Chapitre 19 - Matrices et applications linéaires

dim finie

1 Matrices d'une application linéaire

vecteur

base — matrice

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $x \in E$, on appelle matrice de x dans la base $\mathscr{B}$, la matrice colonne notée $M_{\mathscr{B}}(x)$ dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$:

Si $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, alors $M_{\mathscr{B}}(x) = \begin{array}{c} x \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \\ e_n \end{array}$. n lignes avec $n = \dim E$.

La matrice dans la base $\mathscr{B}$ d'une famille de vecteurs $(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_p})$ de E notée $M_B(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est la matrice dont la j-ième colonne pour $j \in [\![1, p]\!]$ est constituée des n coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$.

Si pour $j \in [\![1, p]\!]$, $\vec{x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ alors

p vecteurs

$$M_B(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (a_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,p]\!]} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & & x_j & & x_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

n lignes

a_{ij} = coordonnées selon e_i de x_j

Remarque 1.1. La matrice de la famille $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice identité I_n.

Exemple 1.1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on note $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ une base. Soit $\vec{u} = 4\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$ et $\vec{v} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$.
Donner les matrices $M_{(\vec{e_1}, \vec{e_2})}(\vec{u}, \vec{v})$ et $M_{(u,v)}(e_1, e_2)$.

La première matrice se trouve directement en écrivant, en colonne, les coordonnées dans la base (e_1, e_2) de chaque vecteur u, v : $M_{(e_1,e_2)}(u, v) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u,v)$

Remarque : On pourra noter au brouillon les vecteurs en colonne haut dessus de la matrice et sur le côté les vecteurs de la base $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array}$

Mais, CELA NE DOIT PAS APPARAÎTRE SUR VOTRE COPIE DE DEVOIR.
Pour la matrice $M_{(u,v)}(e_1, e_2)$, il faut d'abord calculer les coordonnées de (e_1, e_2) : on cherche $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\begin{cases} e_1 &= \alpha_1 u + \beta_1 v \\ e_2 &= \alpha_2 u + \beta_2 v \end{cases}$
On résout le système suivant par opérations sur les lignes :

$$\begin{cases} u &= 4e_1 - 3e_2 \\ v &= 2e_1 - e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - 3v &= -2e_1 \\ u - 2v &= -e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 &= \frac{1}{2}(-u + 3v) \\ e_2 &= -u + 2v \end{cases}$$

Ce qui nous donne la matrice $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \end{array}$ soit $M_{(u,v)}(e_1, e_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exemple 1.2. Dans $\mathbb{R}^3$, écrivons la matrice de $\boldsymbol{u} = (1,2,-1)$, $\boldsymbol{v} = (1,3,0)$, $\boldsymbol{w} = (-2,0,1)$, et $\boldsymbol{t} = (0,0,-1)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

4 vecteurs

On trouve
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} & \boldsymbol{t} \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}
\end{array}$$
dim 3

soit $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_0}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exemple : Dans $\mathbb{R}_2[X]$, matrice de $P = -5X^2+7X+1$ dans la base canonique $B_0 = (X^2, X, 1)$ puis dans la base $(1, (X-2), (X-2)^2) = B_1$.

$P' = -10X+7$

$P'' = -10$

on a $P = P(2)\times 1 + P'(2)(X-2) + \frac{P''(2)}{2}(X-2)^2$

$= -5 - 13(X-2) - 5(X-2)^2$

$$M_{B_0}(P) = \begin{array}{cc} P & \\ \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X^2 \\ X \\ 1 \end{array} \end{array} \qquad M_{B_1}(P) = \begin{array}{cc} P & \\ \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{array} \end{array}$$

Remarque :

$$M_{B_1}(B_1) = M_{B_1}(1, X-2, (X-2)^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{B_0}(B_0)$$

Généralement $M_B(B) = I_n$ pour B une base.

TD ©

$E, \mathcal{B}_1 \xrightarrow{u} F, \mathcal{B}_2$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E dans F.

$p = \dim E$ $\quad$ $q = \dim F$

On appelle matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$, de la famille de vecteurs $(u(\mathcal{B}_1))$ dans la base $\mathcal{B}_2$:

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(u(\mathcal{B}_1))} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$$

On a $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Si on note $\mathcal{B}_2 = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \dots, \boldsymbol{f_q})$ et $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\quad u(\boldsymbol{e_j}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} a_{ij}\boldsymbol{f_i}$ où $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ sont les coordonnés du vecteur $u(\boldsymbol{e_j})$ dans la base $\mathcal{B}_2$,

$u(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + a_{31} f_3 + \dots + a_{q1} f_q$

$$\text{alors } \mathrm{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(\boldsymbol{e_1}) & u(\boldsymbol{e_j}) & u(\boldsymbol{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{qp} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{f_1} \\ \\ \boldsymbol{f_i} \\ \\ \boldsymbol{f_q} \end{array}$$

moyen mnémotechnique

Remarque 1.2. Le nombre de lignes de la matrice est égal à la dimension de l'espace d'arrivée. Le nombre de colonnes est égal à la dimension de l'espace de départ.

$\mathcal{B}_3 = ((1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1))$

Exemple 1.3. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, 3x-2y+4z) \end{array}$.

Donnons la matrice de g dans les bases canoniques $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

On calcule les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_3$ par g :

$g(1,0,0) = (1,3), \quad g(0,1,0) = (2,-2) \quad g(0,0,1) = (-1,4)$

Les images donnent directement les coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_2$: $(1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$...

Alors, on a la matrice :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(\boldsymbol{e_1}) & g(\boldsymbol{e_2}) & g(\boldsymbol{e_3}) \\ = g(1,0,0) & = g(0,1,0) & = g(0,0,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \boldsymbol{f_1} = (1,0) \\ \boldsymbol{f_2} = (0,1) \end{array}$$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2, B_1 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2, B_2$

$\mathbb{R}^2, (e_1,e_2) \xrightarrow{A_1} \mathbb{R}^2, (u,v)$

$\mathbb{R}^2, (u,v) \xrightarrow{A_2} \mathbb{R}^2, (e_1,e_2)$

> **Exercice 1.1.** Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ une base. On pose $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$.
> Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{u}$ et $f(\boldsymbol{e_2}) = 3\boldsymbol{v}$.
> Calculer $\underbrace{\mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(f)}_{A_1}$ et $\underbrace{\mathrm{M}_{(u,v)(e_1,e_2)}(f)}_{A_2}$.

On remarque que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

On a directement les coordonnées des images de $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ dans la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, alors,

$$A_1 = \mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\boldsymbol{e_1}) & f(\boldsymbol{e_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{array}$$

$f(e_1) = u = 1 \times u + 0 \times v$

$f(e_2) = 0 \times u + 3 \times v$

car f est linéaire

Pour l'autre matrice, il faut calculer $f(\boldsymbol{u})$ et $f(\boldsymbol{v})$.

On a $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ qui donne $f(\boldsymbol{u}) = 2f(\boldsymbol{e_1}) + f(\boldsymbol{e_2})$ $\quad$ soit $f(\boldsymbol{u}) = 2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$ et finalement,

$f(\boldsymbol{u}) = 2(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + 3(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = 7\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ $= u - 3v = f(v)$

De même, on calcule $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2) = (2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) - 3(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$

Alors,

A1 et A2 sont 2 matrices de f dans des bases différentes

$$A_2 = \mathrm{M}_{(u,v)(e_1,e_2)}(f) = \begin{array}{cc} f(\boldsymbol{u}) & f(\boldsymbol{v}) \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cc} 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{array} \end{array}$$

On peut également calculer les deux matrices

$$A_3 = \mathrm{M}_{(u,v)(u,v)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(u) & f(v) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{(e_1,e_2)(e_1,e_2)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array} = A_4$$

où on utilise la même base au départ et à l'arrivée. Cela est possible car f est un endomorphisme.

1.3 Matrice d'un endomorphisme

Définition 1.3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
On appelle matrice de l'endomorphisme v dans la base $\mathscr{B}$, la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v)$, de l'application linéaire v dans le couple de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v(e_1), v(e_2), \dots, v(e_p))$$

Remarque 1.3. On utilise la même base au départ et à l'arrivée.
La matrice de l'identité id_E est la matrice identité I_p.

Exercice 1.2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & 2P - 2(X+1)P' + X^2P'' \end{array}.$$

On commence par calculer l'image des vecteurs de la base par φ :
$\varphi(1) = 2,\quad \varphi(X) = 2X - 2(X+1) = -2,\quad \varphi(X^2) = 2X^2 - 2(X+1)2X + 2X^2 = -4X,$
$\varphi(X^3) = 2X^3 - 2(X+1)3X^2 + 6X^3 \cancel{= 2X^3} - 6X^2$
Alors, on peut écrire la matrice de φ dans la base canonique :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array} \quad \text{soit} \quad \mathrm{M}_{(1,X,X^2,X^3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ peut aussi s'écrire dans l'ordre décroissant des puissances : $(X^3, X^2, X, 1)$. C'est une autre base.

La matrice de φ dans cette base s'écrit :

$$\mathrm{M}_{(X^3,X^2,X,1)}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(X^3) & \varphi(X^2) & \varphi(X) & \varphi(1) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X^3 \\ X^2 \\ X \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$id_E : E \longrightarrow E$ et $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E

$$M_B(id_E) = M_{B,B}(id_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} id(e_1) & id(e_2) & & id(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & (0) \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \\ e_p \end{array} = I_p$$

pour un endomorphisme base de départ = base d'arrivée

matrice de — départ — arrivée — appli linéaire

les matrices d'un endomorphisme sont carrées

exemple exo 6 du TD 17

$E = \text{Vect}(g_0, g_1, g_2)$ avec $g_i(x) = x^i e^{4x}$ pour $x \in \mathbb{R}$ $i = 0, 1, 2$

et $D : E \longrightarrow E$
$f \longmapsto f'$ on avait calculé

$(a, b, c)_{(g_0, g_1, g_2)} \longmapsto (4a, 2a+4b, b+4c)_{(g_0, g_1, g_2)}$

$$D(x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^{4x}) = (x \longmapsto (4ax^2 + (2a+4b)x + (b+4c))e^{4x})$$

Quelle est la matrice de D dans la base (g_0, g_1, g_2) ?

