Corrigé TD 17 - Espaces vectoriels Dimension finie

Exercice 1 :

On étudie le système $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ qui donne $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha-\beta-2\gamma&=&0\\-\beta+\gamma&=&0\\\alpha+2\beta-2\gamma&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha-\beta-2\gamma&=&0\\-\beta+\gamma&=&0\\3\beta&=&0\end{array}\right.$ Le système admet trois pivots non nuls, donc il a une unique solution : $\alpha=0,\beta=0,\gamma=0$. Alors la famille $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est libre et comme elle a trois vecteurs dans un espace de dimension 3,

$\boxed{(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

Soit $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$, on résout le système :

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{x} \iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha-\beta-2\gamma&=&x\\-\beta+\gamma&=&y\\\alpha+2\beta-2\gamma&=&z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha-\beta-2\gamma&=&x\\-\beta+\gamma&=&y\\3\beta&=&-x+z\end{array}\right.$$

Alors les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ sont $(2y+z,-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z,-\frac{1}{3}x+y+\frac{1}{3}z)$.

Exercice 2 :

On trouve en appliquant la méthode du pivot de Gauss que le rang de la matrice des vecteurs dans la base canonique est 3, donc le rang de la famille est 3. Et on a $2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ et $\vec{b}-2\vec{d}-\vec{e}=\vec{0}$.

Exercice 3 :

- $a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3=\vec{0}$ qui donne $\left\{\begin{array}{rcl}a+2b+4c&=&0\\a+b+3c&=&0\\a\quad+2c&=&0\\b+c&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}a+\quad 2c&=&0\\b+c&=&0\\2b+2c&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}a+2c&=&0\\b+c&=&0\end{array}\right.$

  Les vecteurs sont liés, on a, par exemple, comme relation, $\vec{e}_3=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$.

  Les vecteurs $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre et ils engendrent $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ donc ils engendrent F. Finalement, $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une base de F et $\dim F=2$.
- Pour trouver des équations de F, on écrit : $(x,y,z,t)\in F \iff$

  $$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : \left\{\begin{array}{rcl}a+2b+4c&=&x\\a+b+3c&=&y\\a\quad+2c&=&z\\b+c&=&t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}a\quad+2c&=&z\\b+c&=&t\\0&=&x-y-t\\0&=&y-z-t\end{array}\right.$$

  Le système admet une solution si et seulement si les équations de compatibilité sont vérifiées : les équations $\left\{\begin{array}{rcl}0&=&x-y-t\\0&=&y-z-t\end{array}\right.$ forment un système d'équations de F. On peut les résoudre pour obtenir à nouveau une famille génératrice puis une base de F.
- Pour $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$, on étudie le système : $a\vec{v}_1+b\vec{v}_2+c\vec{3}=\vec{0} \iff \left\{\begin{array}{rcl}a+2b+2c&=&0\\-a\quad-c&=&0\\a&=&0\\-a-b&=&0\end{array}\right. \iff a=b=c=0$ donc $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ est libre et est donc une base de V qui est de dimension 3.
- On étudie le rang de la famille $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{e}_1)$:

  $$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\-1&0&-1&1\\1&0&0&1\\-1&-1&0&0\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&2&1&2\\0&-2&-2&0\\0&1&2&1\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&1\\0&0&-3&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}=4.$$ Alors $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{e}_1)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, donc $\dim F+V=\mathrm{Vect}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{e}_1)=\mathbb{R}^4$.
- **Méthode 1 :** Pour $F\cap V$, on peut chercher les vecteurs $\vec{x}$ qui s'écrivent de deux manières différentes en utilisant les représentations paramétriques :

  $$\vec{x}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2 \text{ et } \vec{x}=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3 \iff$$

$$\begin{cases} a+2b &= \alpha+2\beta+2\gamma \\ a+b &= -\alpha \quad -\gamma \\ a &= \alpha \\ b &= -\alpha-\beta \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \alpha \\ 2b &= 2\beta+2\gamma \\ b &= -2\alpha \quad -\gamma \\ b &= -\alpha-\beta \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \alpha \\ b &= \beta+\gamma \\ 0 &= -2\alpha-\beta-2\gamma \\ 0 &= -\alpha-2\beta-\gamma \end{cases}$$

Donc les équations de $F\cap V$ sont

$$\begin{cases} -2\alpha-\beta-2\gamma &= 0 \\ -\alpha-2\beta-\gamma &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\beta &= 0 \\ \alpha+2\beta+\gamma &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= 0 \\ \alpha+\gamma &= 0 \end{cases}$$

Alors $F\cap V = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1-\vec{v}_3) = \mathrm{Vect}(-1,0,1,-1)$ et est de dimension 1.

