Chapitre 16 - Analyse asymptotique

1 Comparaison des suites

1.1 Relations de comparaison

Uniquement pour les suites réelles : on se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels. On dit que :

- (u_n) est dominée par (v_n) si à partir du rang N_0 $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.
- (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
- (u_n) est équivalente à (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

$n \longrightarrow +\infty$

exemple $u_n = n + n^2$, $v_n = 2n^2 + 1$, $w_n = \sin(n)$, $x_n = -n^2$

On a

$u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(v_n)$ car $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+n^2}{2n^2+1}$ et $0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1$

car pour $n \geq 1$ $n \leq n^2$

$w_n \underset{n \to +\infty}{=} o(u_n)$ car $\frac{w_n}{u_n} = \frac{\sin(n)}{n^2+n} \longrightarrow 0$

$\lfloor n \rfloor \underset{n \to +\infty}{\sim} n$ car $\frac{\lfloor n \rfloor}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ $\lfloor n \rfloor \leq n < \lfloor n \rfloor + 1$

On a $n \underset{n \to +\infty}{=} o(n^3)$ et $n^2 \underset{n \to +\infty}{=} o(n^3)$ alors $n + n^2 \underset{n \to +\infty}{=} o(n^3)$

car $\frac{n+n^2}{n^3} = \frac{n}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

On encore $u_n = o(n^3)$ $v_n = o(n^3)$ alors $2u_n - v_n = o(n^3)$

car $\frac{2u_n - v_n}{n^3} = \frac{2u_n}{n^3} - \frac{v_n}{n^3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Théorème 1.1. *Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels.*
(u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 telle que $u_n = v_n.\varepsilon_n$.

petit "o"

la notation $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$ est équivalente à

$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$u_n = \varepsilon_n . v_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

1.2 Propriétés des relations de comparaison

Proposition 1.2. *Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites réelles.*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$. symétrie

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$. transitivité

Si u_n et v_n ne s'annulent pas, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff$ (v_n) ne s'annule pas et $\frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ $\iff$ (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, $\frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ $\iff v_n \sim u_n$

- $\frac{u_n}{w_n} = \frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{w_n}{v_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$

- si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1$ comme $u_n \sim v_n$ $\frac{u_n}{v_n} \to 1$

alors $\frac{u_n - v_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n - v_n = o(v_n)$

si $u_n - v_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n - v_n + v_n}{v_n} = \frac{u_n - v_n}{v_n} + 1$

donc $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ soit $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

- si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est une suite convergente donc elle est bornée : $u_n = O(v_n)$

exemple : $u_n = n^2 - \sqrt{n}$ $v_n = n^2 + \cos(n)$

$u_n - v_n = \sqrt{n} - \cos(n) = o(n^2 + \cos(n))$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

exemple : Mq si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$

si $u_n = o(v_n)$ alors $\frac{u_n}{v_n} \to 0$ donc $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est une suite bornée d'où $u_n = O(v_n)$

1.3 Suites de référence

Remarque $e^{\gamma n} = (e^{\gamma})^n$ suite géométrique

Proposition 1.3. *Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, on a*

$$\ln^{\beta}(n) \underset{+\infty}{=} o(n^{\alpha}) \text{ et } n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma n}) \qquad \text{et pour } q > 1, \text{ on a } n^{\alpha} = o(q^n).$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha}} = 0$ pour $\alpha > 0, \beta > 0$ d'où $\ln^{\beta}(n) \underset{+\infty}{=} o(n^{\alpha})$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{(e^{n})^{\gamma}} = 0$ pour $\alpha > 0, \gamma > 0$ d'où $n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma n})$

On a également : géométrique $\to b^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$ $\quad n! = o(n^n)$

$n^{\alpha} = o(b^n)$ pour $b > 1$

Idée : montrer à chaque fois B

Lemme : Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = A$ avec $0 \leq A < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

B

Soit $B \in]A, 1[$. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to A$, à partir d'un certain rang N

$\forall n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq B \iff u_{n+1} \leq B . u_n$

On montre par récurrence

$\forall n \geq N$, $\quad u_n \leq B^n \cdot \dfrac{u_N}{B^N}$

C'est vrai pour $n = N$: $u_N = B^N . \dfrac{u_N}{B^N}$. Si c'est vrai pour un rang $n \geq N$

alors $u_{n+1} \leq B . u_n \leq B . B^n . \dfrac{u_N}{B^N} = B^{n+1} \dfrac{u_N}{B^N}$:

c'est héréditaire et initialisée. Donc

$\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n \leq \boxed{\left(\dfrac{u_N}{B^N}\right) . B^n}$ on reconnaît une suite géométrique qui tend vers 0 de raison $0 < B < 1$

donc par théorème d'encadrement $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemples de référence :

* $u_n = \dfrac{n^{\alpha}}{a^n}$ avec $\alpha > 0$ $a > 1$. En utilisant le lemme, on a $u_n \to 0$

donc $\boxed{n^{\alpha} \underset{n \to +\infty}{=} o(a^n)}$ Mutilisable

$$\frac{\frac{(n+1)^{\alpha}}{a^{n+1}}}{\frac{n^{\alpha}}{a^n}}$$

Preuve : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \dfrac{a^n}{a^{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha} \dfrac{1}{a} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 . \dfrac{1}{a}$

Car $u \mapsto u^{\alpha}$ est continue en 1 : $\lim\limits_{u \to 0} (1+u)^{\alpha} = 1$

et $0 < \frac{1}{a} < 1$ donc d'après le lemme $u_n \to 0$.

* $u_n = \frac{b^n}{n!}$ d'après le lemme $u_n \to 0$ donc $\boxed{b^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)}$ utile

* $u_n = \frac{n!}{n^n}$ d'après le lemme $u_n \to 0$ donc $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)}$ utile

Preuve.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n}{n+1}^n$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

on calcule : ~~il est connu que~~ :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \quad \text{car} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

et on sait que $\frac{\ln(1+u)}{u} \underset{u\to0}{\longrightarrow} 1$: c'est une limite usuelle.

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \frac{1}{e}$ avec $0 < \frac{1}{e} < 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Culture taupine :

formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

1.4 Opérations sur les équivalents

on peut multiplier et diviser et c'est TOUT !

Proposition 1.4. *Soit $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ des suites réelles.*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ alors $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n x_n$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ et si w_n et x_n ne s'annulent pas alors $\dfrac{u_n}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{x_n}$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si p est un entier $p \in \mathbb{N}$ alors $u_n^p \underset{+\infty}{\sim} v_n^p$.

⚠ on n'ajoute pas les équivalents

exemple : $u_n = n^2 + n$ on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2$

$v_n = -n^2 + 1$ $\quad v_n \underset{+\infty}{\sim} -n^2$

$u_n + v_n = n + 1$ et $u_n + v_n \underset{+\infty}{\sim} n$

exemple $u_n = \dfrac{3n^2 - 8n + 2\ln(n)}{2n - \cos(n)}$ $\quad u_n \underset{+\infty}{\sim} ?$

On a $3n^2 - 8n + 2\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} 3n^2$ et $2n - \cos(n) \underset{+\infty}{\sim} 2n$

d'où par quotient d'équivalents $u_n \sim \dfrac{3}{2} n$

note : $\dfrac{3n^2 - 8n + 2\ln(n)}{3n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ car $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par CC

Equivalents usuels :

$\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$ car $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} 1$

Exemple : $u_n = \left(2 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$ équivalent de u_n ?