$D(g_0) = D(x \mapsto e^{4x}) = (x \mapsto 4e^{4x}) = 4g_0$

$(\forall x \in \mathbb{R}, \; \underbrace{D(g_0)}_{\text{fonction}}(x) = 4e^{4x} = 4g_0(x))$

$(x e^{4x})'$

on calcule également $D(g_1) = (x \longmapsto (4x+1)e^{4x}) = 4g_1 + g_0$

$D(g_2) = (x \mapsto (2x + 4x^2)e^{4x}) = 4g_2 + 2g_1$

d'où

$$\boxed{M_{(g_0, g_1, g_2)}(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} D(g_0) & D(g_1) & D(g_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} g_0) \\ g_1) \\ g_2) \end{array}}$$

$g_2(x) = x^2 e^{4x}$

D envoie le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ sur le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 4c + b \\ 4b + 2a \\ 4a \end{pmatrix}$

$\times M_{(g_0, g_1, g_2)}(D)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c + b \\ 4b + 2a \\ 4a \end{pmatrix}$$

1.4 Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 1.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie de base $\mathscr{B}$. soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a*

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\alpha x + y) = \alpha \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) + \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(y)$$

Proposition 1.2. *Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie.* $u : E \longrightarrow F$ $v : E \longrightarrow F$
Soit $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base de F.
Soit $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. $$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\alpha u + v) = \alpha \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u) + \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(v).$$

La matrice d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des matrices de ces vecteurs

De même pour les combinaisons linéaires d'applications linéaires.

⚠ attention aux bases !!

appli linéaire

base

matrice

2 Matrices et applications linéaires

$E, B_1 \xrightarrow{u} F, B_2$

$x \longmapsto y$

2.1 Calcul des coordonnées de l'image

Proposition 2.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension p et q, $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base de F.*
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$: $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u)$.
Si $\boldsymbol{x} \in E$ a pour matrice X dans $\mathscr{B}_1$ et $\boldsymbol{y} = u(\boldsymbol{x})$ a pour matrice Y dans $\mathscr{B}_2$, alors on a

$$Y = AX \quad \text{soit} \quad \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\boldsymbol{x})) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\boldsymbol{x}).$$

Démonstration. $X = M_{B_1}(x)$ $Y = M_{B_2}(y)$ $A = M_{B_1 B_2}(u)$

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ et $B_1 = (e_1, \dots, e_p)$ $B_2 = (f_1, \dots, f_q)$

soit $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ et $y = \sum_{k=1}^{q} y_k f_k = u(x)$

la matrice A de u dans B_1, B_2 a pour coeff (a_{ij}) $i = 1, \dots, q$; $j = 1, \dots, p$

On a

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} f_i$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_j) & u(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & \vdots & \\ & a_{ij} & \\ & \vdots & \\ & a_{qj} & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} f_1 \\ \vdots \\ f_i \leftarrow i \\ \vdots \\ f_q \end{array} \end{array}$$

on calcule

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \quad \text{car } u \text{ est linéaire}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{q} a_{ij} f_i\right)$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right) f_i \quad \text{en échangeant les signes somme}$$

ce qui donne $\forall i \in [\![1, q]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$ car $(f_1, \dots, f_q)$ est une base. On reconnaît la formule du produit

$$AX = \left(\boxed{\quad a_{ij} \quad} \right) \cdot \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}} = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \right) \leftarrow i = Y$$

□

Exemple 2.1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $U = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $U = \mathcal{M}_{B_0}(u) = \mathcal{M}_{B_0,B_0}(u) = \begin{array}{c} u(1,0) \\ \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 \\ \boxed{2} & 4 \end{pmatrix} \end{array}$

u linéaire

Pour calculer l'image du vecteur $\vec{a} = (x,y)$ on multiplie la matrice de u par la matrice de $\vec{a}$ (matrices dans la base canonique).

$U \cdot \mathcal{M}_{B_0}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$ matrice de $u(\vec{a})$

d'où $u(x,y) = (3x - y, 2x + 4y)$

On a $u(1,0)$ qui a pour matrice $U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$u((1,0)) = (3,2)$

et $u((0,1)) = (-1,4)$

Exemple : $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y) \longmapsto (2x + y, x - y, 3x + 2y)$ expression analytique $\mathcal{M}_{B_0,B'_0}(\varphi)$

avec B_0 base canonique de $\mathbb{R}^2$, B'_0 base canonique de $\mathbb{R}^3$

et calculer l'image de $(5,-7)$

on a $\varphi((1,0)) = (2,1,3)$, $\varphi((0,1)) = (1,-1,2)$

$A = \mathcal{M}_{B_0,B'_0}(\varphi) = \begin{array}{cc} \varphi(\ ) & \varphi(\ ) \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array}$ on calcule $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varphi((5,-7))$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u = (1,-2)$ $v = (1,1)$ matrice de φ $\mathcal{M}_{(u,v),B'_0}(\varphi) = A'$

$\varphi(u) = (0,3,-1)$ $\varphi(v) = (3,0,5)$

$A' = \begin{array}{cc} \varphi(u) & \varphi(v) \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$

matrice de $\varphi(x,y)$ est $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$

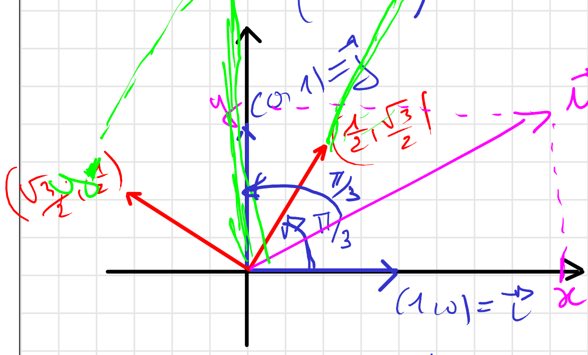
Exemple 2.2. Soit r la rotation de matrice $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{B}_0 = ((1,0),(0,1))$

Calculer l'image des vecteurs $(1,0)$ puis $(0,1)$. En déduire l'angle de la rotation.

Calculer l'image du vecteur de coordonnése $(2,3)$.

Déterminer la matrice d'une rotation d'angle θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$R \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} \Rightarrow r(1,0) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ et de même $r(0,1) = \left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$



$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$r(\vec{u}) = x\, r(\vec{i}) + y\, r(\vec{j})$

par calcul dans la BOND $(\vec{i}, \vec{j})$

et $\|\vec{u}\| = \|r(\vec{u})\|$

$(\vec{u}, r(\vec{u})) = (\vec{i}, r(\vec{i})) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

r est une rotation vectorielle (= autour de l'origine) d'angle $\pi/3$

2.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires

Théorème 2.2. *Soit n, p, q des entiers non nuls. Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimensions respectives n, p et q et ayant pour bases respectives $\mathscr{B}_1$ $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.*
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ de matrice B dans les bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.
Alors BA est la matrice de $v \circ u$ dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_3$:

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).$$

Démonstration. On a par définition de la matrice de l'application linéaire $v \circ u$:

$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_3}(v \circ u)(\mathscr{B}_1) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_3}(v(u(\mathscr{B}_1)))$
$\quad = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\mathscr{B}_1))$ par propriété du calcul de l'image d'un vecteur par v
$\quad = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1)$ par calcul de l'image d'un vecteur par u

Or, on a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1)$ qui est la matrice identité d'où

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).$$

□

$$A = M_{B_1 B_2}(u) \qquad B = M_{B_2 B_3}(v)$$

$$E, B_1 \xrightarrow{u,\ A} F, B_2 \xrightarrow{v,\ B} G, B_3 \qquad E, B_1 \xrightarrow[v\circ u,\ BA]{} G, B_3$$

Exemple $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y) \longmapsto (3x-y, x+2y, x-y)$ $\quad v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \longmapsto (2x+y-z, x-y+3z)$

on utilise les bases canoniques B_2 de $\mathbb{R}^2$ et B_3 de $\mathbb{R}^3$. On calcule les matrices de $u \circ v$ puis $v \circ u$ dans les bases canoniques

On a
$$U = M_{B_2,B_3}(u) = \begin{array}{cc} u(1,0) & u(0,1) \\ \end{array}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array} \quad \text{et} \quad V = M_{B_3,B_2}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

($v(1,0,0)$ au-dessus de la première colonne de V)

Alors $u \circ v$ a pour matrice $U \times V = M_{B_3,B_3}(u \circ v) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
$(u \circ v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3)$

et $v \circ u$ a pour matrice $V \times U = M_{B_2,B_2}(v \circ u) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

on évite le calcul de $v \circ u(x,y) = v(\underbrace{3x-2y}_{X}, \underbrace{x+2y}_{Y}, \underbrace{x-y}_{Z}) = (2X+Y-Z, X-Y+3Z)$
$= (2(3x-2y)+(x+2y)-(x-y), \ \dots)$

$v \circ u(x,y) = (6x+y, 5x-6y)$

Exemple : Calculer φ^2 avec $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x,y,z) = \left(x+y-z,\ -x-y+z,\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z\right)$$

On utilise la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

et on écrit la matrice de φ dans cette base :

$$A = M_{\mathcal{B}_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{car } \varphi((1,0,0)) = \left(1,-1,\frac{1}{2}\right) \text{ et} \dots$$

On calcule A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A \quad \text{d'où} \quad \boxed{\varphi\circ\varphi = -\frac{1}{2}\varphi}$$

2.3 Matrices inversibles et isomorphismes

Théorème 2.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies de bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

f est un isomorphisme si et seulement si la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est carrée et inversible.

Dans ce cas, la matrice de l'application réciproque f^{-1} est la matrice inverse de la matrice de l'application f :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1}(f^{-1}) = \left(\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)\right)^{-1}$$

$E \xrightarrow{f} F$

$E \xleftarrow{f^{-1}} F$

Démonstration.

(1) la matrice de f est carrée $\iff$ $\dim E = \dim F$.

