

Chapitre 16 - Analyse asymptotique

1 Comparaison des suites

1.1 Relations de comparaison

Uniquement pour les suites réelles : on se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels. On dit que :

- (u_n) est dominée par (v_n) si à partir du rang N_0 , $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$. $m \rightarrow +\infty$
- (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors $u_n = o(v_n)$.
- (u_n) est équivalente à (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors $u_n \sim v_n$.

exemple $u_m = m + m^2$, $v_m = 2m^2 + 1$, $w_m = \sin(m)$, $x_m = -m^2$

On a

$$\underset{m \rightarrow +\infty}{\text{car}} \quad \frac{u_m}{v_m} = \frac{m + m^2}{2m^2 + 1} \text{ et } 0 \leq \frac{u_m}{v_m} \leq 1$$

$$\text{car } \forall m \quad m \geq 1 \quad M \leq m^2$$

$$\underset{m \rightarrow +\infty}{\text{car}} \quad \frac{w_m}{x_m} = \frac{\sin(m)}{-m^2} \xrightarrow{} 0$$

$$\lfloor m \rfloor \sim m \quad \text{car} \quad \frac{\lfloor m \rfloor}{m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 1 \quad \lfloor m \rfloor \leq m < \lfloor m \rfloor + 1$$

$$\underset{m \rightarrow +\infty}{\text{On a }} m = o(m^2) \text{ et } m^2 = o(m^3) \quad \text{alors} \quad m + m^2 = o(m^3)$$

$$\text{car} \quad \frac{m + m^2}{m^3} = \frac{m}{m^3} + \frac{m^2}{m^3} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{On encore } u_m = o(m^3) \quad v_m = o(m^3) \quad \text{alors} \quad 2u_m - v_m = o(m^3)$$

$$\text{car} \quad \frac{2u_m - v_m}{m^3} = \frac{2u_m}{m^3} - \frac{v_m}{m^3} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$$

Théorème 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels.

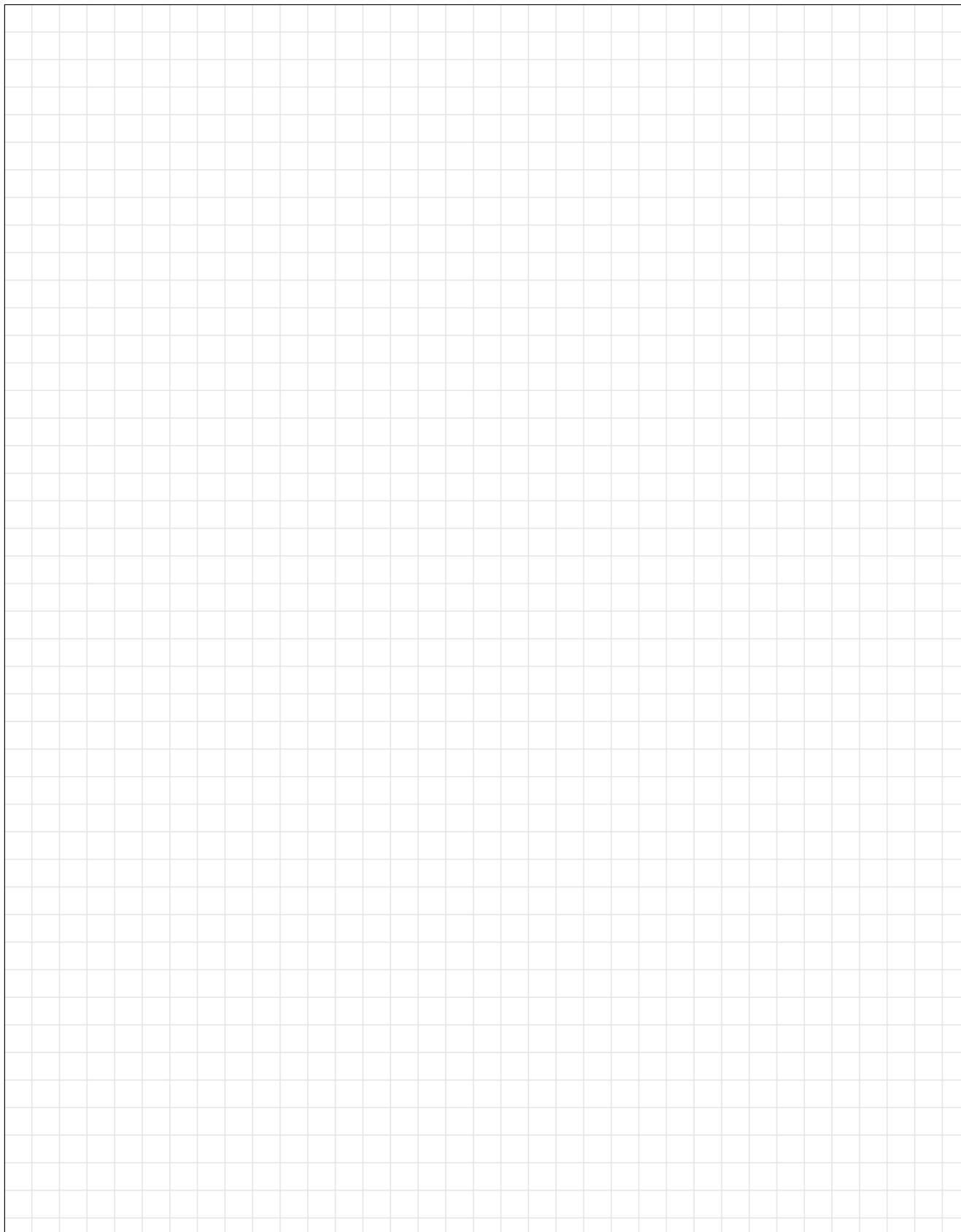
(u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 telle que $u_n = v_n \cdot \varepsilon_n$.

petit " ε "

la notation $u_n = o(v_n)$ est équivalente à

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$u_n = \varepsilon_n \cdot v_n \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$



1.2 Propriétés des relations de comparaison

Proposition 1.2. Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites réelles.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$. *Symétrie*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$. *Transitivité*

Si u_n et v_n ne s'annulent pas, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff \underline{u_n - v_n = o(v_n)}$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

• $U_m \sim V_m \iff (V_m \neq 0) \text{ et } \frac{U_m}{V_m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 1$

$\frac{V_m}{U_m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 1 \iff V_m \sim U_m$

• $\frac{U_m}{W_m} = \frac{\frac{U_m}{V_m} \cdot V_m}{\frac{W_m}{V_m} \cdot V_m} = \frac{U_m}{V_m} \times \frac{V_m}{W_m}$

• Si $U_m \sim V_m$, alors $\frac{U_m - V_m}{V_m} = \frac{U_m}{V_m} - 1$ comme $U_m \sim V_m$
 $\frac{U_m}{V_m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 1$
 alors $\frac{U_m - V_m}{V_m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $U_m - V_m = o(V_m)$

Si $U_m - V_m = o(V_m)$ alors $\frac{U_m}{V_m} = \frac{U_m - V_m + V_m}{V_m} = \frac{U_m - V_m}{V_m} + 1$
 donc $\frac{U_m}{V_m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 1$ soit $U_m \sim V_m$

• Si $\frac{U_m}{V_m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 1$ alors $\left(\frac{U_m}{V_m}\right)$ est une suite convergente
 donc elle est bornée : $U_m = O(V_m)$

Exemple : $U_m = m^2 - \sqrt{m}$ $V_m = m^2 + \cos(m)$
 $U_m - V_m = \sqrt{m} - \cos(m) = O(m^2 - \cos(m))$ donc $U_m \sim V_m$

Exemple : Pq si $U_m = o(V_m)$ alors $U_m = O(V_m)$
 Si $U_m = o(V_m)$ alors $\frac{U_m}{V_m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $\left(\frac{U_m}{V_m}\right)$ est une suite bornée donc $U_m = O(V_m)$

1.3 Suites de référence

Remarque $e^{ym} = (e^y)^m$ suite géométrique

Proposition 1.3. Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, on a

$$\ln^\beta(n) = o(n^\alpha) \text{ et } n^\alpha = o(e^{\gamma n}) \quad \text{et pour } q > 1, \text{ on a } n^\alpha = o(q^n).$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln^\beta(m)}{m^\alpha} = 0 \quad \text{pour } \alpha > 0, \beta > 0 \quad \text{d'où } \ln^\beta(m) = o(m^\alpha)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^\alpha}{(e^{\gamma m})^\beta} = 0 \quad \text{pour } \alpha > 0, \gamma > 0 \quad \text{d'où } m^\alpha = o(e^{\gamma m})$$

On a également : $b^m = o(m!)$ $m! = o(m^m)$

$$m^\alpha = o(b^m) \quad \text{pour } b \geq 1$$

Lemme : Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = A \quad \text{avec } 0 \leq A < 1 \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Sur $B \in]A, 1[$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow A$, à partir d'un certain rang N $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq B \iff u_{n+1} \leq B \cdot u_n$

On montre par récurrence

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq B^n \cdot \frac{u_N}{B^N}$$

C'est vrai pour $n = N$: $u_N = B^N \cdot \frac{u_N}{B^N}$. Si c'est vrai pour un rang $n \geq N$ alors $u_{n+1} \leq B \cdot u_n \leq B \cdot B^n \cdot \frac{u_N}{B^N} = B^{n+1} \cdot \frac{u_N}{B^N}$:

C'est héréditaire éliminable. Donc

$$\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{u_N}{B^N}\right) \cdot B^n$$

Donc par l'théorème d'encaissement on reconnaît une suite géométrique qui tend vers 0 de raison $< B < 1$.

Exemples de référence :

* $u_m = \frac{m^\alpha}{a^m}$ avec $\alpha > 0, a > 1$. En utilisant le lemme, on a $u_m \rightarrow 0$ donc

$$\frac{m^\alpha}{m^\alpha} = o(a^m) \quad \boxed{\text{Utilisable}}$$

$$\frac{(m+1)^\alpha}{a^{m+1}}$$

Preuve : $\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{(m+1)^\alpha}{m^\alpha} \cdot \frac{a^m}{a^{m+1}} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{a} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 1 \cdot \frac{1}{a}$

Car $u \mapsto u^\alpha$ est continue en 1 : $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^\alpha = 1$

$c > 0 < \frac{1}{a} < 1$ donc d'après le lemme $u_n \rightarrow 0$.

* $u_n = \frac{b^n}{n!}$ d'après le lemme $u_n \rightarrow 0$ donc $b^n = o(n!)$ M
utilisé

* $u_n = \frac{n!}{n^n}$ d'après le lemme $u_n \rightarrow 0$ donc $n! = o(n^n)$ utilisé

Preuve.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{n+1}$$

on calcule : $= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$

~~il est connu que :~~

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \text{ car } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

on sait que $\frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} 1$: c'est une limite usuelle.

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \frac{1}{e}$ avec $0 < \frac{1}{e} < 1$ donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Culte laupine :

formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

1.4 Opérations sur les équivalents

on peut multiplier et diviser
et c'est TOUT!

Proposition 1.4. Soit $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ des suites réelles.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ alors $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n x_n$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ et si w_n et x_n ne s'annulent pas alors $\frac{u_n}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{v_n}{x_n}$.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si p est un entier $p \in \mathbb{N}$ alors $u_n^p \underset{+\infty}{\sim} v_n^p$.

Au n'importe pas les équivalents

exemple : $U_m = m^2 + m$ on a $U_m \underset{+\infty}{\sim} m^2$

$V_m = -m^2 + 1$ $V_m \underset{+\infty}{\sim} -m^2$

$U_m + V_m = m + 1$ et $U_m + V_m \underset{+\infty}{\not\sim} m$

exemple $U_m = \frac{3m^2 - 8m + 2\ln(m)}{2m - \cos(m)}$ $U_m \underset{+\infty}{\sim} ?$

On a $3m^2 - 8m + 2\ln(m) \underset{+\infty}{\sim} 3m^2$ et $2m - \cos(m) \underset{+\infty}{\sim} 2m$

d'où par quotient d'équivalents $U_m \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2}m$

note : $\frac{3m^2 - 8m + 2\ln(m)}{3m^2} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 1$ car $\frac{\ln(m)}{m^2} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$ par CC

Équivalents usuels :

$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ car $\frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} 1$

Exemple : $U_m = \left(e - \cos\left(\frac{1}{m}\right)\right)^{m^2}$ Équivalent de U_m ?

on a

$$U_m = e^{m^2 \ln\left(e - \cos\left(\frac{1}{m}\right)\right)} = e^{m^2 \ln\left(1 + \left(1 - \cos\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right)}$$

et $1 - \cos\left(\frac{1}{m}\right) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$ alors $\ln\left(1 + \left(1 - \cos\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{m}\right)\right)$

on a $1 - \cos(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ car $1 - \cos(u) = 2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$ et $\frac{\sin(v)}{v} \xrightarrow[v \rightarrow 0]{} 1$

$1 - \cos\left(\frac{1}{m}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{1}{2m}\right) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \left(\frac{1}{2m}\right)^2$ car $\sin\left(\frac{1}{2m}\right) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2m}$ avec $v = \frac{1}{2m}$

$$2 \times \sin\left(\frac{1}{2m}\right) \times \sin\left(\frac{1}{2m}\right) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \times \frac{1}{2m} \times \frac{1}{2m} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2m^2}$$

on a $\ln(2 - \cos(\frac{1}{m})) \underset{+ \infty}{\sim} 1 - \cos(\frac{1}{m}) \underset{+ \infty}{\sim} \frac{1}{2m^2}$ j'ai transcrit finit

par produit $m^2 \ln(2 - \cos(\frac{1}{m})) \underset{+ \infty}{\sim} m^2 + \frac{1}{2m^2} \underset{+ \infty}{\sim} \frac{1}{2}$

ce qui veut dire $m^2 \ln(2 - \cos(\frac{1}{m})) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$

La fonction exponentielle est continue en $\frac{1}{2}$ alors

$$e^{m^2 \ln(2 - \cos(\frac{1}{m}))} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} e^{\frac{1}{2}}$$

ou bien $\boxed{U_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} \sqrt{e}} \Rightarrow U_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{e}$

Exemple

$$U_m = m + 1 \text{ et } V_m = m. \text{ On a } U_m \sim V_m$$

mais $e^{U_m} = e^{m+1}$ et $e^{V_m} = e^m$

donc $\frac{e^{U_m}}{e^{V_m}} \rightarrow e$ et $e^{U_m} \not\sim e^{V_m}$

on ne pas trouver un équivalent par une fonction

mais on a $\ln(U_m) = \ln(1+m)$ $\ln(V_m) = \ln(m)$

on calcule $\frac{\ln(U_m)}{\ln(V_m)} = \frac{\ln(m+1)}{\ln(m)} = \frac{\ln(m(1+\frac{1}{m}))}{\ln(m)}$) M

Propriété fonctionnelle de \ln

$$\frac{\ln(U_m)}{\ln(V_m)} = \frac{\ln(m) + \ln(1+\frac{1}{m})}{\ln(m)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{m})}{\ln(m)} \rightarrow 1$$

alors $\ln(U_m) \underset{+ \infty}{\sim} \ln(V_m)$

Exercice Déterminer un équivalent de $U_m = \left(\frac{\ln(m+1)}{\ln(m)}\right)^m - 1$

1.5 Relations de comparaison et limites

Théorème 1.5. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \underset{+∞}{\sim} v_n$.

