

# Chapitre 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

## 4 Applications linéaires

### 4.1 Morphismes d'espaces vectoriels

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

**Définition 4.1.** Une application  $f$  d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $F$  est dite linéaire si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x).$$

**Théorème 4.1.** Une application  $f : E \longrightarrow F$  est linéaire si et seulement si elle vérifie :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad & f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y). \\ \iff \forall (x, y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad & f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y). \end{aligned}$$

*Remarque 4.1.* L'image d'une combinaison linéaire de vecteurs par une application linéaire est la combinaison linéaire des images des vecteurs.

**Définition 4.2.** Une application linéaire  $f : E \longrightarrow E$  s'appelle un endomorphisme de  $E$ .

**notations 4.3.** On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

### 4.2 Exemples

### 4.3 Généralités sur les applications

Dans ce paragraphe,  $E$  et  $F$  sont deux ensembles.

**Définition 4.4.** Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$ .

Pour  $x \in E$ ,  $y = f(x)$  s'appelle l'image de  $x$  et  $x$  est un antécédent de  $y$ .

On appelle image directe par  $f$  d'une partie  $A$  de  $E$ , l'ensemble des images des éléments de  $A$  noté  $f(A)$  :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

On appelle image réciproque par  $f$  d'une partie  $B$  de  $F$ , l'ensemble des antécédents (éventuels) des éléments de  $B$  noté  $f^{-1}(B)$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

*Remarque 4.2.* Attention : rien n'indique ici que  $f$  est bijective ni que son application réciproque  $f^{-1}$  existe.

**Définition 4.5.** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

$f$  est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée  $F$  a au plus un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

$f$  est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée  $F$  a au moins un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall z \in F, \exists x \in E : z = f(x).$$

$f$  est bijective si  $f$  est injective et surjective ce qui est équivalent à tout élément de l'ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent par  $f$ .

**Lemme 4.2.** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

$f$  est bijective de  $E$  dans  $F$  si et seulement si il existe une application  $u : F \longrightarrow E$  telle que  $u \circ f = id_E$  et  $f \circ u = id_F$ .

## 4.4 Noyau et image d'une application linéaire

$E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 4.3.** Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire.

L'image directe d'un sous-espace vectoriel de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Définition 4.6.** Étant donné une application linéaire  $f : E \longrightarrow F$ , on appelle :

- noyau de  $f$  le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par

$$\text{Ker } f = f^{-1}\{\vec{0}\} = \{x \in E \mid f(x) = \vec{0}\}.$$

C'est l'ensemble des antécédents du vecteur nul par  $f$ .

- image de  $f$  le sous-espace vectoriel de  $F$  défini par

$$\text{Im } f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

C'est l'ensemble des images de  $E$  par  $f$ .

**Théorème 4.4.** Si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors

$$f \text{ est injective} \iff \text{Ker } f = \{\vec{0}\} \quad \text{et par ailleurs,} \quad f \text{ est surjective} \iff \text{Im } f = F.$$

**Exercice 4.1.** Déterminer le noyau et l'image de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y, z) = (2x + y - z, x - 2y + z)$

Vu en classe

**Correction :**

Soit  $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$  et  $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$  deux vecteurs. On calcule

$$f(u + v) = (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2), (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2))$$

soit par propriété du calcul vectoriel :

$$f(u + v) = (2x_1 + y_1 - z_1, x_1 - 2y_1 + z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2, x_2 - 2y_2 + z_2)$$

On reconnaît

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On calcule

$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y - \alpha z, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z) = \alpha(2x + y - z, x - 2y + z)$$

On a donc

$$f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

Les deux résultats prouvent que  $f$  est linéaire.

On détermine le noyau de  $f$  : soit  $u \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \text{Ker } f \iff f(u) = \vec{0}$ .

On note  $u = (x, y, z)$ , on a alors :

$$u \in \text{Ker } f \iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

On a trois inconnues et deux pivots, alors on a un paramètre :  $z = \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$u \in \text{Ker } f \iff \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = \frac{1}{5}\alpha \\ y = \frac{3}{5}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

On en déduit que le noyau de  $f$  est la droite vectorielle dirigée par  $(1, 3, 5)$  :  $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 3, 5))$

On détermine ensuite l'image de  $f$  :

un vecteur  $v = (a, b)$  appartient à l'image de  $f$  si et seulement si il existe un vecteur  $u = (x, y, z)$  tel que  $f(u) = v$

$$(a, b) \in \text{Im } f \iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases}$$

$$\iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - 2y + z = a \\ 5y - 3z = a - 2b \end{cases}$$

Le système est échelonné et a deux équations et trois inconnues  $(x, y, z)$ . Il n'a pas d'équation de compatibilité, alors il a toujours des solutions (sous-entendu : il a des solutions pour toutes valeurs de  $a$  et  $b$ ).

Alors, tous les vecteurs  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  sont dans  $\text{Im } f$  : on a  $\mathbb{R}^2 \subset \text{Im } f$ .

Et, on sait que  $\text{Im } f \subset \mathbb{R}^2$  par définition de  $f$ . Alors,  $\boxed{\text{Im } f = \mathbb{R}^2}$  et il s'ensuit que  $f$  est surjective.

**Exercice 4.2.** Déterminer le noyau et l'image de  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $g(x, y) = (x - 2y, x + 3y, 2y)$

En cours ...

**Correction :**

Soit  $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  et  $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  deux vecteurs.

**Exercice 4.3.** Déterminer le noyau et l'image de  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $h(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + y - 2z, x - y - z)$

En cours ...

**Correction :**

On montre d'abord que  $h$  est linéaire : soit deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$

Soit  $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$  et  $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} h(u+v) &= h(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \\ &= (x_1+x_2 + 2(y_1+y_2) - (z_1+z_2), 2(x_1+x_2) + (y_1+y_2) - 2(z_1+z_2), x_1+x_2 - (y_1+y_2) - (z_1+z_2)) \\ &= (x_1 + 2y_1 - z_1, 2x_1 + y_1 - 2z_1, x_1 - y_1 - z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2, 2x_2 + y_2 - 2z_2, x_2 - y_2 - z_2) \\ &= h(u) + h(v) \end{aligned}$$

$h(u+v) = h(u) + h(v)$

$(4, 2, 0, 0) \notin \text{Im } h$

$V = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \in \text{Im } h \iff -a + b - c = 0$  et de  $\text{Im } h$

on résout l'équation de  $\text{Im } h$

$-a + b - c = 0 \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$b = \alpha$   
 $c = \beta$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

alors

$\text{Im } h = \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$

$\text{Im } h \neq \mathbb{R}^3$  donc  $h$  n'est pas surjective.

## Autre exercice

**Exercice 4.4.** Soit  $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$  définie par  $\varphi(P) = (2X - 1)P' + 3XP$

1. Montrer que  $\varphi$  est linéaire.
2. Déterminer  $\text{Ker } \varphi$  et  $\text{Im } \varphi$ .

À faire



## 4.5 Combinaison linéaire d'applications linéaires

**Proposition 4.5.** Soit  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et des scalaires  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ . Alors  $\alpha f + \beta g$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

**Corollaire 4.6.**  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ .  
 $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{F}(E, F)$   $\vec{0}_{\mathcal{L}(E, F)} : E \rightarrow F$  est linéaire  
 $\mathcal{L}(E, F)$  est stable par combinaison linéaire.

## 4.6 Composition d'applications linéaires

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{g \circ f} \rightarrow$$

Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 4.7.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ . Alors  $g \circ f$  est linéaire de  $E$  dans  $G$ .

Démonstration.

Soit  $(u, v) \in E^2$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} g \circ f(u+v) &= g(f(u+v)) = g(f(u) + f(v)) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) \text{ car } g \text{ est linéaire} \\ \text{alors } g \circ f(u+v) &= g \circ f(u) + g \circ f(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha u) &= g(f(\alpha u)) = g(\alpha f(u)) = \alpha g(f(u)) \\ g \circ f(\alpha u) &= \alpha g \circ f(u) \end{aligned}$$

donc  $g \circ f$  est linéaire

♥ Règle:  $f$  est linéaire car les coordonnées de l'image sont des combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent. □

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (\underbrace{a_1 x + b_1 y + c_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{C.L. de } x, y, z}}, \underbrace{a_2 x + b_2 y + c_2}_{\substack{\uparrow \\ \text{C.L. de } x, y, z}}) \end{aligned}$$

$\psi$  est linéaire

avec  $a_1, b_1, c_1$   
 $a_2, b_2, c_2$  réels  
fixés.

