

Chapitre 17 - Espaces Vectoriels de Dimension Finie

On note \mathbb{K} pour \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Bases en dimension finie

1.1 Dimension finie

Définition 1.1. On dit qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple :

* \mathbb{R}^2 est de dimension finie car
 $(1,0), (0,1)$ est une famille génératrice finie à 2 vecteurs
 tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$
 (Card famille = 2)

* \mathbb{R}^3 est de dimension finie car
 $(1,0,0), (0,1,0), (0,2,0), (0,3,0), (0,4,0), (0,0,0), (0,0,1)$
 est une famille génératrice à 7 vecteurs
 (mais elle n'est pas libre)

* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ens des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R})
 est de dimension infinie

* $\mathbb{R}[x]$ l'ens de tous les polynômes
 est de dimension infinie

Preuve : Supposons que (P_1, P_2, \dots, P_m) est une famille
 génératrice finie de $\mathbb{R}[x]$. On note q le
 plus grand des m degrés $\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_m$

$$q = \max(\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_m)$$

alors x^{q+1} ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire
 de P_1, \dots, P_m ce qui contredit le fait que (P_1, \dots, P_m) est génératrice

- * $\mathbb{R}_3[x]$ est de dimension finie car $(1, x, x^2, x^3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$
- * $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est de dimension infinie.

1.2 Existence de bases en dimension finie

Théorème 1.1 (Théorème de la base incomplète). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Corollaire 1.2. Tout \mathbb{K} -espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.

Corollaire 1.3 (Théorème de la base extraite). De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E , on peut extraire une base de E .

Remarques :

on prend E engendré (g_1, g_2, \dots, g_p) famille génératrice
 (x_1, x_2, \dots, x_r) une famille libre.
 on étudie $(x_1, x_2, \dots, x_r, g_1) \rightarrow$ liée (pas libre)
 $g_1 = \sum_{i=1}^r g_{1,i} x_i$
 $(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1})$ libre (x_1, x_2, \dots, x_r) libre
 et on recommence avec g_2
 exemple : Dans \mathbb{R}^4 , et on pose
 $G = \text{Vect}((0, 0, 0, 0), (-1, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (2, -2, 0, 0), (2, 0, -1, 0), (0, 2, -1, 0))$
 G est un sev donc G est un ev qui a une famille génératrice à 6 vecteurs donc G est de dimension finie. Cherchons une base :

on pose $x_1 = (1, -1, 0, 0)$ (x_1) est une famille libre car $x_1 \neq 0$
 $x_2 = (1, 0, 0, 1)$ (x_1, x_2) est une famille libre (pas colinéaires)
 $x_3 = (2, -2, 0, 0)$ est combinaison linéaire de (x_1, x_2) $x_3 = 2x_1$
 $x_4 = (2, 0, -1, 0)$. On étudie (x_1, x_2, x_4) : on suppose que
 $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_4 = \vec{0}$ avec α, β, γ réels
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ alors (x_1, x_2, x_4) est libre

$x_5 = (0, 2, -1, 0)$ est combinaison linéaire
de (x_1, x_2, x_4) : $x_5 = x_4 - 2x_2$

$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ sont combinaisons linéaires
de (x_1, x_2, x_4) donc (x_1, x_2, x_4)
est une famille génératrice de G
et (x_1, x_2, x_4) est libre alors c'est une base de G

1.3 Cardinal des familles libres

Lemme 1.4. Si (x_1, x_2, \dots, x_n) est une famille libre et la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ est liée, alors x_{n+1} est combinaison linéaire de (x_1, x_2, \dots, x_n) i.e. $x_{n+1} \in \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Démonstration.

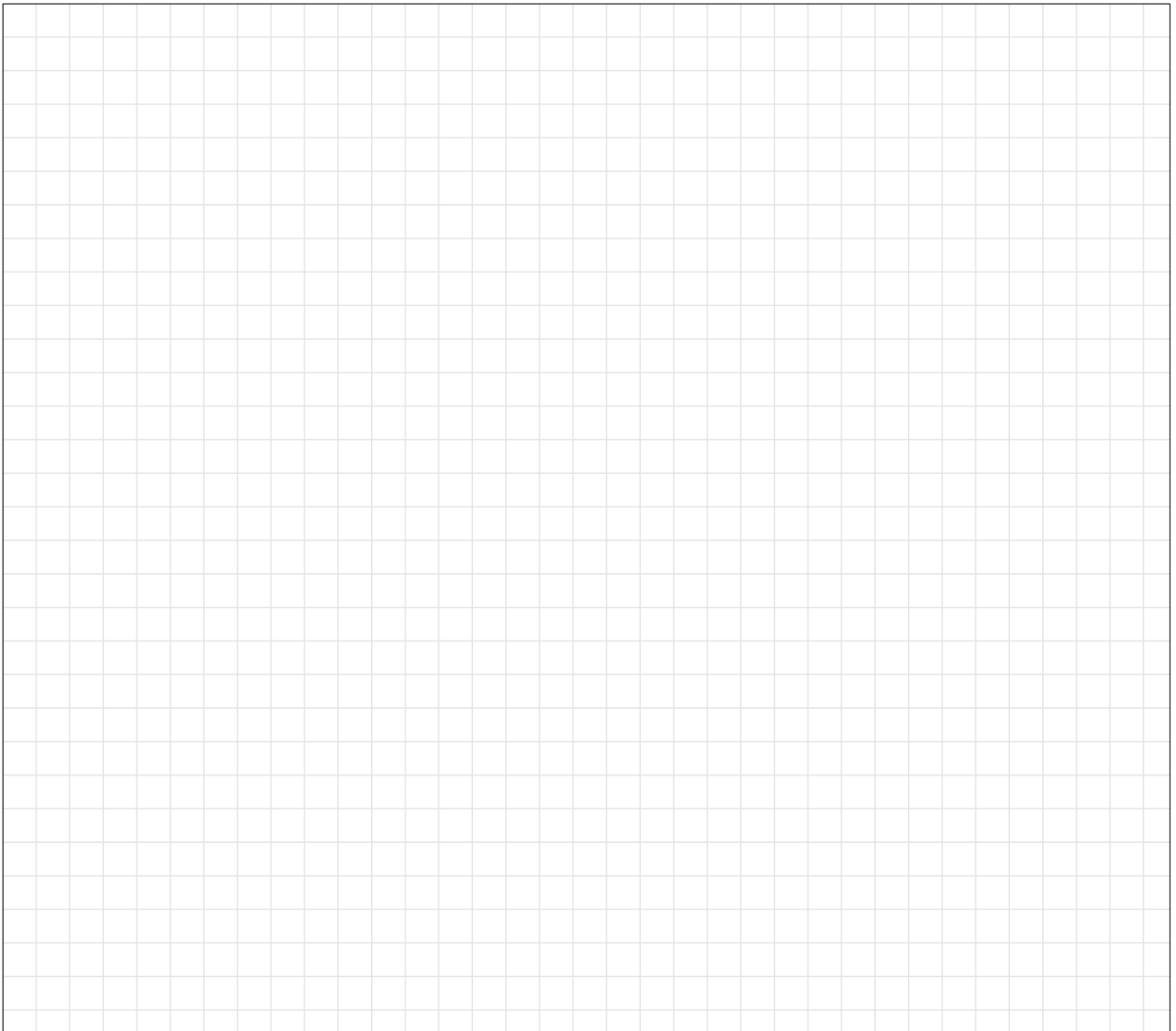
Il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \vec{0}$ car la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ est liée.

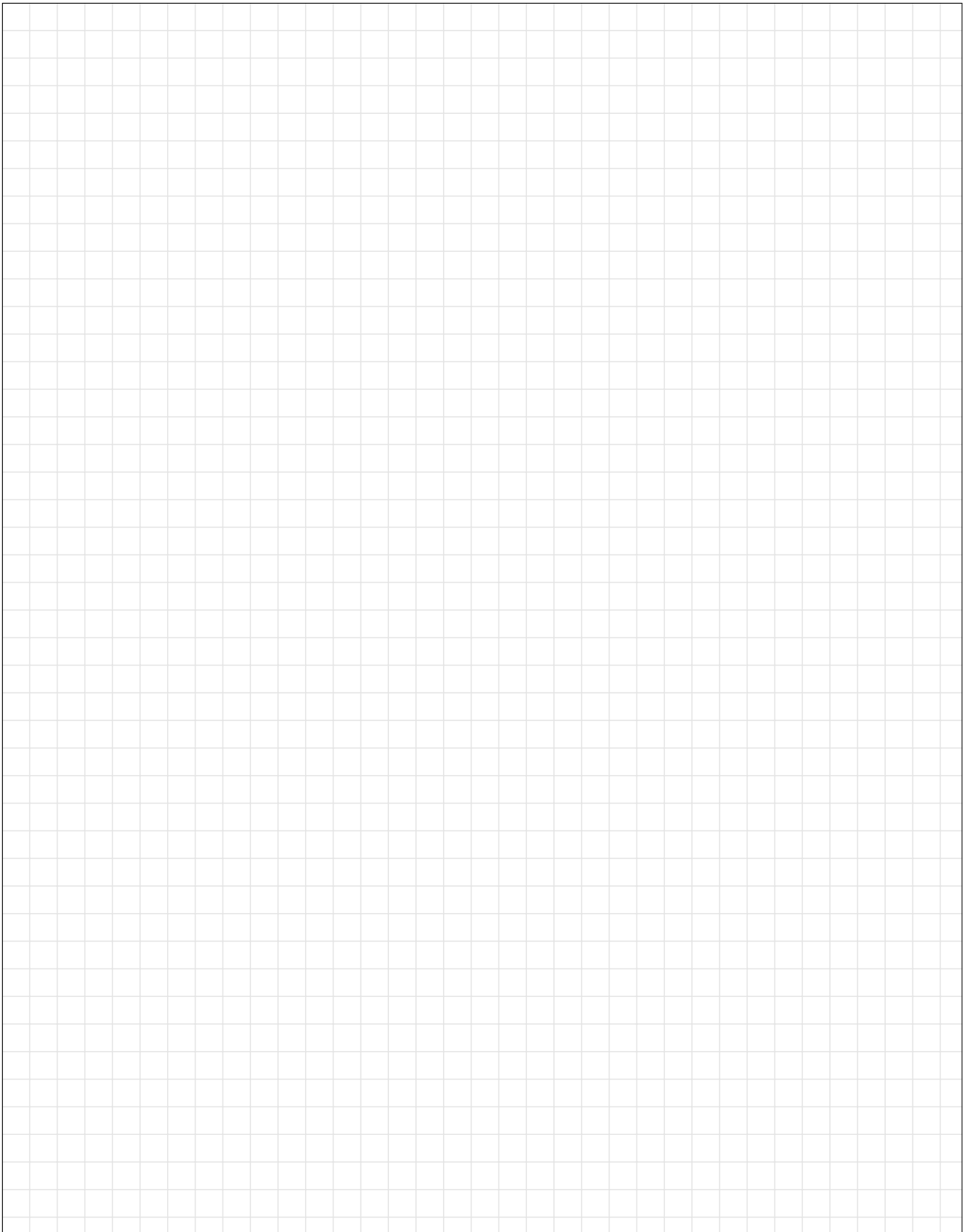
Si $\alpha_{n+1} = 0$, alors on a la relation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \vec{0}$. Comme la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre, on obtient $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i = 0$. C'est une contradiction avec l'hypothèse que les scalaires $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n+1}$ sont non tous nuls.

Donc, $\alpha_{n+1} \neq 0$, alors on peut écrire $x_{n+1} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} x_i$. □

Proposition 1.5. Si E est un espace vectoriel admettant une famille génératrice à n vecteurs avec n entier non nul, alors toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Corollaire 1.6. Dans un espace de dimension finie, toute famille libre a moins d'éléments qu'une famille génératrice.