- **Méthode 2 :** On utilise les équations de F et V :

$$F : \begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ -x+y+t &= 0 \end{cases} \qquad F\cap V : \begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ -x+y+t &= 0 \\ x+2y+3z+2t &= 0 \end{cases}$$

$$V : x+2y+3z+2t=0$$

Exercice 4 :

On résout le système $aA+bB+cC+dD=0$ qui s'écrit

$$\begin{cases} -4a+2b+c-d &= 0 \\ -a+b+c-3d &= 0 \\ 10a-2b+2c-14d &= 0 \\ 3a+b+3c-12d &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a+b+c-3d &= 0 \\ -2b-3c+11d &= 0 \\ 8b+12c-44d &= 0 \\ 4b+6c-21d &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a+b+c-3d &= 0 \\ -2b-3c+11d &= 0 \\ 0 &= 0 \\ d &= 0 \end{cases}.$$

On a 3 pivots non nuls donc le système est de rang 3, on trouve que $A+3B-2C=0$.

Alors $\boxed{\text{la famille } (A,B,C,D) \text{ engendre un sous-espace vectoriel de dimension } 3}$.

Exercice 5 :

On a $f_5=f_2-f_1$ et $f_3=f_1+f_2$. On étudie la famille des autres.

Si $af_1+bf_2+cf_4+df_6+ef_7=0 \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad af_1(x)+bf_2(x)+cf_4(x)+df_6(x)+ef_7(x)=0$.

Pour $x=0$, on trouve $b+e=0$, puis pour $x=\pi$, on trouve $b-e=0$, donc $b=e=0$.

En $\frac{\pi}{2}$, on trouve $a+d=0$ et en $-\frac{\pi}{2}$, on a $a-d=0$ alors $a=d=0$ et puis $c=0$.

Alors $\boxed{(f_1,f_2,f_4,f_6,f_7) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim E=5}$.

Exercice 6 :

1. On a $f\in E$ si et seulement si f s'écrit $f(x)=ax^2e^{4x}+bxe^{4x}+ce^{4x}$ avec a,b,c 3 réels quelconques.
   Alors $E=\mathrm{Vect}(x\mapsto x^2e^{4x}, x\mapsto xe^{4x}, x\mapsto e^{4x})$: E est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   On note $f_1 : x\mapsto x^2e^{4x}$, $f_2 : x\mapsto xe^{4x}$, $f_3 : x\mapsto e^{4x}$
   Si $\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3=0$, alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)e^{4x}=0 \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$
   On reconnaît un polynôme qui est nul alors tous ses coefficients sont nuls : $\alpha=\beta=\gamma=0$.
   On en déduit que $\boxed{\text{la famille } (f_1,f_2,f_3) \text{ est libre}}$.
   Alors $\boxed{(f_1,f_2,f_3) \text{ est une base de } E \text{ et } E \text{ est de dimension 3.}}$
2. Les fonctions dans E sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ donc D est définie.
   On a pour $x\in\mathbb{R}$, $D(f_1)(x)=(4x^2+2x)e^{4x}$ donc $D(f_1)=4f_1+2f_2$. Puis $D(f_2)=4f_2+f_3$ et $D(f_3)=4f_3$. On a donc pour $f\in E$, $D(f)\in\mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3)=E$.
   Donc E est stable par D et $\boxed{D \text{ est un endomorphisme de } E}$.
   Si $\alpha D(f_1)+\beta D(f_2)+\gamma D(f_3)=0$, alors $4\alpha f_1+(2\alpha+4\beta)f_2+(\beta+4\gamma)f_3=0$.
   Or la famille f_1,f_2,f_3 est libre ce qui donne $\alpha=0$, puis $\beta=0$ et $\gamma=0$.
   On en déduit que la famille $(D(f_1),D(f_2),D(f_3))$ est libre dans E.
   Comme $(D(f_1),D(f_2),D(f_3))$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de E.
   $(D(f_1),D(f_2),D(f_3))$ est une base de E.