**Exemple 4.1.** On considère les endomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  suivants :

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y), \quad g(x, y) = \frac{1}{5}(4x - 2y, -2x + 4y) \quad \text{et} \quad h(x, y) = (x, 0)$$

Calculer les différentes composées :  $f \circ g$ ,  $f \circ f$ ,  $h \circ f$  et  $f \circ h$

*f, g, h sont linéaires car les coordonnées des images sont des combinaisons linéaires des coordonnées des antécédents.*

$$\begin{aligned} f \circ g(x, y) &= f\left(\frac{1}{5}(4x - 2y, -2x + 4y)\right) \\ &= \frac{1}{5} \left( \frac{1}{5}(4x - 2y) + 2 \cdot \frac{1}{5}(-2x + 4y), 2 \cdot \frac{1}{5}(4x - 2y) + 4 \cdot \frac{1}{5}(-2x + 4y) \right) \\ &= \frac{1}{25} (4x - 2y - 4x + 8y, 8x - 4y - 8x + 16y) \\ &= \frac{1}{25} (6y, 12y) \text{ qui est une appli linéaire} \end{aligned}$$

$$f \circ f(x, y) = \frac{1}{25} (5x + 10y, 10x + 20y) = \frac{1}{5} (x + 2y, 2x + 4y) = f(x, y) \text{ pour tous } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ donc } \underline{f \circ f = f}$$

$$h \circ f(x, y) = \left( \frac{1}{5}(x + 2y), 0 \right) \quad f \circ h(x, y) = \frac{1}{5} (x, 2x) \text{ pour tous } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

## 4.7 Isomorphismes et automorphismes

**Définition 4.7.** Une application linéaire bijective  $f : E \longrightarrow F$  s'appelle un **isomorphisme**.

Un **endomorphisme** bijectif  $f : E \longrightarrow E$  s'appelle un **automorphisme**.

**Proposition 4.8.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  alors  $f^{-1}$  est aussi linéaire et est un isomorphisme de  $F$  dans  $E$ .

**Proposition 4.9.** L'ensemble des automorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle **groupe linéaire de  $E$** , noté  $\mathcal{GL}(E)$ .

**Corollaire 4.10.** Pour  $f, g \in \mathcal{GL}(E)$ , on a  $\underline{(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}}$  si  $f \in \mathcal{GL}(E)$  et  $g \in \mathcal{GL}(E)$  donc  $f \circ g \in \mathcal{GL}(E)$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ pour } A, B \text{ inversibles avec la même taille}$$



**Exemple 4.2.** Montrons que l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (x - 2y, x + y)$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

①  $f$  est linéaire car les coordonnées de l'image  $(x - 2y, x + y)$  sont des combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent  $(x, y)$ . Comme elle va de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  (endomorphisme).

Rappel:  $f$  est bijective  $\Leftrightarrow$  tout vecteur  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  (ens. d'arrivée) a un et un seul antécédent  $(x, y)$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on cherche  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f(x, y) = (a, b)$   
on résout  $\begin{cases} x - 2y = a \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = a + 2b \\ 3y = b - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a + 2b}{3} \\ y = \frac{b - a}{3} \end{cases}$

Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  fixés, on trouve un et un seul antécédent  $(x, y)$  donc  $f$  est bijective donc  $f \in \text{GL}(\mathbb{R}^2)$ .

Bonus : on trouve

$g(a, b) = \left(\frac{a + 2b}{3}, \frac{b - a}{3}\right)$  qui est la réciproque de  $f$  :  $g = f^{-1}$

$$(a, b) = f(x, y) \Leftrightarrow (x, y) = f^{-1}(a, b)$$

$$(f \circ g)^{-1} \circ f \circ g = \text{id}_E$$

$$\text{id}_E \equiv \begin{pmatrix} \vec{n} \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$(g^{-1} \circ g) \begin{pmatrix} \vec{n} \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$(g^{-1} \circ \text{id}_E \circ g) \begin{pmatrix} \vec{x} \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$\Downarrow$

$$(f \circ g)^{-1} (f \circ g) \begin{pmatrix} \vec{x} \end{pmatrix} = \vec{x} \Leftrightarrow (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ g) \begin{pmatrix} \vec{n} \end{pmatrix} = \vec{x}$$

## 4.8 Calcul d'endomorphismes

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  deux endomorphismes de  $E$ .

On peut effectuer des combinaisons linéaires :  $\alpha f + \beta g$  pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  réels est un endomorphisme de  $E$ ,

On peut composer les endomorphismes :  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont deux endomorphismes de  $E$ .

On peut également calculer :  $f \circ f$  qu'on note  $f^2$ ,  $f \circ f \circ f = f^3$  et par récurrence,  $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$

Par convention,  $f^0 = id_E$ .

$$\begin{aligned}
 f \circ (f + g) &= f \circ f + f \circ g \\
 (f + g)^2 &= (f + g) \circ (f + g) \\
 &=
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 \text{car } (f \circ (f + g))(x) &= f((f + g)(x)) \\
 &= f(f(x) + g(x)) \\
 &= f(f(x)) + f(g(x)) \\
 &= f^2(x) + f \circ g(x)
 \end{aligned}$$

pour tout  $x \in E$

**Exemple 4.3.** On pose :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x + y; x + y)$$

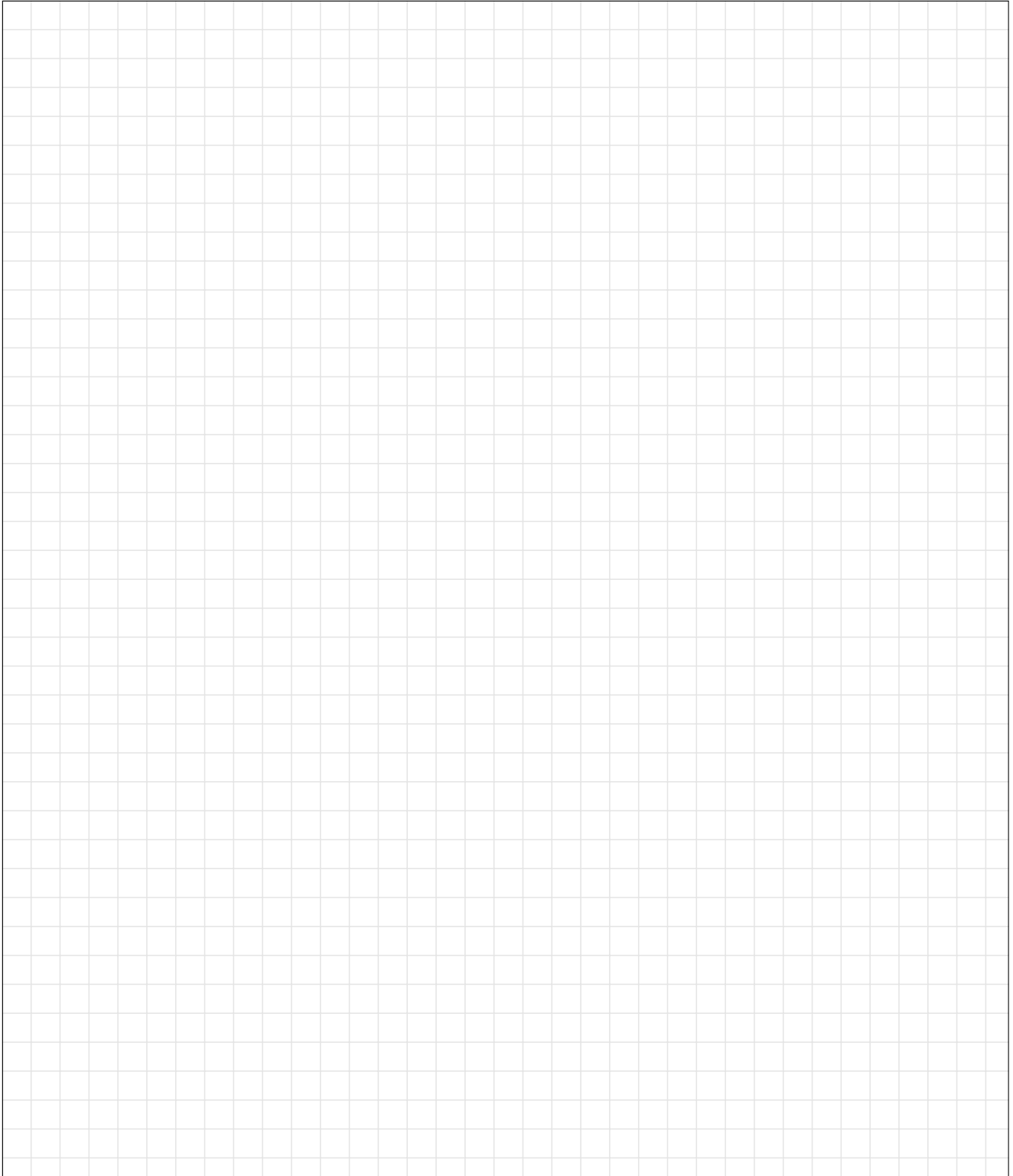
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x + y; -x - y)$$

