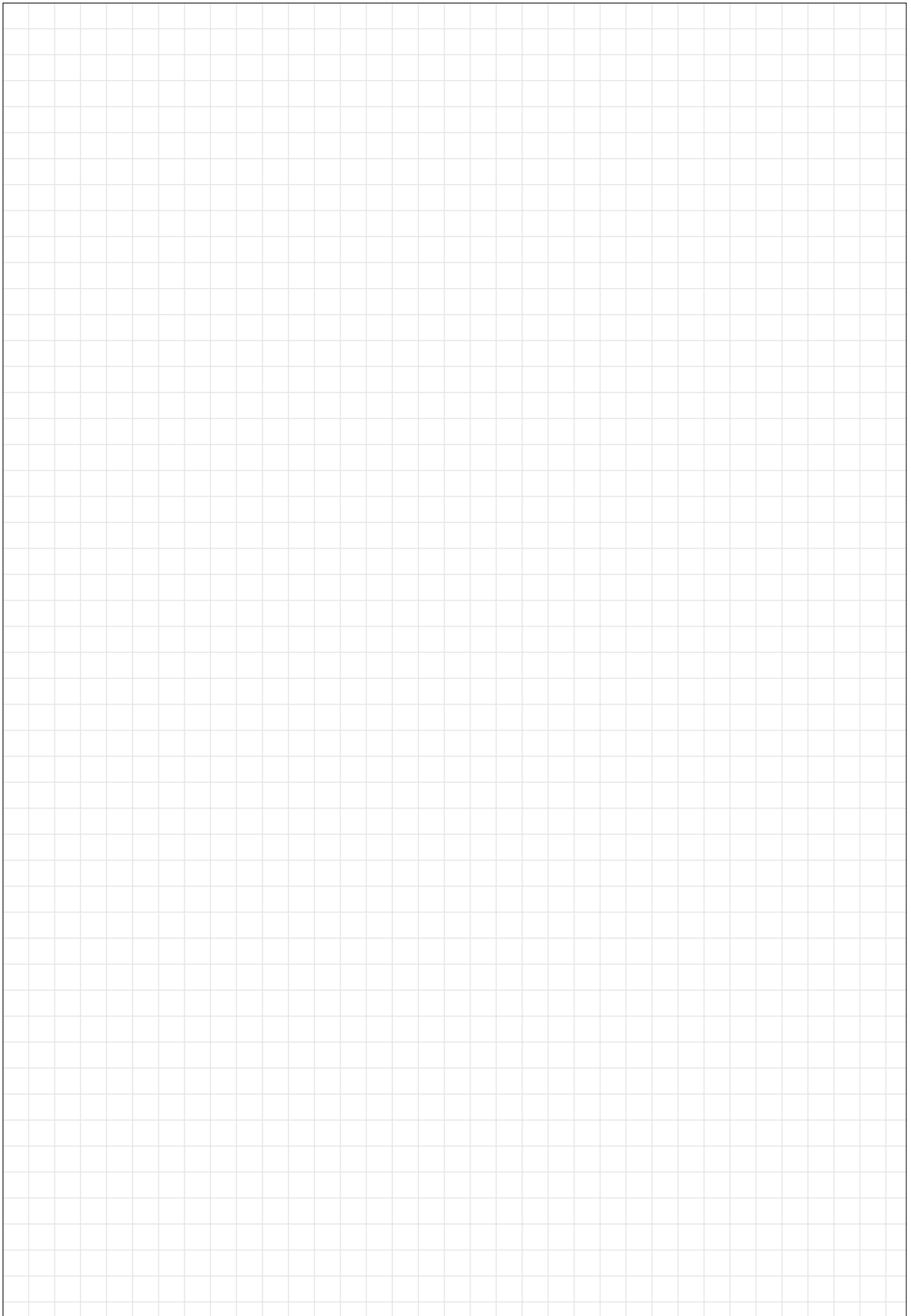


Chapitre 15 - TD - 23 mars 2020**Exercice 18 :**

Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$
 $P \longmapsto \varphi(P) = P' - (X-2)P$ et $\psi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $P \longmapsto \psi(P) = P - (X-2)P'$.

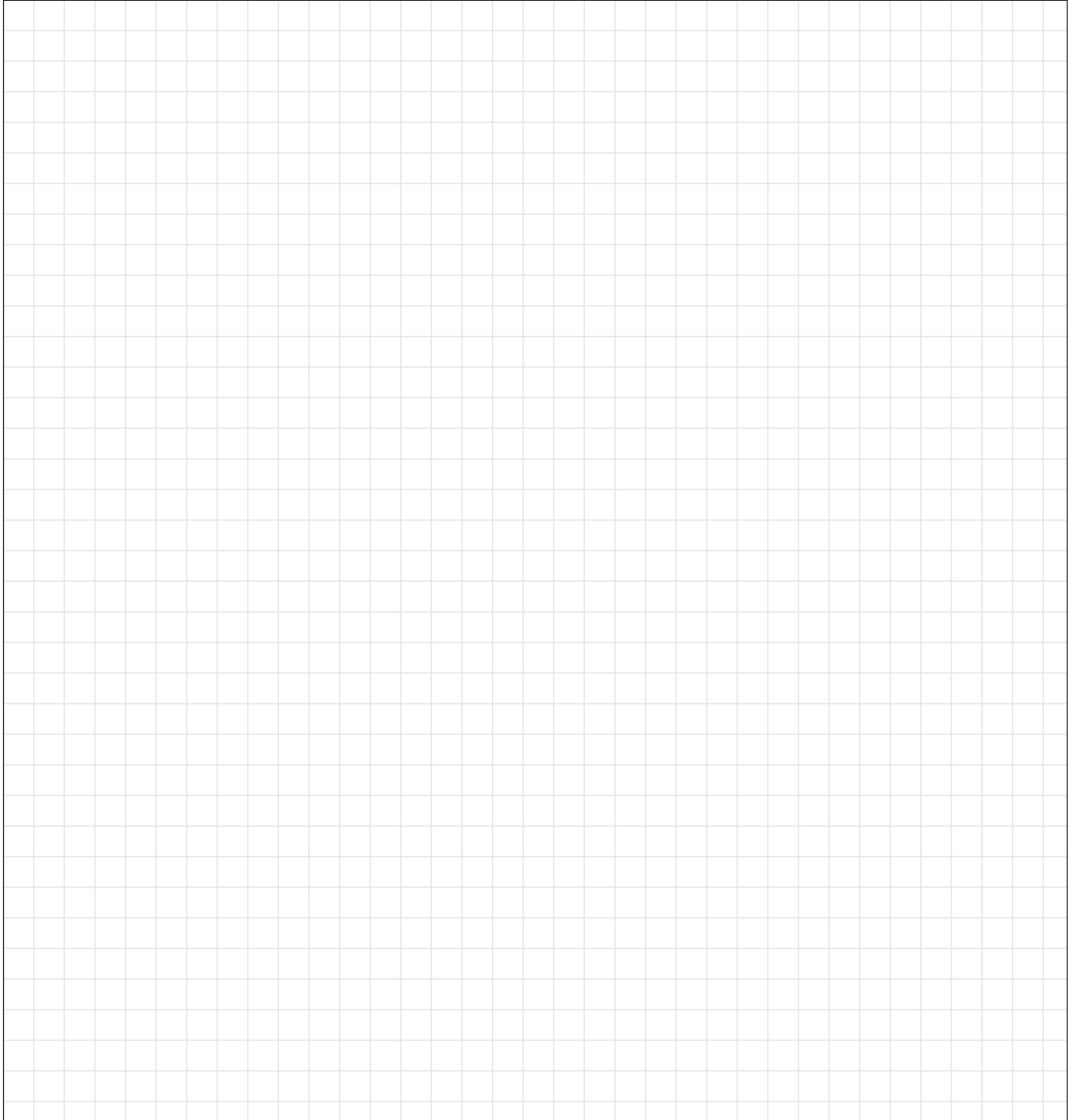
Montrer que φ et ψ sont linéaires et déterminer leurs noyau et image. Étudier l'application $\varphi \circ \psi$ (rang, noyau, image).

