

# Chapitre 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

## 4 Applications linéaires

### 4.1 Morphismes d'espaces vectoriels

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

**Définition 4.1.** Une application  $f$  d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $F$  est dite linéaire si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

**Théorème 4.1.** Une application  $f : E \longrightarrow F$  est linéaire si et seulement si elle vérifie :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad & f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y). \\ \iff \forall (x, y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad & f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y). \end{aligned}$$

*Remarque 4.1.* L'image d'une combinaison linéaire de vecteurs par une application linéaire est la combinaison linéaire des images des vecteurs.

**Définition 4.2.** Une application linéaire  $f : E \longrightarrow E$  s'appelle un endomorphisme de  $E$ .

**notations 4.3.** On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

### 4.2 Exemples

### 4.3 Généralités sur les applications

Dans ce paragraphe,  $E$  et  $F$  sont deux ensembles.

**Définition 4.4.** Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$ .

Pour  $x \in E$ ,  $y = f(x)$  s'appelle l'image de  $x$  et  $x$  est un antécédent de  $y$ .

On appelle image directe par  $f$  d'une partie  $A$  de  $E$ , l'ensemble des images des éléments de  $A$  noté  $f(A)$  :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

On appelle image réciproque par  $f$  d'une partie  $B$  de  $F$ , l'ensemble des antécédents (éventuels) des éléments de  $B$  noté  $f^{-1}(B)$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

*Remarque 4.2.* Attention : rien n'indique ici que  $f$  est bijective ni que son application réciproque  $f^{-1}$  existe.

**Définition 4.5.** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

$f$  est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée  $F$  a au plus un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

$f$  est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée  $F$  a au moins un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall z \in F, \exists x \in E : z = f(x).$$

$f$  est bijective si  $f$  est injective et surjective ce qui est équivalent à tout élément de l'ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent par  $f$ .

**Lemme 4.2.** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

$f$  est bijective de  $E$  dans  $F$  si et seulement si il existe une application  $u : F \longrightarrow E$  telle que  $u \circ f = id_E$  et  $f \circ u = id_F$ .

## 4.4 Noyau et image d'une application linéaire

$E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 4.3.** Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire.

L'image directe d'un sous-espace vectoriel de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Définition 4.6.** Étant donné une application linéaire  $f : E \longrightarrow F$ , on appelle :

- noyau de  $f$  le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par

$$\text{Ker } f = f^{-1}\{\vec{0}\} = \{x \in E \mid f(x) = \vec{0}\}.$$

C'est l'ensemble des antécédents du vecteur nul par  $f$ .

- image de  $f$  le sous-espace vectoriel de  $F$  défini par

$$\text{Im } f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

C'est l'ensemble des images de  $E$  par  $f$ .

**Théorème 4.4.** Si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors

$$f \text{ est injective} \iff \text{Ker } f = \{\vec{0}\} \quad \text{et par ailleurs,} \quad f \text{ est surjective} \iff \text{Im } f = F.$$

**Exercice 4.1.** Déterminer le noyau et l'image de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y, z) = (2x + y - z, x - 2y + z)$

Vu en classe

**Correction :**

Soit  $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$  et  $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$  deux vecteurs. On calcule

$$f(u + v) = (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2), (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2))$$

soit par propriété du calcul vectoriel :

$$f(u + v) = (2x_1 + y_1 - z_1, x_1 - 2y_1 + z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2, x_2 - 2y_2 + z_2)$$

On reconnaît

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On calcule

$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y - \alpha z, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z) = \alpha(2x + y - z, x - 2y + z)$$

On a donc

$$f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

Les deux résultats prouvent que f est linéaire.

On détermine le noyau de  $f$  : soit  $u \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \text{Ker } f \iff f(u) = \vec{0}$ .

On note  $u = (x, y, z)$ , on a alors :

$$u \in \text{Ker } f \iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

On a trois inconnues et deux pivots, alors on a un paramètre :  $z = \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$u \in \text{Ker } f \iff \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = \frac{1}{5}\alpha \\ y = \frac{3}{5}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

On en déduit que le noyau de  $f$  est la droite vectorielle dirigée par  $(1, 3, 5)$  :  $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 3, 5))$

On détermine ensuite l'image de  $f$  :

un vecteur  $v = (a, b)$  appartient à l'image de  $f$  si et seulement si il existe un vecteur  $u = (x, y, z)$  tel que  $f(u) = v$

$$(a, b) \in \text{Im } f \iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases}$$

$$\iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - 2y + z = a \\ 5y - 3z = a - 2b \end{cases}$$

Le système est échelonné et a deux équations et trois inconnues  $(x, y, z)$ . Il n'a pas d'équation de compatibilité, alors il a toujours des solutions (sous-entendu : il a des solutions pour toutes valeurs de  $a$  et  $b$ ).

Alors, tous les vecteurs  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  sont dans  $\text{Im } f$  : on a  $\mathbb{R}^2 \subset \text{Im } f$ .

Et, on sait que  $\text{Im } f \subset \mathbb{R}^2$  par définition de  $f$ . Alors,  $\boxed{\text{Im } f = \mathbb{R}^2}$  et il s'ensuit que  $f$  est surjective.

**Exercice 4.2.** Déterminer le noyau et l'image de  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $g(x, y) = (x - 2y, x + 3y, 2y)$

En cours ...

**Correction :**

Soit  $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  et  $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  deux vecteurs.

**Exercice 4.3.** Déterminer le noyau et l'image de  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $h(x, y) = (x + 2y - z, 2x + y - 2z, x - y - z)$

En cours ...

**Correction :**

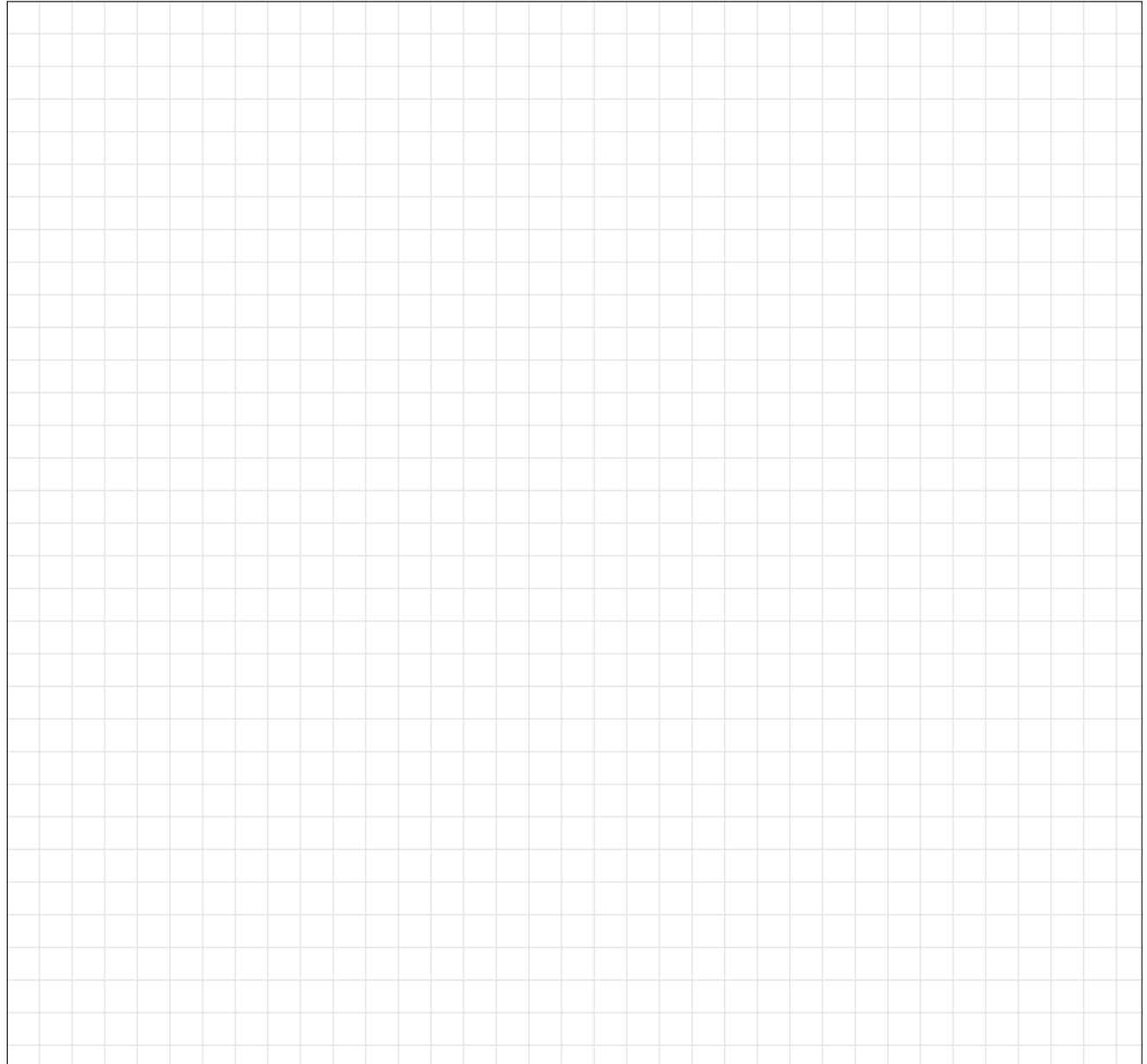
On montre d'abord que  $g$  est linéaire : soit deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$

## Autre exercice

**Exercice 4.4.** Soit  $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$  définie par  $\varphi(P) = (2X - 1)P' + 3XP$

1. Montrer que  $\varphi$  est linéaire.
2. Déterminer  $\text{Ker } \varphi$  et  $\text{Im } \varphi$ .

À faire



## 4.5 Combinaison linéaire d'applications linéaires

**Proposition 4.5.** Soit  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et des scalaires  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ . Alors  $\alpha f + \beta g$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