$n \to +\infty$

on a

$u_n = e^{n^2 \ln\left(2 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n^2 \ln\left(1 + \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)\right)}$

et $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ alors $\ln\left(1 + \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

On a $1 - \cos(u) \underset{u \to 0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$ car $1 - \cos(u) = 2\sin^2\left(\dfrac{u}{2}\right)$ et $\dfrac{\sin(v)}{v} \xrightarrow[v \to 0]{} 1$

$1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\left(\frac{1}{2n}\right)^2$ car $\sin\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ avec $v = \frac{1}{2n}$

$2 \times \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2 \times \frac{1}{2n} \times \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n^2}$

On a $\ln\left(2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ par transitivité

par produit $n^2 \ln\left(2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} n^2 \times \frac{1}{2n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$

ce qui veut dire $n^2 \ln\left(2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

la fonction exponentielle est continue en $\frac{1}{2}$ alors

$$e^{n^2 \ln\left(2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{1}{2}}$$

d'où $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{e}} \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{e}$

Exemple

$u_n = n+1$ et $v_n = n$. On a $u_n \sim v_n$

mais $e^{u_n} = e^{n+1}$ et $e^{v_n} = e^n$

donc $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \to e$ et $e^{u_n} \cancel{\sim} e^{v_n}$

on ne peut pas composer un équivalent par une fonction

mais on a $\ln(u_n) = \ln(1+n)$ $\ln(v_n) = \ln(n)$

on calcule $\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}$

par propriété fonctionnelle de ln

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \to 1$$

alors $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$

Exercice Déterminer un équivalent de $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n - 1$

1.5 Relations de comparaison et limites

Théorème 1.5. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.*
Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$
En particulier, (u_n) est convergente si et seulement si (v_n) est convergente. et dans ce cas, elles ont la même limite.

Proposition 1.6. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*

- M *Si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) converge, alors (u_n) converge vers 0.*
- M *Si $u_n = o(v_n)$ et (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge.*
- *Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

* en particulier si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
négligeable devant 1

* si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ avec (v_n) qui ne s'annule pas
alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times \ell = 0$

* $u_n = -n^2 \longrightarrow -\infty$ mais $u_n \underset{+\infty}{=} o(e^n)$

$n x^{n-1}$

Exercice : On définit une suite de réels (x_n) par
pour $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique solution de $\boxed{x^n + nx - 1 = 0 \quad (E_n)}$
dans $]0,1[$. Trouver un équivalent de x_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \longmapsto x^n + nx - 1$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors, d'après le théorème de bijection elle est bijective de
$]0,1[$ dans $f_n(]0,1[) =]f_n(0), f_n(1)[=]-1, n[$
Alors, elle s'annule en un unique $x_n \in]0,1[$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0^n < x_n^n \leq 1^n$ car la fonction $u \mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$
et $\boxed{x_n^n + n x_n - 1 = 0} \iff x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Alors, par définition de la limite, en posant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe
un rang N tel que $\forall n \geq N$ $|x_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow 0 < x_n < \frac{1}{2}$
alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < (x_n)^n < \frac{1}{2^n}$ donc par théorème d'encadrement
$\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0$ alors $n x_n = 1 - x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \Rightarrow \boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

2 Relations de comparaison appliquées aux fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ élément ou extrémité de I.

2.1 Fonction dominée par une autre

Définition 2.1. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} O(g)$ (eventuellement pas definie en a)

exemple $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{=} O(x^2)$ car $\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

et $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est borné sur $\mathbb{R}^*$

On a aussi $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{2}{=} O(x^2)$

2.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2.2. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a.

On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou bien $f(x) = g(x).\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

exemple : $\ln(1+x) \underset{+\infty}{=} o(x)$ car $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

et $\cancel{\ln(1+x) \underset{1}{=} o(x)}$ $\cancel{\text{car } \dfrac{\ln(1+x)}{x}}$ $\not\to$

⚠ $x^3 \underset{+\infty}{=} o(x^5)$ et $x^5 \underset{0}{=} o(x^3)$

2.3 Fonctions équivalentes

Définition 2.3. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a. On note $f \underset{a}{\sim} g$

Proposition 2.1. *Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.*

$$\text{Si } f'(a) \neq 0, \text{ alors } f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

par définition de $f'(a)$

Proposition 2.2. *Soit f et g définies sur I, ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$. On a :*

$$f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g).$$

exemple $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ limite usuelle $\quad 1-\cos(u) \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ ex précédent

$e^x \underset{+\infty}{\sim} e^{x+\frac{1}{x}}$ limite

exemple

$\ln(1+x) \underset{-1}{\sim} ?$ $\quad \boxed{\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x}$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ $\quad \boxed{\ln(1+x) \underset{1}{\sim} \ln(2)}$ $\frac{\ln(1+x)}{\ln(2)} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$ $\quad \ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$ $\quad \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \longrightarrow 1$ vu précédent

$\ln(1+x) \underset{1}{\sim} \ln(2x)$ car $\frac{\ln(1+x)}{\ln(2x)} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$

$\ln(1+x) \underset{1}{\sim} x^2 \ln(2x)$

$o(g) = o(-g)$

Exemple prop 2.1 $\quad \sin(u) \underset{0}{\sim} u$, $\quad e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$, $\quad \tan(u) \underset{0}{\sim} u$

exercice : $\frac{\ln(1+x) - \ln(x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} \underset{0}{\sim} ? \quad \underset{1}{\sim} ? \quad \underset{+\infty}{\sim} ?$

on a $\underbrace{\ln(1+x)}_{f-g} \underset{x\to 0}{=} o(\underbrace{\ln(x)}_{-g})$ alors (prop 2.2) $\underbrace{\ln(1+x) - \ln(x)}_{f} \underset{0}{\sim} \underbrace{-\ln(x)}_{g}$

$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} \underset{0}{\sim} 1$ alors $\frac{\ln(1+x) - \ln(x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} \underset{0}{\sim} -\ln(x)$

$\frac{\ln(1+x) - \ln(x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} \underset{1}{\sim} \frac{\ln(2)}{\sqrt{2} - 1}$

Pour f dérivable en a :

$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$

2.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 2.3. *Si $f, g, h, f_1, g_1, f_2, g_2$ sont des fonctions définies au voisinage de a, on a :*

$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \iff \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$

symétrie
- $f \underset{a}{\sim} g \Longrightarrow g \underset{a}{\sim} f$

transitivité
- $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h \Longrightarrow f \underset{a}{\sim} h$

produit
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Longrightarrow f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$

quotient
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Longrightarrow \dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$

puissances entières $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f^2 \underset{a}{\sim} g^2$

$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f^n \underset{a}{\sim} g^n \quad n \in \mathbb{N}$

2.5 Utilisation des équivalents

Proposition 2.4. *Étant donnés deux fonctions f et g équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Si g a une limite finie ou infinie en a alors f aussi et $\lim_a f = \lim_a g$.

