Corrigé TD 16 - Analyse asymptotique

Exercice 1 : (non corrigé)

Exercice 2 :

a) $\ln(x) = \ln(2+h) = \ln 2 + \ln(1+\frac{h}{2})$ et $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$.

On pose $u = \frac{h}{2}$ et on obtient $\ln(2+h) \underset{0}{=} \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3)$

$$\boxed{\ln(x) \underset{2}{=} \ln 2 + \frac{(x-2)}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3)}$$

b) $\dfrac{e^x}{x^2+2} = \dfrac{e^{3+h}}{2+9+6h+h^2} = \dfrac{e^3}{11}\dfrac{e^h}{1+\frac{6}{11}h+\frac{1}{11}h^2}$.

On pose $u = \frac{6}{11}h + \frac{1}{11}h^2$, on a $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) = 1 - \frac{6}{11}h - \frac{1}{11}h^2 + \frac{36}{121}h^2 + o(h^2)$

$\dfrac{e^{3+h}}{2+(2+h)^2} \underset{0}{=} \dfrac{e^3}{11}\left(1+h+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)\left(1-\frac{6}{11}h+\frac{25}{121}h^2+o(h^2)\right)$

On en déduit que $\boxed{\dfrac{e^x}{x^2+2} \underset{3}{=} \frac{1}{11}e^3 + \frac{5}{121}e^3(x-3) + \frac{39}{2662}e^3(x-3)^2 + o((x-3)^2).}$

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. On réutilise le $DL_2(2)$ précédent : $\ln(x) \underset{2}{=} \ln 2 + \frac{(x-2)}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + o((x-2)^2)$.

Par ailleurs, $\sqrt{x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\frac{h}{2})^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{h}{4}+\frac{3}{32}h^2+o(h^2)\right)$

Alors $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln 2 + \frac{(x-2)}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + o((x-2)^2)\right)\sqrt{2}\left(1-\frac{h}{4}+\frac{3}{32}h^2+o(h^2)\right)$. On développe et on trouve

$$\boxed{\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{2}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(2) + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(2)\right)(x-2) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{64}\ln(2) - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(x-2)^2 + o(x-2)^2}$$

d) $\dfrac{\sin x}{4-x^2} = \dfrac{\sin x}{4}\dfrac{1}{1-\frac{x^2}{4}} = \dfrac{1}{4}(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)(1+\frac{x^2}{4}+o(x^3))$. D'où $\boxed{\dfrac{\sin x}{4-x^2} \underset{0}{=} \frac{1}{4}(x+\frac{1}{12}x^3+o(x^4)).}$

e) $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x} = \dfrac{x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))} = (1+\frac{x^2}{6}+o(x^2))(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2))$. Finalement, $\boxed{\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x} \underset{0}{=} 1+\frac{1}{3}x^2+o(x^2).}$

f) $x(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x^2}} = xe^{\frac{1}{x^2}\ln(\operatorname{ch} x)}$. On a $\operatorname{ch} x \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ et $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. Alors $\ln(\operatorname{ch} x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$.

On en déduit que $\frac{1}{x^2}\ln(\operatorname{ch} x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^3)$. Enfin, $xe^{\frac{1}{x^2}\ln(\operatorname{ch} x)} = xe^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{12}+o(x^3)}$.

D'où $\boxed{x(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x^2}} \underset{0}{=} e^{\frac{1}{2}}(x - \frac{x^3}{12} + o(x^4)).}$

g) On pose $x = \frac{\pi}{4} + h$, alors $\tan(x) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan h}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan h} = \dfrac{1+\tan h}{1-\tan h}$. On obtient successivement :

$1 + \tan h = 1 + h + \dfrac{1}{3}h^3 + o(h^4)$ et $\dfrac{1}{1-\tan h} = 1 + h + h^2 + \dfrac{4}{3}h^3 + o(h^3)$

D'où $\tan x = 1 + 2h + 2h^2 + \dfrac{8}{3}h^3 + o(h^3)$.

