Chapitre 17 - Espaces Vectoriels de Dimension Finie

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Bases en dimension finie

1.1 Dimension finie

Définition 1.1. On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemples

* $\mathbb{R}^3$ car $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille génératrice à 3 éléments (c'est aussi une base)

* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie car la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}42&2\\2&42\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}42&42\\42&42\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de ces matrices.

* $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie car $(1, X, X^2)$ est une base donc est génératrice

* $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie

Preuve : supposons que $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{R}[X]$.
Notons q le plus grand des degrés de la famille alors X^{q+1} n'est pas combinaison linéaire de la famille car $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\deg(X^{q+1}) > \deg(g_i)$
C'est une contradiction. Donc il n'y a pas de famille génératrice finie.

* L'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de dimension infinie car il contient les fonctions polynomiales (isomorphe à $\mathbb{R}[X]$)

* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ev des suites réelles est de dimension infinie (admis)

1.2 Existence de bases en dimension finie

Théorème 1.1 (Théorème de la base incomplète). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E. Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.*

Corollaire 1.2. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.*

Corollaire 1.3 (Théorème de la base extraite). *De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E, on peut extraire une base de E.*

Remarque : Dans E

$(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre $\quad (g_1, g_2, \dots, g_q)$ est génératrice de E

on peut trouver des vecteurs parmi $(g_1, \dots, g_q)$ pour compléter la famille libre en $(e_1, \dots, e_p, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_r})$ qui est une base

Exemple : Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $E = \mathrm{Vect}(\cancel{(0,0,0,0)}, (1,-1,0,0), (1,0,0,1), \cancel{(2,-2,0,0)}, (2,0,-1,0), (0,2,-1,0))$. Donner une base de E.

inutile

① un vecteur non nul est une famille libre : $((1,-1,0,0))$ est une famille libre de E.

② on ajoute le deuxième vecteur et on vérifie que la famille reste libre :

$((1,-1,0,0),(1,0,0,1))$ est libre car échelonnée (car non colinéaires)

③ le troisième vecteur $(2,-2,0,0)$ est CL des deux premiers donc on le jette

④ on ajoute le ~~troisième~~ quatrième vecteur et on vérifie que la famille reste libre :

Si $\alpha(1,-1,0,0)+\beta(1,0,0,1)+\gamma(2,0,-1,0)=(0,0,0,0)$

alors $\begin{cases} \alpha + 2\gamma + \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \alpha=\beta=\gamma=0$ donc la famille est libre.

⑤ $(0,2,-1,0) = 1\times(2,0,-1,0) - 2\times(1,-1,0,0)$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille libre.

Conclusion : tous les vecteurs de la famille génératrice sont combinaisons linéaires de $((1,-1,0,0),(1,0,0,1)(2,0,-1,0))$ donc cette famille de 3 vecteurs est génératrice et on a prouvé qu'elle est libre donc c'est une base de E.

⚠ à l'espace nul $\{\vec{0}\}$ qui a pour base la famille vide par convention. (HP)

1.3 Cardinal des familles libres

exo

Lemme 1.4. *Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille libre et la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ est liée, alors x_{n+1} est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i.e. $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Démonstration.

Il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \vec{0}$ car la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ est liée.

Si $\alpha_{n+1} = 0$, alors on a la relation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \vec{0}$. Comme la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre, on obtient $\forall i \in [[1, n]]$, $\alpha_i = 0$. C'est une contradiction avec l'hypothèse que les scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ sont non tous nuls.

Donc, $\alpha_{n+1} \neq 0$, alors on peut écrire $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} x_i$. □

Proposition 1.5. *Si E est un espace vectoriel admettant une famille génératrice à n vecteurs avec n entier non nul, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.*

Corollaire 1.6. *Dans un espace de dimension finie, toute famille libre a moins d'éléments qu'une famille génératrice.*

Démonstration dans le cas $n = 2$ — moins ou égal

Si $E = \mathrm{Vect}(g_1, g_2)$

soit (x_0, x_1, x_2) une famille

si x_0, x_1, x_2 ne dépendent que de g_1, alors (x_0, x_1, x_2) est liée (tous colinéaires).

