# Chapitre 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

# 4 Applications linéaires

### 4.1 Morphismes d'espaces vectoriels

Soit E, F deux espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

**Définition 4.1.** Une application f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est dite linéaire si

$$\forall (x,y) \in E^2$$
,  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  et  $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ ,  $f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$ .

**Théorème 4.1.** Une application  $f: E \longrightarrow F$  est linéaire si et seulement si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \qquad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$
  
$$\iff \forall (x,y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \qquad f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Remarque 4.1. L'image d'une combinaison linéaire de vecteurs par une application linéaire est la combinaison linéaire des images des vecteurs.

**Définition 4.2.** Une application linéaire  $f: E \longrightarrow E$  s'appelle un endomorphisme de E.

**notations 4.3.** On note  $\mathcal{L}(E,F)$  l'ensemble des applications linéaires de E dans F et  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$  l'ensemble des endomorphismes de E.

### 4.2 Exemples

# 4.3 Généralités sur les applications

Dans ce paragraphe, *E* et *F* sont deux ensembles.

**Définition 4.4.** Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

Pour  $x \in E$ , y = f(x) s'appelle l'image de x et x est un antécédent de y.

On appelle image directe par f d'une partie A de E, l'ensemble des images des éléments de A noté f(A):

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

On appelle image réciproque par f d'une partie B de F, l'ensemble des antécédents (éventuels) des éléments de B noté  $f^{-1}(B)$  :  $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$ 

Remarque 4.2. Attention : rien n'indique ici que f est bijective ni que son application réciproque  $f^{-1}$  existe.

**Définition 4.5.** Soit f une application de E dans F.

f est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

f est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent ce qui est équivalent à :

$$\forall z \in F, \exists x \in E : z = f(x).$$

f est bijective si f est injective et surjective ce qui est équivalent à tout élément de l'ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent par f.

**Lemme 4.2.** Soit f une application de E dans F.

f est bijective de E dans F si et seulement si il existe une application  $u: F \longrightarrow E$  telle que  $u \circ f = id_E$  et  $f \circ u = id_F$ .

### 4.4 Noyau et image d'une application linéaire

E et F sont deux espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 4.3.** *Soit*  $f : E \longrightarrow F$  *une application linéaire.* 

L'image directe d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

**Définition 4.6.** Étant donné une application linéaire  $f: E \longrightarrow F$ , on appelle :

• noyau de *f* le sous-espace vectoriel de *E* défini par

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}\{\overrightarrow{0}\} = \left\{ x \in E \mid f(x) = \overrightarrow{0} \right\}.$$

C'est l'ensemble des antécédents du vecteur nul par f.

• image de *f* le sous-espace vectoriel de *F* défini par

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{ f(x) \mid x \in E \} = \{ y \in F \mid \exists x \in E : y = f(x) \}.$$

C'est l'ensemble des images de E par f.

**Théorème 4.4.** Si f est une application linéaire de E dans F, alors

$$f$$
 est injective  $\iff$  Ker  $f = \{\overrightarrow{0}\}$  et par ailleurs,  $f$  est surjective  $\iff$  Im  $f = F$ .

**Exercice 4.1.** Déterminer le noyau et l'image de  $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$  définie par f(x,y) = (2x + y - z, x - 2y + z) Vu en classe

#### **Correction:**

Soit  $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$  et  $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^2$  deux vecteurs. On calcule

$$f(u+v) = (2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2),(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+(z_1+z_2))$$

soit par propriété du calcul vectoriel :

$$f(u+v) = (2x_1 + y_1 - z_1, x_1 - 2y_1 + z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2, x_2 - 2y_2 + z_2)$$

On reconnaît

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ . On calcule

$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y - \alpha z, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z) = \alpha (2x + y - z, x - 2y + z)$$

On a donc

$$f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

Les deux résultats prouvent que f est linéaire

On détermine le noyau de f: soit  $u \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \text{Ker } f \iff f(u) = \overrightarrow{0}$ .

On note u = (x, y, z), on a alors :

$$u \in \operatorname{Ker} f \iff \left\{ \begin{array}{ll} 2x + y - z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y + z & = & 0 \\ 5y - 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

On a trois inconnues et deux pivots, alors on a un paramètre :  $z = \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$u \in \operatorname{Ker} f \iff \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = \frac{1}{5}\alpha \\ y = \frac{3}{5}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

On en déduit que le noyau de f est la droite vectorielle dirigée par (1,3,5): Ker f = Vect((1,3,5))On détermine ensuite l'image de f:

un vecteur v = (a, b) appartient à l'image de f si et seulement si il existe un vecteur u = (x, y, z)tel que f(u) = v

$$(a,b) \in \operatorname{Im} f \iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x+y-z = a \\ x-2y+z = b \end{cases}$$
  
 $\iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x-2y+z = a \\ 5y-3z = a-2b \end{cases}$ 

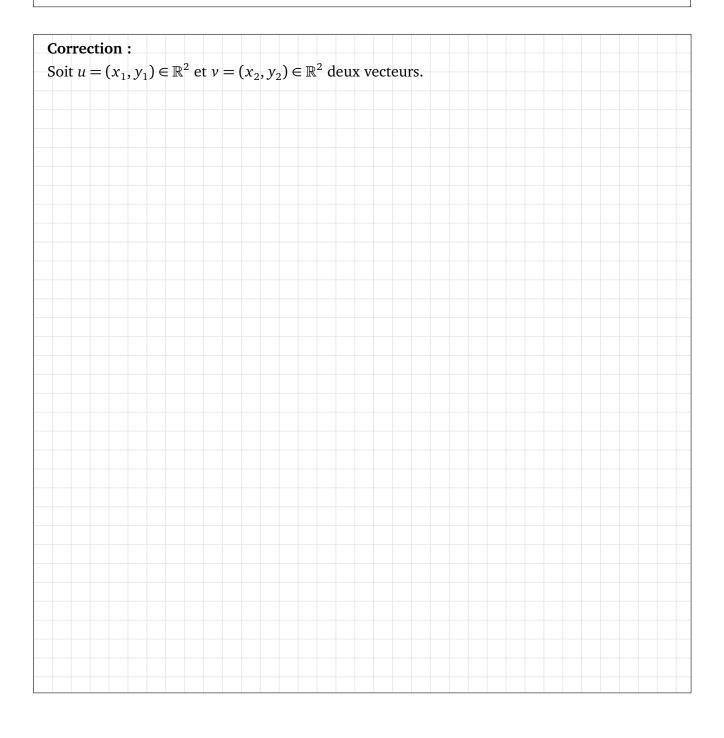
$$\iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - 2y + z = a \\ 5y - 3z = a - 2b \end{cases}$$

Le système est échelonné et a deux équations et trois inconnues (x, y, z). Il n'a pas d'équation de compatibilité, alors il a toujours des solutions (sous-entendu : il a des solutions pour toutes valeurs de a et b).

