Chapitre 17 - Espaces Vectoriels de Dimension Finie

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Bases en dimension finie

1.1 Dimension finie

Définition 1.1. On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple :

* $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie car $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice finie à 2 vecteurs
tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $(x,y) = x(1,0)+y(0,1)$
(Card famille $= 2$)

* $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie car
$((1,0,0),(0,1,0),(0,2,0)(0,3,0),(0,4,0),(0,0,0),(0,0,1))$
est une famille génératrice à 7 vecteurs
(mais elle n'est pas libre)

* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ens des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
est de dimension infinie

* $\mathbb{R}[X]$ l'ens de tous les polynômes
est de dimension infinie

Preuve : Supposons que $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{R}[X]$. On note q le plus grand des n degrés $\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_n$
$q = \max(\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_n)$
alors X^{q+1} ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de $P_1, \dots, P_n$ ce qui contredit le fait que $(P_1, \dots, P_n)$ est génératrice

* $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension finie car $(1, X, X^2, X^3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$

* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ens des suites réelles est de dimension infinie.

1.2 Existence de bases en dimension finie

Théorème 1.1 (Théorème de la base incomplète). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E. Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.*

Corollaire 1.2. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.*

$E = \{\vec{0}\}$ l'espace nul

Corollaire 1.3 (Théorème de la base extraite). *De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E, on peut extraire une base de E.*

Remarques :

on prend E engendré $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ famille génératrice

$(x_1, x_2, \dots x_r)$ une famille libre.

on étudie $(x_1, x_2, \dots, x_r, g_1) \longrightarrow$ liée (pas libre)

$g_1 = \sum_{i=1}^{r} g_{1,i} x_i$

libre

$(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1})$ $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ libre

et on recommence avec g_2

exemple : Dans $\mathbb{R}^4$, et on pose

$G = \mathrm{Vect}\big((0,0,0,0), (-1,-1,0,0), (1,0,0,1), (2,-2,0,0), (2,0,-1,0), (0,2,-1,0)\big)$

C'est un sev donc G est un ev qui a une famille génératrice à 6 vecteurs donc G est de dimension finie. Cherchons une base :

on pose $x_1 = (1,-1,0,0)$ (x_1) est une famille libre car $x_1 \neq \vec{0}$

$x_2 = (1,0,0,1)$ (x_1, x_2) est une famille libre (pas colinéaires)

$x_3 = (2,-2,0,0)$ est combinaison linéaire de (x_1, x_2) $x_3 = 2x_1$

$x_4 = (2,0,-1,0)$. On étudie (x_1, x_2, x_4) : on suppose que

$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_4 = \vec{0}$ avec α, β, γ réels

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ alors (x_1, x_2, x_4) est libre

$x_5 = (0, 2, -1, 0)$ est combinaison linéaire de (x_1, x_2, x_4) : $x_5 = x_4 - 2x_1$

$x_0, n_1, n_2, x_3, x_4, x_5$ sont combinaisons linéaires de (x_1, x_2, x_4) donc (x_1, x_2, x_4) est une famille génératrice de G

et (x_1, x_2, x_4) est libre alors c'est une base de G

1.3 Cardinal des familles libres

exo

Lemme 1.4. *Si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une famille libre et la famille $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ est liée, alors x_{n+1} est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ i.e. $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Démonstration.

Il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0}$ car la famille $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ est liée.

Si $\alpha_{n+1} = 0$, alors on a la relation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0}$. Comme la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre, on obtient $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \alpha_i = 0$. C'est une contradiction avec l'hypothèse que les scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ sont non tous nuls.

Donc, $\alpha_{n+1} \neq 0$, alors on peut écrire $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} x_i$. □

Proposition 1.5. *Si E est un espace vectoriel admettant une famille génératrice à n vecteurs avec n entier non nul, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.*

Corollaire 1.6. *Dans un espace de dimension finie, toute famille libre a moins d'éléments qu'une famille génératrice.*

B_1 base de E et B_2 base de E avec E de dimension finie

B_1 est libre et B_2 est génératrice $|B_1| \leq |B_2|$

B_1 est génératrice de E et B_2 est libre $|B_2| \leq |B_1|$

$\Longrightarrow |B_1| = |B_2|$

1.4 Dimension

Théorème 1.7. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments $n \in \mathbb{N}^*$.*