Alors, pour tout $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a $u_n \underset{+∞}{\longrightarrow} l \iff v_n \underset{+∞}{\longrightarrow} l$

En particulier, $\boxed{(u_n)}$ est convergente si et seulement si (v_n) est convergente.

et dans ce cas elles ont la même limite.

Proposition 1.6. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) converge, alors (u_n) converge vers 0.
- Si $u_n = o(v_n)$ et (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

- * en particulier si $u_m = o(v_m)$ (1) alors $u_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$
- * Si $u_m = o(v_m)$ et $v_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ avec (v_m) qui ne s'annule pas alors $\frac{u_m}{v_m} \underset{m \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_m = \frac{u_m}{v_m} \times v_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \times l = 0$
- * $u_m = -m^2 \underset{m \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ mais $u_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\not\rightarrow} 0$ (e^m)

Exercice: On définit une suite de réels (x_m) par pour $m \in \mathbb{N}^*$, x_m est l'unique solution de $x^m + mx - 1 = 0$ (F_m) dans $\mathbb{I}_{0,1}$. Trouver un équivalent de x_m .

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_m : x \mapsto x^m + mx - 1$ est continue sur \mathbb{R}_+ et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Alors, elle est injective de

$\mathbb{I}_{0,1}$ dans $f_m(\mathbb{I}_{0,1}) = [f_m(0), f_m(1)] = [-1, m]$

Alors, elle s'annule en un unique $x_m \in \mathbb{I}_{0,1}$.

On a $f_m \in \mathbb{C}^1$, $0 \leq x_m \leq 1$ car la fonction $u \mapsto u^m$ est croissante sur \mathbb{R}_+

$$\text{et } x_m^m + mx_m - 1 = 0 \iff x_m^m = \frac{1 - mx_m}{m} \underset{m \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors, par définition de la limite, en posant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe

un rang N tel que $\forall n \geq N$ $|x_m - 0| \leq \varepsilon \Rightarrow 0 < x_m < \frac{1}{2}$

cela $\forall m \in \mathbb{N} \exists (x_m)^m \leq \frac{1}{2^m}$ donc par l'hypothèse d'encaissement

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m^m = 0 \text{ alors } mx_m = 1 - x_m^m \underset{m \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \Rightarrow \boxed{x_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{m}}$$

2 Relations de comparaison appliquées aux fonctions

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ élément ou extrémité de I .

2.1 Fonction dominée par une autre

Définition 2.1. Soit f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a . On note $f = O(g)$

exemple $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = O(x^2)$ car $\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

et $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est borné sur \mathbb{R}^*

On a aussi $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = O(x^2)$

2.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2.2. Soit f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en a .

On note $f = o(g)$ ou bien $f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

exemple : $\ln(1+n) = o(n)$ car $\frac{\ln(1+n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

et $\ln(1+n) = o(n)$ car $\frac{\ln(1+n)}{n} \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

A $x^3 = o(x^5)$ et $x^5 = o(x^3)$

2.3 Fonctions équivalentes

Définition 2.3. Soit f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a . On note $f \underset{a}{\sim} g$

Proposition 2.1. Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

Si $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a)$. *par définition de $f'(a)$*

Proposition 2.2. Soit f et g définies sur I , ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$. On a :

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{\sim} o(g).$$

exemple $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ *limite nulle* $1 - \cos(u) \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ *équivalente*

$$e^u \underset{+\infty}{\sim} e^{u+\frac{1}{n}}$$

exemple

$$\ln(1+n) \underset{-1}{\sim} ?$$

$$\ln(1+n) \underset{0}{\sim} xc$$

$$\text{car } \frac{\ln(1+n)}{n} \underset{n \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$$

$$\ln(1+n) \underset{1}{\sim} \ln(2)$$

$$\frac{\ln(1+n)}{\ln(2)} \underset{n \rightarrow 2}{\rightarrow} 1$$

$$\ln(1+n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

$$\frac{\ln(1+n)}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$$

vois. 1 évident

$$\ln(1+n) \underset{1}{\sim} \ln(2n)$$

$$\text{car } \frac{\ln(1+n)}{\ln(2n)} \underset{n \rightarrow 1}{\rightarrow} 1$$

$$\ln(1+n) \underset{1}{\sim} n^2 \ln(2n)$$

$$o(g) = o(-g)$$

Exemple
prop 2.1

$$\sin(u) \underset{0}{\sim} u, \quad e^u - 1 \underset{0}{\sim} u, \quad \tan(u) \underset{0}{\sim} u$$

exercice :

$$\frac{\ln(1+n) - \ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \underset{?}{\sim} ?$$

on a

$$\frac{\ln(1+n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} = o\left(\frac{\ln(n)}{-g}\right) \quad n \rightarrow 0$$

alors
(prop 2.2)

$$\frac{\ln(1+n) - \ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \underset{g}{\sim} -\frac{\ln(n)}{g}$$

$$\frac{\ln(1+n) - \ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \underset{0}{\sim} 1$$

alors

$$\frac{\ln(1+n) - \ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \underset{0}{\sim} -\frac{\ln(n)}{g}$$

$$\frac{\ln(1+n) - \ln(n)}{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \underset{1}{\sim} \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}-1}$$

Pour démontrer le cas a :
 $f(n) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(n-a)$

2.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 2.3. Si $f, g, h, f_1, g_1, f_2, g_2$ sont des fonctions définies au voisinage de a , on a :

symétric • $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$

$$\frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \Leftrightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

transitivité • $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$

produit • $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$

quotient • $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$

pouvoirs entiers

$$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f^2 \underset{a}{\sim} g^2$$

$$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f^n \underset{a}{\sim} g^n \quad n \in \mathbb{N}$$

2.5 Utilisation des équivalents

Proposition 2.4. Étant donnés deux fonctions f et g équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.

Si g a une limite finie ou infinie en a alors f aussi et $\lim_{a} f = \lim_{a} g$.

Proposition 2.5. Étant donnés deux fonctions f et g définies sur I et équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.

Si g est positive sur I alors f est positive au voisinage de a .

Si g ne s'annule pas sur I , alors f ne s'annule pas au voisinage de a .

Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, alors la restriction de f à $I \setminus \{a\}$ ne s'annule pas au voisinage de a .

exemple : $\ln(x) - \ln(2) \underset{2}{\sim} \frac{x-2}{2}$
 en utilisant $f(n) = f(a) \underset{n \rightarrow a}{\sim} f'(a) \cdot (n-a)$

(n°4) et $y = f(a) + f'(a)(n-a)$

exemple : $f(n) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
 au voisinage de $a = 2$

$f(x) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \sqrt{3} - 1$

car $\frac{f(x)}{\sqrt{3}-1} \xrightarrow[n \rightarrow 2]{} 1$

$f(x) - \sqrt{3} + 1 \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)(x-2)$

$f'(x) - f(2) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} f'(2)(x-2)$

et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

au voisinage de $+\infty = a$

$f(n) = \frac{x+1 - (n-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$f(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{n} + \sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\frac{f(n)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

$\frac{f(n)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x+1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{\frac{n-1}{\sqrt{n}}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x+1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{\frac{n-1}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow[\sqrt{n} + \sqrt{n}]{} 1 = 1$

3 Développements limités

3.1 Définition

Définition 3.1. On dit qu'une fonction f de I dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ élément ou extrémité de I si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(a+h) = P(h) + o(h^n)$ au voisinage de 0 (pour h).

C'est à dire

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_{n-1} h^{n-1} + a_n h^n + o(h^n) \quad h = x - a$$

ou
$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)}$$

On le note $DL_n(a)$ de f .

$$\frac{f(x) - P(x-a)}{(x-a)^n} \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0 \quad \Leftrightarrow \text{devant } (x-a)^n \text{ au voisinage de } a$$

exemple: $f(x) = \underline{1+x^2} + \underline{x^3 \sin(x)}$

on a $\frac{x^3 \sin(n)}{x^2} = x \sin(n) \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0$ alors $x^3 \sin(n) = o(n^2)$

On a donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = 1 + x^2 + o(n^2)}$

ce qui prouve que f a un DL à l'ordre 2 en $a=0$

On a également $f(n) = 1 + 0 \cdot x + (x^2 + x^3 \sin(n))$

avec $x^2 + x^3 \sin(n) \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0$ alors f a aussi un DL₁ en 0

on peut écrire

$$f(n) = 1 + 0 \cdot x + x E_1(n) \text{ avec } E_1 \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0$$

et aussi $f(n) = 1 + o(1) = 1 + 1 \cdot E_2(n) \text{ avec } E_2 \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0$

qui est un DL à l'ordre 0 en 0.

On sait que comme \sin est dérivable en 0, \sin a un DL₁ en 0

$$\sin(x) = \sin(0) + \sin'(0)(x-0) + x E_3(n) \text{ avec } E_3 \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0$$

$$\sin(n) = x + o(n) = n + x E_3(n)$$

on calcule alors

$$f(n) = 1 + x^2 + x^3 (x + o(n))$$

$$\boxed{f(n) = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)} \quad \text{car } x E_3(n) \cdot x^3 = x^4 E_3(n)$$

$$x^3 o(n) = o(x^4)$$

Donc f a un DL₄(0) (DL d'ordre 4 en 0).

$$\overrightarrow{f}(x) = 1 + x^2 + x^3 \sin(x)$$

Si on veut calculer un DL en $a = 1$. on cherche
les b_0, b_1, \dots

$$f(x) = \underset{x \rightarrow 1}{b_0} + b_1(x-1) + \dots + b_m(x-1)^m + o((x-1)^m)$$

On change de variables on pose $x = 1+h \Leftrightarrow h = x-1$
 $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\text{Alors } f(1+h) = 1 + (1+h)^2 + (1+h)^3 \sin(1+h)$$

$$= 1 + 1 + 2h + h^2 + (1+3h+3h^2+h^3) \sin(1+h)$$

$$f(1+h) = \underbrace{2 + 2h + h^2}_{\text{poly} = \text{DL}} + \underbrace{(1+3h+3h^2+h^3)(\sin(1) \cos(h)}_{\text{poly} = \text{DL}} + \underbrace{\cos(1) \sin(h)}$$

on utilise $\sin(h) = \underset{h \rightarrow 0}{h - \frac{h^3}{6}} + o(h^3)$ d'après une formule

du cours.
et $\cos(h) = \underset{h \rightarrow 0}{1 - \frac{h^2}{2}} + o(h^2)$ d'après la formule de

Taylor

$$f(1+h) = 2 + 2h + h^2 + \underbrace{(1+3h+3h^2+h^3)(\sin(1))}_{1 - \sin(1)\frac{h^2}{2} + o(h^2)} + \underbrace{\cos(1)h - \cos(1)\frac{h^3}{6} + o(h^3)}$$

$$= 2 + \sin(1) + (2+3\sin(1)+\cos(1))h + \left(1+3\cos(1)+3\sin(1)-\frac{\sin(1)}{2}\right)h^2$$

$$+ \underbrace{\left(\sin(1)h^3 + 3\cos(1)h^3 + \frac{3\sin(1)}{2}h^4 + o(h^2) + o(h^3) + \dots\right)}_{o(h^2)}$$

Tous ces termes sont négligeables devant h^2
quand $h \rightarrow 0$.

$$f(1+h) = \underset{h \rightarrow 0}{2 + \sin(1)} + (2+3\sin(1)+\cos(1))h + \left(1+3\cos(1)+\frac{\sin(1)}{2}\right)h^2 + o(h^2)$$

c'est un DL à l'ordre 2 en $\underline{1}$ de f

$$\begin{aligned} f(x) &= \underset{x \rightarrow 1}{2 + \sin(1)} + (2+3\sin(1)+\cos(1))(x-1) \\ &\quad + \left(1+3\cos(1)+\frac{\sin(1)}{2}\right)(x-1)^2 \\ &\quad + o((x-1)^2) \end{aligned}$$

3.2 Exemple fondamental

Proposition 3.1. La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ admet des développements limités à l'ordre n , pour tout entier n , au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^n + o(u^n) \quad u \rightarrow 0$$

