

Chapitre 16 - Analyse asymptotique

1 Comparaison des suites

1.1 Relations de comparaison

Uniquement pour les suites réelles : on se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels. On dit que :

- (u_n) est dominée par (v_n) si à partir du rang N_0 , $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.
- (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors $u_n = o(v_n)$.
- (u_n) est équivalente à (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors $u_n \sim v_n$.

$n \rightarrow +\infty$

exemple $u_n = n + n^2$, $v_n = 2n^2 + 1$, $w_n = \sin(n)$, $x_n = -n^2$

on a

$$u_n = O(v_n) \quad \text{car} \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{n + n^2}{2n^2 + 1} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1$$

$$\text{car} \quad \forall n \geq 1 \quad n \leq n^2$$

$$w_n = o(u_n) \quad \text{car} \quad \frac{w_n}{u_n} = \frac{\sin(n)}{n + n^2} \rightarrow 0$$

$$\lfloor n \rfloor \sim n \quad \text{car} \quad \frac{\lfloor n \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \lfloor n \rfloor \leq n < \lfloor n \rfloor + 1$$

$$\text{On a} \quad n = o(n^3) \quad \text{et} \quad n^2 = o(n^3) \quad \text{alors} \quad n + n^2 = o(n^3)$$

$$\text{car} \quad \frac{n + n^2}{n^3} = \frac{n}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{On envoie} \quad u_n = o(n^3) \quad v_n = o(n^3) \quad \text{alors} \quad 2u_n - v_n = o(n^3)$$

$$\text{car} \quad \frac{2u_n - v_n}{n^3} = \frac{2u_n}{n^3} - \frac{v_n}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Théorème 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels.

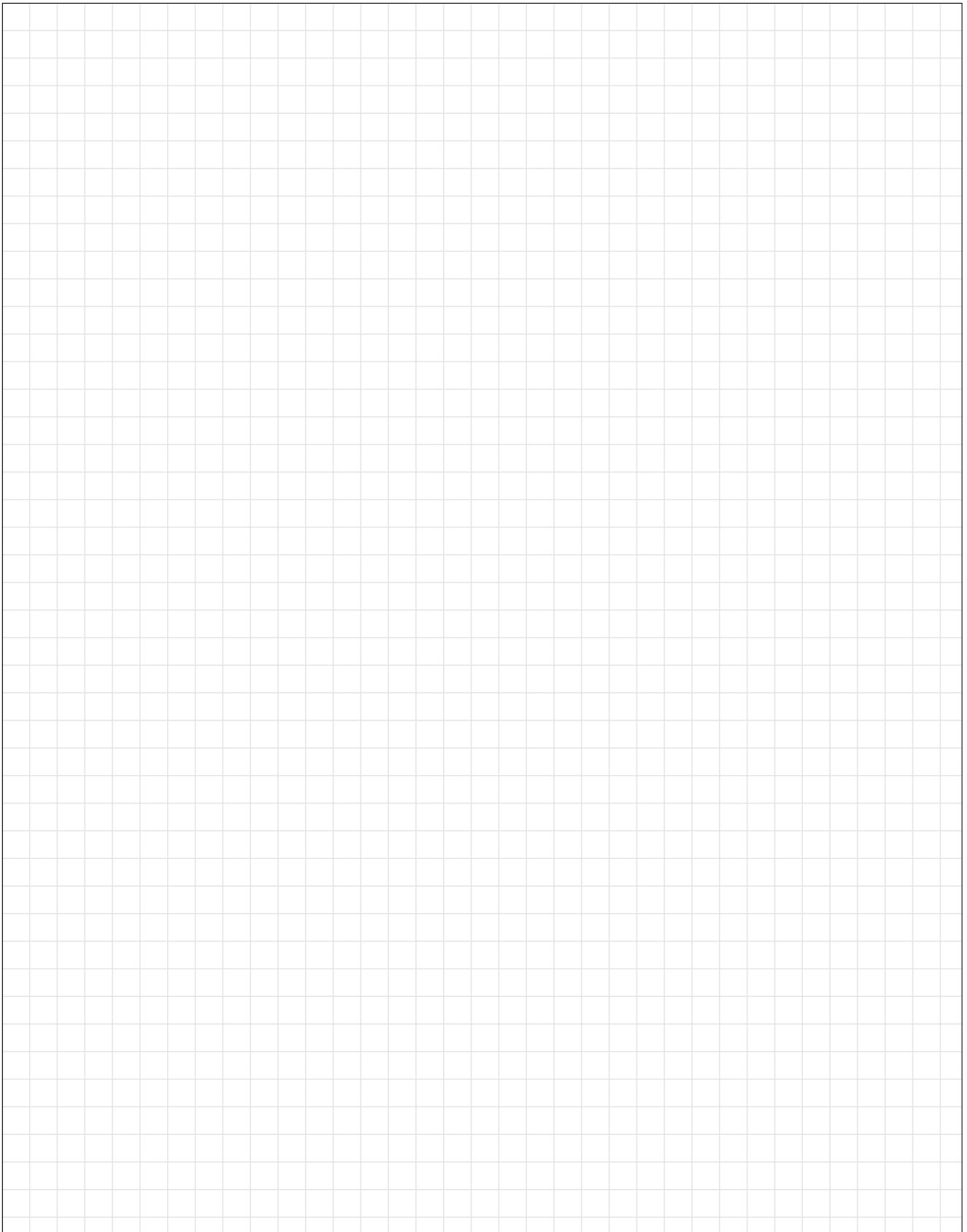
(u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 telle que $u_n = v_n \cdot \varepsilon_n$.

petit "o"

la notation $u_n = o(v_n)$ est équivalente à

$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ \longleftrightarrow $u_n = \varepsilon_n \cdot v_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$u_n = \varepsilon_n \cdot v_n$



1.2 Propriétés des relations de comparaison

Proposition 1.2. Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites réelles.

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $v_n \sim_{+\infty} u_n$. *symétrie*

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $v_n \sim_{+\infty} w_n$ alors $u_n \sim_{+\infty} w_n$. *transitivité*

Si u_n et v_n ne s'annulent pas, alors $u_n \sim_{+\infty} v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $u_n = \underline{O}(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

$\star \quad u_n \sim_{+\infty} v_n \iff (v_n \text{ ne s'annule pas à partir d'un certain } n \text{ et } \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1)$
 $\star \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{v_n}{v_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{v_n}$
 $\star \quad \text{Si } u_n \sim_{+\infty} v_n, \text{ alors } \frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1 \text{ comme } \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$
 alors $\frac{u_n - v_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_n - v_n = o(v_n)$
 Si $u_n - v_n = o(v_n)$ alors $\frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n - v_n + v_n}{v_n} = \frac{u_n - v_n}{v_n} + 1$
 donc $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ soit $u_n \sim_{+\infty} v_n$
 $\star \quad \text{si } \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ alors $(\frac{u_n}{v_n})$ est une suite convergente
 donc elle est bornée : $u_n = O(v_n)$
 exemple : $u_n = n^2 - \sqrt{n} \quad v_n = n^2 + \cos(n)$
 $u_n - v_n = \sqrt{n} - \cos(n) = o(n^2 + \cos(n))$ donc $u_n \sim_{+\infty} v_n$
 exemple : $\forall q$ si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$
 si $u_n = o(v_n)$ alors $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$ donc $(\frac{u_n}{v_n})$ est une suite bornée soit $u_n = O(v_n)$

1.3 Suites de référence

Remarque $e^{\gamma n} = (e^{\gamma})^n$ suite géométriqueProposition 1.3. Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, on a

$$\ln^{\beta}(n) = o(n^{\alpha}) \text{ et } n^{\alpha} = o(e^{\gamma n}) \quad \text{et pour } q > 1, \text{ on a } n^{\alpha} = o(q^n).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha}} = 0 \quad \text{pour } \alpha > 0, \beta > 0 \quad \text{où } \ln^{\beta}(n) = o(n^{\alpha})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha}}{(e^{\gamma})^n} = 0 \quad \text{pour } \alpha > 0, \gamma > 0 \quad \text{où } n^{\alpha} = o(e^{\gamma n})$$

On a également :

$$n^{\alpha} = o(b^n) \quad \text{pour } b > 1 \quad \text{généralisation } b^n = o(n!) \quad n! = o(n^n)$$

Lemme : Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = A \quad \text{avec } 0 \leq A < 1 \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Soit $B \in]A, 1[$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow A$, à partir d'un certain rang N

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq B \Leftrightarrow u_{n+1} \leq B \cdot u_n$$

on montre par récurrence

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq B^n \cdot \frac{u_N}{B^N}$$

C'est vrai pour $n = N$: $u_N = B^N \cdot \frac{u_N}{B^N}$. Soit vrai pour un rang $n \geq N$

$$\text{alors } u_{n+1} \leq B \cdot u_n \leq B \cdot B^n \cdot \frac{u_N}{B^N} = B^{n+1} \cdot \frac{u_N}{B^N}$$

c'est héréditaire éliminée. Donc

$$\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{u_N}{B^N} \right) \cdot B^n$$

on reconnaît une suite géométrique qui tend vers 0 de raison $B < 1$

Donc par théorème d'encadrement $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exemples de référence :

* $u_n = \frac{n^{\alpha}}{a^n}$ avec $\alpha > 0, a > 1$. En utilisant le lemme, on a $u_n \rightarrow 0$

donc

$$n^{\alpha} = o(a^n) \quad \text{utilisable}$$

Preuve : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\alpha} \frac{a^n}{a^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\alpha} \frac{1}{a} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \cdot \frac{1}{a}$

car $u \mapsto u^{\alpha}$ est continue en 1 : $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\alpha} = 1$

$$\frac{(n+1)^{\alpha}}{a^{n+1}} \quad \frac{n^{\alpha}}{a^n}$$

et $0 < \frac{1}{a} < 1$ donc d'après le lemme $u_n \rightarrow 0$.

* $u_n = \frac{b^n}{n!}$ d'après le lemme $u_n \rightarrow 0$ donc $\boxed{b^n = o(n!)}_{n \rightarrow +\infty}$ utilisable

* $u_n = \frac{n!}{n^n}$ d'après le lemme $u_n \rightarrow 0$ donc $\boxed{n! = o(n^n)}_{n \rightarrow +\infty}$ utilisable

Preuve.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

on calcule :
~~il est connu que~~ :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \text{ car } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

et on sait que $\frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$: c'est une limite usuelle.

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \frac{1}{e}$ avec $0 < \frac{1}{e} < 1$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Culture bapine :

formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

1.4 Opérations sur les équivalents

on peut multiplier et diviser
et c'est TOUT!

Proposition 1.4. Soit $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ des suites réelles.

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $w_n \sim_{+\infty} x_n$ alors $u_n w_n \sim_{+\infty} v_n x_n$.

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $w_n \sim_{+\infty} x_n$ et si w_n et x_n ne s'annulent pas alors $\frac{u_n}{w_n} \sim_{+\infty} \frac{v_n}{x_n}$.

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et si p est un entier $p \in \mathbb{N}$ alors $u_n^p \sim_{+\infty} v_n^p$.

