Chapitre 18 - Séries numériques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite

$\left(S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ suite des sommes partielles

série de terme général (u_n) $\sum u_n$

1 Sommes partielles d'une série

1.1 Sommes partielles, somme et reste

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

On appelle série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

nouvelle notation

S_n s'appelle la somme partielle d'indice n.

Si la série converge, sa limite s'appelle somme de la série et on la note $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

(S_n) converge

On appelle reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Exemple 1.1. $\cancel{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}}$

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}$ série de terme général $v_n = (-1)^n\frac{\ln(n)}{n^2}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$

de sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k^2}$

Exemple 1.2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. La série $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$. C'est la série exponentielle.

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$ est convergente car $S_n = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}$

La fonction exp est C^∞ alors d'après la formule de Taylor en 0

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \exp^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$

on pose $x=a$

$e^a = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a e^t \frac{(a-t)^n}{n!}\,dt$

On encadre le reste intégral pour $a>0$

On prend $t\in[0,a]$

$0\leq e^t\leq e^a$ d'où $0\leq e^t\frac{(a-t)^n}{n!}\leq e^a\frac{(a-t)^n}{n!}$

L'intégrale est croissante et $0\leq a$ et les 3 fonctions sont continues d'où

$$\int_0^a 0\,dt\leq\int_0^a e^t\frac{(a-t)^n}{n!}dt\leq\int_0^a e^a\frac{(a-t)^n}{n!}dt$$

pour $a>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $$0\leq e^a-\sum_{k=0}^n\frac{a^k}{k!}\leq e^a\left[\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a=e^a\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a par croissance comparée $\lim_{n\to+\infty}e^a\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=0$

donc par théorème d'encadrement $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{a^k}{k!}=e^a$

ce qui prouve que la série converge vers e^a pour $a>0$

$S_n\to e^a$

Proposition 1.1. *Pour tout entier n_0, les séries $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0}u_n$ sont de même nature.*

Preuve : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature

Exemple 1.3. Les séries arithmétiques : $\sum_{n\geqslant 0} na$ avec $a \in \mathbb{C}^*$

Exemple 1.4. Les séries géométriques : $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ avec $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| < 1$ convergent.

Écrivons les sommes partielles de cette série :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

On peut conclure pour $|q| < 1$:

alors $q^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car suite géométrique de raison q

donc (S_n) converge vers $\dfrac{1}{1-q}$

alors $\sum q^n$ converge et la somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

1.2 Linéarité de la somme

Proposition 1.2. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, et si $\alpha \in \mathbb{K}$ est un scalaire, alors $\sum(\alpha u_n + v_n)$ est convergente et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha u_n + v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

conjugué

Proposition 1.3. *Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors $\sum \overline{u_n}$ est convergente et* $\displaystyle\overline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n}$

Proposition 1.4. *Une série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.*

En cas de convergence, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$

Exemple 1.5. Étudions la série : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{n(-1/2+i)}$

on écrit les sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{k(-\frac{1}{2}+i)} = \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{1}{2}k} e^{ik}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-\frac{1}{2}+i}\right)^k$$ c'est une série géométrique

de raison $q = e^{-\frac{1}{2}+i}$ et $|q| = |e^{-\frac{1}{2}}||e^{i}| = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

on a $|q| < 1$ donc $\sum q^n$ converge

donc la série $\sum e^{n(-\frac{1}{2}+i)}$ est convergente

Exemple 1.6. Étudions la somme de ces deux séries : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\right)$

la série $\sum n$ est divergente : série arithmétique de raison 1 la série $\sum\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\right)$ diverge car :

les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - k\right)$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Mais $n+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

1.3 Limite du terme général d'une série convergente

Théorème 1.5.
Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors le terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0.

