

Chapitre 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout le cours, on utilisera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1 Espaces vectoriels

1.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 1.1.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $+$:
$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$
 et d'une loi externe notée \cdot :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$
. On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} ou \mathbb{K} -espace vectoriel si :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif,
 - (a) la loi $+$ est associative : $\forall x, y, z \in E, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
 - (b) il existe un élément neutre $\vec{0}_E$ pour $+$ dans E tel que $\forall x \in E, \quad \vec{0}_E + x = x + \vec{0}_E = x$
 - (c) tout élément x de E possède un symétrique pour l'addition appelé opposé et noté $-x$ qui vérifie $x + (-x) = (-x) + x = \vec{0}$
 - (d) l'addition est commutative $\forall x, y \in E \quad x + y = y + x$
2. pour tous $(x, y) \in E^2$ et pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a les 4 propriétés suivantes :
 - (a) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
 - (b) $1 \cdot x = x$
 - (c) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
 - (d) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

On appelle les éléments de E des vecteurs et les éléments de \mathbb{K} des scalaires.

1.2 Exemples de référence

Proposition 1.1. *L'ensemble \mathbb{K}^n des listes à n éléments de \mathbb{K} est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .*

Proposition 1.2. *L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .*

Proposition 1.3. *Quel que soit l'ensemble Ω , l'ensemble \mathbb{K}^Ω des fonctions de Ω dans \mathbb{K} est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .*

Proposition 1.4. *Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et Ω un ensemble quelconque, l'ensemble E^Ω des fonctions de Ω dans E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .*

Proposition 1.5. *L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à coefficients dans \mathbb{K} est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .*

Proposition 1.6. *L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à coefficients dans \mathbb{K} de taille $n \times p$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .*

1.3 Propriétés

Proposition 1.7. *Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors pour $\vec{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0} \quad \text{et} \quad -\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}$$

2 Familles finies de vecteurs

2.1 Combinaisons linéaires

Définition 2.1. Soit u_1, \dots, u_n des vecteurs de E . On appelle combinaison linéaire des vecteurs u_1, \dots, u_n tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i \quad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Si A est une partie de E , on appelle combinaison linéaire d'éléments de A toute combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de A .

2.2 Familles génératrices

Définition 2.2. Une famille de vecteurs de $E : (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ est génératrice de E si tout vecteur x de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des u_1, u_2, \dots, u_n : c'est à dire $\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$.

2.3 Familles libres

Définition 2.3. Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ est libre (ou linéairement indépendante) si la seule combinaison linéaire des (u_1, u_2, \dots, u_n) qui est nulle est la combinaison linéaire nulle : $0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n$, c'est à dire :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Exemple 2.1. Une famille de polynômes échelonnés en degré est libre.

2.4 Bases

Définition 2.4. Une famille (e_1, e_2, \dots, e_n) de vecteurs de E est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E .

Théorème 2.1. Une famille $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ est une base de E si et seulement si pour tout vecteur $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k$$

La famille $(\lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ est appelée famille des coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i=1, \dots, n}$.

Remarque 2.1. L'existence de la famille de scalaires pour chaque $x \in E$ prouve que la famille $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ est génératrice. L'unicité de la famille de scalaires pour chaque $x \in E$ prouve que la famille $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ est libre.

3 Sous-espaces vectoriels

3.1 Définition

Définition 3.1. On appelle sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur \mathbb{K} une partie A de E telle que $(A, +, \cdot)$ muni des restrictions des lois de E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Remarque 3.1. En particulier, $\vec{0}_E \in A, \forall x \in A, -x \in A, \forall x, y \in A, x + y \in A$ et $\forall x \in A, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha x \in A$.

Exemple 3.1. L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires est un sous-espace vectoriel de l'ensemble \mathbb{K}^p où p est le nombre d'inconnues du système.

Exemple 3.2. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans \mathbb{R} .