Proposition 2.5. *Étant donnés deux fonctions f et g définies sur I et équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Si g est positive sur I alors f est positive au voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur I, alors f ne s'annule pas au voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, alors la restriction de f à $I \setminus \{a\}$ ne s'annule pas au voisinage de a.

exemple : $\ln(x) - \ln(2) \underset{2}{\sim} \frac{x-2}{2}$

en utilisant $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a) \cdot (x-a)$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)$

(rappel $y = f(a) + f'(a)(x-a)$)

~~exemple~~ : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

au voisinage de $a = 2$

$f(x) \underset{x \to 2}{\sim} \sqrt{3} - 1$

car $\frac{f(x)}{\sqrt{3}-1} \underset{x \to 2}{\longrightarrow} 1$

$f(x) - \sqrt{3} + 1 \underset{x \to 2}{\sim} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)(x-2)$

$f(x) - f(2) \sim f'(2)(x-2)$

et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

au voisinage de $+\infty = a$

$f(x) = \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+\cancel{1}} + \sqrt{x-\cancel{1}}} \sim \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \sim \frac{2}{2\sqrt{x}}$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ car $\frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

$\frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x+1}{x}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}} \longrightarrow \frac{2}{2} = 1$

$\longrightarrow 1 \quad + \quad \longrightarrow 1$

3 Développements limités

3.1 Définition

Définition 3.1. On dit qu'une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ élément ou extrémité de I si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(a+h) = P(h) + o(h^n)$ au voisinage de 0 (pour h).

C'est à dire $f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_{n-1}h^{n-1} + a_n h^n + o(h^n)$ $h = x - a$

ou $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

On le note $DL_n(a)$ de f.

reste négligeable devant $(x-a)^n$ au voisinage de a

$\dfrac{f(x) - P(x-a)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \iff$

exemple : $f(x) = 1 + x^2 + x^3 \sin(x)$

on a $\dfrac{x^3 \sin(x)}{x^2} = x \sin(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ alors $x^3 \sin(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$

On a donc $f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$

ce qui prouve que f a un DL à l'ordre 2 en $a = 0$

On a également $f(x) = 1 + 0 \cdot x + (x^2 + x^3 \sin(x))$

avec $x^2 + x^3 \sin(x) \underset{x \to 0}{=} o(x)$ alors f a aussi un DL_1 en 0

on peut l'écrire $f(x) = 1 + 0 \cdot x + x\,\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1 \xrightarrow[0]{} 0$

et aussi $f(x) = 1 + o(1) = 1 + 1 \cdot \varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2 \xrightarrow[0]{} 0$

qui est un DL à l'ordre 0 en 0.

On sait que comme sin est dérivable en 0, sin a un DL_1 en 0

CHAP 10

$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} \sin(0) + \sin'(0)(x - 0) + x\,\varepsilon_3(x)$ avec $\varepsilon_3 \to 0$

$o(x)$

$\sin(x) = x + o(x) = x + x\,\varepsilon_3(x)$

on calcule alors

$f(x) = 1 + x^2 + x^3(x + o(x))$

$x^3 o(x) \underset{0}{=} o(x^4)$

$f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$ car $x\,\varepsilon_3(x) \cdot x^3 = x^4 \varepsilon_3(x)$

donc f a un $DL_4(0)$ (DL d'ordre 4 en 0)

$f(x) = 1 + x^2 + x^3 \sin(x)$

si on veut calculer un DL en $a = 1$. on cherche

$b_0, b_1, \ldots$ $\quad f(x) \underset{x \to 1}{=} b_0 + b_1(x-1) + \ldots + b_n(x-1)^n + o((x-1)^n)$

On change de variables on pose $x = 1 + h \Leftrightarrow h = x - 1$

$x \to 1 \Leftrightarrow h \to 0$

Alors $f(1+h) = 1 + (1+h)^2 + (1+h)^3 \sin(1+h)$

$= 1 + 1 + 2h + h^2 + (1 + 3h + 3h^2 + h^3)\sin(1+h)$

$f(1+h) = \underbrace{2 + 2h + h^2}_{\text{poly} = DL} + \underbrace{(1 + 3h + 3h^2 + h^3)}_{\text{poly} = DL}(\sin(1)\cos(h) + \cos(1)\sin(h))$

on utilise $\sin(h) \underset{h \to 0}{=} h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$ d'après une formule du cours.

et $\cos(h) \underset{h \to 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ d'après la formule de Taylor.

On calcule arbitrairement un DL $\cancel{\times}$ 2

$f(1+h) \underset{h \to 0}{=} 2 + 2h + h^2 + (1 + 3h + 3h^2 + h^3)(\sin(1)\, 1 - \sin(1)\frac{h^2}{2} + o(h^2) + \cos(1)h - \cos(1)\frac{h^3}{6} + o(h^3))$

$= 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1) + \cos(1))h + (1 + 3\cos(1) + 3\sin(1) - \frac{\sin(1)}{2})h^2$
$+ \underbrace{(\sin(1)h^3 + 3\cos(1)h^3 + \frac{3\sin(1)}{2}h^4 + o(h^2) + o(h^3) + \ldots)}_{\text{tous ces termes sont négligeables devant } h^2 \text{ quand } h \to 0.}$

$f(1+h) \underset{h \to 0}{=} 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1) + \cos(1))h + (1 + 3\cos(1) + \frac{5}{2}\sin(1))h^2 + o(h^2)$

c'est un DL à l'ordre 2 en 1 de f

$f(x) \underset{x \to 1}{=} 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1) + \cos(1))(x-1)$
$+ (1 + 3\cos(1) + \frac{5}{2}\sin(1))(x-1)^2$
$+ o((x-1)^2)$

3.2 Exemple fondamental

Proposition 3.1. *La fonction* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \dfrac{1}{1-u} \end{array}$ *admet des développements limités à l'ordre n, pour tout entier n, au voisinage de 0 :*

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n)$$

On utilise la formule : pour $u \neq 1$

$$1+u+u^2+u^3+u^4+\cdots+u^n = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} = \frac{1}{1-u} - \frac{u^{n+1}}{1-u}$$

alors

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\cdots+u^n + \frac{u^{n+1}}{1-u} \quad / \text{ pour } u \neq 1$$

on calcule

$$\frac{\frac{u^{n+1}}{1-u}}{u^n} = \frac{u}{1-u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ donc } \frac{u^{n+1}}{1-u} \underset{u\to 0}{=} o(u^n)$$

alors on a le $DL_n(0)$ de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n)$$

Mieux : on pose $x=-u$, on obtient

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

car si $f(u)=o(u^n)$ alors $\frac{f(u)}{u^n} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \frac{f(-x)}{(-x)^n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \frac{f(-x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f(-x)=o(x^n)$

Encore mieux on peut intégrer les équivalents : au voisinage de 0 $1+x>0$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

(voir th 4.1)

autre exemple $\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n)$

et on pose $u=-x^2$ alors $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n})$

qui donne par intégration :

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \cancel{\operatorname{Arctan}(0)} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

exercice :

Calculer un $DL_2(0)$ de $g(x) = \frac{1}{1-x} + \sin(x)$

on a $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$ DL_2 de $\frac{1}{1-x}$

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ $DL_3(0)$

$\underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$ $DL_2(0)$

on somme :

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + x^2 + o(x^2)}$$

on peut aussi écrire $\sin(x) = x + o(x)$ $DL_1(0)$

qui donne en sommant

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \underbrace{o(x) + x^2 + o(x^2)}_{o(x)}$$