△ on n'ajoute pas les équivalents

exemple : $u_n = n^2 + n$ on a $u_n \sim_{+\infty} n^2$
 $v_n = -n^2 + 1$ $v_n \sim_{+\infty} -n^2$
 $u_n + v_n = n + 1$ et $u_n + v_n \sim_{+\infty} n$

exemple $u_n = \frac{3n^2 - 8n + 2\ln(n)}{2n - \cos(n)}$ $u_n \sim_{+\infty} ?$

On a $3n^2 - 8n + 2\ln(n) \sim_{+\infty} 3n^2$ et $2n - \cos(n) \sim_{+\infty} 2n$
 d'où par quotient d'équivalents $u_n \sim \frac{3}{2}n$

note : $\frac{3n^2 - 8n + 2\ln(n)}{3n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ car $\frac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par CC

Equivalents usuels :

✓ $\ln(1+u) \sim_{u \rightarrow 0} u$ car $\frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$

Exemple : $u_n = \left(2 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$ équivalent de u_n ?

on a $u_n = e^{n^2 \ln\left(2 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n^2 \ln\left(1 + \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)}$

et $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $\ln\left(1 + \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \sim_{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

on a $1 - \cos(u) \sim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{2}$ car $1 - \cos(u) = 2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$ et $\frac{\sin(v)}{v} \xrightarrow{v \rightarrow 0} 1$

$1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{1}{2n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{1}{2n}\right)^2$ car $\sin\left(\frac{1}{2n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n}$ avec $v = \frac{1}{2n}$
 $2 \times \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{1}{2n} \times \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n^2}$

on a $\ln(2 - \cos(\frac{1}{n})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \cos(\frac{1}{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ par transitivité
 par produit $n^2 \ln(2 - \cos(\frac{1}{n})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \cdot \frac{1}{2n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$
 ce qui veut dire $n^2 \ln(2 - \cos(\frac{1}{n})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$
 la fonction exponentielle est continue en $\frac{1}{2}$ alors

$$e^{n^2 \ln(2 - \cos(\frac{1}{n}))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}}$$

 o/ai $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{e}} \Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{e}$

Exemple

$u_n = n + 1$ et $v_n = n$. On a $u_n \sim v_n$

mais $e^{u_n} = e^{n+1}$ et $e^{v_n} = e^n$

donc $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \rightarrow e$ et $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$

on ne pas comparer un équivalent par une fonction

mais on a $\ln(u_n) = \ln(n+1)$ et $\ln(v_n) = \ln(n)$

on calcule $\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1 + \frac{1}{n}))}{\ln(n)}$)

par propriété fonctionnelle de \ln

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} \rightarrow 1$$

alors $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$

Exercice Déterminer un équivalent de $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right)^n - 1$

1.5 Relations de comparaison et limites

Théorème 1.5. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$.

Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a $u_n \xrightarrow{+\infty} \ell \iff v_n \xrightarrow{+\infty} \ell$

En particulier, (u_n) est convergente si et seulement si (v_n) est convergente.] et dans ce cas, elles ont la même limite.

Proposition 1.6. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) converge, alors (u_n) converge vers 0.
- Si $u_n = o(v_n)$ et (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

en particulier si $u_n = o(1)$ alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
négligeable devant 1

si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$ avec (v_n) qui ne s'annule pas
 alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \times \ell = 0$

$u_n = -n^2 \rightarrow -\infty$ mais $u_n \sim (e^n)$

exercice: On définit une suite de réels (x_n) par
 pour $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique solution de $x^n + nx - 1 = 0$ (\mathbb{F}_n)
 dans $]0, 1[$. Trouver un équivalent de x_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n: x \mapsto x^n + nx - 1$ est continue sur \mathbb{R}_+
 et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ d'après le théorème de l'application Alors, elle est bijective de

$]0, 1[$ dans $f_n([0, 1]) =]f_n(0), f_n(1)[=]-1, n-1[$

Alors, elle s'annule en une unique $x_n \in]0, 1[$.

on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n^n \leq 1^n$ car la fonction $u \mapsto u^n$ est croissante sur \mathbb{R}_+

et $x_n^n + nx_n - 1 = 0 \iff x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors, par définition de la limite, en posant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe

un rang N tel que $\forall n \geq N$ $|x_n - 0| \leq \varepsilon \implies 0 < x_n \leq \frac{1}{2}$

alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(2n)^n \leq \frac{1}{x_n^n}$ d'après le théorème d'encadrement

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$ alors $nx_n = 1 - x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \implies x_n \sim \frac{1}{n}$

2 Relations de comparaison appliquées aux fonctions

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ élément ou extrémité de I .

2.1 Fonction dominée par une autre

Définition 2.1. Soit f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a . On note $f \underset{a}{=} O(g)$ (exemple sans définition)

exemple $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} O(x^2)$ car $\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
 et $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est borné sur \mathbb{R}^*
 On a aussi $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{2}{=} O(x^2)$

2.2 Fonction négligeable devant une autre


Définition 2.2. Soit f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en a .

On note $f = o(g)$ ou bien $f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

exemple : $\ln(1+n) = o(n)$ car $\frac{\ln(1+n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et ~~$\ln(1+n) = o(n^2)$ car $\frac{\ln(1+n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$~~

 $\underline{x^3 = o(x^5)}$ et $\underline{x^5 = o(x^3)}$

2.3 Fonctions équivalentes

Définition 2.3. Soit f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a . On note $f \sim_a g$

Proposition 2.1. Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

Si $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$. *par définition de $f'(a)$*

Proposition 2.2. Soit f et g définies sur I , ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$. On a :

$$f \sim_a g \iff f - g = o(g).$$

exemple $\ln(1+u) \sim_0 u$ *limite nulle* $1 - \cos(u) \sim_0 \frac{u^2}{2}$ *croissance*

$e^x \sim_{+\infty} e^{x + \frac{1}{x}}$ *limite*

exemple

$\ln(1+n) \sim_{-1} ?$ $\ln(1+x) \sim_0 x$ $\ln(1+n) \sim_1 \ln(2)$ $\ln(1+n) \sim_{+\infty} \ln(n)$

car $\frac{\ln(1+n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow 0} 1$ $\frac{\ln(1+n)}{\ln(2)} \xrightarrow{n \rightarrow 1} 1$ $\frac{\ln(1+n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ *on a ici*

$\ln(1+n) \sim_1 \ln(2n)$ car $\frac{\ln(1+n)}{\ln(2n)} \xrightarrow{n \rightarrow 1} 1$

$\ln(1+n) \sim_1 n^2 \ln(2n)$

$o(g) = o(-g)$

Exemple
prop 2.1

$\sin(u) \sim_0 u$, $e^u - 1 \sim_0 u$, $\tan(u) \sim_0 u$

exercice :

$\frac{\ln(1+n) - \ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \sim_0 ? \sim_1 ? \sim_{+\infty} ?$

on a $\frac{\ln(1+n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} = o\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}}\right)$ alors (prop 2.2) $\frac{\ln(1+n) - \ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \sim_0 -\frac{\ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}}$

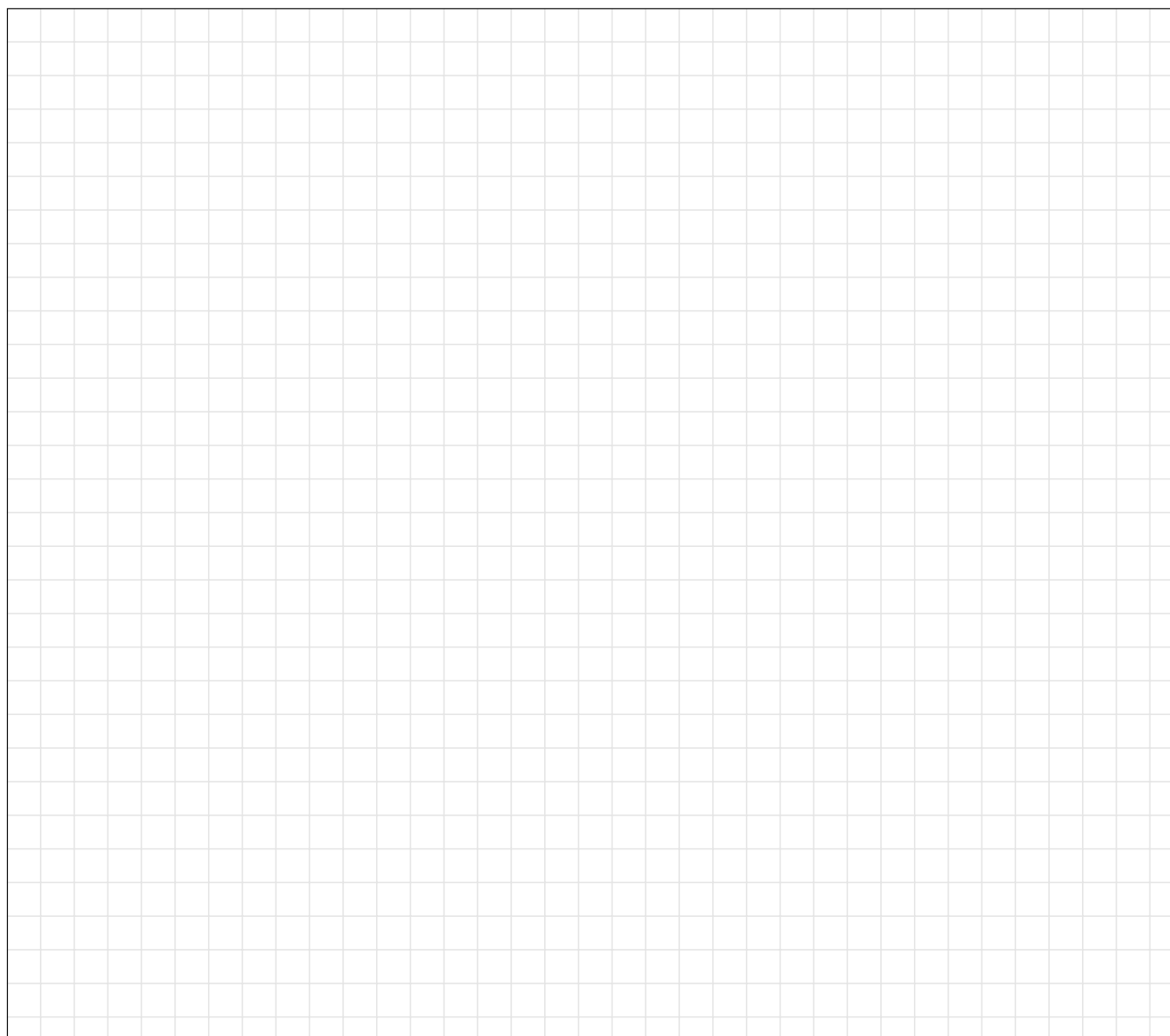
ou $\frac{\ln(1+n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \sim_1 \frac{\ln(2)}{\sqrt{2} - 1}$ alors $\frac{\ln(1+n) - \ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \sim_1 -\frac{\ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}}$

$\frac{\ln(1+n) - \ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \sim_1 \frac{\ln(2)}{\sqrt{2} - 1}$

2.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 2.3. Si $f, g, h, f_1, g_1, f_2, g_2$ sont des fonctions définies au voisinage de a , on a :

- $f \underset{a}{\sim} g \implies g \underset{a}{\sim} f$
- $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h \implies f \underset{a}{\sim} h$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \implies f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \implies \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$



2.5 Utilisation des équivalents

Proposition 2.4. *Étant donnés deux fonctions f et g équivalentes en a : $f \sim_a g$.*