Définition 1.2. Ce nombre n s'appelle la dimension de E sur $\mathbb{K}$ noté $n = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim E$.
Par convention, $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Exemple 1.1. On a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n+1$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

* L'espace nul $\{\vec{0}\}$ est le seul espace de dimension nulle.
* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ car une base de $\mathbb{R}^2$ est $((1,0)(0,1))$
* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$
* $\dim \mathbb{C}^2$? $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}\}$

donc une base de $\mathbb{C}^2$ est $((1,0)(0,1))$
car tout couple s'écrit $(z_1, z_2) = z_1(1,0) + z_2(0,1)$
et cette écriture est unique.
donc $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ si les scalaires sont des nombres complexes

Mais $\mathbb{C}^2 = \{(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \mid (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4\}$
et $(z_1, z_2) = x_1(1,0) + y_1(i,0) + x_2(0,1) + y_2(0,i)$
et il y a unicité donc les 4 vecteurs forment une base
donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$ si les scalaires sont des réels

* $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ ens des polynômes de degré ≤ 2

car une base est $(1, X, X^2)$

*

Exemple Donner la dimension de

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+2y-z = 0 \\ y+z-t = 0 \end{array} \right\}$$

homogène = second membre nul

[F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène donc F est un sev de $\mathbb{R}^4$

On résout : le système est échelonné il y a 2 pivots et 4 inconnues donc $\underbrace{\text{deux}}_{\dim F}$ inconnues secondaires (paramètres)

On paramètre les solutions $z = \alpha$ $y = \beta$

$$(x,y,z,t) \in F \iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \\ t = \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z,t) = \alpha(1,0,1,1) + \beta(-2,1,0,1)$$

alors $F = \operatorname{Vect}\big((1,0,1,1), (-2,1,0,1)\big)$

Ces deux vecteurs sont une famille génératrice de F

et ils sont libres car : ils ne sont pas colinéaires

Méthode à connaître

$$\alpha(1,0,1,1) + \beta(-2,1,0,1) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc les 2 vecteurs sont une base de F

$$\Longrightarrow \boxed{\dim_{\mathbb{R}} F = 2}$$

Exemple Donner la dimension de

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+2y-z = 0 \\ y+z-t = 0 \end{array} \right\}$$

homogène = second membre nul

en fait, $F = \operatorname{Ker} \varphi$ avec $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y,z,t) \longmapsto (x+2y-z, y+z-t)$

1.5 Familles en dimension finie

Théorème 1.8. *Si E est un espace vectoriel de dimension FINIE n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice de E.*

Si E est de dim finie, $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ n vecteurs avec $n = \dim E$.

$\mathcal{F}$ est une base $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{F}$ est libre et $\mathcal{F}$ est génératrice $\overset{\text{Th 1.8}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{F}$ est libre $\overset{\text{Th 1.6}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{F}$ est génératrice

⚠ avec $|\mathcal{F}| = n$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, montrons que $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$ est une base de E

Ici E est de dimension 3 et la famille a 3 vecteurs

Montrons qu'elle est génératrice de E.

Soit $P = aX^2+bX+c \in E$. On cherche 3 scalaires (u,v,w) tels que $P = u(X-1) + v(X^2+7X-2) + w(X^2+3)$

$aX^2+bX+c = (v+w)X^2 + (u+7v)X + 3w - 2v - u$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} v+w = a \\ u+7v = b \\ -u-2v+3w = c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u+7v = b \\ v+w = a \\ -2w = c+b-5a \end{cases}$

le système est échelonné et il n'y a pas d'équation de compatibilité donc il a au moins une solution.

Alors tout vecteur P de $\mathbb{R}_2[X]$ est combinaison linéaire des 3 vecteurs $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$

donc la famille $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$

Comme elle a 3 vecteurs et $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, cette famille est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, montrons que $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$ est une base de E

Montrons que la famille est libre.

On considère 3 scalaires $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$

$$u(X-1) + v(X^2+7X-2) + w(X^2+3) = 0$$

$$\Rightarrow (v+w)X^2 + (u+7v)X + 3w - u - 2v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v + w = 0 \\ u + 7v = 0 \\ -u - 2v + 3w = 0 \end{cases} \underset{L_3 + L_2 - 5L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} u + 7v = 0 \\ v + w = 0 \\ -2w = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u = v = w = 0$ donc la famille est libre.