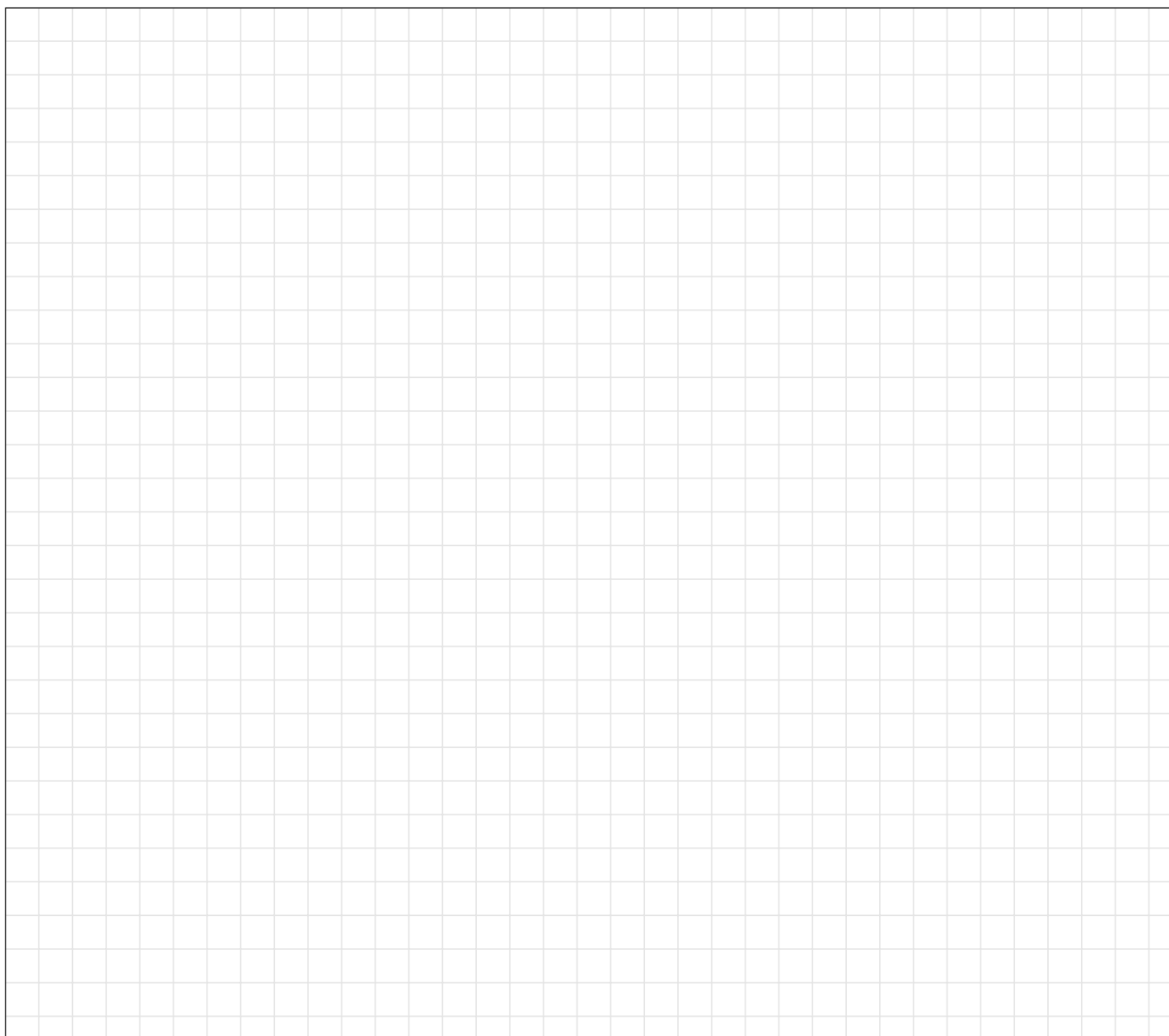


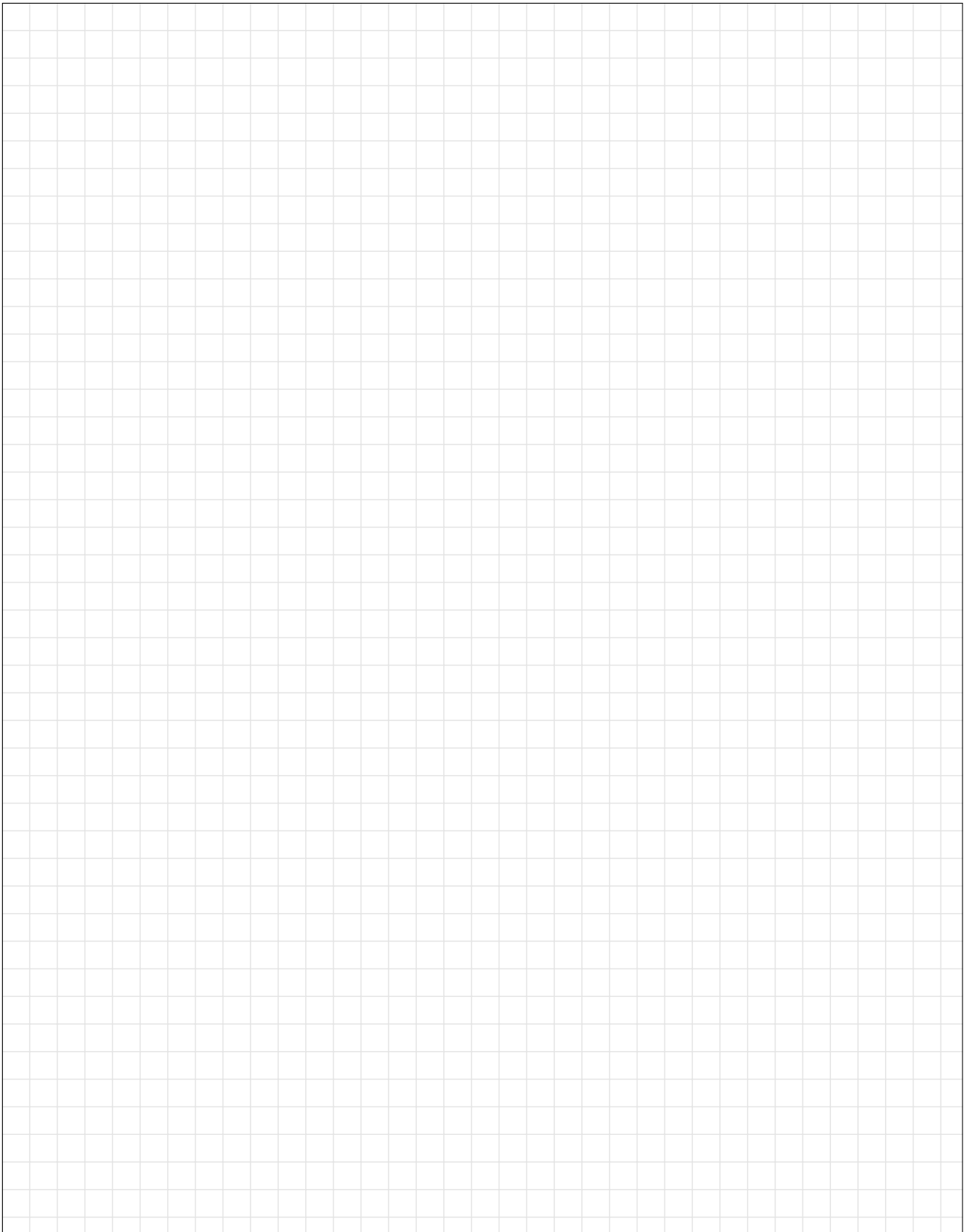
1.4 Dimension

Théorème 1.7. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments $n \in \mathbb{N}^*$.*

Définition 1.2. Ce nombre n s'appelle la dimension de E sur \mathbb{K} noté $n = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim E$.
Par convention, $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

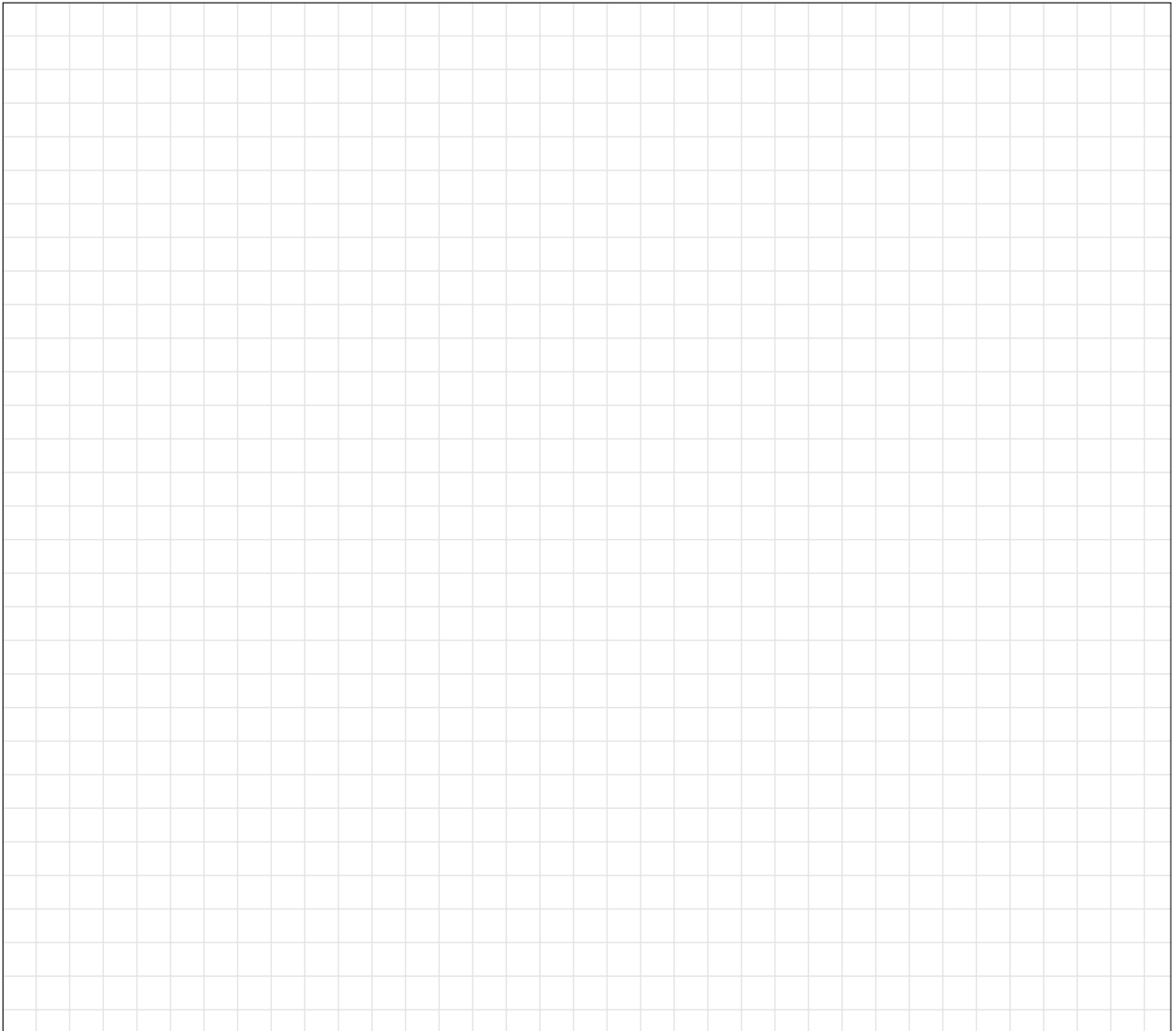
Exemple 1.1. On a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n + 1$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

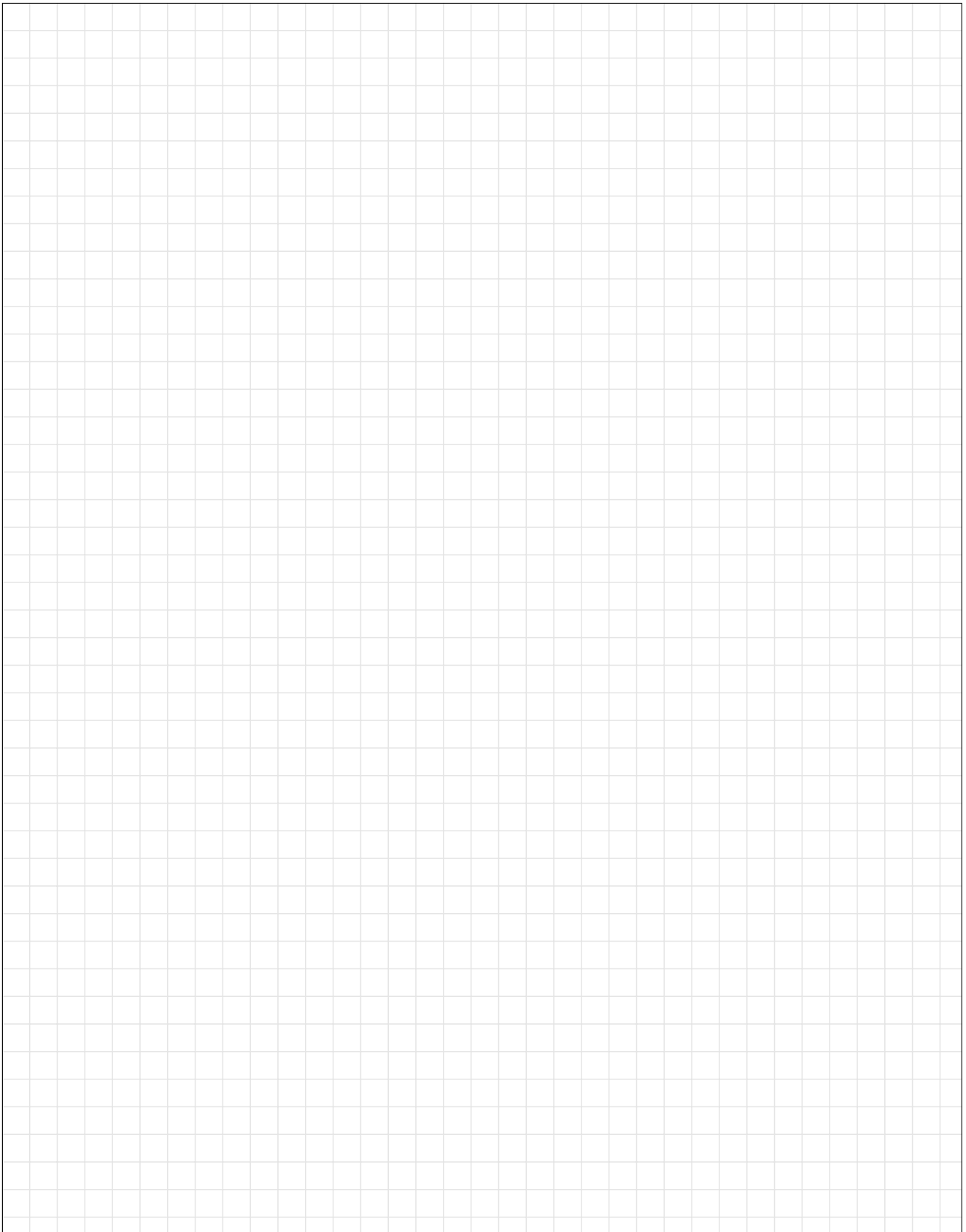




1.5 Familles en dimension finie

Théorème 1.8. *Si E est un espace vectoriel de dimension FINIE n et \mathcal{F} une famille de n vecteurs de E , alors \mathcal{F} est une base de E si et seulement si \mathcal{F} est libre si et seulement si \mathcal{F} est génératrice de E .*