sinon
$$x_2 = \alpha_2 g_2 + \beta_2 g_1 \quad \text{avec } \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \text{ scalaires}$$
$$x_1 = \alpha_1 g_2 + \beta_1 g_1 \quad \text{et } \alpha_2 \neq 0 : x_2 \text{ dépend de } g_2$$
$$x_0 = \alpha_0 g_2 + \beta_0 g_1$$

On calcule
$$y_1 = x_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_2} x_2 = \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_2}\beta_2\right) g_1$$
$$y_0 = x_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_2 = \left(\beta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\beta_2\right) g_1$$

y_0 et y_1 sont colinéaires à g_1 donc il existe a, b scalaires tels que $a y_0 + b y_1 = \vec{0}$ et a ou b non nul

montrant $a x_1 + b x_0 + (\text{scalaire à calculer}) x_2 = \vec{0}$

donc les 3 vecteurs sont liés.

Conséquence ① cardinal famille libre $\leq$ cardinal famille génératrice

② Si B_1 et B_2 sont 2 bases de E, alors

$$\underbrace{|B_1|}_{\text{libre}} \leq \underbrace{|B_2|}_{\text{génératrice}} \text{ et } \underbrace{|B_2|}_{\text{libre}} \leq \underbrace{|B_1|}_{\text{génératrice}} \Rightarrow |B_1| = |B_2|$$

1.4 Dimension

Théorème 1.7. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments $n \in \mathbb{N}^*$.*

Définition 1.2. Ce nombre n s'appelle la dimension de E sur $\mathbb{K}$ noté $n = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim E$.
Par convention, $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Exemple 1.1. On a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n+1$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

$\dim\{\vec{0}\} = 0$, si $\dim_{\mathbb{K}} E = 1$, on dit que E est une droite vectorielle
si $\dim_{\mathbb{K}} E = 2$, on dit que E est un plan vectoriel ...

Exemples * $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ car $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$
ici on n'oublie le choix : $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ scalaires réels

* $\dim \mathbb{C}^2 = ?$

$\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2)$ avec $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} = \{$ listes de 2 complexes $\}$
$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ car $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{C}^2$: scalaires complexes
tout vecteur $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ s'écrit de manière unique
$(z_1, z_2) = \underbrace{z_1}_{\in \mathbb{C}}(1,0) + \underbrace{z_2}_{\in \mathbb{C}}(0,1)$ les scalaires sont des complexes
mais
$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$ car $((1,0),(i,0),(0,1),(0,i))$ scalaires réels
est une base de $\mathbb{C}^2 = \{(x_1 + i y_1, x_2 + i y_2)$ avec x_1, x_2, y_1, y_2 réels$\}$
$= \{x_1(1,0) + y_1(i,0) + x_2(0,1) + y_2(0,i)$ avec ...$\}$

$(z_1, z_2) = \underbrace{Re(z_1)}_{\in \mathbb{R}}(1,0) + \underbrace{Im(z_1)}_{\in \mathbb{R}}(i,0) + \underbrace{Re(z_2)}_{\in \mathbb{R}}(0,1) + \underbrace{Im(z_2)}_{\in \mathbb{R}}(0,i)$

* $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ car $(1, X, X^2, X^3)$ en est une base

Exemple. Déterminer la dimension de

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

On cherche une base de F. Pour cela, on résout le système

$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$$

On a deux inconnues secondaires

$$\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = -2\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = \alpha + \beta \end{cases} \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a prouvé $F = \mathrm{Vect}\big((-2, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1)\big)$

(en particulier F est un sev de $\mathbb{R}^4$).

La famille $\big((-2, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1)\big)$ est échelonnée donc elle est libre et c'est une base de F. Alors $\dim F = 2$

Exemple. Donner la dimension de l'espace des solutions réelles de $4y'' - 5y' + 2y = 0$

Les solutions sont

$$S_0 = \left\{ t \mapsto A e^{\frac{5}{8}t} \cos\left(\tfrac{\sqrt{7}}{8} t\right) + B e^{\frac{5}{8}t} \sin\left(\tfrac{\sqrt{7}}{8} t\right) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

car $4X^2 - 5X + 2$ a pour racines $\frac{5}{8} \pm i\frac{\sqrt{7}}{8}$

donc $S_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{\frac{5}{8}t} \cos\left(\tfrac{\sqrt{7}}{8} t\right), t \mapsto e^{\frac{5}{8}t} \sin\left(\tfrac{\sqrt{7}}{8} t\right) \right)$

et les 2 fonctions ne sont pas colinéaires donc elles forment une base de S_0 et $\dim S_0 = 2$

