

## Corrigé TD 21 - Variables aléatoires

### Exercice 1 :

La probabilité que l'étudiant fasse une faute d'orthographe sur un mot est  $p = \frac{1}{600}$ .

On note  $X$  le nombre de fautes commises sur un devoir de 1800 mots. C'est une variable aléatoire réelle et  $X(\Omega) = \llbracket 1, 5 \rrbracket$ .

$X$  est le nombre de succès : une erreur commise, pour la répétition de 1800 expériences de Bernoulli : écriture d'un mot avec ou sans faute d'orthographe. Les expériences de Bernoulli sont indépendantes.

Alors  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $n = 1800$  et  $p = \frac{1}{600}$ .

$$\text{Alors } P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^5 P(X = k) = \sum_{k=0}^5 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^5 \binom{1800}{k} \frac{1}{600^k} \left(\frac{599}{600}\right)^{1800-k}$$

On calcule et on trouve  $P(X \leq 5) = 0,916$

### Exercice 2 :

On a  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$ ,  $U(\Omega) = \{0, 1, 2\}$  et  $V(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$  Soit  $i \in \{0, 1, 2\}$  et  $j \in \{-1, 0, 1\}$

On a

$$P(U = i, V = j) = P(X + Y = i, X - Y = j)$$

$$= P\left(X = \frac{i+j}{2}, Y = \frac{i-j}{2}\right)$$

$$= P\left(X = \frac{i+j}{2}\right) \times P\left(Y = \frac{i-j}{2}\right)$$

car  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

On obtient alors le tableau :

Puis, on calcule

$U \backslash V$	-1	0	1	loi de $U$
0	0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
2	0	$p^2$	0	$p^2$
loi de $V$	$p(1-p)$	$p^2 + (1-p)^2$	$p(1-p)$	1

$$E(U) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 2 \times p^2 \implies E(U) = 2p$$

$$E(V) = -1 \times p(1-p) + 0 \times (p^2 + (1-p)^2) + 1 \times p(1-p) \implies E(V) = 0$$

Pour la variance, on utilise la formule  $V(U) = E(U^2) - (E(U))^2$

$$E(U^2) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 4 \times p^2 \implies E(U^2) = 2p + 2p^2$$

Alors  $V(U) = 2p(1+p) - 4p^2 = 2p - 2p^2 = 2p(1-p)$ .

Et  $V(V) = E(V^2) = 1 \times p(1-p) + 0 \times (p^2 + (1-p)^2) + 1 \times p(1-p) \implies V(V) = 2p(1-p)$ .

$$E(U) = 2p, \quad V(U) = 2p(1-p) \quad \text{et} \quad E(V) = 0, \quad V(V) = 2p(1-p).$$

### Exercice 3 :

On a  $X_1(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et on note  $X_2$  le résultat du deuxième dé.

$$\text{et } P(X_1 = i, Y = k) = P(X_1 = i \cap Y = k) = P(X_1 = i) \cdot P_{X_1=i}(Y = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ i/36 & \text{si } k = i \text{ car } X_2 \in \llbracket 1, i \rrbracket \\ 1/36 & \text{si } k > i \text{ car } X_2 = k \end{cases}$$

Ce qui donne le tableau

$X_1 = i \backslash Y = k$	1	2	3	4	5	6	loi de $X_1$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36	1/6
5	0	0	0	0	5/36	1/36	1/6
6	0	0	0	0	0	6/36	1/6
loi de $Y$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	1

Alors  $E(Y) = \frac{1}{36} (1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + \dots + 11 \times 6) = \frac{161}{36} \simeq 4,47$

### Exercice 4 :

1. On a  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Soit  $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ .

On utilise comme univers  $\Omega =$  l'ensemble des tirages de 4 boules parmi 16 boules que l'on suppose numérotées (discernables).

Le nombre de tirages possibles est  $\binom{16}{4}$  qui correspond au nombre de manières de tirer 4 numéros parmi 16 sans répétition et sans tenir compte de l'ordre.

Pour  $(X = k)$ , on a le nombre de tirages favorables est  $\binom{5}{k}$  pour le choix de  $k$  boules rouges

$\times \binom{11}{4-k}$  pour les  $4 - k$  boules non rouges. On obtient  $P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{11}{4-k}}{\binom{16}{4}}$ .

