Mathématique - Corrigé Devoir Maison n°14

Exercice 1

1. On note $f(x)=e^x+x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto e^x$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Alors par somme, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, alors f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})=]\lim\limits_{-\infty} f,\lim\limits_{+\infty} f[$. On a $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$. Donc $\boxed{f \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$
   $$\boxed{\text{Pour } n\in\mathbb{N}^*, \text{ l'équation } e^x+x=n \text{ a donc une unique solution } u_n\in\mathbb{R}}.$$
   On a $f(0)=-n$ donc $f(u_n)>f(0)$ et comme f est strictement croissante, on en déduit que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n>0}$.
2. On a $f(u_n)=n$ donc $u_n=f^{-1}(n)$. Et, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ce qui donne $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y)=+\infty$ car $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y)=\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(f(x))=+\infty$ en posant $y=f(x)$.
   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n)=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty}$
3. On a $e^{u_n}=n-u_n$ soit $\boxed{u_n=\ln(n-u_n)}$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$. Alors $0\leqslant \dfrac{u_n}{n}\leqslant \dfrac{\ln(n-u_n)}{n}\leqslant\dfrac{\ln n}{n}$
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$, alors par le théorème d'encadrement $\dfrac{u_n}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
   On a $\dfrac{u_n}{\ln n}=\dfrac{\ln(n-u_n)}{\ln n}=\dfrac{\ln\left(n\left(1-\frac{u_n}{n}\right)\right)}{\ln n}=1+\dfrac{\ln(1-\frac{u_n}{n})}{\ln n}$.
   Comme $\dfrac{u_n}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, alors $\dfrac{\ln(1-\frac{u_n}{n})}{\ln n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{\ln n}=1$. Donc $\boxed{u_n\underset{+\infty}{\sim}\ln n.}$
4. On a $v_n=u_n-\ln(n)$ et $u_n=\ln(n-u_n)$ donc $v_n=\ln(n-u_n)-\ln(n)=\ln\left(1-\dfrac{u_n}{n}\right)$.
   Or $\dfrac{u_n}{n}\underset{n\to+\infty}{\to}0$ et $\ln(1-x)\underset{0}{\sim}-x$ donc $v_n\underset{+\infty}{\sim}-\dfrac{u_n}{n}$ soit $\boxed{v_n\underset{+\infty}{\sim}-\dfrac{\ln n}{n}}$.
5. On poursuit le calcul précédent car on a $\ln(1-x)\underset{0}{=}-x+o(x)$.
   Donc $v_n=-\dfrac{u_n}{n}+o(\frac{u_n}{n})$. En utilisant $u_n\underset{\infty}{\sim}\ln(n)$, on a $u_n=\ln(n)+o(\ln(n))$.
   Et, on obtient $v_n=-\dfrac{\ln n}{n}+o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$. On revient à u_n : $\boxed{u_n\underset{+\infty}{=}\ln n-\dfrac{\ln n}{n}+o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right).}$

Exercice 2

1. On calcule avec $\vec{a}=(1,0)$, on a $f(\vec{a})=(0,1)$, $f^2(\vec{a})=(-1,0)$, $f^3(\vec{a})=(0,-1)$ et $f^4(\vec{a})=(1,0)$.
   On constate donc que $f^4(\vec{a})=\vec{a}$, que la famille $\left(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),f^3(\vec{a})\right)$ est constituée d'éléments deux à deux distincts, et qu'elle est génératrice dans E (preuve du dernier point : par exemple parce qu'elle contient la base canonique qui, elle, est génératrice).
   Donc $\boxed{f \text{ est cyclique d'ordre } p=4.}$
2. (a) Avec $\vec{a}=(0,-1,1)$, on détermine successivement
   $f(\vec{a})=(-1,-1,1)$, $f^2(\vec{a})=(2,1,0)$ puis aussi $f^3(\vec{a})=(0,-1,1)=\vec{a}$.
   Montrons que la famille $\mathscr{B}'=\left(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a})\right)$ est libre. Partons d'une combinaison linéaire nulle.
   $r(0,-1,1)+s(-1,-1,1)+t(2,1,0)=(0,0,0)\Longleftrightarrow(-s+2t,-r-s+t,r+s)=(0,0,0)$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -s+2t=0 \\ -r-s+t=0 \\ r+s=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} s=2t \\ 2t-2t+t=0 \\ r=-s=-2t \end{array}\right. \iff t=0=r=s$$

La famille $\mathscr{B}'$ est libre. Elle est constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3.