La famille est libre et a 3 vecteurs dans un espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3 donc c'est une base

2 Relations entre les dimensions

2.1 Rappel : Image d'une base par une application linéaire

départ

Théorème 2.1. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ une base de E.*

- *La famille $(u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.*
- *u est surjective $\iff (u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est génératrice de F.*
- *u est injective $\iff (u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est libre dans F.*
- *u est bijective $\iff (u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est une base de F.*

Corollaire 2.2. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
u est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

2.2 Dimension et isomorphisme

Proposition 2.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un espace vectoriel F est isomorphe à E si et seulement si F est de dimension finie et* $\dim F = \dim E$.

il existe une application linéaire bijective de E dans F

Corollaire 2.4. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à* $\mathbb{K}^n$.

~~Remarque~~ Preuve : Si $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et φ bijective et si $\dim E = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors soit $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E.

Alors $(\varphi(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une base de F car φ est un isomorphisme.

F a une base qui a n vecteurs alors F est de dimension finie et $\dim F = n = \dim E$.

Exemple : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$. $(a,b,c$ fixés$)$.

$u_{n+2} = \frac{-b u_{n+1} - c u_n}{a}$

Montrons que $\dim_{\mathbb{C}} E = 2$

Soit $\varphi : E \to \mathbb{C}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$

(1) φ est linéaire (à prouver proprement $\varphi(\alpha(u_n) + (v_n)) = \alpha\varphi(u_n) + \varphi(v_n)$)

(2) une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E appartient au noyau de φ

$\Leftarrow$ $\varphi(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_0 = u_1 = 0$ alors par récurrence double montrons que (u_n) est nulle. On suppose que $u_n = u_{n+1} = 0$ alors $a u_{n+2} = 0$ et $a \neq 0$ donc $u_{n+2} = 0$ et $u_{n+1} = 0$. La propriété est initialisée et héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 0$ donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{0}\}$

(3) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. On construit une suite (u_n) par $u_0 = z_1$, $u_1 = z_2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{-b u_{n+1} - c u_n}{a}$

on a trouvé une suite $(u_n) \in E$ et $\varphi(u_n) = (z_1, z_2)$ par construction

Donc (z_1, z_2) a un antécédent dans E : φ est surjective.

(4) Alors φ est isomorphisme de E dans $\mathbb{C}^2$: $\boxed{\dim_{\mathbb{C}} E = 2}$

(voir le chap 6 suites récurrentes linéaires)

~~2.3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels~~

2.4 Dimension des sous-espaces vectoriels

Théorème 2.5. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et* $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, F est égal à E si et seulement si $\dim F = \dim E$.

Exemple dans $E = \mathbb{R}^3$: $\dim E = 3$

les sev de $\mathbb{R}^3$ sont de dimension :

dimension 0 : un seul sev $\{\vec{0}_E\}$

dimension 1 : une droite : $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$

dimension 2 : un plan $\mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ avec $\vec{v}$ et $\vec{w}$ libres

dimension 3 : un seul sev $\mathbb{R}^3$

Idem dans un espace de dimension n : si $\dim E = n$

dimension 0 : $\{\vec{0}_E\}$

1 : les droites vectorielles

⋮

$n-1$ les hyperplans : sev de dimension $n-1$

n un seul sev : E

Exemple : Déterminer la dimension de

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \int_0^2 P = 0 \right\}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ avec $P = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \underbrace{\delta}_{= -2\alpha - \frac{4}{3}\beta - \gamma}$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels

$P \in H \iff \boxed{\int_0^2 P = 0} \iff \int_0^2 (\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta)\,dt = 0$ eq de H.

$\iff \boxed{4\alpha + \frac{8}{3}\beta + 2\gamma + \boxed{2}\delta = 0}$ equation de H

$\iff \delta = -2\alpha - \frac{4}{3}\beta - \gamma$

$\iff \boxed{P = \alpha(X^3 - 2) + \beta(X^2 - 4/3) + \gamma(X - 1)}$

Donc $H = \mathrm{Vect}\left((X^3 - 2), (X^2 - 4/3), (X - 1) \right)$

ces 3 polynômes sont une famille génératrice de H

Les 3 polynômes sont de degré échelonnés (tous différents)

alors ils forment une famille libre

donc $(X^3 - 2, X^2 - 4/3, X - 1)$ est une base de H

et $\underline{\dim H = 3}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4

donc H est un hyperplan.

