Chapitre 17 - Espaces Vectoriels de Dimension Finie

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Bases en dimension finie

1.1 Dimension finie

Définition 1.1. On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemples

* $\mathbb{R}^3$ car $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille génératrice à 3 éléments (c'est aussi une base)

* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie car la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}42&2\\2&42\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}42&42\\42&42\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de ces matrices.

* $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie car $(1, X, X^2)$ est une base donc est génératrice

* $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie

Preuve : supposons que $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{R}[X]$.
Notons q le plus grand des degrés de la famille alors X^{q+1} n'est pas combinaison linéaire de la famille car $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\deg(X^{q+1}) > \deg(g_i)$
C'est une contradiction. Donc il n'y a pas de famille génératrice finie.

* L'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de dimension infinie car il contient les fonctions polynomiales (isomorphe à $\mathbb{R}[X]$)

* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ev des suites réelles est de dimension infinie (admis)

1.2 Existence de bases en dimension finie

Théorème 1.1 (Théorème de la base incomplète). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E. Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.*

Corollaire 1.2. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.*

Corollaire 1.3 (Théorème de la base extraite). *De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E, on peut extraire une base de E.*

Remarque : Dans E

$(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre $\quad (g_1, g_2, \dots, g_q)$ est génératrice de E

on peut trouver des vecteurs parmi $(g_1, \dots, g_q)$ pour compléter la famille libre en $(e_1, \dots, e_p, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_r})$ qui est une base

Exemple : Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $E = \mathrm{Vect}\big(\cancel{(0,0,0,0)}, (1,-1,0,0), (1,0,0,1), \cancel{(2,-2,0,0)}, (2,0,-1,0), (0,2,-1,0)\big)$. Donner une base de E.

inutile

① un vecteur non nul est une famille libre : $((1,-1,0,0))$ est une famille libre de E.

② on ajoute le deuxième vecteur et on vérifie que la famille reste libre : $((1,-1,0,0), (1,0,0,1))$ est libre car échelonnée (car non colinéaires)

③ le troisième vecteur $(2,-2,0,0)$ est CL des deux premiers donc on le jette

④ on ajoute le ~~troisième~~ quatrième vecteur et on vérifie que la famille reste libre :

si $\alpha(1,-1,0,0) + \beta(1,0,0,1) + \gamma(2,0,-1,0) = (0,0,0,0)$

alors $\begin{cases} \alpha + 2\gamma + \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$ donc la famille est libre.

⑤ $(0,2,-1,0) = 1 \times (2,0,-1,0) - 2 \times (1,-1,0,0)$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille libre.

Conclusion : tous les vecteurs de la famille génératrice sont combinaisons linéaires de $((1,-1,0,0), (1,0,0,1), (2,0,-1,0))$ donc cette famille de 3 vecteurs est génératrice et on a prouvé qu'elle est libre donc c'est une base de E.

⚠ à l'espace nul $\{\vec{0}\}$ qui a pour base la famille vide par convention. HP

1.3 Cardinal des familles libres

exo

Lemme 1.4. *Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille libre et la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ est liée, alors x_{n+1} est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i.e. $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

Démonstration.

Il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \vec{0}$ car la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ est liée.

Si $\alpha_{n+1} = 0$, alors on a la relation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \vec{0}$. Comme la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre, on obtient $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = 0$. C'est une contradiction avec l'hypothèse que les scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ sont non tous nuls.

Donc, $\alpha_{n+1} \neq 0$, alors on peut écrire $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} x_i$. □

Proposition 1.5. *Si E est un espace vectoriel admettant une famille génératrice à n vecteurs avec n entier non nul, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.*

Corollaire 1.6. *Dans un espace de dimension finie, toute famille libre a moins d'éléments qu'une famille génératrice.*

moins ou égal

Démonstration dans le cas $n = 2$

Si $E = \mathrm{Vect}(g_1, g_2)$

soit (x_0, x_1, x_2) une famille

si x_0, x_1, x_2 ne dépendent que de g_1, alors (x_0, x_1, x_2) est liée (tous colinéaires).

sinon
$x_2 = \alpha_2 g_2 + \beta_2 g_1$ avec $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ scalaires
$x_1 = \alpha_1 g_2 + \beta_1 g_1$ et $\alpha_2 \neq 0$: x_2 dépend de g_2
$x_0 = \alpha_0 g_2 + \beta_0 g_1$

On calcule
$y_1 = x_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_2} x_2 = \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_2}\beta_2\right) g_1$
$y_0 = x_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_2 = \left(\beta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\beta_2\right) g_1$

y_0 et y_1 sont colinéaires à g_1 donc il existe a, b scalaires tels que $a y_0 + b y_1 = \vec{0}$ et a ou b non nul

on obtient $a x_1 + b x_0 + \left(\text{scalaire à calculer}\right) x_2 = \vec{0}$

donc les 3 vecteurs sont liés.

Conséquence ① cardinal famille libre $\leq$ cardinal famille génératrice

② Si B_1 et B_2 sont 2 bases de E, alors

$$\underbrace{|B_1|}_{\text{libre}} \leq \underbrace{|B_2|}_{\text{génératrice}} \text{ et } \underbrace{|B_2|}_{\text{libre}} \leq \underbrace{|B_1|}_{\text{génératrice}} \Rightarrow |B_1| = |B_2|$$

1.4 Dimension

Théorème 1.7. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments $n \in \mathbb{N}^*$.*

Définition 1.2. Ce nombre n s'appelle la dimension de E sur $\mathbb{K}$ noté $n = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim E$.