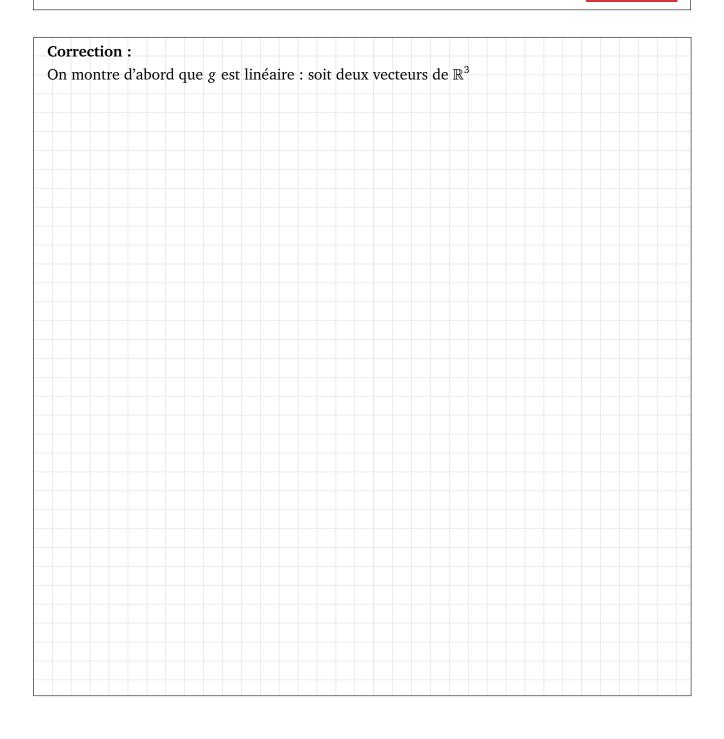
Alors, tous les vecteurs (a, b) de  $\mathbb{R}^2$  sont dans  $\operatorname{Im} f$ : on a  $\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{Im} f$ .

Et, on sait que  $\underline{\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2}$  par définition de f. Alors,  $\overline{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2}$  et il s'ensuit que f est surjective.

**Exercice 4.2.** Déterminer le noyau et l'image de  $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$  définie par g(x,y) = (x-2y,x+3y,2y)



**Exercice 4.3.** Déterminer le noyau et l'image de  $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  définie par h(x,y) = (x+2y-z,2x+y-2z,x-y-z) En cours ...

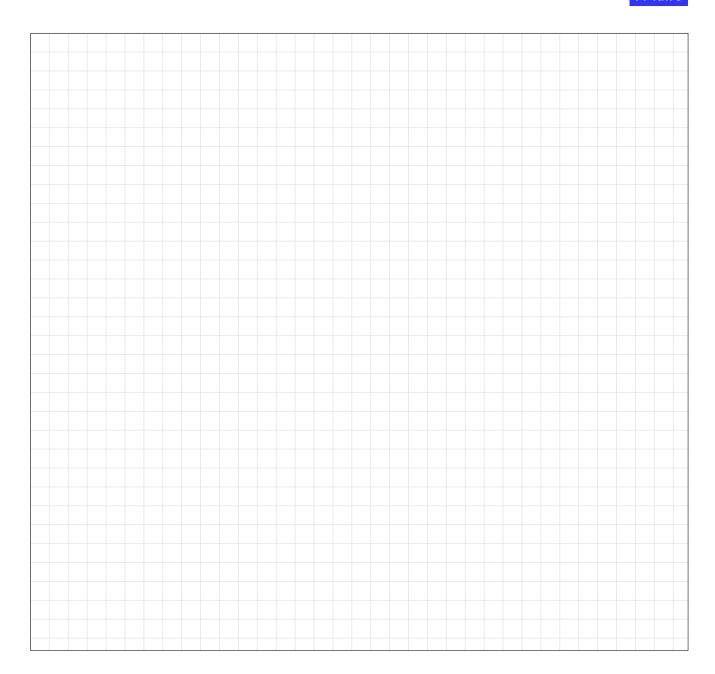


#### Autre exercice

**Exercice 4.4.** Soit  $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$  définie par  $\varphi(P) = (2X - 1)P' + 3XP$ 

- 1. Montrer que  $\varphi$  est linéaire.
- 2. Déterminer  $\operatorname{Ker} \varphi$  et  $\operatorname{Im} \varphi$ .

À faire



# 4.5 Combinaison linéaire d'applications linéaires

**Proposition 4.5.** Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et des scalaires  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ . Alors  $\alpha f + \beta g$  est une application linéaire de E dans F.

**Corollaire 4.6.**  $\mathcal{L}(E,F)$  est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(E,F)$ .

# 4.6 Composition d'applications linéaires

Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 4.7.** Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors  $g \circ f$  est linéaire de E dans G.

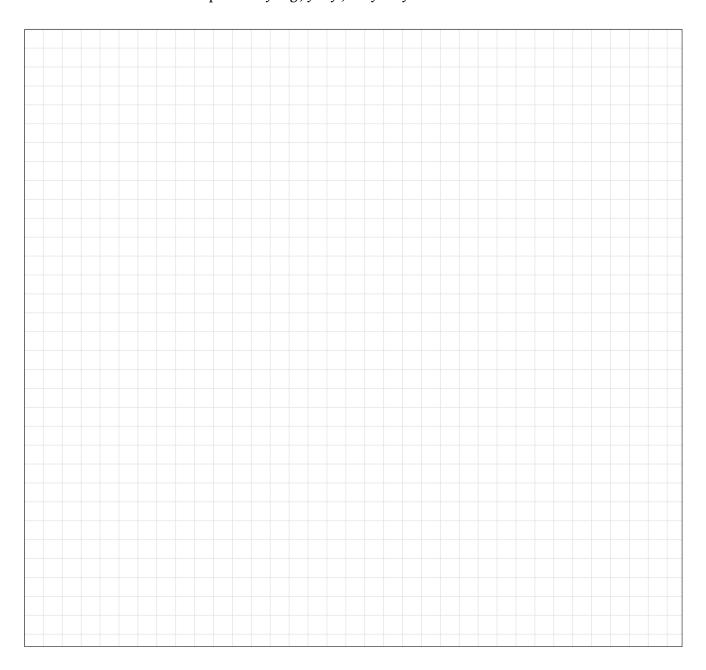
Démonstration.



