Mathématique - DS n°7

L'usage de documents, de calculatrices ou de téléphones portables est interdit.
Les étudiants sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

1. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
2. Montrer que la série $\sum \frac{1}{\lfloor \mathrm{ch}(n)\rfloor + 1}$ est convergente.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considére l'équation $x^5 + nx^3 = 1 \qquad (E_n)$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution réelle que l'on notera x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante.
3. Montrer que (x_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.
4. Déterminer un équivalent simple de $x_n - \ell$.
5. Déterminer un développement asymptotique à 2 termes significatifs de x_n.

Exercice 3

On souhaite dans cet exercice étudier la fonction $f : x \longmapsto x(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer un équivalent en 0^+ de $f(x)$. En déduire la limite en 0^+ de $f(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire ?
4. Calculer un développement limité à l'ordre 2 en 1 de f.
5. En déduire la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en 1 et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente.
6. Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1-u)\ln\left(1+\frac{u}{2}\right)$.
7. En déduire un développement asymptotique de f à trois termes quand x tend vers $\pm\infty$.
8. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$? Si oui, préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de cette asymptote.

Exercice 4

On considère pour cet exercice l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ par

$$\varphi(P) = P(X^2) - (X^2+1)P(X).$$

On considère également la famille $\mathcal{F} = (3, 2X-1, 3X^3+1)$ et l'ensemble $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], (2X-1)P' = 6P\}$

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel. Déterminer sa dimension et en donner une base.
2. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$. Est-ce une base de $\mathbb{R}_3[X]$?
3. Montrer que φ est une application linéaire.
4. Montrer que le noyau de φ est le sev engendré par (X^2-1).
5. L'application φ est-elle injective ? Que peut-on dire de son caractère surjectif ? Est-ce un endomorphisme ? Est-ce un isomorphisme ?
6. Montrer que $\mathrm{Vect}(F)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$. Puis, donner une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}(F) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$

7. Exprimer la symétrie σ par rapport à $\text{Ker}(\varphi)$ parallèlement à $\text{Vect}(F)$.
8. Donner une base de l'image de φ.
9. On considère l'application $\widetilde{\varphi}$ induite par φ de $\text{Vect}(F)$ dans $\text{Im}(\varphi)$, $\begin{array}{rccl} \widetilde{\varphi}: \text{Vect}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi) \\ P & \longmapsto & P(X^2)-(X^2+1)P(X) \end{array}$

   Montrer que $\widetilde{\varphi}$ est un isomorphisme.

Exercice 5

On considére la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.

1. On considère la fonction g définie par $g(t) = \dfrac{\sin(t)-t}{t^2}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = 0$.
   (a) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) En utilisant la continuité de g sur $[-2, 2]$ et un encadrement, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   (c) En déduire que f est continue en 0.
2. Montrer que f est paire.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, \quad |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. (a) Montrer que $f(\pi/2) > 0$ et que $f(\pi) < 0$.
   (b) Montrer que $f(2\pi) = \displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right)\sin(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que $f(2\pi) > 0$.
   (c) Tracer dans un repère orthonormé les hyperboles : $y = \dfrac{1}{2x}$ et $y = -\dfrac{1}{2x}$ ainsi que l'allure de la courbe représentative de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.