L'image de la base (f_1, f_2, f_3) est une base de E, alors l'endomorphisme D est bijectif.
$\boxed{D \text{ est un automorphisme de } E}$.
Pour $g = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 \in E$, on cherche $f \in E$ telle que $D(f) = g$. On trouve

$$\boxed{D^{-1}(\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3) = \tfrac{1}{4}\alpha f_1 + (\tfrac{1}{4}\beta - \tfrac{1}{8}\alpha) f_2 + (\tfrac{1}{16}\beta - \tfrac{1}{32}\alpha + \tfrac{1}{4}\gamma) f_3}.$$

Exercice 7 :

H est un sev de dimension 2 car c'est le noyau d'une application linéaire non nulle dont le rang est 1 (l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$), donc $\boxed{\dim H = 2}$.
On trouve $H = \text{Vect}(\vec{h_1}, \vec{h_2})$ avec $\vec{h_1} = (1, -1, 0)$ et $\vec{h_2} = (1, 0, -1)$ une base de H.
$\boxed{K \text{ est une droite : } \dim K = 1}$.
On a $\overrightarrow{k}$ qui ne vérifie pas l'équation de H car $x + y + z = 4$ alors $K \not\subset H$ donc $\boxed{H \cap K = \emptyset}$.
Comme de plus, $\boxed{\dim H + \dim K = \dim \mathbb{R}^3}$, alors $\boxed{H \text{ et } K \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}$.
Soit $\vec{u} = (x, y, z)$, on cherche à écrire

$$\vec{u} = a.\vec{k} + b.\vec{h_1} + c.\vec{h_2} \iff (x, y, z) = a(1, 1, 2) + b(1, -1, 0) + c(1, 0, -1).$$

On résout et on trouve $a = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z$, $b = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z$ et $c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$.
On a $\pi_H(\vec{u}) = b(1, -1, 0) + c(1, 0, -1) \implies \quad \pi_H(x, y, z) = \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z, -\frac{1}{4}x\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}z, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\frac{1}{2}z\right)$
Puis $s_H(\vec{u}) = -a(1, 1, 2) + b(1, -1, 0) + c(1, 0, -1)$
$\boxed{s_H(\vec{u}) = 2b(1, -1, 0) + 2c(1, 0, -1)}$
et s_H a pour matrice :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 :

1. On écrit la matrice de la famille $(P_1 P_2, P_3)$ dans la base canonique et on calcule son rang :
$$\text{rg}(P_1, P_2, P_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 3$$
La famille (P_1, P_2, P_3) est de rang 3 dans un espace de dimension 3 et elle a 3 vecteurs. Alors $\boxed{(P_1, P_2, P_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$.
Comme (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, alors $\text{Vect}(P_1, P_2)$ et $\text{Vect}(P_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On recherche les formules de projection.
Soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ que l'on écrit $x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3$.
On obtient le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & \alpha \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & \beta \\ -x_1 \quad - x_3 & = & \gamma \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & \alpha \\ x_2 + 2x_3 & = & -3\alpha + \beta \\ x_2 - x_3 & = & \alpha + \gamma \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_3 & = & \frac{1}{3}(-4\alpha + \beta - \gamma) \\ x_2 & = & \frac{1}{3}(-\alpha + \beta + 2\gamma) \\ x_1 & = & \frac{1}{3}(4\alpha - \beta - 2\gamma) \end{array}\right.$$
Alors la projection de $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ sur $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(P_3)$ est
$$p(P) = \frac{1}{3}(4\alpha - \beta - 2\gamma)P_1 + \frac{1}{3}(-\alpha + \beta + 2\gamma)P_2 = \alpha + (8\alpha + \beta + 2\gamma)X - \frac{1}{3}(4\alpha - \beta - 2\gamma)X^2.$$

Exercice 9 :

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ deux polynômes, $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(X + 1) - (\alpha P + Q)(X - 1) + 2(\alpha P + Q)(X) =$$
$$= \alpha P(X + 1) - \alpha P(X - 1) + 2\alpha P(X) + Q(X + 1) - Q(X - 1) + 2Q(X) = \alpha f(P) + f(Q).$$

Donc $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

L'image par f d'un polynôme P est une somme de polynômes donc $f(P)$ est un polynôme réel.

Par ailleurs, si $\deg(P) \leqslant n$, on a $\deg P(X+1) = \deg P(X-1) = \deg P(X)$, alors $\deg f(P) \leqslant \max(\deg P, \deg P, \deg P) \leqslant n$. Donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que $f(P) = 0$, on suppose que $\deg P = k$, $k \in [\![0, n]\!]$.

On écrit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_kX^k$. Alors $P(X+1)$ a pour terme dominant a_kX^k et $P(X-1)$ a pour terme dominant a_kX^k.

