

Corrigé TD 21 - Variables aléatoires

Exercice 1 :

La probabilité que l'étudiant fasse une faute d'orthographe sur un mot est $p = \frac{1}{600}$.

On note X le nombre de fautes commises sur un devoir de 1800 mots. C'est une variable aléatoire réelle et $X(\Omega) = \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

X est le nombre de succès : une erreur commise, pour la répétition de 1800 expériences de Bernoulli : écriture d'un mot avec ou sans faute d'orthographe. Les expériences de Bernoulli sont indépendantes.

Alors X suit une loi binomiale de paramètre $n = 1800$ et $p = \frac{1}{600}$.

$$\text{Alors } P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^5 P(X = k) = \sum_{k=0}^5 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^5 \binom{1800}{k} \frac{1}{600^k} \left(\frac{599}{600}\right)^{1800-k}$$

On calcule et on trouve $P(X \leq 5) = 0,916$

Exercice 2 :

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$, $U(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $V(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ Soit $i \in \{0, 1, 2\}$ et $j \in \{-1, 0, 1\}$

On a

$$P(U = i, V = j) = P(X + Y = i, X - Y = j)$$

$$= P\left(X = \frac{i+j}{2}, Y = \frac{i-j}{2}\right)$$

$$= P\left(X = \frac{i+j}{2}\right) \times P\left(Y = \frac{i-j}{2}\right)$$

car X et Y sont indépendantes.

On obtient alors le tableau :

Puis, on calcule

$$E(U) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 2 \times p^2 \implies E(U) = 2p$$

$$E(V) = -1 \times p(1-p) + 0 \times (p^2 + (1-p)^2) + 1 \times p(1-p) \implies E(V) = 0$$

Pour la variance, on utilise la formule $V(U) = E(U^2) - (E(U))^2$

$$E(U^2) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 4 \times p^2 \implies E(U^2) = 2p + 2p^2$$

Alors $V(U) = 2p(1+p) - 4p^2 = 2p - 2p^2 = 2p(1-p)$.

Et $V(V) = E(V^2) = 1 \times p(1-p) + 0 \times (p^2 + (1-p)^2) + 1 \times p(1-p) \implies V(V) = 2p(1-p)$.

$$E(U) = 2p, \quad V(U) = 2p(1-p) \quad \text{et} \quad E(V) = 0, \quad V(V) = 2p(1-p).$$

Exercice 3 :

On a $X_1(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et on note X_2 le résultat du deuxième dé.

$$\text{et } P(X_1 = i, Y = k) = P(X_1 = i \cap Y = k) = P(X_1 = i) \cdot P_{X_1=i}(Y = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ i/36 & \text{si } k = i \text{ car } X_2 \in \llbracket 1, i \rrbracket \\ 1/36 & \text{si } k > i \text{ car } X_2 = k \end{cases}$$

Ce qui donne le tableau

$X_1 = i \setminus Y = k$	1	2	3	4	5	6	loi de X_1
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36	1/6
5	0	0	0	0	5/36	1/36	1/6
6	0	0	0	0	0	6/36	1/6
loi de Y	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	1

Alors $E(Y) = \frac{1}{36} (1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + \dots + 11 \times 6) = \frac{161}{36} \simeq 4,47$

Exercice 4 :

1. On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Soit $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.

On utilise comme univers $\Omega =$ l'ensemble des tirages de 4 boules parmi 16 boules que l'on suppose numérotées (discernables).

Le nombre de tirages possibles est $\binom{16}{4}$ qui correspond au nombre de manières de tirer 4 numéros parmi 16 sans répétition et sans tenir compte de l'ordre.

Pour $(X = k)$, on a le nombre de tirages favorables est $\binom{5}{k}$ pour le choix de k boules rouges

$\times \binom{11}{4-k}$ pour les $4 - k$ boules non rouges. On obtient $P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{11}{4-k}}{\binom{16}{4}}$.