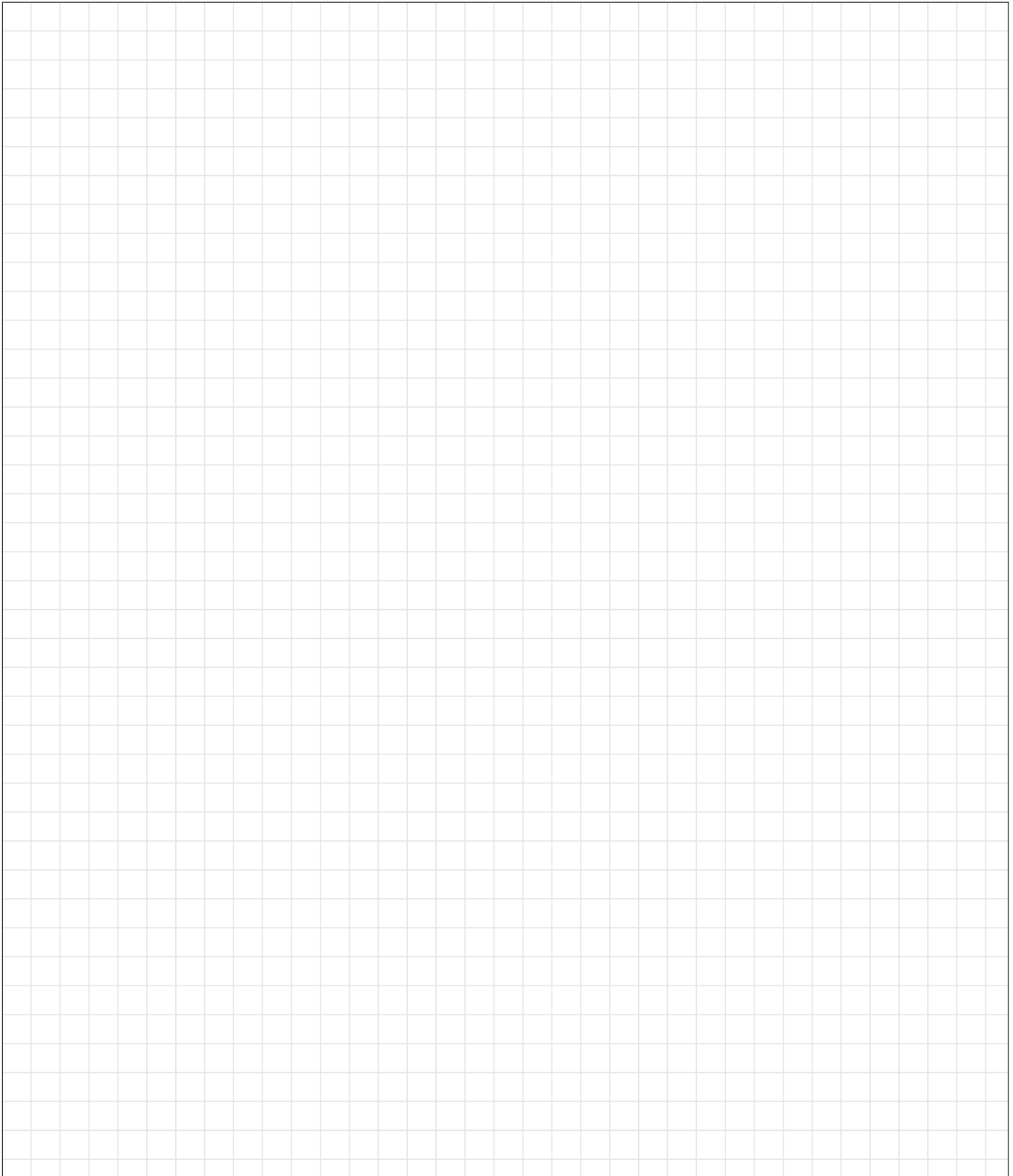
$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x + y; x - y)$$

Calculer  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  et  $h^2$



**Exemple 4.4.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .



## 5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

### 5.1 Somme de sous-espaces vectoriels

**Définition 5.1.** Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ , alors le plus petit sous-espace vectoriel qui contient  $F$  et  $G$  est

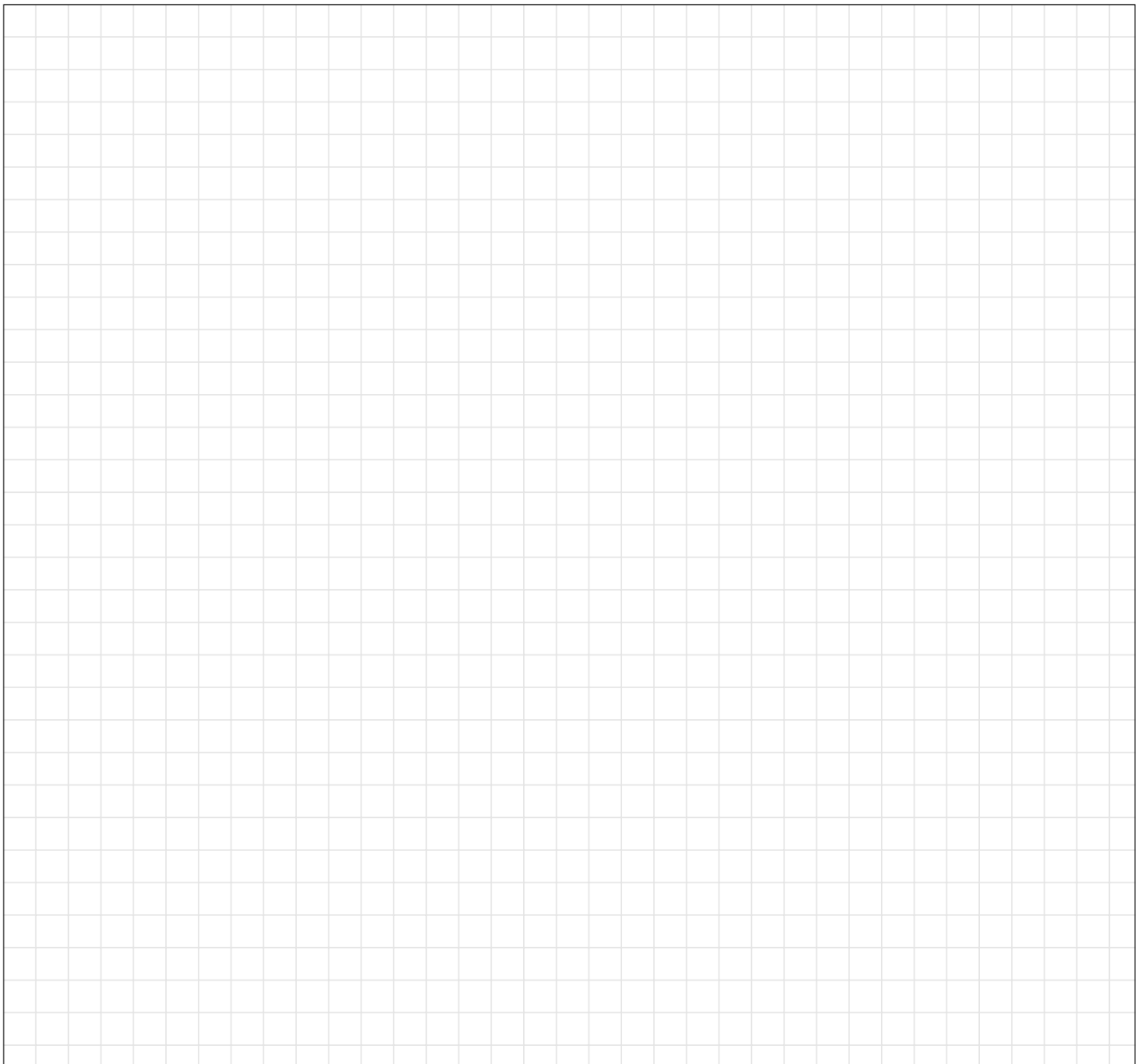
$$H = \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

On l'appelle somme de  $F$  et  $G$  et on le note  $H = F + G$ .

$H$  est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion de  $F$  et  $G$ .

