# Chapitre 17 - Espaces Vectoriels de Dimension Finie

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Bases en dimension finie

### 1.1 Dimension finie

**Définition 1.1.** On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que $E$ est de dimension infinie.

Exemple :

* $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie car $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice finie à 2 vecteurs
tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$
(Card famille = 2)

* $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie car
$((1,0,0),(0,1,0),(0,2,0)(0,3,0),(0,4,0),(0,0,0),(0,0,1))$
est une famille génératrice à 7 vecteurs
(mais elle n'est pas libre)

* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ens des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
est de dimension infinie

* $\mathbb{R}[X]$ l'ens de tous les polynômes
est de dimension infinie

Preuve : Supposons que $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{R}[X]$. On note $q$ le plus grand des $n$ degrés $\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_n$
$q = \max(\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_n)$
alors $X^{q+1}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de $P_1, \dots, P_n$ ce qui contredit le fait que $(P_1, \dots, P_n)$ est génératrice

* $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension finie car $(1, X, X^2, X^3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$
* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ens des suites réelles est de dimension infinie.

## 1.2 Existence de bases en dimension finie

**Théorème 1.1** (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de $E$ peut être complétée en une base de $E$.*
*Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.*

**Corollaire 1.2.** *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ non nul de dimension finie admet une base.*

$E = \{\vec{0}\}$ l'espace nul

**Corollaire 1.3** (Théorème de la base extraite)**.** *De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel $E$, on peut extraire une base de $E$.*

Remarques :

On prend $E$ engendré $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ famille génératrice

$(x_1, x_2, \dots x_r)$ une famille libre.

On étudie $(x_1, x_2, \dots, x_r, g_1) \longrightarrow$ liée (pas libre)

$g_1 = \sum_{i=1}^{r} g_{1,i}\, x_i$

libre $(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1})$ $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ libre

et on recommence avec $g_2$

exemple : Dans $\mathbb{R}^4$, et on pose

$$G = \mathrm{Vect}\big(\cancel{(0,0,0,0)}, (1,-1,0,0), (1,0,0,1), \cancel{(2,-2,0,0)}, (2,0,-1,0), (0,2,-1,0)\big)$$

C'est un sev donc $G$ est un ev qui a une famille génératrice à 6 vecteurs donc $G$ est de dimension finie. Cherchons une base :

On pose $x_1 = (1,-1,0,0)$ $(x_1)$ est une famille libre car $x_1 \neq \vec{0}$

$x_2 = (1,0,0,1)$ $(x_1, x_2)$ est une famille libre (pas colinéaires)

$x_3 = (2,-2,0,0)$ est combinaison linéaire de $(x_1, x_2)$ $x_3 = 2x_1$

$x_4 = (2,0,-1,0)$. On étudie $(x_1, x_2, x_4)$ : on suppose que

$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_4 = \vec{0}$ avec $\alpha, \beta, \gamma$ réels

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

alors $(x_1, x_2, x_4)$ est libre

$x_5 = (0, 2, -1, 0)$ est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, x_4)$ : $x_5 = x_4 - 2x_1$

$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ sont combinaisons linéaires de $(x_1, x_2, x_4)$ donc $(x_1, x_2, x_4)$ est une famille génératrice de $G$

et $(x_1, x_2, x_4)$ est libre alors c'est une base de $G$

## 1.3 Cardinal des familles libres

**Lemme 1.4.** *Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille libre et la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ est liée, alors $x_{n+1}$ est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i.e. $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

*Démonstration.*

Il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0}$ car la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ est liée.

Si $\alpha_{n+1} = 0$, alors on a la relation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0}$. Comme la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre, on obtient $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \alpha_i = 0$. C'est une contradiction avec l'hypothèse que les scalaires $(\alpha_i)_{i=1,..,n+1}$ sont non tous nuls.

Donc, $\alpha_{n+1} \neq 0$, alors on peut écrire $x_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} x_i$. □

**Proposition 1.5.** *Si $E$ est un espace vectoriel admettant une famille génératrice à $n$ vecteurs avec $n$ entier non nul, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.*

**Corollaire 1.6.** *Dans un espace de dimension finie, toute famille libre a moins d'éléments qu'une famille génératrice.*

$B_1$ base de E et $B_2$ base de E avec E de dimension finie

$B_1$ est libre et $B_2$ est génératrice $|B_1| \leq |B_2|$

$B_1$ est génératrice de E et $B_2$ est libre $|B_2| \leq |B_1|$

$\Longrightarrow |B_1| = |B_2|$

### 1.4 Dimension

**Théorème 1.7.** *Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de $E$ ont le même nombre d'éléments $n \in \mathbb{N}^*$.*

**Définition 1.2.** Ce nombre $n$ s'appelle la dimension de $E$ sur $\mathbb{K}$ noté $n = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim E$.
Par convention, $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

**Exemple 1.1.** On a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n+1$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

