TD 20 - Espaces probabilisés finis

Exercice 1 :

Le chevalier de Méré, ami de Blaise Pascal, grand joueur, s'étonnait d'obtenir en lançant trois dés cubiques plus souvent 11 que 12 comme total des points alors qu'il y a autant de façons (six) de décomposer 11 que 12 en somme d'entiers de 1 à 6. Expliquer.

Exercice 2 :

On considère une famille ayant 3 enfants. Les sexes des enfants sont équiprobables.

Quelle est la probabilité que les 3 enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?

Quelle est la probabilité que les 3 enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

Exercice 3 :

On a mélangé 10 paires de chaussures différentes et on tire simultanément 4 chaussures (chaque chaussure est équiprobable). Calculer la probabilité des événements suivants : (une paire désigne une chaussure droite et une chaussure gauche correspondante)

A : on a obtenu deux paires. B : on a obtenu au moins une paire. C : on a obtenu une seule paire.

Exercice 4 :

On dispose de 3 dés A, B et C à faces peintes. Le dé A a 5 faces rouges et 1 face blanche. Le dé B a 4 faces blanches et 2 faces rouges. Et le dé C a 3 faces rouges et 3 faces blanches. On choisit un dé au hasard et on le lance 3 fois.

1. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu 3 faces rouges à la fin des 3 lancers.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir une face rouge au premier lancer sachant qu'on a une face rouge au second lancer.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir une face rouge au troisième tirage sachant qu'on a obtenu une face rouge à chacun des deux premiers lancers.
4. Les trois lancers ont donné une face rouge. Déterminer la probabilité d'avoir lancé le dé A, B ou C.

Exercice 5 :

Une loterie se déroule une fois par semaine. Chaque semaine, sur 100 billets, k sont gagnants avec $k \leqslant 90$. Chaque billet coûte 1 euro. On dispose de 10 euros. Deux stratégies sont possibles :

A : on achète 10 billets en une seule fois, ou B : on achète 1 billet à la fois pendant 10 semaines.

Quelle est la meilleure stratégie pour obtenir au moins 1 billet gagnant ?

Exercice 6 :

Un sac contient 3 jetons. L'un de ces jetons a 2 faces noires, un autre 2 faces blanches et le troisième a une face noire et une face blanche. On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait 2 faces noires ?

Exercice 7 :

La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est $0,05$. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité $0,96$,
- si la pièce est défectueuse, elle est refusée avec la probabilité $0,98$.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle . Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ? Quelle est la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 8 :

On lance 2 dés à 6 faces. Étudier l'indépendance mutuelle ou deux à deux des événements :

A « le premier dé donne une face impaire », B « le deuxième dé donne une face impaire », C « la somme des deux résultats est impaire ».

Exercice 9 :

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune initialement 2 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard une boule de l'urne U_1, on note sa couleur et on la met dans l'urne U_2. On tire alors une boule de U_2. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois une boule rouge ?

Exercice 10 :

Dans une population contenant une proportion $p \in]0,1[$ de personnes parlant le russe, on choisit un individu au hasard. Quelle est la probabilité que cet individu donne la traduction exacte d'un terme russe parmi 15 traductions proposées ?

Exercice 11 :

On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. On tire une boule dans l'urne. Si cette boule est rouge, on la remet dans l'urne. Si elle est verte, on la remet dans l'urne avec a nouvelles boules rouges ($a \in \mathbb{N}$). On tire une deuxième boule de l'urne. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit verte ?

Exercice 12 :

Un fumeur essaie d'arrêter de fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,3 et s'il fume un jour, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain vaut 0,9.

Quelle est la probabilité p_n qu'il fume le $n$ième jour ? Que se passe-t-il lorsque n devient grand ?

Exercice 13 :

N personnes tirent un objet avec remise dans une urne contenant n objets distincts. Déterminer la probabilité pour qu'il y ait au moins 2 personnes ayant tiré le même objet.

Même question pour une urne contenant p fois n objets.

Exercice 14 :

Un livre contient 5 erreurs. À chaque relecture, toute erreur a la probabilité $\frac{1}{3}$ d'être corrigée. Les relectures et les corrections sont indépendantes les unes des autres.

Déterminer le nombre minimum de relectures pour que la probabilité qu'il n'y ait plus d'erreur soit supérieure à $0,9$.

Exercice 15 :

Une épreuve orale est organisée en lots de 3 sujets tirés au sort parmi 80 sujets portant sur des parties différentes du cours. L'étudiant doit traiter un des sujets de son choix.

1. Combien d'épreuves différentes peut-on organiser ?
2. Un candidat se présente en n'ayant révisé que 50 sujets. Quelle est la probabilité pour qu'il puisse traiter :
   (a) les 3 sujets, (b) deux sujets, (c) un sujet, (d) aucun sujet.
3. Combien de sujets un étudiant doit-il réviser pour avoir une probabilité au moins égale à 0,99 de répondre au moins à un sujet ?

Exercice 16 : Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons, et on sait qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (qui peut être égal à 0 ; autrement dit, on peut piocher une poignée vide).

On note A_i l'événement « On a tiré une poignée contenant i jetons ».

1. Quelle est la probabilité de piocher le numéro 1 sachant qu'on a pioché i jetons ?
2. Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans la poignée ?
3. Les évènements T_1 : « On a pioché le jeton 1 » et T_2 : « On a pioché le jeton 2 » sont-ils indépendants ?

On suppose maintenant qu'on a équiprobabilité sur toutes les poignées possibles (toujours en comptant la poignée vide).

4. Calculer $P(A_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.
5. Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans la poignée ?
6. Les évènements T_1 et T_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 17 :

Une succession de systèmes informatiques $A_1, A_2, \dots, A_n$ se transmettent une information binaire du type 0 ou 1.

Chaque système A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p au système suivant A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1 - p$. On suppose $0 < p < 1$

Chaque système se comporte indépendamment des autres. Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?