Alors $f(P)$ a pour terme dominant $(a_k - a_k + 2a_k)X^k$ et comme $f(P) = 0$, on en déduit que $a_k = 0$ donc P n'est pas de degré k, c'est une contradiction, donc $\deg P = -\infty$ soit $P = 0$ et $\boxed{\operatorname{Ker} f = \{0\}.}$

On a $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ donc $\dim \operatorname{Im} f = n+1$. Mais $\operatorname{Im} f \subset \dim R_n[X]$. On en déduit que les deux espaces sont égaux car l'un est inclus dans l'autre et ils ont même dimension : $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_n[X]}$. Donc $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Exercice 10 :

1. On montre que Δ est linéaire ($\Delta(\alpha P + Q) = \alpha\Delta(P) + \Delta(Q)$ pour tous α, P, Q).
   Soit P de degré n et de terme dominant a_nX^n, alors $P(X+1)$ a pour terme dominant a_nX^n qui est le premier terme de $a_n(X+1)^n$. Donc le terme de degré n de $\Delta(P)$ est $a_nX^n - a_nX^n = 0$, donc $\deg \Delta(P) < n$. Alors $\boxed{\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.
2. Si $\Delta(P) = 0$, alors $P(X+1) = P(X)$.
   Si $\deg P \geqslant 1$, alors P a au moins une racine α dans $\mathbb{C}$. Elle vérifie $P(\alpha+1) = P(\alpha) = 0$ donc $\alpha + 1$ est racine de P.
   On suppose que $\alpha + k$ est racine de P pour un entier k, alors$P(\alpha+k+1) = P(\alpha+k) = 0$.
   Par récurrence, on a montré que $(\alpha+k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de racines de P. Les éléments de cette famille sont tous distincts, donc P a une infinité de racines distinctes, donc $P = 0$.
   On a montré que si $P \in \operatorname{Ker} \Delta$, alors $\deg P \leqslant 0$.
   Réciproquement, soit P un polynôme constant de $\mathbb{R}_0[X]$, alors $\Delta(P) = 0$.
   Finalement, $\boxed{\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]}$.
   On a $\dim \ker \Delta = 1$, donc $\dim \operatorname{Im} \Delta = \dim R_n[X] - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et comme $\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on en conclut que $\boxed{\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.
3. Alors tout élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ a un antécédent dans $\mathbb{R}_n[X]$ par Δ. Donc il existe, à une constante près, $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\Delta(P_n) = X^{n-1}$.
   Le calcul donne $P_1 = X$, $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 1)$, $P_3 = ...$
4. On a $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Si pour un entier $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\Delta^j(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$, alors $\Delta^{j+1}(\mathbb{R}_n[X]) \subset \Delta(\mathbb{R}_{n-j}[X])$ et $\Delta(\mathbb{R}_{n-j}[X]) \subset \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$.
   On a montré par récurrence pour $0 \leqslant j \leqslant n$, que $\Delta^j(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$ et donc $\Delta^n(\mathbb{R}_n[X]) \subset R_0[X]$.
   Comme $\Delta(\mathbb{R}_0[X]) = \{0\}$, on en conclut que $\Delta^{n+1}(\mathbb{R}_n[X]) = \{0\}$ soit $\Delta^{n+1} = 0$.
   Le terme dominant de $\Delta(X^n)$ est nX^{n-1}.
   Si le terme dominant de $\Delta^j(X^n)$ est $n(n-1)\dots(n-j+1)X^{n-j}$ pour un entier $j \in [\![0, n-1]\!]$ alors $\Delta^j(X^n) = n(n-1)\dots(n-j+1)X^{n-j} + R_j$ avec $\deg(R_j) < n-j$.
   On en déduit que $\deg \Delta(R_j) < \deg R_j < n-j-1$, et $\Delta(n(n-1)\dots(n-j+1)X^{n-j}) = n(n-1)\dots(n-j)X^{n-j-1} + Q_{j+1}$ avec $\deg(Q_j) < n-j-1$ alors le terme dominant de $\Delta^{j+1}(X^n)$ est $n(n-1)\dots(n-j)X^{n-j-1}$.
   Par récurrence, on a montré que $\Delta^j \neq 0$ pour $j \in [\![0, n]\!]$ car l'image de X^n n'est pas 0. Donc $\Delta^n \neq 0$.

Exercice 11 :

On note $M_{a,b}$ la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ pour a, b réels.

On a $M_{a,b} = aM_{1,0} + bM_{0,1}$ pour tous a, b réels, alors F est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $M_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $M_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc F est le sous-espace vectoriel engendré par ces deux matrices.

$\boxed{F \text{ est un sev}}$ et $F = \text{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Les deux matrices I_2 et $M_{0,1}$ ne sont pas colinéaires, et elles forment une famille génératrice de F.

On en déduit que $\boxed{(I_2, M_{0,1}) \text{ est une base de } F \text{ et } F \text{ est un sev de dimension 2.}}$

Soit a, b, c, d des réels. On calcule $M_{a,b}M_{c,d} = (aI_2+bM_{0,1})(cI_2+dM_{0,1}) = acI_2+bcM_{0,1}+adM_{0,1}+bdM_{0,1}^2$.