Puis en posant $u = 2h + 2h^2 + \dfrac{8}{3}h^3 + o(h^3)$ avec $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + \dfrac{1}{16}u^3 + o(u^3)$ on trouve

$$\boxed{\tan(x) \underset{\frac{\pi}{4}}{=} 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{5}{6}h^3 + o(h^3).}$$

h) On a $f(x) = x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. Mais $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{9x^2} + \dfrac{5}{81x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ et $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{9x^2} - \dfrac{5}{81x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$. Alors $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{2}{3} + \dfrac{10}{81x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right).}$

Exercice 3 :

Les calculs se font soit avec la formule de Taylor, soit en utilisant les formules du cours :

$$f(x) = \exp(\sin(x)) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \qquad g(x) = \ln(\cos(x)) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$$

En utilisant les formules du cours, on pose $x = 1+h$, alors $\sqrt{x} = \sqrt{1+h} = (1+h)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3)$. Puis, $e^{1+u} = ee^u = e(1+u+u^2+u^3+o(u^3)) = \ldots$

Ou alors avec la formule de Taylor :

$$h(x) = e^{\sqrt{x}} = e + \frac{e\,(x-1)}{2} + \frac{e\,(x-1)^3}{48} + o\left((x-1)^3\right).$$

Exercice 4 :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(\arctan x)^2}$ $(\arctan x)^2 = x^2 - \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^5)$, alors $\dfrac{1}{(\arctan x)^2} = \dfrac{1}{x^2}(1 + \dfrac{2}{3}x^2 + o(x^3))$ et $f(x) = -\dfrac{2}{3} + o(x)$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{2}{3}.}$
2. On a $g(x) = \exp(\tan\dfrac{\pi x}{4}\ln(2^x + 3^x - 12)$ et on pose $x = 2+h$.

   On a alors $2^x = 2^{2+h} = 4e^{h\ln 2} = 4(1 + h\ln 2 + o(h)$ et $3^x = 9(1 + h\ln 3 + o(h))$ d'où $2^x + 3^x - 12 = 1 + (4\ln 2 + 9\ln 3)h + o(h)$ alors $\ln(2^x + 3^x - 12) = (4\ln 2 + 9\ln 3)h + o(h)$.

   Par ailleurs, $\tan\dfrac{\pi x}{4} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi h}{4}\right) = -\dfrac{1}{\tan\frac{\pi h}{4}} \sim \dfrac{4}{\pi h}$.

   Alors $\tan\dfrac{\pi x}{4}\ln(2^x + 3^x - 12) \sim -\dfrac{(16\ln 2 + 36\ln 3)}{\pi}$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} g(x) = e^{-\dfrac{(16\ln 2 + 36\ln 3)}{\pi}}.}$
3. On a $h(x) = \sqrt{x^2+1} - x = x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1) = x\left(\dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0.}$

Exercice 5 :

- On a $u_n = \exp(n\ln(1+\frac{a}{n}))$. Mais on a $\ln(1+\frac{a}{n}) \sim \frac{a}{n}$ car $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n} = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{a}{n}) = a$ et comme exp est continue en a, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^a}$.
- $v_n = ne^{\frac{n}{2}\ln\frac{n+1}{n+3}} = ne^{n\ln\frac{1+1/n}{1+3/n}}$.

  Mais $\ln\frac{1+1/n}{1+3/n} = \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{3}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{3}{n} + o(\frac{1}{n})$ Alors $e^{n\ln\frac{1+1/n}{1+3/n}} \longrightarrow e^{-2}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty}$.
- On a $w_n = \exp\left(n\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{6n+1} + \sin\dfrac{\pi}{3n+2}\right)\right)$.

  On a $\cos\dfrac{\pi}{6n+1} = 1 - \dfrac{\pi^2}{2(6n+1)} + o(\frac{1}{n^2})$ et $\sin\dfrac{\pi}{3n+2} = \dfrac{\pi}{3n+2} + o(\frac{1}{n^2})$.

  Alors $\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{6n+1} + \sin\dfrac{\pi}{3n+2}\right) = \dfrac{\pi}{3n+2} + o(\frac{1}{n})$

  et $n\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{6n+1} + \sin\dfrac{\pi}{3n+2}\right) \sim \dfrac{n\pi}{3n+2} \sim \dfrac{\pi}{3}$. D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} w_n = e^{\frac{\pi}{3}}}$.

