Chapitre 15 - Cours - Correction exemple 5.5

Exemple 5.5 :
Montrer que les fonctions paires et les fonctions impaires sont deux sev supplémentaires de l'espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note P et I les ensembles des fonctions paires et impaires.

On a $P \subset E$ et $I \subset E$.

La fonction nulle $\vec{0} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array}$ est paire et impaire donc $\vec{0} \in P$ et $\vec{0} \in I$

Soit f_1, f_2 deux fonctions paires. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$
$(f_1 + f_2)(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$
alors $f_1 + f_2$ est paire donc $f_1 + f_2 \in P$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(\alpha f_1)(-x) = \alpha \cdot f_1(-x) = \alpha f_1(x) = (\alpha f_1)(x)$
donc $\alpha f_1 \in P$

P est non vide et stable par combinaison linéaire
alors P est un sev de E. De même I est un sev de E.

Soit $f \in E$ on suppose que $f = f_P + f_I$ avec $f_P \in P$ et $f_I \in I$. Alors,

on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_P(-x) + f_I(-x) = f(-x)$
et $f_P(x) + f_I(x) = f(x)$

ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} f_P(x) - f_I(x) = f(-x) \\ f_P(x) + f_I(x) = f(x) \end{cases}$

ce qui est équivalent à $\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} f_P(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ f_I(x) = \dfrac{f(+x) - f(-x)}{2} \end{cases}$

ce qui prouve que si la décomposition existe alors elle est unique : on a prouvé que P et I sont en somme directe (ou $P \cap I = \{\vec{0}\}$)
(fin de l'analyse)

Soit $f \in E$. On pose $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$ donc $f = f_1 + f_2$.

On a également $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x)$ donc $f_1 \in P$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_2(x)$ donc $f_2 \in I$.

On a prouvé l'existence d'une décomposition pour toute fonction f de E en $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in P$ et $f_2 \in I$ alors $\boxed{E = P + I}$

Finalement, on a montré $E = P \oplus I$ c'est à dire que P et I sont supplémentaires dans E.