Mais on sait que $M_{0,1}M_{0,1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3I_2$

Alors, $M_{a,b}M_{c,d} = (ac - 3bd)I_2 + (bc + ad)M_{0,1} = M_{A,B}$ avec $A = ac - 3bd$ et $B = bc + ad$.

donc $M_{a,b}M_{c,d} \in F$. On en déduit que $\boxed{F \text{ est stable par multiplication.}}$

F contient la matrice nulle qui n'est pas inversible.

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors

- si $a \neq 0$, on effectue l'opération $\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \dfrac{3b}{a}\ell_1$ et la matrice $M_{a,b} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a + \frac{3b^2}{a} \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car elle a 2 pivots non nuls.
- Si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et la matrice $M_{0,b}$ vérifie $M_{0,b}M_{0,-\frac{1}{3b}} = I_2$. Donc elle est inversible.

Dans tous les cas, $M_{(a,b)}$ est inversible.

$$\boxed{\text{Tous les éléments non nuls de } F \text{ sont inversibles dans } F.}$$

Exercice 12 :

Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, alors montrons que

$$\text{la famille } (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)) \text{ est libre.}$$

Si on a $a_0x_0 + a_1f(x_0) + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0) = 0$.

Soit i le plus petit entier tel que $a_i \neq 0$, on a $a_if^i(x_0) + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0) = 0$.

On applique f^{n-1-i} à la relation précédente, comme $f^p(x_0) = 0$ pour $p \geqslant n$, on obtient $a_if^{n-1}(x_0)+0 = 0$ et comme $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, on en déduit que $a_i = 0$.

C'est une contradiction donc i n'existe pas : pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i = 0$,

donc la famille $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ a n éléments et est libre dans E.

$$\boxed{\text{La famille } \left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right) \text{ est une base de } E.}$$

Exercice 13 :

f est linéaire car les coordonnées de l'image sont des combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent. $(x, y, z) \in \text{Ker} f \iff \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff x = -y \text{ et } z = 0$

$$\iff (x, y, z) = y(-1, 1, 0) \text{ avec } y \in \mathbb{R} \iff \boxed{\text{Ker} f = \text{Vect}(-1, 1, 0)}.$$

$(a, b, c) \in \text{Im} f \iff \exists(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{cases} x + y + z &= a \\ x + y + z &= b \\ z &= c \end{cases}$

$$\iff \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& a \\ z &=& c \\ 0 &=& a-b \end{array}\right. \iff a-b=0.$$

Alors $\operatorname{Im} f$ est le plan d'équation $a-b=0$.

On résout cette équation $b-a=0 \iff a=b \iff (a,b,c)=b(1,1,0)+c(0,0,1)$ avec $b,c\in\mathbb{R}$.

Alors $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left((1,1,0),(0,0,1)\right)}$

Soit $(x,y,z)\in P$, alors $f(x,y,z)=(x+y+z,x+y+z,z)=(0,0,z)\in\operatorname{Vect}(0,0,1)$.

Si $(x,y,z)\in P$, alors $f(x,y,z)\in\operatorname{Vect}(0,0,1)$. On a montré $f(P)\subset\operatorname{Vect}(0,0,1)$.

Réciproquement, si $(0,0,c)\in\operatorname{Vect}(0,0,1)$, alors $(-c/2,-c/2,c)\in P$ et $f(-c/2,-c/2,c)=(0,0,c)$. On a montré $\operatorname{Vect}(0,0,1)\subset f(P)$. Donc $\boxed{f(P)=\operatorname{Vect}(0,0,1)}$.

Exercice 14 :

L'application ϕ est linéaire car pour $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, on a, comme l'intégrale est linéaire, $\displaystyle\int_0^1(\alpha P+Q)=\alpha\int_0^1 P+\int_0^1 Q$.

Comme $\dim\mathbb{R}=1$, on a $\dim\operatorname{Im}\phi=0$ ou 1. L'application ϕ n'est pas nulle car $\phi(1)=1$ (l'image du polynôme 1 est le réel 1).

Alors $\dim\operatorname{Im}\phi=1$ et $\boxed{\operatorname{Im}\phi=\mathbb{R}}$.

Le théorème du rang, nous assure que $\dim\operatorname{Ker}\phi=\dim R_n[X]-\dim\operatorname{Im}\phi=n+1-1=n$.