**Corollaire 4.6.**  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(E, F)$ .

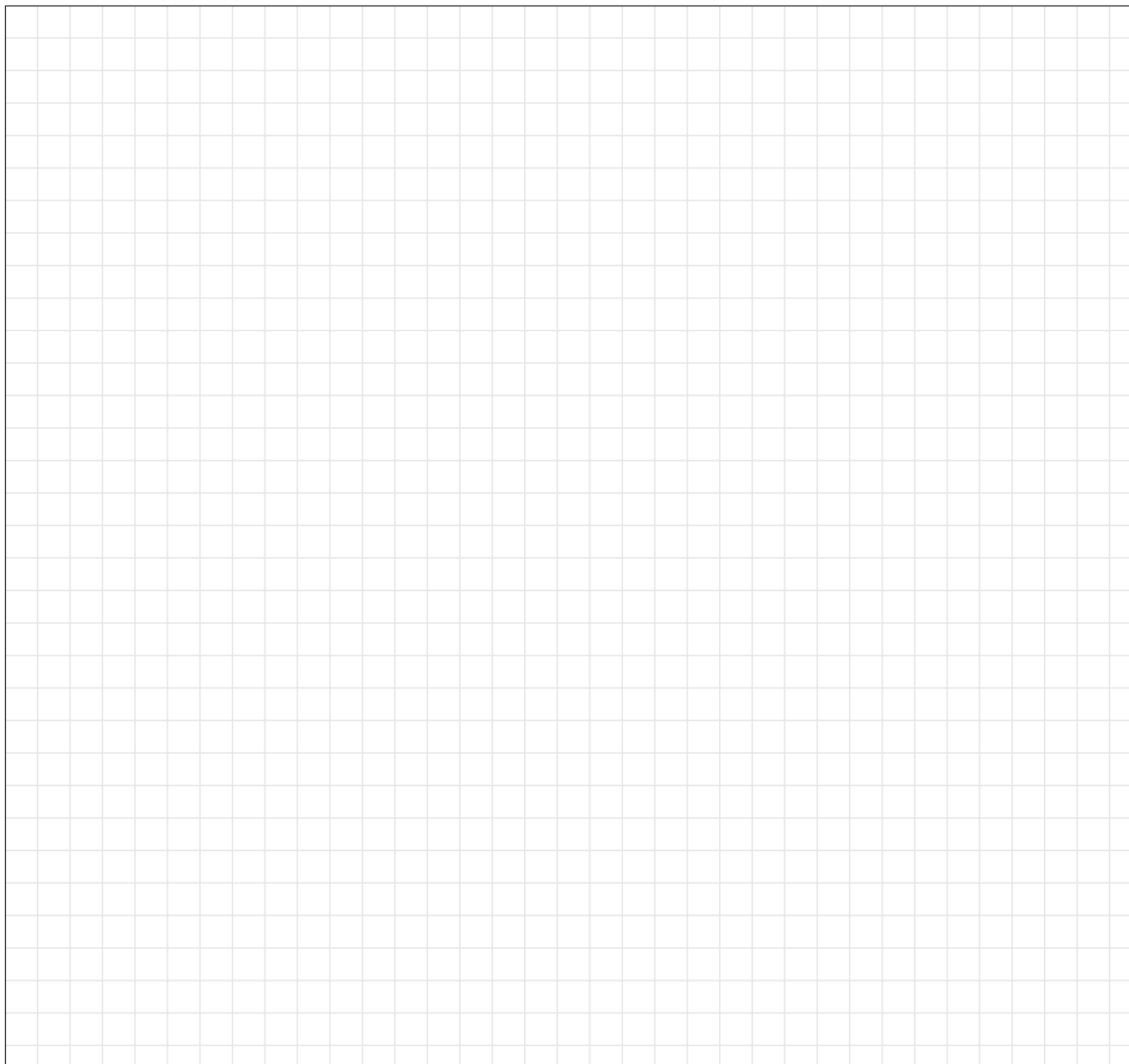
$\mathcal{L}(E)$  est un espace vectoriel (les endomorphismes sont des vecteurs)

## 4.6 Composition d'applications linéaires

Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 4.7.** *Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ . Alors  $g \circ f$  est linéaire de  $E$  dans  $G$ .*

*Démonstration.*

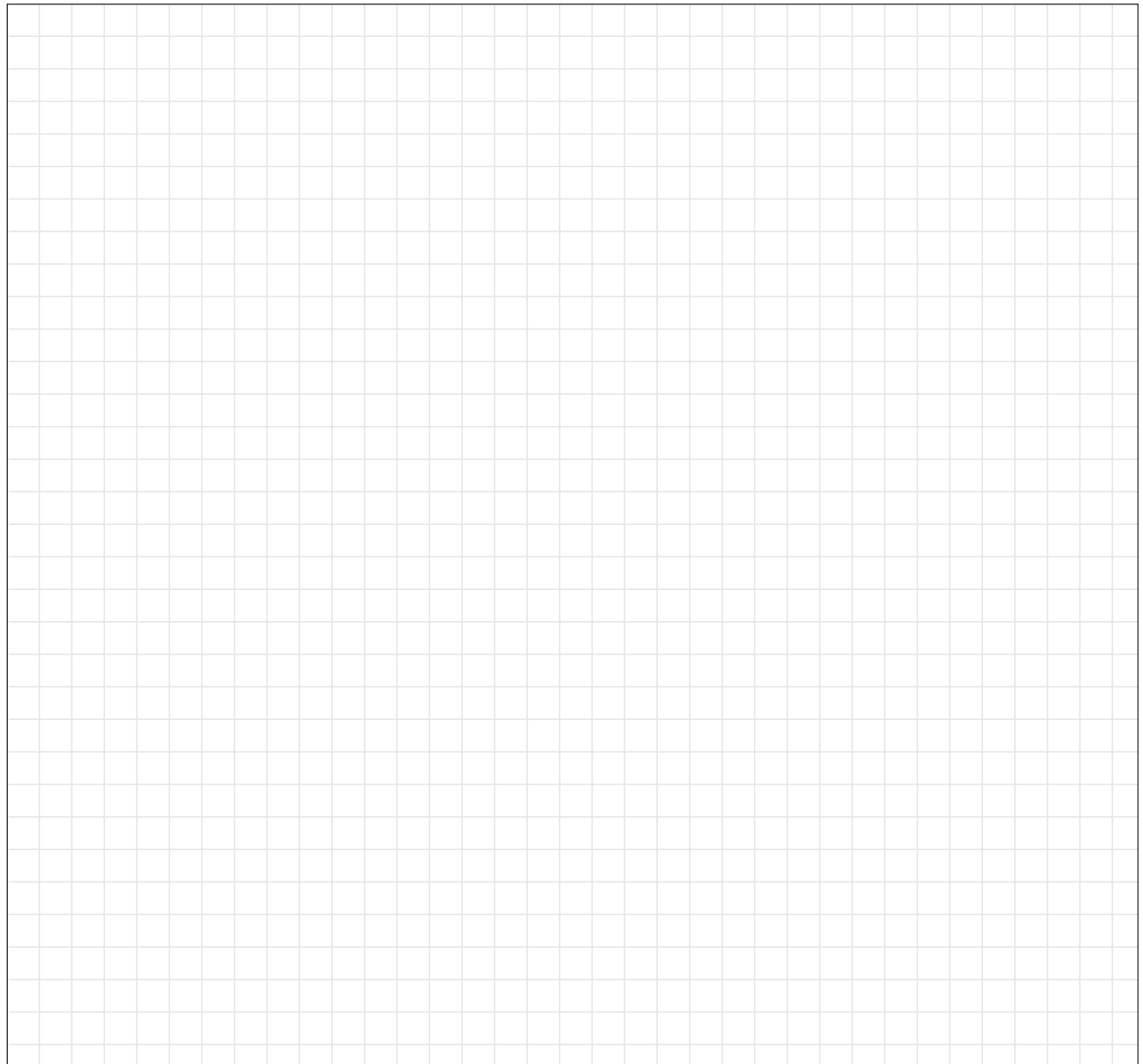


□

**Exemple 4.1.** On considère les endomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  suivants :

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y), \quad g(x, y) = \frac{1}{5}(4x - 2y, -2x + 4y) \text{ et } h(x, y) = (x, 0)$$

Calculer les différentes composées :  $f \circ g$ ,  $f \circ f$ ,  $h \circ f$  et  $f \circ h$



## 4.7 Isomorphismes et automorphismes

**Définition 4.7.** Une application linéaire bijective  $f : E \longrightarrow F$  s'appelle un isomorphisme.

Un endomorphisme bijectif  $f : E \longrightarrow E$  s'appelle un automorphisme.

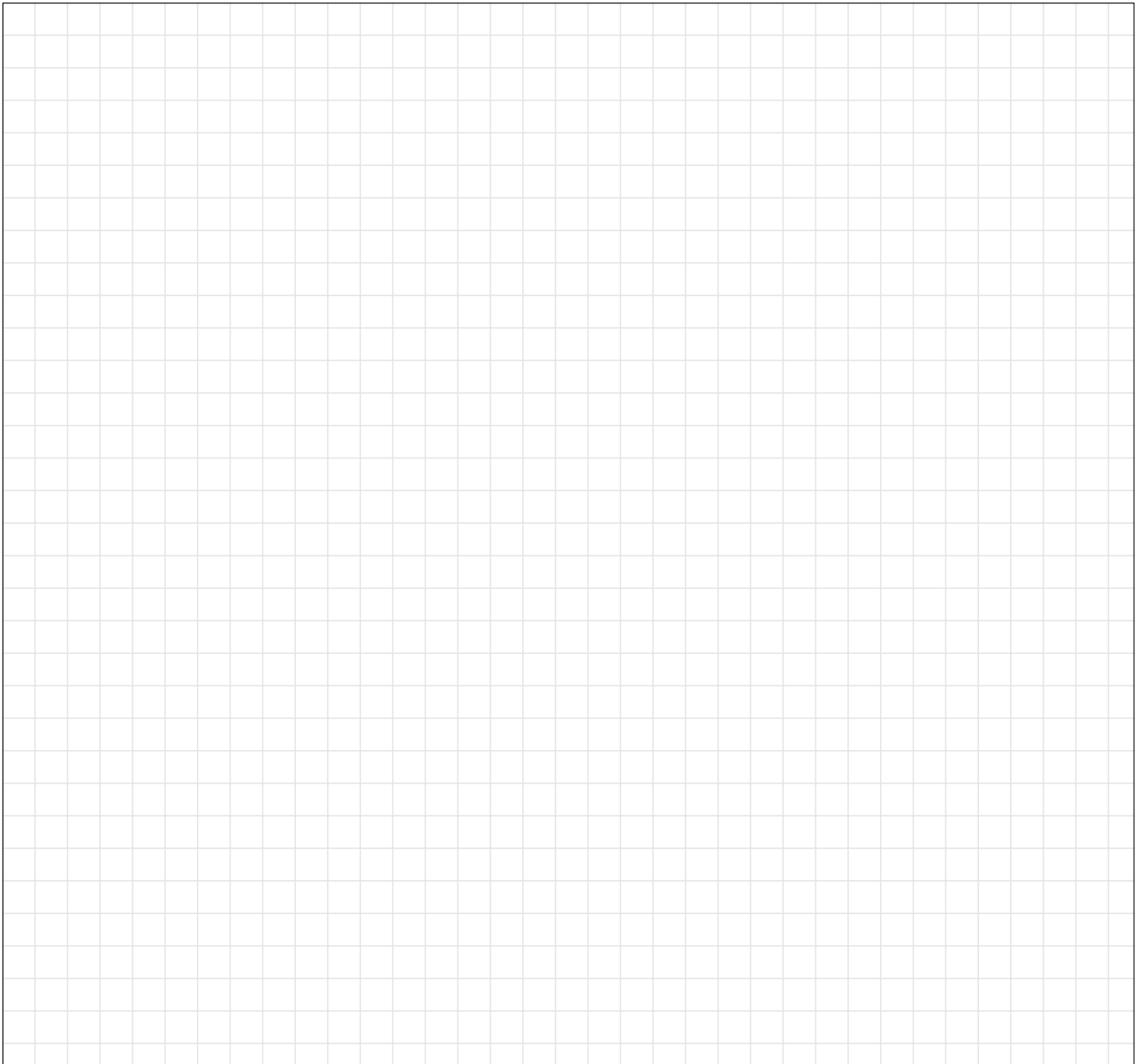
**Proposition 4.8.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  alors  $f^{-1}$  est aussi linéaire et est un isomorphisme de  $F$  dans  $E$ .

**Proposition 4.9.** L'ensemble des automorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle groupe linéaire de  $E$ , noté  $\mathcal{GL}(E)$ .

**Corollaire 4.10.** Pour  $f, g \in \mathcal{GL}(E)$ , on a  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ .



**Exemple 4.2.** Montrons que l'application  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (x - 2y, x + y)$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .



## 4.8 Calcul d'endomorphismes

$$f: E \rightarrow E$$

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  deux endomorphismes de  $E$ .

On peut effectuer des combinaisons linéaires :  $\alpha f + \beta g$  pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  réels est un endomorphisme de  $E$ ,

On peut composer les endomorphismes :  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont deux endomorphismes de  $E$ .

