# Correction TD 14 - Intégration sur un segment

**Exercice 1 :** On a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 t\, dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

En intégrant par parties, $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ qui donne $nI_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

Si $n$ est pair $n = 2p$, alors on obtient :

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots(2.2-1)(2.1-1)}{2p.2(p-1)\dots 2.2.2.1} I_0 = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(2k-1)}{2^p p!} I_0, \text{ ce qui donne } \boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}},$$

car $\prod_{k=0}^{p-1}(2k-1) = \frac{(2p)!}{2^p p!}$. En effet, pour calculer le produit des $p$ premiers nombres impairs,

$$\prod_{k=0}^{p-1}(2k-1) = \frac{(2p)(2(p-1)-1)(2(p-1))(2(p-2)-1)(2(p-2))\dots(2.2-1)(2.2)(2.1-1)(2.1)}{(2p)(2(p-1))(2(p-2)\dots(2.2)(2.1)}$$

On trouve $\prod_{k=0}^{p-1}(2k-1) = \frac{(2p)!}{2^p p!}$, on a multiplié le numérateur et le dénominateur par le produit des $p$ premiers nombres pairs. Pour $n = 2p+1$, impair, on obtient $\boxed{I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$.

**Exercice 2 :**

1. On trouve par intégration par parties, $\boxed{I_1 = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}}$.

   Puis $I_{n+1} - I_n = \int_1^e x^2(\ln^{n+1} x - \ln^n x)\, dx \leqslant 0$ car $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$ et $\ln^{n+1} x \leqslant \ln x$ pour $x \in [1, e]$.

   Par ailleurs, pour $t \in [1, e]$, $\sin t \geqslant 0$, on en déduit que $I_n \geqslant 0$.

   Alors $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.}}$

2. On étudie $f(x) = x - e\ln x$ sur $[1, e]$. On montre que $f \geqslant 0$, soit $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$.

   Alors $0 \leqslant (\ln x)^n \leqslant \frac{x^n}{e^n}$ car $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   On obtient $0 \leqslant I_n \leqslant \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n}\, dx$ ce qui donne $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{(n+3)e^n}$.

   Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{(n+3)e^n} = 0$, on en déduit par encadrement que $\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = 0.}$

3. On intègre par parties et on obtient $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$. Ce qui donne $I_n = \frac{e^3}{n+1} - \frac{3I_{n+1}}{n+1}$.

   On en déduit que $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^3}{n+1}}$.

**Exercice 3 :**

Soit $(x_i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ une subdivision adaptée à $\varphi$ et $y_i$ la valeur de $\varphi$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. On a

$$\int_{[a,b]} \varphi(x)\sin(nx)\, dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi(x)\sin nx\, dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} y_j \sin nx\, dx$$

car la valeur de l'intégrale ne change pas lorsqu'on change la fonction en deux points $x_j$ et $x_{j+1}$. On a donc

$u_n = \sum_{j=0}^{p-1} y_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin nx \, dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{y_j}{n} \left(\cos(nx_j) - \cos(nx_{j+1})\right)$. D'où $|u_n| \leqslant \sum_{j=0}^{p-1} \frac{2|y_j|}{n}$.

Comme $\varphi$ est en escalier sur un segment, elle est majorée par exemple par $M \in \mathbb{R}$. On a alors $|u_n| \leqslant \frac{2pM}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{2pM}{n} = 0$. Par encadrement, on a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi$ en escalier sur $[a, b]$ telle que $|f - \varphi| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Alors $\left|\int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin(nx) \, dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin(nx) \, dx + \int_a^b \varphi(x) \sin(nx) \, dx$.

Alors si on pose $u_n = \int_a^b \varphi(x) \sin nx \, dx$, comme $\lim u_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant N$, on a $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, alors $\left|\int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ce qui traduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx = 0.}$

## Exercice 4 :

Comme $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties, on pose $u = g$ et $v'(t) = \cos(nt)$ qui donne $u' = g'$ et $v = \frac{1}{n} \sin(nt)$. On obtient : $\int_a^b g(t) \cos(nt) \, dt = \left[\frac{1}{n} g(t) \sin(nt)\right]_a^b - \frac{1}{n} \int_a^b g'(t) \sin(nt) \, dt$.