$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + o(x)$ $DL_1(0)$ de g

$O(x)$ $o(x^2)$ $o(x^2)$ $o(\ldots)$

Calculons un $DL_3(0)$ de $h(x) = \frac{\sin(x)}{1-x}$

On écrit $h(x) = \sin(x) \times \frac{1}{1-x}$

on calcule le produit

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + x + x^2 + o(x^2)\right)$$

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + o(x^3) + o(x^4) + o(x^5) + \ldots$$

on simplifie en

$DL_3(0)$ de $\frac{\sin(x)}{1-x}$

$$\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)}$$

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + x + o(x)\right) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$+o(x^2)+o(x^4)+o(x^4)$

$DL_2(0)$ $h(x) \underset{x \to 0}{=} x + x^2 + o(x^2)$

3.3 Unicité du développement limité

Proposition 3.2. *Si f est une fonction admettant deux développements limités à l'ordre n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors ces développements sont égaux.*

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ *et* $f(x) \underset{a}{=} \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k}}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{reste}}$*, alors* $\forall k \in [\![0,n]\!]$*,* $a_k = b_k$*.*

On appelera le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ *la partie régulière du DL de f à l'ordre n en a.*

Corollaire 3.3. *Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors pour tout entier $p \leqslant n$, f admet un développement limité à l'ordre p obtenu en tronquant le développement d'ordre n.*

Corollaire 3.4. *Soit f admettant un développement limité en 0 de partie régulière P. Si f est paire, alors P est pair. Si f est impaire, alors P est impair.*

Exemple $f(x) = \frac{1}{1+x}$ on veut un DL_3 en $a = 4$

Méthode n° 1 : on utilise la formule de Taylor-Young.

Méthode n° 2 : on change de variables $h = x-4 \Leftrightarrow x = 4+h$

$h \to 0 \Leftrightarrow x \to 4$

$g(h) = f(4+h) = \frac{1}{5+h} = \frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{h}{5}}$

On connait que $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + \underbrace{o(u^3)}_{u^3\varepsilon_1(u)}$ (cours) avec $\varepsilon_1 \underset{0}{\to} 0$

et on pose $u = \frac{h}{5}$ alors

$f(4+h) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{5}\left(1 - \frac{h}{5} + \frac{h^2}{25} - \frac{h^3}{125} + \underbrace{o(h^3)}_{h^3\frac{\varepsilon_1(\frac{h}{5})}{125} = h^3\varepsilon_2(h)}\right)$

on a le $DL_3(4)$ de f

$\frac{1}{1+x} = \boxed{f(x) \underset{x\to 4}{=} \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-4) + \frac{1}{125}(x-4)^2 - \frac{1}{625}(x-4)^3}_{P(x-4)}} + \underbrace{(x-4)^3\varepsilon_3(x-4)}_{o((x-4)^3)}$ $\varepsilon_2 \to 0$

avec $\varepsilon_3(u) \underset{u\to 0}{\to} 0$

Remarque $\lim_{x\to 4} \varepsilon_3(x-4) = \lim_{u\to 0}\varepsilon_3(u) = 0$

Remarque : on a également le DL_3 en 0 de $g(h) = f(4+h)$

$\frac{1}{5+h} = g(h) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{5} - \frac{1}{25}h + \frac{1}{125}h^2 - \frac{1}{625}h^3}}_{P(h) \text{ partie régulière}} + o(h^3)$

Méthode n°1 Utilisation de la formule de Taylor-Young :

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ est de classe C^3 sur $]-1, +\infty[= I$.

Alors f a un DL_3 en tout point de I, en particulier en $a = 4$ et ce DL_3 est

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right)$$

On calcule les dérivées de f :

$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $f^{(3)}(x) = 2(-3)(1+x)^{-4}$

$f'(4) = -\frac{1}{25}$ $f''(4) = \frac{2}{125}$ $f^{(3)}(4) = -\frac{6}{625}$

Alors le $DL_3(4)$ de f est :

$$f(x) \underset{x \to 4}{=} \frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-4) + \frac{1}{125}(x-4)^2 - \frac{1}{625}(x-4)^3 + o\left((x-4)^3\right)$$

3.4 Forme normalisée d'un développement limité

Définition 3.2. Soit f une application admettant un développement limité l'ordre $n+p$ au voisinage de a. On appelle forme normalisée du développement limité de f, l'écriture :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)) \text{ où } a_0 \neq 0.$$

Proposition 3.5. *Si f a un développement limité normalisé $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n))$ où $a_0 \neq 0$, alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$ et f est de même signe que $a_0 h^p$.*

Exemple : $f(x) = \ln(1+x) - x$ au voisinage de 0

on veut un $DL_3(0)$ de f :

f est $\mathcal{C}^3$ sur $]-1,+\infty[$ alors f a un DL à l'ordre 3 en 0.

et $f(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}_{\text{formulaire}} - x$

$f(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

La forme normalisée est $f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + o(x)\right)$

3.5 Translation d'un développement limité

Proposition 3.6. *Si f est une fonction vérifiant $f(a+h) = g(h)$ pour tout h dans l'intervalle I contenant 0, et si g admet un développement limité à l'ordre n en 0 : $g(x) \underset{0}{=} P(x) + o(x^n)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n)$.*

exemple : Calculons un DL_2 en $a=-1$ de $h(x) = xe^x$

h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ alors h a un DL_2 en -1.

Méthode 1 :

On pose $u = x-(-1) = x+1$. On calcule

$h(x) = h(u-1) = (u-1)e^{u-1} = \dfrac{(u-1)}{e}e^u$

On utilise le formulaire :

$$e^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{6}+o(u^3) \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$$

on calcule le produit

$$g(u) = h(u-1) = h(x) \underset{u\to 0}{=} \frac{1}{e}\left(-1 \cancel{-u} \cancel{+u} - \frac{u^2}{2} + u^2 \underbrace{-o(u^2) + \frac{u^3}{2} + o(u^3)}_{o(u^2)}\right)$$

$$h(x) \underset{x\to -1}{=} \frac{1}{e}\left(-1+\frac{1}{2}(x+1)^2 + o\left((x+1)^2\right)\right)$$

Méthode formule de Taylor-Young

$h(x) = xe^x \quad h'(x) = (x+1)e^x \quad h''(x) = (x+2)e^x$

qui donne $h(x) \underset{x\to -1}{=} h(-1) + \underbrace{h'(-1)}_{0}(x+1) + \dfrac{h''(-1)}{2!}(x+1)^2 + (x+1)^2\varepsilon_1(x+1)$

avec $\varepsilon_1 \underset{0}{\longrightarrow} 0$

$$h(x) \underset{x\to -1}{=} -\frac{1}{e} + \frac{1}{2e}(x+1)^2 + (x+1)^2\varepsilon_1(x+1)$$

$\cancel{\underset{x\to -1}{o(x^2)}}$ $o\left((x+1)^2\right)$

au voisinage de -1

$$1 \gg x+1 \gg (x+1)^2 \gg (x+1)^3 \gg (x+1)^4$$

les termes sont rangés par ordre décroissant d'importance

voisinage de $a=+\infty$ ou $a=-\infty$

$\boxed{x = \frac{1}{u}}$

$x \to +\infty \iff u \to 0^+$

$x \to -\infty \iff u \to 0^-$

3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si la fonction g définie par $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n sur l'intervalle $J_+ = \left\{\frac{1}{x} \middle| x \in I \cap \mathbb{R}_+^*\right\}$ (respectivement sur $J_- = \left\{\frac{1}{x} \middle| x \in I \cap \mathbb{R}_-^*\right\}$), alors on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Si $g(u) \underset{0^+}{=} P(u) + o(u^n)$, alors $f(x) \underset{+\infty}{=} P(\frac{1}{x}) + o(\frac{1}{x^n})$ $= a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$