* L'espace nul $\{\vec{0}\}$ est le seul espace de dimension nulle.
* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ car une base de $\mathbb{R}^2$ est $((1,0)(0,1))$
* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$
* $\dim \mathbb{C}^2$ ? $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}\}$

donc une base de $\mathbb{C}^2$ est $((1,0)(0,1))$
car tout couple s'écrit $(z_1, z_2) = z_1(1,0) + z_2(0,1)$
et cette écriture est unique.
donc $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ ← si les scalaires sont des nombres complexes

Mais $\mathbb{C}^2 = \{(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \mid (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4\}$
et $(z_1, z_2) = x_1(1,0) + y_1(i,0) + x_2(0,1) + y_2(0,i)$
et il y a unicité donc les 4 vecteurs forment une base
donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$ ← si les scalaires sont des réels

* $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ ens des polynômes de degré $\leq 2$
car une base est $(1, X, X^2)$

*

Exemple Donner la dimension de

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+2y-z = 0 \\ y+z-t=0 \end{array} \right\}$$

homogène = second membre nul

[ F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène donc F est un sev de $\mathbb{R}^4$

On résout : le système est échelonné il y a 2 pivots et 4 inconnues donc deux inconnues secondaires (paramètres) ← dim F

On paramètre les solutions $z=\alpha$ $y=\beta$

$$(x,y,z,t) \in F \iff \exists (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \\ t = \alpha+\beta \end{cases}$$

$$\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : (x,y,z,t) = \alpha(1,0,1,1)+\beta(-2,1,0,1)$$

alors $F = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,1),(-2,1,0,1)\big)$

Ces deux vecteurs sont une famille génératrice de F

et ils sont libres car : ils ne sont pas colinéaires

Méthode à connaître

$$\alpha(1,0,1,1)+\beta(-2,1,0,1) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=0$$

Donc les 2 vecteurs sont une base de F

$$\Longrightarrow \boxed{\dim_{\mathbb{R}} F = 2}$$

Exemple Donner la dimension de

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+2y-z = 0 \\ y+z-t=0 \end{array} \right\}$$

homogène = second membre nul

en fait, $F = \mathrm{Ker}\,\varphi$ avec $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+2y-z,\, y+z-t) \end{array}$

### 1.5 Familles en dimension finie

**Théorème 1.8.** *Si E est un espace vectoriel de dimension FINIE n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice de E.*

Si E est de dim finie, $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ n vecteurs avec $n = \dim E$.

$\mathcal{F}$ est une base $\underset{\text{déf}}{\iff}$ $\mathcal{F}$ est libre et $\mathcal{F}$ est génératrice $\underset{\text{Th 1.8}}{\iff}$ $\mathcal{F}$ est libre $\underset{\text{Th 1.6}}{\Updownarrow}$ $\mathcal{F}$ est génératrice

⚠ avec $|\mathcal{F}| = n$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, montrons que $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$ est une base de E

Ici E est de dimension 3 et la famille a 3 vecteurs

Montrons qu'elle est génératrice de E.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$. On cherche 3 scalaires $(u, v, w)$ tels que $P = u(X-1) + v(X^2+7X-2) + w(X^2+3)$

$aX^2 + bX + c = (v+w)X^2 + (u+7v)X + 3w - 2v - u$

$$\iff \begin{cases} v + w = a \\ u + 7v = b \\ -u - 2v + 3w = c \end{cases} \iff \begin{cases} u + 7v = b \\ v + w = a \\ -2w = c + b - 5a \end{cases}$$

le système est échelonné et il n'y a pas d'équation de compatibilité donc il a au moins une solution.

Alors tout vecteur P de $\mathbb{R}_2[X]$ est combinaison linéaire des 3 vecteurs $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$

donc la famille $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$

Comme elle a 3 vecteurs et $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, cette famille est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, montrons que $(X-1, X^2+7X-2, X^2+3)$ est une base de $E$

Montrons que la famille est libre.

On considère 3 scalaires $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$

$$u(X-1) + v(X^2+7X-2) + w(X^2+3) = 0$$

$$\Rightarrow (v+w)X^2 + (u+7v)X + 3w - u - 2v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v + w = 0 \\ u + 7v = 0 \\ -u - 2v + 3w = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_3 + L_2 \\ -5L_1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} u + 7v = 0 \\ v + w = 0 \\ -2w = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u = v = w = 0$ donc la famille est libre.

La famille est libre et a 3 vecteurs dans un espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3 donc c'est une base

# 2 Relations entre les dimensions

## 2.1 Rappel : Image d'une base par une application linéaire

départ

**Théorème 2.1.** *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de $E$.*

- *La famille $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.*
- *$u$ est surjective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est génératrice de $F$.*
- *$u$ est injective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est libre dans $F$.*
- *$u$ est bijective $\Longleftrightarrow$ $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une base de $F$.*

**Corollaire 2.2.** *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
*$u$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$ si et seulement si l'image d'une base de $E$ par $u$ est une base de $F$.*

## 2.2 Dimension et isomorphisme

**Proposition 2.3.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Un espace vectoriel $F$ est isomorphe à $E$ si et seulement si $F$ est de dimension finie et* $\dim F = \dim E$.

il existe une application linéaire bijective de $E$ dans $F$

**Corollaire 2.4.** *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

~~Remarque~~ Preuve : Si $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\varphi$ bijective et si $\dim E = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors soit $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de $E$.