On peut également calculer :  $f \circ f$  qu'on note  $f^2$ ,  $f \circ f \circ f = f^3$  et par récurrence,  $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$

Par convention,  $f^0 = id_E$ .

$$f(f+g) = f \circ f + f \circ g \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \quad f(f+g)(x) = f(f(x) + g(x)) = f(f(x)) + f(g(x))$$

$$(f+g) \circ f = f \circ f + g \circ f \quad \text{par définition de } f+g: E \rightarrow E$$

$$x \mapsto f(x) + g(x) \quad (f+g)(x)$$

$$(f+g) \circ (f+g) = f \circ (f+g) + g \circ (f+g)$$

$$= f \circ f + f \circ g + g \circ f + g \circ g$$

on note

$$(f+g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2 \quad (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(f+g)^3 = (f+g) \circ (f+g)^2 = (f+g) \circ (f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2)$$

$$= f^3 + \underbrace{f^2 \circ g}_{\text{bleu}} + \underbrace{f \circ g \circ f}_{\text{bleu}} + \underbrace{f \circ g^2}_{\text{bleu}} + \underbrace{g \circ f^2}_{\text{bleu}} + \underbrace{g \circ f \circ g}_{\text{bleu}} + \underbrace{g \circ g \circ f}_{\text{bleu}} + g^3$$

Si  $f \circ g = g \circ f$  (si  $f$  et  $g$  commutent), alors

$$(f+g)^3 = f^3 + 3f^2 \circ g + 3f \circ g^2 + g^3$$

Formule du binôme pour les endomorphismes :

th: Si  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  avec  $f \circ g = g \circ f$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$$

$$g \circ g \circ f = (g \circ g) \circ f = g^2 \circ f$$

la même activité de  $\circ$

**Exemple 4.3.** On pose :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x + y; x + y)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x + y; -x - y)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x + y; x - y)$$

Calculer  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  et  $h^2$

dit vu

$$E \xrightarrow{\vec{0}_E}$$

**Exemple 4.4.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

$$f: E \rightarrow E$$

concrète: Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  qui vérifie  
 $f^2 - 4f + 3\text{id}_E = 0$   $\leftarrow$  ce 0 est la fonction nulle de  $E$  dans  $E$   
 Montrons que  $f$  est un automorphisme de  $E$ .

$$\text{On écrit } f^2 - 4f = -3\text{id}_E \Leftrightarrow f^2 - 4f + 3\text{id}_E = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}f^2 + \frac{4}{3}f = \text{id}_E \Leftrightarrow f \circ \left(-\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}\text{id}_E\right) = \text{id}_E$$

$$\text{et on a également } \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}\text{id}_E\right) \circ f = \text{id}_E$$

on a trouvé un endomorphisme  $\varphi = -\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}\text{id}_E$  de  $E$  tel que  
 $\varphi \circ f = \text{id}_E$  et  $f \circ \varphi = \text{id}_E$  alors  $f$  est bijective et  $\varphi = f^{-1}$

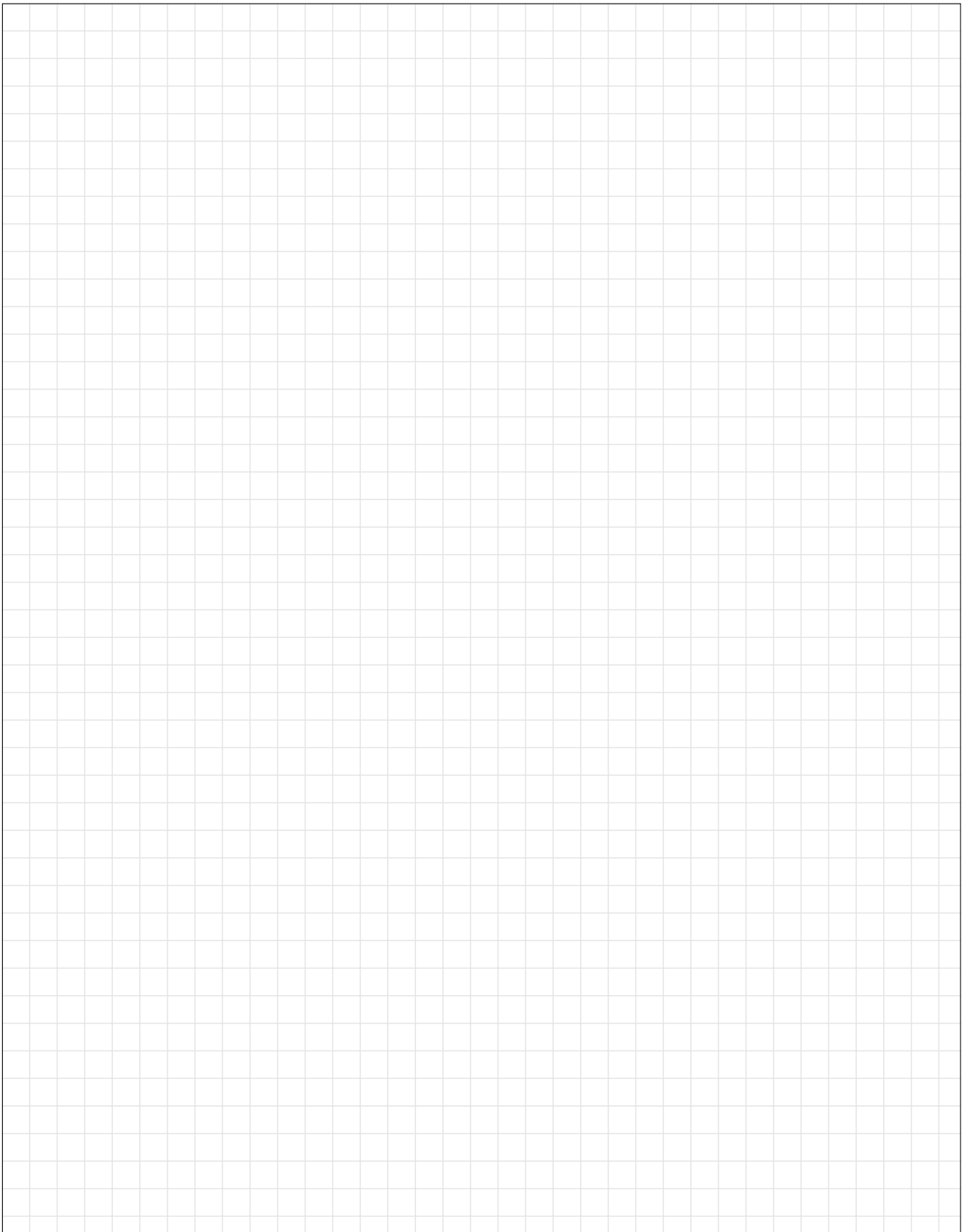
alors  $f$  est un automorphisme de  $E$  et  $f^{-1} = -\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}\text{id}_E$

$$\text{on a utilisé } f \circ f = f \circ f \text{ et } f \circ \text{id}_E = \text{id}_E \circ f, \quad \text{id}_E: E \rightarrow E$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}$$

cette égalité de fonctions  
 équivaut à  $\forall \vec{x} \in E \quad (f \circ \text{id}_E)(\vec{x}) = (\text{id}_E \circ f)(\vec{x})$

$\text{id}_E$  est l'élément neutre de la composition des fonctions  
 $f \circ \text{id}_E = f = \text{id}_E \circ f$



## 5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

### 5.1 Somme de sous-espaces vectoriels

**Définition 5.1.** Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ , alors le plus petit sous-espace vectoriel qui contient  $F$  et  $G$  est

$H = \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}$  = ensemble des sommes d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$

On l'appelle somme de  $F$  et  $G$  et on le note  $H = F + G$ .

$H$  est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion de  $F$  et  $G$ .

$H = F + G = \text{Vect}(F \cup G)$

**Exemple 5.1.** Soit  $F = \text{Vect}((1, 3, -1), (1, 1, 1))$  et  $G = \text{Vect}((1, 0, 1), (-1, 1, 0))$

Déterminer  $F + G$

$F$  et  $G$  sont des sev de  $\mathbb{R}^3$

Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ .  $\vec{u} \in F + G \iff$  il existe  $\vec{v} \in F$  et  $\vec{w} \in G$  tels que  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

mais  $\vec{v} \in F \iff$  il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\vec{v} = \alpha(1, 3, -1) + \beta(1, 1, 1)$

$\vec{w} \in G \iff$  il existe  $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\vec{w} = \gamma(1, 0, 1) + \delta(-1, 1, 0)$

Donc  $\vec{u} \in F + G \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$  tels que  $\vec{u} = \alpha(1, 3, -1) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(1, 0, 1) + \delta(-1, 1, 0)$

ce qui signifie que  $F + G = \text{Vect}((1, 3, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 1), (-1, 1, 0))$

famille génératrice de  $F + G$

soit  $\vec{u} = (x, y, z)$  fixé

$\vec{u} \in F + G \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) :$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \delta = x \\ +3\alpha + \beta + \gamma = y \\ -\alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}$$

$\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) :$

$L_2 - 3L_1$

$L_3 + L_1$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \delta = x \\ -2\beta - 3\gamma + 4\delta = y - 3x \\ 2\beta + \gamma - \delta = x + z \end{cases}$$

$\iff$  le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \delta = x \\ -2\beta - 3\gamma + 4\delta = y - 3x \\ -\gamma + 3\delta = 2x + y + z \end{cases}$$

a au moins une solution  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

$\iff$  vrai !

donc tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sont dans  $F + G$  :

$F + G = \mathbb{R}^3$

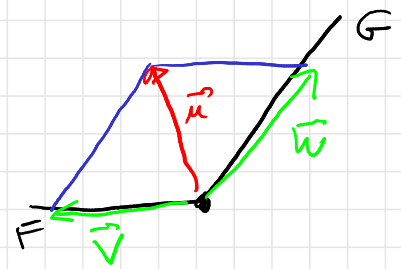
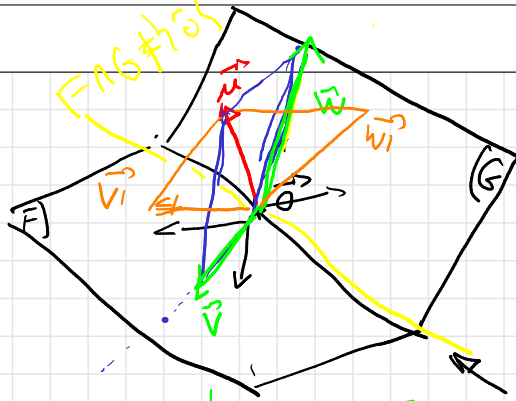
$F = \text{Vect}((1, 3, -1), (1, 1, 1))$   $G = \text{Vect}((1, 0, 1), (-1, 1, 0))$

on a  $F \subset \mathbb{R}^3$  et  $G \subset \mathbb{R}^3$  donc  $F + G \subset \mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$$

avec  $\vec{v}_1 \in F$   
et  $\vec{w}_1 \in G$

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \text{ avec } \vec{v} \in F \text{ et } \vec{w} \in G$$



$\vec{v}$  est une projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  de  $\vec{u}$   
 $\vec{v}$  n'est pas unique

Cette somme n'est pas directe !

Si  $G$  est un sous-espace de  $F$  et  $F$  est un sous-espace de  $E$ , alors  
 $F + G = F$  (somme de sous-espace)

## 5.2 Somme directe

**Définition 5.2.** On dit que deux sev  $F$  et  $G$  d'un espace vectoriel  $E$ , sont en somme directe si tout vecteur  $u$  de  $F + G$  s'écrit de manière unique  $u = v + w$  avec  $v \in F$  et  $w \in G$ . On note alors la somme  $F \oplus G$ .