Comme $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, $g'$ est continue sur ce segment, donc $g'$ est bornée, soit $M \in \mathbb{R}$, tel que $|g'| \leqslant M$. On obtient : $\left|\int_a^b g(t) \cos(nt) \, dt\right| \leqslant \frac{1}{n} \left(|g(b)| + |g(a)| + M(b-a)\right)$.

Le dernier terme tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g(t) \cos(nt) \, dt = 0.}$

## Exercice 5 :

- $u_n = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \sin \frac{j\pi}{n}$. On reconnaît une somme de Riemann (rectangle à droite) pour la fonction $t \mapsto \sin t$ sur l'intervalle $[0, \pi]$, alors $u_n$ converge vers $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \, dt = \frac{1}{\pi} [-\cos t]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$.
- $u_n = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+j)^2} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} \frac{1}{(1+\frac{j}{n})^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+\frac{j}{n})^2}$, c'est une somme de Riemann de $t \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$, continue sur $[0, 1]$ alors $(u_n)$ converge vers $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$
- $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{j} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{\frac{j}{n}}$ est une somme de Riemann pour la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors $(u_n)$ converge vers $\int_0^1 \sqrt{t} \, dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.
- On utilise $\ln u_n$ pour obtenir une somme : $\ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln\left(1 + \left(\frac{j}{n}\right)^2\right)$ on reconnait une somme de Riemann de la fonction $t \mapsto \ln(1+t^2)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors $(\ln u_n)$ converge vers $\int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt$ que l'on intègre par parties : $\int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt = [t \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 t \frac{2t}{1+t^2} \, dt = \ln 2 - \int_0^1 \left(\frac{2+2t^2}{1+t^2} - \frac{2}{1+t^2}\right) \, dt = \ln 2 - 2 + [2 \arctan t]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

  Et finalement, comme exp est continue sur $\mathbb{R}$, $(u_n)$ converge vers $\exp\left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right)$.

## Exercice 6 :

On intègre la fonction $f : t \mapsto \ln(1 - 2\mu\cos t + \mu^2)$ sur le segment $[0, \pi]$. On utilise la subdivision régulière $x_j = \dfrac{j\pi}{n}$. Les sommes de Riemann sont $R_n(f) = \dfrac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(1 - 2\mu\cos\dfrac{j\pi}{n} + \mu^2\right)$.

On sait que $(R_n(f))_n$ converge vers $\displaystyle\int_0^\pi f$.

Par ailleurs, on connaît la factorisation : $1 - 2\mu\cos\dfrac{j\pi}{n} + \mu^2 = \left(\mu - e^{i\frac{j\pi}{n}}\right)\left(\mu - e^{-i\frac{j\pi}{n}}\right)$, alors $R_n(f)$ peut s'écrire $R_n(f) = \dfrac{\pi}{n}\ln\prod_{j=0}^{n-1}\left(\mu - e^{i\frac{j\pi}{n}}\right)\left(\mu - e^{-i\frac{j\pi}{n}}\right) = \dfrac{\pi}{n}\ln\left((\mu - 1)\prod_{j=-n+1}^{n-1}\left(\mu - e^{i\frac{j\pi}{n}}\right)\right)$.

On reconnaît les racines $2n$-ièmes de l'unité sauf $-1$ (valeur pour $j = n$). On peut donc écrire $R_n(f) = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(\dfrac{\mu^{2n} - 1}{\mu + 1}(\mu - 1)\right)$.

