Mathématique - Corrigé Devoir Maison n°11

Exercice 1

1. $x^2+y^2+z^2-2(1+m)x+2(2m-1)y-4mz=11-6m$
$\Longleftrightarrow (x-(1+m))^2-(1+m)^2+(y+2m-1)^2-(2m-1)^2+(z-2m)^2-4m^2=11-6m$
$\Longleftrightarrow (x-(1+m))^2-m^2-2m-1+(y+2m-1)^2-4m^2+4m-1+(z-2m)^2-4m^2=11-6m$
$\Longleftrightarrow (x-(1+m))^2+(y+2m-1)^2+(z-2m)^2=9m^2-8m+13$
Le discriminant du trinôme $T=9m^2-8m+13$ est $\Delta=64-468=-404$. On a $\Delta<0$, et donc $\forall m\in\mathbb{R},\ \ T>0$.

$\boxed{\text{Pour tout réel } m,\ S_m \text{ est une sphère de centre } \Omega_m(m+1,1-2m,2m) \text{ et de rayon } R_m=\sqrt{9m^2-8m+13}.}$

2. (a) $\forall m\in\mathbb{R}\quad x^2+y^2+z^2-2(1+m)x+2(2m-1)y-4mz=11-6m$
$\Longleftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}\ \ x^2+y^2+z^2-2x-2y+m(-2x+4y-4z)=11-6m$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y=11 \\ -2x+4y-4z=-6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=13 \\ -x+2y-2z=-3 \end{cases}$
On reconnait l'intersection d'une sphère S_0 avec le plan P_0 d'équation $-x+2y-2z=-3$. Précisons cette intersection :
On note B_0 le projeté orthogonal de $\Omega_0(1,1,0)$ sur le plan P_0. La droite Γ orthogonale à P_0 et passant par Ω_0 est de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-2t \end{cases}$. Le projeté $B_0\in P_0\cap\Gamma$ vérifie donc $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-2t \\ -x+2y-2z=-3 \end{cases}$
Ce qui implique $-(1-t)+2(1+2t)-2(-2t)=-3$ soit $9t=-4$ d'où $t=-\frac{4}{9}$, et $\begin{cases} x=1-t=\frac{13}{9} \\ y=1+2t=\frac{1}{9} \\ z=-2t=\frac{8}{9} \end{cases}$
Donc le projeté orthogonal de Ω_0 sur P_0 est $B_0(\frac{13}{9},\frac{1}{9},\frac{8}{9})$
On a $\overrightarrow{\Omega_0B_0}(\frac{4}{9},\frac{-8}{9},\frac{8}{9})$ et donc $\Omega_0B_0=||\overrightarrow{\Omega_0B_0}||=\frac{4}{9}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=\dfrac{4}{3}$
Comme $\Omega_0B_0<\sqrt{13}$ (qui est le rayon de la sphère S_0), l'intersection $S_0\cap P_0$ est bien un cercle de centre B_0 et dont le rayon est donné par le théorème de Pythagore : $r_0^2=13-\dfrac{16}{9}=\dfrac{101}{9}$.
Finalement, l'ensemble des points M appartenant à toutes les sphères S_m est :

$\boxed{\text{le cercle } \mathcal{C} \text{ de centre } B_0(\tfrac{13}{9},\tfrac{1}{9},\tfrac{8}{9}), \text{ de rayon } r_0=\dfrac{\sqrt{101}}{3} \text{ contenu dans le plan } P_0\ :\ \ -x+2y-2z=-3}$

(b) $x^2+y^2+z^2-2(1+m)x+2(2m-1)y-4mz=11-6m$
$\Longleftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-11=m(2x-4y+4z-6)$
Lorsque le point M n'appartient pas au plan P_0, il suffit de poser
$m_M=\dfrac{x^2+y^2+z^2-2x-2y-11}{2x-4y+4z-6}$ pour trouver une sphère S_{m_M} contenant M. De plus, c'est la seule sphère contenant M dans ce cas là.
Lorsque le point M appartient au plan P_0, on a donc :
— soit $x^2+y^2+z^2-2x-2y-11=0$ et M appartient à toutes les sphères S_m : c'est le cas où M appartient au cercle $\mathcal{C}$.
— soit $x^2+y^2+z^2-2x-2y-11\neq 0$ et M n'appartient à aucune sphère S_m.