2 Relations entre les dimensions

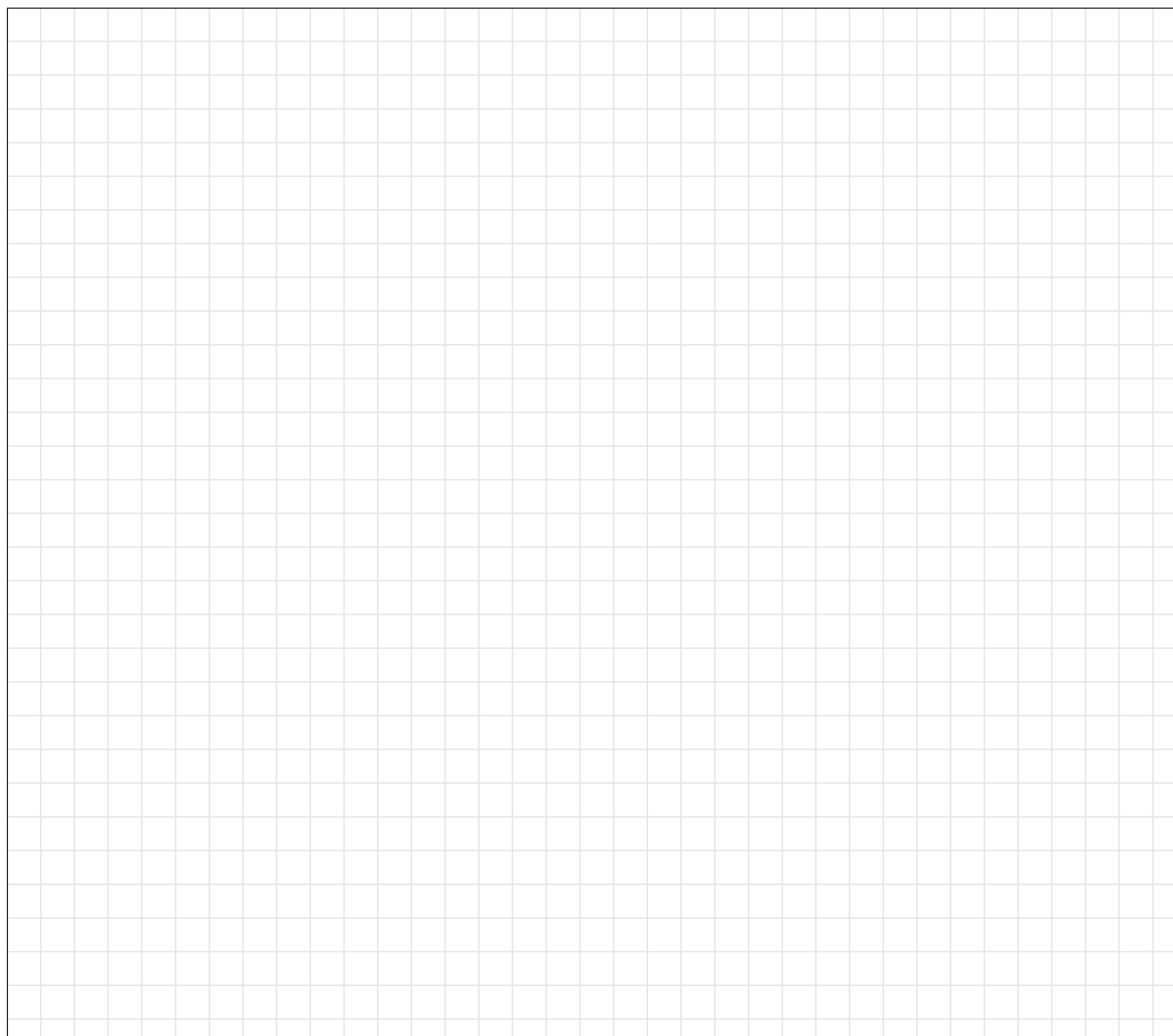
2.1 Rappel : Image d'une base par une application linéaire

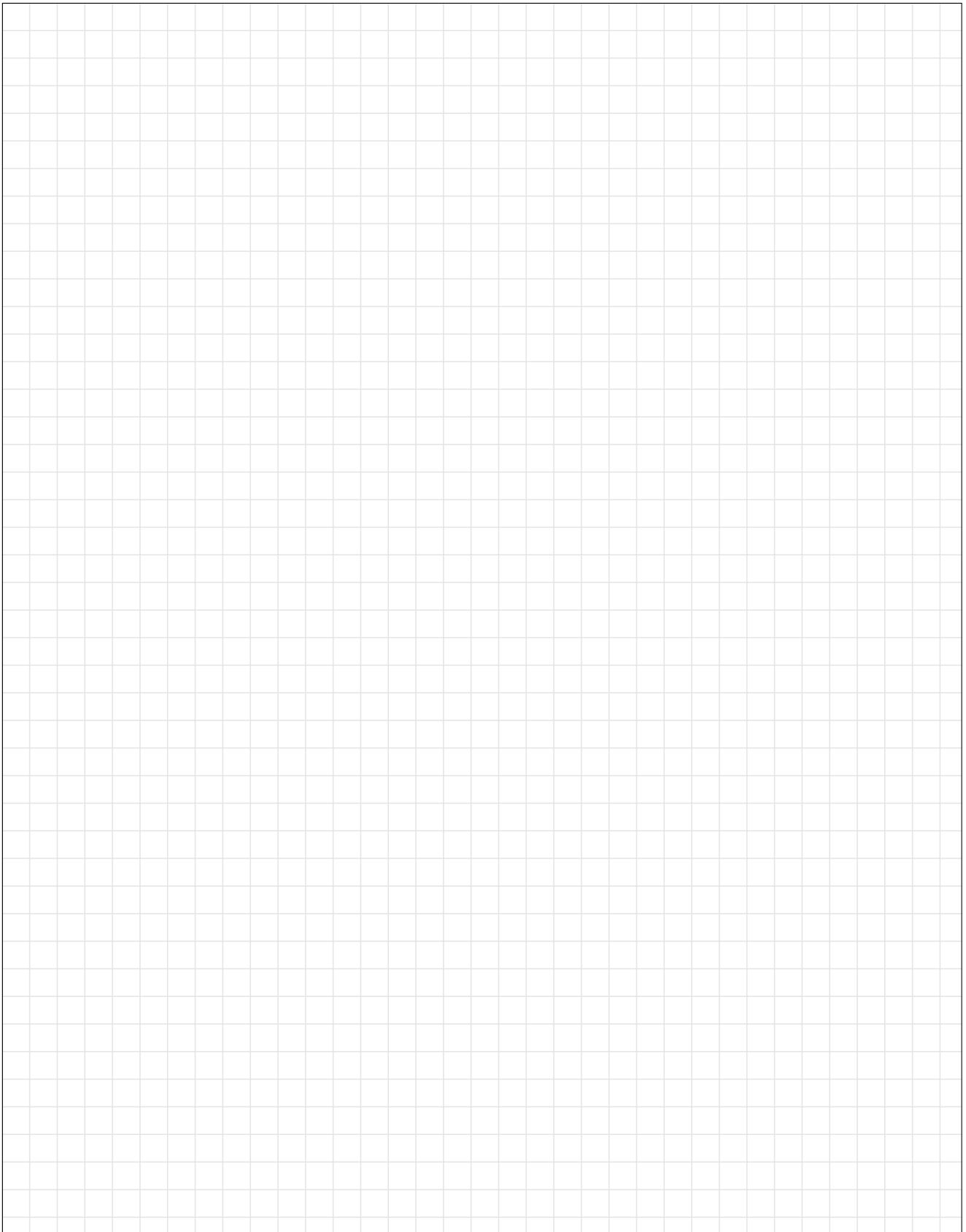
Théorème 2.1. Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E .

- La famille $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
- u est surjective $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est génératrice de F .
- u est injective $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est libre dans F .
- u est bijective $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une base de F .

Corollaire 2.2. Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

u est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F .