**Exemple 4.1.** On considère les endomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  suivants :

$$f(x,y) = \frac{1}{5}(x+2y,2x+4y), \quad g(x,y) = \frac{1}{5}(4x-2y,-2x+4y) \text{ et } h(x,y) = (x,0)$$

Calculer les différentes composées :  $f \circ g$ ,  $f \circ f$ ,  $h \circ f$  et  $f \circ h$ 



# 4.7 Isomorphismes et automorphismes

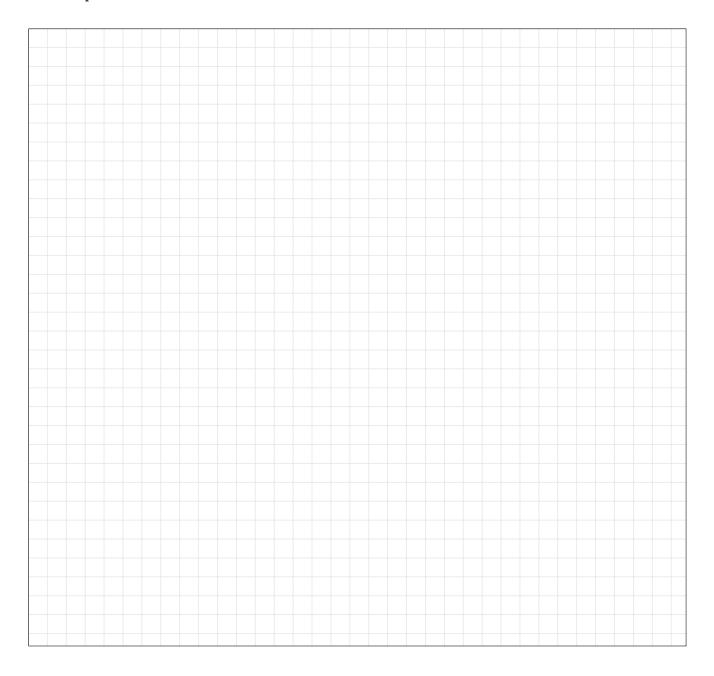
**Définition 4.7.** Une application linéaire bijective  $f: E \longrightarrow F$  s'appelle un isomorphisme. Un endomorphisme bijectif  $f: E \longrightarrow E$  s'appelle un automorphisme.

**Proposition 4.8.** Soit f une application linéaire de E dans F. Si f est un isomorphisme de E dans F alors  $f^{-1}$  est aussi linéaire et est un isomorphisme de F dans E.

**Proposition 4.9.** L'ensemble des automorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle groupe linéaire de E, noté  $\mathscr{GL}(E)$ .

**Corollaire 4.10.** Pour  $f, g \in \mathcal{GL}(E)$ , on a  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ .

**Exemple 4.2.** Montrons que l'application  $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  définie par f(x,y) = (x-2y,x+y) est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .



#### Calcul d'endomorphismes 4.8

Soit E un espace vectoriel et  $f,g \in \mathcal{E}$  deux endomorphismes de E.

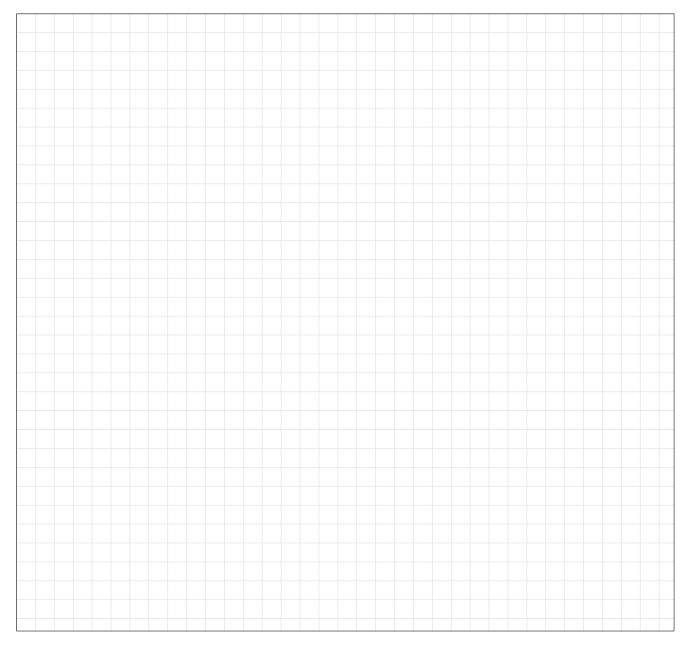
On peut effectuer des combinaisons linéaires :  $\alpha f + \beta g$  pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  réels est un endomorphisme de E,

On peut composer les endomorphismes :  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont deux endomorphismes de E.

On peut composer les endomorphismes :  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont ucus character.

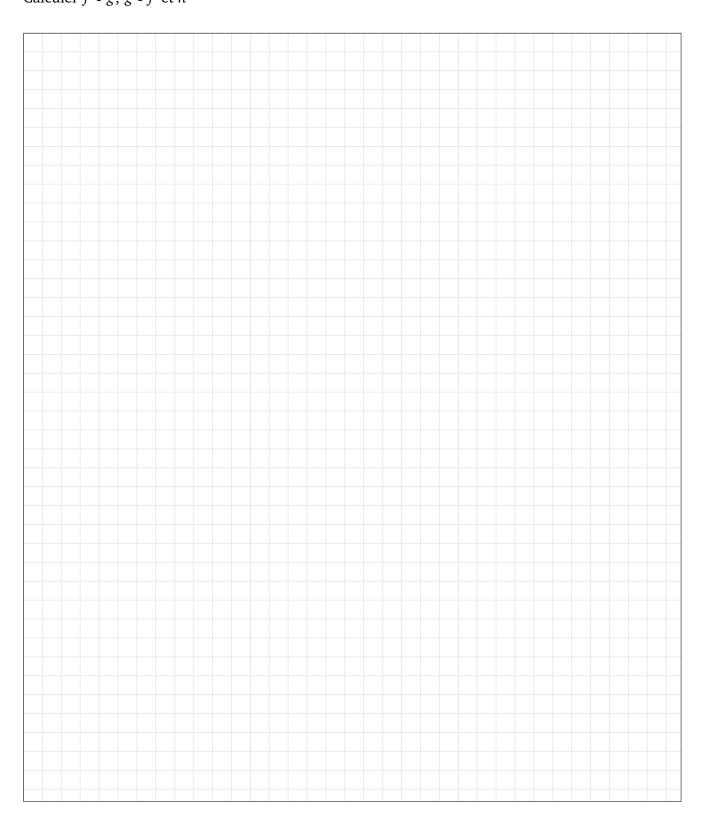
On peut également calculer :  $f \circ f$  qu'on note  $f^2$ ,  $f \circ f \circ f = f^3$  et par récurrence,  $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots f \circ f}_{n \text{ fois}}$ 

Par convention,  $f^0 = id_E$ .