$\oplus$  veut dire somme directe

**Proposition 5.1.** Deux sev  $F$  et  $G$  d'un espace vectoriel  $E$ , sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ .

$$A \subset B \text{ et } B \subset A \iff A = B$$

$\Rightarrow$  Si  $F$  et  $G$  sont en somme directe, alors

on sait que  $\vec{0}_E \in F$  et  $\vec{0}_E \in G$  donc  $\vec{0}_E \in F \cap G : \{\vec{0}_E\} \subset F \cap G$   
soit  $\vec{u} \in F \cap G$ , alors  $\vec{u} \in F$  et  $\vec{u} \in G$ . On peut écrire

$$\vec{u} = \vec{u} + \vec{0}_F \quad \text{avec } \vec{u} \in F \text{ et } \vec{0}_F \in G$$

$$\text{et } \vec{u} = \vec{0}_E + \vec{u} \quad \text{avec } \vec{0}_E \in F \text{ et } \vec{u} \in G$$

mais  $F$  et  $G$  sont en somme directe, donc la décomposition est unique

$\therefore$  donc  $\vec{u} = \vec{0}_E$  On a prouvé  $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$  donc  $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$

$\Leftarrow$  Si  $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$  alors on prend  $\vec{u} \in F + G$

on suppose que  $\vec{u} = v_1 + w_1$  et  $\vec{u} = v_2 + w_2$  avec  $v_1, v_2 \in F$  et  $w_1, w_2 \in G$

$$\text{alors } v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \iff v_1 - v_2 = w_2 - w_1 = z$$

$z$  est C.L. de vecteurs de  $F$  donc  $z \in F$  et  $z$  est C.L. de  $w_1$  et  $w_2$  dans  $G$

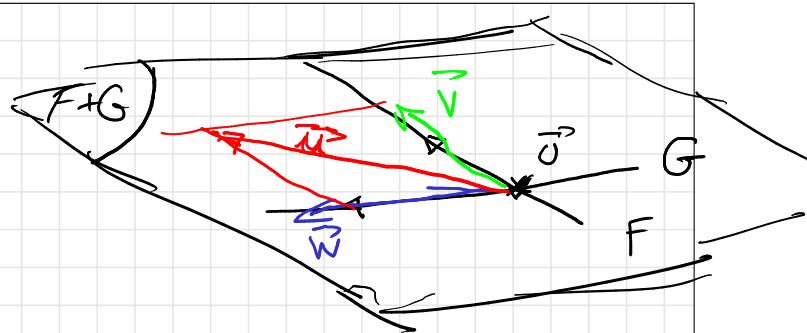
alors  $z \in G$  On a  $z \in F \cap G \Rightarrow z = \vec{0}_E \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 \\ w_1 = w_2 \end{cases}$

On a prouvé que toute décomposition dans  $F + G$  est unique

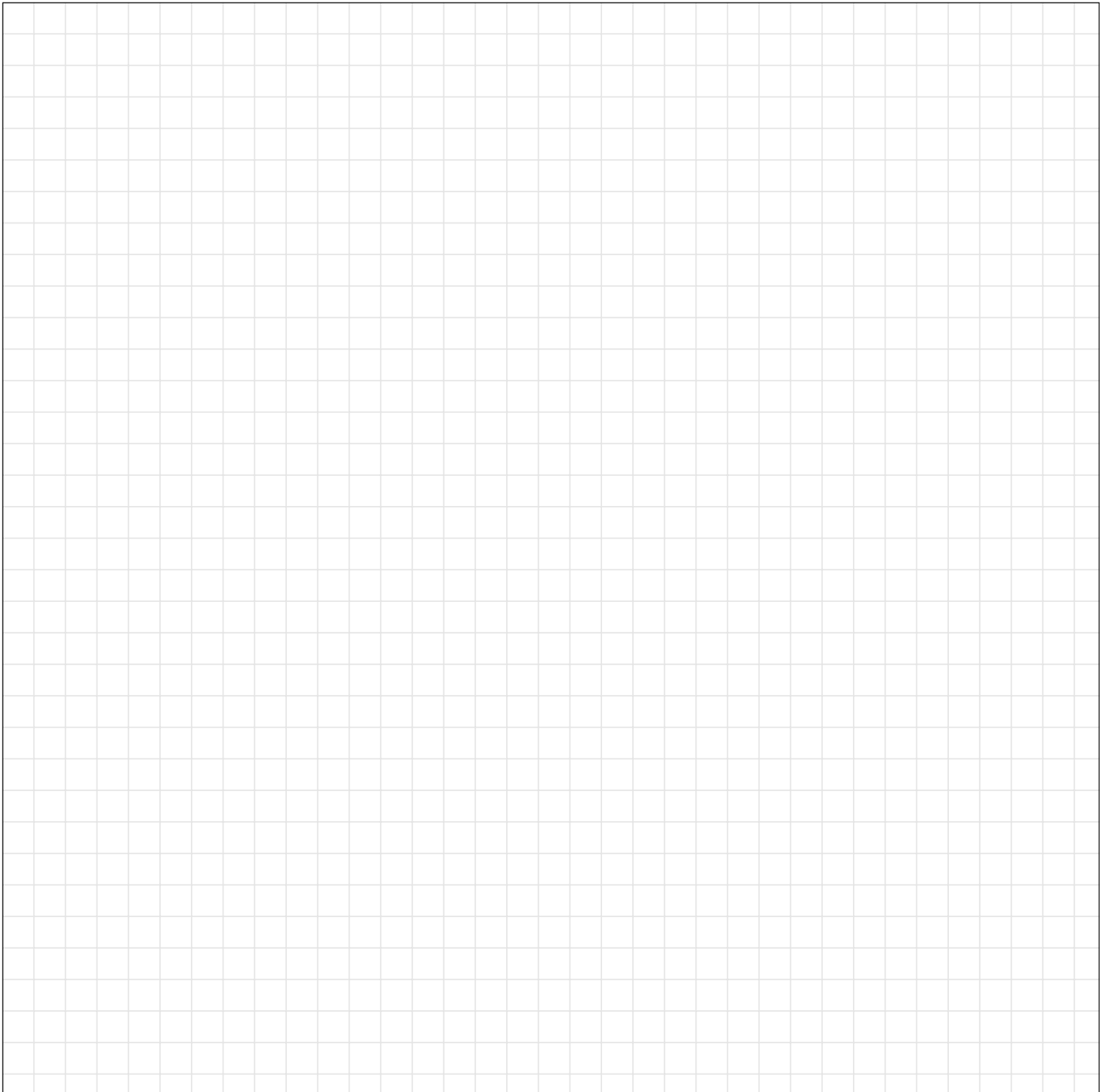
donc  $F$  et  $G$  sont en somme directe. on pourra écrire  $F \oplus G$  au lieu de  $F + G$



**Exemple 5.2.** Soit  $F = \text{Vect}((1, 3, -1))$  et  $G = \text{Vect}((1, 0, 1))$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe et déterminer  $F + G$ .  
dans  $E = \mathbb{R}^3$ .



**Exemple 5.3.** Soit  $F = \text{Vect}(X^2 + 1)$  et  $G = \text{Vect}(3X - 7)$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe et déterminer  $F + G$ .



### 5.3 Sous-espaces supplémentaires

**Définition 5.3.** On dit que deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont supplémentaires dans  $E$  si  $E = F + G$  et si  $F$  et  $G$  sont en somme directe :  $E = F \oplus G$ .

$\exists!$  "il existe un unique"

**Théorème 5.2.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

$$E = F \oplus G \iff \forall x \in E, \exists! y \in F : \exists! z \in G : x = y + z \text{ avec } y \in F \text{ et } z \in G$$

$$E = F \oplus G \iff E = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}$$

$E = F \oplus G \iff$  tout vecteur de  $E$  s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$

**Exemple 5.4.** Soit  $F$  le sev de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $2x + y - z = 0$  et  $G = \text{Vect}((1, 0, 1))$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .  $E = \mathbb{R}^3$

Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  on cherche  $v \in F$  et  $w \in G$  tel que  $u = v + w$   
 puis  $w \in G \iff$  il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $w = \alpha(1, 0, 1)$

$$v \in F \iff 2x_v + y_v - z_v = 0 \text{ avec } v = (x_v, y_v, z_v)$$

on cherche  $\alpha, x_v, y_v, z_v$  tels que  $u = v + w$

$$\iff \begin{cases} x_v + \alpha = x \\ y_v = y \\ z_v + \alpha = z \\ 2x_v + y_v - z_v = 0 \end{cases} \quad \text{on résout le système :}$$

$$\text{on trouve } 2(x - \alpha) + y - (z - \alpha) = 0$$

$$\text{d'où } -\alpha + 2x + y - z = 0 \Rightarrow \alpha = 2x + y - z$$

$$\text{puis } x_v = x - \alpha, y_v = y, z_v = z - \alpha$$

$$\text{on a donc } w = (2x + y - z)(1, 0, 1) \in G \text{ et } v = (-x - y + z, y, -2x - y + 2z) \in F$$

Tel que  $u = v + w$  on a prouvé que  $\mathbb{R}^3 \subseteq F + G$   
 or comme on a  $F \subset \mathbb{R}^3$   $G \subset \mathbb{R}^3$ , on a  $F + G \subset \mathbb{R}^3$  }  $F + G = \mathbb{R}^3$

Soit  $u \in F \cap G$  alors  $u = (\alpha, 0, \alpha)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  car  $u \in G$

et les coordonnées de  $u$  vérifient l'éq  $2x + y - z = 0$

$$\text{ce qui donne } 2\alpha + 0 - \alpha = 0 \iff \alpha = 0 \text{ donc } u = \vec{0}$$

on a donc  $F \cap G = \{\vec{0}\}$  et on a toujours  $\{\vec{0}\} \subset F \cap G$

donc  $F \cap G = \{\vec{0}\} \iff F$  et  $G$  sont en somme directe

donc  $F \oplus G = \mathbb{R}^3$  :  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

exemple 174  $F = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = P(2) = 0 \}$  et  $G = \mathbb{R}_1[X]$   
sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}_2[X]$

À analyser  
= unicité  
 $\Leftrightarrow$   
 $F \cap G = \{0\}$

Soit  $R \in \mathbb{R}_2[X]$ . On suppose que  $R$  se décompose en  $R = P + Q$  avec  $P \in F$  et  $Q \in G$ . On écrit  $Q = ax + b$ . La relation  $R = P + Q$  donne

$$\begin{cases} a + b = R(1) \\ 2a + b = R(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \tilde{R}(2) - \tilde{R}(1) \\ b = 2\tilde{R}(1) - \tilde{R}(2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{d'où } a \text{ et } b \text{ sont uniques} \\ \text{donc } Q \text{ est unique} \end{array}$$

et comme  $P = R - Q$  alors  $P$  est unique.

on a prouvé que si la décomposition existe, elle est unique.

