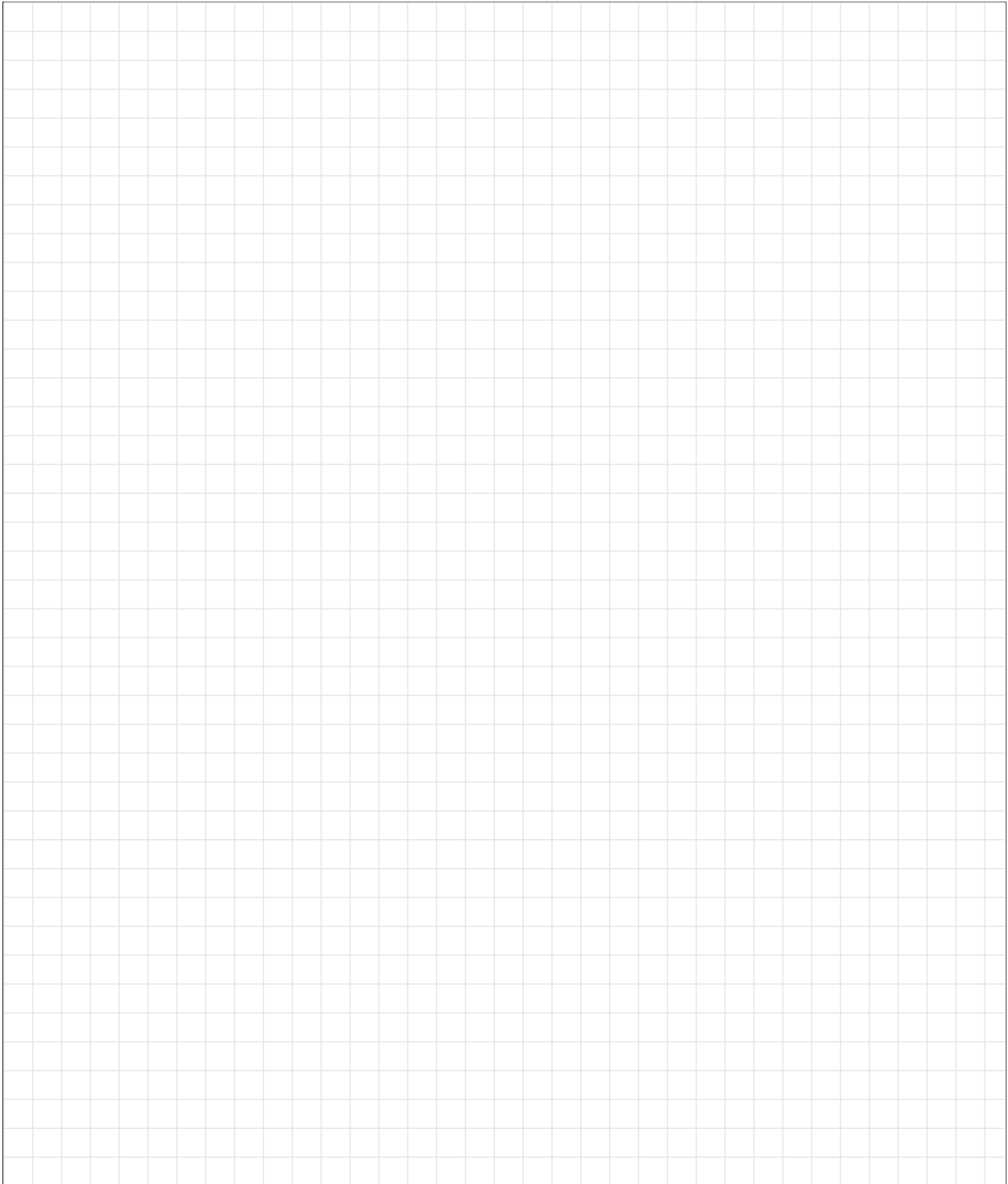
## 5 Exemples de transformations vectorielles du plan euclidien

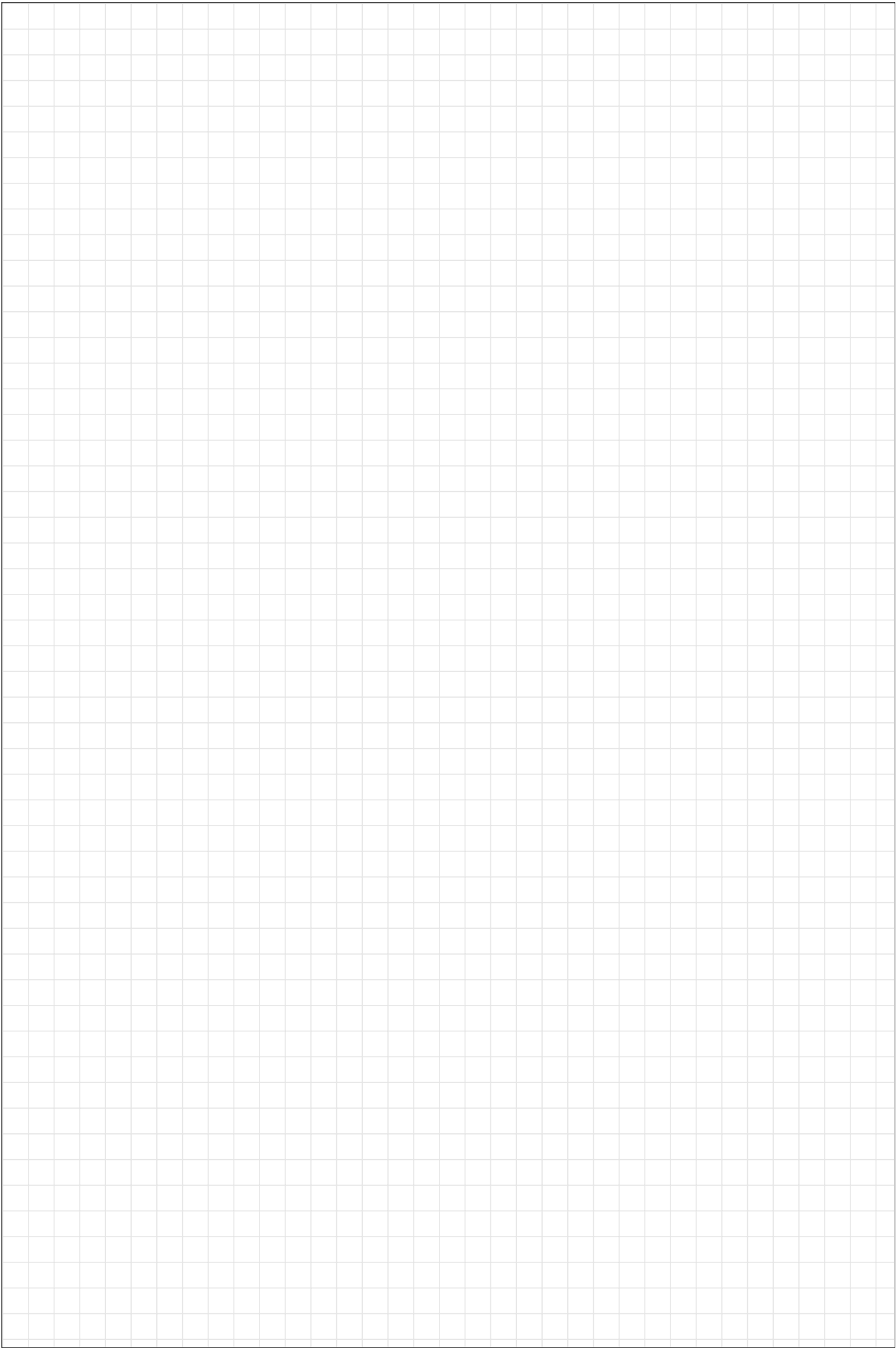
### 5.1 Rotations vectorielles

**Définition 5.1.** Dans le plan euclidien, on appelle rotation vectorielle d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$ , l'application  $r_\theta$  telle que pour tout vecteur  $\vec{u}$  on ait  $(\vec{u}, r_\theta(\vec{u})) = \theta [2\pi]$  et  $\|\vec{u}\| = \|r_\theta(\vec{u})\|$ .

**Proposition 5.1.** Si  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien, alors  $f$  conserve le produit scalaire si et seulement si  $f$  conserve la norme.