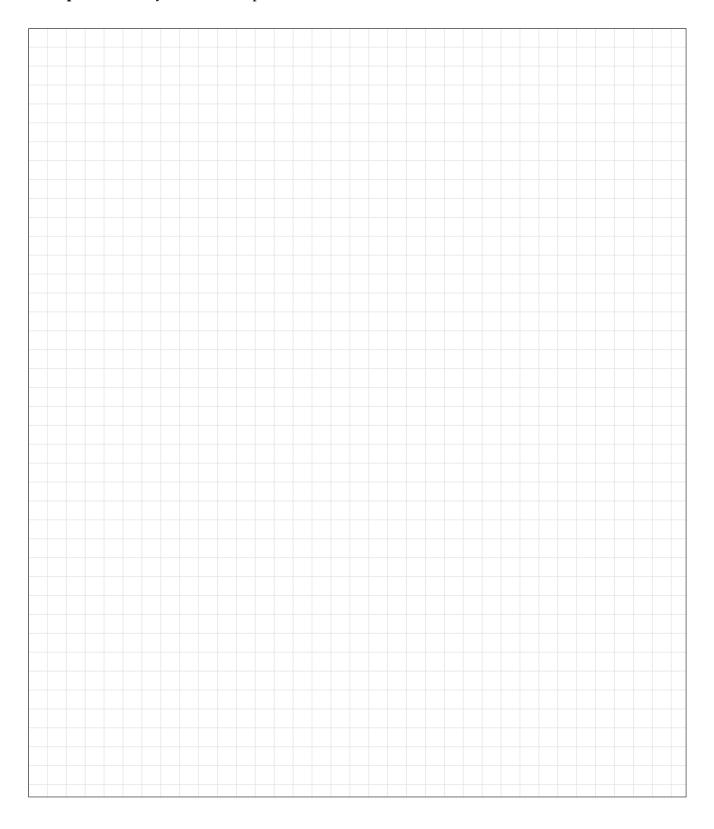


Exemple 4.3. On pose:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \longmapsto (x+y;x+y) \qquad (x,y) \longmapsto (x+y;x-y)$$
Calculer  $f \circ g, g \circ f$  et  $h^2$ 



**Exemple 4.4.** Soit f un endomorphisme de E.



# 5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

# 5.1 Somme de sous-espaces vectoriels

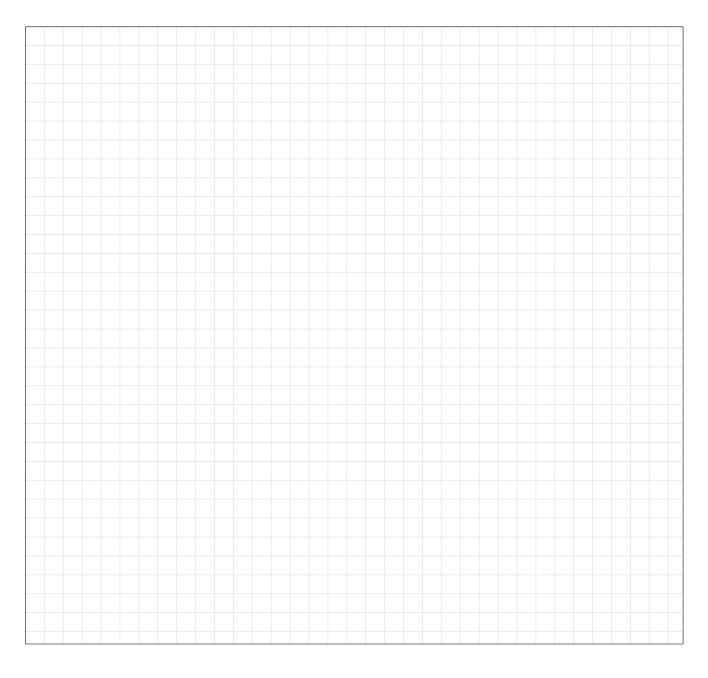
**Définition 5.1.** Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors le plus petit sous-espace vectoriel qui contient F et G est

$$H = \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

On l'appelle somme de F et G et on le note H = F + G.

H est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion de F et G.

**Exemple 5.1.** Soit 
$$F = \text{Vect}((1, 3, -1), (1, 1, 1))$$
 et  $G = \text{Vect}((1, 0, 1), (-1, 1, 0))$  Déterminer  $F + G$ 



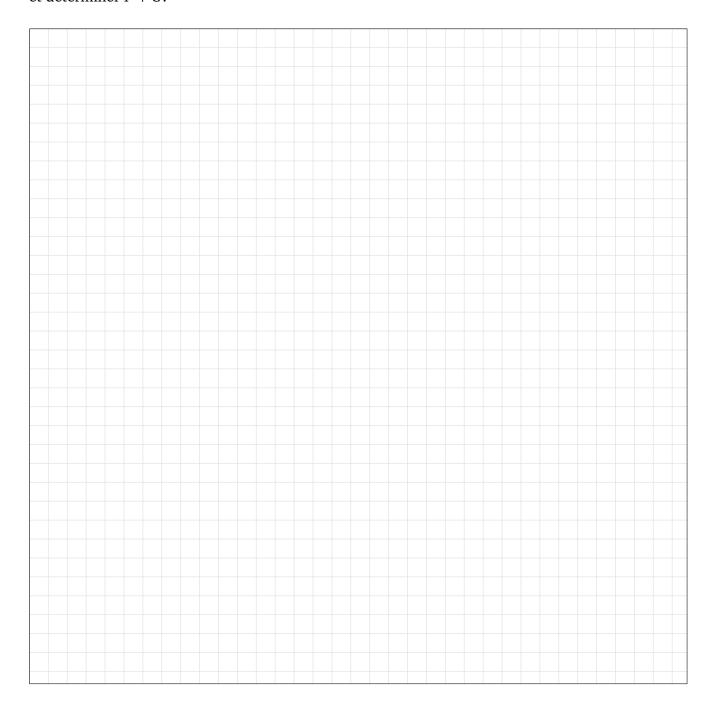
#### 5.2 Somme directe

**Définition 5.2.** On dit que deux sev F et G d'un espace vectoriel E, sont en somme directe si tout vecteur u de F+G s'écrit de manière unique u=v+w avec  $v\in F$  et  $w\in G$ . On note alors la somme  $F\oplus G$ .