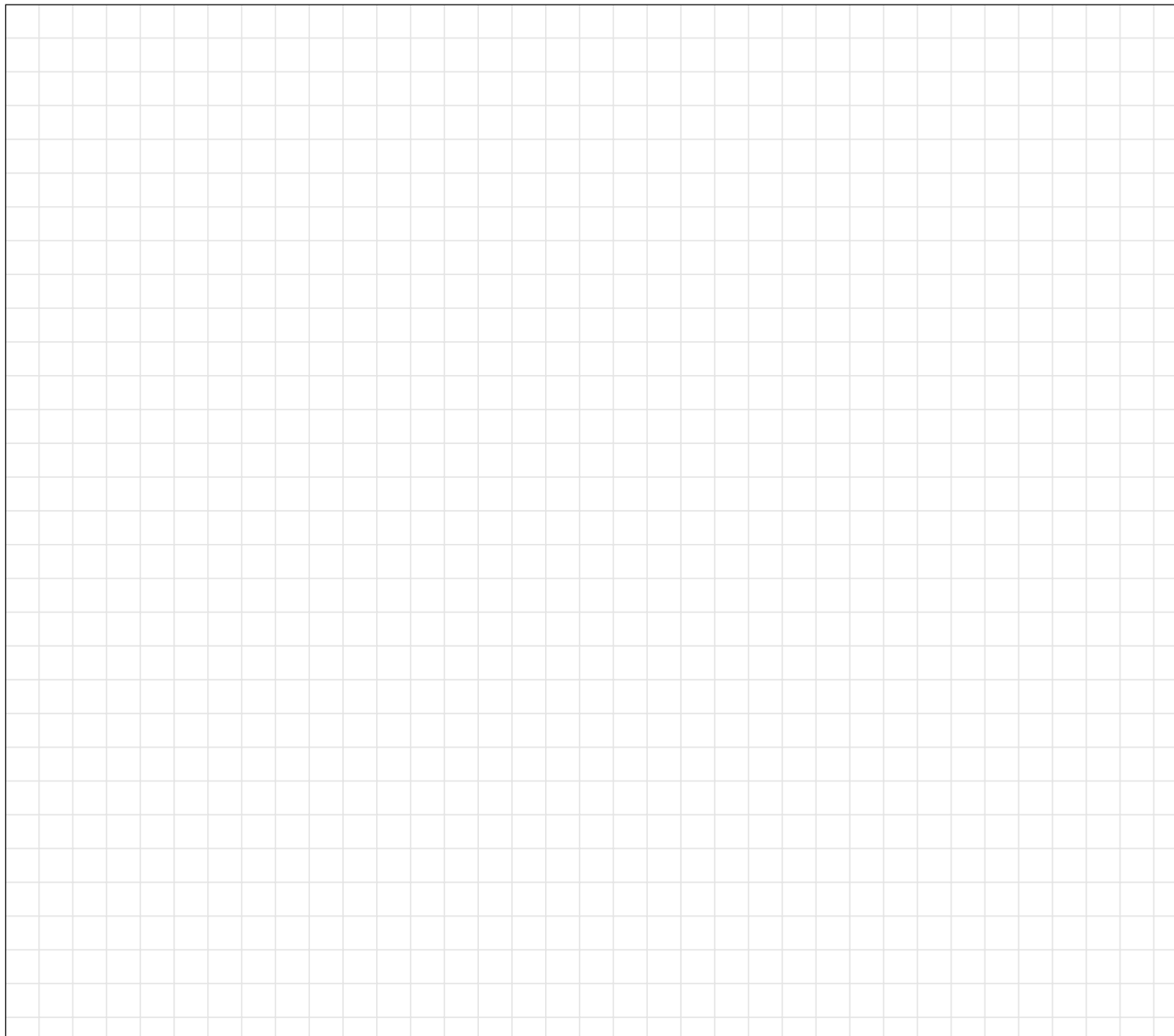


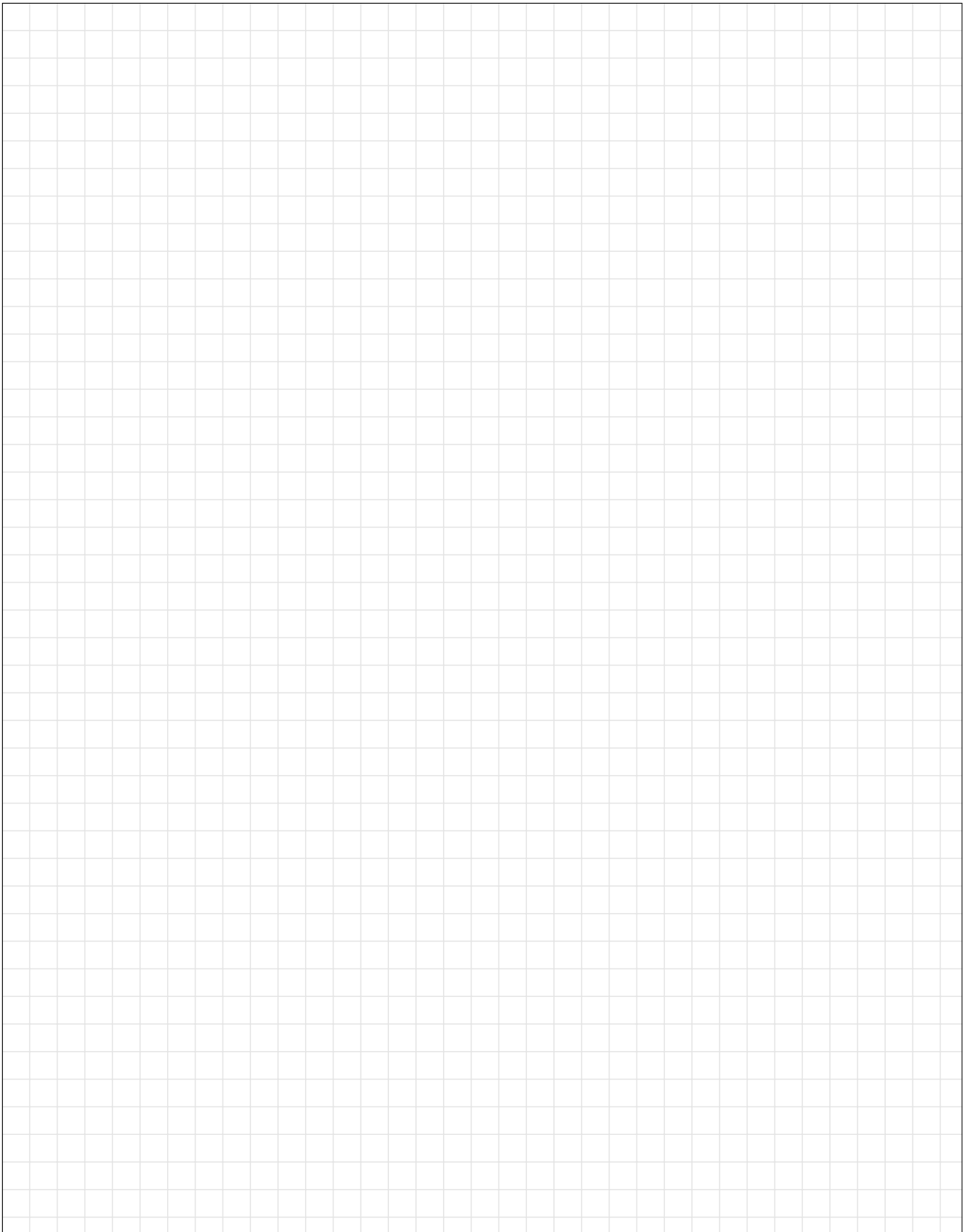


2.2 Dimension et isomorphisme

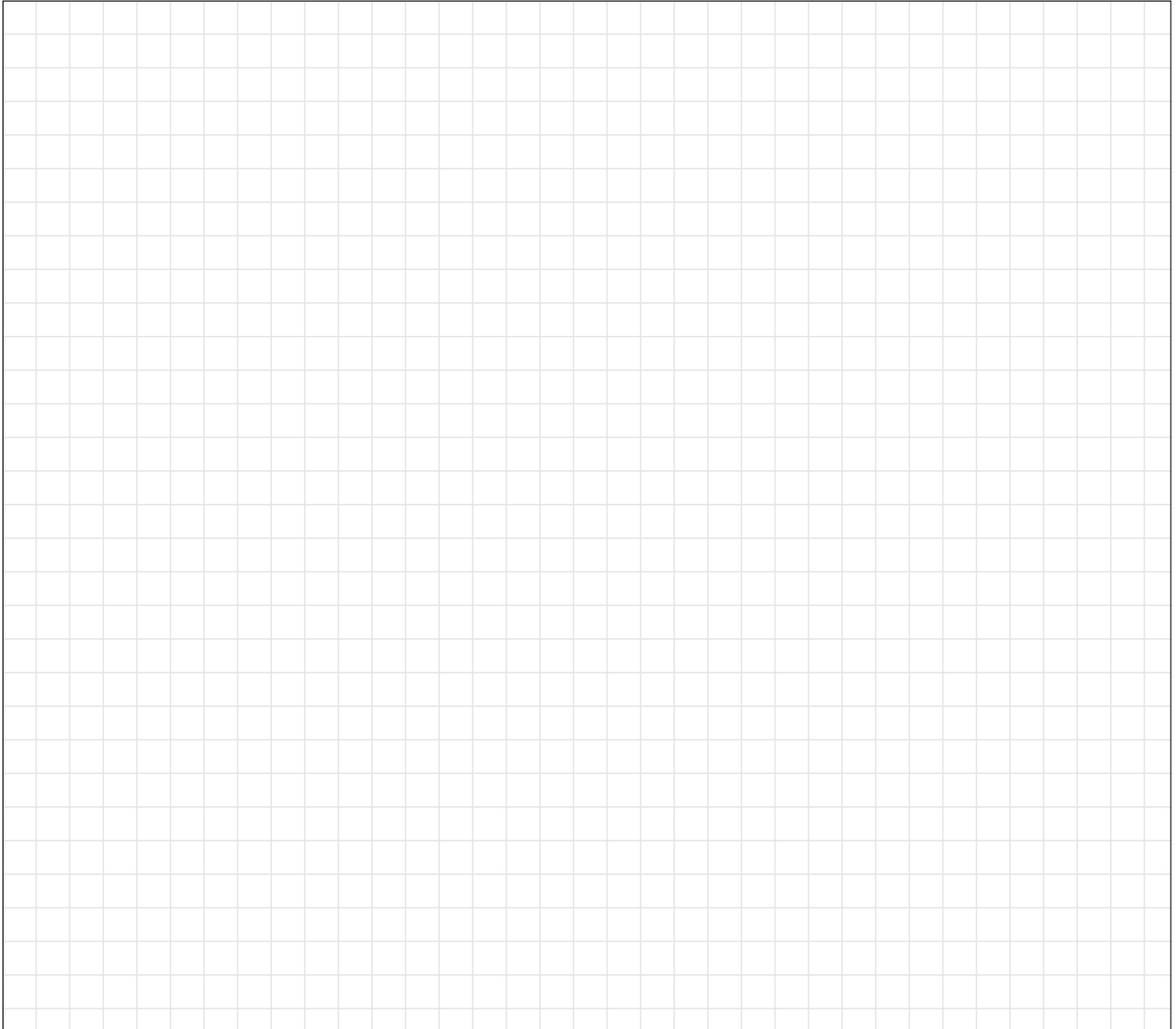
Proposition 2.3. *Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Un espace vectoriel F est isomorphe à E si et seulement si F est de dimension finie et $\dim F = \dim E$.*

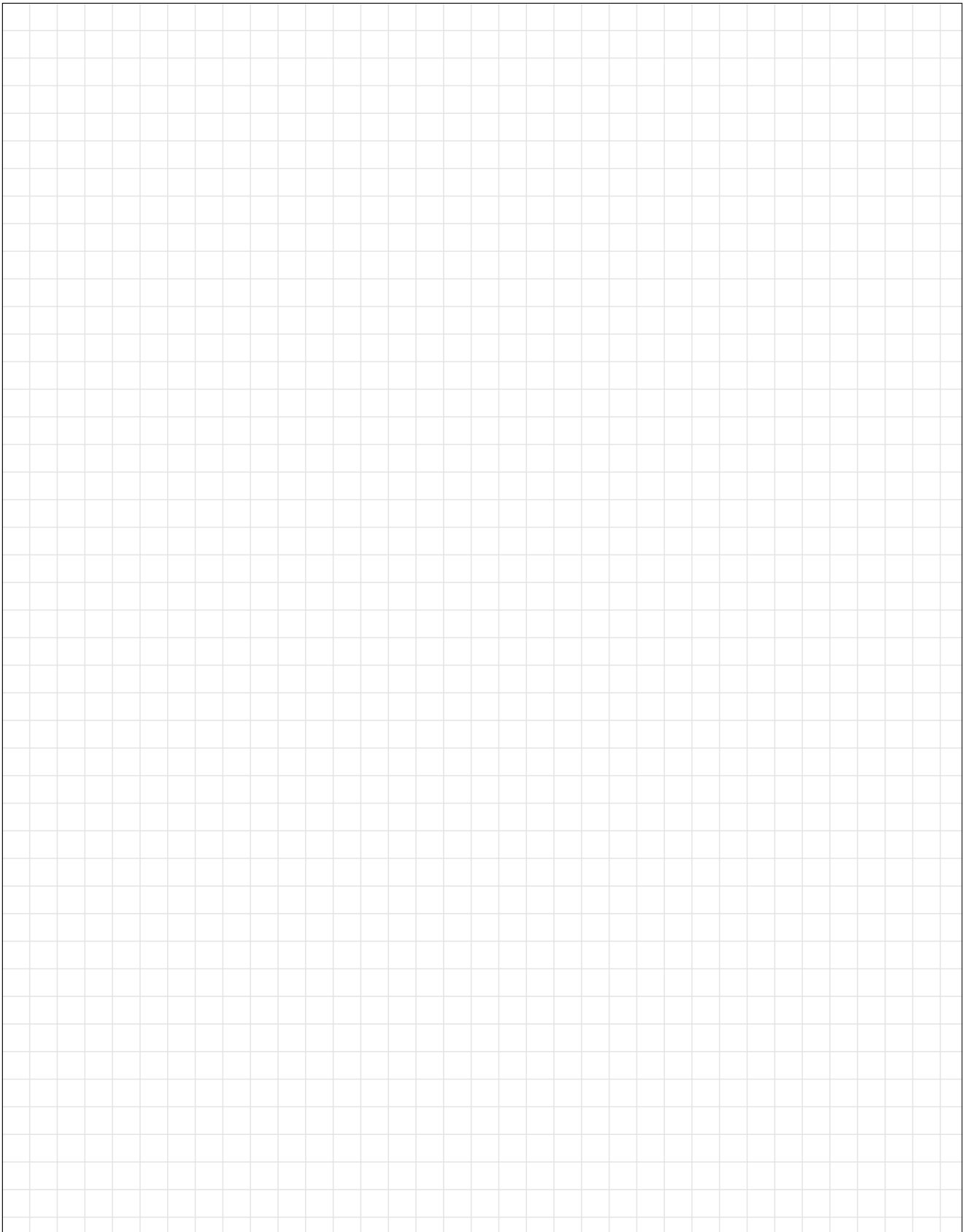
Corollaire 2.4. *Tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .*





2.3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

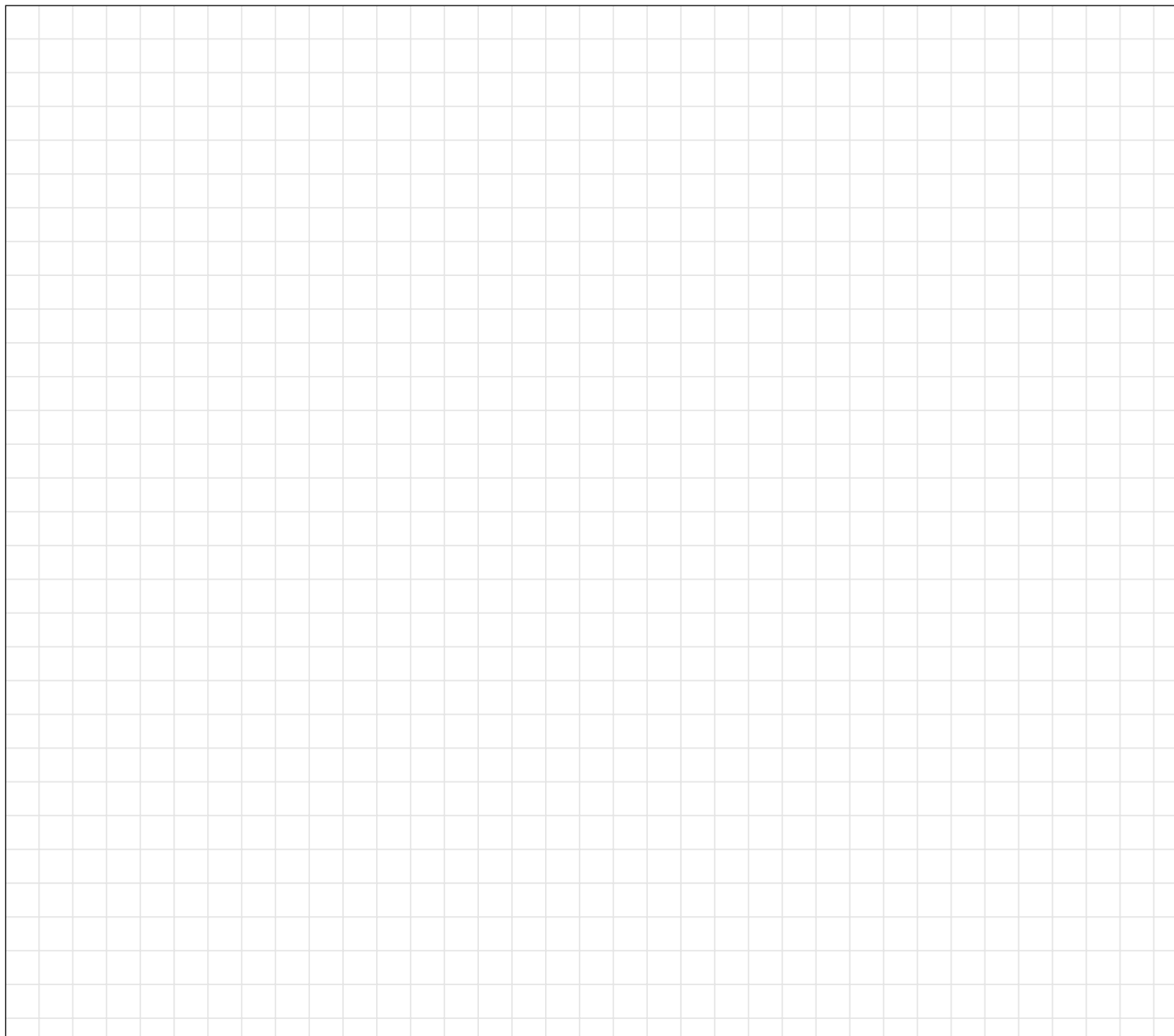


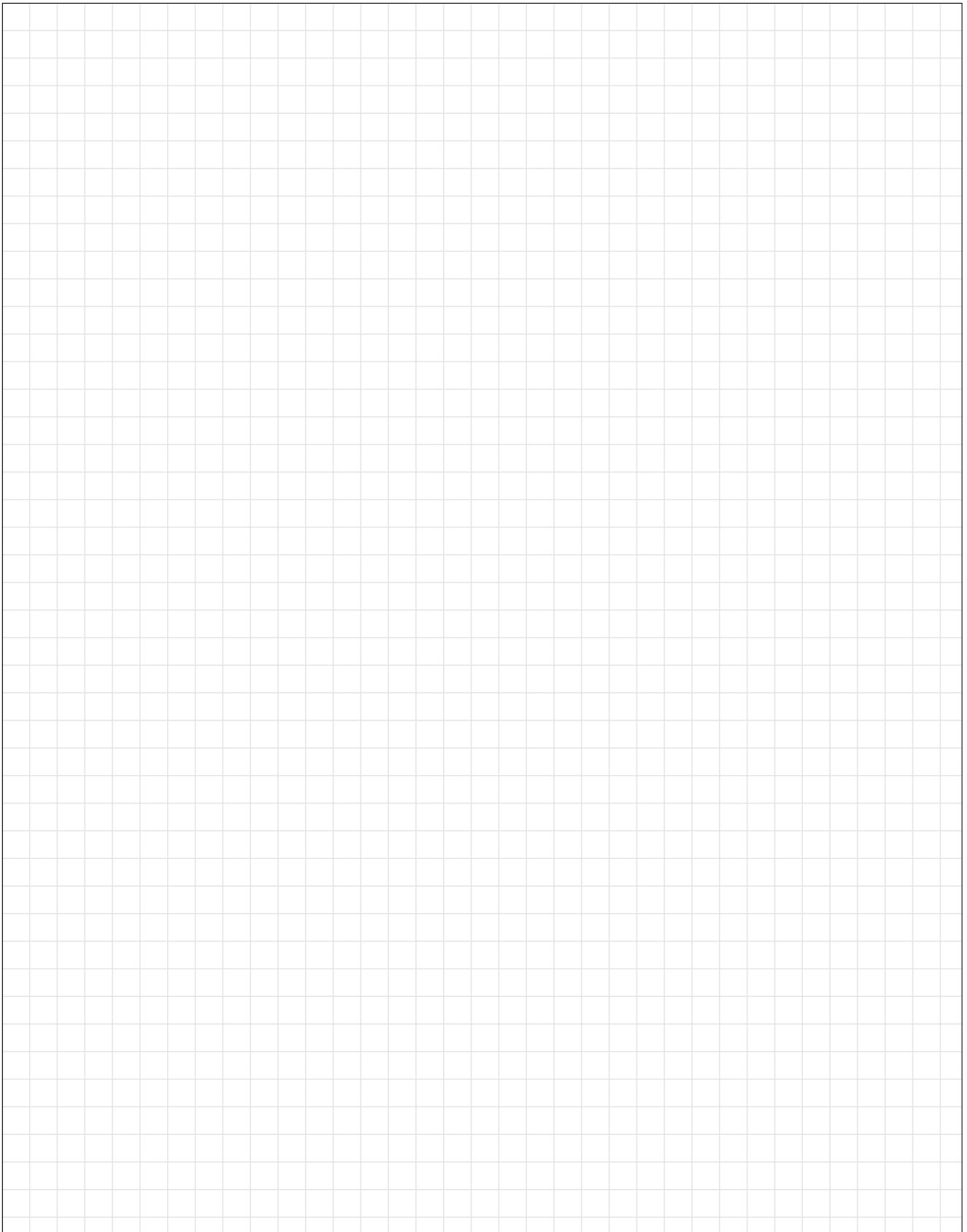


2.4 Dimension des sous-espaces vectoriels

Théorème 2.5. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie n , alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.*

De plus, F est égal à E si et seulement si $\dim F = \dim E$.





