Mathématique - Corrigé Devoir Maison n°13

Exercice 1

1.
   - $F \subset E$ par sa définition.
   - La fonction nulle $f_0 : x \longmapsto 0$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f_0' = f_0'' = 0$.
     Cette fonction est solution de l'équation différentielle (1). Donc $f_0 \in F$ et $\boxed{F \neq \varnothing}$
   - Soient y_1, y_2 , deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$.
     Alors y_1 et y_2 vérifient : $\begin{cases} y_1'' + 2xy_1' + x^2 y_1 = 0 & (\ell_1) \\ y_2'' + 2xy_2' + x^2 y_2 = 0 & (\ell_2) \end{cases}$
     Avec $\ell_1 + \lambda\ell_2$, on obtient que : $(y_1 + \lambda y_2)'' + 2x(y_1 + \lambda y_2)' + x^2(y_1 + \lambda y_2) = 0$
     Ce qui prouve que $y_1 + \lambda y_2 \in F$.

   Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

2. La fonction $\widetilde{f}$ est indéfiniment dérivable car f et f' le sont.

   On calcule la dérivée : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}'(x) = f''(x) + f(x) + xf'(x)$

   Mais, sachant que f est solution de (1), on a :

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}'(x) = -2xf'(x) - x^2 f(x) + f(x) + xf'(x) = -xf'(x) + (1 - x^2)f(x)$

   On dérive à nouveau : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}''(x) = -xf''(x) - x^2 f'(x) - 2xf(x)$

   que l'on remplace dans l'équation (1) :

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}''(x) + 2x\widetilde{f}'(x) + x^2\widetilde{f}(x)$
   $= -xf''(x) - x^2 f'(x) - 2xf(x) + 2x(-xf'(x) + (1 - x^2)f(x)) + x^2(f'(x) + xf(x))$
   $= -xf''(x) - 2x^2 f'(x) - x^3 f(x) = -x(f''(x) + 2xf'(x) + x^2 f(x)) = 0$ car f est solution de (1).

   On en déduit que $\widetilde{f}$ vérifie l'équation (1) et donc que $\boxed{\widetilde{f} \in F.}$

   De plus, l'application s est linéaire :

   $\forall (f_1, f_2) \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $s(f_1 + \lambda f_2)(x) = \widetilde{f_1 + \lambda f_2}(x)$
   $= (f_1 + \lambda f_2)(x) + x(f_1 + \lambda f_2)'(x) = f_1'(x) + xf_1(x) + \lambda(f_2'(x) + xf_2(x)) = (s(f_1) + \lambda s(f_2))(x)$

   On en déduit que $s(f_1 + \lambda f_2) = s(f_1) + \lambda s(f_2)$.

   s est une application linéaire de F à valeur dans F, donc s est un endomorphisme de F.

   Enfin $\forall f \in F$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $s(s(f))(x) = s(\widetilde{f})(x) = \widetilde{f}'(x) + x\widetilde{f}(x)$
   $= (f''(x) + xf'(x) + f(x)) + x(f'(x) + xf(x)) = f''(x) + 2xf'(x) + x^2 f(x) + f(x) = f(x)$
   car f est solution de (1).

   s est un endomorphisme de F tel que $s \circ s = id_F$. Donc $\boxed{s \text{ est une symétrie de } F}$

3. Prenons une application f quelconque dans F :

   - $f \in Ker(s - Id_E) \Longleftrightarrow s(f) = f \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + xf(x) = f(x)$
     $\Longleftrightarrow f$ est solution de $(H_1) \Longleftrightarrow f \in F_1$.
   - $f \in Ker(s + Id_E) \Longleftrightarrow s(f) = -f \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + xf(x) = -f(x)$
     $\Longleftrightarrow f$ est solution de $(H_2) \Longleftrightarrow f \in F_2$.

   Donc s est, dans F, la symétrie par rapport à F_1 et dans la direction de F_2. On a donc $\boxed{F = F_1 \oplus F_2}$

4. Pour des applications f_1 et f_2 dérivables sur $\mathbb{R}$,

   - f_1 est solution de (H_1) $\quad f_1' = (-x + 1)f_1 \Longleftrightarrow \exists C_1 \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = C_1 \exp(-\frac{x^2}{2} + x)$

- f_2 est solution de (H_2) $\quad f_2' = (-x-1)f_2 \Longleftrightarrow \exists C_2 \in \mathbb{R}\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_2(x) = C_2 \exp(-\frac{x^2}{2} - x)$

Toute solution de (H_1) est un élément de F, car c'est une application indéfiniment dérivable telle que :
$y'' + (x-1)y' + y = 0$ (obtenu en dérivant (H_1)), et donc telle que
$y'' + 2xy' + x^2y = -(x-1)y' - y + 2xy' + x^2y = (x+1)y' + (x^2-1)y = (x+1)(y' + (x-1)y) = 0$
Donc, toutes les solutions $f_1 : x \longmapsto C_1 \exp(-\frac{x^2}{2} + x)$ de (H_1) sont dans F_1 (et réciproquement).
De même, toutes les solutions $f_2 : x \longmapsto C_2 \exp(-\frac{x^2}{2} - x)$ de (H_2) sont les éléments de F_2.
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (1)$ est

$$\boxed{F = F_1 \oplus F_2 = \left\{ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & C_1 \exp(-\frac{x^2}{2} + x) + C_2 \exp(-\frac{x^2}{2} - x) \end{array} \middle| (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Exercice 2