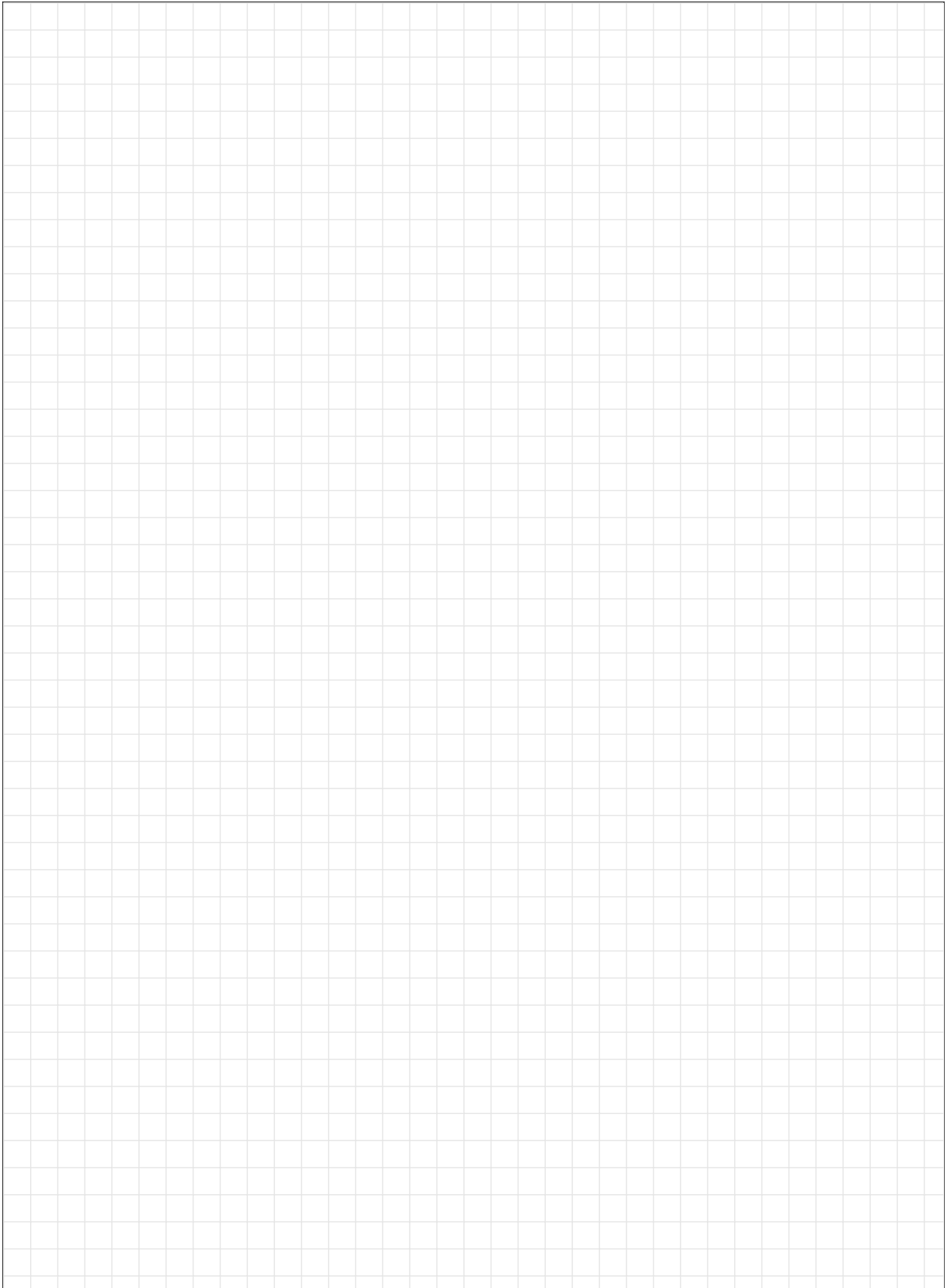
Alors  $f$  est un automorphisme. On dit que  $f$  est un automorphisme orthogonal.