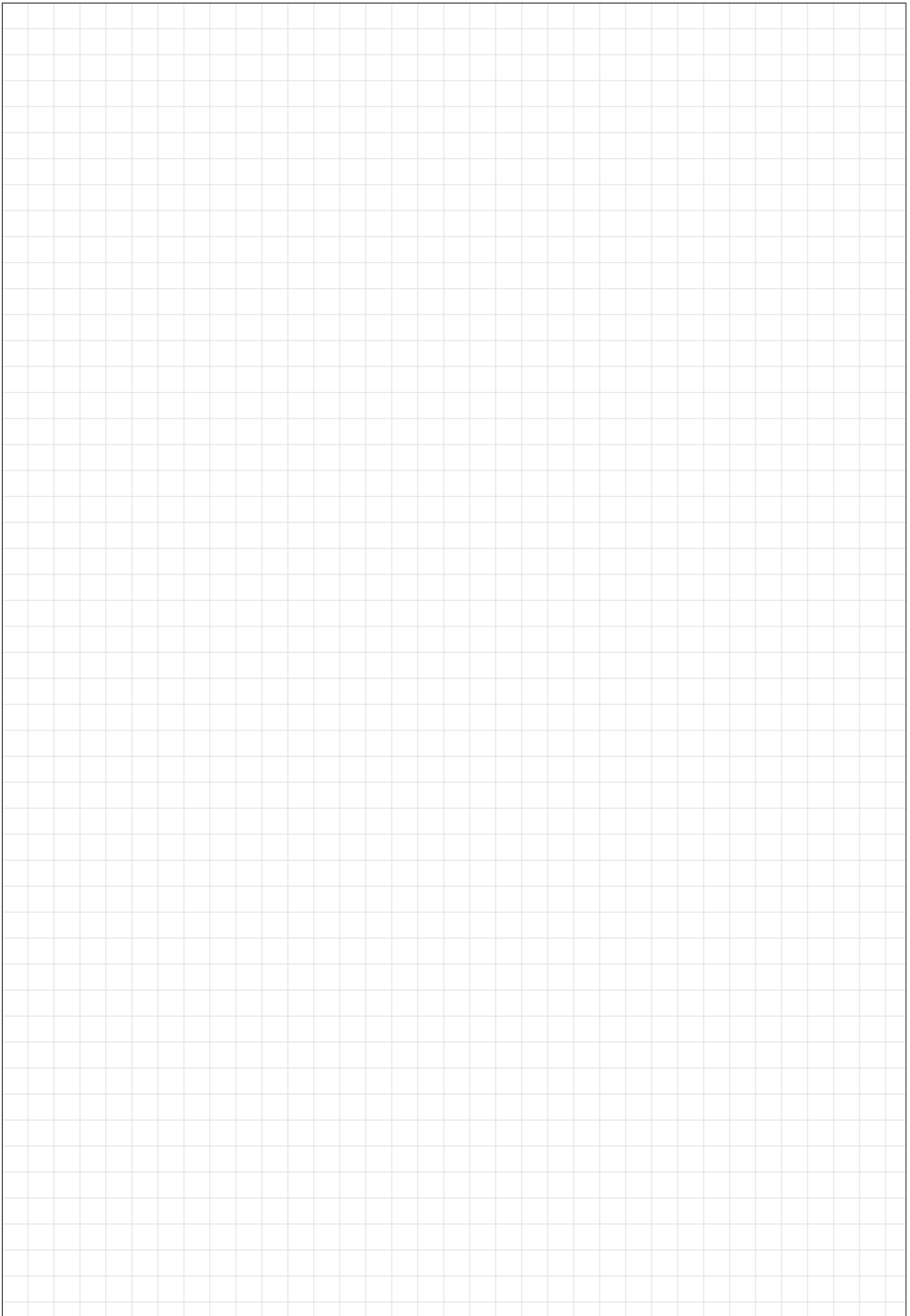




Exercice 19 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer le noyau et l'image de f .

