Chapitre 19 - Matrices et applications linéaires

dim finie

1 Matrices d'une application linéaire

vecteur

base — matrice

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $x \in E$, on appelle matrice de x dans la base $\mathscr{B}$, la matrice colonne notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x)$ dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$:

Si $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, alors $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{array}{c} x \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to e_1 \\ \\ \to e_n \end{array}$. n lignes avec $n = \dim E$.

La matrice dans la base $\mathscr{B}$ d'une famille de vecteurs $(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_p})$ de E notée $\mathrm{M}_B(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est la matrice dont la j-ième colonne pour $j \in [\![1, p]\!]$ est constituée des n coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$.

Si pour $j \in [\![1, p]\!]$, $\vec{x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ alors

p vecteurs

$$\mathrm{M}_B(x_1, x_2, \dots, x_p) = (a_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,p]\!]} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & & x_j & & x_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

n lignes

a_{ij} = coordonnées selon e_i de x_j

Remarque 1.1. La matrice de la famille $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice identité I_n.

Exemple 1.1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on note $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ une base. Soit $\vec{u} = 4\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$ et $\vec{v} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$.
Donner les matrices $\mathrm{M}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1, e_2)$.

La première matrice se trouve directement en écrivant, en colonne, les coordonnées dans la base (e_1, e_2) de chaque vecteur u, v : $\mathrm{M}_{(e_1,e_2)}(u, v) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u,v)$

Remarque : On pourra noter au brouillon les vecteurs en colonne haut dessus de la matrice et sur le côté les vecteurs de la base $\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u & v \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$

Mais, CELA NE DOIT PAS APPARAÎTRE SUR VOTRE COPIE DE DEVOIR.
Pour la matrice $\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1, e_2)$, il faut d'abord calculer les coordonnées de (e_1, e_2) : on cherche $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\begin{cases} e_1 &= \alpha_1 u + \beta_1 v \\ e_2 &= \alpha_2 u + \beta_2 v \end{cases}$

On résout le système suivant par opérations sur les lignes :

$$\begin{cases} u &= 4e_1 - 3e_2 \\ v &= 2e_1 - e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - 3v &= -2e_1 \\ u - 2v &= -e_2 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} e_1 &= \dfrac{1}{2}(-u + 3v) \\ e_2 &= -u + 2v \end{cases}}$$

Ce qui nous donne la matrice $\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \end{array}$ soit $\mathrm{M}_{(u,v)}(e_1, e_2) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exemple 1.2. Dans $\mathbb{R}^3$, écrivons la matrice de $\boldsymbol{u} = (1,2,-1)$, $\boldsymbol{v} = (1,3,0)$, $\boldsymbol{w} = (-2,0,1)$, et $\boldsymbol{t} = (0,0,-1)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

4 vecteurs

On trouve $\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} & \boldsymbol{t} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array} \end{array}$ dim 3 soit $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_0}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exemple : Dans $\mathbb{R}_2[X]$, matrice de $P = -5X^2+7X+1$ dans la base canonique $B_0 = (X^2, X, 1)$ puis dans la base $(1, (X-2), (X-2)^2) = B_1$.

$P' = -10X+7$

$P'' = -10$

on a $P = P(2)\times 1 + P'(2)(X-2) + \frac{P''(2)}{2}(X-2)^2$
$= -5 - 13(X-2) - 5(X-2)^2$

$M_{B_0}(P) = \begin{array}{cc} P & \\ \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X^2 \\ X \\ 1 \end{array} \end{array}$ $\quad M_{B_1}(P) = \begin{array}{cc} P & \\ \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{array} \end{array}$

Remarque :

$M_{B_1}(B_1) = M_{B_1}(1, X-2, (X-2)^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{B_0}(B_0)$

généralement $M_B(B) = I_n$ pour B une base.

TD ©

$E, \mathscr{B}_1 \xrightarrow{u} F, \mathscr{B}_2$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}_2 = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.

