

# Chapitre 19 - Matrices et applications linéaires

dim finie

## 1 Matrices d'une application linéaire

vecteur  
base — matrice

### 1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

**Définition 1.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Soit  $x \in E$ , on appelle matrice de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ , la matrice colonne notée  $M_{\mathcal{B}}(x)$  dont les coefficients sont les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

Si  $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ , alors  $M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  }  $n$  lignes avec  $n = \dim E$ .

La matrice dans la base  $\mathcal{B}$  d'une famille de vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $E$  notée  $M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$  est la matrice dont la  $j$ -ième colonne pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  est constituée des  $n$  coordonnées de  $x_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Si pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$  alors

$$M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p) = (a_{ij})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}} \right\} n \text{ lignes}$$

$a_{ij} = \text{coordonnée selon } e_i \text{ de } x_j$

**Remarque 1.1.** La matrice de la famille  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice identité  $I_n$ .

**Exemple 1.1.** Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , on note  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  une base. Soit  $\vec{u} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$  et  $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ . Donner les matrices  $M_{(e_1, e_2)}(\vec{u}, \vec{v})$  et  $M_{(u, v)}(e_1, e_2)$ .

La première matrice se trouve directement en écrivant, en colonne, les coordonnées dans la base

$$(e_1, e_2) \text{ de chaque vecteur } u, v : M_{(e_1, e_2)}(u, v) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{(e_1, e_2)}(u, v)$$

**Remarque :** On pourra noter au brouillon les vecteurs en colonne haut dessus de la matrice et sur

$$\text{le côté les vecteurs de la base } \begin{pmatrix} u & v \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

Mais, CELA NE DOIT PAS APPARAÎTRE SUR VOTRE COPIE DE DEVOIR.

Pour la matrice  $M_{(u, v)}(e_1, e_2)$ , il faut d'abord calculer les coordonnées de  $(e_1, e_2)$  : on cherche  $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$  tels que

$$\begin{cases} e_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v \\ e_2 = \alpha_2 u + \beta_2 v \end{cases}$$

On résout le système suivant par opérations sur les lignes :

$$\begin{cases} u = 4e_1 - 3e_2 \\ v = 2e_1 - e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - 3v = -2e_1 \\ u - 2v = -e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(-u + 3v) \\ e_2 = -u + 2v \end{cases}$$

$$\text{Ce qui nous donne la matrice } \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ -1/2 & -1 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \text{ soit } M_{(u, v)}(e_1, e_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**Exemple 1.2.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , écrivons la matrice de  $u = (1, 2, -1)$ ,  $v = (1, 3, 0)$ ,  $w = (-2, 0, 1)$ , et  $t = (0, 0, -1)$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0$  de  $\mathbb{R}^3$ .

On trouve 
$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \text{4 vecteurs} \\ u & v & w & t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{matrix} \left/ \begin{matrix} \text{dim } 3 \\ \text{soit} \end{matrix} \right. M_{\mathcal{B}_0}(u, v, w, t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple: Dans  $\mathbb{R}_2[X]$ , matrice de  $P = -5X^2 + 7X + 1$

dans la base canonique  $\mathcal{B}_0 = (X^2, X, 1)$

puis dans la base  $(1, (X-2), (X-2)^2) = \mathcal{B}_1$ .

$$P' = -10X + 7$$

$$P'' = -10$$

$$\begin{aligned} \text{on a } P &= P(2) \cdot 1 + P'(2)(X-2) + \frac{P''(2)}{2!}(X-2)^2 \\ &= -5 - 13(X-2) - \frac{10}{2}(X-2)^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(P) = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} X^2 \\ X \\ 1 \end{matrix}$$

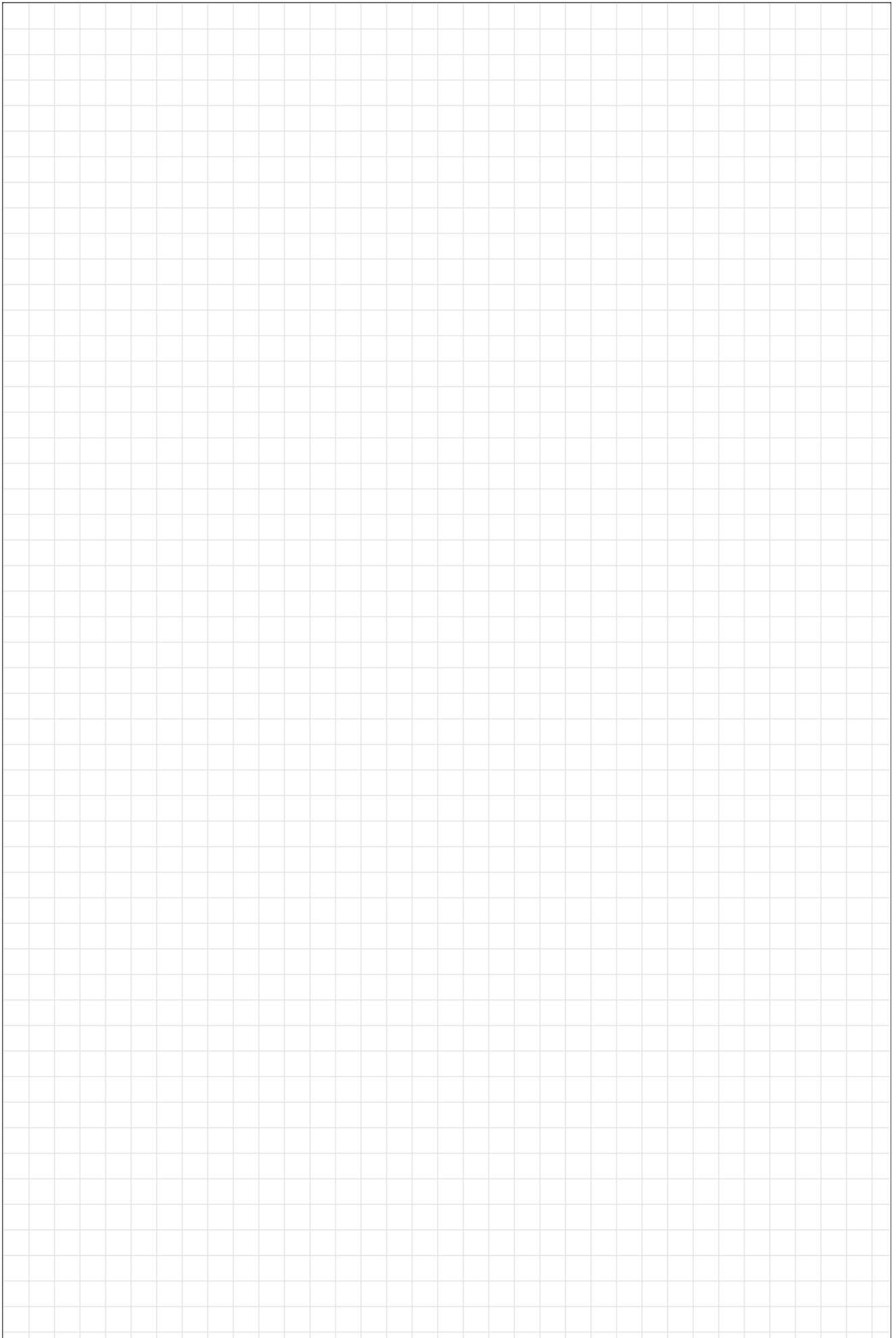
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(P) = \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{matrix}$$

Remarque :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(1, X-2, (X-2)^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0)$$

généralement

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n \quad \text{pour } \mathcal{B} \text{ une base.}$$



$$E, \mathcal{B}_1 \xrightarrow{u} F, \mathcal{B}_2 \quad T.D. \odot$$

## 1.2 Matrice d'une application linéaire

**Définition 1.2.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \dots, f_q)$  une base de  $F$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

On appelle matrice de l'application linéaire  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ , la matrice, notée  $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$ , de la famille de vecteurs  $(u(\mathcal{B}_1))$  dans la base  $\mathcal{B}_2$  :

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) = M_{\mathcal{B}_2}(u(\mathcal{B}_1)) = M_{\mathcal{B}_2}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$$

On a  $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ .

Si on note  $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \dots, f_q)$  et  $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u(e_j) = \sum_{i=1}^q a_{ij} f_i$  où  $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{qj})$  sont les coordonnées du vecteur  $u(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B}_2$ ,

$$\text{alors } M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} \overbrace{u(e_1)} & \overbrace{u(e_2)} & \overbrace{u(e_p)} \\ a_{11} & a_{1j} & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_q \end{matrix} \leftarrow \text{même méthode}$$

$$u(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + a_{31}f_3 + \dots + a_{q1}f_q$$



**Remarque 1.2.** Le nombre de lignes de la matrice est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.

Le nombre de colonnes est égal à la dimension de l'espace de départ.

**Exemple 1.3.** Soit  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, 3x - 2y + 4z)$

Donnons la matrice de  $g$  dans les bases canoniques  $\mathcal{B}_3$  et  $\mathcal{B}_2$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ .

On calcule les images des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_3$  par  $g$  :

$$g(1, 0, 0) = (1, 3), \quad g(0, 1, 0) = (2, -2) \quad g(0, 0, 1) = (-1, 4)$$

Les images donnent directement les coordonnées dans la base canonique  $\mathcal{B}_2$  :  $(1, 3) = 1(1, 0) + 3(0, 1) \dots$

Alors, on a la matrice :

$$M_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \begin{matrix} f_1 = (1, 0) \\ f_2 = (0, 1) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1 &\xrightarrow{A} \mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2 \\ \mathbb{R}^2, (e_1, e_2) &\xrightarrow{A_1} \mathbb{R}^2, (u, v) \\ \mathbb{R}^2, (u, v) &\xrightarrow{A_2} \mathbb{R}^2, (e_1, e_2) \end{aligned}$$

**Exercice 1.1.** Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , soit  $(e_1, e_2)$  une base. On pose  $u = 2e_1 + e_2$  et  $v = e_1 - e_2$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $f(e_1) = u$  et  $f(e_2) = 3v$ .

Calculer  $M_{(e_1, e_2)(u, v)}(f)$  et  $M_{(u, v)(e_1, e_2)}(f)$ .

On remarque que  $u$  et  $v$  ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de  $\mathbb{R}^2$ .

On a directement les coordonnées des images de  $(e_1, e_2)$  dans la base  $(u, v)$ , alors,

$$A_1 = M_{(e_1, e_2)(u, v)}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \quad \begin{aligned} f(e_1) &= u = 1 \times u + 0 \times v \\ f(e_2) &= 0 \times u + 3 \times v \end{aligned}$$

Pour l'autre matrice, il faut calculer  $f(u)$  et  $f(v)$ .

On a  $u = 2e_1 + e_2$  qui donne  $f(u) = 2f(e_1) + f(e_2)$  soit  $f(u) = 2u + 3v$  et finalement,

car  $f$  est linéaire

$$f(u) = 2(2e_1 + e_2) + 3(e_1 - e_2) = 7e_1 - e_2 = u - 3v = f(v)$$

$$\text{De même, on calcule } f(v) = f(e_1) - f(e_2) = (2e_1 + e_2) - 3(e_1 - e_2) = -e_1 + 4e_2$$

Alors,

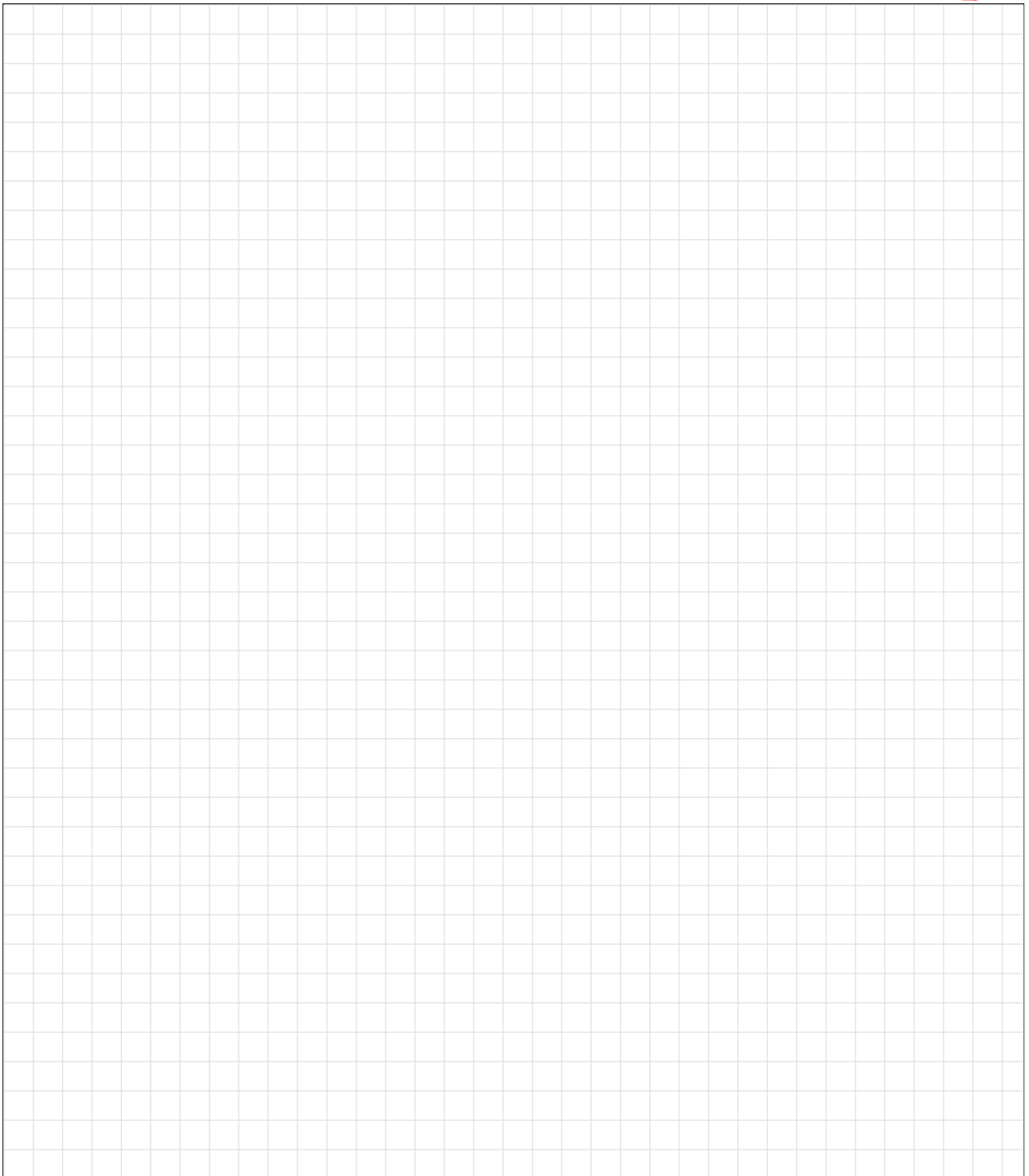
$$A_2 = M_{(u,v)(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} f(u) & f(v) \\ 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

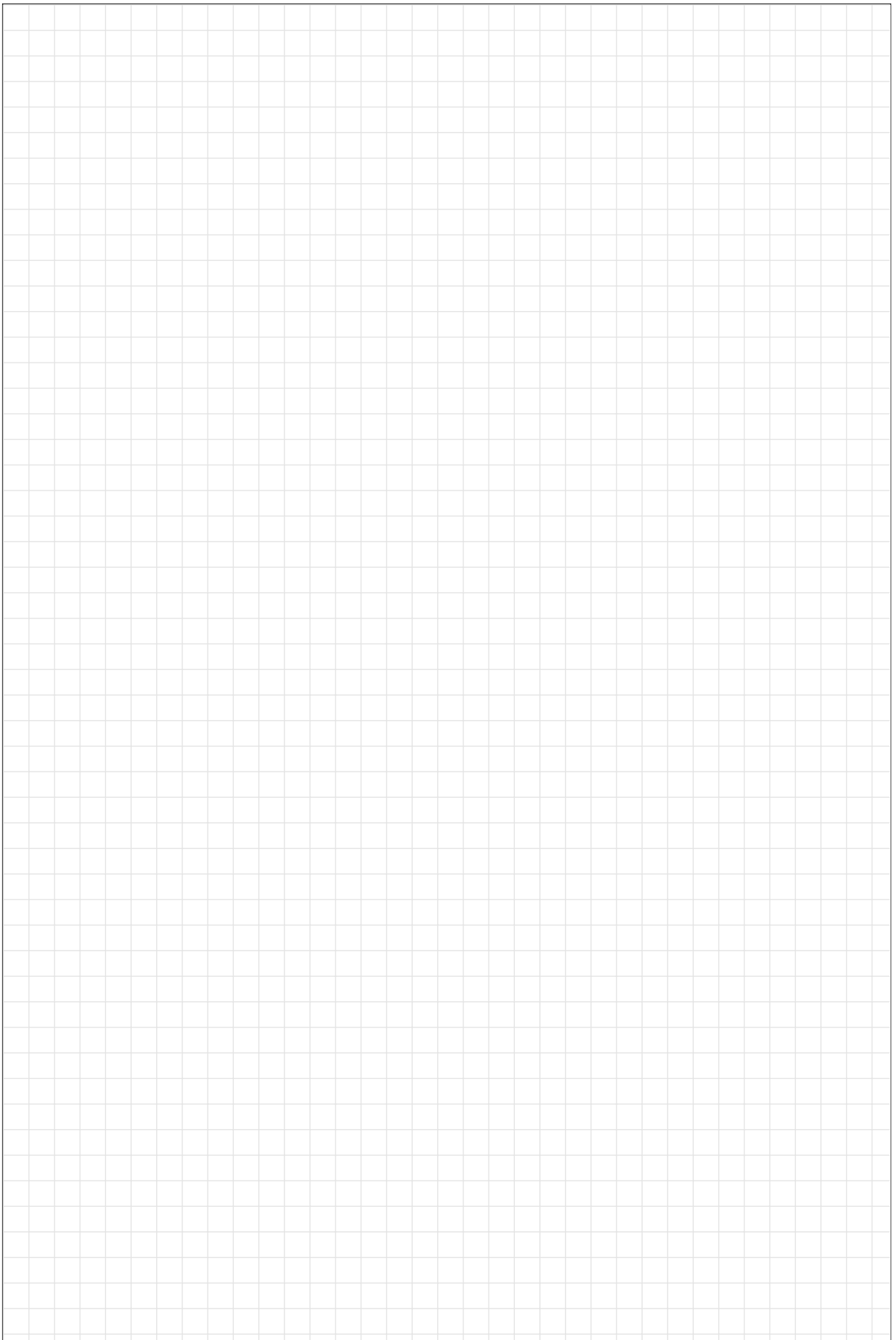
$A_1$  et  $A_2$  sont 2 matrices de  $f$  dans des bases différentes

On peut également calculer les deux matrices

$$A_3 = M_{(u,v)(u,v)}(f) = \begin{pmatrix} f(u) & f(v) \\ 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \quad \text{et} \quad M_{(e_1,e_2)(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} = A_4$$

où on utilise la même base au départ et à l'arrivée. Cela est possible car  $f$  est un endomorphisme.






### 1.3 Matrice d'un endomorphisme

**Définition 1.3.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $v \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ .

On appelle matrice de l'endomorphisme  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ , la matrice, notée  $M_{\mathcal{B}}(v)$ , de l'application linéaire  $v$  dans le couple de bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}$

$$M_{\mathcal{B}}(v) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(v) = M_{\mathcal{B}}(v(e_1), v(e_2), \dots, v(e_p))$$

**Remarque 1.3.** On utilise la même base au départ et à l'arrivée. 

La matrice de l'identité  $id_E$  est la matrice identité  $I_p$ .

**Exercice 1.2.** Donner la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  de l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto 2P - 2(X+1)P' + X^2P'' \end{aligned}$$

On commence par calculer l'image des vecteurs de la base par  $\varphi$  :

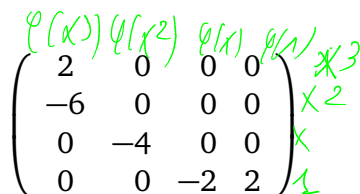
$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(X) = 2X - 2(X+1) = -2, \quad \varphi(X^2) = 2X^2 - 2(X+1)2X + 2X^2 = -4X,$$

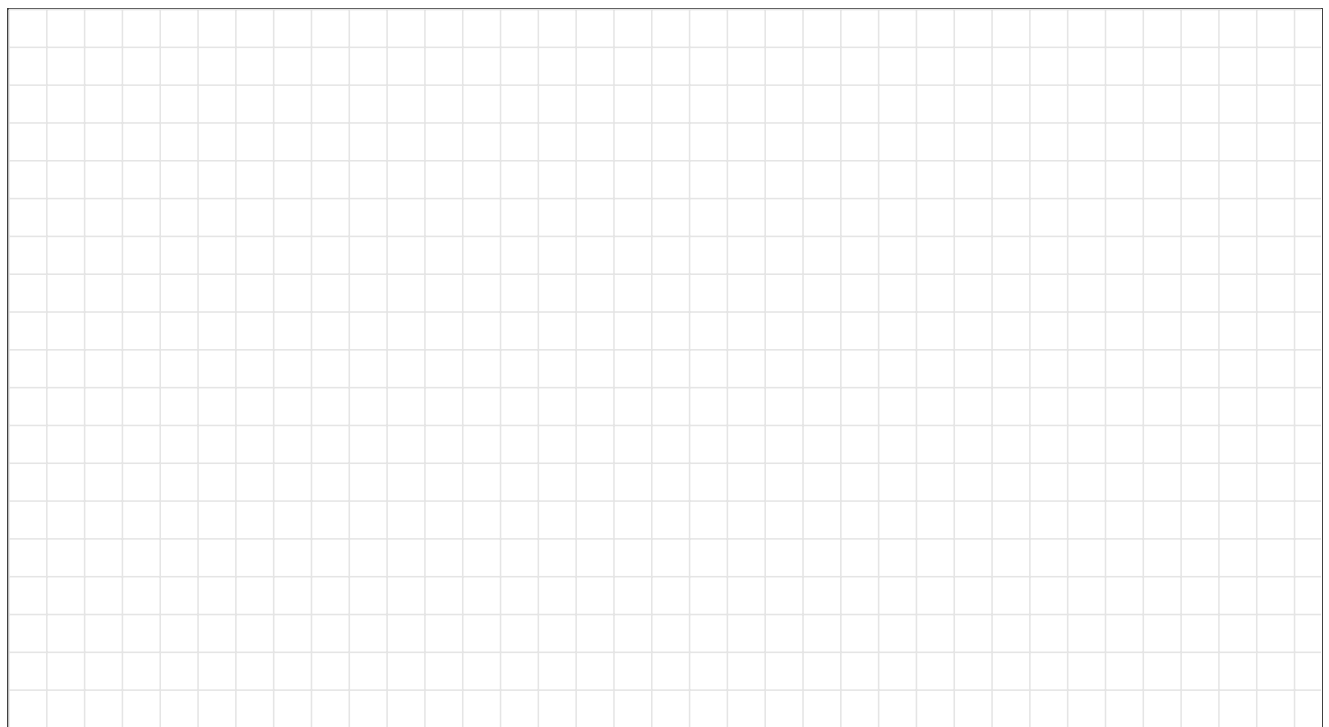
$$\varphi(X^3) = 2X^3 - 2(X+1)3X^2 + 6X^3 = 2X^3 - 6X^2 - 6X^2 = 2X^3 - 12X^2$$

Alors, on peut écrire la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{matrix} \quad \text{soit} \quad M_{(1, X, X^2, X^3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** La base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  peut aussi s'écrire dans l'ordre décroissant des puissances :  $(X^3, X^2, X, 1)$ . C'est une autre base.