Par convention, $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Exemple 1.1. On a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n+1$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

$\dim\{\vec{0}\} = 0$, si $\dim_{\mathbb{K}} E = 1$, on dit que E est une droite vectorielle

si $\dim_{\mathbb{K}} E = 2$, on dit que E est un plan vectoriel ...

Exemples * $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ car $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$

ici on n'a pas le choix : $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$

scalaires réels

* $\dim \mathbb{C}^2 = ?$

$\mathbb{C}^2 = \{(z_1,z_2)$ avec $z_1,z_2 \in \mathbb{C}\} = \{$ listes de 2 complexes $\}$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ car $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{C}^2$:

scalaires complexes

tout vecteur $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$ s'écrit de manière unique

$\underline{(z_1,z_2)} = \underset{\in \mathbb{C}}{\underline{z_1}}(1,0) + \underset{\in \mathbb{C}}{\underline{z_2}}(0,1)$ les scalaires sont des complexes

mais

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$ car $((1,0),(i,0),(0,1),(0,i))$

scalaires réels

est une base de $\mathbb{C}^2 = \{(x_1+iy_1, x_2+iy_2)$ avec x_1,x_2,y_1,y_2 réels$\}$

$= \{x_1(1,0)+y_1(i,0)+x_2(0,1)+y_2(0,i)$ avec ...$\}$

$(z_1,z_2) = \underset{\in \mathbb{R}}{Re(z_1)}(1,0) + \underset{\in \mathbb{R}}{Im(z_1)}(i,0) + \underset{\in \mathbb{R}}{Re(z_2)}(0,1) + \underset{\in \mathbb{R}}{Im(z_2)}(0,i)$

* $\dim \mathbb{R}_{\underline{3}}[X] = \underline{\underline{4}}$ car $(1,X,X^2,X^3)$ en est une base

Exemple. Déterminer la dimension de

$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$

On cherche une base de F. Pour cela, on résout le système

$(x,y,z,t) \in F \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$ On a deux inconnues secondaires

$\iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = -2\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = \alpha + \beta \end{cases} \iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a prouvé $F = \mathrm{Vect}\big((-2,1,0,1), (1,0,1,1)\big)$

(en particulier F est un sev de $\mathbb{R}^4$).

La famille $((-2,1,0,1), (1,0,1,1))$ est échelonnée donc elle est libre et c'est une base de F. Alors $\dim F = 2$

Exemple Donner la dimension de l'espace des solutions réelles de $4y'' - 5y' + 2y = 0$

Les solutions sont

$S_0 = \left\{ t \longmapsto Ae^{\frac{5}{8}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{8}t\right) + Be^{\frac{5}{8}t}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{8}t\right) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

car $4X^2 - 5X + 2$ a pour racines $\frac{5}{8} \pm i\frac{\sqrt{7}}{8}$

donc $S_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{\frac{5}{8}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{8}t\right), t \mapsto e^{\frac{5}{8}t}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{8}t\right)\right)$

et les 2 fonctions ne sont pas colinéaires donc elles forment une base de S_0 et $\dim S_0 = 2$

1.5 Familles en dimension finie

Théorème 1.8. *Si E est un espace vectoriel de dimension FINIE n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.*

$\dim E = n$

Démonstration : Soit E de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs.

si $\mathcal{F}$ est libre, on peut la compléter en une base de E (Th de la base incomplète). Mais une base de E a n vecteurs et $\mathcal{F}$ a déjà n vecteurs donc $\mathcal{F}$ est une base.

si $\mathcal{F}$ est génératrice avec n vecteurs, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base de E. La base a n vecteurs et $\mathcal{F}$ aussi donc $\mathcal{F}$ est une base.

Utilisation : Exemple : Montrer que $(X^2-2X+1, X-7, X^2-X-2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 et la famille a 3 vecteurs

On montre que la famille est libre :

$$\alpha(X^2-2X+1)+\beta(X-7)+\gamma(X^2-X-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -2\alpha+\beta-\gamma = 0 \\ \alpha-7\beta-2\gamma=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ -7\beta-3\gamma=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ 4\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

donc la famille est libre

et c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

dimension d'un ev = cardinal d'une base

2 Relations entre les dimensions

2.1 Rappel : Image d'une base par une application linéaire

chap 15

Théorème 2.1. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ une base de E.*

- *La famille $(u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.*
- *u est surjective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est génératrice de F.*
- *u est injective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est libre dans F.*
- *u est bijective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est une base de F.*

Corollaire 2.2. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

u est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

2.2 Dimension et isomorphisme

Proposition 2.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un espace vectoriel F est isomorphe à E si et seulement si F est de dimension finie et* $\dim F = \dim E$.

Corollaire 2.4. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

E et F sont isomorphes $\iff$ il existe une application linéaire bijective entre E et F.

Démonstration Th 2.3 $\Leftarrow$:
Si $\dim F = \dim E = n$, alors E et F ont au moins une base : $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ pour E $(f_j)_{j=1,\dots,n}$ pour F
alors on construit

$$\varphi : E \longrightarrow F$$
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto y = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

un vecteur x de E a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base (e_i) de E est envoyé sur y qui a les mêmes coordonnées dans la base (f_i) de F

① φ est linéaire car les coordonnées de y sont CL des coord de x

② φ est bijective car l'image de la base (e_i) est la base (f_i)

donc F et E sont isomorphes $\square$

Exemple : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2
voir doc annexe.