Démonstration.

les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ de la série $\sum u_n$ vérifient $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = u_n \Leftrightarrow S_n = S_{n-1} + u_n$

Si la série $\sum u_n$ CV, alors (S_n) converge vers une limite ℓ et $S_n - S_{n-1} \longrightarrow \ell - \ell = 0$ par opération sur les suites CV

alors (u_n) converge vers 0

□

Définition 1.2. Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Exemple 1.7. Les séries géométriques : $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ avec $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| \geqslant 1$ divergent.

Si $|q| \geqslant 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|q^n| \geqslant 1 \Rightarrow |q^n - 0| \geqslant 1$

donc (q^n) ne converge pas 0.

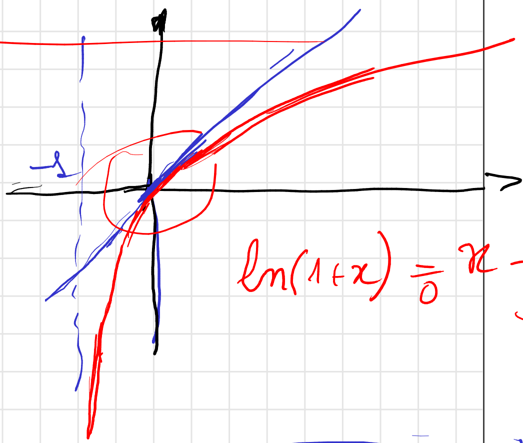
donc $\sum q^n$ est divergente

exemple : $\sum (-1)^n$

les sommes partielles valent : 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

Exemple 1.8. La série harmonique : $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ est une série divergente. mais $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On va montrer que $\forall x > -1,\quad \ln(1+x) \leq x$



on pose $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$

φ est dérivable sur $]-1,+\infty[$

et $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\varphi'(x) \geqslant 0 \iff \frac{x}{1+x} \geqslant 0$

$\iff x(1+x) \geqslant 0$ et $x \neq -1$

$\iff$ ~~$x < -1$~~ ou $x \geqslant 0$

valeur interdite

et $\varphi(0) = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

on a $\forall x > -1\ ,\ \ln(1+x) \leq x$

On a les sommes partielles de $\sum \frac{1}{n}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \quad \text{en posant } x = \frac{1}{k} > 0$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$$

on reconnait une somme télescopique :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$

donc par théorème de divergence par minoration

$S_n \longrightarrow +\infty$ donc $\boxed{\sum \frac{1}{n} \text{ diverge}}$

et elle n'est pas grossièrement divergente

1.4 Séries géométriques

Théorème 1.6. *La série $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{C}$ converge si et seulement si $|q| < 1$.*

Corollaire 1.7. *Si la série $\sum q^n$ converge, alors sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.*

Exemple 1.9. $\sum \dfrac{1}{(-2)^n}$

Exemple 1.10. $\sum e^{-n}$

- $\sum\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente car $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ et la somme (= limite) de la série géométrique est : $\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$
- $\sum e^{-n}$ est une série convergente car $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$
- $\sum \dfrac{2^k}{k!}$ série exponentielle $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{2^k}{k!} = e^2$

1.5 Télescopage

Proposition 1.8. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.*

Démonstration.

Les sommes partielles de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont

$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)$ qui est une somme télescopique

$S_n = u_{n+1} - u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

alors (S_n) CV $\Leftrightarrow$ (u_n) converge

□

Exemple 1.11. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$. Déterminer la valeur de sa somme.

On a $\frac{1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$ pour tout $n \geq 2$

alors $S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ est télescopique

alors $\forall N \geq 2 \quad S_N = 1 - \frac{1}{N}$

donc $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$ et $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente

et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$

Exemple 1.12. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

on a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1+1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

car $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}+\sqrt{n} = 2$

ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

car $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}$

on calcule

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2 \sum_{n=1}^{N} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

on reconnait une somme telescopique : $2\left(\sqrt{N+1}-\sqrt{1}\right)$

et $\lim_{N\to+\infty} \sqrt{N+1}-\sqrt{1} = +\infty$ alors $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$

et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ DV

Exercice 1.1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente et déterminer la valeur de sa somme.

