Corrigé TD 21 - Variables aléatoires

Exercice 1 :

La probabilité que l'étudiant fasse une faute d'orthographe sur un mot est $p = \dfrac{1}{600}$.

On note X le nombre de fautes commises sur un devoir de 1800 mots. C'est une variable aléatoire réelle et $X(\Omega) = [\![1, 5]\!]$.

X est le nombre de succès : une erreur commise, pour la répétition de 1800 expériences de Bernoulli : écriture d'un mot avec ou sans faute d'orthographe. Les expériences de Bernoulli sont indépendantes.

Alors X suit une loi binomiale de paramètre $n = 1800$ et $p = \dfrac{1}{600}$.

Alors $P(X \leqslant 5) = \sum\limits_{k=0}^{5} P(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{5} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{5} \binom{1800}{k} \dfrac{1}{600^k} \left(\dfrac{599}{600}\right)^{1800-k}$

On calcule et on trouve $\boxed{P(X \leqslant 5) = 0{,}916}$

Exercice 2 :

On a $X(\Omega) = Y(\omega) = \{0, 1\}$, $U(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $V(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ Soit $i \in \{0, 1, 2\}$ et $j \, \{-1, 0, 1\}$

On a

$P(U = i, V = j) = P(X + Y = i, X - Y = j)$

$= P(X = \dfrac{i+j}{2}, Y = \dfrac{i-j}{2})$

$= P(X = \dfrac{i+j}{2}) \times P(Y = \dfrac{i-j}{2})$

car X et Y sont indépendantes.

On obtient alors le tableau :

$U \backslash V$	-1	0	1	loi de U
0	0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
2	0	p^2	0	p^2
loi de V	$p(1-p)$	$p^2 + (1-p)^2$	$p(1-p)$	1

Puis, on calacule

$$E(U) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 2 \times p^2 \Longrightarrow E(U) = 2p$$

$$E(V) = -1 \times p(1-p) + 0 \times (p^2 + (1-p)^2) + 1 \times p(1-p) \Longrightarrow E(V) = 0$$

Pour la variance, on utilise la formule $V(U) = E(U^2) - (E(U))^2$

$$E(U^2) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 4 \times p^2 \Longrightarrow E(U^2) = 2p + 2p^2$$

Alors $V(U) = 2p(1+p) - 4p^2 = 2p - 2p^2 = 2p(1-p)$.

Et $V(V) = E(V^2) = 1 \times p(1-p) + 0 \times (p^2 + (1-p)^2) + 1 \times p(1-p) \Longrightarrow V(V) = 2p(1-p)$.

$$\boxed{E(U) = 2p, \quad V(U) = 2p(1-p) \quad \text{et} \quad E(V) = 0, \quad V(V) = 2p(1-p).}$$

Exercice 3 :

On a $X_1(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et on note X_2 le résultat du deuxième dé.

et $P(X_1 = i, Y = k) = P(X_1 = i \cap Y = k) = P(X_1 = i).P_{X_1=i}(Y = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ i/36 & \text{si } k = i \text{ car } X_2 \in [\![1, i]\!] \\ 1/36 & \text{si } k > i \text{ car } X_2 = k \end{cases}$.

Ce qui donne le tableau

$X_1 = i \backslash Y = k$	1	2	3	4	5	6	loi de X_1
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36	1/6
5	0	0	0	0	5/36	1/36	1/6
6	0	0	0	0	0	6/36	1/6
loi de Y	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	1

Alors $E(Y) = \dfrac{1}{36}(1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + \cdots + 11 \times 6) = \dfrac{161}{36} \simeq 4,47$

Exercice 4 :