(2) $\Rightarrow$ si f est un isomorphisme, alors il existe une réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui est linéaire et $f \circ f^{-1} = id_F$

et $M_{B_1 B_2}(f) \cdot M_{B_2 B_1}(f^{-1}) = M_{B_2 B_2}(id_F) = I_{\dim F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $M_{B_1 B_2}(f)$ est inversible

et son inverse est $\left(M_{B_1 B_2}(f)\right)^{-1} = M_{B_2 B_1}(f^{-1})$

$\Leftarrow$ à faire

□

Exemple ex 6 du TD 17

$D : E \to E$ de matrice dans (g_0, g_1, g_2)
$f \mapsto f'$

$$M = \mathcal{M}_{(g_0,g_1,g_2)}(D) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On sait que M est inversible car elle est de rang maximal (= autant de pivots que de lignes)
donc D est bijective

On calcule M^{-1} :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & +1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/16 & 1/32 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array}\right) \qquad \boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/16 & 1/32 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}}$$

D^{-1} est l'application de matrice M^{-1} dans (g_0, g_1, g_2)
c'est-à-dire
$$D^{-1}(g_0) = \frac{1}{4} g_0 \qquad D^{-1}(g_1) = \frac{1}{4} g_1 - \frac{1}{16} g_0$$
$$D^{-1}(g_2) = \frac{1}{32} g_0 - \frac{1}{8} g_1 + \frac{1}{4} g_2$$

Exemple

$$M = \begin{array}{c} \varphi(X^2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ X \\ X^2 \\ \\ \\ \end{array}$$

est inversible car elle est de rang maximal (nb pivots = taille)

C'est la matrice de

$\varphi : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$
$P \mapsto$
$(1, X, X^2, X^3, X^4)$

$\varphi(\overset{X^0}{1}) = 1 = (1+X)^0 \quad \varphi(X) = X+1 \quad \varphi(X^2) = 1 + 2X + X^2 = (1+X)^2$

$\varphi(X^3) = 1+3X+3X^2+X^3 = (1+X)^3$

$\varphi(X^4) = (1+X)^4$ ce qui prouve que $\varphi(P) = P(X+1) = Q(X)$

car $P(X) = \sum_{k=0}^{k} a_k X^k$ et $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{4} a_k (1+X)^k = P(X+1)$

Alors, on sait que φ est bijective et $\varphi^{-1}(Q) = Q(X-1) = P(X)$

Donc

$$M_{(1,X,X^2,X^3,X^4)}(\varphi^{-1}) = M^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(X) & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{array}$$

$\varphi^{-1}(1) = (X-1)^0 = 1$, $\varphi^{-1}(X) = X-1$

$\varphi^{-1}(X^2) = (X-1)^2$, $\varphi^{-1}(X^k) = (X-1)^k$

$(X-1)^3 = -1+3X-3X^2+X^3$ $\qquad (X-1)^4 = 1-4X+6X^2-4X^3+X^4$

$$A' = Q^{-1} A P$$

$$\begin{tikzcd} E, B_1 \arrow[r, "{u,\ A}"] & F, B_2 \\ E, B_1' \arrow[u, "id_E"', "{P = P_{B_1 \to B_1'}}"] \arrow[r, "{u,\ A'}"'] & F, B_2' \arrow[u, "id_F", "Q"'] \end{tikzcd}$$

x, X $\qquad y = u(x), Y$

$M_{B_1', B_1}(id_E) =$

x, X' $\qquad y = u(x), Y'$

$X = M_{B_1}(x)$

$X = PX'$

$X' = M_{B_1'}(x)$

$Y = QY'$

3 Changements de bases

3.1 Matrices de passage (matrices de changement de base)

Définition 3.1. Soit E un espace de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
ancienne nouvelle
On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée $P_{B\to B'}$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$: $P_{B\to B'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ matrice des vecteurs de B' exprimés dans la base B.

Lemme 3.1. *La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P_{B\to B'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E)$.*

Théorème 3.2. *Une matrice de passage est inversible et $P_{B'\to B} = (P_{B\to B'})^{-1}$.*

Démonstration. $P_{B\to B'}$ est la matrice de l'application identité qui est un isomorphisme, alors $P_{B\to B'}$ est inversible et

$$(P_{B\to B'})^{-1} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E^{-1})\mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E) = P_{B'\to B}.$$

□

Lemme 3.3. *Soit $\mathscr{B}$ une base de E de dimension n et $x_1, x_2, \dots, x_n$ une famille de vecteurs de E. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est inversible.*

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, soit $(e_1,e_2) = B_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On pose $u = 2e_1 - 3e_2$, $v = e_1 + e_2$ et $a = u - v$, $b = u + 2v$
Écrire les matrices de passage :

$$P_{(e_1,e_2)\to(u,v)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

$$P_{(u,v)\to(a,b)} = \text{- ———— -} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \end{array}$$

$$P_{(e_1,e_2)\to(a,b)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

$a = (2e_1 - 3e_2) - (e_1 + e_2)$
$= e_1 - 4e_2$
$b = 4e_1 - e_2$

On a
$$\begin{cases} u = 2e_1 - 3e_2 \\ v = e_1 + e_2 \end{cases} \underset{\substack{L_1+3L_2 \\ 2L_2 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 5e_1 = u + 3v \\ 5e_2 = -u + 2v \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}(u + 3v) \\ e_2 = \frac{1}{5}(-u + 2v) \end{cases}$$

Alors
$$\underbrace{P_{(u,v)\to(e_1,e_2)}}_{\mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(id_{\mathbb{R}^2})} = \frac{1}{5} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} id(e_1) & id(e_2) \\ e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \end{array} = \left(P_{(e_1,e_2)\to(u,v)}\right)^{-1}$$

inverses l'une de l'autre

$$P_{B\to B'} = \mathrm{M}_B(B') = \mathrm{M}_B(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = \mathrm{M}_B(id_E(e'_1), id_E(e'_2), \dots, id_E(e'_n))$$

$$\overset{B'}{\left(\quad\right)}_B = \overset{id(B')}{\left(\quad\right)}_B = \mathrm{M}_{B',B}(id_E) = P_{B\to B'}$$

3.2 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur

Théorème 3.4. *Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.* $P = P_{B \to B'}$

Si $x \in E$, on note $X = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors, on a la relation $\boxed{X = PX'}$ *qui donne les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base.*

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)$$

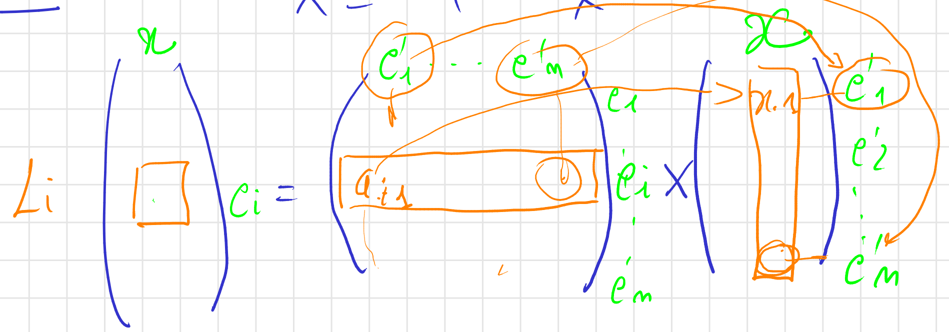
Démonstration.

Pour $x \in E$ $id_E(x) = x$ et la matrice de $id_E(x)$ se calcule par $M_{B',B}(id_E) \times M_{B'}(x)$

ce qui donne $M_B(x) = M_{B',B}(id_E) \times M_{B'}(x)$

$M_B(x) = P_{B \to B'} \times M_{B'}(x)$

schéma : $X = P \; X'$



$L_i(X) = L_i(PX') = L_i(P) \times X'$

Exemple : dans $\mathbb{R}^2$, on note $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ une base

$\vec{u} = 2e_1 - 3e_2$ $\vec{v} = e_1 + e_2$. $\vec{W} = 7\vec{e_1} - 5\vec{e_2}$

Coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

$P = P_{(\vec{e_1},\vec{e_2}) \to (\vec{u},\vec{v})} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $W = M_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

on cherche $W' = M_{(\vec{u},\vec{v})}(\vec{w})$. On a la formule $\boxed{W = PW'}$

$W = PW' \iff P^{-1}W = W'$. On calcule P^{-1} :

$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ alors $W' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\vec{W}' = \frac{12}{5}\vec{u} + \frac{11}{5}\vec{v}$

Exemple : Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $E_{11} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ la base canonique de E.

On note $A_1 = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

Mq (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base et calculer les coordonnées de I_2 dans cette base.

Pour montrer que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base, on dit qu'il y a 4 vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ et on prouve que c'est une famille libre

Autre version avec les matrices,
on écrit la matrice de (A_1, A_2, A_3, A_4) dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix} \end{array}$$

et on montre que P est inversible car $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$

$$(P|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&1&0&0 \\ 1&1&-1&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} AP & \quad\quad\quad\quad & A \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&-2&-1&-1&0&1&0 \\ 0&1&1&0&1&0&0&-1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&1&1&0&1&0&0&-1 \\ 0&0&1&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&-1&-1&2&1&-2 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&-1&2&1&-1 \\ 0&1&0&0&1&-1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&1&1&-2&-1&2 \end{array}\right)$$

on trouve que P est inversible donc (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

on a $I_2 = 1E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 1E_{22}$ $\quad X' = P^{-1}X$

$\mathcal{M}_{B_0}(I_2) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ et donc $\mathcal{M}_{(A_1 A_2 A_3 A_4)}(I_2) = P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

soit $\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$ d'où $\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = -2A_1 + A_2 - A_3 + 3A_4 = I_2}$

3.3 Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Théorème 3.5. *Soit E un espace de dimension finie et deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$.*
Soit F un espace vectoriel de dimension finie et deux bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}'_2$.
Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}'_1$. Soit Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}'_2$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et de matrice A' dans les bases $\mathscr{B}'_1$ à $\mathscr{B}'_2$.
On a $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$ soit $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}'_2}(id_F).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}_1}(id_E)$

$A = M_{B_1,B_2}(u)$

$$\begin{tikzcd}
E, B_1 \arrow[r, "u"] & F, B_2 \\
E, B'_1 \arrow[u, "id_E"] \arrow[r, "u"] & F, B'_2 \arrow[u, "id_F"']
\end{tikzcd}$$

$P = M_{B'_1,B_1}(id_E) = P_{B_1 \to B'_1}$

$Q = P_{B_2 \to B'_2} = M_{B'_2,B_2}(id_F)$

x $u(x)$

$A' = M_{B'_1,B'_2}(u)$

$u = id_F \circ u \circ id_E^{-1} \Rightarrow M_{B'_1 B'_2}(u) = M_{B'_1 B'_2}(id_F \circ u \circ id_E^{-1})$

$u = id_F^{-1} \circ u \circ id_E \Rightarrow M_{B'_1, B'_2}(u) = M_{B'_1 B'_2}(id_F^{-1} \circ u \circ id_E)$

$\Rightarrow M_{B'_1 B'_2}(u) = M_{B_2 B'_2}(id_F^{-1}) \times M_{B_1 B_2}(u) \times M_{B'_1 B_1}(id_E)$

$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$

Exemple. Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \longmapsto \left(3x+y-z, \frac{9}{2}x+y-\frac{5}{2}z\right)$

On note B_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ B_2 la base canonique de $\mathbb{R}^2$

on sait que

$$A = \mathcal{M}_{B_3\,B_2}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

départ

arrivée

$u(0,0,1) = (-1,-5/2)$

on note $v_1 = (1,0,1)$ $v_2 = (2,0,0)$ $v_3 = (0,1,0)$
$(v_1,v_2,v_3) = B_3'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (à vérifier)
et $w_1 = (1,1)$ $w_2 = (2,3)$ $B_2' = (w_1,w_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car ils ne sont pas colinéaires.

