Chapitre 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires
Exercices et exemples de cours

Dans tout le cours, on utilisera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 1.1.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $+$: $\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$ et d'une loi externe notée . : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$. On dit que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif,
   (a) la loi $+$ est associative : $\forall\, x, y, z \in E, \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$
   (b) il existe un élément neutre $\overrightarrow{0_E}$ pour $+$ dans E tel que $\forall x \in E, \qquad \overrightarrow{0}_E + x = x + \overrightarrow{0} = x$
   (c) tout élément x de E possède un symétrique pour l'addition appelé opposé et noté $-x$ qui vérifie $x + (-x) = (-x) + x = \overrightarrow{0}$
   (d) l'addition est commutative $\forall\, x, y \in E \qquad x + y = y + x$
2. pour tous $(x, y) \in E^2$ et pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a les 4 propriétés suivantes :
   (a) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$
   (b) $1.x = x$
   (c) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
   (d) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

On appelle les éléments de E des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ des scalaires.

1.2 Exemples de référence

Proposition 1.1. *L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des listes à n éléments de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.2. *L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.3. *Quel que soit l'ensemble Ω, l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et Ω un ensemble quelconque, l'ensemble E^Ω des fonctions de Ω dans E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.5. *L'ensemble $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.6. *L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

1.3 Propriétés

Proposition 1.7. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors pour $\overrightarrow{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\lambda.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \iff \lambda = 0 \text{ ou } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad -\overrightarrow{x} = (-1).\overrightarrow{x}$$

2 Familles finies de vecteurs

2.1 Combinaisons linéaires

Définition 2.1. Soit $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \cdots + \lambda_n.u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i \qquad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Si A est une partie de E, on appelle combinaison linéaire d'éléments de A toute combinaison linéaire d'un nombre *fini* d'éléments de A.

2.2 Familles génératrices

Définition 2.2. Une famille de vecteurs de E : $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ est génératrice de E si tout vecteur x de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des $u_1, u_2, \dots, u_n$: c'est à dire $\forall x \in E$, $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$: $\quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

2.3 Familles libres

Définition 2.3. Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ est libre (ou linéairement indépendante) si la seule combinaison linéaire des $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ qui est nulle est la combinaison linéaire nulle : $0.u_1 + 0.u_2 + \cdots 0.u_n$, c'est à dire :

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \cdots + \lambda_n.u_n = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Exemple 2.1. Une famille de polynômes échelonnés en degré est libre.

2.4 Bases

Définition 2.4. Une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Théorème 2.1. *Une famille $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base de E si et seulement si pour tout vecteur $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que :*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i.e_i$$

La famille $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ est appelée famille des coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$.

Remarque 2.1. L'existence de la famille de scalaires pour chaque $x \in E$ prouve que la famille $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est génératrice. L'unicité de la famille de scalaires pour chaque $x \in E$ prouve que la famille $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est libre.

3 Sous-espaces vectoriels

3.1 Définition

Définition 3.1. On appelle sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $\mathbb{K}$ une partie A de E telle que $(A, +, .)$ muni des restrictions des lois de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque 3.1. En particulier, $\overrightarrow{0_E} \in A$, $\forall x \in A, \quad -x \in A, \quad \forall\, x, y \in A, \quad x + y \in A \quad$ et $\quad \forall x \in A, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha x \in A$.

Exemple 3.1. L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{K}^p$ où p est le nombre d'inconnues du système.

Exemple 3.2. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

3.2 Caractérisation

Théorème 3.1. *Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

$$\begin{aligned} A \text{ est un sous-espace vectoriel de } E &\Longleftrightarrow A \text{ est non vide et stable par combinaison linéaire} \\ &\Longleftrightarrow \vec{0} \in A \quad \text{et} \quad \forall (u,v) \in A^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \alpha u + \beta v \in A. \\ &\Longleftrightarrow \vec{0} \in A \quad \text{et} \quad \forall (u,v) \in A^2, \quad u + v \in A \quad \text{et} \quad \forall u \in A, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha u \in A. \end{aligned}$$

3.3 Intersection de sev

Proposition 3.2. *L'intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.*

3.4 Sous-espace engendré par une partie

Définition 3.2. Soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une famille de vecteurs. On appelle sous-espace vectoriel engendré par $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ noté $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ le sous-espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$.

Proposition 3.3. $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ *est le plus petit sev contenant* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p}$ *: c'est l'intersection de tous les sev contenant* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p}$.

4 Applications linéaires

4.1 Morphismes d'espaces vectoriels

Soit E, F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Définition 4.1. Une application f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est dite linéaire si

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \qquad f(\alpha.x) = \alpha.f(x).$$

Théorème 4.1. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \qquad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$
$$\iff \forall (x,y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \qquad f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Remarque 4.1. *L'image d'une combinaison linéaire de vecteurs par une application linéaire est la combinaison linéaire des images des vecteurs.*

Définition 4.2. Une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ s'appelle un endomorphisme de E.

notations 4.3. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

4.2 Exemples

4.3 Généralités sur les applications

Dans ce paragraphe, E et F sont deux ensembles.

