

## Mathématique - DS n°7

L'usage de documents, de calculatrices ou de téléphones portables est interdit.  
Les étudiants sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

### Exercice 1

1. Déterminer la nature de la série  $\sum \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ .
2. Montrer que la série  $\sum \frac{1}{[\text{ch}(n)] + 1}$  est convergente.

### Exercice 2

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'équation  $x^5 + nx^3 = 1$  ( $E_n$ )

1. Montrer que ( $E_n$ ) admet une unique solution réelle que l'on notera  $x_n$ .
2. Montrer que la suite  $(x_n)$  est décroissante.
3. Montrer que  $(x_n)$  converge vers une limite  $\ell$  que l'on déterminera.
4. Déterminer un équivalent simple de  $x_n - \ell$ .
5. Déterminer un développement asymptotique à 2 termes significatifs de  $x_n$ .

### Exercice 3

On souhaite dans cet exercice étudier la fonction  $f : x \mapsto x(x-1) \ln \left( 1 + \frac{1}{2x} \right)$ . On notera  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
2. Déterminer un équivalent en  $0^+$  de  $f(x)$ . En déduire la limite en  $0^+$  de  $f(x)$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ . Que peut-on en déduire ?
4. Calculer un développement limité à l'ordre 2 en 1 de  $f$ .
5. En déduire la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en 1 et la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à sa tangente.
6. Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $(1-u) \ln \left( 1 + \frac{u}{2} \right)$ .
7. En déduire un développement asymptotique de  $f$  à l'ordre 3 quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ .
8. La courbe  $\mathcal{C}$  admet-elle une asymptote en  $+\infty$  et en  $-\infty$  ? Si oui, préciser la position relative de  $\mathcal{C}$  et de cette asymptote.

### Exercice 4

On considère pour cet exercice l'application  $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  définie pour tout  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  par

$$\varphi(P) = P(X^2) - (X^2 + 1)P'(X).$$

On considère également la famille  $\mathcal{F} = (3, 2X - 1, 3X^3 + 1)$  et l'ensemble  $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], (2X - 1)P' = 6P\}$

1. Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel. Déterminer sa dimension et en donner une base.
2. Montrer que la famille  $\mathcal{F}$  est libre dans  $\mathbb{R}_3[X]$ . Est-ce une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  ?
3. Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire.
4. Montrer que le noyau de  $\varphi$  est le sev engendré par  $(X^2 - 1)$ .
5. L'application  $\varphi$  est-elle injective ? Que peut-on dire de son caractère surjectif ? Est-ce un endomorphisme ? Est-ce un isomorphisme ?
6. Montrer que  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  et  $\text{Ker}(\varphi)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}_3[X]$ . Puis, donner une base adaptée à la décomposition en somme directe  $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus \text{Ker}(\varphi)$

7. Exprimer la symétrie  $\sigma$  par rapport à  $\text{Ker}(\varphi)$  parallèlement à  $\text{Vect}(F)$ .
8. Donner une base de l'image de  $\varphi$ .
9. On considère l'application  $\tilde{\varphi}$  induite par  $\varphi$  de  $\text{Vect}(F)$  dans  $\text{Im}(\varphi)$ , 
$$\begin{array}{ccc} \tilde{\varphi} : \text{Vect}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi) \\ P & \longmapsto & P(X^2) - (X^2 + 1)P'(X) \end{array}$$
 Montrer que  $\tilde{\varphi}$  est un isomorphisme.

## Exercice 5

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = \ln(2)$ .

1. On considère la fonction  $g$  définie par  $g(t) = \frac{\sin(t) - t}{t^2}$  si  $t \neq 0$  et  $g(0) = 0$ .
  - (a) Vérifier que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - (b) En utilisant la continuité de  $g$  sur  $[-2, 2]$  et un encadrement, montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} g(t) dt = 0$ .
  - (c) En déduire que  $f$  est continue en 0.
2. Montrer que  $f$  est paire.
3. (a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  non nul.  
 (b) En déduire que  $f$  est dérivable en 0 et donner  $f'(0)$ .  
 (c) Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .
4. Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[, |f(x)| \leq \frac{1}{2x}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
5. (a) Montrer que  $f(\pi/2) > 0$  et que  $f(\pi) < 0$ .  
 (b) Montrer que  $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2} \right) \sin(t) dt$ . En déduire que  $f(2\pi) > 0$ .  
 (c) Tracer dans un repère orthonormé les hyperboles :  $y = \frac{1}{2x}$  et  $y = -\frac{1}{2x}$  ainsi que l'allure de la courbe représentative de  $f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$ .