Donner les matrices de u dans B_3' et B_2' et aussi dans B_3 et B_2'

on note $P = P_{B_3 \to B_3'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ est de rang 3 donc inversible donc B_3' est bien une base.

et $Q = P_{B_2 \to B_2'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} w_1 & w_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$

on cherche $A' = \mathcal{M}_{B_3',B_2'}(u)$. On sait $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$

on calcule $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 9/2 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} P$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(v_1) & u(v_2) & u(v_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix} \end{array} = \underline{\mathcal{M}_{B_3'\,B_2'}(u)}$$
$= \mathcal{M}_{(v_1,v_2,v_3)\,(w_1,w_2)}(u)$

$u(v_1) = 2w_1$ $u(v_2) = 3w_2$ $u(v_3) = w_1$

on vérifie $u(1,0,1) = \left(3+0-1, \frac{9}{2}+0-\frac{5}{2}\right) = (2,2) = 2(1,1) = 2w_1$

si on veut $\mathcal{M}_{B_3,B_2'}(u) = A''$ on a la formule

$$A'' = Q^{-1} A I_3$$

I_3 : base de départ la base B_3

$A' = Q^{-1}AP$

Q : matrice de passage dans F espace d'arrivée

P : matrice de passage dans E espace de départ

on trouve

$$A'' = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix} \end{array}$$
B_3, B_2'

On trouve

$$A'' = \mathcal{M}_{B_3 B_2'}(u) = \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & & \\ \left(\begin{matrix} 0 \\ 3/2 \end{matrix}\right. & 1 & 2 & \\ & 0 & -3/2 & \end{array}\right) \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}$$

vérification

$u(e_1) = u(1,0,0) = 0 \times w_1 + 3/2\, w_2 = \frac{3}{2}(2, 3) = (3, \frac{9}{2})$

$u(e_2) = u(0,1,0) = (1,1) = w_1$

Exemple : $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$P \longmapsto (X+1)P - (2X^2+3)P'$

matrice de φ dans les bases canoniques ~~puis~~ dans les bases :

$B_1' = (1, X-2)$ $\quad B_2' = (1, (X-2), (X-2)^2)$

on note $B_1 = (1, X)$ $\quad B_2 = (1, X, X^2)$

$$A = \mathcal{M}_{B_1 B_2}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(1) & \varphi(X) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

car $\varphi(1) = 1 + X$

$\varphi(X) = -3 + X - X^2$

On écrit les matrices de passage :

$$P = P_{B_1 \to B_1'} = \mathcal{M}_{B_1}(B_1') = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & X-2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ X \end{matrix} \qquad Q = P_{B_2 \to B_2'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & X-2 & (X-2)^2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & +4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

on calcule $Q^{-1} = P_{B_2' \to B_2} = \mathcal{M}_{B_2'}(B_2) = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & X & X^2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{matrix}$

par calcul $\quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d'où

$$A' = \mathcal{M}_{B_1' B_2'}(\varphi) = Q^{-1}AP = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(1) & \varphi(X-2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{matrix}$$

Remarque : $A' = P_{B_2' \to B_2}\, \mathcal{M}_{B_1 B_2}(\varphi) \cdot P_{B_1 \to B_1'}$

$\iff A = (Q^{-1})^{-1} A' (P^{-1})$

Remarque $\quad A' = Q^{-1}AP \iff QA' = AP \iff QA'P^{-1} = A$

3.4 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Théorème 3.6. *Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*
Soit u un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathscr{B}$ et de matrice A' dans la base $\mathscr{B}'$.
On a $A' = P^{-1}AP$. soit $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E).\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E)$

$$\boxed{A' = P^{-1} A P}$$ départ

avec

exemple : On étudie $f(x,y) = (x+3y, 4x+2y)$: $f\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
on veut calculer $\ker(f+2id_{\mathbb{R}^2})$ et $\ker(f-5id_{\mathbb{R}^2})$
en déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.
Puis calculer f^n pour n entier.

on utilise la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ car $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$
on note B_0 la base canonique : $f(1,0) = (1,4)$ et $f(0,1) = (3,2)$

$$\boxed{A = M_{B_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}$$

$f+2id_{\mathbb{R}^2}$ a pour matrice $A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ dans B_0

on a $f+2id \neq 0 \Rightarrow rg(f+2id) \geq 1 \Rightarrow \dim(\ker(f+2id)) \leq 1$
car $\dim(\ker(f+2id)) + rg(f+2id) = 2$

$\eta(f+2id)\ \eta(1,-1) = \vec{0}$

on voit que $(1,-1) \in \ker(f+2id)$ car $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \dim(\ker(f+2id)) \geq 1$ car $\ker(f+2id) \supset Vect((1,-1))$
alors $\boxed{\ker(f+2id) = Vect((1,-1))}$

Mat (φ)

De même $f-5id_{\mathbb{R}^2}$ a pour matrice $A - 5I_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$

On a $Im(f-5id_{\mathbb{R}^2}) = Vect((f-5id_{\mathbb{R}^2})(e_1), (f-5id_{\mathbb{R}^2})(e_2))$
(l'image d'une base de l'espace de départ est une famille génératrice de l'image)
$= Vect((-4,4),(3,-3)) = Vect((-1,1))$

donc $\dim(Im(f-5id_{\mathbb{R}^2})) = 1 \Rightarrow \dim(\ker(f-5id_{\mathbb{R}^2})) = 1$

et $(3,4) \in \ker(f-5id_{\mathbb{R}^2})$ donc $\boxed{\ker(f-5id_{\mathbb{R}^2}) = Vect((3,4))}$

Car $\begin{pmatrix}-4&3\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

on note $v_1=(1,-1)\in\ker(f+2id_{\mathbb{R}^2}) \iff (f+2id_{\mathbb{R}^2})(v_1)=\vec{0}$

$\iff f(v_1)+2v_1=\vec{0} \iff f(v_1)=-2v_1$

et pour $v_2=(3,4)\in\ker(f-5id_{\mathbb{R}^2}) \iff f(v_2)=5v_2$

[HP v_1 et v_2 sont des vecteurs propres des de f = colinéaire à leur image]

(v_1,v_2) n'étant pas colinéaires alors ils forment une base $\mathcal{B}_1$

On note $P=P_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}_1}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&4\end{pmatrix}$

La matrice de f dans cette base $\mathcal{B}_1$ est

$$A'=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(f)=\begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) \\ \end{array}\begin{pmatrix}-2&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{array}{c} v_1\\ v_2\end{array}$$

on vérifie avec la formule $A'=P^{-1}AP$

$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4&-3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&4\end{pmatrix}$

On a $A'=P^{-1}AP$

$\iff PA'=AP \iff PA'P^{-1}=A$

Par récurrence, on prouve que $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=P(A')^nP^{-1}$

(ici la récurrence ...)

il se trouve que $(A')^n=\begin{pmatrix}(-2)^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}$ car A' est diagonale

donc $A^n=P\begin{pmatrix}(-2)^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&3\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3\\1&1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}(-2)^n&3.5^n\\-(-2)^n&4.5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4(-2)^n+3.5^n&-3(-2)^n+3.5^n\\-4(-2)^n+4.5^n&3(-2)^n+4.5^n\end{pmatrix}$

A' est diagonale et inversible car de rang maximal et $(A')^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

Comme $A=PA'P^{-1}$, A est inversible

et $A^{-1}=(PA'P^{-1})^{-1}=P.A'^{-1}.P^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2&3\\4&-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

donc f est bijective : f est un automorphisme (Th 2.3)

et $f^{-1}(a,b)=\frac{1}{10}(-2a+3b,\ 4a-b)$

$(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

4 Rang d'une matrice

4.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 4.1. Soit A matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A, l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A.

Exemple Soit
$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) & f(e_5) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \end{array} \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{R})$$

est canoniquement associée à

$$f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z,t,u) \longmapsto (2x+y+3z+4t+7u,\ x-z+2t+5u)$$

$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ base de l'espace de DÉPART

f est l'application définie par

$f((1,0,0,0,0)) = (2,1)$ $f(0,1,0,0,0) = (1,0)$

$f((0,0,1,0,0)) = (3,-1)$ ....

4.2 Image et noyau d'une matrice

Définition 4.2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle noyau et image de A notés $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ les noyaux et images de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 4.1. *Le noyau d'une matrice A est l'ensemble des solutions du système $AX = 0$.*
L'image d'une matrice A est l'ensemble des seconds membres B pour lesquels le système $AX = B$ a au moins une solution.

il s'agit bien du noyau et de l'image de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

A est canoniquement associée à $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

et $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$

(les colonnes d'une matrice sont une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$)

$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$ car $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$

et ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires donc on a une base de $\operatorname{Im} A$. $\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f) = 2$

alors

$\dim(\operatorname{Ker} A) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\operatorname{Im} A) = 2$

$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ et $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc

$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right) \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ ABUS de notation

$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\big((0,1,-1,1), (-1,2,0,1)\big) \subset \mathbb{R}^4$

4.3 Rang d'une matrice

Théorème 4.2. *Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est le nombre de pivots de sa matrice échelonnée réduite par lignes est égal au rang de l'application linéaire associée à A.*

On a $\quad \operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A.$

Corollaire 4.3. *Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal au rang des vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$.*

Corollaire 4.4. *Étant donnée une base $\mathscr{B}$ d'un espace vectoriel E, le rang d'une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de E est égal au rang de la matrice des vecteurs dans la base $\mathscr{B}$: $\operatorname{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \operatorname{rg} \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$*

Corollaire 4.5. *Le rang d'une application linéaire u de E dans F est le rang de la matrice de u dans n'importe quelles bases de E et F.*

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{rg}(A)$

on échelonne A pour calculer le nombre de pivots

ou on détermine $\dim(\operatorname{Im} A)$

E^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_1 - 2L_3 \\ L_2 - 3L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -5 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

I_3

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5/3 & 1/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice échelonnée réduite associée à A

et $E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $\quad R = EA$

et E est inversible car produit de matrices d'opération élémentaires $\quad R = (E^{-1})^{-1} A I_3 \leftarrow$ formule de chgt de base

donc R et A sont les matrices de la même application linéaire donc elles ont le même rang $\operatorname{rg}(A) = 3$