**Exemple 5.1.** Soit  $F = \text{Vect}((1, 3, -1), (1, 1, 1))$  et  $G = \text{Vect}((1, 0, 1), (-1, 1, 0))$

Déterminer  $F + G$



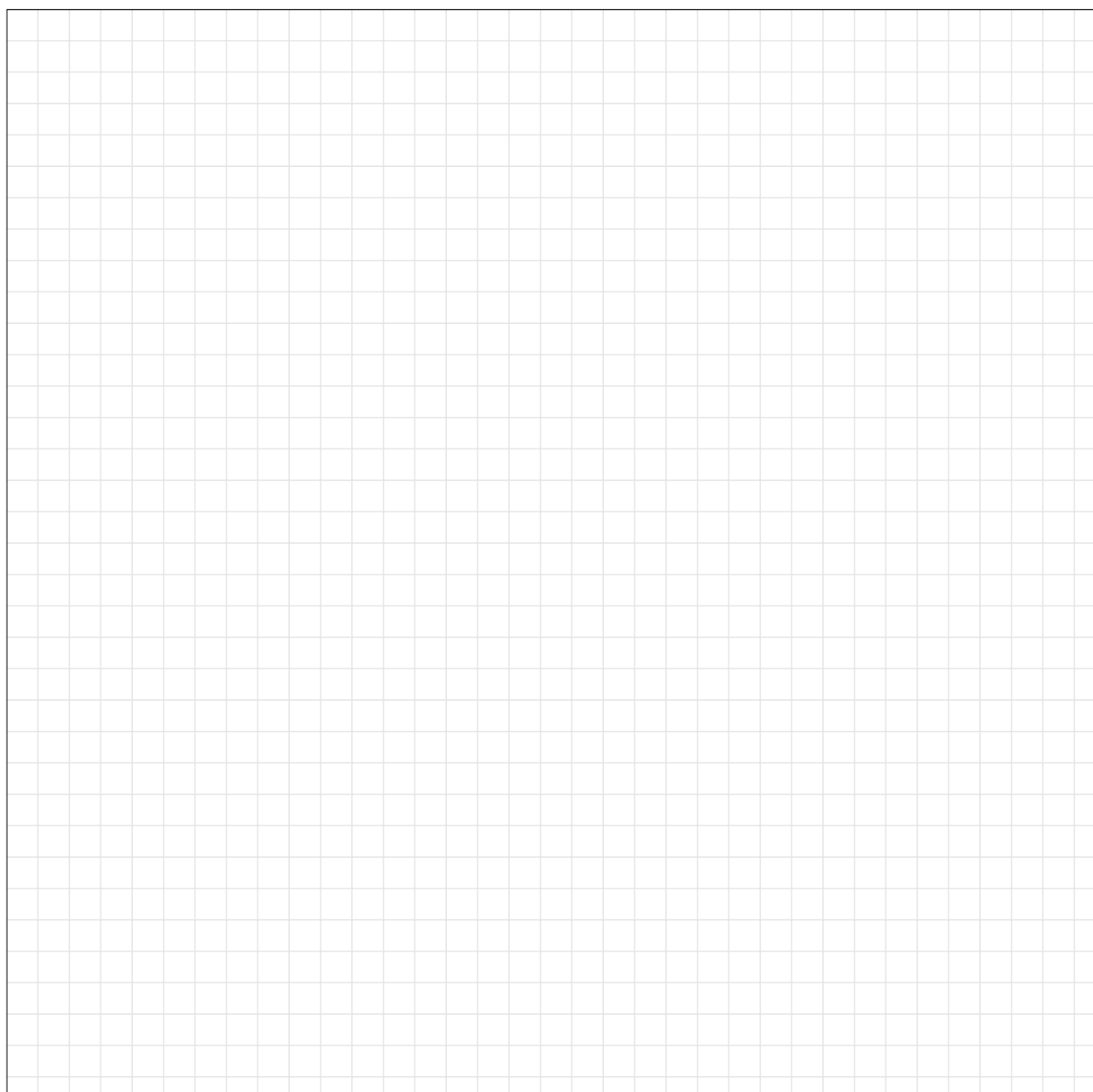
## 5.2 Somme directe

**Définition 5.2.** On dit que deux sev  $F$  et  $G$  d'un espace vectoriel  $E$ , sont en somme directe si tout vecteur  $u$  de  $F + G$  s'écrit de manière unique  $u = v + w$  avec  $v \in F$  et  $w \in G$ . On note alors la somme  $F \oplus G$ .

**Proposition 5.1.** Deux sev  $F$  et  $G$  d'un espace vectoriel  $E$ , sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ .

**Exemple 5.2.** Soit  $F = \text{Vect}((1, 3, -1))$  et  $G = \text{Vect}((1, 0, 1))$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe et déterminer  $F + G$ .

**Exemple 5.3.** Soit  $F = \text{Vect}(X^2 + 1)$  et  $G = \text{Vect}(3X - 7)$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe et déterminer  $F + G$ .



### 5.3 Sous-espaces supplémentaires

**Définition 5.3.** On dit que deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont supplémentaires dans  $E$  si  $E = F + G$  et si  $F$  et  $G$  sont en somme directe :  $E = F \oplus G$ .

**Théorème 5.2.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

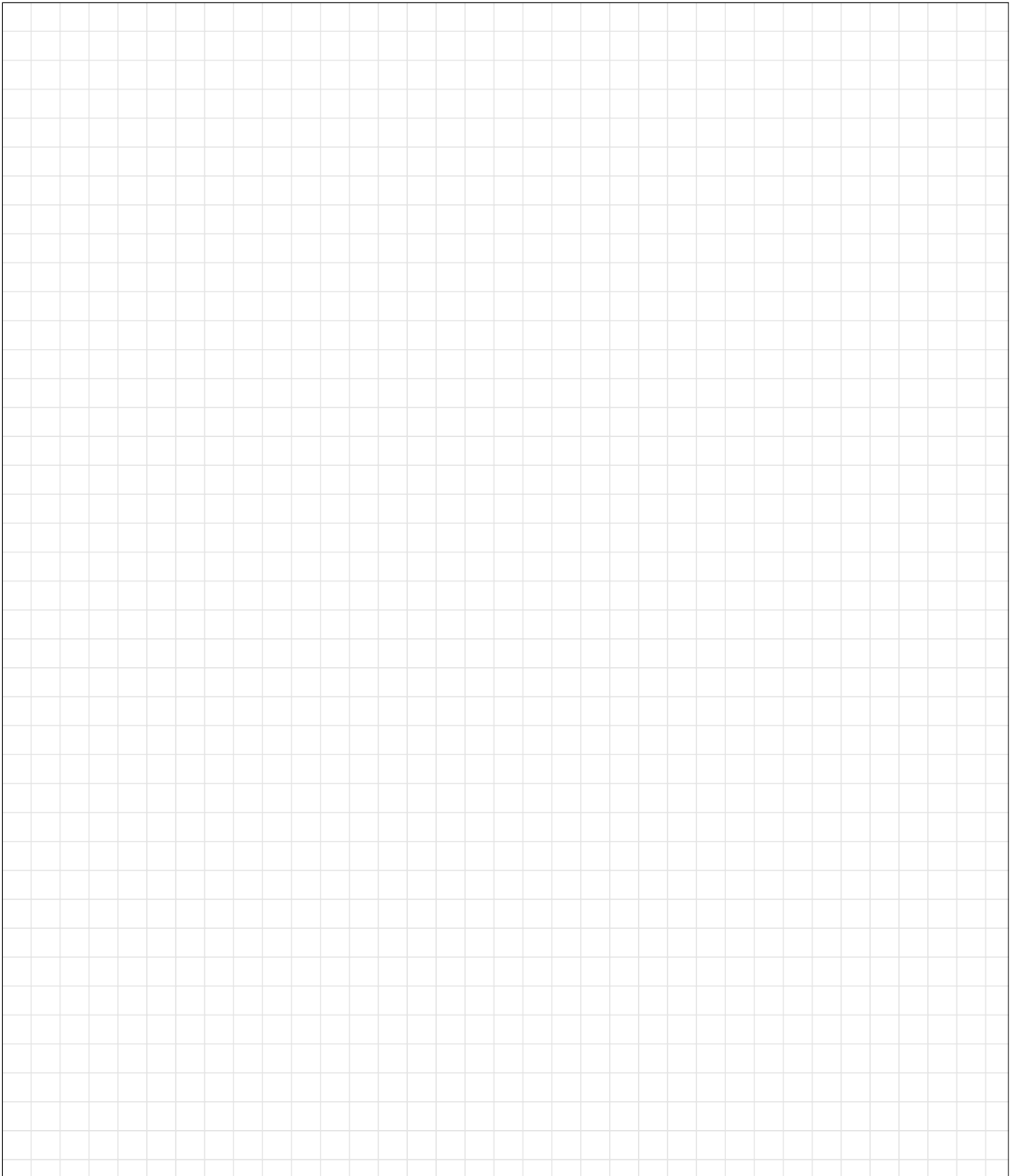
$$E = F \oplus G \iff \forall x \in E, \exists ! y \in F : \exists ! z \in G : x = y + z \text{ avec } y \in F \text{ et } z \in G$$

$$E = F \oplus G \iff E = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}$$

