Corrigé TD 19 - Matrices et applications linéaires

Exercice 1 :

1. On écrit la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$: $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   dont on calcule l'inverse : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 7 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

   Si le vecteur $(5,1,2)$ a pour matrice X dans $\mathcal{B}$ et X' dans $\mathcal{B}'$ alors on a $X' = P^{-1}X$ ce qui donne $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 7 & -8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 17 \end{pmatrix}$.

2. On note $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. On a la relation $A' = P^{-1}AP$ ce qui donne :

   $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $AP = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 5 \\ -4 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 7 \\ -6 & -49 & -28 \\ 7 & 83 & 48 \end{pmatrix}$

3. Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de G est $C' = M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de g

   $C = M_{\mathcal{B}}(g)$ se calcule par $C = PC'P^{-1}$.

   On obtient $C = \begin{pmatrix} 17 & -17 & -11 \\ 6 & -5 & -4 \\ 10 & -11 & -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

Pour A, on trouve $\operatorname{Ker} u_A = \operatorname{Vect}((8,-4,1,3,0),(-3,2,0,0,1))$ et $\operatorname{Im} u_A = \mathbb{R}^3$.
Pour B, $\operatorname{Ker} u_B = \operatorname{Vect}(2,1,1)$ et $\operatorname{Im} u_B = \operatorname{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$ d'équation $x+y+z=0$.
Pour C, $\operatorname{Ker} u_C = \operatorname{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$ et $\operatorname{Im} u_C = \operatorname{Vect}((-1,0,1,0),(0,-1,0,1))$.
Pour D, on trouve $\operatorname{Ker} u_D = \operatorname{Vect}(4,1,3)$ et $\operatorname{Im} u_D = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$ d'équation $x+y-z=0$.

Exercice 3 :

On calcule le rang de la matrice des vecteurs u_1, u_2, u_3 :

$$P = \mathrm{M}(u_1,u_2,u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\ \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

Donc (u_1,u_2,u_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
On inverse la matrice P

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& a \\ x-y &=& b \\ x-z &=& c \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x &=& a+b+c \\ y &=& x-b \\ z &=& x-c \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{3}(a+b+c) \\ y &=& \frac{1}{3}(a-2b+c) \\ z &=& \frac{1}{3}(a+b-2c) \end{array}\right.$$

Ce qui donne $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On utilise la formule de changement de base, en notant B_0 la base canonique

$$\mathrm{M}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = (\mathrm{M}_{B_0}(u_1,u_2,u_3))^{-1}\,\mathrm{M}_B(f)\,\mathrm{M}_{B_0}(u_1,u_2,u_3).$$

Soit $A' = \mathrm{M}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(-u_2+2u_3, -2u_2+u_3)$ car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Comme ils forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$, ils forment une base de $\mathrm{Im}\, f$

$$\boxed{((1,1,-2),(-1,2,-1)) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\, f}.$$

Alors le noyau de f est de dimension 1 donc c'est la droite engendrée par u_1 : $\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\, u_1}$.

Exercice 4 :

On calcule l'image des vecteurs de la base canonique Δ :

$\Delta(1) = 1-1 = 0$, $\Delta(X) = X+1-X = 1$, $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1$ et $\Delta(X^3) = 3X^2+3X+1$.

D'où la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les 3 dernières colonnes de D forment une famille libre, alors la matrice D est de rang 3 et $\mathrm{rg}(\Delta) = 3$.

On en déduit que $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{Vect}(1, 2X+1, 3X^2+3X+1)$ ce qui donne par un rapide calcul $\mathrm{Im}\,\Delta = \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim \Delta = \dim \mathbb{R}_3[X] - \mathrm{rg}(\Delta) = 4-3 = 1$. Et comme $\Delta(1) = 0$, on a $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Vect}\, 1 = \mathbb{R}_0[X]$.