La matrice de  $\varphi$  dans cette base s'écrit :  $M_{(X^3, X^2, X, 1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  



$\text{id}_E: E \rightarrow E$  et  $B = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$

$${}_B \text{id}_E = {}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_p$$

pour un  
endomorphisme  
base de départ = base d'arrivée

matrice de départ

d'arrivée

appli linéaire

les matrices d'un endomorphisme  
sont carrées



## 1.4 Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

**Proposition 1.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie de base  $\mathcal{B}$ . soit  $x, y \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ , on a

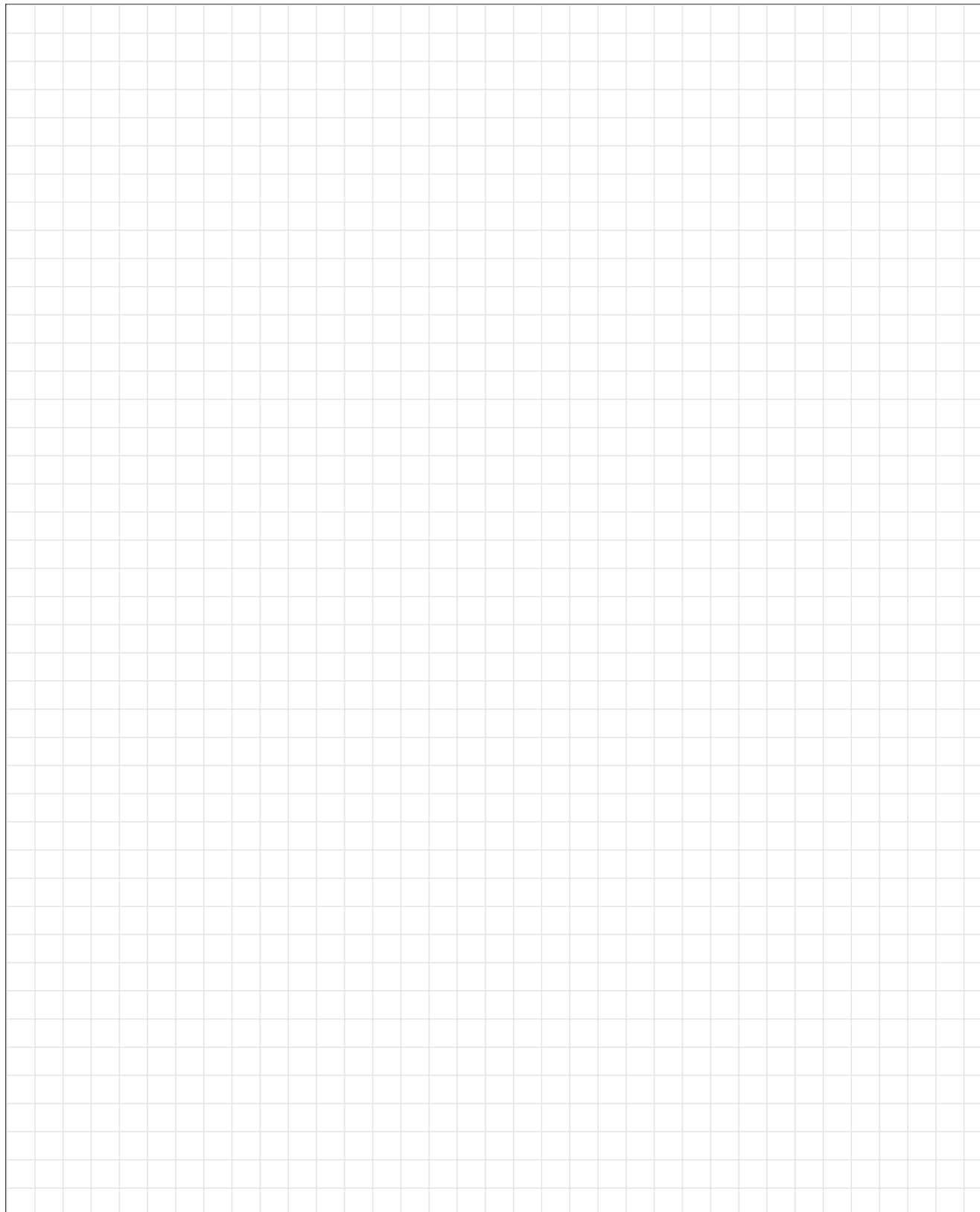
$$M_{\mathcal{B}}(\alpha x + y) = \alpha M_{\mathcal{B}}(x) + M_{\mathcal{B}}(y)$$

**Proposition 1.2.** Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie.

Soit  $\mathcal{B}_1$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_2$  une base de  $F$ .

Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\alpha u + v) = \alpha M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) + M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(v).$$



## 2 Matrices et applications linéaires

### 2.1 Calcul des coordonnées de l'image

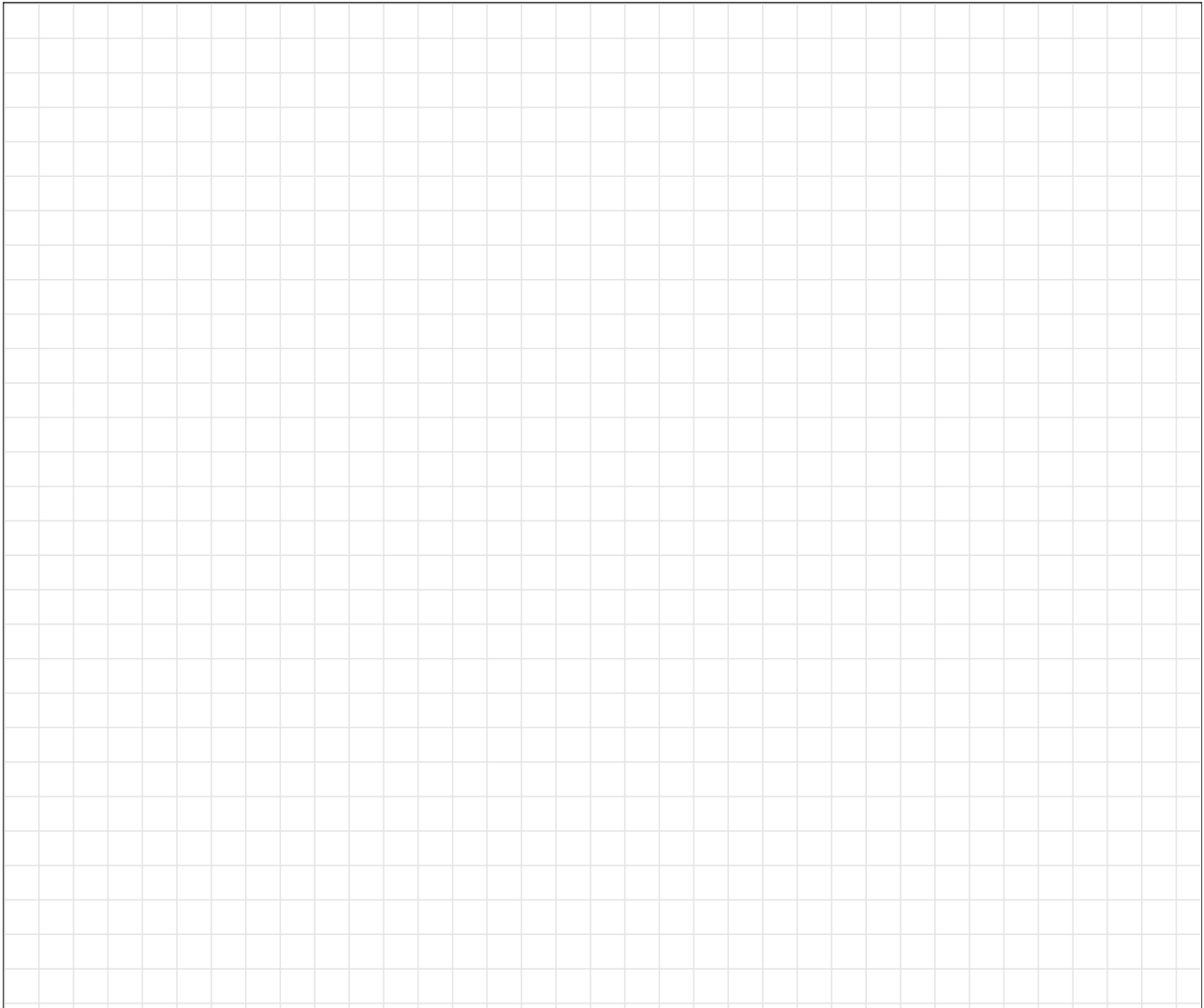
**Proposition 2.1.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension  $p$  et  $q$ ,  $\mathcal{B}_1$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_2$  une base de  $F$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de matrice  $A$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  :  $A = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(u)$ .

Si  $\mathbf{x} \in E$  a pour matrice  $X$  dans  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathbf{y} = u(\mathbf{x})$  a pour matrice  $Y$  dans  $\mathcal{B}_2$ , alors on a

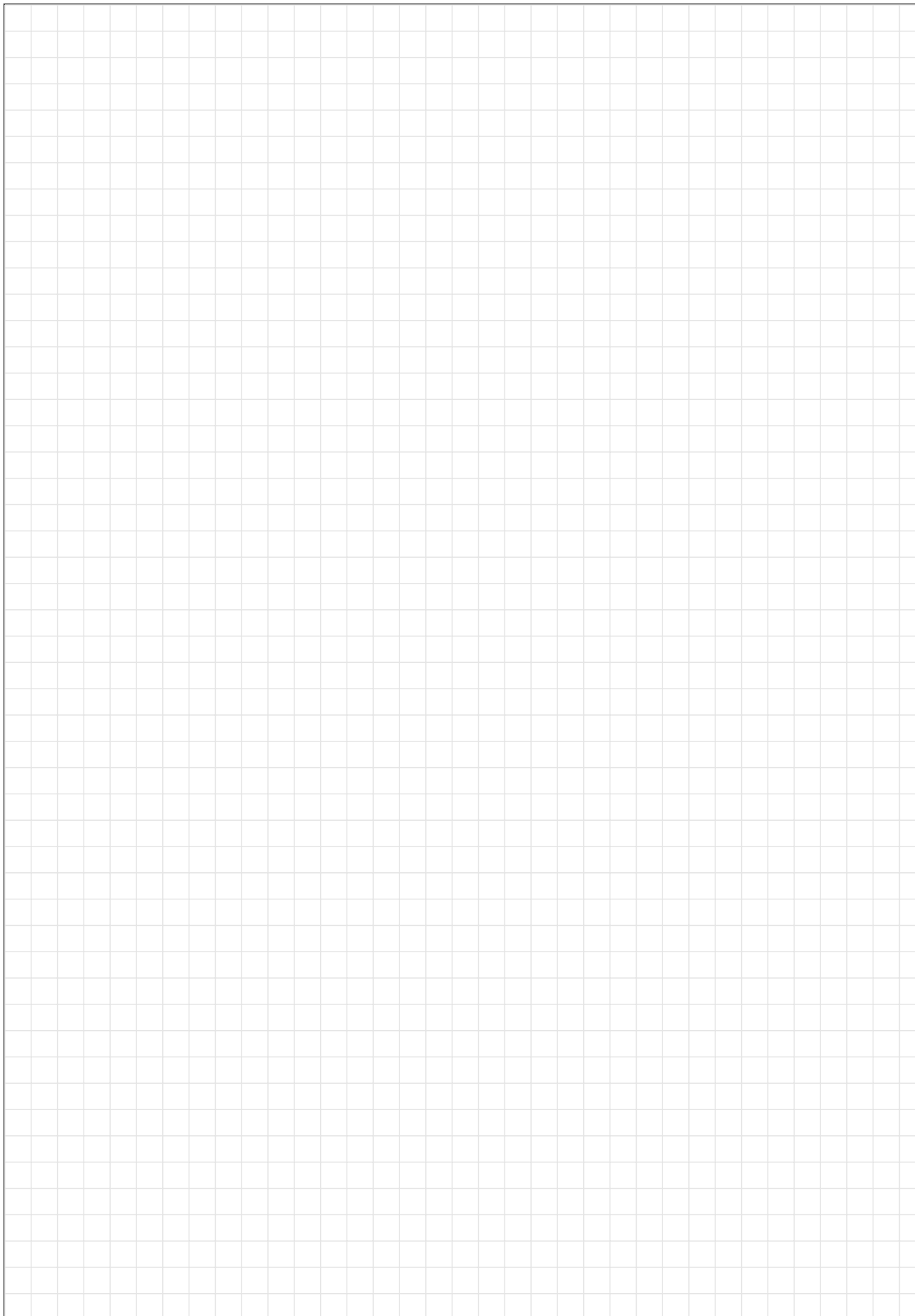
$$Y = AX \quad \text{soit} \quad M_{\mathcal{B}_2}(u(\mathbf{x})) = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(u) \cdot M_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{x}).$$

*Démonstration.*



□

**Exemple 2.1.** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  de matrice  $U = M_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  dans la base canonique.

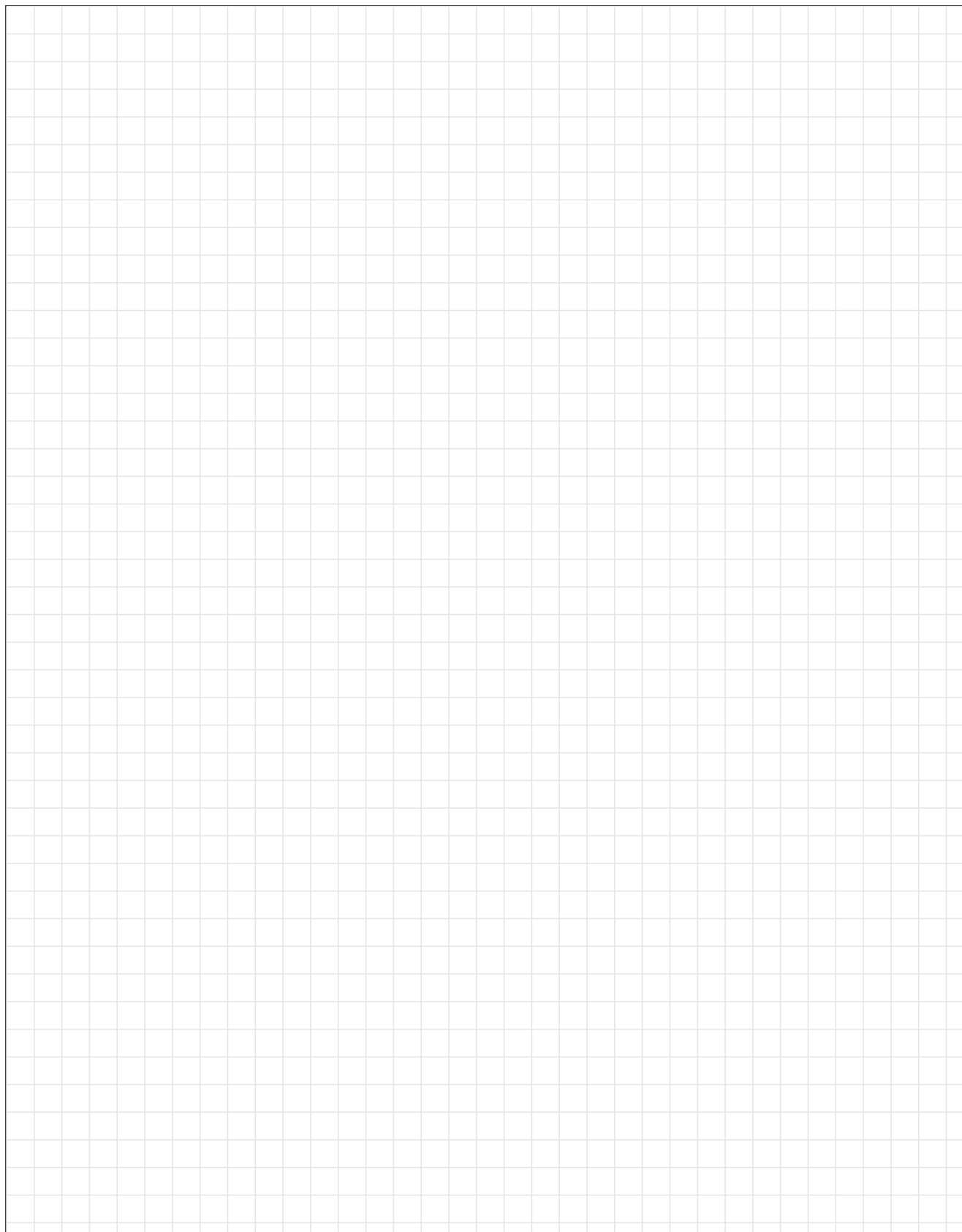


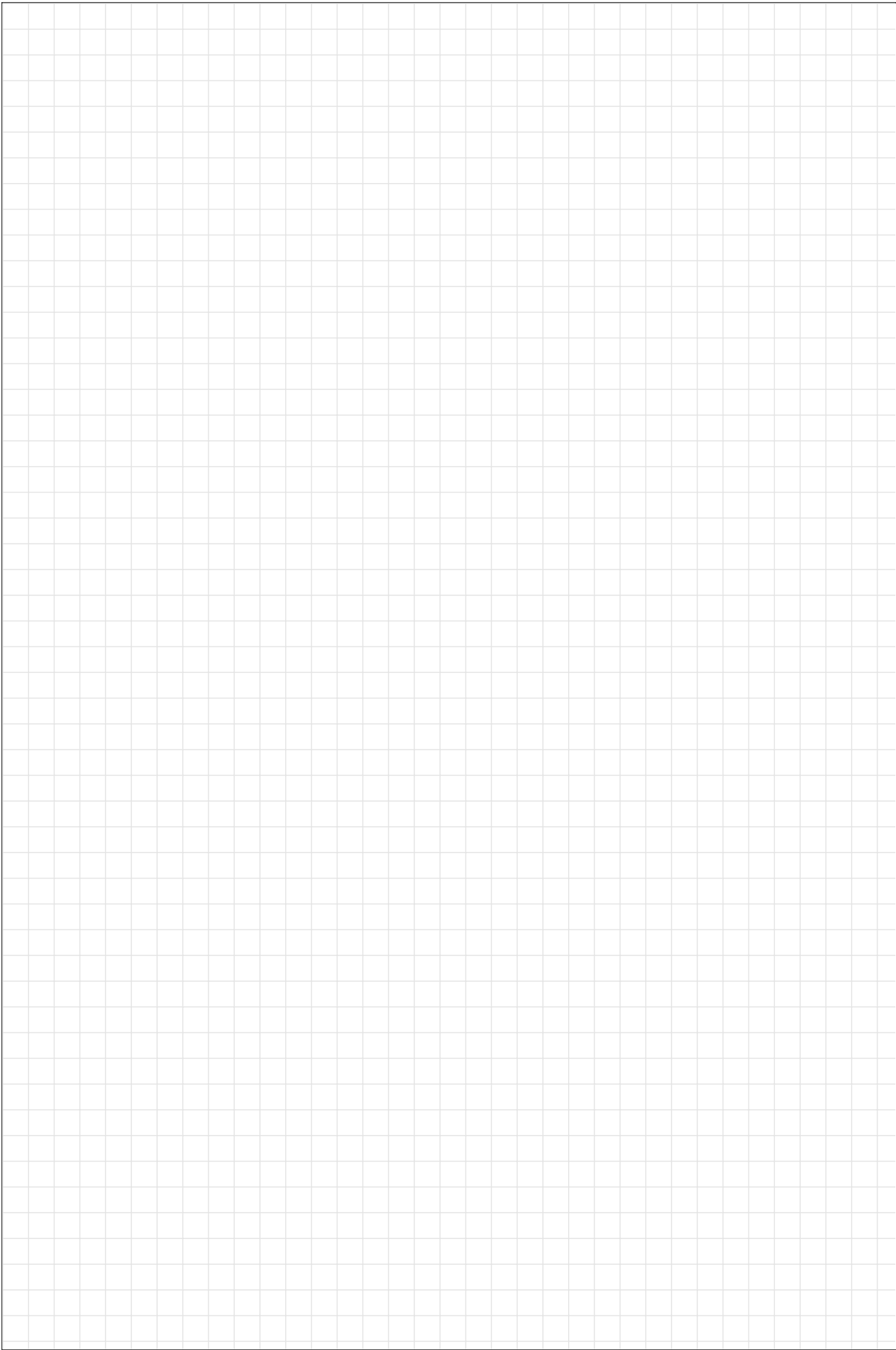
**Exemple 2.2.** Soit  $r$  la rotation de matrice  $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0$  de  $\mathbb{R}^2$

Calculer l'image des vecteurs  $(1, 0)$  puis  $(0, 1)$ . En déduire l'angle de la rotation.

Calculer l'image du vecteur de coordonnées  $(2, 3)$ .

Déterminer la matrice d'une rotation d'angle  $\theta$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .





## 2.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires

**Théorème 2.2.** Soit  $n, p, q$  des entiers non nuls. Soit  $E, F, G$  des espaces vectoriels de dimensions respectives  $n, p$  et  $q$  et ayant pour bases respectives  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_3$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de matrice  $A$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$  de matrice  $B$  dans les bases  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_3$ .

Alors  $BA$  est la matrice de  $v \circ u$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_3$  :

$$M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}(v) \cdot M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(u).$$

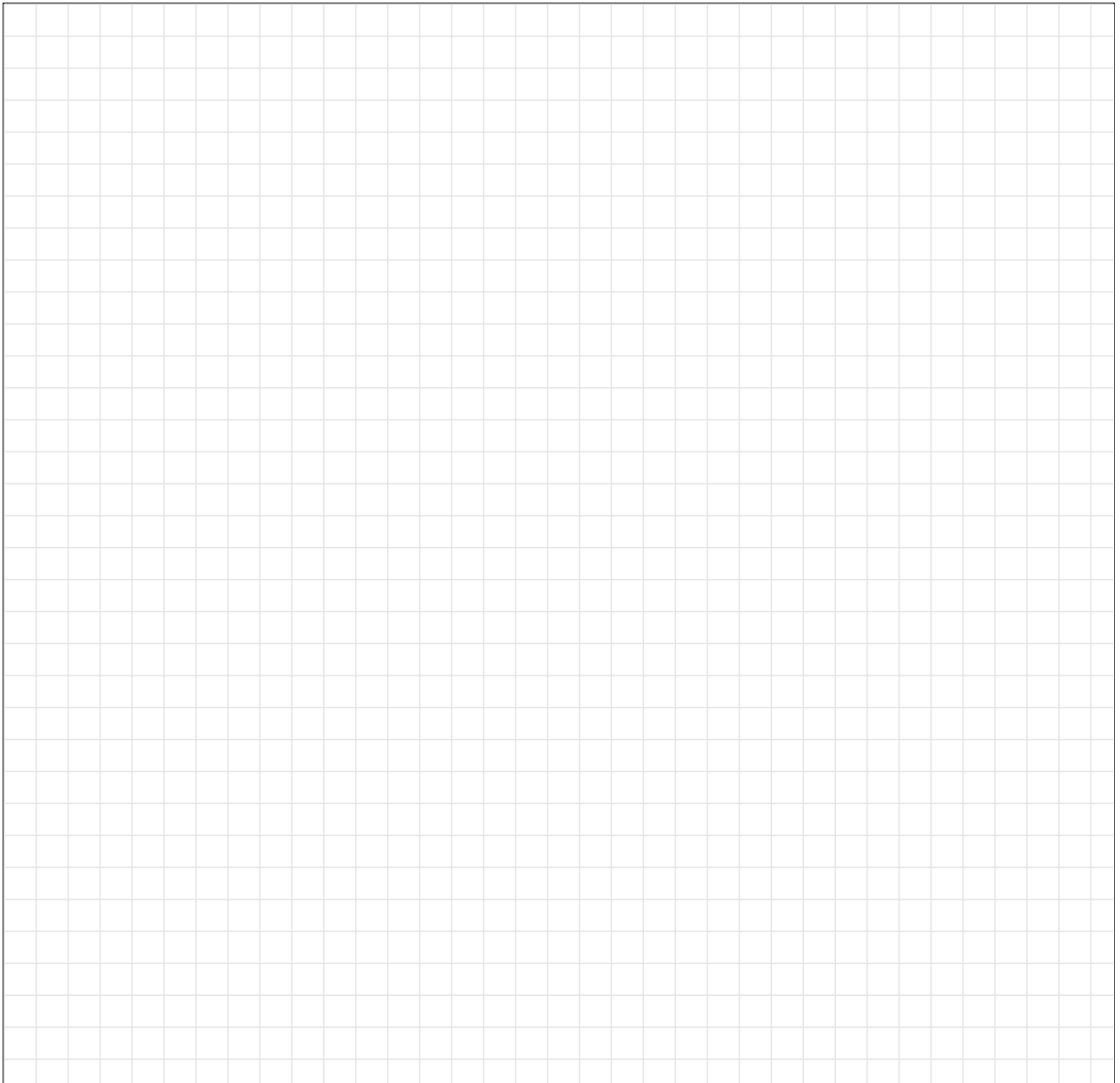
*Démonstration.* On a par définition de la matrice de l'application linéaire  $v \circ u$  :