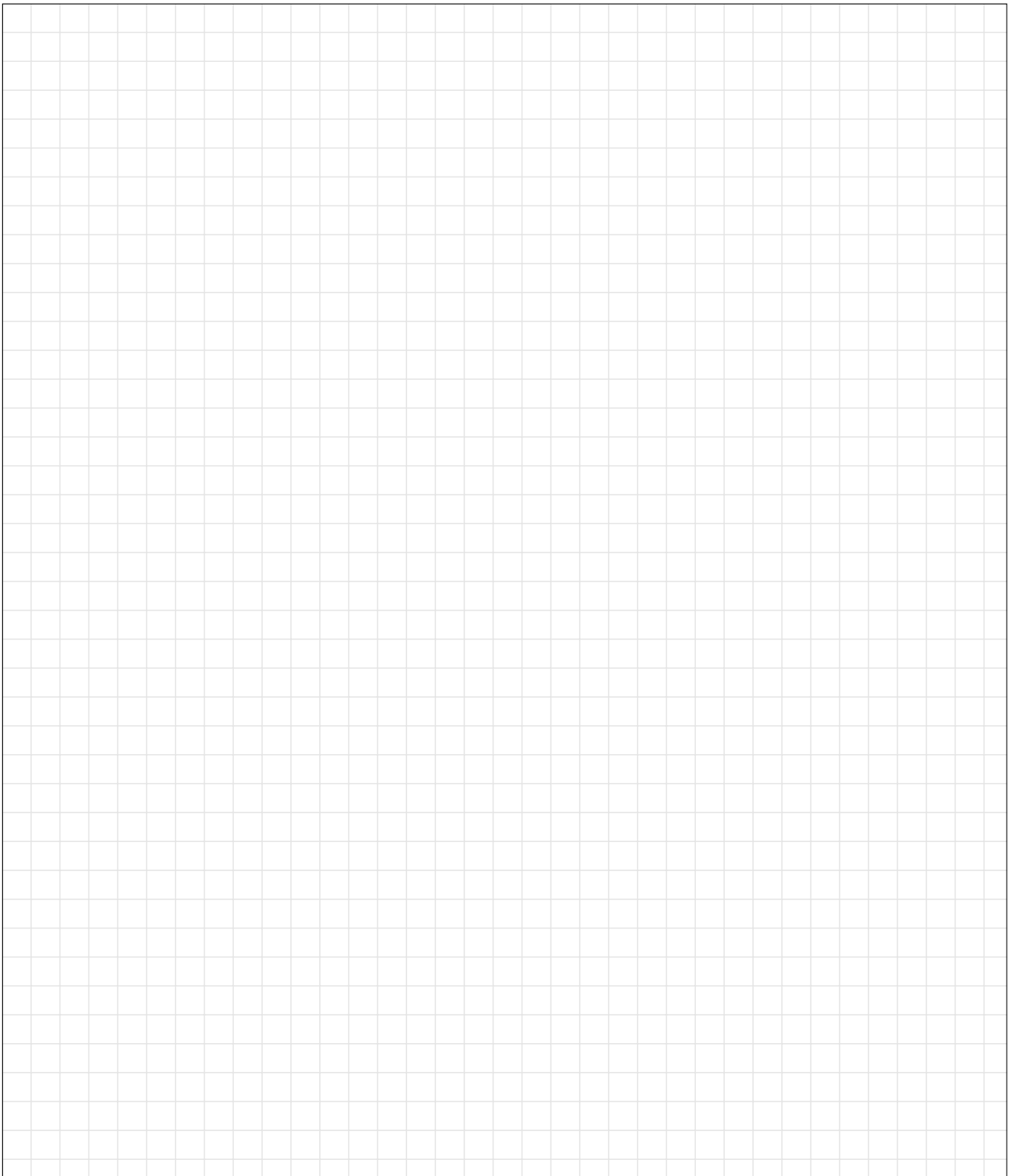
**Exemple 5.4.** Soit  $F$  le sev de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $2x + y - z = 0$  et  $G = \text{Vect}((1, 0, 1))$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .



**Exemple 5.5.** Montrer que les fonctions paires et les fonctions impaires sont deux sev supplémentaires de l'espace vectoriel  $E$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .







## 5.4 Base adaptée à une somme directe.

**Proposition 5.3.** Si  $F$  et  $G$  sont deux sev en somme directe et si  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une base de  $F$  et  $(e_{p+1}, \dots, e_q)$  est une base de  $G$ , alors  $(e_1, \dots, e_q)$  est une base de la somme directe  $F \oplus G$ .

On dit qu'une telle base est adaptée à la somme directe.

*Démonstration.*



□

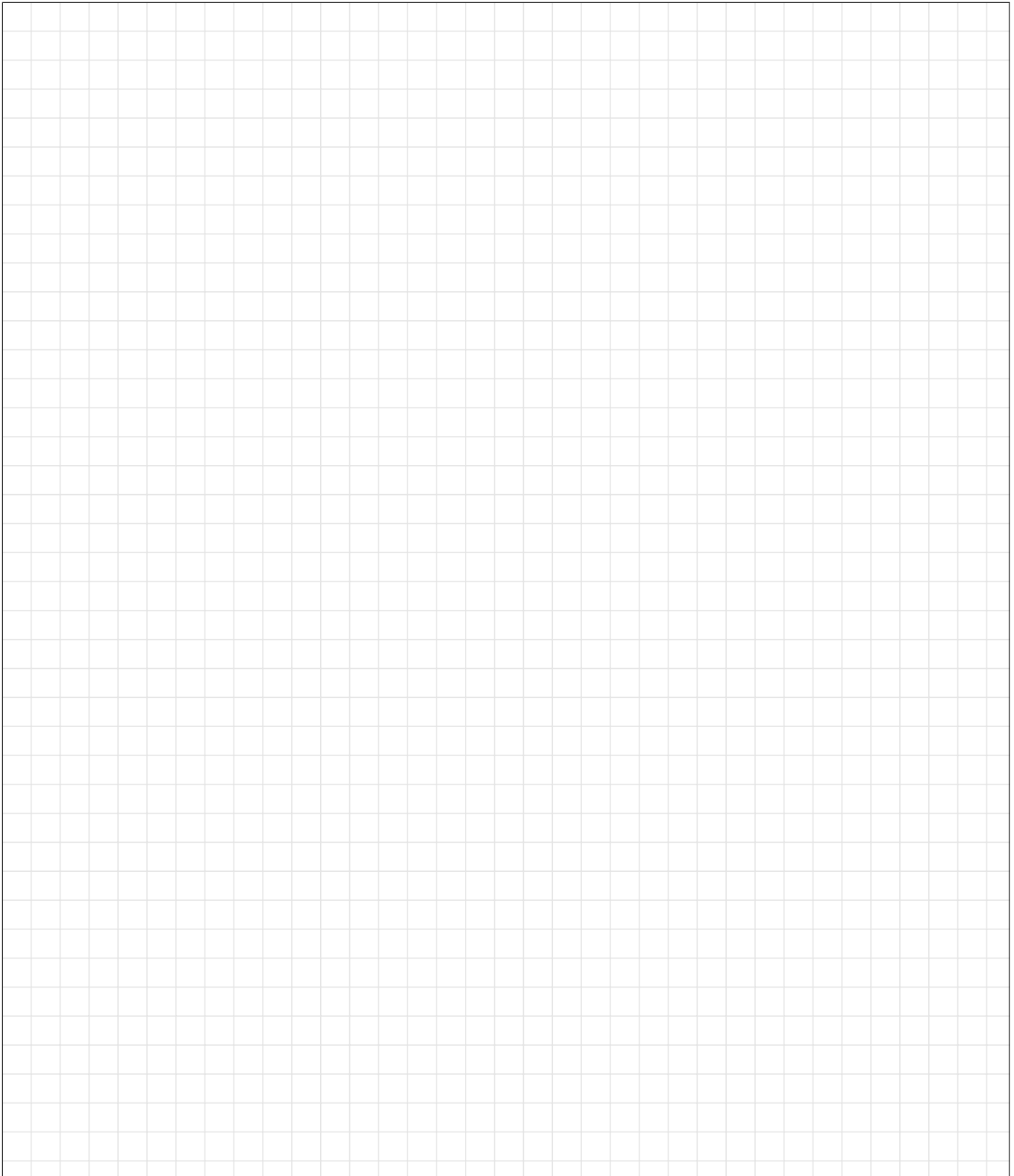
**Proposition 5.4.** Si  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une base de  $F$  et  $(e_{p+1}, \dots, e_q)$  est une base de  $G$ , telles que  $(e_1, \dots, e_q)$  est une base de  $E$ , alors  $E = F \oplus G$ .

### Théorème 5.5.

Si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une famille libre d'un espace vectoriel, alors  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  et  $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$  sont en somme directe.