Alors $(\varphi(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est une base de $F$ car $\varphi$ est un isomorphisme.

$F$ a une base qui a $n$ vecteurs alors $F$ est de dimension finie et $\dim F = n = \dim E$.

Exemple : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,/\, a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$. ($a, b, c$ fixés).

$u_{n+2} = \dfrac{-b u_{n+1} - c u_n}{a}$

Montrons que $\dim_{\mathbb{C}} E = 2$

Soit $\varphi : E \to \mathbb{C}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$

1. $\varphi$ est linéaire (à prouver proprement $\varphi(\alpha(u_n) + (v_n)) = \alpha\varphi(u_n) + \varphi(v_n)$)

2. une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ appartient au noyau de $\varphi$ $\Leftarrow$ $\varphi(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_0 = u_1 = 0$ alors par récurrence double montrons que $(u_n)$ est nulle. On suppose que $u_n = u_{n+1} = 0$ alors $a u_{n+2} = 0$ et $a \neq 0$ donc $u_{n+2} = 0$ et $u_{n+1} = 0$. La propriété est initialisée et héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 0$ donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$

3. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. On construit une suite $(u_n)$ par $u_0 = z_1$, $u_1 = z_2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{-b u_{n+1} - c u_n}{a}$

   On a trouvé une suite $(u_n) \in E$ et $\varphi(u_n) = (z_1, z_2)$ par construction

   Donc $(z_1, z_2)$ a un antécédent dans $E$ : $\varphi$ est surjective.

4. Alors $\varphi$ est isomorphisme de $E$ dans $\mathbb{C}^2$ : $\boxed{\dim_{\mathbb{C}} E = 2}$

( voir le chap 6 suites récurrentes linéaires )

### ~~2.3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels~~

## 2.3 Dimension des sous-espaces vectoriels

**Théorème 2.5.** *Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$, alors tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est de dimension finie et* $\dim F \leqslant \dim E$.
*De plus, $F$ est égal à $E$ si et seulement si* $\dim F = \dim E$.

Exemple dans $E = \mathbb{R}^3$ : $\dim E = 3$

les sev de $\mathbb{R}^3$ sont de dimension :

dimension 0 : un seul sev $\{\vec{0}_E\}$

dimension 1 : une droite : $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$

dimension 2 : un plan $\mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ avec $\vec{v}$ et $\vec{w}$ libres

dimension 3 : un seul sev $\mathbb{R}^3$

Idem dans un espace de dimension $n$ : si $\dim E = n$

dimension 0 : $\{\vec{0}_E\}$

1 : les droites vectorielles

⋮

$n-1$ les hyperplans : sev de dimension $n-1$

$n$ un seul sev : $E$

Exemple : Déterminer la dimension de

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \int_0^2 P = 0 \right\}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ avec $P = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \underbrace{\delta}_{= -2\alpha - \frac{4}{3}\beta - \gamma}$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels

$P \in H \iff \boxed{\int_0^2 P = 0} \iff \int_0^2 (\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta)\,dt = 0$ eq de H.

$\iff \boxed{4\alpha + \frac{8}{3}\beta + 2\gamma + \boxed{2}\delta = 0}$ equation de H

$\iff \delta = -2\alpha - \frac{4}{3}\beta - \gamma$

$\iff \boxed{P = \alpha(X^3 - 2) + \beta(X^2 - 4/3) + \gamma(X - 1)}$

Donc $H = \text{Vect}\left((X^3 - 2), (X^2 - 4/3), (X - 1)\right)$

ces 3 polynômes sont une famille génératrice de H

Les 3 polynômes sont de degré echelonnés (tous différents)

alors ils forment une famille libre

donc $(X^3 - 2, X^2 - 4/3, X - 1)$ est une base de H

et $\underline{\dim H = 3}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4

donc H est un hyperplan.

## 2.5 Dimension de sous-espaces vectoriels supplémentaires

**Théorème 2.6.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ E = F + G \end{cases}$$

$E = F \oplus G$

**Théorème 2.7.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.*

*Si $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base de $F$ et $(g_{p+1}, \dots, g_n)$ est une base de $G$, alors*

$$E = F \oplus G \iff (f_1, f_2, \dots, f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n) \text{ est une base de } E.$$

*On dit que cette base est adaptée à la décomposition en sous-espaces supplémentaires.*

**Théorème 2.8.**

*Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.*

Rappel

$E = F \oplus G \overset{\text{déf}}{\iff} \begin{cases} E = F + G & \text{(la décomposition existe)} \\ F \cap G = \{\vec{0}\} & \text{(la décomposition est unique)} \end{cases}$

Exemple : $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^2 P = 0 \right\}$

et $F = \mathrm{Vect}(X - 7)$ Mq $F \oplus H = E$

$E$ est un ev de dimension finie et $\dim E = 3$

$F$ est un sev de $E$ et $\dim F = 1$

On étudie $H$ : soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$P \in H \iff \int_0^2 P(t)\,dt = 0 \iff \frac{8}{3}a + 2b + 2c = 0$