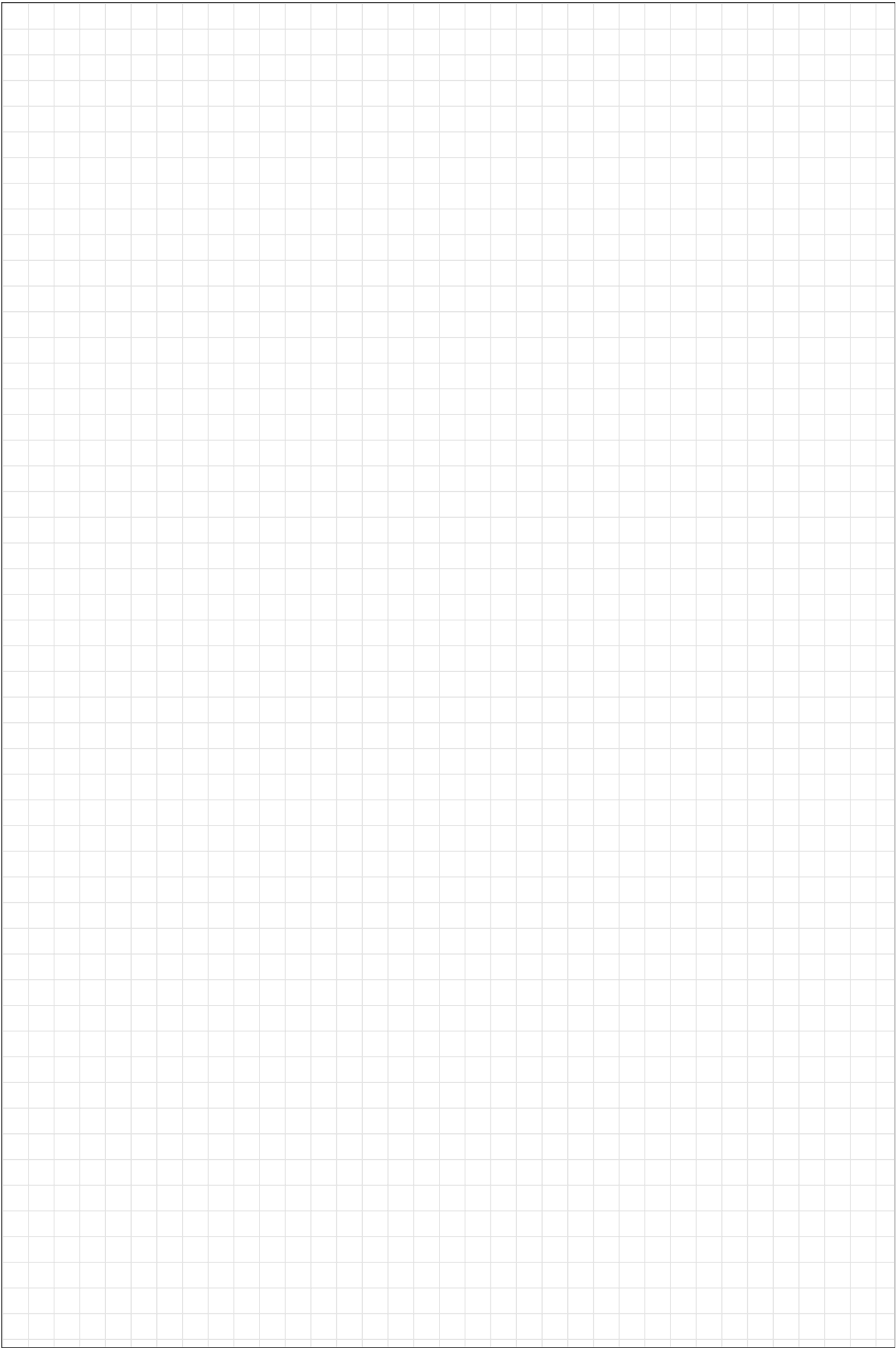
$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3}(v \circ u) &= M_{\mathcal{B}_3}(v \circ u)(\mathcal{B}_1) = M_{\mathcal{B}_3}(v(u(\mathcal{B}_1))) \\ &= M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}(v) \cdot M_{\mathcal{B}_2}(u(\mathcal{B}_1)) \quad \text{par propriété du calcul de l'image d'un vecteur par } v \\ &= M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}(v) \cdot M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(u) \cdot M_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) \quad \text{par calcul de l'image d'un vecteur par } u \end{aligned}$$

Or, on a  $M_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1)$  qui est la matrice identité d'où

$$M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}(v) \cdot M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(u).$$

□





## 2.3 Matrices inversibles et isomorphismes

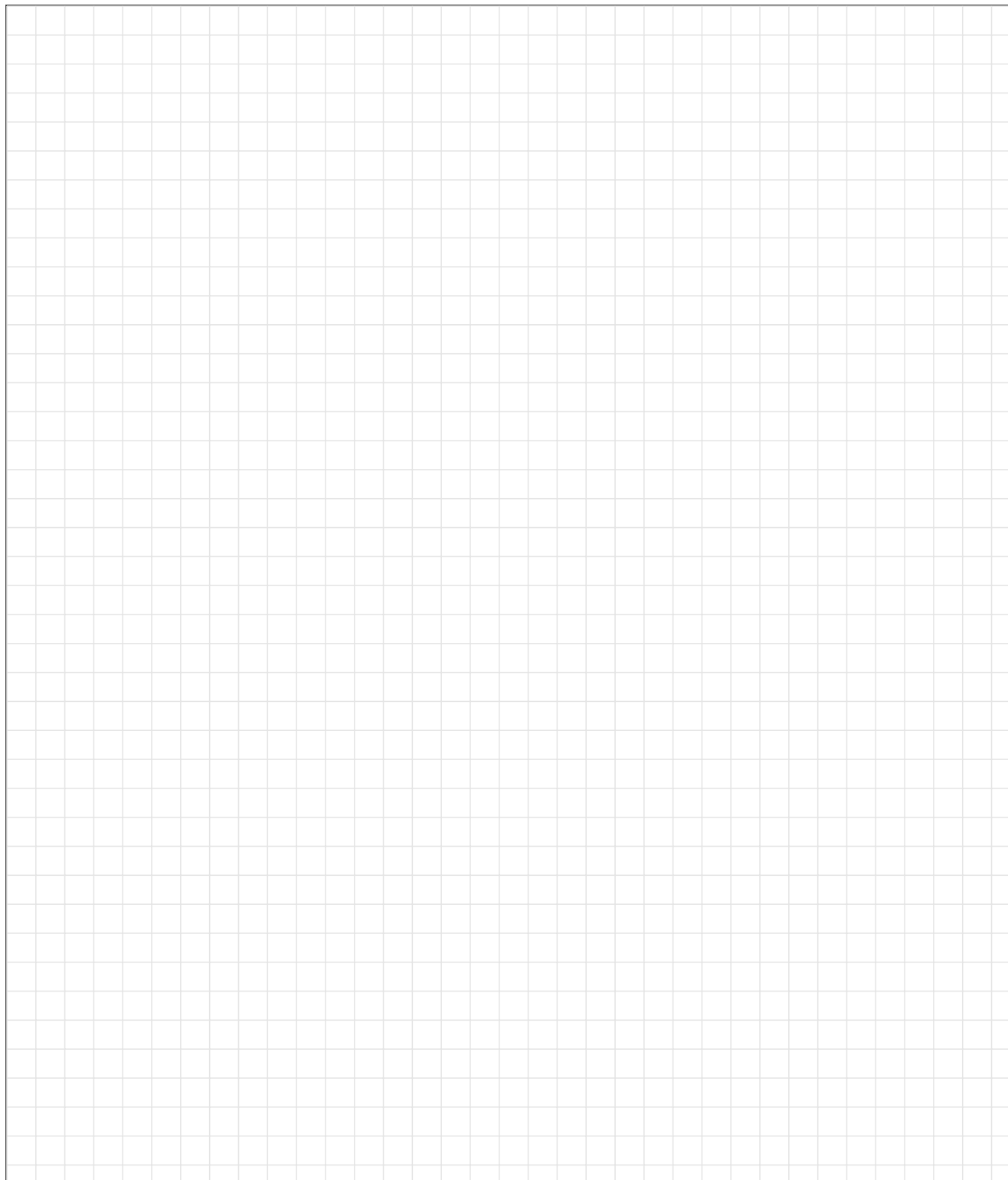
**Théorème 2.3.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies de bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$f$  est un isomorphisme si et seulement si la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est carrée et inversible.

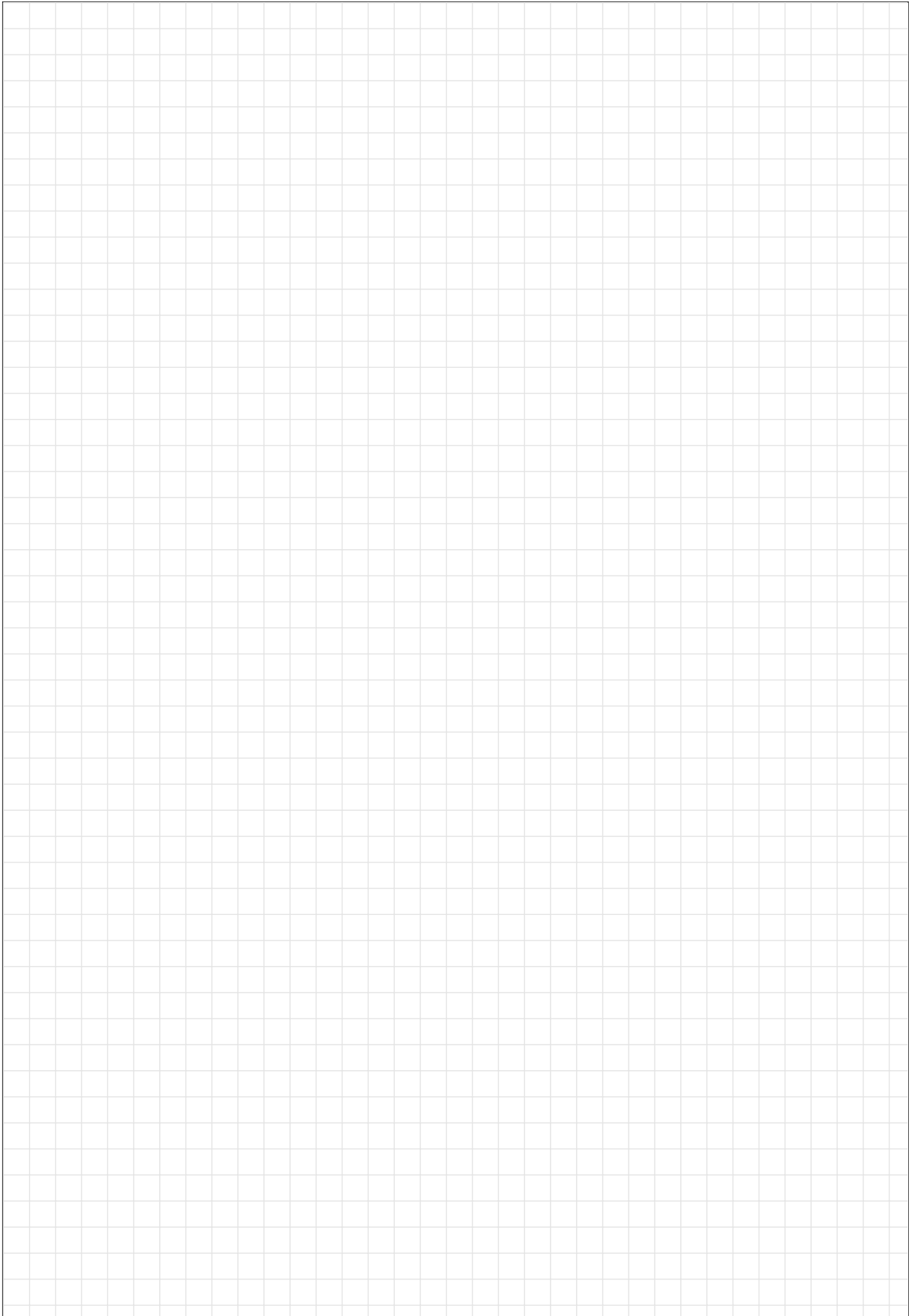
Dans ce cas, la matrice de l'application réciproque  $f^{-1}$  est la matrice inverse de la matrice de l'application  $f$  :

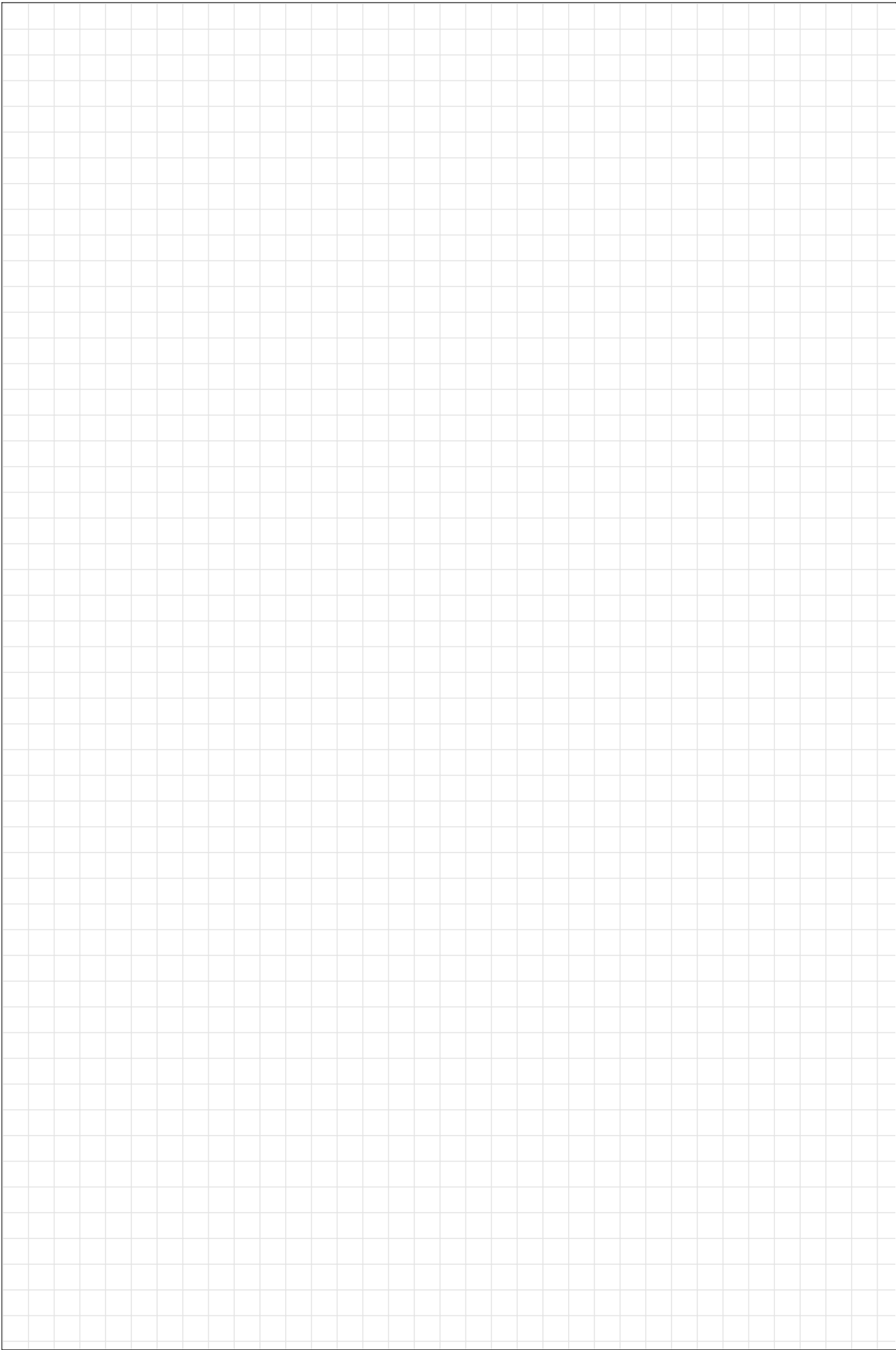
$$M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(f))^{-1}$$

*Démonstration.*









### 3 Changements de bases

#### 3.1 Matrices de passage

**Définition 3.1.** Soit  $E$  un espace de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ .

On appelle matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  notée  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  la matrice de la famille  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$  :  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

**Lemme 3.1.** La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}' \mathcal{B}}(id_E)$ .

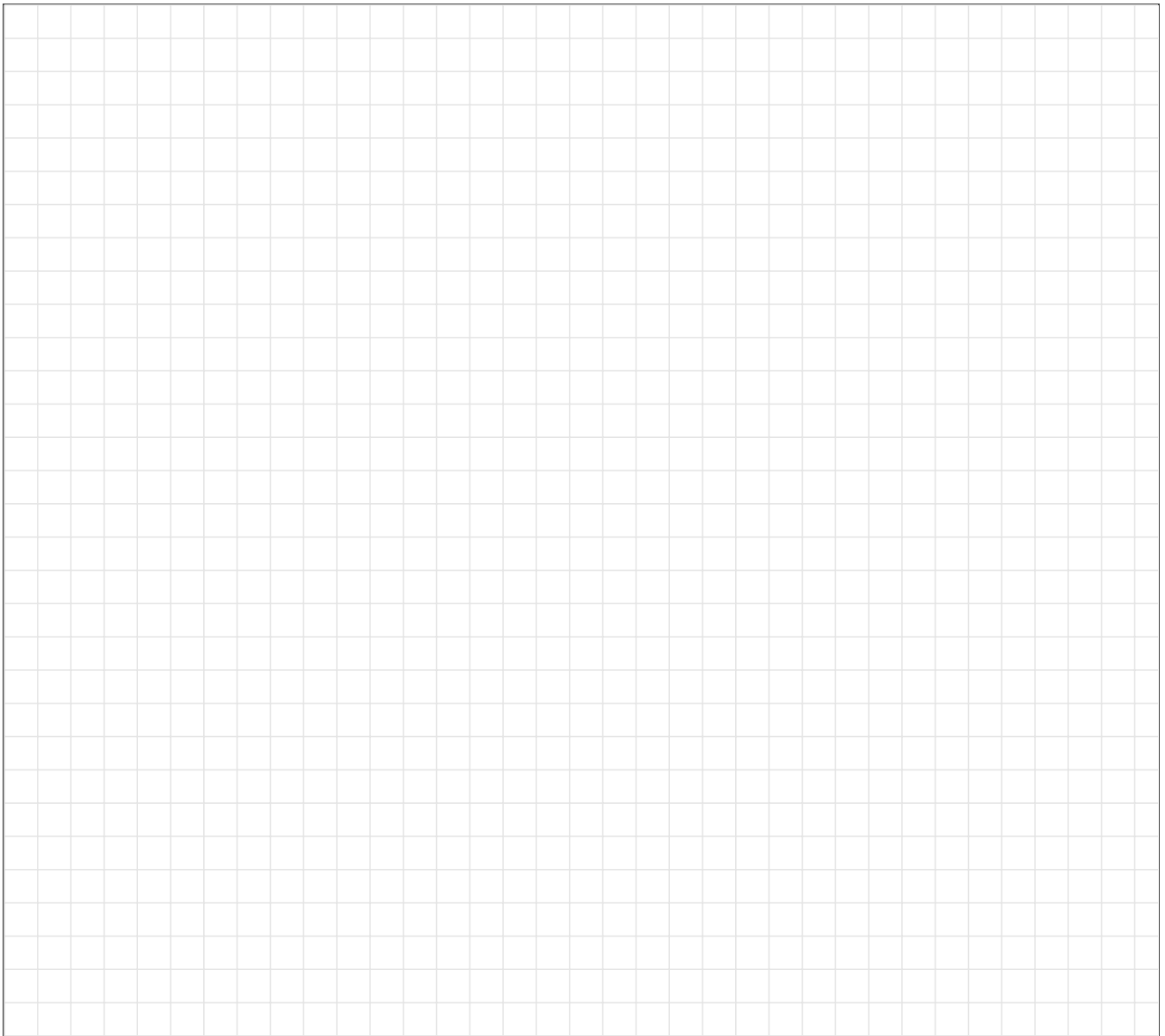
**Théorème 3.2.** Une matrice de passage est inversible et  $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1}$ .

*Démonstration.*  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  est la matrice de l'application identité qui est un isomorphisme, alors  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  est inversible et

$$(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = M_{\mathcal{B} \mathcal{B}'}(id_E^{-1}) M_{\mathcal{B}' \mathcal{B}}(id_E) = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}.$$

□

**Lemme 3.3.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  de dimension  $n$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  une famille de vecteurs de  $E$ .  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une base de  $E$  si et seulement si  $M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est inversible.



### 3.2 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur

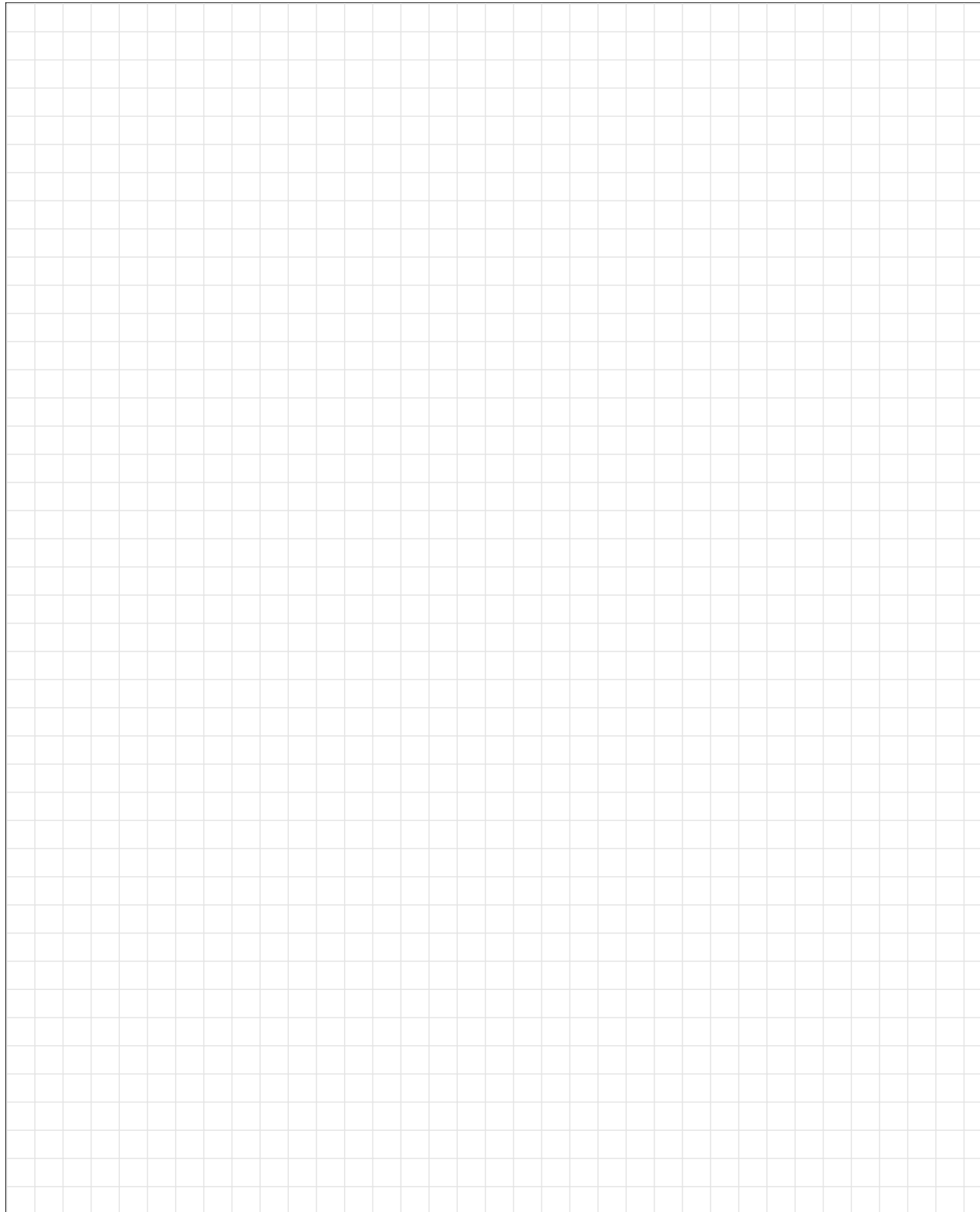
**Théorème 3.4.** Soit  $E$  un espace de dimension finie,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