Si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors  $E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) \oplus \text{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$  pour tout  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

**Exemple 5.6.** Montrons que  $\mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_2[X] \oplus \text{Vect}(X^3)$



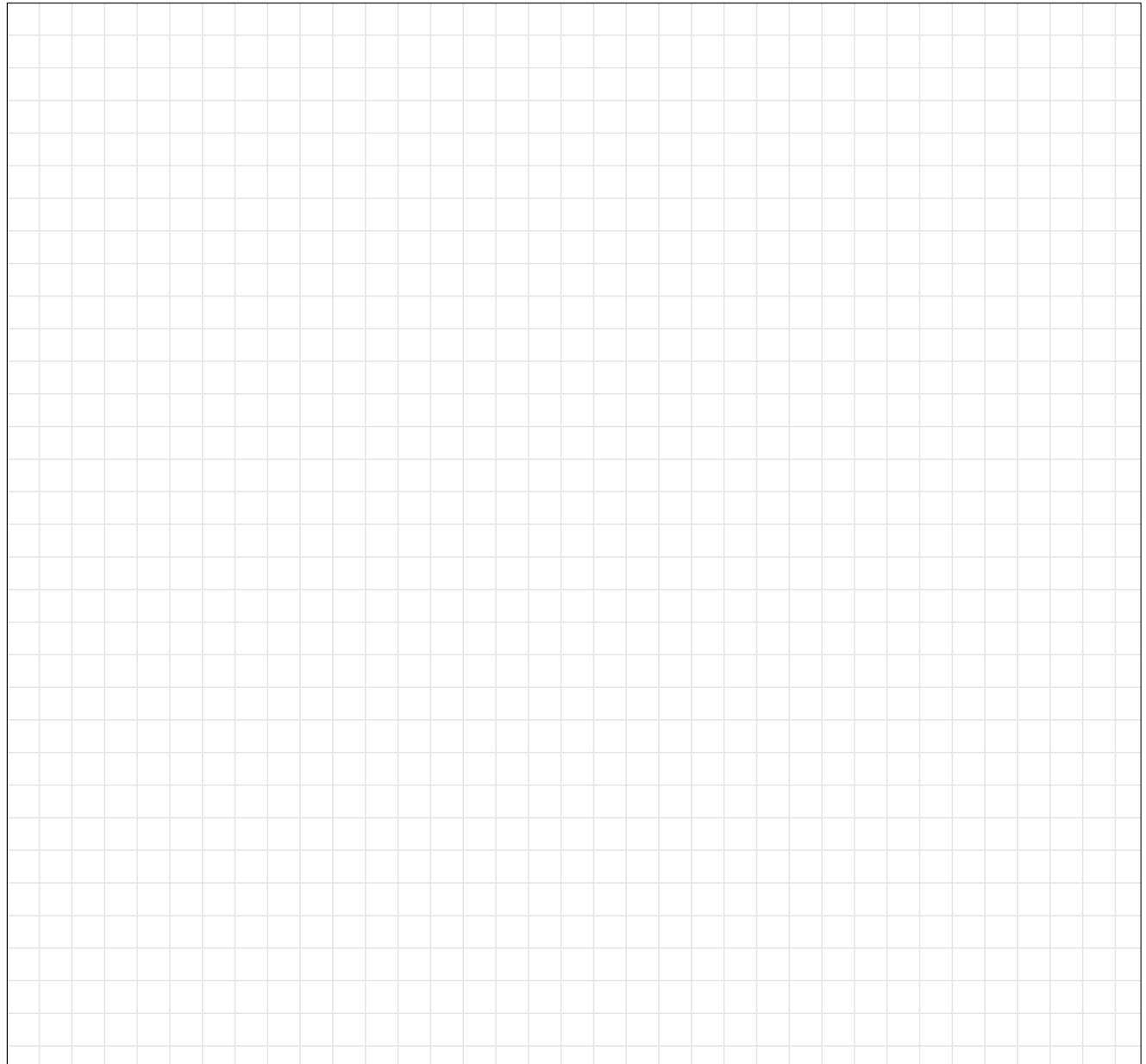
## 6 Applications linéaires et familles de vecteurs

### 6.1 Image d'une base par une application linéaire

**Théorème 6.1.** Soit  $u : E \longrightarrow F$  une application linéaire et  $(e_i)_{i=1,\dots,n}$  une base de  $E$ .

- La famille  $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$  est une famille génératrice de  $\text{Im } u$ .
- $u$  est surjective  $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$  est génératrice de  $F$ .
- $u$  est injective  $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$  est libre dans  $F$ .
- $u$  est bijective  $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$  est une base de  $F$ .

*Démonstration.*



□

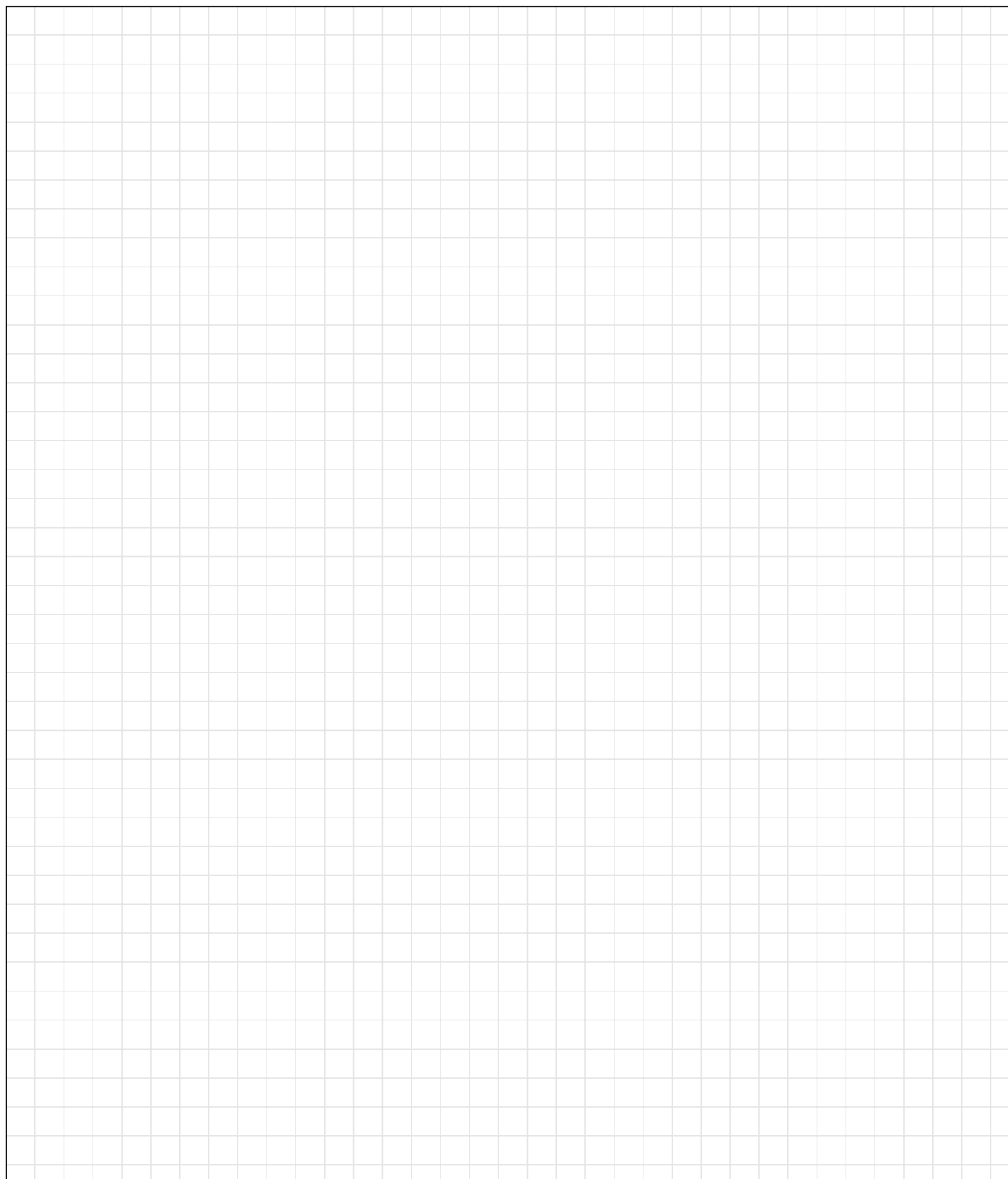
**Corollaire 6.2.** Soit  $u : E \longrightarrow F$  une application linéaire.