1. On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Soit $k \in [\![0, 4]\!]$.
   On utilise comme univers $\Omega =$ l'ensemble des tirages de 4 boules parmi 16 boules que l'on suppose numérotées (discernables).
   Le nombre de tirages possibles est $\dbinom{16}{4}$ qui correspond au nombre de manières de tirer 4 numéros parmi 16 sans répétition et sans tenir compte de l'ordre.
   Pour $(X = k)$, on a le nombre de tirages favorables est $\dbinom{5}{k}$ pour le choix de k boules rouges $\times \dbinom{11}{4-k}$ pour les $4-k$ boules non rouges. On obtient $P(X = k) = \dfrac{\binom{5}{k}\binom{11}{4-k}}{\binom{16}{4}}$.
   On trouve
   $$\boxed{P(X=0) = \frac{33}{182},\ P(X=1) = \frac{165}{364},\ P(X=2) = \frac{55}{182},\ P(X=3) = \frac{11}{182},\ P(X=4) = \frac{1}{364}}$$
   On a donc $E(X) = 0 + 1 \times \dfrac{165}{364} + 2 \times \dfrac{55}{182} + 3 \times \dfrac{11}{182} + 4 \times \dfrac{1}{364} = \dfrac{455}{364} \Longrightarrow \boxed{E(X) = \dfrac{5}{4}}$.
   $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} k^2.P(X = k) = 0 + 1 \times \dfrac{165}{364} + 4 \times \dfrac{55}{182} + 9 \times \dfrac{11}{182} + 16 \times \dfrac{1}{364} \Longrightarrow \boxed{E(X^2) = \dfrac{9}{4}}$.
   Alors d'après la formule de Kœnig, on a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{9}{4} - \dfrac{25}{16} \Longrightarrow V(X) = \dfrac{11}{16}$.
2. Y est le nombre de tirages de boules rouges (succès) obtenues lors de la répétition de 4 expériences de Bernoulli (tirage avec remise). On a donc Y qui suit la loi $\mathcal{B}(4, \dfrac{5}{16})$.
   Alors on a $E(Y) = np = \dfrac{5}{4}$ et $V(Y) = 4 \times \dfrac{5}{16} \times \dfrac{11}{16} = \dfrac{55}{64}$.
3. On a $E(X) = E(Y)$. Qu'il y ait ou non remise, les 4 tirages amènent en moyenne autant de boules rouges.
4. En revanche, $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{11}}{4} < \dfrac{\sqrt{55}}{8} = \sigma(Y)$. Les tirages avec remise autorisent une plus grande dispersion autour de la moyenne.

Exercice 5 :

Cas des tirages sans remise

X_r est une variable aléatoire réelle et $X_r(\Omega) = \{r, r+1, r+2, r+3, r+4, r+5\}$.

$(X_r = r)$: on a tiré en premier que des boules rouges,

$(X_r = r+5)$: on a tiré toutes les boules bleues avant de tirer la r-ième boule rouge.

Soit $k \in [\![r, r+5]\!]$, $(X_r = k) =$ « on a tiré la r-ième boule rouge au k-ième tirage ».

On considère comme univers Ω tous les tirages possibles de toutes les boules. On suppose que les boules sont discernables. Un tirage est défini par le rang des 15 boules tirées, alors $|\Omega| = 15!$

Un tirage favorable est défini par une boule rouge à la place k, par $r-1$ boules rouges parmi les $k-1$ premiers tirages et $10-r$ boules rouge parmi les $15-k$ derniers tirages.

On dénombre ces tirager favorables :

$\dbinom{k-1}{r-1}$ choix des rangs des premières boules rouges $\times \dbinom{15-k}{10-r}$ choix des rangs des dernières boules rouges $\times$ 10! ordres possibles pour les boules rouges $\times$ 5! ordres possibles pour les boules bleues.

Ce qui donne $\quad P(X_r = k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}\binom{15-k}{10-r}10!5!}{15!}$ $\quad$ Or on a $\dfrac{15!}{5!10!} = \dbinom{15}{10}$

Alors $\boxed{P(X_r = k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}\binom{15-k}{10-r}}{\binom{15}{10}} \text{ pour } k \in [\![r, r+5]\!]}$

Cas des tirages avec remise

On choisit de poser $X = N + 1$ si on n'a pas obtenu de boules rouges lors des N tirages.

Quand on effectue des tirages avec remise, chaque tirage est indépendant des autres. On peut les considérer comme une épreuve de Bernoulli de probabilité $p = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$.