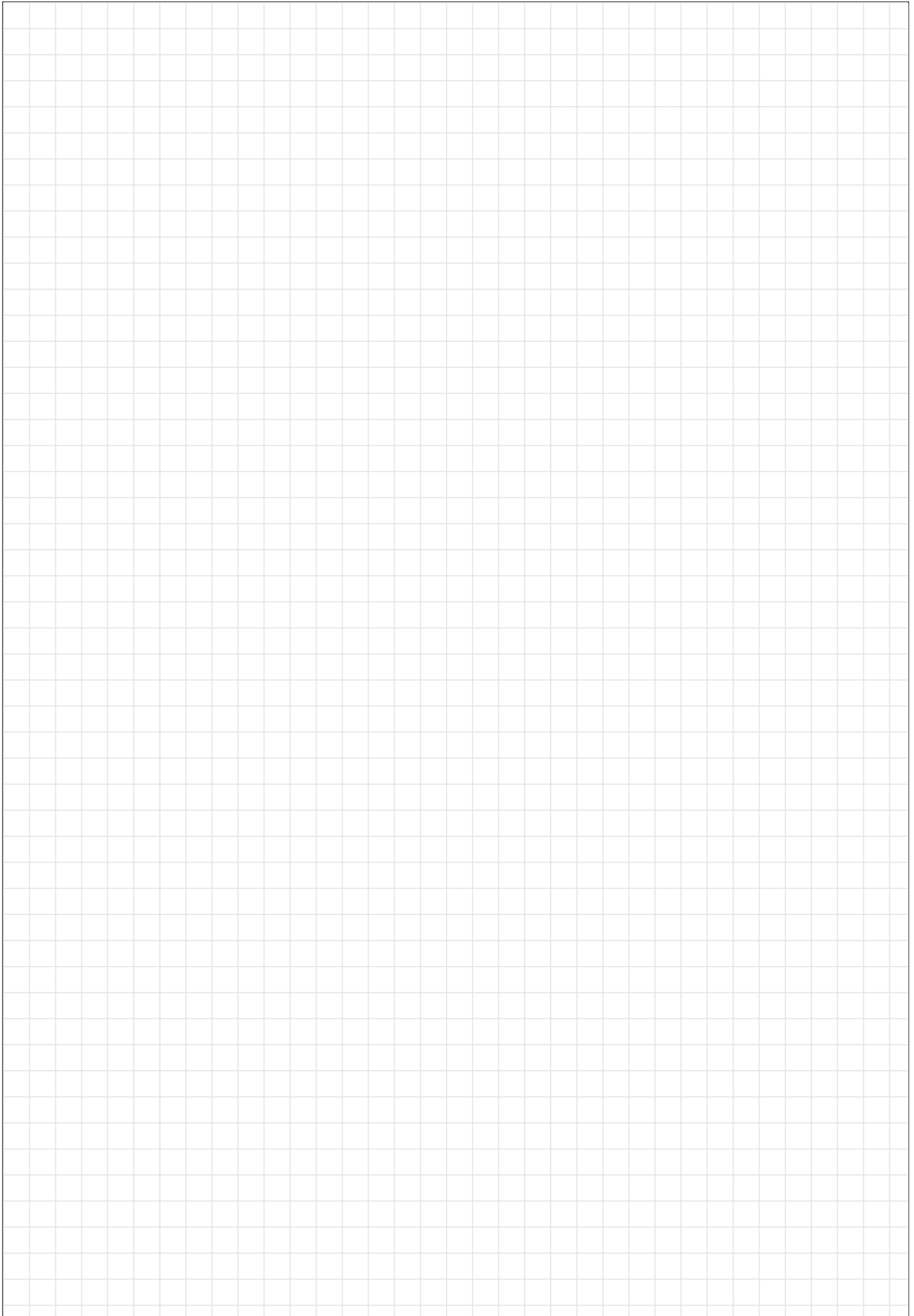
Si  $x \in E$ , on note  $X = M_{\mathcal{B}}(x)$  et  $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$ , alors, on a la relation  $X = PX'$

qui donne les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base.

$$M_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_E).M_{\mathcal{B}'}(x)$$

*Démonstration.*





### 3.3 Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

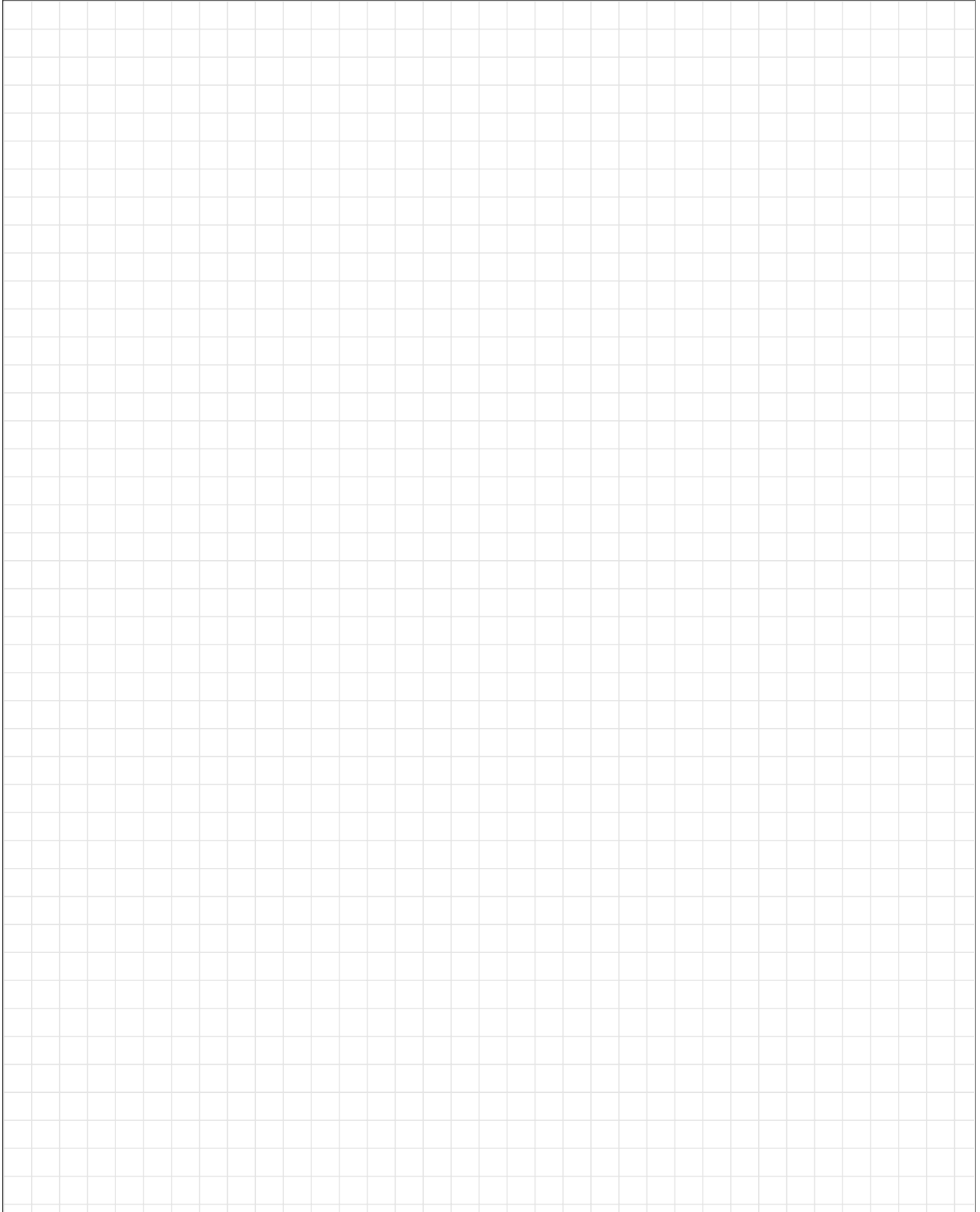
**Théorème 3.5.** Soit  $E$  un espace de dimension finie et deux bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}'_1$ .

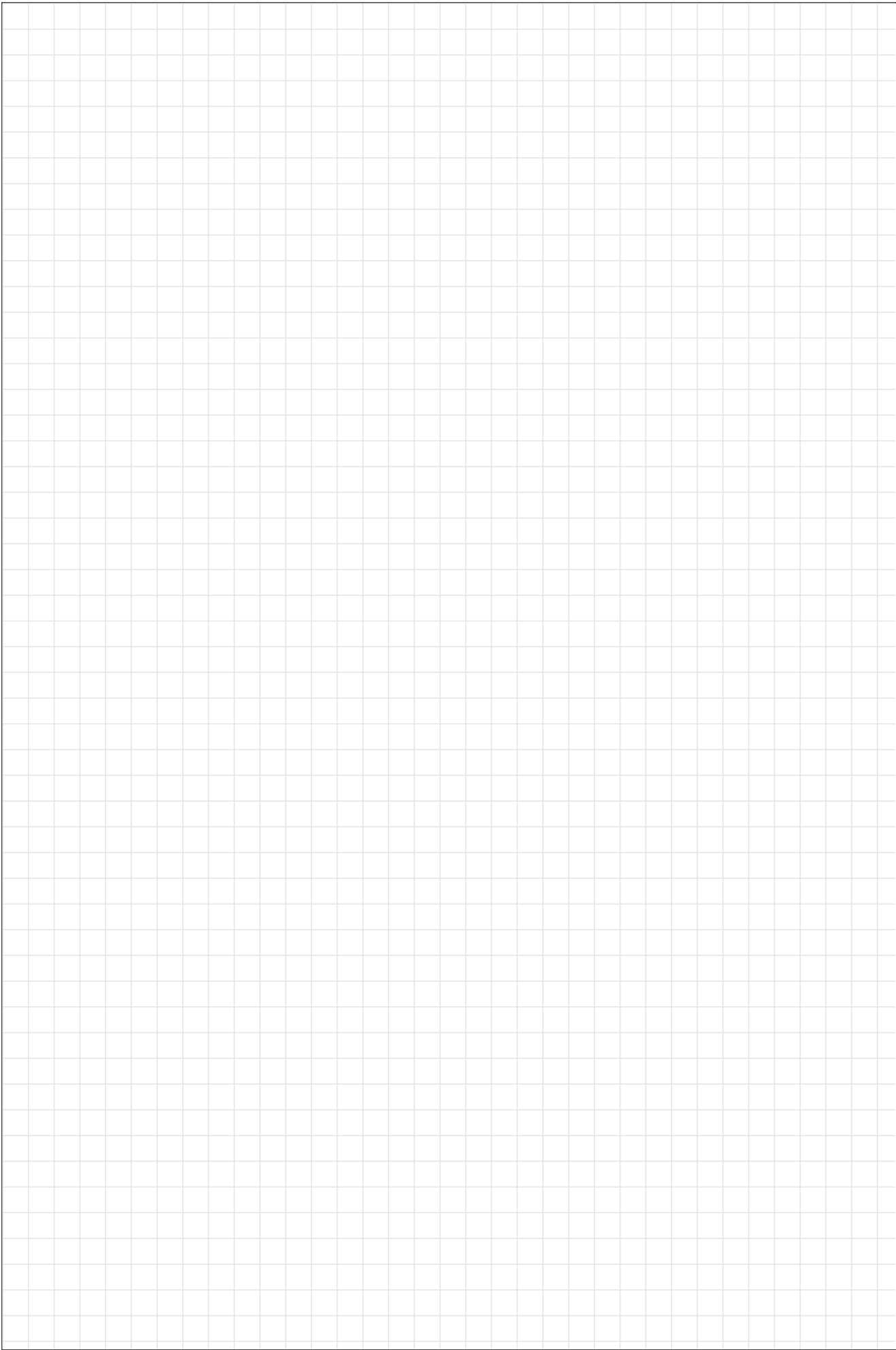
Soit  $F$  un espace vectoriel de dimension finie et deux bases  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}'_2$ .

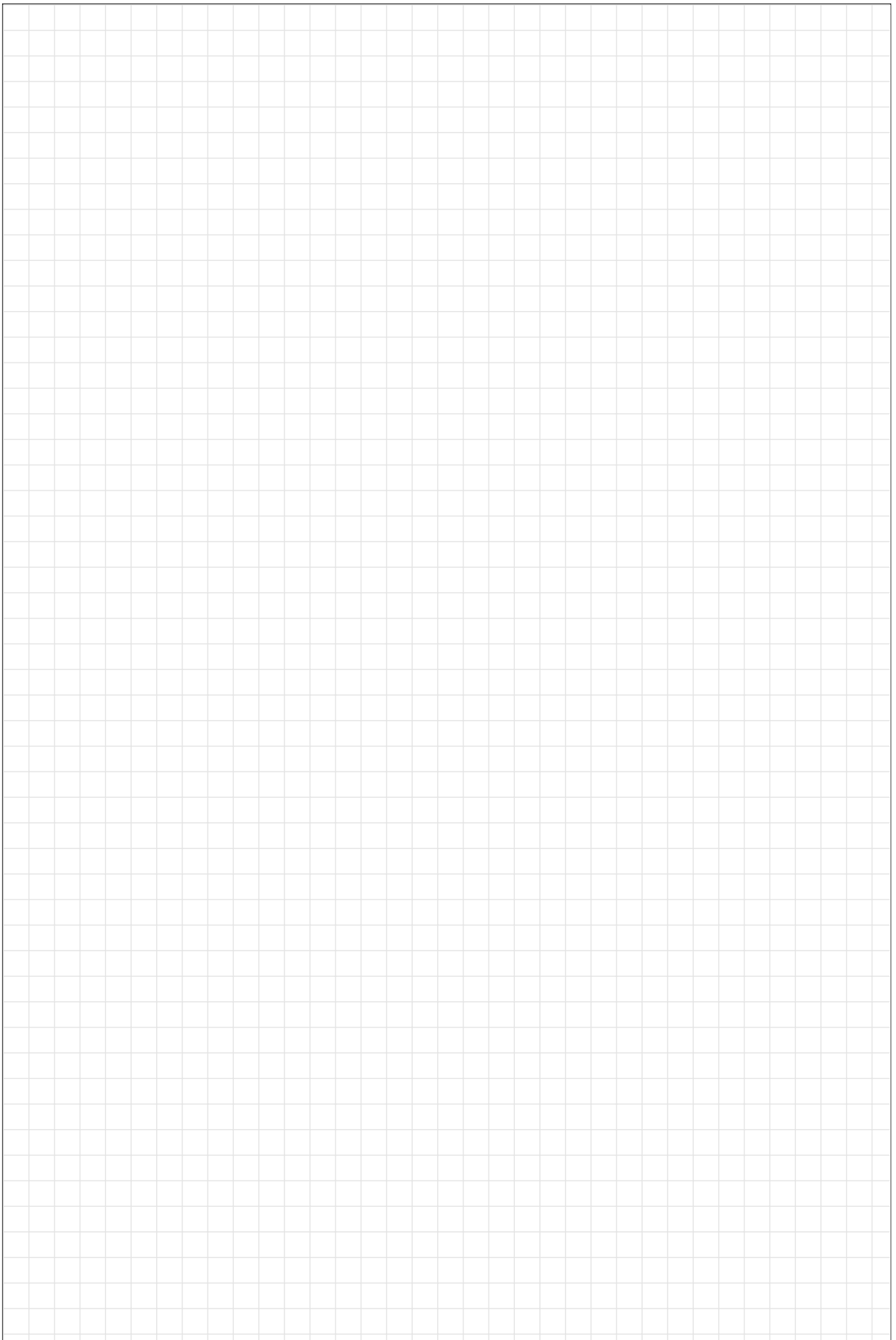
Soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}'_1$ . Soit  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_2$  à  $\mathcal{B}'_2$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de matrice  $A$  dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  et de matrice  $A'$  dans les bases  $\mathcal{B}'_1$  à  $\mathcal{B}'_2$ .

On a  $A' = Q^{-1}AP$  soit  $M_{\mathcal{B}'_1 \mathcal{B}'_2}(u) = M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}'_2}(id_F) \cdot M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(u) \cdot M_{\mathcal{B}'_1 \mathcal{B}_1}(id_E)$







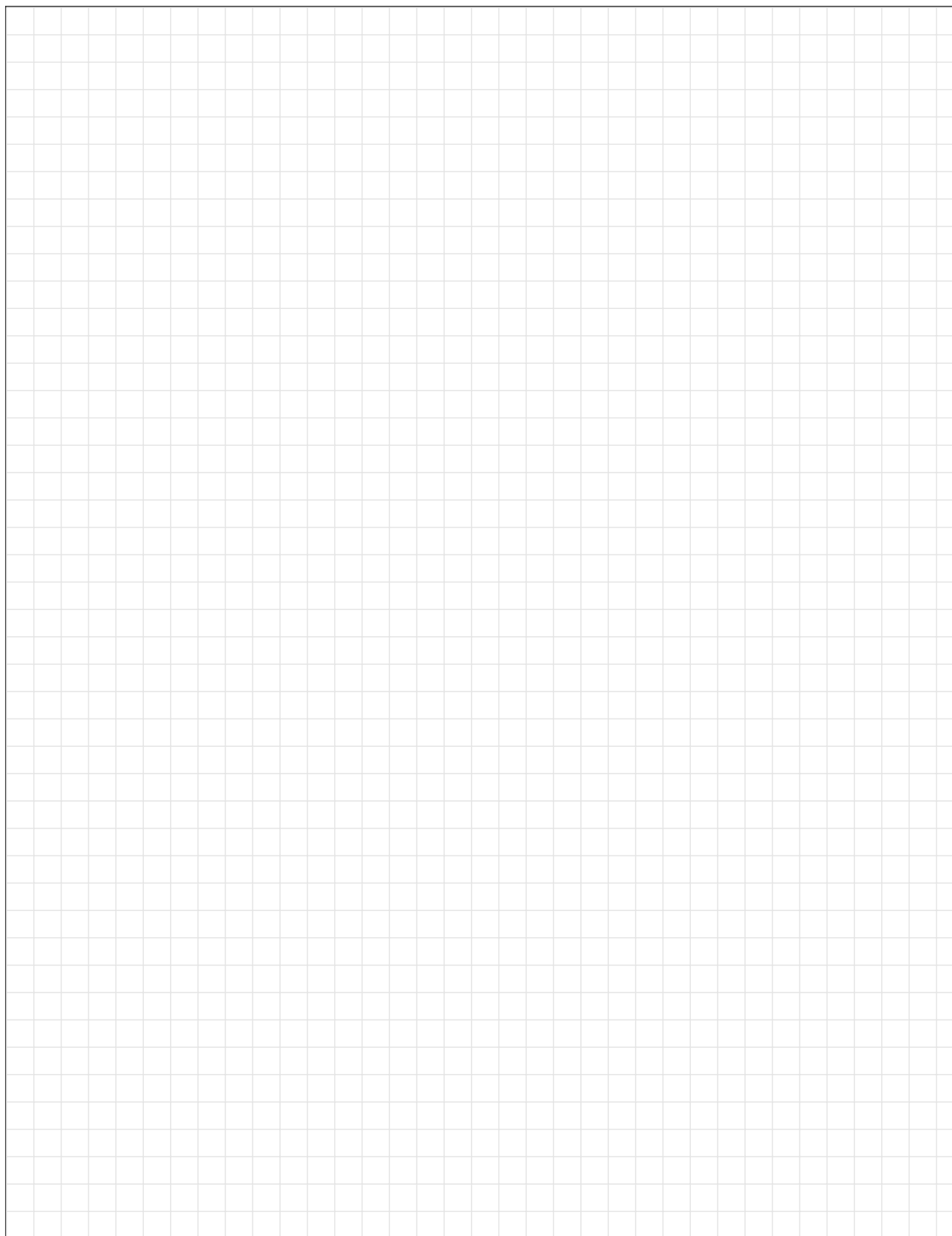


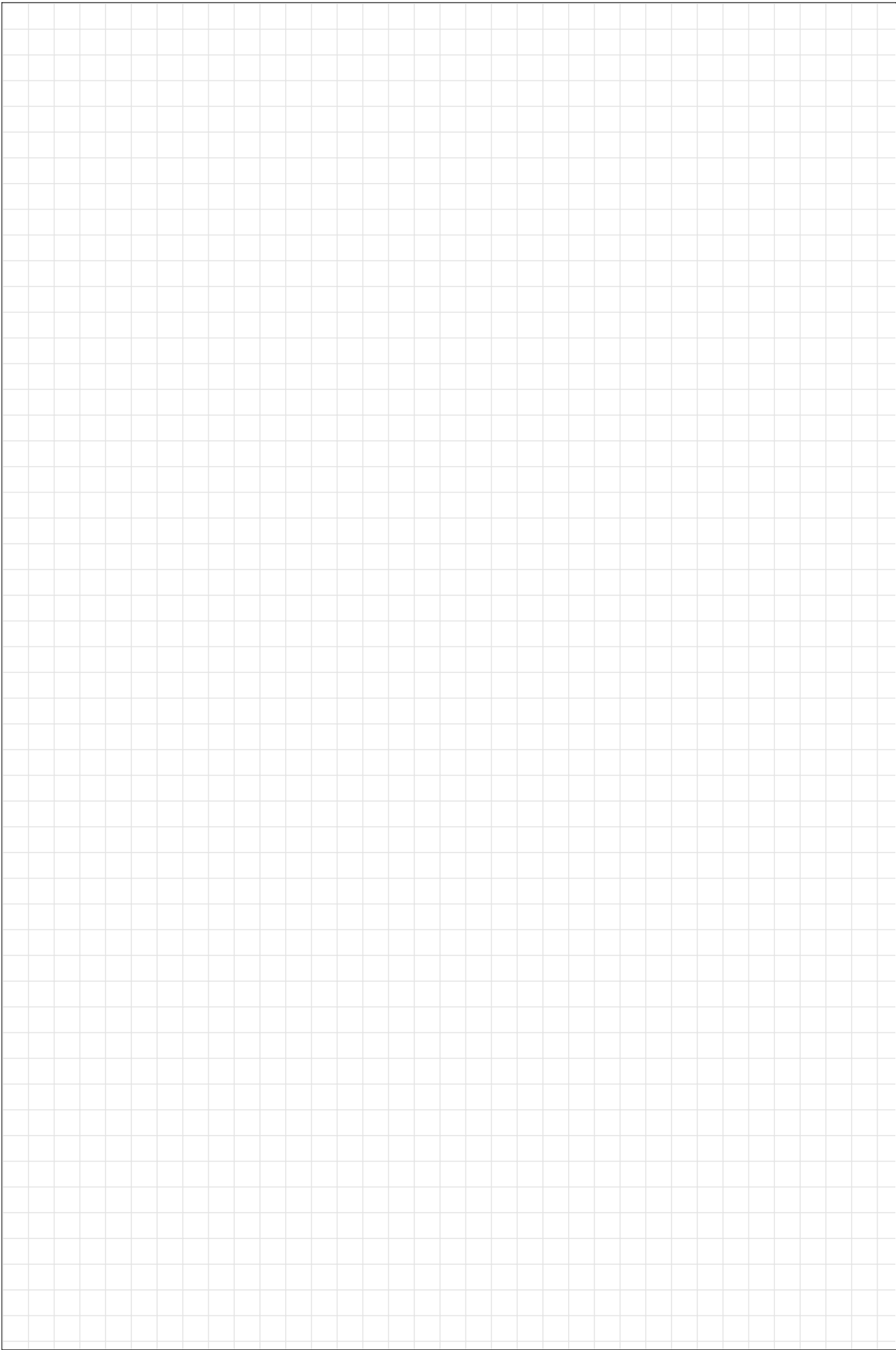
### 3.4 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

**Théorème 3.6.** Soit  $E$  un espace de dimension finie,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  de matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$  et de matrice  $A'$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

On a  $A' = P^{-1}AP$ . soit  $M_{\mathcal{B}'}(u) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_E) \cdot M_{\mathcal{B}}(u) \cdot M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_E)$

