Chapitre 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

4 Applications linéaires

4.1 Morphismes d'espaces vectoriels

Soit E, F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Définition 4.1. Une application f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est dite linéaire si

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \qquad f(\alpha.x) = \alpha.f(x).$$

Théorème 4.1. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \qquad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$
$$\Longleftrightarrow \forall (x,y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \qquad f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Remarque 4.1. *L'image d'une combinaison linéaire de vecteurs par une application linéaire est la combinaison linéaire des images des vecteurs.*

Définition 4.2. Une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ s'appelle un endomorphisme de E.

notations 4.3. On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

4.2 Exemples

4.3 Généralités sur les applications

Dans ce paragraphe, E et F sont deux ensembles.

Définition 4.4. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
Pour $x \in E$, $y = f(x)$ s'appelle l'image de x et x est un antécédent de y.
On appelle image directe par f d'une partie A de E, l'ensemble des images des éléments de A noté $f(A)$:

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

On appelle image réciproque par f d'une partie B de F, l'ensemble des antécédents (éventuels) des éléments de B noté $f^{-1}(B)$: $$f^{-1}(B) = \{ x \mid f(x) \in B \}$$

Remarque 4.2. Attention : rien n'indique ici que f est bijective ni que son application réciproque f^{-1} existe.

Définition 4.5. Soit f une application de E dans F.
f est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

f est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall z \in F, \exists x \in E : \quad z = f(x).$$

f est bijective si f est injective et surjective ce qui est équivalent à tout élément de l'ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent par f.

Lemme 4.2. *Soit f une application de E dans F.*

f est bijective de E dans F si et seulement si il existe une application $u : F \longrightarrow E$ telle que $u \circ f = id_E$ et $f \circ u = id_F$.

4.4 Noyau et image d'une application linéaire

E et F sont deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Proposition 4.3. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

L'image directe d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 4.6. Étant donné une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, on appelle :

- noyau de f le sous-espace vectoriel de E défini par
$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}\{\overrightarrow{0}\} = \left\{x \in E \mid f(x) = \overrightarrow{0}\right\}.$$
C'est l'ensemble des antécédents du vecteur nul par f.
- image de f le sous-espace vectoriel de F défini par
$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E : \ y = f(x)\}.$$
C'est l'ensemble des images de E par f.

Théorème 4.4. *Si f est une application linéaire de E dans F, alors*

$$f \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{0}\} \qquad \text{et par ailleurs,} \qquad f \text{ est surjective} \iff \operatorname{Im} f = F.$$

Exercice 4.1. Déterminer le noyau et l'image de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x+y-z, x-2y+z)$

Vu en classe

Correction :

Soit $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs. On calcule
$$f(u+v) = (2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2), (x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+(z_1+z_2))$$
soit par propriété du calcul vectoriel :
$$f(u+v) = (2x_1+y_1-z_1, x_1-2y_1+z_1)+(2x_2+y_2-z_2, x_2-2y_2+z_2)$$
On reconnaît
$$f(u+v) = f(u)+f(v)$$
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^2$. On calcule
$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x+\alpha y-\alpha z, \alpha x-2\alpha y+\alpha z) = \alpha(2x+y-z, x-2y+z)$$
On a donc $\underline{f(\alpha u) = \alpha f(u)}$

Les deux résultats prouvent que $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

On détermine le noyau de f : soit $u \in \mathbb{R}^3$, $\quad u \in \operatorname{Ker} f \iff f(u) = \overrightarrow{0}$.

On note $u = (x,y,z)$, on a alors :
$$u \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} 2x+y-z &= 0 \\ x-2y+z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ 5y-3z &= 0 \end{cases}$$
On a trois inconnues et deux pivots, alors on a un paramètre : $z = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

$u \in \operatorname{Ker} f \iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{5}\alpha \\ y & = & \frac{3}{5}\alpha \\ z & = & \alpha \end{array}\right.$

On en déduit que le noyau de f est la droite vectorielle dirigée par $(1,3,5)$: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,3,5))$

On détermine ensuite l'image de f :

un vecteur $v = (a,b)$ appartient à l'image de f si et seulement si il existe un vecteur $u = (x,y,z)$ tel que $f(u) = v$

$(a,b) \in \operatorname{Im} f \iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & a \\ x-2y+z & = & b \end{array}\right.$

$\iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+z & = & a \\ 5y-3z & = & a-2b \end{array}\right.$

Le système est échelonné et a deux équations et trois inconnues (x,y,z). Il n'a pas d'équation de compatibilité, alors il a toujours des solutions (sous-entendu : il a des solutions pour toutes valeurs de a et b).