Définition 4.4. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
Pour $x \in E$, $y = f(x)$ s'appelle l'image de x et x est un antécédent de y.
On appelle image directe par f d'une partie A de E, l'ensemble des images des éléments de A noté $f(A)$:

$$f(A) = \{\, f(x) \mid x \in A\}$$

On appelle image réciproque par f d'une partie B de F, l'ensemble des antécédents (éventuels) des éléments de B noté $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{\, x \mid f(x) \in B\}$$

Remarque 4.2. Attention : rien n'indique ici que f est bijective ni que son application réciproque f^{-1} existe.

Définition 4.5. Soit f une application de E dans F.
f est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

f est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall z \in F, \exists x \in E : \quad z = f(x).$$

f est bijective si f est injective et surjective ce qui est équivalent à tout élément de l'ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent par f.

Lemme 4.2. *Soit f une application de E dans F.*
f est bijective de E dans F si et seulement si il existe une application $u : F \longrightarrow E$ telle que $u \circ f = id_E$ et $f \circ u = id_F$.

4.4 Noyau et image d'une application linéaire

E et F sont deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Proposition 4.3. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
L'image directe d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 4.6. Étant donné une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, on appelle :

- noyau de f le sous-espace vectoriel de E défini par
$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}\{\overrightarrow{0}\} = \left\{x \in E \mid f(x) = \overrightarrow{0}\right\}.$$
C'est l'ensemble des antécédents du vecteur nul par f.
- image de f le sous-espace vectoriel de F défini par
$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E :\ y = f(x)\}.$$
C'est l'ensemble des images de E par f.

Théorème 4.4. *Si f est une application linéaire de E dans F, alors*
$$f \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{0}\} \qquad \text{et par ailleurs,} \qquad f \text{ est surjective} \iff \operatorname{Im} f = F.$$

Exercice 4.1. Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

4.5 Combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 4.5. *Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et des scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.*
Alors $\alpha f + \beta g$ est une application linéaire de E dans F.

Corollaire 4.6. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.*

4.6 Composition d'applications linéaires

Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Proposition 4.7. *Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g \circ f$ est linéaire de E dans G.*

4.7 Isomorphismes et automorphismes

Définition 4.7. Une application linéaire bijective $f : E \longrightarrow F$ s'appelle un isomorphisme.
Un endomorphisme bijectif $f : E \longrightarrow E$ s'appelle un automorphisme.

Proposition 4.8. *Soit f une application linéaire de E dans F. Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est aussi linéaire et est un isomorphisme de F dans E.*

Proposition 4.9. *L'ensemble des automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle groupe linéaire de E, noté $\mathcal{GL}(E)$.*

Corollaire 4.10. *Pour $f, g \in \mathcal{GL}(E)$, on a $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

5.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 5.1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors le plus petit sous-espace vectoriel qui contient F et G est
$$H = \{x + y \,|x \in F \text{ et } y \in G\}.$$
On l'appelle somme de F et G et on le note $H = F + G$.
H est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion de F et G.

5.2 Somme directe

Définition 5.2. On dit que deux sev F et G d'un espace vectoriel E, sont en somme directe si
tout vecteur u de $F+G$ s'écrit de manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. On note alors la somme $F \oplus G$.

Proposition 5.1. *Deux sev F et G d'un espace vectoriel E, sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.*

5.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 5.3. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si $E = F + G$ et si F et G sont en somme directe : $E = F \oplus G$.

Théorème 5.2. *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$E = F \oplus G \iff \forall x \in E,\ \exists! y \in F\ :\ \exists! z \in G:\quad x = y + z \text{ avec } y \in F \text{ et } z \in G \iff E = F + G \text{ et } F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$$

5.4 Base adaptée à une somme directe.

Proposition 5.3. *Si F et G sont deux sev en somme directe et si $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_q)$ est une base de G, alors $(e_1, \ldots, e_q)$ est une base de la somme directe $F \oplus G$.*
On dit qu'une telle base est adaptée à la somme directe.

Proposition 5.4. *Si $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_q)$ est une base de G, telles que $(e_1, \ldots, e_q)$ est une base de E, alors $E = F \oplus G$.*

Théorème 5.5.
Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille libre d'un espace vectoriel, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ sont en somme directe.
Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p) \oplus \mathrm{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$.

6 Applications linéaires et familles de vecteurs

6.1 Image d'une base par une application linéaire

Théorème 6.1. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ une base de E.*

- *La famille $(u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.*
- *u est surjective $\iff$ $(u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est génératrice de F.*
- *u est injective $\iff$ $(u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est libre dans F.*
- *u est bijective $\iff$ $(u(e_i))_{i=1,\ldots,n}$ est une base de F.*

Corollaire 6.2. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
u est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

6.2 Application linéaire définie par l'image d'une base

Théorème 6.3. *Étant données une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et une famille d'autant de vecteurs $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dans F, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad u(e_i) = f_i$.*

Corollaire 6.4. *Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.*

$$f = g \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(e_i) = g(e_i).$$

Deux applications linéaires sont égales si et seulement si leurs images d'une base sont les mêmes.