Soit $k \geqslant r$. Un tirage favorable pour $X_r = k$ est un tirage tel que la k-ième boule est rouge et sur les $k-1$ premières : $r-1$ sont rouges et $k-r$ sont bleues. La probabilité d'un tel tirage est donc $\left(\dfrac{2}{3}\right)^r \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-r}$

Il y a autant de tirages favorables que de manières de choisir $r-1$ numéros d'obtention des boules rouges parmi les $k-1$ premières ce qui donne

$\boxed{P(X = k) = \dbinom{k-1}{r-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^r \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-r} \text{ pour } N \geqslant k \geqslant r}$ avec $P(X = N+1) = 1 - \displaystyle\sum_{k=r}^{N} P(X_r = k)$

Attention : ce n'est pas une loi binomiale.

Exercice 6 :

1. On considère que les boules sont discernables (numérotées). Il y a alors $n!$ tirages possibles : $|\Omega| = n!$.

   Et $P(X = k) = \dfrac{1 \times (n-k) \times 2! \times (n-2)!}{n!}$ avec 1 choix pour le rang k de la première boule verte $\times$ $n-k$ choix pour le rang de la deuxième $\times$ $2!$ choix pour l'ordre des 2 boules vertes (elles sont discernables alors laquelle arrive en premier ?) $\times$ $(n-2)!$ pour l'ordre des tirages des $n-2$ boules restantes.

   On obtient : $\boxed{P(X = k) = \dfrac{n-k}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}}$. $\qquad$ De même $\boxed{P(Y = j) = \dfrac{j-1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}}$.

   On utilise ensuite $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   $E(X) = \dfrac{n+1}{3}$, $E(Y) = \dfrac{2(n+1)}{3}$, $V(X) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{12}$ et $V(Y) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{18}$.

2. On calcule $E(XY) = \dfrac{(3n+2)(n+1)}{12}$ d'où $E(XY) - E(X)E(Y) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{36} \neq 0$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 7 :

Tout d'abord, on déterminer les probabilités des faces de B : on note p la probabilité de -2, alors les probabilités de $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ sont $p, \frac{p}{2}, \frac{p}{4}, \frac{p}{8}, \frac{p}{16}, \frac{p}{32}$ et leur somme doit être 1 ce qui donne $p\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) = 1 \iff p = \dfrac{32}{63}$.

En notant Y la variable aléatoire égale au numéro obtenu par le dé B, on a la loi de Y qui est

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{32}{63}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{4}{63}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{63}$

On a $X(\Omega)=\{1,-2\}$ et $S(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$ avec $S=|X+Y|$

On calcule chacune des probabilités et on remplit le tableau suivant

k	0	1	2	3	4
$P_{X=-2}(S=k)$	$P(Y=2)$ $=2/63$	$P(Y=3)+P(Y=1)$ $=1/63+4/63=5/63$	$P(Y=0)$ $=8/63$	$P(Y=-1)$ $=16/63$	$P(Y=-2)$ $=32/63$
$P_{X=1}(S=k)$	$P(Y=-1)$ $=16/63$	$P(Y=0)+P(Y=-2)$ $=8/63+32/63=40/63$	$P(Y=1)$ $=4/63$	$P(Y=2)$ $2/63$	$P(Y=3)$ $=1/63$

On a $P(X=1)=\dfrac{4}{6}$ et $P(X=2)=\dfrac{2}{6}$ et $P(X=j,S=k)=P_{X=j}(S=k)\times P(X=j)$.

On complète le tableau suivant et on calcule les lois marginales, ce qui donne :

$P(X=j,S=k)$:

$j\backslash k$	0	1	2	3	4	$P(X=j)$
-2	2/189	5/189	8/189	16/189	32/189	63/189
1	32/189	80/189	8/189	4/189	2/189	126/189
$P(S=k)$	34/189	85/189	16/189	20/189	34/189	1

On a, par exemple $P((X=1)\cap(S=4))=\dfrac{2}{198}\neq\dfrac{68}{567}=P(X=1)\times P(S=4)$.

Alors $\boxed{\text{les v.a. } X \text{ et } S \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

Exercice 8 :

On a $X_n(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et $P(X_n=j)$ est la probabilité d'avoir tiré des boules numérotées j dans au moins une urne et des boules de numéros inférieurs à j dans les autres.