On montre ensuite que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{nR_n(f)}{\pi\ln(\mu^{2n})} = 1$, et on déduit que $R_n(f) \sim \dfrac{\pi}{n}\ln(\mu^{2n})$ ce qui donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = 2\pi\ln\mu$. Et finalement, $\boxed{I_\mu = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2\mu\cos t + \mu^2)\,dt = 2\pi\ln\mu.}$

## Exercice 7 :

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors pour $t \in [k-1, k]$, on a

$$\frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{k}, \quad \text{d'où } \int_{k-1}^k \frac{1}{t}\,dt \geqslant \int_{k-1}^k \frac{1}{k}\,dt \quad \text{qui donne} \quad \int_{k-1}^k \frac{1}{t}\,dt \geqslant \frac{1}{k}.$$

Puis, on montre que $\boxed{\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{1}{t}\,dt \text{ pour tout } k \geqslant 2}$.

Alors en sommant, $\boxed{\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{t}\,dt \leqslant u_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\,dt}$, ce qui donne $\ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant \ln n + 1$. On obtient $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \leqslant \dfrac{u_n}{\ln n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln n}$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$, on obtient $\boxed{u_n \sim \ln n}$.

De même pour $v_n$, on commence par montrer que $\boxed{\displaystyle\int_{k-1}^k \leqslant \ln k \leqslant \int_k^{k+1}\ln t\,dt \text{ pour tout } k \geqslant 2}$, qui donne $\displaystyle\int_1^n \ln t\,dt \leqslant v_n \leqslant \int_1^{n+1}\ln t\,dt$ et on obtient $n\ln n \leqslant v_n \leqslant (n+1)\ln(n+1)$. Alors :

$$1 \leqslant \frac{v_n}{n\ln n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\ln(n+1)}{\ln n}.$$

Comme $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 - \dfrac{\ln n - \ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \dfrac{1}{\ln n}\ln(1 + \frac{1}{n})$, on conclut que $\boxed{v_n \sim n\ln n}$.

## Exercice 8 :

1. $u_n = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+nt}dt = \left[\frac{1}{n}\ln(1+nt)\right]_a^b = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1+nb}{1+na}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{b+\frac{1}{n}}{a+\frac{1}{n}}\right)$.

   Comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{a+\frac{1}{n}} = \frac{b}{a}$, on a $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0.}$

2. La fonction $f$ est continue sur le segment $[0, a]$ donc elle est bornée. Soit $M \in \mathbb{R}$, tel que $|f| \leqslant M$ sur $[0, a]$.

   On a $|v_n| \leqslant \displaystyle\int_0^a \frac{|f(t)|}{|1+nt|}\,dt$ et comme $a > 0$, on a $|v_n| \leqslant \displaystyle\int_0^a \frac{M}{1+nt}\,dt$ soit $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n}M\ln(1+na)$.

   On a $\dfrac{1}{n}M\ln(1+na) = \dfrac{M}{n}\left(\ln n + \ln(a + \frac{1}{n})\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} M \ln(1+na) = 0$ et par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0.}$

3. On a $|w_n| \leqslant \displaystyle\int_0^a |t^n||f(t)\ dt \leqslant M \int_0^a t^n\ dt\ \leqslant \frac{M}{n+1} a^{n+1}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}}{n+1} = 0$ pour tout $a \in [0,1]$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0.}$

## Exercice 9 :

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$. Si $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$, alors soit $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$ qui donne $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b |f|$ $\iff \displaystyle\int_a^b (|f|-f) = 0$ et comme $|f|-f$ est une fonction positive et continue d'intégrale nulle sur $[a,b]$, on en déduit que $f = |f|$ sur $[a,b]$ et donc que $f$ est positive sur $[a,b]$, soit $\displaystyle\int_a f \leqslant 0$ et on en déduit de même que $f$ est négative sur $[a,b]$.

Réciproquement, si $f$ est continue et ne change pas de signe sur $[a,b]$, alors soit $f = |f|$ soit $f = -|f|$, dans les deux cas, on trouve que $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$.

La condition nécessaire et suffisante est que $\boxed{f \text{ garde un signe constant sur } [a,b].}$

## Exercice 10 :

Soit $f : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ continue, telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Si $f$ n'a pas de point fixe, alors $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \neq x$. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est continue et ne s'annule pas sur $[0,1]$ : elle est soit strictement positive, soit strictement négative : dans tous les cas, elle ne change pas de signe.