Symétriser  
existence

Soit  $R \in \mathbb{R}_2[X]$ . On pose  $Q = (\tilde{R}(2) - \tilde{R}(1))X + 2\tilde{R}(1) - \tilde{R}(2)$   
c'est un polynôme de degré  $\leq 1$  au plus. Donc  $Q \in \mathbb{R}_1[X] = G$   
on pose ensuite  $P = R - Q$ . On vérifie que

$$\tilde{P}(1) = \tilde{R}(1) - \tilde{Q}(1) = 0 \quad \text{car } \tilde{Q}(1) = \tilde{R}(2) - \tilde{R}(1) + 2\tilde{R}(1) - \tilde{R}(2) = \tilde{R}(1)$$

et de même  $\tilde{P}(2) = \tilde{R}(2) - \tilde{Q}(2) = 0$

donc  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  et il vérifie  $\tilde{P}(2) = \tilde{P}(1) = 0$  donc  $P \in F$

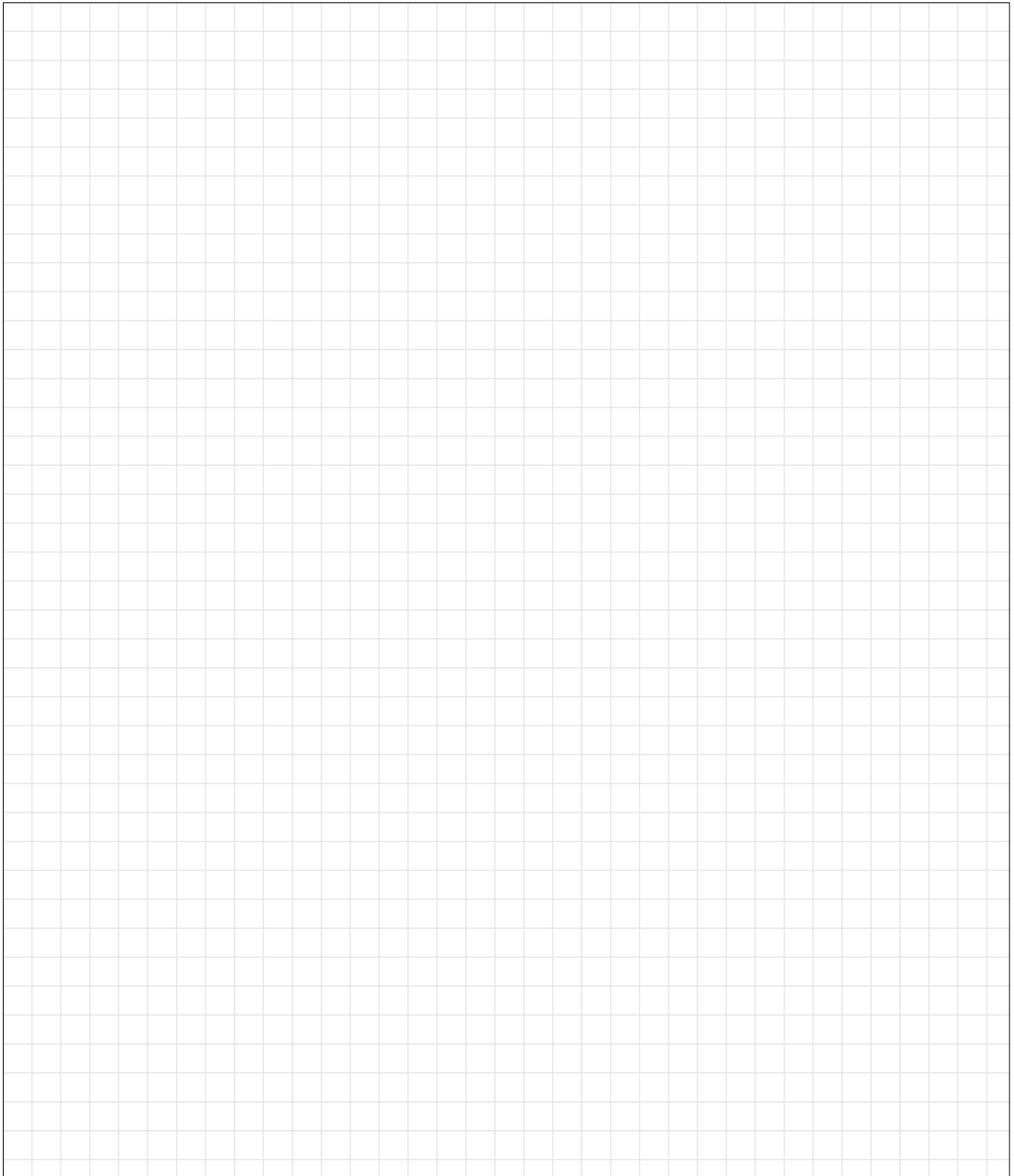
On a prouvé que la décomposition existe

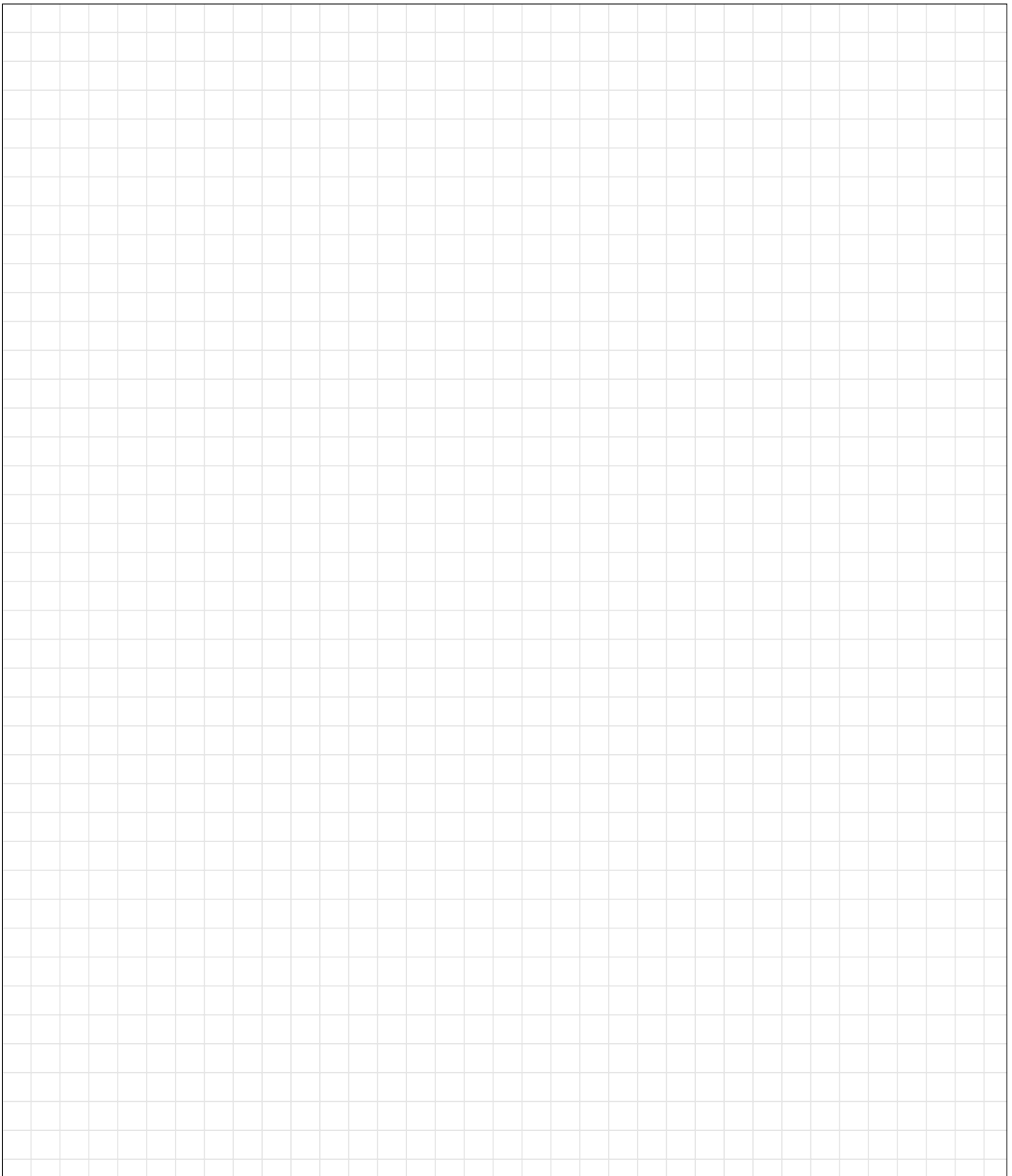
on a montré que tout polynôme  $R \in \mathbb{R}_2[X]$  se écrit de manière unique

$$R = P + Q \quad \text{avec } P \in F \text{ et } Q \in G \quad \text{donc} \quad F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$$

$F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**Exemple 5.5.** Montrer que les fonctions paires et les fonctions impaires sont deux sev supplémentaires de l'espace vectoriel  $E$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .





## 5.4 Base adaptée à une somme directe.

**Proposition 5.3.** Si  $F$  et  $G$  sont deux sev en somme directe et si  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une base de  $F$  et  $(e_{p+1}, \dots, e_q)$  est une base de  $G$ , alors  $(e_1, \dots, e_q)$  est une base de la somme directe  $F \oplus G$ .  
On dit qu'une telle base est adaptée à la somme directe.

Démonstration.

Soit  $u \in F \oplus G$  alors  $u$  s'écrit  $u = v + w$  avec  $v \in F$  et  $w \in G$   
Mais  $v$  s'écrit  $v = \sum_{i=1}^p v_i e_i$  avec  $(v_1, \dots, v_p)$  coordonnées (scalaires) de  $v$   
et  $w$  s'écrit  $w = \sum_{i=p+1}^q w_i e_i$  avec  $(w_{p+1}, \dots, w_q)$  coordonnées de  $w$ .

donc  $u = \sum_{i=1}^p v_i e_i + \sum_{i=p+1}^q w_i e_i$  :  $u$  est CL de  $(e_1, e_2, \dots, e_q)$

on en déduit que tout vecteur de  $F \oplus G$  est CL de  $(e_1, \dots, e_q)$

donc  $(e_1, \dots, e_q)$  est une famille génératrice de  $F \oplus G$

on écrit  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_q e_q = \vec{0}$  avec  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  scalaires

→ on montre que les  $(\lambda_i)$  sont nuls :

on a  $\sum_{i=1}^q \lambda_i e_i = \vec{0}$  qui s'écrit  $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^q \lambda_i e_i = \vec{0}$

alors  $w_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = - \sum_{i=p+1}^q \lambda_i e_i$  on a  $w_1 \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$  donc  $w_1 \in F \cap G$   
et  $w_1 \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_q) = G$

mais  $F$  et  $G$  sont en somme directe donc  $F \cap G = \{\vec{0}\} \Rightarrow w_1 = \vec{0}$

donc  $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = \vec{0}$  et  $\sum_{i=p+1}^q \lambda_i e_i = \vec{0}$  mais la famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base donc elle est libre donc  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

et  $(e_{p+1}, \dots, e_q)$  est une base donc elle est libre donc  $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \dots = \lambda_q = 0$

On en déduit que  $(e_1, e_2, \dots, e_q)$  est libre et donc c'est une base de  $F \oplus G$

□

**Proposition 5.4.** Si  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une base de  $F$  et  $(e_{p+1}, \dots, e_q)$  est une base de  $G$ , telles que  $(e_1, \dots, e_q)$  est une base de  $E$ , alors  $E = F \oplus G$ .

**Théorème 5.5.**

Si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une famille libre d'un espace vectoriel, alors  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$  et  $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$  sont en somme directe.

Si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors  $E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) \oplus \text{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$  pour tout  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

exemple : Montrer que  $F$  d'équation  $2x + y - z = 0$  et  $G = \text{Vect}((1, 3, 1))$  sont supplémentaires dans  $E = \mathbb{R}^3$ .

