Corrigé TD 20 - Espaces probabilisés finis

Exercice 1 :

On écrit toutes les décompositions des 11 et 12 :

$$11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3$$

$$12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3+ = 4+4+4.$$

On note A,B,C les 3 dés. Et, on note (a,b,c) l'événement élémentaire « le dé A a donné a, le dé B a donné b et le dé C a donné c avec $a,b,c \in [\![1,6]\!]$ ».

Alors l'événement $E =$« On obtient 11 » se dénombre par

- $3! = 6$ triplets avec les nombres $\{6,4,1\}$ + 6 triplets avec les nombres $\{6,3,2\}$ + 6 pour les nombres $\{5,4,2\}$,
- 3 triplets avec les nombres $\{5,3,3\}$ (choix du dé donnant 5) + 3 triplets pour $\{5,5,1\}$ + 3 triplets pour $\{4,4,3\}$,

ce qui donne $|E| = 6\times 3 + 3\times 3 = 27$.

Pour l'événement $F =$« On obtient 12 », on dénombre par

- $3! = 6$ triplets avec les nombres $\{6,5,1\}$ + 6 triplets avec les nombres $\{6,4,2\}$ + 6 pour les nombres $\{5,4,3\}$,
- 3 triplets avec les nombres $\{6,3,3\}$ (choix du dé donnant 5) + 3 triplets pour $\{5,5,2\}$,
- mais un seul triplet pour $\{4,4,4\}$.

ce qui donne $|F| = 6\times 3 + 3\times 2 + 1 = 25$

Le nombre de cas total est 6^3 : l'univers est l'ensemble $\Omega = [\![1,6]\!]^3$.

On obtient donc $\boxed{P(E) = \dfrac{27}{6^3} = \dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8} \text{ et } P(F) = \dfrac{25}{216}.}$

Exercice 2 :

On note G_i l'événement : « le $i$ème enfant est un garçon » et F_i : « le $i$ème enfant est une fille ».

On suppose que les sexes des enfants sont indépendants. Alors $P(G_1\cap G_2\cap G_3) = P(G_1)P(G_2)P(G_3) = \dfrac{1}{8}$.

On a donc $\boxed{P_{G_1}(G_1\cap G_2\cap G_3) = \dfrac{P(G_1\cap G_2\cap G_3)}{P(G_1)} = \dfrac{1}{4}.}$

L'événement « les 3 enfants sont des filles » est l'événement $F_1\cap F_2\cap F_3$ et l'événement « il y a au moins une fille » est l'événement $F_1\cup F_2\cup F_3$. On a

$$\overline{F_1\cup F_2\cup F_3} = G_1\cap G_2\cap G_3 \Longrightarrow P(F_1\cup F_2\cup F_3) = 1 - P(G_1\cap G_2\cap G_3) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Autre version :

$P(F_1\cup F_2\cup F_3) = P(F_1)+P(F_2)+P(F_3) - P(F_1\cap F_2) - P(F_1\cap F_3) - P(F_2\cap F_3) + P(F_1\cap F_2\cap F_3) = \dfrac{7}{8}.$

Enfin, on cherche

$$\boxed{P_{F_1\cup F_2\cup F_3}(F_1\cap F_2\cap F_3) = \frac{P_{F_1\cap F_2\cap F_3}(F_1\cup F_2\cup F_3)\times P(F_1\cap F_2\cap F_3)}{P(F_1\cup F_2\cup F_3)} = \frac{1\times\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}.}$$

Exercice 3 :

On a $2\times 10 = 20$ chaussures. Les tirages de chaque chaussure sont équiprobables. On a $|\Omega| = \dbinom{20}{4} = 4845$ tirages possibles car on ne tient pas compte de l'ordre des tirages.

Pour A : on compte le nombre de tirages de 2 paires parmi 10 paires : $\binom{10}{2}$. On peut aussi expliquer ce résultat de la manière suivante : 10 choix pour la première paire $\times$ 9 choix pour la paire suivante $\div$ 2 car on a compté deux fois les tirages. Alors $|A| = 45$.