On trouve

$$P(X = 0) = \frac{33}{182}, P(X = 1) = \frac{165}{364}, P(X = 2) = \frac{55}{182}, P(X = 3) = \frac{11}{182}, P(X = 4) = \frac{1}{364}$$

On a donc $E(X) = 0 + 1 \times \frac{165}{364} + 2 \times \frac{55}{182} + 3 \times \frac{11}{182} + 4 \times \frac{1}{364} = \frac{455}{364} \Rightarrow E(X) = \frac{5}{4}$.

$E(X^2) = \sum_{k=0}^4 k^2 \cdot P(X = k) = 0 + 1 \times \frac{165}{364} + 4 \times \frac{55}{182} + 9 \times \frac{11}{182} + 16 \times \frac{1}{364} \Rightarrow E(X^2) = \frac{9}{4}$.

Alors d'après la formule de Kœnig, on a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{9}{4} - \frac{25}{16} \Rightarrow V(X) = \frac{11}{16}$.

2. Y est le nombre de tirages de boules rouges (succès) obtenues lors de la répétition de 4 expériences de Bernoulli (tirage avec remise). On a donc Y qui suit la loi $\mathcal{B}(4, \frac{5}{16})$.

Alors on a $E(Y) = np = \frac{5}{4}$ et $V(Y) = 4 \times \frac{5}{16} \times \frac{11}{16} = \frac{55}{64}$.

3. On a $E(X) = E(Y)$. Qu'il y ait ou non remise, les 4 tirages amènent en moyenne autant de boules rouges.

4. En revanche, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{11}}{4} < \frac{\sqrt{55}}{8} = \sigma(Y)$. Les tirages avec remise autorisent une plus grande dispersion autour de la moyenne.

Exercice 5 :

Cas des tirages sans remise

X_r est une variable aléatoire réelle et $X_r(\Omega) = \{r, r+1, r+2, r+3, r+4, r+5\}$.

$(X_r = r)$: on a tiré en premier que des boules rouges,

$(X_r = r+5)$: on a tiré toutes les boules bleues avant de tirer la r -ième boule rouge.

Soit $k \in \llbracket r, r+5 \rrbracket$, $(X_r = k) =$ « on a tiré la r -ième boule rouge au k -ième tirage ».

On considère comme univers Ω tous les tirages possibles de toutes les boules. On suppose que les boules sont discernables. Un tirage est défini par le rang des 15 boules tirées, alors $|\Omega| = 15!$

Un tirage favorable est défini par une boule rouge à la place k , par $r-1$ boules rouges parmi les $k-1$ premiers tirages et $10-r$ boules rouge parmi les $15-k$ derniers tirages.

On dénombre ces tirages favorables :

$\binom{k-1}{r-1}$ choix des rangs des premières boules rouges $\times \binom{15-k}{10-r}$ choix des rangs des dernières boules rouges $\times 10!$ ordres possibles pour les boules rouges $\times 5!$ ordres possibles pour les boules bleues.

Ce qui donne $P(X_r = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1} \binom{15-k}{10-r} 10! 5!}{15!}$ Or on a $\frac{15!}{5! 10!} = \binom{15}{10}$

$$\text{Alors } P(X_r = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1} \binom{15-k}{10-r}}{\binom{15}{10}} \text{ pour } k \in \llbracket r, r+5 \rrbracket$$

Cas des tirages avec remise

On choisit de poser $X = N + 1$ si on n'a pas obtenu de boules rouges lors des N tirages.

Quand on effectue des tirages avec remise, chaque tirage est indépendant des autres. On peut les considérer comme une épreuve de Bernoulli de probabilité $p = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Soit $k \geq r$. Un tirage favorable pour $X_r = k$ est un tirage tel que la k -ième boule est rouge et sur les $k-1$ premières : $r-1$ sont rouges et $k-r$ sont bleues. La probabilité d'un tel tirage est donc $\left(\frac{2}{3}\right)^r \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-r}$

Il y a autant de tirages favorables que de manières de choisir $r-1$ numéros d'obtention des boules rouges parmi les $k-1$ premières ce qui donne

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \left(\frac{2}{3}\right)^r \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-r} \text{ pour } N \geq k \geq r \text{ avec } P(X = N+1) = 1 - \sum_{k=r}^N P(X_r = k)$$

Attention : ce n'est pas une loi binomiale.