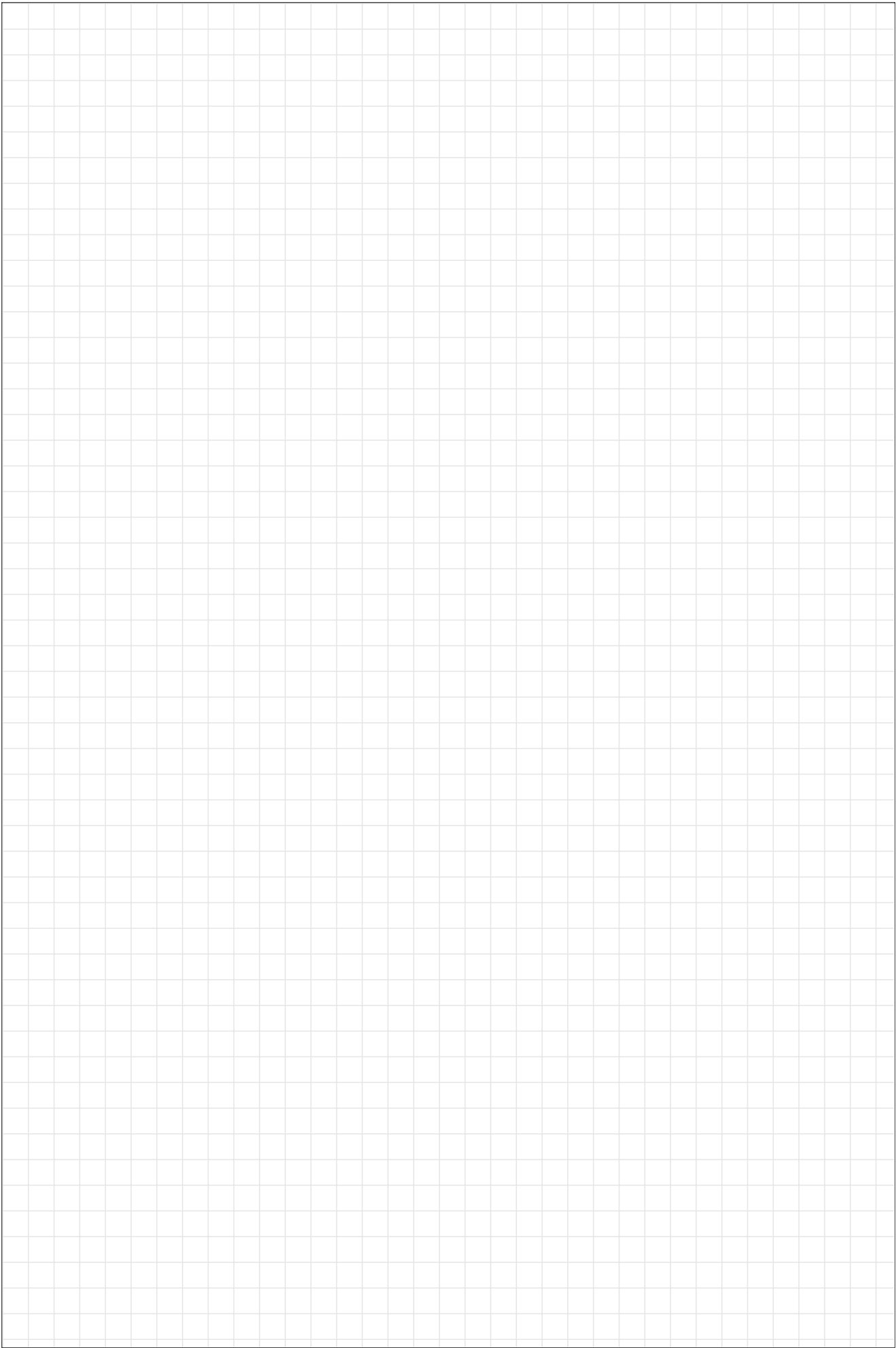


## 5.2 Matrice d'une rotation dans une BOND

**Théorème 5.2.** *La matrice de  $r_\theta$  dans une BOND est  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .*







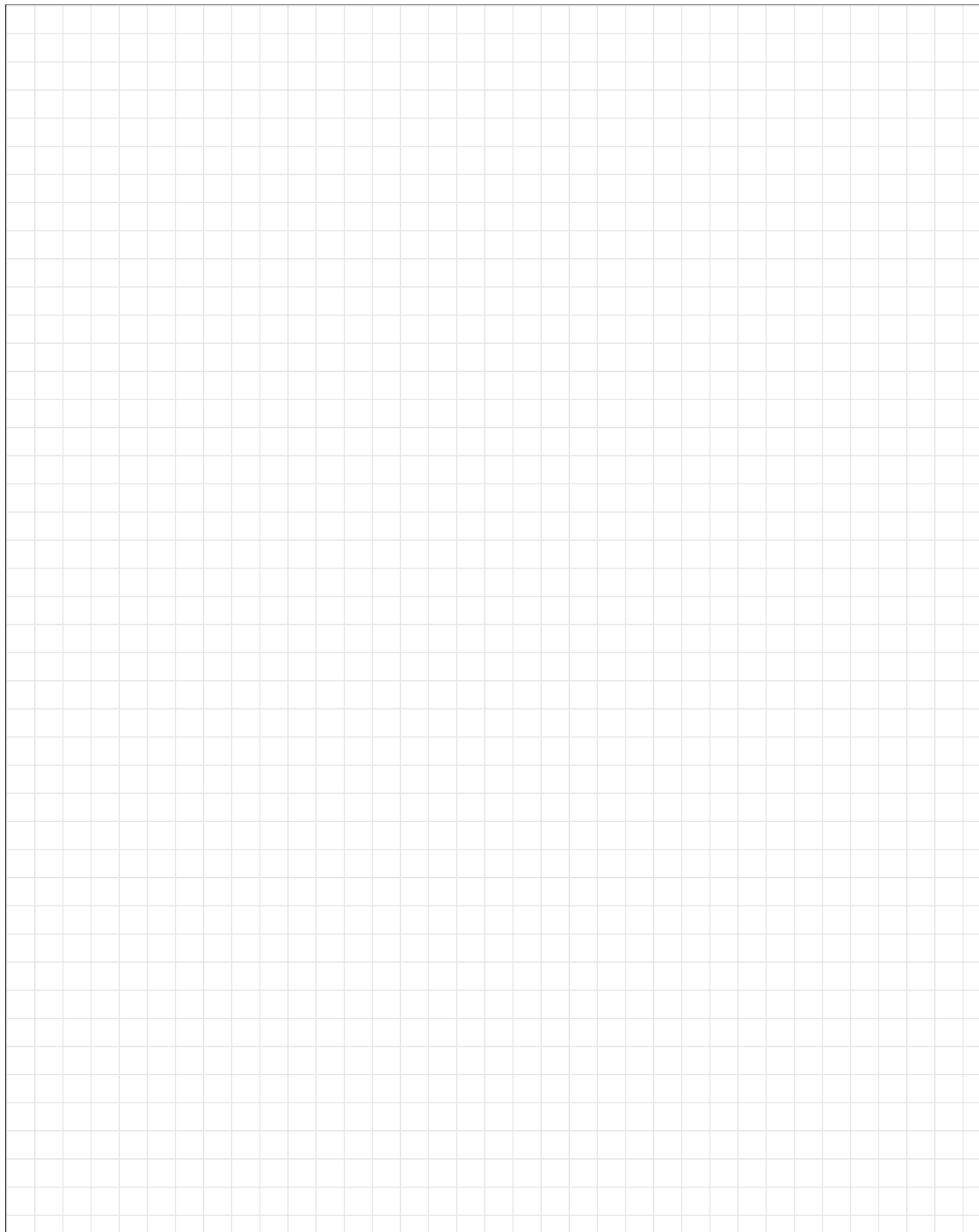
### 5.3 Composée de deux rotations

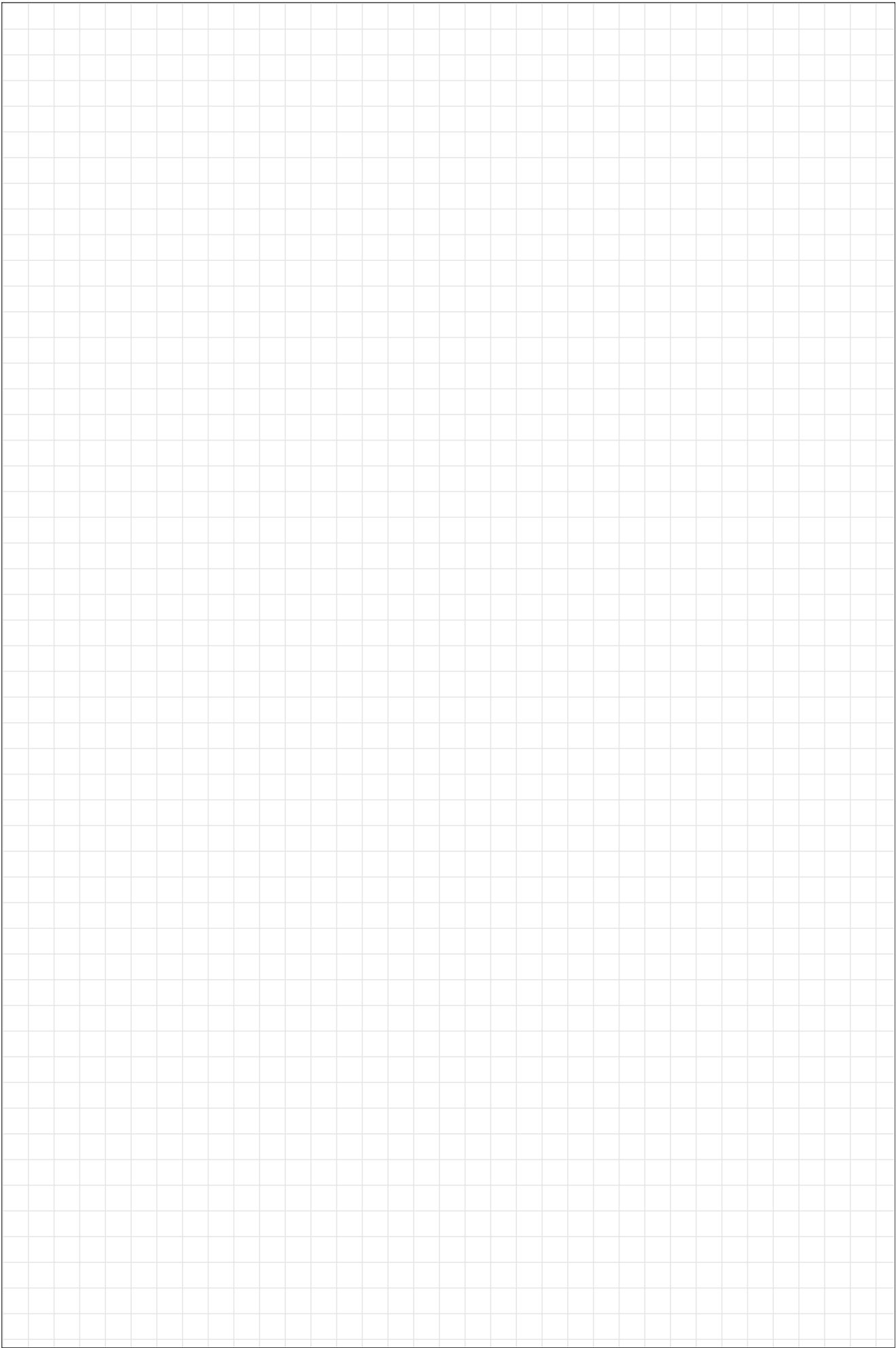
**Proposition 5.3.** *La composée des rotations  $r_\theta$  et  $r_\varphi$  donne la rotation  $r_{\theta+\varphi}$*

$$r_\theta \circ r_\varphi = r_\varphi \circ r_\theta = r_{\theta+\varphi}$$

**Corollaire 5.4.** *Matriciellement,  $R_\theta \times R_\varphi = R_\varphi \times R_\theta = R_{\theta+\varphi}$*

**Théorème 5.5.** *Une rotation  $r_\theta$  est un automorphisme du plan et  $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$ .*





## 5.4 Symétrie orthogonale vectorielle

**Proposition 5.6.** Soit  $\vec{v}$  un vecteur non nul du plan euclidien. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à  $\vec{v}$  est un sous-espace vectoriel du plan noté  $\vec{v}^\perp$ .

De plus,  $\text{Vect } \vec{v}$  et  $\vec{v}^\perp$  sont supplémentaires dans le plan.