On calcule $\displaystyle\phi(aX^k+b)=\int_0^1(at^k+b)\,dt=\frac{a}{k+1}+b$ et $\displaystyle\phi(aX^k+b)=0\iff b=-\frac{a}{k+1}$.

La famille $(X^k-\frac{1}{k+1})_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une famille de n polynômes de degrés échelonnés alors elle est libre.

On a $\displaystyle X^k-\frac{1}{k+1}\in\operatorname{Ker}\phi$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ alors $(X^k-\frac{1}{k+1})_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre de n vecteurss dans un sev de dimension n. C'est donc une base de $\operatorname{Ker}\phi$.

$$\boxed{(X^k-\tfrac{1}{k+1})_{k\in[\![1,n]\!]} \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\phi \text{ et } 1 \text{ est une base de } \operatorname{Im}\phi}$$

Exercice 15 :

1. Soit $P\in F_A$, on a $P=Q\times A$ et $\deg P=\deg Q+\deg A$. Comme $\deg Q\leqslant n-p$ et $\deg A=p$, alors $\deg P\leqslant n$.

   On en déduit que $P\in\mathbb{R}_n[X]$, et donc $\boxed{F_A\subset\mathbb{R}_n[X].}$

   On a $0\in F_A$, car $0=Q.A$ avec $Q=0\in\mathbb{R}_{n-p}[X]$ donc F est non vide.

   Soit $P_1\in F_A$ et $P_2\in F_A$, alors $P_1=Q_1\times A$ et $P_2=Q_2\times A$. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

   On a $\alpha P_1+\beta P_2=(\alpha Q_1+\beta Q_2)\times A$. On pose $Q=\alpha Q_1+\beta Q_2$, on a $\deg Q\leqslant\max(\deg Q_1,\deg Q_2)\leqslant n-p$.

   Alors $\alpha P_1+\beta P_2=Q\times A$ avec $Q\in\mathbb{R}_{n-p}[X]$ donc $\alpha P_1+\beta P_2\in F_A$. F_A est stable par combinaison linéaire. $\boxed{F_A \text{ est un sev de } \mathbb{R}_n[X].}$

   De plus, $A, X\times A, X^2\times A,\dots,X^{n-p}\times A$ est une base de F_A car c'est une famille libre qui est génératrice de F_A.

2. Soit $P\in F_A\cap\mathbb{R}_{p-1}[X]$, on a $P=Q\times A$ avec $Q\in\mathbb{R}_{n-p}[X]$.

   Si $Q\neq0$, alors $\deg Q\geqslant0$ et $\deg P=\deg Q+\deg A\geqslant\deg A\geqslant p$.

   On a donc $P\in\mathbb{R}_{p-1}[X]\Longrightarrow\deg P\leqslant p-1$ et $\deg P>p$: c'est impossible donc $Q=0$ et $P=0$.

   On en déduit que $F_A\cap\mathbb{R}_{p-1}[X]\subset\{0\}$ et comme $0\in F_A\cap\mathbb{R}_{p-1}[X]$, on a $F_A\cap\mathbb{R}_{p-1}[X]=\{0\}$.

   De plus, $\dim F_A+\dim\mathbb{R}_{p-1}[X]=n-p+1+p-1+1=n+1=\dim\mathbb{R}_n[X]$.

   On en déduit que $\boxed{F_A \text{ et } \mathbb{R}_{p-1}[X] \text{ dont supplémentaires dans } \mathbb{R}_n[X]}$.

Exercice 16 :

On suppose qu'une matrice M de taille n n'a pas de polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n^2+1. Alors quels que soient les scalaires non tous nuls $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2}$, on a $\alpha_0 M^0 + \alpha_1 M^1 + \cdots + \alpha_{n^2} M^{n^2} \neq (0)$.

Cela signifie que la famille $(M^0, M^1, M^2, \dots, M^{n^2})$ est libre. Et ainsi $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \geqslant n^2+1$ car la dimension de l'espace est supérieure au cardinal d'une famille libre.

C'est une contradiction. Donc $\boxed{\text{toute matrice } M \text{ possède un polynôme annulateur}}$.

Avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$. On remarque $M^2 = 5M + 2I_2$.

$$\boxed{\text{Le polynôme } P_M = X^2 - 5X - 2 \text{ est donc un polynôme annulateur de } M.}$$

Exercice 17 :

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$, on a $u(x) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow u(u(x)) = u(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ donc $x \in \operatorname{Ker} u^2$. On a prouvé $\underline{\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2}$.

Si $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{\overrightarrow{0}\}$, alors soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$, on a $u(u(x)) = \overrightarrow{0}$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u$.