2.5 Dimension de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 2.6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ E = F + G \end{cases}$$

$E = F \oplus G$

Théorème 2.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.*

Si $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base de F et $(g_{p+1}, \dots, g_n)$ est une base de G, alors

$$E = F \oplus G \iff (f_1, f_2, \dots, f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n) \text{ est une base de } E.$$

On dit que cette base est adaptée à la décomposition en sous-espaces supplémentaires.

Théorème 2.8.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Rappel

$E = F \oplus G \overset{def}{\iff} \begin{cases} E = F + G & \text{(la décomposition existe)} \\ F \cap G = \{\vec{0}\} & \text{(la décomposition est unique)} \end{cases}$

Exemple : $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^2 P = 0\}$

et $F = \mathrm{Vect}(X - 7)$ Mq $F \oplus H = E$

E est un ev de dimension finie et $\dim E = 3$

F est un sev de E et $\dim F = 1$

On étudie H : Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$P \in H \iff \int_0^2 P(t)\,dt = 0 \iff \frac{8}{3}a + 2b + 2c = 0$

$\iff \exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a = -\frac{3}{4}\beta - \frac{3}{4}\gamma \\ b = \beta \\ c = \gamma \end{cases}$

$\iff \exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 , \ P = \beta\left(-\frac{3}{4}X^2 + X\right) + \gamma\left(-\frac{3}{4}X^2 + 1\right)$

D'où $H = \mathrm{Vect}\left((-3X^2 + 4X), (-3X^2 + 4)\right)$ et les 2 polynômes ne sont pas colinéaires donc $\dim H = 2$

On a $\dim F + \dim H = 1 + 2 = 3 = \dim E$

Soit $P \in F \cap H$ alors $P = u(X - 7)$ avec $u \in \mathbb{R}$

et $\int_0^2 P(t)\,dt = 0 \Rightarrow u \int_0^2 (t - 7)\,dt = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow P = 0$

donc $F \cap H = \{\vec{0}\}$ et $\dim F + \dim H = \dim E$ alors $\boxed{E = F \oplus H}$

2.6 Dimension d'une somme

Proposition 2.9 (Formule de Grassmann)**.**
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

3 Rang

3.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.1. On appelle rang d'une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un espace vectoriel E, la dimension du sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs et on le note $rg(x_1, x_2, \dots, x_p)$:

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)) \ .$$

Lemme 3.1. *Pour une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie $n = \dim E$, on a*

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) \leqslant p \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) \leqslant n$$

Théorème 3.2. *Une famille est libre si et seulement si elle de rang maximal, c'est à dire si son rang est égal à son nombre de vecteurs.*

Lemme 3.3. *Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour tous indices i, j :*

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = rg(x_1, x_2, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots, x_p)$$

3.2 Rang d'une application linéaire

Définition 3.2. Soient E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de l'application linéaire u, la dimension de l'image de u dans F.

On note $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ lorsque cette dimension est finie et on dit que u est de rang fini.

Remarque 3.1. Si $(e_i)_{i=1,..,n}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$.

Il s'ensuit que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$.

Lemme 3.4. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $n = \dim E$ et $p = \dim F$, et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $\mathrm{rg}(u) \leqslant n$ et $\mathrm{rg}(u) \leqslant p$.*

Théorème 3.5. *Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ sont deux applications linéaires de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et* $\quad \mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

Démonstration. On a toujours $\underline{\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v}$: pour toute image $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(u(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}\, v$ ce qui prouve l'inclusion.
On en déduit $\dim(\mathrm{Im}(v \circ u)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, v)$ soit $\underline{\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)}$.
Par ailleurs, soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de $\mathrm{Im}\, u$ avec $p = \mathrm{rg}(u)$. Soit $z \in \mathrm{Im}(v \circ u)$ alors il existe $x \in E$ tel que $z = v(u(x))$. On a $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$ donc $u(x)$ s'écrit $u(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k$ avec $(\lambda_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ des scalaires. On peut donc écrire $z = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v(f_k)$.
On en déduit que $(v(f_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(v \circ u)$. Il s'ensuit que $\dim(\mathrm{Im}(v \circ u)) \leqslant p$ ce qui donne $\underline{\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)}$. $\square$

3.3 Théorème du rang

Proposition 3.6. *Soit E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E dans F.*

Si E_0 est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors l'application u induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$.

