Chapitre 15 et 16 - TD - 23 mars 2020

TD 16 - Exercice 9 :

Déterminer un équivalent simple pour les suites suivantes :

a) $u_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ b) $v_n = \sqrt{2n^2+n} - n$ c) $w_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$ d) $x_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$

Indications :

a) on encadre $\lfloor x \rfloor$

b) ~~on utilise la qté conjuguée $\sqrt{2n^2+n} + n$~~ non !

c) direct

d) on calcule la somme.

$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \iff \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

a) On a pour $n \in \mathbb{N}$ $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n} < \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ par définition

$\Rightarrow \sqrt{n} - 1 < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n}$. On divise pour $n \in \mathbb{N}^*$

$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}} \leq 1$. d'où, par théorème d'encadrement

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}} = 1$ donc $\boxed{\lfloor \sqrt{n} \rfloor \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}}$

On a aussi $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} + 42$

b) $v_n = \sqrt{2n^2+n} - n = \frac{n^2+n}{\sqrt{2n^2+n}+n}$

On factorise par le plus gros

$v_n = \sqrt{2n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right) - n \times 1$

$= n\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{2n}} - 1\right)$ donc $\frac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2} - 1$

$\frac{1}{2n} \to 0$, 1, $\sqrt{2}-1$

Alors $\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} (\sqrt{2}-1)n}$ ce qui s'écrit aussi $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}+1} n$

$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

c) On a $\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ par propriété

$\boxed{w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}}$

d) $x_n = 2\sum_{k=0}^{n} k + \underbrace{\sum_{h=0}^{n} 1}_{\text{négligeable}} \underset{+\infty}{\sim} 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \underset{+\infty}{\sim} n^2$

On a aussi $x_n = (n+1)^2$

donc $x_n \underset{+\infty}{\sim} n^2 + 2n + 1$ et $2n+1 \underset{+\infty}{=} o(n^2)$

TD 16 - Exercice 15 : On définit pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}$.

1. On encadre u_n
2. IPP puis on étudie $(n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on mq que ça converge vers $\sqrt{2}$.

Soit $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$
d'où $1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$
et $t^n \geqslant 0$ d'où $t^n \leq t^n\sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}\, t^n$

Les fonctions ci-dessus sont continues et l'intégrale est croissante et $0<1$, alors

$$\int_0^1 t^n\, dt \leq \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt \leq \sqrt{2}\int_0^1 t^n\, dt$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\sqrt{2}\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

soit $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$. Alors par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

TD 15 - Exercice 14 :

Dans l'espace $E=\mathbb{R}^3$, on pose $F=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2)$, $G=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e}_3)$ où $\overrightarrow{e}_1=(1,0,-1)$, $\overrightarrow{e}_2=(1,1,0)$ et $\overrightarrow{e}_3=(1,2,3)$.

Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E. Donner l'expression de la projection p sur F parallèlement à G, puis celle de la projection q sur G parallèlement à F.

TD 15 - Exercice 24 :

Déterminer si les applications suivantes sont des symétries ou des projections.

$\varphi_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\varphi_1(P) =$ le reste de la division de P par $(X+1)^3$

$f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_4(x,y,z) = (-3x+4y+6z, 4x-3y-6z, -4x+4y+7z)$

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme R reste de la division de P par $(X+1)^3$ donc φ_1 est bien définie.

Pour $(U,V) \in \mathbb{R}[X]^2$,

on a $U = (X+1)^3 Q_U + R_U$ avec $Q_U, R_U \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg R_U < \deg (X+1)^3$

et $V = (X+1)^3 Q_V + R_V$ avec $Q_V, R_V \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg R_V < \deg (X+1)^3$

alors $U+V = (X+1)^3(Q_U+Q_V) + R_U+R_V$

et comme $\deg(R_U+R_V) < \deg(X+1)^3$

R_U+R_V est le reste de la division de $U+V$ par $(X+1)^3$

d'où $\boxed{\varphi_1(U+V) = \varphi_1(U) + \varphi_1(V)}$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha U = (X+1)^3 \alpha Q + \alpha R_U$ et $\deg(\alpha R_U) < 3$

alors $\varphi_1(\alpha U) = \alpha R_U = \alpha\, \varphi_1(U)$

donc φ est linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ (endomorphisme)

Autre méthode :

La formule de Taylor pour P en $a=-1$ donne

$$P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(-1)}{k!}(X+1)^k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(-1)}{k!}(X+1)^k}_{\text{reste de la division de } P \text{ par } (X+1)^3} + \underbrace{(X+1)^3}_{(X+1)^3} \underbrace{\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(-1)}{k!}(X+1)^{k-3}}_{\text{quotient}}$$

donc $\varphi_1(P) = P(-1) + P'(-1)(X+1) + \frac{P''(-1)}{2}(X+1)^2$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

on calcule $\varphi_1 \circ \varphi_1(P) = \varphi_1(\varphi_1(P))$

on note $P = (X+1)^3 . Q + R$ avec $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ et deg $R < 3$

alors on a $\varphi_1(P) = R$ et $\varphi_1(R) = \ ?$

on écrit la division de R par $(X+1)^3$:

$$R = (X+1)^3 \times 0 + R \quad \text{alors} \quad \varphi_1(R) = R$$

$\varphi_1 \circ \varphi_1(P) = \varphi_1(\varphi_1(P)) = \varphi_1(R) = R = \varphi_1(P)$ pour tout P

donc $\boxed{\varphi_1 \circ \varphi_1 = \varphi_1}$ et φ_1 est linéaire donc

φ_1 est une projection

sur $\operatorname{Im} \varphi_1 = \operatorname{Ker}(\varphi_1 - id) = \mathbb{R}_2[X]$ (à prouver)

et parallèlement à $\operatorname{Ker} \varphi_1 = \{$ ens des multiples de $(X+1)^3$ $\} = \{$ ens des polynômes qui ont -1 comme racine triple $\}$ c'est un sev aussi (c'est le même) est un sev

⚠ Vect$((X+1)^3)$ est une droite : $\{ \underset{\text{scalaire}}{\alpha} (X+1)^3 \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

TD 15 - Exercice 21 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer le noyau et l'image de f.