On trouve

$$P(X = 0) = \frac{33}{182}, P(X = 1) = \frac{165}{364}, P(X = 2) = \frac{55}{182}, P(X = 3) = \frac{11}{182}, P(X = 4) = \frac{1}{364}$$

On a donc  $E(X) = 0 + 1 \times \frac{165}{364} + 2 \times \frac{55}{182} + 3 \times \frac{11}{182} + 4 \times \frac{1}{364} = \frac{455}{364} \Rightarrow E(X) = \frac{5}{4}$ .

$E(X^2) = \sum_{k=0}^4 k^2 \cdot P(X = k) = 0 + 1 \times \frac{165}{364} + 4 \times \frac{55}{182} + 9 \times \frac{11}{182} + 16 \times \frac{1}{364} \Rightarrow E(X^2) = \frac{9}{4}$ .

Alors d'après la formule de Kœnig, on a  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{9}{4} - \frac{25}{16} \Rightarrow V(X) = \frac{11}{16}$ .

2.  $Y$  est le nombre de tirages de boules rouges (succès) obtenues lors de la répétition de 4 expériences de Bernoulli (tirage avec remise). On a donc  $Y$  qui suit la loi  $\mathcal{B}(4, \frac{5}{16})$ .

Alors on a  $E(Y) = np = \frac{5}{4}$  et  $V(Y) = 4 \times \frac{5}{16} \times \frac{11}{16} = \frac{55}{64}$ .

3. On a  $E(X) = E(Y)$ . Qu'il y ait ou non remise, les 4 tirages amènent en moyenne autant de boules rouges.

4. En revanche,  $\sigma(X) = \frac{\sqrt{11}}{4} < \frac{\sqrt{55}}{8} = \sigma(Y)$ . Les tirages avec remise autorisent une plus grande dispersion autour de la moyenne.

### Exercice 5 :

#### Cas des tirages sans remise

$X_r$  est une variable aléatoire réelle et  $X_r(\Omega) = \{r, r+1, r+2, r+3, r+4, r+5\}$ .

$(X_r = r)$  : on a tiré en premier que des boules rouges,

$(X_r = r+5)$  : on a tiré toutes les boules bleues avant de tirer la  $r$ -ième boule rouge.

Soit  $k \in \llbracket r, r+5 \rrbracket$ ,  $(X_r = k) =$  « on a tiré la  $r$ -ième boule rouge au  $k$ -ième tirage ».

On considère comme univers  $\Omega$  tous les tirages possibles de toutes les boules. On suppose que les boules sont discernables. Un tirage est défini par le rang des 15 boules tirées, alors  $|\Omega| = 15!$

Un tirage favorable est défini par une boule rouge à la place  $k$ , par  $r-1$  boules rouges parmi les  $k-1$  premiers tirages et  $10-r$  boules rouge parmi les  $15-k$  derniers tirages.

On dénombre ces tirages favorables :

$\binom{k-1}{r-1}$  choix des rangs des premières boules rouges  $\times \binom{15-k}{10-r}$  choix des rangs des dernières boules rouges  $\times 10!$  ordres possibles pour les boules rouges  $\times 5!$  ordres possibles pour les boules bleues.

Ce qui donne  $P(X_r = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1} \binom{15-k}{10-r} 10! 5!}{15!}$  Or on a  $\frac{15!}{5!10!} = \binom{15}{10}$

Alors  $P(X_r = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1} \binom{15-k}{10-r}}{\binom{15}{10}}$  pour  $k \in \llbracket r, r+5 \rrbracket$

### Cas des tirages avec remise

On choisit de poser  $X = N + 1$  si on n'a pas obtenu de boules rouges lors des  $N$  tirages.

Quand on effectue des tirages avec remise, chaque tirage est indépendant des autres. On peut les considérer comme une épreuve de Bernoulli de probabilité  $p = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ .

Soit  $k \geq r$ . Un tirage favorable pour  $X_r = k$  est un tirage tel que la  $k$ -ième boule est rouge et sur les  $k-1$  premières :  $r-1$  sont rouges et  $k-r$  sont bleues. La probabilité d'un tel tirage est donc  $\left(\frac{2}{3}\right)^r \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-r}$

Il y a autant de tirages favorables que de manières de choisir  $r-1$  numéros d'obtention des boules rouges parmi les  $k-1$  premières ce qui donne

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \left(\frac{2}{3}\right)^r \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-r} \text{ pour } N \geq k \geq r \text{ avec } P(X = N+1) = 1 - \sum_{k=r}^N P(X_r = k)$$

Attention : ce n'est pas une loi binomiale.