2.5 Dimension de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 2.6. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ E = F + G \end{cases}$$

Théorème 2.7. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

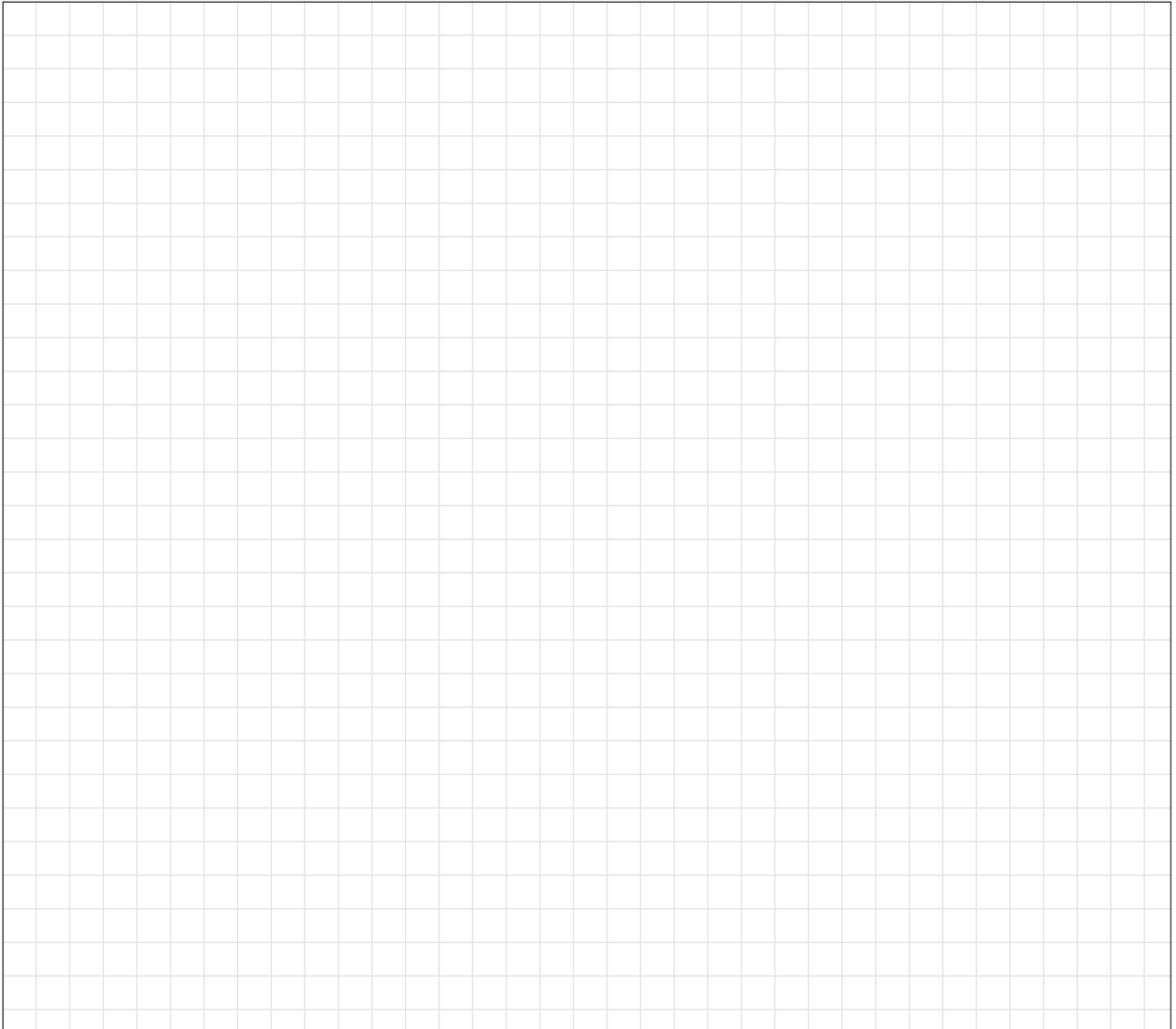
Si (f_1, f_2, \dots, f_p) est une base de F et (g_{p+1}, \dots, g_n) est une base de G , alors

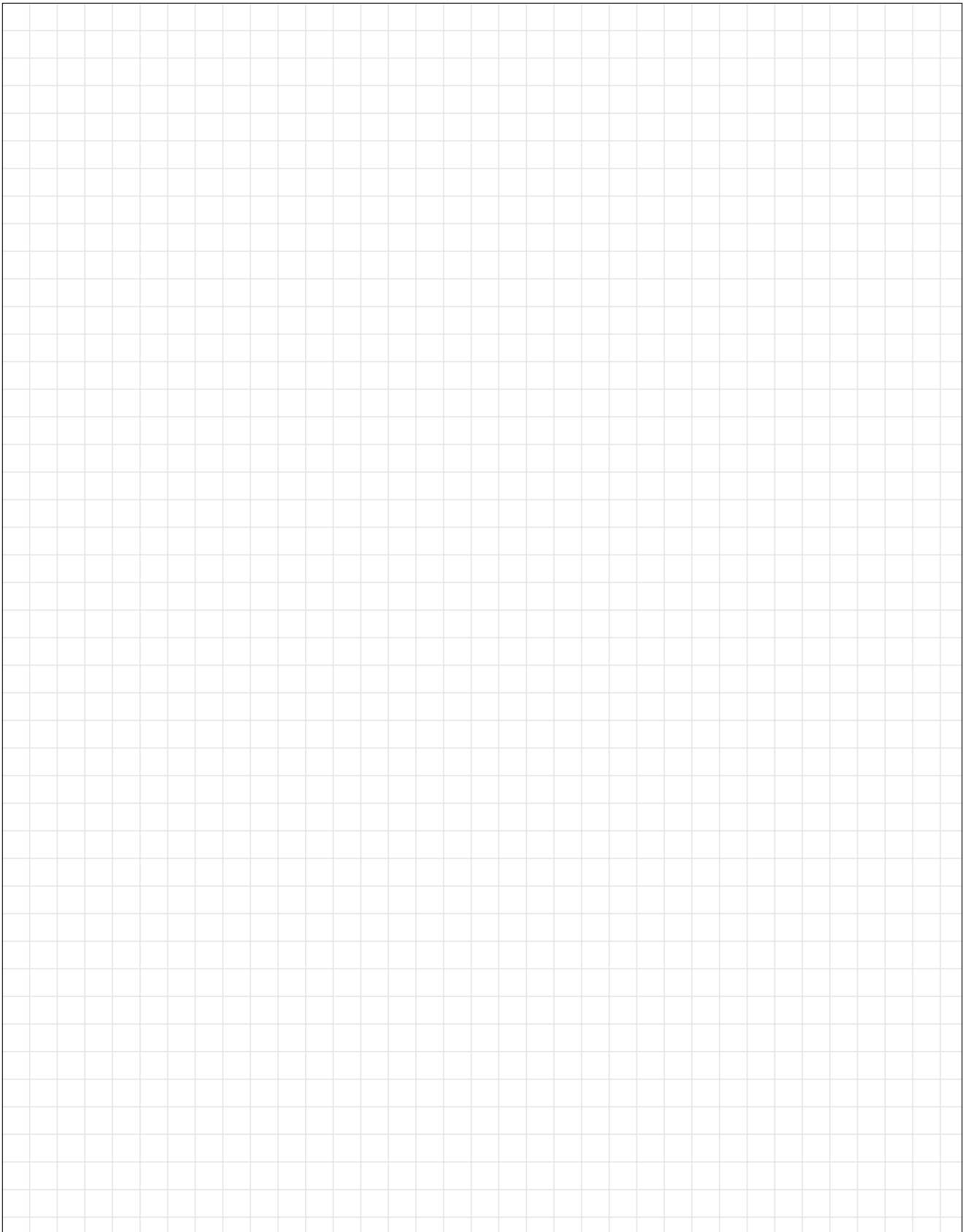
$$E = F \oplus G \iff (f_1, f_2, \dots, f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n) \text{ est une base de } E.$$

On dit que cette base est adaptée à la décomposition en sous-espaces supplémentaires.

Théorème 2.8.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.



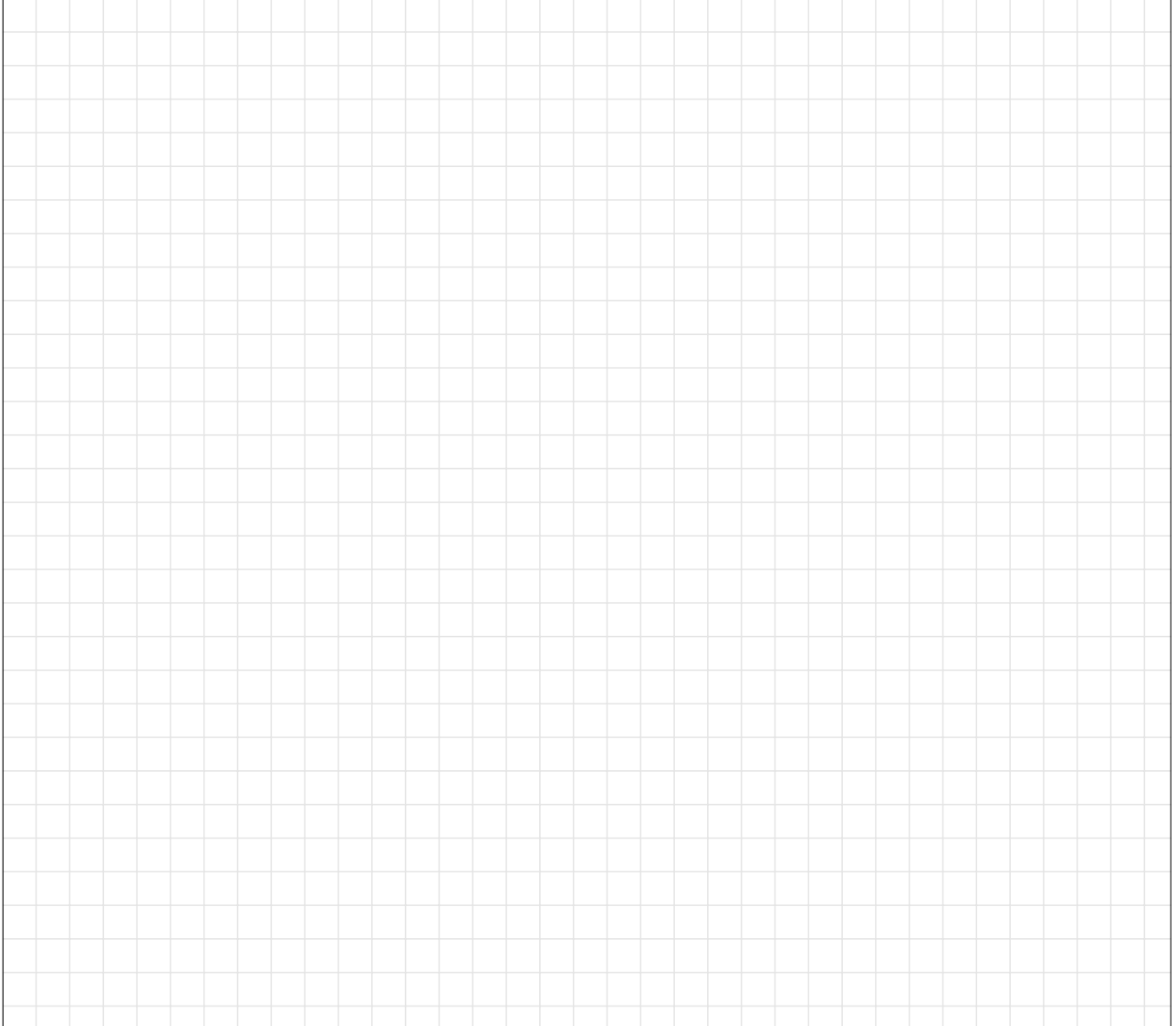


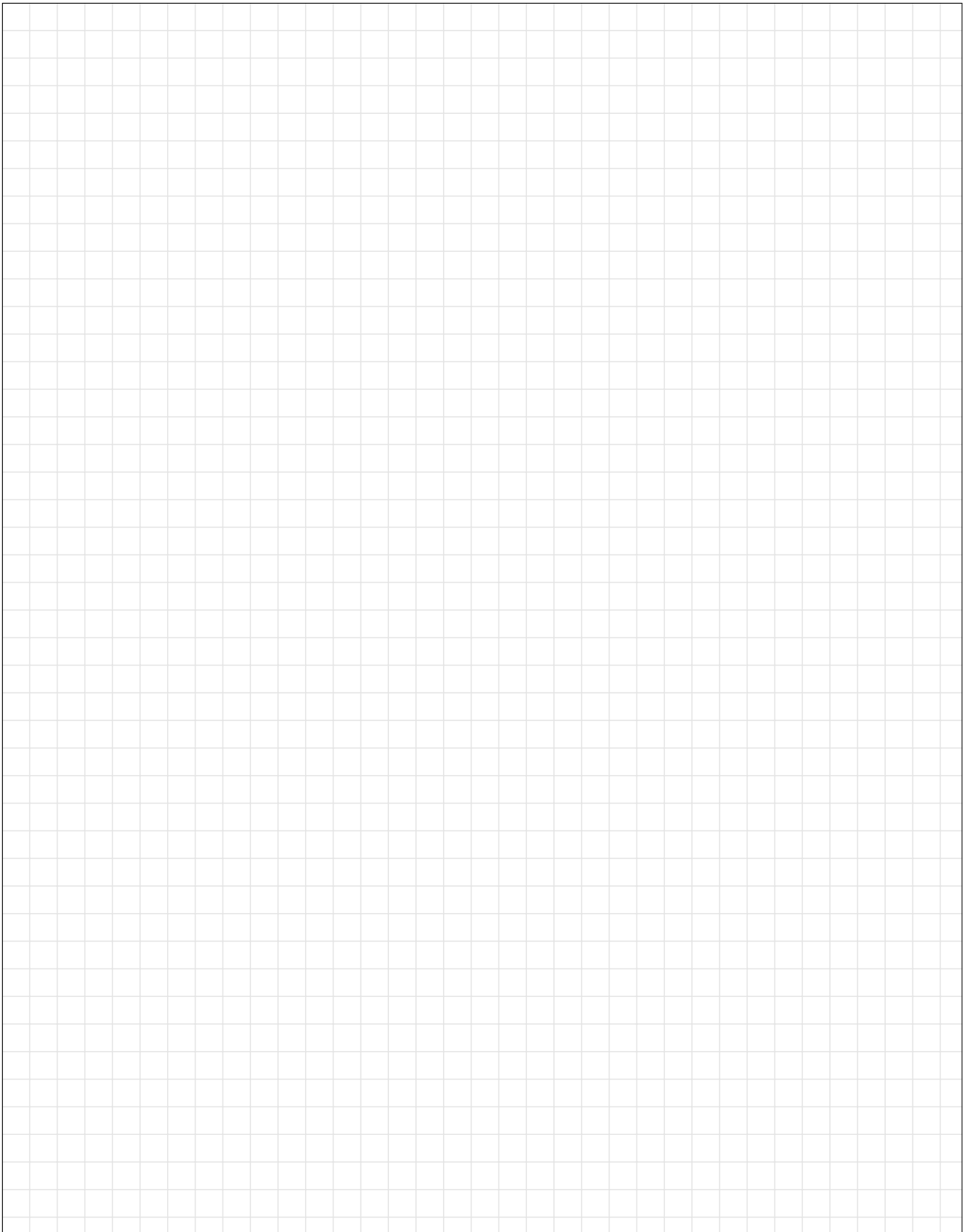
2.6 Dimension d'une somme

Proposition 2.9 (Formule de Grassmann).