2.3 Dimension des sous-espaces vectoriels

Théorème 2.5. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et* $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, F est égal à E si et seulement si $\dim F = \dim E$.

sev de dimension 0 de E : $\{\vec{0}_E\}$ le sev nul

1 : les droites vectoriels $\mathrm{Vect}(x)$ avec $x \neq \vec{0}$

2 : les plans vectoriels $\mathrm{Vect}(x,y)$ avec (x,y) non colinéaires

$n-1$: les hyperplans (HP) de E.

n : un seul sev : E

avec $\dim E = n$

Exemple : Dans $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer la dimension de

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^2 \tilde{P}(t)\,dt = 0 \right\}$$

Remarque $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ donc $\dim H \leq 3$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On peut l'écrire $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

$P \in H \Leftrightarrow \int_0^2 (at^2 + bt + c)\,dt = 0 \Leftrightarrow \left[a\frac{t^3}{3} + b\frac{t^2}{2} + ct\right]_0^2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{8}{3}a + 2b + 2c = 0$ on a 2 inconnues secondaires

$\Leftrightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = -\beta - \frac{4}{3}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4/3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} X^2 \\ X \\ 1 \end{matrix}$

ne pas écrire cela

Donc $H = \mathrm{Vect}(3X^2 - 4, X - 1)$

Alors H est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\dim H = 2$

car $(3X^2 - 4, X - 1)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base

Vect = " sev engendré par " = ens des CL des vecteurs...

on a montré $P \in H \Leftrightarrow P$ est combinaison linéaire de $3(X^2 - 4/3)$ et $X - 1$

2.4 Dimension de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 2.6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ E = F + G \end{cases}$$

Rappel : Chap 15

$E = F \oplus G \overset{def}{\iff}$ tout vecteur u de E se décompose en un vecteur v de F et un vecteur w de G et la décomposition est unique

$\iff \begin{cases} E = F + G & (\Leftarrow \text{ la décomposition existe}) \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \text{ (somme directe)} & (\Leftarrow \text{ la décomposition est unique}) \end{cases}$

Exemple : Montrons que $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^2 \tilde{P}(t)\,dt = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(X-7)$ sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}_2[X]$.

On sait que E est de dimension finie et $\dim E = 3$ ($\dim_{\mathbb{R}} E = 3$)

on a déjà démontré que H est un sev de E et $\dim H = 2$

Et, G est un sev de E avec $\dim G = 1$ car il est engendré par un seul vecteur non nul.

On a donc $\dim E = \dim H + \dim G$

On détermine $H \cap G$:

soit $P \in H \cap G$. On a $\int_0^2 \tilde{P}(t)\,dt = 0$ et P s'écrit $P = k(X-7)$

avec $k \in \mathbb{R}$ ce qui donne $\int_0^2 k(t-7)\,dt = 0 \iff k\left[\frac{t^2}{2} - 7t\right]_0^2 = 0$

$\iff -12k = 0 \iff k = 0 \iff P = 0$

On a donc $H \cap G \subset \{\vec{0}\}$ et donc $H \cap G = \{\vec{0}\}$

On a démontré $E = H \oplus G$

Remarque : on a évité de montrer que tout vecteur de E est somme d'un vecteur de H et d'un vecteur de G.

Exemple : Soit F d'équation $2x+y-z=0$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

D'après le cours sur la géométrie, on sait que F est un plan et $F = \mathrm{Vect}((1,0,2),(21,-42,0))$ et $\dim F = 2$.

Par ailleurs, G est une droite vectorielle : $\dim G = 1$

On a donc $\underline{\dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G}$.

On calcule $F \cap G$: comme $(1,1,1) \notin F$, alors la droite G n'est pas parallèle à F : il y a une seule intersection donc $\underline{F \cap G = \{(0,0,0)\}}$

Alors par théorème $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$.

Théorème 2.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base de F et $(g_{p+1}, \dots, g_n)$ est une base de G, alors*

$$E = F \oplus G \iff (f_1, f_2, \dots, f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n) \text{ est une base de } E.$$

On dit que cette base est adaptée à la décomposition en sous-espaces supplémentaires.

déjà vu au chap 15

Exemple dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, On appelle trace de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la somme des coefficients sur la diagonale : $Tr\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$.

Montrer que l'ensemble F des matrices de trace nulle et G la droite engendrée par I_2 sont supplémentaires.

On a $G = Vect(I_2)$. On cherche une base de F

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow a + d = 0$ Donc F est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels.

Mais

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Les 3 matrices forment une famille génératrice de F et elles sont libres car $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \beta = 0, \gamma = 0, \alpha = 0$ (les matrices sont échelonnées).