Exercice 5 :

1. Soit M_1 et M_2 deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a
$$\Phi(\alpha M_1 + M_2) = A(\alpha M_1 + M_2) + (\alpha M_1 + M_2)A$$
ce qui donne en utilisant la distributivité du produit sur la somme des matrices :
$$\Phi(\alpha M_1 + M_2) = \alpha(AM_1 - M_1A) + AM_2 - M_2A = \alpha\Phi(M_1) + \Phi(M_2).$$
On en déduit que Φ est linéaire. Comme, à toute matrice carrée de taille 2, Phi associe une matrice carrée de taille 2 par produit et somme de matrices carrées de taille 2, on en déduit que l'image de Φ est incluse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$
La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est notée $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$. On a
$$\Phi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \Phi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Phi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \Phi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Alors la matrice de Φ dans la base canonique ($E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$) est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On remarque que les vecteurs colonnes de la matrice forment une famille de rang 2 :
on a $(0,1,-1,0) = -(0,-1,1,0)$ et $(1,0,-3,-1) = -(-1,3,0,1) + 3(0,-1,1,0)$
et les deux premiers vecteurs colonnes engendrent l'image de Φ
$$\boxed{\mathrm{Im}\,\Phi = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}.$$
Alors le noyau de Φ est de dimension 2 et on remarque que les vecteurs $(1,0,0,1)$ et $(3,1,1,0)$ sont non colinéaires et dans le noyau de Φ, alors $\boxed{\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}$.

Exercice 6 :

1. La famille (f_1, f_2, f_3) est une famille génératrice de E. On montre qu'elle est libre : si $a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0$ avec a_1, a_2, a_3 des réels, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $a_1 e^{2x} + a_2 x e^{2x} + a_3\, x^2 e^{2x} = 0 \iff a_1 + a_2 x + a_3 x^2 = 0$.
   Pour $x = 0$, on obtient $a_1 = 0$, puis pour $x = 1$ et $x = -1$, on a $a_2 + a_3 = 0$et $-a_2 + a_3 = 0$ qui donne $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
   Alors la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. Et comme c'est une famille génératrice de E, alors c'est une base de E.
   $$\boxed{(\ f_1 : x \mapsto e^{2x},\ f_2 : x \mapsto x e^{2x},\ f_3 : x \mapsto x^2 e^{2x}\ ) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim E = 3.}$$
2. L'application φ est linéaire car c'est la restriction à E de la d"rivation qui est une application linéaire.
   Soit $f \in E$, il existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$. Alors $\varphi(f)(x) = a_1\, 2e^{2x} + a_2(1 + 2x)e^{2x} + a3(2x + 2x^2)e^{2x} = (2a_1 + a_2)e^{2x} + (2a_2 + 2a_3)x e^{2x} + 2a_3 x^2 e^{2x}$.
   On en déduit que $\varphi(f) \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ donc $\varphi(f) \in E$.
   Il s'ensuit que $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$
3. On détermine les images de la base par φ :
   $\varphi(f_1) = 2f_1$ car $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, $\varphi(f_2) = f_1 + 2f_2$ et $\varphi(f_3) = 2f_2 + 2f_3$.
   Alors la matrice de φ dans la base (f_1, f_2, f_3) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   La matrice A est inversible car elle est carrée de taille 3 et de rang 3. On en déduit que φ est bijective, donc $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } E}$.
   On calcule la matrice inverse de A : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.
   Alors une primitive de $(7 - 8x + 3x^2)e^{2x}$ est donnée par $\varphi^{-1}((7 - 8x + 3x^2)e^{2x})$ que l'on calcule matriciellement
   $$\boxed{A^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/4 \\ -11/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}} \text{ ce qui donne } \boxed{\int (7 - 8x + 3x^2)e^{2x}\, dx = \left[(\tfrac{25}{4} - \tfrac{11}{2}x + \tfrac{3}{2}x^2)e^{2x}\right]}$$

