TD 18 - Séries numériques

Exercice 1 : Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ suivantes

a) $u_n = \tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$ b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^2}$ c) $u_n = \dfrac{\sin n}{n^3}$ d) $u_n = \dfrac{n^n}{2^n}$

Exercice 2 : Déterminer la nature des séries $\sum a_n$ suivantes :

a) $a_n = \ln\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$ b) $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,dt$ c) $a_n = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)\right)$

d) $a_n = \dfrac{2^n+n}{\ln n + 3^n}$, e) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, f) $a_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$,

Exercice 3 : Montrer que $\sum e^{-\sqrt{n}}$ est convergente. *On pourra étudier* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 4 : Déterminer la nature des séries $\sum a_n$ suivantes et en cas de convergence, calculer leur somme :

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, b) $a_n = \displaystyle\int_0^1 (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx$, c) $a_n = \dfrac{\cos n}{2^n}$,

d) $a_n = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}$. e) $a_n = \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$. f) $a_n = \dfrac{2}{n(n^2-1)}$.

Exercice 5 : Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow I$ une fonction telle que

$$\forall x, y \in I, \qquad |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y| \text{ avec } 0 < k < 1.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est continue sur I et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ est convergente. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 6 : Soit $\alpha > 0$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \alpha$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-\frac{1}{u_n}}$.

1. Étudier la suite (u_n).
2. Comparer la série $\sum u_n$ à une série géométrique et en déduire sa nature.

Exercice 7 : On pose $u_0 = v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$.

1. Déterminer un équivalent de (v_n) et en déduire la nature de $\sum v_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 8 : On considère la suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $\quad a_n = n!\dfrac{e^n}{n^n\sqrt{n}}$.

1. Déterminer un équivalent de $b_n = \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. En déduire la nature de $\sum b_n$.
2. En déduire que a_n admet une limite finie L quand n tend vers $+\infty$. On admet que $L = \sqrt{2\pi}$.
3. En déduire un équivalent de $n!$.
4. Déterminer alors un équivalent de $\dbinom{2n}{n}$.

Exercice 9 : Utiliser une comparaison série-intégrale pour étudier $\sum \dfrac{1}{k\ln(k)}$ et $\sum \dfrac{1}{k\ln^2(k)}$.