TD 16 - Analyse asymptotique

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ des fonctions suivantes :

a) $\ln(1+x)+\sin x$ b) $\frac{1}{1-x}-(1+x)$ c) $\cos x+\sin x$ d) $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Exercice 2 : Écrire les développements limités des fonctions f suivantes à l'ordre et au point indiqué :

a) $\mathrm{DL}_3(2)$ de $f(x)=\ln x$, b) $\mathrm{DL}_1(3)$ de $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+2}$ c) $\mathrm{DL}_2(2)$ de $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

d) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x)=\dfrac{\sin x}{4-x^2}$ e) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x)=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x}$ f) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x)=x(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x^2}}$

g) $\mathrm{DL}_3(\frac{\pi}{4})$ de $f(x)=\sqrt{\tan x}$ h) $\mathrm{DL}_2(+\infty)$ de $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$

Exercice 3 : Calculer les développements limités suivants :

$\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x)=\exp(\sin(x))$, $\mathrm{DL}_6(0)$ de $g(x)=\ln(\cos(x))$, $\mathrm{DL}_3(1)$ de $h(x)=e^{\sqrt{x}}$.

Exercice 4 : Étudier la limite en a des fonctions suivantes :

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(\arctan x)^2}$ en $a=0$, $g(x)=(2^x+3^x-12)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$ en $a=2$, $h(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ en $a=+\infty$.

Exercice 5 : Déterminer les limites des suites suivantes :

$u_n=\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$ avec a réel. $v_n=\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n+3}}\right)^n$ $w_n=\left(\cos\dfrac{\pi}{6n+1}+\sin\dfrac{\pi}{3n+2}\right)^n$

Exercice 6 : Étudier la continuité, la dérivabilité et la position de la courbe représentative par rapport à une éventuelle tangente au point d'abscisse 0 pour les fonctions g et h suivantes :

Pour $x\neq 0$, $g(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$, $h(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x}$ avec $g(0)=1$ et $h(0)=0$.

Exercice 7 : Étudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes :

$f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$ $g(x)=\frac{1}{x}(2x^2-1)e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 8 : Soit la fonction f définie, pour $x\in\mathbb{R}^*$, par : $f(x)=\dfrac{x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x-1}$.

1. Écrire le développement limité à l'ordre 4 de $f(x)$ en 0. En déduire le prolongement par continuité de f en 0.
2. Montrer que f, ainsi prolongée, est dérivable en 0. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 et au voisinage de ce point.

Exercice 9 : Déterminer un équivalent simple pour les suites suivantes :

a) $u_n=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ b) $v_n=\sqrt{2n^2+n}-n$ c) $w_n=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}$ d) $x_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$

Exercice 10 : On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1>0$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}e^{-u_n}$.

1. À l'aide d'un encadrement, montrer que (u_n) converge vers 0.
2. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire un développement de la forme : $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
3. Déterminer a,b réels tels que $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
4. Déterminer a,b,c réels tels que $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n^2}+\dfrac{c}{n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 11 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\ln(x)+x$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit x_n comme l'unique soluion de l'équation $\ln(x)+x=n$.

1. Montrer que (x_n) existe et tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(x_n)\leqslant x_n$.

3. Montrer que $x_n \sim n$.
4. On pose $y_n = x_n - n$ pour tout entier naturel n non nul. Montrer que $y_n \sim -\ln(n)$.
5. On pose $z_n = x_n - n + \ln(n)$. Montrer que $z_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 12 : Prouver que la suite définie par $u_1 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$ est convergente.

Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec a, b réels à déterminer.

Exercice 13 : On définit (E_n) : $\quad x^n + 9x^2 - 4 = 0$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation (E_n) possède une unique solution dans $]0,1[$ que l'on note u_n.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). En déduire que u converge vers un réel ℓ.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$. En déduire la valeur de ℓ. Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 14 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \tan x$$

On note (E_n) l'équation $f(x) = 1$ avec $x \in I_n =]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$ pour tout n entier naturel.

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution dans I_n que l'on notera x_n. En déduire que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.
2. On note $v_n = x_n - n\pi$. Montrer que l'on a $v_n = \arctan(e^{-x_n})$. En déduire que $v_n \underset{+\infty}{\sim} e^{-n\pi}$.
3. En déduire que $\qquad x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + e^{-n\pi} - e^{-2n\pi} + \dfrac{7}{6}e^{-3n\pi} + o\left(e^{-3n\pi}\right)$.

Exercice 15 : On définit pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.

Exercice 16 : On considère, pour tout entier naturel n, l'intéqrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{4-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha + \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où α, β sont des réels à déterminer.
3. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha + \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{\gamma}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où γ est un réel à déterminer.

Exercice 17 : On pose $G(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 de G en 0.
2. En déduire que G est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ puis que la fonction prolongée est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.