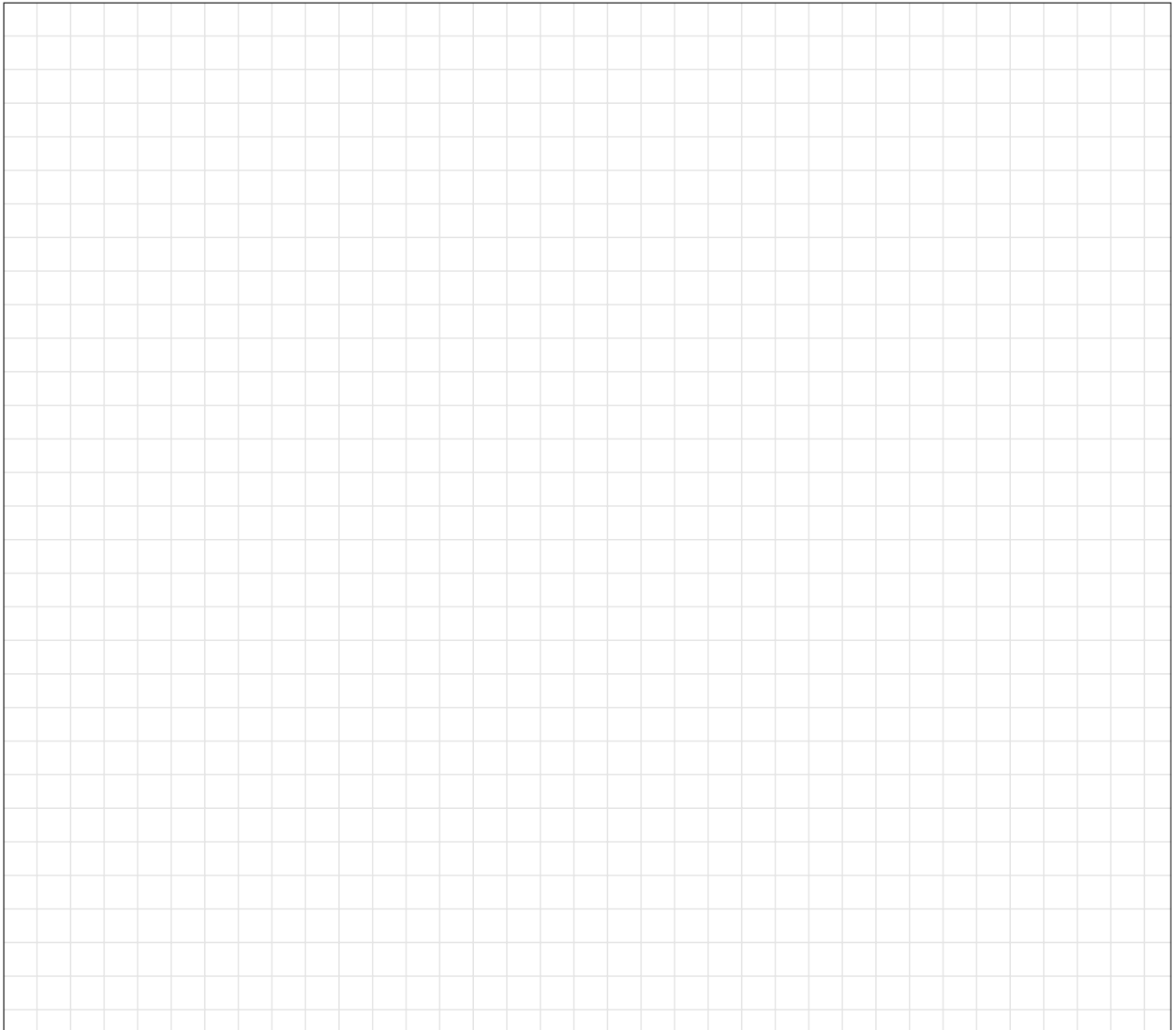
Si g a une limite finie ou infinie en a alors f aussi et $\lim_a f = \lim_a g$.

Proposition 2.5. *Étant donnés deux fonctions f et g définies sur I et équivalentes en a : $f \sim_a g$.*

Si g est positive sur I alors f est positive au voisinage de a .

Si g ne s'annule pas sur I , alors f ne s'annule pas au voisinage de a .

Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, alors la restriction de f à $I \setminus \{a\}$ ne s'annule pas au voisinage de a .



3 Développement limités

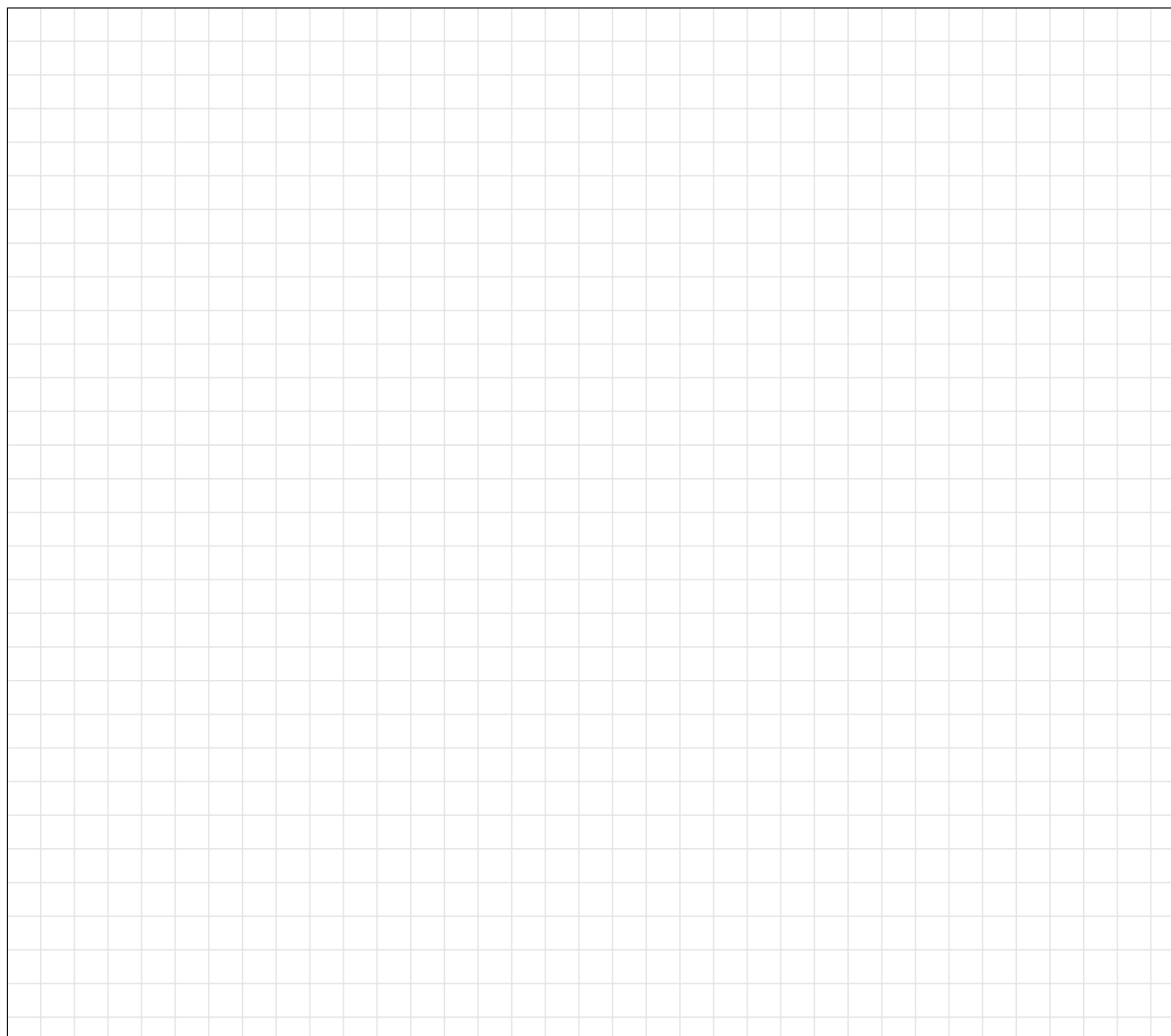
3.1 Définition

Définition 3.1. On dit qu'une fonction f de I dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ élément ou extrémité de I si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(a+h) = P(h) + o(h^n)$ au voisinage de 0 (pour h).

C'est à dire
$$f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_{n-1}h^{n-1} + a_nh^n + o(h^n)$$

ou
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

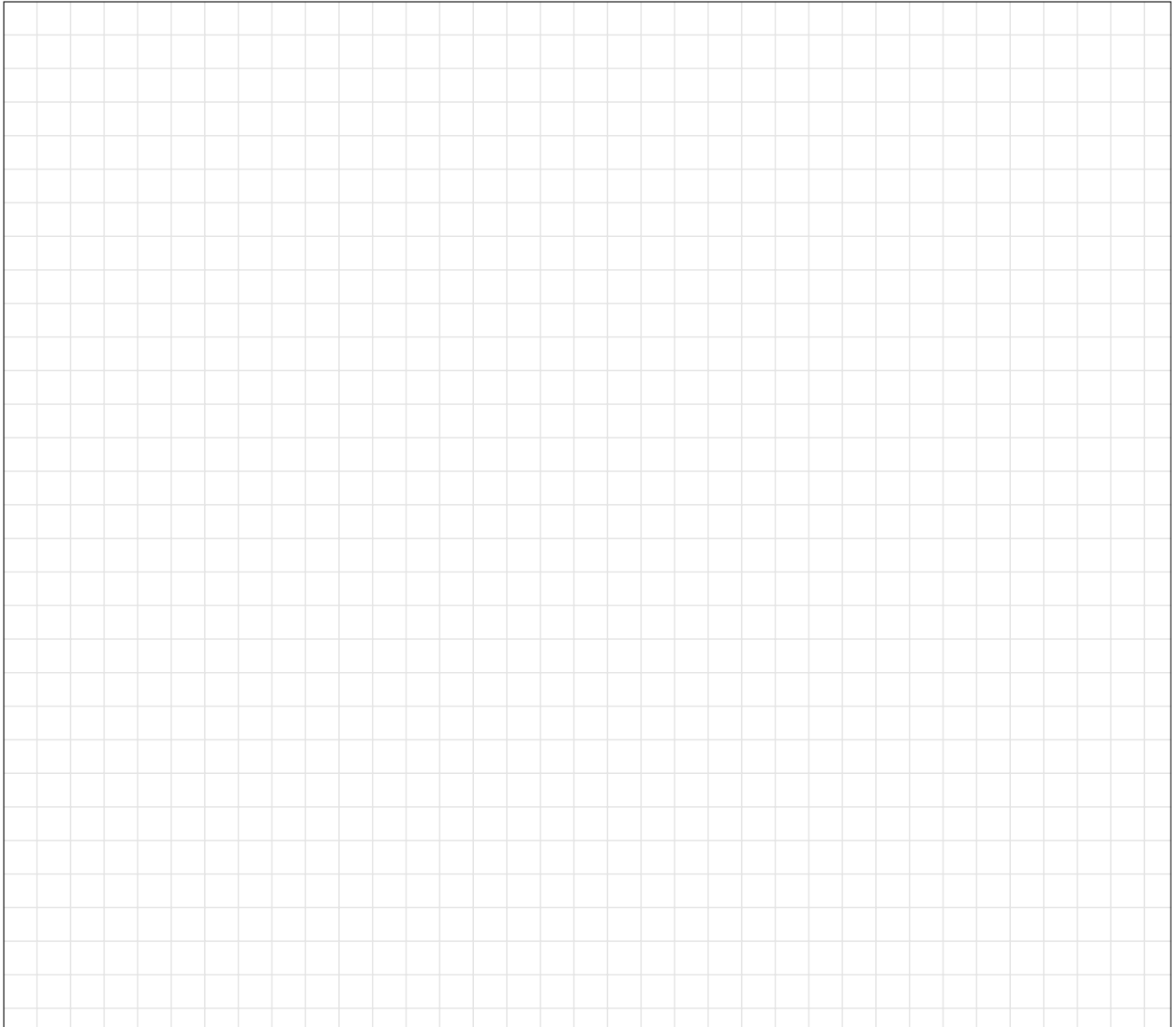
On le note $DL_n(a)$ de f .