$p = \dim E$ $\quad q = \dim F$

On appelle matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u)$, de la famille de vecteurs $(u(\mathscr{B}_1))$ dans la base $\mathscr{B}_2$:

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\mathscr{B}_1))} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p))$$

On a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Si on note $\mathscr{B}_2 = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \ldots, \boldsymbol{f_q})$ et $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\quad u(\boldsymbol{e_j}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} a_{ij}\boldsymbol{f_i}$ où $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ sont les coordonnés du vecteur $u(\boldsymbol{e_j})$ dans la base $\mathscr{B}_2$,

$u(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + a_{31} f_3 + \cdots + a_{q1} f_q$

$$\text{alors } \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u) = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} u(\boldsymbol{e_1}) & u(\boldsymbol{e_j}) & u(\boldsymbol{e_p}) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{qp} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{f_1} \\ \\ \boldsymbol{f_i} \\ \\ \boldsymbol{f_q} \end{matrix} \end{array}$$

moyen mnémotechnique

Remarque 1.2. Le nombre de lignes de la matrice est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.
Le nombre de colonnes est égal à la dimension de l'espace de départ.

$\mathscr{B}_3 = ((1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1))$

Exemple 1.3. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, 3x-2y+4z) \end{array}$.

Donnons la matrice de g dans les bases canoniques $\mathscr{B}_3$ et $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

On calcule les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}_3$ par g :

$g(1,0,0) = (1,3), \quad g(0,1,0) = (2,-2) \quad g(0,0,1) = (-1,4)$

Les images donnent directement les coordonnées dans la base canonique $\mathscr{B}_2$: $(1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$...

Alors, on a la matrice : $= g(1,0,0) \quad = g(0,1,0) \quad = g(0,0,1)$

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(g) = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} g(\boldsymbol{e_1}) & g(\boldsymbol{e_2}) & g(\boldsymbol{e_3}) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{f_1} = (1,0) \\ \boldsymbol{f_2} = (0,1) \end{matrix} \end{array}$$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2, B_1 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2, B_2$

$\mathbb{R}^2, (e_1, e_2) \xrightarrow{A_1} \mathbb{R}^2, (u, v)$

$\mathbb{R}^2, (u, v) \xrightarrow{A_2} \mathbb{R}^2, (e_1, e_2)$

Exercice 1.1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ une base. On pose $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{u}$ et $f(\boldsymbol{e_2}) = 3\boldsymbol{v}$.
Calculer $\underbrace{\mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(f)}_{A_1}$ et $\underbrace{\mathrm{M}_{(u,v)(e_1,e_2)}(f)}_{A_2}$.

On remarque que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

On a directement les coordonnées des images de $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ dans la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, alors,

$$A_1 = \mathrm{M}_{(e_1,e_2)(u,v)}(f) = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} f(\boldsymbol{e_1}) & f(\boldsymbol{e_2}) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{matrix} \end{array}$$

$f(e_1) = u = 1 \times u + 0 \times v$
$f(e_2) = 0 \times u + 3 \times v$

car f est linéaire

Pour l'autre matrice, il faut calculer $f(\boldsymbol{u})$ et $f(\boldsymbol{v})$.

On a $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$ qui donne $f(\boldsymbol{u}) = 2f(\boldsymbol{e_1}) + f(\boldsymbol{e_2})$ soit $f(\boldsymbol{u}) = 2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$ et finalement,

$f(u) = 2(2e_1 + e_2) + 3(e_1 - e_2) = 7e_1 - e_2$ $= u - 3v = f(v)$

De même, on calcule $f(v) = f(e_1) - f(e_2) = (2e_1 + e_2) - 3(e_1 - e_2) = -e_1 + 4e_2$

Alors,

$$A_2 = \mathrm{M}_{(u,v)(e_1,e_2)}(f) = \begin{array}{cc} f(u) & f(v) \\ \left(\begin{matrix} 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{matrix}\right. & \left.\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

A_1 et A_2 sont 2 matrices de f dans des bases différentes

On peut également calculer les deux matrices

$$A_3 = \mathrm{M}_{(u,v)(u,v)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(u) & f(v) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{(e_1,e_2)(e_1,e_2)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} = A_4$$

où on utilise la même base au départ et à l'arrivée. Cela est possible car f est un endomorphisme.

