Corrigé TD 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1 :

$E_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=0\right\}$ est un sev car $E_1 = \text{Vect}((1,-1))$.

$E_2 = \{(x,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ est un sev $E_2 = \text{Vect}\{(1,0)\}$.

$E_3 = \{(0,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$ est un sev car $E_3 = \text{Vect}((0,1))$.

$E_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 = xy\right\}$ n'est pas un sev car $(0,1) \in E_4$ et $(1,1) \in E_4$ mais leur somme $(1,2) \notin E_4$.

$E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x-y \geq 0\right\}$ n'est pas un sev car $(1,0) \in E_5$ mais $-(1,0) = (-1,0)$ n'appartient pas à E_5.

$E_6 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y+z-t=0\right\}$ est un sev car $E_6 = \text{Vect}\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$.

$E_7 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x=y\right\}$ est un sev : E_7 est l'hyperplan vectoriel d'équation $x=y$.

$E_8 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x-y+z-t=1\right\}$ n'est pas un sev car $0 \notin E_8$.

$E_9 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, |x| = |y|\right\}$ n'est pas un sev car $(1,-1,0,0)$ et $(1,1,0,0)$ sont dans E_9 mais leur somme $(2,0,0,0)$ n'est pas dans E_9.

$E_{10} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ y-z+t=0 \end{array}\right\}$ est le sous-espace engendré par $(1,1,0,-1)$ et $(-1,0,1,1)$.

Exercice 2 :

— $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(0)=1\}$ n'est pas un sev car le polynôme nul n'est pas dans A.

— $B = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(2)=0\}$ est un sev car $0 \in B$ et pour P, Q dans B, $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $(\alpha P + Q)(2) = \alpha P(2) + Q(2) = 0$ donc $\alpha P + Q \in B$.

— $C = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \deg P \geq 8\}$ n'est pas un sev car $0 \notin C$.

— $D = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(1) = P(2)\}$ est un sev car $0 \in D$ et pour P, Q dans D, $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $(\alpha P + Q)(2) = \alpha P(2) + Q(2) = \alpha P(1) + Q(1) = (\alpha P + Q)(1)$ donc $\alpha P + Q \in D$.

Exercice 3 :

a - les suites convergentes forment un sev car la suite 0 est une suite convergente et toute combinaison linéaire de suites convergentes est une suite convergente.

b - les suites divergentes ne forment pas un sev car la suite nulle n'est pas divergente.

c - les suites bornées forment un sev car la suite nulle est bornée et toute combinaison linéaire de suites bornées est bornée.

d - les suites majorées ne forment pas un sev car u définie par $u_n = -n$ pour tout n est majorée mais son opposé n'est pas majorée.

Exercice 4 :

On écrit que $(x,y,z,t) \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si (x,y,z,t) est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

C'est à dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y,z,t) = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$.

$$\iff \text{le système } \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& x \\ \lambda + 2\mu &=& y \\ \lambda - \mu &=& z \\ \lambda + 3\mu &=& t \end{array}\right. \text{ a au moins une solution } \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& x \\ \mu &=& y-x \\ -2\mu &=& z-x \\ 2\mu &=& t-x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu & = & x \\ \mu & = & y-x \\ 0 & = & -3x+2y+z \\ 0 & = & x-2y+t \end{array}\right.$$

Le système admet au moins une solution si et seulement si les équations de compatibilité sont vérifiées.
Ces équations sont les équations de $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$: $\left\{\begin{array}{rcl} -3x+2y+z & = & 0 \\ x-2y+t & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 5 :

1. Soit $\vec{u} \in \mathrm{Vect}(\vec{a},\vec{b})$, alors $\vec{u} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Cherchons α et β tels que $\vec{u} = \alpha\vec{c} + \beta\vec{d}$. On obtient les systèmes équivalents :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda+\mu & = & 3\alpha+5\beta \\ 3\lambda-\mu & = & 7\alpha \\ -\lambda-2\mu & = & -7\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda+\mu & = & 3\alpha+5\beta \\ (3-\frac{14}{3})\lambda+(-1-\frac{7}{3})\mu & = & -\frac{35}{3}\beta \\ -\lambda-2\mu & = & -7\beta \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda+\mu & = & 3\alpha+5\beta \\ -5\lambda-10\mu & = & -35\beta \\ -\lambda-2\mu & = & -7\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda+\mu & = & 3\alpha+5\beta \\ 0 & = & 0 \\ -\lambda-2\mu & = & -7\beta \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -3\mu & = & 3\alpha-9\beta \\ -7\mu & = & 7\alpha-21\beta \\ -\lambda-2\mu & = & -7\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3\mu & = & 3\alpha-9\beta \\ 0 & = & 0 \\ -\lambda-2\mu & = & -7\beta \end{array}\right.$$
Le système est compatible pour les inconnues α et β donc on peut trouver une solution de $\vec{u} \in \mathrm{Vect}(\vec{c},\vec{d})$. On a montré $\mathrm{Vect}(\vec{a},\vec{b}) \subset \mathrm{Vect}(\vec{c},\vec{d})$.
Réciproquement, si $\vec{u} = \lambda\vec{c} + \mu\vec{d}$, alors le système est compatible pour les inconnues λ et μ, donc on peut écrire $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, d'où $\vec{u} \in \mathrm{Vect}(\vec{a},\vec{b})$. On a montré $\mathrm{Vect}(\vec{c},\vec{d}) \subset \mathrm{Vect}(\vec{a},\vec{b})$. Alors $\mathrm{Vect}(\vec{a},\vec{b}) = \mathrm{Vect}(\vec{c},\vec{d})$.
2. Soit (x,y,z) un vecteur de $E \cap F$, on pose $(x,y,z) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ et $(x,y,z) = \alpha\vec{e} + \beta\vec{b}$. On obtient le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda+\mu & = & \beta \\ 3\lambda-\mu & = & -\beta \\ -\lambda-2\mu & = & \alpha-2\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 0 \\ 3\lambda-\mu & = & -\beta \\ 3\lambda & = & \alpha \end{array}\right.$$
On en tire $\alpha = 0$, $\lambda = 0$ et $\beta = \mu$. Alors $(x,y,z) \in \mathrm{Vect}(\vec{b})$ dont on déduit que $E \cap F \subset \mathrm{Vect}(\vec{b})$. Et comme $\vec{b} \in E$ et $\vec{b} \in F$, on a $\vec{b} \in E \cap F$ d'où $\mathrm{Vect}(\vec{b}) \subset E \cap F$.
Finalement, $E \cap F = \mathrm{Vect}(\vec{b})$, $\boxed{\{\vec{b}\} \text{ est une partie génératrice de } E \cap F.}$

Exercice 6 :

Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un sev de E. Si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ est un sev de E.