$\lim_{+\infty} f$

Exemple DL_n en $+\infty$ de $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$

méthode

On change de variables : $x = \frac{1}{u}$ $\quad x = \varphi(u)$

on pose $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ $\quad g = f \circ \varphi$

et on calcule un DL_n (0) de g :

$$g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{2/u}{3/u - 1} = \frac{2}{3-u}$$ g est C^∞ sur $]-3,3[$

$$g(u) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - u/3}$$ et on pose $V = u/3$

Le formulaire donne :

$$\frac{1}{1-V} \underset{V \to 0}{=} 1 + V + V^2 + V^3 + \dots + V^n + o(V^n)$$

on revient à

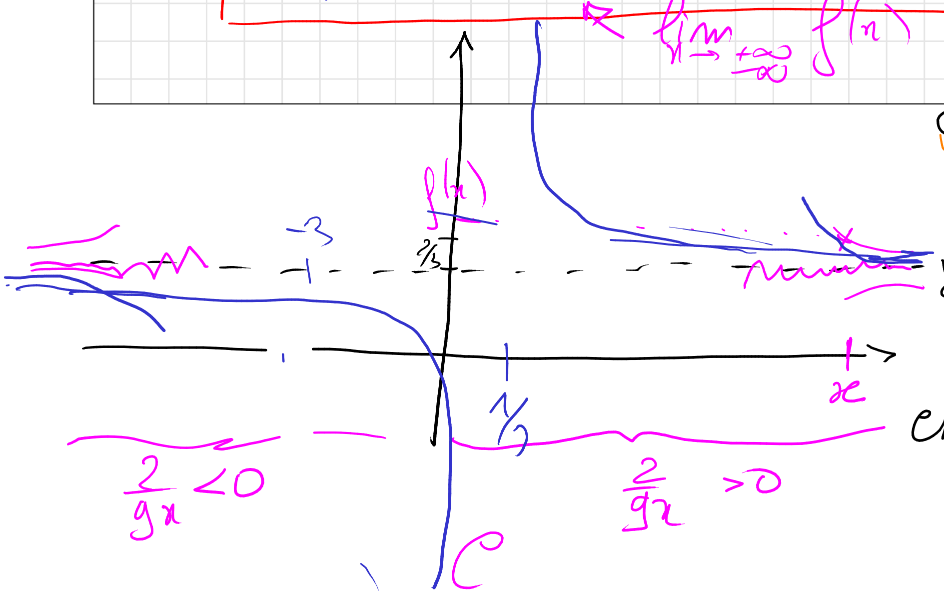
$$g(u) \underset{u \to 0}{=} \frac{2}{3}\left(1 + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{9} + \dots + \frac{u^n}{3^n} + o(u^n)\right)$$

puis on revient à f DL_n en $+\infty$ et en $-\infty$ de f :

$$f(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} \frac{2}{3} + \frac{2}{9x} + \frac{2}{27x^2} + \dots + \frac{2}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

$\lim_{x \to \substack{+\infty \\ -\infty}} f(x)$

$$f(x) - \frac{2}{3} \underset{\substack{+\infty \\ -\infty}}{=} \frac{2}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$



DL_1 donne $f(x) - \frac{2}{3} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{2}{9x}$

et 2 fonctions équivalentes en a ont le même signe au voisinage de a

exemple : DL_2 en $+\infty$ de $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$

$1+x+x^2$ a un discriminant $\Delta<0$ donc $\forall x\in\mathbb{R}, 1+x+x^2>0$

f est définie sur $\mathbb{R}$. On pose $x=\frac{1}{u}$ et

$g(u)=f\left(\frac{1}{u}\right)=\sqrt{1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}=\sqrt{\frac{1}{u^2}(u^2+u+1)}$

on se limite à $u>0 \iff x>0$ $\qquad \sqrt{\frac{1}{u^2}}=\frac{1}{u}$

$\boxed{g(u)=\frac{1}{u}\times\sqrt{1+u+u^2}}$ qui est de la forme $\sqrt{1+v}$

$DL_2(0)$ de $\sqrt{1+v}$ est dans le formulaire avec

$(1+v)^\alpha \underset{v\to 0}{=} 1+\frac{\alpha}{1}v+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}v^2+o(v^2)$ et $\alpha=\frac{1}{2}$

⚠ α est une constante dans la formule.

$\sqrt{1+v}\underset{0}{=}1+\frac{1}{2}v+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}v^2+o(v^2)=1+\frac{1}{2}v-\frac{1}{8}v^2+v^2\varepsilon_1(v)$

avec $\varepsilon_1 \underset{0}{\longrightarrow} 0$

On pose $v=u+u^2$ on a $v\underset{u\to 0}{\longrightarrow}0$

alors $\sqrt{1+u+u^2}\underset{0}{=}1+\frac{1}{2}(u+u^2)-\frac{1}{8}(u+u^2)^2+(u+u^2)^2\varepsilon_1(u+u^2)$

$(u+u^2)^2 = u^2+2u^3+u^4$

$\underset{0}{=}1+\frac{1}{2}u+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)u^2\boxed{-\frac{2u^3}{8}-\frac{u^4}{8}+(u^2+2u^3+u^4)\varepsilon_1(u+u^2)}$

$\underline{u>0}$

$g(u)\underset{0^+}{=}\frac{1}{u}\left(1+\frac{1}{2}u+\frac{3}{8}u^2+u^2\varepsilon_2(u)\right)$

avec $\varepsilon_2\underset{0}{\longrightarrow}0$

$g(u)\underset{u\to 0^+}{=}\frac{1}{u}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}u+u\,\varepsilon_2(u)$

est un développement asymptotique de g

On revient à f : développement asymptotique de f :

$f(x)\underset{x\to+\infty}{=}x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad f(x)\underset{+\infty}{\sim}x$

donc $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}+\infty$

$f(x)-x$ a un DL_1 en $+\infty$:

$f(x)-x\underset{x\to+\infty}{=}\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)$

4 Formule de Taylor-Young

4.1 Intégration terme à terme d'un DL

Théorème 4.1. *Soit I un intervalle contenant a et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue possédant un développement limité à l'ordre n en a qui est :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Alors toute primitive F de f sur I possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en a qui est :

$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.2. *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ avec $n \in \mathbb{N}$. f possède en tout point a de I un développement limité d'ordre n donné par :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \qquad \text{ou}$$

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

Démonstration par récurrence -

Remarque : si f est C^{n+1}, alors on peut écrire le reste intégral :

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt = o\left((x-a)^n\right)$$

Preuve : f est C^{n+1} : $f^{(n+1)}$ est continue sur I donc bornée sur un voisinage de a de la forme $[a-A, a+A] = J$ avec $A>0$ et $J \subset I$

Pour $x \in J$ on a $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$

alors on peut encadrer le reste :

pour $x \geq a$, $\left|\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt\right| \leq \int_a^x |f^{(n+1)}(t)| \frac{(x-t)^n}{n!} dt \leq \int_a^x M \frac{(x-t)^n}{n!}dt$

$$\leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

pour $x < a$, $\left|\int_a^x \quad\right| \leq \int_x^a |f^{(n+1)}(t)| \frac{|t-x|^n}{n!}dt$ car $|x-t| = t-x$ pour $t \in [x,a]$

