Mathématique - Corrigé Devoir Maison n°15

Exercice 1

1. (a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $]-1,+\infty[$, sin est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0.

   Alors, $\boxed{f \text{ est définie sur }]-1,0[\cup]0,+\infty[}$ en tant que quotient de fonctions, définies sur ce domaine, dont le dénominateur ne s'annule pas.

   (b) On calcule un développement limité d'ordre au moins 4 pour f. On a, d'après le cours,

   $\sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

   $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

   Alors, par opérations sur les DL, $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x)}$

   On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$. Comme f n'est pas définie en 0, on peut la prolonger en posant $\widehat{f}(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\widehat{f}(x) = f(x)$ pour $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

   La fonction prolongée a un DL à l'ordre 1 en 0 : $\widehat{f}(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} + x\varepsilon(x)$. Par propriété, $\widehat{f}$ est dérivable en 0 et $(\widehat{f})'(0) = -\dfrac{1}{2}$ qui est le coefficient de x dans le $DL_1(0)$ (on a le taux d'accroissement $\dfrac{\widehat{f}(x)-\widehat{f}(0)}{x-0} \underset{0}{=} -\dfrac{1}{2} + \varepsilon(x)$)

   Alors, $\boxed{\text{la droite } y = \dfrac{1}{2}(1-x) \text{ est tangente à la courbe de } f \text{ en } 0}$ et comme $f(x) - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x \underset{0}{=} + \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)$, avec $\dfrac{x^2}{4} \geqslant 0$ au voisinage de 0, $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au dessus de la tangente en } 0}$.

2. (a) On a, d'après la formule de Taylor en 0 :

   $$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

   On a $f(x) \underset{0}{=} x^2 + \dfrac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$ soit $\boxed{f(x) \underset{0}{=} -1 + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{11x^4}{24} + o(x^4)}$

   (b) On pose $h = \dfrac{1}{x}$, alors, pour $x \neq 0$, on a $h \neq 0$ et

   $g(x) = g\left(\dfrac{1}{h}\right) = h\,\mathrm{ch}(h) - \dfrac{1}{h}\cos(h) = \dfrac{1}{h}(h^2\,\mathrm{ch}(h) - \cos(h))$ soit $\forall x \neq 0, \quad g(x) = \dfrac{f(h)}{h}$.

   On a $x \to +\infty \iff h \to 0^+$, alors $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{h}\left(-1 + \dfrac{3}{2}h^2 + \dfrac{11}{24}h^4 + o(h^4)\right)$

   On revient à x ce qui donne : $\quad g(x) \underset{+\infty}{=} -x + \dfrac{3}{2x} + \dfrac{11}{24x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

   On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - (-x) = 0$ donc

   $\boxed{\text{la droite } y = -x \text{ est asymptote au graphe de } g \text{ au voisinage de } +\infty}$.

   De plus, $g(x) + x \underset{+\infty}{=} \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ avec $\dfrac{3}{2x} \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$, alors

   $\boxed{\text{le graphe de } g \text{ est au-dessus de l'asymptote } y = -x}$.

3. Par développements limités :

   $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{6n^3} + \dfrac{1}{n^3}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{6n^3} + \dfrac{1}{n^3}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

   $= \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{6n^3} + \dfrac{1}{n^3}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Donc $n\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{6n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On passe ensuite à : $\left(n\,\text{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = e^{n^2\ln(n\,\text{sh}(\frac{1}{n}))} = e^{n^2\ln(1+\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n}))}$

En utilisant $\ln(1+u) = u + u\varepsilon(u)$ avec $u = \frac{1}{6n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n}) \mapsto 0$, on trouve que :

$\left(n\,\text{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = e^{\frac{1}{6}+\varepsilon(\frac{1}{n})}$, et on peut conclure que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\,\text{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = e^{\frac{1}{6}}}$

4. On recherche la décomposition en éléments simples de la fraction :

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{a}{3n+1}+\frac{b}{3n+4} = \frac{a(3n+4)+b(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n(3a+3b)+4a+b}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$\iff \begin{cases} a+b=0 \\ 4a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ce qui fait $\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n+1}-\dfrac{1}{3n+4}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n+1}-\dfrac{1}{3(n+1)+1}\right)$.

