Mathématique - Corrigé Devoir Maison n°12

Exercice 1

1. (a) Soit f une fonction impaire sur $[-1,1]$, alors $f(-t)=-f(t)$ pour tout $t\in[-1,1]$.
D'où $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^{-1} f(-u)\,(-du)$ en posant $t=-u$ ce qui donne $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=-\int_{-1}^0 f(u)\,du$.
On en déduit que $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt=\int_{-1}^0 f(t)\,dt+\int_0^1 f(t)\,dt=0$. Donc $I(f)=0$.
Par ailleurs, $S(f)=\dfrac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3}=0$ car f est impaire et donc $f(0)=0$ et $f(-1)=-f(1)$. On en déduit donc que $\boxed{\text{Si } f \text{ est impaire, alors } I(f)=0=S(f)}$.

(b) Si $f(t)=t^4$ alors $I(f)=\displaystyle\int_{-1}^1 t^4\,dt=\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^1=\frac{2}{5}$ et $S(f)=\dfrac{1+4.0+1}{3}=\dfrac{2}{3}$.

(c) Si $f(t)=\dfrac{1}{t+2}$ alors $I(f)=\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{t+2}\,dt=[\ln(t+2)]_{-1}^1=\ln 3$ et $S(f)=\dfrac{\frac{1}{1}+4.\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3}=\dfrac{10}{9}$.

(d) Si $f(t)=\dfrac{1}{t^2+2t+3}$ alors
$$I(f)=\int_{-1}^1\frac{1}{(t+1)^2+2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{1+\left(\frac{t+1}{\sqrt2}\right)^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt2}\left[\arctan\frac{t+1}{\sqrt2}\right]_{-1}^1=\frac{1}{\sqrt2}\arctan\sqrt2$$
et $S(f)=\dfrac{\frac{1}{2}+4.\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{3}=\dfrac{2}{3}$.

2. Si $f:x\longmapsto 1$ alors $I(f)=2=S(f)$
Si $f:x\longmapsto x$ alors $I(f)=0$ et $S(f)=0$ car $t\mapsto t$ est une fonction impaire.
Si $f:x\longmapsto x^2$ alors $I(f)=\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_{-1}^1=\dfrac{2}{3}$ et $S(f)=\dfrac{2}{3}$
Si $f:x\longmapsto x^3$ alors $I(f)=0$ et $S(f)=0$ car $t\mapsto t^3$ est une fonction impaire.
On remarque de pour toutes fonctions f et g , et pour tout réel λ on a
$$I(f+\lambda g)=\int_{-1}^1\lambda f(t)+g(t)\mathrm{d}t=\lambda\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t+\int_{-1}^1 g(t)\mathrm{d}t=\lambda I(f)+I(g)$$
De même $S(\lambda f+g)=\dfrac{\lambda f(-1)+g(-1)+4(\lambda f(0)+g(0))+\lambda f(1)+g(1)}{3}=\lambda S(f)+S(g)$.
Donc I et S sont deux applications linéaires (on peut dire ici "formes linéaires" car I et S sont à valeurs dans $\mathbb{R}$)
Pour tout polynôme $P=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$ on a alors
$I(P)=I(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3)=a_0I(1)+a_1I(X)+a_2I(X^2)+a_3I(X^3)=a_0S(1)+a_1S(X)+a_2S(X^2)+a_3S(X^3)=S(P)$
$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P\in\mathbb{R}_3[X], \text{ on a } I(P)=S(P).}$$

3. En posant $P=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$ on a $P'=a_1+2a_2X+3a_3X^2$. Dans ces conditions :
$$\begin{cases}P(1)=f(1)\\P(0)=f(0)\\P(-1)=f(-1)\\P'(0)=f'(0)\end{cases}\iff\begin{cases}a_0+a_1+a_2+a_3=f(1)\\a_0=f(0)\\a_0-a_1+a_2-a_3=f(-1)\\a_1=f'(0)\end{cases}\iff\begin{cases}a_0=f(0)\\a_1=f'(0)\\a_2+a_3=f(1)-f(0)-f'(0)\\a_2-a_3=f(-1)-f(0)+f'(0)\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}a_0=f(0)\\a_1=f'(0)\\a_2=\frac{f(1)-2f(0)+f(-1)}{2}\\a_3=\frac{f(1)-f(-1)-2f'(0)}{2}\end{cases}$$ Il existe une unique solution à ce système.
Donc
$$\boxed{\forall f\in C^4([-1,1]),\ \exists!\ P_f\in\mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P_f(1)=f(1),\ P_f(0)=f(0),\ P_f(-1)=f(-1) \text{ et } P_f'(0)=f'(0).}$$