On en déduit la probabilité de A : $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{45}{4845} = \dfrac{3}{323}$.

Pour B : on étudie $\overline{B}$: on compte le nombre de tirages sans aucune paire de chaussures : cela veut dire que les 4 chaussures appartiennent à 4 paires différentes. On a $\binom{10}{4}$ choix pour les 4 paires $\times$ 2^4 choix pour chaque chaussure dans chaque paire. Alors $|\overline{B}| = 3360$.

On en déduit la probabilité de B : $P(B) = \dfrac{|\Omega| - |\overline{B}|}{|\Omega|} = \dfrac{1485}{4845} = \dfrac{99}{323}$.

Remarque : On peut calculer directement $|B|$: $\binom{10}{1}\binom{18}{2}$ nombre de tirages avec une paire complète et deux autres chaussures, mais on a compté deux fois les tirages avec deux paires complètes d'où $|B| = \binom{10}{1}\binom{18}{2} - \binom{10}{2}$.

Pour C : on compte le nombre de tirages d'une seule paire parmi 10 paires. On a 10 choix pour la paire $\times$ $\binom{9}{2}$ choix pour deux autres paires $\times 2$ pour le choix de la troisième chaussure dans la deuxième paire $\times 2$ choix pour la quatrième chaussure dans la troisième paire. Alors $|C| = 1440$.

On en déduit la probabilité de C : $P(C) = \dfrac{|C|}{|\Omega|} = \dfrac{1440}{4845} = \dfrac{96}{323}$.

On remarque que $B = A \cup C$ et ces ensembles sont disjoints donc $P(B) = P(A) + P(C)$.

On remarque également que $\Omega = \overline{B} \cup C \cup A$ et que ces ensembles sont disjoints donc $P(\Omega) = 1 = P(\overline{B}) + P(C) + P(A)$.

Exercice 4 :

1. On note A l'événement « on a choisit le dé A », de même B, C et on note R_i l'événement « on obtient une face rouge au $i$ème lancer » avec $i = 1, 2, 3$.

   Les événements R_1, R_2 et R_3 sont indépendants car on lance 3 fois le même dé et le résultat d'un lancer de dé ne dépend pas du résultat précédent.

   On a $P_A(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3$, $P_B(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \left(\dfrac{2}{6}\right)^3$, $P_C(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \left(\dfrac{3}{6}\right)^3$.

   Par la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= P_A(R_1 \cap R_2 \cap R_3)P(A) + P_B(R_1 \cap R_2 \cap R_3)P(B) + P_C(R_1 \cap R_2 \cap R_3)P(C) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{6}\right)^3 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{6}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{81}. \end{aligned}$$

2. On cherche $P_{R_2}(R_1)$. On a $P_{R_2}(R_1) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)}$ car $P(R_2) \neq 0$.

   On calcule chacune de ces probabilités avec la formule des probabilités totales, car A, B, C forment un système complet d'événements :

   $P(R_1 \cap R_2) = P_A(R_1 \cap R_2)P(A) + P_B(R_1 \cap R_2)P(B) + P_C(R_1 \cap R_2)P(C)$

   et $P_A(R_1 \cap R_2) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^2$, $P_B(R_1 \cap R_2) = \left(\dfrac{2}{6}\right)^2$, $P_C(R_1 \cap R_2) = \left(\dfrac{3}{6}\right)^2$.

   ce qui donne
   $$P(R_1 \cap R_2) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{38}{108} = \frac{19}{54},$$

et
$$P(R_2) = P_A(R_2)P(A) + P_B(R_2)P(B) + P_C(R_2)P(C) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$
Alors $P_{R_2}(R_1) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{19}{54} \times \dfrac{9}{5}$ qui donne $P_{R_2}(R_1) = \dfrac{19}{30}$

3. On cherche $P_{R_1 \cap R_2}(R_3)$ qui vaut $\dfrac{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1 \cap R_2)}$.