On utilise la formule pour $u \neq 1$

$$1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \dots + u^m = \frac{1 - u^{m+1}}{1 - u} = \frac{1}{1 - u} - \frac{u^{m+1}}{1 - u}$$

alors

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^m + \frac{u^{m+1}}{1-u} \quad \text{pour } u \neq 1$$

on calcule $\frac{u^{m+1}}{1-u}$

$$\frac{\frac{u^{m+1}}{1-u}}{u^m} = \frac{u}{1-u} \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{donc } \frac{u^{m+1}}{1-u} \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} 0 \quad (u^m)$$

alors on a le Dlm (0) de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$

♡ | $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^m + o(u^m)$

Illicet : on pose $x = -u$, on obtient

~~$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^m x^m + o(x^m)$$~~

car si $f(u) = o(u^m)$ alors $\frac{f(u)}{u^m} \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} 0 \Rightarrow \frac{f(-x)}{(-x)^m} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0 \Rightarrow \frac{f(-x)}{x^m} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0 \Rightarrow f(-x) = o(x^m)$

Encore mieux : on ait introduit les équivalents : au voisinage de 0

♡ $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^m \frac{x^{m+1}}{m+1} + o(x^{m+1})$
 (voir th 4.1)

autre exemple $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^m + o(u^m)$

et on pose $u = -x^2$ alors $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^m x^{2m} + o(x^{2m})$
 qui donne par intégration :

♡ $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \operatorname{Arctan}(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+1})$

exercice :

Calculer un DL₂(0) de $g(x) = \frac{1}{1-x} + \sin(x)$

on a $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \underline{o(x^2)}$ DL₂ de $\frac{1}{1-x}$

$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ DL₃(0)

$\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \underline{o(x^2)}$ DL₂(0)

on somme :

$$\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + x^2 + o(x^2)}$$

on peut aussi écrire $\sin(x) = x + o(x)$ DL₁(0)
qui donne en sommant

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + \underline{o(x) + x^2 + o(x^2)}$$

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + o(x) \quad \text{DL}_1(0) \text{ deg } g$$

$\circlearrowleft(x)$ $o(x^2)$ $o(x^3)$...

Calculons un DL₃(0) de $h(x) = \frac{\sin(x)}{1-x}$

On écrit $h(x) = \sin(x) \times \frac{1}{1-x}$
on calcule le produit

$$h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left(1 + x + x^2 + o(x^2) \right)$$

$$h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^2 + x^3 - \frac{x^3}{6} + \underline{o(x^3) + o(x^3) + o(x^5) + ...}$$

on simplifie en

$$\text{DL}_3(0) \quad h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

de $\frac{\sin(x)}{1-x}$

$$h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left(1 + x + o(x) \right) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$

$$\Theta(n^2) \underset{n \rightarrow \infty}{=} x + n^2 + \Theta(x^2)$$

3.3 Unicité du développement limité

Proposition 3.2. Si f est une fonction admettant deux développements limités à l'ordre n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors ces développements sont égaux.

Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors $\forall k \in [[0, n]], a_k = b_k$.

On appellera le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$ la partie régulière du DL de f à l'ordre n en a .

Corollaire 3.3. Si f admet un développement limité à l'ordre n en a , alors pour tout entier $p \leq n$, f admet un développement limité à l'ordre p obtenu en tronquant le développement d'ordre n .

Corollaire 3.4. Soit f admettant un développement limité en 0 de partie régulière P . Si f est paire, alors P est pair. Si f est impaire, alors P est impair.

Exemple $f(x) = \frac{1}{1+x}$ on veut un DL_3 en $a=4$

Méthode n° 1 : on utilise la formule de Taylor-Young.

Méthode n° 2 : on change de variables $h = x-4 \Leftrightarrow u = 4+h$

$$g(h) = f(4+h) = \frac{1}{5+h} = \frac{1}{5} \frac{1}{1+\frac{h}{5}} = \frac{1}{5} (1-u + u^2 - u^3 + o(u^3))$$

on voit que $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ (cours)

et on pose $u = \frac{h}{5}$ alors

$$f(4+h) = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{h}{5} + \frac{h^2}{25} - \frac{h^3}{125} + o(h^3) \right)$$

on a le $DL_3(4)$ de f

$$\frac{1}{1+x} = f(x) \underset{x \rightarrow 4}{=} \frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-4) + \frac{1}{125}(x-4)^2 - \frac{1}{625}(x-4)^3 + o((x-4)^3)$$

Remarque $\lim_{x \rightarrow 4} E_3(x-4) = \lim_{u \rightarrow 0} E_3(u) = 0$

Remarque : on a également le DL_3 en 0 de $g(h) = f(4+h)$

$$\frac{1}{5+h} = g(h) = \frac{1}{5} - \frac{1}{25}h + \frac{1}{125}h^2 - \frac{1}{625}h^3 + o(h^3)$$

$P(h)$ partie régulière

Méthode n°1 Utilisation de la formule de Taylor-Lagrange:

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ est de classe C^3 sur $]-1, +\infty[= I$.
Alors f a un DL₃ en tout point de I , en particulier en $a = 4$ et ce DL₃ est

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} + o((x-a)^3)$$

On calcule les dérivées de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} & f^{(3)}(x) &= 2(-3)(1+x)^{-4} \\ f'(4) &= -\frac{1}{25} & f''(4) &= \frac{2}{125} & f^{(3)}(4) &= -\frac{6}{625} \end{aligned}$$

Alors le DL₃ (4) de f est :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 4}{=} \frac{1}{5} - \frac{2}{25}(x-4) + \frac{1}{125}(x-4)^2 - \frac{1}{625}(x-4)^3 + o((x-4)^3)$$

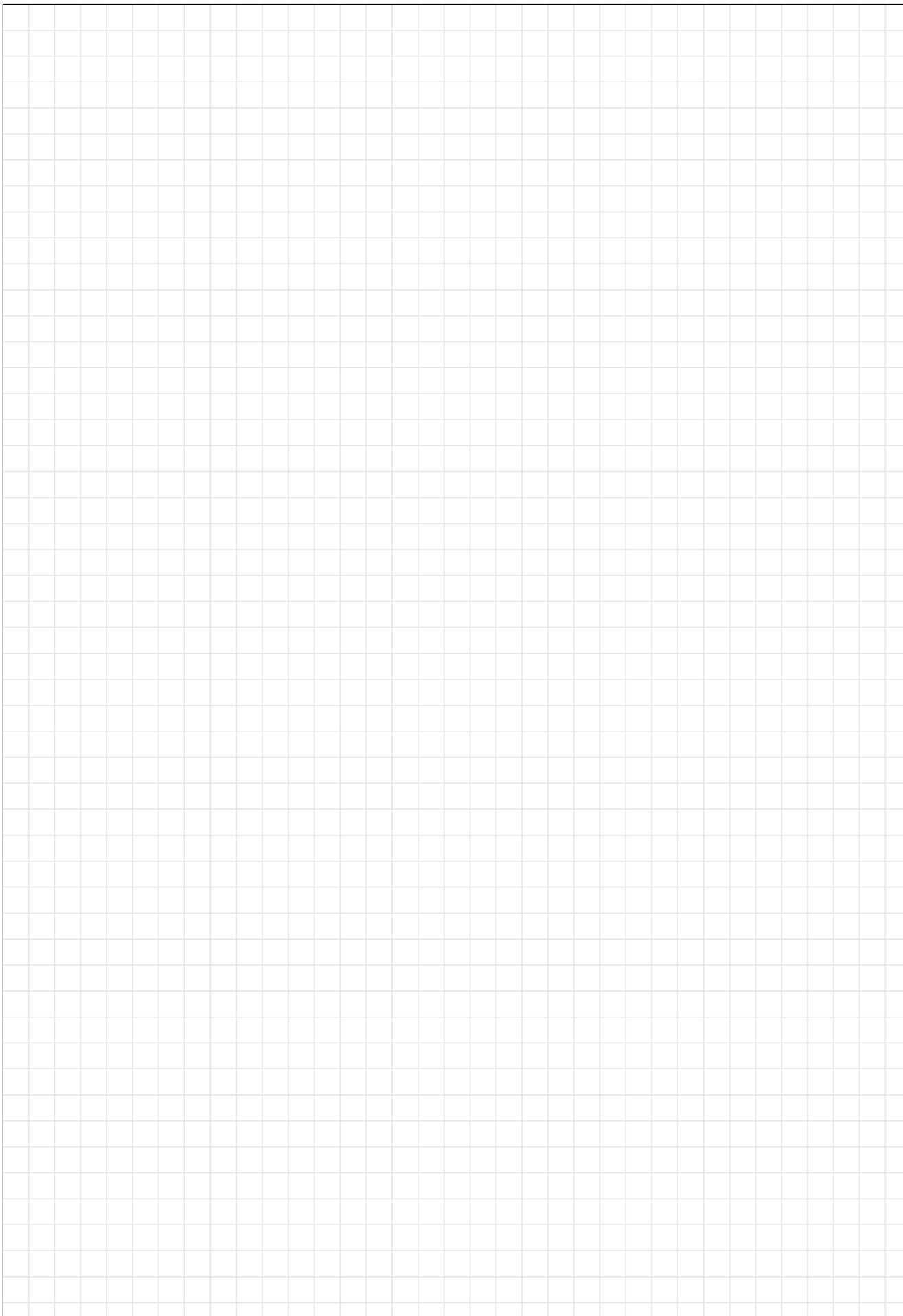
3.4 Forme normalisée d'un développement limité

Définition 3.2. Soit f une application admettant un développement limité l'ordre $n+p$ au voisinage de a . On appelle forme normalisée du développement limité de f , l'écriture :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)) \text{ où } a_0 \neq 0.$$

Proposition 3.5. Si f a un développement limité normalisé $f(a+h) = h^p (a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n))$ où $a_0 \neq 0$, alors $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$ et f est de même signe que $a_0 h^p$.

Exemple : $f(n) = \ln(1+n) - x$ au voisinage de 0
 on veut un DL à l'ordre 3 en 0.
 et $f(n) = \underbrace{n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + o(n^3)}_{\text{formulaine}} - x$
 $f(n) \underset{n \rightarrow 0}{=} -\frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + o(n^3)$
 La forme normalisée est $f(n) \underset{n \rightarrow 0}{=} x^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + o(x) \right)$



3.5 Translation d'un développement limité

Proposition 3.6. Si f est une fonction vérifiant $f(a+h) = g(h)$ pour tout h dans l'intervalle I contenant 0, et si g admet un développement limité à l'ordre n en 0 : $g(x) = \underset{a}{\underset{0}{P}}(x) + o(x^n)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a : $f(x) = \underset{a}{\underset{0}{P}}(x-a) + o((x-a)^n)$.

exemple : Calculons un \mathcal{DL}_2 en $a=-1$ de $h(x) = xe^x$
 h est de classe C^2 sur \mathbb{R} alors h a un \mathcal{DL}_2 en -1 .

Méthode 1 :

On pose $u = x - (-1) = x + 1$. On calcule
 $\cdot h(u) = h(u-1) = (u-1)e^{u-1} = \frac{(u-1)}{e} e^u$

On utilise le formulaire :

$$\underset{u \rightarrow 0}{e^u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

on calcule le produit

$$h(u) = h(u-1) = h(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{1}{e} \left(-1 - u + u - \frac{u^2}{2} + u^2 \underbrace{- o(u^2) + \frac{u^3}{2} + o(u^3)}_{o(u^2)} \right)$$

$$h(u) \underset{u \rightarrow -1}{=} \frac{1}{e} \left(-1 + \frac{1}{2}(x+1)^2 + o((x+1)^2) \right)$$