Si $f(x) > x$ pour tout $x$, alors $\displaystyle\int_0^1 f(x) - x\ dx > 0$ : l'inégalité est stricte car la fonction est continue. Or $\displaystyle\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 f > \frac{1}{2}$ c'est une contradiction.

De même pour $f(x) < x$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 f < \frac{1}{2}$ qui est une contradiction.

Donc $\boxed{f \text{ a au moins un point fixe.}}$

## Exercice 11 :

- $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 (x-t)\varphi(t)\ dt$,

On transforme l'expression de $f$ en utilisant la linéarité de l'intégrale : pour $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = \displaystyle\int_0^1 (x\,\varphi(t) - t\,\varphi(t))\ dt = \int_0^1 x\varphi(t)\ dt - \int_0^1 t\varphi(t)\ dt = x\int_0^1 \varphi(t)\ dt - \int_0^1 t\varphi(t)\ dt$.

Les deux intégrales ne dépendent plus de $x$, alors $f$ est une fonction affine de la forme $f(x) = A\,x + B$ avec $A = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ et $B = -\displaystyle\int_0^1 t\varphi(t)\ dt$.

En tant que fonction affine sur $\mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ est continue et dérivable sur } \mathbb{R}. \text{ De plus } f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\ dt.}$

- $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x (x-t)\varphi(t)\ dt$,

On transforme de même l'expression de $g$ : $g(x) = x\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\ dt - \int_0^x t\varphi(t)\ dt$.

La fonction $t \mapsto \varphi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\ dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de la fonction $\varphi$. De plus, $F'(x) = \varphi(x)$.

De même, la fonction $G : x \mapsto \int_0^x t\varphi(t)\ dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de la fonction $t \mapsto t\varphi(t)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ par produit. De plus, $G'(x) = x\varphi(x)$.
On a $g(x) = xF(x) - G(x)$.
La fonction $x \mapsto x$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ en tant que produit et somme de fonctions $\mathcal{C}^1$.
De plus, $g'(x) = F(x) + xF'(x) - G'(x) = \int_0^x \varphi(t)\ dt + x\varphi(x) - x\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\ dt$.

• $h : x \longmapsto \int_0^1 \varphi(x+t)\cos(t)\ dt$.
On transforme l'expression de $h$. On commence par le changement de variables $u = x+t$ qui donne
$h(x) = \int_0^1 \varphi(x+t)\cos(t)\ dt = \int_x^{x+1} \varphi(u)\cos(u-x)\ du = \int_x^{x+1} \varphi(u)\left(\cos(u)\cos(x) + \sin(u)\sin(x)\right)\ du$
$h(x) = \cos(x)\int_x^{x+1} \varphi(u)\cos(u)\ du + \sin(x)\int_x^{x+1} \varphi(u)\sin(u)\ du$
$h(x) = \cos(x)\int_0^{x+1} \varphi(u)\cos(u)\ du - \cos(x)\int_0^x \varphi(u)\cos(u)\ du + \sin(x)\int_0^{x+1} \varphi(u)\sin(u)\ du - \sin(x)\int_0^x \varphi(u)\sin(u)\ du$

Les fonctions $u \mapsto \varphi(u)\cos(u)$ et $u \mapsto \varphi(u)\sin(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, alors les fonctions $H(x) = \int_0^x \varphi(u)\cos(u)\ du$ et $K(x) = \int_0^x \varphi(u)\sin(u)\ du$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On a donc $h(x) = \cos(x)H(x+1) - \cos(x)H(x) + \sin(x)K(x+1) - \sin(x)K(x)$.
On en déduit que $\boxed{h \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur} \mathbb{R}}$ en tant que produit et combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