   On sait que $P(R_1 \cap R_2) = \dfrac{19}{54}$ et $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \dfrac{20}{81}$. Alors $P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \dfrac{54 \times 19}{20 \times 81} = \dfrac{40}{57}$

4. On cherche $P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(A)$.

   On utilise la formule de Bayes :
   $$P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(A) = \frac{P_A(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \times P(A)}{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)} = \frac{\frac{125}{216} \times \frac{1}{3}}{\frac{20}{81}} \text{ et on obtient } P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(A) = \frac{25}{32}.$$
   De même,
   $$P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(B) = \frac{P_B(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \times P(B)}{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)} = \frac{\frac{8}{216} \times \frac{1}{3}}{\frac{20}{81}} \text{ et on obtient } P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(B) = \frac{1}{20}.$$
   Enfin,
   $$P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(C) = \frac{P_C(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \times P(C)}{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)} = \frac{\frac{27}{216} \times \frac{1}{3}}{\frac{20}{81}} \text{ et on obtient } P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(C) = \frac{27}{160}.$$

Exercice 5 :

On note E l'événement $E =$ « on a acheté au moins 1 billet gagnant ». On étudie plutôt son contraire $F = \overline{E} =$ « on a n'a acheté aucun billet gagnant ».

- Pour la stratégie A : on achète 10 billets en une seule fois.

  On considère l'achat des 10 billets comme une choix de 10 éléments parmi 100 : $\dbinom{100}{10}$ possibilités : c'est le nombre de cas total.

  Pour F, le nombre de cas favorables est le nombre de choix de 10 éléments parmi les $100 - k$ perdants : $\dbinom{100-k}{10}$. On en déduit : $P(F) = \dfrac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}}$. Donc $\boxed{P(E) = 1 - \dfrac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}}}$.

- Pour la stratégie B : on achète 1 billet à la fois pendant 10 semaines.

  On note S_i l'événement le billet acheté pendant la semaine i n'est pas gagnant. On a $F = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{10}$. Comme ces événements sont indépendants, on a
  $$P(F) = P(S_1) \times P(S_2) \times \cdots \times P(S_{10}) = \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10}. \text{ Donc } \boxed{P(E) = 1 - \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10}}.$$

$$A \text{ est préférable à } B \iff \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}} \leqslant \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10} \iff 100^{10} \frac{(100-k)!}{10!(100-k-10)!} \leqslant (100-k)^{10} \frac{100!}{90!10!}$$
$$\iff (100-k) \times (99-k) \cdots \times (91-k) \leqslant (1 - \tfrac{k}{100})^{10} \times 100 \times 99 \times \cdots \times 91$$
$$\iff (1 - \tfrac{k}{100}) \times (1 - \tfrac{k}{99}) \cdots \times (1 - \tfrac{k}{91}) \leqslant (1 - \tfrac{k}{100})^{10}$$
ce qui est toujours vrai. Donc la stratégie A est meilleure.

Exercice 6 :

On note J_1 l'événement « on a tiré le jeton avec 2 faces noires », J_2 « on a tiré le jeton avec 2 faces blanches » et J_3 « on a tiré le jeton avec 2 faces différentes ».

On note B l'événement « le jeton tiré a 2 faces noires ».

On sait $P_{J_1}(B) = 1$, $P_{J_2}(B) = 0$, $P_{J_3}(B) = 1/2$.

On en déduit par la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P_{J_1}(B)P(J_1) + P_{J_2}(B)P(J_2) + P_{J_3}(B)P(J_3) = 1 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1/2 \times 1/3 = \frac{1}{2}.$$

Par la formule de Bayes, on a $P_B(J_1) = \dfrac{P_{J_1}(B)P(J_1)}{P(B)} = \dfrac{1 \times 1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3}$

$$\boxed{\text{La probabilité que le jeton tiré ait 2 faces noires vaut } \frac{2}{3}.}$$

Remarque : Le nombre de cas total est 6 car les jetons ont 6 faces en tout et ces cas sont équiprobables. Sur ces 6 faces, 3 sont noires.

Sur ces 3 faces noires, qui sont équiprobables, 2 d'entre elles appartiennent au jeton 1.

Alors la probabilité que le jeton tiré ait 2 faces noires vaut $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 7 :

On note B l'événement « la pièce est bonne » et A l'événement « la pièce est acceptée ».