La somme partielle de la série à étudier est une somme télescopique qui se simplifie :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3(k+1)+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3(n+1)+1}\right)$$

$$\boxed{\text{La série } \left(\sum\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right) \text{ converge et sa somme vaut } \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{1}{3}}$$

Exercice 2

1. (a) On effectue une intégration par parties en posant :

les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a,b]$ $\begin{cases} u'(t)=\cos(\lambda t) & v(t)=f(t) \\ u(t)=\dfrac{\sin(\lambda b)}{\lambda} & v'(t)=f'(t) \end{cases}$

et on obtient : $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)\sin(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t$

Ce qui fait bien : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = \frac{f(b)\sin(\lambda b)}{\lambda}-\frac{f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t}$

(b) On sait que pour tout réel $\lambda > 0$ on a : $0 \leqslant \left|\dfrac{f(b)\sin(\lambda b)}{\lambda}\right| \leqslant \dfrac{|f(b)|}{\lambda}$ et $0 \leqslant \left|\dfrac{f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda}\right| \leqslant \dfrac{|f(a)|}{\lambda}$

Or , $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{|f(a)|}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{|f(b)|}{\lambda} = 0$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{f(b)\sin(\lambda b)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda} = 0$.

Par ailleurs, f est de classe C^1 c'est à dire dérivable à dérivée continue. La dérivée f' est continue, et, par théorème, elle est bornée sur le segment $[a,b]$. Il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall t\in[a,b]\,,\ |f'(t)|\leqslant M$.

Avec les bornes de l'intégrale dans le bon sens on trouve :

$$\left|\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)\sin(\lambda t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$$

Donc $0 \leqslant \left|\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{M(b-a)}{\lambda}$

Or $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{M(b-a)}{\lambda} = 0$, donc par encadrement $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t = 0$

On obtient donc finalement $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = 0}$

2. On a : $\cos(\frac{t}{2})\cos(kt) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(\frac{t}{2}+kt)+\cos(\frac{t}{2}-kt)\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(\frac{2k+1}{2}t)+\cos(\frac{1-2k}{2}t)\Big)$

   Donc $\boxed{\cos(\frac{t}{2})\cos(kt) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(\frac{2k+1}{2}t)+\cos(\frac{2k-1}{2}t)\Big)}$

3. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\cos(\frac{t}{2})\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\cos(\frac{t}{2})\right)$
   - *initialisation :*
     pour $n=1$, l'égalité se résume à $-\cos(\frac{t}{2})\cos(kt) = \dfrac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{3}{2}t\right)-\cos(\dfrac{t}{2})\right)$
     ce qui est vérifié d'après la question précédente.
   - *hérédité :*
     En supposant la proposition vérifiée au rang n, on a :
     $\cos(\frac{t}{2})\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\cos(kt) = \cos(\frac{t}{2})\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)+(-1)^{n+1}\cos(\frac{t}{2})\cos((n+1)t)$
     $= \dfrac{1}{2}\left((-1)^n\cos(\frac{2n+1}{2}t)-\cos(\frac{t}{2})\right)+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2}\Big(\cos(\frac{2n+3}{2}t)+\cos(\frac{2n+1}{2}t)\Big)$
     $= \dfrac{1}{2}\left((-1)^{n+1}\cos(\frac{2n+3}{2}t)-\cos(\frac{t}{2})\right)$

   On a bien prouvé par récurrence que $\boxed{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)}$

   Autre solution : faire apparaître une somme télescopique.

4. $\forall t\in[0,1]$, $\cos(\frac{t}{2})\neq 0$. On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = (-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos(\frac{t}{2})}-\frac{1}{2}$

   En intégrant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$

   Ce qui donne : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\sin(k)}{k} = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos(\frac{t}{2})}\mathrm{d}t\ -\ \frac{1}{2}}$

5. La fonction $f: t\longmapsto \dfrac{1}{\cos(\frac{t}{2})}$ est de classe C^1 sur $[a,b]=[0,1]$. En appliquant le résultat de la première question avec $\lambda = \dfrac{2n+1}{2}$ qui tend vers $+\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos(\frac{t}{2})}\mathrm{d}t = 0.$

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\sin(k)}{k} = -\frac{1}{2}.$

