# Chapitre 21 - Variables aléatoires

# 1 Variables aléatoires

## 1.1 Définition

**Définition 1.1.** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé fini et $E$ un ensemble.

On appelle variable aléatoire une application définie sur $(\Omega, P)$ à valeurs dans $E$ : $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$.

Lorsque $E$ est une partie de $\mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

L'ensemble des valeurs susceptibles d'être prises par $X$ est $X(\Omega)$ défini par $X(\Omega) = \{x \in E \mid \exists \omega \in \Omega : \ x = X(\omega)\}$.

Lorsque $\Omega$ est fini, $X(\Omega)$ est fini et on notera souvent $X(\Omega) = (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ avec $n = |\Omega|$.

*Remarque* 1.1. Par défaut, on suppose que les variables aléatoires sont des variables aléatoires réelles (V.A.R).

**Définition 1.2.** Soit une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow E$. Soit $A$ une partie de $E$ : $A \subset E$.

On définit l'événement $(X \in A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.

On a donc $(X \in A) = X^{-1}(A)$ et on le note aussi $(X \in A) = \{X \in A\}$.

**Définition 1.3.** Pour une variable aléatoire réelle $X$ et pour $a, b$ réels, on définit les événements suivants :

$(X = a) \ = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$

$= \{$ tous les résultats $\omega$ tels que $X(\omega) = a\}$

$(X \leqslant a) \ = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$

$= \{$ tous les résultats $\omega$ tels que $X(\omega) \leqslant a\}$

$(a \leqslant X < b) \ = \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) < b\}$

$= \{$ tous les résultats $\omega$ tels que $a \leqslant X(\omega) < b\}$

## 1.2 Exemples

## 1.3 Loi de probabilité d'une v.a. réelle finie

**Définition 1.4.** Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire finie. L'application $P_X$ : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(X^{-1}(A)) \end{array}$ est une probabilité appelée loi de probabilité de la v.a. X et $(X(\Omega), P_X)$ est un espace probabilisé.

**Définition 1.5.** Soit $X$ une v.a. finie $X : \Omega \longrightarrow E$. On appelle loi de probabilité de $X$ la donnée de toutes les valeurs prises par $X$ : $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ et de toutes les probabilités $(P(X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$.

*Remarque* 1.2. On peut utiliser un tableau

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $P(X = x_1)$ | $P(X = x_2)$ | $P(X = x_3)$ | $P(X = x_4$ |

**Théorème 1.1.** *Soit $\{(x_i, p_i) | i \in I\}$ une partie finie de $\mathbb{R}^2$ telle que les $x_i$ soient distincts.*

*$\{(x_i, p_i) | i \in I\}$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie si et seulement si* $\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in I, \quad p_i \geqslant 0 \\ \sum\limits_{i \in I} p_i = 1 \end{array} \right.$.

## 1.4 Système complet associé à une v.a. finie

**Proposition 1.2.** *Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une v.a. sur un espace probabilisé fini.*

*$((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.*

**Corollaire 1.3.**

*On en déduit que* $\sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1$.

## 1.5 Loi d'une fonction d'une variable aléatoire finie

**Définition 1.6.** Soit $X$ une v.a. finie sur $(\Omega, P)$ avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Soit $f : D \subset E \longrightarrow E$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset D$.

Alors $Y = f \circ X$ est une v.a. finie sur $\Omega$.

De plus,

$$Y(\Omega) = (f \circ X)(\Omega) = \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$$

et

$P(Y = y_j) = \sum_{f(x_i)=y_j} P(X = x_i)$ (somme sur toutes les valeurs $x_i$ telles que $f(x_i) = y_j$).

# 2 Lois usuelles

## 2.1 Loi uniforme

**Définition 2.1.** On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

**Définition 2.2.** On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$.
On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$.

## 2.2 Loi de Bernoulli

**Définition 2.3.** On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ avec $0 < p < 1$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$ donc $P(X = 0) = 1 - p$.
On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

**Définition 2.4.** Soit $A$ une partie d'un ensemble $\Omega$. On appelle fonction indicatrice de $A$ notée $\chi_A$ la fonction $\chi_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ définie pour $\omega \in \Omega$ par

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

*Remarque* 2.1. Lors d'une expérience aléatoire, soit un événement $A$ qui est réalisé (succès) ou qui ne l'est pas (échec), on peut modéliser cette situation avec une variable aléatoire $X$ telle que l'événement $(X = 1) = A$ modélise le succès et l'événement $(X = 0) = \overline{A}$, l'échec de l'expérience. $X$ est alors la fonction indicatrice de $A$.

## 2.3 Loi Binomiale

**Définition 2.5.** On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$ avec $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}$ si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

*Remarque* 2.2. On vérifie

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$= (p + (1-p))^n = 1^n = 1.$

*Remarque* 2.3. Une variable aléatoire $X$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ modélise le nombre de succès lors de la répétition de $n$ expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes.

*Remarque* 2.4. Une variable aléatoire $X$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ modélise le nombre d'obtention de boules rouges pour $n$ tirages avec remise dans une urne contenant une proportion $p$ de boules rouges.