### Exercice 6 :

1. On considère que les boules sont discernables (numérotées). Il y a alors  $n!$  tirages possibles :  $|\Omega| = n!$ .

Et  $P(X = k) = \frac{1 \times (n-k) \times 2! \times (n-2)!}{n!}$  avec 1 choix pour le rang  $k$  de la première boule verte  $\times n-k$  choix pour le rang de la deuxième  $\times 2!$  choix pour l'ordre des 2 boules vertes (elles sont discernables alors laquelle arrive en premier ?)  $\times (n-2)!$  pour l'ordre des tirages des  $n-2$  boules restantes.

On obtient :  $P(X = k) = \frac{n-k}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$ . De même  $P(Y = j) = \frac{j-1}{\binom{n}{2}} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}$ .

On utilise ensuite  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  et  $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$E(X) = \frac{n+1}{3}$ ,  $E(Y) = \frac{2(n+1)}{3}$ ,  $V(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{12}$  et  $V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$ .

2. On calcule  $E(XY) = \frac{(3n+2)(n+1)}{12}$  d'où  $E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{36} \neq 0$  donc  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

### Exercice 7 :

Tout d'abord, on détermine les probabilités des faces de  $B$  : on note  $p$  la probabilité de  $-2$ , alors les probabilités de  $-2, -1, 0, 1, 2, 3$  sont  $p, \frac{p}{2}, \frac{p}{4}, \frac{p}{8}, \frac{p}{16}, \frac{p}{32}$  et leur somme doit être 1 ce qui donne

$$p \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) = 1 \iff p = \frac{32}{63}.$$

En notant  $Y$  la variable aléatoire égale au numéro obtenu par le dé  $B$ , on a la loi de  $Y$  qui est

$k$	-2	-1	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{32}{63}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{4}{63}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{63}$

On a  $X(\Omega) = \{1, -2\}$  et  $S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  avec  $S = |X + Y|$

On calcule chacune des probabilités et on remplit le tableau suivant

$k$	0	1	2	3	4
$P_{X=-2}(S = k)$	$P(Y = 2)$ $= 2/63$	$P(Y = 3) + P(Y = 1)$ $= 1/63 + 4/63 = 5/63$	$P(Y = 0)$ $= 8/63$	$P(Y = -1)$ $= 16/63$	$P(Y = -2)$ $= 32/63$
$P_{X=1}(S = k)$	$P(Y = -1)$ $= 16/63$	$P(Y = 0) + P(Y = -2)$ $= 8/63 + 32/63 = 40/63$	$P(Y = 1)$ $= 4/63$	$P(Y = 2)$ $= 2/63$	$P(Y = 3)$ $= 1/63$

On a  $P(X = 1) = \frac{4}{6}$  et  $P(X = 2) = \frac{2}{6}$  et  $P(X = j, S = k) = P_{X=j}(S = k) \times P(X = j)$ .

On complète le tableau suivant et on calcule les lois marginales, ce qui donne :

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	$P(X = j)$
$P(X = j, S = k) :$						
-2	2/189	5/189	8/189	16/189	32/189	63/189
1	32/189	80/189	8/189	4/189	2/189	126/189
$P(S = k)$	34/189	85/189	16/189	20/189	34/189	1

On a, par exemple  $P((X = 1) \cap (S = 4)) = \frac{2}{189} \neq \frac{68}{567} = P(X = 1) \times P(S = 4)$ .

Alors les v.a.  $X$  et  $S$  ne sont pas indépendantes.

### Exercice 8 :

On a  $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $P(X_n = j)$  est la probabilité d'avoir tiré des boules numérotées  $j$  dans au moins une urne et des boules de numéros inférieurs à  $j$  dans les autres.

On compte les tirages possibles : il y a  $n^k$  tirages possibles, parmi ceux là  $j^k$  tirages de boules entre 1 et  $j$  et parmi ceux là  $(j-1)^k$  tirages de boules entre 1 et  $j-1$ .