3.2 Exemple fondamental

Proposition 3.1. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \frac{1}{1-u} \end{array}$ admet des développements limités à l'ordre n , pour tout entier n , au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n)$$



3.3 Unicité du développement limité

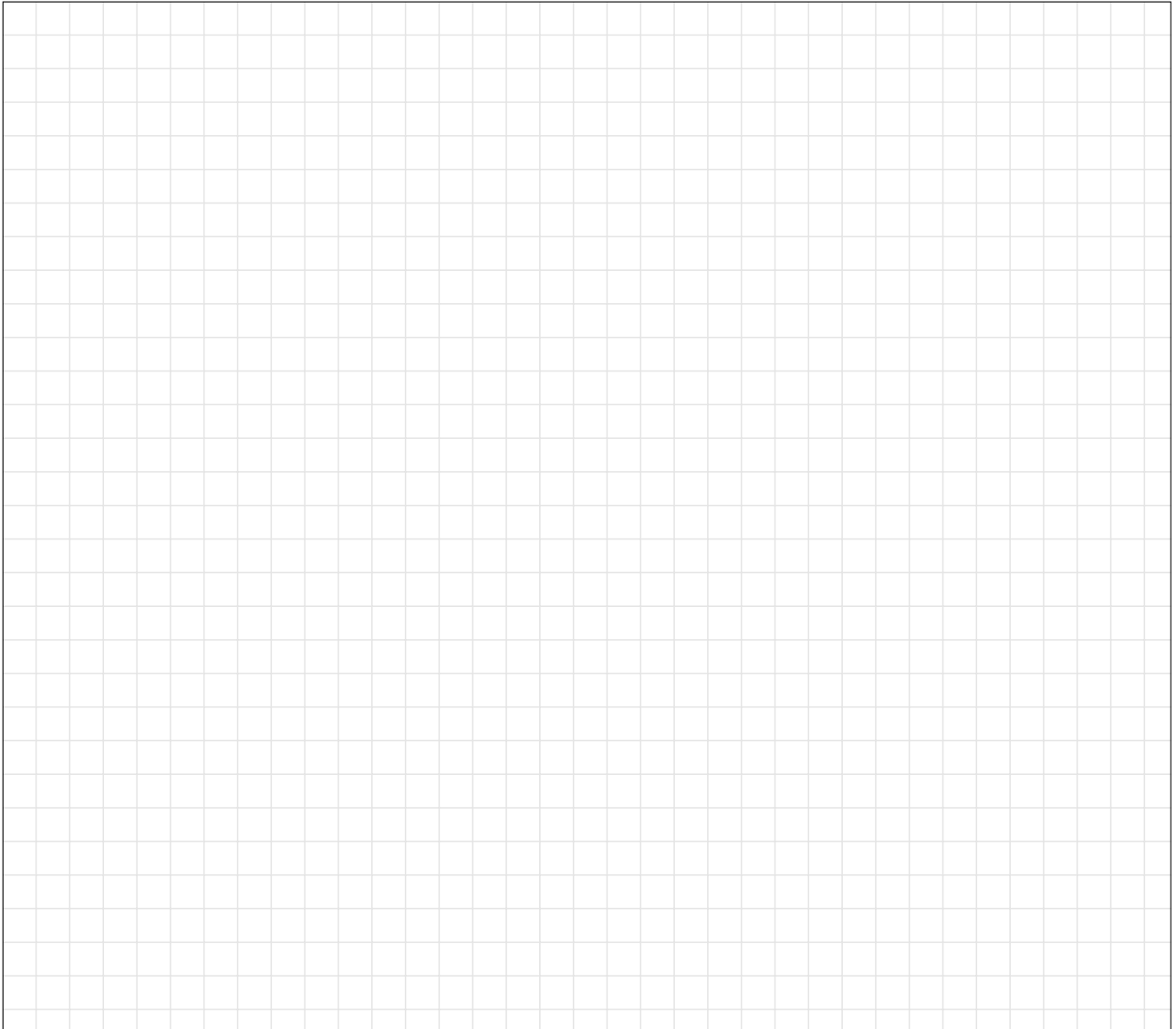
Proposition 3.2. Si f est une fonction admettant deux développements limités à l'ordre n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors ces développements sont égaux.

Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = b_k$.

On appellera le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$ la partie régulière du DL de f à l'ordre n en a .

Corollaire 3.3. Si f admet un développement limité à l'ordre n en a , alors pour tout entier $p \leq n$, f admet un développement limité à l'ordre p obtenu en tronquant le développement d'ordre n .

Corollaire 3.4. Soit f admettant un développement limité en 0 de partie régulière P . Si f est paire, alors P est pair. Si f est impaire, alors P est impair.

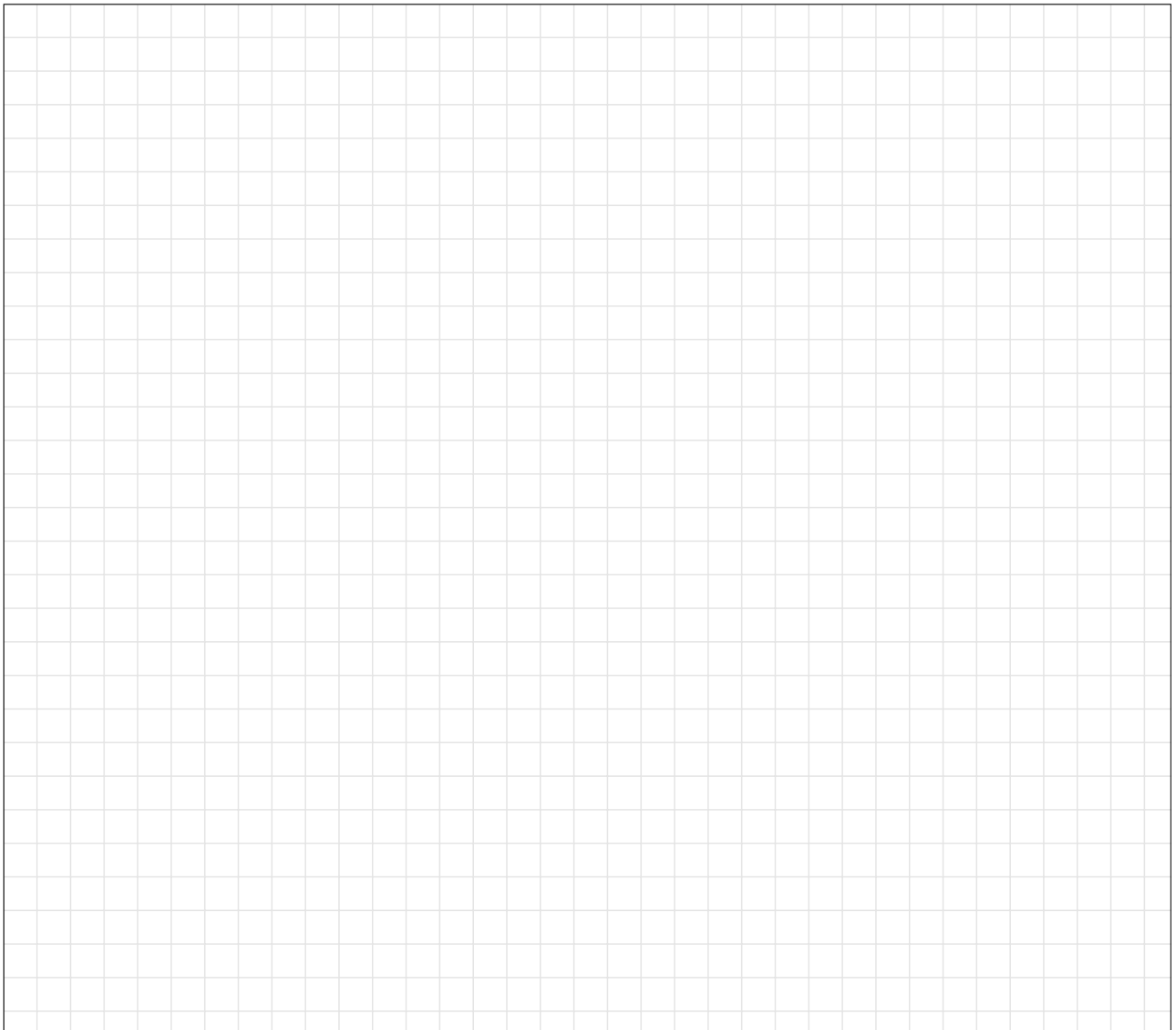


3.4 Forme normalisée d'un développement limité

Définition 3.2. Soit f une application admettant un développement limité l'ordre $n+p$ au voisinage de a . On appelle forme normalisée du développement limité de f , l'écriture :

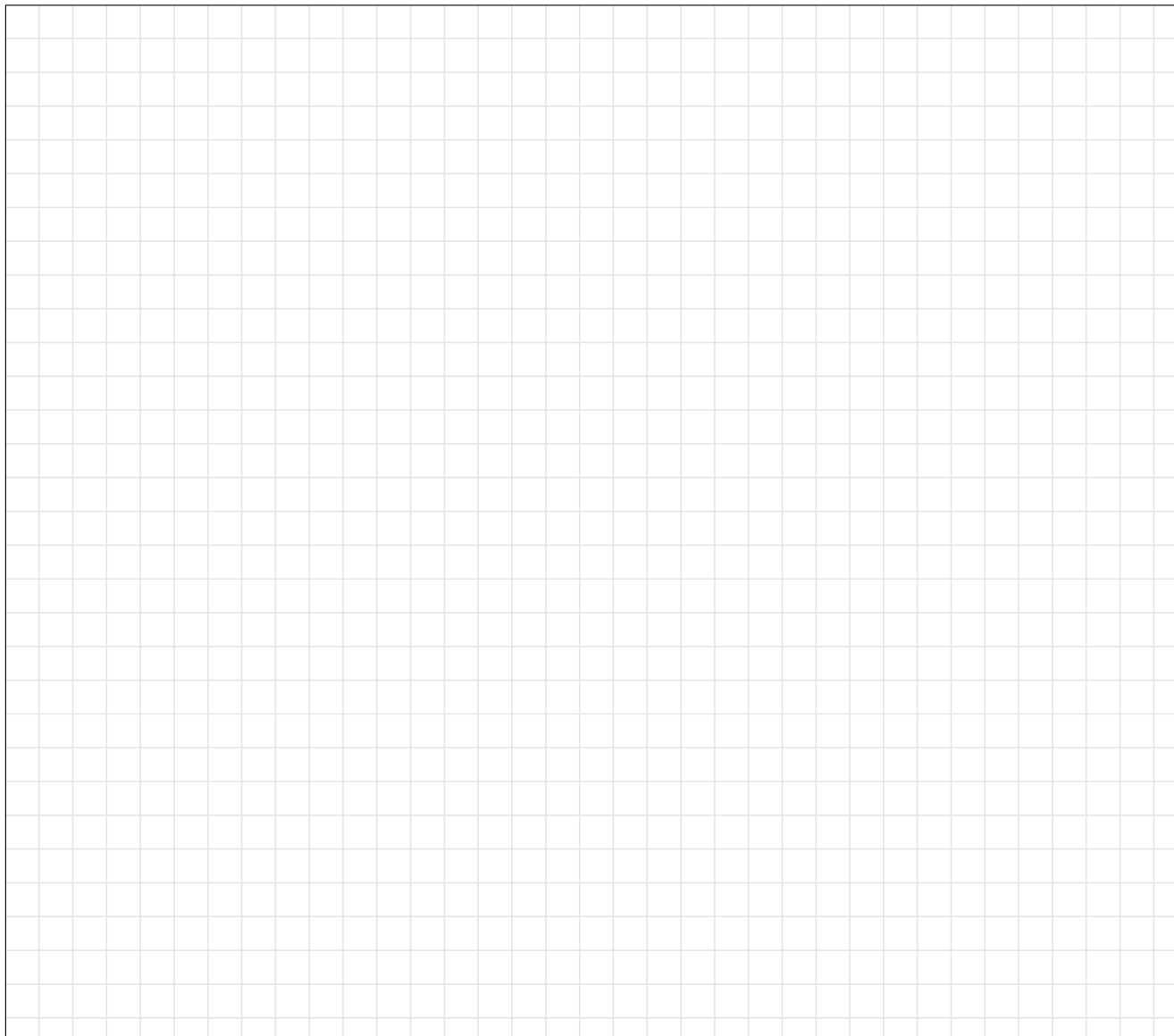
$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)) \text{ où } a_0 \neq 0.$$

Proposition 3.5. Si f a un développement limité normalisé $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n))$ où $a_0 \neq 0$, alors $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$ et f est de même signe que $a_0 h^p$.