# 3 Couple de variables aléatoires

## 3.1 Loi conjointe

**Définition 3.1.** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé. Soit $X, Y$ deux v.a. sur $\Omega$.

On appelle couple de v.a. $(X, Y)$ l'application

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}.$$

C'est une variable aléatoire sur $E^2$.

On notera $(X = x_i, Y = y_j)$ l'événement

$\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i \text{ et } Y(\omega) = y_j\}$.

**Définition 3.2.** On appelle loi conjointe du couple $(X, Y)$ la loi de la variable aléatoire $(X, Y)$ c'est-à-dire la donnée de

— toutes les valeurs prises par le couple
$(X, Y) = X(\Omega) \times Y(\Omega) = (x_i)_{i\in I} \times (y_j)_{j\in J}$
$= \{(x_i, y_j) \mid x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)\}$

— et de toutes les probabilités
$p_{i,j} = (P(X = x_i, Y = y_j))_{x_i\in X(\Omega), y_j\in Y(\omega)} = (P((X = x_i) \cap (Y = y_j)))_{x_i\in X(\Omega), y_j\in Y(\Omega)}$

ce que l'on pourra noter $((x_i, y_j), p_{i,j})_{i\in I, j\in J}$.

**Théorème 3.1.** *Soit* $\{((x_i, y_j), p_{i,j}) | i \in I, j \in J\}$ *une par-*

*tie finie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ telle que les $x_i$ soient distincts et que les $y_j$ soient distincts.*

*$\{((x_i, y_j), p_{i,j}) | i \in I, j \in J\}$ est la loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles finies si et seulement si* $\left\{\begin{array}{l} \forall i \in I, \forall j \in J, \quad p_{i,j} \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = 1 \end{array}\right.$.

*Remarque* 3.1. Par définition, comme cette somme est finie, on peut sommer d'abord sur les lignes ou d'abord sur les colonnes :

$$\sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{i,j} = 1$$

## 3.2 Lois marginales

**Définition 3.3.** Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. Les lois de $X$ et $Y$ s'appellent les lois marginales du couple $(X, Y)$.

**Proposition 3.2.** *On a*

*pour tout $x_i \in X(\Omega)$,*

$$P(X = x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) \text{ notée } p_{i,\bullet}$$

*et*

*pour tout $y_j \in Y(\Omega)$,*

$$P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) \text{ notée } p_{\bullet,j}.$$

## 3.3 Loi conditionnelles

**Définition 3.4.** Soit $Y$ une v.a. sur $(\Omega, P)$ telle que $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j\in J}$. Soit $A$ un événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

La loi de $Y$ conditionnée par $A$ ou loi conditionnelle de $Y$ sachant $A$ est l'ensemble des probabilités

$$(P_A(Y = y_j))_{y_j\in Y(\Omega)} = \left(\frac{P((Y = y_j) \cap A)}{P(A)}\right)_{y_j\in Y(\Omega)}$$

**Définition 3.5.** Soit $X$ et $Y$ deux v.a. sur $(\Omega, P)$ telles que $X(\Omega) = (x_i)_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j\in J}$.

Soit $j \in J$. La loi de $X$ conditionnée par $(Y = y_j)$ est l'ensemble des valeurs

$$\left(P_{(Y=y_j)}\left(X = x_i\right)\right)_{x_i\in X(\Omega)} = \left(\frac{P(Y = y_j \cap X = x_i)}{P(Y = y_j)}\right)_{i\in I}$$

Soit $i \in I$. La loi de $Y$ conditionnée par $(X = x_i)$ est l'ensemble des valeurs

$$\left(P_{(X=x_i)}\left(Y = y_j\right)\right)_{y_j\in Y(\Omega)} = \left(\frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(X = x_i)}\right)_{j\in J}$$

## 3.4 Fonction de deux variables aléatoires

Soit $X$ et $Y$ deux v.a. réelles sur $\Omega$. Comme le couple $(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle sur $\Omega$, on peut définir pour une fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par $Z = g(X, Y)$.

On a $Z(\Omega) = \{g(x_i, y_j) | x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)\}$ : ensemble des valeurs prises par $Z$

Les $g(x_i, y_j)$ ne sont pas nécessairement distincts.

On a $P(Z = z_k) = \displaystyle\sum_{\substack{(x_i, y_j) \text{ tels que} \\ g(x_i, y_j) = z_k}} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$

# 4 Variables aléatoires indépendantes

## 4.1 Indépendance d'un couple de variables aléatoires

**Définition 4.1.** Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. sur $(\Omega, P)$ avec $X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j \in J}$.

On dit que $X$ et $Y$ sont indépendantes pour la probabilité $P$ si

$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$.