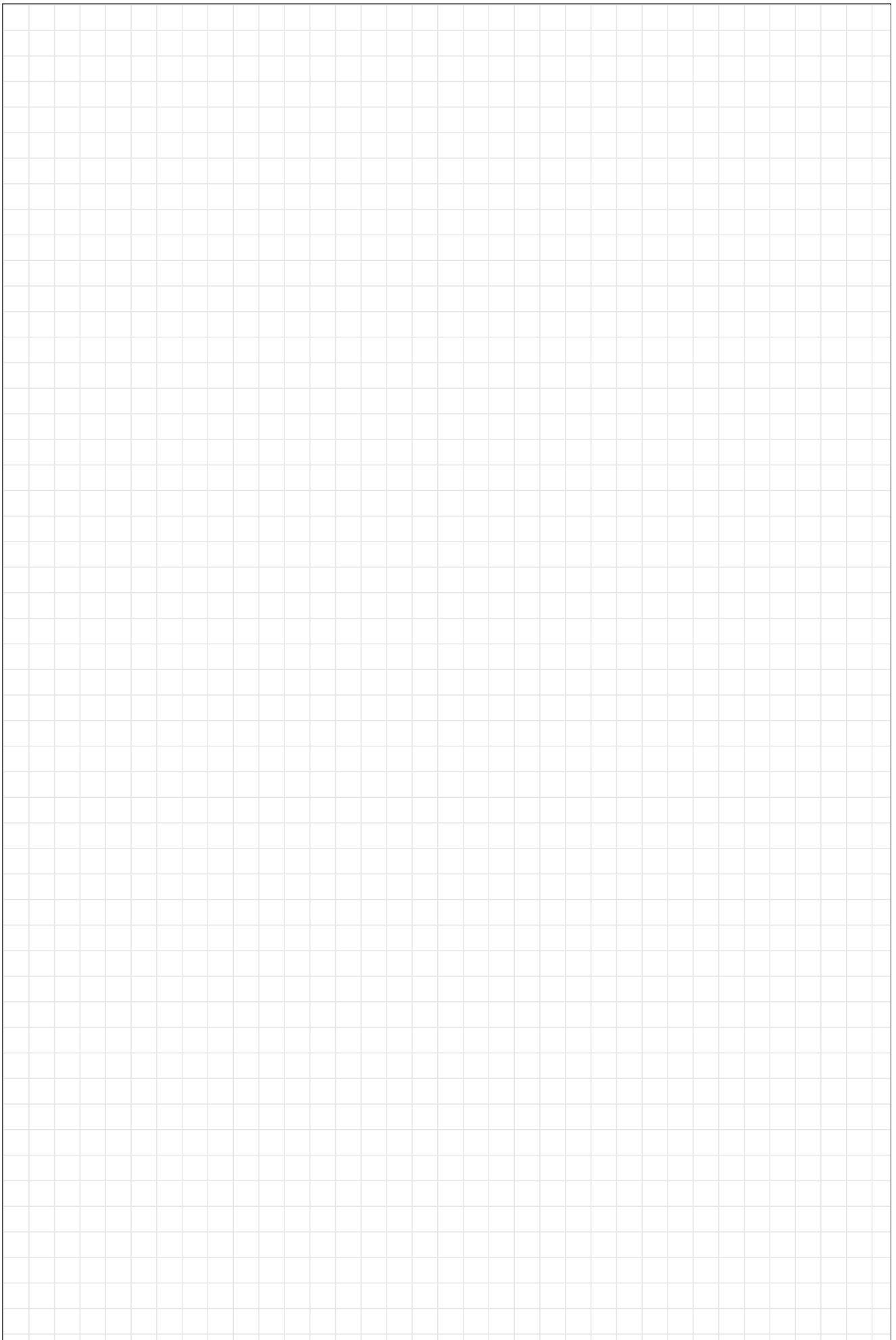
**Définition 5.2.** Soit  $\vec{v}$  un vecteur non nul du plan euclidien. On appelle symétrie vectorielle orthogonale par rapport à  $\vec{v}$ , la symétrie par rapport à  $\text{Vect } \vec{v}$  parallèlement à  $\vec{v}^\perp$ .

C'est à dire que  $s_{\vec{v}}$  est définie par  $s_{\vec{v}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$  où  $\vec{u}_1 \in \text{Vect } \vec{v}$  et  $\vec{u}_2 \in \vec{v}^\perp$  avec  $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ .

**Théorème 5.7.** Pour  $\vec{v} \neq 0$ , l'application  $s_{\vec{v}}$  est un automorphisme du plan vectoriel.

$s_{\vec{v}}$  conserve le produit scalaire, la norme, change l'orientation des angles et vérifie  $s_{\vec{v}} \circ s_{\vec{v}} = \text{id}_p$ .