On compte les tirages possibles : il y a n^k tirages possibles, parmi ceux là j^k tirages de boules entre 1 et j et parmi ceux là $(j-1)^k$ tirages de boules entre 1 et $j-1$.

On a $\quad P(X_n=j)=\dfrac{j^k-(j-1)^k}{n^k}$. $\quad$ D'où $\quad \mathrm{E}(X_n)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}k\frac{j^k-(j-1)^k}{n^k}=\frac{1}{n^k}\sum_{j=1}^{n}(j^{k+1}-j(j-1)^k)$.

Et on ne sait pas simplifier l'expression dans le cas général.

Pour trouver un équivalent de $E(X_n)$ on réécrit la somme comme une somme de Riemann. On commence par changer d'indice dans la deuxième somme :

$$\mathrm{E}(X_n)=\frac{1}{n^k}\left(\sum_{i=1}^{n}i^{k+1}-\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)i^k\right)=n\left(1-\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n-1}i^k\right) \text{ par télescopage.}$$

Or $\displaystyle\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n-1}i^k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^k$ qui est une somme de Riemann pour $f:x\mapsto x^k$ sur $[0,1]$ à n pas.

Comme la fonction f est continue sur $[0,1]$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^k=\int_0^1 t^k\,dt=\frac{1}{k+1}$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(X_n)}{n}=\frac{k}{k+1}$ soit $\boxed{E(X_n)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{nk}{k+1}}$.

Exercice 9 :

1. L'univers Ω est l'ensemble des couples $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ et on a $|\Omega|=n^2$.
   On détermine $X(\Omega)$: on a $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$.
   On calcule $P(X=k)$: c'est la probabilité d'avoir un dé qui donne k et l'autre qui donne un résultat inférieur à k dans $[\![1,k]\!]$. On a $k-1$ résultats de la forme (i,k) avec $i\leqslant k$, un résultat de la forme (k,k) et $k-1$ résultats de la forme (k,i). Alors $P(X=k)=\dfrac{2k-1}{n^2}$ pour tout

$k \in [\![1, n]\!]$.

On calcule l'espérance de X par la formule $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)$.

À l'aide d'une formule classique, on obtient $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n^2}\frac{2}{6}n(4n+1)(2n+1)$

$\Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{E}(X) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}$.

2. On a $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $P(Y=k)$ est la probabilité d'avoir un dé qui donne k et l'autre qui donne un nombre dans $[\![k, n]\!]$. On a 2 possibilités pour le choix du dé qui donne k $\times(n-k+1)$ choix pour la valeur du deuxième dé -1 possibilit« (k, k) qu'on a compté deux fois.

   On trouve $P(Y=k) = \frac{2(n+1-k)-1}{n^2}$.

   On a $P(Z=k) = P(Y=n+1-k) = \frac{2(n+1-(n+1-k)-1)}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2} = P(X=k)$.

   On en déduit que $E(Z) = E(X)$ et $E(n+1-Z) = n+1-E(Z)$ par linéarité de l'espérance.

   Ce qui donne $E(Y) = n+1-E(X) = n+1-\frac{(n+1)(2n+1)}{3n}$.

   Finalement, $\boxed{\mathrm{E}(Y) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}$.

3. R suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ alors $\mathrm{E}(R) = \frac{n+1}{2}$

   et $\mathrm{V}(R) = E(R^2) - E(R)^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

4. On a pour chaque lancer 2 résultats des dés : soit l'un a la plus grande valeur et l'autre la plus petite, soit le contraire. Dans les deux cas, le produit des valeurs des 2 dés est égal au produit des valeurs de la plus grande par la plus petite. On a donc $\boxed{XY = RV.}$

   On a alors $E(XY) = E(RV)$. Comme R et V sont indépendantes, car les résultats des deux dés sont indépendants, on a $E(RV) = E(R)\times E(V)$. On en déduit que $\boxed{E(XY) = \frac{1}{n^2}}$.

