Chapitre 15 - TD - 23 mars 2020

Exercice 18 :

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P' - (X-2)P \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \psi(P) = P - (X-2)P' \end{array}$.

Montrer que φ et ψ sont linéaires et déterminer leurs noyau et image. Étudier l'application $\varphi \circ \psi$ (rang, noyau, image).

Exercice 19 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 9 :

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et une base de G.

Exercice 13 :

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on pose $\overrightarrow{u}_1 = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{u}_3 = (1,1,1,0)$ et $\overrightarrow{u}_4 = (1,1,1,1)$. Puis on définit $F = \text{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ et $G = \text{Vect}(\overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$.

Déterminer des équations de F et G. Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E. Déterminer l'expression analytique de la projection vectorielle p sur F parallèlement à G.

Exercice 10 :

Soit E l'espace des fonctions réelles à valeurs réelles. Soit a,b deux réels. On définit :

$$F = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2a-x)\} \text{ et } G = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2b - f(2a-x)\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $b = 0$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 21 :

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2id_E = 0$.

1. Montrer que u est un automorphisme et calculer u^{-1}.
2. Montrer que $\forall x \in E, u(x) - 2x \in \mathrm{Ker}(u - id_E)$ et $u(x) - x \in \mathrm{Ker}(u - 2id_E)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - id_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - 2id_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice xx :

Exercice xx :