Chapitre 16 - TD - Correction exercice 4

TD 16 - Exercice 4 : Étudier la limite en a des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\arctan x)^2} \text{ en } a = 0,$$

En cours ...

On a $\operatorname{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

et $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$

en posant $u = x^2$ alors $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$

On intègre ce DL en 0.

$$\operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

On a alors un $DL_4(0)$ en tronquant le DL_5 précédent :

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

alors

$$\operatorname{Arctan}^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2$$
$$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^5) \text{ en calculant}$$

les différents termes.

Alors $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)}$

$$\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)}$$

$$\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1 - \left(1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)\right) + o(x^2)\right)$$

car $\dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)} = \dfrac{1}{1-u} = 1 + u + o(u) = 1 + \dfrac{2}{3}x^2 + o(x^2)$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right) \underset{x \to 0}{=} -\frac{2}{3} + o(1)$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{2}{3}$

Remarque $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ac$