Exercice 6 :

- On a $\dfrac{x}{e^x-1} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$. Alors on a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1 = g(0)$ donc g est continue en 0. De plus, comme g admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, on en déduit que g est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 est le coefficient d'ordre 1 : $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

  On tire également du développement, l'équation de la tangente à la courbe en 0 : $y = 1 - \frac{x}{2}$ et la position de la courbe $g(x) - y = \frac{x^2}{12} + o(x^2)$ est toujours au dessus de la tangente au voisinage de 0.

- On a $\dfrac{x - \ln(1+x)}{x} \underset{0}{=} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$. Alors on a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$ donc h est continue en 0. De plus, comme h admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, on en déduit que h est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 est le coefficient d'ordre 1 : $h'(0) = \frac{1}{2}$.

  On tire également du développement, l'équation de la tangente à la courbe en 0 : $y = \frac{1}{2}x$ et la position de la courbe $h(x) - y = -\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$ est toujours en dessous de la tangente au voisinage de 0.

Exercice 7 :

On développe f au voisinage de $+\infty$. Pour $x > 0$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2-2x-6} = x\sqrt[3]{1+3\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}}$.
On pose $u = 3\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}$, u tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
On a $\sqrt[3]{1+u} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2)$ et $u^2 = \frac{9}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.
On en déduit que $f(x) \underset{0}{=} x(1 + \frac{1}{x} + -\frac{2}{3x^2} - \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{X^2}))$ et finalement $\boxed{f(x) \underset{0}{=} x + 1 - \frac{5}{3x} + o(\frac{1}{x})}$.
Alors la droite $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et la courbe est en dessous de l'asymptote.
On développe g au voisinage de ∞ : $g(x) = 2xe^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$. Et $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Alors $g(x) = 2x + 2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{1}{3} - 1\right)\dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et finalement, $\boxed{g(x) \underset{\infty}{=} 2x + 2 - \dfrac{2}{3x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$.
Alors la droite $y = 2x + 2$ est asymptote à la courbe représentative de g en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe est en dessous de l'asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 8 :

1. On a $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ et $\operatorname{ch} x - 1 = \frac{x^2}{2}(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3))$. Alors $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x - 1} = \dfrac{2}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)$.
   $x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = (x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^6)) - (x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30} + o(x^6)$.
   On en déduit que
   $$\frac{x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{2}{x^2}(\tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{30} + o(x^6))(1 - \tfrac{x^2}{12} + o(x^3)) = 2(\tfrac{x}{3} + \tfrac{x^3}{30} + o(x^4))(1 - \tfrac{x^2}{12} + o(x^3))$$
   et finalement $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \frac{2x}{3} + (-\frac{1}{18} + \frac{1}{15})x^3 + o(x^4)}$.
   Alors en posant $f(0) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc la fonction prolongée est continue en 0 et comme elle est continue sur $\mathbb{R}^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Comme la fonction prolongée admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, alors
   $$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = \frac{2}{3}}.$$
   Sa tangente est $y = \dfrac{2}{3}x$ et la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $f(x) - y \underset{0}{=} (\frac{1}{18} + \frac{1}{15})x^3 + o(x^4)$ en dessous de la courbe à gauche de 0 et au dessus à droite de 0.

Exercice 9 :

a) $u_n = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$: On utilise l'encadrement usuel pour la partie entière : $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ pour $x \in \mathbb{R}$

qui donne $\sqrt{n}-1 < \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \leqslant \sqrt{n} \Longrightarrow 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor}{\sqrt{n}} \leqslant 1$

Par le théorème d'encadrement, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor}{\sqrt{n}} = 1$ soit $\boxed{\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}}$

b) $v_n = \sqrt{2n^2+n} - n$: On a $\sqrt{2n^2+n} = \sqrt{2}n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{1/2} = \sqrt{2}n\,(1+o(1))$ car $\dfrac{1}{2n} = o(1)$

Alors $v_n = \left(\sqrt{2}-1\right)n + o(n)$ On en déduit que $\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2}-1\right)n}$

c) $w_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}$: On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 w_n = 1$ alors $\boxed{w_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}}$.

d) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)$: On sait que $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Alors $\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum\limits_{k=0}^{n} k + \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n(n+1)+n = n^2+2n$. Il s'ensuit que $\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n^2}$.

