TD 13 - Géométrie spatiale

Exercice 1 : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct. Établir une équation du plan $\mathcal{P}$:

1. passant par le point $A(-2,2,1)$, de direction $\text{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u}$ de coordonnées $(1,1,2)$ et $\vec{v}(1,0,-1)$,
2. passant par A, B, C avec $A(-2,2,1), B(1,-3,5), C(3,2,-1)$,
3. parallèle au plan Π d'équation $3x-2y+z=0$ et contenant $A(-2,2,1)$,
4. passant par point $A(-2,2,1)$ et contenant la droite $D : \left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+z & = & 2 \\ x-4y-z & = & 4 \end{array}\right.$,
5. orthogonal au vecteur $\vec{w}\,(2,3,-2)$ et passant par le point $E\,(1,-4,2)$,
6. contenant la droite D et parallèle à Δ $\quad D : \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+z & = & 1 \\ x-4y+z & = & 2 \end{array}\right. \quad \Delta : \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ 2x-y+z & = & 2 \end{array}\right.$

   Soit $M\,(-1,1,3)$, calculer la distance $d(M,\mathcal{P})$ de M à $\mathcal{P}$ dans ce cas.
7. symétrique du plan (O,x,y) par rapport au plan $\pi : x-y+2z-3=0$ parallèlement à Oz.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, espace euclidien muni d'un repère orthonormé, établir des équations de la droite $\mathcal{D}$:

1. passant par les points $A\,(-1,4,2)$ et $B\,(1,2,3)$,

   Soit $M\,(-1,1,5)$, calculer la distance $d(M,\mathcal{D})$ de M à $\mathcal{D}$ dans ce cas.
2. passant par $C\,(1,3,-1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(-3,2,1)$,
3. définie par la représentation paramétrique suivante : $\quad x=1+2\lambda,\ y=2-\lambda,\ z=2+2\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 3 : On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations $2x-4y+3z+5=0$ et $x-2y+3z-2=0$.

1. Vérifier qu'ils ne sont pas parallèles et donner un système d'équations paramétriques de leur intersection $\mathcal{D}$.
2. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$ passant par $A(2,-2,0)$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 4 : Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, déterminer la perpendiculaire commune aux deux droites suivantes, c'est à dire l'unique droite perpendiculaire à ces deux droites et qui les rencontre, puis calculer la distance entre ces droites :

$$D : \left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+z & = & -5 \\ x+y+2z & = & -4 \end{array}\right. \qquad \Delta : \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z & = & -6 \\ z & = & 5 \end{array}\right.$$

Exercice 5 : On donne $A(3,-1,1)$, $\vec{u}(1,2,-1)$, $\mathcal{D}=A+\mathbb{R}.\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{P} : 2x-3y+z-1=0$.

Donner l'expression analytique de la projection sur $\mathcal{D}$ parallèlement à $\mathcal{P}$ et de la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

Exercice 6 : Dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on se donne A de coordonnées $(\alpha,\alpha,0)$.

Calculer les coordonnées de B et C sachant que B appartient au plan $y=0$ et que le tétraèdre (O,A,B,C) est régulier.

Exercice 7 : Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs quelconques de l'espace.

1. Vérifier la relation : $\quad (\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{w}=(v.w)\vec{w}-||\vec{w}||^2\,\vec{v}$.
2. On suppose que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs orthogonaux non nuls. En utilisant le résultat précédent, montrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{u}_0$, orthogonal à $\vec{w}$ et tel que $\vec{u}_0\wedge\vec{w}=\vec{v}$.

Exercice 8 : Dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé on considère les plans d'équations :

$$\mathcal{P}_1 : x+y-1=0, \qquad \mathcal{P}_2 : y+z-1=0, \qquad \mathcal{P}_3 : z+x-1=0, \qquad \mathcal{P}_4 : x+2y+z=0.$$

Déterminer λ pour que les projections orthogonales du point de coordonnées $(1,1,\lambda)$ sur les quatre plans soient coplanaires.

Exercice 9 :

1. Montrer que $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+5=0$ est l'équation d'une sphère.

2. Déterminer une équation du plan tangent à cette sphère au point $B(-1, 1, -3)$.
3. Déterminer l'intersection de cette sphère avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.

Exercice 10 : Déterminer une équation cartésienne de la sphère tangente en $A(1, 2, 1)$ à $\mathcal{D}$: $\left\{ \begin{array}{rcr} x + y - 2z & = & 1 \\ 2x - y - 3z & = & -3 \end{array} \right.$ et tangente en $A'(1, -1, -2)$ à $\mathcal{D}'$: $\left\{ \begin{array}{rcr} 2x + y + 2z & = & -3 \\ x - y - z & = & 4 \end{array} \right.$.

Exercice 11 : Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle $\mathcal{C}$ le cercle d'équations $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 5 \end{array} \right.$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
2. Déterminer les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec les plans de coordonnées xOy, yOz et zOx.
3. Quelles sont les tangentes à $\mathcal{C}$ qui rencontrent l'axe Oz ?