**Proposition 4.1.** *Si $X$ et $Y$ sont 2 v.a. indépendantes sur $(\Omega, P)$ alors pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a*

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A).P(Y \in B).$$

## 4.2 Variables aléatoires mutuellement indépendantes

**Définition 4.2.** Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a. sur un même espace probabilisé $(\Omega, P)$.

On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes pour la probabilité $P$ si $\forall x_1 \in X_1(\Omega)$, $\forall x_2 \in X_2(\Omega)$, ..., $\forall x_n \in X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1).P(X_2 = x_2) \dots P(X_n = x_n)$$

**Théorème 4.2.** *Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des v.a. mutuellement indépendantes sur $(\Omega, P)$, alors quelque soit $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, les événements $(X_i \in A_i)_{i=1,\dots,n}$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité $P$.*

**Proposition 4.3.** *Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des v.a. mutuellement indépendantes sur $(\Omega, P)$, alors elles sont indépendantes deux à deux.*

## 4.3 Somme de v.a. suivant la loi de Bernoulli

**Proposition 4.4.** *Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ des v.a. mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de même paramètre $p$ avec $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$. Alors la v.a. $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ binomiale de paramètres $n$ et $p$.*

*Remarque* 4.1. On utilise cette proposition pour modéliser $n$ expériences identiques et indépendantes avec 2 issues (succès et échec). La variable aléatoire somme compte le nombre de succès.

### 4.4 Indépendance de fonctions de v.a. indépendantes

**Théorème 4.5.** *Soit $X, Y$ deux v.a. sur $(\Omega, P)$ fini. Soit $f, g$ deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.*

*Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

## 5 Moments d'une v.a. réelle finie

### 5.1 Espérance

**Définition 5.1.** Soit $X$ une v.a.r. sur $\Omega$. On appelle espérance de $X$ le réel $E(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

Ce qui s'écrit également $E(X) = \sum\limits_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ avec $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$.

On a donc $E(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$.

**Proposition 5.1.** *Si pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $a \leqslant x \leqslant b$, alors $a \leqslant E(x) \leqslant b$.*

## 5.2 Propriétés de l'espérance : linéarité et croissance

**Proposition 5.2.** *Soit $X, y$ deux v.a.r. sur $(\Omega, P)$ et $a, b$ réels. On a*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

**Proposition 5.3.** *Soit $X, Y$ deux v.a.r. sur $\Omega$.*
*Si on a $X \leqslant Y$, c'est à dire $\forall \omega \in \Omega, \qquad X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.*

## 5.3 Théorème de transfert

**Théorème 5.4.** *Soit $g$ une fonction définie sur $X(\Omega)$ et $X$ une v.a.r. sur $(\Omega, P)$ fini.*
*On a $E(g(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$*
*$= \displaystyle\sum_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i)$.*

## 5.4 Espérance et indépendance

**Théorème 5.5.** *Soit $X$ et $Y$ deux v.a.r. sur $\Omega$.*
*Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

## 5.5 Variance et écart-type

**Définition 5.2.** Soit $X$ une v.a.r. finie. On appelle variance de $X$ le réel $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ et écart-type de $X$ le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On a donc $V(X) = \displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X - x_i)$.

*Remarque* 5.1. On a $V(X) \geqslant 0$ donc $\sigma(X)$ existe.

**Théorème 5.6** (Formule de Kœnig-Huygens).

*On a pour une v.a.r. finie $X$ :*

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

**Théorème 5.7.** *Soit $X$ une v.a. finie. On a pour tous réels $a, b$*

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

## 5.6 Espérance et variance des lois usuelles finies

— Si $X$ est une v.a. finie constante, $X = c$ avec $P(X = c) = 1$, alors

$$E(X) = c \text{ et } V(X) = 0.$$

— Si $X$ suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ : $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$ alors

$$E(X) = \frac{1+n}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

— Si $X$ suit la loi uniforme sur $\Omega$ : $X(\omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$, alors

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

et $V(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$.

— Si $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ : $\mathcal{B}(p)$, alors

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p).$$

— Si $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ : $\mathcal{B}(n,p)$, alors

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p).$$

*Démonstration.*

— Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Alors $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{n} \Longrightarrow$ $\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{2}}$.

On calcule également

$E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

où on a utilisé $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$.

On trouve

$V(X) = \dfrac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12}$

$\Longrightarrow \boxed{V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}}$.

— Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

  $X$ prend les valeurs 0 avec la probabilité $1 - p$ et la valeur 1 avec $p$.

  Alors $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p$ soit $\boxed{E(X) = p}$. On calcule également $E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$. Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2$ soit $\boxed{V(X) = p(1-p)}$.

— Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

  Alors $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Mais on sait que $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ pour $k \geqslant 1$.

  On obtient :

$$E(X) = 0 + \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

On reconnait une formule du binôme :

$$E(X) = np\,(p+1-p)^{n-1} \text{ soit } \boxed{E(X) = np}.$$

(résultat facile à obtenir par linéarité)

On calcule maintenant $E(X(X-1))$ qui donnera $E(X^2) - E(X)$ :

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Mais on sait que $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ pour $k \geqslant 2$.

On obtient :

$$E(X(X-1)) = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}.$$

On reconnait une formule du binôme :

$$E(X(X-1)) = n(n-1)p^2\,(p+1-p)^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2.$$

Et,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$$

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np\,((n-1)p + 1 - np).$$

D'où $\boxed{V(X) = np(1-p)}$.

□

## 5.7 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Théorème 5.8.** *Si $X$ est une v.a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, P)$ d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$