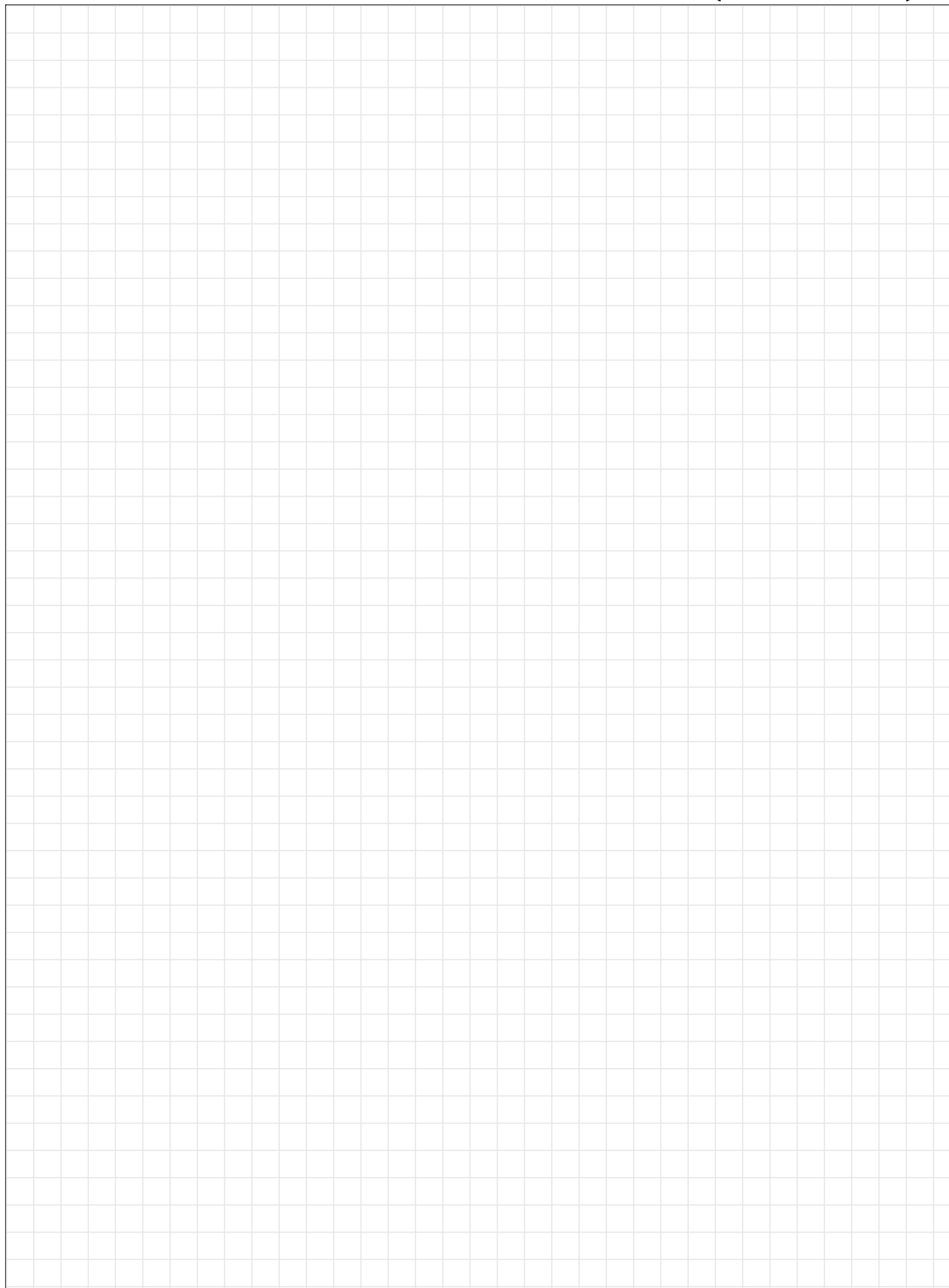


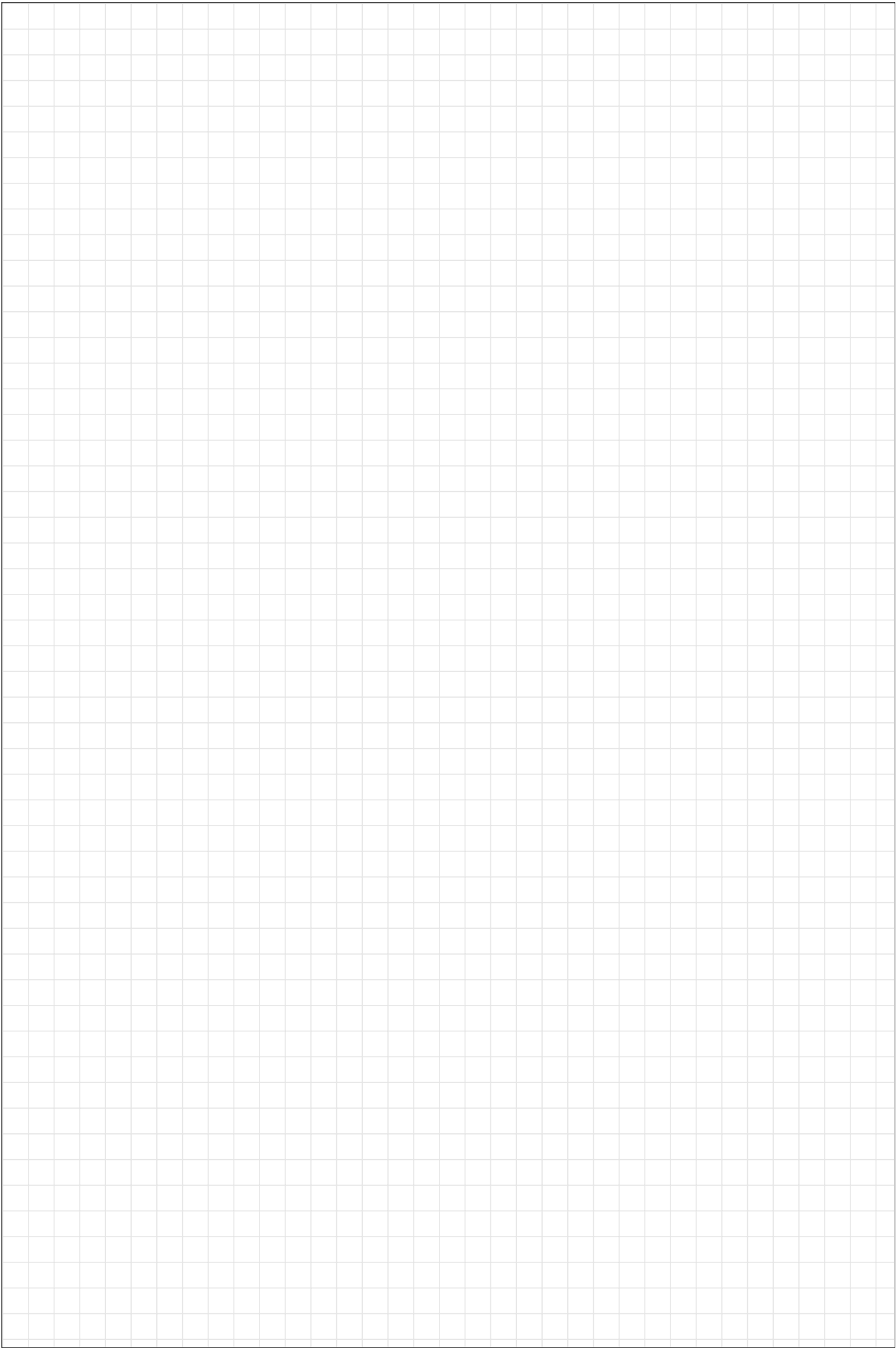


## 5.5 Matrice d'une symétrie orthogonale dans une BOND

**Théorème 5.8.** Soit  $P$  le plan euclidien muni d'une BOND  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Si  $\vec{v}$  fait un angle  $(\vec{i}, \vec{v}) = \varphi$  avec le vecteur  $\vec{i}$ , alors  $s_{\vec{v}}$  a pour matrice  $S_{2\varphi} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$ .

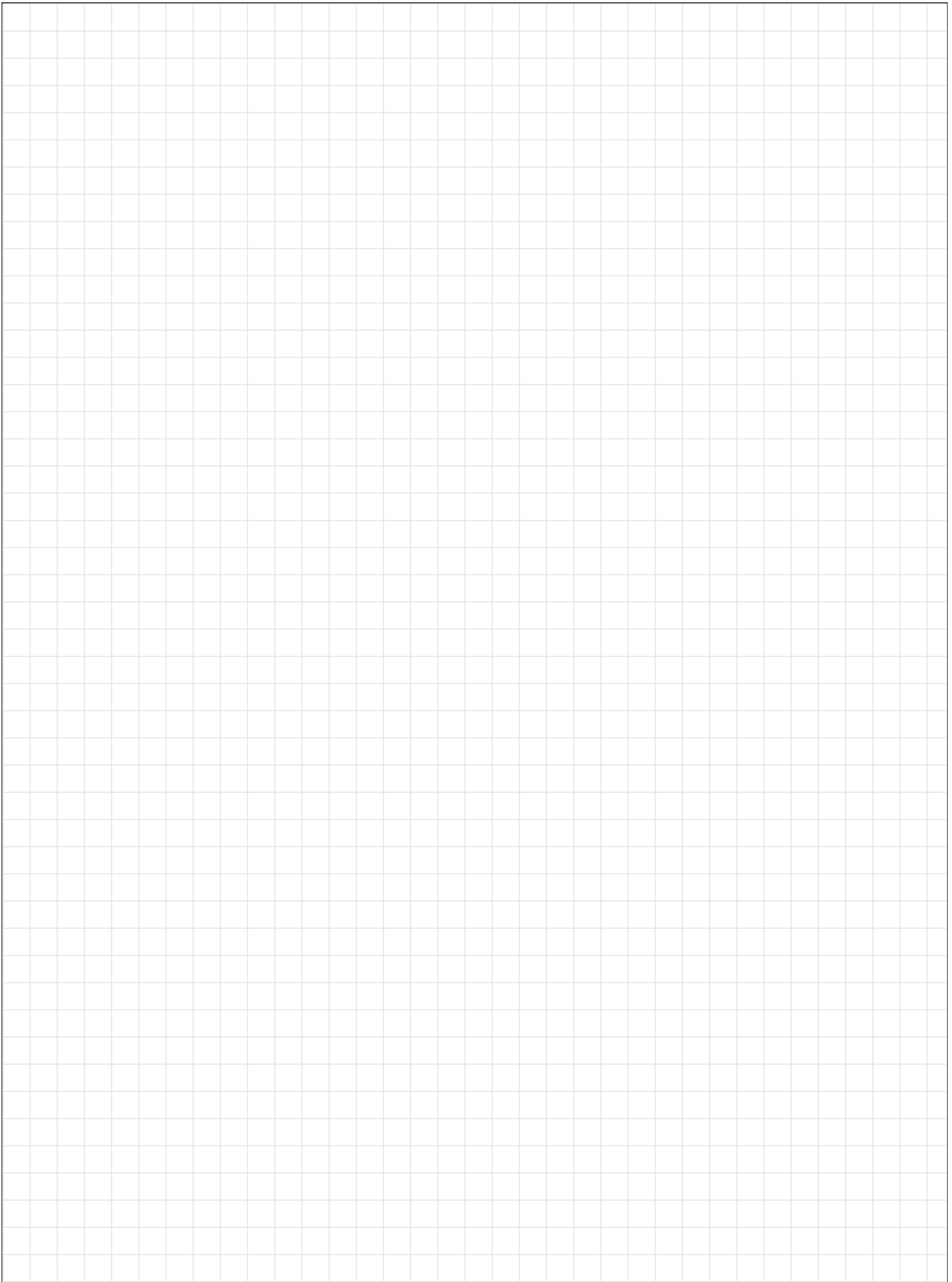




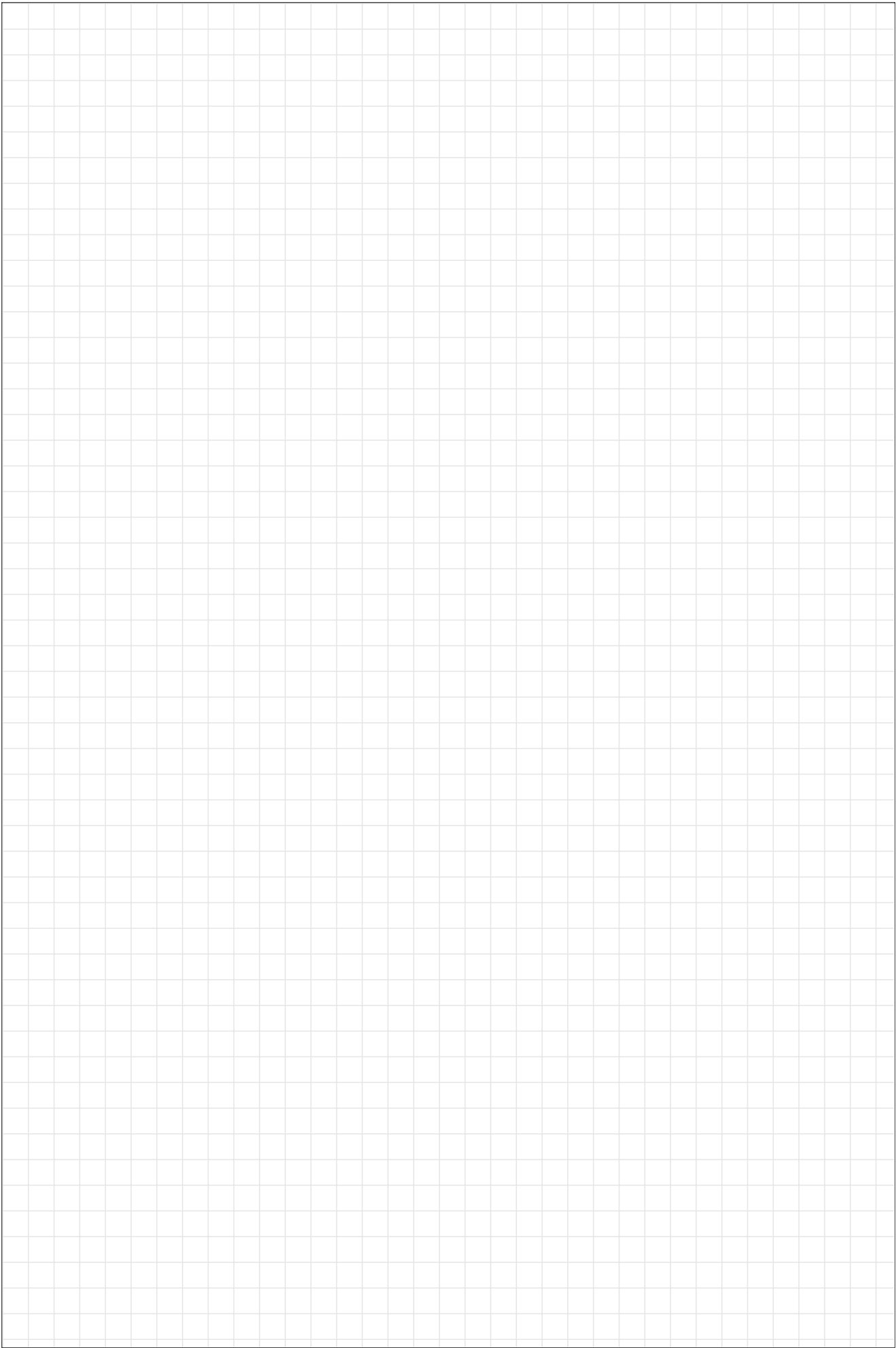
## 5.6 Composée de deux symétries orthogonales