Exercice 7 :

1. Les vecteurs colonne de la matrice de f forment une famille de rang 1 alors $\dim \mathrm{Im}\, f = 1$ et $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(3, -2, 1)}$.
   On en déduit par le théorème du rang, que la dimension du noyau est $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$. On remarque que les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ sont dans le noyau et ne sont pas colinéaires alors ils forment une base du noyau de f : $\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\,((1, -1, 0)(1, 0, 1))}$.
2. On lit dans la matrice A' que $f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = 0$. Alors $u \in \mathrm{Ker}\, f$ et $u \in \mathrm{Im}\, f$ car u est l'image de v. On détermine donc $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(3, -2, 1) \cap \mathrm{Vect}\,((1, -1, 0)(1, 0, 1))$. Mais l'image de f est une droite et le noyau de f est un plan, alors leur intersection est soit réduite à $\{0\}$ soit une droite. Ici, si c'est une droite, cette droite est $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(3, -2, 1)$. On vérifie que $(3, -2, 1) \in \mathrm{Ker}\, f$.
   Alors $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(3, -2, 1)$. On choisit $u = (3, -2, 1)$. On cherche maintenant v tel que $f(v) = (3, -2, 1)$. On trouve en lisant la matrice que l'on peut prendre $v = (1, 0, 0)$. Il reste à choisir $w \in \mathrm{Ker}\, f$ tel que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$. On choisit $w = (1, -1, 0)$.
   La matrice de passage de la base canonique à (u, v, w) est $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a $A' = P^{-1}AP$.

Exercice 8 :

On cherche un vecteur $\vec{e}_1$ tel que $u(e_1) = \overrightarrow{0}$. On note (x, y, z) les coordonnées de $\overrightarrow{e_1}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$u(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ -x + y + z & = & 0 \\ 3z & = & 0 \end{array}\right. \iff z = 0 \text{ et } x = y \iff (x, y, z) = \alpha(1, 1, 0) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On choisit $\overrightarrow{e_1} = 1.\vec{i} + 1.\vec{j} + 0.\vec{k}$.

On cherche un vecteur $\vec{e}_2$ tel que $u(\overrightarrow{e_2}) = 2\overrightarrow{e_2}$. On note (x, y, z) les coordonnées de $\overrightarrow{e_2}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$u(\overrightarrow{e_2}) = 2\overrightarrow{e_2} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - y & = & 2x \\ -x + y + z & = & 2y \\ 3z & = & 2z \end{array}\right. \iff z = 0 \text{ et } x + y = 0 \iff (x, y, z) = \alpha(1, -1, 0) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On choisit $\overrightarrow{e_2} = 1.\vec{i} - 1.\vec{j} + 0.\vec{k}$.

Enfin, on cherche $\vec{e_3}$ qui vérifie $u(\overrightarrow{e}_3) = 3\overrightarrow{e}_3$ ce qui donne le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y & = & 3x \\ -x + y + z & = & 3y \\ 3z & = & 3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x - y & = & 0 \\ -x - 2y + z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x \\ z & = & -3x \end{array}\right. \iff (x, y, z) = \alpha(1, -2, -3) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On choisit $\overrightarrow{e}_3 = 1.\vec{i} - 2.\vec{j} - 3.\vec{k}$.

La matrice des vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e_3})$ dans la base $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Une opération élémentaire sur les lignes $\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1$ montre qu'elle a 3 pivots donc elle est de rang 3

$$P \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$\boxed{\text{la famille } (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e_3}) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ est } D.}$ et on a $D = P^{-1}MD$.

