Chapitre 16 - Analyse asymptotique

1 Comparaison des suites

1.1 Relations de comparaison

Uniquement pour les suites réelles : on se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels. On dit que :

- (u_n) est dominée par (v_n) si à partir du rang N_0 $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.
- (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
- (u_n) est équivalente à (v_n) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Théorème 1.1. *Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels.*

(u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 telle que $u_n = v_n.\varepsilon_n$.

1.2 Propriétés des relations de comparaison

Proposition 1.2. *Soit* $(u_n), (v_n), (w_n)$ *des suites réelles.*
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *alors* $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ *alors* $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$.
Si u_n *et* v_n *ne s'annulent pas, alors* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *alors* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(u_n)$.

1.3 Suites de référence

Proposition 1.3. *Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, on a*

$$\ln^{\beta}(n) \underset{+\infty}{=} o(n^{\alpha}) \text{ et } n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma n}) \qquad \text{et pour } q > 1, \text{ on a } n^{\alpha} = o(q^{n}).$$

1.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 1.4. *Soit* $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ *des suites réelles.*
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ *alors* $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n x_n$.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ *et si* w_n *et* x_n *ne s'annulent pas alors* $\dfrac{u_n}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{x_n}$.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et si* p *est un entier* $p \in \mathbb{N}$ *alors* $u_n^p \underset{+\infty}{\sim} v_n^p$.

1.5 Relations de comparaison et limites

Théorème 1.5. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.*
Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$
En particulier, (u_n) est convergente si et seulement si (v_n) est convergente.

Proposition 1.6. *Soit (u_n)et (v_n) deux suites réelles.*

- *Si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) converge, alors (u_n) converge vers 0.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge.*
- *Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

2 Relations de comparaison appliquées aux fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ élément ou extrémité de I.

2.1 Fonction dominée par une autre

Définition 2.1. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} O(g)$

2.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2.2. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a.

On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou bien $f(x) = g(x).\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

2.3 Fonctions équivalentes

Définition 2.3. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a. On note $f \underset{a}{\sim} g$

Proposition 2.1. *Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.*

$$\text{Si } f'(a) \neq 0, \text{ alors } f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

Proposition 2.2. *Soit f et g définies sur I, ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$. On a :*

$$f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g).$$

2.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 2.3. *Si $f, g, h, f_1, g_1, f_2, g_2$ sont des fonctions définies au voisinage de a, on a :*

- $f \underset{a}{\sim} g \Longrightarrow g \underset{a}{\sim} f$
- $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h \Longrightarrow f \underset{a}{\sim} h$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Longrightarrow f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Longrightarrow \dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$

2.5 Utilisation des équivalents

Proposition 2.4. *Étant donnés deux fonctions f et g équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Si g a une limite finie ou infinie en a alors f aussi et $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g$.

Proposition 2.5. *Étant donnés deux fonctions f et g définies sur I et équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Si g est positive sur I alors f est positive au voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur I, alors f ne s'annule pas au voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, alors la restriction de f à $I \setminus \{a\}$ ne s'annule pas au voisinage de a.

3 Développements limités

3.1 Définition

Définition 3.1. On dit qu'une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ élément ou extrémité de I si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(a+h) = P(h) + o(h^n)$ au voisinage de 0 (pour h).

C'est à dire $$f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_{n-1}h^{n-1} + a_n h^n + o(h^n)$$

ou $$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

On le note $DL_n(a)$ de f.

3.2 Exemple fondamental

Proposition 3.1. *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \dfrac{1}{1-u} \end{array}$ *admet des développements limités à l'ordre* n*, pour tout entier* n*, au voisinage de* 0 :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n)$$

3.3 Unicité du développement limité

Proposition 3.2. *Si f est une fonction admettant deux développements limités à l'ordre n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors ces développements sont égaux.*

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ et $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$.

On appelera le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ la partie régulière du DL de f à l'ordre n en a.

Corollaire 3.3. *Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors pour tout entier $p \leqslant n$, f admet un développement limité à l'ordre p obtenu en tronquant le développement d'ordre n.*

Corollaire 3.4. *Soit f admettant un développement limité en 0 de partie régulière P. Si f est paire, alors P est pair. Si f est impaire, alors P est impair.*

3.4 Forme normalisée d'un développement limité

Définition 3.2. Soit f une application admettant un développement limité l'ordre $n+p$ au voisinage de a. On appelle forme normalisée du développement limité de f, l'écriture :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)\right) \text{ où } a_0 \neq 0.$$

Proposition 3.5. *Si f a un développement limité normalisé $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\,(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o($ où $a_0 \neq 0$, alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$ et f est de même signe que $a_0 h^p$.*

3.5 Translation d'un développement limité

Proposition 3.6. *Si f est une fonction vérifiant $f(a+h) = g(h)$ pour tout h dans l'intervalle I contenant 0, et si g admet un développement limité à l'ordre n en 0 : $g(x) \underset{0}{=} P(x) + o(x^n)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$.*

3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si la fonction g définie par $g(u) = f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n sur l'intervalle $J_+ = \left\{\frac{1}{x}\middle| x \in I \cap \mathbb{R}_+^*\right\}$ (respectivement sur $J_- = \left\{\frac{1}{x}\middle| x \in I \cap \mathbb{R}_-^*\right\}$), alors on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Si $g(u) \underset{0^+}{=} P(u) + o(u^n)$, alors $f(x) \underset{+\infty}{=} P(\frac{1}{x}) + o(\frac{1}{x^n})$.

