TD 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1 : Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels. Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

$$E_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=0\right\} \; E_2 = \{(x,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \; E_3 = \{(0,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \; E_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 = xy\right\}$$

$$E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x-y \geqslant 0\right\} \; E_6 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y+z-t=0\right\} \; E_7 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x=y\right\}$$

$$E_8 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x-y+z-t=1\right\} \; E_9 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, |x|=|y|\right\} \; E_{10} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ y-z+t=0 \end{array}\right\}$$

Exercice 2 : Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}[X]$ lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

$A = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(0)=1\}$ $\quad B = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(2)=0\}$ $\quad C = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \deg P \geqslant 8\}$ $\quad D = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(1)=P(2)\}$

Exercice 3 : Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels :

a - les suites convergentes b - les suites divergentes c - les suites bornées d - les suites majorées

Exercice 4 : Dans $\mathbb{R}^4$, donner un système d'équations de $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u}=(1,1,1,1)$ et $\vec{v}=(1,2,-1,3)$.

Exercice 5 : Soit $a=(2,3,-1)$, $b=(1,-1,-2)$, $c=(3,7,0)$, $d=(5,0,-7)$ et $e=(0,0,1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par $\{a,b\}$ est égal au sous-espace engendré par $\{c,d\}$.
2. On désigne par E le sev $E=\mathrm{Vect}(a,b)$ et $F=\mathrm{Vect}(e,b)$. Déterminer une partie génératrice de $E\cap F$.

Exercice 6 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre ($F\subset G$ ou $G\subset F$).

Exercice 7 : Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3.

On pose $F=\{P\in E|P(1)=0 \text{ et } P(-2)=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}(1,X)$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3\,[X]$ et déterminer une base de F, puis une base de G.

Exercice 8 : Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par les équations $F : x-2y+3z=0$ et $G : 2x-y+z=0$.

Déterminer des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ et $\vec{e}_5$ tels que $F=\mathrm{Vect}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $G=\mathrm{Vect}(\vec{e}_3,\vec{e}_4)$ et $F\cap G=\mathrm{Vect}(\vec{e}_5)$.

Exercice 9 : Soit $F=\left\{\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \middle| (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ et $G=\left\{\begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \middle| (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et une base de G.

Exercice 10 : Soit E l'espace des fonctions réelles à valeurs réelles. Soit a,b deux réels. On définit :

$$F=\{f\in E|\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(2a-x)\} \text{ et } G=\{f\in E|\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=2b-f(2a-x)\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $b=0$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 11 : Dans l'espace des suites complexes, soit $E=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}-u_{n+1}-2u_n=0\right\}$,
$F=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}+u_n=0\right\}$ et $G=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-2u_n=0\right\}$.

Montrer que E est un espace vectoriel, puis que F et G sont des sev supplémentaires de E.

Exercice 12 : Soit E l'ensemble des fonctions dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle $y''-2y'-3y=0$. Soit F et G respectivement les ensembles des solutions des équations différentielles $y'=-y$ et $y'=3y$.

Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E.

Exercice 13 : Dans l'espace $E=\mathbb{R}^4$, on pose $\overrightarrow{u}_1=(1,0,0,0)$, $\overrightarrow{u}_2=(1,1,0,0)$, $\overrightarrow{u}_3=(1,1,1,0)$ et $\overrightarrow{u}_4=(1,1,1,1)$. Puis on définit $F=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2)$ et $G=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_3,\overrightarrow{u}_4)$.

Déterminer des équations de F et G. Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E. Déterminer l'expression analytique de la projection vectorielle p sur F parallèlement à G.

Exercice 14 : Dans l'espace $E=\mathbb{R}^3$, on pose $F=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2)$, $G=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e}_3)$ où $\overrightarrow{e}_1=(1,0,-1)$, $\overrightarrow{e}_2=(1,1,0)$ et $\overrightarrow{e}_3=(1,2,3)$. Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E. Donner l'expression de la projection p sur F parallèlement à G, puis celle de la projection q sur G parallèlement à F.

Exercice 15 : Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si c'est le cas, déterminer leur noyau et leur image. Préciser si les applications sont injectives, surjectives ou bijectives.

$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,x) \end{array}$ $\quad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(2) \end{array}$ $\quad f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ $\quad f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$ $\quad f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathcal{R}e(z) \end{array}$

$f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x+1) \end{array}$ $\quad f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2,y) \end{array}$ $\quad f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (X-1)P \end{array}$ $\quad f_9 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$ $\quad f_{10} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$

Exercice 16 : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ espace des fontions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. On définit $\varphi : E \longrightarrow E$ par $f \longmapsto \varphi(f) = g$. Déterminer dans quels cas φ est linéaire :

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt, \quad g(x) = \int_0^x f^2(t)\,dt, \quad g(x) = \int_0^x f(t^2)\,dt, \quad g(x) = f'(x), \quad g(x) = f'(x^2).$$

Exercice 17 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+2y, y) \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y,Z) & \longmapsto & (X+Z, 5X-2Y+Z) \end{array}$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Puis , montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$. Déteminer $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$.
2. Montrer que $g \circ f \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$. Déterminer $(g\circ f)^{-1}$. $f \circ g$ est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 18 : Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P' - (X-2)P \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \psi(P) = P - (X-2)P' \end{array}$.

Montrer que φ et ψ sont linéaires et déterminer leurs noyau et image. Étudier l'application $\varphi \circ \psi$ (rang, noyau, image).

Exercice 19 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 20 : Soit $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par $\varphi(f) = g$ avec $g(t) = f'(t) + \dfrac{1}{1+t^2} f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Justifier que φ est linéaire et déterminer son noyau et son image. Est-elle injective, surjective ?

Exercice 21 : Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2id_E = 0$.

1. Montrer que u est un automorphisme et calculer u^{-1}.
2. Montrer que $\forall x \in E, u(x) - 2x \in \operatorname{Ker}(u - id_E)$ et $u(x) - x \in \operatorname{Ker}(u - 2id_E)$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - id_E)$ et $\operatorname{Ker}(u - 2id_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 22 : $\mathbb{C}$ étant muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que l'application f suivante est linéaire et déterminer son noyau et son image : $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + a\overline{z} \end{array}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$

Exercice 23 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = (X-a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)]$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 24 : Déterminer si les applications suivantes sont des symétries ou des projections.

$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x,y) = (3x+2y, -4x-3y)$ $\qquad f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_3(x,y,z) = (-3x-2y, 6x+4y, -2x-y+z)$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_2(x,y) = (-x-2y, x+2y)$ $\qquad f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_4(x,y,z) = (-3x+4y+6z, 4x-3y-6z, -4x+4y+7z)$

$\varphi_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\varphi_1(P) =$ le reste de la division de P par $(X+1)^3$

$\varphi_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\varphi_2(P) = Q$ avec $Q(X) = P(-X)$

Exercice 25 : Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Soit $d : E \longrightarrow E,\ f \longmapsto f'$. Montrer que $d \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer $\operatorname{Ker} d$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Ker} d$: $\operatorname{Im} d$ et $\operatorname{Ker} d$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 26 : Soient f et g deux endomorphismes d'un ev E. Montrer que : $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Montrer que si $g \circ f = 0$ alors on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Exercice 27 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $\quad \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.