Mais on a aussi $u(x) \in \operatorname{Im} u$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \Longrightarrow u(x) = \overrightarrow{0}$. Finalement, $x \in \operatorname{Ker} u$. On a prouvé $\underline{\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u}$. Avec l'inclusion réciproque prouvée précédemment, $\underline{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2}$.

Réciproquement, si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$, alors soit $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$, on a $u(x) = \overrightarrow{0}$ et x est une image d'un élément y de E : $x = u(y)$. Mais, alors on a $u(x) = 0 = u(u(y)) = u^2(y)$. Donc $y \in \operatorname{Ker} u^2$ et $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ donne $y \in \operatorname{Ker} u$, soit $u(y) = \overrightarrow{0}$ donc $x = \overrightarrow{0}$.

On a montré $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \subset \{\overrightarrow{0}\}$ et comme on a toujours $\overrightarrow{0} \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$, on a prouvé $\underline{\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{\overrightarrow{0}\}}$.

On a donc montré que $\boxed{\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{\overrightarrow{0}\} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2.}$

Soit $y \in \operatorname{Im} u^2$, y s'écrit $y = u(u(x))$ avec $x \in E$ ce qui montre $y \in \operatorname{Im} u$. On a prouvé $\underline{\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u}$.

On suppose que $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u$. Soit $y \in \operatorname{Im} u$, y s'écrit $y = u(x)$ avec $x \in E$. Alors x se décompose en $x = u(z) + t$ avec $z \in E$, $u(z) \in \operatorname{Im} u$ et $t \in \operatorname{Ker} u$.

On a alors $u(x) = u^2(z) + u(t) \Longrightarrow y = u^2(z)$ ce qui montre $y \in \operatorname{Im} u^2$. On a prouvé $\underline{\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u^2}$. Avec l'inclusion réciproque prouvée précédemment, on obtient $\underline{\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2}$.

Réciproquement, on suppose que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ qui donne $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u^2$.

Soit $x \in E$. On a $u(x) \in \operatorname{Im} u \Longrightarrow u(x) \in \operatorname{Im} u^2$. Donc $x = u^2(z)$ avec $z \in E$.

Alors on peut écrire $x = u(z) + (x - u(z))$ avec $u(z) \in \operatorname{Im} u$ et $u(x - u(z)) = u(x) - u^2(z) = \overrightarrow{0}$ donc $(x - u(z)) \in \operatorname{Ker} u$.

On a prouvé $\underline{E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u}$.

Finalement, on a montré $\boxed{E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2}$.

Si E est de dimension finie, on a, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$.

Alors $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{\overrightarrow{0}\} \Longleftrightarrow E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$. Ce qui prouve que les 4 propriétés sont équivalentes.

Exercice 18 :

1. Soit $y \in \operatorname{Im} u$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors $(u^2 + u + id)(y) = (u^3 + u^2 + u)(x) = 0$ donc $y \in \operatorname{Ker}(u^2 + u + id)$. On a montré $\boxed{\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(u^2 + u + id)}$.

   Soit $x \in \operatorname{Ker}(u^2+u+id)$, alors $(u^2+u+id)u(x) = (u^3+u^2+u)(x) = \overrightarrow{0}$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker}(u^2+u+id)$. Donc $u(\operatorname{Ker}(u^2 + u + id)) \subset \operatorname{Ker}(u^2 + u + id)$

   c'est à dire $u(E_1) \subset E_1$: $\boxed{E_1 \text{ est stable par } u}$.

   Soit $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $u(x) = \overrightarrow{0} \in \operatorname{Ker} u$. Donc $u(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u$ c'est à dire $u(E_2) \subset E_2$:

$\boxed{E_2 \text{ est stable par } u}$.