On a  $P(X_n = j) = \frac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$ . D'où  $E(X_n) = \sum_{j=1}^n k \frac{j^k - (j-1)^k}{n^k} = \frac{1}{n^k} \sum_{j=1}^n (j^{k+1} - j(j-1)^k)$ .

Et on ne sait pas simplifier l'expression dans le cas général.

Pour trouver un équivalent de  $E(X_n)$  on réécrit la somme comme une somme de Riemann. On commence par changer d'indice dans la deuxième somme :

$$E(X_n) = \frac{1}{n^k} \left( \sum_{i=1}^n i^{k+1} - \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)i^k \right) = n \left( 1 - \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n-1} i^k \right) \text{ par télescopage.}$$

Or  $\frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n-1} i^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{i}{n} \right)^k$  qui est une somme de Riemann pour  $f : x \mapsto x^k$  sur  $[0, 1]$  à  $n$  pas.

Comme la fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{i}{n} \right)^k = \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(X_n)}{n} = \frac{k}{k+1}$  soit  $E(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{nk}{k+1}$ .

### Exercice 9 :

1. L'univers  $\Omega$  est l'ensemble des couples  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  et on a  $|\Omega| = n^2$ .

On détermine  $X(\Omega)$  : on a  $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

On calcule  $P(X = k)$  : c'est la probabilité d'avoir un dé qui donne  $k$  et l'autre qui donne un résultat inférieur à  $k$  dans  $\llbracket 1, k \rrbracket$ . On a  $k-1$  résultats de la forme  $(i, k)$  avec  $i \leq k$ , un résultat de la forme  $(k, k)$  et  $k-1$  résultats de la forme  $(k, i)$ .

Alors,  $P(X = k) = \frac{2k-1}{n^2}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Autre méthode :** Pour  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on a  $(X = k) \cup (X \leq k-1) = (X \leq k)$  et les événements  $(X = k)$  et  $(X \leq k-1)$  donc  $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$ .

On a  $|X \leq k| = k^2$  car  $(X = k)$  correspond aux couples de  $\llbracket 1, k \rrbracket$  et  $|X \leq k| = (k-1)^2$  alors  $|X = k| = k^2 - (k-1)^2 = 2k-1$ . Alors,  $P(X = k) = \frac{2k-1}{n^2}$ .

On calcule l'espérance de  $X$  par la formule  $E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(2k-1)$ .

$$E(X) = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{2}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{ce qui donne } E(X) = \frac{n+1}{6n} (4n+2-3) \implies E(X) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

2. On a  $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $P(Y = k)$  est la probabilité d'avoir un dé qui donne  $k$  et l'autre qui donne un nombre dans  $\llbracket k, n \rrbracket$ .

$(Y = k)$  correspond à : le résultat  $(k, k)$  et  $n-k$  résultats de la forme  $(i, k)$  avec  $i > k$  et  $n-k$  résultats de la forme  $(k, i)$  avec  $i > k$  soit  $2(n-k)+1$  résultats.

On trouve  $P(Y = k) = \frac{2(n-k)+1}{n^2}$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

On a  $P(Z = k) = P(Y = n+1-k) = \frac{2(n+1-(n+1-k))-1}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2} = P(X = k)$ .

On a  $P(Z = k) = P(X = k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  donc  $Z$  et  $X$  suivent la même loi.

On en déduit que  $E(Z) = E(X)$  et  $E(n+1-Z) = n+1-E(Z)$  par linéarité de l'espérance.

Ce qui donne  $E(Y) = n+1-E(X) = n+1 - \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$ .

$$\text{Finalement, } E(Y) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

3.  $R$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  alors  $E(R) = \frac{n+1}{2}$

$$\text{et } V(R) = E(R^2) - E(R)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

4. On a pour chaque lancer 2 résultats des dés : soit l'un a la plus grande valeur et l'autre la plus petite, soit le contraire. Dans les deux cas, le produit des valeurs des 2 dés est égal au produit des valeurs de la plus grande par la plus petite. On a donc  $XY = RV$ .

On a alors  $E(XY) = E(RV)$ . Comme  $R$  et  $V$  sont indépendantes, car les résultats des deux

dés sont indépendants, on a  $E(RV) = E(R) \times E(V)$ . On en déduit que  $E(XY) = \frac{(n+1)^2}{4}$ .