## Exercice 12 :

1. Soit $u > 0$, alors $2u > u > 0$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ est continue sur $[u, 2u]$ donc $I$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   De même, pour $u < 0$, alors $2u < u < 0$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ est continue sur $[2u, u]$ donc $I$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Soit $u \in \mathbb{R}^*$, alors $I(-u) = \int_{-u}^{-2u} \dfrac{\sin(x)}{x^2}\ dx = \int_u^{2u} \dfrac{\sin(-t)}{(-t)^2}\ (-dt)$ en posant $t = -u$.
   On trouve $I(-u) = \int_u^{2u} \dfrac{\sin(t)}{t^2}\ dt$. donc $I(-u) = I(u)$ et $\boxed{I \text{ est paire}}$.
2. On applique la formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 à la fonction sinus :
   $$\sin x = x + \int_0^x \frac{\sin^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2\ dt = x - \int_0^x \frac{\cos(t)}{2}(x-t)^2\ dt.$$
   On encadre le reste : pour $x > 0$ et $t \in [0, x]$ :
   $$-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1 \Longrightarrow -\frac{(x-t)^2}{2} \leqslant \frac{\cos(t)(x-t)^2}{2} \leqslant \frac{(x-t)^2}{2}$$
   Les bornes sont dans l'ordre croissant et l'intégrale est croissante, alors
   $$-\frac{x^3}{6} \leqslant \int_0^x \frac{\cos(t)}{2}(x-t)^2\ dt \leqslant \frac{x^3}{6}$$
   Alors on obtient pour $x > 0$, et également pour $x = 0$,
   $$\boxed{x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x + \frac{x^3}{6}}$$
3. Soit $u > 0$, on a pour $x \in [u, 2u]$, on a d'après la question précédente $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{\sin x}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{6}$

En intégrant sur $[u, 2u]$, on obtient l'inégalité
$$\int_u^{2u} \frac{1}{x}\, dx - \int_u^{2u} \frac{x}{6}\, dx \leqslant I(u) \leqslant \int_u^{2u} \frac{1}{x}\, dx + \int_u^{2u} \frac{x}{6}\, dx$$
Soit $\boxed{\forall u > 0, \qquad J(u) - \frac{u^2}{2} \leqslant I(u) \leqslant J(u) + \frac{u^2}{2}}$.

4. On calcule $J(u) = \displaystyle\int_u^{2u} \frac{1}{x}\, dx = [\ln(x)]_u^{2u} = \ln(2u) - \ln(u) = \ln 2$.
   On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\boxed{\lim_{u\to 0} I(u) = \ln 2}$.

5. On a pour $u > 0$, et $x \in [u, 2u]$, $\quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \quad$ d'où $\quad -\dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{\sin x}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$
   Les bornes sont dans l'ordre croissant $u < 2u$ et l'intégrale est croissante, alors
   $$-\int_u^{2u} \frac{1}{x^2}\, dx \leqslant I(u) \leqslant \int_u^{2u} \frac{1}{x^2}\, dx \iff \left[\frac{1}{x}\right]_u^{2u} \leqslant I(u) \leqslant \left[-\frac{1}{x}\right]_u^{2u} \iff \boxed{-\frac{1}{2u} \leqslant I(u) \leqslant \frac{1}{2u}}$$
   On en déduit, par le théorème d'encadrement que $\boxed{\lim_{u\to +\infty} I(u) = 0}$.

## Exercice 13 :

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors sa primitive $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\, dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Comme on a $F(x) = F_1(2x) - F_1(x)$, $\boxed{F \text{ est définie et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\, dt = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(-u)^4}}\, du = -F(x)$ en posant $u = -x$.
   On en déduit que $\boxed{F \text{ est impaire sur } \mathbb{R}.}$
   On a $\dfrac{1}{\sqrt{4+t^4}} \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $x \leqslant 2x$, alors $F(x) \geqslant 0$.
   Donc $\boxed{F \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+.}$

2. Soit $x \geqslant 0$, on a pour $t \in [x, 2x]$, $\dfrac{1}{\sqrt{4+(2x)^4}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{4+x^4}}$ car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Comme $x \leqslant 2x$, en intégrant l'inégalité précédente sur $[x, 2x]$, on obtient $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+16x^4}}\, dt \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+x^4}}\, dt$ qui donne $\dfrac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.
   On en déduit par encadrement que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$