**Proposition 5.1.** Deux sev F et G d'un espace vectoriel E, sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$ .

**Exemple 5.2.** Soit F = Vect((1,3,-1)) et G = Vect((1,0,1)). Montrer que F et G sont en somme directe et déterminer F + G.

**Exemple 5.3.** Soit  $F = \text{Vect}(X^2 + 1)$  et G = Vect(3X - 7). Montrer que F et G sont en somme directe et déterminer F + G.



# 5.3 Sous-espaces supplémentaires

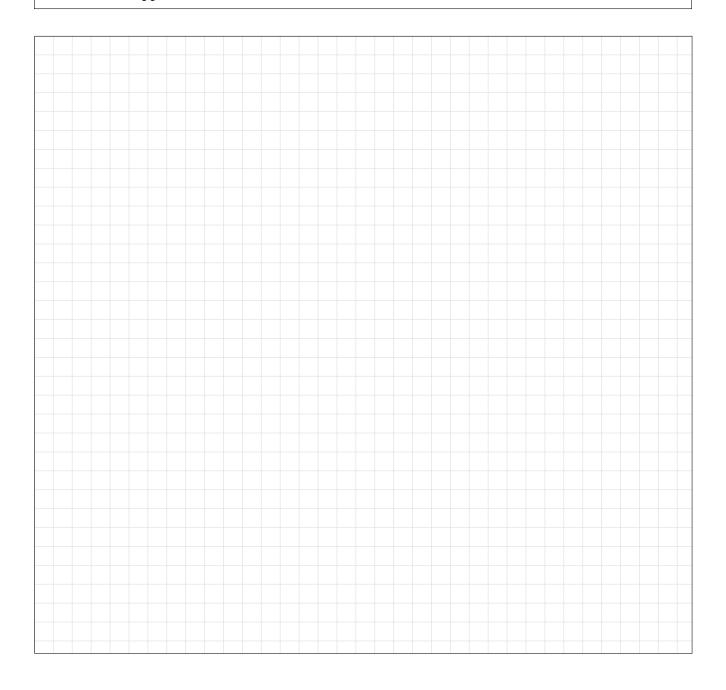
**Définition 5.3.** On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si E = F + G et si F et G sont en somme directe :  $E = F \oplus G$ .

**Théorème 5.2.** *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.* 

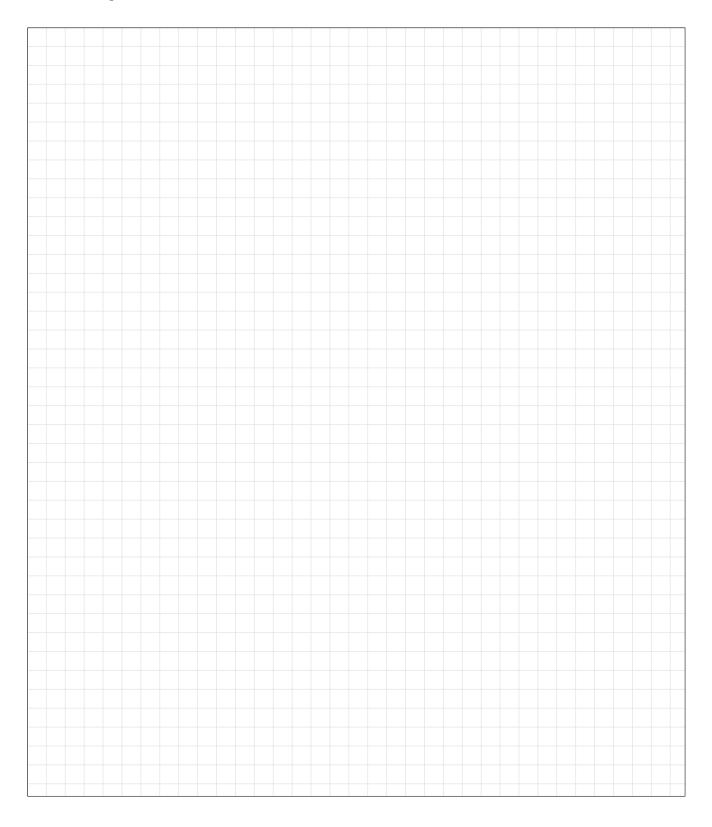
$$E = F \oplus G \iff \forall x \in E, \ \exists ! y \in F : \exists ! z \in G : \ x = y + z \ avec \ y \in F \ et \ z \in G$$

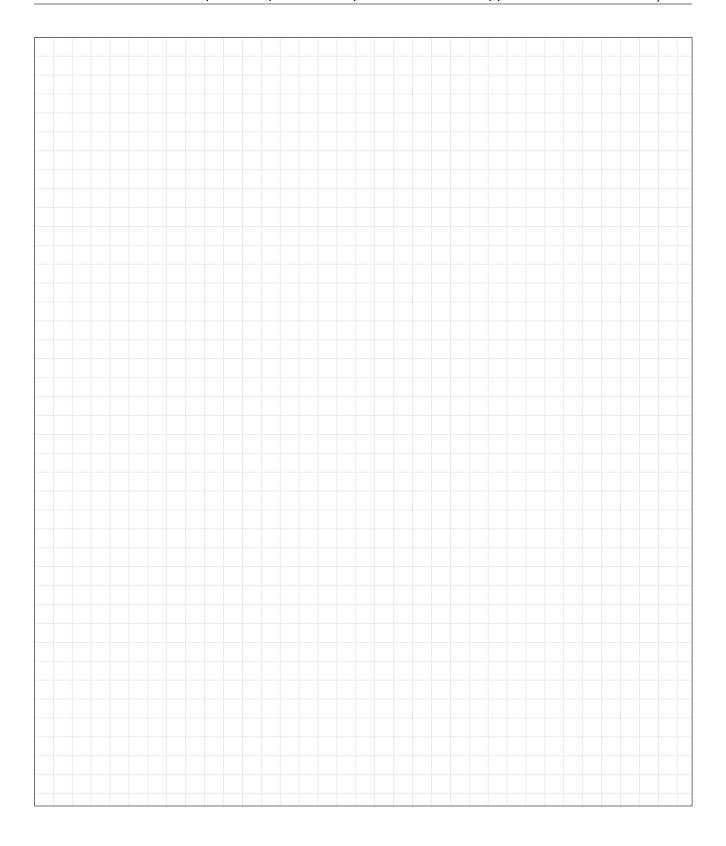
$$E = F \oplus G \iff E = F + G \ et \ F \cap G = \{ \overrightarrow{0} \}$$

**Exemple 5.4.** Soit F le sev de  $\mathbb{R}^3$  d'équation 2x + y - z = 0 et G = Vect((1, 0, 1)). Montrer que F et G sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .



**Exemple 5.5.** Montrer que les fonctions paires et les fonctions impaires sont deux sev supplémentaires de l'espace vectoriel E des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .





### 5.4 Base adaptée à une somme directe.

**Proposition 5.3.** Si F et G sont deux sev en somme directe et si  $(e_1, e_2, ..., e_p)$  est une base de F et  $(e_{p+1}, ..., e_q)$  est une base de G, alors  $(e_1, ..., e_q)$  est une base de la somme directe  $F \oplus G$ . On dit qu'une telle base est adaptée à la somme directe.

Démonstration.



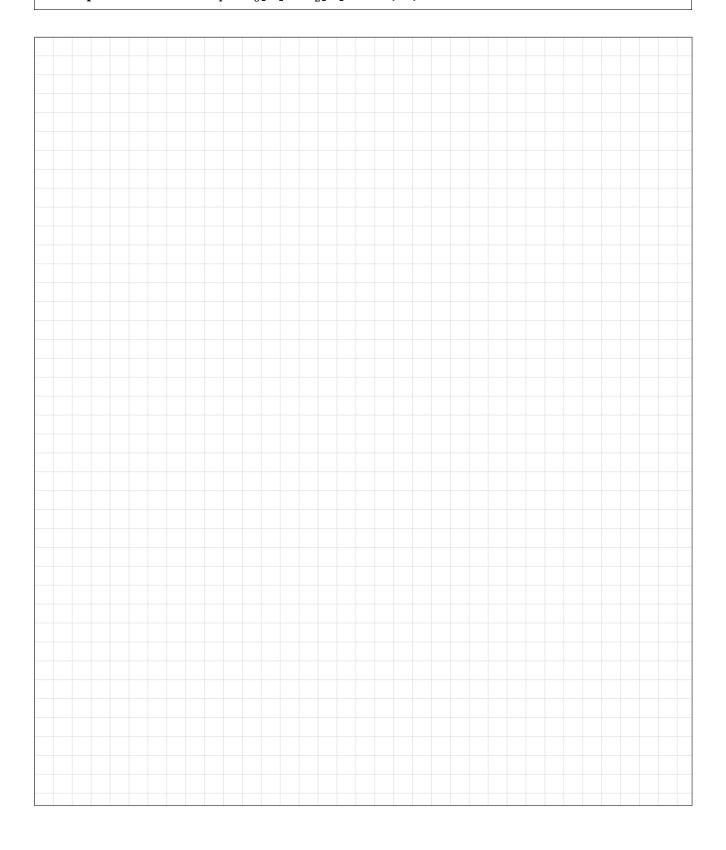
**Proposition 5.4.** Si  $(e_1, e_2, ..., e_p)$  est une base de F et  $(e_{p+1}, ..., e_q)$  est une base de G, telles que  $(e_1, ..., e_q)$  est une base de E, alors  $E = F \oplus G$ .

#### Théorème 5.5.

Si  $(e_1, e_2, ..., e_n)$  est une famille libre d'un espace vectoriel, alors  $Vect(e_1, ..., e_k)$  et  $Vect(e_{k+1}, ..., e_n)$  sont en somme directe.

Si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de E, alors  $E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) \oplus \text{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$  pour tout  $p \in [[1, n-1]]$ .

**Exemple 5.6.** Montrons que  $\mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_2[X] \oplus \text{Vect}(X^3)$ 



# 6 Applications linéaires et familles de vecteurs

# 6.1 Image d'une base par une application linéaire

**Théorème 6.1.** Soit  $u: E \longrightarrow F$  une application linéaire et  $(e_i)_{i=1,\dots,n}$  une base de E.

- La famille  $(u(e_i))_{i=1,\dots,n}$  est une famille génératrice de  ${\rm Im}\,u$ .
- u est surjective  $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$  est génératrice de F.
- u est injective  $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$  est libre dans F.
- u est bijective  $\iff (u(e_i))_{i=1,\dots,n}$  est une base de F.

#### Démonstration.



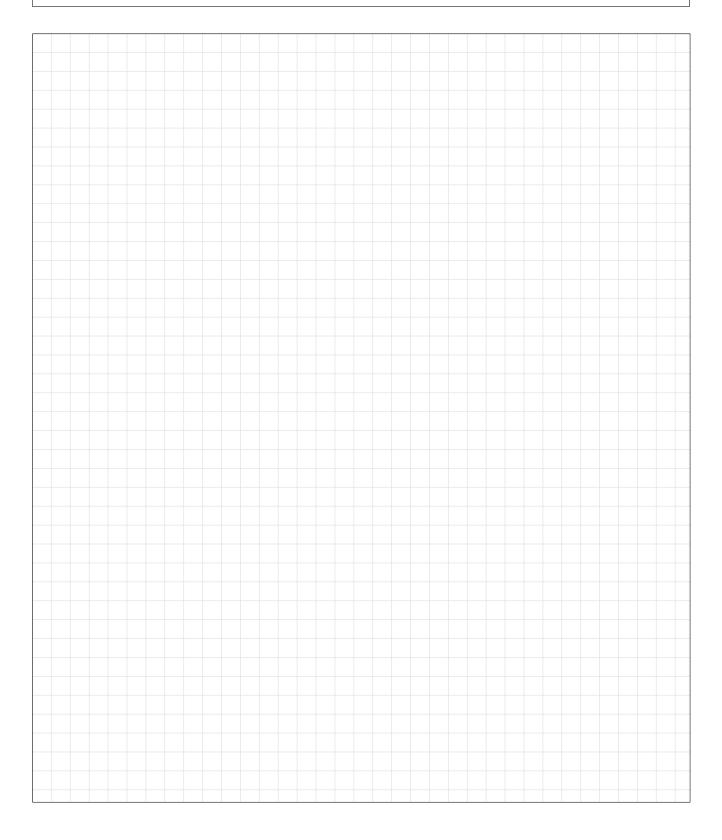
**Corollaire 6.2.** *Soit*  $u : E \longrightarrow F$  *une application linéaire.* 