Par ailleurs, en utilisant la loi de  $(X, Y)$  et le théorème de transfert :

$$E(XY) = \sum_{(k,j) \in (X,Y)(\Omega)} kjP(X = k, Y = j)$$

Comme  $(X, Y)(\Omega) = \{(k, j) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1, k \rrbracket\}$

$$E(XY) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^{k-1} kjP(X = k, Y = j) + k^2P(X = k, Y = k) \right)$$

On a  $P(X = k, Y = j) = \frac{2}{n^2}$  si  $k \neq j$  car chaque tirage  $(k, j)$  est équiprobable et  $P(X = k, Y = k) = \frac{1}{n^2}$  car il n'y a qu'un tirage de ce type.

$$\begin{aligned} \text{Alors } E(XY) &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{k-1} jk + \frac{k^2}{n^2} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{2k}{n^2} \sum_{j=1}^{k-1} j + \frac{k^2}{n^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{2k}{n^2} \times \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k^2}{n^2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^2} \end{aligned}$$

On en déduit la formule suivante

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

5. On a  $X + Y = R + V$  car le dé vert est l'une des valeurs  $X$  ou  $Y$  et le rouge est l'autre.

$$\text{Or on sait que } V(R+V) = E((E(R+V) - (R+V))^2) = (E(R+V))^2 - E(R^2 + V^2 + 2RV) = (E(R))^2 + 2E(R)E(V) + (E(V))^2 - E(R^2) - E(V^2) - 2E(RV)$$

Comme  $R$  et  $V$  sont indépendantes, on a  $E(RV) = E(R)E(V)$

$$V(R+V) = E(R^2) - E(R)^2 + E(V^2) - E(V)^2 = V(R) + V(V) = 2V(R) = \frac{n^2 - 1}{6} = V(X+Y).$$

Par ailleurs, on a  $Z = n+1 - Y$  et  $Z$  et  $X$  suivent la même loi, on en déduit que  $V(X) = V(Z)$  et  $V(Y) = V(Z) = V(X)$ .

$$\text{Enfin, } V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2E(X)E(Y) - 2E(XY)$$

$$\text{D'où } 2V(X) = V(X+Y) - 2E(X)E(Y) + 2E(XY)$$

$$\Rightarrow V(X) = -\frac{(n-1)(5 \cdot n^3 + 23 \cdot n^2 + 37 \cdot n + 37)}{18 \cdot n^2}$$

$$V(X) = V(Y) = -\frac{(n-1)(5 \cdot n^3 + 23 \cdot n^2 + 37 \cdot n + 37)}{18 \cdot n^2}.$$

## Exercice 10 :

1. On a  $X(\Omega) = \llbracket r, n \rrbracket$  et  $|\Omega| = \binom{n}{r}$  car il y a  $\binom{n}{r}$  manières de prendre  $r$  jetons parmi  $n$  et ces tirages sont équiprobables.

$$P(X=r) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \text{ car on a tiré les } r \text{ premiers jetons.}$$

$P(X=k)$  correspond au tirage de  $r$  jetons entre 1 et  $k$  en prenant le jeton  $k$  : cela correspond au nombre de tirages de  $r-1$  jetons entre 1 et  $k-1$ .

$$\text{Alors } P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{n}{r}} \text{ pour tout } k \in \llbracket r, n \rrbracket.$$

La loi précédente de  $X$  doit donner

$$\sum_{k=r}^n P(X=k) = 1 \Rightarrow \sum_{k=r}^n \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{n}{r}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=r}^n \binom{k-1}{r-1} = \binom{n}{r}$$

On change d'indice :  $\sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r-1} = \binom{n}{r}$  et on pose  $a = r$  et  $b = n-1$  pour obtenir la formule suivante

$$\sum_{k=a}^b \binom{k}{a} = \binom{b+1}{a+1} \text{ pour tous } a \leq b \text{ entiers.}$$

$$\text{On calcule ensuite l'espérance de } X : E(X) = \frac{(n+1)r}{r+1}.$$

$$\text{On calcule la loi de } Y ; P(Y=k) = \frac{\binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}} \text{ pour } k \in \llbracket 1, n-r+1 \rrbracket.$$

$$\text{Puis on utilise } k = -(n-k+1) + n+1 \text{ et on trouve } E(Y) = \frac{n+1}{r+1}.$$

2.  $P(X = k, Y = j) = P((X = k) \cap (Y = j))$  on peut écrire  $= 0$  si  $Y > X$  c'est à dire  $j > k$ .