Exercice 10 :

1. On montre par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
   On a $u_1 > 0$. Si pour un entier $n \geqslant 1$, on a $u_n > 0$, alors u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} > 0$. La proposition est initialisée et héréditaire, alors, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a donc pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant e^{-u_n} \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$.

2. Alors $u_n = 0 + o(1)$. On utilise le DL de exp en 0 : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, qui donne $e^{-u_n} = 1 + o(1)$. On obtient alors $\dfrac{1}{n+1}e^{-u_n} = \dfrac{1}{n+1} + o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$
   On a donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + o\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}\varepsilon_1(\frac{1}{n+1})$ avec $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$.
   En revenant à u_n (décalage d'indice), on obtient $\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon_1(\frac{1}{n})}$.

3. On calcule e^{-u_n} en utilisant un DL $e^{-u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ qui donne
   $$\frac{1}{n+1}e^{-u_n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} + o(\frac{1}{n(n+1)}).$$
   On a $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{(n+1)^2}$ qui donne $o\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right) = o\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$
   On a donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\dfrac{n+1}{n}\right) + o(\dfrac{1}{(n+1)^2})$
   On utilise $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$. D'où $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2} + o(\dfrac{1}{(n+1)^2})$
   En décalant les indices, on trouve $\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$.

4. On recommence : $e^{-u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

qui donne $\dfrac{1}{n+1}e^{-u_n} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{3}{2n^2(n+1)} + o\left(\dfrac{1}{n^2(n+1)}\right)$.

On a donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{2(n+1)^3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{(n+1)^3}\right)$.

On simplifie $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n(n+1)^2} + \dfrac{1}{2(n+1)^3} + o\left(\dfrac{1}{(n+1)^3}\right)$.

et $\dfrac{1}{n(n+1)^2} = \dfrac{1}{(n+1)^3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^3} + o\left(\dfrac{1}{(n+1)^3}\right)$

D'où, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{2(n+1)^3} + o\left(\dfrac{1}{(n+1)^3}\right)$.

On décale les indices et on obtient

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)}.$$

Exercice 11 :

1. f est continue et strictement croissante comme somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to 0} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[\ ]-\infty,+\infty[$.
   Alors, l'équation $f(x) = n$ a une unique solution x_n et on a $f(x_n) = n \iff x_n = f^{-1}(n)$.
   La fonction réciproque f^{-1} est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors, $\lim\limits_{u\to+\infty} f^{-1}(u) = +\infty$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$ ce qui prouve $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$.
2. On étudie la fonction $\varphi(x) = x - \ln(x)$. φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.
   On en déduit que φ a un minimum en 1 qui vaut $\varphi(1) = 1$.
   Alors, $\forall x > 0, \quad \varphi(x) \geqslant 1 > 0$ On a donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(x_n) < x_n$.
3. On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(x_n) < x_n$ et $x_n = n - \ln(x_n)$ qui donne $x_n > n - x_n$ soit $\dfrac{n}{2} < x_n$
   On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(x_n) < x_n$ et $x_n \geqslant 1$ qui donne $x_n \leqslant n$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(x_n) + x_n = n$ qui donne $\dfrac{x_n}{n} = 1 - \dfrac{\ln(x_n)}{n}$.
   La fonction ln est croissante et $1 \leqslant x_n \leqslant n$, alors, $0 \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{n} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.
   Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$, alors, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n}$.
   Il s'ensuit par opérations sur les suites convergentes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$ soit $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
4. On a $y_n = x_n - n = -\ln(x_n)$. $\dfrac{y_n}{-\ln(n)} = \dfrac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, donc, par opérations sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n}{-\ln(n)} = 1$. On a prouvé $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
5. On a $z_n = -\ln(x_n) + \ln(n) = \ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$
   Or $x_n = n - \ln(x_n)$ d'où $z_n = \ln\left(\dfrac{n - \ln(x_n)}{n}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{\ln(x_n)}{n}\right)$

