TD 14 - Intégration sur un segment

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$. *On pourra chercher une relation de récurrence.*

Exercice 2 : Pour un entier naturel non nul n, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2 (\ln x)^n\, dx$.

1. Calculer I_1, étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ et montrer qu'elle converge.
2. Montrer que pour tout $x \in [1, e]$, $\ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$, en déduire la limite de $(I_n)_n$.
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n, en déduire un équivalent de I_n.

Exercice 3 : Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \displaystyle\int_a^b \varphi(x) \sin nx\, dx$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En déduire que ce résultat est conservé pour une fonction φ continue.

Exercice 4 : Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b g(t)\cos(nt)\, dt = 0$.

Exercice 5 : Étudier les suites :

a. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$

b. $u_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$

c. $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$

d. $u_n = \sqrt[n]{\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}$

Exercice 6 : Soit μ un réel différent de 1 et de -1. Calculer, à l'aide de sommes de Riemann, la valeur de l'intégrale

$$I_\mu = \int_0^\pi \ln(1 - 2\mu\cos t + \mu^2)\, dt.$$

Exercice 7 : En encadrant les sommes par des intégrales, donner un encadrement de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et de $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n k\ln k$.
En déduire les limites de u_n et v_n ainsi qu'un équivalent en $+\infty$.

Exercice 8 : Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_0^a \frac{1}{1+nt}dt \qquad v_n = \int_0^a \frac{f(t)}{1+nt}dt \qquad w_n = \int_0^a t^n f(t)dt$$

1. Calculer u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. Démontrer que (v_n) converge et déterminer sa limite.
3. On suppose maintenant que $0 < a \leq 1$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Exercice 9 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifie :

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|.$$

Exercice 10 : Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet au moins un point fixe. Puis, adapter ce résultat à une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$.

Donner un exemple de fonction g définie sur $[0, 1]$, sans point fixe et telle que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt = \frac{1}{2}$.

Exercice 11 : Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Étudier la continuité et la dérivabilité des applications suivantes :

$$f : x \longmapsto \int_0^1 (x-t)\varphi(t)\, dt, \qquad g : x \longmapsto \int_0^x (x-t)\varphi(t)\, dt, \qquad h : x \longmapsto \int_0^1 \varphi(x+t)\cos(t)\, dt.$$

Exercice 12 : On pose pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, $\quad I(u) = \displaystyle\int_u^{2u} \frac{\sin(x)}{x^2}\, dx.$

1. Justifier que $I(u)$ est bien définie, pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, et que la fonction I ainsi définie est paire.
2. Montrer que pour x positif, on a $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x + \dfrac{x^3}{6}$ à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2.
3. En déduire un encadrement de $I(u)$, pour u positif, faisant intervenir l'intégrale $J(u) = \displaystyle\int_u^{2u} \frac{1}{x}\, dx$.
4. Calculer $J(u)$, et en déduire la limite de $I(u)$ quand u tend vers 0.
5. Déterminer un autre encadrement de $I(u)$. Étudier $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} I(u)$.

Exercice 13 : On considère la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\, dt$.

1. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que F est impaire, puis étudier le signe de F sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\dfrac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leq F(x) \leq \dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}}$, puis en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.
3. Démontrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer F' et dresser le tableau de variation de F.
4. Pour $x > 0$, on pose $h(x) = x \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{4+t^4}} - \frac{1}{t^2} \right) dt$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$ et en déduire un équivalent de F au voisinage de $+\infty$.

Exercice 14 : Calculer une primitive $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(a-x)}}\, dx$ où a est un réel donné positif. On commencera par préciser le domaine de définition de la fonction à intégrer et on utilisera les 4 méthodes suivantes :

1. en posant l'un des 3 changements de variables suivants
   a) le changement de variables $u = \sqrt{x}$, **b)** $x - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}\cos\theta$, **c)** $x = a\sin^2\varphi$,
2. en écrivant de manière canonique le trinôme $x(a-x) = \alpha(1-u^2)$.

En déduire la formule : $\arcsin\left(\frac{2x}{a} - 1\right) - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout x dans un domaine à préciser.

Exercice 15 : On définit pour x réel, la fonction u par $u(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$.

1. (a) En utilisant une formule de Taylor à l'ordre 1, montrer que $\forall y \in [-2, 2]$, $|e^y - 1 - y| \leqslant \dfrac{1}{2} y^2 e^2$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, on pose $d(h) = \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} + \displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\, dt$. Écrire $d(h)$ sous la forme d'une seule intégrale $d(h) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)} A(h,t)\, dt$ avec A une fonction de h et t que l'on précisera.
   (c) En utilisant une question précédente, pour $y = -h(1+t^2)$, avec $0 < |h| \leqslant 1$, prouver que $|d(h)| \leqslant K.|h|$ où K est une constante indépendante de h que l'on ne cherchera pas à calculer.
   (d) En déduire que u est dérivable en x et que $u'(x) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\, dt$.
2. On pose, pour tout réel x, $v(x) = u(x^2)$ et $w(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt \right)^2$.
   (a) Montrer que v et w sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout réel x, $v'(x)$ et $w'(x)$.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, prouver que $w'(x) = -v'(x)$ à l'aide du changement de variables $t = x \times z$. Et pour $x = 0$?
   (c) Calculer $v(0) + w(0)$. Que peut-on dire de la fonction $v + w$?
3. (a) Que vaut $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} ae^{-a}$? En déduire qu'il existe un réel A (que l'on ne cherchera pas à déterminer) tel que $a > A \Longrightarrow 0 < e^{-a} < \frac{1}{a}$.
   (b) On suppose ici que $x > A$, montrer que $0 \leqslant u(x) \leqslant \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\, dt$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} u(x)$ puis $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} v(x)$.
   (c) En déduire que $\ell = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ existe et donner sa valeur.