Donc $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } E}$ On en déduit qu'on a $\mathscr{B}'$ famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, constituée d'éléments deux à deux distincts, et $f^3(\vec{a})=\vec{a}$.

Ceci nous permet de conclure que $\boxed{f \text{ est cyclique d'ordre } p=3.}$

(b) i. L'endomorphisme nul $\overrightarrow{0}_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ est dans $\mathscr{C}(f)$ car $\overrightarrow{0}_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \circ f = \overrightarrow{0}_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} = f \circ \overrightarrow{0}_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
Soit $g_1 \in \mathscr{C}(f)$, $g_2 \in \mathscr{C}(f)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a $(g_1+g_2)\circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$ par définition de g_1+g_2.
Puis, $(g_1+g_2)\circ f = f\circ g_1 + f \circ g_2$ car g_1, g_2 sont dans $\mathscr{C}(f)$.
Enfin, comme f est linéaire, on a $(g_1+g_2)\circ f = f\circ(g_1+g_2)$ ce qui prouve que $\underline{g_1+g_2 \in \mathscr{C}(f)}$.
De même, $(\alpha g_1)\circ f = \alpha(g_1\circ f)$ par définition de αg_1. Puis $(\alpha g_1)\circ f = \alpha(f\circ g_1)$ car $g_1 \in \mathscr{C}(f)$. On obtient par définition de αf : $(\alpha g_1)\circ f = (\alpha f)\circ g_1$. Enfin comme f est linéaire, $(\alpha g_1)\circ f = f\circ(\alpha g_1)$ donc $\underline{\alpha g_1 \in \mathscr{C}(f)}$.
On en déduit que $\mathscr{C}(f)$ est non vide et stable par combinaison linéaire alors
$\boxed{\mathscr{C}(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

ii. On a $Id_E \circ f = f = f\circ Id_E$ donc $Id_E \in \mathscr{C}(f)$. On a $f\circ f = f^2 = f\circ f$ donc $f \in \mathscr{C}(f)$.
On a $f^2\circ f = f^3 = f\circ f^2$ donc $f^2 \in \mathscr{C}(f)$.
Comme $\mathscr{C}(f)$ est un sev, on en déduit que toutes les combinaisons linéaires de Id_E, f et f^2 sont dans $\mathscr{C}(f)$ donc $\boxed{Vect(Id_E, f, f^2) \subset \mathscr{C}(f)}$

iii. Soit $g \in \mathscr{C}(f)$. On a $g(\vec{a}) = \alpha\vec{a} + \beta f(\vec{a}) + \gamma f^2(\vec{a})$ soit $\underline{g(\vec{a}) = \alpha Id_E(\vec{a}) + \beta f(\vec{a}) + \gamma f^2(\vec{a})}$
On applique f à cette égalité : $(f\circ g)(\vec{a}) = \alpha f(\vec{a}) + \beta f^2(\vec{a}) + \gamma f^3(\vec{a})$.
Mais, on a $g\circ f = f\circ g$ d'où $\boxed{g(f(\vec{a})) = \alpha Id_E(f(\vec{a})) + \beta f(f(\vec{a})) + \gamma f^2(f(\vec{a})}$.
On recommence et on trouve $(f^2\circ g)(\vec{a}) = \alpha f^2(\vec{a}) + \beta f^3(\vec{a}) + \gamma f^4(\vec{a})$.
qui donne $\boxed{g(f^2(\vec{a})) = \alpha Id_E((f^2(\vec{a})) + \beta f(f^2(\vec{a})) + \gamma f^2(f^2(\vec{a}))}$.