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Alors $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$





3 Rang

3.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.1. On appelle rang d'une famille finie de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_p) d'un espace vectoriel E , la dimension du sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs et on le note $rg(x_1, x_2, \dots, x_p)$:

$$rg(x_1, x_2, \dots, x_p) = \dim(\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)) .$$

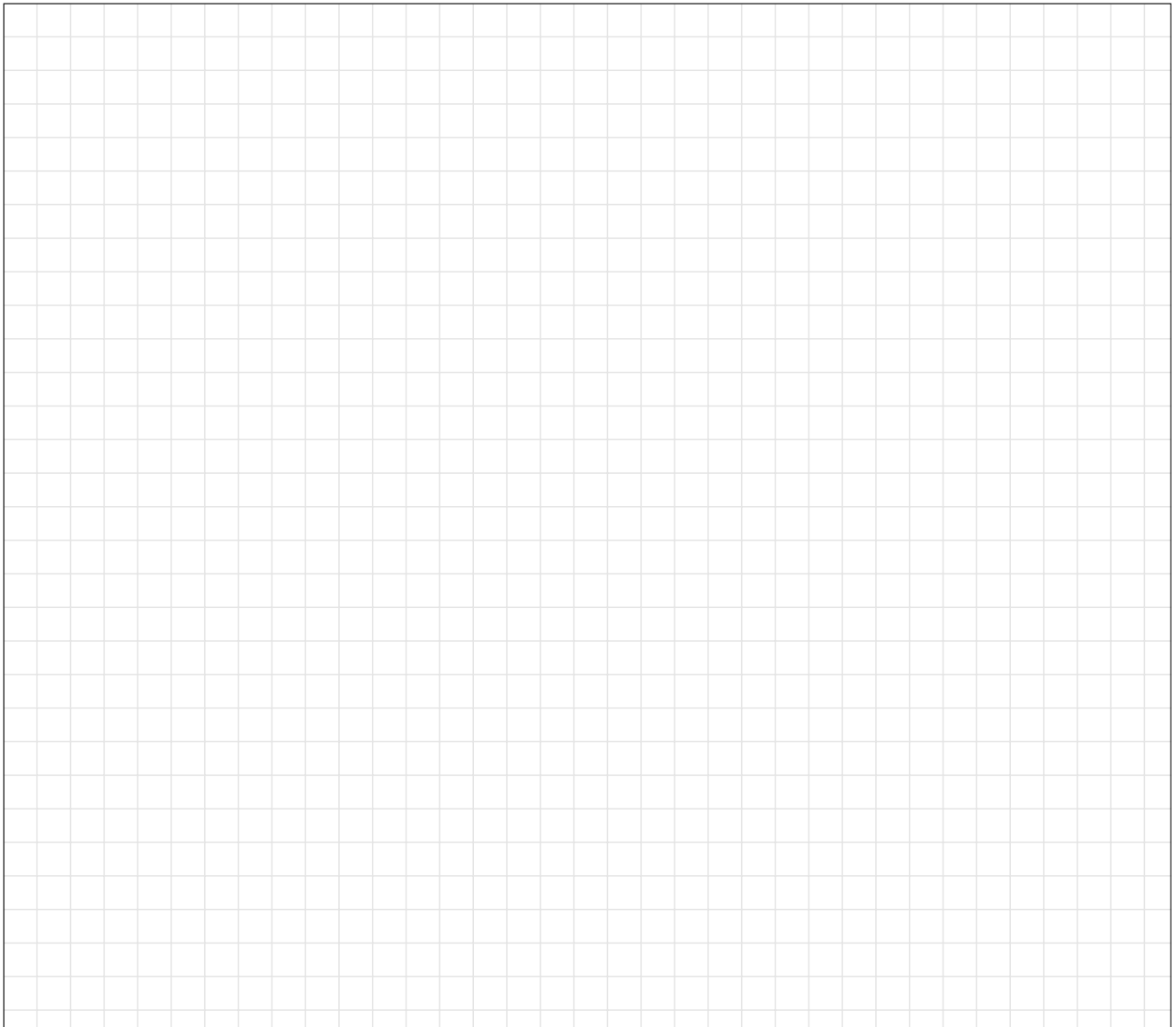
Lemme 3.1. Pour une famille finie de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_p) d'un espace vectoriel E de dimension finie $n = \dim E$, on a

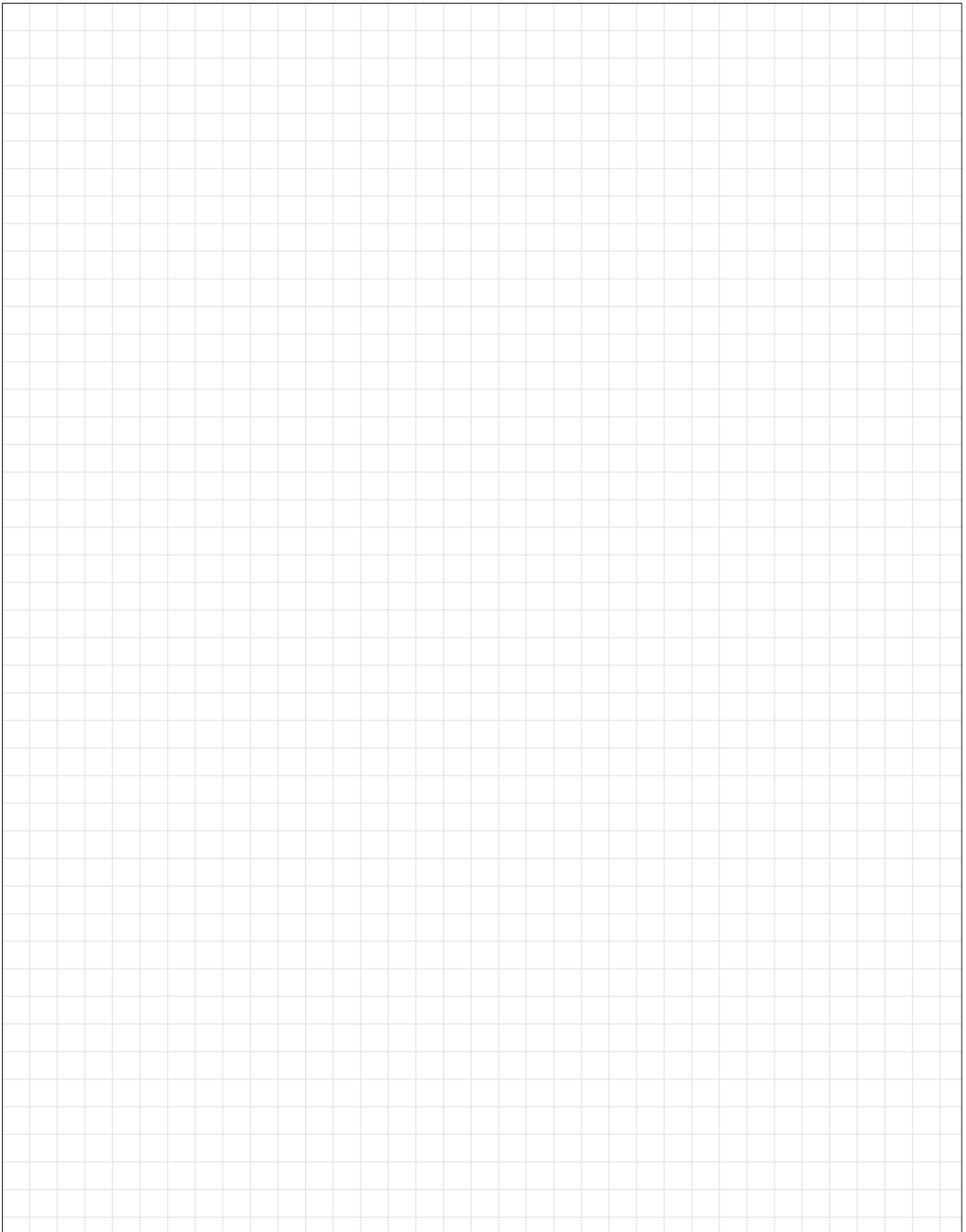
$$rg(x_1, x_2, \dots, x_p) \leq p \quad \text{et} \quad rg(x_1, x_2, \dots, x_p) \leq n$$

Théorème 3.2. Une famille est libre si et seulement si elle de rang maximal, c'est à dire si son rang est égal à son nombre de vecteurs.

Lemme 3.3. Soit (x_1, x_2, \dots, x_p) une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour tous indices i, j :

$$rg(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = rg(x_1, x_2, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots, x_p)$$





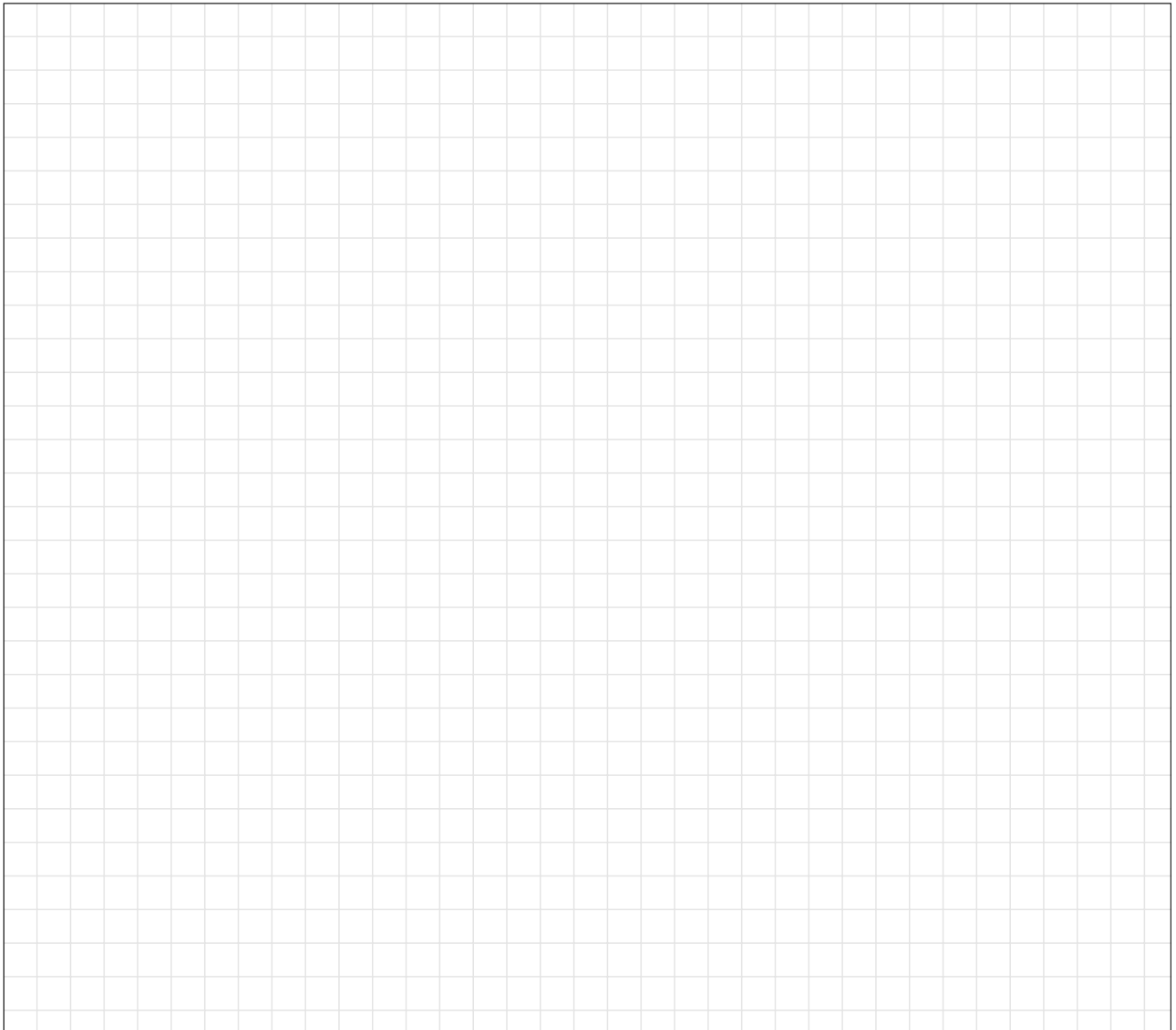
3.2 Rang d'une application linéaire

Définition 3.2. Soient E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de l'application linéaire u , la dimension de l'image de u dans F .

On note $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u)$ lorsque cette dimension est finie et on dit que u est de rang fini.

Remarque 3.1. Si $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.

Il s'ensuit que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.



Lemme 3.4. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $n = \dim E$ et $p = \dim F$, et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $\text{rg}(u) \leq n$ et $\text{rg}(u) \leq p$.

Théorème 3.5. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux applications linéaires de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

Démonstration. On a toujours $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$: pour toute image $y \in \text{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(u(x))$ donc $y \in \text{Im } v$ ce qui prouve l'inclusion.