$\iff \exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a = -\frac{3}{4}\beta - \frac{3}{4}\gamma \\ b = \beta \\ c = \gamma \end{cases}$

$\iff \exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2,\ P = \beta\left(-\frac{3}{4}X^2 + X\right) + \gamma\left(-\frac{3}{4}X^2 + 1\right)$

D'où $H = \mathrm{Vect}\left((-3X^2 + 4X), (-3X^2 + 4)\right)$ et les 2 polynômes ne sont pas colinéaires donc $\dim H = 2$

On a $\dim F + \dim H = 1 + 2 = 3 = \dim E$

Soit $P \in F \cap H$ alors $P = u(X - 7)$ avec $u \in \mathbb{R}$

et $\int_0^2 P(t)\,dt = 0 \Rightarrow u \int_0^2 (t - 7)\,dt = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow P = 0$

donc $F \cap H = \{\vec{0}\}$ et $\dim F + \dim H = \dim E$ alors $\boxed{E = F \oplus H}$

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $F$ d'équation $2x+3y-z=0$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ sont supplémentaires.

$G$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ par définition de dimension 1 car $(1,1,1) \neq \vec{0}$

On résout l'équation de $F$ : $(x,y,z) \in F \Leftrightarrow z = 2x+3y$

$\Leftrightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ce qui prouve que $F = \mathrm{Vect}((1,0,2),(0,1,3))$

Les deux vecteurs sont échelonnés donc ils sont libres donc ils sont une base de $F$ et $\dim F = 2$

Alors $\underline{\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3}$

Soit $\vec{u} \in F \cap G$ avec $\vec{u} = (x,y,z)$ alors $2x+3y-z=0$ et $(x,y,z) = \alpha(1,1,1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a donc $2\alpha+3\alpha-\alpha=0$ soit $\alpha = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$. Et, réciproquement $\vec{0} \in F \cap G$

Alors $\underline{F \cap G = \{\vec{0}\}}$ ← ensemble. $F \cap G = \{\vec{0}\}$ $\Leftrightarrow F \cap G \subset \{\vec{0}\}$ et $\{\vec{0}\} \subset F \cap G$

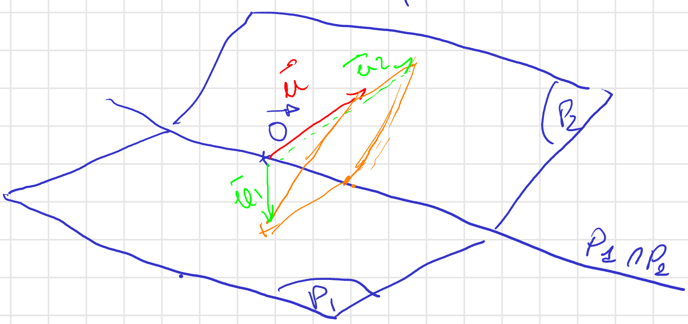
Par théorème, $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^3}$

Remarque : on a évité d'avoir à montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$

## 2.6 Dimension d'une somme

**Proposition 2.9** (Formule de Grassmann).
*Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie.*
*Alors* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Exemple : Soit $P_1$ et $P_2$ deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ non confondus.

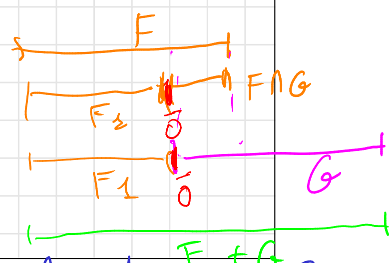



on a $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$ et $\dim(P_1+P_2) = 3 = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 \cap P_2)$

Th de Batiste $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$
$\iff$ F et G sont en somme directe $\iff F \cap G = \{\vec{0}\}$

Preuve : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Soit $F_1$ un supplémentaire de $F \cap G$ dans $F$ car $F \cap G$ est un sev de $F$ et $F$ est de dimension finie
$F = F_1 \oplus (F \cap G)$
alors $\dim(F) = \dim(F_1) + \dim(F \cap G)$




Montrons que $F + G = F_1 \oplus G$ ① $F_1$ et $G$ sont inclus dans $F+G$

② $F_1 \cap G = \{\vec{0}\}$ car $F_1 \cap (F \cap G) = \{\vec{0}\}$

③ Soit $x \in F+G$ avec $x = y + z$, $y \in F$ et $z \in G$. Mais $y \in F = F_1 \oplus F \cap G$
alors $y$ s'écrit $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F_1$ et $y_2 \in F \cap G \subset G$

d'où $x = y_1 + y_2 + z$ avec $y_1 \in F_1$ et $y_2 + z \in G$

donc $x \in F_1 + G$ On a montré $F + G = F_1 + G$

donc $F + G = F_1 \oplus G \implies \dim(F+G) = \dim(F_1) + \dim G$

$\implies \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^4$, $F = \text{Vect}\big((1,1,0,0)\,(1,0,-1,0)\big)$

$G = \text{Vect}\big((1,1,0,1),\,(2,1,-1,-1)\big)$

on veut appliquer la formule de Grassmann.