Méthode formule de Taylor-Young

$$h(u) = xe^x \quad h'(u) = (x+1)e^x \quad h''(u) = (x+2)e^x$$

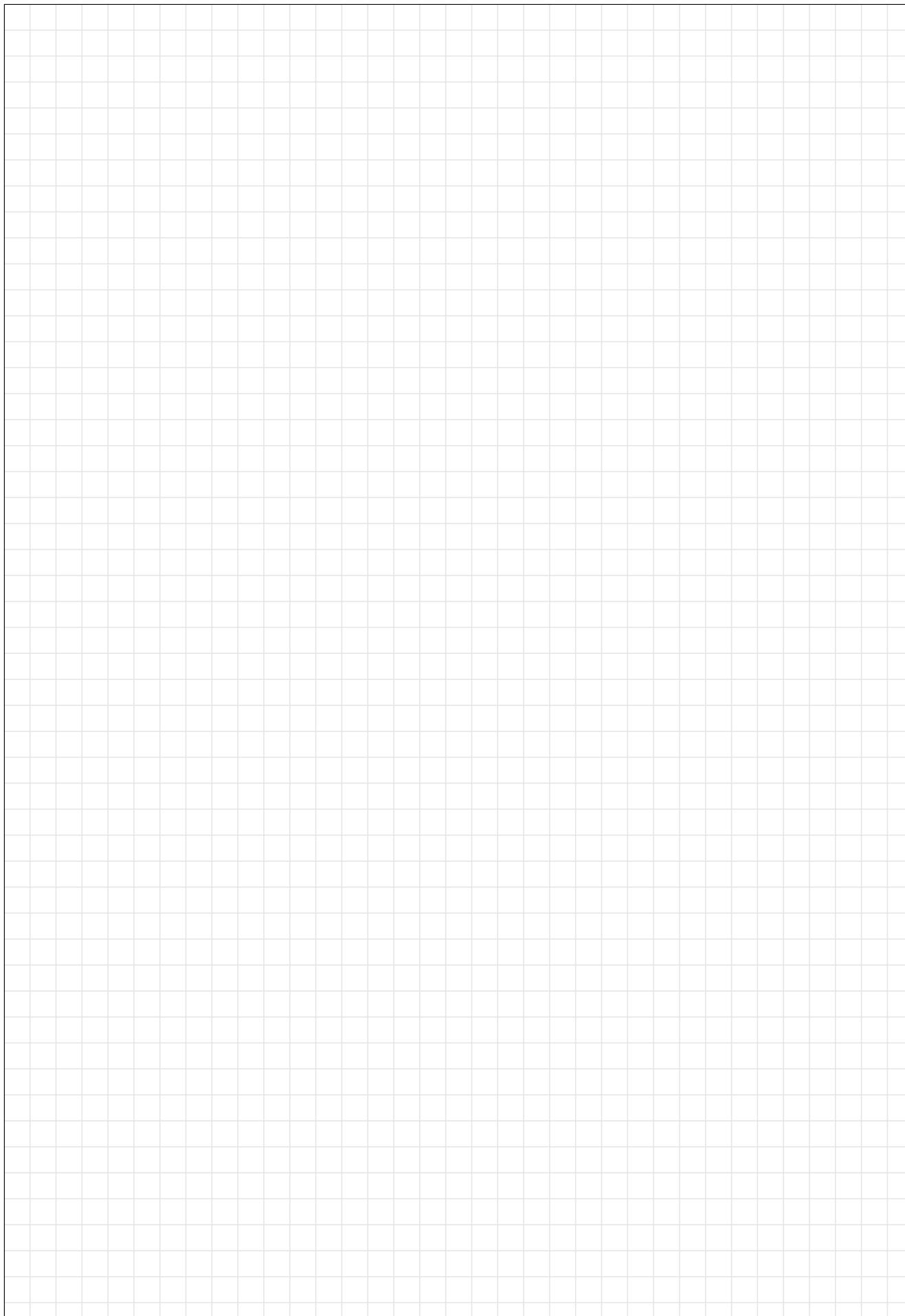
qui donne $h(u) \underset{u \rightarrow -1}{=} h(-1) + \underset{0}{h'(-1)}(u+1) + \frac{\underset{0}{h''(-1)}}{2!}(u+1)^2 + (u+1)^2 E_1(u+1)$ avec $E_1 \underset{0}{\rightarrow} 0$

$$h(u) \underset{u \rightarrow -1}{=} -\frac{1}{e} + \frac{1}{2e}(x+1)^2 + (x+1)^2 E_1(x+1)$$

au voisinage de -1

$$1 \gg x+1 \gg (x+1)^2 \gg (x+1)^3 \gg (x+1)^4$$

les termes sont rangés par ordre décroissant d'importance



3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si la fonction g définie par $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n sur l'intervalle $J_+ = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in I \cap \mathbb{R}_+^*\right\}$ (respectivement sur $J_- = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in I \cap \mathbb{R}_-^*\right\}$), alors on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Si $g(u) = P(u) + o(u^n)$, alors $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) = \underset{\substack{\text{lim} \\ x \rightarrow +\infty}}{a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$

$$\begin{array}{l} \text{voisinage de } a = +\infty \\ \text{ou } a = -\infty \\ x = \frac{1}{u} \\ n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow u \rightarrow 0^+ \\ n \rightarrow -\infty \Leftrightarrow u \rightarrow 0^- \end{array}$$

Exemple $\underset{x \rightarrow +\infty}{DL_m}$ en $+\infty$ de $f(n) = \frac{2n}{3n-1}$

On change de variables : $x = \frac{1}{n}$ $x = \varphi(u)$

on pose $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ $g = f \circ \varphi$

et on calcule un $DL_m(0)$ de g :

$$g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{2/u}{3/u - 1} = \frac{2}{3 - u} \quad g \text{ est } \underset{u \rightarrow 0}{\text{expansible}}]-3,3[$$

$$g'(u) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - u/3} \quad \text{et on pose } v = u/3$$

Le formulaire donne :

$$\frac{1}{1-v} = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^m + o(v^m) \quad v \rightarrow 0$$

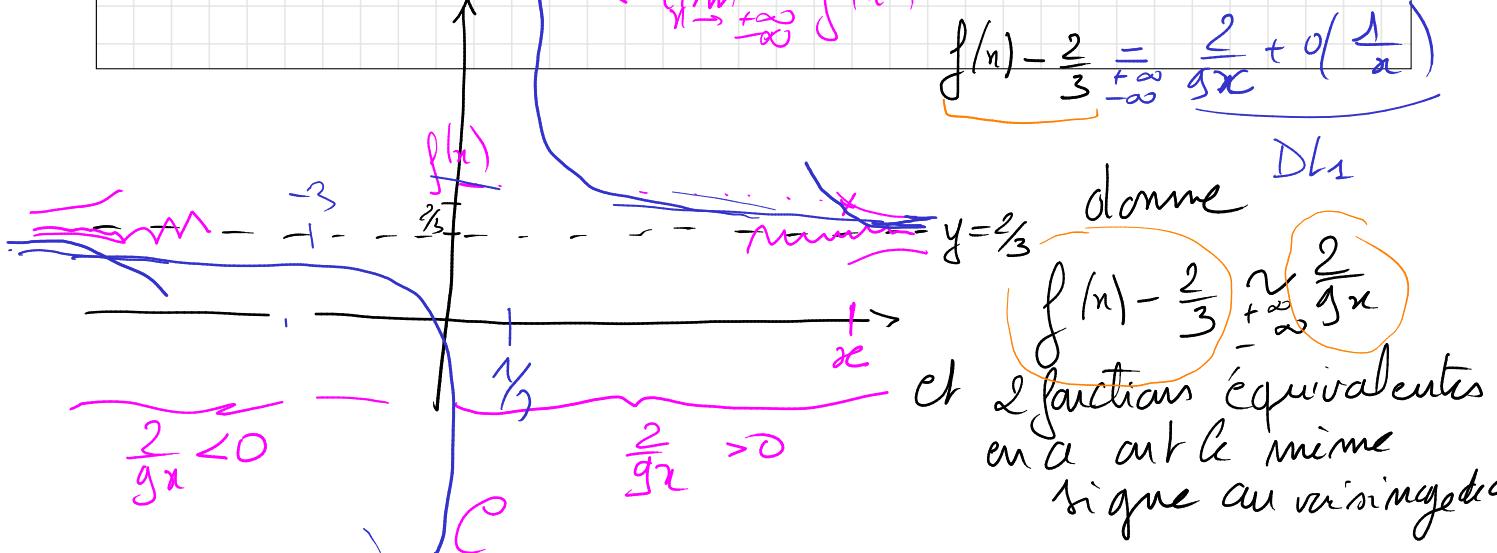
on revient à

$$g(u) = \underset{u \rightarrow 0}{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{9} + \dots + \frac{u^m}{3^m} + o(u^m) \right)$$

puis on revient à f . DL_m en $+\infty$ et en $-\infty$ de f .

$$f(n) = \underset{n \rightarrow \pm\infty}{\frac{2}{3} + \frac{2}{9x} + \frac{2}{27x^2} + \dots + \frac{2}{3^{m+1}} \cdot \frac{1}{x^m} + o\left(\frac{1}{x^m}\right)}$$

$$f(n) - \frac{2}{3} = \underset{x \rightarrow 0}{\frac{2}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$



exemple : DL₂ en ∞ de $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$

$1+x+x^2$ a un discriminant $\Delta < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x+x^2 > 0$

f est définie sur \mathbb{R} . On pose $u = \frac{1}{x}$ et

$$g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) = \sqrt{1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}} = \sqrt{\frac{1}{u^2}(u^2 + u + 1)}$$

on se limite à $u \geq 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad \sqrt{\frac{1}{u^2}} = \frac{1}{u}$

$$\underline{g(u) = \frac{1}{u} \sqrt{1+u+u^2}}$$
 qui est de la forme $\sqrt{1+v}$

| DL₂(0) de $\sqrt{1+v}$ est dans le formulaire avec

$$(1+v)^{\alpha} \underset{v \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1} v + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} v^2 + o(v^2) \text{ où } \alpha = \frac{1}{2}$$

Δ α est une constante dans la formule.

$$\sqrt{1+v} = 1 + \frac{1}{2} v + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2} v^2 + o(v^2) = 1 + \frac{1}{2} v - \frac{1}{8} v^2 + \underline{v^2 E_1(v)}$$

avec $E_1 \underset{v \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$

On pose $v = u+u^2$ on a $v \underset{u \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$

$$\text{alors } \sqrt{1+u+u^2} = 1 + \frac{1}{2} (u+u^2) - \frac{1}{8} (u+u^2)^2 + (u+u^2)^2 E_1(u+u^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} u + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) u^2 \boxed{- \frac{u^3}{8} - \frac{u^4}{8} + (u+2u^3+u^4) E_1(u+u^2)}$$

$$g(u) = \frac{1}{0+u} \left(1 + \frac{1}{2} u + \frac{3}{8} u^2 + u^2 E_2(u) \right) \text{ avec } E_2 \underset{u \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

$$g(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} u + u E_2(u)$$

est un développement asymptotique de g .

On vérifie à f : développement asymptotique de f :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x + \frac{1}{x} E_2\left(\frac{1}{x}\right) \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$$

$f(x) \sim x$ a un DL₁ en ∞ :

$$\underline{f(x)-x = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x + \frac{1}{x} E_2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

dans $\int_{+\infty}^{+\infty}$

4 Formule de Taylor-Young

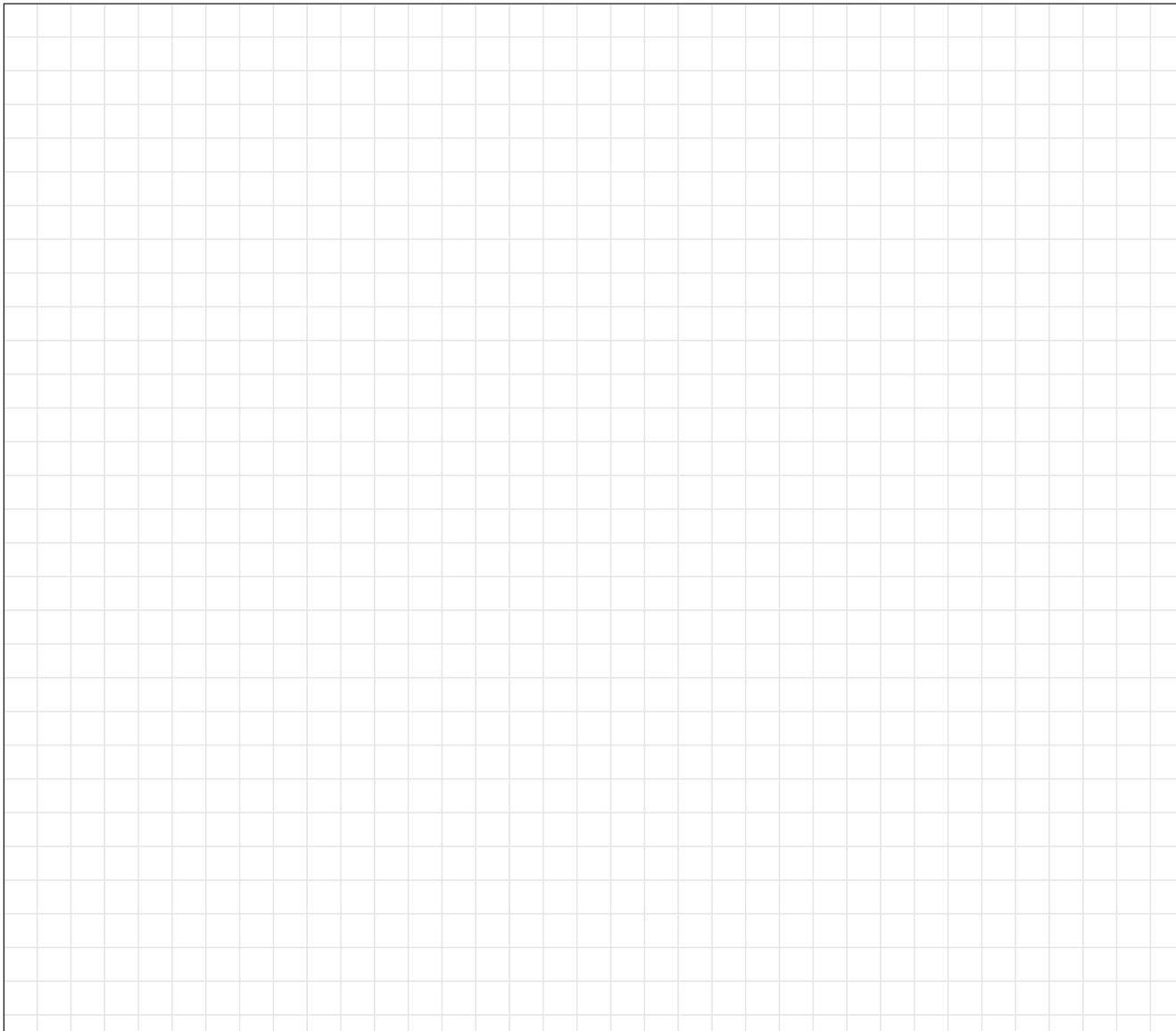
4.1 Intégration terme à terme d'un DL

Théorème 4.1. Soit I un intervalle contenant a et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue possédant un développement limité à l'ordre n en a qui est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Alors toute primitive F de f sur I possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en a qui est :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{a_k}{k+1}}_{\text{A}} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

