Exercice d'analyse

On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\qquad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t$

1. Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_0,\ I_1$ et I_2.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge.
3. (a) Rappeler un équivalent simple de $x \longmapsto \cos(x) - 1$ et $u \longmapsto \ln(1+u)$ au voisinage de 0.
   (b) Montrer que $\;n \ln\left(\cos\left(n^{-1/4}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}\sqrt{n}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(n^{-1/4}\right)\right)^n$.
   (c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(n^{-2/3}\right)\right)^n = 1$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \leqslant n^{-1/4}$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\cos\left(n^{-1/4}\right)\right)^n$
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n \geqslant \displaystyle\int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \geqslant n^{-2/3}\left(\cos\left(n^{-2/3}\right)\right)^n$
   (b) En déduire la nature de la série de terme général I_n.
6. (a) Montrer que pour tout réel t de $]-\pi, \pi[$: $\cos(t) + 1 = \dfrac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$
   (b) À l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos(t)} = 1$
   (c) Montrer que pour tout entier n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos(t)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)} dt$
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)} dt\right| \leqslant I_{n+1}$
   (e) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k I_k$ est convergente et déterminer sa somme.