4. (a) En dérivant $h(x) = f(x) - P_f(x) - kx^2(x^2-1)$ on obtient $h'(x) = f'(x) - P_f'(x) - 4kx^3 - 2kx$. Comme $f'(0) = P_f'(0)$ on en déduit que $\boxed{h'(0) = 0}$

(b) $h(-1) = f(-1) - P_f(-1) - 0 = 0$, $h(0) = f(0) - P_f(0) - 0 = 0$, $h(1) = f(1) - P_f(1) - 0 = 0$ et $h(\alpha) = 0$.
$\boxed{h(x) = 0 \text{ pour les quatre réels } -1, 0, 1 \text{ et } \alpha}$

(c) Rappelons le théorème de Rolle :
Soit h une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $h(a) = h(b)$. Alors il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. Que l'on utilisera ici avec l'hypothèse $h(a) = h(b) = 0$.
Avec $[a,b] = [-1,0]$, ce théorème prouve qu'il existe $x_1 \in]-1,0[$ tel que $h'(x_1) = 0$.
De même avec $[a,b] = [0,\alpha]$, et $[a,b] = [\alpha,1]$, ce théorème prouve qu'il existe $x_2 \in]0,\alpha[$ et $x_3 \in]\alpha,1[$ tels que $h'(x_2) = 0$ et $h'(x_3) = 0$.
Ayant également $h'(0) = 0$, on a montré que $\boxed{h' \text{ s'annule en quatre points distincts de l'intervalle } [-1,1]}$

(d) D'après la question précédente, h' s'annule en 4 points
h' vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur chacun des 3 intervalles $[x_1,0]$, $[0,x_2]$, $[x_2,x_3]$.
Alors il existe 3 réels b_1, b_2, b_3 tels que $-1 \leqslant x_1 < b_1 < 0 < b_2 < x_2 < b_3 < x_3 \leqslant 1$ et $h''(b_1) = h''(b_2) = h''(b_3) = 0$.
La fonction h'' est de classe $\mathscr{C}^2$ donc elle est continue et dérivable.
Elle vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur $[b_1,b_2]$, $[b_2,b_3]$. Alors il existe deux réels a_1 et a_2 tels que $-1 < a_1 < a_2 < 1$ et $h^{(3)}(a_1) = h^{(3)}(a_2) = 0$
La fonction $h^{(3)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ donc elle est continue et dérivable.
Elle vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur $[a_1,a_2]$.
Alors $\boxed{\text{il existe un réel } \beta \text{ tel que } -1 < \beta < 1 \text{ et } h^{(4)}(\beta) = 0}$
On a pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad kx^2(x^2-1) = kx^4 - kx^2$ donc sa dérivée d'ordre 4 vaut $k.4!$
Par ailleurs, le polynôme P_f étant de degré $\leqslant 3$, sa dérivée d'ordre 4 est nulle.
On en déduit que pour tout x on a $h^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) - k.4!$
En utilisant l'hypothèse $h^{(4)}(\beta) = 0 = f^{(4)}(\beta) - k.4!$ on obtient $\boxed{k = \dfrac{f^{(4)}(\beta)}{4!}.}$

(e) Sachant que $h(\alpha) = 0$ on a $f(\alpha) - P_f(\alpha) = k.\alpha^2(\alpha^2-1) = \dfrac{f^{(4)}(\beta)}{4!}\alpha^2(\alpha^2-1)$
On passe à la valeur absolue et on majore : $\left|f(\alpha) - P_f(\alpha)\right| = \dfrac{|f^{(4)}(\beta)|}{4!}\alpha^2(1-\alpha^2) \leqslant \dfrac{M_4}{4!}\alpha^2(1-\alpha^2)$
Donc $\boxed{\left|f(\alpha) - P_f(\alpha)\right| \leqslant \dfrac{M_4}{4!}\alpha^2(1-\alpha^2), \text{ où } M_4 \text{ est la valeur maximale prise par } \left|f^{(4)}\right| \text{ sur } [-1,1]}$