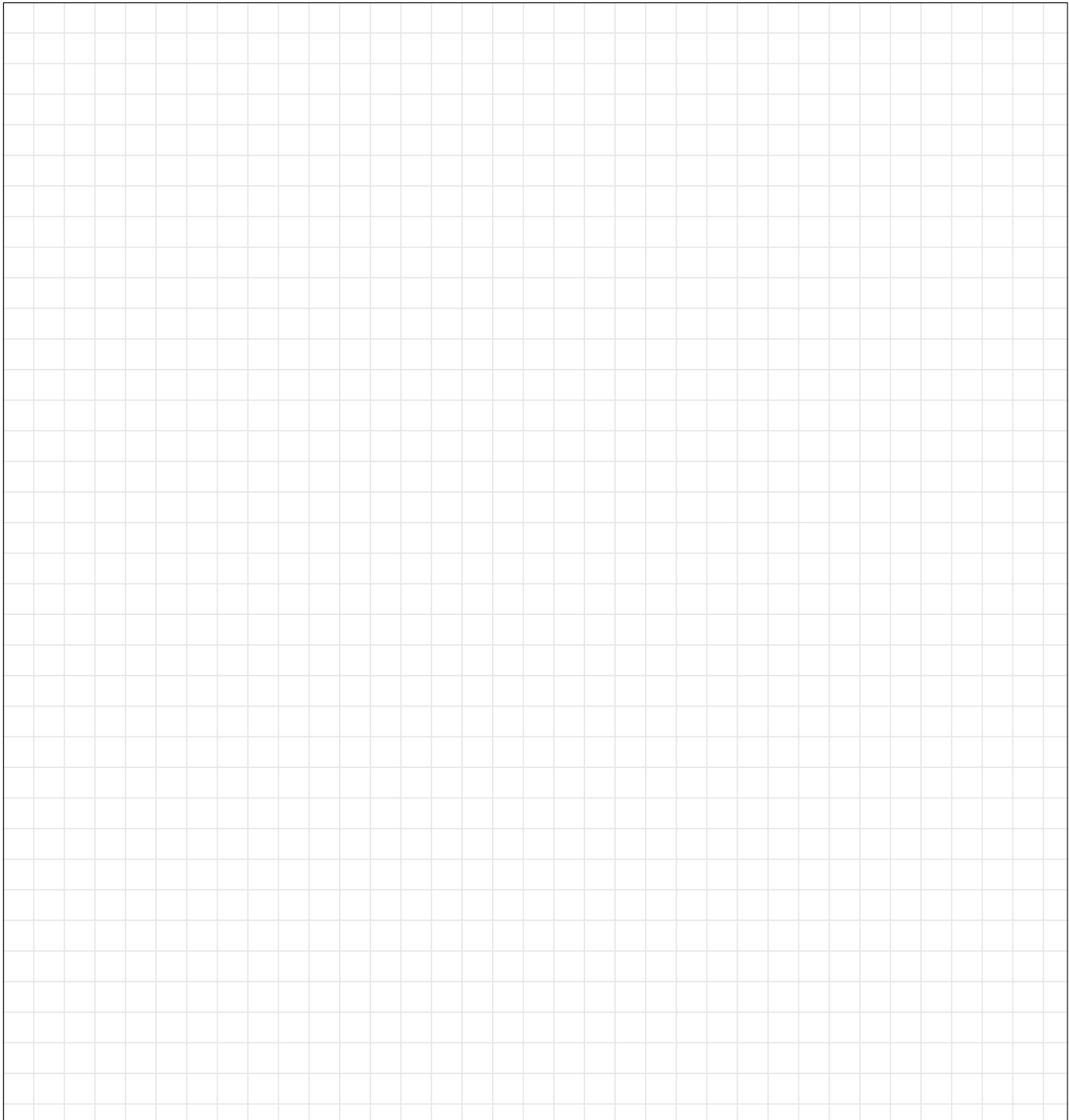


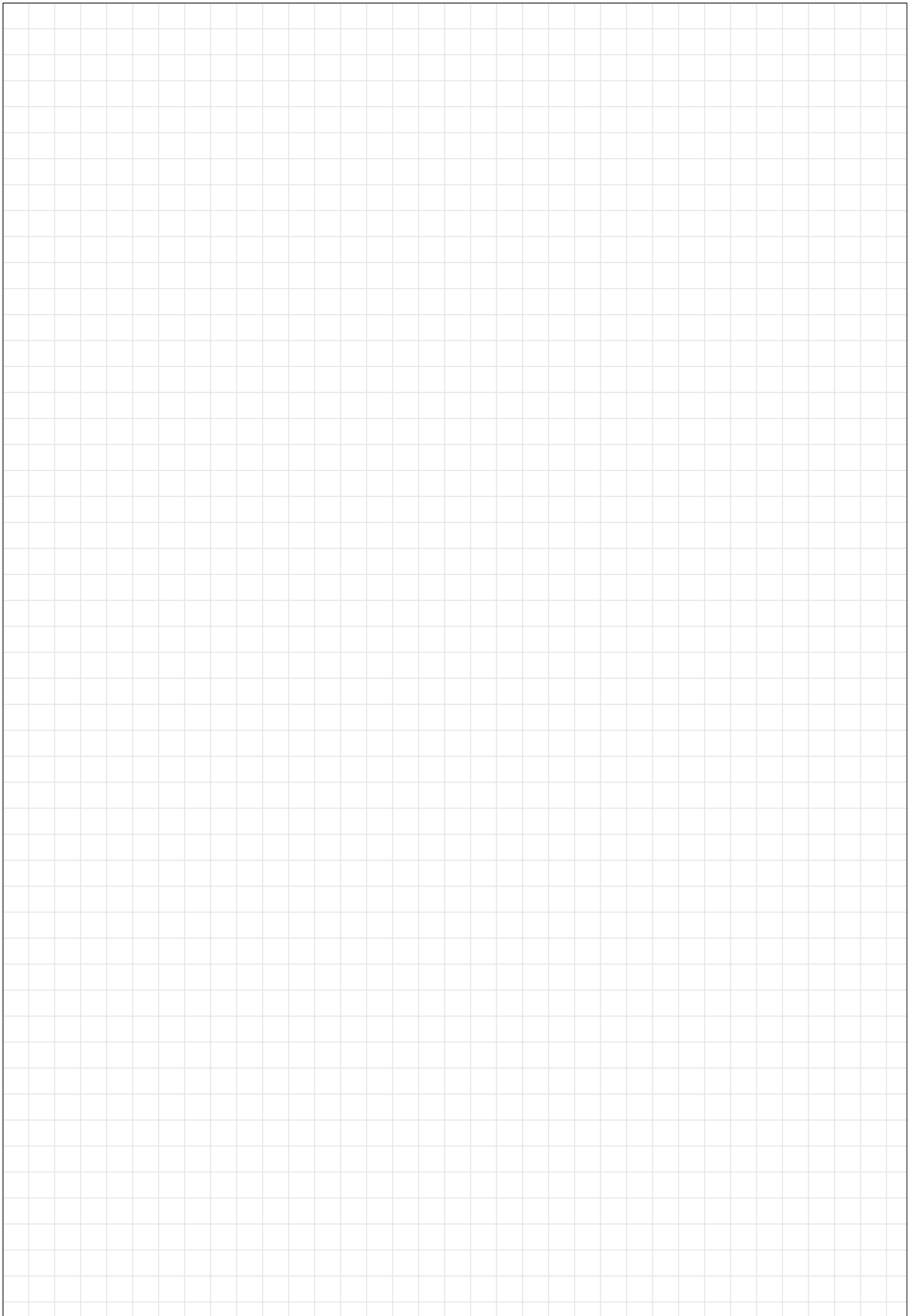


Exercice 9 :

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \middle| (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \middle| (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et une base de G .