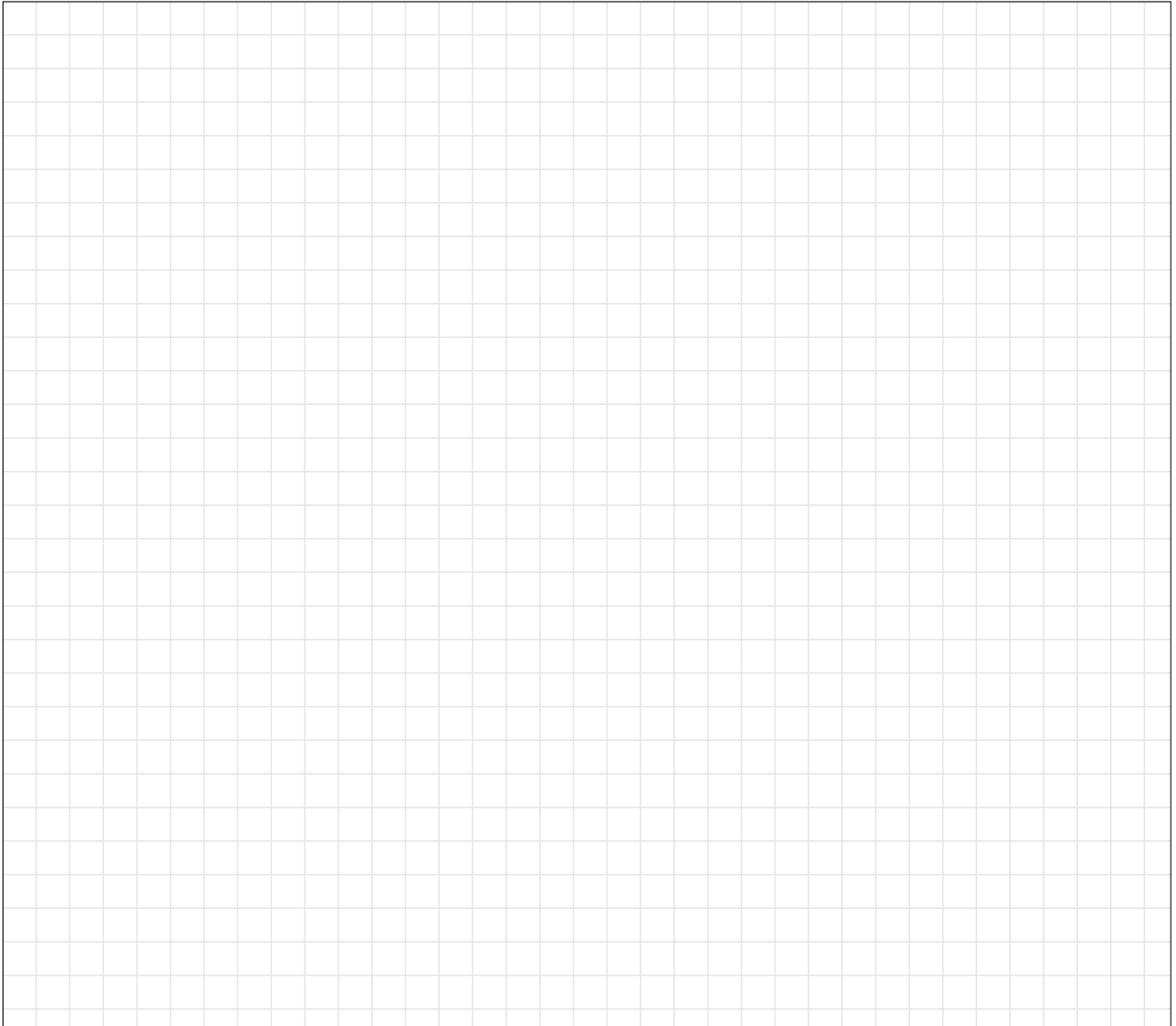
On en déduit $\dim(\text{Im}(v \circ u)) \leq \dim(\text{Im } v)$ soit $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(v)$.

Par ailleurs, soit (f_1, f_2, \dots, f_p) une base de $\text{Im } u$ avec $p = \text{rg}(u)$. Soit $z \in \text{Im}(v \circ u)$ alors il existe

$x \in E$ tel que $z = v(u(x))$. On a $u(x) \in \text{Im } u$ donc $u(x)$ s'écrit $u(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k$ avec $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ des

scalaires. On peut donc écrire $z = \sum_{k=1}^p \lambda_k v(f_k)$.

On en déduit que $(v(f_k))_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(v \circ u)$. Il s'ensuit que $\dim(\text{Im}(v \circ u)) \leq p$ ce qui donne $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(u)$. \square



3.3 Théorème du rang

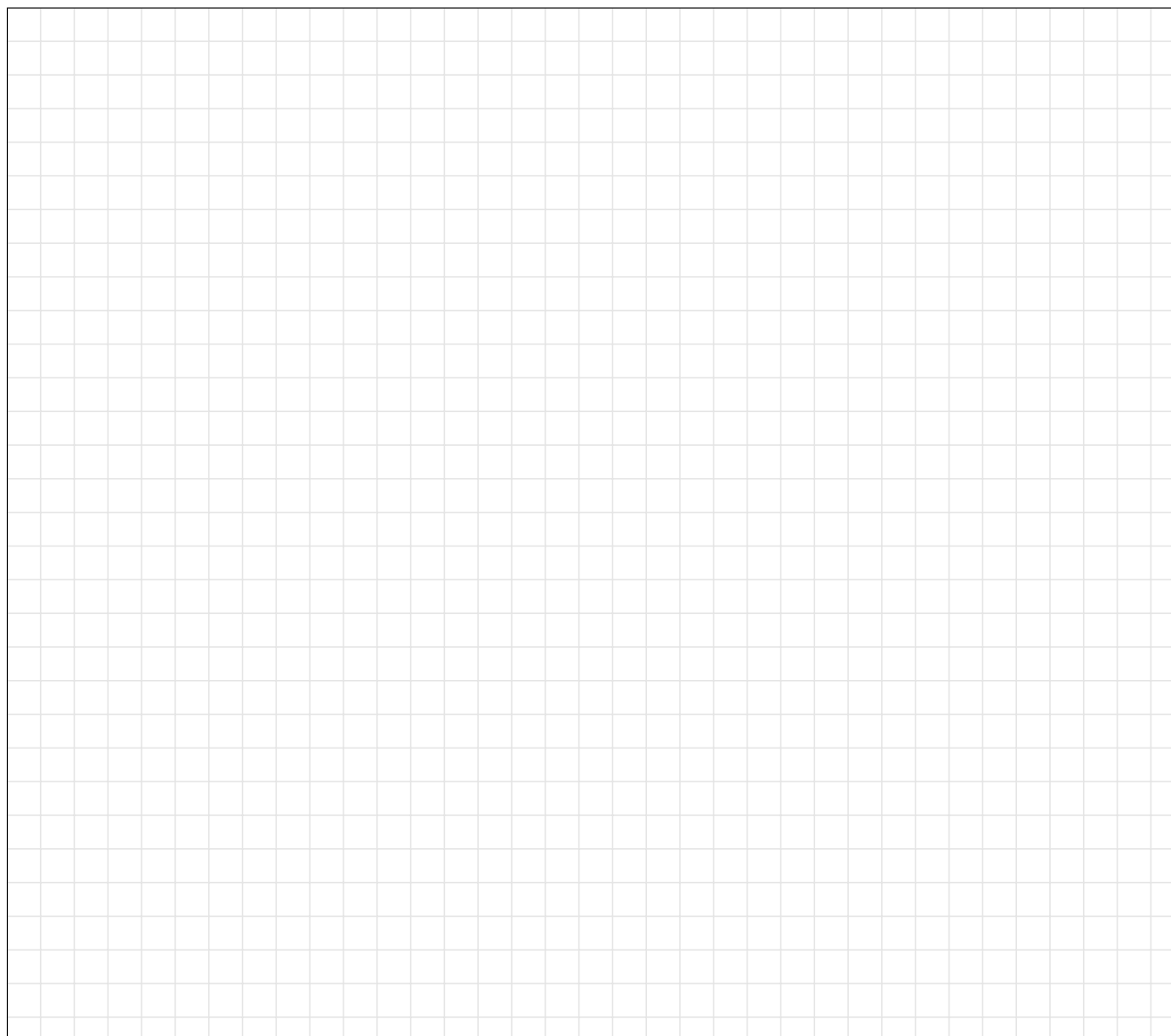
Proposition 3.6. Soit E et F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E dans F .

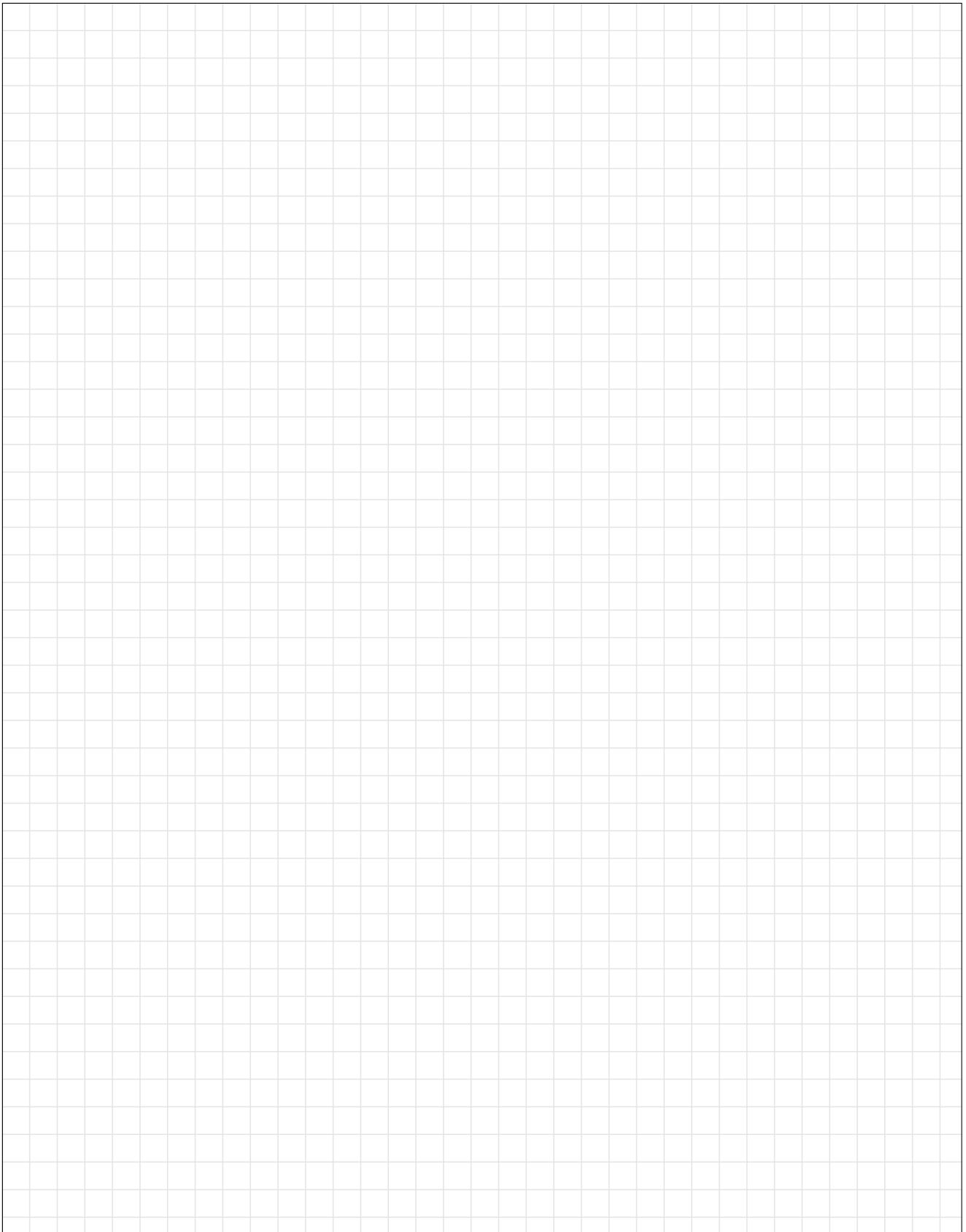
Si E_0 est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors l'application u induit un isomorphisme de E_0 sur $\text{Im } u$.

$v : \begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & \text{Im } u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est un isomorphisme.

Théorème 3.7 (Théorème du rang). Si E est un espace vectoriel de dimension finie et u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F , alors u est de rang fini et

$$\dim E = \text{rg } u + \dim(\text{Ker } u) = \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u)$$