Exercice 9 :

On a $$A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \cdots & \binom{k}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \binom{k}{k} & \cdots & \binom{n}{k} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

On remarque que A est la matrice de l'endomorphisme

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & Q = P(X+1) \end{array}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Alors comme on sait que φ est bijective car son application réciproque est

$\psi : Q \longmapsto P = Q(X - 1)$,

on en déduit que A est inversible et son inverse est la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ ce qui donne :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \cdots & (-1)^k\binom{k}{0} & \cdots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \binom{k}{k} & \cdots & (-1)^{k+n}\binom{n}{k} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$ de coefficient $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}(-1)^{i+j}$ pour $i \leqslant j$.

Exercice 10 :

1. On calcule le rang de la matrice A_m avec les opérations $\ell_1 \leftrightarrow \ell_3$, $\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1$ et $\ell_3 \leftarrow \ell_3 + (3+m)\ell_1$
$$\text{rg}(A_m) = \text{rg}\begin{pmatrix} 3+m & m-1 & m-1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 8+4m \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4+4m \end{pmatrix}$$
On en déduit que si $m = -1$, alors $\text{rg}\, A_m = \text{rg}\, f_m = 2$ donc f_m n'est pas bijective et si $m \neq -1$, alors $\text{rg}\, A_m = \text{rg}\, f_m = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc f_m est bijective.

2. On étudie le système $(f_m - (m+1)Id)(x,y,z) = (0,0,0)$ qui donne
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + (m-1)y + (m-1)z &=& 0 \\ -x + (2-m)y - z &=& 0 \\ -x - y + (2-m)z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 + (m-3)y + (3-m)z &=& 0 \\ 0 + (3-m)y + (m-3)z &=& 0 \\ -x - y + (2-m)z &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 0+0+0 &=& 0 \\ 0 + (3-m)y + (m-3)z &=& 0 \\ -x - y + (2-m)z &=& 0 \end{array}\right.$$
   - <u>Si $m \neq 3$</u>, on obtient $y = z$ et $x = (1-m)z$, soit
$$\boxed{\text{Ker}(f_m - (m+1)Id) = \text{Vect}\left((1-m, 1, 1)\right)}.$$
   - <u>Si $m = 3$</u>, on obtient $x = -y + (2-m)z = -y - z$, soit
$$\boxed{\text{Ker}(f_m - (m+1)Id) = \text{Vect}\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right)}.$$

3. On détermine $\text{Ker}(f_m - 4id)$:
$$\left\{\begin{array}{rcl} (m-1)x + (m-1)y + (m-1)z &=& 0 \\ -x + -y - z &=& 0 \\ -x - y - z &=& 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \iff -x - y - z = 0 \\ \iff (x,y,z) \in \text{Vect}\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right). \end{array}$$
Alors $\text{Ker}(f_m - 4id)$ est un plan.
Si $m \neq 3$, on a $\text{Ker}(f_m - (m+1)Id) = \text{Vect}\left((1-m,1,1)\right)$. On cherche à quelle condition le vecteur directeur de la droite $\text{Ker}(f_m - (m+1)Id)$ est inclus dans le plan $\text{Ker}(f_m - 4id)$:
$$(1-m,1,1) = \alpha(-1,1,0) + \beta(-1,0,1) \iff \alpha = \beta = 1 \text{ et } m = 3.$$
<u>Si $m \neq 3$</u>, on a $\dim \text{Ker}(f_m - 4id) + \dim \text{Ker}(f_m - (m+1)id) = \dim \mathbb{R}^3$ et $\text{Ker}(f_m - 4id) \cap \text{Ker}(f_m - (m+1)Id) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ alors $\boxed{\text{Ker}(f_m - (m+1)id) \text{ et } \text{Ker}(f_m - 4id) \text{ sont supplémentaires.}}$

4. Si $m \neq 3$. On pose $e_1 = (-1,1,0)$,$e_2 = (-1,0,1)$ alors (e_1, e_2) est une base de $\text{Ker}(f_m - 4id)$ donc $f_m(e_1) = 4e_1$ et $f_m(e_2) = 4e_2$.
On pose $e_3 = (1-m,1,1)$ qui est une base de $\text{Ker}(f_m - (m+1)id)$ donc $f_m(e_3) = (m+1)e_3$.
Comme $\text{Ker}(f_m - (m+1)Id)$ et $\text{Ker}(f_m - 4id)$ sont supplémentaires, la famille constituée de la réunion de leurs bases : (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de f_m dans cette base est $D_m = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$.