<u>Autre méthode pour calculer le rang de A :</u>

$$rg(A) = \dim\big(\mathrm{Im}(A)\big) = \dim(\text{espace de départ}) - \dim(\ker A)$$

$$\text{espace de départ} = \mathbb{R}^{\text{nb de colonnes}}$$

départ

$$A = \begin{array}{cccc} f(1,0,0,0) & f(0,1,0,0) & f(0,0,1,0) & f(0,0,0,1) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

4.4 Rang et matrice inversible

Théorème 4.6. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est de rang maximal si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de* $\mathbb{K}^n$

Théorème 4.7. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *sont des matrices inversibles et si* $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est une matrice, alors* $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(MB)$ *: on ne change pas le rang quand on multiplie par une matrice inversible.*

Théorème 4.8. *Deux matrices équivalentes par lignes ont le même rang.*

4.5 Rang de la transposée

Proposition 4.9. *Le rang d'une matrice est égal : au rang de ses vecteurs colonnes et au rang de ses vecteurs lignes et au rang de sa transposée.*

Théorème 4.10. *Deux matrices équivalentes par colonnes ont le même rang.*

Prop 4.2 Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $rg(M) = rg({}^tM)$

GÉOMÉTRIE

5 Exemples de transformations vectorielles du plan euclidien

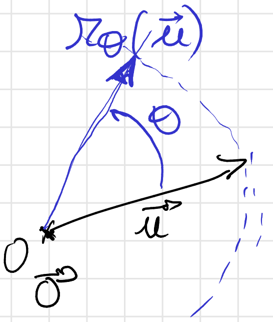
Espace euclidien = espace vectoriel avec un produit scalaire

5.1 Rotations vectorielles

Définition 5.1. Dans le plan euclidien, on appelle rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, l'application r_θ telle que pour tout vecteur $\vec{u}$ on ait $(\vec{u}, r_\theta(\vec{u})) = \theta\ [2\pi]$ et $||\vec{u}|| = ||r_\theta(\vec{u})||$.

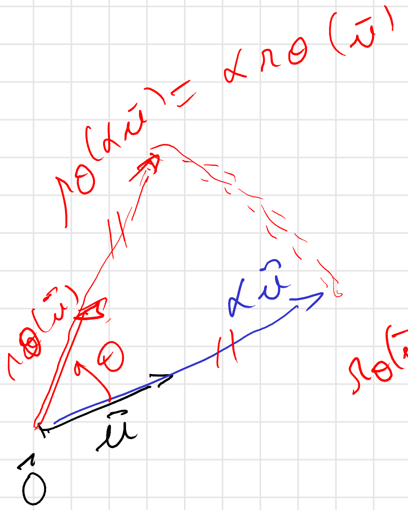
Proposition 5.1. *Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien, alors f conserve le produit scalaire si et seulement si f conserve la norme.*

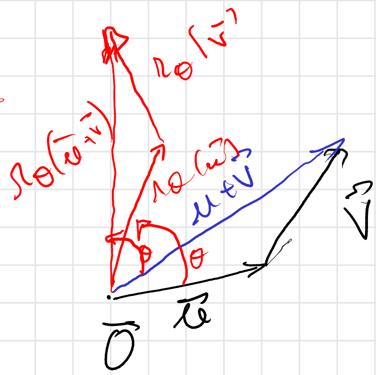
Alors f est un automorphisme. On dit que f est un automorphisme orthogonal.



on tourne autour du vecteur nul. (= l'origine)

Théorème 5.1 bis : Une rotation vectorielle est linéaire : c'est un endomorphisme du plan





$r_\theta(\vec u+\vec v) = r_\theta(\vec u) + r_\theta(\vec v)$

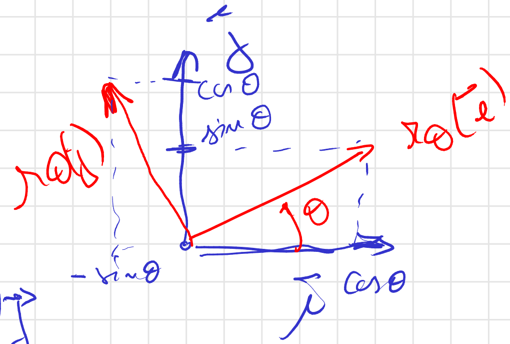
et également

$r_\theta(\alpha\vec u) = \alpha r_\theta(\vec u)$

5.2 Matrice d'une rotation dans une BOND

Théorème 5.2. *La matrice de r_θ dans une BOND est* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une BOND



On a
$r_\theta(\vec{i}) = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$
$r_\theta(\vec{j}) = -\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}$

alors

$$\boxed{M_{(\vec i, \vec j)}(r_\theta) = \begin{array}{cc} r_\theta(\vec i) & r_\theta(\vec j) \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \end{array} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec i \\ \vec j \end{array} = R_\theta}$$

On a en notant $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$
$r_\theta(\vec{u}) = (\cos\theta\, x - \sin\theta\, y)\,\vec{i} + (\sin\theta\, x + \cos\theta\, y)\,\vec{j}$

⚠ si la base n'est pas orthonormée, on ne sait rien de la matrice de r_θ

⚠ si un endomorphisme φ a pour matrice R_θ dans une base $\mathcal{B}$,
si $\mathcal{B}$ est BOND, φ est une rotation
sinon φ est n'importe quoi

$\begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix}$

Exemple : Soit r l'application de matrice $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Reconnaître r.

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ $((1,0),(0,1)) = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est BOND : $\|\vec{e_1}\| = \|(1,0)\| = 1 = \|\vec{e_2}\|$ et $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$
donc $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$.

On a $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

donc r est une rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{4}$ (autour de $\vec{0}$)

5.3 Composée de deux rotations

Proposition 5.3. *La composée des rotations r_θ et r_φ donne la rotation $r_{\theta+\varphi}$*

$$r_\theta \circ r_\varphi = r_\varphi \circ r_\theta = r_{\theta+\varphi}$$

Corollaire 5.4. *Matriciellement,* $R_\theta \times R_\varphi = R_\varphi \times R_\theta = R_{\theta+\varphi}$

Théorème 5.5. *Une rotation r_θ est un automorphisme du plan et $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.* car $r_\theta \circ r_{-\theta} = r_0 = id_{\mathbb{R}^2}$

$$R_\theta \cdot R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

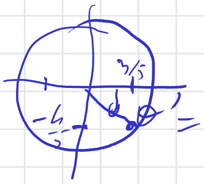
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = R_{\theta+\varphi}$$

Exemple $R = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice dans une BOND de la rotation d'angle θ avec $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 3/5 \\ \sin\theta = 4/5 \end{cases}$

et $R' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ a pour angle $\theta' = -\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{5}\right)$

$\cos\theta' = 3/5$ et $\sin\theta' = -4/5$



$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation (dans une BOND) si $a^2 + b^2 = 1$

5.4 Symétrie orthogonale vectorielle

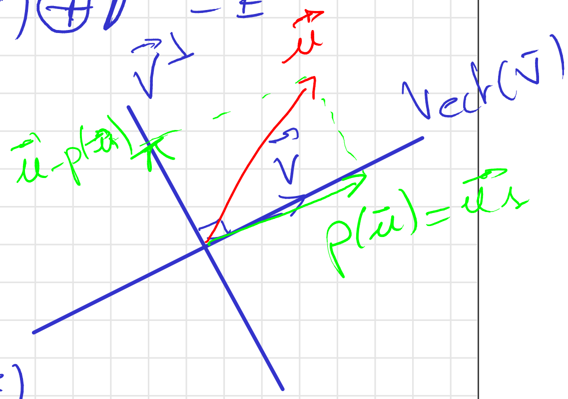
Proposition 5.6. *Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du plan euclidien. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$ est un sous-espace vectoriel du plan noté $\vec{v}^{\perp}$.*
De plus, $\mathrm{Vect}\,\vec{v}$ *et* $\vec{v}^{\perp}$ *sont supplémentaires dans le plan.*

Soit $\vec{v} \neq \vec{0}$ non nul alors $F = \{\vec{u}$ tels que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0\}$ $= \vec{v}^{\perp}$ = orthogonal de $\vec{v}$

$\vec{v}^{\perp} = F$ est un sev dans

avec E espace euclid.

$\mathrm{Vect}(\vec{v}) \oplus \vec{v}^{\perp} = E$



Preuve : Soit $\vec{u} \in E$,

et E est euclidien.

on calcule

$$\vec{u}_1 = p(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{v})$$

on pose $\vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1$ et on calcule

$$\vec{u}_2\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}_1\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

donc $\vec{u}_2 \perp \vec{v}$ c'est à dire $\vec{u}_2 \in F = \vec{v}^{\perp}$

Alors $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{u}_1 \in \mathrm{Vect}(\vec{v})$ et $\vec{u}_2 \in F = \vec{v}^{\perp}$

on a prouvé $\boxed{E \subseteq \mathrm{Vect}(\vec{v}) + \vec{v}^{\perp}}$

et si $\vec{u} \in \mathrm{Vect}(\vec{v}) \cap \vec{v}^{\perp}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ et $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ donc $\mathrm{Vect}(\vec{v}) \cap \vec{v}^{\perp} = \{\vec{0}\}$

ce qui prouve que $\boxed{E = \mathrm{Vect}(\vec{v}) \oplus \vec{v}^{\perp}}$

(à comparer avec le chapitre 15)

Définition 5.2. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du plan euclidien. On appelle symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{v}$, la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\,\vec{v}$ parallèlement à $\vec{v}^{\perp}$.
C'est à dire que $s_{\vec{v}}$ est définie par $s_{\vec{v}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ où $\vec{u}_1 \in \mathrm{Vect}\,\vec{v}$ et $\vec{u}_2 \in \vec{v}^{\perp}$ avec $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Théorème 5.7. *Pour $\vec{v} \neq 0$, l'application $s_{\vec{v}}$ est un automorphisme du plan vectoriel.*
$s_{\vec{v}}$ conserve le produit scalaire, la norme, change l'orientation des angles et vérifie $s_{\vec{v}} \circ s_{\vec{v}} = id_P$.

chap 15

Remarque $s_{\vec v}$ est une symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec v) = \ker(s_{\vec v} - id)$ parallèlement à $\vec v^{\perp} = \ker(s_{\vec v} + id)$