On a une base de F et $\dim F = 3$. et on a une base de G

Montrons que $\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } G}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{base de } F}\Big)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

cette famille a 4 vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ donc il suffit de montrer que la famille est libre : pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ donc la famille est libre

alors c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Par conséquent, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

Théorème 2.8 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie)**.**
Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Démonstration : Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sev de E.

alors F est de dimension finie donc F a au moins une base : $(f_1, \dots, f_p)$ base de F. C'est une famille libre de E donc on peut la compléter en une base de E :

$$(f_1, f_2, \dots, f_p, f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_n) \qquad (n = \dim E)$$

Alors d'après le théorème 2.7

$$\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p) \oplus \mathrm{Vect}(f_{p+1}, \dots, f_n) = E.$$

donc

$$F \oplus \mathrm{Vect}(f_{p+1}, \dots, f_n) = E.$$

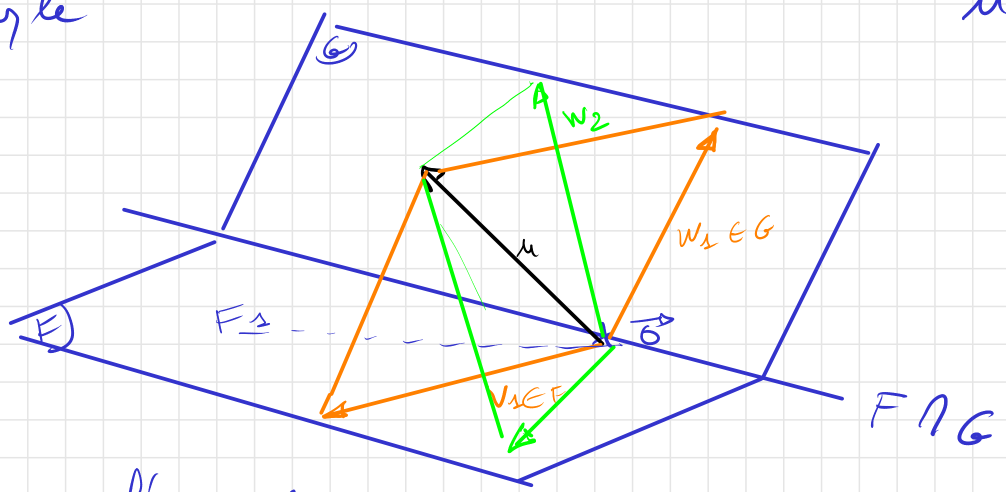
2.5 Dimension d'une somme

Proposition 2.9 (Formule de Grassmann)**.**

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Alors $\quad \dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Exemple



$u \in F+G$

$u = v_1 + w_1$

$u = v_2 + w_2$

avec $v_1 \in F$

$v_2 \in F$

$w_1 \in G$

$w_2 \in G$

On a vu l'exemple

$F+G=\mathbb{R}^3$ donc $\dim(F+G)=3$

mais $\dim(F)+\dim(G)=2+2=4$ et $\dim(F\cap G)=1$

$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$

Démonstration :

Soit F_1 un supplémentaire de $F\cap G$ dans F (existe en dim finie)

$F=(F\cap G)\oplus F_1$ alors $\dim F=\dim(F\cap G)+\dim F_1$

De plus : - F_1 et G sont des sev de E

- $F_1\cap G=\{\bar{0}\}$ car $F_1\cap(F\cap G)=\{\bar{0}\}$
- si $u\in F+G$, u s'écrit $u=v+w$ avec $v\in F$ et $w\in G$

mais v s'écrit $v=v_1+v_2$ avec $v_1\in F_1$ et $v_2\in F\cap G$

donc $u=v_1+(v_2+w)$ avec $v_1\in F_1$ et $v_2+w\in G$

donc $u\in F_1+G$. On a montré $F+G\subset F_1+G$

Réciproquement $F_1\subset F$ et $G\subset G$ donc $F_1+G\subset F+G$

alors $F+G=F_1+G$. Et $F_1\cap G=\{\bar{0}\}$

donc $F+G=F_1\oplus G$ alors $\dim(F+G)=\dim(F_1)+\dim(G)$

$\dim(F+G)=\dim(F)-\dim(F\cap G)+\dim(G)$

Exemple $F = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(1,0,-1,0))$ dans $\mathbb{R}^4$
$G = \mathrm{Vect}((1,1,0,1),(2,1,-1,-1))$

Donner les dimensions de $F, G, F\cap G, F+G$

Les vecteurs $((1,1,0,0),(1,0,-1,0))$ sont libres donc $\dim F = 2$

De même $\dim G = 2$. F, G sont sev de $\mathbb{R}^4$.

Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

$u \in F+G \iff \exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ réels tels que $\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\iff$ il existe $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+2\delta = x\\ \alpha+\gamma+\delta = y\\ -\beta-\delta = z\\ \gamma-\delta = t\end{cases}$

$\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ $\begin{cases} \alpha+\gamma+\delta = y\\ -\beta-\delta = z\\ \gamma-\delta = t\\ 0 = x-y+z\end{cases}$

Il existe une solution si et seulement si l'équation de compatibilité $x-y+z=0$ est vérifiée : c'est une équation de $F+G$

On peut trouver la dimension de $F+G$: on résout l'équation
$x-y+z=0$: on a 1 équation avec 1 pivot
et 4 inconnues donc 3 inconnues secondaires
$\left((x,y,z,t)\in F+G \iff x-y+z+0.t=0\right)$

Donc $\dim(F+G) = 3$

Pour déterminer $F\cap G$, on cherche des équations de F et G.