F et G sont des plans car ils sont engendrés par deux vecteurs non colinéaires : $\dim F = \dim G = 2$

Cherchons des équations de F : Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

$$(x,y,z,t) \in F \iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = -\beta \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \alpha = y \\ -\beta = z \\ \boxed{\begin{aligned} 0 &= t \\ 0 &= x - y + z \end{aligned}} \end{cases}$$

ce système est échelonné et il a une solution si et seulement si les éq de compatibilité sont vérifiées

$$\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$ sont des équations de F

De même pour G   $G = \text{Vect}\big((1,1,0,1),(2,1,-1,-1)\big)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ \alpha + \beta = y \\ -\beta = z \\ \alpha - \beta = t \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - \beta = t \\ -\beta = z \\ \boxed{\begin{aligned} 0 &= x - t + 3z \\ 0 &= y - t + 2z \end{aligned}} \end{cases}$$ équations de G

On résout $F \cap G$ :

$$\begin{cases} t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3z - t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 - L_3 + L_4} \begin{cases} x + 3z - t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le système a une inconnue secondaire ($z$ par exemple) alors on a un paramètre : $\dim(F \cap G) = 1$

et $F \cap G = \text{Vect}\big((-3,-2,1,0)\big)$

Par la formule de Grassmann : $\dim(F+G) = 2 + 2 - 1 = 3$

Mais $F + G = \text{Vect}\big((1,1,0,0)\,(1,0,-1,0)\,(1,1,0,1)\,(2,1,-1,-1)\big)$

cette famille génératrice de $F+G$ a 4 vecteurs : l'un est combinaison des autres $e_4 = 2e_1 + e_2 - e_3$

donc $\big((1,1,0,0),(1,0,-1,0),(1,1,0,1)\big)$ est une base de $F+G$

# 3 Rang

## 3.1 Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 3.1.** On appelle rang d'une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un espace vectoriel $E$, la dimension du sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs et on le note $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ :

$$\boxed{\mathrm{rg}}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \boxed{\dim(\mathrm{Vect}(}x_1, x_2, \ldots, x_p)) .$$

**Lemme 3.1.** *Pour une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n = \dim E$, on a*

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant n$$

**Théorème 3.2.** *Une famille est libre si et seulement si elle de rang maximal, c'est à dire si son rang est égal à son nombre de vecteurs.*

**Lemme 3.3.** *Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel $E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour tous indices $i, j$ :*

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = rg(x_1, x_2, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_p)$$

Exemple $rg((1,1,0,1),(1,-1,1,0),(1,1,1,0))$ ?

Ce sont 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ : $(e_1, e_2, e_3)$

$\dim(\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3))$ ? On veut le nombre de vecteurs dans une base de $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$.

Donc, on extrait une base de la famille génératrice $(e_1,e_2,e_3)$

Vérifions que $(e_1,e_2,e_3)$ est libre :

On suppose que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \quad + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

donc $(e_1,e_2,e_3)$ est libre

et $(e_1,e_2,e_3)$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ alors c'est une base et $\dim \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3) = 3$

$\Rightarrow rg(e_1,e_2,e_3) = 3$

Exemple : Calculons le rang de la famille

$$\left(\underbrace{X^2-7X+1}_{P_1},\ \underbrace{5X+2}_{P_2},\ \underbrace{X^3-1}_{P_3},\ \underbrace{X^2-2X+3}_{P_4}\right) \text{ dans } \mathbb{R}_3[X]$$

on va utiliser le théorème :

$$rg(P_1, P_2, P_3, P_4) = rg(\text{matrice des 4 polynômes})$$

ici

le rang est

$$rg \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ \end{array}$$

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} X^3 \\ X^2 \\ X \\ 1 \end{array}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

alors $\dim(\text{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)) = 3$

## 3.2 Rang d'une application linéaire

u est une application linéaire

**Définition 3.2.** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de l'application linéaire $u$, la dimension de l'image de $u$ dans $F$.
On note $\boxed{\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im} u)}$ lorsque cette dimension est finie et on dit que $u$ est de rang fini.

*Remarque* 3.1. Si $(e_i)_{i=1,..,n}$ est une base d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$.
Il s'ensuit que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$.

Exemple $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y, z) \longmapsto (x + 2y - z, x + y - z)$

$\operatorname{rg}(f)$ ?

f est linéaire car les coordonnées de l'image $f(x, y, z)$ sont des combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent $(x, y, z)$ alors f est linéaire

On a $f(x, y, z) = x(1, 1) + y(2, 1) + z(-1, -1)$
alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,1), (2,1), (-1,-1))$
$= \operatorname{Vect}((1,1), (2,1))$
les deux vecteurs ne sont pas colinéaires alors ils forment une base de $\operatorname{Im} f$ et $\boxed{\operatorname{rg}(f) = 2} = \dim(\operatorname{Im} f)$

**Lemme 3.4.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie $n = \dim E$ et $p = \dim F$, et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $\mathrm{rg}(u) \leqslant n$ et $\mathrm{rg}(u) \leqslant p$.*

$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$

**Théorème 3.5.** *Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ sont deux applications linéaires de rang fini,* $v \circ u$ *alors $v \circ u$ est de rang fini et* $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

*Démonstration.* On a toujours $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ : pour toute image $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(u(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}\, v$ ce qui prouve l'inclusion.