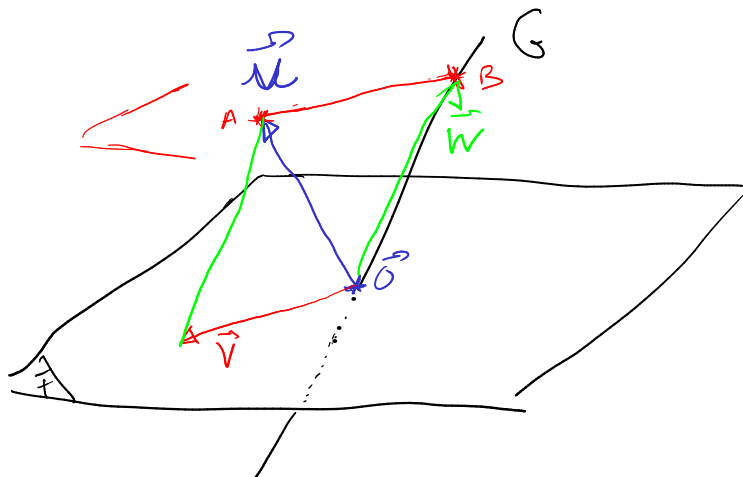
Le vecteur  $e_3 = (1, 3, 1)$  est une base de  $G$ . Et les vecteurs  $(e_1 = (0, 1, 1), e_2 = (1, 0, 2))$  sont deux vecteurs non colinéaires du plan  $F$  choisis en tant qu'une base. Les trois vecteurs  $(e_1, e_2, e_3)$  ne sont pas coplanaires car

$$[e_1, e_2, e_3] = (e_1 \wedge e_2) \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Alors  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Alors  $\text{Vect}(e_1, e_2) \oplus \text{Vect}(e_3) = \mathbb{R}^3$  soit  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$  !

Tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  se décompose de manière unique en un vecteur de  $F$  et un vecteur de  $G$ .



$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$   
 $\vec{v} \in F, \vec{w} \in G$   
 définissent un  $\square$   
 de diagonale  $\vec{u}$   
 avec les côtés  
 $\parallel \vec{v} \in F$  et  $\vec{w} \in G$ .



**Exemple 5.6.** Montrons que  $\mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_2[X] \oplus \text{Vect}(X^3)$

La famille  $(1, x, x^2, x^3)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$   
d'où  $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(1, x, x^2) \oplus \text{Vect}(x^3)$  par l'unicité  
d'où  $\mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_2[X] \oplus \text{Vect}(x^3)$

Exercice (sans utiliser de base)

Montrer que l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0 et l'ensemble des suites constantes sont des sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.

## 6 Applications linéaires et familles de vecteurs

$$u(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 u(e_1) + \alpha_2 u(e_2)$$

### 6.1 Image d'une base par une application linéaire

**Théorème 6.1.** Soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire et  $(e_i)_{i=1, \dots, n}$  une base de  $E$ . *de l'espace de départ*

- La famille  $(u(e_i))_{i=1, \dots, n}$  est une famille génératrice de  $\text{Im } u$ .
- $u$  est surjective  $\Leftrightarrow (u(e_i))_{i=1, \dots, n}$  est génératrice de  $F$ .  $(\Leftrightarrow \text{Im}(u) = F)$
- $u$  est injective  $\Leftrightarrow (u(e_i))_{i=1, \dots, n}$  est libre dans  $F$ .  $(\Leftrightarrow \text{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\})$
- $u$  est bijective  $\Leftrightarrow (u(e_i))_{i=1, \dots, n}$  est une base de  $F$ .

*l'image d'une base de  $E$  est une base de  $F$ .*

Démonstration.

- Soit  $x \in E$ , il existe  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  avec  $(x_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{K}^n$   
alors  $u(x) = u(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$  par linéarité de  $u$   
toute image par  $u$  est CL des vecteurs  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  : ils sont une famille génératrice de  $\text{Im}(u)$ .
- trivial
- Soit  $x \in \text{Ker } u \Leftrightarrow u(x) = \vec{0}_F$ . On écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  avec  $(x_i)$  scalaires  
 $x \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \vec{0}_F \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) = \vec{0}_F$   
Si  $(u(e_i))$  est libre, alors  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  donc  $x = \vec{0}_E$  donc  $\text{Ker } u = \{\vec{0}\}$   
et  $u$  est injective.
- Si  $u$  est injective, Soit  $\lambda_1 u(e_1) + \lambda_2 u(e_2) + \dots + \lambda_n u(e_n) = \vec{0}_F$   
avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  scalaires. On a  $u(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \vec{0}_F$  par linéarité  
mais  $u$  est injective donc  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \vec{0}_E$   
et  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base donc elle est libre donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$   
et  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est libre

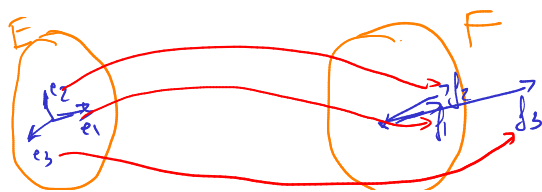
Exemple :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$

①  $f$  est linéaire car les coordonnées de  $f(x, y)$  sont des combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent  $x$  et  $y$

② On prend une base :  $(\overset{e_1}{(2, 3)}, \overset{e_2}{(-1, 2)})$  car 2 vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{R}^2$  formant une base.  
on calcule leurs images  $f(e_1) = f(2, 3) = (7, -1)$  note  $v_1$   
et  $f(e_2) = f(-1, 2) = (0, -3)$  note  $v_2$  ( $v_1, v_2$  ne sont pas colinéaires alors ils forment une base de  $\mathbb{R}^2$ ). L'image de la base  $(e_1, e_2)$  est la base  $(v_1, v_2)$   
alors  $f$  est bijective c'est à dire que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$

**Corollaire 6.2.** Soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire.

$u$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  si et seulement si l'image d'une base de  $E$  par  $u$  est une base de  $F$ .



## 6.2 Application linéaire définie par l'image d'une base

**Théorème 6.3.** Étant données une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$  et une famille d'autant de vecteurs  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  dans  $F$ , il existe une unique application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  telle que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u(e_i) = f_i$ .  
 Soit  $x \in E$  s'écrit de manière unique  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  alors on pose  $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i$  on définit  $u: E \rightarrow F$

**Exemple 6.1.** Soit  $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par  $f(1) = X^2 + 2X$ ,  $f(X-1) = X^2 + 5$ ,  $f((X-1)^2) = 2X - 4$ . Déterminer l'image d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ .

la famille  $(1, (X-1), (X-1)^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  car tout vecteur  $P$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  s'écrit:  $P = P(1)1 + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2$   
 et cette écriture est unique d'après la formule de Taylor.

Alors la définition de  $f$  nous donne

$$f(P) = f\left(P(1)1 + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2\right)$$

Comme  $f$  est linéaire,

$$f(P) = P(1) \cdot f(1) + P'(1) f(X-1) + \frac{P''(1)}{2} f((X-1)^2)$$

$$f(P) = P(1)(X^2 + 2X) + P'(1)(X^2 + 5) + \frac{P''(1)}{2}(2X - 4)$$

Si  $P = aX^2 + bX + c$   $P(1) = a + b + c$   $P'(1) = 2a + b$   $P''(1) = 2a$   
 d'où  $f(aX^2 + bX + c) = (a + b + c)(X^2 + 2X) + (2a + b)(X^2 + 5) + a(2X - 4)$

**Exemple** Donner l'expression de  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $g$  est linéaire et  $g(1, -1) = (2, 3)$  et  $g(2, 1) = (1, -2)$   $g(x, y)$  ?

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on cherche  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $(x, y) = a(1, -1) + b(2, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ -a + b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{x+y}{3} \\ a = \frac{x-2y}{3} \end{cases}$$

tout vecteur  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de  $((1, -1), (2, 1))$  donc c'est une base de  $\mathbb{R}^2$  et

$$g(x, y) = g\left(a(1, -1) + b(2, 1)\right) = a g(1, -1) + b g(2, 1)$$

où  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$   $g(x, y) = \frac{x-2y}{3} (2, 3) + \frac{x+y}{3} (1, -2)$   
 $g(x, y) = \frac{1}{3} (3x - 3y \quad 1x - 8y)$

Remarque  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (4x - 3y, 2x + 7y)$

$h$  est linéaire et  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$h(x, y) = x(4, 2) + y(-3, 7)$$

Alors toutes les images sont toutes les combinaisons linéaires de  $(4, 2)$  et  $(-3, 7)$

$$\text{alors } \text{Im}(h) = \text{Vect}((4, 2), (-3, 7))$$

$$\nearrow \text{Ceci} = \mathbb{R}^2 = \text{Im}(h)$$

Autre remarque  $h(\underline{(1, 0)}) = \underline{(4, 2)}$  et  $h(\underline{(0, 1)}) = \underline{(-3, 7)}$

$(4, 2)$  et  $(-3, 7)$  sont les images de la base canonique.

$((1, 0), (0, 1))$  base canonique de  $\mathbb{R}^2$

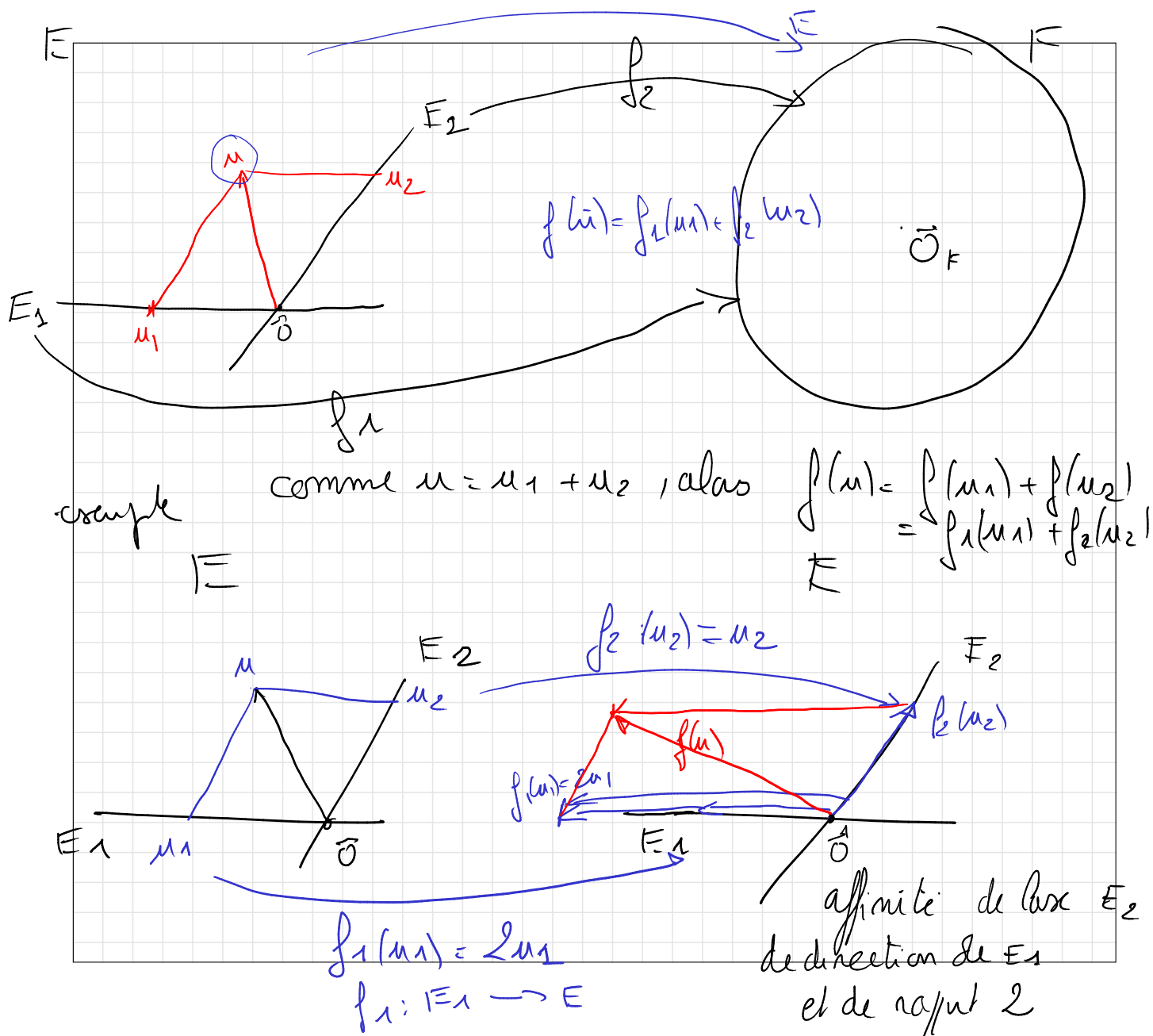
$((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  — de  $\mathbb{R}^3$ .