$v : \begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ *est un isomorphisme.*

Théorème 3.7 (Théorème du rang)**.** *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, alors u est de rang fini et*

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u)$$

3.4 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 3.8. *Si E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même dimension finie</u> $n = \dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors*

u est injective $\iff \operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0}\} \iff$ *u est surjective* $\iff \dim \operatorname{Ker} u = 0 \iff$ *u est bijective* $\iff \operatorname{rg}(u) = n$.

Corollaire 3.9. *Si $u \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie, alors*

u est injective $\iff$ u est surjective $\iff$ u est bijective.

Lemme 3.10. *Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$, alors f est injective.*

Démonstration. Soit g telle que $g \circ f = id_E$. Soit $a, b \in E$. Si $f(a) = f(b)$ alors $g(f(a)) = g(f(b))$ donc $id(a) = id(b)$ soit $a = b$. Deux éléments de l'ensemble de départ ne peuvent avoir la même image donc f est injective. □

Lemme 3.11. *Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Si il existe $h : F \to E$ telle que $f \circ h = id_F$, alors f est surjective.*

Démonstration. Soit h telle que $f \circ h = id_F$. Soit $a \in F$. On a $f(h(a)) = a$ donc a a un antécédent. Tout élément de F a un antécédent donc f est surjective.

□

Théorème 3.12. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*
Si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = id_E$ alors f est bijective et $f \circ g = id_F$.
Si il existe $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = id_F$ alors f est bijective et $h \circ f = id_E$.

Théorème 3.13. *Si u est une application linéaire de rang fini et si φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors, dans les cas où cela a un sens,*

$$\mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}\, u \text{ ou } \mathrm{rg}(\varphi \circ u) = \mathrm{rg}(u).$$

On ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant par un isomorphisme.

Démonstration. Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

— Soit φ un isomorphisme de F dans G et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ de rang fini.
Soit B une base de $\mathrm{Im}\, u$ (qui est de dimension finie). Alors $\varphi(B)$ est une base de $\varphi(\mathrm{Im}\, u)$ car φ induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, u$ dans $\varphi(\mathrm{Im}(u))$. De plus, on a l'égalité triviale : $\varphi(\mathrm{Im}\, u) = \mathrm{Im}(\varphi \circ u)$. Alors, $\dim(\mathrm{Im}(\varphi \circ u)) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ soit $\boxed{\mathrm{rg}(\varphi \circ u) = \mathrm{rg}(u)}$.

— Soit φ un isomorphisme de E dans F et $u \in \mathscr{L}(F, G)$ de rang fini.
On a toujours $\underline{\mathrm{Im}(u \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}\, u}$ car toute image par $u \circ \varphi$ est une image par u.
Réciproquement, soit $z \in \mathrm{Im}\, u$, alors il existe $y \in F$ tel que $z = u(y)$. Comme φ est une bijection de E dans F, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Alors, $z = u \circ \varphi(x)$ et $z \in \mathrm{Im}(u \circ \varphi)$ ce qui prouve $\underline{\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}(u \circ \varphi)}$.
On a montré $\mathrm{Im}(u \circ \varphi) = \mathrm{Im}(u)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(u \circ \varphi)) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ soit $\boxed{\mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}(u)}$.

□

3.5 Équations linéaires

Définition 3.3. Une équation linéaire est une équation du type $u(x) = b$ où

- u est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F,
- x est un vecteur inconnu dans E,
- b est un vecteur de F appelé second membre de l'équation.

Théorème 3.14 (Structure de l'ensemble des solutions)**.**
Soit $u : E \longmapsto F$ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, soit $b \in F$. On note S_0 l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = \overrightarrow{0_F}$ et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$.

- *S_0 est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, il est donc non vide : il contient $\overrightarrow{0_E}$.*
- *Soit $\mathscr{S}$ est vide, soit $\mathscr{S} = x_0 + S_0 = \{x_0 + h | h \in S_0\}$ où x_0 est une solution de l'équation avec second membre.*

Remarque 3.2. Si E est de dimension finie n (n inconnues) et si u est de rang fini r (r pivots), alors l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_0$ est de dimension $n - r =$ nombre d'inconnues - nombre de pivots.