3.2 Caractérisation

Théorème 3.1. Soit A une partie d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

A est un sous-espace vectoriel de $E \iff A$ est non vide et stable par combinaison linéaire

$$\iff \vec{0} \in A \quad \text{et} \quad \forall (u, v) \in A^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \alpha u + \beta v \in A.$$

$$\iff \vec{0} \in A \quad \text{et} \quad \forall (u, v) \in A^2, \quad u + v \in A \quad \text{et} \quad \forall u \in A, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha u \in A.$$

3.3 Intersection de sev

Proposition 3.2. L'intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E .

3.4 Sous-espace engendré par une partie

Définition 3.2. Soit E un espace vectoriel et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ une famille de vecteurs. On appelle sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ noté $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ le sous-espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$.

Proposition 3.3. $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ est le plus petit sev contenant $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p$: c'est l'intersection de tous les sev contenant $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p$.

4 Applications linéaires

4.1 Morphismes d'espaces vectoriels

Soit E, F deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} .

Définition 4.1. Une application f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est dite linéaire si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x).$$

Théorème 4.1. Une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si et seulement si elle vérifie :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad & f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y). \\ \iff \forall (x, y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad & f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Remarque 4.1. L'image d'une combinaison linéaire de vecteurs par une application linéaire est la combinaison linéaire des images des vecteurs.

Définition 4.2. Une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ s'appelle un endomorphisme de E .

notations 4.3. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

4.2 Exemples

4.3 Généralités sur les applications

Dans ce paragraphe, E et F sont deux ensembles.

Définition 4.4. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F .

Pour $x \in E$, $y = f(x)$ s'appelle l'image de x et x est un antécédent de y .

On appelle image directe par f d'une partie A de E , l'ensemble des images des éléments de A noté $f(A)$:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

On appelle image réciproque par f d'une partie B de F , l'ensemble des antécédents (éventuels) des éléments de B noté $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

Remarque 4.2. Attention : rien n'indique ici que f est bijective ni que son application réciproque f^{-1} existe.

Définition 4.5. Soit f une application de E dans F .

f est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

f est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall z \in F, \exists x \in E : \quad z = f(x).$$

f est bijective si f est injective et surjective ce qui est équivalent à tout élément de l'ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent par f .

Lemme 4.2. Soit f une application de E dans F .

f est bijective de E dans F si et seulement si il existe une application $u : F \longrightarrow E$ telle que $u \circ f = id_E$ et $f \circ u = id_F$.

4.4 Noyau et image d'une application linéaire

E et F sont deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} .

Proposition 4.3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

L'image directe d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F .

L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 4.6. Étant donné une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, on appelle :

- noyau de f le sous-espace vectoriel de E défini par

$$\text{Ker } f = f^{-1}\{\vec{0}\} = \{x \in E \mid f(x) = \vec{0}\}.$$

C'est l'ensemble des antécédents du vecteur nul par f .

- image de f le sous-espace vectoriel de F défini par

$$\text{Im } f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

C'est l'ensemble des images de E par f .

Théorème 4.4. Si f est une application linéaire de E dans F , alors

$$f \text{ est injective} \iff \text{Ker } f = \{\vec{0}\} \quad \text{et par ailleurs,} \quad f \text{ est surjective} \iff \text{Im } f = F.$$

4.5 Combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 4.5. Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et des scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

Alors $\alpha f + \beta g$ est une application linéaire de E dans F .

Corollaire 4.6. $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

4.6 Composition d'applications linéaires

Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} .

Proposition 4.7. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G . Alors $g \circ f$ est linéaire de E dans G .

4.7 Isomorphismes et automorphismes

Définition 4.7. Une application linéaire bijective $f : E \longrightarrow F$ s'appelle un isomorphisme.

Un endomorphisme bijectif $f : E \longrightarrow E$ s'appelle un automorphisme.

Proposition 4.8. Soit f une application linéaire de E dans F . Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est aussi linéaire et est un isomorphisme de F dans E .

Proposition 4.9. L'ensemble des automorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle groupe linéaire de E , noté $\mathcal{GL}(E)$.