iv. D'après les trois égalités précédentes, en notant $\varphi = \alpha Id_E + \beta f + \gamma f^2$ qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, on a $g(\vec{a}) = \varphi(\vec{a})$, $g(f(\vec{a})) = \varphi(f(\vec{a}))$ et $g(f^2(\vec{a})) = \varphi(f^2(\vec{a}))$.
Or il existe un et un seul endomorphisme tel que les images des vecteurs d'une base $\mathscr{B}' = (\vec{a}, f(\vec{a}), f^2(\vec{a}))$ soient fixées, par théorème, , il s'ensuit que $g=\varphi$ soit $\boxed{g = \alpha Id_E + \beta f + \gamma f^2}$.
On vient de démontrer que tout élément de $\mathscr{C}(f)$ est combinaison linéaire de Id_E, f et f^2, alors $\mathscr{C}(f) \subset Vect(Id_E, f, f^2)$.
Comme on a démontré l'inclusion inverse, on a l'égalité $\boxed{\mathscr{C}(f) = Vect(Id_E, f, f^2)}$.

3. (a) Par hypothèse, $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a})\right)$ est un cycle de E donc $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a})\right)$ est une famille génératrice de E.
E est de dimension finie n, alors, par théorème, une famille génératrice de E a un cardinal supérieur à la dimension de E : $\boxed{p \geqslant n}$.

(b) On observe que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^p(f^k(\vec{a})) = f^{p+k}(\vec{a}) = f^k(f^p(\vec{a})) = f^k(\vec{a})$.
Pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, comme la famille $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a})\right)$ est génératrice, $\vec{x}$ se décompose en combinaison linéaire des vecteurs de cette famille :
$\vec{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(\vec{a})$. Par linéarité, on en déduit que : $f^p(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^p(f^k(\vec{a})) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(\vec{a}) = \vec{x}$.

Donc $\boxed{f^p = Id_E}$.

(c) On a montré $p \geqslant n$ donc $p \geqslant 1$. On a $f \circ f^{p-1} = Id_E$ et $f^{p-1} \circ f = Id_E$ alors $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et sa réciproque est $\boxed{f^{-1} = f^{p-1}}$.

4. (a) La famille $(\vec{a})$ est libre car $\vec{a} \neq 0$ donc il existe des entiers naturels i tels que $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{i-1}(\vec{a})\right)$ soit libre.
Une famille libre a moins de vecteurs que la dimension de l'espace donc tous ces entiers naturels i sont majorés par n.
Un ensemble d'entiers non vide et majorée a un plus grand élément qu'on note m. Ceci prouve que m existe.
On raisonne par l'absurde :
on suppose que $f^m(\vec{a})$ n'est pas combinaison linéaire des m vecteurs $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})\right)$.
Prouvons que la famille $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a}), f^m(\vec{a})\right)$ est libre :
on suppose que $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f^i(\vec{a}) = \overrightarrow{0}$ avec $(\lambda_i)_{i\in[\![0,m]\!]}$ des scalaires.
Alors, on peut écrire $\lambda_m f^m(\vec{a}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}(-\lambda_i f^i)(\vec{a})$ mais $f^m(\vec{a})$ n'est pas combinaison linéaire des m vecteurs $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})\right)$ donc $\lambda_m = 0$.
Il reste $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^i(\vec{a}) = \overrightarrow{0}$ qui implique $\forall i \in [\![0, m-1]\!], \quad \lambda_i = 0$ car la famille $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})\right)$ est libre.
On en déduit que la famille $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a}), f^m(\vec{a})\right)$ est libre.
Alors, $m+1$ serait un entier naturel tel que $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a}), f^{(m+1)-1}(\vec{a})\right)$ est libre ce qui contredit le fait que m est le plus grand entier naturel qui vérifie cette propriété.
Alors, l'hypothèse que nous avons faite est fausse donc

$\boxed{f^m(\vec{a}) \text{ est combinaison linéaire des } m \text{ vecteurs } \left(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})\right)}$.

