Mathématique - Corrigé DS n°7

Exercice 1

1. On a $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, alors $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

   Or la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann de la forme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $0<\alpha<1$ alors elle diverge.

   D'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs,

   $\boxed{\text{la série } \sum \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ est divergente}}$.

2. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{\lfloor \mathrm{ch}(n)\rfloor + 1}$ est convergente.

   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ch}(n) \geqslant 1$ alors $\lfloor \mathrm{ch}(n)\rfloor + 1 > 0$ et on a l'encadrement suivant : $\mathrm{ch}(n) \leqslant \lfloor \mathrm{ch}(n)\rfloor + 1$

   Ce qui donne $0 \leqslant \dfrac{1}{\lfloor \mathrm{ch}(n)\rfloor + 1} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{ch}(n)}$.

   Par ailleurs, on a $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(n)} = \dfrac{2}{e^n + e^{-n}}$.

   Comme $e^{-n} > 0$ pour tout entier n, on a $\dfrac{2}{e^n+e^{-n}} < \dfrac{2}{e^n}$, d'où $0 \leqslant \dfrac{1}{\lfloor \mathrm{ch}(n)\rfloor + 1} \leqslant \dfrac{2}{e^n}$.

   La série $\sum 2e^{-n}$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$. On a $0 < \dfrac{1}{e} < 1$, alors la série $\sum 2e^{-n}$ est convergente.

   D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifes, comme $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \dfrac{2}{e^n+e^{-n}} < \dfrac{2}{e^n}$, $\boxed{\text{la série } \sum \dfrac{1}{\lfloor \mathrm{ch}(n)\rfloor + 1} \text{ est convergente}}$.

Exercice 2

1. La fonction $f_n : x \mapsto x^5 + nx^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de bijection, f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} x^5+nx^3, \lim\limits_{x\to+\infty} x^5+nx^3\right[=]-\infty,+\infty[$.

   Alors, 1 a un unique antécédent x_n :

   $\boxed{\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe un unique réel } x_n \text{ tel que } x^5 + nx^3 = 1}$.

   De plus, $f_n(0) = 0 < 1 = f_n(x_n)$ et la fonction f_n est strictement croissante alors

   $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_n}$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n^5 + nx_n^3 = 1 \quad (*)$.

   On calcule $f_{n+1}(x_n) = x_n^5 + (n+1)x_n^3 = 1 - nx_n^3 + nx_n^3 + x_n^3 = 1 + x_n^3 > 0$.

   On a pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$ et la fonction f_{n+1} est strictement croissante alors, $x_n > x_{n+1}$ ce qui prouve que $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est strictement décroissante}}$.

3. (x_n) est décroissante et minorée par 0, alors (x_n) est convergente vers une limite réelle ℓ.

   Par produit de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^3 = \ell^3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = \ell^5$.

   On a pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad x_n^3 = \dfrac{1-x_n^5}{n}$ qui donne par passage à la limite $\ell^3 = 0$ soit $\boxed{\ell = 0}$

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad x_n^3 = \dfrac{1 - x_n^5}{n} \iff x_n = \sqrt[3]{\dfrac{1 - x_n^5}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \sqrt[3]{1 - x_n^5}$

   On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - x_n^5 = 1$ alors par continuité de la racine cubique, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[3]{1 - x_n^5} = 1$.

   Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[3]{n} x_n = 1$ ce qui prouve que $\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}}$

5. On déduit de l'équivalent précédent : $x_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n^{1/3}} + o\left(\dfrac{1}{n^{1/3}}\right)$

   On injecte cette égalité dans la relation $(*)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{n^{1/3}}(1 - x_n^5)^{1/3}$

   Et, $x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{1/3}}$ qui donne $x_n^5 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{5/3}}$

   Cet équivalent nous donne le développement $x_n^5 \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n^{5/3}} + o\left(\dfrac{1}{n^{5/3}}\right)$

   Puis, $x_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n^{1/3}} \left(1 - \left(\dfrac{1}{n^{5/3}} + o\left(\dfrac{1}{n^{5/3}}\right)\right)\right)^{1/3}$

   On utilise la formule $(1+u)^{1/3} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{u}{3} + o(u)$ ce qui donne : $x_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n^{1/3}} \left(1 - \dfrac{1}{3n^{5/3}} + o\left(\dfrac{1}{n^{5/3}}\right)\right)$

   soit $\boxed{x_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n^{1/3}} - \dfrac{1}{3n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$

Exercice 3

1. f est définie pour $1 + \dfrac{1}{2x} > 0 \iff \dfrac{2x+1}{2x} > 0. \iff 2x(2x+1) > 0.$

   C'est un trinôme du second degré dont les racines sont 0 et $-\dfrac{1}{2}$ alors $1 + \dfrac{1}{2x} > 0 \iff x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup]0, +\infty[$. Alors, $\boxed{f \text{ est définie sur } \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup]0, +\infty[}$.

2. On a $f(x) = x(x-1)\left(\ln(2x+1) - \ln(2x)\right)$ Alors, $\dfrac{f(x)}{x\ln(x)} = (x-1)\left(\dfrac{\ln(2x+1)}{\ln(x)} - 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)$

   Ce qui donne $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x\ln(x)} = -1 \times -1 = 1$, alors $\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} x\ln(x)}$.

   On en déduit, par croissance comparée, que $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0}$.

3. On calcule $\dfrac{f(x)}{x} = (x-1)\left(\ln(2x+1) - \ln(2x)\right)$ ce qui donne $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ on a donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - \lim_{0^+} f(x)}{x - 0} = +\infty}$ ce qui prouve que $\underline{\mathcal{C} \text{ a une demi-tangente verticale en } 0^+}$.