   Par ailleurs, en utilisant la loi de (X, Y) :

   $E(XY) = \sum_{\ell \in XY(\Omega)} \ell P(XY = \ell)$

   Comme $XY(\Omega) = \left\{ j \times k \;\middle|\; k \in [\![1, n]\!] \text{ et } j \in [\![1, k]\!] \right\}$

   $= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k-1} jkP(X=k, Y=j) + k^2P(X=k, Y=k)\right)$

   On a $P(X=k, Y=j) = \frac{2}{n^2}$ si $k \neq j$ car chaque tirage (k, j) est équiprobable et $P(X = k, Y=k) = \frac{1}{n^2}$ car il n'y a qu'un tirage de ce type.

   Alors $E(XY) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{n^2}\sum_{j=1}^{k-1} jk + \frac{k^2}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n^2}\sum_{j=1}^{k-1} j + \frac{k^2}{n^2}\right)$

   $= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n^2}\times\frac{k(k-1)}{2} + \frac{k^2}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2}$

   On en déduit la formule suivante $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

5. On a $X+Y = R+V$ car le dé vert est l'une des valeurs X ou Y et le rouge est l'autre.

Or on sait que $V(R+V) = E((E(R+V)-(R+V))^2) = (E(R+V))^2 - E(R^2+V^2+2RV) = (E(R))^2 + 2E(R)E(V) + (E(V))^2 - E(R^2) - E(V^2) - 2E(RV)$
Comme R et V sont indépendantes, on a $E(RV) = E(R)E(V)$
$V(R+V) = E(R^2) - E(R)^2 + E(V^2) - E(V)^2 = V(R) + V(V) = 2V(R) = \dfrac{n^2-1}{6} = V(X+Y)$.
Par ailleurs, on a $Z = n+1-Y$ et Z et X suivent la même loi, on en déduit que $V(X) = V(Z)$ et $V(Y) = V(Z) = V(X)$.
Enfin, $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2E(X)E(Y) - 2E(XY)$
D'où $2V(X) = V(X+Y) - 2E(X)E(Y) + 2E(XY)$
$\Longrightarrow V(X) = -\dfrac{(n-1)(5\cdot n^3 + 23\cdot n^2 + 37\cdot n + 37)}{18\cdot n^2}$

$$\boxed{\mathrm{V}(X) = V(Y) = -\dfrac{(n-1)(5\cdot n^3 + 23\cdot n^2 + 37\cdot n + 37)}{18\cdot n^2}}.$$

Exercice 10 :

1. On a $X(\Omega) = [\![r,n]\!]$ et $|\Omega| = \dbinom{n}{r}$ car il y a $\dbinom{n}{r}$ manières de prendre r jetons parmi n et ces tirages sont équiprobables.
   $P(X=r) = \dfrac{1}{\binom{n}{r}}$ car on a tiré les r premiers jetons.
   $P(X=k)$ correspond au tirage de r jetons entre 1 et k en prenant le jeton k : cela correspond au nombre de tirages de $r-1$ jetons entre 1 et $k-1$.
   Alors $P(X=k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$ pour tout $k \in [\![r,n]\!]$.
   La loi précédente de X doit donner
   $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} P(X=k) = 1 \Longrightarrow \sum_{k=r}^{n} \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{n}{r}} = 1 \Longleftrightarrow \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} = \binom{n}{r}$
   On change d'indice : $\displaystyle\sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r-1} = \binom{n}{r}$ et on pose $a = r$ et $b = n-1$ pour obtenir la formule suivante
   $$\boxed{\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{a} = \binom{b+1}{a+1} \text{ pour tous } a \leqslant b \text{ entiers.}}$$
   On calcule ensuite l'espérance de X : $E(X) = \dfrac{(n+1)r}{r+1}$.
   On calcule la loi de Y ; $P(Y=k) = \dfrac{\binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}}$ pour $k \in [\![1, n-r+1]\!]$.
   Puis on utilise $k = -(n-k+1) + n + 1$ et on trouve $E(Y) = \dfrac{n+1}{r+1}$.
2. $P(X=k, Y=j) = P((X=k)\cap(Y=j))$ on peut écrire $=0$ si $Y > X$ c'est à dire $j > k$.
   Pour $1 \leqslant j \leqslant k-r+1$ et $r \leqslant k \leqslant n$, on calcule
   $P(X=k, Y=j) = \dfrac{\binom{k-j-1}{r-2}}{\binom{n}{r}}$ car on doit piocher le jeton j, le jeton k et $r-2$ jetons entre j et k exclus.
3. [non corrigé]