1.3 Matrice d'un endomorphisme

Définition 1.3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
On appelle matrice de l'endomorphisme v dans la base $\mathscr{B}$, la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v)$, de l'application linéaire v dans le couple de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(v(e_1), v(e_2), \ldots, v(e_p))$$

Remarque 1.3. On utilise la même base au départ et à l'arrivée.
La matrice de l'identité id_E est la matrice identité I_p.

> **Exercice 1.2.** Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'endomorphisme
> $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 2P - 2(X+1)P' + X^2P'' \end{array}.$$

On commence par calculer l'image des vecteurs de la base par φ :
$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(X) = 2X - 2(X+1) = -2, \quad \varphi(X^2) = 2X^2 - 2(X+1)2X + 2X^2 = -4X,$
$\varphi(X^3) = 2X^3 - 2(X+1)3X^2 + 6X^3 \cancel{= 2X^3} - 6X^2$
Alors, on peut écrire la matrice de φ dans la base canonique :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array} \quad \text{soit} \quad \mathrm{M}_{(1,X,X^2,X^3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ peut aussi s'écrire dans l'ordre décroissant des puissances : $(X^3, X^2, X, 1)$. C'est une autre base.

La matrice de φ dans cette base s'écrit : $\mathrm{M}_{(X^3,X^2,X,1)}(\varphi) = $

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X) & \varphi(1) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X^3 \\ X^2 \\ X \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$id_E : E \longrightarrow E$ et $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E

$$\mathcal{M}_B(id_E) = \mathcal{M}_{B,B}(id_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} id(e_1) & id(e_2) & \cdots & id(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & (0) \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & (0) & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_p \end{array} = I_p$$

pour un endomorphisme base de départ = base d'arrivée

matrice de départ

arrivée

appli linéaire

Les matrices d'un endomorphisme sont carrées

1.4 Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 1.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie de base $\mathscr{B}$. soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a*

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\alpha x + y) = \alpha \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) + \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(y)$$

Proposition 1.2. *Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie.*
Soit $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base de F.
Soit $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\alpha u + v) = \alpha \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1 \mathscr{B}_2}(u) + \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1 \mathscr{B}_2}(v)$.

2 Matrices et applications linéaires

2.1 Calcul des coordonnées de l'image

Proposition 2.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension p et q, $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base de F.*
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$: $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u)$.
Si $\boldsymbol{x} \in E$ a pour matrice X dans $\mathscr{B}_1$ et $\boldsymbol{y} = u(\boldsymbol{x})$ a pour matrice Y dans $\mathscr{B}_2$, alors on a

$$Y = AX \quad \text{soit} \quad \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\boldsymbol{x})) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\boldsymbol{x}).$$

Démonstration.

□

Exemple 2.1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $U = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Exemple 2.2. Soit r la rotation de matrice $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$

Calculer l'image des vecteurs $(1,0)$ puis $(0,1)$. En déduire l'angle de la rotation.

Calculer l'image du vecteur de coordonnése $(2,3)$.

Déterminer la matrice d'une rotation d'angle θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires

Théorème 2.2. *Soit n, p, q des entiers non nuls. Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimensions respectives n, p et q et ayant pour bases respectives $\mathscr{B}_1$ $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.*
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ de matrice B dans les bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.
Alors BA est la matrice de $v \circ u$ dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_3$:

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).$$

Démonstration. On a par définition de la matrice de l'application linéaire $v \circ u$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) &= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_3}(v \circ u)(\mathscr{B}_1) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_3}(v(u(\mathscr{B}_1)))\\
&= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(u(\mathscr{B}_1)) \quad \text{par propriété du calcul de l'image d'un vecteur par } v\\
&= \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) \quad \text{par calcul de l'image d'un vecteur par } u
\end{aligned}$$

Or, on a $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1)$ qui est la matrice identité d'où

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(v).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).$$

□

2.3 Matrices inversibles et isomorphismes

Théorème 2.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies de bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

f est un isomorphisme si et seulement si la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est carrée et inversible.