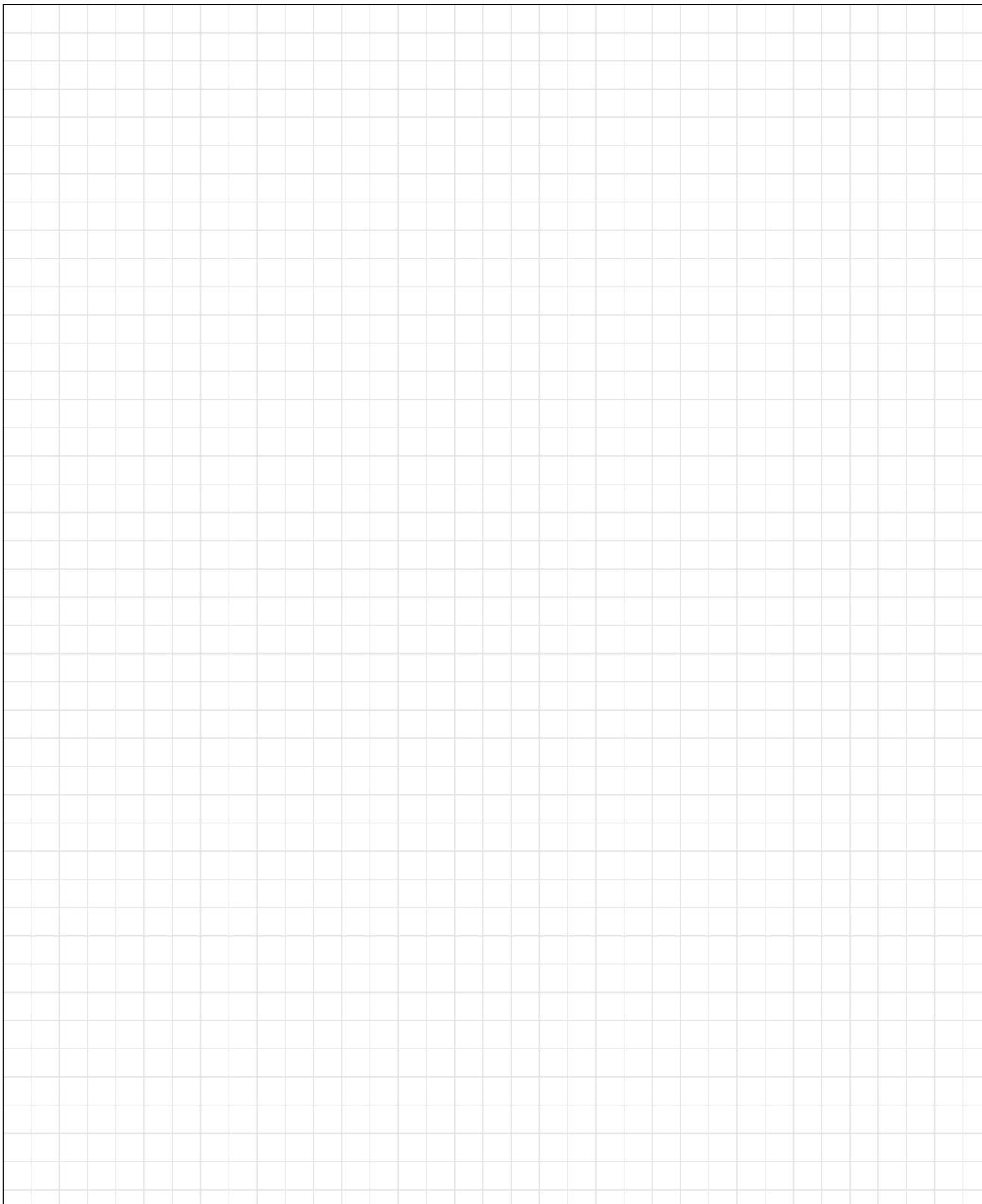


4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.2. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{K} avec $n \in \mathbb{N}$.
 f possède en tout point a de I un développement limité d'ordre n donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{ou}$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$



5 Opérations sur les développements limités

5.1 Somme et produit

Proposition 5.1. Soit f et g deux fonctions réelles admettant en a des développements limités à l'ordre n :

$$f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n \text{ et } g(x) \underset{a}{=} Q(x-a) + o(x-a)^n$$

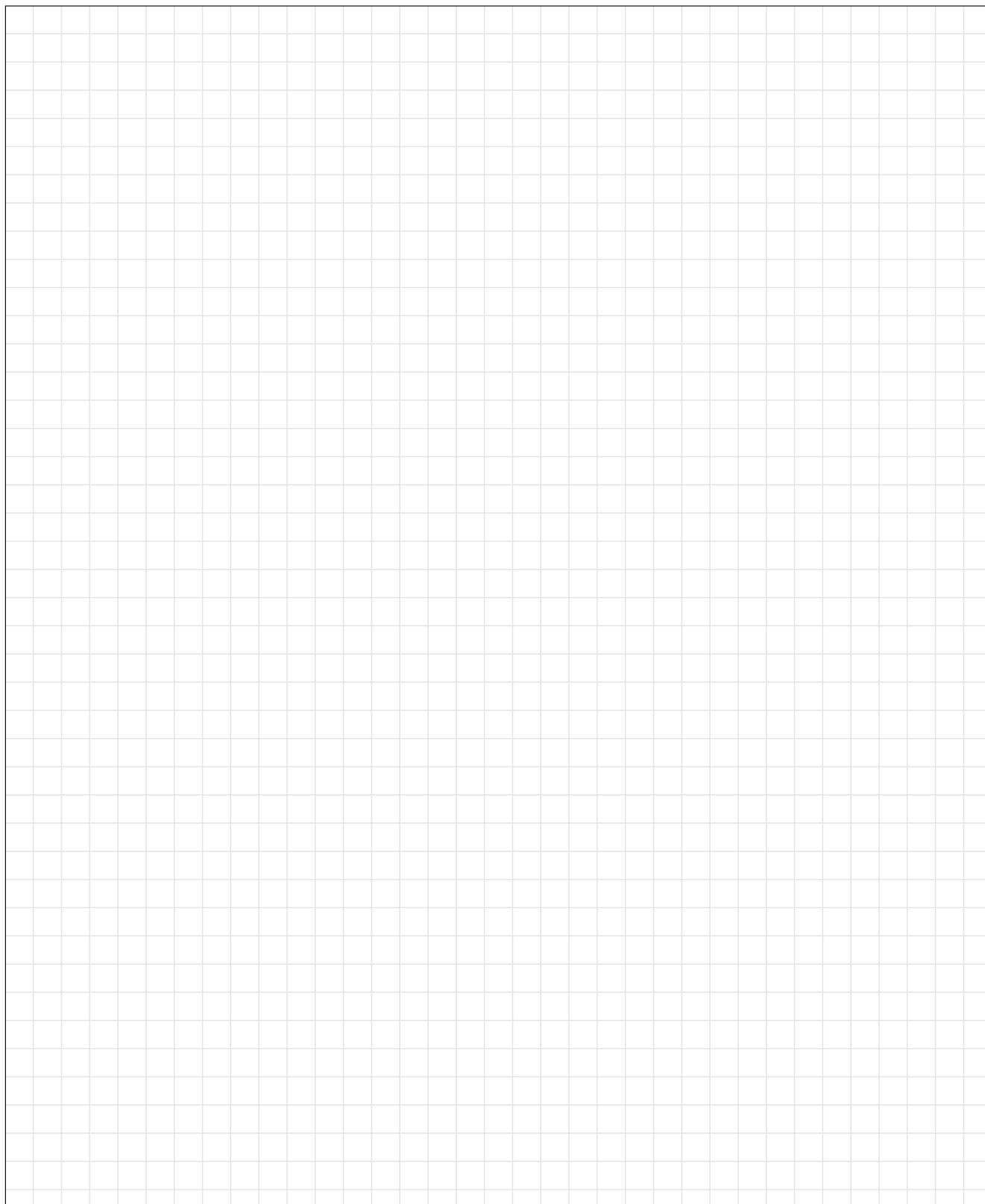
où P et Q sont des polynômes réels de degré au plus égal à n .

Alors les fonctions $f+g$ et $f g$ admettent des développements limités d'ordre n qui sont :

$$(f+g)(x) \underset{a}{=} P(x-a) + Q(x-a) + o((x-a)^n).$$

$$(f g)(x) \underset{a}{=} R(x-a) + o((x-a)^n)$$

où R est le polynôme obtenu tronquant le produit PQ au degré n .



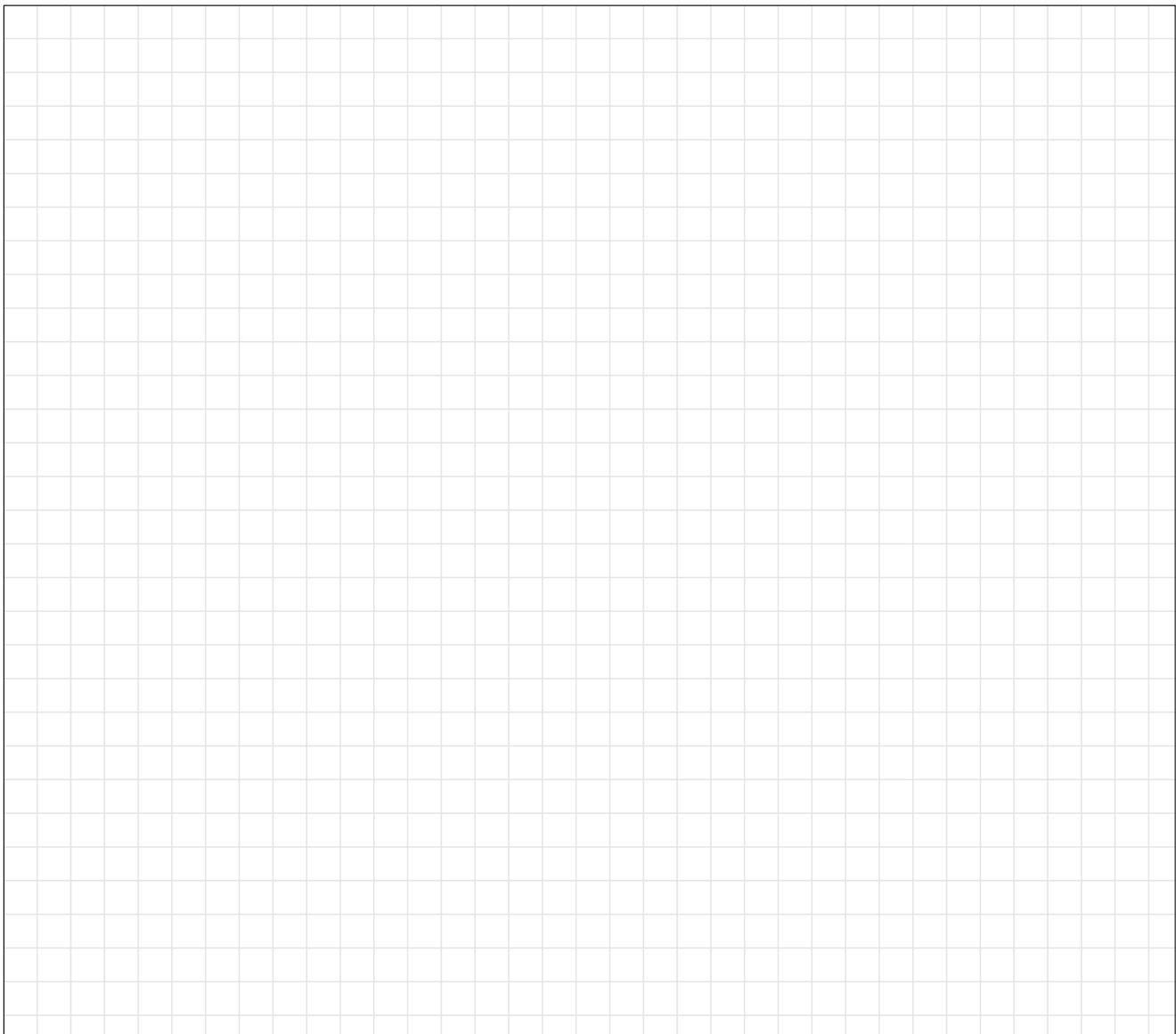
5.2 Dérivation d'un développement limité