$F = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(1,0,-1,0))$ donc on a une représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \alpha+\beta\\ y = \alpha\\ z = -\beta\\ t = 0\end{cases}$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$(x,y,z,t)\in F \iff \exists(\alpha,\beta) : \begin{cases} \alpha+\beta = x \\ -\beta = y-x \\ -\beta = z \\ 0 = t\end{cases}$

$\iff \exists(\alpha,\beta) : \begin{cases}\alpha+\beta = x\\ -\beta = y \cancel{-x} \\ 0 = x-y+z \\ 0=t\end{cases}$ eq de compatibilité soit les équations de F

F a pour équation $\begin{cases} x-y+z=0\\ t=0\end{cases}$

On fait la même chose pour G :

$(x,y,z,t)\in G \iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : \begin{cases} x=\alpha+2\beta\\ y=\alpha+\beta \\ z = -\beta\\ t=\alpha-\beta\end{cases}$

$\iff \exists(\alpha,\beta) : \begin{cases}\alpha = t-z\\ \beta=-z \\ 0 = x-t+3z\\ 0=y-t+2z\end{cases}$

G a pour équation $\begin{cases} x+3z-t=0\\ y+2z-t=0\end{cases}$

On cherche $F\cap G$:

$(x,y,z,t)\in F\cap G \iff \begin{cases} x-y+z=0\\ t=0\\ x+3z-t=0\\ y+2z-t=0\end{cases}$

$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_3+L_4}{\iff} \begin{cases} 0=0\\ t=0\\ x+3z=0\\ y+2z=0\end{cases} \iff \exists k\in\mathbb{R}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$F\cap G = \mathrm{Vect}((-3,-2,1,0))$

D'après la formule de Grassmann $\dim(\overset{3}{F+G}) = 3 = \dim(\overset{2}{F})+\dim(\overset{2}{G})-\dim(\overset{1}{F\cap G})$

$\Rightarrow \dim F\cap G = 1$

3 Rang

3.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.1. On appelle rang d'une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un espace vectoriel E, la dimension du sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs et on le note $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p)$:

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p)) .$$

Lemme 3.1. *Pour une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie $n = \dim E$, on a*

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant n$$

Remarque : $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ a une famille génératrice à p vecteurs donc il est de dimension finie. Sa dimension est le rang de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer le rang de $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \big((1,1,0,1), (1,-1,2,0), (0,2,-2,1), (2,0,2,1)\big)$

x_1, x_2, x_3, x_4

(x_1, x_2, x_3, x_4) est une famille génératrice de $H = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$

on veut en extraire une base :

$x_1 = (1,1,0,1)$ est non nul donc il forme une famille libre.

(x_1, x_2) est une famille libre car ils sont échelonnés

$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 0 + 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\beta - 2\gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases}$

donc $\gamma = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = -1$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = x_1 - x_2$

x_3 est combinaison linéaire de (x_1, x_2)

De même pour x_4, $x_4 = x_1 + x_2$

Alors $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$ car x_3 et $x_4 \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$

et (x_1, x_2) est donc une base de cet espace. Alors

$rg(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2 = \dim(\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4))$

Théorème 3.2. *Une famille est libre si et seulement si elle de rang maximal, c'est à dire si son rang est égal à son nombre de vecteurs.*

Lemme 3.3. *Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour tous indices i, j :*

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = rg(x_1, x_2, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_p)$$

Remarque : Pour déterminer le rang, on peut effectuer des opérations élémentaires :

$\mathrm{rg}\big((1,2,1), (1,1,0), (1,0,-1)\big)$ se calcule

matrice des vecteurs (en colonne)

avec

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-1} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

le lemme nous garantit que

$$\mathrm{rg}\big((1,2,1)(1,1,0)(1,0,-1)\big) = \mathrm{rg}\big((1,2,1), (0,-1,-1)\big) = 2$$

non colinéaires

grand secret :
c'est vrai également si on ne fait que des opérations sur les lignes.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Dans ce cas les vecteurs obtenus ne correspondent à rien

Ça ne sert qu'à trouver le rang.

3.2 Rang d'une application linéaire

u est une application linéaire

Définition 3.2. Soient E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de l'application linéaire u, la dimension de l'image de u dans F.
On note $\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im} u)$ lorsque cette dimension est finie et on dit que u est de rang fini.

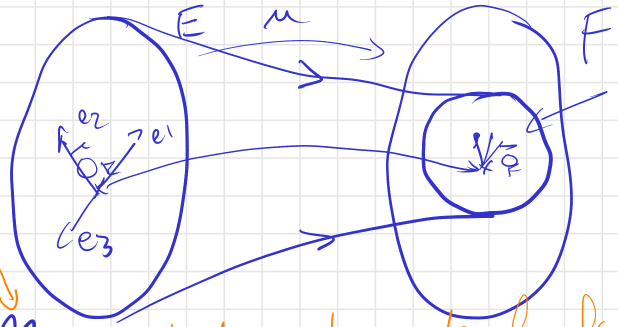
Remarque 3.1. Si $(e_i)_{i=1,..,n}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.
Il s'ensuit que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.

Lemme 3.4. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $n = \dim E$ et $p = \dim F$, et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $\operatorname{rg}(u) \leqslant n$ et $\operatorname{rg}(u) \leqslant p$.*

Def : $rg(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$

Rappel si (e_i) est une base de E, alors les images $(u(e_i))$ sont une famille génératrice de $\operatorname{Im}(u)$.

Comme $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$,



$\dim \operatorname{Im}(u) \leq \dim F$

$\dim(\operatorname{Im}(u)) \leq n$ ← nb de vecteurs de la famille génératrice

Exemple : Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longmapsto (2x+y, 3x-y, x-2y)$

Déterminer $rg(u)$.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$(a,b,c) \in \operatorname{Im} u \iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (a,b,c) = (2x+y, 3x-y, x-2y)$
$= (2x, 3x, x) + (y, -y, -2y)$

$\iff \exists (x,y) : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff (a,b,c) \in \operatorname{Vect}((2,3,1),(1,-1,-2))$

$((2,3,1),(1,-1,-2))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(u)$

(NB : $(2,3,1) = u(1,0)$ et $(1,-1,-2) = u(0,1)$ images de la base de départ)

et $((2,3,1),(1,-1,-2))$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\operatorname{Im}(u)$ donc $rg(u) = 2$.