Exercice 11 :

1. On a $Y_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ qui correspond aux 4 événements suivants : on échange 2 rouges ou on échange 2 vertes ce qui donne $Y_n = 0$, ou alors on prend une rouge de U_2 et on la met dans U_1 ce qui donne $Y_n = 1$ ou le contraire qui donne $Y_n = -1$.
   A tout instant, il y a d boules dans chacune des urnes.
   Sachant $X_{n-1} = j$, c'est à dire qu'il y a j boules rouges dans l'urne U_1 et donc $d - j$ boules vertes dans U_1 et j boules vertes dans U_2 et $d - j$ boules rouges dans U_2.
   On étudie la probabilité de $Y_n = +1$ c'est à dire que l'on pioche une boule rouge dans U_2 et une verte dans U_1 : ce qui donne $P(Y_n = +1|X_{n-1} = j) = \dfrac{d-j}{d} \times \dfrac{d-j}{d}$.
   Puis de même, $P(Y_n = -1|X_{n-1} = j) = \dfrac{j}{d} \times \dfrac{j}{d}$ si on pioche une rouge dans U_1 et une verte dans U_2. Enfin, $P(Y_n = 0|X_{n-1} = j) = 2\dfrac{d-j}{d} \times \dfrac{j}{d}$ qui correspond à une boule rouge dans chaque urne ou une boule verte dans chaque urne.
2. On a $\mathrm{E}(Y_n) = (-1) \times P(Y_n = -1) + 0 \times P(Y_n = 0) + 1 \times P(Y_n = 1)$.
   Les événements $(X_{n-1} = k)$ pour $k \in \{0, d\}$ forment un système complet d'événements. Alors, d'après la formule des probabilités totales
   $P(Y_n = i) = \sum_{k=0}^{d} P(Y_n = i|X_n = k) \times P(X_n = k)$.
   Ce qui donne en remplaçant dans $\mathrm{E}(Y_n)$:
   $$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y_n) &= -\sum_{k=0}^{d} P(Y_n = -1|X_n = k) \times P(X_n = k) + \sum_{k=0}^{d} P(Y_n = +1|X_n = k) \times P(X_n = k)\\ &= \sum_{k=0}^{d} \left(-\frac{k^2}{d^2} + \frac{(d-k)^2}{d^2}\right) \times P(X_n = k).\end{aligned}$$
   On simplifie
   $$E(Y_n) = \frac{1}{d^2}\sum_{k=0}^{d}\left(d^2 - 2dk\right) \times P(X_n = k).\ \text{Mais } \sum_{k=0}^{d} P(X_n = k) = 1, \text{ ce qui donne}$$
   $$E(Y_n) = 1 - \frac{2}{d}\sum_{k=0}^{d} kP(X_n = k) \quad \text{soit} \quad \boxed{E(Y_n) = 1 - \frac{2}{d}\mathrm{E}(X_{n-1})}.$$
3. On a
   $E(X_n) = E(Y_n) + E(X_{n-1})$ d'où $E(X_n) = 1 - \dfrac{2}{d}\mathrm{E}(X_{n-1}) + E(X_{n-1}) = \dfrac{d-2}{d}E(X_{n-1}) + 1$.
   On reconnaît une suite arithmético-géométrique.
   On note $e_n = E(X_n)$ et on cherche son point fixe $\ell = \dfrac{d-2}{d}\ell + 1 \iff d\ell = (d-2)\ell + d \iff \ell = \dfrac{d}{2}$
   Puis, on étudie $f_n = e_n - \ell$ qui est géométrique de raison $\dfrac{d-2}{d}$ donc $e_n = e_0\left(\dfrac{d-2}{d}\right)^n + \dfrac{d}{2}$ avec $e_0 = d$ en considérant que X_0 est la variable certaine $X_0 = d$.
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) = d\left(\frac{d-2}{d}\right)^n + \frac{d}{2}}$$

Exercice 12 :

1. Comme le mobile avance à la vitesse d'une unité d'abscisse par unité de temps, après n unités de temps, il a une abscisse entre $-n$ et n : $X_n(\Omega) \subset [\![1,]\!]$.
   Mais, à un temps t pair, le mobile a une abscisse paire et à un temps impair, le mobile a une abscisse impaire.

