Chapitre 18 - Séries numériques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite

$\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ suite des sommes partielles

série de terme général (u_n)

$\sum u_n$

1 Sommes partielles d'une série

1.1 Sommes partielles, somme et reste

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

On appelle série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

nouvelle notation

S_n s'appelle la somme partielle d'indice n.

Si la série converge, sa limite s'appelle somme de la série et on la note $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

(S_n) converge

On appelle reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Exemple 1.1. $\cancel{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}^{+\infty}} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}$

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}$ série de terme général $v_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}$

pour $n \in \mathbb{N}^*$

de sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k^2}$

Exemple 1.2. Soit $a \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$ C'est la série exponentielle.

fixé

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$ est convergente car $S_n = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}$

la fonction exp est C^∞ alors d'après la formule de Taylor en 0

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \exp^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$

on pose $x = a$

$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a e^t \frac{(a-t)^n}{n!} dt$

On encadre le reste intégral pour $a>0$

On prend $t\in[0,a]$

$0\leqslant e^t\leqslant e^a$ d'où $0\leqslant e^t\dfrac{(a-t)^n}{n!}\leqslant e^a\dfrac{(a-t)^n}{n!}$

L'intégrale est croissante et $0\leqslant a$ et les 3 fonctions sont continues d'où

$$\int_0^a 0\,dt\leqslant\int_0^a e^t\frac{(a-t)^n}{n!}\,dt\leqslant\int_0^a e^a\frac{(a-t)^n}{n!}\,dt$$

pour $a>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad 0\leqslant e^a-\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{a^k}{k!}\leqslant e^a\left[\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a=e^a\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$

On a par croissance comparée $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}e^a\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=0$

donc par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{a^k}{k!}=e^a$

ce qui prouve que la série converge vers e^a pour $a>0$

$S_n\to e^a$

Proposition 1.1. *Pour tout entier n_0, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0}u_n$ sont de même nature.*

Preuve : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature

Exemple 1.3. Les séries arithmétiques : $\sum_{n\geqslant 0} na$ avec $a \in \mathbb{C}^*$

Exemple 1.4. Les séries géométriques : $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ avec $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| < 1$ convergent.

Ecrivons les sommes partielles de cette série :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

On peut conclure pour $|q| < 1$:

alors $q^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car suite géométrique de raison q

donc (S_n) converge vers $\dfrac{1}{1-q}$

alors $\sum q^n$ converge et la somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

1.2 Linéarité de la somme

Proposition 1.2. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, et si $\alpha \in \mathbb{K}$ est un scalaire, alors $\sum(\alpha u_n + v_n)$ est convergente et* $\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha u_n + v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

conjugué

Proposition 1.3. *Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors $\sum \overline{u_n}$ est convergente et* $\overline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n}$

Proposition 1.4. *Une série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.*

En cas de convergence, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$

Exemple 1.5. Étudions la série : $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{n(-1/2+i)}$

on écrit les sommes partielles

$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{k(-\frac{1}{2}+i)} = \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{1}{2}k} e^{ik}$

$= \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-\frac{1}{2}+i}\right)^k$ c'est une série géométrique

de raison $q = e^{-\frac{1}{2}+i}$ et $|q| = |e^{-\frac{1}{2}}||e^{i}|$

$= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

on a $|q| < 1$ donc $\sum q^n$ converge

donc la série $\sum e^{n(-\frac{1}{2}+i)}$ est convergente

Exemple 1.6. Étudions la somme de ces deux séries : $\sum_{n\in\mathbb{N}} n + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}^n - n\right)$

1.3 Limite du terme général d'une série convergente

Théorème 1.5.
Si $\sum u_n$ *est une série convergente, alors le terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite convergente vers* 0.

Démonstration.

□

Définition 1.2. Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Exemple 1.7. Les séries géométriques : $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ avec $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| \geqslant 1$ divergent.

Exemple 1.8. La série harmonique : $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ est une série divergente.

1.4 Séries géométriques

Théorème 1.6. *La série* $\sum q^n$ *avec* $q \in \mathbb{C}$ *converge si et seulement si* $|q| < 1$.

Corollaire 1.7. *Si la série* $\sum q^n$ *converge, alors sa somme est* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Exemple 1.9. $\sum \frac{1}{(-2)^n}$

Exemple 1.10. $\sum e^{-n}$

1.5 Télescopage

Proposition 1.8. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.*

Démonstration.

□

Exemple 1.11. Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$. Déterminer la valeur de sa somme.

Exemple 1.12. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 1.1. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente et déterminer la valeur de sa somme.

2 Séries à termes positifs

2.1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2.1.
Une série à termes réels positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Remarque 2.1. Une série à termes réels positifs est croissante.

Démonstration.

□

Exemple 2.1. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^n}$.

Exemple 2.2. Monter que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

2.2 Critère de comparaison

Théorème 2.2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites positives et si pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$ et de plus,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration.

□

Théorème 2.3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites positives et si pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors, $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.*

Démonstration.