3.5 Translation d'un développement limité

Proposition 3.6. Si f est une fonction vérifiant $f(a+h) = g(h)$ pour tout h dans l'intervalle I contenant 0, et si g admet un développement limité à l'ordre n en 0 : $g(x) = P(x) + o(x^n)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a : $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$.

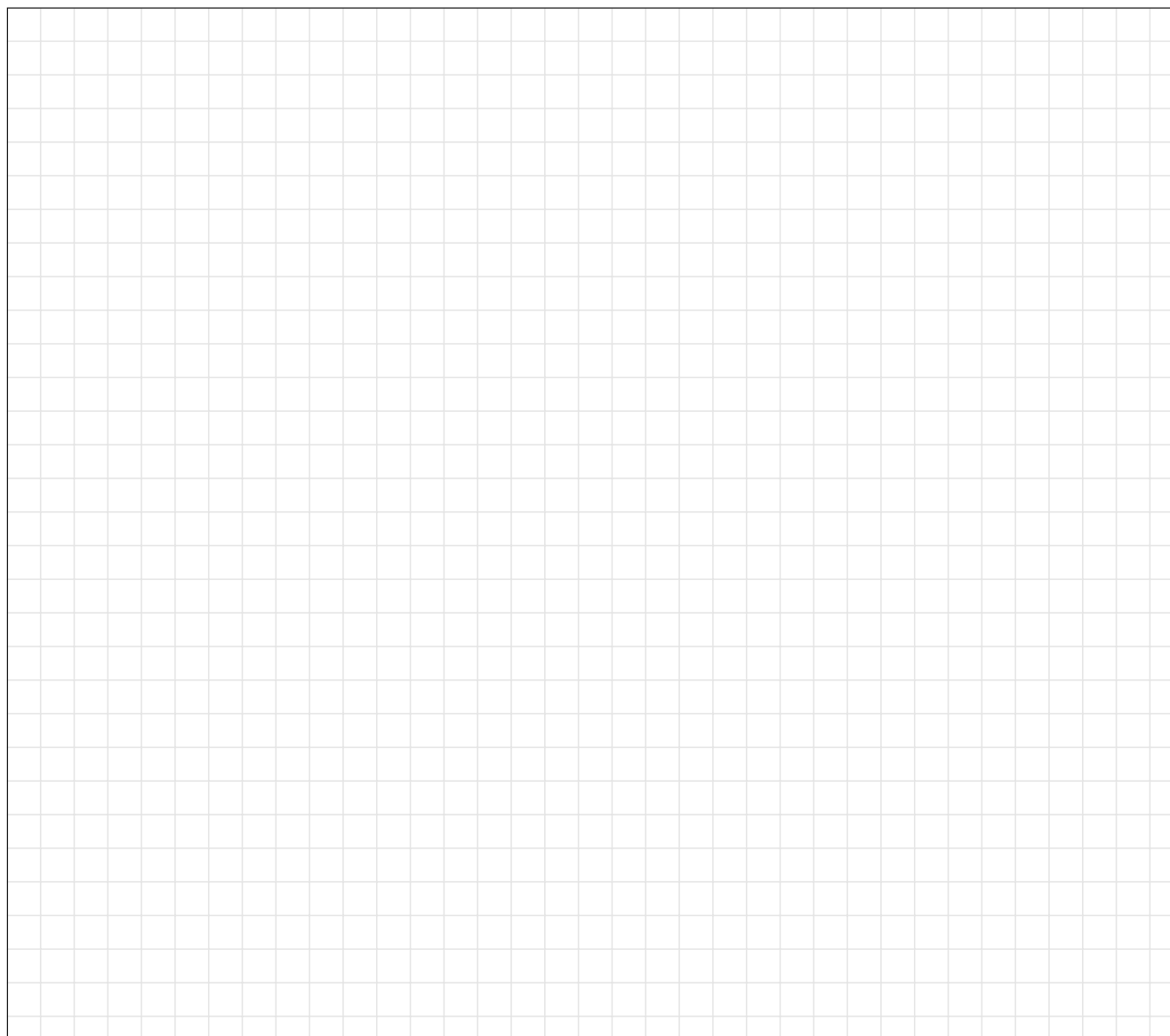


3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si la fonction g définie par $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n sur l'intervalle $J_+ = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in I \cap \mathbb{R}_+^*\right\}$ (respectivement sur $J_- = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in I \cap \mathbb{R}_-^*\right\}$), alors on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Si $g(u) = P(u) + o(u^n)$, alors $f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.



4 Formule de Taylor-Young

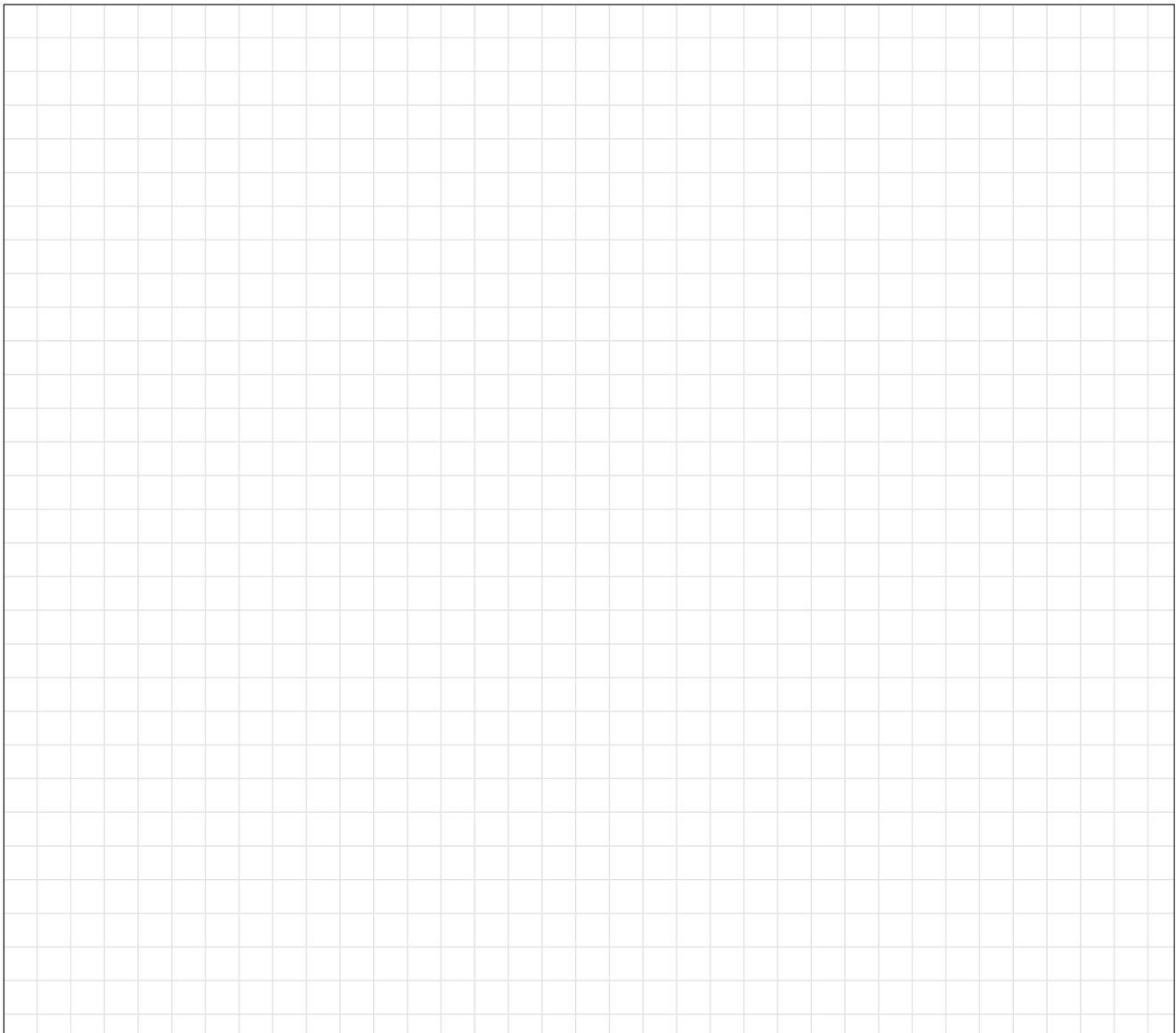
4.1 Intégration terme à terme d'un DL

Théorème 4.1. Soit I un intervalle contenant a et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue possédant un développement limité à l'ordre n en a qui est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Alors toute primitive F de f sur I possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en a qui est :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$



4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.2. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{K} avec $n \in \mathbb{N}$.
 f possède en tout point a de I un développement limité d'ordre n donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{ou}$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

5 Opérations sur les développements limités

5.1 Somme et produit

Proposition 5.1. Soit f et g deux fonctions réelles admettant en a des développements limités à l'ordre n :

$$f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n) \text{ et } g(x) = Q(x-a) + o((x-a)^n)$$

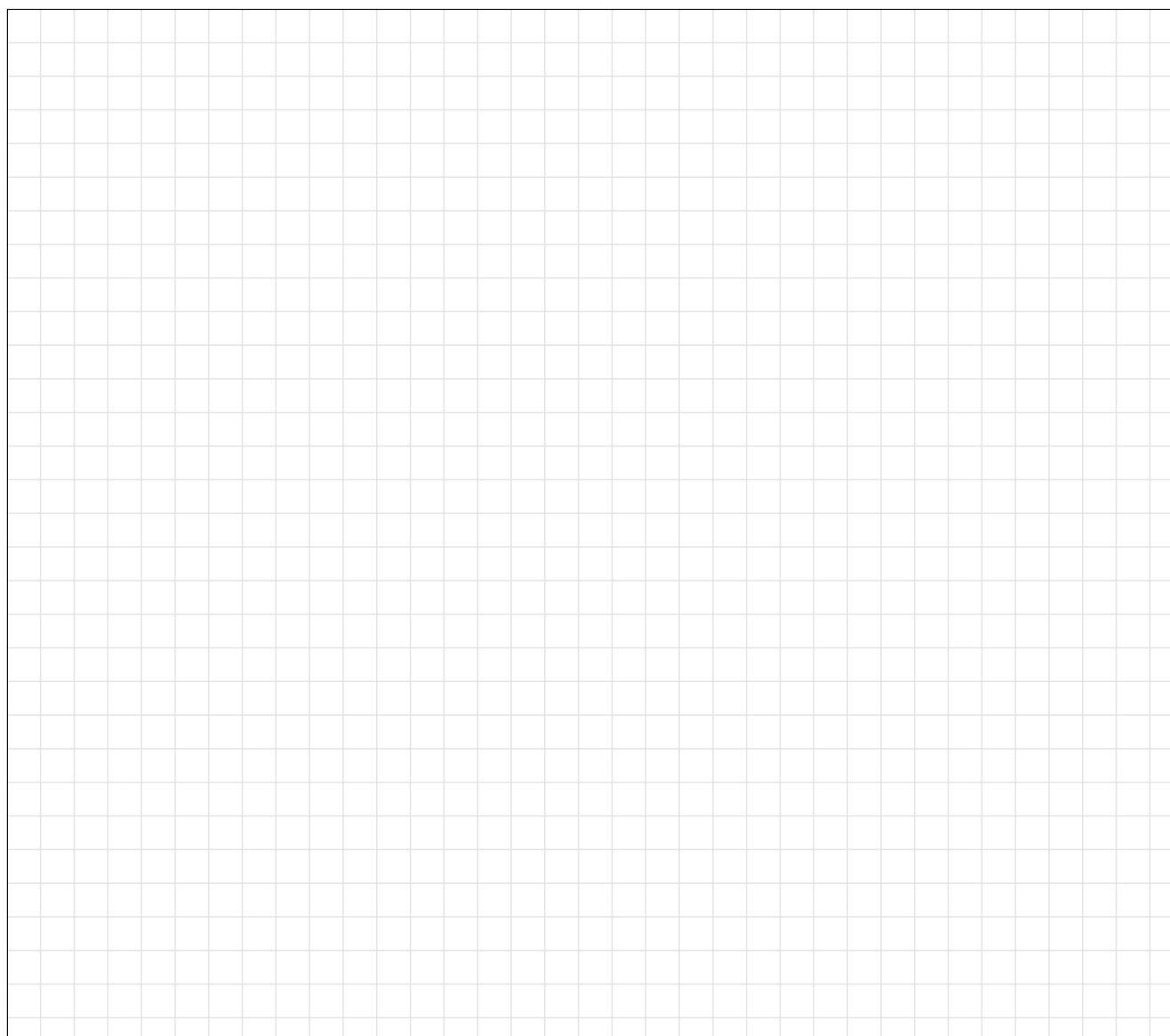
où P et Q sont des polynômes réels de degré au plus égal à n .