1.5 Familles en dimension finie

Théorème 1.8. *Si E est un espace vectoriel de dimension FINIE n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.*

$\dim E = n$

Démonstration : Soit E de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs.

si $\mathcal{F}$ est libre, on peut la compléter en une base de E (Th de la base incomplète). Mais une base de E a n vecteurs et $\mathcal{F}$ a déjà n vecteurs donc $\mathcal{F}$ est une base.

si $\mathcal{F}$ est génératrice avec n vecteurs, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base de E. La base a n vecteurs et $\mathcal{F}$ aussi donc $\mathcal{F}$ est une base.

Utilisation : Exemple : Montrer que $(X^2-2X+1, X-7, X^2-X-2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 et la famille a 3 vecteurs

On montre que la famille est libre :

$\alpha(X^2-2X+1)+\beta(X-7)+\gamma(X^2-X-2)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - 7\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -7\beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 4\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

donc la famille est libre

et c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 Relations entre les dimensions

2.1 Rappel : Image d'une base par une application linéaire

Théorème 2.1. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E.*

- *La famille $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.*
- *u est surjective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est génératrice de F.*
- *u est injective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est libre dans F.*
- *u est bijective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une base de F.*

Corollaire 2.2. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

u est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

2.2 Dimension et isomorphisme

Proposition 2.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un espace vectoriel F est isomorphe à E si et seulement si F est de dimension finie et* $\dim F = \dim E$.

Corollaire 2.4. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

2.3 Dimension des sous-espaces vectoriels

Théorème 2.5. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et* $\dim F \leqslant \dim E$.

De plus, F est égal à E si et seulement si $\dim F = \dim E$.

2.4 Dimension de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 2.6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff \left\{\begin{array}{l} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \dim F + \dim G = \dim E \\ E = F + G \end{array}\right.$$

Théorème 2.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de F et $(g_{p+1}, \ldots, g_n)$ est une base de G, alors*

$$E = F \oplus G \iff (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \ldots, g_n) \text{ est une base de } E.$$

On dit que cette base est adaptée à la décomposition en sous-espaces supplémentaires.

Théorème 2.8 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie)**.**
Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

2.5 Dimension d'une somme

Proposition 2.9 (Formule de Grassmann)**.**
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

3 Rang

3.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.1. On appelle rang d'une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un espace vectoriel E, la dimension du sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs et on le note $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p)$:

$$\operatorname{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \dim(\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p)) .$$

Lemme 3.1. *Pour une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie $n = \dim E$, on a*

$$\operatorname{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p \quad \textit{et} \quad \operatorname{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant n$$

Théorème 3.2. *Une famille est libre si et seulement si elle de rang maximal, c'est à dire si son rang est égal à son nombre de vecteurs.*

Lemme 3.3. *Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour tous indices i, j :*

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = rg(x_1, x_2, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots, x_p)$$

3.2 Rang d'une application linéaire

Définition 3.2. Soient E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de l'application linéaire u, la dimension de l'image de u dans F.

On note $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ lorsque cette dimension est finie et on dit que u est de rang fini.

Remarque 3.1. Si $(e_i)_{i=1,..,n}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$. Il s'ensuit que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$.

Lemme 3.4. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $n = \dim E$ et $p = \dim F$, et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $\mathrm{rg}(u) \leqslant n$ et $\mathrm{rg}(u) \leqslant p$.*

Théorème 3.5. *Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ sont deux applications linéaires de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et* $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

Démonstration. On a toujours $\underline{\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v}$: pour toute image $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(u(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} v$ ce qui prouve l'inclusion.
On en déduit $\dim(\operatorname{Im}(v \circ u)) \leqslant \dim(\operatorname{Im} v)$ soit $\underline{\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v)}$.
Par ailleurs, soit $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de $\operatorname{Im} u$ avec $p = \operatorname{rg}(u)$. Soit $z \in \operatorname{Im}(v \circ u)$ alors il existe $x \in E$ tel que $z = v(u(x))$. On a $u(x) \in \operatorname{Im} u$ donc $u(x)$ s'écrit $u(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k$ avec $(\lambda_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ des scalaires. On peut donc écrire $z = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v(f_k)$.
On en déduit que $(v(f_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(v \circ u)$. Il s'ensuit que $\dim(\operatorname{Im}(v \circ u)) \leqslant p$ ce qui donne $\underline{\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u)}$. □