On a $\ln(1+u) = u + u\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$ D'où $z_n = \dfrac{\ln(x_n)}{n} + \dfrac{\ln(x_n)}{n}\varepsilon\left(\dfrac{\ln(x_n)}{n}\right)$

Alors, $z_n \sim \dfrac{\ln(x_n)}{n}$ et $\dfrac{\ln(x_n)}{n} = \dfrac{-y_n}{n}$ et $y_n \sim -\ln(n)$ ce qui donne par quotient d'équivalents et transitivité des équivalents : $\boxed{z_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}}$.

Exercice 12 :

On montre par récurrence que pour tout entier n, $0 < u_n < 2$. Alors la suite $\dfrac{u_n}{n+1}$ converge vers 0 en tant que produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$ et (u_n) converge.

On a $u_n = 1 + o(1)$ qui donne $\dfrac{u_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

Alors $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1} + o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ En décalant les indices, il vient $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Alors $\dfrac{u_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n(n+1)} + o\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\dfrac{n+1}{n}\right) + o\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

$$\frac{u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

car $\dfrac{1}{(n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \Longrightarrow o\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right) = o\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$

Alors

$$\frac{u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \quad \text{Donc} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Et en décalant les indices $\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$

Exercice 13 :

1. La fonction $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$ est strictement croissante et continue sur $]0,1[$, c'est donc une bijection de $]0,1[$ dans $]f_n(0), f_n(1)[=]-4, 6[$. Il existe donc un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$ soit $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$.
2. On calcule $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + 9u_n^2 - 4 = u_n^{n+1} - u_n^n = u_n^n(u_n - 1) < 0$. On a donc $f_{n+1}(u_n) < fn+1(u_{n+1})$ et comme f_{n+1} est strictement croissante, on a pour tout entier n, $u_n < u_{n+1}$.
   La suite (u_n) est bornée et croissante donc elle converge.
3. On calcule $f_n(\frac{3}{4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{81}{16} - 4 > \frac{81}{16} - 4 > 0$

   Alors comme f_n est strictement croissante, $u_n < \dfrac{3}{4}$ qui donne $0 < u_n^n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

   La suite géométrique $\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$ converge vers 0, alors par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0}$.

   Comme $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$ pour toutentier n, par passage à la limite, il vient $9\ell - 4 = 0$ soit $\boxed{\ell = \dfrac{2}{3}}$.

   De $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$, on tire $u_n - \dfrac{2}{3} = \dfrac{u_n^n}{9u_n+4} \sim \dfrac{1}{10}u_n^n$

   On veut prouver que $u_n^n \sim \dfrac{2^n}{3^n}$. On étudie le quotient $\dfrac{u_n^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \dfrac{e^{n\ln(u_n)}}{e^{n\ln\left(\frac{2}{3}\right)}} = e^{n\ln(\frac{3u_n}{2})}$

   Mais $\dfrac{3u_n}{2} = 1 + \dfrac{3u_n^n}{18u_n+8}$ et $\ln\left(\dfrac{3u_n}{2}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{3u_n^n}{18u_n+8}\right) \sim \dfrac{3u_n^n}{18u_n+8}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3u_n^n}{18u_n+8} = 0$

Alors $n\ln\left(\dfrac{3u_n}{2}\right) \sim n\times\dfrac{3u_n^n}{18u_n+8}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\dfrac{3u_n}{2}\right)=0$ car $0\leqslant nu_n^n\leqslant n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$ soit $u_n^n\sim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Finalement $\boxed{u_n-\dfrac{2}{3}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$

Exercice 14 :