L'énoncé nous donne $P_B(A) = 0{,}96$ et $P_B(\overline{A}) = 0{,}04$ puis $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 0{,}98$ d'où $P_{\overline{B}}(A) = 0{,}02$.

De plus, on a $P(\overline{B}) = 0{,}05$: probabilité d'une pièce défectueuse. Ce qui donne $P(B) = 0{,}95$.

On calcule $P(A)$ en utilisant la formule des probabilités totales :

$P(A) = P_B(A).P(B) + P_{\overline{B}}(A).P(\overline{B}) = 0{,}96 \times 0{,}95 + 0{,}02 \times 0{,}05 = 0{,}913$

Pour la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise, on calcule $P_A(\overline{B})$. On utilise la formule de Bayes

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P_{\overline{B}}(A).P(\overline{B})}{P(A)} = \frac{0{,}02 \times 0{,}05}{0{,}913} \simeq 0{,}0011$$

Exercice 8 :

Les résultats sont au nombre de 36 : $(1,1), (1,2), (1,3), \dots (6,5), (6,6)$

On a $P(A) = \dfrac{3}{6}$, $P(B) = \dfrac{3}{6}$, $P(C) = \dfrac{\text{18 résultats où la somme est impaire}}{\text{36 résultats possibles pour 2 dés}} = \dfrac{1}{2}$.

Puis $P(A \cap B) = \dfrac{9}{36}$, $P(B \cap C) = \dfrac{9}{36}$, $P(A \cap C) = \dfrac{9}{36}$

$P(A \cap B \cap C) = 0$ car la somme de deux nombres impairs est paire.

Alors $P(A).P(B) = \dfrac{9}{36}$ et $P(A).P(B) = P(A \cap B)$ et A et B sont indépendants.

$P(B).P(C) = \dfrac{3}{12} = P(B \cap C)$ et $P(A).P(C) = P(A \cap C)$

donc A, B, C sont deux à deux indépendants.

Mais $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A).P(B).P(C)$ donc $\boxed{A, B, C \text{ ne sont pas mutuellement indépendants}}$.

Exercice 9 :

On note R_1 l'événement « la 1ère boule tirée est rouge » et R_2 « la 2ème boule tirée est rouge ».

On cherche $P(R_1 \cap R_2)$ avec R_1 et R_2 qui ne sont, a priori, pas indépendants.

On utilise la formule des probabilités composées : $\quad P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2)$.

On a $P(R_1) = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas total}} = \dfrac{2}{5}$ et $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Alors la probabilité d'obtenir deux boules rouge est $\frac{1}{5}$.

Exercice 10 :

Si on ne propose pas de traduction, alors pour une population de N personnes, il y a $N \times p$ personnes qui parle russe et qui donneront la bonne traduction. Donc la probabilité serait p.

Mais les personnes ne parlant pas le russe peuvent proposer au hasard une traduction parmi les 15.

Notons R l'événement « l'individu choisi parle russe » et E « la traduction donnée par l'individu est exacte ».

Nous recherchons $P(E)$. Nous connaissons $P(R) = p$, $P_R(E) = 1$ et $P_{\overline{R}}(E) = \frac{1}{15}$. Et enfin, $P(\overline{R}) = 1-p$.

Les événements R et $\overline{R}$ forment un système complet d'événements ; on en déduit par la formule des probabilités totales $P(E) = P(R).P_R(E) + P(\overline{R}).P_{\overline{R}}(E)$ Ce qui donne $\boxed{P(E) = p + \frac{1-p}{15}.}$

Exercice 11 :

On considère les événements R_1 « la première boule tirée est rouge » et V_2 « la deuxième boule tirée est verte ».

On a $P(R_1) = \frac{r}{r+v}$ et $P_{R_1}(V_2) = \frac{v}{r+v}$ et $P_{\overline{R_1}}(V_2) = \frac{v}{r+a+v}$.