□

2.3 Critère d'équivalence

Théorème 2.4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives.*

$$\text{Si } u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n, \text{ alors } \quad \sum v_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Démonstration.

□

Exemple 2.3. e

2.4 Comparaison à une intégrale

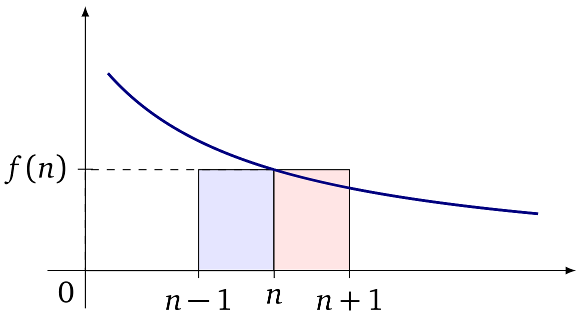
Théorème 2.5. *Si f est une fonction décroissante et continue sur $[n_0, +\infty[$, alors on a pour $n \geqslant n_0+1$:*

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$$

ce qui donne :

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$$

Démonstration.



□

Exemple 2.4. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. En déterminer un équivalent.

Exemple 2.5. Étudier la série $\sum \frac{1}{1+n^2}$.

Exemple 2.6. Étudier la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

2.5 Séries de Riemann

Définition 2.1. On appelle série de Riemann, les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.6. *La série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration.

□

Exemple 2.7. Étude de $\sum \frac{1}{n^2+4n+1}$

2.6 Comparaison à une série géométrique

Exercice 2.1. Montrer le théorème suivant pour une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs :
« Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ pour tout $n \geqslant n_0$ avec $0 < q < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$ pour tout $n \geqslant n_0$ avec $q > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge. »

2.7 Comparaison à une série de Riemann

Exercice 2.2. Montrer le théorème suivant pour une série $\sum u_n$ à termes positifs.
« Si il existe $\alpha > 1$ tel que $(u_n \times n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\sum u_n$ converge.
Si il existe $\alpha \leqslant 1$ et $K > 0$ tel que $u_n \geqslant \dfrac{K}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ diverge. »

3 Séries absolument convergentes

3.1 Convergence absolue

Définition 3.1. On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 3.1. *Une série absolument convergente est convergente.*

Corollaire 3.2. *Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors* $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Démonstration.

□

Exemple 3.1. Étude de $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$

Exemple 3.2. Étude de $\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{2^n}$

Exemple 3.3. Étude de $\sum (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$: cette série n'est pas absolument convergente mais est convergente.

Exemple 3.4. Étude de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ en utilisant $\ln(1+x)$

3.2 Convergence absolue par comparaison

Théorème 3.3. *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe et v_n une suite à termes strictement positifs. Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.*

Démonstration.

□

Exemple 3.5. Étude de $\sum \dfrac{\sin(n) + e^{in}}{n^2}$

4 Développement décimal d'un nombre réel

Définition 4.1. Soit x un nombre réel positif, on appelle valeur décimale approchée par défaut à 10^{-n} près de x le nombre $x_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$ et valeur décimale approchée par excès à 10^{-n} près le nombre $y_n = 10^{-n}(\lfloor 10^n x\rfloor + 1) = x_n + 10^{-n}$.
On a alors $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x < y_{n+1} \leqslant y_n$.

Proposition 4.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Les suites des valeurs décimales approchées par défaut et par excès de x sont adjacentes et convergent vers x.*

Définition 4.2. Soit x un nombre réel positif et n un entier naturel, on appelle développement décimal de x l'écriture de $x - \lfloor x\rfloor$ comme somme de la série convergente $x - \lfloor x\rfloor = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ où la $n^{\text{ième}}$ décimale de x après la virgule définie par $a_n = 10^n(x_n - x_{n-1})$ est un entier entre 0 et 9.
On peut écrire $x = \lfloor x\rfloor + \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \dots$.

Démonstration.

□

Remarque 4.1. On a pour tout entier n_0, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \times \frac{1}{10^{n_0}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{n_0-1}}$.
Alors, le nombre $x = 0,12349999999999....$ (avec une suite infinie de 9) vaut $x = 0,1235$ et la suite des chiffres de son développement décimal est $1, 2, 3, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$

Proposition 4.2. *Le développement décimal d'un réel positif est propre : c'est-à-dire que la suite des (a_n) ne se stabilise pas à 9 au-delà d'un certain rang.*

Proposition 4.3. *Tout nombre décimal a 2 développements l'un propre et l'autre impropre.*

Théorème 4.4.

Un nombre x est décimal si et seulement la suite de son développement décimal (a_n) est nulle à partir d'un certain rang.

Un nombre positif x est rationnel si et seulement si la suite (a_n) de son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Théorème 4.5. *Pour tout nombre $x \in [0,1[$, il existe une unique suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \in [\![0,9]\!] \quad \text{et} \quad (a_n) \text{ n'est pas stationnaire à 9.}$$

On a $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor$. On l'appelle le développement décimal illimité propre de x.