Chapitre 20 & 21 - TD - 8 juin 2020

TD 21 - Exercice 1

Un étudiant fait, en moyenne, une faute d'orthographe tous les 600 mots. Calculer la probabilité pour qu'il ne dépasse pas 5 fautes sur un devoir de 1800 mots.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de mots mal orthographiés sur les $n = 1800$ mots

On répète n fois l'expérience "écrire un mot", qui n'a que 2 issues possibles, de manière indépendante et de probabilité d'avoir une faute $p = \frac{1}{600}$

Alors $X \hookrightarrow B\left(n = 1800, p = \frac{1}{600}\right)$

et on calcule $P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{1800}{k} \frac{1}{600^k} \left(\frac{599}{600}\right)^{1800-k}$

TD 21 - Exercice 4

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules vertes et 6 boules bleues. $5R + 11\bar{R}$

1. On tire 4 boules successivement, sans remise. On désigne par X la v.a.r. égale au nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On tire maintenant 4 boules successivement avec remise. Reprendre les questions précédentes avec la v.a.r. Y égale au nombre de boules rouges obtenues.
3. Comparer $E(X)$ et $E(Y)$. Commenter ce résultat.
4. Comparer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. En admettant que l'écart-type est un indice de dispersion de la v.a.r. autour de son espérance, commenter le résultat obtenu.

1°) Mauvaise méthode : Mais bon raisonnement

On note R_i l'événement "on tire une rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage" $i=1,2,3,4$. $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$

$(X=1) = (R_1 \cap \bar{R_2} \cap \bar{R_3} \cap \bar{R_4}) \cup (\bar{R_1} \cap R_2 \cap \bar{R_3} \cap \bar{R_4}) \cup (\bar{R_1} \cap \bar{R_2} \cap R_3 \cap \bar{R_4}) \cup (\bar{R_1} \cap \bar{R_2} \cap \bar{R_3} \cap R_4)$

$P(R_1 \cap \bar{R_2} \cap \bar{R_3} \cap \bar{R_4}) = P(R_1) . P_{R_1}(\bar{R_2}) . P_{R_1 \cap \bar{R_2}}(\bar{R_3}) . P_{R_1 \cap \bar{R_2} \cap \bar{R_3}}(\bar{R_4}) = \frac{5}{16} \times \frac{11}{15} \times \frac{10}{14} \times \frac{9}{13}$

d'après la formule des probabilités composées

Pour chacun des 3 autres cas, le calcul avec la même formule donnera $16 \times 15 \times 14 \times 13$ au dénominateur car on tire sans remise et 5 pour la 1ère boule rouge tirée et $11 \times 10 \times 9$ pour les 3 boules pas rouge au numérateur

d'où $P(X=1) = 4\, P(R_1 \cap \bar{R_2} \cap \bar{R_3} \cap \bar{R_4}) = 4 \times \frac{5 \times 11 \times 10 \times 9}{16 \times 15 \times 14 \times 13}$
$= \frac{165}{364}$

Bonne méthode :

Le tirage successif de 4 boules sans remise revient à un tirage simultané de 4 boules puisque on ne s'intéresse qu'au nombre de boules rouges tirées : l'ordre des tirages n'intervient pas.

On utilise Ω l'ensemble des tirages de 4 boules parmi 16 en supposant les boules numérotées de 1 à 5 pour les rouges et 6 à 16 pour les autres, sans remise sans tenir compte de l'ordre. On a $\binom{16}{4}$ tirages possibles qui sont équiprobables.

L'événement $(X=k)$ correspond aux tirages k boules rouges et $4-k$ boules autres :

$$|(X=k)| = \binom{5}{k}\cdot\binom{11}{4-k} \text{ d'où } \boxed{P(X=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{11}{4-k}}{\binom{16}{4}}}$$