**Théorème 5.9.** Soit  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  deux vecteurs non nuls du plan vectoriel.

La composée de deux symétries orthogonales  $s_{\vec{v}_1}$  et  $s_{\vec{v}_2}$  est une rotation d'angle  $\theta = 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2) [2\pi]$ .







## 6 Exemples de transformations vectorielles de l'espace euclidien

### 6.1 Rotation vectorielle de l'espace

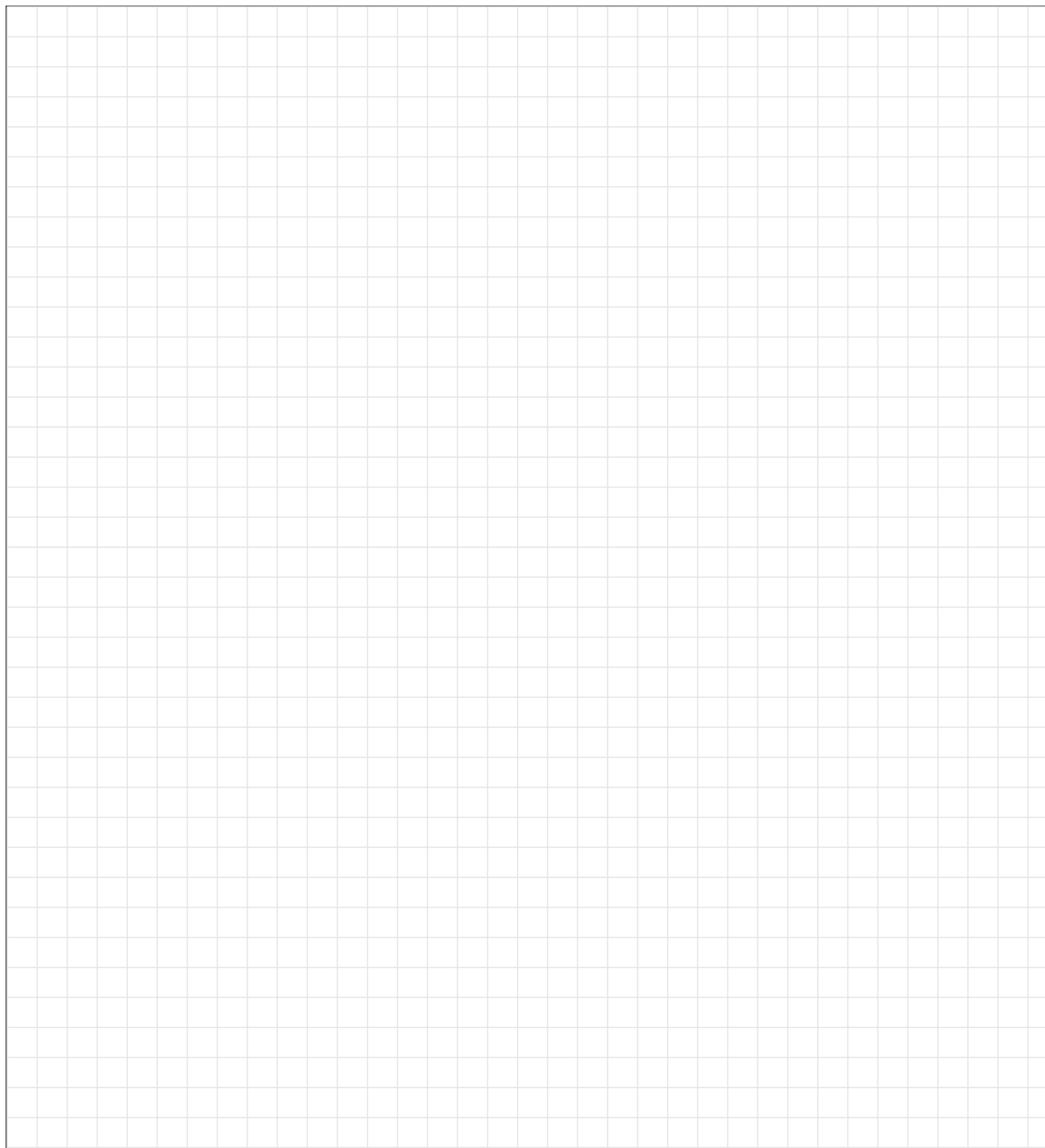
**Définition 6.1.** Soit  $\vec{n}$  un vecteur normé de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  :  $\|\vec{n}\| = 1$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

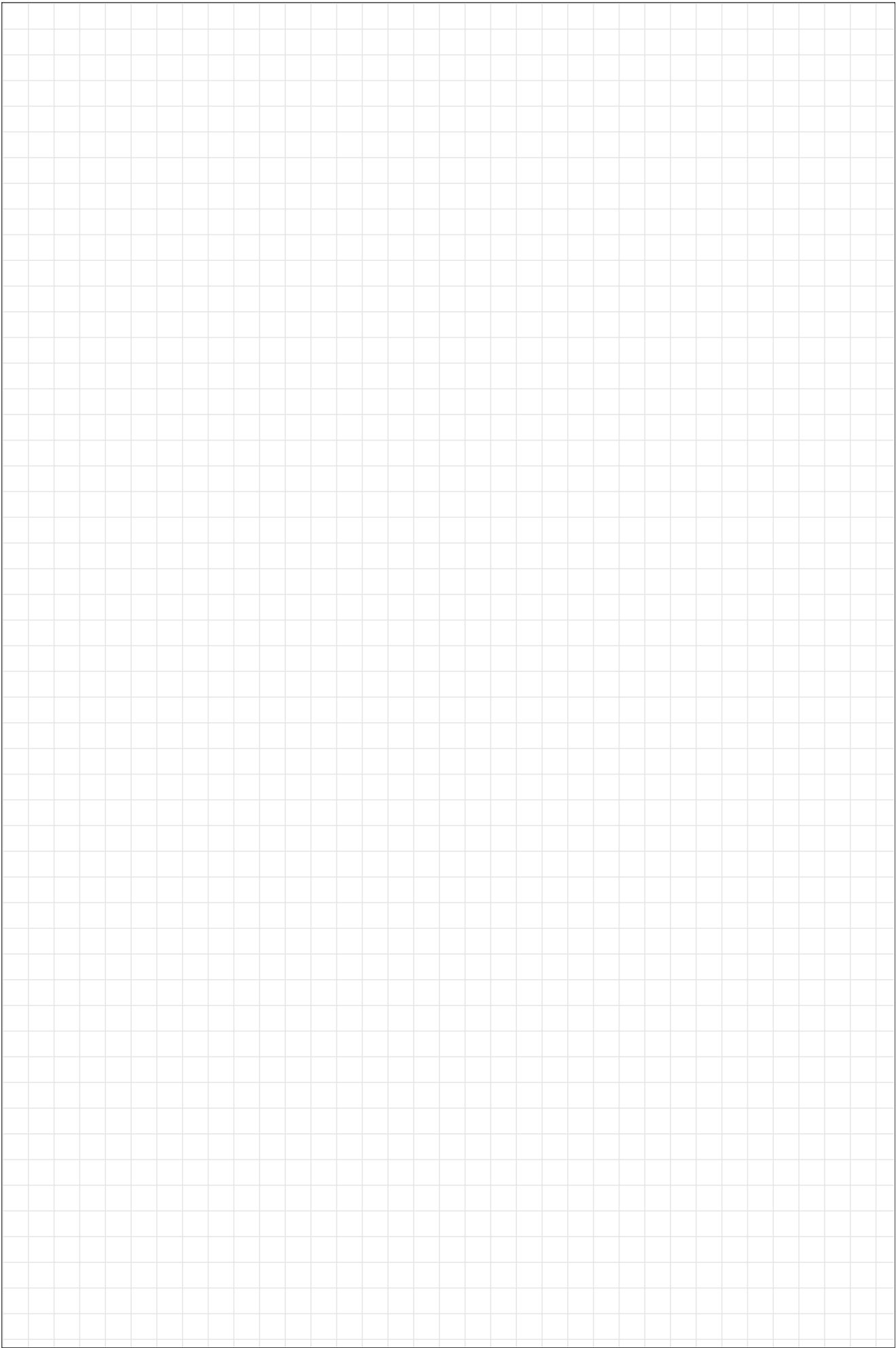
Tout vecteur  $\vec{u}$  se décompose de manière unique en  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  avec  $\vec{u}_1 \in \text{Vect } \vec{n}$  et  $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$ .