Alors, tous les vecteurs (a,b) de $\mathbb{R}^2$ sont dans $\operatorname{Im} f$: on a $\underline{\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{Im} f}$.

Et, on sait que $\underline{\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2}$ par définition de f. Alors, $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2}$ et il s'ensuit que f est surjective.

Exercice 4.2. Déterminer le noyau et l'image de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y) = (x - 2y, x + 3y, 2y)$

En cours ...

Correction :

Soit $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs.

Exercice 4.3. Déterminer le noyau et l'image de $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $h(x, y) = (x + 2y - z, 2x + y - 2z, x - y - z)$ En cours ...

Correction :
On montre d'abord que g est linéaire : soit deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Autre exercice

Exercice 4.4. Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $\varphi(P) = (2X-1)P' + 3XP$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

À faire

4.5 Combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 4.5. *Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et des scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\alpha f + \beta g$ est une application linéaire de E dans F.*

Corollaire 4.6. *$\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.*

4.6 Composition d'applications linéaires

Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Proposition 4.7. *Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g \circ f$ est linéaire de E dans G.*

Démonstration.

□

Exemple 4.1. On considère les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$f(x,y)=\frac{1}{5}(x+2y,2x+4y),\quad g(x,y)=\frac{1}{5}(4x-2y,-2x+4y)\text{ et }\quad h(x,y)=(x,0)$$

Calculer les différentes composées : $f\circ g$, $f\circ f$, $h\circ f$ et $f\circ h$

4.7 Isomorphismes et automorphismes

Définition 4.7. Une application linéaire bijective $f:E\longrightarrow F$ s'appelle un isomorphisme.
Un endomorphisme bijectif $f:E\longrightarrow E$ s'appelle un automorphisme.

Proposition 4.8. *Soit f une application linéaire de E dans F. Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est aussi linéaire et est un isomorphisme de F dans E.*

Proposition 4.9. *L'ensemble des automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle groupe linéaire de E, noté $\mathcal{GL}(E)$.*

Corollaire 4.10. *Pour $f,g\in\mathcal{GL}(E)$, on a $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.*

Exemple 4.2. Montrons que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - 2y, x + y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4.8 Calcul d'endomorphismes

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{E}$ deux endomorphismes de E.
On peut effectuer des combinaisons linéaires : $\alpha f + \beta g$ pour tous α et β réels est un endomorphisme de E,
On peut composer les endomorphismes : $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux endomorphismes de E.
On peut également calculer : $f \circ f$ qu'on note f^2, $f \circ f \circ f = f^3$ et par récurrence, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots f \circ f}_{n \text{ fois}}$

Par convention, $f^0 = id_E$.

Exemple 4.3. On pose :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y;x+y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y;-x-y) \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y;x-y) \end{array}$$

Calculer $f \circ g$, $g \circ f$ et h^2

Exemple 4.4. Soit f un endomorphisme de E.

5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

5.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 5.1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors le plus petit sous-espace vectoriel qui contient F et G est

$$H = \{x + y \,|\, x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

On l'appelle somme de F et G et on le note $H = F + G$.
H est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion de F et G.

Exemple 5.1. Soit $F = \text{Vect}((1, 3, -1), (1, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 1), (-1, 1, 0))$
Déterminer $F + G$

5.2 Somme directe

Définition 5.2. On dit que deux sev F et G d'un espace vectoriel E, sont en somme directe si tout vecteur u de $F+G$ s'écrit de manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. On note alors la somme $F \oplus G$.

Proposition 5.1. *Deux sev F et G d'un espace vectoriel E, sont en somme directe si et seulement si* $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.

Exemple 5.2. Soit $F = \mathrm{Vect}((1,3,-1))$ et $G = \mathrm{Vect}((1,0,1))$. Montrer que F et G sont en somme directe et déterminer $F+G$.