5. Si $m = 3$, alors $A_m = A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. On a $\text{Ker}(f_3 - 4id) = \text{Vect}\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right)$.
On cherche u_1, u_2 et u_3 tels que $f_3(u_1) = 4u_1$, $f_3(u_2) = 4u_2$ et $f_3(u_3) = 4u_2 + 4u_3 \iff (f_3 - 4id)(u_3) = u_4$. Alors on cherche $u_2 \in \text{Ker}(f_3 - 4id) \cap \text{Im}(f_3 - 4id)$.
$f_m - 4id$ a pour matrice : $A_3 - 4I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
On calcule son rang : $\text{rg}(A_3 - 4I_3) = 1$, donc $\text{Im}(f_3 - 4id) = \text{Vect}(2,-1,-1)$.

Alors on pose $u_1 = (-1,1,0)$, $u_2 = (2,-1,-1)$ et on cherche u_3 tel que $(f_3 - 4id(u_3)) = 4u_2$ ce qui donne $u_3 = (4,0,0)$.
Dans la base $\mathcal{B}_2$, la matrice de f_3 est J et la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}_2$ est $P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 :

1. On écrit la matrice de la transformation dans la base canonique : $\quad A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$

   La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, alors c'est la matrice d'une réflexion par rapport à la droite qui fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec $\overrightarrow{i}$.
   On a $\cos\theta = \frac{1}{3}$ et $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ qui donnent $\theta = \text{Arccos}\,\frac{1}{3}$ car $\sin\theta > 0$ donc $\theta \in [0,\pi]$.
   On cherche l'axe de symétrie : c'est l'ensemble des vecteurs invariants.
   On résout $\left\{\begin{array}{rcl} 3x & = & x + 2\sqrt{2}y \\ 3y & = & 2\sqrt{2}x - y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x - 2\sqrt{2}y & = & 0 \\ 2\sqrt{2}x - 4y & = & 0 \end{array}\right. \iff x - \sqrt{2}y = 0.$
   C'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $x - \sqrt{2}y = 0$.
2. On écrit la matrice de la transformation dans la base canonique : $\quad A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

   La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, alors c'est la matrice de la rotation d'angle θ.
   On a $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5}$ qui donnent $\theta = \text{Arccos}\,\frac{3}{5}$ car $\sin\theta > 0$ donc $\theta \in [0,\pi]$.
   $\boxed{\text{La transformation est la rotation vectorielle d'angle Arccos}\,\frac{3}{5}.}$
3. On écrit la matrice de la transformation dans la base canonique : $\quad A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

   La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, alors c'est la matrice d'une réflexion par rapport à la droite qui fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec $\overrightarrow{i}$.
   On a $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5}$ qui donnent $\theta = \text{Arccos}\,\frac{3}{5}$ car $\sin\theta > 0$ donc $\theta \in [0,\pi]$.
   On cherche l'axe de symétrie : c'est l'ensemble des vecteurs invariants.
   On résout $\left\{\begin{array}{rcl} 5x & = & 3x + 4y \\ 5y & = & 4x - 3y \end{array}\right. \iff \iff x - 2y = 0.$
   C'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $x - 2y = 0$.

Exercice 12 :

On note $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ vecteur directeur normé de la droite $y = 2x$. Soit $\overrightarrow{u} = (x,y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

On projette $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$, on a $p(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v}$ qui donne $p(\overrightarrow{u}) = \dfrac{x+2y}{5}(1,2)$.