On en déduit $\dim(\mathrm{Im}(v \circ u)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, v)$ soit $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.

Par ailleurs, soit $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de $\mathrm{Im}\, u$ avec $p = \mathrm{rg}(u)$. Soit $z \in \mathrm{Im}(v \circ u)$ alors il existe $x \in E$ tel que $z = v(u(x))$. On a $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$ donc $u(x)$ s'écrit $u(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k$ avec $(\lambda_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ des scalaires. On peut donc écrire $z = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v(f_k)$.

On en déduit que $(v(f_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(v \circ u)$. Il s'ensuit que $\dim(\mathrm{Im}(v \circ u)) \leqslant p$ ce qui donne $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$. □

## 3.3 Théorème du rang

**Proposition 3.6.** *Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de $E$ dans $F$.*

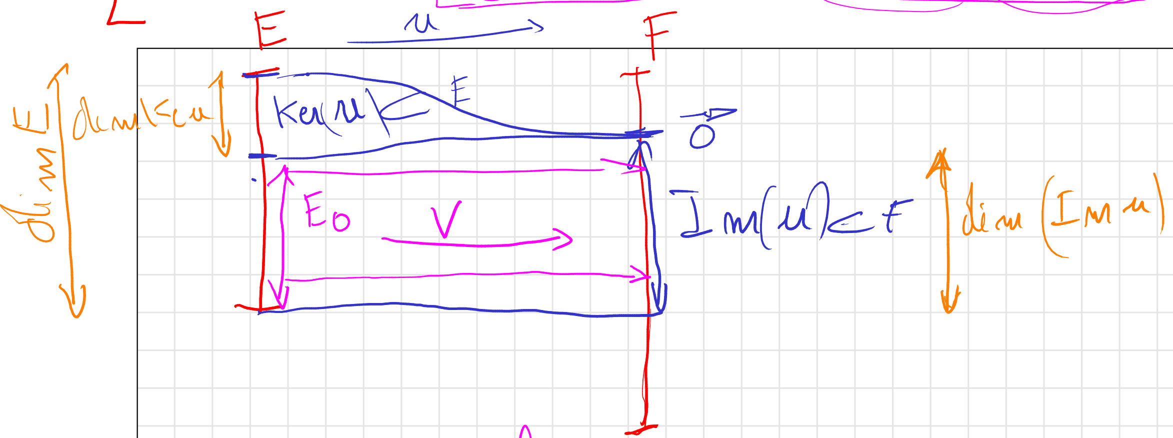
*Si $E_0$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans $E$, alors l'application $u$ induit un isomorphisme de $E_0$ sur $\operatorname{Im} u$.*

$$v : \begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \text{ est un isomorphisme.}$$

espace de départ $\quad E \xrightarrow{u} F$

**Théorème 3.7** (Théorème du rang). *Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie et $u$ une application linéaire de $E$ dans un espace vectoriel $F$, alors $u$ est de rang fini et*

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u)$$




$E_0$ est un supplémentaire de Ker $u$ dans $E$ : $E = \operatorname{Ker}(u) + E_0$

Exemple : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y,\ 2y-z,\ x-y+z,\ 2x+z) \end{array}$

Déterminer $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} g$, $\operatorname{rg}(g)$.

$g$ est linéaire car les coordonnées .....

on détermine Ker $g$ :

$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} g \iff g(x,y,z) = \vec{0} \iff \begin{cases} x+y = 0 \\ 2y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x+y = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ on paramètre avec $y$

$\iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = \alpha(-1,1,2)$

alors $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}((-1,1,2))$ donc $\dim(\operatorname{Ker} g) = 1$

L'espace de départ est de dimension 3 alors d'après le théorème du rang $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Im} g)$

donc $\operatorname{rg}(g) = \dim(\operatorname{Im}(g)) = 2$

On sait que $\mathrm{Im}(g)$ est un plan de $\mathbb{R}^4$

alors $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}($ 2 vecteurs images non colinéaires$)$

$\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}((2,1,1,3),(0,-1,1,1))$

car $g(1,1,1)=(2,1,1,3)$ $g(0,0,1)=(0,-1,1,1)$

### 3.4 Caractérisation des isomorphismes

**Théorème 3.8.** *Si $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie $n = \dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors*

$$u \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\} \iff u \text{ est surjective} \iff \dim \operatorname{Ker} u = 0 \iff u \text{ est bijective} \iff \operatorname{rg}(u) = n. \Rightarrow \operatorname{Im}(u) = F$$

**Corollaire 3.9.** *Si $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $E$ de dimension finie, alors*

$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective.}$$

endomorphismes

Démonstration

$u$ injective $\iff \operatorname{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\} \iff \dim(\operatorname{Ker} u) = 0$

$\iff \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim E - 0 = \dim(F)$

$\iff \operatorname{Im}(u) = F \iff u$ est surjective.