Pour  $1 \leq j \leq k - r + 1$  et  $r \leq k \leq n$ , on calcule

$$P(X = k, Y = j) = \frac{\binom{k-j-1}{r-2}}{\binom{n}{r}} \text{ car on doit piocher le jeton } j, \text{ le jeton } k \text{ et } r-2 \text{ jetons entre } j$$

et  $k$  exclus.

3. [non corrigé]

### Exercice 11 :

1. On a  $Y_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$  qui correspond aux 4 événements suivants : on échange 2 rouges ou on échange 2 vertes ce qui donne  $Y_n = 0$ , ou alors on prend une rouge de  $U_2$  et on la met dans  $U_1$  ce qui donne  $Y_n = 1$  ou le contraire qui donne  $Y_n = -1$ .

A tout instant, il y a  $d$  boules dans chacune des urnes.

Sachant  $X_{n-1} = j$ , c'est à dire qu'il y a  $j$  boules rouges dans l'urne  $U_1$  et donc  $d - j$  boules vertes dans  $U_1$  et  $j$  boules vertes dans  $U_2$  et  $d - j$  boules rouges dans  $U_2$ .

On étudie la probabilité de  $Y_n = +1$  c'est à dire que l'on pioche une boule rouge dans  $U_2$  et une verte dans  $U_1$  : ce qui donne  $P(Y_n = +1 | X_{n-1} = j) = \frac{d-j}{d} \times \frac{d-j}{d}$ .

Puis de même,  $P(Y_n = -1 | X_{n-1} = j) = \frac{j}{d} \times \frac{j}{d}$  si on pioche une rouge dans  $U_1$  et une verte dans  $U_2$ . Enfin,  $P(Y_n = 0 | X_{n-1} = j) = 2 \frac{d-j}{d} \times \frac{j}{d}$  qui correspond à une boule rouge dans chaque urne ou une boule verte dans chaque urne.

2. On a  $E(Y_n) = (-1) \times P(Y_n = -1) + 0 \times P(Y_n = 0) + 1 \times P(Y_n = 1)$ .

Les événements  $(X_{n-1} = k)$  pour  $k \in \{0, d\}$  forment un système complet d'événements. Alors, d'après la formule des probabilités totales

$$P(Y_n = i) = \sum_{k=0}^d P(Y_n = i | X_n = k) \times P(X_n = k).$$

Ce qui donne en remplaçant dans  $E(Y_n)$  :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= - \sum_{k=0}^d P(Y_n = -1 | X_n = k) \times P(X_n = k) + \sum_{k=0}^d P(Y_n = +1 | X_n = k) \times P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^d \left( -\frac{k^2}{d^2} + \frac{(d-k)^2}{d^2} \right) \times P(X_n = k). \end{aligned}$$

On simplifie

$$E(Y_n) = \frac{1}{d^2} \sum_{k=0}^d (d^2 - 2dk) \times P(X_n = k). \text{ Mais } \sum_{k=0}^d P(X_n = k) = 1, \text{ ce qui donne}$$

$$E(Y_n) = 1 - \frac{2}{d} \sum_{k=0}^d k P(X_n = k) \quad \text{soit} \quad \boxed{E(Y_n) = 1 - \frac{2}{d} E(X_{n-1})}.$$

3. On a

$$E(X_n) = E(Y_n) + E(X_{n-1}) \text{ d'où } E(X_n) = 1 - \frac{2}{d} E(X_{n-1}) + E(X_{n-1}) = \frac{d-2}{d} E(X_{n-1}) + 1.$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique.