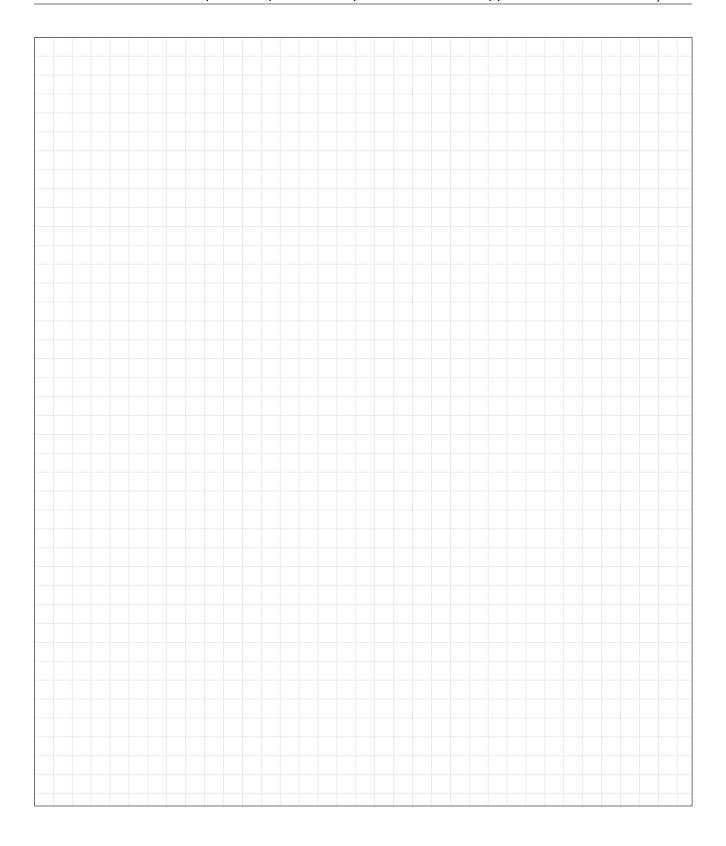
u est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

# 6.2 Application linéaire définie par l'image d'une base

**Théorème 6.3.** Étant données une base  $(e_1, e_2, ..., e_n)$  de E et une famille d'autant de vecteurs  $(f_1, f_2, ..., f_n)$  dans F, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que  $\forall i \in [1, n]$ ,  $u(e_i) = f_i$ .

**Exemple 6.1.** Soit  $f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par  $f(1) = X^2 + 2X$ ,  $f(X - 1) = X^2 + 5$ ,  $f((X - 1)^2) = 2X - 4$ . Déterminer l'image d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ .





**Corollaire 6.4.** Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et  $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$  une base de E.  $f = g \iff \forall i \in [1, n], \quad f(e_i) = g(e_i).$ 

Deux applications linéaires sont égales si et seulement si leurs images d'une base sont les mêmes.

**Corollaire 6.5.** Une application linéaire est nulle si et seulement si l'image d'une base par cette application linéaire est la famille nulle.

### 6.3 Application linéaire définie sur deux sev supplémentaires

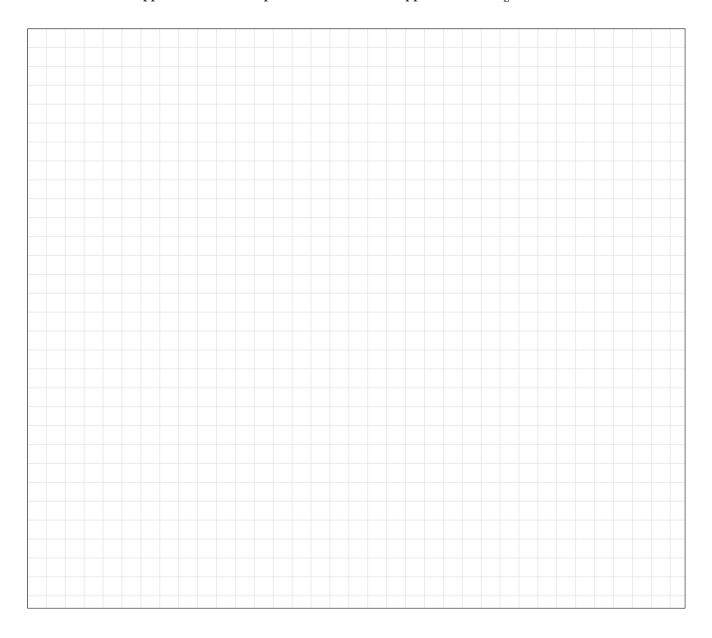
**Proposition 6.6.** Soit  $E_1, E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit  $f_1 : E_1 \longrightarrow F$  et  $f_2 : E_2 \longrightarrow F$  deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire  $f : E \longrightarrow F$  telle que  $f_{|E_1} = f_1$  et  $f_{|E_2} = f_2$ . C'est-à-dire  $\forall x_1 \in E_1$ ,  $f(x_1) = f_1(x_1)$  et  $\forall x_2 \in E_2$ ,  $f(x_2) = f_2(x_2)$ .

# 7 Applications linéaires essentielles

### 7.1 Homothéties

**Définition 7.1.** Soit E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle homothétie toute application  $f: E \longrightarrow E$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = \lambda . x$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  un scalaire non nul fixé.

**Proposition 7.1.** Une homothétie de E est un automorphisme de E. L'homothétie de rapport  $\lambda \in \mathbb{K}$  de l'espace vectoriel E est l'application  $\lambda.id_E$ .