Corollaire 4.10. Pour $f, g \in \mathcal{GL}(E)$, on a $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

5.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 5.1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , alors le plus petit sous-espace vectoriel qui contient F et G est

$$H = \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

On l'appelle somme de F et G et on le note $H = F + G$.

H est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion de F et G .

5.2 Somme directe

Définition 5.2. On dit que deux sev F et G d'un espace vectoriel E , sont en somme directe si

tout vecteur u de $F + G$ s'écrit de manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. On note alors la somme $F \oplus G$.

Proposition 5.1. Deux sev F et G d'un espace vectoriel E , sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

5.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 5.3. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si $E = F + G$ et si F et G sont en somme directe : $E = F \oplus G$.

Théorème 5.2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

$$E = F \oplus G \iff \forall x \in E, \exists ! y \in F : \exists ! z \in G : x = y + z \text{ avec } y \in F \text{ et } z \in G \iff E = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}$$

5.4 Base adaptée à une somme directe.

Proposition 5.3. Si F et G sont deux sev en somme directe et si (e_1, e_2, \dots, e_p) est une base de F et (e_{p+1}, \dots, e_q) est une base de G , alors (e_1, \dots, e_q) est une base de la somme directe $F \oplus G$.

On dit qu'une telle base est adaptée à la somme directe.

Proposition 5.4. Si (e_1, e_2, \dots, e_p) est une base de F et (e_{p+1}, \dots, e_q) est une base de G , telles que (e_1, \dots, e_q) est une base de E , alors $E = F \oplus G$.

Théorème 5.5.

Si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une famille libre d'un espace vectoriel, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.

Si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base de E , alors $E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) \oplus \text{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ pour tout $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

6 Applications linéaires et familles de vecteurs

6.1 Image d'une base par une application linéaire

Théorème 6.1. Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ une base de E .

- La famille $(u(e_i))_{i=1, \dots, n}$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
- u est surjective $\iff (u(e_i))_{i=1, \dots, n}$ est génératrice de F .
- u est injective $\iff (u(e_i))_{i=1, \dots, n}$ est libre dans F .
- u est bijective $\iff (u(e_i))_{i=1, \dots, n}$ est une base de F .

Corollaire 6.2. Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

u est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F .

6.2 Application linéaire définie par l'image d'une base

Théorème 6.3. Étant données une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E et une famille d'autant de vecteurs (f_1, f_2, \dots, f_n) dans F , il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$.

Corollaire 6.4. Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E .

$$f = g \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = g(e_i).$$

Deux applications linéaires sont égales si et seulement si leurs images d'une base sont les mêmes.

Corollaire 6.5. Une application linéaire est nulle si et seulement si l'image d'une base par cette application linéaire est la famille nulle.

6.3 Application linéaire définie sur deux sev supplémentaires

Proposition 6.6. Soit E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Soit $f_1 : E_1 \longrightarrow F$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$. C'est-à-dire $\forall x_1 \in E_1, f(x_1) = f_1(x_1)$ et $\forall x_2 \in E_2, f(x_2) = f_2(x_2)$.

7 Applications linéaires essentielles

7.1 Homothéties

Définition 7.1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle homothétie toute application $f : E \longrightarrow E$ telle que pour tout $x \in E, f(x) = \lambda \cdot x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ un scalaire non nul fixé.

Proposition 7.1. Une homothétie de E est un automorphisme de E .

L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ de l'espace vectoriel E est l'application $\lambda \cdot \text{id}_E$.

7.2 Projecteurs

Définition 7.2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

On appelle projection sur F parallèlement à G , l'application $p : E \rightarrow E$ qui à $x \in E$ associe l'unique vecteur $y \in F$ tel que $x = y + z$ avec $z \in G$.

Une telle application est aussi appelée projecteur.

Théorème 7.2. Soit p une application de E dans E .

p est un projecteur si et seulement si p est linéaire et $p \circ p = p$.

Dans ce cas, p projette sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Démonstration.