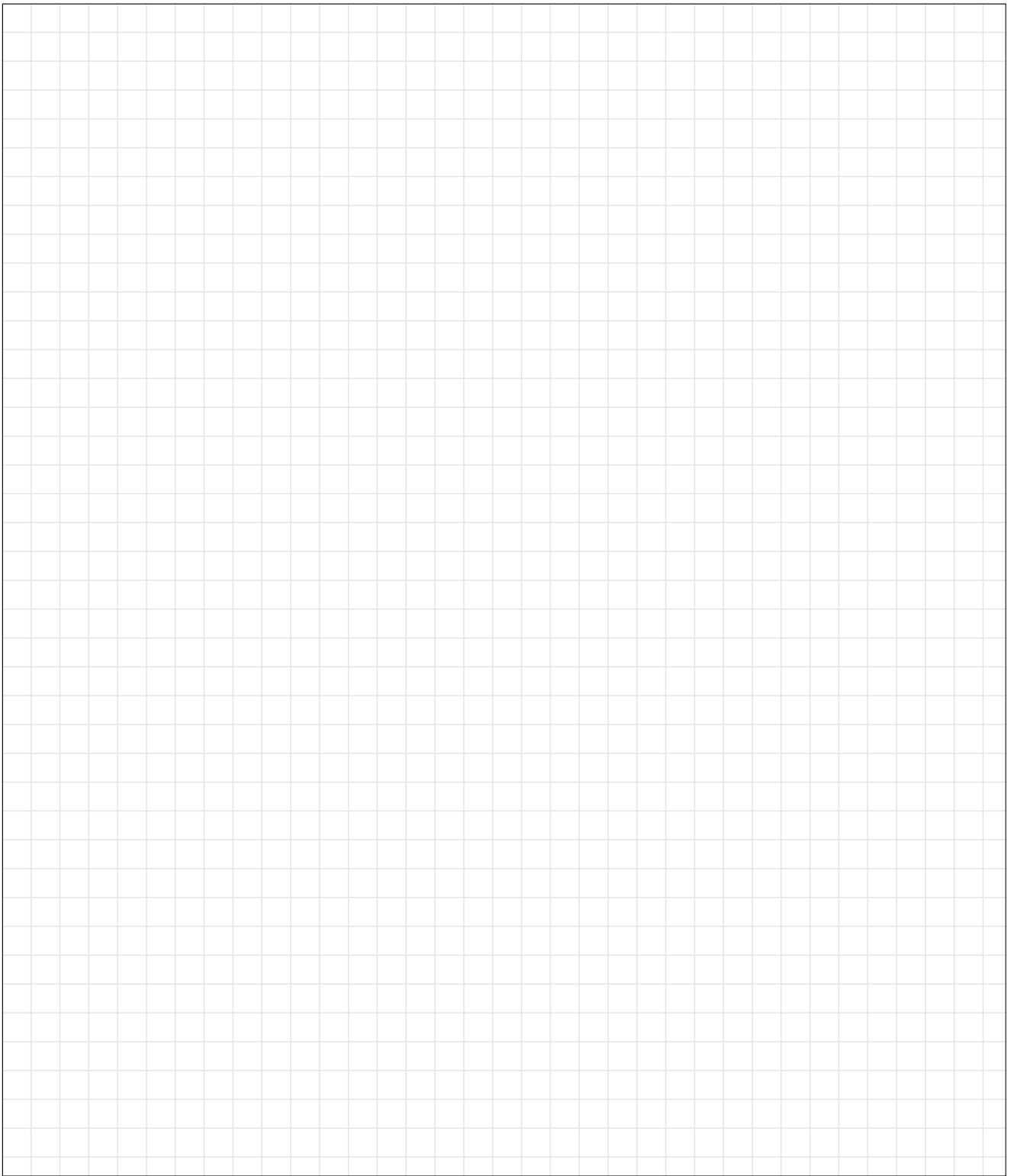
$u$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  si et seulement si l'image d'une base de  $E$  par  $u$  est une base de  $F$ .

## 6.2 Application linéaire définie par l'image d'une base

**Théorème 6.3.** *Étant données une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$  et une famille d'autant de vecteurs  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  dans  $F$ , il existe une unique application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  telle que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u(e_i) = f_i$ .*

**Exemple 6.1.** Soit  $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par  $f(1) = X^2 + 2X$ ,  $f(X - 1) = X^2 + 5$ ,  $f((X - 1)^2) = 2X - 4$ . Déterminer l'image d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ .





**Corollaire 6.4.** Soit  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

$$f = g \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(e_i) = g(e_i).$$

Deux applications linéaires sont égales si et seulement si leurs images d'une base sont les mêmes.

**Corollaire 6.5.** Une application linéaire est nulle si et seulement si l'image d'une base par cette application linéaire est la famille nulle.

### 6.3 Application linéaire définie sur deux sev supplémentaires

**Proposition 6.6.** Soit  $E_1, E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ . Soit  $f_1 : E_1 \longrightarrow F$  et  $f_2 : E_2 \longrightarrow F$  deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire  $f : E \longrightarrow F$  telle que  $f|_{E_1} = f_1$  et  $f|_{E_2} = f_2$ . C'est-à-dire  $\forall x_1 \in E_1, \quad f(x_1) = f_1(x_1)$  et  $\forall x_2 \in E_2, \quad f(x_2) = f_2(x_2)$ .

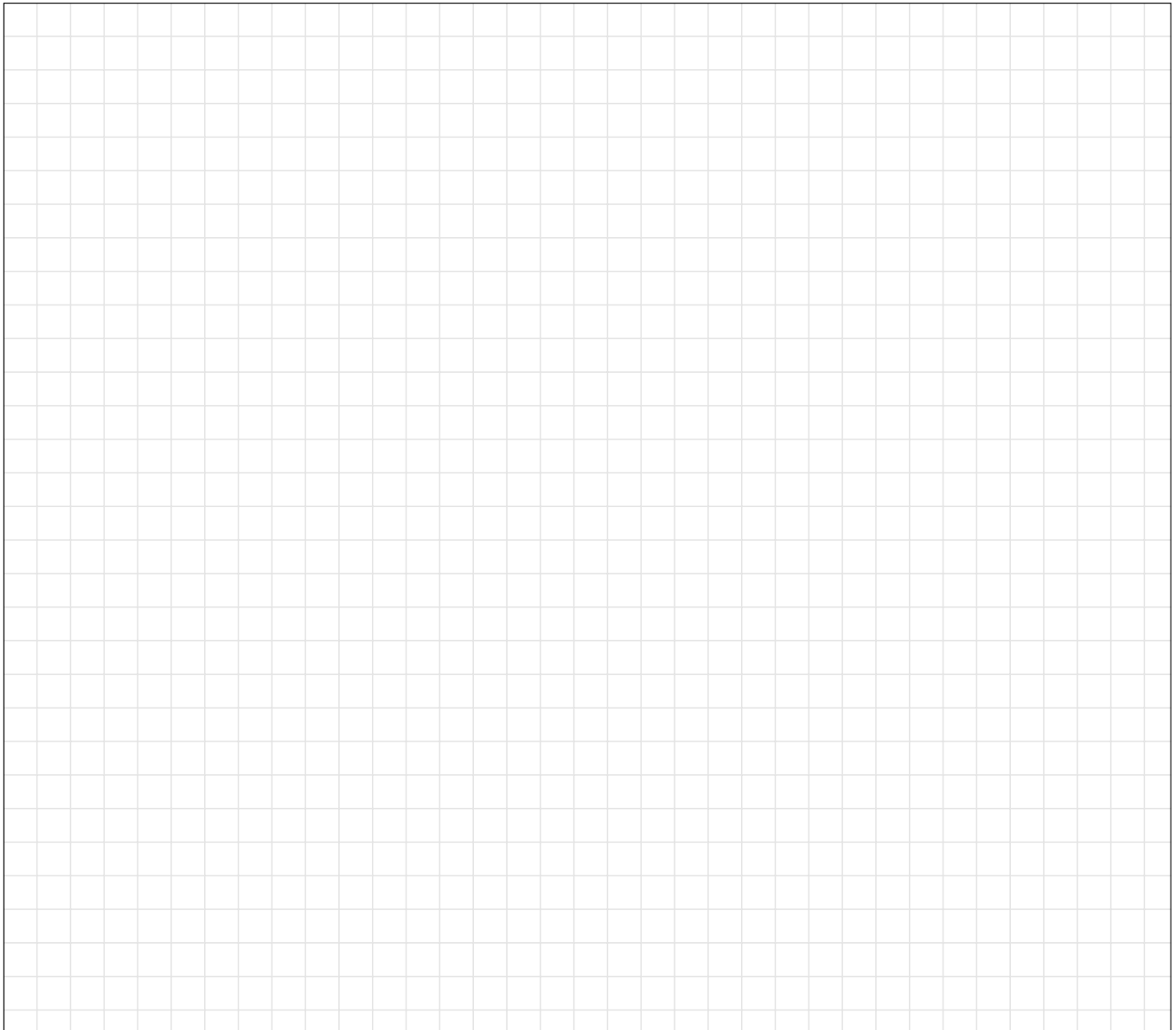
## 7 Applications linéaires essentielles

### 7.1 Homothéties

**Définition 7.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle homothétie toute application  $f : E \longrightarrow E$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = \lambda.x$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  un scalaire non nul fixé.

**Proposition 7.1.** Une homothétie de  $E$  est un automorphisme de  $E$ .

L'homothétie de rapport  $\lambda \in \mathbb{K}$  de l'espace vectoriel  $E$  est l'application  $\lambda.id_E$ .