3. On a montré $F(x) = F_1(2x) - F_1(x)$ et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors
   $F'(x) = 2F_1'(2x) - F_1'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4+16x^4}} - \dfrac{1}{\sqrt{4+x^4}}$.
   On a $F'(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{2}{\sqrt{4+16x^4}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{4+x^4}} \iff 2\sqrt{4+x^4} \geqslant \sqrt{4+16x^4} \iff 4(4+x^4) \geqslant 4+16x^4$
   $\iff 12 \geqslant 12x^4$.
   On en déduit $F'(x) > 0$ pour tout $x \in ]-1, 1[$, donc $\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } ]-1, 1[.}$

4. Soit $x \geqslant 0$ et $t \in [x, 2x]$, on a $\quad \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{\sqrt{4+t^4}} = \dfrac{\sqrt{4+t^4} - t^2}{t^2\sqrt{4+t^4}} = \dfrac{4+t^4-t^4}{t^2\sqrt{4+t^4}\left(\sqrt{4+t^4}+t^2\right)}$
   On a donc $\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leqslant \dfrac{4}{x^2\sqrt{4+x^4}(\sqrt{4+x^4}+x^2)}$

et par intégration sur $[x, 2x]$, on obtient
$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\, dt \leqslant \frac{4}{x^2\sqrt{4+x^4}(\sqrt{4+x^4}+x^2)} \int_x^{2x}\, dt$$
Et finalement, $$0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{4}{\sqrt{4+x^4}(\sqrt{4+x^4}+x^2)}.$$
Par encadrement, on peut déterminer la limite de $h$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Or on a $h(x) = xF(x) - x\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\, dt = xF(x) - \frac{1}{2}$, on en déduit que $F(x) = \dfrac{h(x)}{x} + \dfrac{1}{2x}$ et on en déduit que $\boxed{F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$ C'est à dire $F(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{\varepsilon(x)}{2x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$.

## Exercice 14 :

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(a-x)}}$ est définie et continue sur $]0, a[$. Alors elle possède une primitive sur tout segment $I$ tel que $I \subset ]0, a[$.

1. Si on pose $u = \sqrt{x}$, on obtient une primitive
$$F(x) = \int \frac{2}{u\sqrt{a-u^2}} u\, du = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right)^2}}\, d\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right) = 2\arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right) + K_1$$
Soit $\boxed{F(x) = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right) + K_1}$.

2. Si on pose $x - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}\cos\theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$, on trouve
$$x(a-x) = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(1-\cos^2\theta) = \frac{a^2}{4}\sin^2\theta.$$
Et, on a $dx = -\dfrac{a}{2}\sin\theta d\theta$ ce qui donne
$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x(a-x)}}\, dx = -\int \frac{2}{a\sin\theta}\frac{a}{2}\sin\theta d\theta = -\theta + K_2 = -\operatorname{Arccos}\left(\tfrac{2x}{a} - 1\right) + K_2$$

3. Si on pose $x = a\sin^2\varphi$ avec $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $dx = 2a\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$, $x(a-x) = a^2\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi) = a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi$. Alors,
$$F(x) = \int \frac{1}{a\sin\varphi\cos\varphi} 2a\sin\varphi\cos\varphi d\varphi = 2\varphi + K_3 = 2\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{a}} + K_3.$$

4. Si on écrit le trinôme $a(a-x)$ sous forme canonique, on obtient :
$$x(a-x) = ax - x^2 = -\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\left(1 - \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)\frac{2}{a}\right)^2\right)$$
On pose alors $u = \dfrac{2}{a}x - 1$, d'où la primitive $G(u) = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{4}(1-u^2)}}\frac{a}{2}\, du = \arcsin(u) + K_4$

Et finalement, $\boxed{F(x) = \arcsin\left(\frac{2}{a}x - 1\right) + K_4}$.