On appelle rotation vectorielle d'axe dirigé par  $\vec{n}$  et d'angle  $\theta$ , l'application  $r_{\theta, \vec{n}}$  définie par

$$r_{\theta, \vec{n}}(\vec{u}) = \vec{u}_1 + \cos \theta \vec{u}_2 + \sin \theta \vec{n} \wedge \vec{u}_2.$$

**Proposition 6.1.** Une rotation vectorielle est linéaire, bijective, conserve la norme, le produit scalaire et les angles.

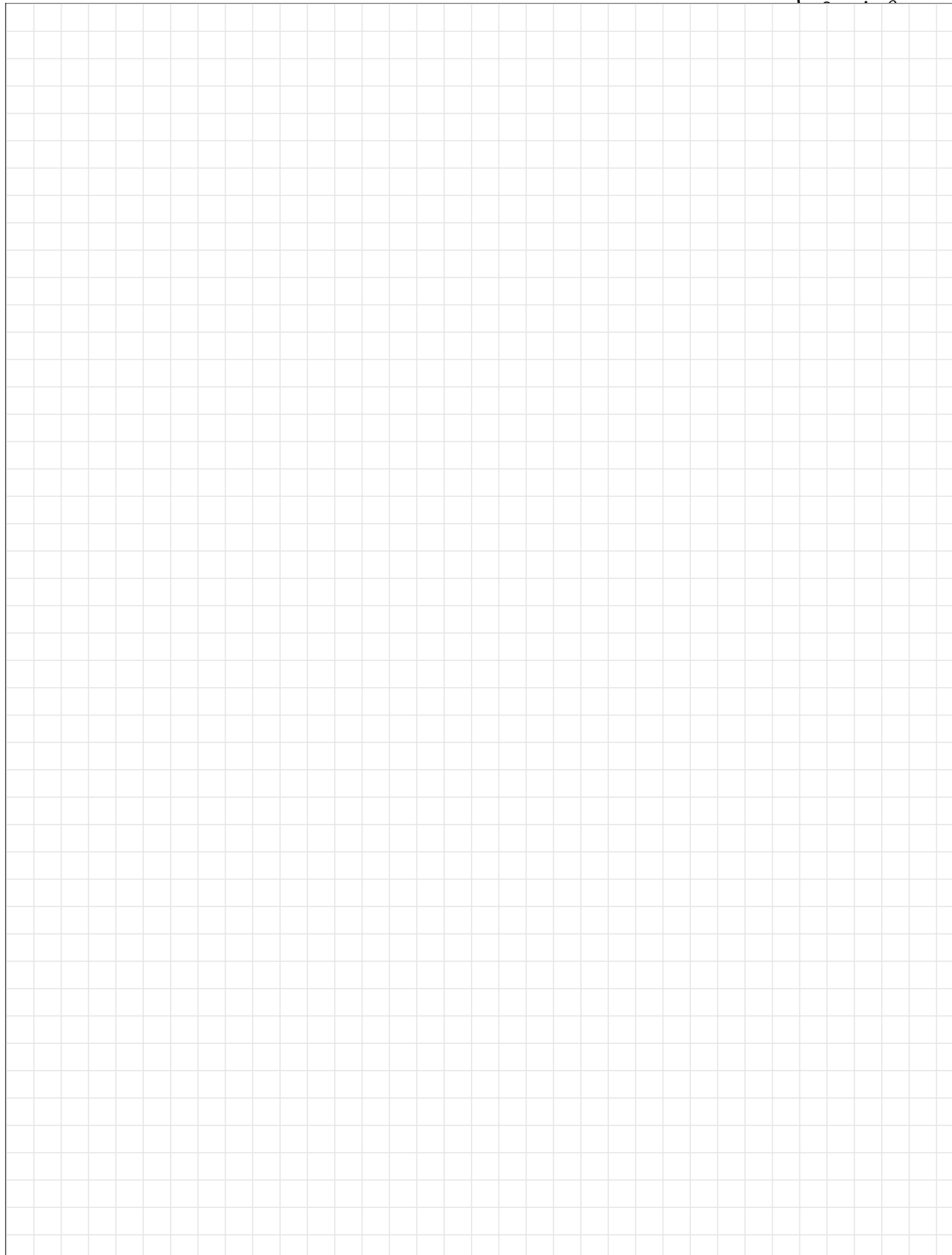


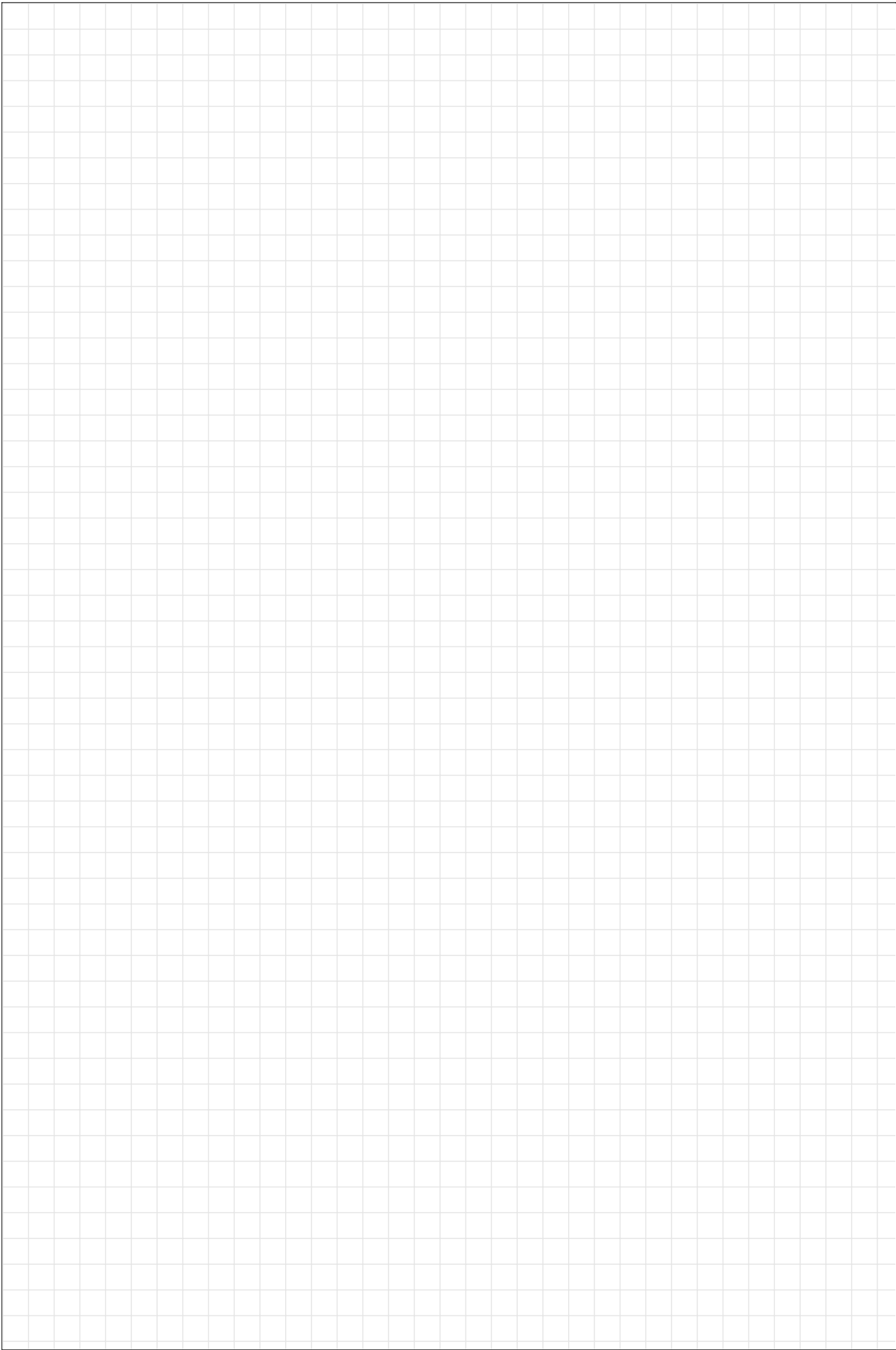


## 6.2 Matrice d'une rotation dans une BOND adaptée

**Théorème 6.2.** Soit  $\vec{n}$  un vecteur normé,  $\vec{i} \perp \vec{n}$  avec  $\|\vec{i}\| = 1$ , un vecteur normé orthogonal à  $\vec{n}$ . Alors  $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$  est une BOND de l'espace.