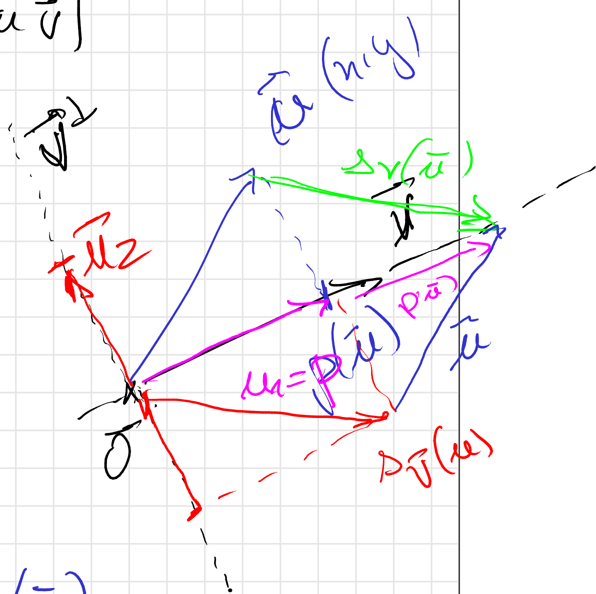
Exemple : matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\vec v = (1,2)$ dans la base canonique
(par rapport à la droite dirigée par $\vec v$)

On prend $\vec u \in \mathbb{R}^2$
on décompose $\vec u$ en $\vec u = \vec u_1 + \vec u_2$
avec $\vec u_1 \in \mathrm{Vect}(\vec v)$ et $\vec u_2 \perp \vec v$
alors

$$s_v(\vec u) = \vec u_1 - \vec u_2 = \vec u_1 - (\vec u - \vec u_1) = 2\vec u_1 - \vec u$$

$$s_v(\vec u) = 2p(\vec u) - id(\vec u)$$

$$\boxed{s_v = 2p_v - id}$$



Or $\vec u_1 = \dfrac{\vec u \cdot \vec v}{\|\vec v\|^2}\,\vec v = \dfrac{x+2y}{5}(1,2)$

alors

$$s_v(x,y) = 2\,\frac{(x+2y)}{5}(1,2) - (x,y)$$

$$s_v(x,y) = \left(-\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5},\ \frac{4x}{5} + \frac{3y}{5}\right)$$

de matrice

$$\boxed{S_v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

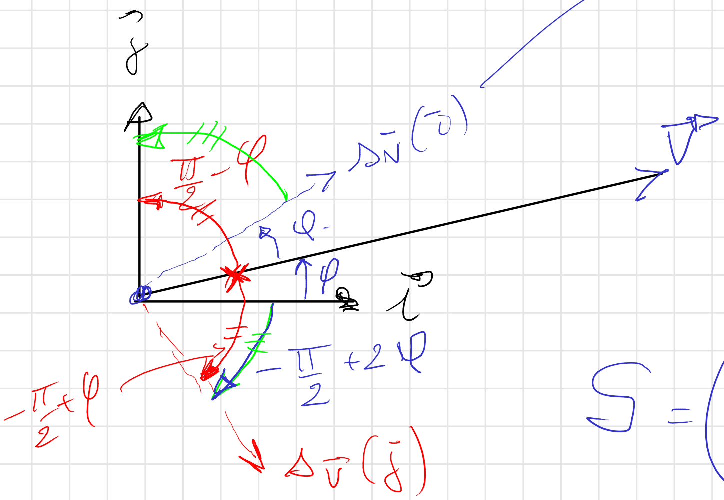
5.5 Matrice d'une symétrie orthogonale dans une BOND

Théorème 5.8. *Soit P le plan euclidien muni d'une BOND $(\vec{i},\vec{j})$.*

Si $\vec{v}$ fait un angle $(\vec{i},\vec{v}) = \varphi$ avec le vecteur $\vec{i}$, alors $s_{\vec{v}}$ a pour matrice $S_{2\varphi} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$.

$s_{\vec v}(\vec{j}) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\varphi\right)\vec{i} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\varphi\right)\vec{j} = \sin(2\varphi)\vec{i} - \cos(2\varphi)\vec{j}$

$s_{\vec v}(\vec{i}) = \cos(2\varphi)\vec{i} + \sin(2\varphi)\vec{j}$



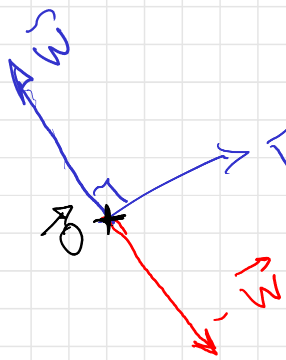
$$S = \begin{array}{cc} \begin{matrix} s_{\vec v}(\vec i) & s_{\vec v}(\vec j) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec i \\ \vec j \end{matrix} \end{array}$$

Théorème : La symétrie orthogonale $s_{\vec v}$ par rapport à $\vec v \in \mathbb{R}^2$ a pour matrice dans la base $(\vec v, \vec w)$ avec $\vec w \perp \vec v$ et $\vec w$ non nul est

$$S = \begin{array}{cc} \begin{matrix} s_{\vec v}(\vec v) & s_{\vec v}(\vec w) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec v \\ \vec w \end{matrix} \end{array}$$

$s_{\vec v}(\vec v) = \vec v$

$s_{\vec v}(\vec w) = -\vec w$



Exemple étudions l'application s de matrice $S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

s est linéaire et on calcule $s \circ s$

$S.S = S^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = I_2$ donc $s \circ s = id_{\mathbb{R}^2}$

donc s est une symétrie par rapport à $Ker(s - id_{\mathbb{R}^2})$ (vecteurs invariants) parallèlement à $Ker(s + id)$ (vecteurs solutions de $s(\vec{u}) = -\vec{u}$)

$\vec{v} \in Ker(s - id) \iff s(\vec{v}) = \vec{v}$ On note $\vec{v} = (x, y)$ dans la base canonique $\iff S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} \frac{1}{5}(-4x + 3y) = x \\ \frac{1}{5}(3x + 4y) = y \end{cases} \iff \begin{cases} -9x + 3y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

$\iff 3x - y = 0$ c'est une droite $\boxed{Vect((1,3)) = Ker(s - id)}$

De même, on pose $\vec{u} = (x, y)$ et on résout $s(\vec{u}) = -\vec{u}$

$\iff \begin{cases} -4x + 3y = -5x \\ 3x + 4y = -5y \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x + 9y = 0 \end{cases}$

$\iff x + 3y = 0$ donc $\boxed{Ker(s + id) = Vect((-3, 1))}$

Les 2 droites sont orthogonales alors s est une symétrie orthogonale par rapport à $Vect((1,3))$ car $(1,3) \perp (-3,1)$

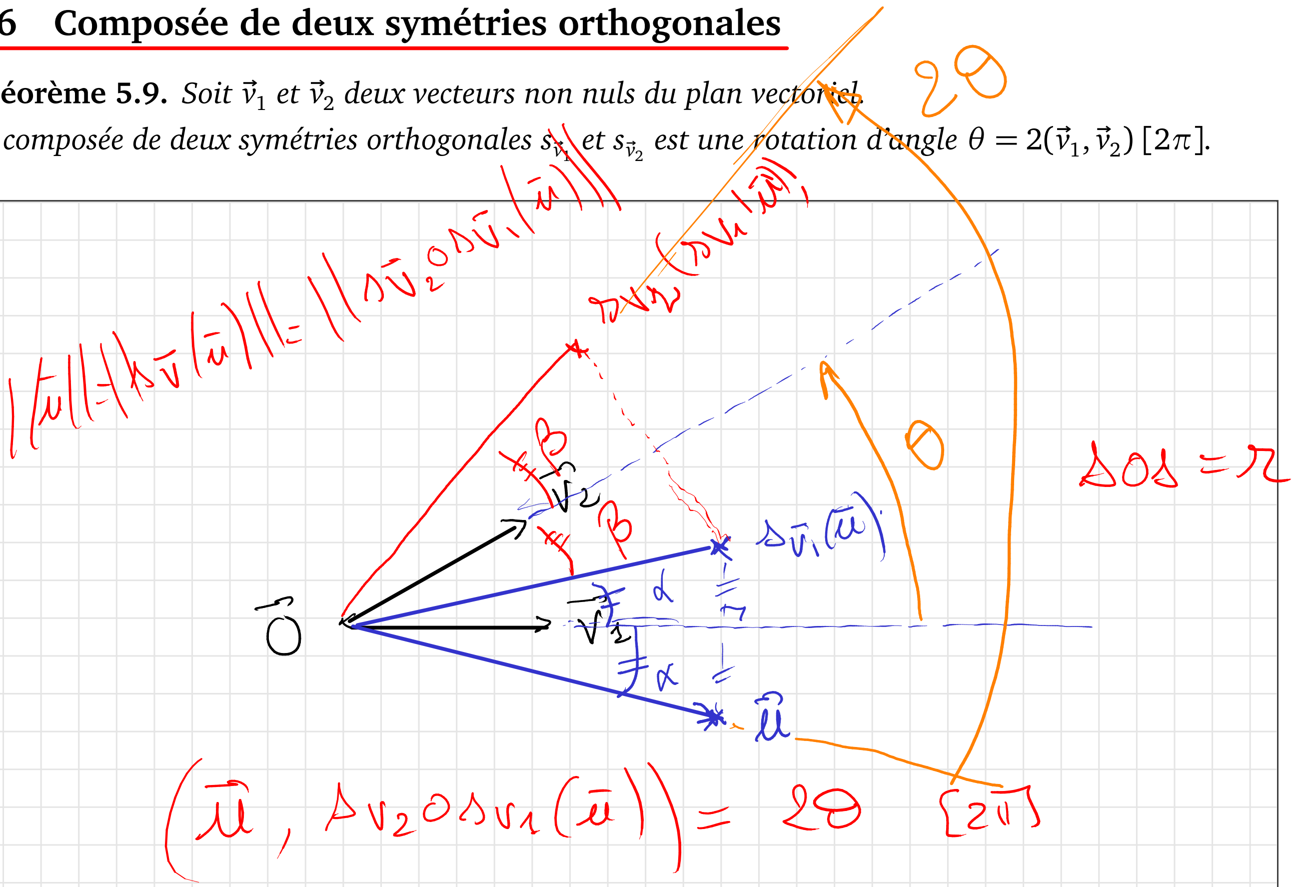
Changeons de base posons $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$ et $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)$

$(\vec{a}, \vec{b})$ est une BOND

et $P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}SP = \begin{array}{cc} s(\vec{a}) & s(\vec{b}) \\ \end{array}$ $\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{b} \end{array}$

5.6 Composée de deux symétries orthogonales

Théorème 5.9. *Soit $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls du plan vectoriel.*
La composée de deux symétries orthogonales $s_{\vec{v}_1}$ et $s_{\vec{v}_2}$ est une rotation d'angle $\theta = 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\ [2\pi]$.