On cherche donc tous les nombres entiers de $[\![1, n]\!]$ qui sont de la même parité que n : ils sont de la forme $n + 2j$ avec j entier. On doit avoir $-n \leqslant n + 2j \leqslant n \iff -n \leqslant j \leqslant 0$.

On pose $k = -j$. Alors $X_n(\Omega) = \{2k - n | 0 \leqslant k \leqslant n\}$.

2. Pour arriver en 2k-n après n pas, il faut avoir fait x pas vers la droite et $n - x$ pas vers la gauche avec $x - (n - x) = 2k - n \iff x = k$.

   Alors l'événement $(X_n = 2k - n)$ est l'événement : on a effectué k pas vers la droite et $n - k$ pas vers la gauche. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli : aller vers la droite avec une probabilité de succès p que l'on répète n fois et on cherche la probabilité d'obtenir k succès.

   Alors $P(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

3. Y_n suit une loi binomiale de paramètres p et n $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

   Alors $E(Y_n) = np$ et $V(Y_n) = np(1 - p)$.

4. Comme on a $X_n = 2Y_n - n$, par linéarité de l'espérance, on peut obtenir $\mathrm{E}(X_n) = 2\mathrm{E}(Y_n) - n = 2np - n$ qui donne $\boxed{\mathrm{E}(X_n) = (2p - 1)}$.

   Ensuite, on a $V(X_n) = 4V(Y_n) = 4np(1 - p)$.

   Pour $p = \dfrac{1}{2}$, X_n est centrée.

Exercice 13 :

1. X est le nombre de piles en n lancers indépendants, la probabilité de pile à chaque lancer étant p. Alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

   $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } \mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pour } k \in X(\Omega) = [[0, n]]}$

   $\boxed{E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)}$

   On a alors $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$ et $E\left(X^2\right) = V(X) + E(X)^2 = np(1 - p) + n^2p^2$

   $\boxed{E(X) = np(1 - p + np)}$

2. Quand $X = 0$, on tire une boule de l'urne 0 qui contient 0 vertes et n rouges. On tirera donc une boule rouge et $\boxed{\mathrm{P}_{(X=0)}(Y = 0) = 0}$

   et de même si $X = n$, il n'y a que des boules vertes et $\boxed{\mathrm{P}_{(X=n)}(Y = 0) = 1}$

   Si X et Y sont indépendantes alors $P_{(X=0)}(Y = 0) = \mathrm{P}(Y = 0) = P_{(X=n)}(Y = 0)$ ce qui n'est pas le cas.

   $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$

3. Quand $X = k$, on tire une boule de l'urne k qui contient k vertes et $n - k$ rouges.

   Ces n boules étant équiprobables

   $\boxed{\mathrm{P}_{(X=k)}(Y = 1) = \dfrac{k}{n}.}$

4. $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = 1) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_{(X=k)}(Y = 1)\mathrm{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X = k) \\
&= \frac{E(X)}{n} \text{ car } X(\Omega) = [[1, n]]
\end{aligned}$$

5. Comme les valeurs de Y sont $\{0,1\}$, Y suit une loi de Bernoulli et on a $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ et } E(Y) = p}$
6. D'après le théorème de transfert,
$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i \in Y(\Omega)} k\ i\ \mathrm{P}(X = k \cap Y = i) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k\ \mathrm{P}(X = k \cap Y = 1) + 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\ \mathrm{P}(X = k \cap Y = 1) + 0 \text{ pour } k = 0 \end{aligned}$$
avec $\mathrm{P}(X = k \cap Y = 1) = \mathrm{P}(X = k)\,\mathrm{P}_{X=k}(Y = 1) = \mathrm{P}(X = k)\,\dfrac{k}{n}$ donc
$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{k}{n}\ \mathrm{P}(X = k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k^2\ \mathrm{P}(X = k) \end{aligned} \qquad \boxed{E(XY) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k \cap Y = 1) = \frac{E(X^2)}{n}.}$$
On a alors
$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) &= E(XY) - E(X)\,E(Y) \\ &= \frac{E(X^2)}{n} - \frac{E(X)^2}{n} \\ &= \frac{1}{n}V(X) \end{aligned} \qquad \boxed{\mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{p}(1 - \mathrm{p})}$$