On calcule $E(X)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{4} k \cdot P(X=k) =$$

$$= 0\times\frac{33}{182} + 1\times\frac{165}{364} + 2\times\frac{55}{182} + 3\times\frac{11}{182} + 4\times\frac{1}{364}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{5}{4}}$$

valeur de $\left(X-\frac{5}{4}\right)^2$

$$V(X) = E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right) = \sum_{k=0}^{4} \left(k-\frac{5}{4}\right)^2 P(X=k)$$

$$= \left(0-\frac{5}{4}\right)^2\frac{33}{182} + \left(1-\frac{5}{4}\right)^2\frac{165}{364} + \left(2-\frac{5}{4}\right)^2\frac{55}{182} + \left(3-\frac{5}{4}\right)^2\frac{11}{182} + \left(4-\frac{5}{4}\right)^2\frac{1}{364}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{11}{16}}$$

ou formule de Koenig :

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{4} f(k)\, P(X=k)$$

théorème de transfert

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \sum_{k=0}^{4} k^2 P(X=k) - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{25}{16} = \frac{11}{16}$$

2) Y compte le nombre de succès "tirer une rouge" quand on répète 4 fois la même expérience avec 2 résultats possibles donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n=4, p=\frac{5}{16}\right)$

On a $E(Y) = n\times p = \frac{5}{4}$ et $V(Y) = np(1-p) = \frac{55}{64}$

3) $E(X) = E(Y)$ 4) $V(X) < V(Y)$ $P(Y=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{5}{16}\right)^4\left(\frac{11}{16}\right)^{4-k}$

TD 21 - Exercice 8

k urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de chaque urne et on note X_n la v.a.r. égale au plus grand numéro des boules tirées.

Déterminer la loi de X_n. Écrire $E(X_n)$. Montrer que $E(X_n) \sim \dfrac{nk}{k+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

On a $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$

on a $(X_n = i) \cup (X_n \leq i-1) = (X_n \leq i)$

et les événements $(X_n = i)$ et $(X_n \leq i-1)$ sont incompatibles

alors $P(X_n = i) + P(X_n \leq i-1) = P(X_n \leq i)$

Toujours vrai si X a des valeurs entières.

$$\boxed{P(X_n = i) = P(X_n \leq i) - P(X_n \leq i-1)}$$

On utilise Ω l'ensemble des k-listes de numéros pris dans $[\![1, n]\!]$ $\Omega = [\![1, n]\!]^k$ $|\Omega| = n^k$ et les n^k tirages sont équiprobables.

$(X_n \leq i)$ est l'ensemble des tirages de n boules dans $[\![1, i]\!]$ donc $|(X_n \leq i)| = i^k$

d'où
$$\boxed{P(X_n = i) = \frac{i^k}{n^k} - \frac{(i-1)^k}{n^k}}$$

On calcule
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} i \times P(X_n = i)$$
$$= \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} \left(i^{k+1} - i(i-1)^k\right) \qquad i = i-1+1$$
$$= \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} \left(i^{k+1} - \underbrace{(i-1)(i-1)^k}_{(i-1)^{k+1}} - (i-1)^k\right)$$
$$= \frac{1}{n^k} \left(n^{k+1} - 0^{k+1} - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^k\right) = \ldots$$

ensuite on reconnaît une somme de Riemann.

TD 20 - Exercice 16

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons, et on sait qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (qui peut être égal à 0 ; autrement dit, on peut piocher une poignée vide).
On note A_i l'événement « On a tiré une poignée contenant i jetons ».

1. Quelle est la probabilité de piocher le numéro 1 sachant qu'on a pioché i jetons ?
2. Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans la poignée ?
3. Les évènements T_1 : « On a pioché le jeton 1 » et T_2 : « On a pioché le jeton 2 » sont-ils indépendants ?

On suppose maintenant qu'on a équiprobabilité sur toutes les poignées possibles (toujours en comptant la poignée vide).

4. Calculer $P(A_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.
5. Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans la poignée ?
6. Les évènements T_1 et T_2 sont-ils indépendants ?

TD 20 - Exercice 16 suite

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons., et on sait qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (qui peut être égal à 0 ; autrement dit, on peut piocher une poignée vide).
On note A_i l'événement « On a tiré une poignée contenant i jetons ».
On suppose maintenant qu'on a équiprobabilité sur toutes les poignées possibles (toujours en comptant la poignée vide).

4. Calculer $P(A_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.
5. Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans la poignée ?
6. Les évènements T_1 et T_2 sont-ils indépendants ?