Chapitre 16 - TD - 27 avril 2020

TD 16 - Exercice 8 :

Soit la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}^*$, par : $f(x) = \dfrac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$.

1. Écrire le développement limité à l'ordre 4 de $f(x)$ en 0. En déduire le prolongement par continuité de f en 0.
2. Montrer que f, ainsi prolongée, est dérivable en 0. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 et au voisinage de ce point.

TD 16 - Exercice 10 :

On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}e^{-u_n}$.

1. À l'aide d'un encadrement, montrer que (u_n) converge vers 0.
2. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire un développement de la forme : $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
3. Déterminer a, b réels tels que $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
4. Déterminer a, b, c réels tels que $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \dfrac{c}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

TD 17 - Exercice 2 :

Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :

$\vec{a} = (3, 2, 1, 0)$, $\vec{b} = (2, 3, 4, 5)$, $\vec{c} = (0, 1, 2, 3)$, $\vec{d} = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{e} = (0, -1, 2, 1)$.

TD 17 - Exercice 13 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, z)$.
Montrer que f est linéaire. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
Déterminer $f(P)$ où P est le plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$.

TD 17 - Exercice 8 :

On considère la famille de polynômes (P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par $P_1 = 1 + 3X - X^2$, $P_2 = 1 + 4X$, $P_3 = 2X - X^2$.

1. Montrer que $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$ et $G = \text{Vect}(P_3)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
2. Déterminer les expressions analytiques des projections sur F et G.

TD 17 - Exercice 6 :

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2+bx+c)e^{4x}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit D l'application définie sur E par $D : f \longmapsto f'$. Montrer que D est un automorphisme de E. Déterminer son application réciproque.

TD xx - Exercice xx :