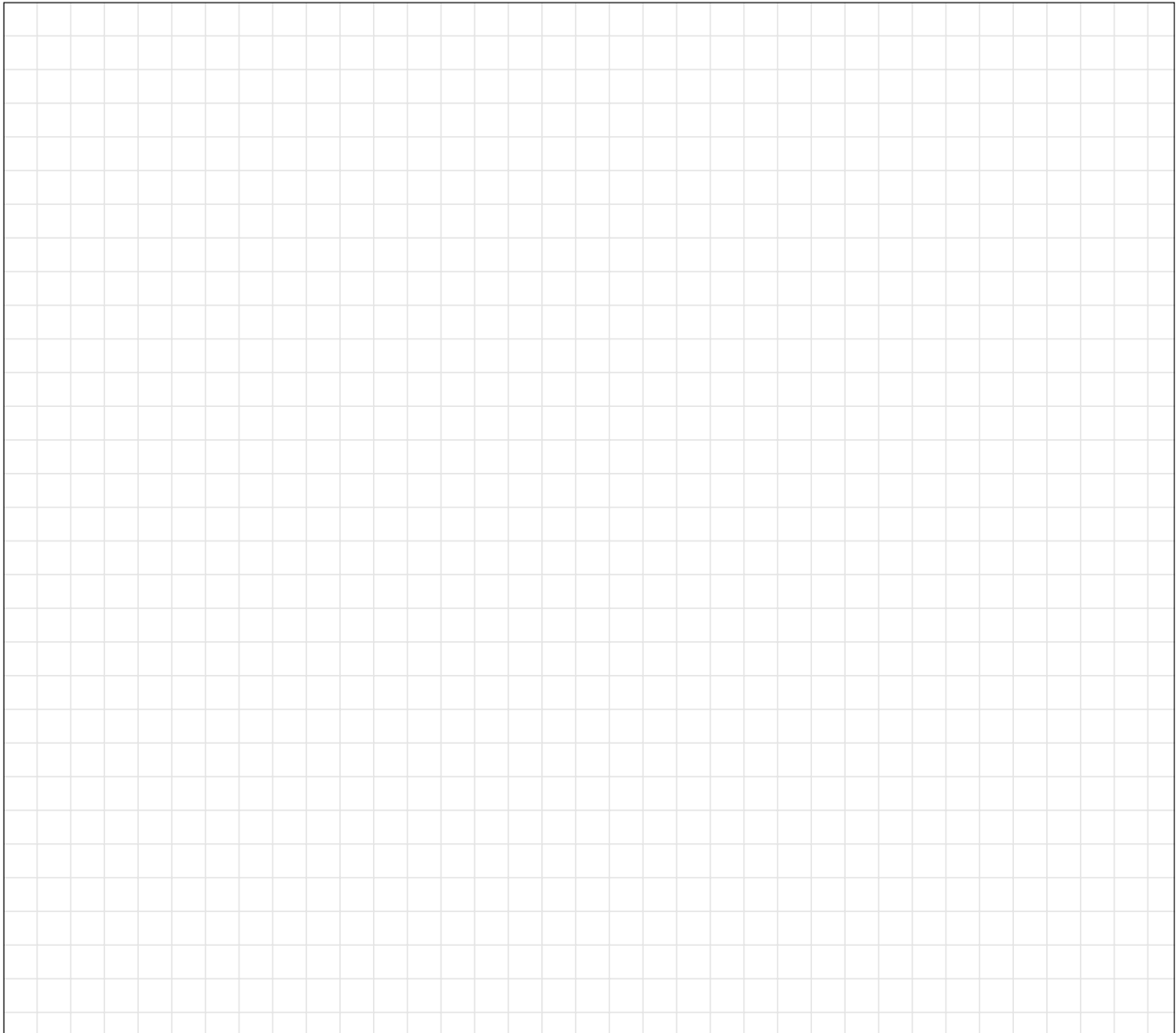
3.4 Caractérisation des isomorphismes

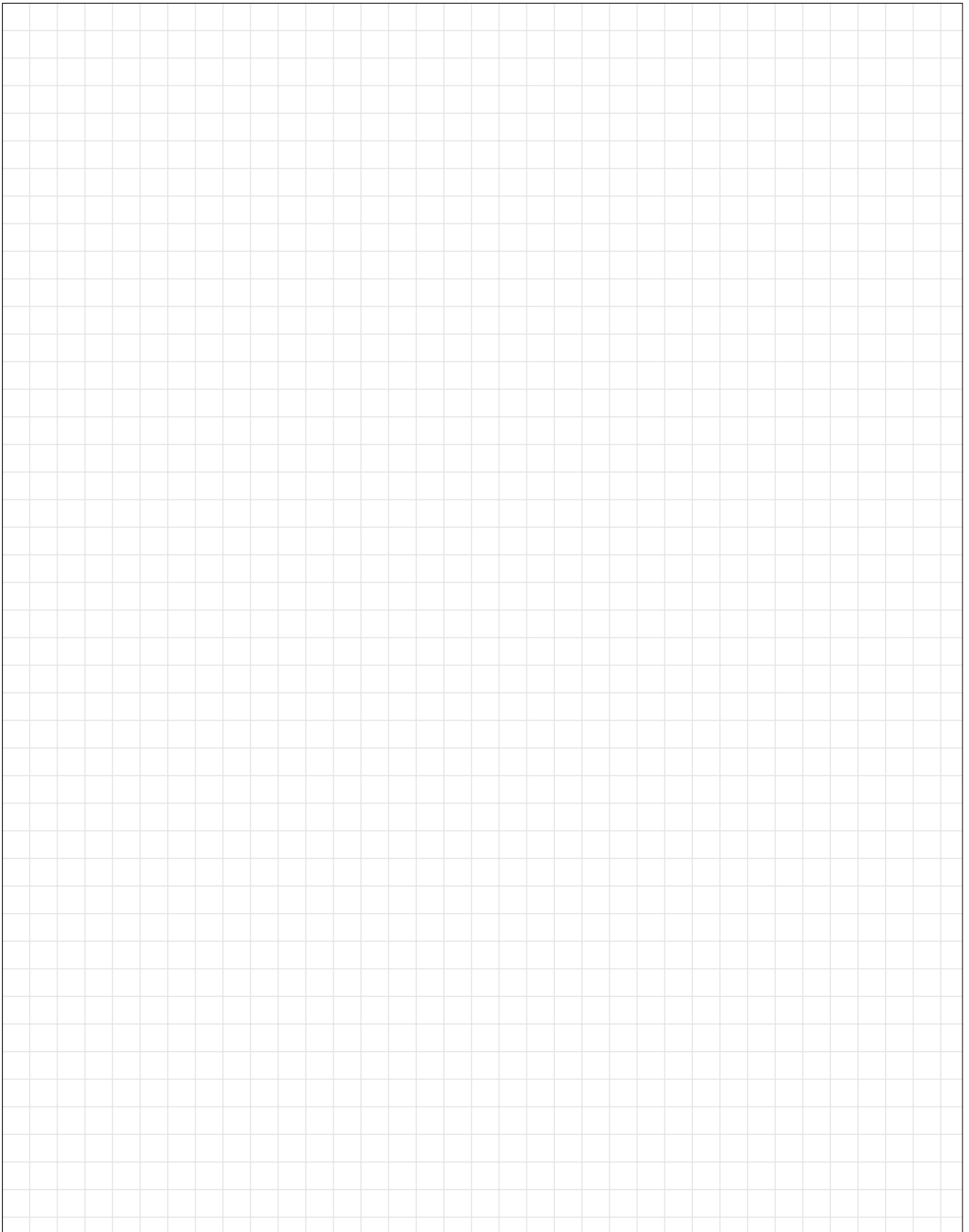
Théorème 3.8. Si E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension finie $n = \dim E = \dim F$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

u est injective $\iff \text{Ker } u = \{ \vec{0} \} \iff u$ est surjective $\iff \dim \text{Ker } u = 0 \iff u$ est bijective $\iff \text{rg}(u) = n$.

Corollaire 3.9. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, alors

u est injective $\iff u$ est surjective $\iff u$ est bijective.





Lemme 3.10. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . Si il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$, alors f est injective.

Démonstration. Soit g telle que $g \circ f = \text{id}_E$. Soit $a, b \in E$. Si $f(a) = f(b)$ alors $g(f(a)) = g(f(b))$ donc $\text{id}(a) = \text{id}(b)$ soit $a = b$. Deux éléments de l'ensemble de départ ne peuvent avoir la même image donc f est injective. \square

Lemme 3.11. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . Si il existe $h : F \rightarrow E$ telle que $f \circ h = \text{id}_F$, alors f est surjective.

Démonstration. Soit h telle que $f \circ h = \text{id}_F$. Soit $a \in F$. On a $f(h(a)) = a$ donc a a un antécédent. Tout élément de F a un antécédent donc f est surjective. \square

Théorème 3.12. Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ alors f est bijective et $f \circ g = \text{id}_F$.

Si il existe $h : F \rightarrow E$ telle que $f \circ h = \text{id}_F$ alors f est bijective et $h \circ f = \text{id}_E$.

Théorème 3.13. Si u est une application linéaire de rang fini et si φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors, dans les cas où cela a un sens,

$$\text{rg}(u \circ \varphi) = \text{rg } u \text{ ou } \text{rg}(\varphi \circ u) = \text{rg}(u).$$

On ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant par un isomorphisme.

Démonstration. Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} .

— Soit φ un isomorphisme de F dans G et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.

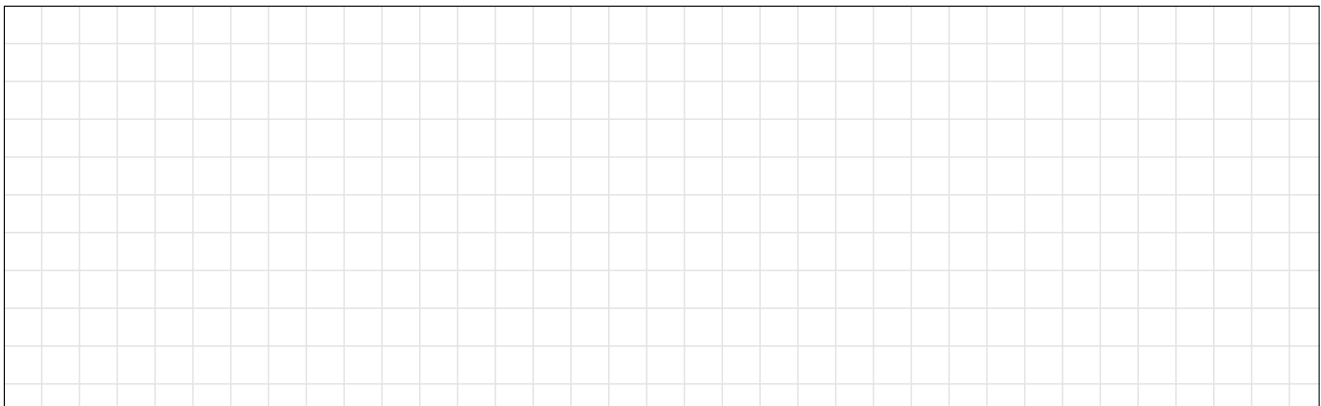
Soit B une base de $\text{Im } u$ (qui est de dimension finie). Alors $\varphi(B)$ est une base de $\varphi(\text{Im } u)$ car φ induit un isomorphisme de $\text{Im } u$ dans $\varphi(\text{Im } u)$. De plus, on a l'égalité triviale : $\varphi(\text{Im } u) = \text{Im}(\varphi \circ u)$. Alors, $\dim(\text{Im}(\varphi \circ u)) = \dim(\text{Im } u)$ soit $\boxed{\text{rg}(\varphi \circ u) = \text{rg}(u)}$.

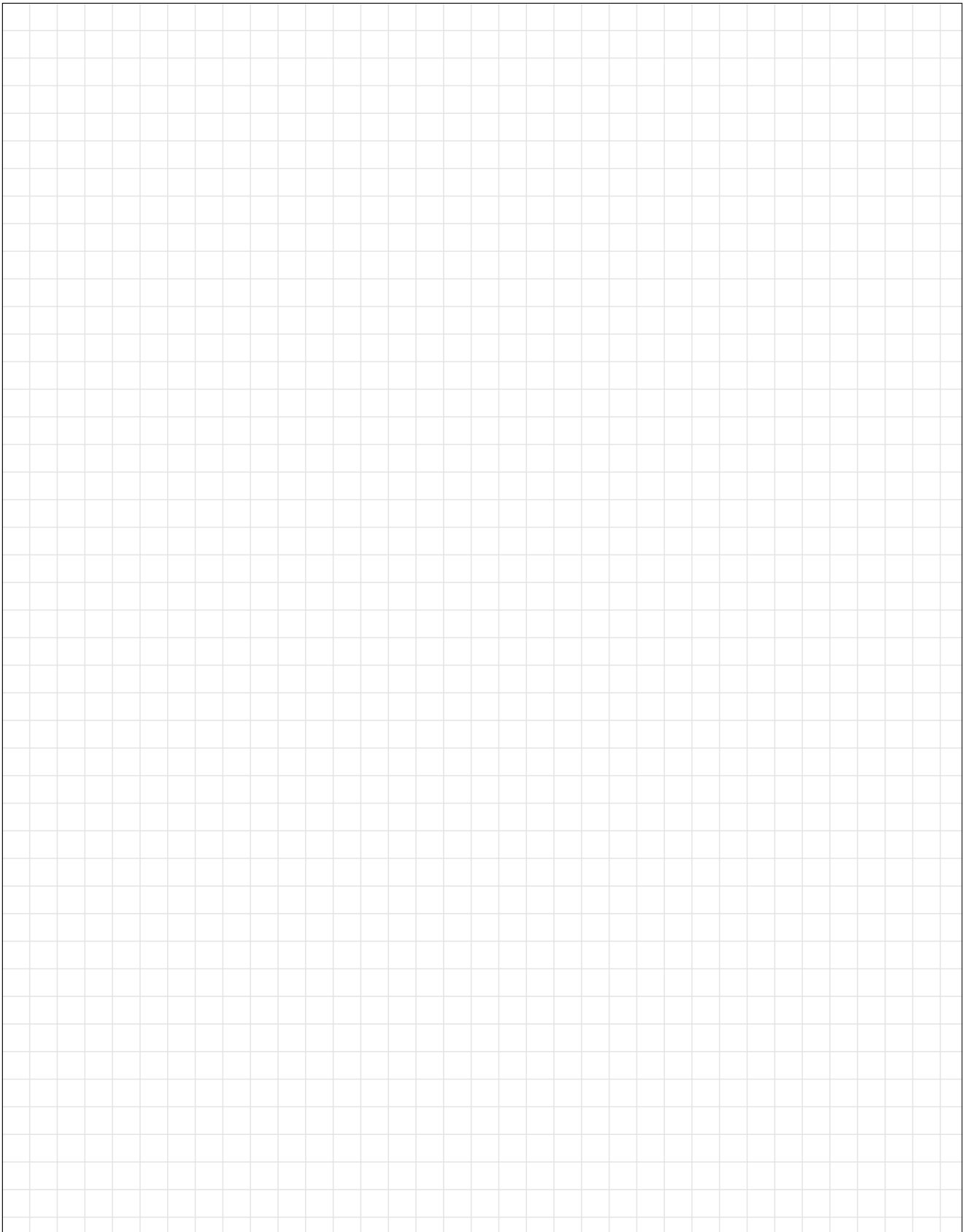
— Soit φ un isomorphisme de E dans F et $u \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini.

On a toujours $\text{Im}(u \circ \varphi) \subset \text{Im } u$ car toute image par $u \circ \varphi$ est une image par u .

Réciproquement, soit $z \in \text{Im } u$, alors il existe $y \in F$ tel que $z = u(y)$. Comme φ est une bijection de E dans F , il existe un unique $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Alors, $z = u \circ \varphi(x)$ et $z \in \text{Im}(u \circ \varphi)$ ce qui prouve $\text{Im } u \subset \text{Im}(u \circ \varphi)$.

On a montré $\text{Im}(u \circ \varphi) = \text{Im } u$ donc $\dim(\text{Im}(u \circ \varphi)) = \dim(\text{Im } u)$ soit $\boxed{\text{rg}(u \circ \varphi) = \text{rg}(u)}$. \square





3.5 Équations linéaires

Définition 3.3. Une équation linéaire est une équation du type $u(x) = b$ où

- u est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F ,
- x est un vecteur inconnu dans E ,
- b est un vecteur de F appelé second membre de l'équation.

Théorème 3.14 (Structure de l'ensemble des solutions).

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F , soit $b \in F$.

On note S_0 l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = \vec{0}_F$ et \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$.

- S_0 est un sous-espace vectoriel de E . En particulier, il est donc non vide : il contient $\vec{0}_E$.
- Soit \mathcal{S} est vide, soit $\mathcal{S} = x_0 + S_0 = \{x_0 + h \mid h \in S_0\}$ où x_0 est une solution de l'équation avec second membre.

Remarque 3.2. Si E est de dimension finie n (n inconnues) et si u est de rang fini r (r pivots), alors l'ensemble des solutions \mathcal{S}_0 est de dimension $n - r = \text{nombre d'inconnues} - \text{nombre de pivots}$.