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . La matrice de la rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{n}$ , dans la base  $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$ , est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

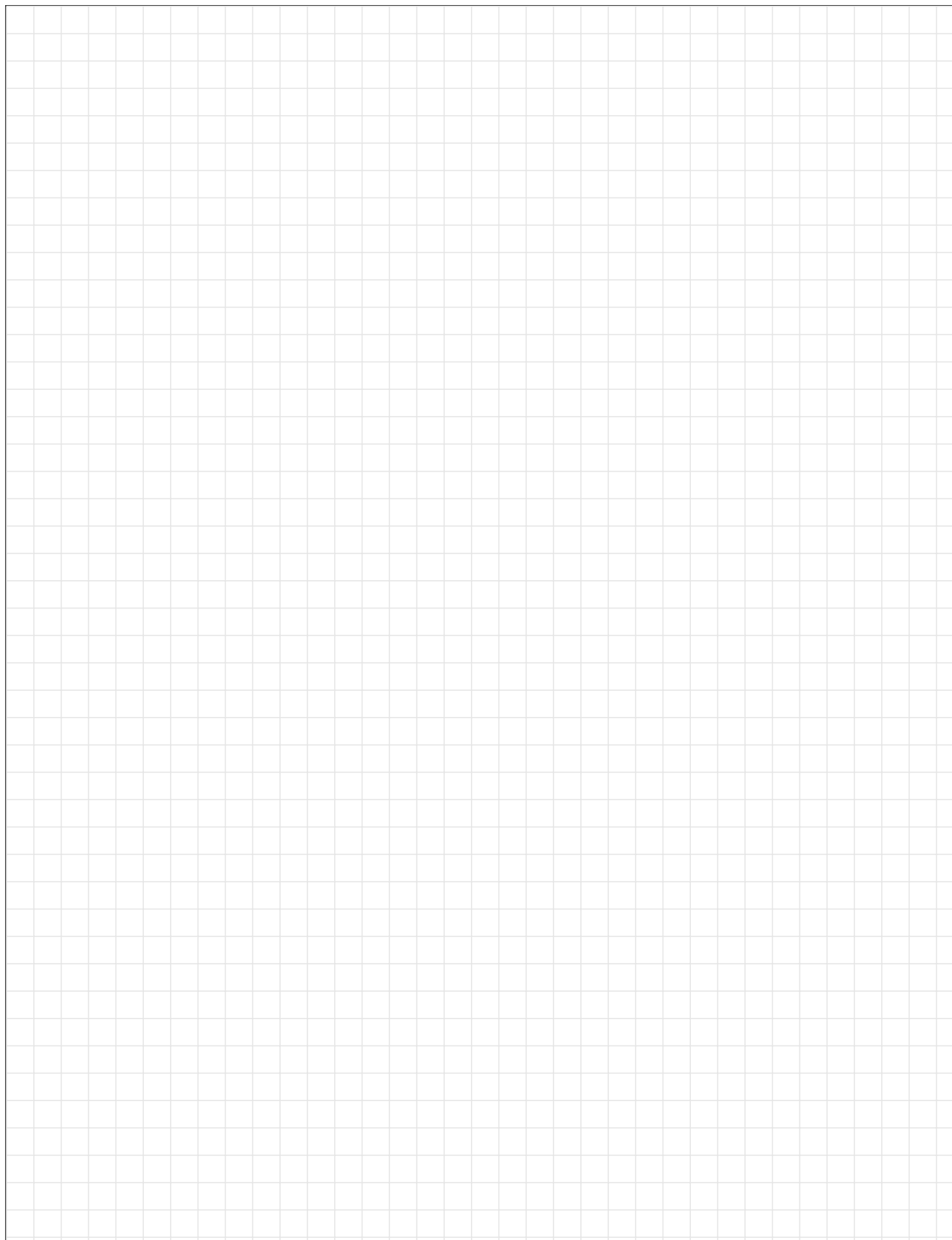


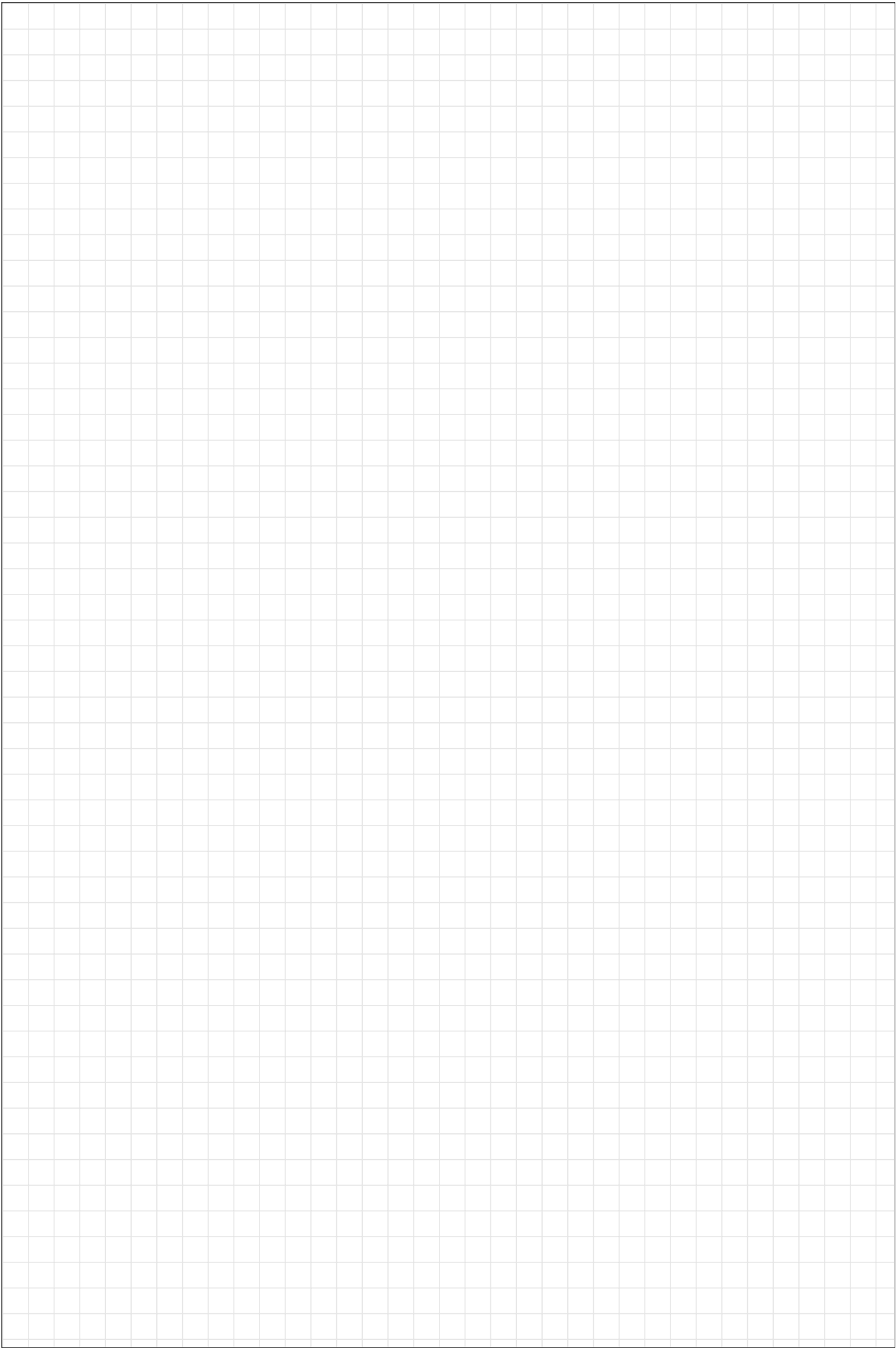


### 6.3 Réflexion

**Définition 6.2.** On appelle réflexion par rapport au plan  $P$ , la symétrie par rapport au plan  $P$  parallèlement à la droite vectorielle  $D$  orthogonale à  $P$ .

C'est à dire l'application  $s_P$  telle que pour un vecteur  $\vec{x}$  qui se décompose en  $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$  avec  $\vec{y} \in P$  et  $\vec{z} \perp P$ , on a  $s_P(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$ .





## 6.4 Matrice d'une réflexion dans une BOND adaptée

**Théorème 6.3.** Soit  $P$  un plan vectoriel et  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  une base de  $P$ . On note  $\vec{n}$  un vecteur normé normal à  $P$  :  $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|} \cdot \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ .

Soit  $\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{u}_1\|} \cdot \vec{u}_1$ , la famille  $(\vec{n}, \vec{v}_1, \vec{n} \wedge \vec{v}_1)$  est une BOND de l'espace et la matrice de  $s_P$  dans cette base est

$$^S \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