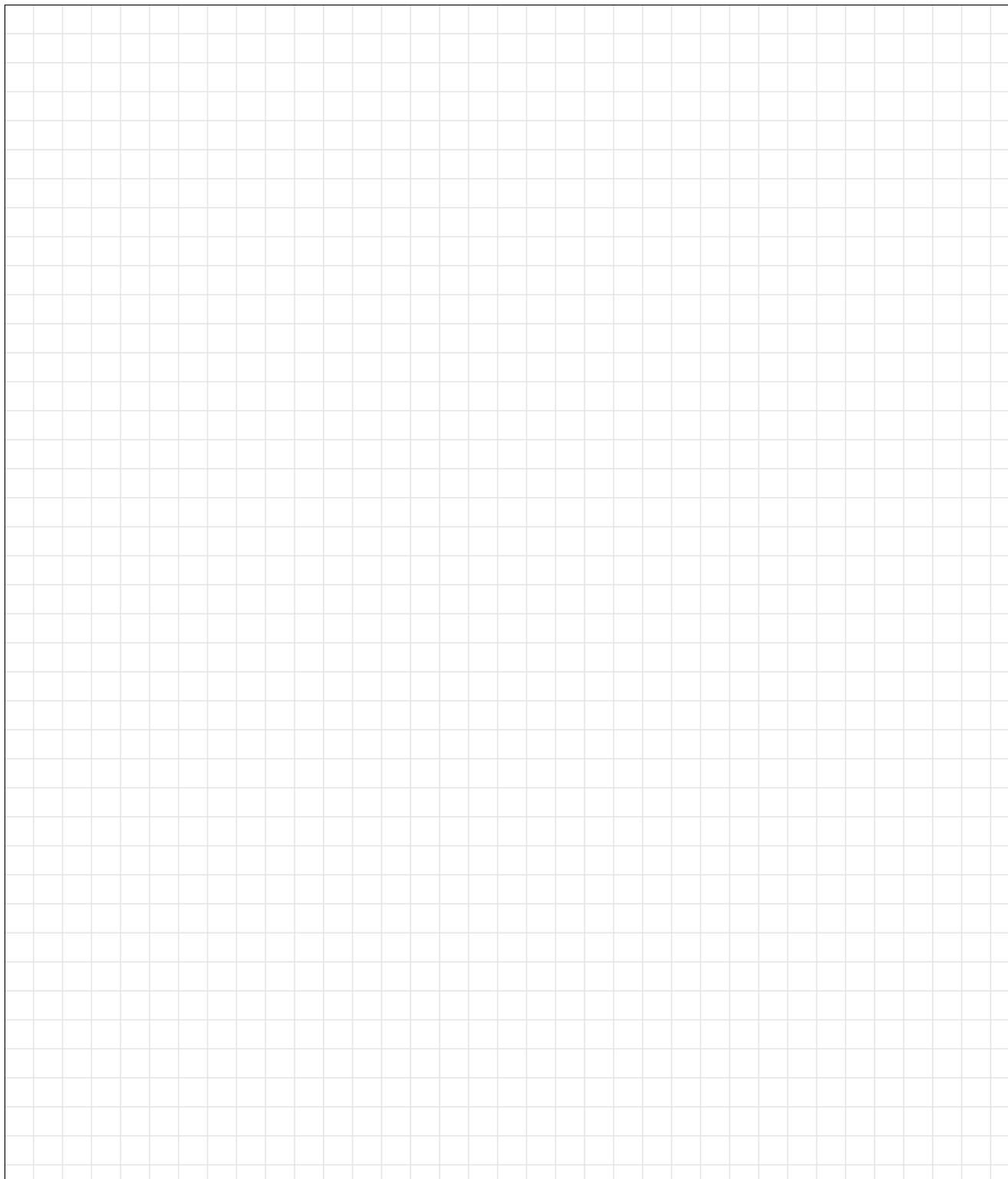


## 7.2 Projecteurs

**Définition 7.2.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

On appelle projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , l'application  $p : E \longrightarrow E$  qui à  $x \in E$  associe l'unique vecteur  $y \in F$  tel que  $x = y + z$  avec  $z \in G$ .

Une telle application est aussi appelée projecteur.



**Théorème 7.2.** Soit  $p$  une application de  $E$  dans  $E$ .

$p$  est un projecteur si et seulement si  $p$  est linéaire et  $p \circ p = p$ .

Dans ce cas,  $p$  projette sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$ .

*Démonstration.*

- Si  $p$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Soit  $x \in E$  et  $y \in E$  et  $\alpha \in K$ .  
Les vecteurs  $x$  et  $y$  se décomposent en  $x = x_F + x_G$  et  $y = y_F + y_G$  avec  $x_F, y_F \in F$  et  $x_G, y_G \in G$ . On a  $p(x) = x_F$  et  $p(y) = y_F$ .  
Alors  $\alpha x + y$  se décompose en  $\alpha x + y = (\alpha x_F + y_F) + (\alpha x_G + y_G)$  avec  $\alpha x_F + y_F \in F$  et  $\alpha x_G + y_G \in G$  car  $F, G$  sont des sev.  
Alors on a  $p(\alpha x + y) = \alpha x_F + y_F = \alpha p(x) + p(y)$ . L'application  $p$  est donc linéaire.  
De plus, pour  $x \in E$ , que l'on écrit  $x = x_F + x_G$ , on a  $p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x_F)$  mais comme  $x_F \in F$ , on a  $x_F = x_F + 0$  donc  $p(x_F) = x_F$  et finalement,  $p \circ p(x) = p(x)$ . On conclut  $p \circ p = p$ .
- Réciproquement, si  $p$  est linéaire et  $p \circ p = p$ , alors on pose  $G = \text{Ker } p$  et  $F = \text{Im } p$ .  
Soit  $y \in F \cap G$ ,  $y$  est une image donc il existe  $x \in E$  tel que  $y = p(x)$  et  $y \in G$  donc  $p(y) = 0$   
 $\implies y = p(x) = p \circ p(x) = p(p(x)) = p(y) = 0$ . Donc  $F \cap G \subset \{0\}$ .  
Et, comme on a toujours l'inclusion réciproque,  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ .  
Soi  $x \in E$ , alors  $x$  s'écrit  $x = p(x) + (x - p(x))$  avec  $p(x) \in F$  et  $x - p(x) \in G$  car  $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$ . Donc  $E = F + G$ .  
Alors on a  $E = F \oplus G$  et la relation  $x = p(x) + (x - p(x))$  prouve que  $p$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .
- Enfin, si  $p$  est un projecteur, alors les images sont des éléments de  $F$  donc  $\text{Im } p \subset F$ .  
Et réciproquement tout élément  $z \in F$  est sa propre image  $p(z) = z$  donc  $F \subset \text{Im } p$ . On en déduit  $\text{Im } p = F$ .  
Les éléments  $u \in G$  s'écrivent  $u = 0 + u$  avec  $0 \in F$  et  $u \in G$  donc  $p(u) = 0 \implies u \in \text{Ker } p$ . On a donc  $G \subset \text{Ker } p$ .  
Réciproquement, si  $p(u) = 0$  pour  $u \in E$ , alors  $u$  s'écrit  $u = 0 + u_G$  avec  $u_G \in G$ . On en déduit que  $u \in G$  ce qui prouve  $\text{Ker } p \subset G$ . On a donc  $\text{Ker } p = G$ .

□

*Remarque 7.1.* Pour étudier une projection  $p$ , on cherche les vecteurs invariants :  $p(x) = x \iff (p - \text{id})(x) = \vec{0}$  car, pour une projection,  $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id})$ .

**Exemple 7.1.** Montrons que  $f(x, y) = \frac{1}{5}(6x - 2y, 3x - y)$  est une projection.

On calcule  $f \circ f(x, y) = \frac{1}{5}(6X - 2Y, 3X - Y)$  avec  $X = \frac{6x - 2y}{5}$  et  $Y = \frac{3x - y}{5}$ .

Ce qui donne  $f \circ f(x, y) = \frac{1}{25}(30x - 10y, 15x - 5y) = f(x, y)$  pour tous  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Comme  $f$  est aussi linéaire,  $f$  est une projection.

On cherche les vecteurs invariants :  $f(x, y) = (x, y) \iff x - 2y = 0 \iff (x, y) \in \text{Vect}(2, 1)$ . Donc  $\text{Im } f = \text{Vect}((2, 1))$ .

Et le noyau de  $f$  :  $f(x, y) = (0, 0) \iff 3x - y = 0 \iff (x, y) \in \text{Vect}(1, 3)$ . Donc  $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 3))$ .  
Conclusion :  $f$  est la projection sur  $\text{Vect}((2, 1))$  parallèlement à  $\text{Vect}((1, 3))$

### 7.3 Symétries

**Définition 7.3.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On appelle symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , l'application  $s : E \longrightarrow E$  qui à  $x$  s'écrivant  $x = y + z$  avec  $y \in F$  et  $z \in G$  associe  $s(x) = y - z$ .

**Proposition 7.3.** Une symétrie  $s$  de  $E$  est un automorphisme involutif de  $E$  : i.e.  $s \circ s = s^2 = id_E$ .

**Théorème 7.4.** Soit  $s$  une application de  $E$  dans  $E$ .

$s$  est une symétrie si et seulement si  $s$  est linéaire et  $s \circ s = id_E$ .

Dans ce cas,  $s$  est une symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - id_E)$  parallèlement à  $\text{Ker}(s + id_E)$ .