Exercice 6 :

- On considère que les boules sont discernables (numérotées). Il y a alors $n!$ tirages possibles : $|\Omega| = n!$.

Et $P(X = k) = \frac{1 \times (n-k) \times 2! \times (n-2)!}{n!}$ avec 1 choix pour le rang k de la première boule verte $\times n-k$ choix pour le rang de la deuxième $\times 2!$ choix pour l'ordre des 2 boules vertes (elles sont discernables alors laquelle arrive en premier ?) $\times (n-2)!$ pour l'ordre des tirages des $n-2$ boules restantes.

$$\text{On obtient : } P(X = k) = \frac{n-k}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}. \quad \text{De même } P(Y = j) = \frac{j-1}{\binom{n}{2}} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}.$$

$$\text{On utilise ensuite } \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$E(X) = \frac{n+1}{3}, E(Y) = \frac{2(n+1)}{3}, V(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{12} \text{ et } V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

- On calcule $E(XY) = \frac{(3n+2)(n+1)}{12}$ d'où $E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{36} \neq 0$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 7 :

Tout d'abord, on détermine les probabilités des faces de B : on note p la probabilité de -2 , alors les probabilités de $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ sont $p, \frac{p}{2}, \frac{p}{4}, \frac{p}{8}, \frac{p}{16}, \frac{p}{32}$ et leur somme doit être 1 ce qui donne

$$p \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) = 1 \iff p = \frac{32}{63}.$$

En notant Y la variable aléatoire égale au numéro obtenu par le dé B , on a la loi de Y qui est

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{32}{63}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{4}{63}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{63}$

On a $X(\Omega) = \{1, -2\}$ et $S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ avec $S = |X + Y|$

On calcule chacune des probabilités et on remplit le tableau suivant

k	0	1	2	3	4
$P_{X=-2}(S = k)$	$P(Y = 2)$ $= 2/63$	$P(Y = 3) + P(Y = 1)$ $= 1/63 + 4/63 = 5/63$	$P(Y = 0)$ $= 8/63$	$P(Y = -1)$ $= 16/63$	$P(Y = -2)$ $= 32/63$
$P_{X=1}(S = k)$	$P(Y = -1)$ $= 16/63$	$P(Y = 0) + P(Y = -2)$ $= 8/63 + 32/63 = 40/63$	$P(Y = 1)$ $= 4/63$	$P(Y = 2)$ $= 2/63$	$P(Y = 3)$ $= 1/63$

On a $P(X = 1) = \frac{4}{6}$ et $P(X = 2) = \frac{2}{6}$ et $P(X = j, S = k) = P_{X=j}(S = k) \times P(X = j)$.

On complète le tableau suivant et on calcule les lois marginales, ce qui donne :

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	$P(X = j)$
$P(X = j, S = k) :$						
-2	2/189	5/189	8/189	16/189	32/189	63/189
1	32/189	80/189	8/189	4/189	2/189	126/189
$P(S = k)$	34/189	85/189	16/189	20/189	34/189	1

On a, par exemple $P((X = 1) \cap (S = 4)) = \frac{2}{198} \neq \frac{68}{567} = P(X = 1) \times P(S = 4)$.

Alors les v.a. X et S ne sont pas indépendantes.

Exercice 8 :

On a $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P(X_n = j)$ est la probabilité d'avoir tiré des boules numérotées j dans au moins une urne et des boules de numéros inférieurs à j dans les autres.

On compte les tirages possibles : il y a n^k tirages possibles, parmi ceux là j^k tirages de boules entre 1 et j et parmi ceux là $(j-1)^k$ tirages de boules entre 1 et $j-1$.

On a $P(X_n = j) = \frac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$. D'où $E(X_n) = \sum_{j=1}^n k \frac{j^k - (j-1)^k}{n^k} = \frac{1}{n^k} \sum_{j=1}^n (j^{k+1} - j(j-1)^k)$.