Alors le symétrique de $\overrightarrow{u}$ par rapport à $\overrightarrow{v}$ est $s(\overrightarrow{u}) = 2p(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}$

Ce qui donne matriciellement pour $s(\overrightarrow{u})$: $\dfrac{2}{5}\begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix} - \dfrac{5}{5}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x+4y \\ 4x+3y \end{pmatrix}$

On obtient alors la matrice $\boxed{S = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}$.

Exercice 13 :

1. On détermine les vecteurs invariants :
$$(A-I_3)X=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+z &=& 0\\ -2x-2y+2z &=& 0\\ x-2y-z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+z &=& 0\\ -6y &=& 0\end{array}\right. \text{. D'où } X\in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$
On choisit un vecteur directeur de l'axe normé : $\overrightarrow{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$.
On choisit un vecteur orthogonal à l'axe : $\overrightarrow{u}=(0,1,0)$.
On calcule son image $f(u)=\dfrac{1}{3}(2,1,-2)$ et enfin on calcule $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$.
On écrit la formule qui donne la rotation de $\overrightarrow{u}$:
$$f(\overrightarrow{u})=\cos\theta\overrightarrow{u}+\sin\theta\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}$$
qui donne le système : $\left\{\begin{array}{rcl}\frac{2}{3} &=& -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\\ \frac{1}{3} &=& \cos\theta\end{array}\right.$
On trouve alors $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ et $\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ qui donne $\theta=-\arccos\dfrac{1}{3}$.
$\boxed{\text{C'est la rotation autour de la droite dirigée (orientée) par } (1,0,1) \text{ et d'angle } -\arccos\frac{1}{3}.}$
2. $\left\{\begin{array}{l} 9x'=8x+y-4z\\ 9y'=-4x+4y-7z\\ 9z'=x+8y+4z\end{array}\right.$ est la rotation autour de $(-3,1,1)$ d'angle $-\arccos(7/18)$.
3. $\left\{\begin{array}{l} 3x'=-2x+2y-z\\ 3y'=2x+y-2z\\ 3z'=-x-2y-2z\end{array}\right.$ est le demi-tour autour de $(-1,-2,1)$.
4. On détermine les vecteurs invariants :
$$(A-I_3)X=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x+2y+2z &=& 0\\ 2x-2y-2z &=& 0\\ 2x-2y-2z &=& 0\end{array}\right. \iff 2x-2y-2z=0$$
L'ensemble des vecteurs invariants. Alors,
$\boxed{\text{L'application est la réflexion par rapport au plan } x-y-z=0.}$
5. $\left\{\begin{array}{l} 7x'=-2x+6y-3z\\ 7y'=6x+3y+2z\\ 7z'=-3x+2y+6z\end{array}\right.$ est la réflexion par rapport à $3x-2y+z=0$.
6. $\left\{\begin{array}{l} 3x'=2x-2y+z\\ 3y'=-2x-y+2z\\ 3z'=x+2y+2z\end{array}\right.$ est la réflexion par rapport à $x+2y-z=0$.

Exercice 14 :

Soit $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$ un vecteur que l'on projette sur $\overrightarrow{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ en $\overrightarrow{v}=\dfrac{x+y+z}{3}(1,1,1)$. Alors le projeté $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{u}$ sur le plan orthogonal à $\overrightarrow{n}$ est
$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{3}\left((3x,3y,3z)-(x+y+z,x+y+z,x+y+z,)\right)$
$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{3}\left(2x-y-z,-x+2y-z,-x-y+2z\right)$.
Alors l'expression du vecteur $r(\overrightarrow{u})$ image de $\overrightarrow{u}$ par la rotation autour de $\overrightarrow{n}$ et d'angle $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$ est :
$r(\overrightarrow{u})=\cos\theta\overrightarrow{w}+\sin\theta\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}$ On a $\cos\theta=-1$ et $\sin\theta=0$ ce qui donne $r(\overrightarrow{u})=-\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}$