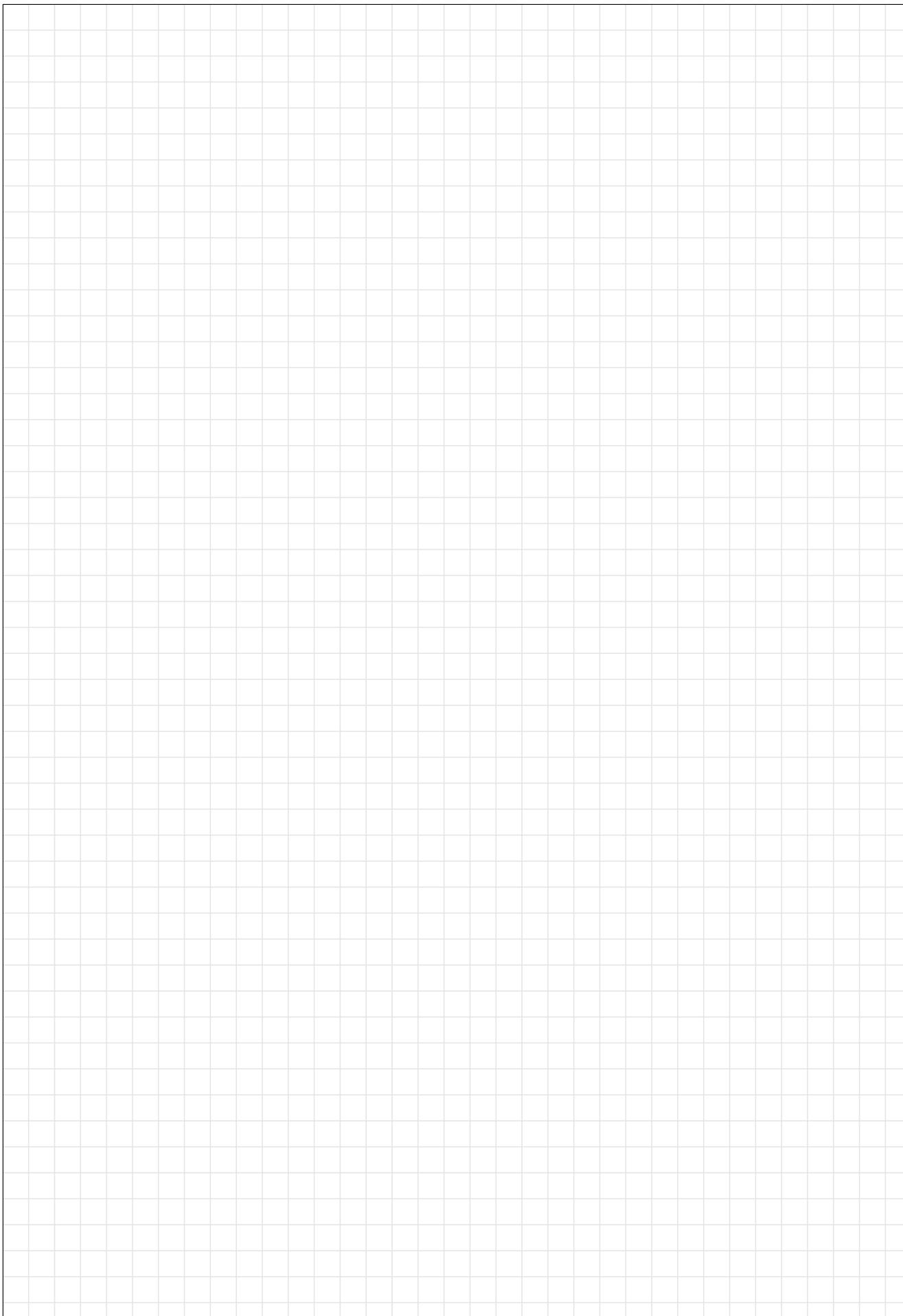
Proposition 5.2. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I contenant a , admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de a :

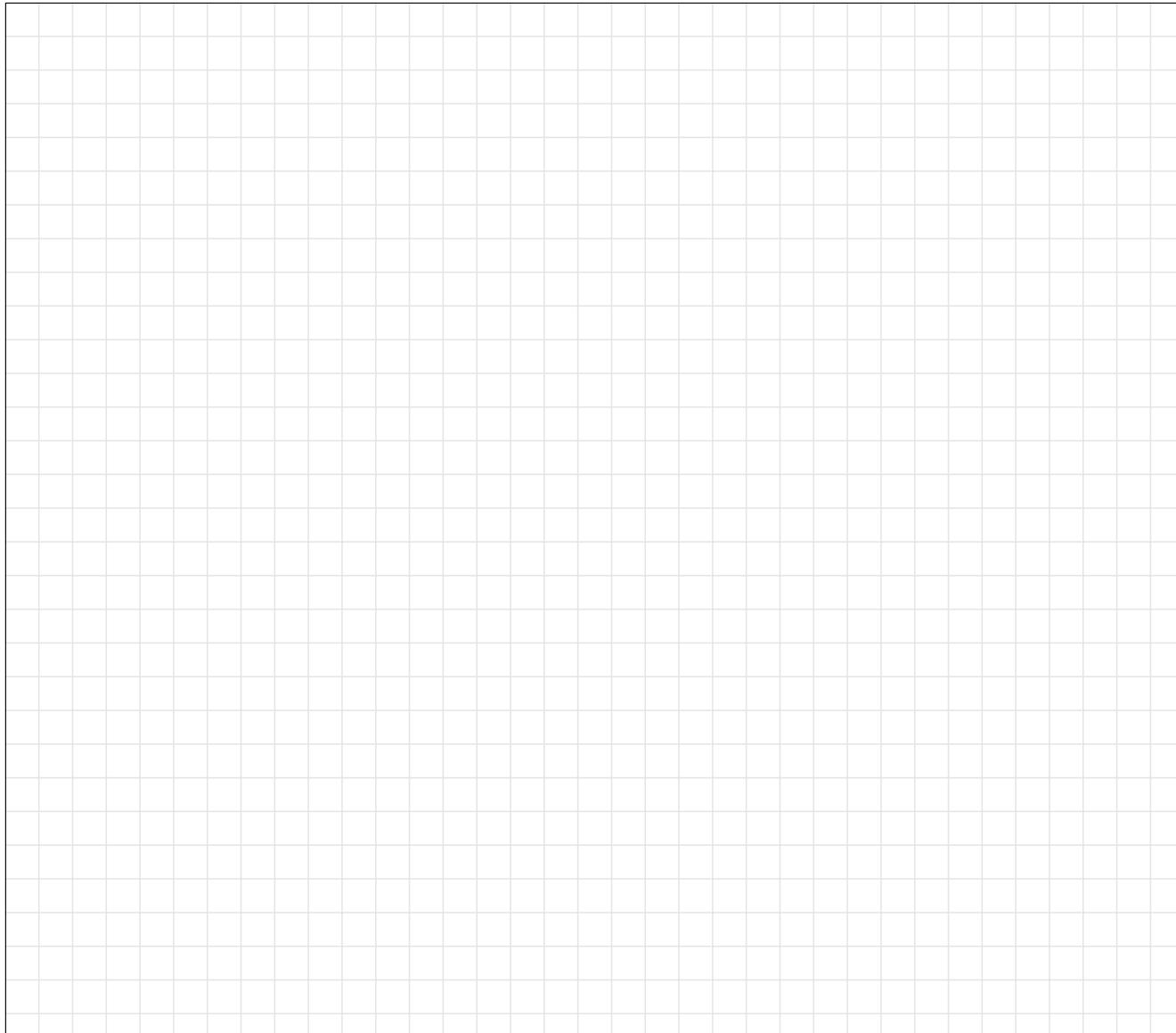
$$f(x) = \sum_a^n a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a , alors ce développement s'obtient en dérivant celui de f :

$$f'(x) = \sum_a^n k a_k (x-a)^{k-1} + o(x-a)^{n-1}.$$







5.3 Développement limité d'une fonction composée

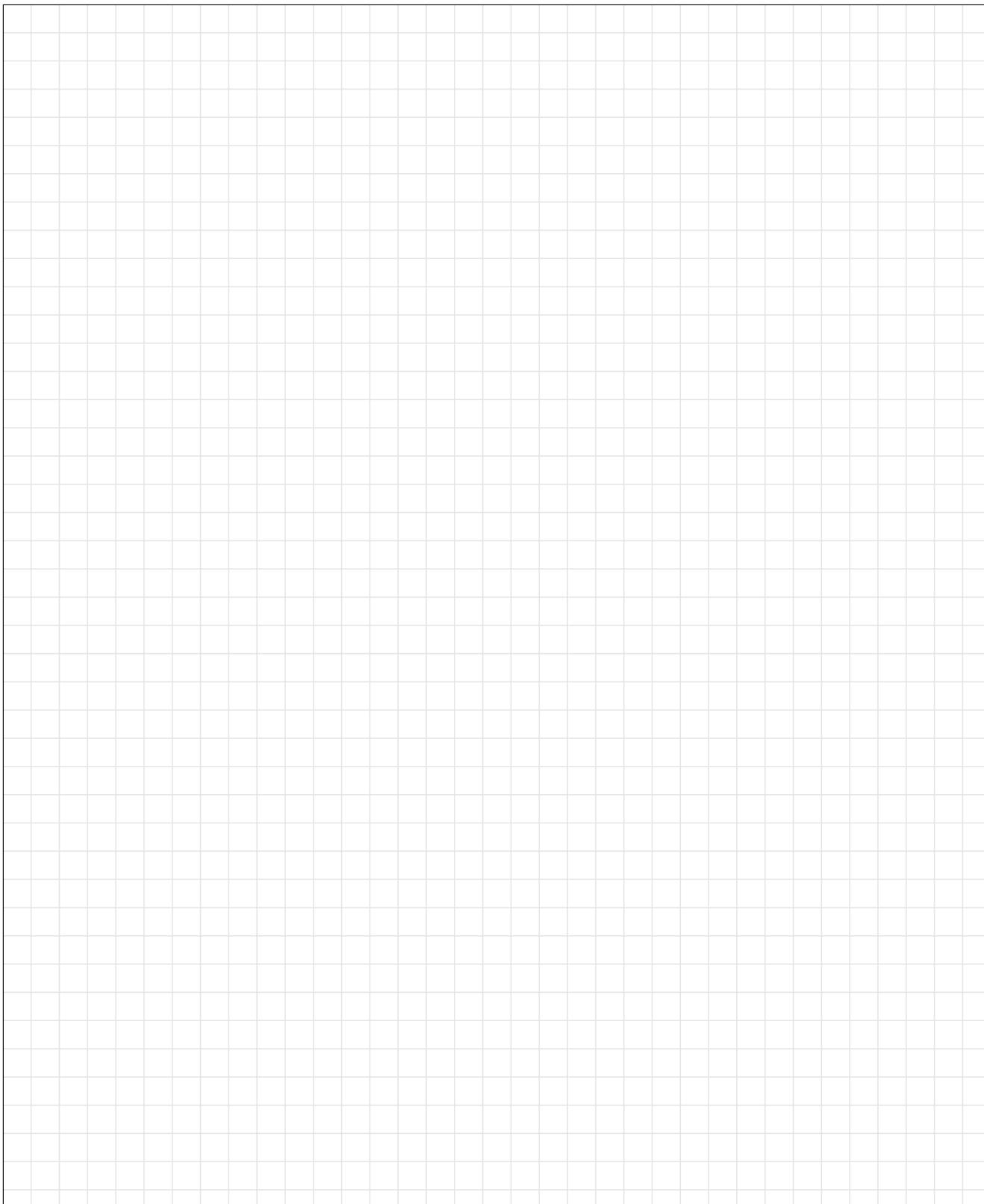
Proposition 5.3. soit f une fonction définie sur I admettant un $Dl_n(a)$ en $a \in I$, telle que $f(I) \subset J$, avec $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$.

Soit g une fonction définie sur J admettant un DL_n en $b = f(a)$ avec $g(u) \underset{b}{=} Q(u-b) + o(u-b)^n$.

Alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme composé $Q(P(X))$:

$$g \circ f(x) \underset{a}{=} \text{reste de la division de } Q(P(x-a)) \text{ par } (x-a)^{n+1} + o((x-a)^n).$$