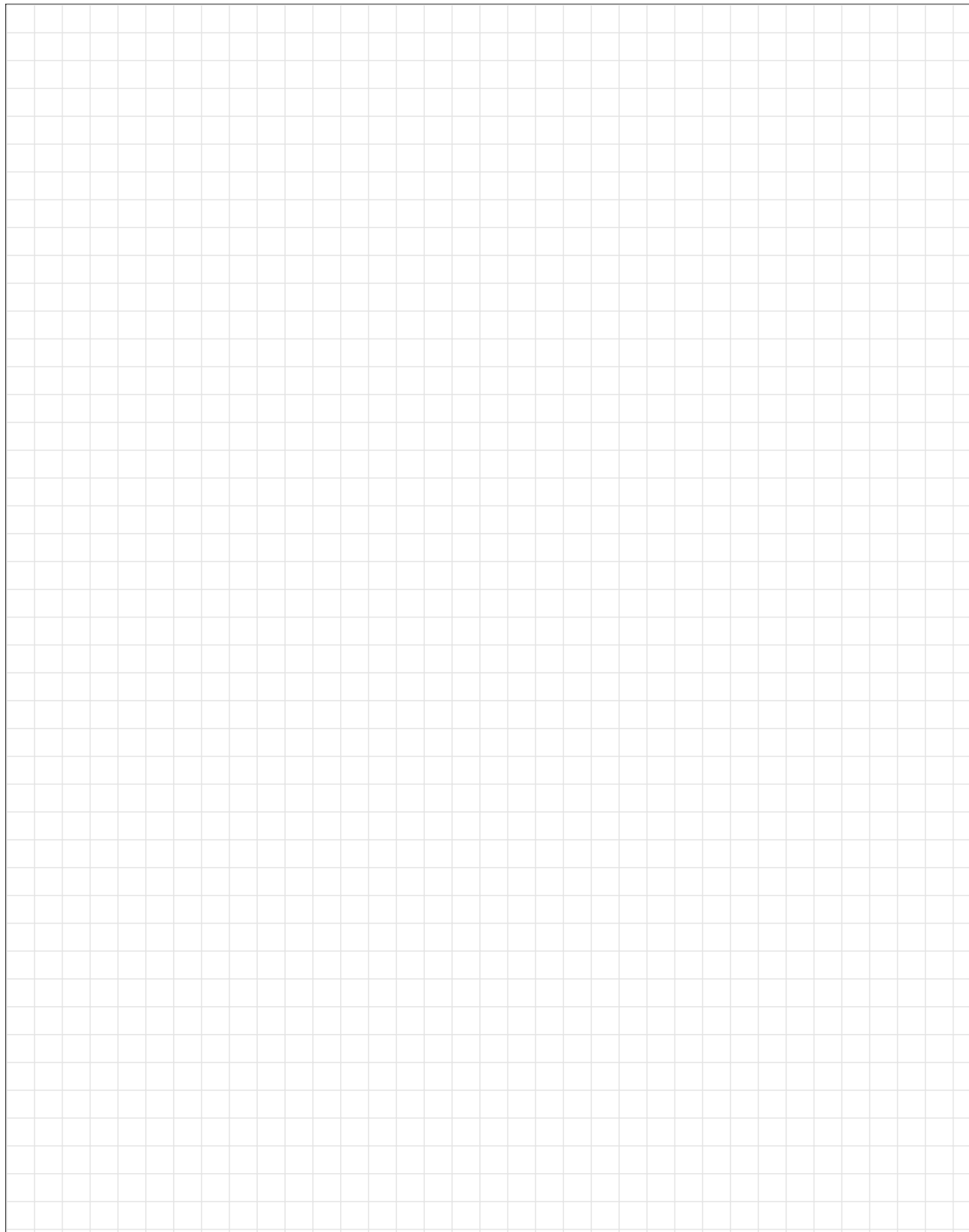


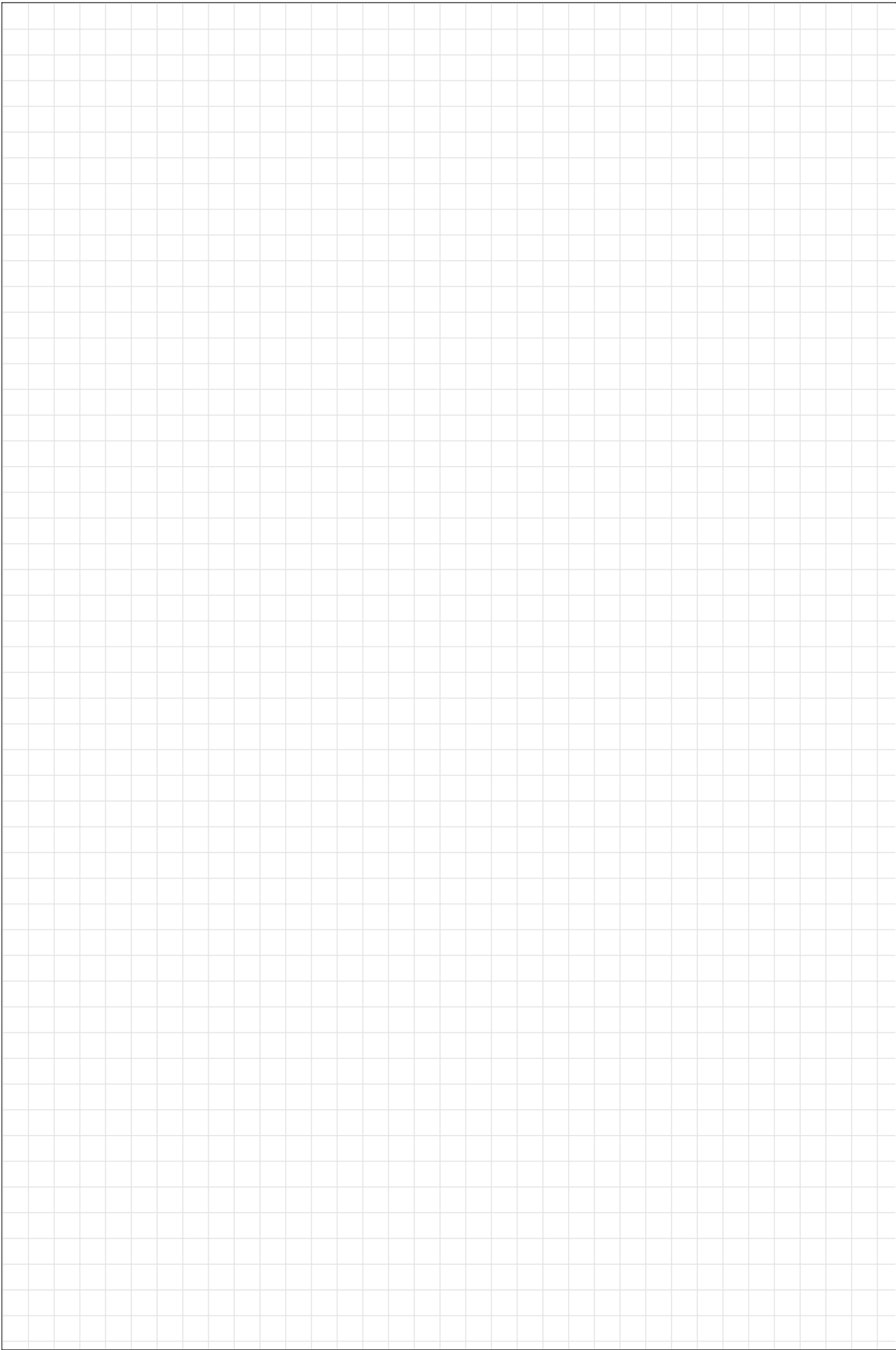


## 4 Rang d'une matrice

### 4.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

**Définition 4.1.** Soit  $A$  matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . On appelle application linéaire canoniquement associée à  $A$ , l'unique application linéaire de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$  dont la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathbb{K}^n$  est  $A$ .



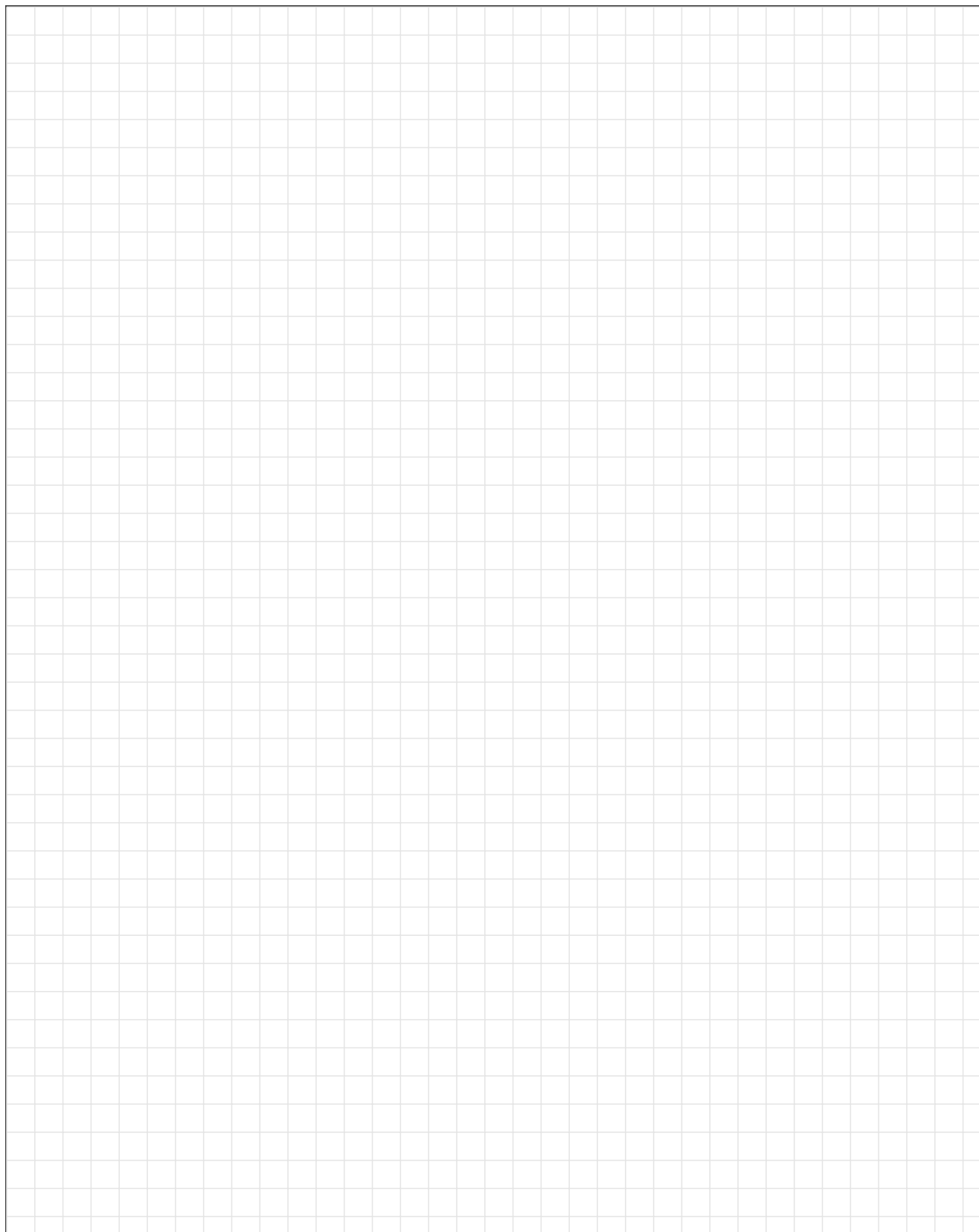


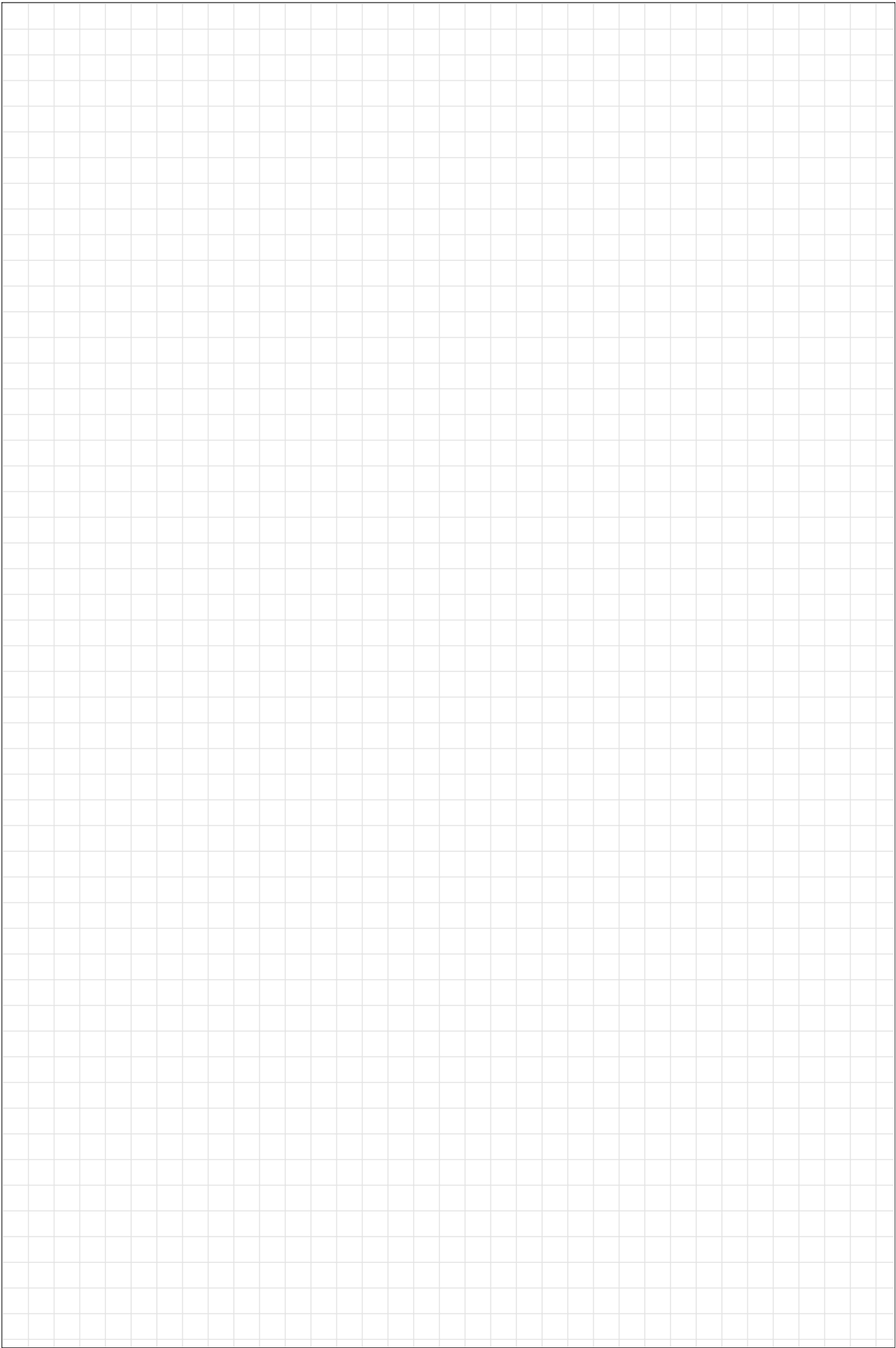
## 4.2 Image et noyau d'une matrice

**Définition 4.2.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  une matrice. On appelle noyau et image de  $A$  notés  $\text{Ker} A$  et  $\text{Im} A$  les noyaux et images de l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

**Proposition 4.1.** *Le noyau d'une matrice  $A$  est l'ensemble des solutions du système  $AX = 0$ .*

*L'image d'une matrice  $A$  est l'ensemble des seconds membres  $B$  pour lesquels le système  $AX = B$  a au moins une solution.*





### 4.3 Rang d'une matrice

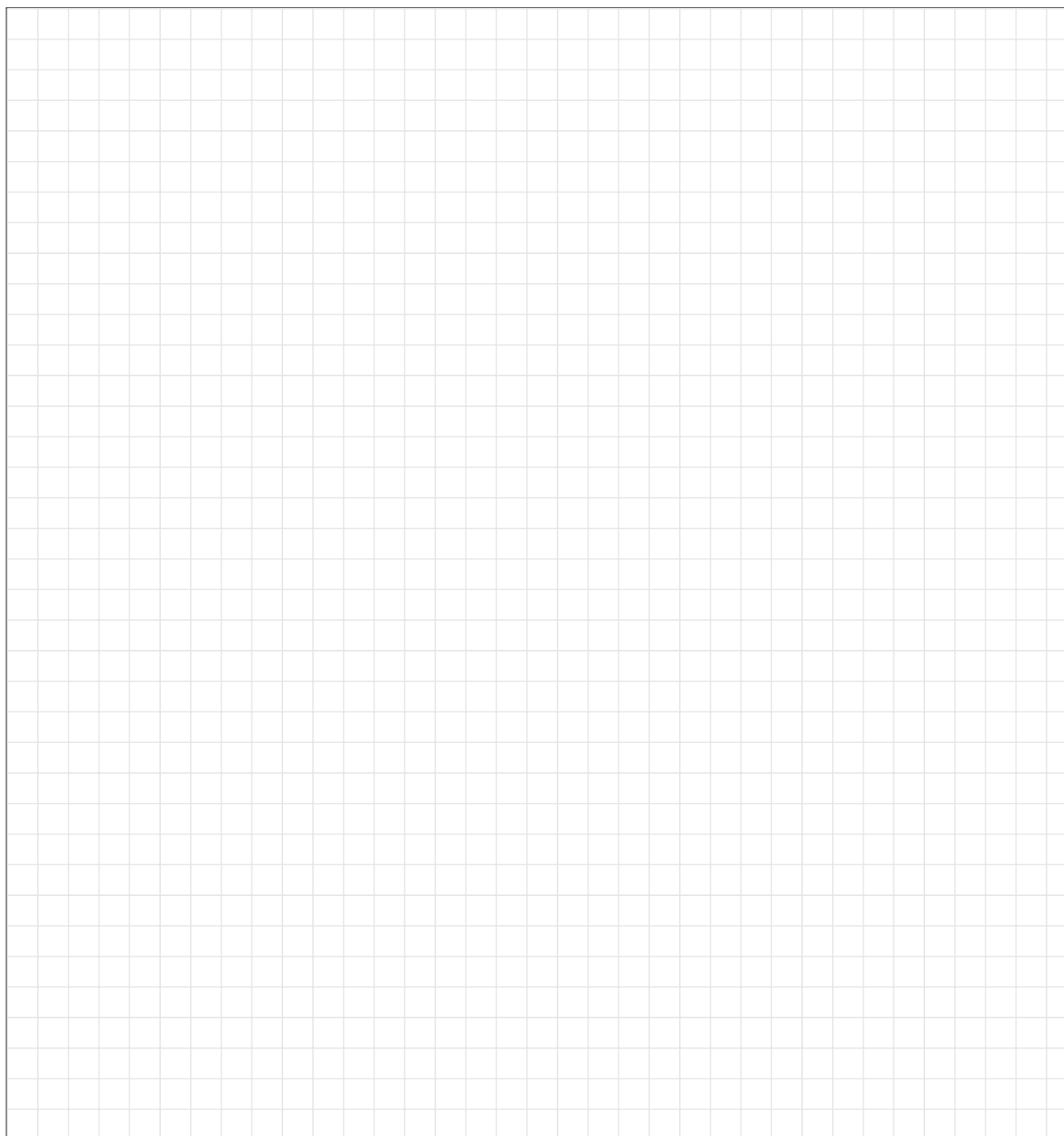
**Théorème 4.2.** *Le rang d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  qui est le nombre de pivots de sa matrice échelonnée réduite par lignes est égal au rang de l'application linéaire associée à  $A$ .*

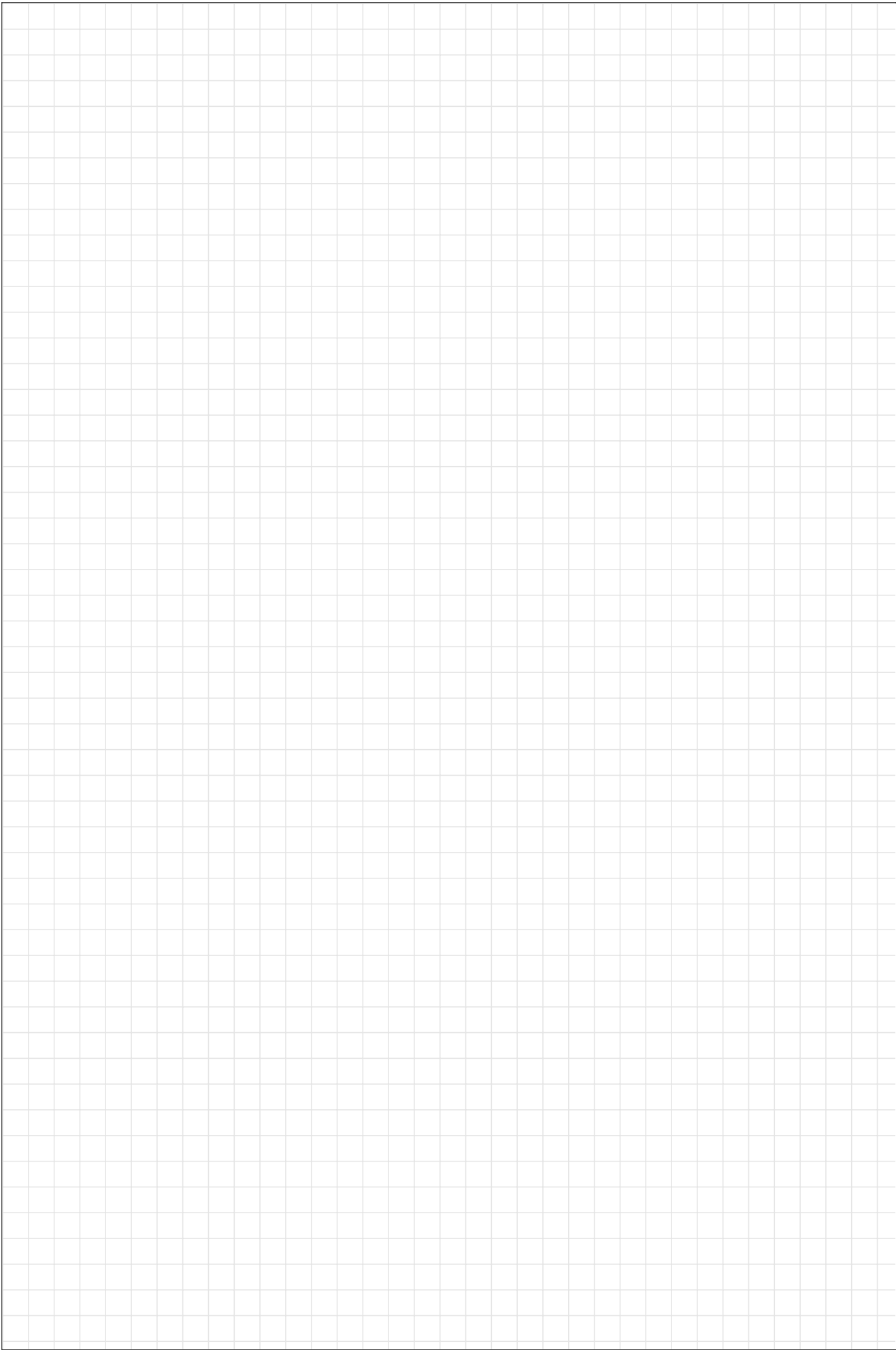
On a  $\text{rg} A = \dim \text{Im} A$ .