3.3 Théorème du rang

Proposition 3.6. *Soit E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E dans F.*
Si E_0 est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors l'application u induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$.
$v : \begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ *est un isomorphisme.*

Théorème 3.7 (Théorème du rang)**.** *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, alors u est de rang fini et*

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u)$$

3.4 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 3.8. *Si E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même dimension finie</u> $n = \dim E = \dim F$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors*

$$u \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0}\} \iff u \text{ est surjective} \iff \dim \operatorname{Ker} u = 0 \iff u \text{ est bijective} \iff \operatorname{rg}(u) = n.$$

Corollaire 3.9. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, alors*

$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective.}$$

Lemme 3.10. *Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$, alors f est injective.*

Démonstration. Soit g telle que $g \circ f = id_E$. Soit $a, b \in E$. Si $f(a) = f(b)$ alors $g(f(a)) = g(f(b))$ donc $id(a) = id(b)$ soit $a = b$. Deux éléments de l'ensemble de départ ne peuvent avoir la même image donc f est injective. □

Lemme 3.11. *Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Si il existe $h : F \to E$ telle que $f \circ h = id_F$, alors f est surjective.*

Démonstration. Soit h telle que $f \circ h = id_F$. Soit $a \in F$. On a $f(h(a)) = a$ donc a a un antécédent. Tout élément de F a un antécédent donc f est surjective.

□

Théorème 3.12. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même dimension finie</u> et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
Si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = id_E$ alors f est bijective et $f \circ g = id_F$.
Si il existe $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = id_F$ alors f est bijective et $h \circ f = id_E$.

Théorème 3.13. *Si u est une application linéaire de rang fini et si φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors, dans les cas où cela a un sens,*

$$\mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}\, u \textit{ ou } \mathrm{rg}(\varphi \circ u) = \mathrm{rg}(u).$$

On ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant par un isomorphisme.

Démonstration. Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

— Soit φ un isomorphisme de F dans G et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.
Soit B une base de $\mathrm{Im}\, u$ (qui est de dimension finie). Alors $\varphi(B)$ est une base de $\varphi(\mathrm{Im}\, u)$ car φ induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, u$ dans $\varphi(\mathrm{Im}(u))$. De plus, on a l'égalité triviale : $\varphi(\mathrm{Im}\, u) = \mathrm{Im}(\varphi \circ u)$. Alors, $\dim(\mathrm{Im}(\varphi \circ u)) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ soit $\boxed{\mathrm{rg}(\varphi \circ u) = \mathrm{rg}(u)}$.

— Soit φ un isomorphisme de E dans F et $u \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini.
On a toujours $\underline{\mathrm{Im}(u \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}\, u}$ car toute image par $u \circ \varphi$ est une image par u.
Réciproquement, soit $z \in \mathrm{Im}\, u$, alors il existe $y \in F$ tel que $z = u(y)$. Comme φ est une bijection de E dans F, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Alors, $z = u \circ \varphi(x)$ et $z \in \mathrm{Im}(u \circ \varphi)$ ce qui prouve $\underline{\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}(u \circ \varphi)}$.
On a montré $\mathrm{Im}(u \circ \varphi) = \mathrm{Im}(u)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(u \circ \varphi)) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ soit $\boxed{\mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}(u)}$.

□

3.5 Équations linéaires

Définition 3.3. Une équation linéaire est une équation du type $u(x) = b$ où

- u est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F,
- x est un vecteur inconnu dans E,
- b est un vecteur de F appelé second membre de l'équation.

Théorème 3.14 (Structure de l'ensemble des solutions)**.**
Soit $u : E \longmapsto F$ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, soit $b \in F$.

On note S_0 l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = \overrightarrow{0_F}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$.

- *S_0 est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, il est donc non vide : il contient $\overrightarrow{0_E}$.*
- *Soit $\mathcal{S}$ est vide, soit $\mathcal{S} = x_0 + S_0 = \{x_0 + h | h \in S_0\}$ où x_0 est une solution de l'équation avec second membre.*

Remarque 3.2. Si E est de dimension finie n (n inconnues) et si u est de rang fini r (r pivots), alors l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$ est de dimension $n - r$ = nombre d'inconnues - nombre de pivots.