- Si p est la projection sur F parallèlement à G . Soit $x \in E$ et $y \in E$ et $\alpha \in K$.
Les vecteurs x et y se décomposent en $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ avec $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$. On a $p(x) = x_F$ et $p(y) = y_F$.
Alors $\alpha x + y$ se décompose en $\alpha x + y = (\alpha x_F + y_F) + (\alpha x_G + y_G)$ avec $\alpha x_F + y_F \in F$ et $\alpha x_G + y_G \in G$ car F, G sont des sev.
Alors on a $p(\alpha x + y) = \alpha x_F + y_F = \alpha p(x) + p(y)$. L'application p est donc linéaire.
De plus, pour $x \in E$, que l'on écrit $x = x_F + x_G$, on a $p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x_F)$ mais comme $x_F \in F$, on a $x_F = x_F + 0$ donc $p(x_F) = x_F$ et finalement, $p \circ p(x) = p(x)$. On conclut $p \circ p = p$.
- Réciproquement, si p est linéaire et $p \circ p = p$, alors on pose $G = \text{Ker } p$ et $F = \text{Im } p$.
Soit $y \in F \cap G$, y est une image donc il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ et $y \in G$ donc $p(y) = 0 \implies y = p(x) = p \circ p(x) = p(p(x)) = p(y) = 0$. Donc $F \cap G \subset \{0\}$.
Et, comme on a toujours l'inclusion réciproque, $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
Soi $x \in E$, alors x s'écrit $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$. Donc $E = F + G$.
Alors on a $E = F \oplus G$ et la relation $x = p(x) + (x - p(x))$ prouve que p est la projection sur F parallèlement à G .
- Enfin, si p est un projecteur, alors les images sont des éléments de F donc $\text{Im } p \subset F$.
Et réciproquement tout élément $z \in F$ est sa propre image $p(z) = z$ donc $F \subset \text{Im } p$. On en déduit $\text{Im } p = F$.
Les éléments $u \in G$ s'écrivent $u = 0 + u$ avec $0 \in F$ et $u \in G$ donc $p(u) = 0 \implies u \in \text{Ker } p$. On a donc $G \subset \text{Ker } p$.
Réciproquement, si $p(u) = 0$ pour $u \in E$, alors u s'écrit $u = 0 + u_G$ avec $u_G \in G$. On en déduit que $u \in G$ ce qui prouve $\text{Ker } p \subset G$. On a donc $\text{Ker } p = G$.

□

Remarque 7.1. Pour étudier une projection p , on cherche les vecteurs invariants : $p(x) = x \iff (p - \text{id})(x) = \vec{0}$ car, pour une projection, $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id})$.

Exemple 7.1. Montrons que $f(x, y) = \frac{1}{5}(6x - 2y, 3x - y)$ est une projection.

On calcule $f \circ f(x, y) = \frac{1}{5}(6X - 2Y, 3X - Y)$ avec $X = \frac{6x - 2y}{5}$ et $Y = \frac{3x - y}{5}$.

Ce qui donne $f \circ f(x, y) = \frac{1}{25}(30x - 10y, 15x - 5y) = f(x, y)$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme f est aussi linéaire, f est une projection.

On cherche les vecteurs invariants : $f(x, y) = (x, y) \iff x - 2y = 0 \iff (x, y) \in \text{Vect}(2, 1)$. Donc $\text{Im } f = \text{Vect}((2, 1))$.

Et le noyau de f : $f(x, y) = (0, 0) \iff 3x - y = 0 \iff (x, y) \in \text{Vect}(1, 3)$. Donc $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 3))$.

Conclusion : f est la projection sur $\text{Vect}((2, 1))$ parallèlement à $\text{Vect}((1, 3))$

7.3 Symétries

Définition 7.3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G , l'application $s : E \rightarrow E$ qui à x s'écrivant $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ associe $s(x) = y - z$.

Proposition 7.3. Une symétrie s de E est un automorphisme involutif de E : i.e. $s \circ s = s^2 = \text{id}_E$.

Théorème 7.4. Soit s une application de E dans E .

s est une symétrie si et seulement si s est linéaire et $s \circ s = \text{id}_E$.

Dans ce cas, s est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$.