Vu en 2-ème

Grand Secret n°237. (en dimension finie)

si P est une matrice de passage d'une base ON~~D~~ à une base ON~~D~~, alors

$$P^{-1} = {}^tP \iff {}^tPP = I_n$$

si $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$ $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)$ dans la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, alors $\vec{a} \perp \vec{b}$ et $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$

donc $(\vec{a}, \vec{b})$ est une BON. $P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

si on calcule

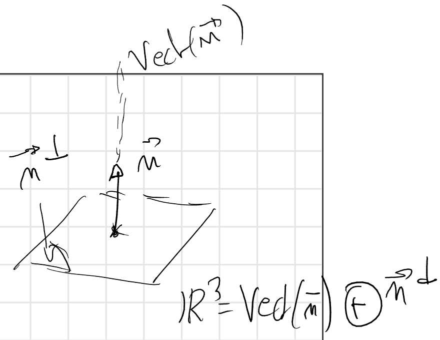
$${}^tPP = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{array}{c} \\ \vec{a} \\ \vec{b} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \vec{a} & \vec{b} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \end{array} = \begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Exemples de transformations vectorielles de l'espace euclidien

6.1 Rotation vectorielle de l'espace

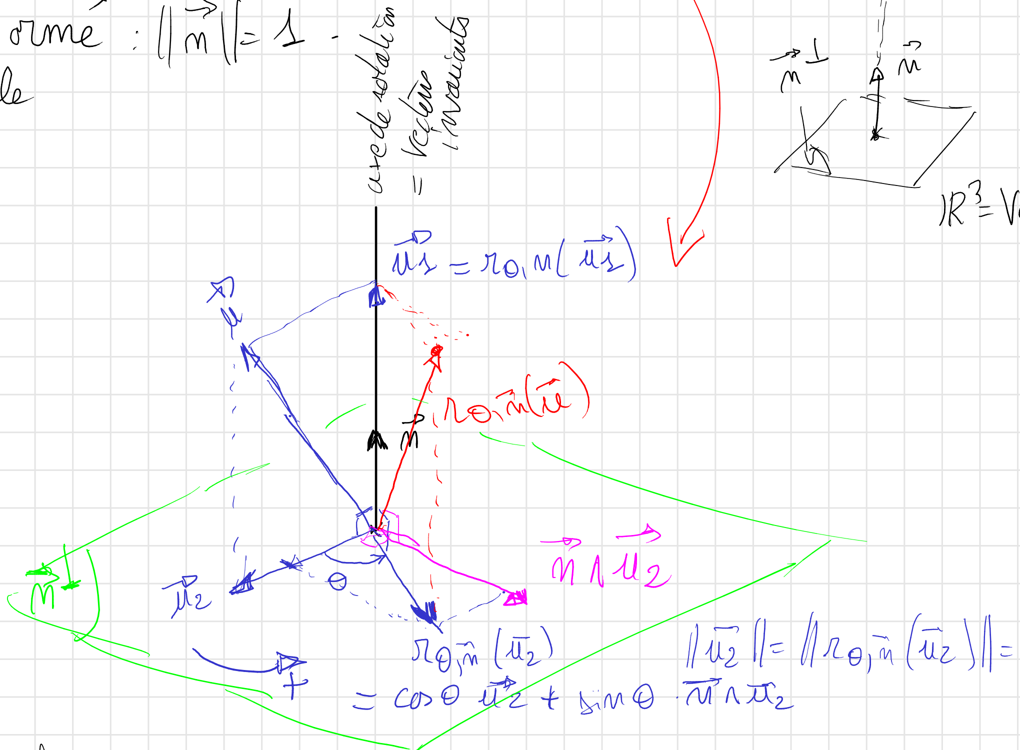
Définition 6.1. Soit $\vec{n}$ un vecteur normé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$: $||\vec{n}|| = 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique en $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in \operatorname{Vect} \vec{n}$ et $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$.
On appelle rotation vectorielle d'axe dirigé par $\vec{n}$ et d'angle θ, l'application $r_{\theta,\vec{n}}$ définie par

$$r_{\theta,\vec{n}}(\vec{u}) = \vec{u}_1 + \cos\theta\,\vec{u}_2 + \sin\theta\,\vec{n} \wedge \vec{u}_2.$$



⚠ $\vec n$ est normé : $\|\vec n\| = 1$.

isométrie vectorielle



$r_{\theta,\vec n}$ est linéaire : $r_{\theta,\vec n}(\vec u) = r_{\theta,\vec n}(\vec u_1) + r_{\theta,n}(\vec u_2)$

Remarque : les vecteurs invariants $\operatorname{Ker}(r_{\theta,\vec n} - id)$ sont l'axe de rotation $\operatorname{Vect}(\vec n)$

Proposition 6.1. *Une rotation vectorielle est linéaire, bijective, conserve la norme, le produit scalaire et les angles.*

on a $(r_{\theta,\vec n})^{-1} = r_{-\theta,\vec n}$

$\forall \vec v \in \mathbb{R}^3$, $\|r_{\theta,\vec n}(\vec v)\| = \|\vec v\|$ isométrie vectorielle

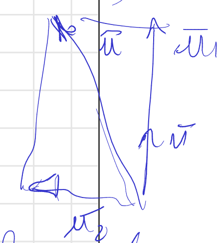
(l'axe de rotation passe par l'origine)

Exemple : Écrire la matrice d'~~une~~ ~~rotat~~ de la rotation d'angle $+\frac{\pi}{4}$ autour de $(1,1,0)$

soit $\vec u = (x,y,z)$, on le projette sur l'axe dirigé par $\vec n = \frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)$

(attention $\vec n$ est normé)

$\vec{u_1} = \frac{(\vec u\cdot\vec n)\vec n}{\|\vec n\|^2} = \frac12(x+y)(1,1,0)$ puis $\vec{u_2} = \vec u - \vec{u_1}$



on a $\vec{u_2}\perp\vec n$.

on calcule $\vec n\wedge\vec{u_2} = \vec n\wedge(\vec u - \vec{u_1}) = \vec n\wedge\vec u - \vec 0$ par linéarité

et $\vec n\wedge\vec{u_1} = \vec 0$ car ils sont colinéaires $\quad \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}z\\-z\\y-x\end{pmatrix}$

$\vec n\wedge\vec{u_2} = \frac{1}{\sqrt2}(z,-z,y-x)$

alors

$$r_{\frac\pi4}(\vec u) = \vec{u_1} + \cos(\theta)\,\vec{u_2} + \sin\theta\,\vec n\wedge\vec{u_2}$$

$$M_{B}(r_\theta(\vec u)) = \begin{pmatrix}\frac{x+y}{2}\\\frac{x+y}{2}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\theta\, x - \cos\theta\left(\frac{x+y}{2}\right)\\ \cos\theta\, y - \cos\theta\left(\frac{x+y}{2}\right)\\ \cos\theta\, z - 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{\sin\theta}{\sqrt2}z\\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt2}z\\ \frac{\sin\theta}{\sqrt2}(y-x)\end{pmatrix}$$

pour $\theta=\frac\pi4$ $\cos\theta = \frac{\sqrt2}{2} = \sin\theta$

$$= \begin{pmatrix}\left(\frac12+\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{4}\right)x + \left(\frac12-\frac{\sqrt2}{4}\right)y + \frac12 z\\ \left(\frac12-\frac{\sqrt2}{4}\right)x + \left(\frac12+\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{4}\right)y - \frac12 z\\ -\frac12 x + \frac12 y + \frac{\sqrt2}{2}z\end{pmatrix}$$

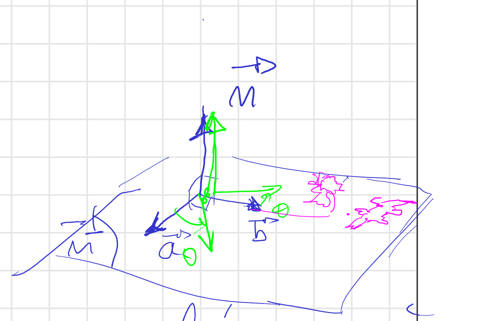
matrice de $r_{\frac\pi4,(1,1,0)}$

d'où la matrice dans la base canonique :

$$\boxed{R = \begin{pmatrix}\frac12+\frac{\sqrt2}{4} & \frac12-\frac{\sqrt2}{4} & \frac12\\ \frac12-\frac{\sqrt2}{4} & \frac12+\frac{\sqrt2}{4} & -\frac12\\ -1/2 & 1/2 & \sqrt2/2\end{pmatrix}}$$

Cherchons une base dans laquelle la matrice est plus simple.