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \longmapsto (x+y-z,\ 2x-y+z,\ x-2y+2z)$

Etudier $f$ :

$f$ est linéaire car .... donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

Cherchons $\operatorname{Im} f$ : Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ $\vec{v} = (a,b,c)$

$\vec{v} \in \operatorname{Im} f \iff \exists \vec{u} = (x,y,z) : f(\vec{u}) = \vec{v}$.

$\iff \exists (x,y,z) : \begin{cases} x+y-z = a \\ 2x-y+z = b \\ x-2y+2z = c \end{cases}$ expr analytique de $f$

$\iff \exists (x,y,z) : \begin{cases} x+y-z = a \\ -3y+3z = b-2a \\ -3y+3z = c-a \end{cases}$

$\iff 0 = b-2a-c+a$ ← cq de $\operatorname{Im} f$

$\iff -a+b-c = 0$

$\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ce qui prouve que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,1,0),(-1,0,1))$

ces deux vecteurs sont libres car ils sont échelonnés

$\Rightarrow \boxed{\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2}$

$2a+b-c+7d-3e = 0$

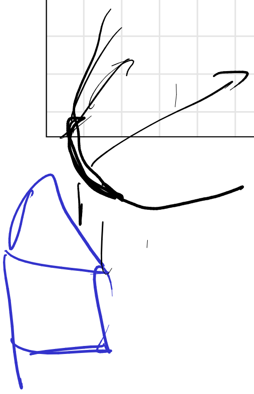
$\iff \exists (\lambda,\mu,\nu,\chi) \in \mathbb{R}^4$ $(a,b,c,d,e) = \lambda \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -7/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \chi \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

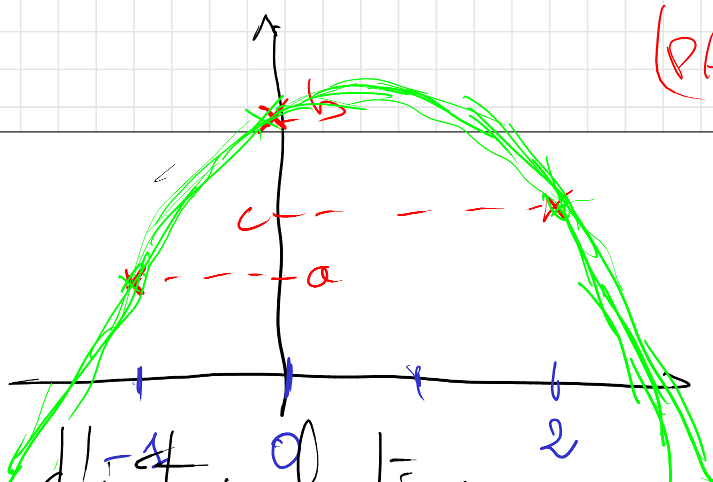
D'après le théorème du rang,
$\dim(\ker f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Im} f) = 1$
et on a (symétrie) $f(0,42,42) = (0,0,0)$
donc $(0,42,42) \in \ker f$ et $(0,42,42)$ n'est pas nul donc c'est une famille libre à 1 vecteur dans $\ker f$ de dimension 1 donc c'est une base de $\ker f$ donc $\boxed{\ker f = \operatorname{Vect}((0,42,42))}$

Exemple $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
$P \longmapsto (P(-1), P(0), P(2))$

① $\varphi$ est définie
② $\varphi$ est linéaire car ... (à faire)
③ Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $\varphi(P) = 0 \iff (P(-1), P(0), P(2)) = (0,0,0)$
$\iff -1, 0, 2$ sont racines de $P$
mais $P$ est de degré au plus 2 donc
$\iff P = 0$. On a montré $\boxed{\ker(\varphi) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}_2[X]}\}}$
④ On a $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
alors $\varphi$ est un isomorphisme d'après Th 3.8

$(P(-1), P(0), P(2)) = (a, b, c)$






il existe une seule parabole verticale qui passe par les 3 points

polynôme d'interpolation

**Lemme 3.10.** *Soit $f$ une application d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$. Si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$, alors $f$ est injective.*

*Démonstration.* Soit $g$ telle que $g \circ f = id_E$. Soit $a, b \in E$. Si $f(a) = f(b)$ alors $g(f(a)) = g(f(b))$ donc $id(a) = id(b)$ soit $a = b$. Deux éléments de l'ensemble de départ ne peuvent avoir la même image donc $f$ est injective. □

**Lemme 3.11.** *Soit $f$ une application d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$. Si il existe $h : F \to E$ telle que $f \circ h = id_F$, alors $f$ est surjective.*

*Démonstration.* Soit $h$ telle que $f \circ h = id_F$. Soit $a \in F$. On a $f(h(a)) = a$ donc $a$ a un antécédent. Tout élément de $F$ a un antécédent donc $f$ est surjective. □

Th $f : E \to F$ est bijective $\Leftrightarrow$ il existe $g, h : F \to E$ telles que $g \circ f = id_E$ et $f \circ h = id_F$ cas général