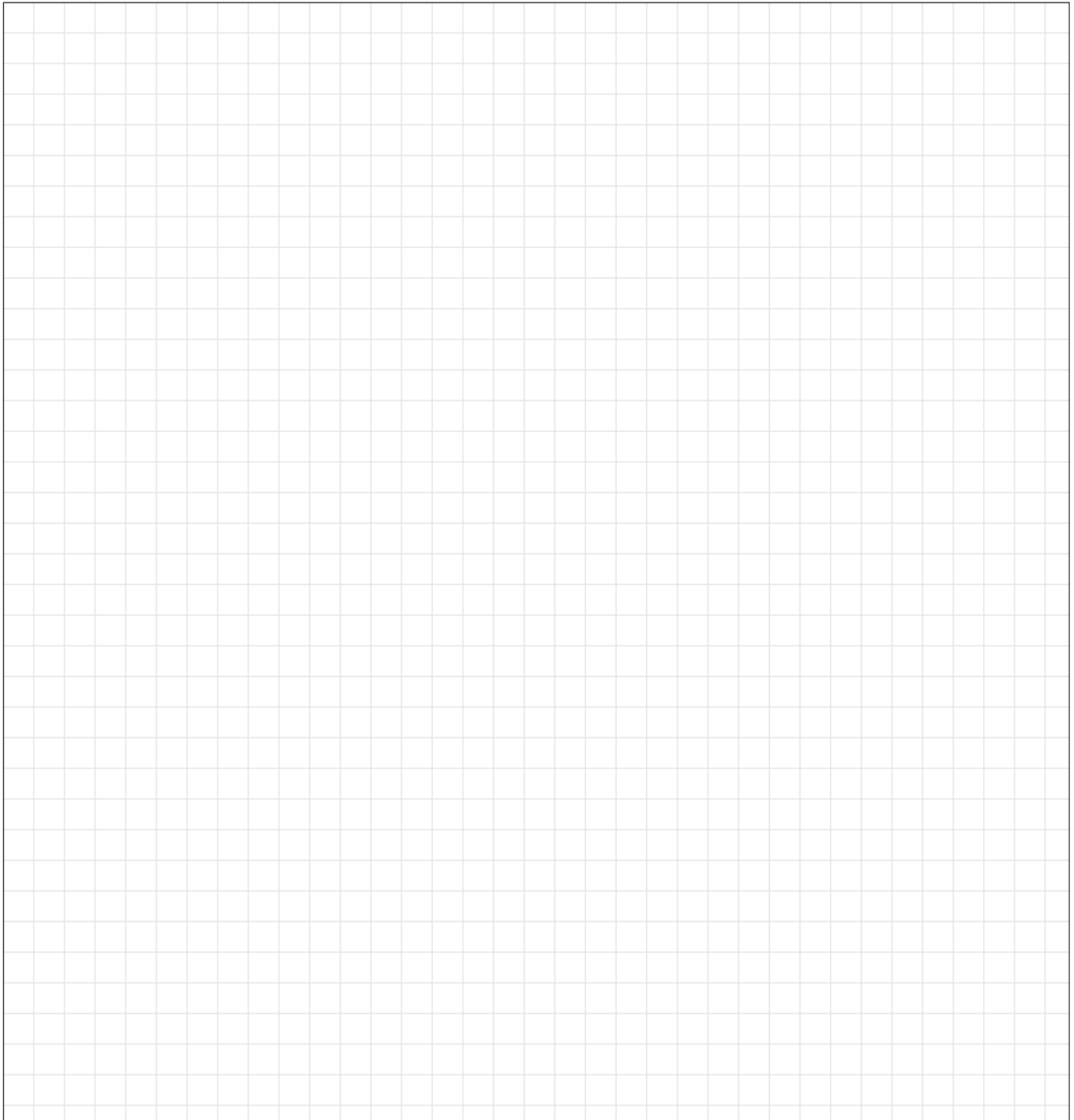


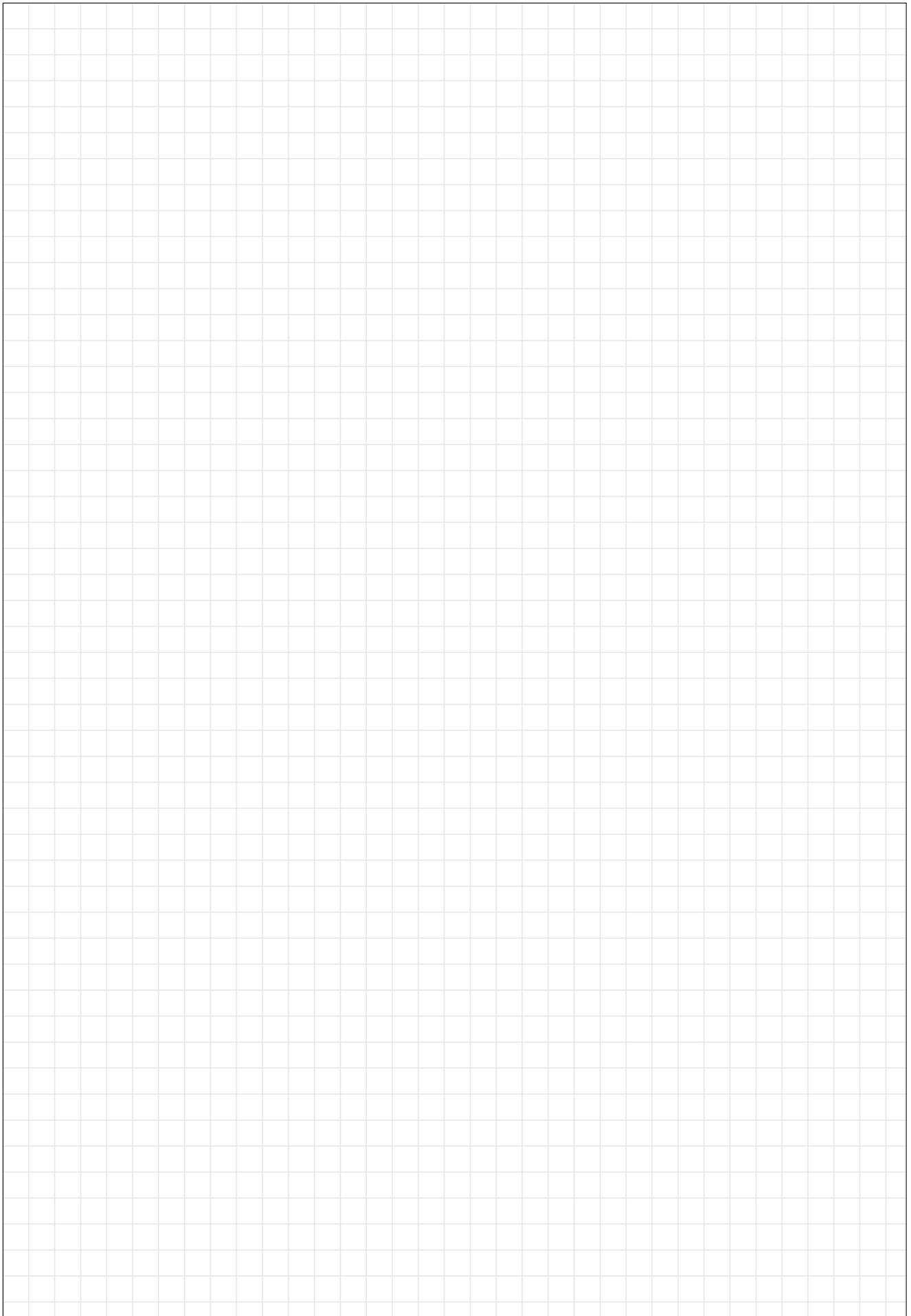


Exercice 13 :

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on pose $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 1, 0)$ et $\vec{u}_4 = (1, 1, 1, 1)$. Puis on définit $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $G = \text{Vect}(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$.

Déterminer des équations de F et G . Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E .
Déterminer l'expression analytique de la projection vectorielle p sur F parallèlement à G .