Exemple : Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
$(x,y,z) \longmapsto (2x+y-z, -x+y+z, x+2y, 3y+z)$

Déterminer $rg(u)$

u est bien linéaire. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$u(x,y,z) = x(2,-1,1,0) + y(1,1,2,3) + z(-1,1,0,1)$

Donc toutes les images sont combinaisons linéaires de ces 3 vecteurs $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((2,-1,1,0),(1,1,2,3),(-1,1,0,1))$

Quelle est sa dimension ? On calcule le rang des 3 vecteurs. On remarque que $(1,1,2,3) = 3(-1,1,0,1) + 2(2,-1,1,0)$

Donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((2,-1,1,0),(-1,1,0,1))$

et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une base alors $\dim \mathrm{Im}(u) = \boxed{2 = rg(u)}$

Remarque : $u(1,0,0) = (2,-1,1,0)$ et $u(0,0,1) = (-1,1,0,1)$

Exemple : Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$
$P \longmapsto R$ où R est le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^3$.

Quel est le rang de φ ? (image de φ ?)

On montre que φ est linéaire. Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, on a $P_1 = (X-1)^3 Q_1 + R_1$ et $P_2 = (X-1)^3 Q_2 + R_2$ avec Q_1, Q_2 les quotients et R_1, R_2 les restes. $R_i = \varphi(P_i)$

alors $P_1 + P_2 = (Q_1+Q_2)(X-1)^3 + (R_1+R_2)$ avec $\deg(R_1+R_2) < 3$

donc $R_1 + R_2 = \varphi(P_1+P_2)$ et $\varphi(P_1+P_2) = \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$

De même pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha P) = \alpha\varphi(P)$. donc φ est linéaire

On sait que $\deg(\varphi(P)) \leq 2$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Donc $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbb{R}_2[X]$

Soit $aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a $\varphi(aX^2+bX+c) = aX^2+bX+c$

donc $aX^2+bX+c \in \mathrm{Im}\,\varphi$. On a prouvé $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathrm{Im}\,\varphi$

alors $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}_2[X]$ et $rg(\varphi) = 3$

Théorème 3.5. *Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ sont deux applications linéaires de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et* $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

Démonstration. On a toujours $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$: pour toute image $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(u(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} v$ ce qui prouve l'inclusion.
On en déduit $\dim(\operatorname{Im}(v \circ u)) \leqslant \dim(\operatorname{Im} v)$ soit $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v)$.
Par ailleurs, soit $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de $\operatorname{Im} u$ avec $p = \operatorname{rg}(u)$. Soit $z \in \operatorname{Im}(v \circ u)$ alors il existe $x \in E$ tel que $z = v(u(x))$. On a $u(x) \in \operatorname{Im} u$ donc $u(x)$ s'écrit $u(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k$ avec $(\lambda_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ des scalaires. On peut donc écrire $z = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v(f_k)$.
On en déduit que $(v(f_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(v \circ u)$. Il s'ensuit que $\dim(\operatorname{Im}(v \circ u)) \leqslant p$ ce qui donne $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u)$. □

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] & F \arrow[r, "v"] & G \end{tikzcd}$$

$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$

à savoir.

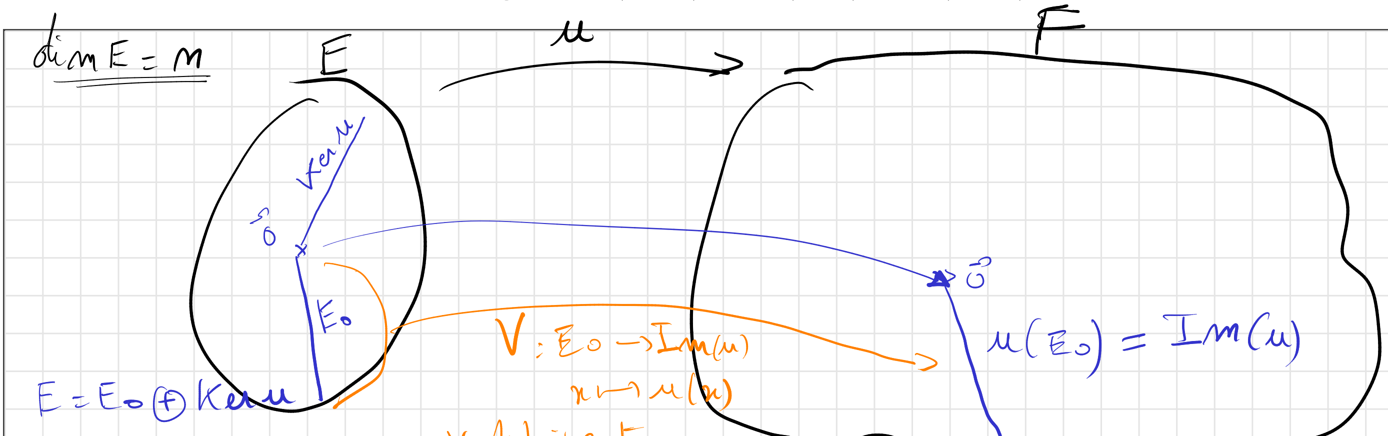
3.3 Théorème du rang

Proposition 3.6. *Soit E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E dans F.*
Si E_0 est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors l'application u induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$.