Et on ne sait pas simplifier l'expression dans le cas général.

Pour trouver un équivalent de $E(X_n)$ on réécrit la somme comme une somme de Riemann. On commence par changer d'indice dans la deuxième somme :

$$E(X_n) = \frac{1}{n^k} \left(\sum_{i=1}^n i^{k+1} - \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)i^k \right) = n \left(1 - \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n-1} i^k \right) \text{ par télescopage.}$$

Or $\frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n-1} i^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n} \right)^k$ qui est une somme de Riemann pour $f : x \mapsto x^k$ sur $[0, 1]$ à n pas.

Comme la fonction f est continue sur $[0, 1]$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n} \right)^k = \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(X_n)}{n} = \frac{k}{k+1}$ soit $E(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{nk}{k+1}$.

Exercice 9 :

1. L'univers Ω est l'ensemble des couples $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et on a $|\Omega| = n^2$.

On détermine $X(\Omega)$: on a $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

On calcule $P(X = k)$: c'est la probabilité d'avoir un dé qui donne k et l'autre qui donne un résultat inférieur à k dans $\llbracket 1, k \rrbracket$. On a $k-1$ résultats de la forme (i, k) avec $i \leq k$, un résultat de la forme (k, k) et $k-1$ résultats de la forme (k, i) .

Alors, $\boxed{P(X = k) = \frac{2k - 1}{n^2} \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket}.$

Autre méthode : Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $(X = k) \cup (X \leq k - 1) = (X \leq k)$ et les événements $(X = k)$ et $(X \leq k - 1)$ donc $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$.

On a $|X \leq k| = k^2$ car $(X = k)$ correspond aux couples de $\llbracket 1, k \rrbracket$ et $|X \leq k| = (k - 1)^2$ alors $|X = k| = k^2 - (k - 1)^2 = 2k - 1$. Alors, $P(X = k) = \frac{2k - 1}{n^2}$.

On calcule l'espérance de X par la formule $E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(2k - 1)$.

À l'aide d'une formule classique, on obtient $E(X) = \frac{1}{n^2} \frac{2}{6} n(4n + 1)(2n + 1)$

$$\implies \boxed{E(X) = \frac{(n + 1)(4n - 1)}{6n}}.$$

2. On a $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P(Y = k)$ est la probabilité d'avoir un dé qui donne k et l'autre qui donne un nombre dans $\llbracket k, n \rrbracket$.

$(Y = k)$ correspond à : le résultat (k, k) et $n - k$ résultats de la forme (i, k) avec $i > k$ et $n - k$ résultats de la forme (k, i) avec $i > k$ soit $2(n - k) + 1$ résultats.

On trouve $\boxed{P(Y = k) = \frac{2(n - k) + 1}{n^2}}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a $P(Z = k) = P(Y = n + 1 - k) = \frac{2(n + 1 - (n + 1 - k)) - 1}{n^2} = \frac{2k - 1}{n^2} = P(X = k)$.

On en déduit que $E(Z) = E(X)$ et $E(n + 1 - Z) = n + 1 - E(Z)$ par linéarité de l'espérance.

Ce qui donne $E(Y) = n + 1 - E(X) = n + 1 - \frac{(n + 1)(2n + 1)}{3n}$.

Finalement, $\boxed{E(Y) = \frac{(n + 1)(2n + 1)}{6n}}$.

3. R suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ alors $E(R) = \frac{n + 1}{2}$

$$\text{et } V(R) = E(R^2) - E(R)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} - \left(\frac{n + 1}{2}\right)^2 = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

4. On a pour chaque lancer 2 résultats des dés : soit l'un a la plus grande valeur et l'autre la plus petite, soit le contraire. Dans les deux cas, le produit des valeurs des 2 dés est égal au produit des valeurs de la plus grande par la plus petite. On a donc $\boxed{XY = RV}$.

On a alors $E(XY) = E(RV)$. Comme R et V sont indépendantes, car les résultats des deux dés sont indépendants, on a $E(RV) = E(R) \times E(V)$. On en déduit que $\boxed{E(XY) = \frac{1}{n^2}}$.