5. En posant $t = \alpha \in]0,1[$, on vient de prouver le résultat recherché. Par ailleurs, pour $t = 0$ et $t = 1$ le résultat est trivial : $0 \leqslant 0$.
On en déduit que $\boxed{\forall t \in [0,1], \ \left|f(t) - P_f(t)\right| \leqslant \dfrac{M_4}{4!}t^2(1-t^2)}$

6. On sait que $\left|\displaystyle\int_{-1}^{1} (f(t) - P_f(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{1} \left|f(t) - P_f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ car les bornes sont dans le bon sens.

En utilisant la majoration $\left|f(t) - P_f(t)\right| \leqslant \dfrac{M_4}{4!}t^2(1-t^2)$ et en intégrant avec les bornes dans le bon sens

cela implique : $\quad \left|\displaystyle\int_{-1}^{1} (f(t) - P_f(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{M_4}{4!}\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t$

On calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \left[\dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$

Si bien que en notant que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = I(f)$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(t)\mathrm{d}t = I(P_f) = S(P_f) = S(f)$ (d'après la question 2.), on a montré que $\boxed{|I(f)-S(f)| \leqslant \dfrac{M_4}{90}}$

7. Pour $f(t)=t^4$, on trouve $I(f)-S(f) = \dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{3} = -\dfrac{4}{15}$ Et $f^{(4)}(t)=24$ d'où $M_4=24$.
   Alors $|I(f)-S(f)| = \dfrac{4}{15}$ et $\dfrac{M_4}{90} = \dfrac{24}{90} = \dfrac{4}{15}$. On a donc dans ce cas particulier, $|I(f)-S(f)| = \dfrac{M_4}{90}$
   La constante dans la majoration d'erreur précédente ne peut donc pas être améliorée.

Exercice 2

1. (a) Pour tout $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ on a :
   $u\in F \Longleftrightarrow x+y-z=0 \Longleftrightarrow z=x+y \Longleftrightarrow u = x(1,0,1)+y(0,1,1)$
   Donc $F=\mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$: F est un sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs
   $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

   G est le sous-espace vectoriel engendré par u_0 : $\boxed{G \text{ un sev de } \mathbb{R}^3.}$

   (b) **première solution :** $E=F\oplus G \Longleftrightarrow E=F+G$ et $F\cap G=\{(0,0,0)\}$
   $F+G = \mathrm{Vect}\,(F\cup G) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1),(1,-1,1))$,
   Or le produit mixte des trois vecteurs vaut $+1\neq 0$. Ce qui prouve que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Donc $F+G=\mathbb{R}^3$
   $(x,y,z)\in F\cap G \Longleftrightarrow (x,y,z)=(x,-x,x)$ et $x+y-z=0 \Longleftrightarrow x=y=z=0$ donc $F\cap G=\{(0,0,0)\}$
   Donc $\boxed{\mathbb{R}^3 = F\oplus G.}$
   deuxième solution : en utilisant la définition qui est :
   $$\mathbb{R}^3 = F\oplus G \Longleftrightarrow \forall \overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^3,\ \exists!(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\in F\times G \text{ t.q. } \overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$$
   Soit $\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^3$. $\overrightarrow{u}$ se décompose en $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v}\in F$ et $\overrightarrow{w}\in G$ si et seulement si
   il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{v}\in F$ tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\alpha\overrightarrow{u}_0 \Longleftrightarrow$ il existe α tel que $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}-\alpha\overrightarrow{u}_0$ et $\overrightarrow{v}\in F$.
   On obtient par calcul, en notant $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{v}=(x,y,z)-\alpha(1,-1,1)=(x-\alpha,y+\alpha,z-\alpha)$.
   On introduit ces coordonnées dans l'équation de F :
   $\overrightarrow{v}\in F \Longleftrightarrow x-\alpha+y+\alpha-(z-\alpha)=0 \Longleftrightarrow \alpha=-x-y+z$
   On en déduit que la décomposition existe $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\alpha\overrightarrow{u}_0$ et et comme on a trouvé une seule solution pour α, la décomposition est unique. Donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E : E=F\oplus G.}$