**Corollaire 6.4.** Soit  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .  
 $\forall u \in E, f(u) = g(u) \iff f = g \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = g(e_i)$ .  
 Deux applications linéaires sont égales si et seulement si leurs images d'une base sont les mêmes.

**Corollaire 6.5.** Une application linéaire est nulle si et seulement si l'image d'une base par cette application linéaire est la famille nulle.

### 6.3 Application linéaire définie sur deux sev supplémentaires

**Proposition 6.6.** Soit  $E_1, E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ . Soit  $f_1 : E_1 \rightarrow F$  et  $f_2 : E_2 \rightarrow F$  deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire  $f : E \rightarrow F$  telle que  $f|_{E_1} = f_1$  et  $f|_{E_2} = f_2$ . C'est-à-dire  $\forall x_1 \in E_1, f(x_1) = f_1(x_1)$  et  $\forall x_2 \in E_2, f(x_2) = f_2(x_2)$ .



## 7 Applications linéaires essentielles

### 7.1 Homothéties *vectorielles*

**Définition 7.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle homothétie toute application  $f : E \rightarrow E$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = \lambda \cdot x$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  un scalaire non nul fixé.

**Proposition 7.1.** Une homothétie de  $E$  est un automorphisme de  $E$ .

L'homothétie de rapport  $\lambda \in \mathbb{K}$  de l'espace vectoriel  $E$  est l'application  $\lambda \cdot \text{id}_E$ .

*C'est un endomorphisme*

*homothétie affine  $\neq$  vectorielle*



*homothétie vectorielle de rapport  $\lambda$*   
(centre =  $\vec{0}$  ou origine)

*c'est  $\lambda \text{id}_E : E \rightarrow E$  est linéaire*  
 $u \mapsto \lambda \cdot u$

*bijective car  $\lambda \neq 0$  : automorphisme de  $E$*

*exemple  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$*

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{5} (x, y, z)$$

*homothétie vectorielle de rapport  $\frac{1}{5}$*

$$f = \frac{1}{5} \text{id}_{\mathbb{R}^3}$$

Remarque : pour une homothétie vectorielle  $h_\lambda \in \mathcal{L}(E)$   
 $\forall x \in E$ ,  $h_\lambda(x)$  et  $x$  sont colinéaires -

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto 3(x, y, 0)$$

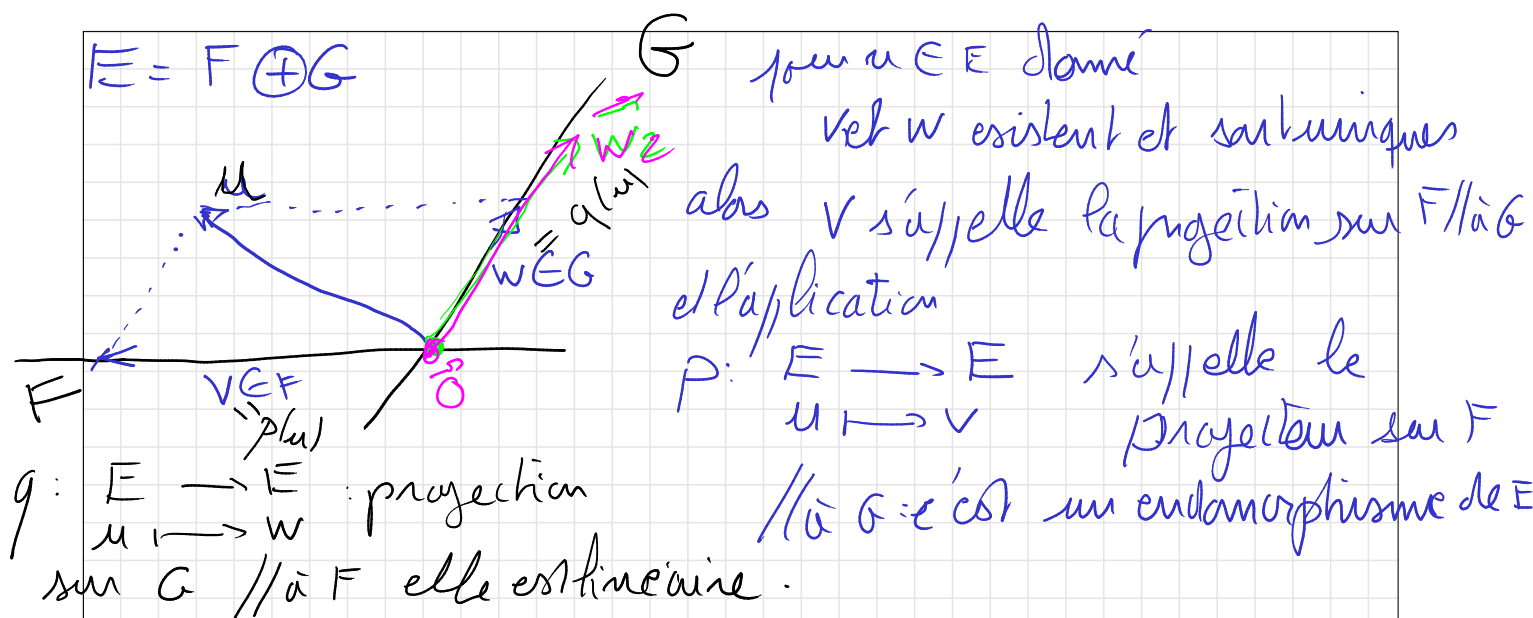
*ressemble à mais n'est pas une homothétie*

## 7.2 Projecteurs

**Définition 7.2.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

On appelle projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , l'application  $p : E \rightarrow E$  qui à  $x \in E$  associe l'unique vecteur  $y \in F$  tel que  $x = y + z$  avec  $z \in G$ .

Une telle application est aussi appelée projecteur.



Remarques : (1)  $p + q = \text{id}_E$  car  $\forall u \in E (p+q)(u) = p(u) + q(u) = v + w = u$

(2)  $\text{Ker}(p) = ? =$  vecteurs dont la projection est nulle : tous les vecteurs de  $G$

$\text{Ker}(p) = G$  et  $\text{Im}(p) = F$

car  $\forall u \in E p(u) \in F$  donc  $\text{Im}(p) \subset F$   
 et  $\forall v \in F p(v) = v$  donc  $F \subset \text{Im}(p)$

un projecteur  $p$  projette sur son image // à son noyau

exemple : projection dans  $\mathbb{R}^2$  sur la droite  $(1, 2)$  // à  $(-1, 1)$

$F = \text{Vect}((1, 2))$   $G = \text{Vect}((-1, 1))$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on cherche  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $(x, y) = \alpha(1, 2) + \beta(-1, 1)$   
 (alors on aura pour  $u(x, y)$  un vecteur  $v \in F$  et  $w \in G$  tels que  $u = v + w$ )

$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) : \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{cases} \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) : \begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{3} \\ \beta = -\frac{2x+y}{3} \end{cases}$

le système a une et une seule solution  
 donc pour tout vecteur  $u(x, y) \in \mathbb{R}^2$  il existe un unique vecteur  $v \in F$   
 et un unique vecteur  $w \in G$  tels que  $u = v + w$

De plus  $v = \alpha(1, 2) = \frac{x+y}{3}(1, 2) = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{2x+2y}{3}\right)$

$p(x, y) = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{2x+2y}{3}\right)$  est la projection sur  $F$  // à  $G$

bonus

$q(x, y) = \beta(-1, 1) = -\frac{2x+y}{3}(-1, 1)$   
 projection sur  $G$  // à  $F$

$p+q = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$



exempl:  $g(x,y) = (4x-2y, 6x-3y)$  est-ce une projection ?  
 ①  $g$  est linéaire ②  $g \circ g = g$  ③ calculable  $\text{Im } g$  ④ calculable  $\text{Ker } g$

**Théorème 7.2.** Soit  $p$  une application de  $E$  dans  $E$ .

$p$  est un projecteur si et seulement si  $p$  est linéaire et  $p \circ p = p$ .

Dans ce cas,  $p$  projette sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$ .

Démonstration.

- Si  $p$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Soit  $x \in E$  et  $y \in E$  et  $\alpha \in K$ .  
 Les vecteurs  $x$  et  $y$  se décomposent en  $x = x_F + x_G$  et  $y = y_F + y_G$  avec  $x_F, y_F \in F$  et  $x_G, y_G \in G$ . On a  $p(x) = x_F$  et  $p(y) = y_F$ .  
 Alors  $\alpha x + y$  se décompose en  $\alpha x + y = (\alpha x_F + y_F) + (\alpha x_G + y_G)$  avec  $\alpha x_F + y_F \in F$  et  $\alpha x_G + y_G \in G$  car  $F, G$  sont des sev.  
 Alors on a  $p(\alpha x + y) = \alpha x_F + y_F = \alpha p(x) + p(y)$ . L'application  $p$  est donc linéaire.  
 De plus, pour  $x \in E$ , que l'on écrit  $x = x_F + x_G$ , on a  $p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x_F)$  mais comme  $x_F \in F$ , on a  $x_F = x_F + 0$  donc  $p(x_F) = x_F$  et finalement,  $p \circ p(x) = p(x)$ . On conclut  $p \circ p = p$ .
- Réciproquement, si  $p$  est linéaire et  $p \circ p = p$ , alors on pose  $G = \text{Ker } p$  et  $F = \text{Im } p$ .  
 Soit  $y \in F \cap G$ ,  $y$  est une image donc il existe  $x \in E$  tel que  $y = p(x)$  et  $y \in G$  donc  $p(y) = 0$   
 $\implies y = p(x) = p \circ p(x) = p(p(x)) = p(y) = 0$ . Donc  $F \cap G \subset \{0\}$ .  
 Et, comme on a toujours l'inclusion réciproque,  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ .  
 Soit  $x \in E$ , alors  $x$  s'écrit  $x = p(x) + (x - p(x))$  avec  $p(x) \in F$  et  $x - p(x) \in G$  car  $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$ . Donc  $E = F + G$ .  
 Alors on a  $E = F \oplus G$  et la relation  $x = p(x) + (x - p(x))$  prouve que  $p$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .
- Enfin, si  $p$  est un projecteur, alors les images sont des éléments de  $F$  donc  $\text{Im } p \subset F$ .  
 Et réciproquement tout élément  $z \in F$  est sa propre image  $p(z) = z$  donc  $F \subset \text{Im } p$ . On en déduit  $\text{Im } p = F$ .  
 Les éléments  $u \in G$  s'écrivent  $u = 0 + u$  avec  $0 \in F$  et  $u \in G$  donc  $p(u) = 0 \implies u \in \text{Ker } p$ . On a donc  $G \subset \text{Ker } p$ .  
 Réciproquement, si  $p(u) = 0$  pour  $u \in E$ , alors  $u$  s'écrit  $u = 0 + u_G$  avec  $u_G \in G$ . On en déduit que  $u \in G$  ce qui prouve  $\text{Ker } p \subset G$ . On a donc  $\text{Ker } p = G$ .