Par ailleurs, en utilisant la loi de (X, Y) :

$$E(XY) = \sum_{\ell \in XY(\Omega)} \ell P(XY = \ell)$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } XY(\Omega) &= \{j \times k \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1, k \rrbracket\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^{k-1} jkP(X = k, Y = j) + k^2P(X = k, Y = k) \right) \end{aligned}$$

On a $P(X = k, Y = j) = \frac{2}{n^2}$ si $k \neq j$ car chaque tirage (k, j) est équiprobable et $P(X = k, Y = k) = \frac{1}{n^2}$ car il n'y a qu'un tirage de ce type.

$$\text{Alors } E(XY) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{k-1} jk + \frac{k^2}{n^2} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n^2} \sum_{j=1}^{k-1} j + \frac{k^2}{n^2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n^2} \times \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k^2}{n^2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^2}$$

On en déduit la formule suivante

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

5. On a $X + Y = R + V$ car le dé vert est l'une des valeurs X ou Y et le rouge est l'autre.

$$\text{Or on sait que } V(R+V) = E((E(R+V) - (R+V))^2) = (E(R+V))^2 - E(R^2 + V^2 + 2RV) = (E(R))^2 + 2E(R)E(V) + (E(V))^2 - E(R^2) - E(V^2) - 2E(RV)$$

Comme R et V sont indépendantes, on a $E(RV) = E(R)E(V)$

$$V(R+V) = E(R^2) - E(R)^2 + E(V^2) - E(V)^2 = V(R) + V(V) = 2V(R) = \frac{n^2 - 1}{6} = V(X+Y).$$

Par ailleurs, on a $Z = n+1 - Y$ et Z et X suivent la même loi, on en déduit que $V(X) = V(Z)$ et $V(Y) = V(Z) = V(X)$.

$$\text{Enfin, } V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2E(X)E(Y) - 2E(XY)$$

$$\text{D'où } 2V(X) = V(X+Y) - 2E(X)E(Y) + 2E(XY)$$

$$\implies V(X) = -\frac{(n-1)(5 \cdot n^3 + 23 \cdot n^2 + 37 \cdot n + 37)}{18 \cdot n^2}$$

$$V(X) = V(Y) = -\frac{(n-1)(5 \cdot n^3 + 23 \cdot n^2 + 37 \cdot n + 37)}{18 \cdot n^2}.$$

Exercice 10 :

1. On a $X(\Omega) = \llbracket r, n \rrbracket$ et $|\Omega| = \binom{n}{r}$ car il y a $\binom{n}{r}$ manières de prendre r jetons parmi n et ces tirages sont équiprobables.

$$P(X=r) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \text{ car on a tiré les } r \text{ premiers jetons.}$$

$P(X=k)$ correspond au tirage de r jetons entre 1 et k en prenant le jeton k : cela correspond au nombre de tirages de $r-1$ jetons entre 1 et $k-1$.

$$\text{Alors } P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{n}{r}} \text{ pour tout } k \in \llbracket r, n \rrbracket.$$

La loi précédente de X doit donner

$$\sum_{k=r}^n P(X=k) = 1 \implies \sum_{k=r}^n \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{n}{r}} = 1 \iff \sum_{k=r}^n \binom{k-1}{r-1} = \binom{n}{r}$$

On change d'indice : $\sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r-1} = \binom{n}{r}$ et on pose $a = r$ et $b = n-1$ pour obtenir la formule suivante

$$\sum_{k=a}^b \binom{k}{a} = \binom{b+1}{a+1} \text{ pour tous } a \leq b \text{ entiers.}$$

$$\text{On calcule ensuite l'espérance de } X : E(X) = \frac{(n+1)r}{r+1}.$$

$$\text{On calcule la loi de } Y ; P(Y=k) = \frac{\binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}} \text{ pour } k \in \llbracket 1, n-r+1 \rrbracket.$$

$$\text{Puis on utilise } k = -(n-k+1) + n+1 \text{ et on trouve } E(Y) = \frac{n+1}{r+1}.$$

2. $P(X=k, Y=j) = P((X=k) \cap (Y=j))$ on peut écrire $= 0$ si $Y > X$ c'est à dire $j > k$.