2. • Si $x \in E$ se décompose en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
Alors $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1)$ et
$(u^2 + u + id)(x) = (u^2 + u + id)(x_1) + (u^2 + u + id)(x_2) = (u^2 + u + id)(x_2) = x_2$.
On en déduit que nécessairement $x_2 = (u^2+u+id)(x)$ et $x_1 = x-(u^2+u+id)(x) = -(u^2+u)(x)$.
Si la décomposition existe, alors elle est unique.
• Soit $x \in E$, on pose $x_2 = (u^2 + u + id)(x)$ et $x_1 = -(u^2 + u)(x)$.
Alors $u(x_2) = (u^3 + u^2 + u)(x) = 0$ donc $u_2 \in \operatorname{Ker} u$.
Et $(u^2 + u + id)(x_1) = -(u^2 + u + id) \circ (u^2 + u)(x) = -(u^4 + u^3 + u^3 + u^2 + u^2 + u)(x) = -(u(u^3 + u^2 + u) + u^3 + u^2 + u)(x) = 0(x) = \overrightarrow{0}$
Alors $x_1 \in \operatorname{Ker}(u^2 + u + id)$.
On a prouvé que la décomposition existe.
Donc $\boxed{E = E_1 \oplus E_2}$
On a vu que $x_2 = (u^2 + u + id)(x)$ donc $x_2 \in \operatorname{Im}(u^2 + u + id)$: $E_2 \subset \operatorname{Im}(u^2 + u + id)$.
Si $y \in \operatorname{Im}(u^2 + u + id)$, alors $y = (u^2 + u + id)(x)$ donc $u(y) = (u^3 + u^2 + u)(x) = 0(x) = \overrightarrow{0}$.
Donc $y \in E_2$. On a donc $\operatorname{Im}(u^2 + u + id) \subset E_2$. Et finalement $\boxed{\operatorname{Im}(u^2 + u + id) = E_2}$.
Et $x_1 = -(u^2 + u)(x) = u \circ (-u + id)(x)$ donc $E_1 \subset \operatorname{Im} u$. Et comme on a prouvé l'inclusion réciproque, $\boxed{E_1 = \operatorname{Im} u}$.

3. (a) Soit $x \in E_1$ avec $x \neq 0$.
On sait que $u(x) \in E_1$ car E_1 est stable par u.
Si $u(x) = \alpha x$, alors comme $(u^2 + u + id)(x) = \overrightarrow{0}$, on a $(\alpha^2 + \alpha + 1)x = \overrightarrow{0}$ Or $\alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0$ pour tout réel α et $x \neq \overrightarrow{0}$. On en déduit que $u(x)$ n'est pas colinéaire à x :
$\boxed{\text{pour tout } x \text{ non nul dans } E_1, \quad (x, u(x)) \text{ est libre}}$

(b) Soit x, y deux vecteurs de E_1 tels que la famille $(x, u(x), y)$ est libre.
Si $u(y) = \alpha x + \beta u(x) + \gamma y$, alors $u^2(y) = \alpha u(x) + \beta u^2(x) + \gamma u(y) = \alpha u(x) + \beta u^3(x) + \gamma\alpha x + \gamma\beta u(x) + \gamma^2 y$.
Alors $(u^2 + u + id)(y) = (\alpha u(x) + \beta u^3(x) + \gamma\alpha x + \gamma\beta u(x) + \gamma^2 y) + \alpha x + \beta u(x) + \gamma y + y$
Mais $u^3(x) = -u(x) - u^2(x)$ et comme $x \in E_1$, $u^3(x) = -u(x) - (-x - u(x)) = x$.
$\overrightarrow{0} = (\beta + \gamma\alpha + \alpha)x + (\alpha + \gamma\beta + \beta)u(x) + (\gamma^2 + \gamma + 1)y$
Or la famille $(x, u(x), y)$ est libre par hypothèse, alors $\begin{cases} \beta + \gamma\alpha + \alpha &= 0 \\ \alpha + \gamma\beta + \beta &= 0 \\ \gamma^2 + \gamma + 1 &= 0 \end{cases}$
La dernière équation est impossible pour γ réel. Alors $u(y)$ n'est pas combinaison linéaire de $x, u(x), y$ et comme ces trois vecteurs forment une famille libre,
$\boxed{\text{la famille } (x, u(x), y, u(y)) \text{ est libre dans } E_1}$.

(c) • Si $\dim E_1 = 0$, alors $\operatorname{Im} E_1 = \{\overrightarrow{0}\}$ donc u est l'application nulle $u = 0$.
• Si $\dim E_1 = 1$, alors pour x non nul dans E_1, $u(x)$ dans E_1 et colinéaire à x ce qui n'est pas possible d'après les questions précédentes. Donc $\dim E_1 \neq 1$.
• Si $\dim E_1 = 3$, alors soit $x \in E_1$ non nul, son image $u(x)$ est dans E_1 et $(x, u(x))$ est libre. Comme $\dim E_1 = 3$, il existe un vecteur y non coplanaire à $(x, u(x))$, alors $(x, u(x), y)$ est libre.
Mais nécessairement $u(y) \in E_1$ et $(x, u(x), y, u(y))$ est libre dans E_1 qui est de dimension 3 : c'est impossible. Alors $\dim e_1 \neq 3$.
• Si $\dim E_1 = 4$, alors $\operatorname{Ker}(u^2 + u + id)$ est tout l'espace donc $u^2 + u + id = 0$.
Donc $\boxed{\text{dans le cas général, on aura } \dim E_1 = 2}$.