Exercice 14 :

1. Y_n est le nombre de n-chaînes de pile
Il y en a au plus une qui n'est réalisée que si tous les lancers ont donné pile. Donc $Y(\Omega) = \{0,1\}$
$(Y_n = 1) = P_1 \cap \cdots \cap P_n$ et comme les lancers sont indépendants :
$p(Y_n = 1) = p(P_1) \ldots p(P_n) = p^n$ donc $\boxed{p(Y = 0) = 1 - p^n \text{ et } E(Y_n) = p^n}$.
2. Pour avoir $Y_{n-1} = 1$, il faut avoir une $n-1$-chaîne de piles. Il ne reste donc qu'un seul lancer face qui ne peutêtre qu'au début ou à la fin :
$(Y_{n-1} = 1) = [P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n] \cup [F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n]$ les deux sont incompatibles donc
$P(Y_{n-1} = 1) = P(P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) + P(F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n)$ les lancers sont indépendants donc
$P(Y_{n-1} = 1) = p^{n-1}q + qp^{n-1} = 2qp^{n-1}$
Comme les seules valeurs possibles de Y_{n-1} sont là encore 0 et 1 on a :
$$E(Y_{n-1}) = 0P(Y_{n-1} = 0) + 1P(Y_{n-1} = 1)$$
$$\boxed{E(Y_{n-1}) = 2qp^{n-1}}$$
3. (a) k est un entier de$[\![1, n-2]\!]$. Avoir $(X_{1,k} = 1)$ signifie qu'une k chaine de piles commence au premier lancer (et se finit donc au $k + 1^{\text{ème}} < n$)
$(X_{1,k} = 1) = P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et les lancers sont indépendants donc $P(X_{1,k} = 1) = p(P_1) \ldots p(P_k)\,p(F_{k+1})$ et $\boxed{P(X_{1,k} = 1) = p^k q}$.
   (b) Avoir $(X_{i,k} = 1)$ signifie qu'une telle chaine
   — commence au $i^{\text{ème}} > 1$ lancer et donc qu'elle était précédée d'un "face" ;
   — qu'elle se finit au $k + i - 1^{\text{ème}} < n$ (de i à $i + k - 1$ il y a $(i + k - 1) - (i) + 1 = k$ lancers)
   — et est donc suivie d'un face ($i \leq n - k$ donc $k + i - 1 \leq n - 1 < n$)

Donc $(X_{1,k}=1)=F_{i-1}\cap P_i\cdots\cap P_{k+i-1}\cap F_{k+i}$ et comme les lancers sont indépendants pour tout $i\in[[2,n-k]]$ on a bien

$$\boxed{P(X_{i,k}=1)=q^2p^k}.$$

(c) Enfin, pour $X_{n-k+1,k}=1$, on a k pile à partir du $n-k+1^{ème}$ lancer donc jusqu'au $n^{ième}$. Donc $(X_{n-k+1,k}=1)=F_{n-k}\cap P_{n-k+1}\cap\cdots\cap P_n$ donc

$$\boxed{P(X_{n-k+1,k}=1)=qp^k}.$$

(d) Le nombre total de k-listes de piles est la somme de celles qui commencent à 1, à 2 ... à $n-k+1$

Donc $Y_k=\sum\limits_{i=1}^{n-k+1}X_{i,k}$ et $E(Y_k)=\sum\limits_{i=1}^{n-k+1}E(X_{i,k})$

Comme $E(X_{i,k})=0\cdot p(X_{i,k}=0)+1\cdot p(X_{i,k}=1)=qp^k$

On a $E(Y_k)=\sum\limits_{i=1}^{n-k+1}qp^k=qp^k\sum\limits_{i=1}^{n-k+1}1$ soit $\boxed{E(Y_k)=(n-k+1)\,qp^k}$