Pour $1 \leq j \leq k - r + 1$ et $r \leq k \leq n$, on calcule

$$P(X = k, Y = j) = \frac{\binom{k-j-1}{r-2}}{\binom{n}{r}} \text{ car on doit piocher le jeton } j, \text{ le jeton } k \text{ et } r-2 \text{ jetons entre } j \text{ et } k \text{ exclus.}$$

3. [non corrigé]

Exercice 11 :

1. On a $Y_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ qui correspond aux 4 événements suivants : on échange 2 rouges ou on échange 2 vertes ce qui donne $Y_n = 0$, ou alors on prend une rouge de U_2 et on la met dans U_1 ce qui donne $Y_n = 1$ ou le contraire qui donne $Y_n = -1$.

A tout instant, il y a d boules dans chacune des urnes.

Sachant $X_{n-1} = j$, c'est à dire qu'il y a j boules rouges dans l'urne U_1 et donc $d - j$ boules vertes dans U_1 et j boules vertes dans U_2 et $d - j$ boules rouges dans U_2 .

On étudie la probabilité de $Y_n = +1$ c'est à dire que l'on pioche une boule rouge dans U_2 et une verte dans U_1 : ce qui donne $P(Y_n = +1 | X_{n-1} = j) = \frac{d-j}{d} \times \frac{d-j}{d}$.

Puis de même, $P(Y_n = -1 | X_{n-1} = j) = \frac{j}{d} \times \frac{j}{d}$ si on pioche une rouge dans U_1 et une verte dans U_2 . Enfin, $P(Y_n = 0 | X_{n-1} = j) = 2 \frac{d-j}{d} \times \frac{j}{d}$ qui correspond à une boule rouge dans chaque urne ou une boule verte dans chaque urne.

2. On a $E(Y_n) = (-1) \times P(Y_n = -1) + 0 \times P(Y_n = 0) + 1 \times P(Y_n = 1)$.

Les événements $(X_{n-1} = k)$ pour $k \in \{0, d\}$ forment un système complet d'événements. Alors, d'après la formule des probabilités totales

$$P(Y_n = i) = \sum_{k=0}^d P(Y_n = i | X_n = k) \times P(X_n = k).$$

Ce qui donne en remplaçant dans $E(Y_n)$:

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= - \sum_{k=0}^d P(Y_n = -1 | X_n = k) \times P(X_n = k) + \sum_{k=0}^d P(Y_n = +1 | X_n = k) \times P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^d \left(-\frac{k^2}{d^2} + \frac{(d-k)^2}{d^2} \right) \times P(X_n = k). \end{aligned}$$

On simplifie

$$E(Y_n) = \frac{1}{d^2} \sum_{k=0}^d (d^2 - 2dk) \times P(X_n = k). \text{ Mais } \sum_{k=0}^d P(X_n = k) = 1, \text{ ce qui donne}$$

$$E(Y_n) = 1 - \frac{2}{d} \sum_{k=0}^d k P(X_n = k) \quad \text{soit} \quad \boxed{E(Y_n) = 1 - \frac{2}{d} E(X_{n-1})}.$$

3. On a

$$E(X_n) = E(Y_n) + E(X_{n-1}) \text{ d'où } E(X_n) = 1 - \frac{2}{d} E(X_{n-1}) + E(X_{n-1}) = \frac{d-2}{d} E(X_{n-1}) + 1.$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique.

On note $e_n = E(X_n)$ et on cherche son point fixe $\ell = \frac{d-2}{d} \ell + 1 \iff d\ell = (d-2)\ell + d \iff \ell = \frac{d}{2}$

Puis, on étudie $f_n = e_n - \ell$ qui est géométrique de raison $\frac{d-2}{d}$ donc $e_n = e_0 \left(\frac{d-2}{d} \right)^n + \frac{d}{2}$ avec $e_0 = d$ en considérant que X_0 est la variable certaine $X_0 = d$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) = d \left(\frac{d-2}{d} \right)^n + \frac{d}{2}}$$

Exercice 12 :

1. Comme le mobile avance à la vitesse d'une unité d'abscisse par unité de temps, après n unités de temps, il a une abscisse entre $-n$ et n : $X_n(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket$.

Mais, à un temps t pair, le mobile a une abscisse paire et à un temps impair, le mobile a une abscisse impaire.

On cherche donc tous les nombres entiers de $\llbracket -n, n \rrbracket$ qui sont de la même parité que n : ils sont de la forme $n + 2j$ avec j entier. On doit avoir $-n \leq n + 2j \leq n \iff -n \leq j \leq 0$.

On pose $k = -j$. Alors $X_n(\Omega) = \{2k - n \mid 0 \leq k \leq n\}$.

2. Pour arriver en $2k - n$ après n pas, il faut avoir fait x pas vers la droite et $n - x$ pas vers la gauche avec $x - (n - x) = 2k - n \iff x = k$.

Alors l'événement $(X_n = 2k - n)$ est l'événement : on a effectué k pas vers la droite et $n - k$ pas vers la gauche. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli : aller vers la droite avec une probabilité de succès p que l'on répète n fois et on cherche la probabilité d'obtenir k succès.

$$\text{Alors } P(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

3. Y_n suit une loi binomiale de paramètres p et n $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Alors $E(Y_n) = np$ et $V(Y_n) = np(1 - p)$.

4. Comme on a $X_n = 2Y_n - n$, par linéarité de l'espérance, on peut obtenir $E(X_n) = 2E(Y_n) - n = 2np - n$ qui donne $E(X_n) = (2p - 1)n$.

Ensuite, on a $V(X_n) = 4V(Y_n) = 4np(1 - p)$.

Pour $p = \frac{1}{2}$, X_n est centrée.

Exercice 13 :

1. X est le nombre de piles en n lancers indépendants, la probabilité de pile à chaque lancer étant p . Alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pour } k \in X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)$$

On a alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = np(1 - p) + n^2 p^2$

$$E(X) = np(1 - p + np)$$

2. Quand $X = 0$, on tire une boule de l'urne 0 qui contient 0 vertes et n rouges. On tirera donc une boule rouge et $P_{(X=0)}(Y = 0) = 0$

et de même si $X = n$, il n'y a que des boules vertes et $P_{(X=n)}(Y = 0) = 1$

Si X et Y sont indépendantes alors $P_{(X=0)}(Y = 0) = P(Y = 0) = P_{(X=n)}(Y = 0)$ ce qui n'est pas le cas.

$$X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}$$

3. Quand $X = k$, on tire une boule de l'urne k qui contient k vertes et $n - k$ rouges. Ces n boules étant équiprobables

$$P_{(X=k)}(Y = 1) = \frac{k}{n}.$$

4. $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(Y = 1) &= \sum_{k=0}^n P_{(X=k)}(Y = 1)P(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k P(X = k) \\
 &= \frac{E(X)}{n} \text{ car } X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket
 \end{aligned}$$

5. Comme les valeurs de Y sont $\{0, 1\}$, Y suit une loi de Bernoulli et on a $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $E(Y) = p$

6. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i \in Y(\Omega)} k i P(X = k \cap Y = i) \\
 &= \sum_{k=0}^n (k P(X = k \cap Y = 1) + 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n k P(X = k \cap Y = 1) + 0 \text{ pour } k = 0
 \end{aligned}$$

avec $P(X = k \cap Y = 1) = P(X = k)P_{X=k}(Y = 1) = P(X = k) \frac{k}{n}$ donc

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{k=1}^n k \frac{k}{n} P(X = k) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k^2 P(X = k) \quad \boxed{E(XY) = \sum_{k=1}^n k P(X = k \cap Y = 1) = \frac{E(X^2)}{n}}
 \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
 &= \frac{E(X^2)}{n} - \frac{E(X)^2}{n} \quad \boxed{\text{cov}(X, Y) = p(1-p)} \\
 &= \frac{1}{n} V(X)
 \end{aligned}$$