2 Séries à termes positifs

Majorée Bornée fixe

2.1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2.1.
Une série à termes réels positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Remarque 2.1. Une série à termes réels positifs est croissante.

Démonstration.

Si $\forall n$ $u_n \geq 0$, la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est croissante car $\forall n$ $S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0$.
D'après le th de la limite monotone (S_n) converge si et seulement si elle est majorée.

□

Exemple 2.1. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^n}$.

On a pour $k \geq 2$ entier, $k^k \geq 2^k$
car la fonction $u \longmapsto u^k$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$
d'où $\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{2^k}$ alors les sommes partielles

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^k}$ sont majorées par

$$S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

la série $\sum \frac{1}{n^n}$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées, alors elle converge

et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \leq 3$

Exemple 2.2. Monter que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

2.2 Critère de comparaison des séries à termes positifs (CCSTP)

Théorème 2.2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites positives et si pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$ et de plus,*

$0 \leq u_n \leq v_n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration.

Si $\sum v_n$ CV, alors pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

limite des sommes partielles de $\sum v_n$

Alors les sommes partielles de $\sum u_n$ sont majorées donc $\sum u_n$, qui est à termes positifs, converge.

□

Théorème 2.3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites positives et si pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors, $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.*

Démonstration.

On a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$$

Comme $\sum u_n$ est à termes positifs et diverge, la suite de des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

donc $\sum_{n=0}^{N} v_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ par th de div par minor°

□

Exemple Étudions $\sum \frac{1}{n^2}$

on a pour $n \geq 2$ $\quad n^2 \geq n\times(n-1)$

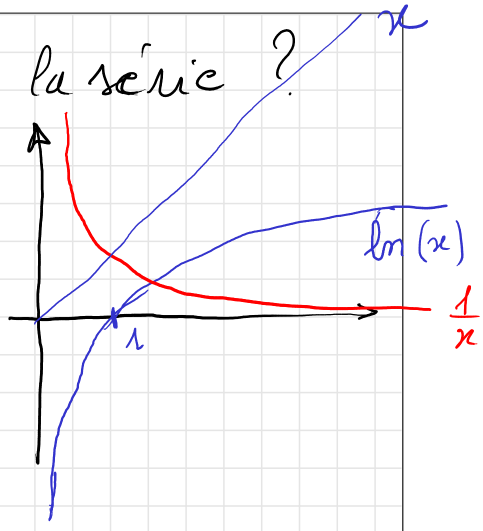
donc $\quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente (vue à la TV)

$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs alors par le critère de comparaison à termes positifs

$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge

(rappel on peut montrer (difficile) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ culture)

Exemple $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$ nature de la série ?



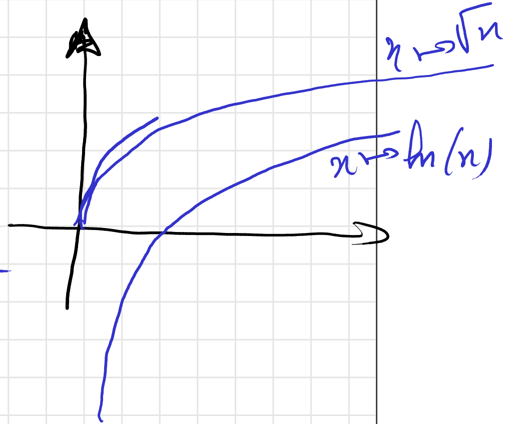
On a $\frac{\ln(n)}{n^3} < \frac{n}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente alors par le crit de comp des STP,

$$\boxed{\sum \frac{\ln(n)}{n^3} \text{ converge}}$$

Exemple $\sum \ln(n)$ diverge grossièrement car $\ln(n)$ ne tend pas vers 0.