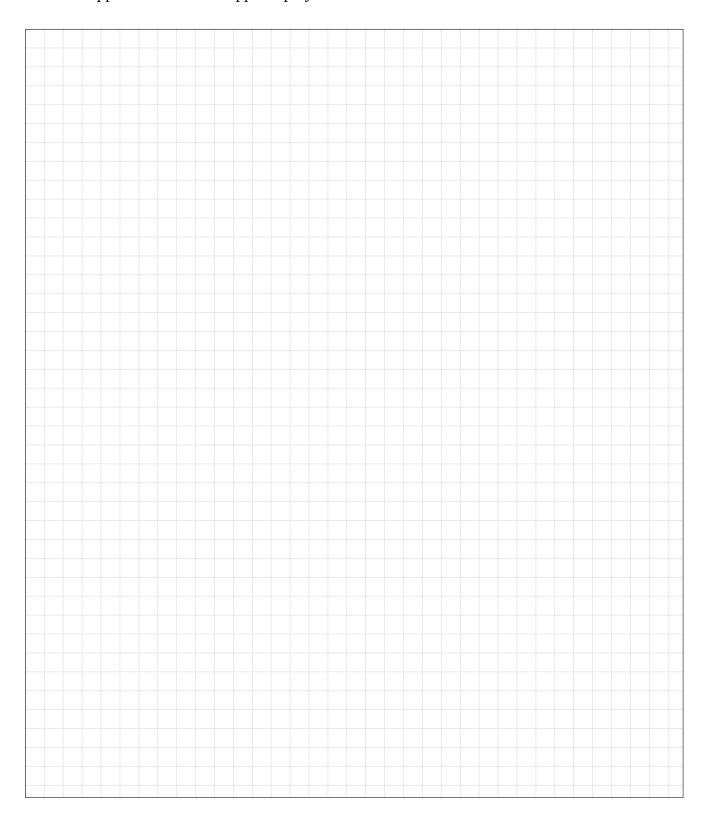


# 7.2 Projecteurs

**Définition 7.2.** Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E.

On appelle projection sur F parallèlement à G, l'application  $p: E \longrightarrow E$  qui à  $x \in E$  associe l'unique vecteur  $y \in F$  tel que x = y + z avec  $z \in G$ .

Une telle application est aussi appelée projecteur.



#### **Théorème 7.2.** Soit p une application de E dans E.

p est un projecteur si et seulement si p est linéaire et  $p \circ p = p$ .

Dans ce cas, p projette sur Imp parallèlement à Kerp.

#### Démonstration.

• Si p est la projection sur F parallèlement à G. Soit  $x \in E$  et  $y \in E$  et  $\alpha \in K$ .

Les vecteurs x et y se décomposent en  $x = x_F + x_G$  et  $y = y_F + y_G$  avec  $x_F, y_F \in F$  et  $x_G, y_G \in G$ . On a  $p(x) = x_F$  et  $p(y) = y_F$ .

Alors  $\alpha x + y$  se décompose en  $\alpha x + y = (\alpha x_F + y_F) + (\alpha x_G + y_G)$  avec  $\alpha x_F + y_F \in F$  et  $\alpha x_G + y_G \in G$  car F, G sont des sev.

Alors on a  $p(\alpha x + y) = \alpha x_F + y_F = \alpha p(x) + p(y)$ . L'application p est donc linéaire .

De plus, pour  $x \in E$ , que l'on écrit  $x = x_F + x_G$ , on  $a p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x_F)$  mais comme  $x_F \in F$ , on a  $x_F = x_F + 0$  donc  $p(x_F) = x_F$  et finalement,  $p \circ p(x) = p(x)$ . On conclut  $p \circ p = p$  |.

• Réciproquement, si p est linéaire et  $p \circ p = p$ , alors on pose G = Ker p et F = Im p. Soit  $y \in F \cap G$ , u est une image donc il existe  $x \in E$  tel que y = p(x) et  $y \in G$  donc p(y) = 0 $\implies$   $y = p(x) = p \circ p(x) = p(p(x)) = p(y) = 0$ . Donc  $F \cap G \subset \{0\}$ .

Et, comme on a toujours l'inclusion réciproque,  $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}\ |$ 

Soi  $x \in E$ , alors x s'écrit x = p(x) + (x - p(x)) avec  $p(x) \in F$  et  $x - p(x) \in G$  car p(x - x)p(x) = p(x) - p(-p(x)) = p(x) - p(x) = 0. Donc E = F + G.

Alors on a  $E = F \oplus G$  et la relation  $x = p(x) + (x - \overline{p(x)})$  prouve que p est la projection sur F parallèlement à G.

• Enfin, si p est un projecteur, alors les images sont des éléments de F donc Im  $p \subset F$ . Et réciproquement tout élément  $z \in F$  est sa propre image p(z) = z donc  $F \subset \operatorname{Im} p$ . On en déduit | Im p = F |

Les éléments  $u \in G$  s'écrivent u = 0 + u avec  $0 \in F$  et  $u \in G$  donc  $p(u) = 0 \Longrightarrow u \in K$  er p. On a donc  $g \subset \text{Ker } p$ .

Réciproquement, si p(u)=0 pour  $u\in E$ , alors  $\underline{u}$  s'écrit  $\underline{u}=0+u_G$  avec  $u_G\in G$ . On en déduit que  $u \in G$  ce qui prouve  $\operatorname{Ker} p \subset G$ . On a donc  $\operatorname{Ker} p = G$ 

Remarque 7.1. Pour étudier une projection p, on cherche les vecteurs invariants :  $p(x) = x \iff$  $(p-id)(x) = \overrightarrow{0}$  car, pour une projection,  $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p-id)$ .

**Exemple 7.1.** Montrons que  $f(x,y) = \frac{1}{5}(6x - 2y, 3x - y)$  est une projection.

On calcule  $f \circ f(x, y) = \frac{1}{5} (6X - 2Y, 3X - Y)$  avec  $X = \frac{6x - 2y}{5}$  et  $Y = \frac{3x - y}{5}$ .

Ce qui donne  $f \circ f(x, y) = \frac{1}{25}(30x - 10y, 15x - 5y) = f(x, y)$  pour tous  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Comme f est aussi linéaire, f est une projection.

On cherche les vecteurs invariants :  $f(x, y) = (x, y) \iff x - 2y = 0 \iff (x, y) \in \text{Vect}(2, 1)$ . Donc Im f = Vect((2, 1)).

Et le noyau de  $f: f(x, y) = (0, 0) \iff 3x - y = 0 \iff (x, y) \in \text{Vect}(1, 3)$ . Donc Ker f = Vect((1, 3)). Conclusion : f est la projection sur Vect((2,1)) parallèlement à Vect((1,3))

# 7.3 Symétries

**Définition 7.3.** Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application  $s: E \longrightarrow E$  qui à x s'écrivant x = y + z avec  $y \in F$  et  $z \in G$  associe s(x) = y - z.

**Proposition 7.3.** Une symétrie s de E est un automorphisme involutif de E : i.e.  $s \circ s = s^2 = id_E$ .

**Théorème 7.4.** Soit s une application de E dans E.

s est une symétrie si et seulement si s est linéaire et  $s \circ s = id_E$ .

Dans ce cas, s est une symétrie par rapport à  $Ker(s-id_E)$  parallèlement à  $Ker(s+id_E)$ .