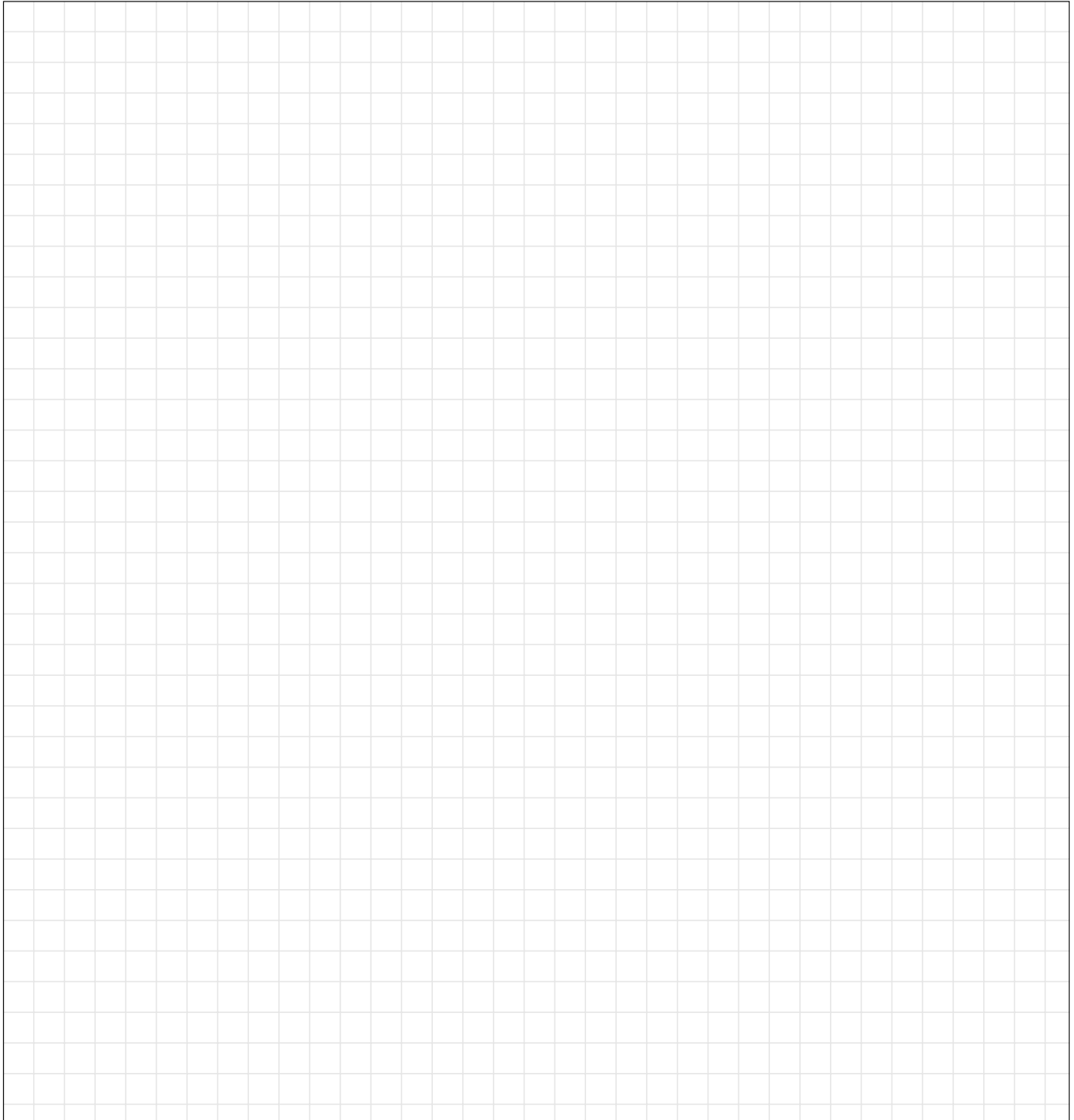


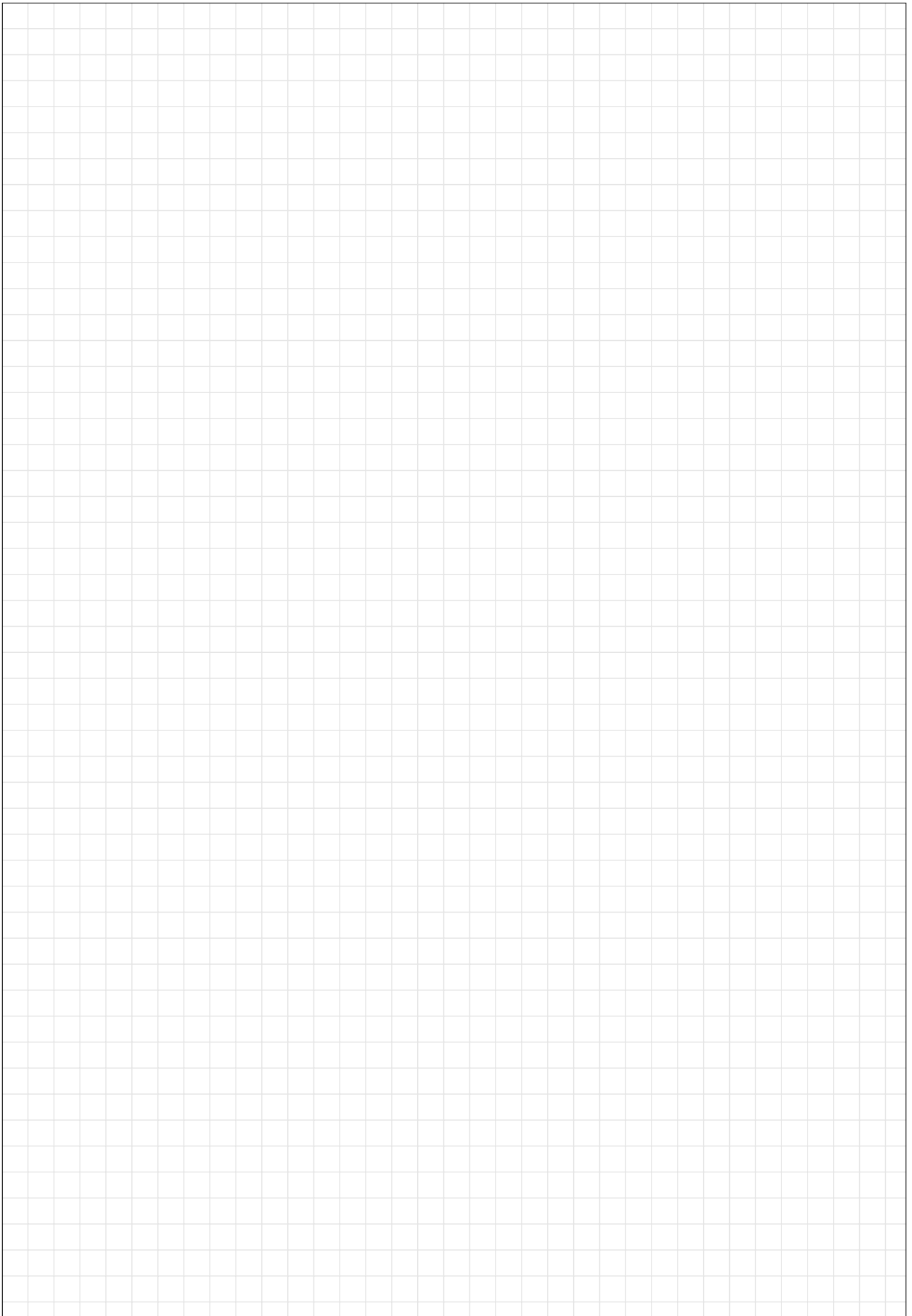
Exercice 10 :

Soit E l'espace des fonctions réelles à valeurs réelles. Soit a, b deux réels. On définit :

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2a - x)\} \text{ et } G = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2b - f(2a - x)\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $b = 0$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