Exemple $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$



On a $\ln(n) \leq \sqrt{n}$ pour $n \geq 1$

d'où $\frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

et on va voir au 2-4 que $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CV

donc par le CCSTP, $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ CV

Exemple $\sum \frac{\ln(n)}{n}$

on a pour $n \geq 3$ $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$

et $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n}$ DV donc par CCSTP $\sum_{n \geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$ DV

et $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

2.3 Critère d'équivalence les séries à termes positifs

Théorème 2.4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives.*

$$\text{Si } u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n, \text{ alors } \quad \sum v_n \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge.}$$

les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Démonstration.

si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$. Donc il existe un rang N tel que $\forall n \geq N$, $\frac{u_n}{v_n} \leq 2 \Rightarrow u_n \leq 2v_n$

* si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq N} v_n$ converge et par CCSTP $\sum\limits_{n\geq N} u_n$ converge donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge

* on échange les rôles de (u_n) et (v_n) on a $\sum u_n$ CV $\Rightarrow \sum v_n$ CV

□

Exemple 2.3. $\sum \frac{n+\sin(n)}{n^3+3}$

On a $n+\sin(n) \underset{+\infty}{\sim} n$ et $n^3+3 \underset{+\infty}{\sim} n^3$

alors $\frac{n+\sin(n)}{n^3+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ est CV et la série $\sum \frac{n+\sin(n)}{n^3+3}$ est à termes positifs alors d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs

$\sum \frac{n+\sin(n)}{n^3+3}$ converge

exemple $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ nature ?

2.4 Comparaison à une intégrale

Théorème 2.5. *Si f est une fonction décroissante et continue sur $[n_0, +\infty[$, alors on a pour $n \geqslant n_0+1$:*

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$$

← 2 inégalités

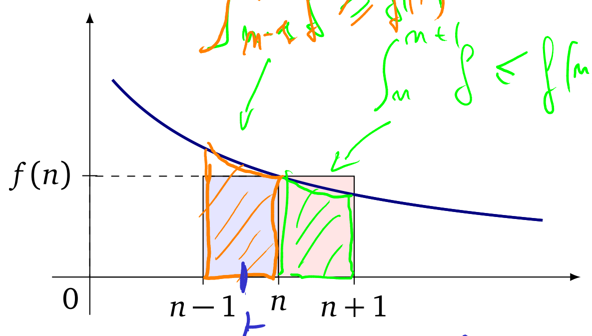
ce qui donne :

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$$

Démonstration.

$\int_{n-1}^{n} f \geqslant f(n)$

$\int_{n}^{n+1} f \leqslant f(n)$



pour $t \in [n-1, n]$

$f(t) \geqslant f(n)$

f est continue, l'intégrale est croissante, les bornes sont $n \geqslant n-1$, alors

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \geqslant \int_{n-1}^{n} f(n)\,dt = f(n) \text{ (aire du rectangle bleu)}$$

De même sur $[n, n+1]$ $f(t) \leqslant f(n)$

ce qui donne $\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,dt = f(n)$

Exemple $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et décroissante et positive :

On a pour $n \geqslant \cancel{1}\ 2$, par comparaison à une intégrale :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$$

⚠ $n-1 \geqslant 1 > 0 \Rightarrow n \geqslant 2$

On somme pour $n = 2$ à N :

$$\int_2^{N+1} t^{-\frac{3}{2}}\,dt = \sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt = \int_1^N t^{-\frac{3}{2}}\,dt$$

d'où

$$\left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_2^{N+1} \leqslant S_N \leqslant \left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_1^N = 2 - \frac{2}{\sqrt{N}}$$

d'où $\forall N \geqslant 2$ $S_N \leqslant 2 - \frac{2}{\sqrt{N}} \leqslant 2$

donc la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CV par le th de la lim monotone

□

Exemple 2.4. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. En déterminer un équivalent.