Alors les fonctions $f + g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n qui sont :

$$(f + g)(x) = P(x-a) + Q(x-a) + o((x-a)^n).$$

$$(fg)(x) = R(x-a) + o((x-a)^n)$$

où R est le polynôme obtenu tronquant le produit PQ au degré n .



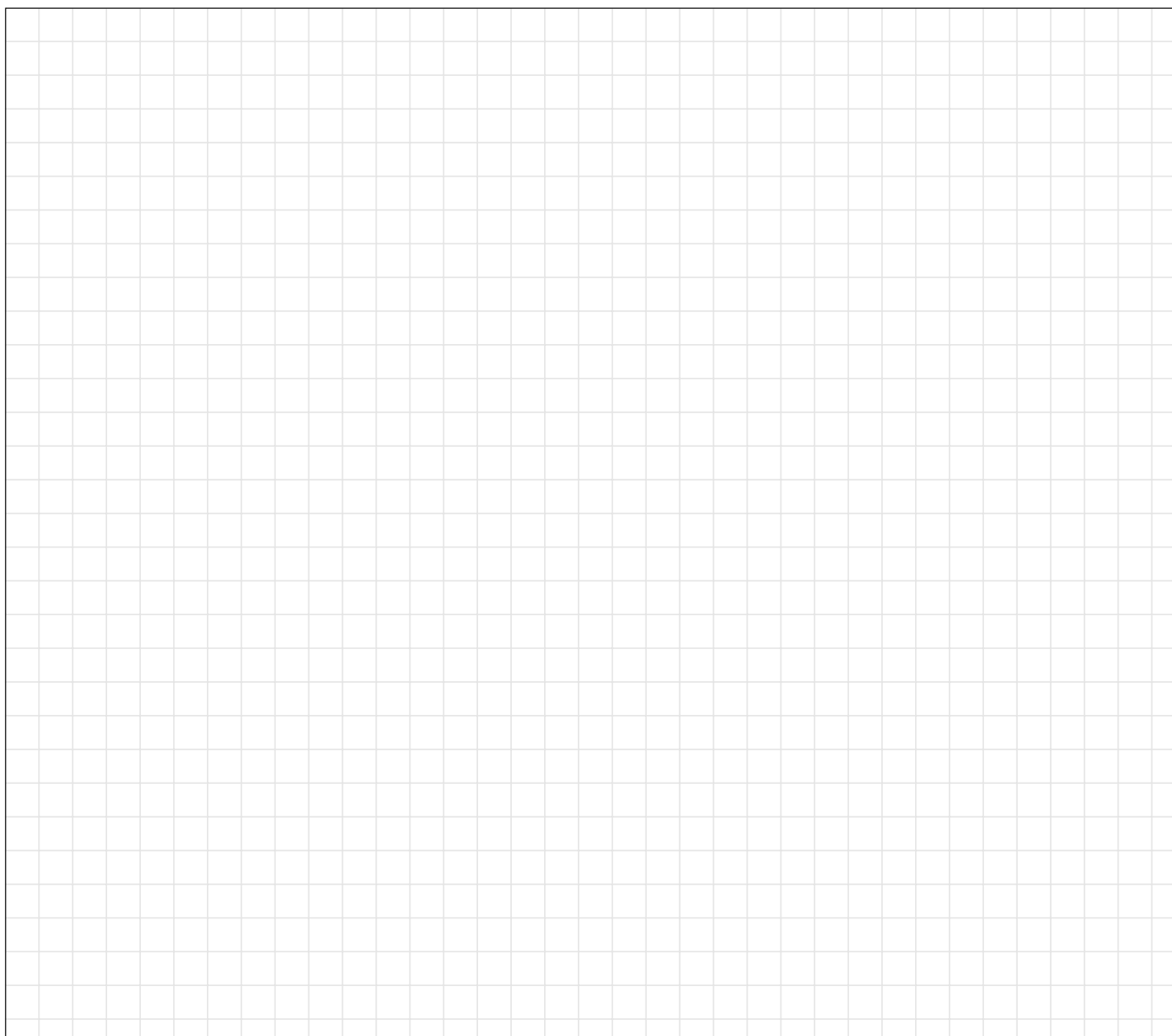
5.2 Dérivation d'un développement limité

Proposition 5.2. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I contenant a , admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a , alors ce développement s'obtient en dérivant celui de f :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k (x-a)^{k-1} + o(x-a)^{n-1}.$$





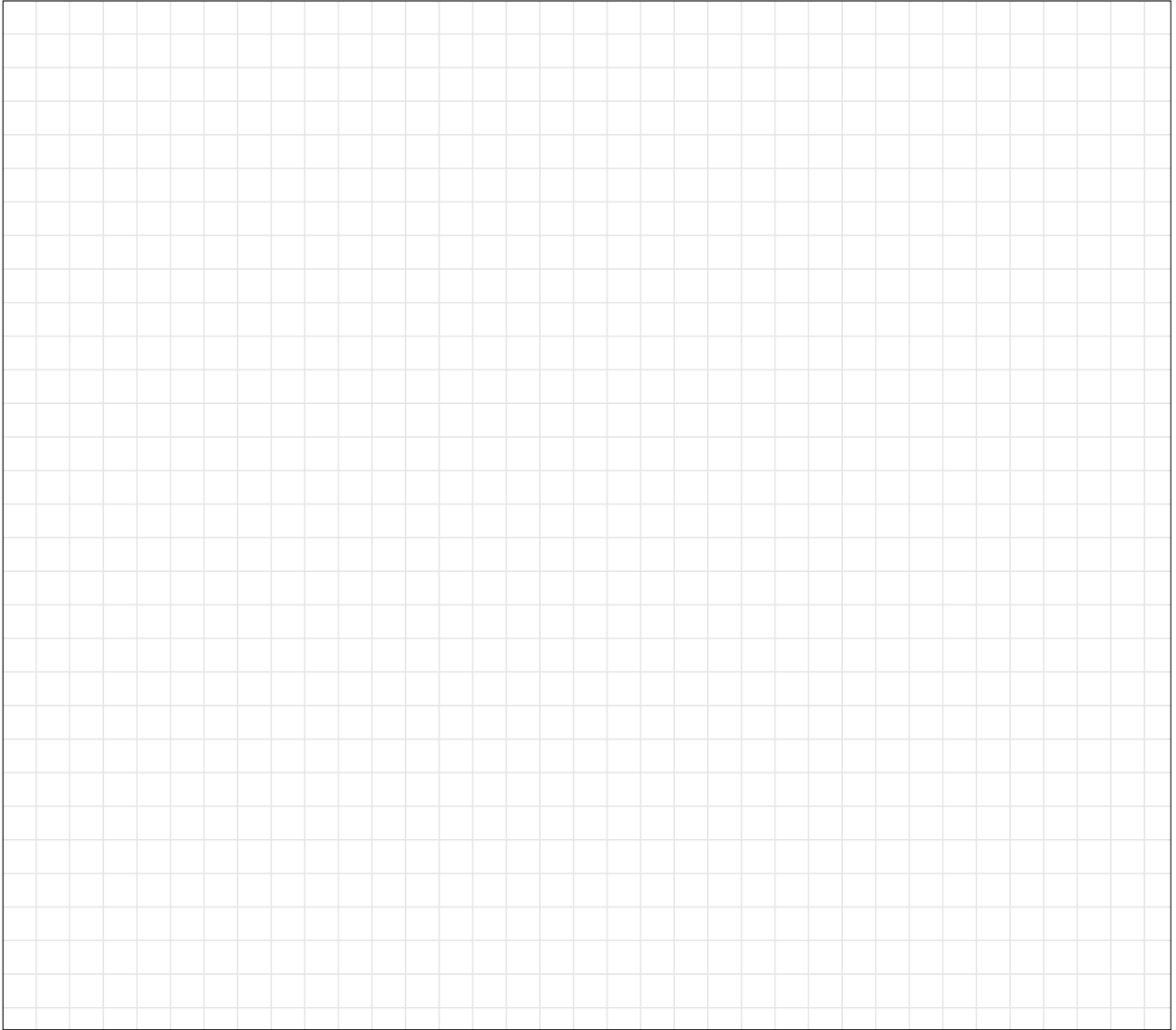
5.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 5.3. soit f une fonction définie sur I admettant un $DL_n(a)$ en $a \in I$, telle que $f(I) \subset J$, avec $f(x) = P(x - a) + o(x - a)^n$.

Soit g une fonction définie sur J admettant un DL_n en $b = f(a)$ avec $g(u) = Q(u - b) + o(u - b)^n$.

Alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme composé $Q(P(X))$:

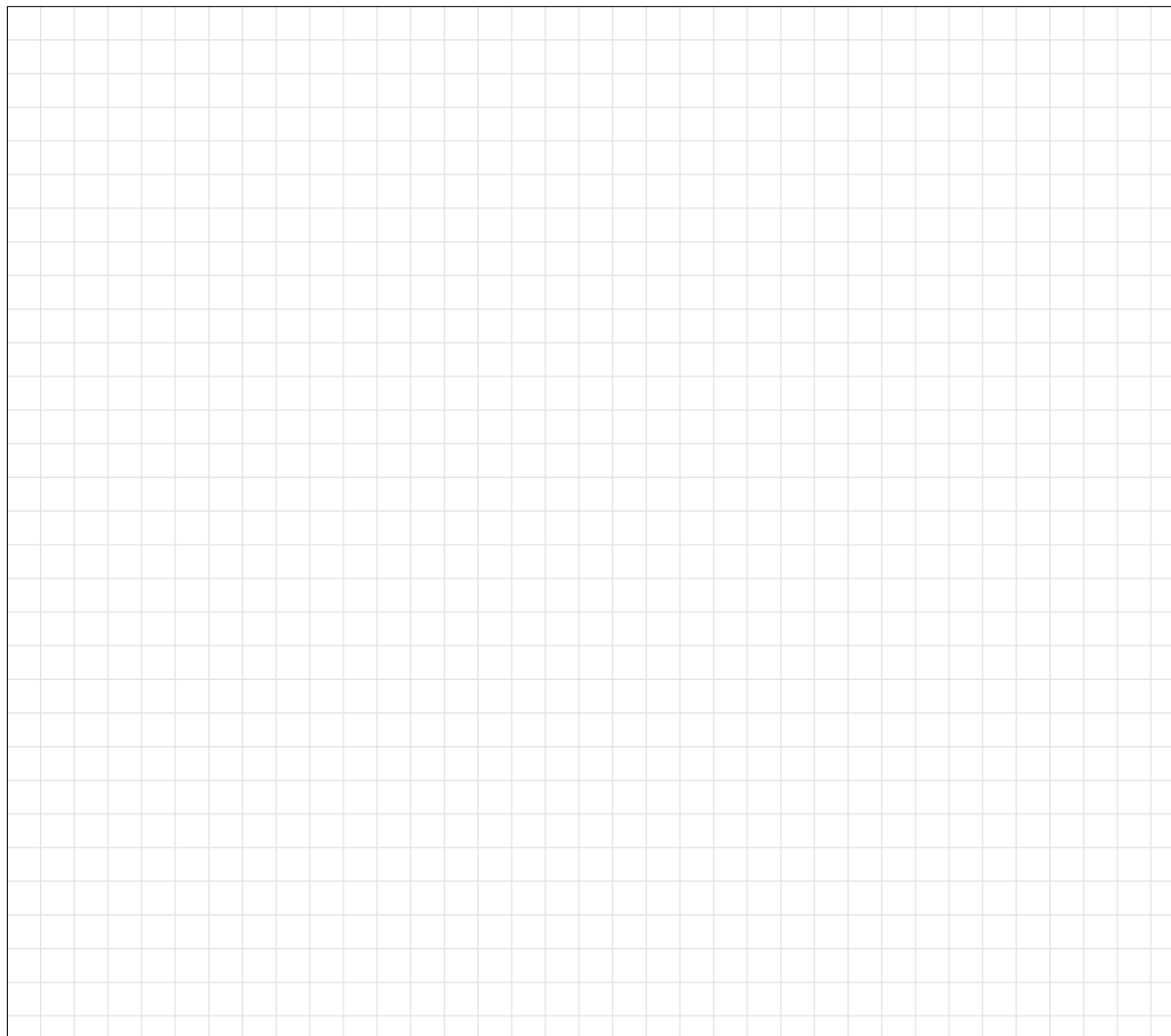
$$g \circ f(x) = \text{reste de la division de } Q(P(x - a)) \text{ par } (x - a)^{n+1} + o((x - a)^n).$$

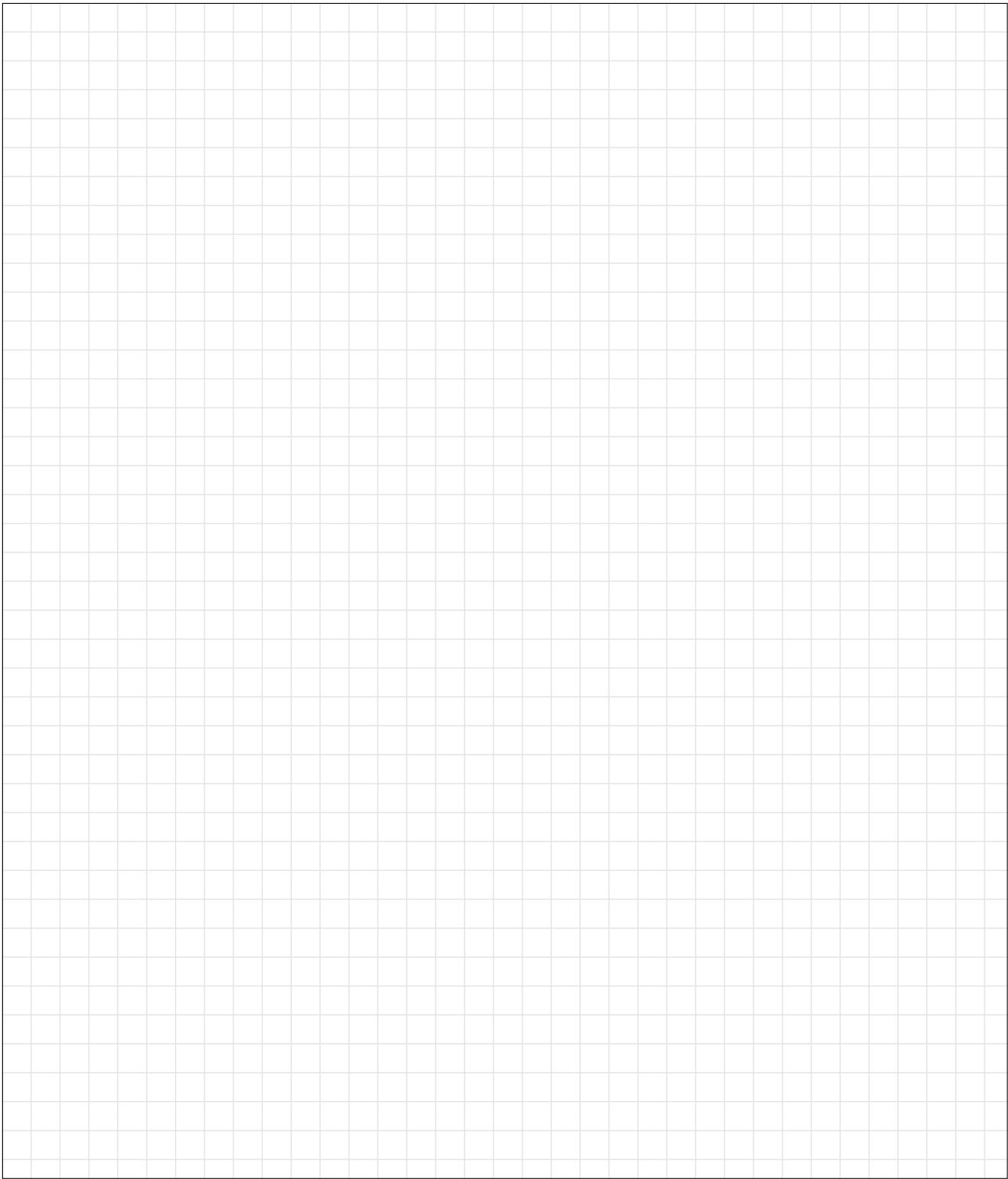


5.4 Développement limité d'un quotient

Proposition 5.4. Si u est une fonction telle que $\lim_a u = 0$ et si u a un développement limité à l'ordre n en a , alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ admet un $DL_n(a)$.

Si $u(x) = P(x-a) + o(x-a)^n$, alors $\frac{1}{1-u(x)} = 1 + P(x-a) + P^2(x-a) + P^3(x-a) + \dots + P^n(x-a) + o(x-a)^n$: le développement limité s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $1 + P(X) + P^2(X) + \dots + P^n(X)$.





6 Formulaire

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\arctan x \underset{0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^p \frac{1}{2p+1}x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

$$e^x \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{0}{=} x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^p \frac{1}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p})$$

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^p \frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

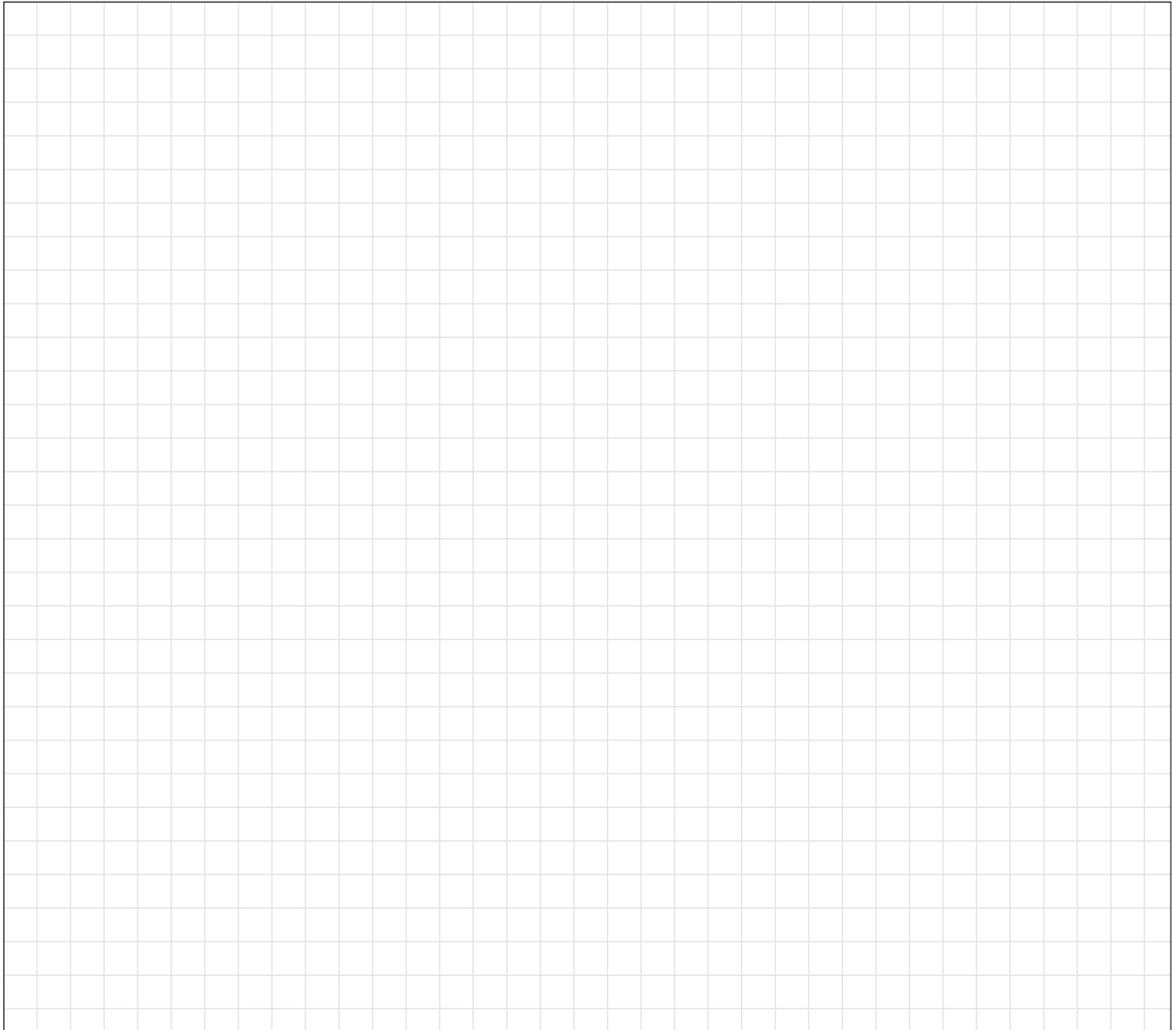
$$\tan x \underset{0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$