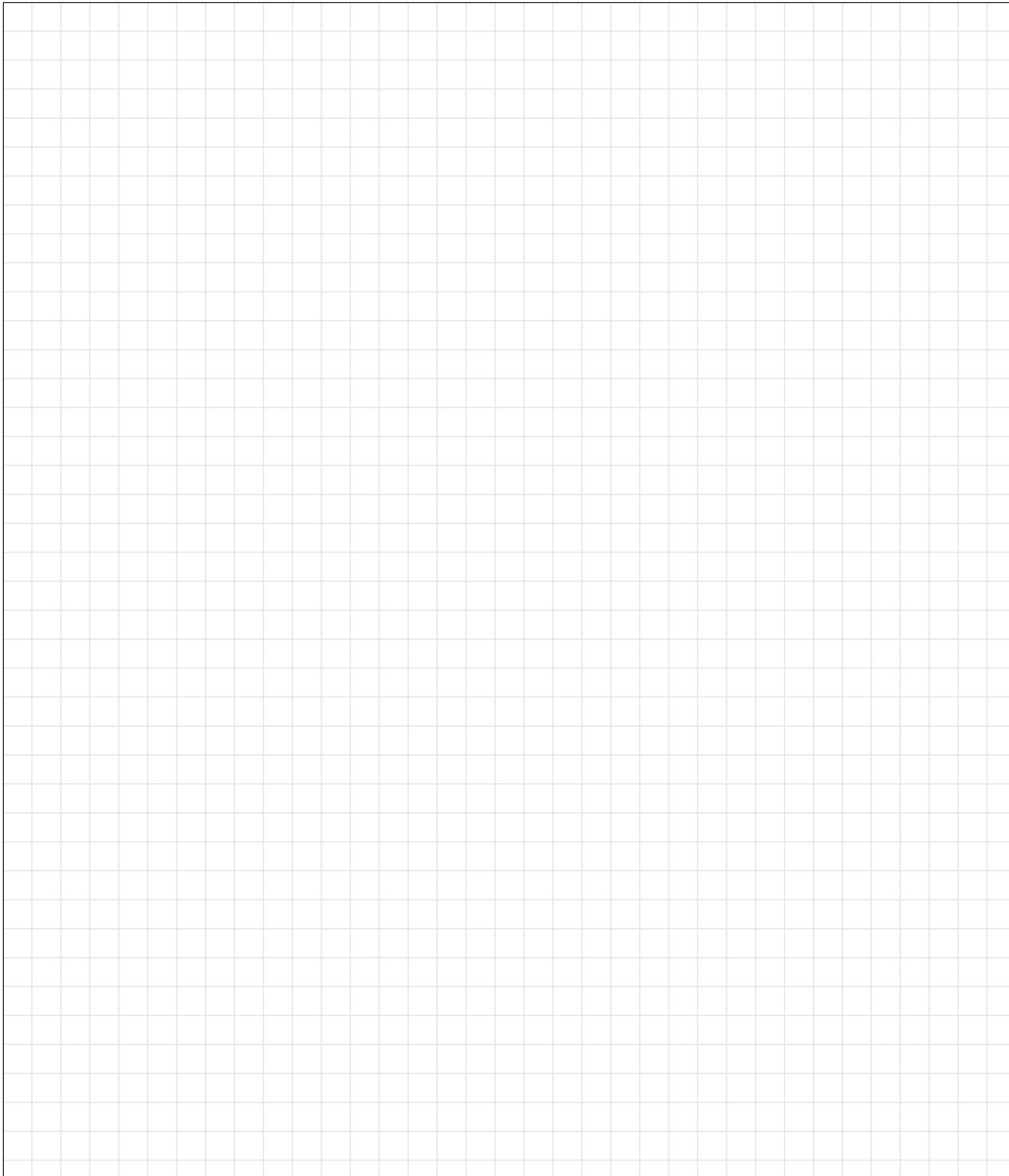




5.4 Développement limité d'un quotient

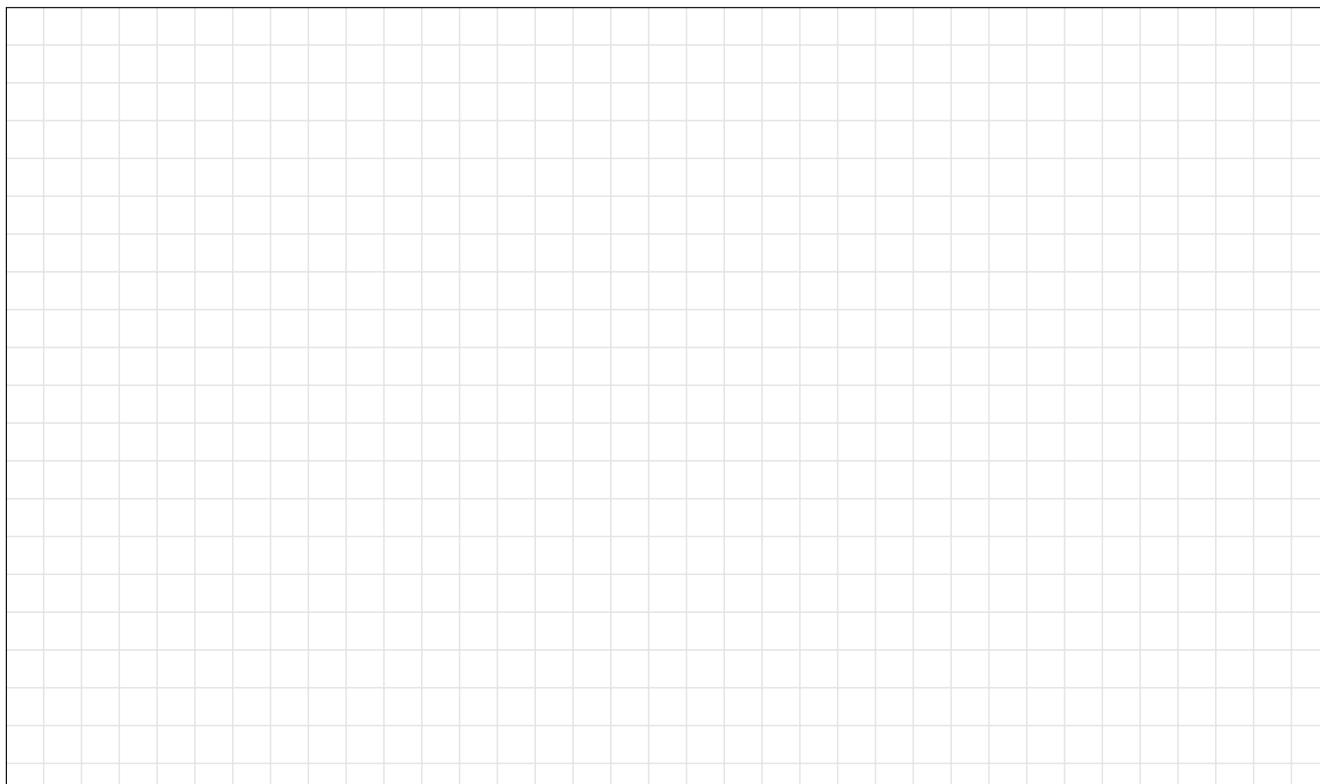
Proposition 5.4. Si u est une fonction telle que $\lim_{a} u = 0$ et si u a un développement limité à l'ordre n en a , alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ admet un $DL_n(a)$.

Si $u(x) = P(x-a) + o(x-a)^n$, alors $\frac{1}{1-u(x)} = 1 + P(x-a) + P^2(x-a) + P^3(x-a) + \cdots + P^n(x-a) + o(x-a)^n$: le développement limité s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $1 + P(X) + P^2(X) + \cdots + P^n(X)$.



6 Formulaire

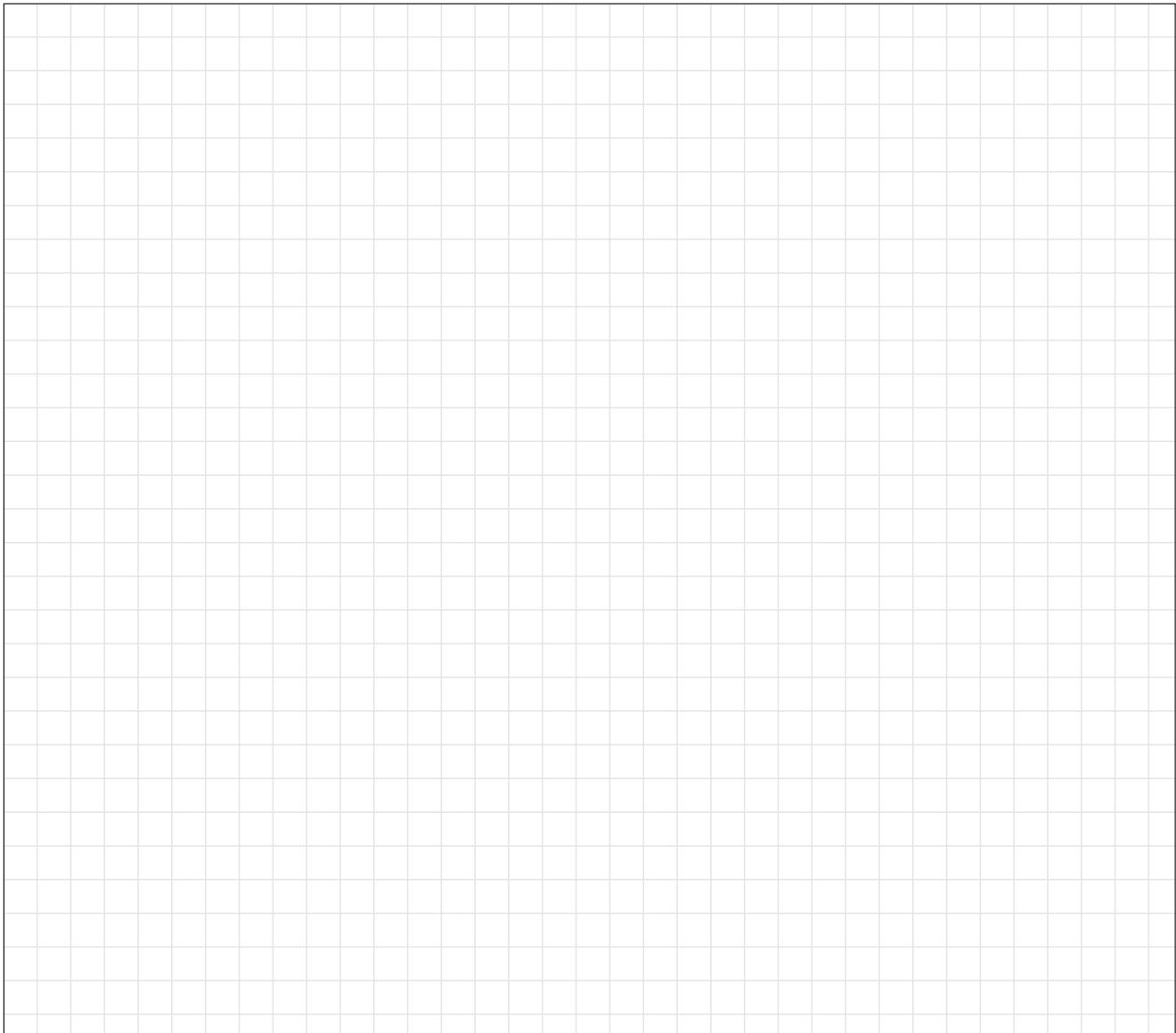
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x} &\underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
 (1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
 \ln(1+x) &\underset{0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n) \\
 \arctan x &\underset{0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^p \frac{1}{2p+1}x^{2p+1} + o(x^{2p+1}) \\
 e^x &\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) \\
 \operatorname{ch} x &\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p}) \\
 \operatorname{sh} x &\underset{0}{=} x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+1}) \\
 \cos x &\underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^p \frac{1}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p}) \\
 \sin x &\underset{0}{=} x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^p \frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+1}) \\
 \tan x &\underset{0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)
 \end{aligned}$$



7 Applications

7.1 Étude de limites

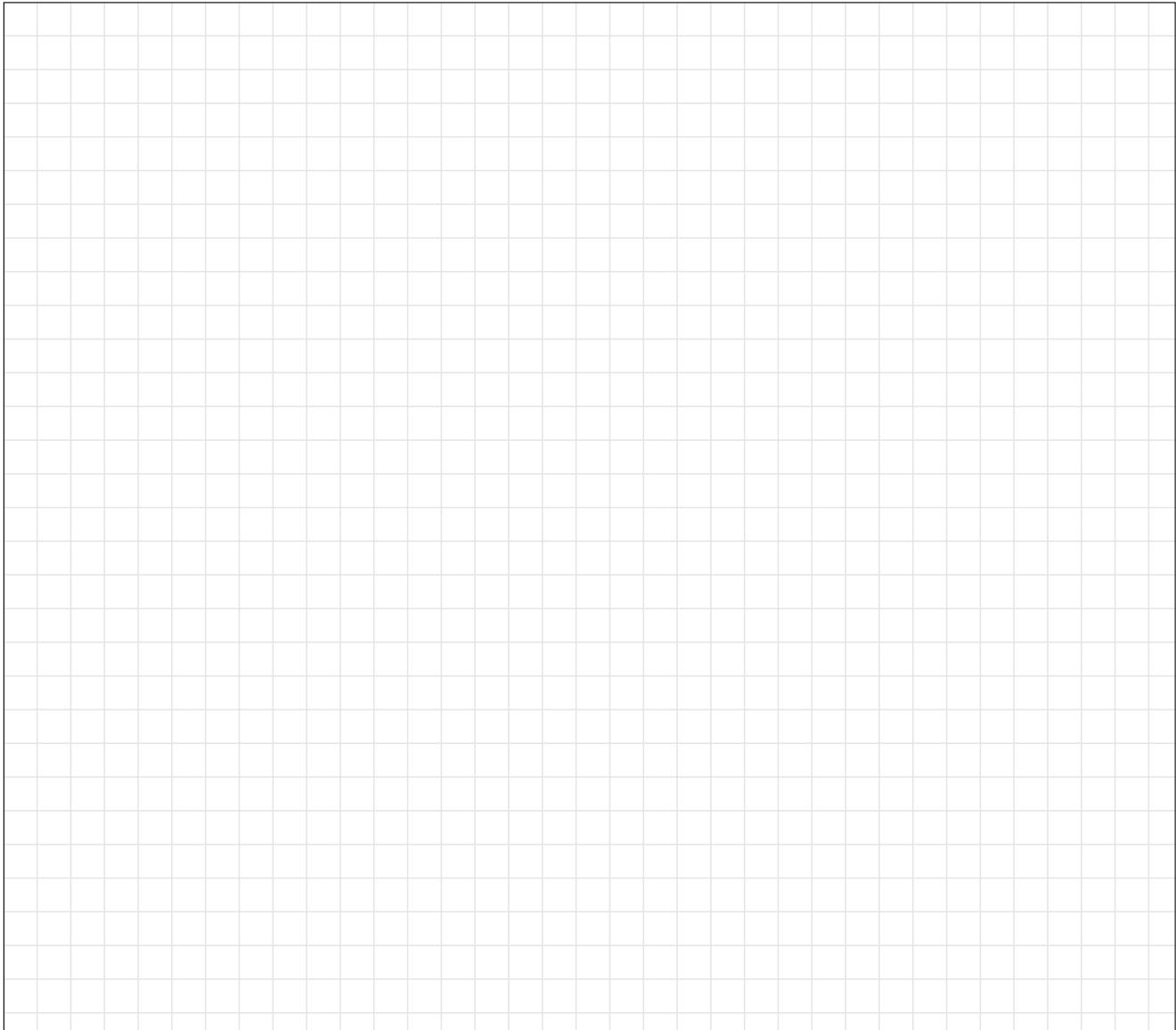
Proposition 7.1. Si une fonction f a un développement limité de la forme $f(x) = \underset{a}{\underline{a}} + o(1)$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f a une limite en a qui vaut a_0 .



7.2 Prolongement par continuité

Proposition 7.2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) = \underset{a}{\lim} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.



7.3 Dérivabilité d'un prolongement par continuité

Proposition 7.3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in I$.

Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) = \underset{a}{\lim} a_0 + a_1(x - a) + o(x - a)$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $\tilde{f}(a) = a_0$ et le prolongement \tilde{f} est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = a_1$.