On note  $e_n = E(X_n)$  et on cherche son point fixe  $\ell = \frac{d-2}{d} \ell + 1 \iff d\ell = (d-2)\ell + d \iff \ell = \frac{d}{2}$

Puis, on étudie  $f_n = e_n - \ell$  qui est géométrique de raison  $\frac{d-2}{d}$  donc  $e_n = e_0 \left( \frac{d-2}{d} \right)^n + \frac{d}{2}$  avec  $e_0 = d$  en considérant que  $X_0$  est la variable certaine  $X_0 = d$ .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) = d \left( \frac{d-2}{d} \right)^n + \frac{d}{2}}$$

**Exercice 12 :**

1. Comme le mobile avance à la vitesse d'une unité d'abscisse par unité de temps, après  $n$  unités de temps, il a une abscisse entre  $-n$  et  $n$  :  $X_n(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket$ .

Mais, à un temps  $t$  pair, le mobile a une abscisse paire et à un temps impair, le mobile a une abscisse impaire.

On cherche donc tous les nombres entiers de  $\llbracket -n, n \rrbracket$  qui sont de la même parité que  $n$  : ils sont de la forme  $n + 2j$  avec  $j$  entier. On doit avoir  $-n \leq n + 2j \leq n \iff -n \leq j \leq 0$ .

On pose  $k = -j$ . Alors  $X_n(\Omega) = \{2k - n \mid 0 \leq k \leq n\}$ .

2. Pour arriver en  $2k - n$  après  $n$  pas, il faut avoir fait  $x$  pas vers la droite et  $n - x$  pas vers la gauche avec  $x - (n - x) = 2k - n \iff x = k$ .

Alors l'événement  $(X_n = 2k - n)$  est l'événement : on a effectué  $k$  pas vers la droite et  $n - k$  pas vers la gauche. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli : aller vers la droite avec une probabilité de succès  $p$  que l'on répète  $n$  fois et on cherche la probabilité d'obtenir  $k$  succès.

$$\text{Alors } P(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

3.  $Y_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $p$  et  $n$   $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

Alors  $E(Y_n) = np$  et  $V(Y_n) = np(1 - p)$ .

4. Comme on a  $X_n = 2Y_n - n$ , par linéarité de l'espérance, on peut obtenir  $E(X_n) = 2E(Y_n) - n = 2np - n$  qui donne  $E(X_n) = (2p - 1)n$ .

Ensuite, on a  $V(X_n) = 4V(Y_n) = 4np(1 - p)$ .

Pour  $p = \frac{1}{2}$ ,  $X_n$  est centrée.

**Exercice 13 :**

1.  $X$  est le nombre de piles en  $n$  lancers indépendants, la probabilité de pile à chaque lancer étant  $p$ . Alors  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pour } k \in X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)$$

On a alors  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$  et  $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = np(1 - p) + n^2 p^2$

$$E(X) = np(1 - p + np)$$

2. Quand  $X = 0$ , on tire une boule de l'urne 0 qui contient 0 vertes et  $n$  rouges. On tirera donc une boule rouge et  $P_{(X=0)}(Y = 0) = 0$

et de même si  $X = n$ , il n'y a que des boules vertes et  $P_{(X=n)}(Y = 0) = 0$

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $P_{(X=0)}(Y = 0) = P(Y = 0) = P_{(X=n)}(Y = 0)$  ce qui n'est pas le cas.

$$X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}$$

3. Quand  $X = k$ , on tire une boule de l'urne  $k$  qui contient  $k$  vertes et  $n - k$  rouges. Ces  $n$  boules étant équiprobables

$$P_{(X=k)}(Y = 1) = \frac{k}{n}.$$

4.  $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :



$$\begin{aligned}
P(Y=1) &= \sum_{k=0}^n P_{(X=k)}(Y=1)P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} P(X=k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n kP(X=k) \\
&= \frac{E(X)}{n} \text{ car } X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket
\end{aligned}$$

5. Comme les valeurs de  $Y$  sont  $\{0, 1\}$ ,  $Y$  suit une loi de Bernoulli et on a  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  et  $E(Y) = p$

6. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i \in Y(\Omega)} k i P(X=k \cap Y=i) \\
&= \sum_{k=0}^n (k P(X=k \cap Y=1) + 0) \\
&= \sum_{k=1}^n k P(X=k \cap Y=1) + 0 \text{ pour } k=0
\end{aligned}$$

avec  $P(X=k \cap Y=1) = P(X=k)P_{X=k}(Y=1) = P(X=k) \frac{k}{n}$  donc

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=1}^n k \frac{k}{n} P(X=k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k^2 P(X=k) \quad \boxed{E(XY) = \sum_{k=1}^n kP(X=k \cap Y=1) = \frac{E(X^2)}{n}}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{E(X^2)}{n} - \frac{E(X)^2}{n} \quad \boxed{\text{cov}(X, Y) = p(1-p)} \\
&= \frac{1}{n} V(X)
\end{aligned}$$