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

donc $\forall x \in J$ $\left|\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}\right| \leq M\frac{|x-a|}{(n+1)!} \xrightarrow[x \to a]{} 0$ donc $R_n(x) \underset{x \to a}{=} o((x-a)^n)$

Exemple $f(x) = e^x$ est C^∞ donc C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

et $f^{(k)}(x) = e^x$. Alors, on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + o\left((x-0)^n\right)$$

$$e^x \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$$

Exemple : $g(x) = (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ CONSTANT

sur $I =]-1, +\infty[$. On réécrit $g(x) = e^{\alpha \ln(1+x)}$

donc g est C^∞ sur I par composition de $\ln$ et $\exp$

On montre par récurrence que :

$(\alpha-0)(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(k-1))$

$$g^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}$$

car $g'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$

et $\left(g^{(k)}\right)'(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(\alpha-k)(1+x)^{\alpha-(k+1)}$

D'où la formule du formulaire

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k+o(x^{k})$$

exemple : $DL_2(0)$ de $\varphi(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

Méthode 1 Taylor sur φ

φ est C^2 sur $]-1,+\infty[$

et $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\times\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+x}\right)^{-\frac12}(1+x)^{-\frac12}$

$\varphi''(x)=\dfrac14\left(-\dfrac12\right)\cdot\left(1+\sqrt{1+x}\right)^{-\frac32}\left((1+x)^{-\frac12}\right)^2$

$+\dfrac14\left(1+\sqrt{1+x}\right)^{-\frac12}\left(-\dfrac12\right)(1+x)^{-\frac32}$

D'où $\varphi(0)=\sqrt2$ $\varphi'(0)=\dfrac{1}{4\sqrt2}$

et $\varphi''(0)=-\dfrac{1}{8(\sqrt2)^3}-\dfrac{1}{8\sqrt2}=-\dfrac{3}{16\sqrt2}$

$(\sqrt2)^3=16\sqrt2$

D'où

$$\varphi(x)\underset{x\to 0}{=}\sqrt2+\frac{1}{4\sqrt2}x-\frac{3}{16\sqrt2\ 2!}x^2+o(x^2)$$

Méthode 2 : formulaire :

$V=\sqrt{1+x}\underset{0}{=}(1+x)^{1/2}=1+\frac12x-\frac18x^2+o(x^2)$

$\varphi(x)\underset{0}{=}\sqrt{1+\underbrace{1+\frac12x-\frac18x^2+o(x^2)}_{V\underset{x\to0}{\to}1}}$

$=\sqrt{2+\frac12x-\frac18x^2+o(x^2)}$

$=\sqrt2\sqrt{1+\underbrace{\frac14x-\frac1{16}x^2+o(x^2)}_{u}}$

on pose $u=\frac14x-\frac1{16}x^2+o(x^2)$ et $u\underset{x\to0}{\to}0$

alors on peut utiliser

$\sqrt{1+u}=1+\frac12u-\frac18u^2+o(u^2)$

$\varphi(x)=\sqrt2\left(1+\frac12\left(\frac14x-\frac1{16}x^2+o(x^2)\right)-\frac18\left(\frac14x-\frac1{16}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\right)$

car $u\underset{0}{=}\frac14x+o(x)$ donc $u\underset{0}{\sim}\frac14x$

ce qui prouve $o(u^2)\underset{0}{=}o(x^2)$

$$\varphi(x)=\sqrt2\left(1+\frac18x-\frac1{32}x^2+o(x^2)-\frac18\left(\frac1{16}x^2+o(x^2)\right)+o(x^2)\right)$$

car $u^2=\left(\frac14x-\frac1{16}x^2+o(x^2)\right)\left(\frac14x-\frac1{16}x^2+o(x^2)\right)=\frac1{16}x^2+o(x^2)$

$$\boxed{\varphi(x)\underset{x\to0}{=}\sqrt2\left(1+\frac18x-\frac5{128}x^2+o(x^2)\right)}$$

$-\frac1{32}-\frac1{4\times32}=-\frac5{4\cdot32}$

5 Opérations sur les développement limités

5.1 Somme et produit

Proposition 5.1. *Soit f et g deux fonctions réelles admettant en a des développements limités à l'ordre n :*

$$f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n \text{ et } g(x) \underset{a}{=} Q(x-a) + o(x-a)^n$$

où Pet Q sont des pllynômes réels de degré au plus égal à n.
Alors les fonctions $f+g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n qui sont :

$$(f+g)(x) \underset{a}{=} P(x-a) + Q(x-a) + o\left((x-a)^n\right).$$

$$(fg)(x) \underset{a}{=} R(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$$

où R est le polynôme obtenu tronquant le produit PQ au degré n.

Règle

$$o\left((x-a)^n\right) + o\left((x-a)^p\right) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^{\min(n,p)}\right)$$

$$o\left((x-a)^n\right) \cdot o\left((x-a)^p\right) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^{n+p}\right)$$

$$(x-a)^n + o\left((x-a)^p\right) \underset{x\to a}{=} \begin{cases} o\left((x-a)^p\right) & \text{si } n>p \\ (x-a)^n + o(x-a)^p & \text{si } n \leq p \end{cases}$$

$$(x-a)^n o\left((x-a)^p\right) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^{n+p}\right)$$

$$x^3 + o(x^2) \underset{0}{=} o(x^2)$$

$$x^2 + o(x^3) \underset{0}{=} x^2 + o(x^3)$$

Exemple $DL_3(0)$ de $\cos(x) + \ln(1+x)$

on utilise

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} + o(x^4)}_{} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

d'où

$$\cos(x) + \ln(1+x) \underset{0}{=} 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

5.2 Dérivation d'un développement limité

Proposition 5.2. *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I contenant a, admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a, alors ce développement s'obtient en dérivant celui de f :

$$f'(x) \underset{a}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-a)^{k-1} + o(x-a)^{n-1}.$$

prouver autre théorème

ON NE DERIVE PAS UN DL !!

Mais on sait que :

si f est continue en a, alors f a un $DL_0(a)$: $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$

(rappel $1 = (x-a)^0$)

Réciproquement, si f a un $DL_0(a)$: $f(x) \underset{a}{=} b_0 + o(1)$

alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_0$ et si f est définie en a

alors $b_0 = f(a)$ et f est continue en a

CHAP 10

Si f est dérivable en a, alors f a un $DL_1(a)$:

$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$

Réciproquement si f est définie et f a un DL_1 en a

$f(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + o(x-a)$, alors

f est continue en a et $f(a) = b_0$ et $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \underset{x \to a}{=} b_1 + o(1)$

et f est dérivable en a et $f'(a) = b_1$

et c'est tout !

exemple : $f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$

f a un DL_2 en 0 : $f(x) \underset{0}{=} x + o(x^2)$

car $x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$

mais pour $x \neq 0$ $f'(x) = 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right)$

f est dérivable en 0 car elle a un DL_1 en 0 et elle est définie en 0

et $f'(0) = 1$.

mais f' n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en 0

en effet $f'(x) = 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

et $f'(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1 \neq f'(0)$

$\frac{1}{u_n^2} = 2n\pi \iff u_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

et $\lim_{n \to +\infty} u_n \to 0$

et $f'(u_n) = \underline{1} + \underbrace{\underbrace{3u_n^2}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{u_n^2}\right)}_{\text{borné}}}_{\to 0} - 2 \times 1$

donc f a un DL_2 en 0 mais f n'est pas dérivable deux fois en 0

5.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 5.3. *soit f une fonction définie sur I admettant un $Dl_n(a)$ en $a \in I$, telle que $f(I) \subset J$, avec $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$.*

Soit g une fonction définie sur J admettant un DL_n en $b = f(a)$ avec $g(u) \underset{b}{=} Q(u-b) + o(u-b)^n$.

Alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme composé $Q(P(X))$:

$$g \circ f(x) \underset{a}{=} \text{reste de la division de } Q(P(x-a)) \text{ par } (x-a)^{n+1} + o((x-a)^n).$$

Exemple $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$

M2 : on a $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ $\qquad e^{a+b} = e^a e^b$

alors

$$e^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = e^1 e^{\underbrace{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}_{u}}$$

et on sait que $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2!} + o(u^2)$

on pose $u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ $\qquad u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$= \frac{x^4}{4} + 2\left(-\frac{x^2}{2}\right)o(x^3) + (o(x^3))^2$

on a $u^2 = o(x^3)$ et $u^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{4}$ alors $\Longrightarrow$ $o(u^2) \underset{x\to 0}{=} o(x^4)$

on revient à

$$e^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} e\Big(\underbrace{1}_{1} \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{+u} + \underbrace{\frac{o(x^3)}{2}}_{+\frac{u^2}{2}} + \underbrace{o(x^4)}_{+o(u^2)}\Big)$$

$$\boxed{e^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} e\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \qquad DL_3(0)}$$

Pour le DL_4 :

$$e^{\cos(x)} = e\Big(\underbrace{1}_{1} \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{+u} + \underbrace{\frac{x^4}{8} + o(x^4)}_{+\frac{u^2}{2}} + \underbrace{o(x^4)}_{+o(u^2)}\Big)$$

exercice Calculer un DL_4 en 0 de $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$

La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ est définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, +\frac{\pi}{2}\right[$ qui est un voisinage de 0.

On utilise la formule

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \quad \text{avec } 5! = 120$$

on divise par x :

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)$$

on va utiliser $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

avec $u \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)$. On a bien $u \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$u^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{36} + o(x^4) \text{ donc } u^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{36} \text{ donc } o(u^2) = o(x^4)$$

Alors

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cancel{o(x^5)} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) + o(x^4)$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{6} - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)}$$

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{72} = \frac{1}{10\times 12} - \frac{1}{6\times 12} = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{15\times 24}$$

On a un $DL_4(0)$ alors on a le DL_1 en 0 de $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0 \cdot x + o(x)$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 0$ donc on peut prolonger la fonction :

$$g(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors g a un $DL_1(0)$ qui est

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0 \cdot x + o(x)$$

donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

5.4 Développement limité d'un quotient

Proposition 5.4. *Si u est une fonction telle que $\lim_a u = 0$ et si u a un développement limité à l'ordre n en a, alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un $DL_n(a)$.*

Si $u(x) \underset{a}{=} P(x-a)+o(x-a)^n$, alors $\dfrac{1}{1-u(x)} \underset{a}{=} 1+P(x-a)+P^2(x-a)+P^3(x-a)+\cdots+P^n(x-a)+o(x-a)^n$: le développement limité s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $1+P(X)+P^2(X)+\cdots+P^n(X)$.

exemple : $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ en 0

On calcule un $DL_3(0)$:

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \times \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}$$

et on utilise

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2)$$

avec $u = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ donc $u \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

et $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ et $u^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{4} \Longrightarrow o(u^2) = o(x^4)$

et $u^2 = o(x^3)$

alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \underbrace{o(x^3) + o(x^3) + o(x^4)}_{o(x^3)}\right)$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \underbrace{o(x^4) + o(x^4) - \frac{x^5}{12} + o(x^6) + o(x^7)}_{o(x^4)}$$

d'où

$$f(x) = \boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \quad DL_4(0)}$$

exercice Calculer le $DL_2(1)$ de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est C^∞ sur $]0,+\infty[$ alors elle a un $DL_2(1)$

On pose $x = 1 + u$ avec $x \to 1 \iff u \to 0$

on sait que $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

et (astuce) $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}}$ le quotient a disparu !

$$\underset{x \to 1}{=} 1 - \frac{1}{2}u + o(u)$$

Alors

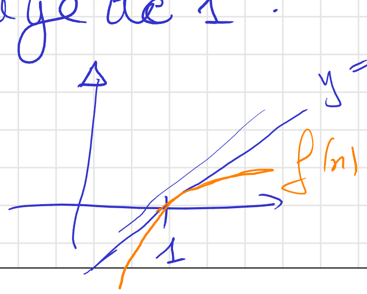
$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x \to 1}{=} \left(u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)\left(1 - \frac{1}{2}u + o(u)\right)$$

$$= u + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)u^2 + o(u^2)$$

Soit

$$\underbrace{\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}}_{f(x)} \underset{x \to 1}{=} \underbrace{0 + (x-1)}_{\text{Tgte}} \underbrace{- (x-1)^2}_{\text{position}} + o((x-1)^2) \qquad DL_2(1)$$

alors la tangente à la courbe de $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ en 1 est $y = x - 1$ et la courbe est au-dessous de sa tangente car $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - (x-1) = -(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ est négatif au voisinage de 1.



6 Formulaire

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1+x+x^2+\cdots+x^n+\circ(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}x^n+\circ(x^n)$$

$$\arctan x \underset{0}{=} x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^p\tfrac{1}{2p+1}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})$$

$$e^x \underset{0}{=} 1+\tfrac{1}{1!}x+\tfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\tfrac{1}{n!}x^n+\circ(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{0}{=} 1+\tfrac{1}{2!}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4+\cdots+\tfrac{1}{(2p)!}x^{2p}+\circ(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{0}{=} x+\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5+\cdots+\tfrac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})$$

$$\cos x \underset{0}{=} 1-\tfrac{1}{2!}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^p\tfrac{1}{(2p)!}x^{2p}+\circ(x^{2p})$$

$$\sin x \underset{0}{=} x-\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^p\tfrac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})$$

$$\boxed{\tan x \underset{0}{=} x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{2}{15}x^5+\tfrac{17}{315}x^7+\circ(x^8)}$$

exercice. Calculer le DL de tan en 0 en utilisant

eq diff

$\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$. tan est C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[= I$.