Les événements R_1 et $\overline{R_1}$ forment un système complet d'événements, alors par la formule des probabilités totales, on obtient

$$\boxed{P(V_2) = P(R_1).P_{R_1}(V_2) + (1 - P(R_1))P_{\overline{R_1}}(V_2) = \frac{r}{r+v}\frac{v}{r+v} + \frac{v}{r+v}\frac{v}{r+a+v}}$$

Exercice 12 :

On note F_n les événements « le fumeur fume le $n$ième jour » et $p_n = P(F_n)$.

On a les relations $P_{\overline{F_n}}(\overline{F_{n+1}}) = 0{,}3$ et $P_{F_n}(\overline{F_{n+1}}) = 0{,}9$. Alors en utilisant la probabilité du complémentaire : $P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = 0{,}7$ et $P_{F_n}(F_{n+1}) = 0{,}1$.

On en déduit en utilisant la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(F_n).P_{F_n}(F_{n+1}) + (1 - p_n)P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})$

ce qui donne la relation $p_{n+1} = 0{,}1p_n + 0{,}7(1 - p_n)$ et finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{n+1} = 0{,}7 - 0{,}6p_n.}$

C'est une suite arithmético-géométrique de raison $0 < 0{,}6 < 1$ donc elle converge vers $\boxed{\ell = \frac{0{,}7}{1{,}6} \simeq 0{,}4375.}$

Exercice 13 :

Si $N > n$, alors nécessairement 2 personnes vont tirer le même objet. Sinon,

On étudie l'événement A « aucun objet n'a été tiré 2 fois » qui est le contraire de l'événement cherché B « au moins 2 personnes ont tiré le même objet ».

On a $P(A) = \frac{\text{nb de tirages de n objets distincts}}{\text{nb de tirages de N fois n objets}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-N)}{n^N}$

et $P(B) = 1 - \frac{n!}{N!n^N}$ pour $N \leqslant n$.

C'est la même probabilité pour une urne contenant p fois n objets car le nombre de cas favorable est multiplié par p^N et le nombre de cas total est aussi multiplié par p^N.

Exercice 14 :

On note $E_{i,n}$ l'événement « l'erreur i n'a pas été corrigée après n relectures » pour $i \in [\![1,5]\!]$.

La probabilité qu'une erreur n'ait pas été corrigée après n relectures est $P(E_{i,n}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

On cherche la probabilité de l'événement $\overline{E_{1,n}} \cap \overline{E_{2,n}} \cap \overline{E_{3,n}} \cap \overline{E_{4,n}} \cap \overline{E_{5,n}}$.

Les corrections étant indépendantes les unes des autres, on a

$$\begin{aligned} P_1 &= P\left(\overline{E_{1,n}} \cap \overline{E_{2,n}} \cap \overline{E_{3,n}} \cap \overline{E_{4,n}} \cap \overline{E_{5,n}}\right) \\ &= P(\overline{E_{1,n}}) \times P(\overline{E_{2,n}}) \times P(\overline{E_{3,n}}) \times P(\overline{E_{4,n}}) \times P(\overline{E_{5,n}}) = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^5. \end{aligned}$$

On souhaite avoir $P_1 \leqslant 0{,}9 \iff 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \geqslant \left(\dfrac{9}{10}\right)^{\frac{1}{5}} \iff 1 - \left(\dfrac{9}{10}\right)^{\frac{1}{5}} \geqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}{\ln 2 - \ln 3}$

(rappel $\ln 2 - \ln 3 < 0$)

Ce qui donne $n \geqslant \lfloor 9{,}54 \rfloor + 1 = 10$

Exercice 15 :

1. Le nombre possible d'épreuves différentes est le nombre de façons de choisir 3 sujets parmi 80, sans tenir compte de l'ordre : $\dbinom{80}{3} = 82160$.

2. (a) Le nombre de cas favorables est le nombre de combinaisons de 3 sujets parmi les 50 sujets révisés : $\dbinom{50}{3} = 19600$. La probabilité pour que l'étudiant tombe sur 3 sujets qu'il a révisé est donc : $\dfrac{\binom{50}{3}}{\binom{80}{3}} = \dfrac{19600}{82160} \simeq 0{,}24$.