1. La fonction $f(x)=e^x\tan x$ est définie, continue et dérivable sur chaque intervalle $I_n=]-\pi/2+n\pi,\pi/2+n\pi[$ pour $n\in\mathbb{Z}$ comme produit de deux fonctions définies, continues et dérivables sur chacun de ces intervalles. On a $f'(x)=e^x(1+\tan x+\tan^2 x)>0$ donc f est strictement croissante sur chacun des intervalles I_n. De plus, f est continue sur I_n et $f(I_n)=\mathbb{R}$, alors

   $$\boxed{\text{l'équation } f(x)=1 \text{ a une unique solution } x_n \text{ sur chaque intervalle } I_n.}$$

   Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a $-\pi/2+n\pi<x_n<\pi/2+n\pi$ d'où $1-\frac{1}{2n}<\frac{x_n}{n\pi}<1+\frac{1}{2n}$. Par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n\pi}=1$ soit $\boxed{x_n\sim n\pi}$.

2. On note $v_n=x_n-n\pi$. Alors $\tan v_n=\tan x_n$ car tan est une fonction π-périodique. Mais $\tan x_n=e^{-x_n}$ d'où $\tan v_n=e^{-x_n}$ avec $v_n\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. On en déduit que $\boxed{v_n=\arctan e^{-x_n}}$. Puis que $\lim v_n=0$.

   Alors $v_n=o(1)$, on a $x_n=n\pi+o(1)$, on a alors $e^{-x_n}=e^{-n\pi}e^{o(1)}=e^{-n\pi}(1+o(1))$. Comme $\arctan u=u-\frac{u^3}{3}+o(u^3)$, on obtient $\boxed{v_n=e^{-n\pi}+o(e^{-n\pi})}$.

3. On a alors

   $x_n=n\pi+e^{-n\pi}+o(e^{-n\pi})$ alors $e^{-x_n}=e^{-n\pi}e^{-e^{-n\pi}+o(e^{-n\pi})}=e^{-n\pi}(1-e^{-n\pi}+o(e^{-n\pi}))$ car $\exp(u)=1+u+o(u)$

   Alors $v_n=\arctan\left(e^{-n\pi}-e^{-2n\pi}+o(e^{-2n\pi})\right)$ d'où $v_n=e^{-n\pi}-e^{-2n\pi}+o(e^{-2n\pi})$.

   Alors $x_n=n\pi+e^{-n\pi}-e^{-2n\pi}+o(e^{-2n\pi})$. D'où

   $\exp(-x_n)=\exp(-n\pi)\exp(-e^{-n\pi}+e^{-2n\pi}+o(e^{-2n\pi}))=e^{-n\pi}(1-e^{-n\pi}+e^{-2n\pi}+\frac{1}{2}\,e^{-2n\pi})$

   car $\exp(u)=1+u+\frac{1}{2}u^2+o(u^2)$.

   Alors $v_n=\arctan\left(e^{-n\pi}-e^{-2n\pi}+\ \frac{3}{2}e^{-3n\pi}+o(e^{-3n\pi})\right)$

   d'où $v_n=e^{-n\pi}-e^{-2n\pi}+\frac{3}{2}e^{-3n\pi}-\frac{1}{3}e^{-3n\pi}+o(e^{-3n\pi})$.

   Finalement, $v_n=e^{-n\pi}-e^{-2n\pi}+\frac{7}{6}e^{-3n\pi}+o(e^{-3n\pi})$ et

   $$\boxed{x_n=n\pi+e^{-n\pi}-e^{-2n\pi}+\tfrac{7}{6}e^{-3n\pi}+o(e^{-3n\pi})\ .}$$

Exercice 15 :

1. On encadre l'intégrale : $0\leqslant t\leqslant 1$ donne $0\leqslant t^n\sqrt{1+t}\leqslant\sqrt{2}t^n$

   L'intégrale est croissante et les bornes sont dans l'ordre : $\displaystyle 0\leqslant\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt\leqslant\sqrt{2}\int_0^1 t^n\,dt.$

   D'où $\boxed{0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}\text{ et } (u_n) \text{ converge vers 0 d'après le théorème d'encadrement.}}$

2. On intègre par parties

   $$u_n=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\sqrt{1+t}\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{2\sqrt{1+t}}\,dt.$$