4 Formule de Taylor-Young

4.1 Intégration terme à terme d'un DL

Théorème 4.1. *Soit I un intervalle contenant a et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue possédant un développement limité à l'ordre n en a qui est :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Alors toute primitive F de f sur I possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en a qui est :

$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.2. *Soit f une fonction de classe C^n d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ avec $n \in \mathbb{N}$. f possède en tout point a de I un développement limité d'ordre n donné par :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \qquad \textit{ou}$$

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

5 Opérations sur les développement limités

5.1 Somme et produit

Proposition 5.1. *Soit f et g deux fonctions réelles admettant en a des développements limités à l'ordre n :*

$$f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n \text{ et } g(x) \underset{a}{=} Q(x-a) + o(x-a)^n$$

où Pet Q sont des pllynômes réels de degré au plus égal à n.
Alors les fonctions $f+g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n qui sont :

$$(f+g)(x) \underset{a}{=} P(x-a) + Q(x-a) + o\left((x-a)^n\right).$$

$$(fg)(x) \underset{a}{=} R(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$$

où R est le polynôme obtenu tronquant le produit PQ au degré n.

5.2 Dérivation d'un développement limité

Proposition 5.2. *Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I contenant a, admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a, alors ce développement s'obtient en dérivant celui de f :

$$f'(x) \underset{a}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-a)^{k-1} + o(x-a)^{n-1}.$$

5.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 5.3. *soit f une fonction définie sur I admettant un $Dl_n(a)$ en $a \in I$, telle que $f(I) \subset J$, avec $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$.*

Soit g une fonction définie sur J admettant un DL_n en $b = f(a)$ avec $g(u) \underset{b}{=} Q(u-b) + o(u-b)^n$.

Alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme composé $Q(P(X))$:

$$g \circ f(x) \underset{a}{=} \text{ reste de la division de } Q(P(x-a)) \text{ par } (x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^n\right).$$

5.4 Développement limité d'un quotient

Proposition 5.4. *Si u est une fonction telle que $\lim_a u = 0$ et si u a un développement limité à l'ordre n en a, alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un $DL_n(a)$.*

Si $u(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$, alors $\dfrac{1}{1-u(x)} \underset{a}{=} 1 + P(x-a) + P^2(x-a) + P^3(x-a) + \cdots + P^n(x-a) + o(x-a)^n$: le développement limité s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $1 + P(X) + P^2(X) + \cdots + P^n(X)$.

6 Formulaire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &\underset{0}{=} 1+x+x^2+\dots+x^n+\circ(x^n)\\
(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)\\
\ln(1+x) &\underset{0}{=} x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\dots+(-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}x^n+\circ(x^n)\\
\arctan x &\underset{0}{=} x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\dots+(-1)^p\tfrac{1}{2p+1}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})\\
e^x &\underset{0}{=} 1+\tfrac{1}{1!}x+\tfrac{1}{2!}x^2+\dots+\tfrac{1}{n!}x^n+\circ(x^n)\\
\operatorname{ch} x &\underset{0}{=} 1+\tfrac{1}{2!}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4+\dots+\tfrac{1}{(2p)!}x^{2p}+\circ(x^{2p})\\
\operatorname{sh} x &\underset{0}{=} x+\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5+\dots+\tfrac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})\\
\cos x &\underset{0}{=} 1-\tfrac{1}{2!}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4+\dots+(-1)^p\tfrac{1}{(2p)!}x^{2p}+\circ(x^{2p})\\
\sin x &\underset{0}{=} x-\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5+\dots+(-1)^p\tfrac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}+\circ(x^{2p+1})\\
\tan x &\underset{0}{=} x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{2}{15}x^5+\tfrac{17}{315}x^7+\circ(x^8)
\end{aligned}$$

7 Applications

7.1 Étude de limites

Proposition 7.1. *Si une fonction f a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f a une limite en a qui vaut a_0.*

7.2 Prolongement par continuité

Proposition 7.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.

7.3 Dérivabilité d'un prolongement par continuité

Proposition 7.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $\tilde{f}(a) = a_0$ et le prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = a_1$.

7.4 Position relative de la courbe et de la tangente

Proposition 7.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $p \geqslant 2$ et $a_p \neq 0$, alors la droite $y = a_0 + a_1(x-a)$ est tangente à la courbe représentative de f en a.
De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point a est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$: au-dessus si $a_p(x-a)^p \geqslant 0$.

7.5 Étude d'un extremum

Proposition 7.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$ avec $a_2 \neq 0$, alors la fonction f a un extremum local en a : maximum local si $a_2 < 0$ et minimum local si $a_2 > 0$.

7.6 Asymptotes

Proposition 7.6. *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).*
Si il existe un réel k tel que $$f(x) - kx \underset{+\infty \text{ ou } -\infty}{=} a_0 + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right) \text{ avec } a_p \neq 0,$$
alors la droite $y = kx + a_0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$). De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{a_p}{x^p}$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).