**Corollaire 4.3.** *Le rang d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est égal au rang des vecteurs colonnes de  $A$  dans  $\mathbb{K}^n$ .*

**Corollaire 4.4.** *Étant donnée une base  $\mathcal{B}$  d'un espace vectoriel  $E$ , le rang d'une famille de vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $E$  est égal au rang de la matrice des vecteurs dans la base  $\mathcal{B}$  :  $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \text{rg} M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$*

**Corollaire 4.5.** *Le rang d'une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  est le rang de la matrice de  $u$  dans n'importe quelles bases de  $E$  et  $F$ .*





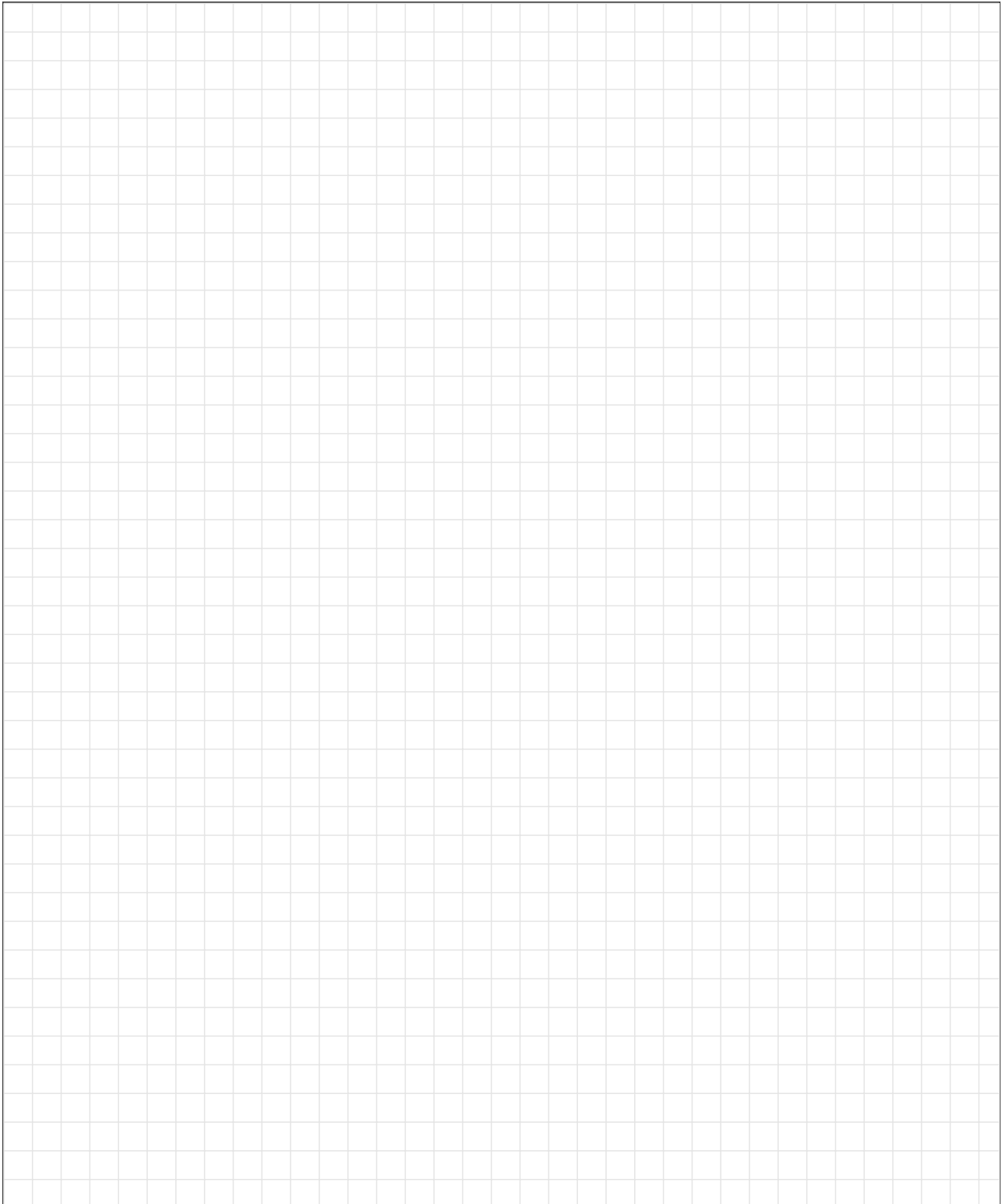


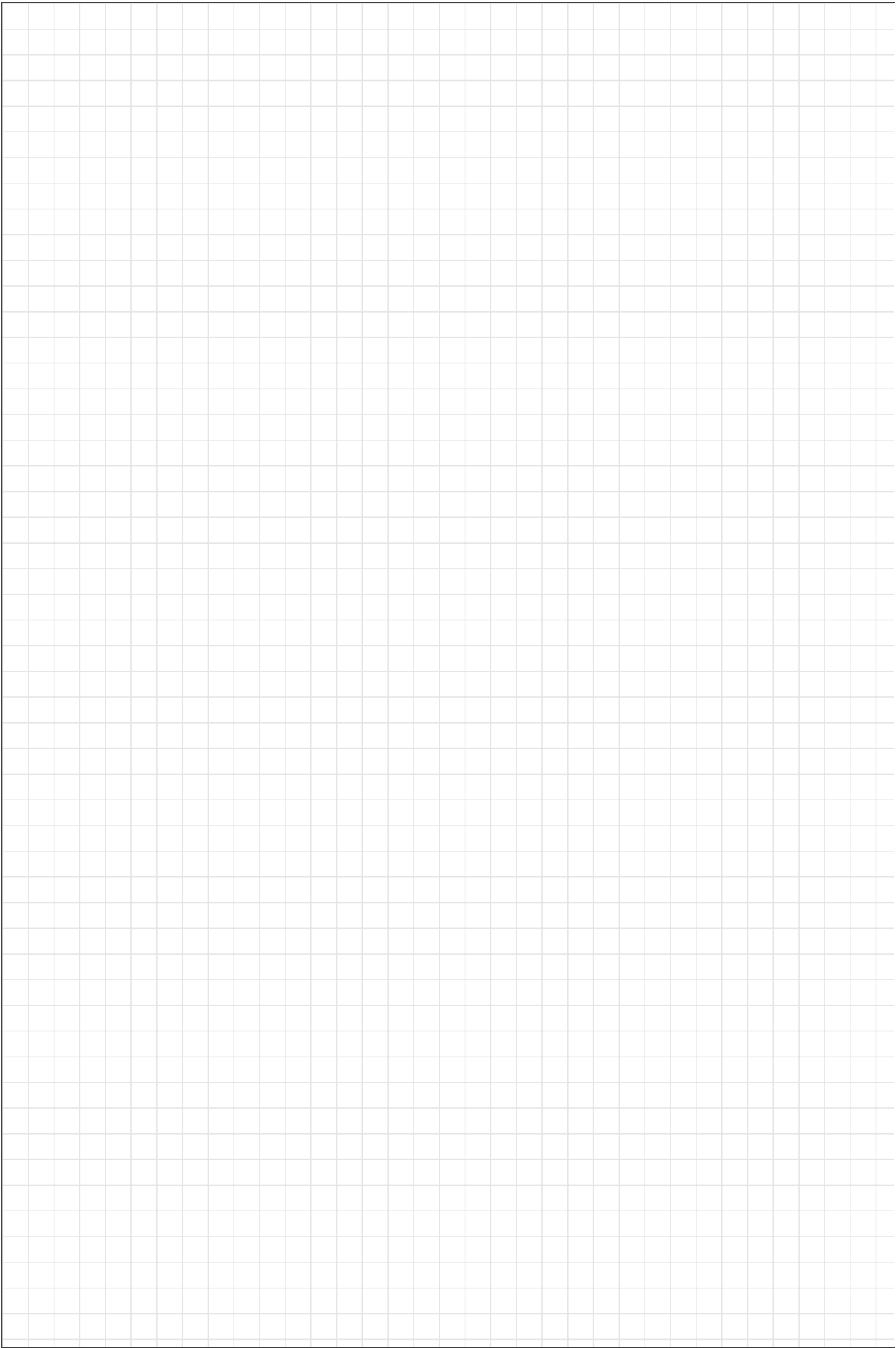
## 4.4 Rang et matrice inversible

**Théorème 4.6.** *Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est de rang maximal si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de  $\mathbb{K}^n$*

**Théorème 4.7.** *Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  sont des matrices inversibles et si  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est une matrice, alors  $\text{rg}(AM) = \text{rg}(M) = \text{rg}(MB)$  : on ne change pas le rang quand on multiplie par une matrice inversible.*

**Théorème 4.8.** *Deux matrices équivalentes par lignes ont le même rang.*

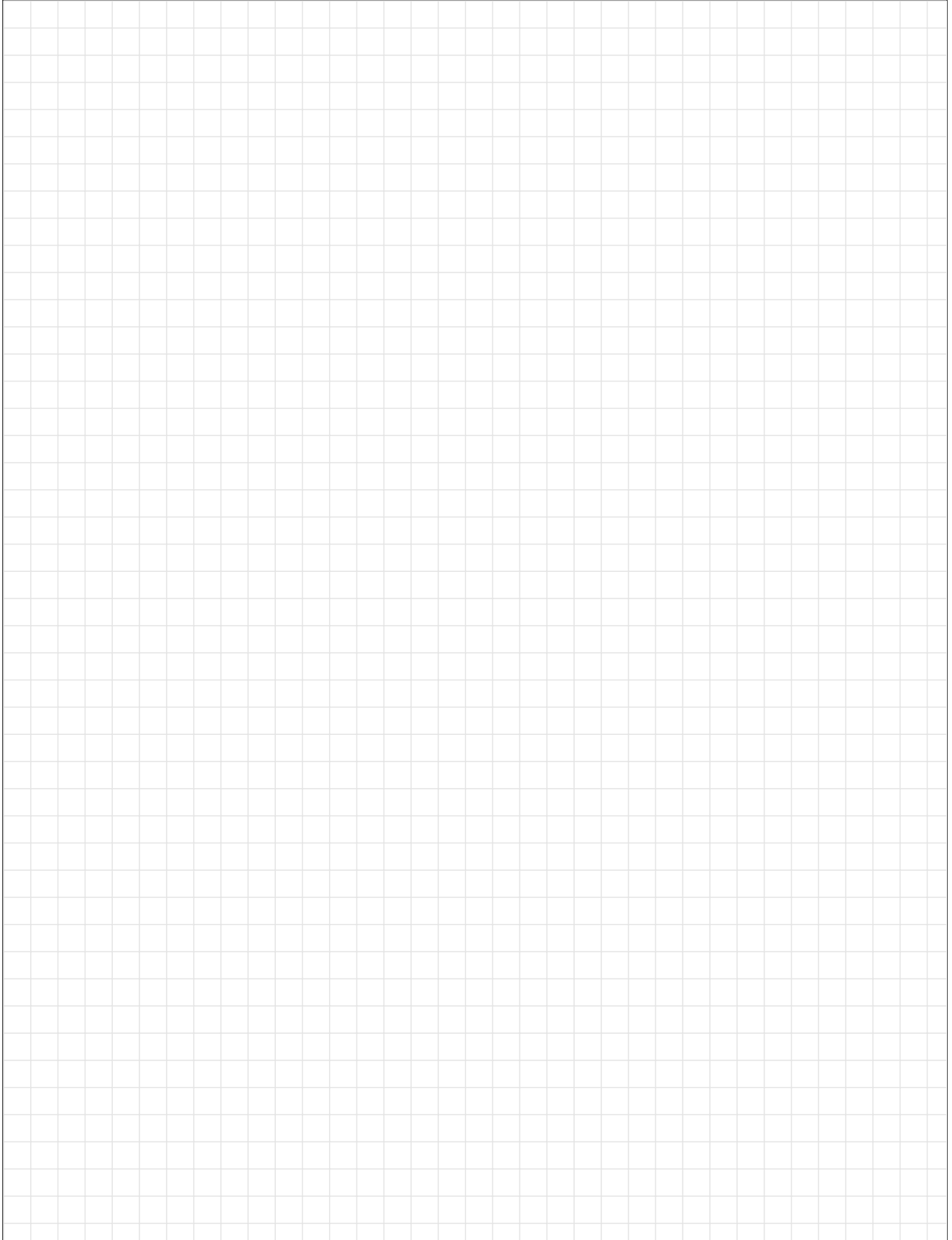


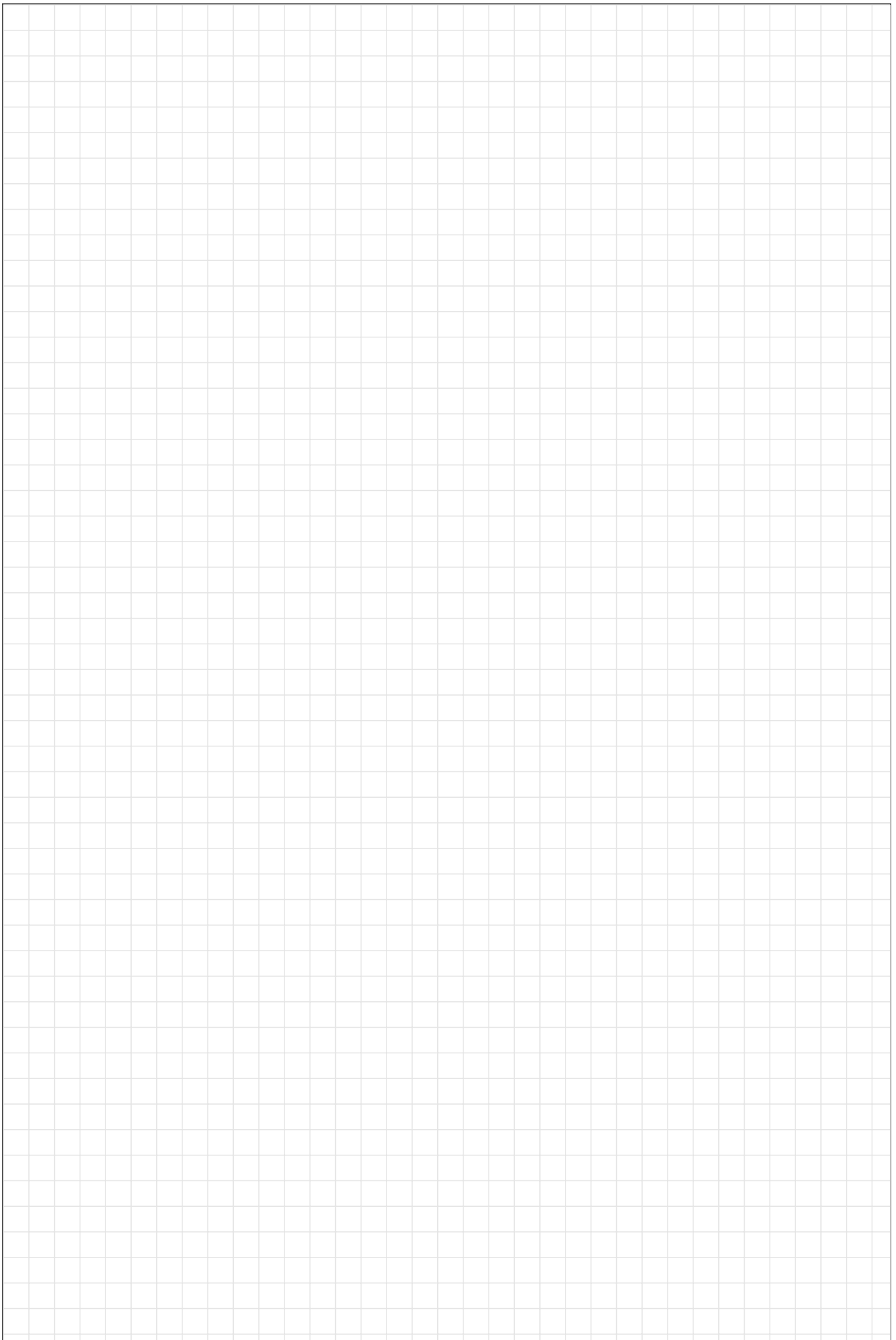


## 4.5 Rang de la transposée

**Proposition 4.9.** *Le rang d'une matrice est égal : au rang de ses vecteurs colonnes et au rang de ses vecteurs lignes et au rang de sa transposée.*

**Théorème 4.10.** *Deux matrices équivalentes par colonnes ont le même rang.*





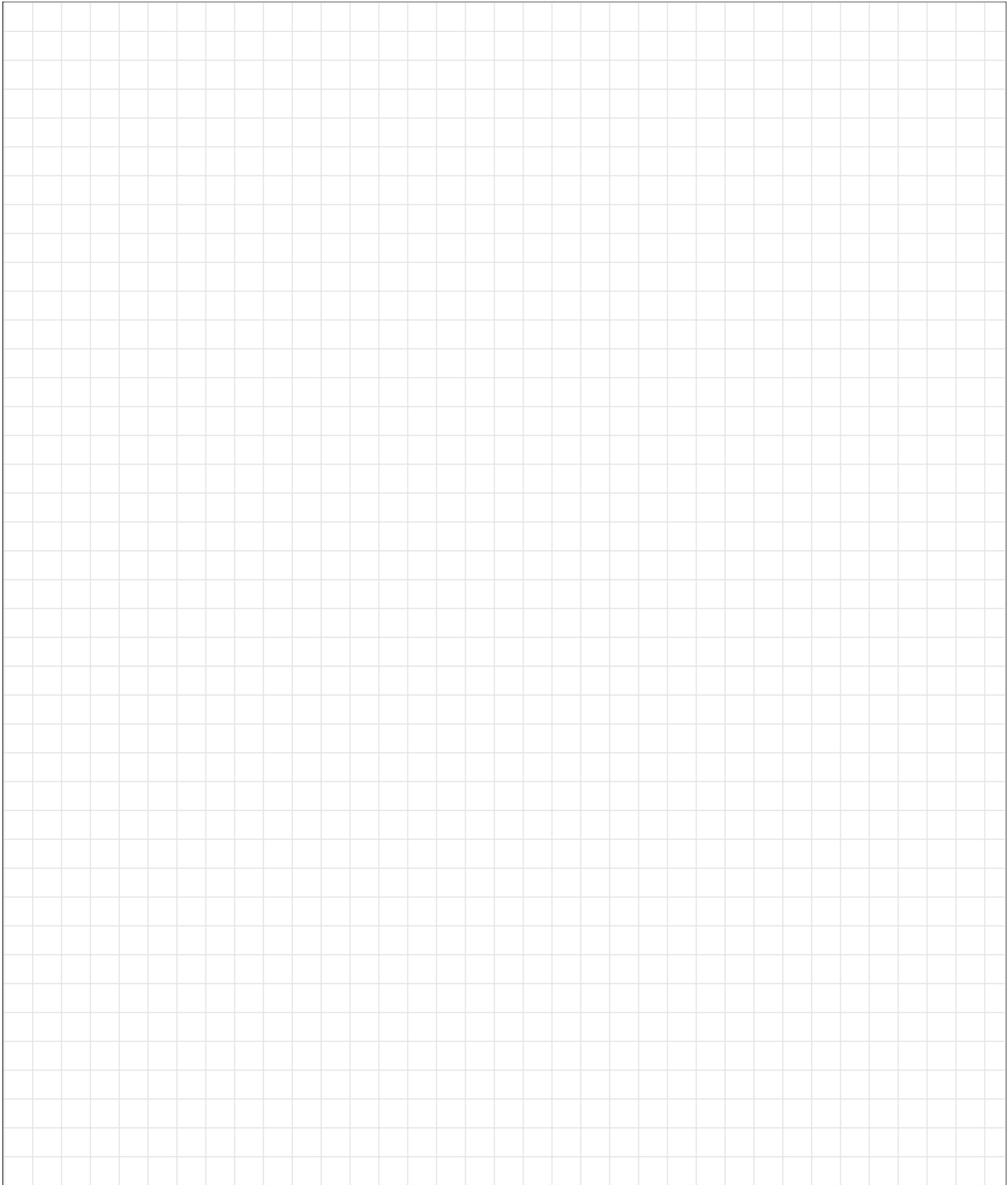
## 5 Exemples de transformations vectorielles du plan euclidien

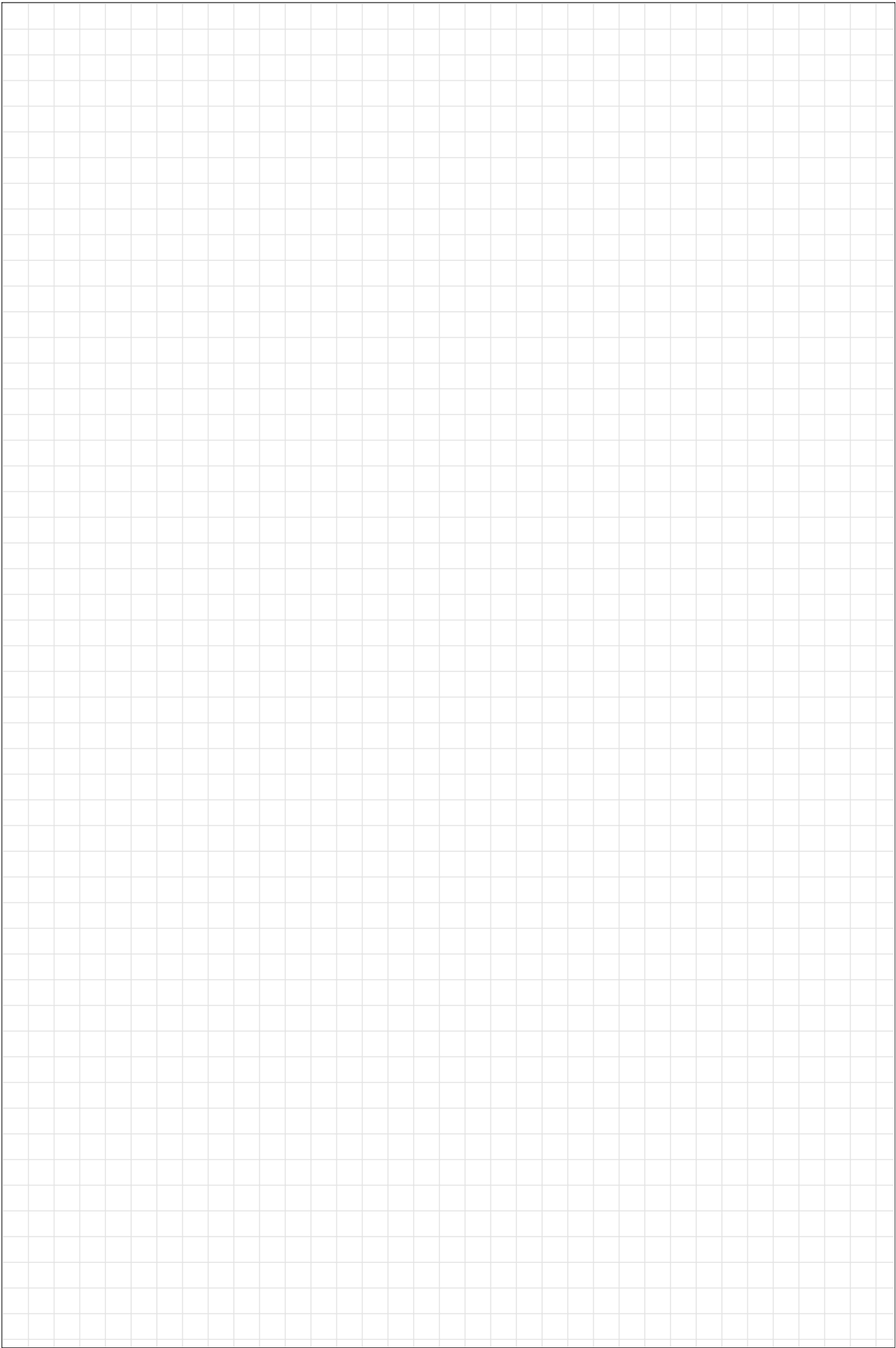
### 5.1 Rotations vectorielles

**Définition 5.1.** Dans le plan euclidien, on appelle rotation vectorielle d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$ , l'application  $r_\theta$  telle que pour tout vecteur  $\vec{u}$  on ait  $(\vec{u}, r_\theta(\vec{u})) = \theta [2\pi]$  et  $\|\vec{u}\| = \|r_\theta(\vec{u})\|$ .

**Proposition 5.1.** Si  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien, alors  $f$  conserve le produit scalaire si et seulement si  $f$  conserve la norme.

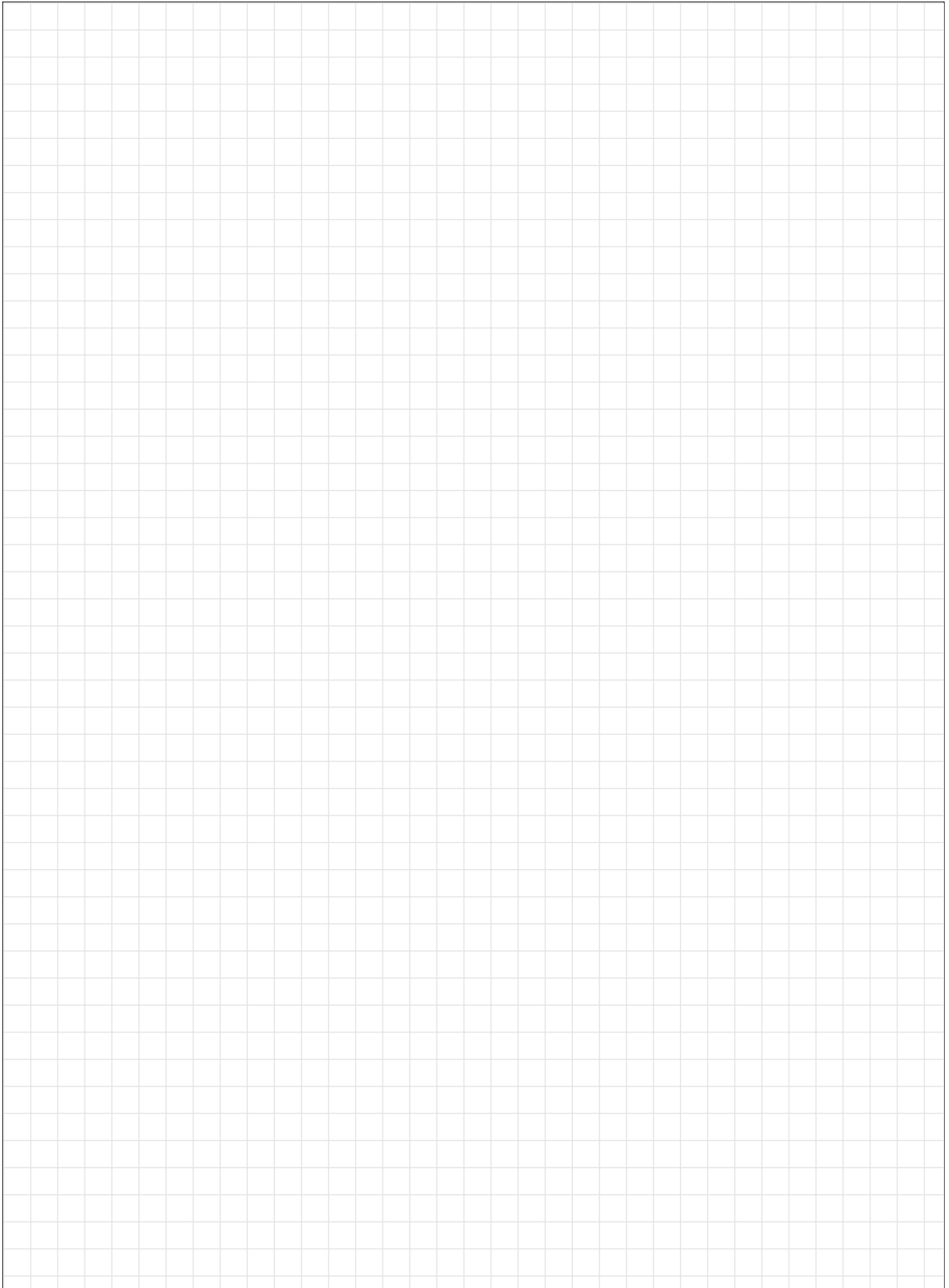
Alors  $f$  est un automorphisme. On dit que  $f$  est un automorphisme orthogonal.

