

Mathématique - Corrigé Devoir Maison n°15

Exercice 1

1. (a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $] -1, +\infty[$, \sin est définie sur \mathbb{R} et la fonction $x \mapsto x^2$ est définie sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0.

Alors, f est définie sur $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions, définies sur ce domaine, dont le dénominateur ne s'annule pas.

- (b) On calcule un développement limité d'ordre au moins 4 pour f . On a, d'après le cours,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Alors, par opérations sur les DL,
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2 \varepsilon(x)$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$. Comme f n'est pas définie en 0, on peut la prolonger en posant $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$ et $\hat{f}(x) = f(x)$ pour $x \in] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$.

La fonction prolongée a un DL à l'ordre 1 en 0 : $\hat{f}(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + x \varepsilon(x)$. Par propriété, \hat{f} est dérivable en 0 et $(\hat{f})'(0) = -\frac{1}{2}$ qui est le coefficient de x dans le $DL_1(0)$ (on a le taux d'accroissement $\frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2} + \varepsilon(x)$)

Alors, la droite $y = \frac{1}{2}(1-x)$ est tangente à la courbe de f en 0 et comme $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$, avec $\frac{x^2}{4} \geq 0$ au voisinage de 0, la courbe de f est au dessus de la tangente en 0.

2. (a) On a, d'après la formule de Taylor en 0 :

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

On a $f(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ soit
$$f(x) = -1 + \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^4}{24} + o(x^4)$$

- (b) On pose $h = \frac{1}{x}$, alors, pour $x \neq 0$, on a $h \neq 0$ et

$$g(x) = g\left(\frac{1}{h}\right) = h \operatorname{ch}(h) - \frac{1}{h} \cos(h) = \frac{1}{h} (h^2 \operatorname{ch}(h) - \cos(h)) \text{ soit } \forall x \neq 0, \quad g(x) = \frac{f(h)}{h}.$$

On a $x \rightarrow +\infty \iff h \rightarrow 0^+$, alors $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{h} \left(-1 + \frac{3}{2}h^2 + \frac{11}{24}h^4 + o(h^4) \right)$

On revient à x ce qui donne : $g(x) \underset{+\infty}{=} -x + \frac{3}{2x} + \frac{11}{24x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (-x) = 0$ donc

la droite $y = -x$ est asymptote au graphe de g au voisinage de $+\infty$.

De plus, $g(x) + x \underset{+\infty}{=} \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\frac{3}{2x} \geq 0$ au voisinage de $+\infty$, alors

le graphe de g est au-dessus de l'asymptote $y = -x$.

3. Par développements limités :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{n^3} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{n^3} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{n^3} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right). \quad \text{Donc } n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On passe ensuite à : $\left(n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln(n \operatorname{sh}(\frac{1}{n}))} = e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(\frac{1}{n}))}$

En utilisant $\ln(1+u) = u + u\varepsilon(u)$ avec $u = \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(\frac{1}{n}) \mapsto 0$, on trouve que :

$$\left(n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = e^{\frac{1}{6} + \varepsilon(\frac{1}{n})}, \text{ et on peut conclure que } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = e^{\frac{1}{6}}}$$

4. On recherche la décomposition en éléments simples de la fraction :

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{a}{3n+1} + \frac{b}{3n+4} = \frac{a(3n+4) + b(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n(3a+3b) + 4a+b}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 4a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ce qui fait } \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3(n+1)+1} \right).$$

La somme partielle de la série à étudier est une somme télescopique qui se simplifie :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3(k+1)+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3(n+1)+1} \right)$$

$$\boxed{\text{La série } \left(\sum \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \right) \text{ converge et sa somme vaut } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{1}{3}}$$

Exercice 2

1. (a) On effectue une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{l} \text{les fonctions } u \text{ et } v \text{ sont } \begin{cases} u'(t) = \cos(\lambda t) & v(t) = f(t) \\ u(t) = \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} & v'(t) = f'(t) \end{cases} \\ \text{de classe } C^1 \text{ sur } [a, b] \end{array}$$

$$\text{et on obtient : } \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \left[\frac{f(t) \sin(\lambda t)}{\lambda} \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt$$

$$\text{Ce qui fait bien : } \boxed{\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \frac{f(b) \sin(\lambda b)}{\lambda} - \frac{f(a) \sin(\lambda a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt}$$

$$(b) \text{ On sait que pour tout réel } \lambda > 0 \text{ on a : } 0 \leq \left| \frac{f(b) \sin(\lambda b)}{\lambda} \right| \leq \frac{|f(b)|}{\lambda} \text{ et } 0 \leq \left| \frac{f(a) \sin(\lambda a)}{\lambda} \right| \leq \frac{|f(a)|}{\lambda}$$

$$\text{Or, } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{|f(a)|}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{|f(b)|}{\lambda} = 0$$

$$\text{Donc, par encadrement, } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(b) \sin(\lambda b)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(a) \sin(\lambda a)}{\lambda} = 0.$$

Par ailleurs, f est de classe C^1 c'est à dire dérivable à dérivée continue. La dérivée f' est continue, et, par théorème, elle est bornée sur le segment $[a, b]$. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq M$.