   (c) Pour $\overrightarrow{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on cherche le vecteur $\overrightarrow{w}\in G$ tel que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v}\in F$. On sait que $p(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{w}$, s'écrit $p(\overrightarrow{u})=\alpha\overrightarrow{u}_0$ avec $\alpha=-x-y+z$.
   On en déduit $p(x,y,z)=(-x-y+z).(1,-1,1)$ Ce qui donne
   $$\boxed{p(x,y,z)=(-x-y+z,x+y-z,-x-y+z).}$$

2. (a) On peut vérifier, par la définition, que $\forall(u,v)\in(\mathbb{R}^3)^2$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ on a $g(u+\lambda v)=g(u)+\lambda g(v)$ ou bien g est combinaison linéaire d'applications coordonnées du type : $(x,y,z)\longmapsto(x,0,0)$ ou encore : $(x,y,z)\longmapsto(y,0,0)$ ... qui sont linéaires donc g est linéaire.

   (b) $(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(g) \Longleftrightarrow g(x,y,z)=(0,0,0) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -6x-2y+4z &=& 0\\ -3x-y+2z &=& 0\\ -9x-3y+6z &=& 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow 3x+y-2z=0$
   le noyau de g est le plan vectoriel d'équation $3x+y-2z=0$. On réécrit $y=-3x+2z$ ce qui donne une représentation paramétrique : $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
   $$\boxed{\mathrm{Ker}\,g = \mathrm{Vect}((1,-3,0),(0,2,1)) = \{(x,y,z)|3x+y-2z=0\}}$$
   $\mathrm{Ker}(g)\neq\{O_{\mathbb{R}^3}\}$ donc l'application linéaire g n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective
   $\boxed{g \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$

(c) Un vecteur (a,b,c) est dans $\mathrm{Im}(g)$ si et seulement si il existe (x,y,z) tels que $g(x,y,z)=(a,b,c)$ ce qui est équivalent à
$\begin{cases} -6x-2y+4z &= a\\ -3x-y+2z &= b\\ -9x-3y+6z &= c\end{cases}$ a une solution $\iff \begin{cases} 0 &= a-2b\\ -3x-y+2z &= b\\ 0 &= -3b+c\end{cases}$ a une solution.
Ce système a une solution si et seulement si les équations de compatibilité sont vérifiées :
$\begin{cases} a-2b &= 0\\ -3b+c &= 0\end{cases}$ ce sont les équations de $\mathrm{Im}\, g$.

(a,b,c) est dans $\mathrm{Im}(g) \iff (a,b,c)=\alpha(2,1,3)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. Alors $\boxed{\mathrm{Im}\, g=\mathrm{Vect}(2,1,3)}$.

(d) On a $\mathrm{Im}\, g=\mathrm{Vect}(w)$ avec $w=(2,1,3)$. Or w vérifie l'équation de F : $x+y-z=2+1-3=0$ donc $w\in F$ donc $\mathrm{Vect}(w)\subset F$ donc $\mathrm{Im}\, g\subset F$.
Le vecteur $(1,-1,0)$ est dans F mais n'est pas dans l'image de g. Donc $F\neq \mathrm{Im}\, g$.
Le vecteur $u_0=(1,-1,1)$ vérifie l'équation de $\mathrm{Ker}\, g$: $3x+y-2z=3-1-2=0$ donc $u_0\in\mathrm{Ker}\, g$. Alors $\mathrm{Vect}(u_0)\subset\mathrm{Ker}\, g$ donc $G\subset\mathrm{Ker}\, g$.
Le vecteur $(0,2,1)$ est dans $\mathrm{Ker}\, g$ mais n'est pas colinéaire à u_0 donc n'est pas dans G. Alors $G\neq\mathrm{Ker}\, g$.