$\boxed{\text{l'ensemble des points } M \text{ n'appartenant à aucune sphère } S_m \text{ est le plan } P_0 \text{ privé du cercle } \mathcal{C}}$

(c) L'étude précédente prouve également que :

$\boxed{\text{L'ensemble des points } M \text{ appartenant à une et une seule sphère est l'espace privé du plan } P_0}$

3. (a) Le plan Q_m orthogonal à D et passant par Ω_m est de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,-1,1)$.

Il a pour équation cartésienne : $x-y+z+Cste=0$ où $Cste$ est une constante qu'on détermine sachant que $H_m \in Q_m$: $1+m-(1-2m)+2m+Cste=0$ d'où $Cste=-5m$.

On recherche H_m le projeté orthogonal de Ω_m sur la droite D. Le point H_m appartient à D et à Q_m.

On résout

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=3-t \\ z=-1+t \\ x-y+z-5m=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3+t \\ y=3-t \\ z=-1+t \\ 3+t-(3-t)-1+t-5m=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3+t=\frac{10+5m}{3} \\ y=3-t=\frac{8-5m}{3} \\ z=-1+t=\frac{5m-2}{3} \\ t=\frac{5m+1}{3} \end{cases}$$

Donc $\boxed{\text{le projeté orthogonal de } \Omega_m \text{ sur } D \text{ est le point } H_m(\frac{10+5m}{3}, \frac{8-5m}{3}, \frac{5m-2}{3})}$

(b) Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_m H_m}(\frac{7+2m}{3}, \frac{5+m}{3}, \frac{-m-2}{3})$ est de norme :

$\Omega_m H_m = \dfrac{1}{3}\sqrt{(7+2m)^2+(5+m)^2+(-2-m)^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{6m^2+42m+78}$

La sphère S_m est tangente à D si et seulement si $\Omega_m H_m = R_m$

$\iff \dfrac{1}{3}\sqrt{6m^2+42m+78} = \sqrt{9m^2-8m+13} \iff \dfrac{6m^2+42m+78}{9} = \dfrac{2m^2+14m+26}{3} = 9m^2-8m+13$

$\iff 2m^2+14m+26 = 27m^2-24m+39 \iff 25m^2-38m+13=0$. Le discriminant $\Delta = 1444-1300 = 144 = 12^2$.

Cette équation admet deux solutions réelles qui sont $m_1 = \dfrac{13}{25}$ et $m_2 = 1$

On en déduit qu' $\boxed{\text{il existe deux sphères } S_m \text{ tangentes à } D \text{ et ce sont } S_{\frac{13}{25}} \text{ et } S_1.}$

Exercice 2

1. On étudie $h(u)=e^u-1-u$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $h'(u)=e^u-1$. On a $h'(u)\geqslant 0 \iff u\geqslant 0$ donc h a un minimun en 0 qui vaut $h(0)=0$. Alors $\forall u\in\mathbb{R},\ 1+u\leqslant e^u$.
On applique cette inégalité avec $t=-u$ ce qui donne : $\forall t\in\mathbb{R},\ 1-t\leqslant e^{-t}$.
Lorsque $t<1$, on passe à l'inverse (les deux quantités sont strictement positives) et en notant $t=u$ on obtient : $\boxed{\forall u \in]-\infty,1[,\ \ 1+u\leqslant e^u\leqslant \dfrac{1}{1-u}}$

2. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,\sqrt{n}]$, on pose $u=-\dfrac{x^2}{n}$ (remarquons que $u\in[-1,0]\subset]-\infty,1[$), et la double inégalité précédente donne : $1-\dfrac{x^2}{n}\leqslant \exp(-\dfrac{x^2}{n})\leqslant \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{n}}$.
Ayant des expressions positives ou nulles et la fonction $v\mapsto v^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,\sqrt{n}],\ \ \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n\leqslant e^{-x^2}\leqslant \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^n}}$

3. (a) Pour tout entier $n\geqslant 2$, $A_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t).(\cos t)^{n-1}\,dt$.
On effectue une intégration par parties : u et v sont de classe C^1

$$\left\{\begin{array}{ll} u'(t)=\cos(t) & u(t)=\sin(t) \\ v(t)=(\cos t)^{n-1} & v'(t)=-(n-1)\sin(t).(\cos t)^{n-2} \quad (\text{avec } n\geqslant 2)\end{array}\right.$$

$$A_n=\underbrace{\Big[\sin(t).(\cos t)^{n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\text{nul lorsque } n\geqslant 2}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t).(\cos t)^{n-2}\,dt=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2(t).(\cos t)^{n-2}\,dt$$

D'où $\boxed{A_n=(n-1)\Big(A_{n-2}-A_n\Big)}$ ce qui équivaut à $\boxed{(n-1+1)A_n=nA_n=(n-1)A_{n-2}.}$

Pour tout $n\geqslant 2$, on a : $nA_nA_{n-1}=(n-1)A_{n-2}.A_{n-1}$ et donc la suite $(nA_nA_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante.

Comme $A_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^0\,dt=\frac{\pi}{2}$ et $A_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^1\,dt=\Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$, on en déduit que $\boxed{nA_nA_{n-1}=1.A_1.A_0=\frac{\pi}{2}}$

(b) $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ on sait que $0\leqslant\cos(t)\leqslant 1$ et donc $0\leqslant(\cos(t))^n\leqslant(\cos(t))^{n-1}\leqslant(\cos(t))^{n-2}$.

Lorsqu'on intègre sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ (les bornes sont dans le bon sens), cela implique que :

$0\leqslant\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^n\,dt\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^{n-1}\,dt\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^{n-2}\,dt$.

La première fonction à intégrer n'étant pas identiquement nulle, on a même :

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2,\ \ 0<A_n\leqslant A_{n-1}\leqslant A_{n-2}}$

En divisant le tout par A_n (strictement positif) et en utilisant la relation $nA_n=(n-1)A_{n-2}$, on a : pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\quad 1\leqslant\dfrac{A_{n-1}}{A_n}\leqslant\dfrac{n}{n-1}$

Enfin $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n-1}=1$ et le théorème d'encadrement permettent d'en déduire que

$\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{A_{n-1}}{A_n}=1}$ $\qquad$ On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nA_n{}^2=\lim_{n\to+\infty}nA_na_{n-1}\times\frac{A_n}{A_{n-1}}=\frac{\pi}{2}\times 1=\frac{\pi}{2}$

Comme A_n est strictement positif, on obtient $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}A_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$

4. (a) On intègre la double inégalité de la question 2. sur $[0,\sqrt{n}]$, avec les bornes dans le bon sens et cela implique $\boxed{B_n\leqslant\varphi(\sqrt{n})\leqslant C_n}$

(b) Le changement de variable est tel que $\left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{n}\sin(t)\\ dx=\sqrt{n}\cos(t)\,dt\end{array}\right.$ et les bornes sont $\left\{\begin{array}{l} t=0\Rightarrow x=0\\ t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\sqrt{n}\end{array}\right.$

On obtient : $B_n=\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(1-\sin^2(t)\Big)^n\sqrt{n}\cos(t)\,dt=\sqrt{n}A_{2n+1}$

On a $\boxed{B_n=\sqrt{n}A_{2n+1}}$

Ensuite on pose $\left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{n}\tan(t)\\ dx=\sqrt{n}(1+\tan^2(t))\,dt\end{array}\right.$ avec les bornes $\left\{\begin{array}{l} t=0\Rightarrow x=0\\ t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\sqrt{n}\end{array}\right.$

et on a : $C_n=\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{n}(1+\tan^2(t))dt}{\Big(1+\tan^2(t)\Big)^n}=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos(t))^{2n-2}dt$