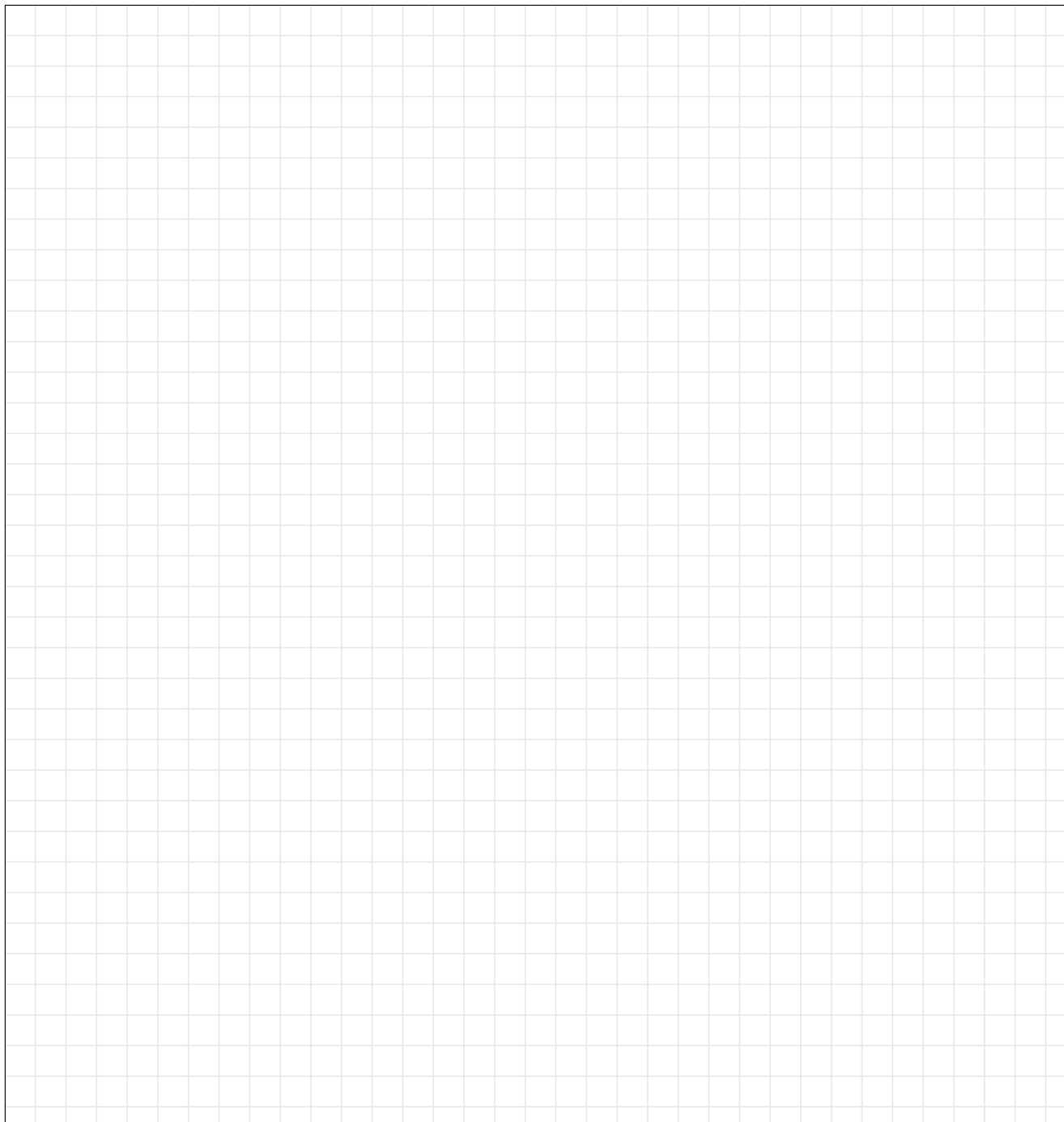


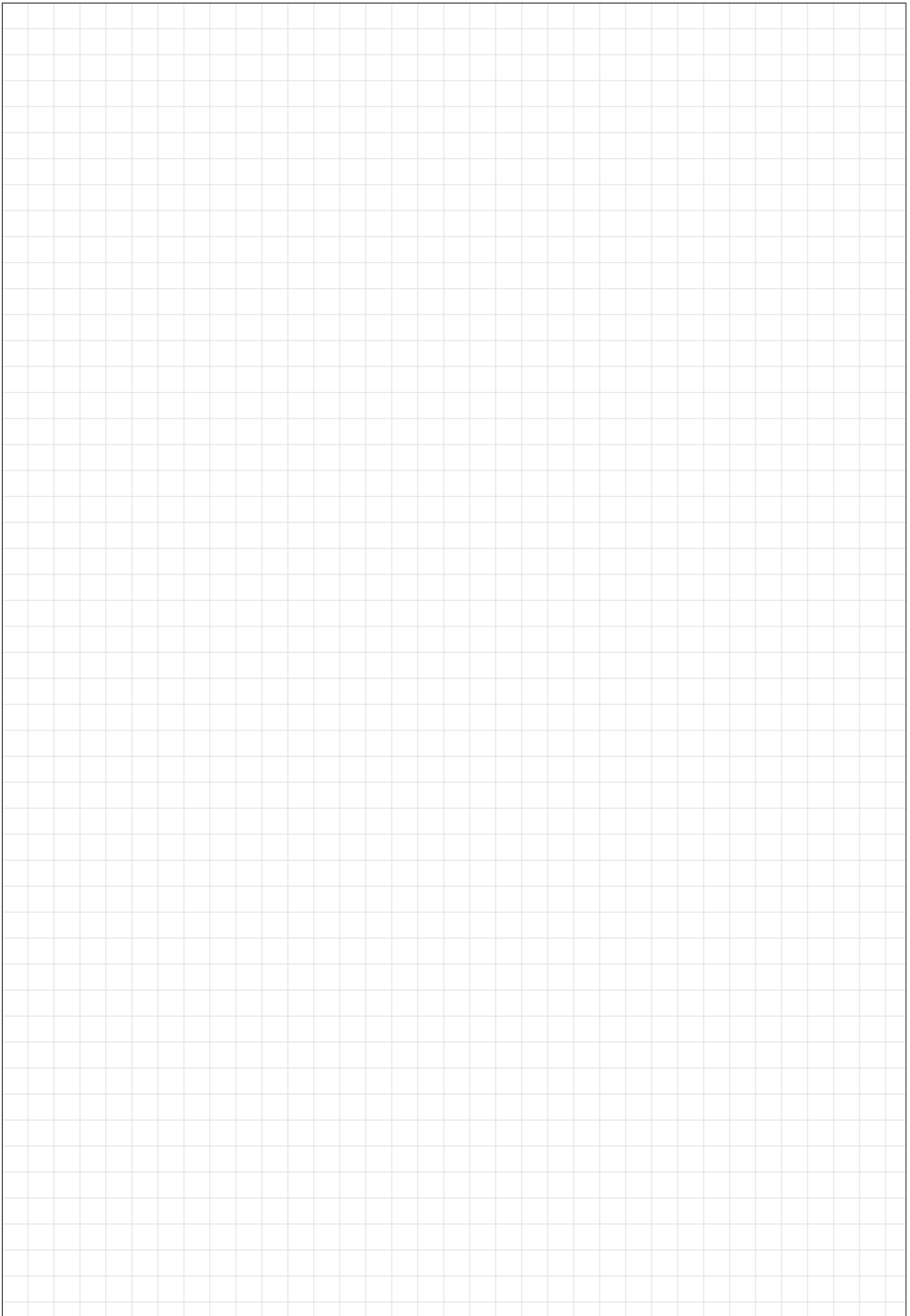


Exercice 21 :