(e) Soit $u\in\mathbb{R}^3$, on a $g(u)\in\mathrm{Im}\, g$. Mais $\mathrm{Im}\, g\subset F$ donc $g(u)\in F$.
Or on sait que p est le projecteur sur G parallèlement à F donc les éléments de F sont projetés sur $(0,0,0)$: $\mathrm{Ker}\, p=F$. On en déduit que $p(g(u))=(0,0,0)$ pour tout $u\in\mathbb{R}^3$. Cela signifie que $\boxed{p\circ g=0.}$
Soit $u\in R^3$, on a $p(u)\in G$ car p projette sur G. Mais $G\subset\mathrm{Ker}\, g$ donc $p(u)\in\mathrm{Ker}\, g \iff g(p(u))=(0,0,0)$.
Ceci est vrai pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, alors $\boxed{g\circ p=0.}$

(f) $g\circ g(x,y,z)=g(g(x,y,z))=(X,Y,Z)$ avec :
$X=-6(-6x-2y+4z)-2(-3x-y+2z)+4(-9x-3y+6z)=6x+2y-4z$
$Y=-3(-6x-2+4z)-(-3x-y+2z)+2(-9x-3y+6z)=3x+y-2z$
$Z=-9(-6x-2y+4z)-3(-3x-y+2z)+6(-9x-3y+6z)=9x+3y-6z$
Donc $g\circ g(x,y,z)=-g(x,y,z)$ et on a $\boxed{g^2=-g.}$

$\boxed{\text{on constate que } g^0=Id \text{ et on établit par récurrence que, pour } k\geqslant 1 \text{ on a } g^k=(-1)^{k+1}g}$

On a alors $g^1=(-1)^{1+1}g$ qui donne la formule $g^k=(-1)^{k+1}g$ vraie pour $k=1$ et pour $k=2$.
Si la formule est vraie pour un entier k, alors $g^{k+1}=g^k\circ g$
mais $g=(-1)^{k+1}g$ d'où $g^{k+1}=((-1)^{k+1}g)\circ g=(-1)^{k+1}g\circ g$.
or, on sait que $g\circ g=-g$ alors $g^{k+1}=-(-1)^{k+1}g=-(-1)^{k+2}g$.
On en déduit par le principe de récurrence que la formule est vraie pour tout entier $k\geqslant 1$.

3. (a) On voit que $\mathscr{H}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de p et g. Comme $p\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et $g\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, leurs combinaisons linéaires sont linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
On en déduit que $\mathscr{H}=\mathrm{Vect}(p,g)$ et que $\boxed{\mathscr{H} \text{ est un sev de } \mathscr{L}(\mathbb{R}^3).}$

(b) Soit f_1 et f_2 dans $\mathscr{H}$, on peut écrire $f_1=a_1p+b_1g$ et $f_2=a_2p+b_2g$ avec $(a_1,a_2,b_1,b_2)\in\mathbb{R}^4$. On a alors $f_1\circ f_2=(a_1p+b_1g)\circ(a_2p+b_2g)=a_1a_2p\circ p+a_1b_2p\circ g+b_1a_2g\circ p+b_1b_2g\circ g$.
Mais $p\circ p=p$ car p est un projecteur, $p\circ g=g\circ p=0$ et $g\circ g=-g$,
alors $\boxed{f_1\circ f_2=a_1a_2p-b_1b_2g.}$

On en déduit que $f_1\circ f_2\in\mathscr{H}$ donc $\mathscr{H}$ est stable par composition des applications.

(c) On a montré que $f^2=a^2b-b^2g$. On imagine que l'on a la formule $f^n=a^np-(-1)^nb^ng$ et on démontre cette formule par récurrence. Cette formule est vraie pour $n=1$ et $n=2$. Si elle est vraie pour un entier n, on a
$f^{n+1}=f^n\circ f=(a^np-(-1)^nb^ng)\circ(ap+bg)=a^{n+1}p\circ p+0+0-(-1)^nb^{n+1}g\circ g=a^{n+1}p-(-1)^{n+1}b^{n+1}g$
car $p\circ p=p$ et $g\circ g=-g$.
La formule est héréditaire et initialisée, alors elle est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad f=a^np-(-1)^nb^ng}.$$