Chapitre 16 - TD - Correction exercice 15

Exercice 15. :

On définit pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}$.

La fonction $t \longmapsto t^n\sqrt{1+t}$ est continue sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (u_n) est bien définie.

On a pour $t \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}$

$\sqrt{1} \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$ et $t^n \geqslant 0$, d'où

$t^n \leq t^n\sqrt{1+t} \leq t^n\sqrt{2}$.

L'intégrale est croissante, les bornes sont dans le bon sens et les fonctions sont continues

alors $\int_0^1 t^n dt \leq \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^n\sqrt{2}\,dt$

ce qui donne :

$$\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\sqrt{2}\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

soit

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors d'après le théorème d'encadrement

(u_n) converge vers 0

On part de $u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,dt$. pour $n \in \mathbb{N}$

on pose $u(t) = \sqrt{1+t}$ $v(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$

u, v sont de classe C^1 sur $[0,1]$

alors. on peut intégrer par parties :

$$u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \qquad v'(t) = t^n$$

et

$$u_n = \left[\sqrt{1+t}\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{2(n+1)\sqrt{1+t}}\,dt$$

On encadre la dernière intégrale :

pour $t \in [0,1]$

$$0 \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

alors

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{2(n+1)\sqrt{1+t}} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)}$$

l'intégrale est croissante alors.

$$\int_0^1 0\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{2(n+1)\sqrt{1+t}}\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)}\,dt$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{2(n+1)\sqrt{1+t}}\,dt \leq \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{u_n = \dfrac{\sqrt{2} \times 1}{n+1} - \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{2(n+1)\sqrt{1+t}}\,dt}$

d'où $$n\,u_n = \sqrt{2}\,\frac{n}{n+1} - n\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{2(n+1)\sqrt{n+1}}\,dt$$

mais

$$0 \leq n\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{2(n+1)\sqrt{1+t}}\,dt \leq \frac{n}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 0$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,u_n = \sqrt{2}$