Exercice 14 :

1. Y_n est le nombre de n -chaînes de pile

Il y en a au plus une qui n'est réalisée que si tous les lancers ont donné pile. Donc $Y(\Omega) = \{0, 1\}$
 $(Y_n = 1) = P_1 \cap \dots \cap P_n$ et comme les lancers sont indépendants :

$$p(Y_n = 1) = p(P_1) \dots p(P_n) = p^n \text{ donc } \boxed{p(Y = 0) = 1 - p^n \text{ et } E(Y_n) = p^n}.$$

2. Pour avoir $Y_{n-1} = 1$, il faut avoir une $n-1$ -chaîne de piles. Il ne reste donc qu'un seul lancer face qui ne peut être qu'au début ou à la fin :

$(Y_{n-1} = 1) = [P_1 \cap \dots \cap P_{n-1} \cap F_n] \cup [F_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n]$ les deux sont incompatibles donc

$P(Y_{n-1} = 1) = P(P_1 \cap \dots \cap P_{n-1} \cap F_n) + P(F_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n)$ les lancers sont indépendants donc

$$P(Y_{n-1} = 1) = p^{n-1}q + qp^{n-1} = 2qp^{n-1}$$

Comme les seules valeurs possibles de Y_{n-1} sont là encore 0 et 1 on a :

$$E(Y_{n-1}) = 0P(Y_{n-1} = 0) + 1P(Y_{n-1} = 1)$$

$$\boxed{E(Y_{n-1}) = 2qp^{n-1}}$$

3. (a) k est un entier de $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$. Avoir $(X_{1,k} = 1)$ signifie qu'une k chaîne de piles commence au premier lancer (et se finit donc au $k+1^{\text{ème}}$ $< n$)

$(X_{1,k} = 1) = P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et les lancers sont indépendants donc $P(X_{1,k} = 1) = p(P_1) \dots p(P_k)p(F_{k+1})$ et $\boxed{P(X_{1,k} = 1) = p^k q}$.

(b) Avoir $(X_{i,k} = 1)$ signifie qu'une telle chaîne

- commence au $i^{\text{ème}} > 1$ lancer et donc qu'elle était précédée d'un "face" ;
- qu'elle se finit au $k + i - 1^{\text{ème}} < n$ (de i à $i + k - 1$ il y a $(i + k - 1) - (i) + 1 = k$ lancers)
- et est donc suivie d'un face ($i \leq n - k$ donc $k + i - 1 \leq n - 1 < n$)

Donc $(X_{i,k} = 1) = F_{i-1} \cap P_i \cdots \cap P_{k+i-1} \cap F_{k+i}$ et comme les lancers sont indépendants pour tout $i \in [[2, n - k]]$ on a bien

$$P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k.$$

(c) Enfin, pour $X_{n-k+1,k} = 1$, on a k pile à partir du $n - k + 1^{\text{ème}}$ lancer donc jusqu'au $n^{\text{ème}}$.

Donc $(X_{n-k+1,k} = 1) = F_{n-k} \cap P_{n-k+1} \cap \cdots \cap P_n$ donc

$$P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k.$$

(d) Le nombre total de k -listes de piles est la somme de celles qui commencent à 1, à 2 ... à $n - k + 1$

$$\text{Donc } Y_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} X_{i,k} \text{ et } E(Y_k) = \sum_{i=1}^{n-k+1} E(X_{i,k})$$

$$\text{Comme } E(X_{i,k}) = 0 \cdot p(X_{i,k} = 0) + 1 \cdot p(X_{i,k} = 1) = qp^k$$

$$\text{On a } E(Y_k) = \sum_{i=1}^{n-k+1} qp^k = qp^k \sum_{i=1}^{n-k+1} 1 \quad \text{soit} \quad E(Y_k) = (n - k + 1) qp^k$$