CORRECTION

Test Dimensions
2020

Nom et prénom :

Question 1 ♣ On donne la famille $(\boldsymbol{e_1} = (1,0,2,-1), \boldsymbol{e_2} = (1,0,3,1)$. Quels vecteurs $\boldsymbol{e_3}$ parmi les suivants rendent la famille $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ libre ? $\boldsymbol{e_3}$ =...

[A] $(1,0,1,-3)$. ■ $(2,0,1,0)$ [C] $(0,0,-1,-2)$ ■ $(1,1,2,-1)$ [E] *Aucun*

Explication : On a $(0,0,-1,-2) = \boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$ et $(1,0,1,-3) = -2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$.

Question 2 Le noyau d'une application linéaire f est l'ensemble des :

[A] multiples de $\overrightarrow{0}$ [B] vecteurs qui sont égaux à $\overrightarrow{0}$ ■ antécédents de $\overrightarrow{0}$ [D] images de $\overrightarrow{0}$

Explication : C'est la définition $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{\overrightarrow{0}_F\})$.

Question 3 ♣ L'image d'une application linéaire $f : E \to F$ est

[A] F ■ l'espace vectoriel engendré par les images [C] l'ensemble des antécédents [D] $f(x)$ ■ $f(E)$ [F] *Aucune...*

Explication : L'image de f est l'ensemble des images ce qui correspond à $f(E)$. Par théorème, $\operatorname{Im} f$ est un sev de F.

Question 4 Si f est injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, alors son image est

[A] une droite [B] $\overrightarrow{0}$ [C] $\mathbb{R}^3$ ■ un plan [E] son noyau

Explication : Si f est injective alors $\operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{0}_E\}$. Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Ker} f = 2$.

Question 5 Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ avec $f(1,0) = (2,3)$ et $f(0,1) = (-1,2)$, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

■ $f(x,y) = (2x-y, 3x+2y)$ [B] $f(x,y) = (2x+3y, -x+2y)$ [C] $f(x,y) = (5x,y)$ [D] $f(x,y) = 5x+y$

Explication : Par linéarité, $f(x,y) = xf(1,0) + yf(0,1) = (2x-y, 3x+2y)$

Question 6 Si $f(x,y) = (1/x, y)$, alors f est une symétrie

■ Faux [B] Vrai

Explication : L'application f n'est pas linéaire car $f(0,0)$ n'est pas défini.

Question 7 On définit f par $\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = Q$ avec $Q(X) = P(-X)$. f est une symétrie ?

■ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

Explication : f est linéaire car $(\alpha P + Q)(-X) = \alpha P(-X) + Q(-X)$ et $f \circ f = id_{\mathbb{R}[X]}$ donc f est une symétrie.

Question 8 On définit g par $\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad g(P) = P(0)(X+1)$. g est une projection ?

$\boxed{\text{A}}$ Faux ■ Vrai

Explication : g est linéaire et $g \circ g = g$.

Question 9 Si s est une symétrie, alors s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G avec

$\boxed{\text{A}}$ $F = \mathrm{Im}(s)$ et $G = \mathrm{Ker}(s - id_E)$ $\boxed{\text{B}}$ $F = \mathrm{Im}(s)$ et $G = \mathrm{Ker}(s)$

■ $F = \mathrm{Ker}(s - id_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + id_E)$ $\boxed{\text{D}}$ $F = \mathrm{Im}(s - id_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s - id_E)$

Explication : s est une symétrie par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants : $\mathrm{Ker}(s - id_E)$ parallèlement à l'ensemble des vecteurs changés en leurs opposés : $\mathrm{Ker}(s + id_E)$

Question 10 ♣ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On a $E = F \oplus G \iff$

■ $\dim E = \dim(F+G)$ et $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$ ■ $E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

$\boxed{\text{C}}$ $E = (F+G) \cup (F \cap G)$ ■ $\dim E = \dim F + \dim G$ et $\dim(F \cap G) = 0$ $\boxed{\text{E}}$ *Aucune...*

Question 11 ♣ Soit u une application linéaire de E dans F. Soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E. u est injective si et seulement si

$\boxed{\text{A}}$ $\mathrm{Ker}(u) = E$ $\boxed{\text{B}}$ $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u(e_i) = \overrightarrow{0}$ ■ la famille $(u(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ est libre

■ $\dim(\mathrm{Im}(u)) = n$ $\boxed{\text{E}}$ $\mathrm{Im}(u) = F$ $\boxed{\text{F}}$ *Aucune...*

Explication : Le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim E \iff \dim(\mathrm{Ker} u) = 0 \iff \mathrm{Ker}(u) = \{\overrightarrow{0}\} \iff u$ est injective

Question 12 ♣ Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que l'équation $f(x,y) = (0,0)$ équivaut à $(x,y) = (0,0)$. Alors,

$\boxed{\text{A}}$ f est nulle ■ $\mathrm{rg}(f) = 2$ ■ f est un isomorphisme $\boxed{\text{D}}$ $\mathrm{Im}(f) = \{\overrightarrow{0}\}$

$\boxed{\text{E}}$ *Aucune...*

Explication : $f(x,y) = (0,0)$ équivaut à $(x,y) = (0,0)$ signifie que f est injective. Comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, alors f injective $\iff$ f est bijective. Donc f est un isomorphisme.