Exemple 2.5. Étudier la série $\sum \frac{1}{1+n^2}$.

Exemple 2.6. Étudier la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

2.5 Séries de Riemann

Définition 2.1. On appelle série de Riemann, les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.6. *La série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration.

$\square$

Exemple 2.7. Étude de $\sum \frac{1}{n^2+4n+1}$

2.6 Comparaison à une série géométrique

Exercice 2.1. Montrer le théorème suivant pour une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs :
« Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ pour tout $n \geqslant n_0$ avec $0 < q < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$ pour tout $n \geqslant n_0$ avec $q > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge. »

2.7 Comparaison à une série de Riemann

Exercice 2.2. Montrer le théorème suivant pour une série $\sum u_n$ à termes positifs.
« Si il existe $\alpha > 1$ tel que $(u_n \times n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\sum u_n$ converge.
Si il existe $\alpha \leqslant 1$ et $K > 0$ tel que $u_n \geqslant \dfrac{K}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ diverge. »

3 Séries absolument convergentes

3.1 Convergence absolue

Définition 3.1. On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 3.1. *Une série absolument convergente est convergente.*

Corollaire 3.2. *Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors* $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Démonstration.

□

Exemple 3.1. Étude de $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$

Exemple 3.2. Étude de $\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{2^n}$

Exemple 3.3. Étude de $\sum (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$: cette série n'est pas absolument convergente mais est convergente.

Exemple 3.4. Étude de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ en utilisant $\ln(1+x)$

3.2 Convergence absolue par comparaison

Théorème 3.3. *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe et v_n une suite à termes strictement positifs. Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.*

Démonstration.

□

Exemple 3.5. Étude de $\sum \dfrac{\sin(n) + e^{in}}{n^2}$

4 Développement décimal d'un nombre réel

Définition 4.1. Soit x un nombre réel positif, on appelle valeur décimale approchée par défaut à 10^{-n} près de x le nombre $x_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$ et valeur décimale approchée par excès à 10^{-n} près le nombre $y_n = 10^{-n}(\lfloor 10^n x\rfloor + 1) = x_n + 10^{-n}$.
On a alors $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x < y_{n+1} \leqslant y_n$.

Proposition 4.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Les suites des valeurs décimales approchées par défaut et par excès de x sont adjacentes et convergent vers x.*

Définition 4.2. Soit x un nombre réel positif et n un entier naturel, on appelle développement décimal de x l'écriture de $x - \lfloor x\rfloor$ comme somme de la série convergente $x - \lfloor x\rfloor = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ où la $n^{\text{ième}}$ décimale de x après la virgule définie par $a_n = 10^n(x_n - x_{n-1})$ est un entier entre 0 et 9.
On peut écrire $x = \lfloor x\rfloor + \overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \ldots$.

Démonstration.

□

Remarque 4.1. On a pour tout entier n_0, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \times \frac{1}{10^{n_0}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{n_0-1}}$.
Alors, le nombre $x = 0,12349999999999....$ (avec une suite infinie de 9) vaut $x = 0,1235$ et la suite des chiffres de son développement décimal est $1,2,3,5,0,0,0,0,0,0,\ldots$

Proposition 4.2. *Le développement décimal d'un réel positif est propre : c'est-à-dire que la suite des (a_n) ne se stabilise pas à 9 au-delà d'un certain rang.*

Proposition 4.3. *Tout nombre décimal a 2 développements l'un propre et l'autre impropre.*

Théorème 4.4.

Un nombre x est décimal si et seulement la suite de son développement décimal (a_n) est nulle à partir d'un certain rang.

Un nombre positif x est rationnel si et seulement si la suite (a_n) de son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Théorème 4.5. *Pour tout nombre $x \in [0,1[$, il existe une unique suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \in [\![0,9]\!] \quad \text{et} \quad (a_n) \text{ n'est pas stationnaire à } 9.$$

On a $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor$. On l'appelle le développement décimal illimité propre de x.