Or $\forall t\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$, $\quad(\cos(t))^{2n-2}\geqslant 0$ donc, en intégrant avec les bornes dans le bon sens $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^{2n-2}dt\geqslant 0$ $\quad$ Donc on a bien $\boxed{C_n\leqslant\sqrt{n}A_{2n-2}}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}A_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \times \sqrt{2n+1}A_{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}A_{2n-2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-2}} \times \sqrt{2n-2}A_{2n-2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Par le théorème d'encadrement, $\varphi(\sqrt{n})$ converge quand n tend vers $+\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\sqrt{n}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

(d) Pour x positif, on pose $n = \lfloor x^2 \rfloor$ et on a l'encadrement $\sqrt{n} \leqslant x < \sqrt{n+1}$.
L'application φ étant croissante sur $\mathbb{R}$ (en effet $\varphi'(x) = e^{-x^2} > 0$), $\varphi(\sqrt{n}) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(\sqrt{n+1})$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\lfloor x^2 \rfloor = n$ tend aussi vers $+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\sqrt{n}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\sqrt{n+1})$.

Par le théorème d'encadrement, $\varphi(\sqrt{x})$ converge quand x tend vers $+\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(\sqrt{x}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Exercice 3

1. Pour f de classe C^{n+1}, on a la formule de Taylor :
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(x-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \dfrac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

On pose $f(x) = \ln(1-x) = f^{(0)}(x)$ Montrons par récurrence que $\forall k \geqslant 1$, $f^{(k)}(x) = -\dfrac{(k-1)!}{(1-x)^k}$

• *initialisation* Pour $k = 1$ on constate que $f'(x) = -\dfrac{1}{1-x} = -\dfrac{0!}{(1-x)^1}$

• *hérédité* En supposant la formule vraie au rang k,
$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(-\dfrac{(k-1)!}{(1-x)^k}\right)' = -(-1)(-k)\dfrac{(k-1)!}{(1-x)^{k+1}} = -\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$
Ce qui est la formule au rang $k+1$.

On a donc établi par récurrence que $\forall k \geqslant 1$, $f^{(k)}(x) = -\dfrac{(k-1)!}{(1-x)^k}$.

Il s'ensuit, qu'au point $a = 0$, on a $f^{(0)}(0) = ln(1) = 0$ et $\forall k \geqslant 1$, $f^{(k)}(0) = -(k-1)!$,
et la formule de Taylor devient :
$\ln(1-x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k\,!}(-(k-1)!) + \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n\,!}\left(-\dfrac{n!}{(1-t)^{n+1}}\right)dt = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} - \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt$

On obtient donc $\boxed{\ln(1-x) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} - \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt}$

2. Comme $1-t > 0$, on a $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x \Longleftrightarrow 0 \leqslant x-t \leqslant x(1-t) \Longleftrightarrow x \geqslant t$ et $xt \leqslant t$ ce qui est vérifié car $0 \leqslant t \leqslant x < 1$. On a bien démontré que $\boxed{0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x}$

3. Étudions $A_n = \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{(1-x)^{n+1}}\,dt$. En prenant $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, on a $0 \leqslant \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \dfrac{1}{1-t} \leqslant x^n \dfrac{1}{1-t}$

Ce qui fait que $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leqslant x^n \dfrac{1}{1-t}$. On intègre de 0 à x avec les bornes dans le bons sens et $0 \leqslant A_n \leqslant -x^n \ln(1-x)$. On choisit $x = \dfrac{1}{2}$ et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -(\frac{1}{2})^n \ln(1-\frac{1}{2}) = 0$, par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$.

Donc $\ln(1-\frac{1}{2}) = \lim\limits_{n\to+\infty} -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(\frac{1}{2})^k}{k}$ et on peut conclure que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k2^k} = \ln(2)}$