Réciproquement, on suppose que $F \cup G$ est un sev de E. Si il existe un vecteur $x \in F \setminus G$, soit $y \in G$, on a $x \in F \cup G$ et $y \in F \cup G$. Alors le vecteur $z = x + y \in F \cup G$ donc ($z \in F$ ou $z \in G$).

Si $z \in G$, alors $x = z - y$ est un élément de G car combinaison linéaire d'éléments de G. C'est impossible. On en déduit que $z \in F$ alors $y = z - x \in F$ comme combinaison linéaire d'éléments de F. On a montré que pour tout $y \in G$, on a $y \in F$, c'est à dire $G \subset F$.

Si il existe $x \in F \setminus G$, on montre par une démonstration similaire en échangeant les rôles de F et G que $F \subset F$.

Sinon on a $G \setminus F = F \setminus G = \emptyset$ alors $G = F$.

Exercice 7 :

Le polynôme nul $R = O_{\mathbb{R}_3[X]}$ vérifie $R(1) = R(-2) = 0$. Alors $R \in F$.

Soit $P \in F$, $Q \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors on le polynôme $\alpha P + Q$ vérifie $(\alpha P + Q)(1) = \alpha P(1) + Q(1) = 0$ et $(\alpha P + Q)(-2) = \alpha P(-2) + Q(-2) = 0$. Alors $\alpha P + Q \in F$.

On en déduit que $\boxed{F \text{ est un sous espace vectoriel de } E.}$

Soit P un polynôme de F, alors $(X-1)$ divise P et $(X+2)$ divise P car P s'annule en 1 et -2. On en déduit que $P = (aX+b)(X-1)(X+2)$. Donc la famille $((X-1)(X+2), X(X-1)(X+2))$ est génératrice de F.

La famille $((X-1)(X+2), X(X-1)(X+2))$ est libre car si $\alpha(X-1)(X+2) + \beta X(X-1)(X+2) = 0$ alors le coefficient de degré 3 est nul donc $\beta = 0$ et donc $\alpha = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } ((X-1)(X+2), X(X-1)(X+2)) \text{ est une base de } F.}$$

G est l'espace vectoriel engendré par 1 et X : c'est l'ensemble des combinaisons linéaires de 1 et X. On a $G \subset E$. G est un sev de E.

La famille $(1, X)$ est libre car si $\alpha.1 + \beta.X = 0$ alors $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ puisque deux polynômes ne sont égaux que si leurs coefficients sont égaux. Comme cette famille est aussi génératrice de G, $\boxed{(1, X) \text{ est une base de } G.}$

Exercice 8 :

On résout le système $x - 2y + 3z = 0$ et on trouve $F = \text{Vect}\{(2,1,0), (-3,0,1)\}$

puis $G = \text{Vect}\{(1,0,-2), (0,1,1)\}$. On a enfin $F \cap G = \text{Vect}(7,5,1)$.

Exercice 9 :

Soit $R \in F$, R s'écrit $R = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dont on tire que $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

De même pour $S \in G$, S s'écrit $S = c\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $G = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Alors F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et écrivons $M = R + S$ avec $R \in F$ et $S \in G$. On cherche donc a, b, c, d tels que

$$M = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 2a+b+3c+d \\ -b-d & -a-2c+d \end{pmatrix}.$$

On en déduit le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& a+c \\ y &=& 2a+b+3c+d \\ z &=& -b-d \\ t &=& -a-2c+d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a+c \\ -2x+y &=& b+c+d \\ z &=& -b-d \\ x+t &=& -c+d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a+c \\ -2x+y &=& b+c+d \\ -2x+y+z &=& c \\ -x+y+z+t &=& d \end{array}\right.$$

Le système d'inconnues a, b, c, d admet quatre pivots non nuls alors il admet une unique solution. Donc il existe une unique matrice R dans F et une unique matrice S dans F telles que $M = R + S$.

Alors $\boxed{\text{les sous-espaces } F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires.}}$

Les matrices $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$ ne sont pas colinéaires et engendrent F :

elles $\boxed{\text{forment une base de } F}$.

Les matrices $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$ ne sont pas colinéaires et engendrent G :

elles $\boxed{\text{forment une base de } G}$.

Exercice 10 :

La fonction nulle vérifie $0(x) = 0(2a - x) = 0$ pour tout x, alors $x \in F$. Soit $f \in F$, $g \in F$ et $\alpha \in R$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $(\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) = \alpha f(2a - x) + g(2a - x) = (\alpha f + g)(2a - x)$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E.

La fonction nulle vérifie $0(x) = 3b - 0(2a - x)$ si et seulement si $b = 0$. On a alors $G = \{f \in E | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(2a - x)\}$ et pour $(f, g) \in G^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on montre que $\alpha f + g \in G$.

$$\boxed{G \text{ est un sev de } E \text{ si et seulement si } b = 0.}$$

Soit $h \in E$, on suppose qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $h = f + g$,

Alors, on a $h(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x et $h(2a - x) = f(2a - x) + g(2a - x)$ pour tout x.

Mais $f(x) = f(2a - x)$ car $f \in F$ et $g(2a - x) = -g(x)$ car $f \in G$. On obtient un système :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) &= h(x) \\ f(x) - g(x) &= h(2a - x) \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) &= \frac{1}{2}(h(x) + h(2a - x)) \\ g(x) &= \frac{1}{2}(h(x) - h(2a - x)) \end{cases}$$

Soit $h \in E$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(2a - x))$ et $g(x) = \frac{1}{2}(h(x) - h(2a - x))$. On a alors $h(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x, donc $h = f + g$.

Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(2a - x) = \frac{1}{2}(h(2a - x) + h(2a - (2a - x))) = \frac{1}{2}(h(2a - x) + h(x)) = f(x), \text{ donc } f \in F.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{2}(h(2a - x) - h(2a - (2a - x))) = \frac{1}{2}(h(2a - x) - h(x)) = -g(x) \text{ donc } g \in G.$$

On a montré que $E = F + G$.

Soit $f \in F \cap G$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2a - x)$ car $f \in F$ et $f(2a - x) = -f(x)$ car $f \in G$, on a donc $f(x) = -f(x)$ d'où $f(x) = 0$ pour tout x. Alors $f = 0$. On a montré que $F \cap G \subset \{ 0\}$. Et réciproquement, $0 \in F$ et $0 \in G$, car ce sont des sev. Donc $\{0\} \subset F \cap G$. Finalement $\{0\} = F \cap G$.

On en déduit que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

Exercice 11 :

Soit (u_n), (v_n) deux suites dans E et $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $(\alpha u + v)_n = \alpha u_n + v_n$ et on peut alors calculer :

$$(\alpha u + v)_{n+2} - (\alpha u + v)_{n+1} - 2(\alpha u + v)_n = \alpha(u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n) + v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n = 0.$$

Alors la suite $(\alpha u + v)$ vérifie la relation de récurrence pour tout entier n. Donc $\alpha u + v \in E$.

De plus, la suite nulle vérifie la relation de récurrence. On en déduit que $\boxed{E \text{ est un sev de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$

De même, F et G sont définis par une relation de récurrence linéaire, donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soit $v \in F$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n = v_{n+2} + v_{n+1} - 2(v_{n+1} + v_n) = 0$ alors $v \in E$. On en déduit que $F \subset E$. Soit $w \in G$, on pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} - w_{n+1} - 2w_n = w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_{n+1} - 2w_n = 0$ donc $w \in E$. On a montré $G \subset E$.

On a montré que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sev de } E.}$

Soit $u \in E$. On suppose qu'il existe une décomposition $u = v + w$ avec la suite u dans F et la suite w dans G. On a alors les relations : $u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0$, $v_{n+1} + v_n = 0$ et $w_{n+1} - 2w_n = 0$.

que l'on utilise en posant $w = u - v$. Ce qui donne

$$u_{n+1}-2u_n-v_{n+1}+2v_n=0$$

qui donne comme $v_{n+1}=-v_n$:

$$3v_n=2u_n-u_{n+1}.$$

Ce qui donne pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:

$$v_n=\frac{2}{3}u_n-\frac{1}{3}u_{n+1} \text{ et } w_n=\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}u_{n+1}.$$

On en déduit que si la décomposition existe, elle vérifie la définition précédente donc elle est unique.

Soit $u\in E$, on pose pour tout entier n, $\alpha_n=\dfrac{2}{3}u_n-\dfrac{1}{3}u_{n+1}$ et $\beta_n=\dfrac{1}{3}u_n+\dfrac{1}{3}u_{n+1}$.

On a alors $\alpha_{n+1}+\alpha_n=\dfrac{2}{3}u_{n+1}-\dfrac{1}{3}u_{n+2}+\dfrac{2}{3}u_n-\dfrac{1}{3}u_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(-u_{n+2}+u_{n+1}+2u_n\right)=0$ car (u_n) est une suite dans E. On en déduit que $(\alpha_n)_n\in F$.

De même, $\beta_{n+1}-2\beta_n=\dfrac{1}{3}u_{n+1}+\dfrac{1}{3}u_{n+2}-\dfrac{2}{3}u_n-\dfrac{2}{3}u_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(u_{n+2}-u_{n+1}-2u_n\right)=0$ car $u\in E$. Alors $((\beta_n)_n)\in G$. Donc on a décomposé $u=\alpha+\beta$ avec $\alpha\in F$ et $\beta\in G$.

La décomposition existe et est unique. Alors $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E : E=F\oplus G.}$

Exercice 12 :

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est un sev de l'ensemble des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc $\boxed{E,\ F \text{ et } G \text{ sont des sev de } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$

Soit $f\in F$, alors $f'=-f$, on en déduit que f' est dérivable car f l'est. Donc f est deux fois dérivable. De plus, $f''-2f'-3f=-f'-2f'-3f=-3(f'+f)=0$. Donc $f\in E$ et $F\subset E$. $\boxed{F \text{ est un sev de } E.}$

Soit $g\in G$, on a $g'=3g$ donc g est deux fois dérivable et $g''-2g'-3g=3g'-2g'-3g=g'-3g=0$. Donc $g\in E$. Ce qui donne $G\subset E$. $\boxed{G \text{ est un sev de } E.}$

Soit $h\in E$. On suppose que h se décompose en $h=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$. On a alors les relations : $h''-2h'-3h=0$, $f'+f=0$ et $g'-3g=0$. On utilise $g=h-f$ qui donne $h'-f'-3(h-f)=0$ soit $h'-3h+f+3f=0$ donc $f=\dfrac{3}{4}h-\dfrac{1}{4}h'$. Alors $g=\dfrac{1}{4}h+\dfrac{1}{4}h'$. D'après ces deux dernières relations, si la décomposition existe, alors elle est unique.

Soit $h\in E$. On pose $f=\dfrac{3}{4}h-\dfrac{1}{4}h'$ et $g=\dfrac{1}{4}h+\dfrac{1}{4}h'$. Alors on a $f'=\dfrac{3}{4}h'-\dfrac{1}{4}h''$. Mais $h''=2h'+3h$, d'où $f'=\dfrac{3}{4}h'-\dfrac{2}{4}h'-\dfrac{3}{4}h=\dfrac{1}{4}h'-\dfrac{3}{4}h=-f$. Donc $f\in F$.

De même, $g'=\dfrac{1}{4}h'+\dfrac{1}{4}h''=\dfrac{1}{4}h'+\dfrac{1}{4}(2h'+3h)=\dfrac{3}{4}h'+\dfrac{3}{4}h=3g$. Donc $g\in G$.

Alors on a décomposé $h=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$. Donc la décomposition existe.

$\boxed{\text{Finalement, la décomposition existe et est unique donc } F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E : E=F\oplus G.}$

Exercice 13 :

Un vecteur $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ appartient à F si et seulement, si il existe α, β tels que $\overrightarrow{x}=\alpha\overrightarrow{u}_1+\beta\overrightarrow{u}_2$ ce qui donne le système : $\left\{\begin{array}{lcl} x_1&=&\alpha+\beta\\ x_2&=&\beta\\ x_3&=&0\\ x_4&=&0\end{array}\right.$. Les équations de compatibilité du système sont les équations de F $\boxed{F:\left\{\begin{array}{lcl} x_3&=&0\\ x_4&=&0\end{array}\right..}$

De même pour G, on écrit le système $\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{u}_3 + \beta\overrightarrow{u}_4$ et on obtient $\boxed{G = \left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 &=& 0 \\ x_1 - x_3 &=& 0 \end{array}\right.}$.

Pour trouver la décomposition $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$ avec $\overrightarrow{y} \in F$ et $\overrightarrow{z} \in G$. On écrit que $\overrightarrow{y} = a\overrightarrow{u}_1 + b\overrightarrow{u}_2$ (car être dans F, c'est être combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$) et $\overrightarrow{z} = c\overrightarrow{u}_3 + d\overrightarrow{u}_4$ avec a, b, c, d réels. On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c+d &=& x_1 \\ b+c+d &=& x_2 \\ c+d &=& x_3 \\ d &=& x_4 \end{array}\right.$$

Ce système a 4 inconnues, 4 équations et 4 pivots non nuls donc il admet une unique solution (a, b, c, d). Alors comme a et b existent et sont uniques, $\overrightarrow{y}$ existe et est unique, de même pour z. Donc la décomposition $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$ avec $\overrightarrow{y} \in F$ et $\overrightarrow{z} \in G$ existe et est unique.

$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

Pour la projection sur F parallèlement à G, on résout le système : $d = x_4$ puis $c = x_3 - x_4$, $b = x_2 - x_3$ et $a = x_1 - x_2$. Le projeté du vecteur $\overrightarrow{x}$ sur F parallèlement à G est $\overrightarrow{y} = a\overrightarrow{u}_1 + b\overrightarrow{u}_2 = (x_1 - x_2)\overrightarrow{u}_1 + (x_2 - x_3)\overrightarrow{u}_2$. On obtient les coordonnées suivantes : $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3, 0, 0)$.

Exercice 14 :

F et G sont des sev de E. Un vecteur $\overrightarrow{y}$ appartient à F si et seulement si il s'écrit $\overrightarrow{y} = \alpha\overrightarrow{e}_1 + \beta\overrightarrow{e}_2$. De même $\overrightarrow{z} \in G$ si et seulement si il existe γ tel que $\overrightarrow{z} = \gamma e_3$.

Soit $\overrightarrow{x} \in E$. $\overrightarrow{x}$ se décompose de manière unique sur F et G si et seulement si il existe $\overrightarrow{y} \in F$et $\overrightarrow{z} \in G$ tels que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{e}_1 + \beta\overrightarrow{e}_2 + \gamma\overrightarrow{e}_3$. Ce qui est équivalent au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& \alpha + \beta + \gamma \\ x_2 &=& \beta + 2\gamma \\ x_3 &=& -\alpha \quad + 3\gamma \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 &=& \beta + 4\gamma \\ x_2 &=& \beta + 2\gamma \\ x_3 &=& -\alpha \quad + 3\gamma \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &=& \gamma \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &=& \beta \\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &=& \alpha \end{array}\right.$$

Le système admet une unique solution donc la décomposition existe et est unique. Alors F et G sont supplémentaires dans E.

La projection sur F parallèlement à G s'écrit $p(x_1, x_2, x_3) = \alpha\overrightarrow{e}_1 + \beta\overrightarrow{e}_2$ ce qui donne

$$p(x_1, x_2, x_3) = (\alpha + \beta, \beta, -\alpha) = \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, -\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)$$

Matriciellement, si Y est la matrice de $p(\overrightarrow{x})$ et X la matrice de $\overrightarrow{x}$: $Y = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Ce qui donne en utilisant un produit de matrices : $Y = PX$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On trouve $q(x_1, x_2, x_3) = \gamma\overrightarrow{e}_3 = \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right).(1, 2, 3)$ ce qui donne la matrice suivante

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 :

$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y) \longmapsto (x - y, x)$ est une application linéaire car les coordonnées de l'image sont des combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent.

$f_2 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}\ P \longmapsto P(2)$. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. $f_2(\alpha P+Q) = (\alpha P+Q)(2) = \alpha P(2)+Q(2) = \alpha f_2(P) + f_2(Q)$ donc f_2 est linéaire.

$f_3 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]\ P \longmapsto P'$ est linéaire car la dérivation est linéaire.

$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ (x,y) \longmapsto (y, x+1)$ est linéaire car les coordonnées de l'image sont combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent.

$f_5\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}\ z \longmapsto \mathcal{R}e(z)$ est $\mathbb{R}$-linéaire car pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_5(\alpha z + z') = \mathcal{R}e(\alpha z + z') = \alpha\,\mathcal{R}e(z) + \mathcal{R}e(z') = \alpha f_5(z) + f_5(z')$.

$f_6 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}\ z \longmapsto |z|$ n'est pas linéaire car $f_6(1+i) = \sqrt{2}$ et $f_6(1) + f_6(i) = 2$.

$f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ (x,y) \longmapsto (x^2, y)$ n'est pas linéaire car $f_7(-1,0) = (1,0) \neq -f_7(1,0)$.

$f_8 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]\ P \longmapsto (X-1)P$ est linéaire car pour $P,Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f_8(\alpha P + Q) = (X-1)(\alpha P + Q) = \alpha(X-1)P + (X-1)Q = \alpha f_8(P) + f_8(Q)$.

$f_9 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ z \longmapsto \overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire car pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f_9(\alpha z + z') = \overline{\alpha z + z'} = \alpha\overline{z} + \overline{z'}$.

$f_{10} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ (x,y) \longmapsto y$ est linéaire car les coordonnées de l'image sont des combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent.

Exercice 16 :

- $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ Soit $f_1 \in E$, $f_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a pour $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(\alpha f_1 + f_2)(x) = \displaystyle\int_0^x (\alpha f_1 + f_2)(t)\,dt = \alpha \int_0^x f_1(t)\,dt + \int_0^x f_2(t)\,dt = \alpha\varphi(f_1)(x) + \varphi(f_2)(x)$. Comme cette égalité est vraie pour tout réel x, on en déduit $\varphi(\alpha f_1 + f_2) = \alpha\varphi(f_1) + \varphi(f_2)$ donc φ est linéaire.
- $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\ dt$ Soit $f_1 \in E$, $f_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a pour $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(\alpha f_1 + f_2)(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (\alpha f_1 + f_2)(t)\,dt = \alpha \int_0^{x^2} f_1(t)\,dt + \int_0^x f_2(t)\,dt = \alpha\varphi(f_1)(x) + \varphi(f_2)(x)$. Comme cette égalité est vraie pour tout réel x, on en déduit $\varphi(\alpha f_1 + f_2) = \alpha\varphi(f_1) + \varphi(f_2)$ donc φ est linéaire.
- $g(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(t)\ dt$ Soit $f_1(x) = x$, on a pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(2f) = \displaystyle\int_0^x (2t)^2\,dt = 4\int_0^x t^2\,dt = 4\varphi(2f)(x)$. On en déduit que $\varphi(2f) = 4\varphi(f) \neq 2\varphi(f)$ car $\varphi(f)$ n'est pas nulle : φ n'est pas linéaire.
- $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t^2)\ dt$ Soit $f_1 \in E$, $f_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a pour $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(\alpha f_1 + f_2)(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (\alpha f_1 + f_2)(t^2)\,dt = \alpha \int_0^{x^2} f_1(t^2)\,dt + \int_0^x f_2(t^2)\,dt = \alpha\varphi(f_1)(x) + \varphi(f_2)(x)$. Comme cette égalité est vraie pour tout réel x, on en déduit $\varphi(\alpha f_1 + f_2) = \alpha\varphi(f_1) + \varphi(f_2)$ donc φ est linéaire.
- $g(x) = f'(x)$ Soit $f_1 \in E$, $f_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a pour $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(\alpha f_1 + f_2)(x) = (\alpha f_1 + f_2)'(x) = \alpha f_1'(x) + f_2'(x) = \alpha\varphi(f_1)(x) + \varphi(f_2)(x)$. Comme cette égalité est vraie pour tout réel x, on en déduit $\varphi(\alpha f_1 + f_2) = \alpha\varphi(f_1) + \varphi(f_2)$ donc φ est linéaire.
- $g(x) = f'(x^2)$. Soit $f_1 \in E$, $f_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a pour $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(\alpha f_1 + f_2)(x) = (\alpha f_1 + f_2)'(x^2) = \alpha f_1'(x^2) + f_2'(x^2) = \alpha\varphi(f_1)(x) + \varphi(f_2)(x)$. Comme cette égalité est vraie pour tout réel x, on en déduit $\varphi(\alpha f_1 + f_2) = \alpha\varphi(f_1) + \varphi(f_2)$ donc φ est linéaire.

Exercice 17 :

1. Les coordonnées de l'image d'un vecteur par f sont combinaisons linéaires des coordonnées du vecteur antécédent donc f est linéaire. De même pour g.
   Si $(x,y) \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x,y) = 0$ et on a $x = 0$, $x + 2y = 0$ et $y = 0$. On en déduit $(x,y) = (0,0)$ donc $\operatorname{Ker} f \subset \{\overrightarrow{0}\}$. Comme $\overrightarrow{0} \in \operatorname{Ker} f$, on a $\boxed{\operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{0}\}.}$
   Soit $\overrightarrow{u} = (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3$. On a $\overrightarrow{u} \in \operatorname{Im} f \iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (X,Y,Z)$
   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& X \\ x+2y &=& Y \\ y &=& Z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& X \\ y &=& Z \\ 0 &=& -X+Y-2Z \end{array}\right.$$

Le système admet au moins une solution si et seulement si l'équation de compatibilité est vérifiée. Résumons :
$\boxed{(X,Y,Z) \in \operatorname{Im} f \iff X - Y + 2Z = 0 \text{ qui est une équation de } \operatorname{Im} f}$. C'est un plan vectoriel.

Si $g(X,Y,Z) = \overrightarrow{0}$, on a $\begin{cases} X + Z = 0 \\ 5X - 2Y + Z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = -Z \\ Y = 2Z \end{cases} \iff (X,Y,Z) \in \operatorname{Vect}(-1,2,1)$

Alors $\boxed{\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}(-1,2,1).}$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x,y) \in \operatorname{Im} g \iff \exists (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 : g(X,Y,Z) = (x,y)$

$\iff \begin{cases} X + Z = x \\ 5X - 2Y + Z = y \end{cases}$

Ce système a 2 équations, 3 inconnues et deux pivots non nuls, alors il admet au moins une solution. Donc pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x,y) \in \operatorname{Im} g$. On en déduit que $\boxed{\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2.}$

2. On a $g \circ f(x,y) = g(x, x+2y, y) = (x+y, 5x - 2(x+2y) + y) = (x+y, 3x-3y)$. On a pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $g \circ f(x,y) = (u,v) \iff (x+y, 3x-3y) = (u,v) \iff x = \frac{1}{6}(3u+v)$ et $y = \frac{1}{6}(3u - v)$.

   Tout élément $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ a un unique antécédent (x,y) donc $g \circ f$ est bijective et elle est linéaire. Alors $\boxed{g \circ f \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2).}$

   On a $(g \circ f)^{-1}(u,v) = \frac{1}{6}(3u+v, 3u-v)$.

   $$\begin{aligned} f \circ g(X,Y,Z) &= f(X+Z, 5X-2Y+Z) = (X+Z, X+Z+2(5X-2Y+Z), 5X-2Y+Z) \\ &= (X+Z, 11X - 4Y + 3Z, 5X - 2Y + Z). \end{aligned}$$

   On a $f \circ g(-1,2,1) = f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0} = f \circ g(\overrightarrow{0})$. Donc $f \circ g$ n'est pas injective et n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 18 :

• On montre que φ et ψ sont linéaires car .... (à faire)

• Si $P \in \operatorname{Ker} \varphi$ alors $\varphi(P) = 0$ donc $P' = (X-2)P$ mais si $P \neq 0$, on a $\deg P' < \deg P$ mais $\deg (X-2)P > \deg P$. On obtient $\deg P < \deg P$ ce qui est impossible donc $P = 0$. Alors $\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}.}$

• Si $P \in \operatorname{Ker} \psi$, alors $P = (X-2)P'$. On peut écrire $P = aX^2 + bX + c$ ce qui donne $aX^2 + bX + c = (X-2)(2aX+b) = 2aX^2 + (b-4a)X - 2b$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, ce qui donne $a = 2a$ et $b = b - 4a$ et $c = -2b$. On trouve $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $c = -2b$. Alors $P = b(X-2)$. Alors $\operatorname{Ker} \psi \subset \operatorname{Vect}(X-2)$.

Réciproquement, si $P \in \operatorname{Vect}(X-2)$ alors P s'écrit $P = q(X-2)$ d'où $P' = q$ et $(X-2)P' = q(X-2) = P$ donc $\psi(P) = 0$. On en déduit que $\operatorname{Vect}(X-2) \subset \operatorname{Ker} \psi$.

Finalement, $\boxed{\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Vect}(X-2) \text{ c'est une droite vectorielle.}}$

• Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, on cherche P tel que $Q = \varphi(P)$. On écrit $Q = pX^3 + qX^2 + rX + s$ et $P = aX^2 + bX + c$. On a alors $Q = 2aX + b - (X-2)(aX^2 + bX + c) = -aX^3 + (2a-b)X^2 + (2a+2b-c)X + b + 2c$. Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} p = -a \\ q = 2a - b \\ r = 2a + 2b - c \\ s = b + 2c \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2a + 2b - c \\ q = 2a - b \\ p = -a \\ 14p + 5q + 2r + s = 0 \end{cases}$$

La dernière équation est l'équation de $\operatorname{Im} \varphi$ qui est un hyperplan de dimension 3.

$$\boxed{\operatorname{Im} \varphi = \left\{ pX^3 + qX^2 + rX - 14p - 5q - 2r \middle| (p,q,r) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{Vect}(X^3 - 14, X^2 - 5, X - 2).}$$

• Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $Q = pX^2 + qX + r$. On cherche $P = aX^2 + bX + c$ tel que $\psi(P) = Q$. $\psi(P) = aX^2 + bX + c - (X-2)(2aX+b) = -aX^2 + 4aX + 2b + c$. On en déduit $a = -p$ et $4a = q$ et $2b + c = r$. Il faut donc $-4p = q$. Alors $Q = pX^2 - 4pX + r$.

Donc $\boxed{\operatorname{Im}\psi \text{ a pour équation } 4p+q=0. \text{ C'est un plan de } \mathbb{R}_2[X] \text{ et } \operatorname{Im}\psi = \operatorname{Vect}(X^2-4X,1).}$

• $\varphi \circ \psi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi \circ \psi(P) = -(X-2)(P'' - (X-2)P' + P)$.

On trouve, après calculs, $\operatorname{Ker}(\varphi\circ\psi) = \operatorname{Vect}(X-2)$ qui est une droite et $\operatorname{Im}(\varphi\circ\psi) = \operatorname{Vect}(X-2, (-X^2+4X)(X-2))$ qui est un plan.

Exercice 19 :

On montre que f est linéaire car d'après les propriétés des matrices $f(\alpha M_1 + M_2) = \alpha f(M_1) + f(M_2)$.

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. L'équation $f(M) = 0$ équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2z &=& 0 \\ 2x-4z &=& 0 \\ -y+2t &=& 0 \\ 2y-4t &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2z \\ y &=& 2t \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}$$

Ce système donne $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}}$.

On a $f(M) = x\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\right)$

On constate que $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)}$

car les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. De même, pour $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 20 :

Les fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont dérivables et pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $\varphi(f)$ est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et φ est bien définie.

Soit f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha f_1 + f_2)(t) &= (\alpha f_1 + f_2)'(t) + \frac{1}{1+t^2}(\alpha f_1 + f_2)(t) = \alpha f_1'(t) + f_2'(t) + \alpha\frac{1}{1+t^2}f_1(t) + \frac{1}{1+t^2}f_2(t) \\ &= \alpha\left(f_1'(t) + \frac{1}{1+t^2}f_1(t)\right) + f_2'(t) + \frac{1}{1+t^2}f_2(t) = \varphi(f_1)(t) + \varphi(f_2)(t) \end{aligned}$$

On en déduit : $\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a

$$f \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + \frac{1}{1+t^2}f(t) = 1.$$

On obtient une équation différentielle linéaire qui se résout : $\iff f(t) = \lambda\exp(-\operatorname{Arctan}(t))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On en déduit $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(t \mapsto \exp(-\operatorname{Arctan}(t))) \text{ et } \varphi \text{ n'est pas injective}}$.

Soit $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$$h \in \operatorname{Im}\varphi \iff \exists f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + \frac{1}{1+t^2}f(t) = h(t)$$

Or h est une fonction continue, alors on sait, d'après le cours sur les équations différentielles que cette équation avec second membre possède toujours au moins une solution. On en déduit que toute fonction h de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ a un antécédent et par conséquent, $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \text{ est surjective}}$.

Exercice 21 :

1. On a $u^2 - 4u + 3id_E = 0 \iff u(u - 4id_E) = -3id_E$ d'où $u(-\frac{1}{3}u + \frac{4}{3}id_E) = id_E$ et $(-\frac{1}{3}u + \frac{4}{3}id_E)u = id_E$ donc u est bijectif et $u^{-1} = -\frac{1}{3}u + \frac{4}{3}id_E$.
2. On a pour $x \in E$, $(u - id_E)(u(x) - 3x) = u^2(x) - 3u(x) - u(x) + 3id_E(x) = (u^2 - 4u + 3id_E)(x) = 0$ car $u^2 - 4u + 3id_E = 0$. Alors $u(x) - 3x \in \mathrm{Ker}(u - id_E)$.
   De la même façon, on a pour $x \in E$, $(u - 3id_E)(u(x) - x) = u^2(x) - u(x) - 3u(x) + 3id_E(x) = (u^2 - 4u + 3id_E)(x) = 0$ car $u^2 - 4u + 3id_E = 0$. Alors $u(x) - x \in \mathrm{Ker}(u - 3id_E)$.
3. Soit $x \in E$, on cherche a et b tels que $x = a(u(x) - 3x) + b(u(x) - x)$. On trouve $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$, alors $x = -\frac{1}{2}(u(x) - 3x) + \frac{1}{2}(u(x) - x)$ avec $-\frac{1}{2}(u(x) - 3x) \in \mathrm{Ker}(u - id_E)$ et $\frac{1}{2}(u(x) - x) \in \mathrm{Ker}(u - 3id_E)$. Donc $E = \mathrm{Ker}(u - id_E) + \mathrm{Ker}(u - 3id_E)$.
   De plus si $x \in \mathrm{Ker}(u - id_E) \cap \mathrm{Ker}(u - 3id_E)$, on a $u(x) - 3x = 0$et $u(x) - x = 0$ alors $u(x) = 3x = x$ donc $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(u - id_E) \cap \mathrm{Ker}(u - 3id_E) \subset \{0\}$ et comme $0 \in \mathrm{Ker}(u - id_E)$ et $0 \in \mathrm{Ker}(u - id_E)$, on a $\mathrm{Ker}(u - id_E) \cap \mathrm{Ker}(u - 3id_E) = \{0\}$.
   On en conclut que $\boxed{\mathrm{Ker}(u - id_E) \text{ et } \mathrm{Ker}(u - 3id_E) \text{ sont supplémentaires.}}$

Exercice 22 :

On a pour $(x_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $f(\alpha z_1 + z_2) = \alpha z_1 + a\alpha\overline{z_1} + z_2 + a\overline{z_2} = \alpha f(z_1) + f(z_2)$. Donc f est linéaire.

Si $f(z) = 0$ avec $z \neq 0$, on note $z = \rho e^{i\varphi}$ et $a = re^{i\theta}$. On a alors $\dfrac{z}{\overline{z}} = -a$, d'où $|a| = 1$.

Si $|a| \neq 1$, alors $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$. Sinon $|a| = 1$, on a donc $e^{2i\varphi} = -e^{i\theta} \iff 2\varphi = \theta - \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ d'où $\varphi = \frac{\theta}{2} + (2k - 1)\frac{\pi}{2}$.

Réciproquement, si $z = \rho e^{i\frac{\theta}{2} + (2k-1)\frac{\pi}{2}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\overline{z} = \rho e^{-i\frac{\theta}{2} + (2k-1)\frac{\pi}{2}}$ et $a\overline{z} = e^{i\frac{\theta}{2} - (2k-1)\frac{\pi}{2}}$ et comme $e^{-i(2k-1)\frac{\pi}{2}} = e^{-i(2k-1)\frac{\pi}{2} + 4ik\frac{\pi}{2}} = e^{i(2k+1)\frac{\pi}{2}} = e^{i(2k-1)\frac{\pi}{2} + i\pi}$. On en déduit que $e^{i\frac{\theta}{2} + (2k-1)\frac{\pi}{2}} = -e^{i\frac{\theta}{2} - (2k-1)\frac{\pi}{2}}$ et que $z + a\overline{z} = 0$. Donc $z \in \mathrm{Ker}\, f$.

Finalement $\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \left\{z \middle| \arg z = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \pi\right\} \text{ donc } \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(e^{i\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}}).}$

Soit $z' = f(z)$, on a $z' = z + a\overline{z}$ et $\overline{z'} = \overline{z} + \overline{a}z$, on en déduit que si $|a| \neq 1$, $z = \dfrac{1}{1 - |a|^2}(z' - a\overline{z'})$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{C}$. Si $|a| = 1$. Alors $z' - a\overline{z'} = 0$. Et on démontre rapidement que $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e^{i\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}}).}$

Exercice 23 :

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $f(\alpha P + Q) = (X - a)[(\alpha P + Q)'(X) + (\alpha P + Q)'(a)] - 2[(\alpha P + Q)(X) - (\alpha P + Q)(a)] = \alpha\left((X - a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)]\right) + (X - a)[Q'(X) + Q'(a)] - 2[Q(X) - Q(a)] = \alpha f(P) + f(Q)$.

Donc $\boxed{f \text{ est linéaire.}}$

Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $\deg P \leqslant 3$ et $\deg(X - a)P'(X) \leqslant 3$. Comme $\deg(A + B) \leqslant \max(\deg A, \deg B)$, on a $\deg(f(P)) \leqslant 3$.

Donc $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X].}$

Soit $P \in \mathrm{Ker}\, f$. On a $(X - a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)] = 0$

qui donne en dérivant : $(X - a)P''(X) + P'(X) + P'(a) - 2P'(X) = 0$

qui donne en dérivant $(X-a)P'''(X)+P''(X)+P''(X)-2P''(X)=0 \iff (X-a)P'''(X)=0$.

On en déduit que $P'''=0$ donc $\deg P \leqslant 2$: $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Comme la famille $(1, X-a, (X-a)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire $P=\alpha+\beta(X-a)+\gamma(X-a)^2$. Alors $P'(X)=\beta+2\gamma(X-a)$ et $f(P)=(X-a)(\beta+2\gamma(X-a)+\beta)-2(\alpha+\beta(X-a)+\gamma(X-a)^2-\alpha)=0$. On en déduit que $\mathbb{R}_2[X] \subset \operatorname{Ker} f$.

On en déduit que $\boxed{\operatorname{Ker} f=\mathbb{R}_2[X].}$

Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, on cherche un antécédent P tel que $f(P)=Q$. On écrit $Q=p+q(X-a)+r(X-a)^2+s(X-a)^3$ et $P=\alpha+\beta(X-a)+\gamma(X-a)^2+\delta(X-a)^3$. On a $f(P)=f(\alpha+\beta(X-a)+\gamma(X-a)^2)+\delta f((X-a)^3)=\delta f((X-a)^3)=\delta[(X-a)(3(X-a)^2)-2(X-a)^3]=\delta(X-a)^3$. Alors $Q \in \operatorname{Im} f \iff Q=\delta(X-a)^3$ avec $\delta \in \mathbb{R}$.

On en conclut que $\boxed{\operatorname{Im} f=\mathbb{R}.(X-a)^3 \text{ est la droite dirigée par le polynôme } (X-a)^3.}$

Exercice 24 : $f_1(x,y)=(3x+2y,-4x-3y)$ est une symétrie

On détermine $\operatorname{Ker}(f_1-id)=\operatorname{Vect}((1,-1))$ car il a pour équation $x+y=0$ et $\operatorname{Ker}(f_1+id)=\operatorname{Vect}((1,-2))$ car il a pour équation $2x+y=0$.

Alors f_1 est la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}((1,-1))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((1,-2))$.

$f_2(x,y)=(-x-2y,x+2y)$ est une projection

On détermine $\operatorname{Ker}(f_2)=\operatorname{Vect}((-2,1))$ car il a pour équation $2x+y=0$ et $\operatorname{Im}(f_2)=\operatorname{Vect}((-1,1))$ car il a pour équation $a+b=0$.

Alors f_2 est la projection par rapport à $\operatorname{Vect}((-2,1))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((-1,1))$.

$f_3(x,y,z)=(-3x-2y,6x+4y,-2x-y+z)$ est une projection $f_4(x,y,z)=(-3x+4y+6z,4x-3y+6z,-4x+4y+7z)$ est une symétrie $\varphi_1(P)=$ le reste de la division de P par $(X+1)^3$, est une projection $\varphi_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\varphi_2(P)=Q$ avec $Q(X)=P(-X)$ est une symétrie

Exercice 25 :

1. La fonction nulle est 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E$.
   Soit $f \in E$, $g \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\alpha f+g)(x+1)=\alpha f(x+1)+g(x+1)=\alpha f(x)+g(x)=(\alpha f+g)(x)$. Alors $\alpha f+g \in E$.
   On en déduit que $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$
2. La dérivation est linéaire donc d est une application linéaire de E dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $f \in E$. Alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1)=f(x)$. On peut dériver cette relation, ce qui donne $f'(x+1)=f'(x)$ pour tout réel x. Alors $d(f) \in E$ et d est un endomorphisme de E.
   Soit $f \in E$ telle que $d(f)=0$. Alors $f'=0$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction constante g vérifie $d(g)=0$.
   Alors $\boxed{\operatorname{Ker} d \text{ est l'ensemble des fonctions constantes.}}$
3. Soit $f \in E$. Si il existe une décomposition $f=g+h$ avec $g \in \operatorname{Im} d$ et $h \in \operatorname{Ker} d$. Alors h est une fonction constante : $h=a$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=f(x)-f(0)$ est l'image de G : $g=d(G)=G'$ avec $G \in E$.
   On a donc $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt=\int_0^x (f(t)-a)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt-ax$. On a $G(x+1)-G(x)=0$ qui donne $\int_0^{x+1} f(t)\,dt-a(x+1)-\int_0^x f+ax=0$ donc $a=\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ que l'on réécrit $a=\int_x^{\lfloor x+1\rfloor} f+\int_{\lfloor x+1\rfloor}^{x+1} f$.
   Il faut montrer que a ne dépend pas de x.
   Comme f est 1-périodique, $\int_x^{\lfloor x+1\rfloor} f=\int_{x+1}^{\lfloor x+1\rfloor+1} f$, d'où $a=\int_{\lfloor x+1\rfloor}^{x+1} f+\int_{x+1}^{\lfloor x+1\rfloor+1} f=\int_{\lfloor x+1\rfloor}^{\lfloor x+1\rfloor+1} f$.

Comme f est 1-périodique, $\int_0^1 f = \int_n^{n+1} f$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, alors $a = \int_0^1 f$.

Donc si la décomposition existe, on a $h = \int_0^1 f$ et $g = f - \int_0^1 f$. Alors la décomposition est unique.

Soit $f \in E$. On pose $h = \int_0^1 f$ et $g = f - \int_0^1 f$. Alors h est constante donc $h \in \operatorname{Ker} d$ et $g = G'$ avec $G(x) = \int_0^x f - (\int_0^1 f)x$. Alors pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x+1) - G(x) = \int_x^{x+1} f - \int_0^1 f = 0$, donc $G \in E$. Alors $g \in \operatorname{Im} d$. La décomposition existe. $\boxed{\text{Alors } \operatorname{Im} d \text{ et } \operatorname{Ker} d \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

Exercice 26 :

Soit $v \in \operatorname{Im}(g \circ f)$, alors $v = g \circ f(u)$ avec $u \in E$. On peut écrire $v = g(w)$ avec $w = f(u)$ donc $v \in \operatorname{Im} g$. Alors $\boxed{\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g.}$

Soit $u \in \operatorname{Ker} f$, on a $f(u) = 0$ d'où $g \circ f(u) = 0$ donc $u \in \operatorname{Ker} g \circ f$. On a donc $\boxed{\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f).}$

Soit f, g deux endomorphismes vérifiant $g \circ f = 0$. Soit $v \in \operatorname{Im} f$, alors $v = f(u)$ avec $u\ inE$. On a $g \circ f(u) = 0$ ce qui s'écrit $g(v) = g(f(u)) = 0$, soit $v \in \operatorname{Ker} g$. Alors $\boxed{\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g.}$

Exercice 27 :

Soit f un endomorphisme sur E. Soit $u \in \operatorname{Ker} f$, on a $f(u) = 0$, donc $f(f(u)) = 0$ soit $u \in \operatorname{Ker} f^2$. On a donc toujours $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

Si $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$, soit $v\ in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. On a $v \in \operatorname{Im} f$, donc $v = f(u)$ avec $u \in E$, et $v \in \operatorname{Ker} f$ donc $f(v) = 0$. Alors $f(f(u)) = 0$ donc $u \in Ker f^2$, mais $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ donc $u \in \operatorname{Ker} f$, ce qui se traduit par $f(u) = 0$ soit $v = 0$.

On a donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f \subset \{0\}$ et comme on a toujours $\{0\} \subset \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$,

on a finalement $\boxed{\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}.}$

Si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Soit $u \in \operatorname{Ker} f^2$, on a $f(f(u)) = 0$. On note $v = f(u)$, on a $v \in \operatorname{Im} f$ et $f(v) = 0$ donc $v \in \operatorname{Ker} f$. Finalement, $v \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ donc $v = 0$ donc $f(u) = 0$ c'est à dire $u \in \operatorname{Ker} f$. On a donc $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ et l'inclusion inverse est toujours vraie. On en conclut $\boxed{\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f.}$

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}.}$$