Exemple 5.3. Soit $F = \mathrm{Vect}(X^2+1)$ et $G = \mathrm{Vect}(3X-7)$. Montrer que F et G sont en somme directe et déterminer $F+G$.

5.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 5.3. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si $E = F + G$ et si F et G sont en somme directe : $E = F \oplus G$.

Théorème 5.2. *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \exists! y \in F : \exists! z \in G : \quad x = y + z \text{ avec } y \in F \text{ et } z \in G$$

$$E = F \oplus G \Longleftrightarrow E = F + G \text{ et } F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$$

Exemple 5.4. Soit F le sev de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ et $G = \mathrm{Vect}((1,0,1))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5.5. Montrer que les fonctions paires et les fonctions impaires sont deux sev supplémentaires de l'espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5.4 Base adaptée à une somme directe.

Proposition 5.3. *Si F et G sont deux sev en somme directe et si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_q)$ est une base de G, alors $(e_1, \dots, e_q)$ est une base de la somme directe $F \oplus G$.*
On dit qu'une telle base est adaptée à la somme directe.

Démonstration.

$\square$

Proposition 5.4. *Si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_q)$ est une base de G, telles que $(e_1, \dots, e_q)$ est une base de E, alors $E = F \oplus G$.*

Théorème 5.5.

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille libre d'un espace vectoriel, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) \oplus \mathrm{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$.

Exemple 5.6. Montrons que $\mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_2[X] \oplus \text{Vect}(X^3)$

6 Applications linéaires et familles de vecteurs

6.1 Image d'une base par une application linéaire

Théorème 6.1. *Soit* $u : E \longrightarrow F$ *une application linéaire et* $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ *une base de* E.

- *La famille* $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ *est une famille génératrice de* $\operatorname{Im} u$.
- u *est surjective* $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ *est génératrice de* F.
- u *est injective* $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ *est libre dans* F.
- u *est bijective* $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ *est une base de* F.

Démonstration.

□

Corollaire 6.2. *Soit* $u : E \longrightarrow F$ *une application linéaire.*
u *est un isomorphisme de* E *dans* F *si et seulement si l'image d'une base de* E *par* u *est une base de* F.

6.2 Application linéaire définie par l'image d'une base

Théorème 6.3. *Étant données une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et une famille d'autant de vecteurs $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dans F, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad u(e_i) = f_i$.*

Exemple 6.1. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(1) = X^2 + 2X$, $f(X-1) = X^2 + 5$, $f((X-1)^2) = 2X - 4$. Déterminer l'image d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Corollaire 6.4. *Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.*

$$f = g \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(e_i) = g(e_i).$$

Deux applications linéaires sont égales si et seulement si leurs images d'une base sont les mêmes.

Corollaire 6.5. *Une application linéaire est nulle si et seulement si l'image d'une base par cette application linéaire est la famille nulle.*

6.3 Application linéaire définie sur deux sev supplémentaires

Proposition 6.6. *Soit E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit $f_1 : E_1 \longrightarrow F$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$. C'est-à-dire $\forall x_1 \in E_1, \quad f(x_1) = f_1(x_1)$ et $\forall x_2 \in E_2, \quad f(x_2) = f_2(x_2)$.*

7 Applications linéaires essentielles

7.1 Homothéties

Définition 7.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle homothétie toute application $f : E \longrightarrow E$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda.x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ un scalaire non nul fixé.

Proposition 7.1. *Une homothétie de E est un automorphisme de E.*
L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ de l'espace vectoriel E est l'application $\lambda.id_E$.

7.2 Projecteurs

Définition 7.2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On appelle projection sur F parallèlement à G, l'application $p : E \longrightarrow E$ qui à $x \in E$ associe l'unique vecteur $y \in F$ tel que $x = y + z$ avec $z \in G$.

Une telle application est aussi appelée projecteur.

Théorème 7.2. *Soit p une application de E dans E.*

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } p \text{ est linéaire et } p \circ p = p.$$

Dans ce cas, p projette sur $\operatorname{Im} p$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker} p$.

Démonstration.