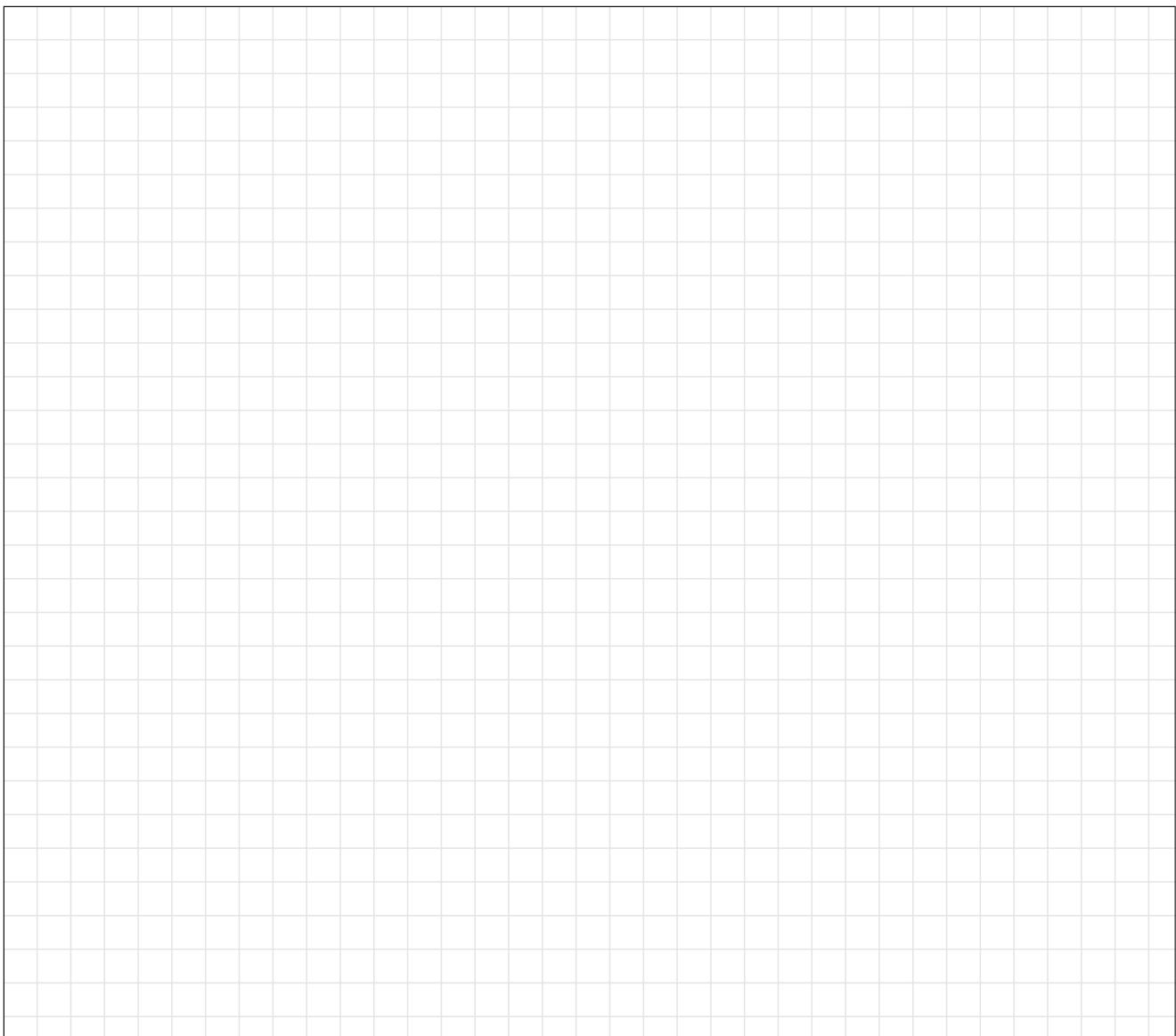


7.4 Position relative de la courbe et de la tangente

Proposition 7.4. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in I$.

Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_p(x - a)^p + o((x - a)^p)$ avec $p \geq 2$ et $a_p \neq 0$, alors la droite $y = a_0 + a_1(x - a)$ est tangente à la courbe représentative de f en a .

De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point a est donnée par le signe de $a_p(x - a)^p$: au-dessus si $a_p(x - a)^p \geq 0$.



7.5 Étude d'un extremum

Proposition 7.5. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in I$.

Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) = a_0 + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$ avec $a_2 \neq 0$, alors la fonction f a un extremum local en a : maximum local si $a_2 < 0$ et minimum local si $a_2 > 0$.



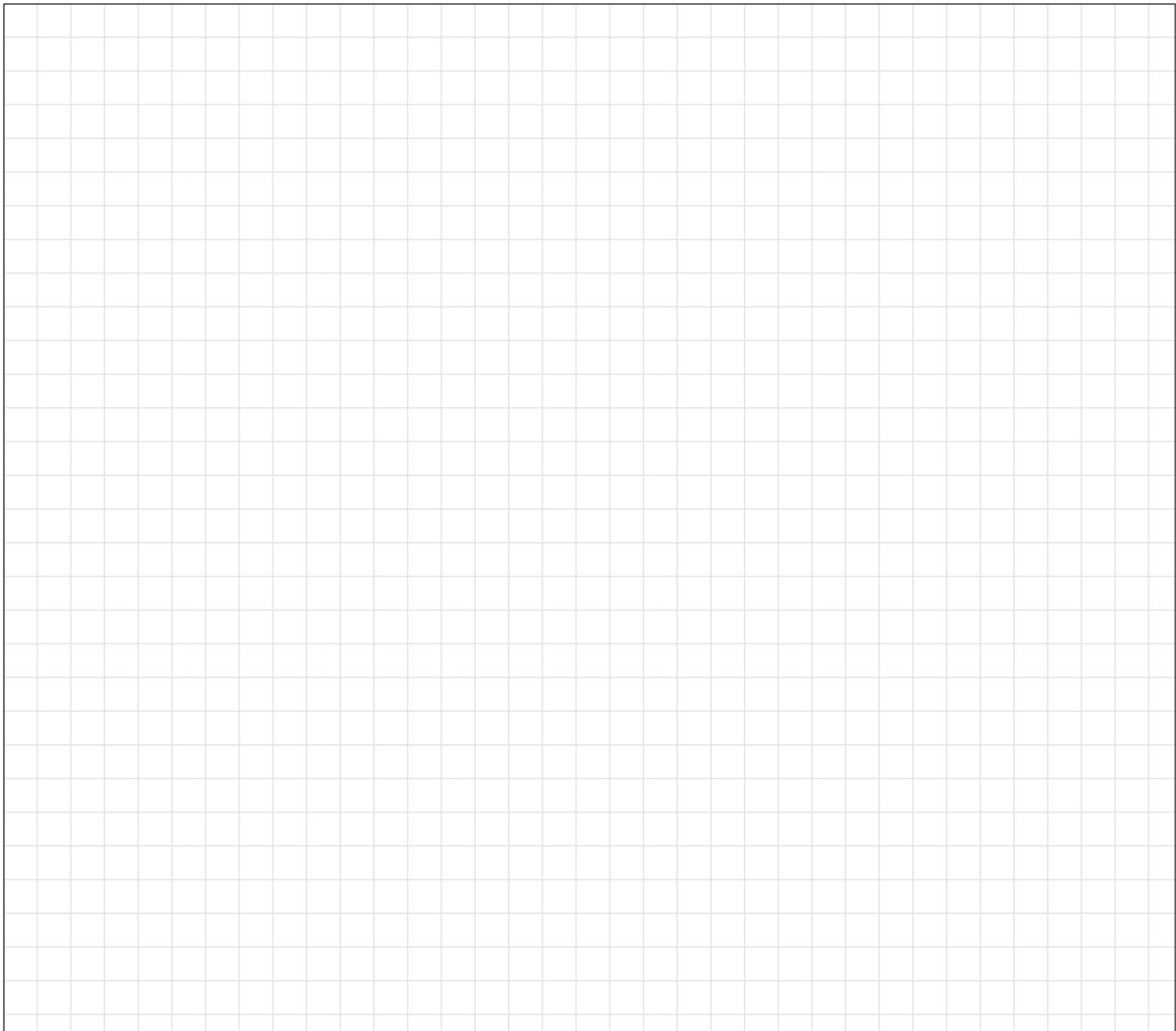
7.6 Asymptotes

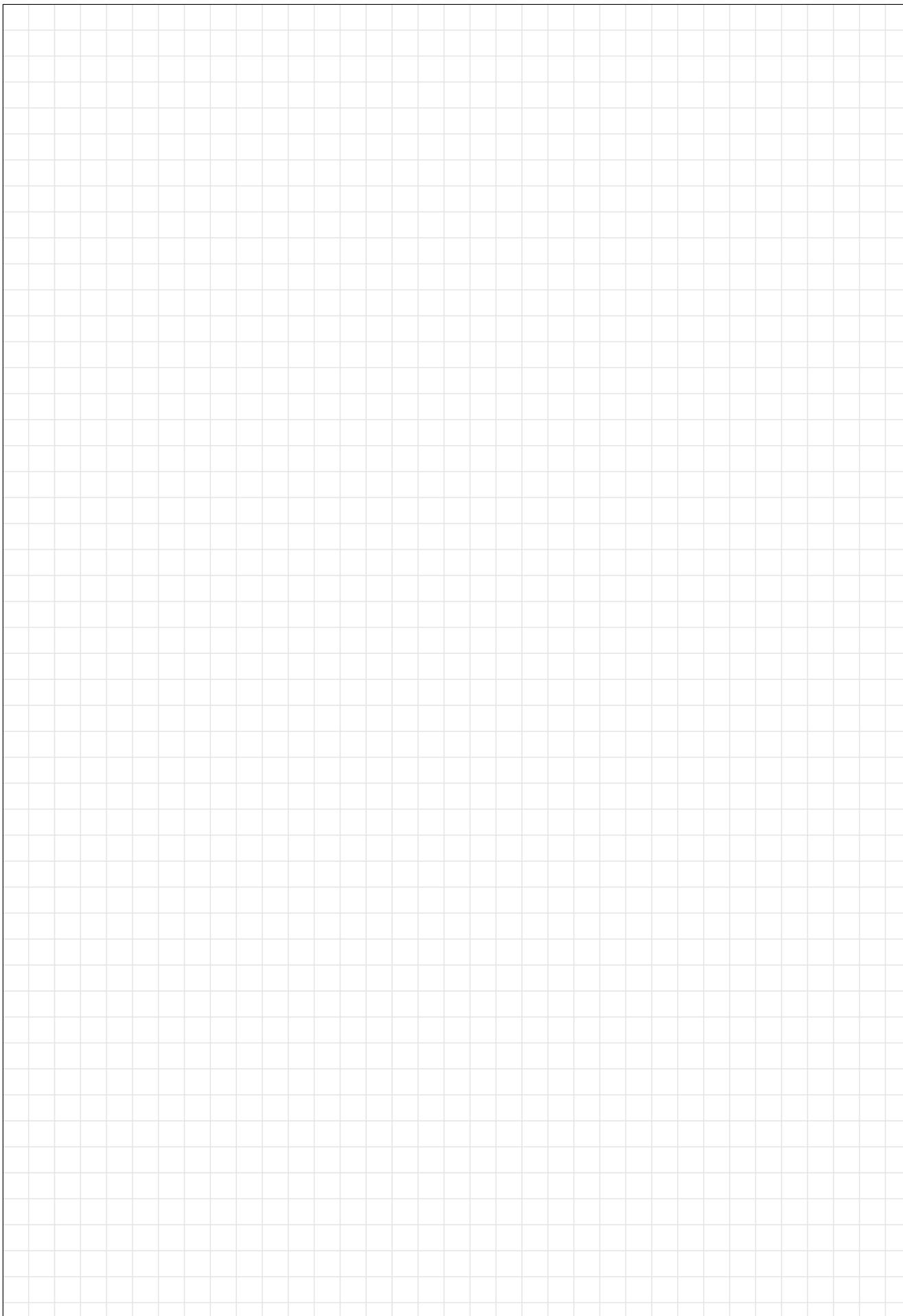
Proposition 7.6. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

Si il existe un réel k tel que $f(x) - kx \underset{+\infty \text{ ou } -\infty}{=} a_0 + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$ avec $a_p \neq 0$,

alors la droite $y = kx + a_0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$).

De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\frac{a_p}{x^p}$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).



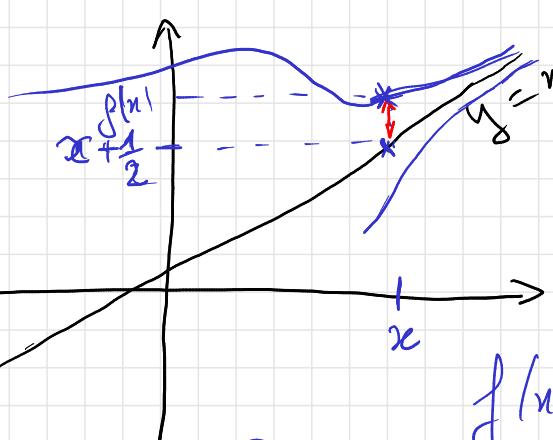


$$f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{n} E_2\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } E_2 \rightarrow 0$$

Utilisation de ce développement asymptotique :

On a pour x au voisinage de $+\infty$

$$f(x) - x - \frac{1}{2} = \frac{3}{8x} + \frac{1}{n} E_2\left(\frac{1}{n}\right)$$



on a
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) - x - \frac{1}{2} = 0$

dans la droite $y = n + \frac{1}{2}$
 est asymptote à la courbe de f
 et

$$f(n) - x - \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{3}{8n}$$

avec $\frac{3}{8n} > 0$ au voisinage de $+\infty$

alors $f(n) - x - \frac{1}{2} > 0$ au voisinage de $+\infty$
 La courbe est au-dessus de l'asymptote

fin de l'exercice : déterminer un Δ en $+\infty$
 de $f(n) - x$