$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ $\quad \|\vec n\| = 1$



$\vec{a} = (0,0,1)$ $\quad \|\vec a\| = 1$

$\vec{b} = \vec n \wedge \vec a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$

$B_0 = (\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3)$ base canonique BOND

$B_1 = (\vec n, \vec a, \vec b)$ est une BOND

Dans cette base B_1, la matrice de $r_{\theta,\vec n}$ est

$$R' = R_\theta = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} r_{\theta,\vec n}(\vec n) & r_{\theta,\vec n}(\vec a) & r_{\theta,\vec n}(\vec b) \end{array}$$
$$R' = R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{array}{c} \vec n \\ \vec a \\ \vec b \end{array}$$

car $r_{\theta,\vec n}(\vec n) = \vec n$

$r_{\theta,\vec n}(\vec a) = \cos\theta\,\vec a + \sin\theta\,\vec b$

$r_{\theta,\vec n}(\vec b) = -\sin\theta\,\vec a + \cos\theta\,\vec b$

Avec la formule de changement de base on retrouve la matrice R précédente $(M_{B_0}(r_{\theta,\vec n}))$: $\quad R' = P^{-1} R P \iff R = P R' P^{-1}$

avec

$$P_{B_0 \to B_1} = P = \begin{array}{ccc} n & a & b \end{array}$$
$$P_{B_0 \to B_1} = P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & 0 & 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 & 0 & -1/\sqrt2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt2 & 0 \end{pmatrix}$$

P est la matrice de passage d'une BOND à une BOND donc

$${}^tPP = I_3 \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt2/2 & -\sqrt2/2 \\ 0 & \sqrt2/2 & \sqrt2/2 \end{pmatrix}$$

d'où le calcul de R

$$\begin{pmatrix} \frac14\sqrt2 + \frac12 & -\frac14\sqrt2 + \frac12 & \frac12 \\ -\frac14\sqrt2 + \frac12 & \frac14\sqrt2 + \frac12 & -\frac12 \\ -\frac12 & \frac12 & \frac12\sqrt2 \end{pmatrix}$$

6.2 Matrice d'une rotation dans une BOND adaptée

Théorème 6.2. *Soit $\vec{n}$ un vecteur normé, $\vec{i} \perp \vec{n}$ avec $||\vec{i}|| = 1$, un vecteur normé orthogonal à $\vec{n}$. Alors $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$ est une BOND de l'espace.*
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice de la rotation d'angle θ autour de $\vec{n}$, dans la base $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$, est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exemple : On donne $R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = M_{B_0}(r)$ $B_0(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Montrer que l'application r canoniquement associée à R est une rotation.

on cherche une base $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$ OND dans laquelle la matrice R' de r est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

on sait calculer l'image d'un vecteur (x, y, z) avec $R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_{B_0}(r(x,y,z))$

on cherche les vecteurs invariants de r :
(si r est une rotation, alors on doit trouver une droite)

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(r - id) \iff (R - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (r - id)(x,y,z) = (0,0,0)$

$\iff r(x,y,z) = (x,y,z)$ $\iff (3R - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 2x + 2y + z - 3x = 0 \\ -2x + y + 2z - 3y = 0 \\ x - 2y + 2z - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ \cancel{x - 2y - z = 0} \end{cases}$

$\underset{\substack{-L_1 \\ -\frac{1}{2}L_2}}{\iff} \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \underset{L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$

$\iff$ $\underline{(x,y,z) \in \mathrm{Vect}((1,0,1))}$ on a une droite de vecteurs invariants. C'est l'axe. On pose $\underline{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)}$

on choisit un vecteur $\vec{a}$ normé $\perp$ à $\vec{n}$

$\vec{a} = (0,1,0)$

$\vec{n} \wedge \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ on écrit la matrice de passage

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{\underbrace{BO}_{\text{BOND}} \to \underbrace{(\vec{n}, \vec{a}, \vec{n}\wedge\vec{a})}_{\text{BOND}}}$$

on calcule son inverse P^{-1}

on remarque que ${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

donc $P^{-1} = {}^tP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et on calcule $R' = P^{-1}RP = {}^tPRP$

on trouve

$$R' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} r(\vec{n}) & r(\vec{a}) & r(\vec{b}) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{n} \\ \vec{a} \\ \vec{b} \end{array} \end{array}$$

R' est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\cos\theta = 1/3$, $\sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

car $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$

Alors r est une rotation d'angle $\theta = -\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) = \mathrm{Arcsin}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \mathrm{Arctan}(-2\sqrt{2})$ autour du vecteur $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$

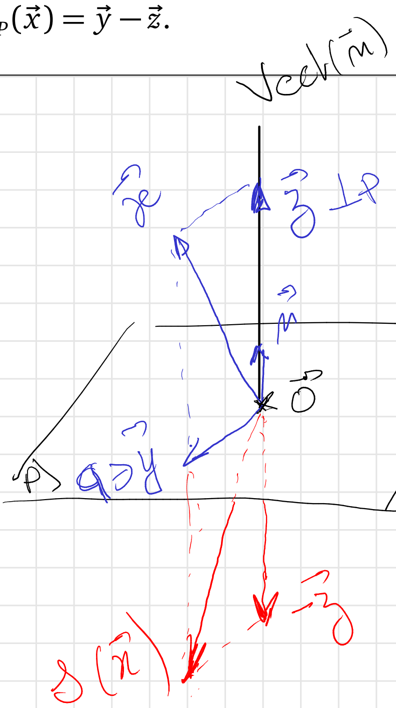
Le calcul matriciel revient à calculer $r(\vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{b}$ et $r(\vec{b}) = 2\sqrt{2}/3\,\vec{a} + 1/3\,\vec{b}$ ce qui permet de calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et ce qui justifie que c'est une rotation.

<u>Remarque</u> une symétrie orthogonale par rapport à une droite dans l'espace est une rotation d'angle π on appelle cela un demi-tour.

6.3 Réflexion = symétrie orthogonale par rapport au plan

Définition 6.2. On appelle réflexion par rapport au plan P, la symétrie par rapport au plan P parallèlement à la droite vectorielle D orthogonale à P.

C'est à dire l'application s_P telle que pour un vecteur $\vec{x}$ qui se décompose en $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in P$ et $\vec{z} \perp P$, on a $s_P(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$.



$\vec{n}^{\perp} = P$ $\quad P^{\perp} = \text{Vect}(\vec n)$

On a $P \oplus \text{Vect}(\vec n) = \mathbb{R}^3$

$(\dim P + \dim \text{Vect}(\vec n) = 3$ et $P \cap \text{Vect}(\vec n) = \{\vec 0\})$

symétrie par rapport au plan P parallèlement à la droite $\text{Vect}(\vec n)$ orthogonale à P

On a pour $x = \vec y + \vec z$

$s(\vec x) = \vec y - \vec z = \vec y - (x - \vec y)$ $\quad s(\vec x) = 2\vec y - \vec x$

$s(\vec x) = 2p(\vec x) - id(\vec x)$ $\quad s = 2p - id$

avec p projection orthogonale sur P.

Exemple : Matrice de la réflexion par rapport à $P : 2x - y + 2z = 0$ dans la base canonique.

On trouve $\vec n = \frac{1}{3}(2,-1,2)$ orthogonal à P et normé

Soit $\vec x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on calcule son projeté orthogonal $\vec z$ sur $\vec n$

$\vec z = (\vec x \cdot \vec n) \cdot \vec n = \frac{2a-b+2c}{9}(2,-1,2)$

on pose $\vec y = \vec x - \vec z \in P$ et le symétrique de $\vec x$ est

$s(\vec x) = \vec y - \vec z = \vec x - \vec z - \vec z = \vec x - 2\vec z$

$s(a,b,c) = (a,b,c) - \frac{4a-2b+4c}{9}(2,-1,2)$

Matriciellement :

$$S\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8a}{9} - \frac{4b}{9} + \frac{8c}{9} \\ -\frac{4a}{9} + \frac{2b}{9} - \frac{4c}{9} \\ \frac{8a}{9} - \frac{4b}{9} + \frac{8c}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}a + \frac{4}{9}b - \frac{8}{9}c \\ +\frac{4}{9}a + \frac{7}{9}b + \frac{4}{9}c \\ -\frac{8}{9}a + \frac{4}{9}b + \frac{1}{9}c \end{pmatrix}$$

d'où

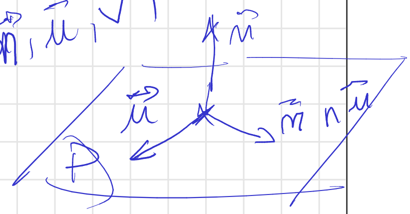
$$S = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = M_{B_0}(s)$$

base canonique

Cherchons une base B_1 dans laquelle la matrice de s est plus simple :

$$M_{B_1}(s) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s(\vec{n}) & s(\vec{u}) & s(\vec{n}\wedge\vec{u}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{n} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{array}$$

$B_1 = (\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$



$\vec{n} \perp P$ donc $s(\vec{n}) = -\vec{n}$ $\qquad$ $\vec{u} \in P$ donc $s(\vec{u}) = \vec{u}$

$\vec{n}\wedge\vec{u} \in P$ donc $s(\vec{n}\wedge\vec{u}) = \vec{n}\wedge\vec{u}$

ici, on choisit $\vec{n} = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$

$\vec{n}\wedge\vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, -4, -1)$

on pose $P = P_{B_0 \to B_1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -1/3 & 0 & -4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

on ${}^tP = P^{-1}$ et

$$S' = P^{-1} S P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car bases OND

6.4 Matrice d'une réflexion dans une BOND adaptée

à l'ad d'exposition en supplémentaire

Théorème 6.3. *Soit P un plan vectoriel et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ une base de P. On note $\vec{n}$ un vecteur normé normal à P : $\vec{n} = \dfrac{1}{||\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2||}.\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.*

Soit $\vec{v}_1 = \dfrac{1}{||\vec{u}_1||}.\vec{u}_1$, la famille $(\vec{n}, \vec{v}_1, \vec{n} \wedge \vec{v}_1)$ est une BOND de l'espace et la matrice de s_P dans cette base est

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Remarque</u> : la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique est la matrice d'un demi-tour (rotation d'angle π) autour de Oz

Exemple : Reconnaître l'application canoniquement associée à

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

On note f l'application linéaire canoniquement associée à M
on calcule

$$M^2 = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

les matrices dans la base canonique de $f \circ f$ et id sont égales alors $f \circ f = id$

Alors f est une symétrie par rapport à $Ker(f - id)$ parallèlement $Ker(f + id)$.

On résout $(f - id)(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$\iff \begin{cases} -9x + 6y - 3z = 0 \\ 6x - 4y + 2z = 0 \\ -3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \iff -3x + 2y - z = 0$$

Les vecteurs invariants forment un plan d'équation $-3x+2y-z=0$ soit $\mathrm{Ker}(f-id) = \mathrm{Vect}((0,1,2),(-1,0,3))$.

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f+id) \iff \begin{cases} 5x+6y-3z=0 \\ 6x+10y+2z=0 \\ -3x+2y+13z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 14x \quad -42z=0 \\ 21x \quad -63z=0 \\ -3x+2y+13z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3z \\ y=-2z \end{cases}$

alors $\mathrm{Ker}(f+id) = \mathrm{Vect}((3,-2,1))$

On a $\mathrm{Ker}(f+id) \perp \mathrm{Ker}(f-id)$

Donc f est la symétrie orthogonale par rapport au plan $-3x+2y-z=0$ c'est une réflexion

Remarque : Si f est un endomorphisme de E avec E de dimension finie, et $A = M_B(f)$, $A' = M_{B'}(f)$ et $P = P_{B \to B'}$

On a $A' = P^{-1}AP$. Et la matrice de f^n dans B est A^n et la matrice de f^n dans B' est A'^n

alors par la formule de changement de base : $\boxed{A'^n = P^{-1}A^nP}$

$A' = P^{-1}AP \iff A = PA'P^{-1}$

et $A^n = PA'^nP^{-1}$