Corollaire 6.5. *Une application linéaire est nulle si et seulement si l'image d'une base par cette application linéaire est la famille nulle.*

6.3 Application linéaire définie sur deux sev supplémentaires

Proposition 6.6. *Soit E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit $f_1 : E_1 \longrightarrow F$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$. C'est-à-dire $\forall x_1 \in E_1, \quad f(x_1) = f_1(x_1)$ et $\forall x_2 \in E_2, \quad f(x_2) = f_2(x_2)$.*

7 Applications linéaires essentielles

7.1 Homothéties

Définition 7.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle homothétie toute application $f : E \longrightarrow E$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda.x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ un scalaire non nul fixé.

Proposition 7.1. *Une homothétie de E est un automorphisme de E.*
L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ de l'espace vectoriel E est l'application $\lambda.id_E$.

7.2 Projecteurs

Définition 7.2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On appelle projection sur F parallèlement à G, l'application $p : E \longrightarrow E$ qui à $x \in E$ associe l'unique vecteur $y \in F$ tel que $x = y + z$ avec $z \in G$.
Une telle application est aussi appelée projecteur.

Théorème 7.2. *Soit p une application de E dans E.*

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } p \text{ est linéaire et } p \circ p = p.$$

Dans ce cas, p projette sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Démonstration.

- Si p est la projection sur F parallèlement à G. Soit $x \in E$ et $y \in E$ et $\alpha \in \ K$.
  Les vecteurs x et y se décomposent en $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ avec $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$. On a $p(x) = x_F$ et $p(y) = y_F$.
  Alors $\alpha x + y$ se décompose en $\alpha x + y = (\alpha x_F + y_F) + (\alpha x_G + y_G)$ avec $\alpha x_F + y_F \in F$ et $\alpha x_G + y_G \in G$ car F, G sont des sev.
  Alors on a $p(\alpha x + y) = \alpha x_F + y_F = \alpha p(x) + p(y)$. $\boxed{\text{L'application } p \text{ est donc linéaire}}$.
  De plus, pour $x \in E$, que l'on écrit $x = x_F + x_G$, on a $p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x_F)$ mais comme $x_F \in F$, on a $x_F = x_F + 0$ donc $p(x_F) = x_F$ et finalement, $p \circ p(x) = p(x)$. On conclut $\boxed{p \circ p = p}$.
- Réciproquement, si p est linéaire et $p \circ p = p$, alors on pose $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p$.
  Soit $y \in F \cap G$, u est une image donc il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ et $y \in G$ donc $p(y) = 0 \Longrightarrow y = p(x) = p \circ p(x) = p(p(x)) = p(y) = 0$. Donc $F \cap G \subset \{0\}$.
  Et comme on a toujours l'inclusion réciproque $\boxed{F \cap G = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}}$.
  Soi $x \in E$, alors x s'écrit $\boxed{x = p(x) + (x - p(x))}$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p(-p(x)) = p(x) - p(x) = 0$. Donc $\boxed{E = F + G.}$
  Alors on a $E = F \oplus G$ et la relation $x = p(x) + (x - p(x))$ prouve que p est la projection sur F parallèlement à G.
- Enfin, si p est un projecteur, alors les images sont des éléments de F donc $\operatorname{Im} p \subset F$.
  Et réciproquement tout élément $z \in F$ est sa propre image $p(z) = z$ donc $F \subset \operatorname{Im} p$. On en déduit $\boxed{\operatorname{Im} p = F}$.
  Les éléments $u \in G$ s'écrivent $u = 0 + u$ avec $0 \in F$et $u \in G$ donc $p(u) = 0 \Longrightarrow u \in \operatorname{Ker} p$. On a donc $g \subset \operatorname{Ker} p$.
  Réciproquement, si $p(u) = 0$ pour $u \in E$, alors u s'écrit $u = 0 + u_G$ avec $u_G \in G$. On en déduit que $u \in G$ ce qui prouve $\operatorname{Ker} p \subset G$. On a donc $\boxed{\operatorname{Ker} p = G}$.

□

7.3 Symétries

Définition 7.3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application $s : E \longrightarrow E$ qui à x s'écrivant $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ associe $s(x) = y - z$.

Proposition 7.3. *Une symétrie s de E est un automorphisme involutif de E : i.e. $s \circ s = s^2 = id_E$.*

Théorème 7.4. *Soit s une application de E dans E.*

$$s \text{ est une symétrie si et seulement si } s \text{ est linéaire et } s \circ s = id_E.$$

Dans ce cas, s est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + id_E)$.