Chapitre 16 - TD - 27 avril 2020

TD 16 - Exercice 8 :

Soit la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}^*$, par : $f(x) = \dfrac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$.

1. Écrire le développement limité à l'ordre 4 de $f(x)$ en 0. En déduire le prolongement par continuité de f en 0.
2. Montrer que f, ainsi prolongée, est dérivable en 0. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 et au voisinage de ce point.

on calcule

$$x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x\left(\cancel{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

et

$$\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \cancel{1} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

alors

$$\frac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} \underset{0}{=} \frac{\frac{x^3}{3} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^6)}{\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)}$$

$$= 2 \times \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30} + o(x^6)}{x^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)}$$

et $\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$ avec $u = \dfrac{x^2}{12} + o(x^3)$

D'où

$$f(x) \underset{0}{=} 2 \times \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{30} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3) \cancel{+ \frac{x^4}{144} + o(x^4)} + o(x^4)\right)$$

$$= \frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{30} \times 1\right)x^3 + o(x^4)$$

$$f(x) \underset{0}{=} 0 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{18}\right)x^3 + o(x^4)$$

DL_4 de f en 0

f n'est pas définie en 0 et $\lim\limits_{0} f = 0$ alors on prolonge par continuité en posant $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

On a $\tilde{f}(x) \underset{0}{=} 0 + \frac{2}{3} x + o(x)$

$\tilde{f}$ a un DL_1 en 0 et $\tilde{f}$ est définie en 0 alors

$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} \underset{0}{=} \frac{2}{3} + o(1)$ d'où $\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} \underset{0}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$ donc $\tilde{f}$ est dérivable

en 0 et $\tilde{f}'(0) = \frac{2}{3}$

et la tangente est $y = \ldots$

TD 16 - Exercice 10 :

On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}e^{-u_n}$.

1. À l'aide d'un encadrement, montrer que (u_n) converge vers 0.
2. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire un développement de la forme : $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
3. Déterminer a, b réels tels que $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
4. Déterminer a, b, c réels tels que $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \dfrac{c}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

1) $u_1 > 0$ et $\dfrac{1}{n+1} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $e^{-u_n} > 0$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < e^{-u_n} < 1$ par propriété de exp

d'où $0 < \dfrac{1}{n+1} e^{-u_n} < \dfrac{1}{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_{n+1} < \dfrac{1}{n+1}$. Or $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

alors par théorème d'encadrement $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$

2) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{u_{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = e^{-u_n}$ et $e^{-u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-0} = 1$

car exp est continue en 0

décalage d'un rang dans la limite

Alors $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$

d'où $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}}$ car $\dfrac{u_n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

On a alors le développement

$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$ car $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \Leftrightarrow a_n \underset{+\infty}{=} b_n + o(b_n)$

3) On injecte le DL dans la définition de u_n :

$u_{n+1} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n+1} e^{\underbrace{-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}}$ or $e^u \underset{0}{=} 1 + u + o(u)$

avec $u = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où $o(u) = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1}\left(1 + \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

on décale d'un rang

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{(n-1)n} + o\left(\frac{1}{(n-1)n}\right)$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \quad \text{donc} \quad o\left(\frac{1}{n(n-1)}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^2} \times \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}}_{\frac{1}{1-u}} = \frac{1}{n^2}\left(\underbrace{1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{1+u+o(u)}\right)$$

alors

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

et on recommence ...

TD 17 - Exercice 2 :

Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :
$\vec{a} = (3,2,1,0)$, $\vec{b} = (2,3,4,5)$, $\vec{c} = (0,1,2,3)$, $\vec{d} = (1,2,1,2)$, $\vec{e} = (0,-1,2,1)$.

Méthode 1 : Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ avec $\vec{u} = (x, y, z, t)$.

$\vec{u} \in \mathrm{Vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}) \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^5 : \vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} + \varepsilon\vec{e}$

$$\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) : \begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \delta = x \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma + 2\delta - \varepsilon = y \\ \alpha + 4\beta + 2\gamma + \delta + 2\varepsilon = z \\ 5\beta + 3\gamma + 2\delta + \varepsilon = t \end{cases}$$

on passe à la version matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & x \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & y \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & z \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 1 & t \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -10 & -6 & -2 & -6 & x-3z \\ 0 & -5 & -3 & 0 & -5 & y-2z \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & z \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & x-3z+2t \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -4 & y-2z+t \\ \boxed{1} & 4 & 2 & 1 & 2 & z \\ 0 & \boxed{5} & 3 & 2 & 1 & t \end{array}\right)$$

La 1ère ligne devient $0 = x - y - z + t$

méthode 2 : la matrice a 3 pivots donc de rang 3 donc

$\mathrm{rg}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}) = 3$

⚠ Rappel $\dim(\underbrace{\mathrm{Vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e})}_{=F}) = \mathrm{rg}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e})$

$\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathrm{Vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}) \iff x - y - z + t = 0$

donc ceci est une équation de $\mathrm{Vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e})$

on résout l'équation :

$x = y + z - t \iff \exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 :$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc solutions = espace de dim 3 base de F

3ème méthode $\mathrm{Vect}(\cancel{\vec{a}}, \cancel{\vec{b}}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}) = \mathrm{Vect}(\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}) = F$

car $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$ ~~et~~ $\vec{b} = 2\vec{d} + \vec{e}$ et on montre que $(\vec{c}, \vec{d}, \vec{e})$ est libre

TD 17 - Exercice 13 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, z)$.
Montrer que f est linéaire. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
Déterminer $f(P)$ où P est le plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$.

TD 17 - Exercice 8 :

On considère la famille de polynômes (P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par $P_1 = 1 + 3X - X^2$, $P_2 = 1 + 4X$, $P_3 = 2X - X^2$.

1. Montrer que $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$ et $G = \text{Vect}(P_3)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
2. Déterminer les expressions analytiques des projections sur F et G.

TD 17 - Exercice 6 :

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{4x}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit D l'application définie sur E par $D : f \longmapsto f'$. Montrer que D est un automorphisme de E. Déterminer son application réciproque.

TD xx - Exercice xx :