(b) Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel $k \geqslant m$, le vecteur $f^k(\vec{a})$ est combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})$.

- *initialisation :* Pour $k = m$, on a montré à la question précédente que le vecteur $f^k(\vec{a})$ est combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})$.

- *hérédité :* On suppose la proposition vérifiée au rang k . On peut donc écrire $f^k(\vec{a}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^i(\vec{a})$.
D'où : $f^{k+1}(\vec{a}) = f(f^k(\vec{a})) = f\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^i(\vec{a})\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^{i+1}(\vec{a}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_{i-1} f^i(\vec{a}) + \lambda_{m-1} f^m(\vec{a})$
Mais $f^m(\vec{a})$ est lui-même combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})$, ce qui permet d'obtenir que :
le vecteur $f^{k+1}(\vec{a})$ est combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})$.

Donc , on a montré par récurrence que :

$\boxed{\forall k \geqslant m, \text{ le vecteur } f^k(\vec{a}) \text{ est combinaison linéaire des } m \text{ vecteurs } \vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a}).}$

(c) La famille $\left(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{p-1}(\vec{a})\right)$ un cycle de E donc c'est une famille génératrice de E.

Chacun de ses vecteurs : $f^k(\vec{a})$ avec $k \in [\![0, p-1]\!]$ est combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})$.

Donc tous les vecteurs de E sont combinaisons linéaires des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})$.

Ceci prouve que $\underline{\text{la famille } \vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a}) \text{ est génératrice de } E}$.

On sait, par construction, que $\underline{\text{la famille } \vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a}) \text{ est libre}}$.

Il s'ensuit que $\boxed{\text{la famille } (\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a})) \text{ est une base de } E}$.

Et, par suite $\dim E = m = \mathrm{Card}(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{m-1}(\vec{a}))$ soit $\boxed{m = n}$.

(d) On peut démontrer que $\mathscr{C}(f)$ est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$, exactement comme on l'a fait à la question 2.(b).i

D'une part, pour tout entier naturel k, on a $f^k \circ f = f^{k+1} = f \circ f^k$.

Donc les applications $Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}$ sont des éléments de $\mathscr{C}(f)$, et, par combinaison linéaire, tout élément de $\mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ appartient à $\mathscr{C}(f)$.

On a donc l'inclusion suivante $\mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}) \subset \mathscr{C}(f)$.

Réciproquement, soit g une application de $\mathscr{C}(f)$. Le vecteur $g(\vec{a})$ peut s'exprimer dans la base $(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{n-1}(\vec{a}))$ sous la forme : $g(\vec{a}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(\vec{a})$.

Montrons par récurrence finie sur $k \in [[0, n-1]]$ que $g(f^k(\vec{a})) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(f^k(\vec{a}))$

- *initialisation pour* $k = 0$

  C'est notre hypothèse $g(f^0(\vec{a})) = g(\vec{a}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(\vec{a}) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(f^0(\vec{a}))$.

- *hérédité* Supposons la proposition établie au rang $k \in [[0, n-1[[$ alors, sachant que $g \circ f = f \circ g$:

  $$g(f^{k+1}(\vec{a})) = g(f(f^k(\vec{a}))) = f\left(g(f^k(\vec{a}))\right) = f\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(f^k(\vec{a}))\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f\left(f^i(f^k(\vec{a}))\right)$$

  $$= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(f^{k+1}(\vec{a})) \quad \text{Car } f \circ f^i \circ f^k = f^{i+k+1} = f^i \circ f^{k+1}$$

  Ce qui prouve la proposition au rang $k+1$.

On a donc montré par récurrence sur $k \in [[0, n-1]]$ que $\boxed{g(f^k(\vec{a})) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(f^k(\vec{a}))}$

Les images par l'application g et par l'application $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i$ sont les mêmes pour tous les vecteurs de la base $(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{n-1}(\vec{a}))$. Par théorème on a $g = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i$.

On vient de montrer l'inclusion réciproque $\mathscr{C}(f) \subset \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ et on peut conclure à l'égalité :

$\boxed{\mathscr{C}(f) = \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})}$