   On encadre la 2ème intégrale

   $$0\leqslant\frac{t^{n+1}}{2\sqrt{1+t}}\leqslant\frac{1}{2}t^{n+1}\text{ donne }0\leqslant\int_0^1\frac{t^{n+1}}{2\sqrt{1+t}}\,dt\leqslant\frac{1}{2(n+2)}\text{ puis, }\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{2\sqrt{1+t}}\,dt=0.$$

   Alors $\displaystyle nu_n=\frac{\sqrt{2}n}{n+1}-\frac{n}{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{2\sqrt{1+t}}\,dt$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \sqrt{2}$ soit $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n}.}$

Exercice 16 :

1. On encadre l'intégrale avec pour $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{t^n}{4-t^2} \leqslant \dfrac{t^n}{3}$

   L'intégrale est croissante et les bornes sont dans l'ordre croissant : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 t^n \, dt = \dfrac{1}{3(n+1)}$.

   On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\boxed{(I_n) \text{ converge vers } 0}$.

2. On intègre par parties
$$I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{4-t^2}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{2t^{n+2}}{(4-t^2)^2} \, dt.$$
   On encadre l'intégrale :
$$0 \leqslant \frac{2t^{n+2}}{(4-t^2)^2} \leqslant \frac{2}{9}t^{n+2} \text{ donne } 0 \leqslant \int_0^1 \frac{2t^{n+2}}{(4-t^2)^2} \, dt \leqslant \frac{2}{9(n+3)}$$
   Puis, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{2t^{n+2}}{(4-t^2)^2} \, dt = 0$ soit $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t^{n+4}}{(4-t^2)^2} \, dt = o(1)$

   Alors $I_n = \dfrac{1}{3(n+1)} + o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ Mais, $\dfrac{1}{3(n+1)} = \dfrac{1}{3n}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{3n}\left(1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

   Alors $\boxed{I_n = \dfrac{1}{3n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$ On poursuit :
$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\left[\frac{t^{n+3}}{n+3} \times \frac{1}{(4-t^2)^2}\right]_0^1 + \frac{2}{(n+1)(n+3)}\int_0^1 \frac{4t^{n+4}}{(4-t^2)^3} \, dt.$$
   On encadre la 2ème intégrale
$$0 \leqslant \frac{4t^{n+4}}{(4-t^2)^3} \leqslant \frac{4}{27}t^{n+4} \text{ donne } 0 \leqslant \int_0^1 \frac{4t^{n+4}}{(4-t^2)^3} \, dt \leqslant \frac{4}{27(n+5)}$$
   Puis, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{4t^{n+4}}{(4-t^2)^3} \, dt = 0$ soit $\displaystyle\int_0^1 \frac{4t^{n+4}}{(4-t^2)^3} \, dt = o(1)$

   Alors $I_n = \dfrac{1}{3(n+1)} - \dfrac{2}{9(n+1)(n+3)} + o\left(\dfrac{1}{(n+1)(n+3)}\right)$

   $I_n = \dfrac{1}{3n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} - \dfrac{2}{9n^2}\left((1+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n})\right)^{-1} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

   $I_n = \dfrac{1}{3n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{2}{9n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ $\boxed{I_n = \dfrac{1}{3n} - \dfrac{5}{9n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$

Exercice 17 :

1. On a $\dfrac{\sin t}{t} = 1 - \dfrac{t^2}{6} + o(t^3)$. La fonction $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $h(0) = 1$. Aolrs, h a une primitive H sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 et $H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t) \, dt$.

   Par intégration terme à terme du développement limité de h , on trouve $H(x) = x - \dfrac{x^3}{18} + o(x^4)$.

   Enfion, on a $G(x) = H(3x) - H(x)$ ce qui donne le DL suivant :

   $G(x) = 3x - x - \dfrac{27x^3}{18} + \dfrac{x^3}{18} + o(x^4)$ soit $G(x) = 2x - \dfrac{13}{9}x^3 + o(x^4)$.

2. G a un DL à l'ordre 0 en 0 donc on peut prolonger G par continuité en posant $G(0) = 0$.

   G ainsi prolongée a un DL l'ordre 1 donc G est dérivable en 0 et $G'(0) = -\dfrac{13}{9}$.