Toutes ses primitives sont égales sur $]0, a[$ à une constante près. En utilisant $x = \dfrac{1}{2}a$, on trouve la formule
$$\boxed{2\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right) - \arcsin\left(\frac{2}{a}x - 1\right) = \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } x \in ]0, a[.}$$

## Exercice 15 :

1. (a) On a pour exp en utilisant la formule de Taylor en 0 à l'ordre 1,
$$e^y = 1 + y + \int_0^1 \frac{e^t}{1!}(y-t)^1 \, \mathrm{d}t \text{ car } (\exp)' = \exp.$$
Ce qui donne $\quad e^y = 1 + y + \int_0^1 e^t(y-t) \, \mathrm{d}t \iff |e^y - 1 - y| = \left|\int_0^y e^t(y-t) \, \mathrm{d}t\right|.$
Pour $t \in [-2, 2]$, on a $|e^t| \leqslant e^2$. Pour $y \in [0, 2]$, les bornes sont dans l'ordre croissant et l'intégrale est croissante, alors on a
$$|e^y - 1 - y| \leqslant \int_0^y |e^t(y-t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^y e^2(y-t) \, \mathrm{d}t.$$
On calcule cette dernière intégrale qui donne $|e^y - 1 - y| \leqslant \frac{1}{2}y^2e^2$.
Pour $y \in [-2, 0]$, on a $|e^y - 1 - y| \leqslant \int_y^0 |e^t(y-t)| \, \mathrm{d}t \leqslant -\int_y^0 e^2(y-t) \, \mathrm{d}t$ car $|y-t| = t - y$ pour $t \in [y, 0]$.
On calcule cette dernière intégrale qui donne $|e^y - 1 - y| \leqslant \frac{1}{2}y^2e^2$.
Finalement, $\boxed{\forall y \in [-2, 2] \text{ , on a } |e^y - 1 - y| \leqslant \frac{1}{2}y^2e^2.}$

(b) On a
$$d(h) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{e^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} \, \mathrm{d}t.$$
Par linéarité de l'intégrale, on obtient :
$$d(h) = \int_0^1 \left(\frac{e^{-(x+h)(1+t^2)}}{h(1+t^2)} - \frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)} + e^{-x(1+t^2)}\right) \, \mathrm{d}t.$$
On a $e^{-(x+h)(1+t^2)} = e^{-x(1+t^2)}e^{-h(1+t^2)}$ qui donne
$$d(h) = \int_0^1 \left(e^{-h(1+t^2)}\frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)} - \frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)} + h(1+t^2)\frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)}\right) \, \mathrm{d}t.$$
Et finalement, en factorisant, on trouve :
$$\boxed{\text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } h \in \mathbb{R}^*, \quad d(h) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)}\left(e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right) \, \mathrm{d}t.}$$

(c) Pour $t \in [0, 1]$, on a $1 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$. Pour $0 < |h| \leqslant 1$, on a $0 < |-h(1+t^2)| \leqslant 2$.
On pose $y = -h(1+t^2)$, on a donc $y \in [-2, 2]$, alors on sait que $|e^y - 1 - y| \leqslant \frac{1}{2}y^2e^2$.
On a alors
$$\left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)}\left(e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right)\right| \leqslant \frac{e^{-x(1+t^2)}}{|h|(1+t^2)}|e^y - 1 - y| \leqslant \frac{e^{-x(1+t^2)}}{|h|(1+t^2)}\frac{1}{2}y^2e^2.$$
Ce qui donne
$$\left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)}\left(e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right)\right| \leqslant \frac{e^{-x(1+t^2)}}{2|h|(1+t^2)}e^2h^2(1+t^2)^2 \leqslant e^{-x(1+t^2)}\frac{e^2}{2}|h|(1+t^2).$$
On intègre entre 0 et 1 et l'intégrale sur $[0, 1]$ est croissante ce qui donne
$$|d(h)| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)}\left(e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right)\right| \, \mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{e^2}{2}\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2) \, \mathrm{d}t\right)|h|$$
On pose $K = \frac{e^2}{2}\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2)$ qui ne dépend pas de $h$.
On a alors $\boxed{|d(h)| \leqslant K \times |h| \text{ avec } K \text{ constante indépendante de } h.}$ ... à suivre