$$v : \begin{array}{rcl} E_0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \text{ est un isomorphisme.}$$

Théorème 3.7 (Théorème du rang)**.** *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, alors u est de rang fini et*

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u)$$



$\dim E = \dim E_0 + \dim \operatorname{Ker} u$ $\qquad$ $\dim E_0 = \dim(\operatorname{Im}(u))$

espace de départ

$$\dim E = \underbrace{\dim(\operatorname{Im} u)}_{= \operatorname{rg}(u)} + \dim(\operatorname{Ker} u)$$

⚠ $\operatorname{Ker}(u) \subset E$ mais $\operatorname{Im}(u) \subset F$

Exemple : Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \longmapsto (x-2y+z,\ 2x-y-z,\ x+y-2z)$

Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$

u est linéaire car les coordonnées de l'image sont des combinaisons linéaires des coordonnées des antécédents.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. $(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(u) \iff \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-3z=0 \\ 3y-3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=z \\ z=z \end{cases}$ alors $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}((1,1,1))$

Donc $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$. D'après le théorème du rang,

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} u) = 3-1 = 2$

3.3 Théorème du rang

Proposition 3.6. *Soit E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E dans F.*
Si E_0 est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors l'application u induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$.

$$v : \begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$ *est un isomorphisme.*

Théorème 3.7 (Théorème du rang)**.** *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, alors u est de rang fini et*

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u)$$

Exemple : Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ expression analytique de u

$(x,y,z) \longmapsto (x-2y+z,\ 2x-y-z,\ x+y-2z)$

Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$

u est linéaire car les coordonnées de l'image sont des combinaisons linéaires des coordonnées des antécédents.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. $(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(u) \iff \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-3z=0 \\ 3y-3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=z \\ z=z \end{cases}$ alors $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}((1,1,1))$

Donc $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$. D'après le théorème du rang,

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} u) = 3-1 = 2$

On cherche 2 vecteurs de $\operatorname{Im}(u)$ qui ne sont pas colinéaires :

par exemple : $u(1,0,0) = (1,2,1)$

$u(0,0,1) = (1,-1,-2)$

Ces 2 vecteurs $((1,2,1),(1,-1,-2))$ sont libres (pas colinéaires) dans $\operatorname{Im}(u)$ et $\dim(\operatorname{Im}(u)) = 2$ alors ils sont une base de $\operatorname{Im} u$

et $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}((1,2,1),(1,-1,-2))$

CNS

3.4 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 3.8. *Si E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même dimension finie</u> $n = \dim E = \dim F$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors*

$$u \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\} \iff u \text{ est surjective} \iff \dim \operatorname{Ker} u = 0 \iff u \text{ est bijective} \iff \operatorname{rg}(u) = n.$$

Corollaire 3.9. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, alors*

$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective.}$$

u endomorphisme.

Lemme 3.10. *Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$, alors f est injective.*

Démonstration. Soit g telle que $g \circ f = id_E$. Soit $a, b \in E$. Si $f(a) = f(b)$ alors $g(f(a)) = g(f(b))$ donc $id(a) = id(b)$ soit $a = b$. Deux éléments de l'ensemble de départ ne peuvent avoir la même image donc f est injective. □

Lemme 3.11. *Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Si il existe $h : F \to E$ telle que $f \circ h = id_F$, alors f est surjective.*

Démonstration. Soit h telle que $f \circ h = id_F$. Soit $a \in F$. On a $f(h(a)) = a$ donc a a un antécédent. Tout élément de F a un antécédent donc f est surjective. □

Remarque
on a donc

$\dim E = \dim(\operatorname{Ker}(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u))$

$\dim F = 0 + \dim(\operatorname{Im}(u)) \iff \operatorname{Im}(u) = F \iff u$ est surjective

Exemple : Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$P \longmapsto (\tilde{P}(-1), \tilde{P}(0), \tilde{P}(2))$

φ est linéaire (facile à prouver). Montrer que φ est un isomorphisme.

On détermine $\operatorname{Ker}(\varphi)$: Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

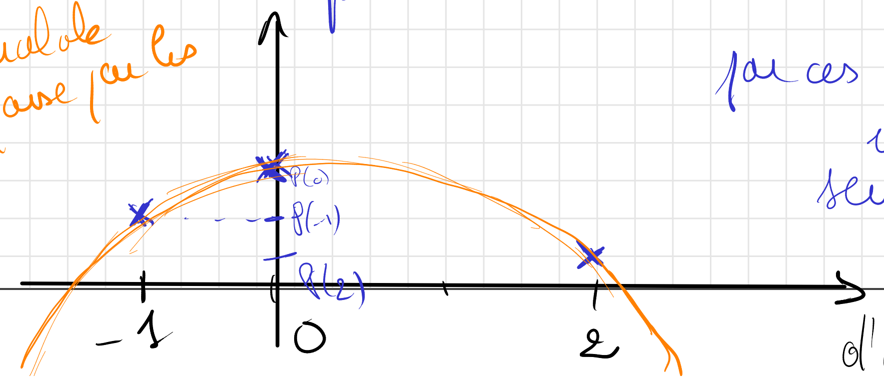
$P \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff \tilde{P}(-1) = 0 = \tilde{P}(0) = \tilde{P}(2) \iff -1, 0, 2$ sont racines de P. On P est de degré au plus 2 donc si il a 3 racines distinctes, il est nul. $P \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff P = 0$

alors $\operatorname{Ker} \varphi = \{\vec{0}\}$

On a $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Les 2 espaces ont la même dimension et φ est injective alors <u>φ est bijective</u>.