   (b) Le nombre de cas favorables est $\dbinom{50}{2} \times \dbinom{30}{1} = 1225 \times 30 = 36750$. La probabilité pour que l'étudiant tombe sur 2 sujets qu'il a révisés est donc : $\dfrac{\binom{50}{2} \times \binom{30}{1}}{\binom{80}{3}} = \dfrac{36750}{82160} \simeq 0{,}45$.

   (c) Le nombre de cas favorables est $\dbinom{50}{1} \times \dbinom{30}{2} = 50 \times 435 = 21750$. La probabilité pour que l'étudiant tombe sur 2 sujets qu'il a révisés est donc : $\dfrac{\binom{50}{1} \times \binom{30}{2}}{\binom{80}{3}} = \dfrac{21750}{82160} \simeq 0{,}26$.

   d) Le nombre de cas favorables est $\dbinom{30}{3} = 4060$. La probabilité pour que l'étudiant tombe sur 2 sujets qu'il a révisés est donc : $\dfrac{\binom{30}{3}}{\binom{80}{3}} = \dfrac{4060}{82160} \simeq 0{,}05$.

3. Soit x le nombre de sujets à réviser. On cherche que la probabilité de ne savoir répondre à aucun sujet soit 0,01.

   Or cette probabilité vaut $\dfrac{\binom{80-x}{3}}{\binom{80}{3}} \leqslant 0{,}01$. Donc $\dbinom{80-x}{3} \leqslant \dfrac{1}{100}\dbinom{80}{3} = \dfrac{8216}{10}$.

   On calcule à la main $\dbinom{18}{3} = 816$ et $\dbinom{19}{3} = 969$.

   Donc $x \geqslant 62$. $\boxed{\text{Il faut réviser au moins 62 sujets sur les 80.}}$

Exercice 16 :

1. Le nombre de jetons dans la poignée tirée peut varier entre 0 et n. L'énoncé stipule que les évènements $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont équiprobables, autrement dit que $P(A_i) = \dfrac{1}{n+1}$.
   On note T_1 l'évènement « On tire le jeton numéro 1 ». On a $P_{Ai}(T_1) = \dfrac{i}{n}$.
   Explication : si on tire une poignée de i jetons et qu'il y en a n au total, on a i chances sur n qu'un jeton précis soit tiré.
   (on peut aussi écrire $|A_i| = \dbinom{n}{i}$ et $|A_i \cap T_1| = \dbinom{n-1}{i-1}$ puisqu'une fois choisi le jeton 1, il reste $i-1$ jetons à tirer parmi les n $-$ 1 restants dans l'urne. On obtient $P_{A_i}(T_1) = \dfrac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} = \dfrac{i}{n}$.
2. Les évènements (A_i) formant un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :
   $P(T_1) = \sum\limits_{i=0}^{n} P(A_i) \times P_{A_i}(T_1) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{i}{n}$
   Et, on trouve $P(T_1) = \dfrac{1}{2}$.
3. On a bien sûr de même $P(T_2) = \dfrac{1}{2}$. Pour déterminer si le tirage des jetons 1 et 2 est indépendant, le plus simple est de calculer $P(T_1 \cap T_2)$ et de regarder si on obtient la même valeur qu'en calculant $P(T_1) \times P(T_2)$.
   Le calcul de $P(T_1 \cap T_2)$ est très similaire à celui effectué ci-dessus :
   On a $\quad |A_i \cap T_1 \cap T_2| = \dbinom{n-2}{i-2}, \quad$ Donc
   $P_{A_i}(T_1 \cap T_2) = \dfrac{\binom{n-2}{i-2}}{\binom{n}{i}} = \dfrac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!} \times \dfrac{i!(n-i)!}{n!} = \dfrac{i(i-1)}{n(n-1)}$
   On applique ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir
   $P(T_1 \cap T_2) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{i(i-1)}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n(n-1)(n+1)} \sum\limits_{i=0}^{n}(i^2 - i)$
   $P(T_1 \cap T_2) = \dfrac{1}{n(n-1)(n+1)} \left(\dfrac{n(n+11)(2n+1)}{6} - \dfrac{n(n+1)}{2} \right)$.
   On trouve $P(T_1 \cap T_2) = \dfrac{1}{3}$.
   Cette probabilité étant différente de $P(T_1) \times P(T_2) = \dfrac{1}{4}$, les deux évènements ne sont pas indépendants. Autre façon de voir les choses : $P_{T_1}(T_2) = \dfrac{P(T_1 \cap T_2)}{P(T_1)} = \dfrac{2}{3}$.
4. Dans le cas où ce sont les poignées qui sont équiréparties, comme il existe 2^n poignées (autant que de parties de l'ensemble des n jetons placés dans l'urne), chaque poignée a une probabilité $\dfrac{1}{2^n}$ d'être tirée.
   Comme il existe $\dbinom{n}{i}$ poignées contenant i jetons, on a donc $P(A_i) = \dfrac{\binom{i}{n}}{2^n}$.
5. On peut alors effectuer le même type de calcul que précédemment à l'aide des probabilités totales (la probabilité conditionnelle $P_{A_i}(T_1)$ n'a pas de raison d'avoir changé) :
   $P(T_1) = \sum\limits_{i=0}^{n} P(A_i) \times P_{A_i}(T_1) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{2^n} \dbinom{n}{i} \times \dfrac{i}{n} = \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{i \times n!}{i! \times n \times (n-i)!} = \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}$

