Chapitre 16 - TD - 6 avril 2020

TD 16 - Exercice 2 :

Écrire les développements limités des fonctions f suivantes à l'ordre et au point indiqué :

a) $DL_3(2)$ de $f(x) = \ln x$, e) $DL_2(0)$ de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x}$ f) $DL_3(0)$ de $f(x) = x(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x^2}}$

a) on pose $x = 2 + h$ avec $x \to 2 \iff h \to 0$

on a $\ln(x) = \ln(2+h) = \ln\left(2\left(1+\frac{h}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{h}{2}\right)$

on pose $u = \frac{h}{2} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

On trouve :
$$\ln(x) \underset{x\to 2}{=} \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3)$$

$$\ln(x) \underset{x\to 2}{=} \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o\left((x-2)^3\right)$$

plus propre

Autre méthode :

$\ln$ est de classe C^3 sur $]0,+\infty[$ (voisinage de 2)

alors on peut utiliser la formule de Taylor :

$f(x) = \ln(x)$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f(2) = \ln(2)$ $f'(2) = \frac{1}{2}$ $f''(2) = -\frac{1}{4}$ $f'''(x) = \frac{1}{4}$

Alors
$$\ln(x) \underset{x\to 2}{=} \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1/4}{2!}(x-2)^2 + \frac{1/4}{6}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right)$$

e) on a $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ gratuit

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

on a
$$\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sin(x)} = \frac{\cancel{x}\left(1 + x^2/6 + o(x^3)\right)}{\cancel{x}\left(1 - x^2/6 + o(x^3)\right)} = \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}\right)$$

on calcule $\dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \dfrac{1}{1-u}$ avec $u = +\frac{x^2}{6} + o(x^3)$

On a $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$ $= 1 + u + u^2 + o(u^2)$

$= 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3) + o(x^2)$ car $u \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{6}$

$\dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$ d'où $\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\sin(x)} \underset{0}{=} \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

f) $x\,(\mathrm{ch}(x))^{\frac{1}{x^2}} \underset{0}{=} x\, e^{\frac{1}{x^2}\ln(\mathrm{ch}(x))}$

on a $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} 1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{u} = 1+u$ gratuit.

puis en posant $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ et $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

on a $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

avec $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$, $u^3 = \frac{x^6}{8} + o(x^6)$ et $o(u^3) = o(x^6)$

d'où

$\ln(\mathrm{ch}(x)) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) + o(x^5) + o(x^5)$

$\ln(\mathrm{ch}(x)) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$

ensuite

$\frac{1}{x^2}\ln(\mathrm{ch}(x)) \underset{0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^3)$

$(\mathrm{ch}(x))^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{=} e^{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^3)} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{12} + o(x^3)} = e^{\frac{1}{2}} e^{V}$

On pose $V = -\frac{x^2}{12} + o(x^3)$ et $e^V = 1 + V + o(V)$

on a $o(V) = o(x^2)$ alors $e^V \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$

d'où

$(\mathrm{ch}(x))^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{=} e^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)$ avec $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

puis

$x\,(\mathrm{ch}(x))^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{e}\, x - \sqrt{e}\,\frac{x^3}{12} + o(x^3)$ $DL_3(0)$

⚠ $e^V = 1 + V + \frac{V^2}{2} + o(V^2)$ avec $V = -\frac{x^2}{12} + o(x^3)$

$V^2 = \frac{x^4}{144} + o(x^4)$ et $o(V^2) = o(x^4)$

d'où $e^{-\frac{x^2}{12} + o(x^3)} = 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3) + o(x^3) + o(x^4)$

$e^{-\frac{x^2}{12} + o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3) \to x\,(\mathrm{ch}(x))^{\frac{1}{x^2}} = \sqrt{e}\left(x - \frac{x^3}{12} + o(x^4)\right)$

TD 16 - Exercice 4 : Étudier la limite en a des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\arctan x)^2} \text{ en } a = 0,$$

TD 16 - Exercice 5 : Déterminer les limites des suites suivantes :

$$v_n = \left(\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}\right)^n$$

TD 16 - Exercice 8 : Soit la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}^*$, par : $f(x) = \dfrac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$.

1. Écrire le développement limité à l'ordre 4 de $f(x)$ en 0. En déduire le prolongement par continuité de f en 0.
2. Montrer que f, ainsi prolongée, est dérivable en 0. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 et au voisinage de ce point.

TD xx - Exercice xx :