Avec les bornes de l'intégrale dans le bon sens on trouve :

$$\left| \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \int_a^b |f'(t) \sin(\lambda t)| dt \leq \int_a^b M dt \leq M(b-a).$$

$$\text{Donc } 0 \leq \left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{M(b-a)}{\lambda}$$

$$\text{Or } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{M(b-a)}{\lambda} = 0, \text{ donc par encadrement } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

$$\boxed{\text{On obtient donc finalement } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0}$$

2. On a : $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{t}{2} + kt\right) + \cos\left(\frac{t}{2} - kt\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{1-2k}{2}t\right)\right)$

Donc $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right)$

3. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

• *initialisation* :

pour $n = 1$, l'égalité se résume à $-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) = \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{3}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

ce qui est vérifié d'après la question précédente.

• *hérédité* :

En supposant la proposition vérifiée au rang n , on a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) + (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos((n+1)t) \\ &= \frac{1}{2}\left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) + (-1)^{n+1} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2n+3}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((-1)^{n+1} \cos\left(\frac{2n+3}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

On a bien prouvé par récurrence que $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

Autre solution : faire apparaître une somme télescopique.

4. $\forall t \in [0, 1]$, $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$. On a donc $\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$

En intégrant $\sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^1 \cos(kt) dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \int_0^1 \frac{1}{2} dt$

Ce qui donne : $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sin(k)}{k} = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}$

5. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ est de classe C^1 sur $[a, b] = [0, 1]$. En appliquant le résultat de la première question

avec $\lambda = \frac{2n+1}{2}$ qui tend vers $+\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sin(k)}{k} = -\frac{1}{2}$.

Donc la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\frac{1}{2}$

Exercice 3

1. Si la série $\sum x_n$ converge, alors son terme général (x_n) est une suite qui converge vers 0.

Soit $\varepsilon = 1$, par définition de la limite, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N$, $|x_n - 0| \leq \varepsilon = 1$.

On en déduit que $\forall n \geq N$, $0 \leq x_n \leq 1 \implies 0 \leq x_n^2 \leq x_n$ car pour $0 \leq x \leq 1$, on a $x^2 \leq x$.

Or la série $\sum_{n \geq N} x_n$ est convergente, les termes x_n et x_n^2 sont positifs et $\forall n \geq N$, $0 \leq x_n^2 \leq x_n$, alors par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq N} x_n^2$ converge donc la série $\sum x_n^2$ est convergente.

2. On connaît $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ et on sait que $\operatorname{ch} u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$. On en déduit que

$$\operatorname{ch} u = 1 + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2).$$

3. (a) On a $u_0 > 0$. On suppose que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geq 1 > 0$, on a $\frac{u_n}{\text{ch } u_n} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.

La proposition $u_n > 0$ pour tout entier n , est initialisée et héréditaire, alors par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Pour tout entier n , on a $u_n > 0 \rightarrow \text{ch } u_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{\text{ch } u_n} < 1$, alors $\frac{u_n}{\text{ch}(u_n)} < u_n$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.

- (b) D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente. Soit ℓ sa limite, comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < u_0 = 1$, on a par passage à la limite, $0 \leq \ell \leq 1$.

La fonction ch est continue sur \mathbb{R} , donc $\lim \text{ch } u_n = \text{ch } \lim u_n \geq 1 > 0 \Rightarrow \lim \frac{u_n}{\text{ch } u_n} = \frac{\lim u_n}{\text{ch}(\lim u_n)}$.

On en déduit que ℓ vérifie $\ell = \frac{\ell}{\text{ch } \ell} \iff \ell = 0$ ou $1 = \frac{1}{\text{ch } \ell} \iff \ell = 0$.

Donc (u_n) converge vers 0.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} < u_n$ et $u_n > 0$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow v_n < 0$. La suite (v_n) est strictement négative.

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\text{ch } u_n}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{ch } u_n} = 1$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. La suite (v_n) converge vers 0.

- (b) On calcule $S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)$

On reconnaît une somme télescopique, alors $S_{n-1} = \ln(u_n) - \ln(u_0)$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = \ln u_n$.

La suite (u_n) converge vers 0, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0$ donc la série $\sum \ln(1 + v_n)$ diverge.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, et $\ln(1 + u) \sim u$, alors $-\ln(1 + v_k) \sim -v_k$.

On a $-v_n > 0$ pour tout n et $\sum (-\ln(1 + v_n))$ diverge. Alors par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum -v_n$ diverge donc $\sum v_n$ diverge

5. (a) On a $v_n = \frac{1}{\text{ch } u_n} - 1$. On calcule un DL de $\frac{1}{\text{ch } u}$ en 0 : $\frac{1}{\text{ch } u} \underset{0}{=} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)}$

On pose $z = \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ et $\frac{1}{1+z} = 1 - z + o(z)$ qui donne : $\frac{1}{\text{ch } u} - 1 \underset{0}{=} -\frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a $\frac{1}{\text{ch } u_n} - 1 \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2)$.

Le premier terme non nul du DL donne un équivalent :

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}u_n^2$$

- (b) La série à termes positifs $\sum -v_n$ diverge, alors par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum -u_n^2$ diverge. Donc $\sum u_n^2$ est divergente.

- (c) D'après la contraposée de la première question, si $\sum u_n^2$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge.