# Chapitre 21 - Variables aléatoires

## 1 Variables aléatoires

### 1.1 Définition

engendré $E = \mathbb{R}$

**Définition 1.1.** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé fini et $E$ un ensemble.

On appelle variable aléatoire une application définie sur $(\Omega, P)$ à valeurs dans $E$ : $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$.

résultat valeur

Lorsque $E$ est une partie de $\mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

L'ensemble des valeurs susceptibles d'être prises par $X$ est $X(\Omega)$ défini par $X(\Omega) = \{x \in E \mid \exists \omega \in \Omega : x = X(\omega)\}$

Lorsque $\Omega$ est fini, $X(\Omega)$ est fini et on notera souvent $X(\Omega) = (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ avec $n = |\Omega|$.

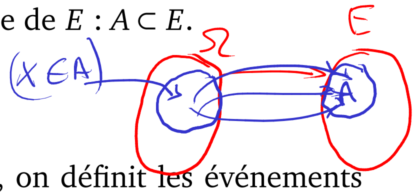
ensemble des images = univers image

*Remarque* 1.1. Par défaut, on suppose que les variables aléatoires sont des variables aléatoires réelles (V.A.R).

**Définition 1.2.** Soit une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow E$. Soit $A$ une partie de $E$ : $A \subset E$.

On définit l'événement $(X \in A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \subset \Omega$

On a donc $(X \in A) = X^{-1}(A)$ et on le note aussi $(X \in A) = \{X \in A\}$.



**Définition 1.3.** Pour une variable aléatoire réelle $X$ et pour $a, b$ réels, on définit les événements suivants :

$(X = a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\} = \{$ tous les résultats $\omega$ tels que $X(\omega) = a\}$

$(X \leqslant a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\} = \{$ tous les résultats $\omega$ tels que $X(\omega) \leqslant a\}$

$(a \leqslant X < b) = \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) < b\} = \{$ tous les résultats $\omega$ tels que $a \leqslant X(\omega) < b\}$

Exemples : on lance 2D6 un rouge et un vert

$S$ = la somme des deux dés est une V.A.R (var aléa réelle)

On a $S(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 10, 11, 12\}$

L'événement $(S = 8)$ est $\{(2,6), (3,5)(4,4)(5,3)(6,2)\}$

$P(S = 8) = \frac{5}{36}$ car on a équiprobabilité des 36 résultats de deux dés.

$X$ est égale au le plus grand numéro sorti

On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $P(X = 3) = \frac{5}{36}$

car $(X = 3) =$ " le plus grand numéro sorti est un 3 "

$= \{(3,1), (3,2)(3,3)(2,3)(1,3)\}$

Exemple : On s'intéresse aux $n$ premières naissances de l'année et à la répartition fille/garçon.
et on pose $X$ la variable aléatoire égale au nombre de filles nées.

$$X(\Omega) = [\![ 0, n ]\!] \quad (\text{c'est une v.a. } \underline{r}) \text{ (réelle)}$$

Toutes les naissances sont indépendantes
on note $p$ la probabilité d'obtenir une fille
on suppose que cette probabilité est la même pour chaque naissance $p \simeq \frac{97}{200}$

il est connu que $X$ "suit une loi binomiale"
car " $\cancel{X}$ compte le nombre de succès " dans la répétition de $n$ expériences identiques et indépendantes ayant deux résultats possibles succès de probabilité $p$ et échec avec une probabilité $1-p$."

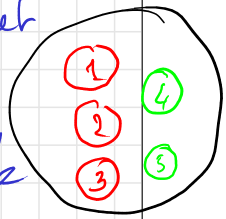
$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec } k \in [\![ 0, n ]\!]$$

$\Omega = \{F, G\}^n = \{FFF\cdots F, FF\cdots FG, FFG\,GF, \ldots, GGGG\}$
il y a $\binom{n}{k}$ listes de $n$ lettres prises parmi $F$ et $G$ avec $k$. $F$
chacun des résultats correspondants à la même probabilité $p^k \times (1-p)^{n-k}$

## 1.2 Exemples

suite page 6 : **Cas 2** : on tire simultanément 3 boules dans $U = 2V + 3R$. Loi de $X$ = nb de vertes

(calcul en tenant compte de l'ordre (à éviter car le résultat pour $X$ ne tient pas compte de l'ordre))



on suppose que les boules sont discernables, par exemple numérotées de 1 à 5.

on choisit $\Omega$ = l'ensemble des listes de 3 éléments distincts pris parmi 5 (arrangements de 3 parmi 5) donc $|\Omega| = \frac{5!}{(5-3)!} = 5\times4\times3$

$P(X=0) = \frac{3!}{|\Omega|} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ car il y a équiprobabilité des tirages et $3!$ listes constituées avec 1, 2, 3 sans répétition

$P(X=1) = \frac{2 \text{ choix du numéro vert} \times 3 \text{ tirages} \times 3 \text{ choix pour la 1re rouge} \times 2 \text{ choix pour la 2e R}}{|\Omega|}$

$= \frac{36}{60} = \frac{6}{10}$

$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2} \text{ choix des positions V} \times 2 \text{ choix pour la 1ère V} \times 3 \text{ choix pour la rouge}}{|\Omega|}$

$= \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$ on vérifie $P(X=1) + P(X=2) + P(X=0) = \frac{60}{60}$

**Cas 3** : on tire jusqu'à obtenir une rouge, sans remise. Loi de $X$

$U = 2V + 3R$ $X$ = nb de $V$ tirées.

On note $R_i$ = "a tiré une rouge au $i$-ème tirage".

ainsi $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$(X=0) = R_1$ donc $P(X=0) = P(R_1) = \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$

$(X=1) = \overline{R_1} \cap R_2$ $P(X=1) = P(\overline{R_1}) \cdot P_{\overline{R_1}}(R_2)$ formule des probas conditionnelles

$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$

$(X=2) = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3$ $P(X=2) = P(\overline{R_1}) \cdot P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \cdot P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(R_3)$

donc $P(X=2) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3)$ $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{20}$

## 1.3 Loi de probabilité d'une v.a. réelle finie

Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé

**Définition 1.4.** Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire finie. L'application $P_X : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(X^{-1}(A)) \end{array}$ (théorique) est une probabilité appelée loi de probabilité de la v.a. X et $(X(\Omega), P_X)$ est un espace probabilisé. $P_X(A)$

MC **Définition 1.5.** Soit $X$ une v.a. finie $X : \Omega \longrightarrow E$. On appelle loi de probabilité de $X$ la donnée de toutes les valeurs prises par $X$ : $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ et de toutes les probabilités $(P(X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$.

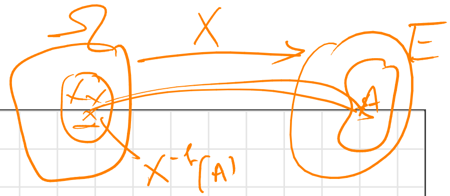
*Remarque* 1.2. On peut utiliser un tableau

$\mathscr{P}(E)$ = ensemble des parties de E

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $P(X=x_1)$ | $P(X=x_2)$ | $P(X=x_3)$ | $P(X=x_4)$ | $P(X=x_5)$ | ... |

**Théorème 1.1.** *Soit $\{(x_i, p_i) | i \in I\}$ une partie finie de $\mathbb{R}^2$ telle que les $x_i$ soient distincts.*
*$\{(x_i, p_i) | i \in I\}$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie si et seulement si*

$$\begin{cases} \forall i \in I, \quad p_i \geqslant 0 \\ \sum_{i \in I} p_i = 1 \end{cases}.$$




Exemple On lance 2 dés à 6 faces équilibrés
on note S la V.A égale à la somme des 2 nombres obtenus
Loi de S ?

On a $S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ l'univers image

On calcule

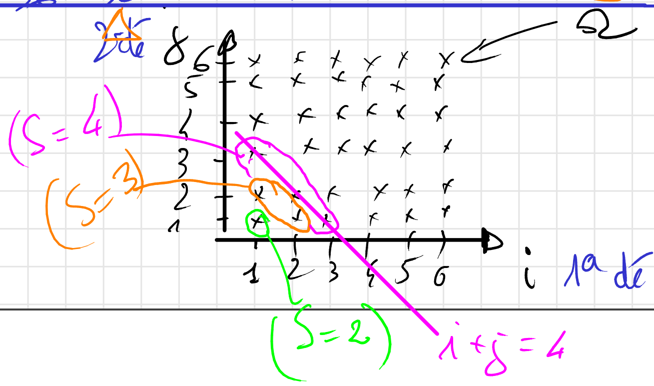
$P(S=2) = \frac{1}{36}$ $\quad P(S=3) = \frac{2}{36}$ $\quad |\Omega| = 36$ équiprobabilité

car $(S=2) = \{(1,1)\}$ $\quad$ car $(S=3) = \{(1,2),(2,1)\}$

on peut les ranger dans un tableau

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(S=x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{36}{36} = 1$ |

$(S=x)_{x \in [\![2,12]\!]}$ est un SCE




$P(S=4) = \frac{3}{36}$

$E(S) = \sum_{x \in S(\Omega)} x \cdot P(S=x) = 7$

Exemple Une urne contient 5 boules : 3 rouges et 2 vertes

On appelle $X$ la v.a. égale au nombre de boules vertes tirées

<u>Cas 1</u> : on tire successivement avec remise 3 boules

Loi de $X$ ?

On a $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. On répète 3 fois la même expérience, de manière indépendante (l'urne contient à chaque fois les mêmes boules), $X$ compte le nombre de succès : "tirer une boule verte" et l'expérience n'a que 2 résultats possibles : boule verte ou boule rouge.

Alors $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{2}{5}=P(\text{"verte"})$

$$P(X=k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$$

$P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$ avec $R_i$ : "on tire une rouge au i-ème tirage"

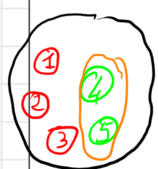
$P(X=1) = P\left((R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) \cup (R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) \cup (\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3)\right)$

$= P(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) + P(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) + P(\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3)$ car les 3 sont incompatibles. Et les 3 ont la même probabilité :

$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = P(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) = P(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) = P(\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3)$

$$P(X=1) = 3\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Cas 2 : On tire simultanément 3 boules Loi de $X$ ?



On a $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

On utilise $\Omega$ l'ensemble des tirages de 3 boules parmi les 5 boules qu'on suppose numérotées (discernables) sans tenir compte de l'ordre

On a donc $\binom{5}{3}$ tirages possibles $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

ce qui correspond à l'ensemble des parties à 3 éléments de $[\![1,5]\!]$ et tous ces tirages sont équiprobables.

$P(X=0) = \frac{|(X=0)|}{|\Omega|} = \frac{1}{10}$ | $P(X=1) = \frac{6}{10} = \frac{2 \text{ choix de V} \times 3 \text{ choix de R}}{10}$

$P(X=2) = \frac{|(X=2)|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}$ on vérifie $\sum_{k=0}^{2} P(X=k) = 1$

## 1.4 Système complet associé à une v.a. finie

infini en PT

**Proposition 1.2.** *Soit $X : \underset{\omega}{\Omega} \longrightarrow \underset{x_i}{E}$ une v.a. sur un espace probabilisé fini.*

*$((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.*

**Corollaire 1.3.** *On en déduit que $\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1$.* somme finie (PTSI)

somme infinie = série en PT

Démonstration

Pour $x_i \in X(\Omega)$, l'événement $(X=x_i) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$ est une partie de $\Omega$ : $(X=x_i) \subset \Omega$

Donc $\bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X=x_i) \subset \Omega$

Soit $\omega \in \Omega$, on pose $x_{i_0} = X(\omega)$ et $\omega \in (X = x_{i_0})$

donc $\omega \in \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X=x_i)$ donc $\Omega \subset \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X=x_i)$

ce qui prouve que $\Omega = \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X=x_i)$

Soit $\omega \in (X=x_i) \cap (X=x_j)$ avec $x_i, x_j \in X(\Omega)$

$\Rightarrow X(\omega) = x_i$ et $X(\omega) = x_j$ mais $X$ est une application, $X(\omega)$ ne peut prendre qu'une valeur

donc $x_i = x_j$

Cela prouve que pour $x_i \neq x_j$ $(X=x_i) \cap (X=x_j) = \emptyset$

alors $((X=x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$ est un SCE.

Exemple : Dans un groupe de $n$ personnes, on compte le nombre de personnes nées le 11 février. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 personnes nées le 11 février ?

On note $X$ la v.a.r égale au nombre de personnes nées le 11 février. On veut $P(X \geq 2)$.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - P(X < 2)$

$X$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p = \frac{1}{365})$

$= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n - n \times \frac{1}{365} \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}$

## 1.5 Loi d'une fonction d'une variable aléatoire finie

**Définition 1.6.** Soit $X$ une v.a. finie sur $(\Omega, P)$ avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Soit $f : D \subset E \longrightarrow E$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset D$.

Alors $Y = f \circ X$ est une v.a. finie sur $\Omega$.

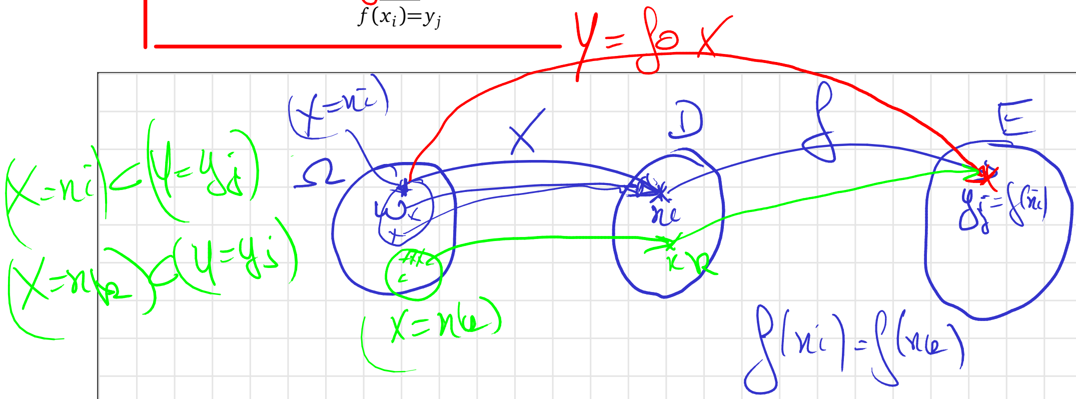
De plus,

$$Y(\Omega) = (f \circ X)(\Omega) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

et

somme sur toutes les valeurs $x_i$ de $X$ telles que $f(x_i) = y_j$

$$P(Y = y_j) = \sum_{f(x_i)=y_j} P(X = x_i) \text{ (somme sur toutes les valeurs } x_i \text{ telles que } f(x_i) = y_j).$$




Exemple : On joue à Pile ou Face 2 fois de suite.
On note $X$ la va égale au nombre de piles obtenus
et on gagne 1 € par Face, on perd 2 € par pile
On note $G$ la va égale au gain algébrique de la partie.
Quelle est la loi de $G$ ?

On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ $P(X=0) = \frac{1}{4}$ $P(X=1) = \frac{2}{4}$

$P(X=2) = \frac{1}{4}$. $(X=0) \subset (G=2)$ (si $X$ vaut 0 alors $G$ vaut 2)

$(X=1) \subset (G=-1)$ $(X=2) \subset (G=-4)$

C'est à dire que $(X=0) = (G=2)$, $(X=1) = (G=-1)$

$(G=-4) = (X=2)$

Exemple : On joue 2 fois à Pile ou Face. On gagne 1 € pour chaque Pile, on perd 1 € pour chaque Face.
On note $X$ le gain après avoir joué deux fois et $Y = X^2$. Quelle est la loi de $Y$ ?

On a $X(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$ et la loi

| $x$ | $-2$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $1/4$ | $2/4$ | $1/4$ |

On a $Y(\Omega) = \{0, 4\}$
et $(Y=0) = (X=0)$ et $(Y=4) = (X=2) \cup (X=-2)$
$P(Y=0) = 2/4$ et $P(Y=4) = P(X=2) + P(X=-2)$
$= 1/4 + 1/4 = 2/4$

Exemple : On note $S$ la v.a égale à la somme des résultats du lancer de 2D6.
et on pose $T = S \bmod 3$ (reste de la division de $S$ par 3)
Quelle est la loi de $T$ ?

On a $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
on connaît la loi de $S$

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(S=k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{36}{36} = 1$ |
| valeur de $T$ | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | |

On a $(T=0) = (S=3) \cup (S=6) \cup (S=9) \cup (S=12)$ et les 4 sont incompatibles donc $P(T=0) = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36}$

$(T=1) = (S=4) \cup (S=7) \cup (S=10)$ $P(T=1) = \frac{3}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{12}{36}$

$P(T=2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ $T$ suit une loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$

# 2 Lois usuelles

## 2.1 Loi uniforme

**Définition 2.1.** On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$. ← notation pour "X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$"

**Définition 2.2.** On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$.

Exemple : Dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n, on tire un par un les jetons sans remise jusqu'à obtenir le 1. et on note X la v.a égale au nombre de tirages effectués. Alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$

$P(X=k) = \frac{1}{n}$ $k \in [\![1,n]\!]$

On note $A_k$ = "on tire le numéro 1 au $k^{\text{ème}}$ tirage"

$(X=k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$

on utilise la formule des probabilités composées :

$P(X=k) = P(\overline{A_1}) \cdot P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdot P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(\overline{A_3}) \ldots P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k)$

$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \ldots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$

## 2.2 Loi de Bernoulli

**Définition 2.3.** On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ avec $0 < p < 1$ si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X = 1) = p$ donc $P(X = 0) = 1 - p$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

2 résultats possibles

**Définition 2.4.** Soit $A$ une partie d'un ensemble $\Omega$. On appelle fonction indicatrice de $A$ notée $\chi_A$ la fonction $\chi_A : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ définie pour $\omega \in \Omega$ par

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

*Remarque* 2.1. Lors d'une expérience aléatoire, soit un événement $A$ qui est réalisé (succès) ou qui ne l'est pas (échec), on peut modéliser cette situation avec une variable aléatoire $X$ telle que l'événement $(X = 1) = A$ modélise le succès et l'événement $(X = 0) = \overline{A}$, l'échec de l'expérience. $X$ est alors la fonction indicatrice de $A$.

Exemple : Dans une urne qui contient $N$ boules numérotées de 1 à $N$, on en tire $k$ simultanément.
On note $X$ la v.a qui vaut 1 si on a tiré la boule n°1 et 0 sinon.
$X$ ne peut prendre que 2 valeurs 0 ou 1 alors $X$ suit une loi de Bernoulli.
Quelle est la probabilité de $(X=1)$ ?

On utilise $\Omega$ l'ensemble des tirages simultanés de $k$ boules parmi les $N$. On a $|\Omega| = \binom{N}{k}$ car tirages sans tenir compte de l'ordre et sans remise (combinaisons)
Il y a équiprobabilité de ces tirages.
L'événement $(X=1)$ correspond aux tirages de la boule 1 et $k-1$ autres boules parmi $N-1$
Alors $|(X=1)| = \binom{1}{1}\binom{N-1}{k-1}$
d'où $P((X=1)) = \dfrac{\binom{N-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} = \dfrac{(N-1)!\, k!\,(N-k)!}{(k-1)!\,(N-k)!\, N!} = \dfrac{k}{N}$
et $P((X=0)) = 1 - P((X=1)) = 1 - \dfrac{k}{N}$

## 2.3 Loi Binomiale

**Définition 2.5.** On dit que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$ avec $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}$ si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

$\mathcal{B}(p) \neq \mathcal{B}(n,p)$

*Remarque* 2.2. On vérifie $\quad \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1.$

$\sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

*Remarque* 2.3. Une variable aléatoire $X$ de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ modélise le nombre de succès lors de la répétition de $n$ expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes.

*Remarque* 2.4. Une variable aléatoire $X$ de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ modélise le nombre d'obtention de boules rouges pour $n$ tirages avec remise dans une urne contenant une proportion $p$ de boules rouges.

la remarque 2.3 justifie que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Démonstration : Une expérience a 2 résultats "Succès" ou "Echec" avec $P(\text{"succès"}) = p$. On la répète identiquement de manière aléatoire et de manière indépendante. On appelle $X$ la v.a égale au nombre de succès après $n$ expériences.

On utilise $\Omega$ l'ensemble des listes de $n$ lettres ($=$ mots) S ou E $\quad \Omega = \{S, E\}^n$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$

$(X = k)$ correspond aux listes avec $k \times$ "S" et $(n-k) \times$ "E"

il y en a $\binom{n}{k}$ correspondant au choix de $k$ places parmi $n$ places.

On remarque chacun de ces résultats avec $k \times$ "S" et $(n-k) \times$ "E" ont la même probabilité : qui est

$P(\underbrace{SSSS\,S}_{k}\underbrace{E \ldots E}_{(n-k)}) = P(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_k \cap \overline{S_{k+1}} \cap \ldots \cap \overline{S_n})$

où $S_j$ est un succès à la $j^{ième}$ expérience ; Les $(S_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ sont indépendants car les expériences correspondantes sont indépendantes.

$= P(S_1) . P(S_2) . P(S_3) \ldots P(S_k) P(\overline{S_{k+1}}) \ldots P(\overline{S_n})$

$= p^k (1-p)^{n-k}$ ce qui justifie que les résultats $k \times$ "S" et $(n-k)$ "E" ont la même probabilité.

d'où $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Exemple : Une machine fabrique des pièces avec 1 défaut tous les 1000 pièces en moyenne. Dans une caisse de 100 pièces, calculer la probabilité d'avoir au moins 2 pièces défectueuses ?

D'après l'énoncé la probabilité pour une pièce d'avoir un défaut est $\frac{1}{1000} = p$.

On fait l'hypothèse (fausse) qu'on répète $n = 100$ fois l'expérience dont les résultats sont indépendants.

On note $X$ le nombre de pièces défectueuses

$X$ suit une loi binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

On cherche $P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{n} P(X = k) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 1 - (1-p)^n - n\,p(1-p)^{n-1} \simeq$

Exemple : Probabilité que 2 personnes soient nées le 14 juillet dans une classe de 45 personnes ?

(je comprends "au moins 2 personnes")

$Y$ le nombre de personnes nées le 14 juillet suit une loi binomiale de paramètres $n = 45$ et $p = \frac{1}{365}$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$

$= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{45} - 45\left(\frac{364}{365}\right)^{44} \cdot \frac{1}{365}$

# 3 Couple de variables aléatoires

## 3.1 Loi conjointe

**Définition 3.1.** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé. Soit $X, Y$ deux v.a. sur $\Omega$.

On appelle couple de v.a. $(X,Y)$ l'application $\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$.

C'est une variable aléatoire sur $E^2$. On notera $(X = x_i, Y = y_j)$ l'événement $\left\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i \text{ et } Y(\omega) = y_j\right\}$.

**Définition 3.2.** On appelle loi conjointe du couple $(X,Y)$ la loi de la variable aléatoire $(X,Y)$ c'est-à-dire la donnée de

- toutes les valeurs prises par le couple $(X,Y) = X(\Omega) \times Y(\Omega) = (x_i)_{i \in I} \times \left(y_j\right)_{j \in J} = \left\{(x_i, y_j) \mid x_i \in X(\Omega), y_j \in\right.$
- et de toutes les probabilités
$$p_{i,j} = \left(P(X = x_i, Y = y_j)\right)_{x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\omega)} = \left(P((X = x_i) \cap (Y = y_j))\right)_{x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)}$$

ce que l'on pourra noter $\left((x_i, y_j), p_{i,j}\right)_{i \in I, j \in J}$.

**Théorème 3.1.** *Soit $\left\{((x_i, y_j), p_{i,j}) | i \in I, j \in J\right\}$ une partie finie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ telle que les $x_i$ soient distincts et que les $y_j$ soient distincts.*

*$\left\{((x_i, y_j), p_{i,j}) | i \in I, j \in J\right\}$ est la loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles finies si et seulement si* $\left\{\begin{array}{l} \forall i \in I, \forall j \in J, \quad p_{i,j} \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = 1 \end{array}\right.$.

*Remarque* 3.1. Par définition, comme cette somme est finie, on peut sommer d'abord sur les lignes ou d'abord sur les colonnes :
$$\sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{i,j} = 1$$

## 3.2 Lois marginales

**Définition 3.3.** Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. Les lois de $X$ et $Y$ s'appellent les lois marginales du couple $(X, Y)$.

**Proposition 3.2.** *On a*

$$\text{pour tout } x_i \in X(\Omega), \qquad P(X = x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) \text{ notée } p_{i,\bullet}$$

*et*

$$\text{pour tout } y_j \in Y(\Omega), \qquad P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) \text{ notée } p_{\bullet,j}.$$

## 3.3 Loi conditionnelles

**Définition 3.4.** Soit $Y$ une v.a. sur $(\Omega, P)$ telle que $Y(\Omega) = \left\{y_j\right\}_{j\in J}$. Soit $A$ un événement de $\mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

La loi de $Y$ conditionnée par $A$ ou loi conditionnelle de $Y$ sachant $A$ est l'ensemble des probabilités

$$\left(P_A(Y = y_j)\right)_{y_j \in Y(\Omega)} = \left(\frac{P((Y = y_j) \cap A)}{P(A)}\right)_{y_j \in Y(\Omega)}$$

**Définition 3.5.** Soit $X$ et $Y$ deux v.a. sur $(\Omega, P)$ telles que $X(\Omega) = (x_i)_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j\in J}$.

Soit $j \in J$. La loi de $X$ conditionnée par $(Y = y_j)$ est l'ensemble des valeurs

$$\left(P_{(Y=y_j)}(X = x_i)\right)_{x_i \in X(\Omega)} = \left(\frac{P(Y = y_j \cap X = x_i)}{P(Y = y_j)}\right)_{i\in I}$$

Soit $i \in I$. La loi de $Y$ conditionnée par $(X = x_i)$ est l'ensemble des valeurs

$$\left(P_{(X=x_i)}\left(Y = y_j\right)\right)_{y_j \in Y(\Omega)} = \left(\frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(X = x_i)}\right)_{j\in J}$$

### 3.4 Fonction de deux variables aléatoires

Soit $X$ et $Y$ deux v.a. réelles sur $\Omega$. Comme le couple $(X,Y)$ est une variable aléatoire réelle sur $\Omega$, on peut définir pour une fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par $Z = g(X,Y)$.

On a $Z(\Omega) = \left\{g(x_i, y_j) | x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)\right\}$ : ensemble des valeurs prises par $Z$

Les $g(x_i, y_j)$ ne sont pas nécessairement distincts.

On a $P(Z = z_k) = \displaystyle\sum_{\substack{(x_i, y_j) \text{ tels que} \\ g(x_i, y_j) = z_k}} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

# 4 Variables aléatoires indépendantes

## 4.1 Indépendance d'un couple de variables aléatoires

**Définition 4.1.** Soit $(X,Y)$ un couple de v.a. sur $(\Omega,P)$ avec $X(\Omega)=(x_i)_{i\in I}$ et $Y(\Omega)=(y_j)_{j\in J}$.
On dit que $X$ et $Y$ sont indépendantes pour la probabilité $P$ si

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\times P(Y=y_j) \text{ pour tout } x_i\in X(\Omega) \text{ et } y_j\in Y(\Omega).$$

**Proposition 4.1.** *Si $X$ et $Y$ sont 2 v.a. indépendantes sur $(\Omega,P)$ alors pour toutes parties $A\subset X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$, on a*

$$P((X,Y)\in A\times B)=P(X\in A).P(Y\in B).$$

## 4.2 Variables aléatoires mutuellement indépendantes

**Définition 4.2.** Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a. sur un même espace probabilisé $(\Omega, P)$.
On dit que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes pour la probabilité $P$ si $\forall x_1 \in X_1(\Omega)$, $\forall x_2 \in X_2(\Omega)$, ..., $\forall x_n \in X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \cdots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1).P(X_2 = x_2)\ldots P(X_n = x_n)$$

**Théorème 4.2.** *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des v.a. mutuellement indépendantes sur $(\Omega, P)$, alors quelque soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, les événements $(X_i \in A_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité $P$.*

**Proposition 4.3.** *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des v.a. mutuellement indépendantes sur $(\Omega, P)$, alors elles sont indépendantes deux à deux.*

## 4.3 Somme de v.a. suivant la loi de Bernoulli

**Proposition 4.4.** *Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des v.a. mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de même paramètre $p$ avec $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$. Alors la v.a. $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$ binomiale de paramètres $n$ et $p$.*

*Remarque* 4.1. On utilise cette proposition pour modéliser $n$ expériences identiques et indépendantes avec 2 issues (succès et échec). La variable aléatoire somme compte le nombre de succès.

## 4.4 Indépendance de fonctions de v.a. indépendantes

**Théorème 4.5.** *Soit $X, Y$ deux v.a. sur $(\Omega, P)$ fini. Soit $f, g$ deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.*
*Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

# 5 Moments d'une v.a. réelle finie

## 5.1 Espérance

**Définition 5.1.** Soit $X$ une v.a.r. sur $\Omega$. On appelle espérance de $X$ le réel $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

$(\Omega, P)$

Ce qui s'écrit également $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ avec $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$.

On a donc $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$.

**Proposition 5.1.** *Si pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $a \leqslant x \leqslant b$, alors $a \leqslant E(x) \leqslant b$.*

Démonstration définition 5.1.

On sait $((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'évènements

tout $\omega \in \Omega$ appartient à un et un seul des $((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$

alors $\boxed{E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \times P(\{\omega\})}$

$= \sum_{\omega \in (X = x_1)} X(\omega) \times P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in (X = x_2)} X(\omega) P(\{\omega\}) + \dots + \sum_{\omega \in (X = x_n)} X(\omega) P(\{\omega\})$

où on a $X(\omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

pour $\omega \in (X = x_i)$, $X(\omega) = x_i$. Donc chaque somme se simplifie

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in (X = x_i)} x_i P(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{\omega \in (X = x_i)} P(\{\omega\})$

mais $\sum_{\omega \in (X = x_i)} P(\{\omega\}) = P(X = x_i)$ d'où $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

$\boxed{E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i)}$

Exemple : On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les cartes valent 11-As, 4 R, 3 D, 2 V, 10-10, 0 reste. X est la valeur de la carte tirée. Espérance de X ?

On calcule la loi de X

| $x$ | 0 | 2 | 3 | 4 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $3/8$ | $1/8$ | $1/8$ | $1/8$ | $1/8$ | $1/8$ |

Car 4 As dans un jeu de 32

Puis

$E(X) = \frac{30}{8} = 0 \times \frac{3}{38} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{8} + 11 \times \frac{1}{8} =$

Démonstration prop I. 1. croissance de l'espérance

On suppose que pour tout $x \in X(\Omega)$, $a \leq x \leq b$

alors comme $P(X=x) \geq 0$

$$a\,P(X=x) \leq x \cdot P(X=x) \leq b \cdot P(X=x)$$

On somme sur toutes les valeurs possibles pour $x \in X(\Omega)$

$$\sum_{x \in X(\Omega)} a\,P(X=x) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} x\,P(X=x) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} b\,P(X=x)$$

(les valeurs possibles sont en nombre fini)

mais $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} a\,P(X=x) = a \overbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)}^{=1} = a \times 1$

D'où $\boxed{a \leq E(X) \leq b}$

## 5.2 Propriétés de l'espérance : linéarité et croissance

**Proposition 5.2.** *Soit $X$, ~~$X$~~ deux v.a.r. sur $(\Omega, P)$ et $a, b$ réels. On a*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

**Proposition 5.3.** *Soit $X, Y$ deux v.a.r. sur $\Omega$.*
*Si on a $X \leqslant Y$, c'est à dire $\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.*

Démonstration 5.2 :

$$E(aX+bY) = \sum_{\omega \in \Omega} (aX+bY)(\omega) \; P(\{\omega\})$$

$aX+bY$ est une variable aléatoire car fonction de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$

$$E(aX+bY) = \sum_{\omega \in \Omega} (a X(\omega) + b Y(\omega)) P(\{\omega\})$$

$$= a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) + b \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\})$$

$$E(aX+bY) = a \; E(X) + b \; E(Y)$$

Exemple $E(X+1) =$

$1$ peut être vu comme une variable aléatoire réelle :

$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega \longmapsto 1$ c'est une VAR constante

On a $E(1) = 1 \times P(1=1) = 1$

Donc par linéarité de l'espérance $E(X+1) = E(X) + 1$

Exemple $E(X - E(X))$

par linéarité, $E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$

Exemple : espérance de la loi binomiale ?

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ $p \in ]0,1[$.

$k! = k.(k-1)!$

$n! = n(n-1)!$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

mais $k\binom{n}{k} = k \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = n \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$

pour $k \geq 1$ et $n \geq 1$

$n-k = (n-1)-(k-1)$

D'où $E(X) = 0 + \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$ on pose $j = k-1$

$$= n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1}$$

$$= n.p. \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}$$

$$= np\,(p + (1-p))^{n-1}$$ d'après la formule du binôme.

$$E(X) = np$$

### 5.3 Théorème de transfert

**Théorème 5.4.** *Soit $g$ une fonction définie sur $X(\Omega)$ et $X$ une v.a.r. sur $(\Omega, P)$ fini.*
*On a* $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x) = \sum_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i)$.

On a une va $X$ et une autre $Y = g(X)$
pour calculer l'espérance de $Y$, on peut calculer
soit la loi de $Y$
soit directement avec le théorème de transfert.

Démonstration :

$$E(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega)) P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in (X = x_i)} g(X(\omega)) P(\{\omega\}) \text{ avec } X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in (X = x_i)} g(x_i) P(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \underbrace{\sum_{\omega \in (X = x_i)} P(\{\omega\})}_{P(X = x_i)}$$

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i)$$

Exemple :

## ~~5.4~~ 4.4 Espérance et indépendance

**Théorème 5.5.** *Soit $X$ et $Y$ deux v.a.r. sur $\Omega$.*
*Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

## 5.5 Variance et écart-type

**Définition 5.2.** Soit $X$ une v.a.r. finie. On appelle variance de $X$ le réel $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ et écart-type de $X$ le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
On a donc $V(X) = \sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X - x_i)$.

*Remarque* 5.1. On a $V(X) \geqslant 0$ donc $\sigma(X)$ existe.

**Théorème 5.6** (Formule de Kœnig-Huygens)**.**
*On a pour une v.a.r. finie $X$ :*

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

**Théorème 5.7.** *Soit $X$ une v.a. finie. On a pour tous réels $a, b$*

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

## 5.6 Espérance et variance des lois usuelles finies

— Si $X$ est une v.a. finie constante, $X = c$ avec $P(X = c) = 1$, alors
$$E(X) = c \text{ et } V(X) = 0.$$
— Si $X$ suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ : $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$ alors
$$E(X) = \frac{1+n}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$
— Si $X$ suit la loi uniforme sur $\Omega : X(\omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, alors
$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$
— Si $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ : $\mathscr{B}(p)$, alors
$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p).$$
— Si $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ : $\mathscr{B}(n, p)$, alors
$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p).$$

*Démonstration.*

— Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

Alors $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{n} \Longrightarrow \boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$.

On calcule également $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

où on a utilisé $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$.

On trouve

$V(X) = \dfrac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} \Longrightarrow \boxed{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$.

— Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

$X$ prend les valeurs 0 avec la probabilité $1-p$ et la valeur 1 avec $p$.

Alors $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p$ soit $\boxed{E(X) = p}$. On calcule également $E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$.

Et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2$ soit $\boxed{V(X) = p(1-p)}$.

— Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Alors $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Mais on sait que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour $k \geqslant 1$.

On obtient :

$$E(X) = 0 + \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

On reconnait une formule du binôme :

$E(X) = np\,(p+1-p)^{n-1}$ soit $\boxed{E(X) = np}$. (résultat facile à obtenir par linéarité)

On calcule maintenant $E(X(X-1))$ qui donnera $E(X^2) - E(X)$ :

$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Mais on sait que $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ pour $k \geqslant 2$.

On obtient :

$E(X(X-1)) = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}$.

On reconnait une formule du binôme :

$$E(X(X-1)) = n(n-1)p^2\,(p+1-p)^{n-2} = n(n-1)p^2.$$

Et,

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np\,((n-1)p + 1 - np)$.

D'où $\boxed{V(X) = np(1-p)}$.

□

## 5.7 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Théorème 5.8.** *Si $X$ est une v.a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, P)$ d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$