Dans ce cas, la matrice de l'application réciproque f^{-1} est la matrice inverse de la matrice de l'application f :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1}(f^{-1}) = \left(\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)\right)^{-1}$$

Démonstration.

□

3 Changements de bases

3.1 Matrices de passage

Définition 3.1. Soit E un espace de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée $P_{B\to B'}$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$: $P_{B\to B'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$

Lemme 3.1. *La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P_{B\to B'} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E)$.*

Théorème 3.2. *Une matrice de passage est inversible et $P_{B'\to B} = (P_{B\to B'})^{-1}$.*

Démonstration. $P_{B\to B'}$ est la matrice de l'application identité qui est un isomorphisme, alors $P_{B\to B'}$ est inversible et

$$(P_{B\to B'})^{-1} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E^{-1})\mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E) = P_{B'\to B}.$$

□

Lemme 3.3. *Soit $\mathscr{B}$ une base de E de dimension n et $x_1, x_2, \dots, x_n$ une famille de vecteurs de E.*
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est inversible.

3.2 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur

Théorème 3.4. *Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*
Si $x \in E$, on note $X = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors, on a la relation $\quad X = PX'$
qui donne les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base.

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)$$

Démonstration.

□

3.3 Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Théorème 3.5. *Soit E un espace de dimension finie et deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$.*
Soit F un espace vectoriel de dimension finie et deux bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}'_2$.
Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}'_1$. Soit Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}'_2$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et de matrice A' dans les bases $\mathscr{B}'_1$ à $\mathscr{B}'_2$.
On a $A' = Q^{-1}AP$ *soit* $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}'_2}(id_F).\mathrm{M}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(u).\mathrm{M}_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}_1}(id_E)$

3.4 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Théorème 3.6. *Soit E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*

Soit u un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathscr{B}$ et de matrice A' dans la base $\mathscr{B}'$.

On a $A' = P^{-1}AP.$ *soit* $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(id_E).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u).\,\mathrm{M}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(id_E)$

4 Rang d'une matrice

4.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 4.1. Soit A matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A, l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A.

4.2 Image et noyau d'une matrice

Définition 4.2. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle noyau et image de A notés $\mathrm{Ker} A$ et $\mathrm{Im} A$ les noyaux et images de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 4.1. *Le noyau d'une matrice A est l'ensemble des solutions du système $AX = 0$.*
L'image d'une matrice A est l'ensemble des seconds membres B pour lesquels le système $AX = B$ a au moins une solution.

4.3 Rang d'une matrice

Théorème 4.2. *Le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est le nombre de pivots de sa matrice échelonnée réduite par lignes est égal au rang de l'application linéaire associée à A.*

On a $\quad \operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A$.

Corollaire 4.3. *Le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal au rang des vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$.*

Corollaire 4.4. *Étant donnée une base $\mathscr{B}$ d'un espace vectoriel E, le rang d'une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de E est égal au rang de la matrice des vecteurs dans la base $\mathscr{B}$:* $\operatorname{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \operatorname{rg} \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Corollaire 4.5. *Le rang d'une application linéaire u de E dans F est le rang de la matrice de u dans n'importe quelles bases de E et F.*

4.4 Rang et matrice inversible

Théorème 4.6. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est de rang maximal si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de* $\mathbb{K}^n$

Théorème 4.7. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *sont des matrices inversibles et si* $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est une matrice, alors* $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(MB)$ *: on ne change pas le rang quand on multiplie par une matrice inversible.*

Théorème 4.8. *Deux matrices équivalentes par lignes ont le même rang.*

4.5 Rang de la transposée

Proposition 4.9. *Le rang d'une matrice est égal : au rang de ses vecteurs colonnes et au rang de ses vecteurs lignes et au rang de sa transposée.*

Théorème 4.10. *Deux matrices équivalentes par colonnes ont le même rang.*

5 Exemples de transformations vectorielles du plan euclidien

5.1 Rotations vectorielles

Définition 5.1. Dans le plan euclidien, on appelle rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, l'application r_θ telle que pour tout vecteur $\vec{u}$ on ait $(\vec{u}, r_\theta(\vec{u})) = \theta\ [2\pi]$ et $||\vec{u}|| = ||r_\theta(\vec{u})||$.

Proposition 5.1. *Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien, alors f conserve le produit scalaire si et seulement si f conserve la norme.*

Alors f est un automorphisme. On dit que f est un automorphisme orthogonal.

5.2 Matrice d'une rotation dans une BOND

Théorème 5.2. *La matrice de r_θ dans une BOND est* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

5.3 Composée de deux rotations

Proposition 5.3. *La composée des rotations r_θ et r_φ donne la rotation $r_{\theta+\varphi}$*

$$r_\theta \circ r_\varphi = r_\varphi \circ r_\theta = r_{\theta+\varphi}$$

Corollaire 5.4. *Matriciellement,* $R_\theta \times R_\varphi = R_\varphi \times R_\theta = R_{\theta+\varphi}$

Théorème 5.5. *Une rotation r_θ est un automorphisme du plan et $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.*

5.4 Symétrie orthogonale vectorielle

Proposition 5.6. *Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du plan euclidien. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$ est un sous-espace vectoriel du plan noté $\vec{v}^{\perp}$.*
De plus, $\mathrm{Vect}\,\vec{v}$ *et* $\vec{v}^{\perp}$ *sont supplémentaires dans le plan.*

Définition 5.2. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du plan euclidien. On appelle symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\vec{v}$, la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}\vec{v}$ parallèlement à $\vec{v}^{\perp}$.
C'est à dire que $s_{\vec{v}}$ est définie par $s_{\vec{v}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ où $\vec{u}_1 \in \operatorname{Vect}\vec{v}$ et $\vec{u}_2 \in \vec{v}^{\perp}$ avec $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Théorème 5.7. *Pour $\vec{v} \neq 0$, l'application $s_{\vec{v}}$ est un automorphisme du plan vectoriel.*
$s_{\vec{v}}$ conserve le produit scalaire, la norme, change l'orientation des angles et vérifie $s_{\vec{v}} \circ s_{\vec{v}} = id_P$.

5.5 Matrice d'une symétrie orthogonale dans une BOND

Théorème 5.8. *Soit P le plan euclidien muni d'une BOND $(\vec{i}, \vec{j})$.*

Si $\vec{v}$ fait un angle $(\vec{i}, \vec{v}) = \varphi$ avec le vecteur $\vec{i}$, alors $s_{\vec{v}}$ a pour matrice $S_{2\varphi} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$.

5.6 Composée de deux symétries orthogonales

Théorème 5.9. *Soit $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls du plan vectoriel.*
La composée de deux symétries orthogonales $s_{\vec{v}_1}$ et $s_{\vec{v}_2}$ est une rotation d'angle $\theta = 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\ [2\pi]$.

6 Exemples de transformations vectorielles de l'espace euclidien

6.1 Rotation vectorielle de l'espace

Définition 6.1. Soit $\vec{n}$ un vecteur normé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$: $||\vec{n}|| = 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique en $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in \operatorname{Vect} \vec{n}$ et $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$.
On appelle rotation vectorielle d'axe dirigé par $\vec{n}$ et d'angle θ, l'application $r_{\theta,\vec{n}}$ définie par

$$r_{\theta,\vec{n}}(\vec{u}) = \vec{u}_1 + \cos\theta\,\vec{u}_2 + \sin\theta\,\vec{n} \wedge \vec{u}_2.$$

Proposition 6.1. *Une rotation vectorielle est linéaire, bijective, conserve la norme, le produit scalaire et les angles.*

6.2 Matrice d'une rotation dans une BOND adaptée

Théorème 6.2. *Soit $\vec{n}$ un vecteur normé, $\vec{i} \perp \vec{n}$ avec $||\vec{i}|| = 1$, un vecteur normé orthogonal à $\vec{n}$. Alors $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$ est une BOND de l'espace.*
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice de la rotation d'angle θ autour de $\vec{n}$, dans la base $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{n} \wedge \vec{i})$, est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$