□

**Remarque 7.1.** Pour étudier une projection  $p$ , on cherche les vecteurs invariants :  $p(x) = x \iff (p - \text{id})(x) = \vec{0}$  car, pour une projection,  $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id})$ .

**Exemple 7.1.** Montrons que  $f(x, y) = \frac{1}{5}(6x - 2y, 3x - y)$  est une projection.

On calcule  $f \circ f(x, y) = \frac{1}{5}(6X - 2Y, 3X - Y)$  avec  $X = \frac{6x - 2y}{5}$  et  $Y = \frac{3x - y}{5}$ .

Ce qui donne  $f \circ f(x, y) = \frac{1}{25}(30x - 10y, 15x - 5y) = f(x, y)$  pour tous  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Comme  $f$  est aussi linéaire,  $f$  est une projection.

On cherche les vecteurs invariants :  $f(x, y) = (x, y) \iff x - 2y = 0 \iff (x, y) \in \text{Vect}(2, 1)$ . Donc  $\text{Im } f = \text{Vect}((2, 1))$ .

Et le noyau de  $f$  :  $f(x, y) = (0, 0) \iff 3x - y = 0 \iff (x, y) \in \text{Vect}(1, 3)$ . Donc  $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 3))$ .

Conclusion :  $f$  est la projection sur  $\text{Vect}((2, 1))$  parallèlement à  $\text{Vect}((1, 3))$

### 7.3 Symétries

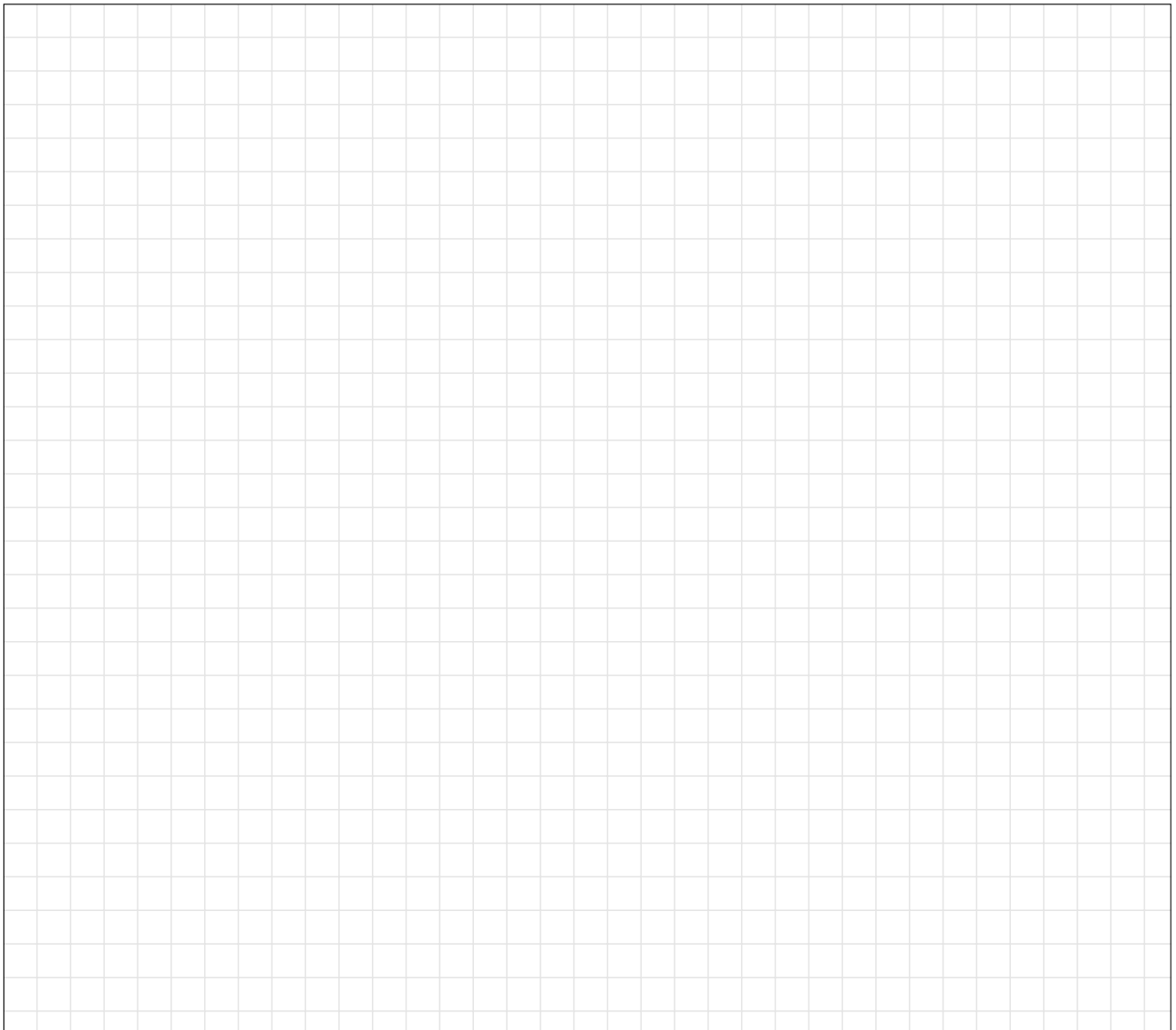
**Définition 7.3.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On appelle symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , l'application  $s : E \longrightarrow E$  qui à  $x$  s'écrivant  $x = y + z$  avec  $y \in F$  et  $z \in G$  associe  $s(x) = y - z$ .

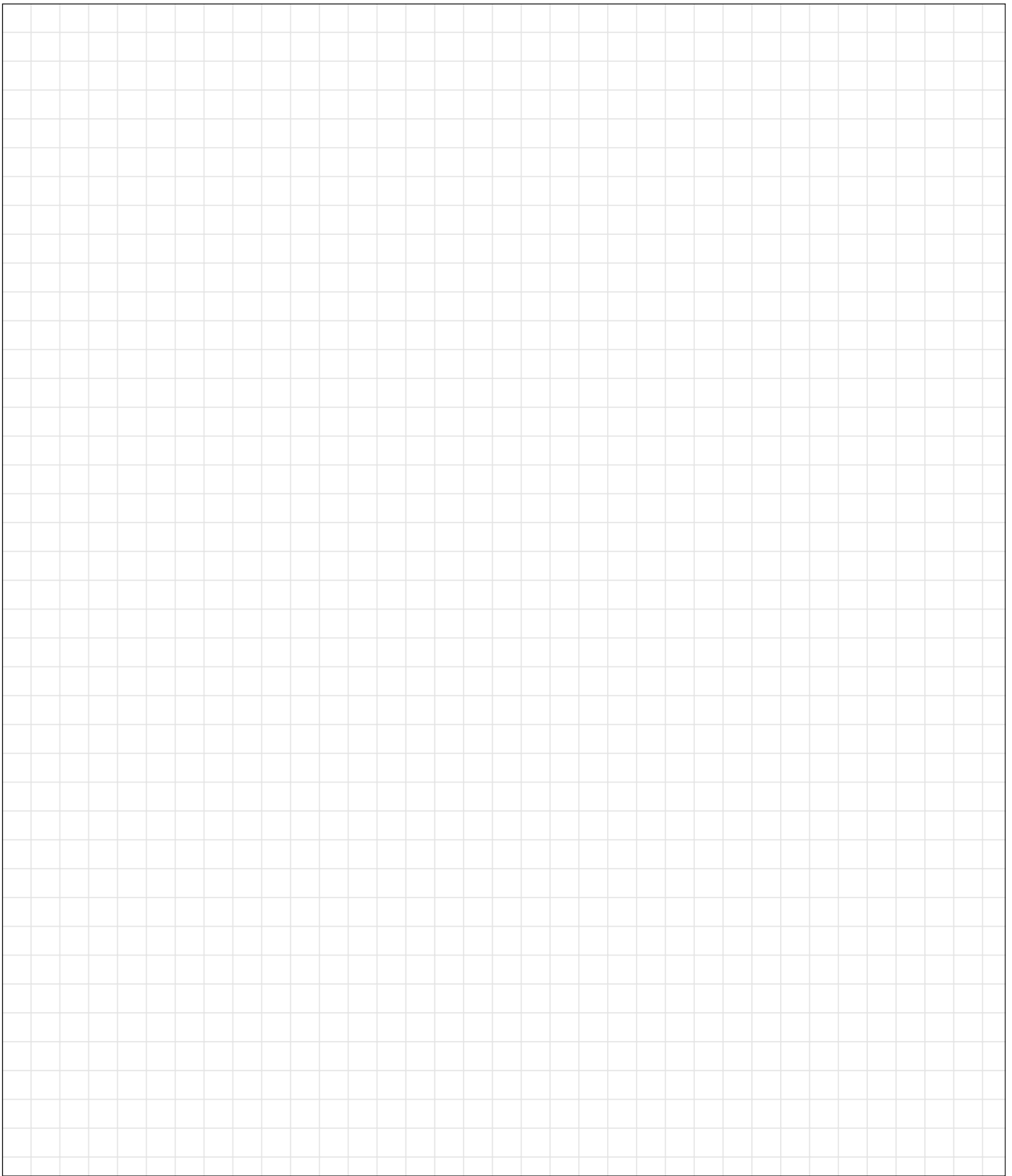
**Proposition 7.3.** Une symétrie  $s$  de  $E$  est un automorphisme involutif de  $E$  : i.e.  $s \circ s = s^2 = \text{id}_E$ .

**Théorème 7.4.** Soit  $s$  une application de  $E$  dans  $E$ .

$s$  est une symétrie si et seulement si  $s$  est linéaire et  $s \circ s = \text{id}_E$ .

Dans ce cas,  $s$  est une symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$  parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ .





exemple On  $g(x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$  est un projecteur.  
 (1)  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  (2)  $g \circ g = g$  (3)  $\text{Im}(g)$  (4)  $\text{Ker}(g)$ .

\*  $g$  est linéaire de  $\mathbb{R}^2$  car les coordonnées dans  $\mathbb{R}^2$  de l'image  $g(x, y)$  sont des combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent  $(x, y)$   
 donc  $g$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

\* Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on pose  $(x, y) = g(x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$   
 on calcule  $g \circ g(x, y) = g(x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$   
 $= (4(4x - 2y) - 2(6x - 3y), 6(4x - 2y) - 3(6x - 3y))$   
 $= (4x - 2y, 6x - 3y) = g(x, y)$

donc  $g \circ g = g$   
 Alors  $g$  est un projecteur.

\* On a pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$   $g(x, y) = x(4, 6) + y(-2, -3)$   
 alors  $\text{Im } g = \text{Vect}((4, 6), (-2, -3)) = \text{Vect}((2, 3))$   
 car  $(4, 6)$  et  $(-2, -3)$  sont colinéaires à  $(2, 3)$

\* On résout  $g(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \end{cases}$  qui a pour solution  $\text{Vect}((-1, 2)) = \text{Ker } g$

Alors  $g$  est la projection sur la droite  $\text{Vect}((2, 3))$   
 parallèlement à la droite  $\text{Vect}((-1, 2))$