On obtient $r(\overrightarrow{u}) = \dfrac{1}{3}\left((x+y+z, x+y+z, x+y+z,) - \dfrac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z)\right)$

$$\boxed{r(\overrightarrow{u}) = \frac{1}{3}(-x+2y+2z, 2x-y+2z, 2x+2y-z)}$$

Exercice 15 :

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ un vecteur que l'on projette sur $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$ en $\overrightarrow{v} = \dfrac{x+2y-z}{6}(1, 2, -1)$. Alors le projeté $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{u}$ sur l'orthogonal de $\overrightarrow{n}$ est

$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{6}((6x, 6y, 6z) - (x+2y-z, 2x+4y-2z, -x-2y+z)) = \dfrac{1}{6}(5x-2y+z, -2x+2y+2z, x+2y+5z)$

Alors l'expression du vecteur $r(\overrightarrow{u})$ image de $\overrightarrow{u}$ par la rotation autour de $\overrightarrow{n}$ et d'angle $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ est :

$r(\overrightarrow{u}) = \cos\theta\,\overrightarrow{w} + \sin\theta\,\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$

Ce qui donne : $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$:

$$r(\overrightarrow{u}) = -\frac{\sqrt{3}}{12}\begin{pmatrix} 5x-2y+z \\ -2x+2y+2z \\ x+2y+5z \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5x-2y+z \\ -2x+2y+2z \\ x+2y+5z \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+4y-2z \\ -x-2y+z \end{pmatrix}$$

On trouve :

$$r(\overrightarrow{u}) = -\frac{\sqrt{3}}{12}\begin{pmatrix} 5x-2y+z \\ -2x+2y+2z \\ x+2y+5z \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2y+4z \\ -2x-2z \\ -4x+2y \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+4y-2z \\ -x-2y+z \end{pmatrix}$$

Et finalement, $r(\overrightarrow{u}) = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} (2-5\sqrt{3})x + (4+\sqrt{6}+2\sqrt{3})y + (-2-\sqrt{3}+2\sqrt{6})z \\ (2+2\sqrt{3}-2\sqrt{6})x + (4-2\sqrt{3})y + \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$

et la matrice de rotation est $R = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 2-5\sqrt{3} & 4+\sqrt{6}+2\sqrt{3} & -2-\sqrt{3}+2\sqrt{6} \\ \ldots & & \\ \ldots & & \end{pmatrix}$

Exercice 16 :

On détermine la projection sur le plan $\mathrm{Vect}((1, 0, -1), (2, -2, 3))$ en cherchant un vecteur normal : $(1, 0, -1) \wedge (2, -2, 3) = (-2, -5, -2)$.

On pose $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\sqrt{33}}(2, 5, 2)$. On détermine la projection orthogonale de $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ sur $\overrightarrow{n}$:

$$p(\overrightarrow{u}) = \frac{2x+5y+2z}{33}(2, 5, 2) = \frac{1}{33}(4x+10y+4z, 10x+25y+10z, 4x+10y+4z).$$

Puis, la projection sur le plan $\mathrm{Vect}((1, 0, -1), (2, -2, 3))$ $q(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}$

Enfin, le symétrique de $\overrightarrow{u}$ par rapport au plan : $s(\overrightarrow{u}) = 2q(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} = 2(\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u})) - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} - 2p(\overrightarrow{u})$

$$\begin{aligned} \text{D'où } s(\overrightarrow{u}) &= \frac{1}{33}(-8x-20y-8z+33x, -20x-50y-20z+33y, -8x-20y-8z+33z) \\ &= \frac{1}{33}(25x-20y-8z, -20x-17y-20z, -8x-20y+25z) \end{aligned}$$

Et sa matrice est $S = \dfrac{1}{33}\begin{pmatrix} 25 & -20 & -8 \\ -20 & -17 & -20 \\ -8 & -20 & 25 \end{pmatrix}$.