   Donc $\boxed{\text{la série de terme général } u_n = \dfrac{(-1)^n\sin(n)}{n} \text{ converge et } \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n = -\frac{1}{2}}$

Exercice 3

1. Si la série $\sum x_n$ converge, alors son terme général (x_n) est une suite qui converge vers 0.
   Soit $\varepsilon=1$, par définition de la limite, il existe un rang N tel que $\forall n\geqslant N,\quad |x_n-0|\leqslant\varepsilon=1$.
   On en déduit que $\forall n\geqslant N,\quad 0\leqslant x_n\leqslant 1 \Longrightarrow 0\leqslant x_n^2\leqslant x_n$ car pour $0\leqslant x\leqslant 1$, on a $x^2\leqslant x$.
   Or la série $\sum_{n\geqslant N}x_n$ est convergente, les termes x_n et x_n^2 sont positifs et $\forall n\geqslant N,\quad 0\leqslant x_n^2\leqslant x_n$, alors par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant N}x_n^2$ converge donc $\boxed{\text{la série } \sum x_n^2 \text{ est convergente}}$.

2. On connaît $e^u \underset{0}{=} 1+u+\dfrac{1}{2}u^2+o(u^2)$ et on sait que $\operatorname{ch}u = \dfrac{1}{2}\left(e^u+e^{-u}\right)$. On en déduit que

$$\boxed{\operatorname{ch}u \underset{0}{=} 1+\frac{1}{2}u^2+o(u^2).}$$

3. (a) On a $u_0 > 0$. On suppose que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geqslant 1 > 0$, on a $\dfrac{u_n}{\operatorname{ch} u_n} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.
La proposition $u_n > 0$ pour tout entier n, est initialisée et héréditaire, alors par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
Pour tout entier n, on a $u_n > 0 \longrightarrow \operatorname{ch} u_n > 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n} < 1$, alors $\dfrac{u_n}{\operatorname{ch}(u_n)} < u_n$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$.
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement positive et strictement décroissante.}}$$
(b) D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.
Soit ℓ sa limite, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 < u_n < u_0 = 1$, on a par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
La fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lim \operatorname{ch} u_n = \operatorname{ch} \lim u_n \geqslant 1 > 0 \Longrightarrow \lim \dfrac{u_n}{\operatorname{ch} u_n} = \dfrac{\lim u_n}{\operatorname{ch}(\lim u_n)}$.
On en déduit que ℓ vérifie $\ell = \dfrac{\ell}{\operatorname{ch} \ell} \Longleftrightarrow \ell = 0$ ou $1 = \dfrac{1}{\operatorname{ch} \ell} \Longleftrightarrow \ell = 0$.
Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0.}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} < u_n$ et $u_n > 0$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Longrightarrow v_n < 0$. $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est strictement négative.}}$
On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n}$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n} = 1$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge vers } 0.}$
(b) On calcule $\quad S_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)$
On reconnaît une somme télescopique, alors $\quad S_{n-1} = \ln(u_n) - \ln(u_0)$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k) = \ln u_n}$.
La suite (u_n) converge vers 0, alors $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = -\infty$ donc la série $\sum \ln(1+v_n)$ diverge.
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, et $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, alors $\quad -\ln(1+v_k) \sim -v_k$.
On a $-v_n > 0$ pour tout n et $\sum(-\ln(1+v_n))$ diverge. Alors par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum -v_n$ diverge donc $\boxed{\sum v_n \text{ diverge}}$

5. (a) On a $v_n = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n} - 1$. $\quad$ On calcule un DL de $\dfrac{1}{\operatorname{ch} u}$ en 0 : $\quad \dfrac{1}{\operatorname{ch} u} \underset{0}{=} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)}$
On pose $z = \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ et $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + o(z)$ qui donne : $\quad \dfrac{1}{\operatorname{ch} u} - 1 \underset{0}{=} -\dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$
Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on a $\dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n} - 1 \underset{+\infty}{=} -\dfrac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2)$.
Le premier terme non nul du DL donne un équivalent : $\quad \boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}u_n^2}$
(b) La série à termes positifs $\sum -v_n$ diverge, alors par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum -u_n^2$ diverge. Donc $\sum u_n^2$ est divergente.
(c) D'après la contraposée de la première question, si $\sum u_n^2$ diverge, alors $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$