7 Applications

7.1 Étude de limites

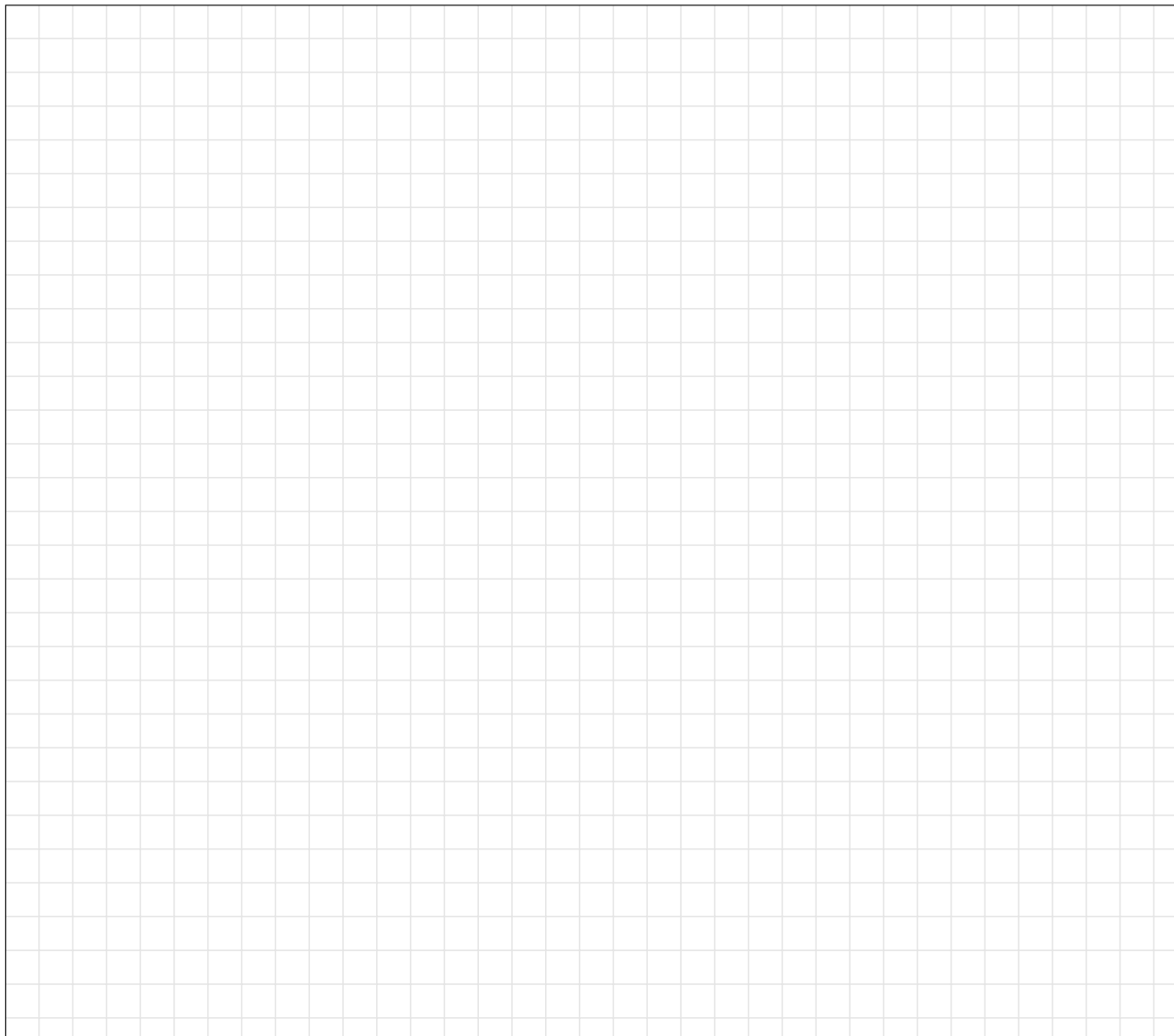
Proposition 7.1. *Si une fonction f a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f a une limite en a qui vaut a_0 .*



7.2 Prolongement par continuité

Proposition 7.2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

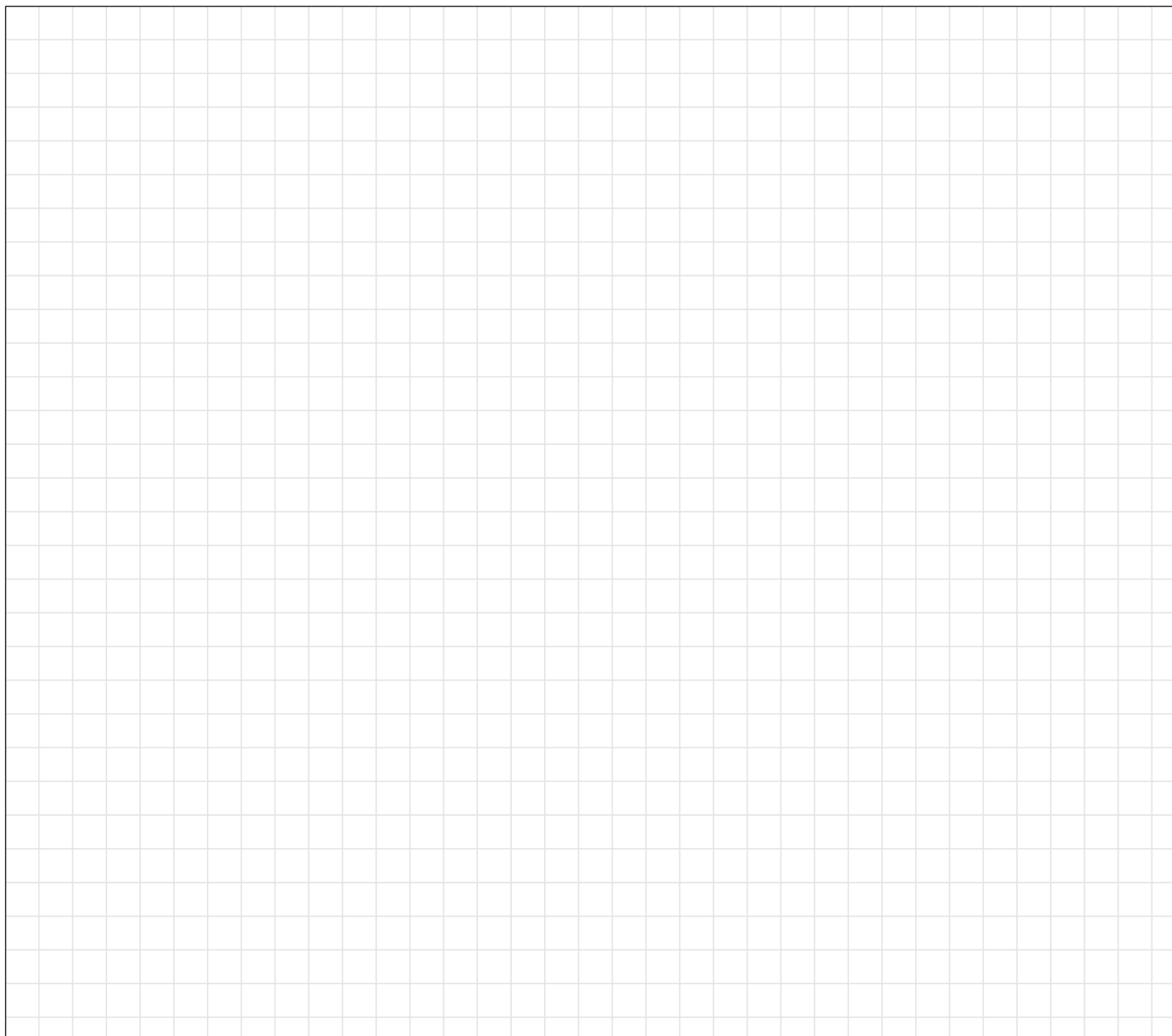
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.



7.3 Dérivabilité d'un prolongement par continuité

Proposition 7.3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in I$.

Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o(x - a)$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $\tilde{f}(a) = a_0$ et le prolongement \tilde{f} est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = a_1$.

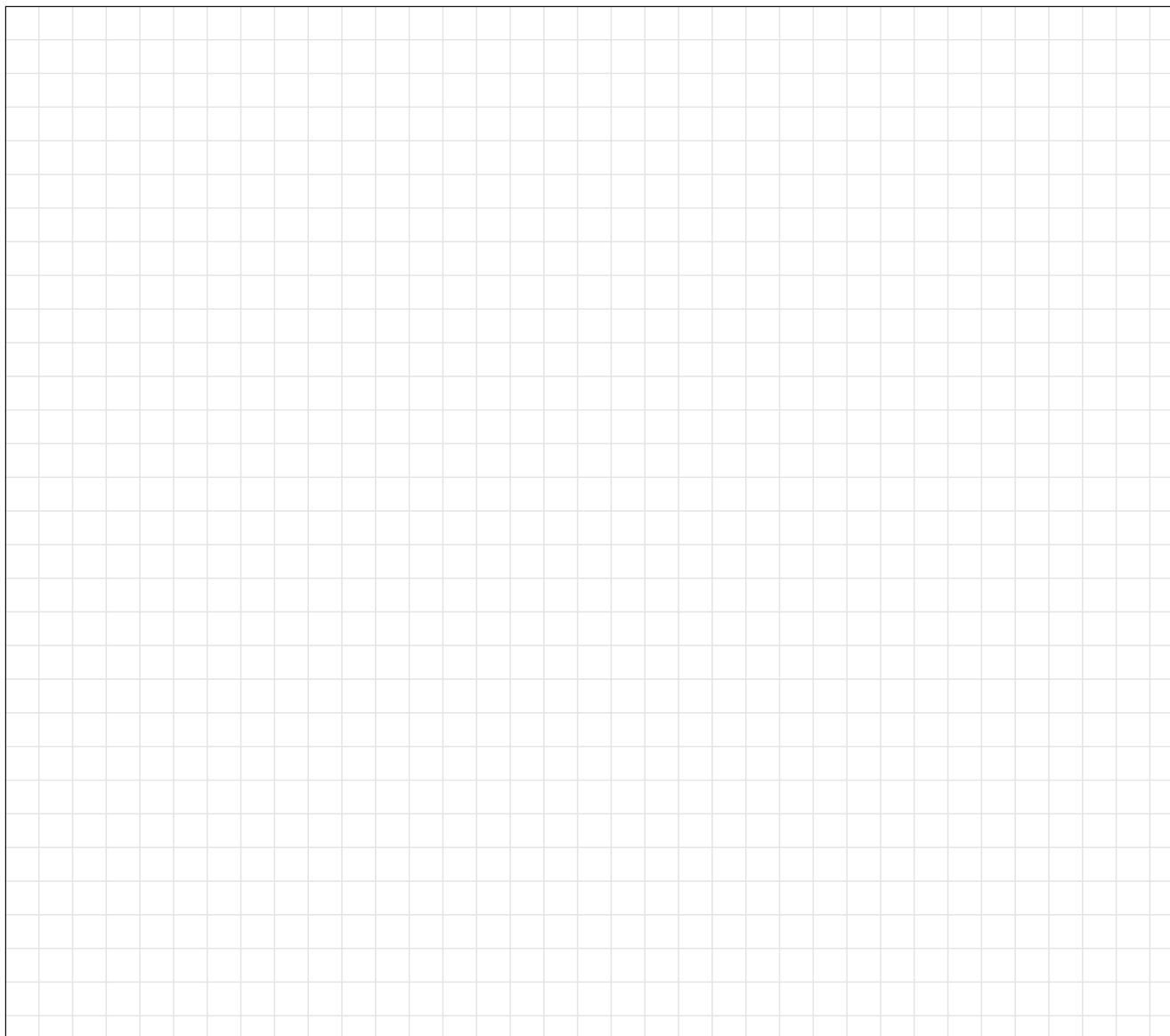


7.4 Position relative de la courbe et de la tangente

Proposition 7.4. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in I$.

Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_p(x - a)^p + o((x - a)^p)$ avec $p \geq 2$ et $a_p \neq 0$, alors la droite $y = a_0 + a_1(x - a)$ est tangente à la courbe représentative de f en a .

De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point a est donnée par le signe de $a_p(x - a)^p$: au-dessus si $a_p(x - a)^p \geq 0$.



7.5 Étude d'un extremum

Proposition 7.5. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in I$.

Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) = a_0 + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$ avec $a_2 \neq 0$, alors la fonction f a un extremum local en a : maximum local si $a_2 < 0$ et minimum local si $a_2 > 0$.



7.6 Asymptotes

Proposition 7.6. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

Si il existe un réel k tel que $f(x) - kx \underset{+\infty \text{ ou } -\infty}{=} a_0 + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$ avec $a_p \neq 0$,

alors la droite $y = kx + a_0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$).

De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\frac{a_p}{x^p}$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