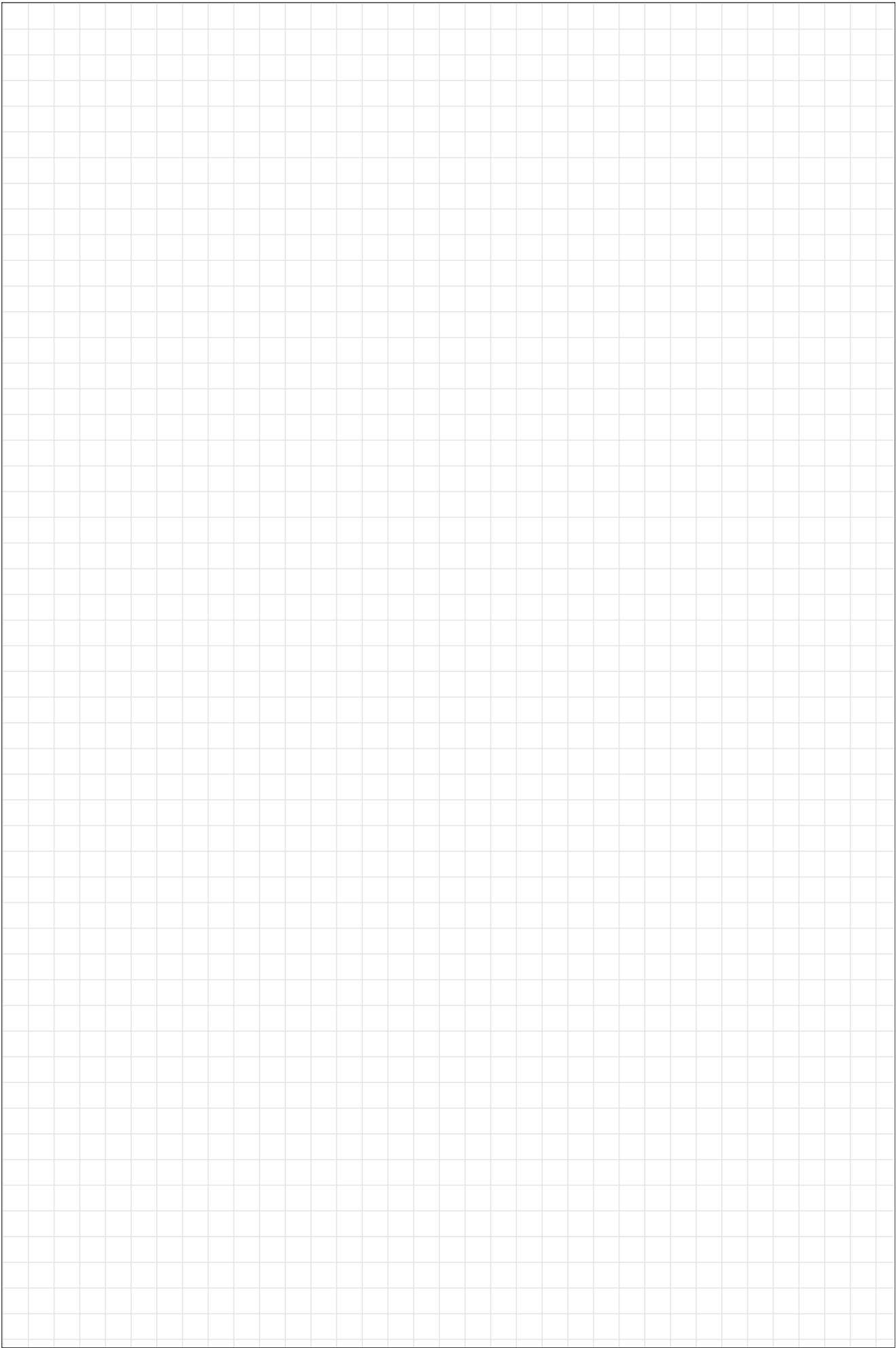




## 5.2 Matrice d'une rotation dans une BOND

**Théorème 5.2.** *La matrice de  $r_\theta$  dans une BOND est  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .*







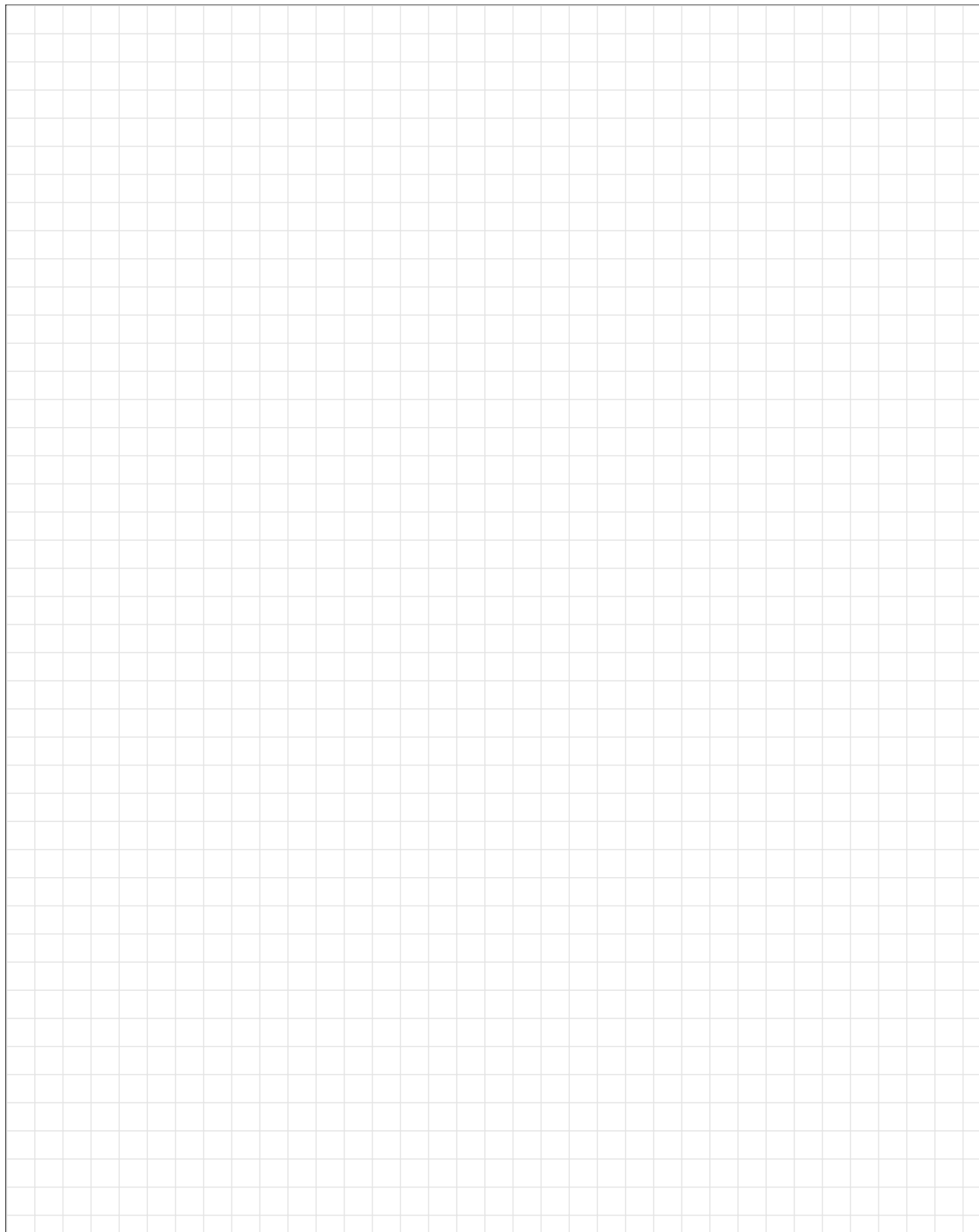
### 5.3 Composée de deux rotations

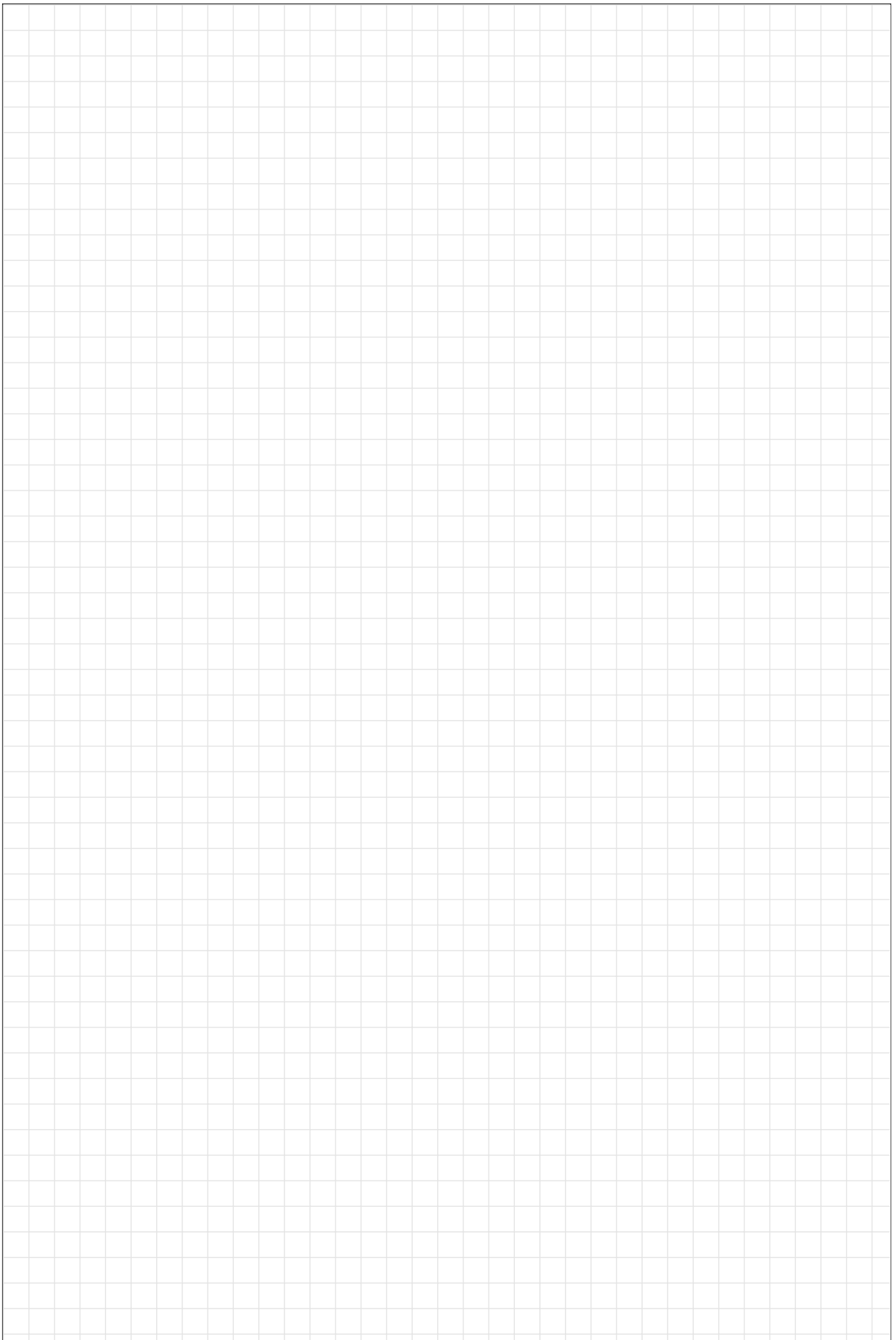
**Proposition 5.3.** *La composée des rotations  $r_\theta$  et  $r_\varphi$  donne la rotation  $r_{\theta+\varphi}$*

$$r_\theta \circ r_\varphi = r_\varphi \circ r_\theta = r_{\theta+\varphi}$$

**Corollaire 5.4.** *Matriciellement,  $R_\theta \times R_\varphi = R_\varphi \times R_\theta = R_{\theta+\varphi}$*

**Théorème 5.5.** *Une rotation  $r_\theta$  est un automorphisme du plan et  $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$ .*

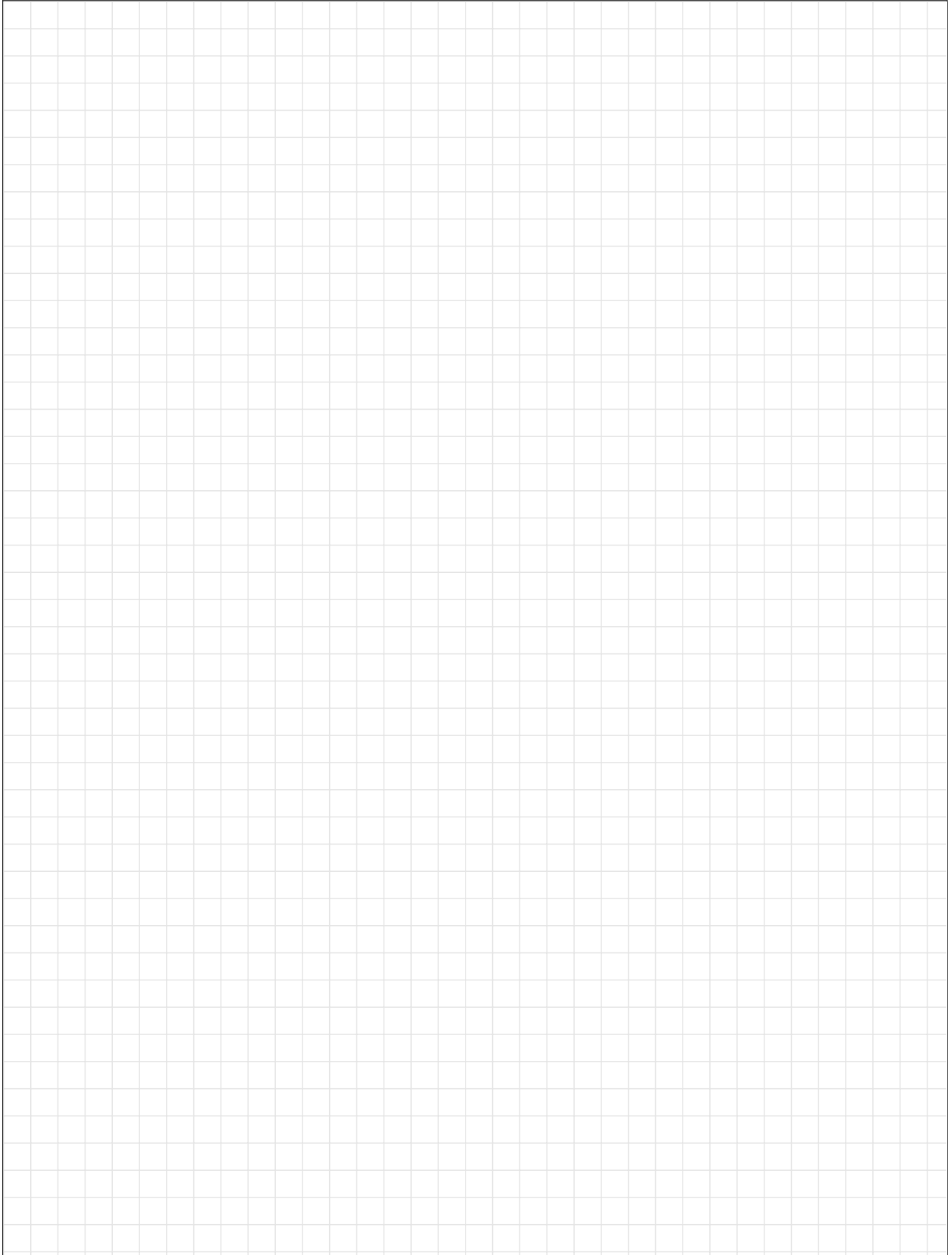




## 5.4 Symétrie orthogonale vectorielle

**Proposition 5.6.** Soit  $\vec{v}$  un vecteur non nul du plan euclidien. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à  $\vec{v}$  est un sous-espace vectoriel du plan noté  $\vec{v}^\perp$ .

De plus,  $\text{Vect } \vec{v}$  et  $\vec{v}^\perp$  sont supplémentaires dans le plan.



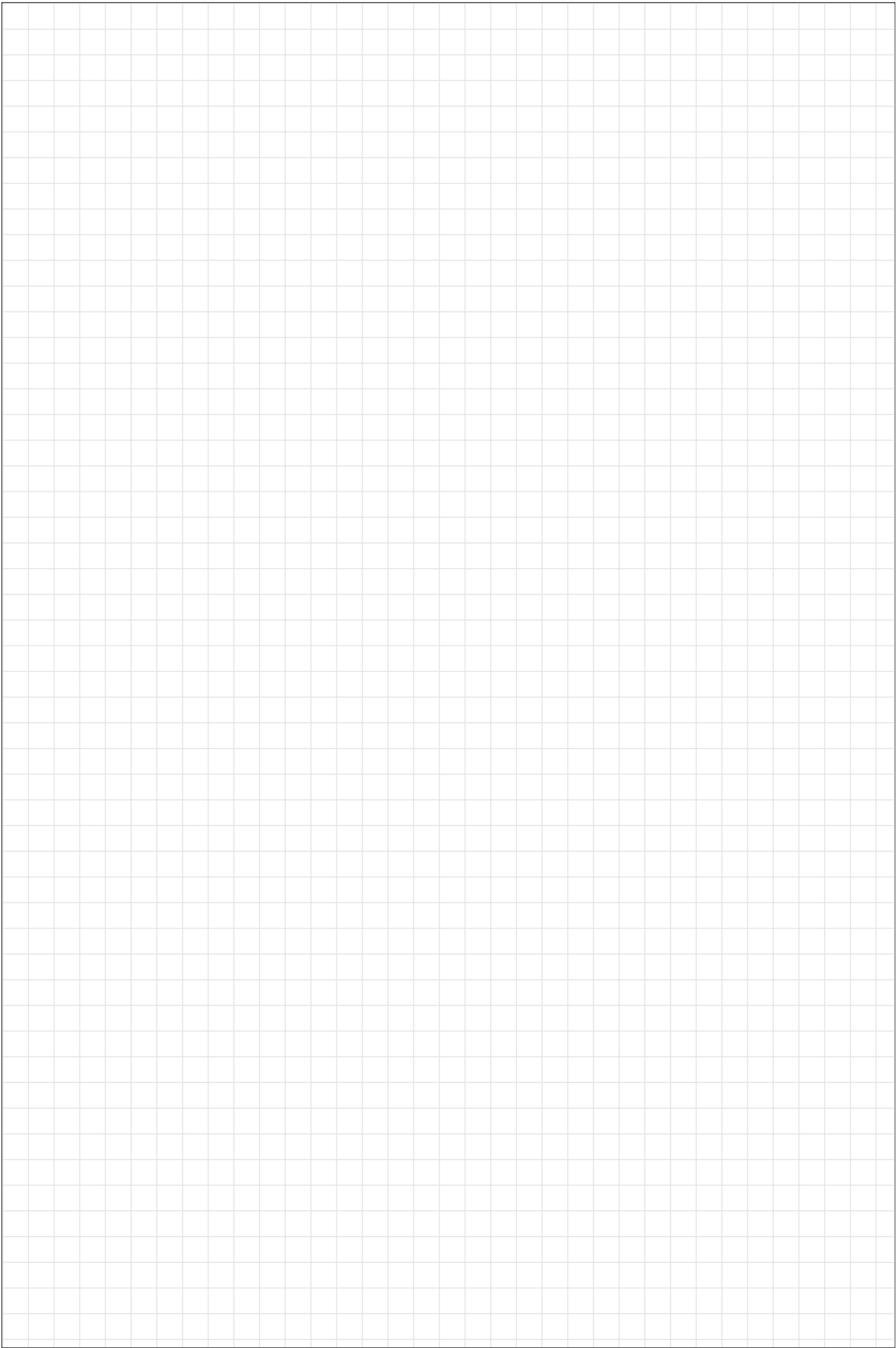
**Définition 5.2.** Soit  $\vec{v}$  un vecteur non nul du plan euclidien. On appelle symétrie vectorielle orthogonale par rapport à  $\vec{v}$ , la symétrie par rapport à  $\text{Vect } \vec{v}$  parallèlement à  $\vec{v}^\perp$ .

C'est à dire que  $s_{\vec{v}}$  est définie par  $s_{\vec{v}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$  où  $\vec{u}_1 \in \text{Vect } \vec{v}$  et  $\vec{u}_2 \in \vec{v}^\perp$  avec  $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ .

**Théorème 5.7.** Pour  $\vec{v} \neq 0$ , l'application  $s_{\vec{v}}$  est un automorphisme du plan vectoriel.

$s_{\vec{v}}$  conserve le produit scalaire, la norme, change l'orientation des angles et vérifie  $s_{\vec{v}} \circ s_{\vec{v}} = \text{id}_p$ .