On sait que $\tan(x) \underset{0}{=} x + o(x)$

alors $\tan^2(x) \underset{0}{=} (x+o(x))(x+o(x)) = x^2 + o(x^2)$

d'où $\tan'(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + o(x^2)$ on intègre :

$\tan(x) \underset{0}{=} \underbrace{\tan(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

on recommence $\tan^2(x) \underset{0}{=} \left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)$

$\tan^2(x) \underset{0}{=} x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ d'où $\tan'(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

on intègre $\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

en recommençant on trouve $\tan(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$

7 Applications

7.1 Étude de limites

Proposition 7.1. *Si une fonction f a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f a une limite en a qui vaut a_0.*

exemple $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{e^{x^2} - 1}$ c'est une FI

on calcule un équivalent de $\sqrt{\cos(x)} - 1$ et $e^{x^2} - 1$

$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sqrt{\cos(x)} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}}$ et $(1+u)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + o(x^2)$ car $u \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

alors

$\sqrt{\cos(x)} - 1 \underset{0}{=} -\frac{1}{4}x^2 + o(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{4}x^2$

et

$e^{x^2} - 1 \underset{0}{=} \cancel{-1} + \cancel{1} + x^2 + o(x^2)$ car $e^u \underset{0}{=} 1 + u + o(u)$

alors $e^{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} x^2$

Par quotient d'équivalents $\dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{e^{x^2} - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{1}{4}x^2}{x^2} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{4}$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{e^{x^2} - 1} = -\frac{1}{4}$

Exemple $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$? DL en $+\infty$ donc $u = \frac{1}{n}$

On a $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ car $\ln(1+V) \underset{0}{=} V + o(V)$ et $V = \frac{2}{n}$

$n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \underset{+\infty}{=} 2 + o(1)$ alors

$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^{2 + o(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^2$ car exp est continue en 2.

7.2 Prolongement par continuité

Proposition 7.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.

exemple $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$ en 0

on calcule un DL en 0 de f :

$f(x) = \dfrac{1}{x}\left(1 - \exp(-x)\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{x}\left(1 - \left(1 - x + \dfrac{(-x)^2}{2} + o(x^2)\right)\right)$

$= \dfrac{1}{x}\left(x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$

On a un DL$_1$ en 0 de f $\quad f(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$

Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. On peut la prolonger en 0 :

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad \tilde{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$

7.3 Dérivabilité d'un prolongement par continuité

Proposition 7.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $\tilde{f}(a) = a_0$ et le prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = a_1$.

Exemple $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{e^{-x}}{x}$

On a prolongé en $\tilde{f}$ et $\tilde{f}(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$

alors $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = -\dfrac{1}{2}$

Bonus : $\tilde{f}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\tilde{f}'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\tilde{f}'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{e^{-x}}{x^2} + \dfrac{e^{-x}}{x}$

on calcule un DL en 0 de $\tilde{f}'$ avec $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o(u^3)$

$$\tilde{f}'(x) \underset{0}{=} \frac{\cancel{-1} + \cancel{1} - x + \frac{(-x)^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} + x\left(\frac{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2}\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{x^2}\left(\cancel{-x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \cancel{x} - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$\tilde{f}'(x) \underset{0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + o(x) \quad DL_1(0) \text{ de } \tilde{f}'$$

Alors $\lim\limits_{x \to 0} \tilde{f}'(x) = -\dfrac{1}{2} = \tilde{f}'(0)$

donc $\tilde{f}'$ est continue en 0 et $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ en 0.

7.4 Position relative de la courbe et de la tangente

Proposition 7.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x-a)}_{\text{eq de la tangente}} + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $p \geqslant 2$ et $a_p \neq 0$, alors la droite $y = a_0 + a_1(x-a)$ est tangente à la courbe représentative de f en a.
De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point a est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$: au-dessus si $a_p(x-a)^p \geqslant 0$.

exemple $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ étude de la courbe au voisinage de 0

On calcule un $DL_3(0)$

$$e^x + 1 \underset{0}{=} 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 2\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)$$

$$\frac{1}{e^x+1} \underset{0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+u} = \frac{1}{2}\left(1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)\right)$$

avec $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$.

et $u^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{2x^3}{8} + o(x^3)$ et $u^3 = \dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$

et $o(u^3) = o(x^3)$ d'où

$\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{8}$

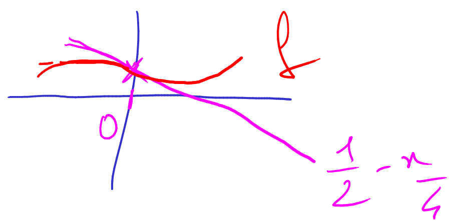
$$\frac{1}{e^x+1} \underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \cancel{\frac{x^2}{4}} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) + \cancel{\frac{x^2}{4}} + \frac{x^3}{4} + o(x^3) - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{e^x+1} \underset{0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \underbrace{\frac{x^3}{48}}_{\text{/ !!}} + o(x^3)}$$

La courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ en 0 a pour tangente $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}$

et la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $\dfrac{x^3}{48}$: au dessus pour $x > 0$ et en dessous pour $x < 0$



7.5 Étude d'un extremum

Proposition 7.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$ avec $a_2 \neq 0$, alors la fonction f a un extremum local en a : maximum local si $a_2 < 0$ et minimum local si $a_2 > 0$.

exemple $\cos(x)$ en 0

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc $\cos(x) - 1 \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

On a $-\frac{x^2}{2} + o(x^2) < 0$ au voisinage de 0

donc $\cos(x) - 1 < 0$ au voisinage de 0

alors $\cos$ a un maximum local en 0 qui vaut 1

7.6 Asymptotes

Proposition 7.6. *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).*

Si il existe un réel k tel que $\quad f(x) - kx \underset{+\infty \text{ ou } -\infty}{=} a_0 + \dfrac{a_p}{x^p} + o\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$ *avec $a_p \neq 0$,*

alors la droite $y = kx + a_0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$). De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{a_p}{x^p}$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

Exemple $\quad f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$

on calcule un développement en $+\infty$ en posant $u = \frac{1}{x}$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{u}\right) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{u^2} \ln(1+u) \underset{0}{=} \frac{1}{u^2}\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)\right)$$

$$\underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + \frac{u}{3} + o(u)$$

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{est un DA}}$$

$$f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

donc $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f

et comme $\frac{1}{3x} > 0$ au voisinage de $+\infty$

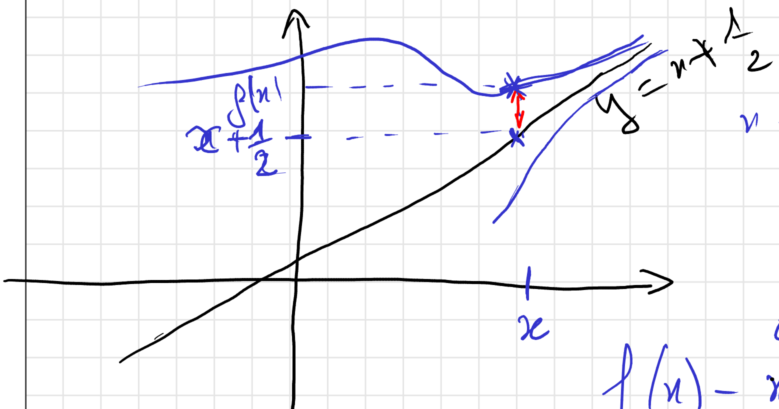
la courbe de f est au-dessus de $y = x - \frac{1}{2}$

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } \varepsilon_2 \to 0$$

utilisation de ce développement asymptotique :

On a pour x au voisinage de $+\infty$

$$f(x) - x - \frac{1}{2} = \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)$$



on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$

donc la droite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f

et

$$f(x) - x - \frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{8x}$$

avec $\frac{3}{8x} > 0$ au voisinage de $+\infty$

alors $f(x) - x - \frac{1}{2} > 0$ au voisinage de $+\infty$

la courbe est au-dessus de l'asymptote

fin de l'exercice : déterminer un DL en $-\infty$ de $f(x) - x$