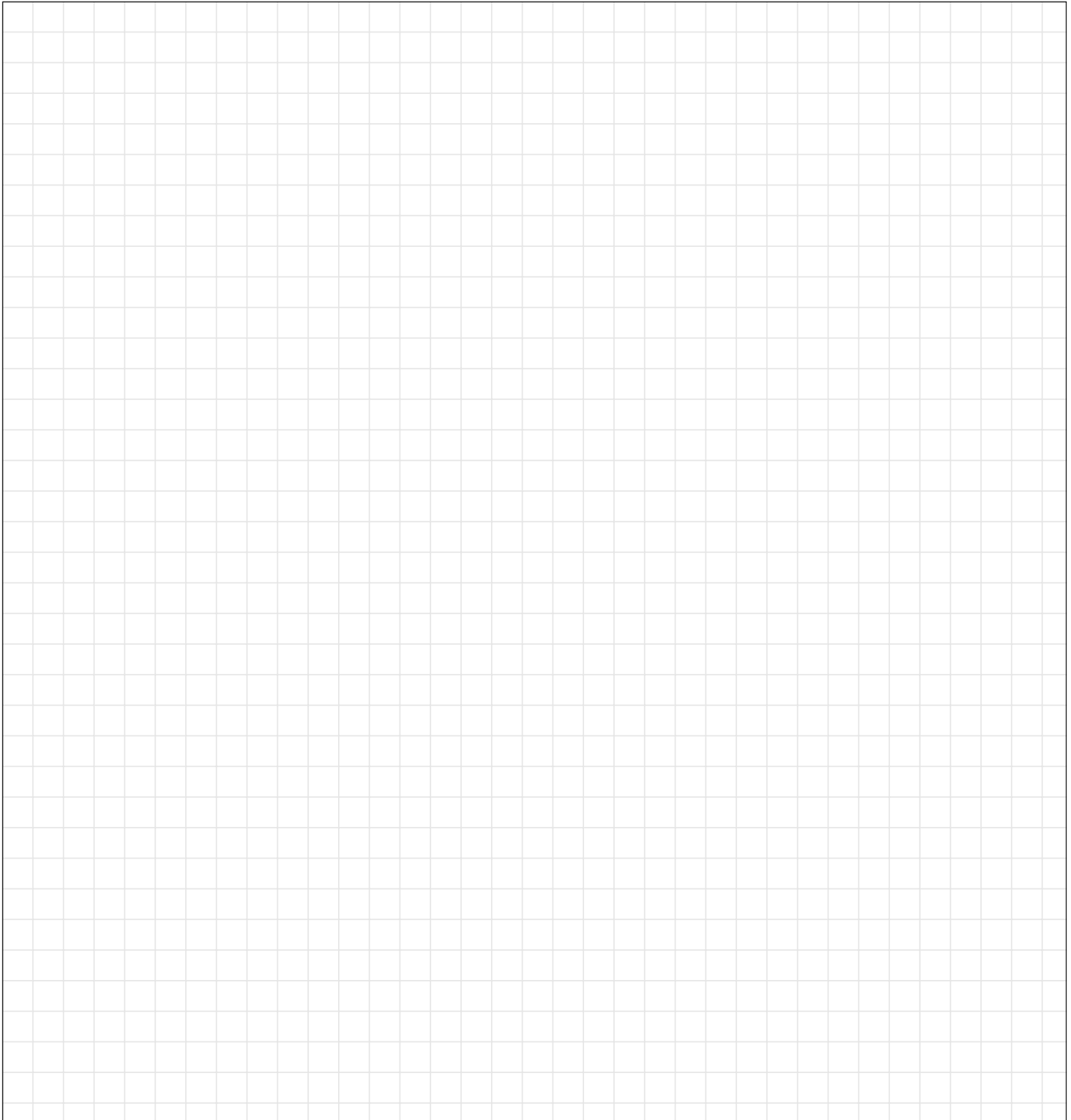
Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2id_E = 0$.

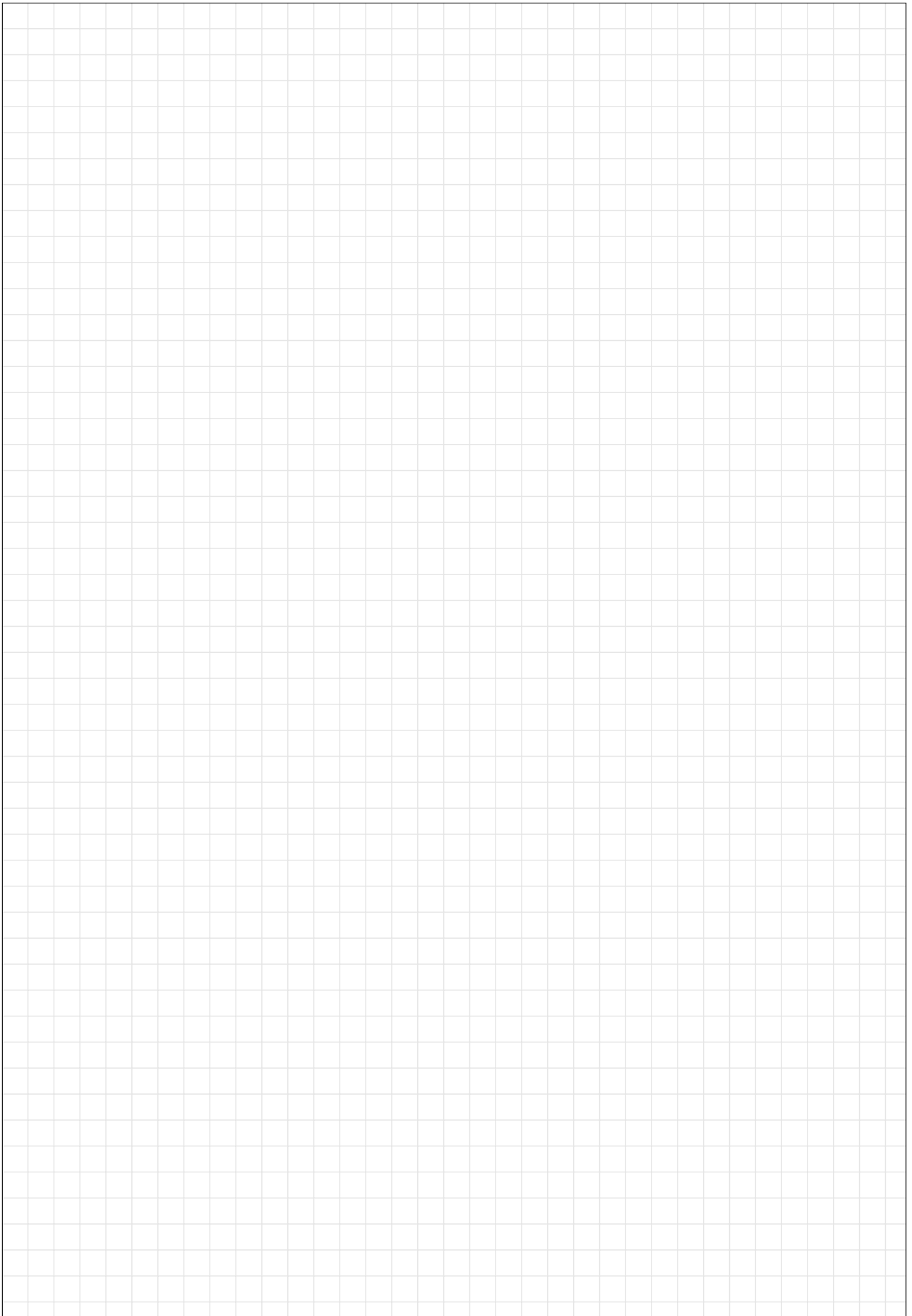
1. Montrer que u est un automorphisme et calculer u^{-1} .
2. Montrer que $\forall x \in E, u(x) - 2x \in \text{Ker}(u - id_E)$ et $u(x) - x \in \text{Ker}(u - 2id_E)$.
3. Montrer que $\text{Ker}(u - id_E)$ et $\text{Ker}(u - 2id_E)$ sont supplémentaires dans E .





Exercice xx :





Exercice xx :