**Théorème 3.12.** *Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*
*Si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = id_E$ alors $f$ est bijective et $f \circ g = id_F$.*
*Si il existe $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = id_F$ alors $f$ est bijective et $h \circ f = id_E$.*

**Théorème 3.13.** *Si $u$ est une application linéaire de rang fini et si $\varphi$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors, dans les cas où cela a un sens,*

$$\mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}\, u \text{ ou } \mathrm{rg}(\varphi \circ u) = \mathrm{rg}(u).$$

*On ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant par un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soit $E, F, G$ trois espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

— Soit $\varphi$ un isomorphisme de $F$ dans $G$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ de rang fini.
Soit $B$ une base de $\mathrm{Im}\, u$ (qui est de dimension finie). Alors $\varphi(B)$ est une base de $\varphi(\mathrm{Im}\, u)$ car $\varphi$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, u$ dans $\varphi(\mathrm{Im}(u))$. De plus, on a l'égalité triviale : $\varphi(\mathrm{Im}\, u) = \mathrm{Im}(\varphi \circ u)$. Alors, $\dim(\mathrm{Im}(\varphi \circ u)) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ soit $\boxed{\mathrm{rg}(\varphi \circ u) = \mathrm{rg}(u)}$.

— Soit $\varphi$ un isomorphisme de $E$ dans $F$ et $u \in \mathscr{L}(F, G)$ de rang fini.
On a toujours $\mathrm{Im}(u \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}\, u$ car toute image par $u \circ \varphi$ est une image par $u$.
Réciproquement, soit $z \in \mathrm{Im}\, u$, alors il existe $y \in F$ tel que $z = u(y)$. Comme $\varphi$ est une bijection de $E$ dans $F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Alors, $z = u \circ \varphi(x)$ et $z \in \mathrm{Im}(u \circ \varphi)$ ce qui prouve $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}(u \circ \varphi)$.
On a montré $\mathrm{Im}(u \circ \varphi) = \mathrm{Im}(u)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(u \circ \varphi)) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$ soit $\boxed{\mathrm{rg}(u \circ \varphi) = \mathrm{rg}(u)}$. □

Exemple : $\varphi_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$
$P \longmapsto XP$
$\varphi$ est linéaire, $\varphi$ est injective car $XP_1 = XP_2 \Rightarrow P_1 = P_2$
et $\varphi$ n'est pas bijective car 1 n'a pas d'antécédent
Remarque : $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie

## 3.5 Équations linéaires

**Définition 3.3.** Une équation linéaire est une équation du type $u(x) = b$ où avec 2nd membre

- $u$ est une application linéaire d'un espace vectoriel $E$ dans un espace vectoriel $F$,
- $x$ est un vecteur inconnu dans $E$,
- $b$ est un vecteur de $F$ appelé second membre de l'équation.

**Théorème 3.14** (Structure de l'ensemble des solutions).
*Soit $u : E \longmapsto F$ une application linéaire d'un espace vectoriel $E$ dans un espace vectoriel $F$, soit $b \in F$. On note $S_0$ l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = \overrightarrow{0_F}$ et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$.*

- *$S_0$ est un sous-espace vectoriel de $E$. En particulier, il est donc non vide : il contient $\overrightarrow{0_E}$.* $S_0 = \operatorname{Ker}(u)$
- *Soit $\mathscr{S}$ est vide, soit $\mathscr{S} = x_0 + S_0 = \{x_0 + h | h \in S_0\}$ où $x_0$ est une solution de l'équation avec second membre.*

*Remarque* 3.2. Si $E$ est de dimension finie $n$ ($n$ inconnues) et si $u$ est de rang fini $r$ ($r$ pivots), alors l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_0$ est de dimension $n - r$ = nombre d'inconnues - nombre de pivots.

* $y'' - 2y' + 3y = 0$ est une équation linéaire avec $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

avec $u : \begin{array}{l} C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ y \longmapsto y'' - 2y' + 3y \end{array}$

* $\begin{cases} 2x + y + z = 0 & b_1 \\ x - y + 2z = 0 & b_2 \end{cases}$ est une équation linéaire avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{b} = (b_1, b_2)$

$u : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x + y + z, x - y + 2z) \end{array}$

Idée de preuve

$u(x) = 0 \iff x \in \operatorname{Ker} u$ donc $S_0 = \operatorname{Ker}(u)$

$b$ fixé

$u(x) = b \iff$ * 1er cas $b \notin \operatorname{Im} u \Rightarrow S = \emptyset$

* 2nd cas $b \in \operatorname{Im} u$ : soit $x_p$ un antécédent (particulier) de $b$

alors
$$\begin{array}{l} u(x_p) = b \\ u(x) = b \\ \hline u(x_p) - u(x) = 0 \iff u(x_p - x) = 0 \iff x_p - x \in \operatorname{Ker} u \end{array}$$
on soustrait :

$\iff x \in x_p + \operatorname{Ker}(u)$

sous-espace affine (HP) sev

$$\boxed{S = x_p + \underbrace{\operatorname{Ker}(u)}_{S_0}}$$