Chapitre 22 - Déterminants

1 Déterminant d'une matrice carrée

1.1 Linéarité par rapport aux colonnes de la variable

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note ses colonnes $M = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ et on note C'_j une autre colonne.

Définition 1.1. Soit $j \in [\![1, n]\!]$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est linéaire par rapport à la colonne C_j si pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, pour toute matrice M et pour toute colonne C'_j,

$$f\Big(C_1|C_2|\dots|\alpha C_j + C'_j|\dots|C_n\Big) = \alpha f\Big(C_1|C_2|\dots|C_j|\dots|C_n\Big) + f\Big(C_1|C_2|\dots|C'_j|\dots|C_n\Big)$$

1.2 Antisymétrie par rapport aux colonnes

Définition 1.2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable si pour toute matrice $M = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ et pour tous indices i, j

$$f\Big(C_1|C_2|\dots|C_i|\dots|C_j|\dots|C_n\Big) = -f\Big(C_1|C_2|\dots|C_j|\dots|C_i|\dots|C_n\Big)$$

1.3 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. *f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de la matrice,*
2. *f est antisymétrique par rapport aux colonnes de la matrice,*
3. *$f(I_n) = 1$.*

Cette application s'appelle déterminant et on la note $\det(M)$ *pour une matrice carrée M.*

notations 1.3. Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$, on note $\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

1.4 Dimension 2 et 3

Proposition 1.2. *Pour $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a*

$$\det M = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Proposition 1.3. *Pour $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on a*

$$\det(M) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_1 w_2 v_3 - v_1 u_2 w_3 - w_1 v_2 u_3.$$

1.5 Propriétés du déterminant

Proposition 1.4. *Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.*

$$\det\Big(C_1|C_2|\dots|C_{i-1}|C|C_{i+1}|\dots|C_{j-1}|C|C_{j+1}|\dots|C_n\Big) = 0$$

Proposition 1.5.
Si une des colonnes d'une matrice est combinaison linéaire des autres alors son déterminant est nul.

Proposition 1.6. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$\det(\lambda.A) = \lambda^n \det(A)$$

2 Déterminant et opérations élémentaires

2.1 Opérations élémentaires sur les colonnes

Proposition 2.1. *L'opération élémentaire sur les matrices* $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*, ne change pas la valeur du déterminant.*

Proposition 2.2. *L'opération élémentaire* $C_i \leftrightarrow C_j$ *change le signe du déterminant.*

Proposition 2.3. *L'opération* $C_i \leftarrow \mu C_i$*,* $\mu \in \mathbb{K}$ *multiplie le déterminant par* μ*.*

Proposition 2.4. *Soit* M *une matrice carrée et* E_1 *une matrice d'opération élémentaire.*
On a $\det(M.E_1) = \det(M)\det(E_1)$*.*
Si E *est une matrice produit de matrices d'opérations élémentaires, alors* $\det(M.E) = \det(M)\det(E)$*.*

Proposition 2.5. *Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure ou supérieure est le produit de ses coefficients diagonaux.*

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Application : Calcul du déterminant par opérations sur les colonnes.

2.2 Matrices inversibles et déterminant

Théorème 2.6. *Une matrice carrée* A *est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$*.*

2.3 Développement selon une ligne ou une colonne

Proposition 2.7. *Soit* A *une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$*.*
On note Δ_{ij} *le déterminant extrait de* A *en supprimant la* $i^{\text{ième}}$ *ligne et la* $j^{\text{ième}}$ *colonne.*
On peut calculer $\det A$ *en développant par rapport à n'importe quelle ligne* p *:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}(-1)^{p+j}\Delta_{pj} \text{ pour tout } p \in [\![1,n]\!],$$

ou en développant par rapport à n'importe quelle colonne q *:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{iq}(-1)^{i+q}\Delta_{iq} \text{ pour tout } q \in [\![1,n]\!].$$

Lemme 2.8. *Pour toute matrice* $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$*, on a* $\det \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det B$

3 Déterminant d'un produit de matrices

3.1 Déterminant d'un produit

Théorème 3.1. *Pour toutes matrices* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* $\det(AB) = \det A.\det B$*.*

3.2 Déterminant de l'inverse

Théorème 3.2. *Une matrice* A *est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$ *et dans ce cas, on a* $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$*.*

3.3 Déterminant de la transposée

Théorème 3.3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* $\det A^T = \det A$*.*

3.4 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base E. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de E. On appelle déterminant de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det A \qquad \text{où } A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Proposition 3.4. *On a* $\det_B(B) = 1$.

3.5 Caractérisation des bases

Théorème 3.5. *Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.*

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \text{ si et seulement si } \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0.$$

4 Déterminant d'un endomorphisme

4.1 Définition

Définition 4.1.
On appelle déterminant d'un endomorphisme f de E le déterminant de la matrice de f dans une base B de E :

$$\det f = \det(M_B(f)).$$

La valeur du déterminant ne dépend pas de la base choisie.

4.2 Propriétés

Proposition 4.1. *Pour tout $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,*

$$\det(f \circ g) = \det f . \det g \qquad\qquad \det(\alpha f) = \alpha^n \det f$$

Corollaire 4.2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.*

$$f \text{ est bijective si et seulement si } \det f \neq 0. \text{ Alors } \det f^{-1} = \frac{1}{\det f}.$$

Théorème 4.3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n finie. Soit B une base de E et $x_1, x_2, \dots, x_n$ une famille de vecteurs de E. On a*

$$\det_B(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = \det f \times \det_B(x_1, x_2, \dots, x_n).$$