- Si p est la projection sur F parallèlement à G. Soit $x \in E$ et $y \in E$ et $\alpha \in K$.
  Les vecteurs x et y se décomposent en $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ avec $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$. On a $p(x) = x_F$ et $p(y) = y_F$.
  Alors $\alpha x + y$ se décompose en $\alpha x + y = (\alpha x_F + y_F) + (\alpha x_G + y_G)$ avec $\alpha x_F + y_F \in F$ et $\alpha x_G + y_G \in G$ car F, G sont des sev.
  Alors on a $p(\alpha x + y) = \alpha x_F + y_F = \alpha p(x) + p(y)$. $\boxed{\text{L'application } p \text{ est donc linéaire}}$.
  De plus, pour $x \in E$, que l'on écrit $x = x_F + x_G$, on a $p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x_F)$ mais comme $x_F \in F$, on a $x_F = x_F + 0$ donc $p(x_F) = x_F$ et finalement, $p \circ p(x) = p(x)$. On conclut $\boxed{p \circ p = p}$.
- Réciproquement, si p est linéaire et $p \circ p = p$, alors on pose $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p$.
  Soit $y \in F \cap G$, u est une image donc il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ et $y \in G$ donc $p(y) = 0$ $\Longrightarrow y = p(x) = p \circ p(x) = p(p(x)) = p(y) = 0$. Donc $F \cap G \subset \{0\}$.
  Et, comme on a toujours l'inclusion réciproque, $\boxed{F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}}$.
  Soi $x \in E$, alors x s'écrit $\boxed{x = p(x) + (x - p(x))}$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p(-p(x)) = p(x) - p(x) = 0$. Donc $\boxed{E = F + G.}$
  Alors on a $E = F \oplus G$ et la relation $x = p(x) + (x - p(x))$ prouve que p est la projection sur F parallèlement à G.
- Enfin, si p est un projecteur, alors les images sont des éléments de F donc $\operatorname{Im} p \subset F$.
  Et réciproquement tout élément $z \in F$ est sa propre image $p(z) = z$ donc $F \subset \operatorname{Im} p$. On en déduit $\boxed{\operatorname{Im} p = F}$.
  Les éléments $u \in G$ s'écrivent $u = 0 + u$ avec $0 \in F$et $u \in G$ donc $p(u) = 0 \Longrightarrow u \in \operatorname{Ker} p$. On a donc $g \subset \operatorname{Ker} p$.
  Réciproquement, si $p(u) = 0$ pour $u \in E$, alors u s'écrit $u = 0 + u_G$ avec $u_G \in G$. On en déduit que $u \in G$ ce qui prouve $\operatorname{Ker} p \subset G$. On a donc $\boxed{\operatorname{Ker} p = G}$.

□

Remarque 7.1. Pour étudier une projection p, on cherche les vecteurs invariants : $p(x) = x \Longleftrightarrow (p - id)(x) = \overrightarrow{0}$ car, pour une projection, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - id)$.

Exemple 7.1. Montrons que $f(x, y) = \dfrac{1}{5}(6x - 2y, 3x - y)$ est une projection.

On calcule $f \circ f(x, y) = \dfrac{1}{5}(6X - 2Y, 3X - Y)$ avec $X = \dfrac{6x - 2y}{5}$ et $Y = \dfrac{3x - y}{5}$.

Ce qui donne $f \circ f(x, y) = \dfrac{1}{25}(30x - 10y, 15x - 5y) = f(x, y)$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme f est aussi linéaire, $\underline{f \text{ est une projection}}$.

On cherche les vecteurs invariants : $f(x, y) = (x, y) \Longleftrightarrow x - 2y = 0 \Longleftrightarrow (x, y) \in \operatorname{Vect}(2, 1)$. Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((2, 1))$.

Et le noyau de f : $f(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow 3x - y = 0 \Longleftrightarrow (x, y) \in \operatorname{Vect}(1, 3)$. Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1, 3))$.

Conclusion : f est la projection sur $\operatorname{Vect}((2, 1))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((1, 3))$

7.3 Symétries

Définition 7.3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application $s : E \longrightarrow E$ qui à x s'écrivant $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ associe $s(x) = y - z$.

Proposition 7.3. *Une symétrie s de E est un automorphisme involutif de E : i.e. $s \circ s = s^2 = id_E$.*

Théorème 7.4. *Soit s une application de E dans E.*

$$s \text{ est une symétrie si et seulement si } s \text{ est linéaire et } s \circ s = id_E.$$

Dans ce cas, s est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + id_E)$.