## Exercice 14 :

1.  $Y_n$  est le nombre de  $n$ -chaînes de pile

Il y en a au plus une qui n'est réalisée que si tous les lancers ont donné pile. Donc  $Y(\Omega) = \{0, 1\}$   
 $(Y_n = 1) = P_1 \cap \dots \cap P_n$  et comme les lancers sont indépendants :

$$p(Y_n = 1) = p(P_1) \dots p(P_n) = p^n \text{ donc } \boxed{p(Y = 0) = 1 - p^n \text{ et } E(Y_n) = p^n}.$$

2. Pour avoir  $Y_{n-1} = 1$ , il faut avoir une  $n-1$ -chaîne de piles. Il ne reste donc qu'un seul lancer face qui ne peut être qu'au début ou à la fin :

$(Y_{n-1} = 1) = [P_1 \cap \dots \cap P_{n-1} \cap F_n] \cup [F_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n]$  les deux sont incompatibles donc

$P(Y_{n-1} = 1) = P(P_1 \cap \dots \cap P_{n-1} \cap F_n) + P(F_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n)$  les lancers sont indépendants donc

$$P(Y_{n-1} = 1) = p^{n-1}q + qp^{n-1} = 2qp^{n-1}$$

Comme les seules valeurs possibles de  $Y_{n-1}$  sont là encore 0 et 1 on a :

$$E(Y_{n-1}) = 0P(Y_{n-1} = 0) + 1P(Y_{n-1} = 1)$$

$$\boxed{E(Y_{n-1}) = 2qp^{n-1}}$$

3. (a)  $k$  est un entier de  $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$ . Avoir  $(X_{1,k} = 1)$  signifie qu'une  $k$  chaîne de piles commence au premier lancer (et se finit donc au  $k+1^{\text{ème}}$   $< n$ )

$(X_{1,k} = 1) = P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}$  et les lancers sont indépendants donc  $P(X_{1,k} = 1) = p(P_1) \dots p(P_k)p(F_{k+1})$  et  $\boxed{P(X_{1,k} = 1) = p^k q}$ .

(b) Avoir  $(X_{i,k} = 1)$  signifie qu'une telle chaîne

- commence au  $i^{\text{ème}} > 1$  lancer et donc qu'elle était précédée d'un "face" ;
- qu'elle se finit au  $k + i - 1^{\text{ème}} < n$  (de  $i$  à  $i + k - 1$  il y a  $(i + k - 1) - (i) + 1 = k$  lancers)
- et est donc suivie d'un face ( $i \leq n - k$  donc  $k + i - 1 \leq n - 1 < n$ )

Donc  $(X_{i,k} = 1) = F_{i-1} \cap P_i \cdots \cap P_{k+i-1} \cap F_{k+i}$  et comme les lancers sont indépendants pour tout  $i \in [[2, n - k]]$  on a bien

$$P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k.$$

(c) Enfin, pour  $X_{n-k+1,k} = 1$ , on a  $k$  pile à partir du  $n - k + 1^{\text{ème}}$  lancer donc jusqu'au  $n^{\text{ème}}$ .

Donc  $(X_{n-k+1,k} = 1) = F_{n-k} \cap P_{n-k+1} \cap \cdots \cap P_n$  donc

$$P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k.$$

(d) Le nombre total de  $k$ -listes de piles est la somme de celles qui commencent à 1, à 2 ... à  $n - k + 1$

$$\text{Donc } Y_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} X_{i,k} \text{ et } E(Y_k) = \sum_{i=1}^{n-k+1} E(X_{i,k})$$

$$\text{Comme } E(X_{i,k}) = 0 \cdot p(X_{i,k} = 0) + 1 \cdot p(X_{i,k} = 1) = qp^k$$

$$\text{On a } E(Y_k) = \sum_{i=1}^{n-k+1} qp^k = qp^k \sum_{i=1}^{n-k+1} 1 \quad \text{soit} \quad E(Y_k) = (n - k + 1) qp^k$$