On trouve $\quad P(T_1) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}$ $\quad$ Il est connu que $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$

On trouve $P(T_1) = \frac{1}{2}$.

Donc la même probabilité que précédemment, ce qui est en fait normal si on se souvient que les coefficients binomiaux ont une propriété de symétrie : on a autant de chances de tirer une poignée à 0 éléments qu'une poignée à n éléments, une poignée à 1 élément qu'une à $n-1$ éléments etc, ce qui donnera toujours en moyenne une chance sur deux de tirer un jeton donné.

6. Comme tout à l'heure, on aura donc $P(T_1) \times P(T_2) = \frac{1}{4}$, et on cherche à calculer $P(T_1 \cap T_2)$.

   Avec la formule des probabilités totales en utilisant le système complet d'évènements (A_i) :

   $P(T_1 \cap T_2) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{i} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!}$

   $P(T_1 \cap T_2) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}$

   On sait que $\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = 2^{n-2}$. On trouve $\quad P(T_1 \cap T_2) = \frac{1}{4}$.

   Cette fois-ci, les deux évènements sont indépendants.

Exercice 17 :

On note I_n l'événement « l'information reçue par A_n est identique à celle émise par A_1 ».

On a $P(I_n) = p_n$.

On connaît d'après l'énoncé, les probabilités suivantes

$$P_{I_n}(I_{n+1}) = p \text{ et } P_{\overline{I_n}}(I_{n+1}) = 1 - p.$$

Les événements I_n et $\overline{I_n}$ forment un système complet d'événements, alors d'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(I_{n+1}) = P_{I_n}(I_{n+1}) \times P(I_n) + P_{\overline{I_n}}(I_{n+1}) \times (1 - P(I_n))$$

On obtient $p_{n+1} = p \times p_n + (1-p)(1-p_n) = (2p-1)p_n + 1 - p$ et la condition initiale $p_1 = 1$.

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.

On cherche sa limite éventuelle qui vérifie $\ell = (2p-1)\ell + 1 - p \iff 2(1-p)\ell = 1 - p$

Si $p = 1$, alors l'information est transmise à coup sûr et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = 1$.

Si $p = 0$, alors l'information n'est jamais transmis et chaque système suivant la parité de sa position reçoit la bonne information ou la mauvaise.

Sinon $p \in]0,1[$, alors la limite éventuelle de la suite est $\ell = \frac{1}{2}$ et la suite $v_n = p_n - \frac{1}{2}$ est géométrique de raison $(2p-1)$.

Comme $|2p-1| < 1$, $\boxed{\text{la suite } (p_n) \text{ converge vers } \frac{1}{2}.}$