1. (a) En utilisant les formules :
$e^{-2x} \underset{0}{=} 1 - 2x + 2x^2 - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}x^4 - \dfrac{4}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)$
$\sin(2x) \underset{0}{=} 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{4}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

(b) D'où :
$$\frac{1}{e^{-2x}-1} \underset{0}{=} \frac{1}{-2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)}$$
et
$$\frac{1}{\sin(2x)} \underset{0}{=} \frac{1}{2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)}$$
On utilise $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^4\varepsilon(u)$ avec u qui tend vers 0.
$$\frac{1}{e^{-2x}-1} = -\frac{1}{2x}\left(1 + (x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^4) + (x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3)^2 + (x - \frac{2}{3}x^2)^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)\right)$$
et
$$\frac{1}{\sin(2x)} = \frac{1}{2x}\left(1 + (\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4) + (\frac{2}{3}x^2)^2 + x^4\varepsilon(x)\right)$$
On obtient
$$\frac{1}{e^{-2x}-1} = \frac{1}{2x}\left(-1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^4 - x^2 - \frac{4}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 - x^3 + 2x^4 - x^4\right)$$
et
$$\frac{1}{\sin(2x)} = \frac{1}{2x}\left(1 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + \frac{4}{9}x^4 + x^4\varepsilon(x)\right)$$
On rassemble les deux :
$$f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{2x}\left(-x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x)\right)$$
D'où le $DL_3(0)$ de f : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)}$

(c) On trouve que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ existe dans $\mathbb{R}$, donc f se prolonge par continuité en posant $\boxed{f(0) = -\dfrac{1}{2}.}$
La fonction ainsi prolongée admet un $DL_1(0)$.
Par propriété, $\boxed{f \text{ est donc dérivable en 0 et } f'(0) = \dfrac{1}{6}}$
La tangente Δ est d'équation cartésienne $y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}x$. la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ est donc déterminée par le signe de $\dfrac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

$\boxed{\text{Au voisinage de 0, lorsque } x<0,\ \mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } \Delta \text{ et lorsque } x>0,\ \mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \Delta}$

Le point de la courbe d'abscisse 0 est un point d'inflexion.

2. (a) On veut que $\dfrac{x+1}{x}$ existe et que $\dfrac{x+1}{x}>0$. Ce qui donne $\boxed{D_g =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{-\ln(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{x^2+x-1}{x+1}}{-\ln(x)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)\ln(x+1)}{-\ln(x)}+\frac{(x^2+1)(-\ln(x))}{-\ln(x)}+\frac{x^2+x-1}{(x+1)(-\ln(x))}=0+1+0=1$

On en déduit qu' $\boxed{\text{au voisinage de 0 : } g(x)\sim -\ln(x) \text{ , et donc } \displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty}$

$\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{g(x)}{\frac{-1}{x+1}} = \lim_{x\to -1}(x^2+1)(-x-1)(\ln(-x-1)-\ln(-x))-x^2-x+1=1$

car $\displaystyle\lim_{x\to -1}(-x-1)\ln(-x-1)=\lim_{X\to 0^+}X\ln(X)=0$

On en déduit qu' $\boxed{\text{au voisinage de } -1 : g(x)\sim -\frac{1}{x+1} \text{ , et donc } \displaystyle\lim_{x\to -1^-} g(x)=+\infty}$

(c) $(1+h^2)\ln(1+h)=(1+h^2)(h-\dfrac{1}{2}h^2+\dfrac{1}{3}h^3+h^3\varepsilon(h))=h-\dfrac{1}{2}h^2+\dfrac{4}{3}h^3+h^3\varepsilon(h)$

$\dfrac{1+h-h^2}{1+h}=(1+h-h^2)(1-h+h^2-h^3+h^3\varepsilon(h))=1-h^2+h^3+h^3\varepsilon(h)$

(d) En posant $h=\dfrac{1}{x}$, on en déduit que :

$\displaystyle g(x)=(x^2+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{x^2+x-1}{x+1}=\frac{1}{h^2}\big((1+h^2)\ln(1+h)\big)+\frac{1}{h}\left(\frac{1+h-h^2}{1+h}\right)$

$\displaystyle =\frac{1}{h^2}\left(h-\frac{1}{2}h^2+\frac{4}{3}h^3+h^3\varepsilon(h)\right)+\frac{1}{h}\left(1-h^2+h^3+h^3\varepsilon(h)\right)$

$\displaystyle g(x)=\frac{2}{h}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}h+h\varepsilon(h)=2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$

On obtient donc $\boxed{g(x)=2x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

Conséquence graphique : la courbe de g admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ d'équation $y=2x-\dfrac{1}{2}$.

Le signe de $g(x)-2x+\dfrac{1}{2}$ est celui de $\dfrac{1}{3x}$ au voisinage de $\pm\infty$.

La courbe de g est en-dessous de l'asymptote pour $x\to-\infty$ et au dessus pour $x\to+\infty$.