φ est un isomorphisme.

une seule parabole verticale passe par les 3 points



par ces 3 points il passe un seul polynôme de degré au plus 2

le polynôme d'interpolation (HP)

Théorème 3.12. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
① *Si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = id_E$ alors f est bijective et $f \circ g = id_F$.*
② *Si il existe $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = id_F$ alors f est bijective et $h \circ f = id_E$.*

Conséquence du précédent

Théorème 3.13. *Si u est une application linéaire de rang fini et si φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors, dans les cas où cela a un sens,*

$$\mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}\, u \text{ ou } \mathrm{rg}(\varphi \circ u) = \mathrm{rg}(u).$$

On ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant par un isomorphisme.

Démonstration. Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

- Soit φ un isomorphisme de F dans G et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.
  Soit B une base de $\mathrm{Im}\, u$ (qui est de dimension finie). Alors $\varphi(B)$ est une base de $\varphi(\mathrm{Im}\, u)$ car φ induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, u$ dans $\varphi(\mathrm{Im}(u))$. De plus, on a l'égalité triviale : $\varphi(\mathrm{Im}\, u) = \mathrm{Im}(\varphi \circ u)$. Alors, $\dim(\mathrm{Im}(\varphi \circ u)) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ soit $\boxed{\mathrm{rg}(\varphi \circ u) = \mathrm{rg}(u)}$.

- Soit φ un isomorphisme de E dans F et $u \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini.
  On a toujours $\mathrm{Im}(u \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}\, u$ car toute image par $u \circ \varphi$ est une image par u.
  Réciproquement, soit $z \in \mathrm{Im}\, u$, alors il existe $y \in F$ tel que $z = u(y)$. Comme φ est une bijection de E dans F, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Alors, $z = u \circ \varphi(x)$ et $z \in \mathrm{Im}(u \circ \varphi)$ ce qui prouve $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}(u \circ \varphi)$.
  On a montré $\mathrm{Im}(u \circ \varphi) = \mathrm{Im}(u)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(u \circ \varphi)) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ soit $\boxed{\mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}(u)}$.

□

Exemple Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$
$P \longmapsto XP$

il est facile de montrer que φ est linéaire

$P \in \mathrm{Ker}\, \varphi \Leftrightarrow XP = 0 \Leftrightarrow P = 0$ donc $\mathrm{Ker}\, \varphi = \{0\}$

donc φ est injective

Cherchons les antécédents de $1 \in \mathbb{R}[X]$: On cherche P tq

$XP = 1 \Rightarrow 1 + \deg(P) = 0 \Rightarrow \deg(P) = -1$

c'est impossible donc 1 n'a pas d'antécédent

φ n'est pas surjective donc n'est pas bijective.

⚠ $\mathbb{R}[X]$ est de dimension INFINIE.

$\varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
$P \longmapsto XP$

~~linéaire OK~~ ~~injective OK~~ ~~pas bijective~~ $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$

faux !

φ_n est mal définie $\mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n+1}[X]$

3.5 Équations linéaires

systèmes linéaires / eq diff linéaires / suites récurrentes linéaires

Définition 3.3. Une équation linéaire est une équation du type $u(x) = b$ où

- u est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F,
- x est un vecteur inconnu dans E,
- b est un vecteur de F appelé second membre de l'équation.

$u : E \longrightarrow F$

$x \longmapsto u(x)$

Théorème 3.14 (Structure de l'ensemble des solutions)**.**
Soit $u : E \longmapsto F$ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, soit $b \in F$.

On note S_0 l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = \overrightarrow{0_F}$ et S l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$.

- *S_0 est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, il est donc non vide : il contient $\overrightarrow{0_E}$.*
- *Soit S est vide, soit $S = x_0 + S_0 = \{x_0 + h | h \in S_0\}$ où x_0 est une solution de l'équation avec second membre.*

Remarque 3.2. Si E est de dimension finie n (n inconnues) et si u est de rang fini r (r pivots), alors l'ensemble des solutions S_0 est de dimension $n - r$ = nombre d'inconnues - nombre de pivots.

Remarques : $u(x) = \vec{0} \iff x \in \operatorname{Ker} u$

donc S_0 : ens des solutions de l'eq homogène $= \operatorname{Ker} u$

donc S_0 est un sev de E $\qquad$ $S_0 = \operatorname{Ker} u$

Soit $b \in F$.

cas 1 : $b \notin \operatorname{Im}(u)$. alors b n'a pas d'antécédent x donc l'équation $u(x) = b$ n'a pas de solution $\boxed{S = \emptyset}$

cas 2 $b \in \operatorname{Im}(u)$: alors b a au moins un antécédent x_p : $u(x_p) = b$. Si x est un autre antécédent de b (autre solution) alors $u(x) = b \iff u(x - x_p) = \vec{0}$

$\iff x - x_p \in \operatorname{Ker}(u) \iff x \in x_p + S_0$

Donc $\boxed{S = x_p + S_0}$

Remarque $\dim S =$ nb d'inconnues secondaires