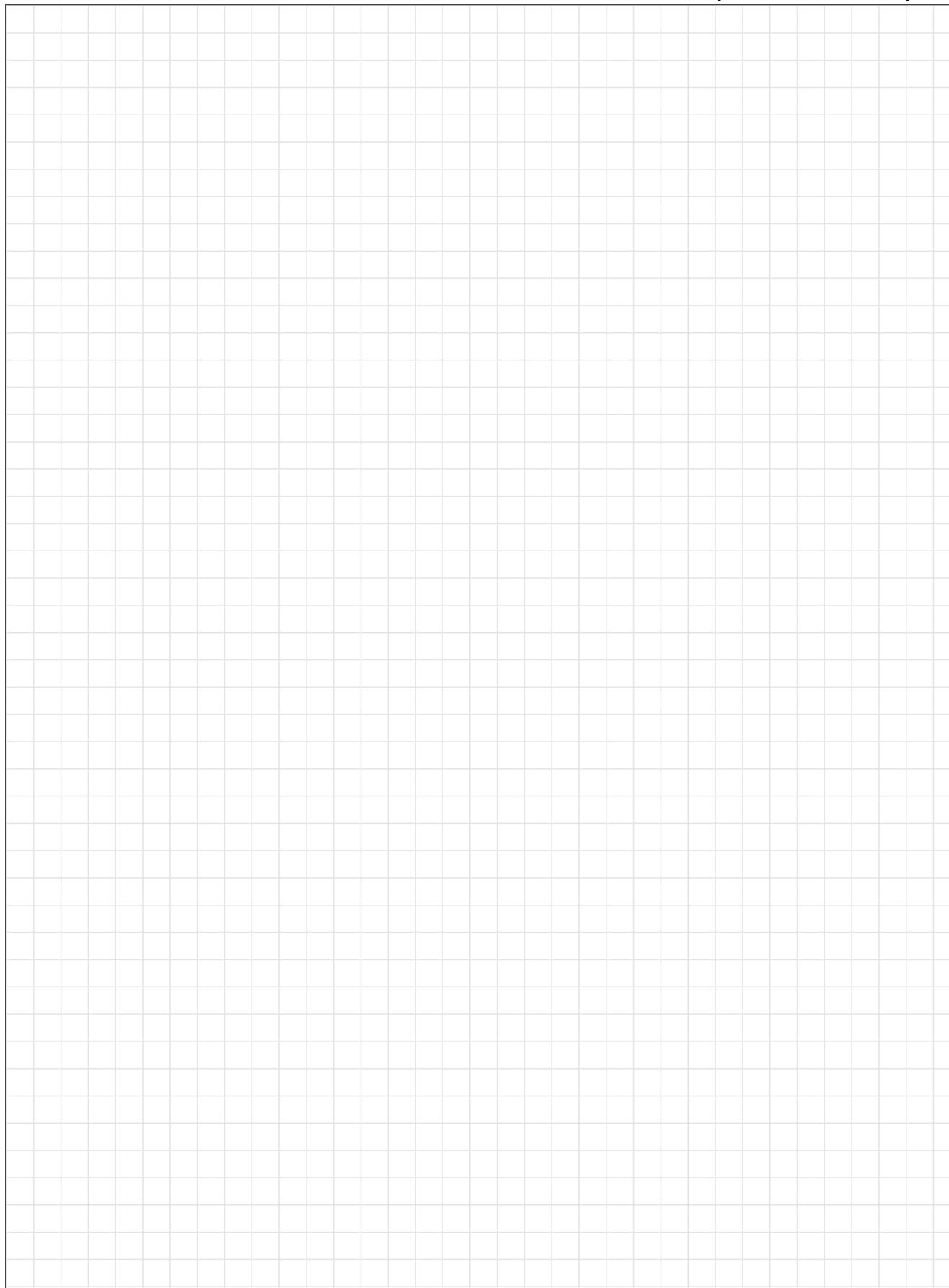


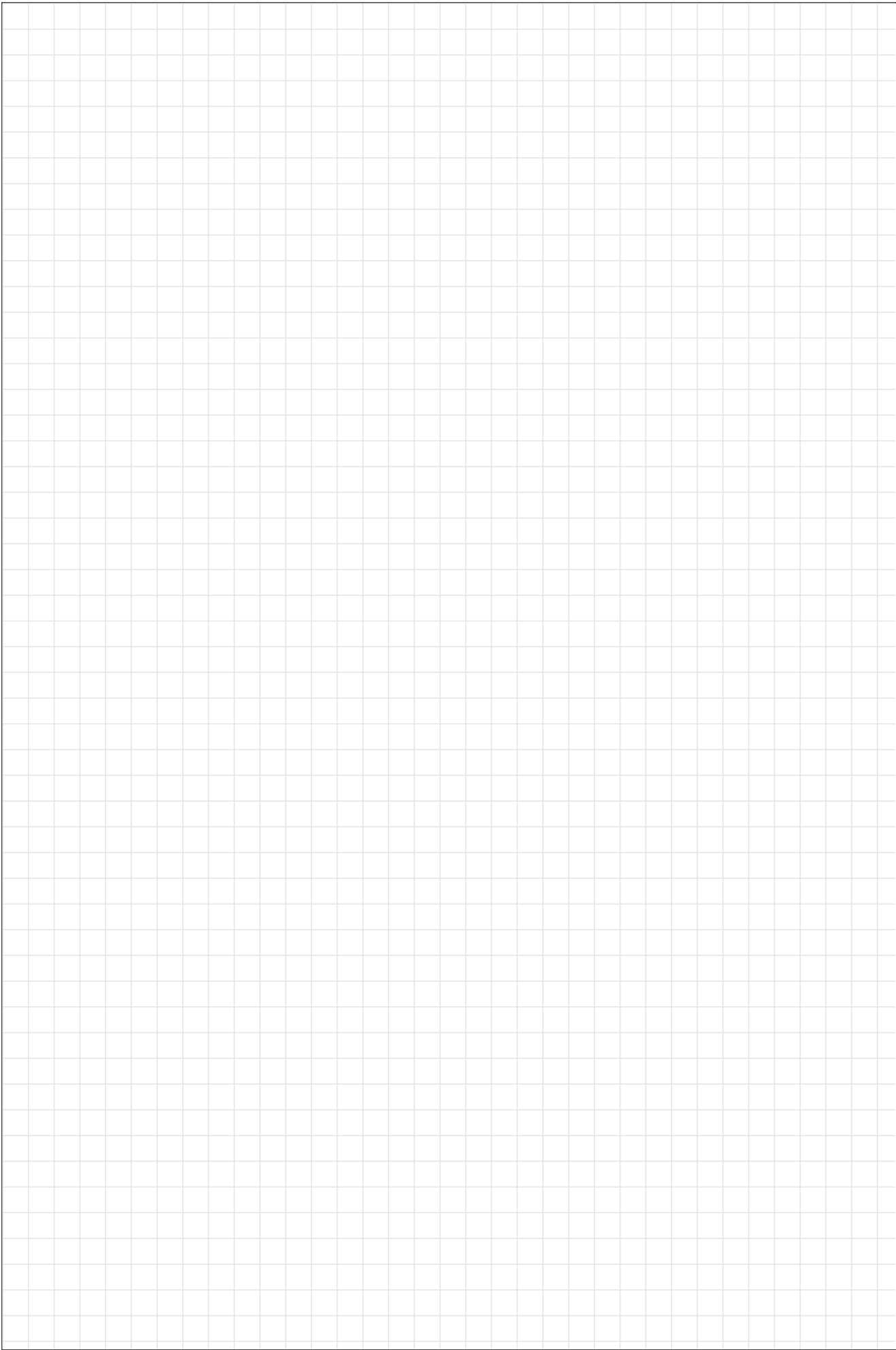


## 5.5 Matrice d'une symétrie orthogonale dans une BOND

**Théorème 5.8.** Soit  $P$  le plan euclidien muni d'une BOND  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Si  $\vec{v}$  fait un angle  $(\vec{i}, \vec{v}) = \varphi$  avec le vecteur  $\vec{i}$ , alors  $s_{\vec{v}}$  a pour matrice  $S_{2\varphi} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$ .

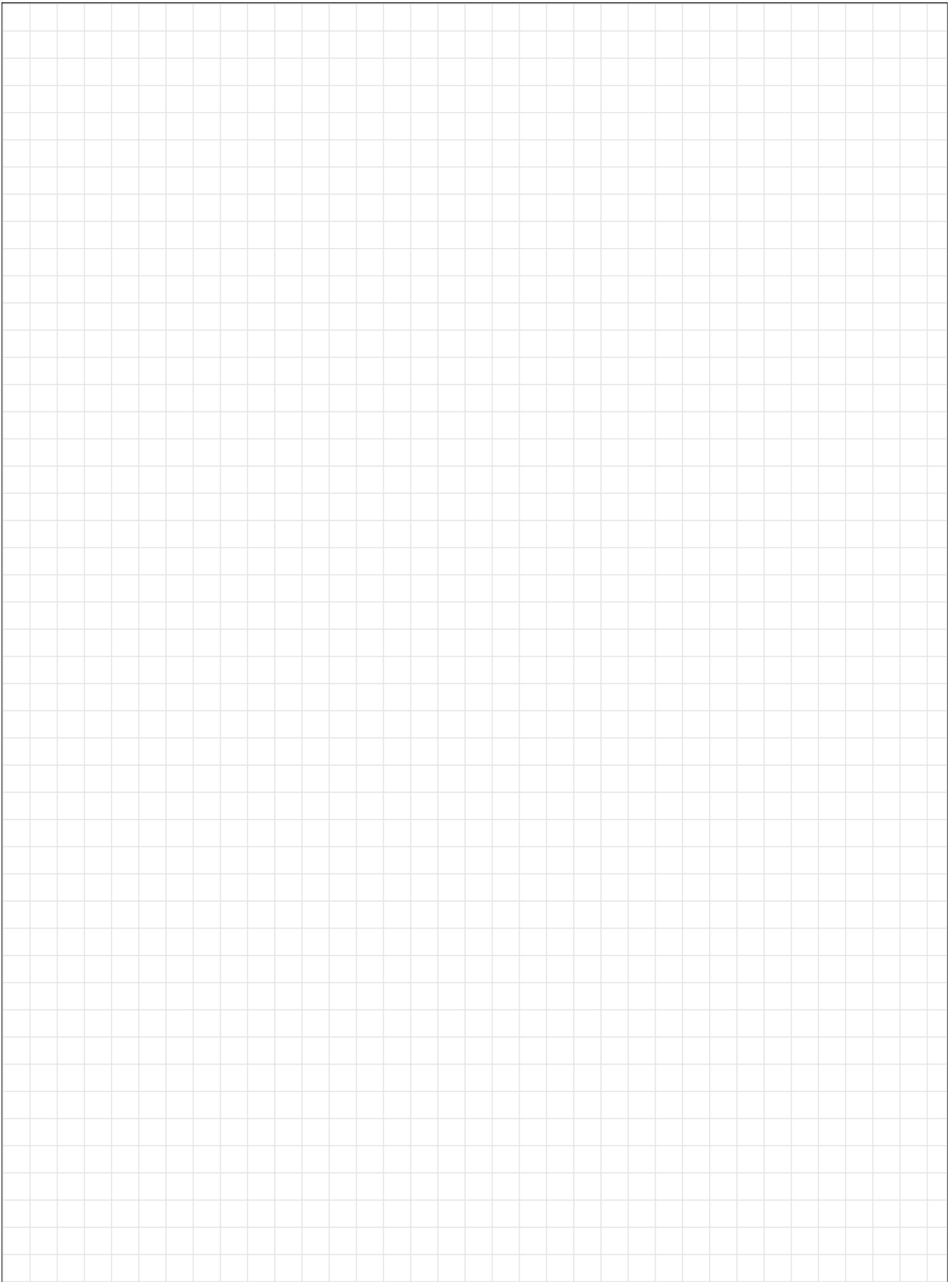




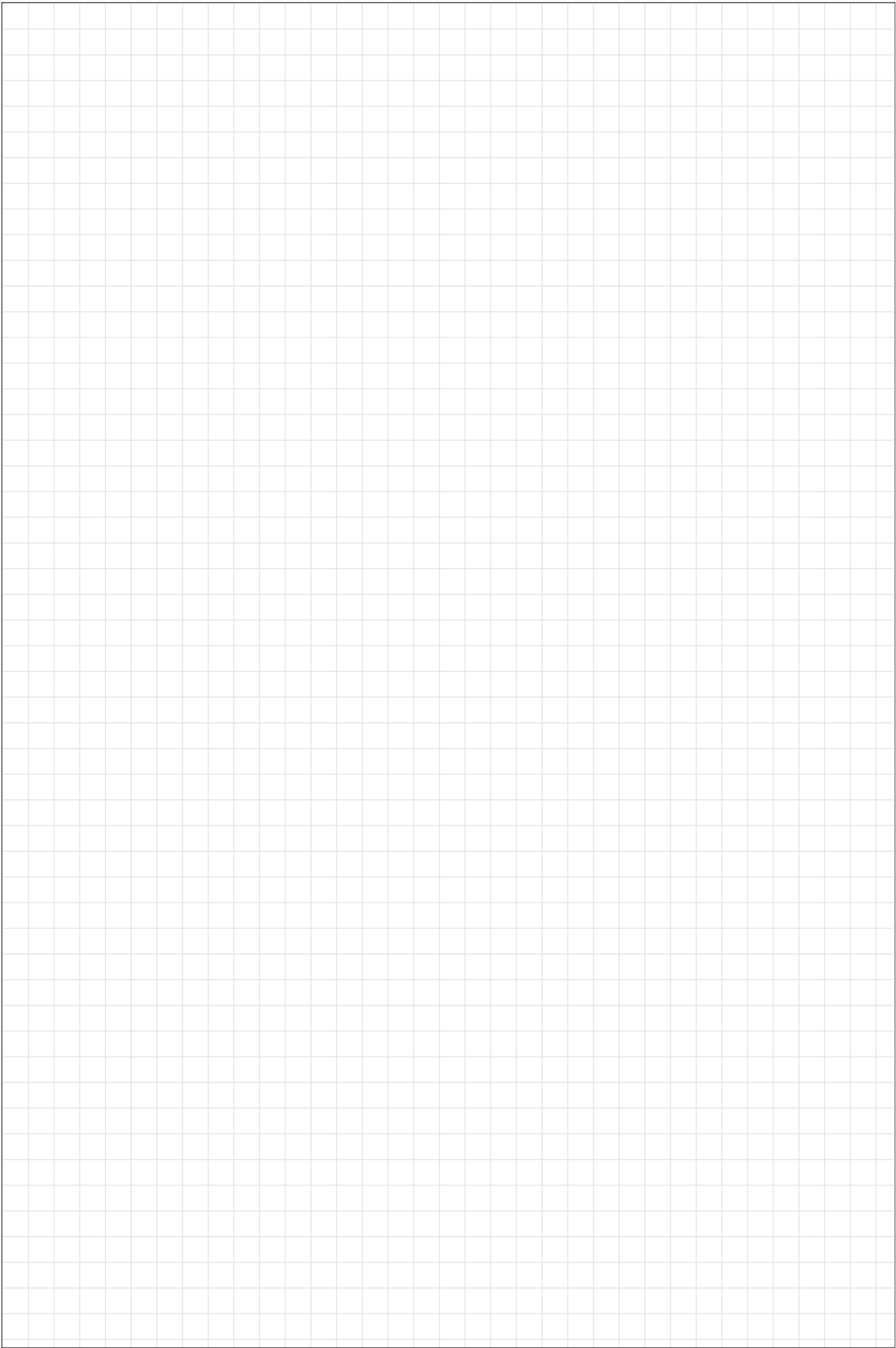
## 5.6 Composée de deux symétries orthogonales

**Théorème 5.9.** Soit  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  deux vecteurs non nuls du plan vectoriel.

La composée de deux symétries orthogonales  $s_{\vec{v}_1}$  et  $s_{\vec{v}_2}$  est une rotation d'angle  $\theta = 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2) [2\pi]$ .







## 6 Exemples de transformations vectorielles de l'espace euclidien

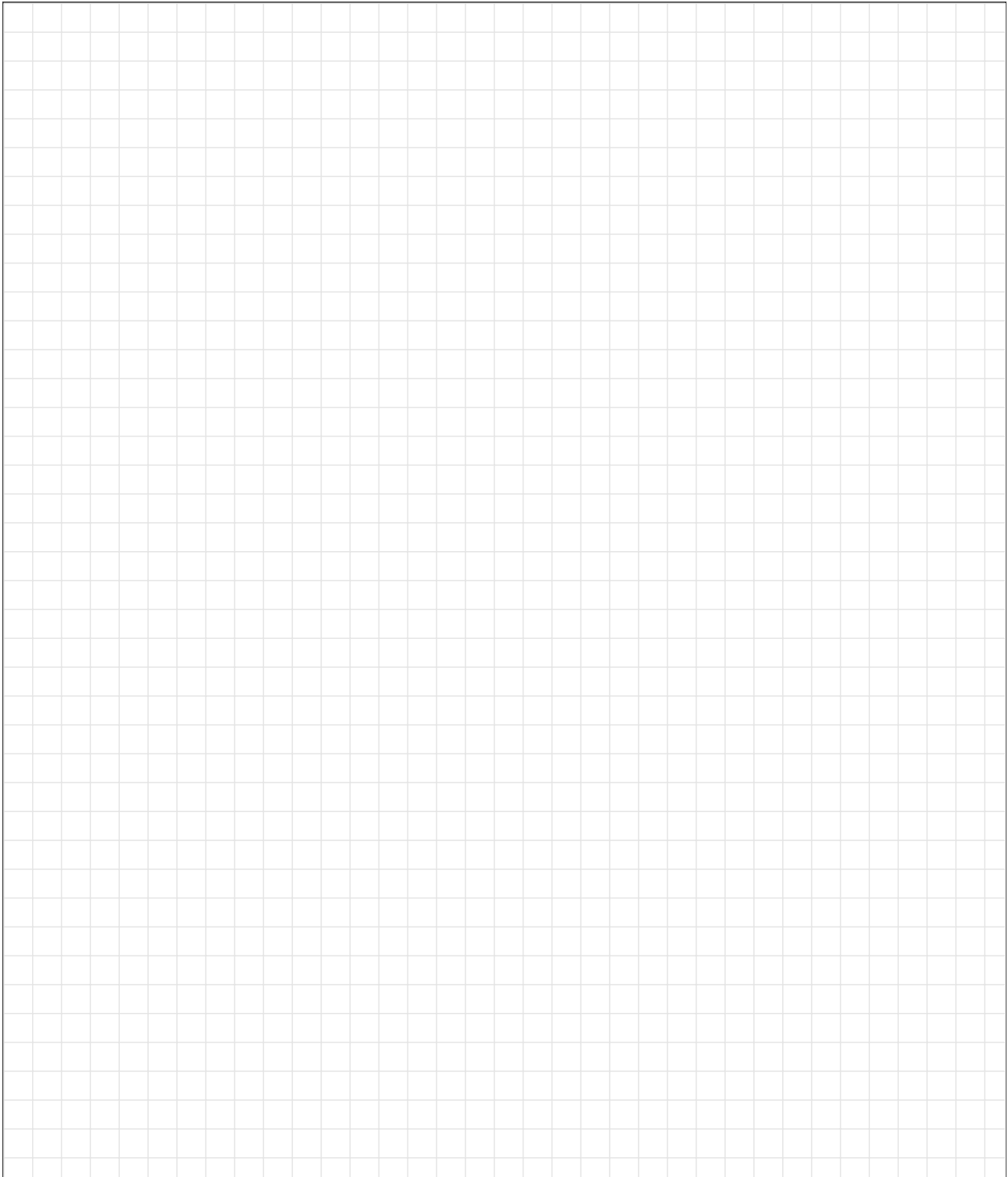
### 6.1 Rotation vectorielle de l'espace

**Définition 6.1.** Soit  $\vec{n}$  un vecteur normé de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  :  $||\vec{n}|| = 1$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

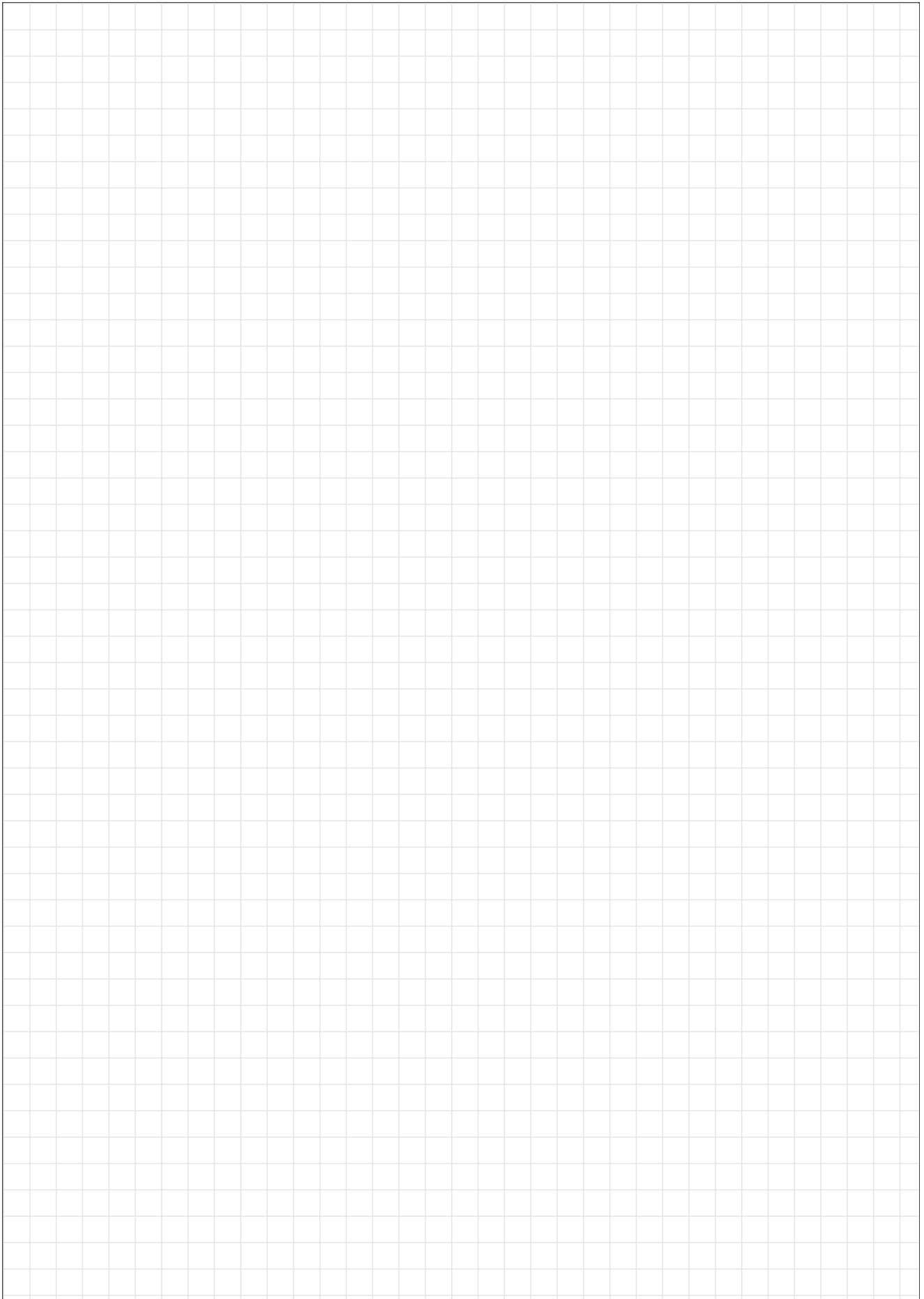
Tout vecteur  $\vec{u}$  se décompose de manière unique en  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  avec  $\vec{u}_1 \in \text{Vect } \vec{n}$  et  $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$ .

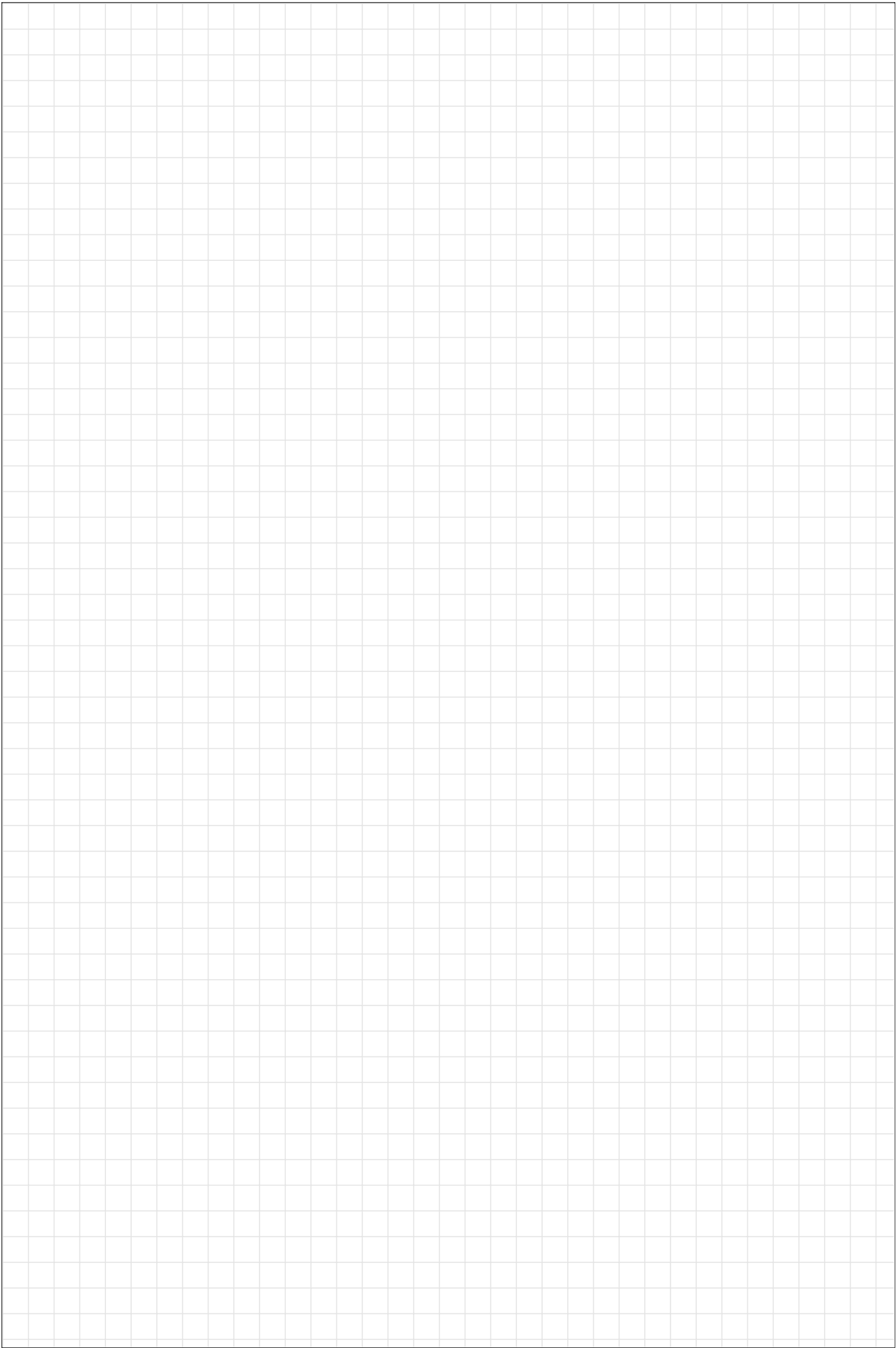
On appelle rotation vectorielle d'axe dirigé par  $\vec{n}$  et d'angle  $\theta$ , l'application  $r_{\theta, \vec{n}}$  définie par

$$r_{\theta, \vec{n}}(\vec{u}) = \vec{u}_1 + \cos \theta \vec{u}_2 + \sin \theta \vec{n} \wedge \vec{u}_2.$$



**Proposition 6.1.** *Une rotation vectorielle est linéaire, bijective, conserve la norme, le produit scalaire et les angles.*





## 6.2 Matrice d'une rotation dans une BOND adaptée

**Théorème 6.2.** Soit  $\vec{n}$  un vecteur normé,  $\vec{i} \perp \vec{n}$  avec  $\|\vec{i}\| = 1$ , un vecteur normé orthogonal à  $\vec{n}$ . Alors  $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$  est une BOND de l'espace.

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . La matrice de la rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{n}$ , dans la base  $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$ , est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