4. On pose $x = 1 + h \iff h = x - 1$.

   $f(x) = (1+h)h\ln\left(1 + \dfrac{1}{2(1+h)}\right) = (1+h)h\left(\ln(3+2h) - \ln(2) - \ln(1+h)\right)$

   $= (1+h)h\left(\ln\left(1 + \dfrac{2h}{3}\right) + \ln(3) - \ln(2) - \ln(1+h)\right)$

   Puis, on utilise la formule $\ln(1+u) \underset{0}{=} v + o(v)$

   $f(x) \underset{1}{=} h(1+h)\left(\dfrac{2h}{3} + o(h) + \ln(3) - \ln(2) - h + o(h)\right) \underset{1}{=} (1+h)\left(\ln(3/2)h - \dfrac{h^2}{3} + o(h^2)\right)$

   Alors, $\quad f(x) \underset{1}{=} \ln(3/2)h + \left(\ln(3/2) - \dfrac{1}{3}\right)h^2 + o(h^2)$

soit $\boxed{f(x) \underset{1}{=} \ln\left(\frac{3}{2}\right)(x-1) + \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\right)(x-1)^2 + o((x-1)^2)}$

5. D'après le DL à l'ordre 1 de f est 1 : $f(x) \underset{1}{=} \ln\left(\frac{3}{2}\right)(x-1) + o(x-1)$,

   $\boxed{\text{la droite } y = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(x-1) \text{ est tangente à } \mathcal{C} \text{ en } x = 1}$.

   De plus, $f(x) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)(x-1) \underset{1}{=} \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\right)(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

   On a $\ln(3/2) - 1/3 > 0$, alors $\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\right)(x-1)^2 \geqslant 0$ au voisinage de 1.

   Donc $\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C} \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de } 1}$.

6. On a $\ln(1+v) \underset{0}{=} v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + o(v^3)$ Alors, $\ln\left(1 + \frac{u}{2}\right) \underset{0}{=} \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{24} + o(u^3)$

   On en déduit $(1-u)\ln\left(1+\frac{u}{2}\right) \underset{0}{=} (1-u)\left(\frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{24} + o(u^3)\right)$

   soit $\boxed{(1-u)\ln\left(1+\frac{u}{2}\right) \underset{0}{=} \frac{u}{2} - \frac{5u^2}{8} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)}$

7. On pose $u = \frac{1}{x}$ ce qui donne $x \to +\infty \iff u \to 0^+$ et $x \to -\infty \iff u \to 0^-$.

   On a $f(x) = \frac{1}{u}\left(\frac{1}{u} - 1\right)\ln\left(1 + \frac{u}{2}\right)$ Alors, $f(x) \underset{\pm\infty}{=} \frac{1}{u^2}\left(\frac{u}{2} - \frac{5u^2}{8} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)\right)$

   soit $f(x) \underset{\pm\infty}{=} \frac{1}{2u} - \frac{5}{8} + \frac{u}{6} + o(u)$ Et finalement, $\boxed{f(x) \underset{\pm\infty}{=} \frac{x}{2} - \frac{5}{8} + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$

8. On a $f(x) - \frac{x}{2} + \frac{5}{8} \underset{\pm\infty}{=} \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, alors, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - \frac{x}{2} + \frac{5}{8} = 0$ donc la droite $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{8}$ est asymptote à la courbe de f.

   De plus, on a $\frac{1}{x} > 0$ au voisinage de $+\infty$ et $\frac{1}{x} < 0$ au voisinage de $-\infty$ alors, $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'asymptote de $+\infty$ et en-dessous au voisinage de $-\infty$.

Exercice 4

1. On a $G \subset \mathbb{R}_3[X]$ par définition.

   Le polynôme nul 0 vérifie l'équation $(2X-1)0' = 0 = 6 \times 0$ et est de degré au plus 3, donc G est non vide.

   Soit $(P,Q) \in G^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(2X-1)(\lambda P + Q)' = (2X-1)(\lambda P' + Q') = \lambda(2X-1)P' + (2X-1)Q' = \lambda 6P + 6Q$ car $P \in G$ et $Q \in G$ Alors,

   $(2X-1)(\lambda P + Q)' = 6(\lambda P + Q)$ Donc $\lambda P + Q \in G$: G est stable par combinaison linéaire.

   On en déduit que $\boxed{G \text{ est bien un sev de } \mathbb{R}_3[X]}$.

   Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. P peut s'écrire $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec a, b, c, d réels. On a

   $P \in G \iff (2X-1)(3aX^2 + 2bX + c) = 6aX^3 + 6bX^2 + 6cX + 6d$

   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 6a &=& 6a \\ 4b - 3a &=& 6b \\ 2c - 2b &=& 6c \\ -c &=& 6d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3a + 2b &=& 0 \\ 2b + 4c &=& 0 \\ c + 6d &=& 0 \end{array}\right. \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -8\alpha \\ b &=& 12\alpha \\ c &=& -6\alpha \\ d &=& \alpha \end{array}\right.$$

   $\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : (a,b,c,d) = \alpha(-8, 12, -6, 1) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : P = \alpha(-8X^3 + 12X^2 - 6X + 1)$

   Alors, $\boxed{G = \mathrm{Vect}(-8X^3 + 12X^2 - 6X + 1)}$: G est une droite vectorielle, on a $\dim G = 1$ et $\boxed{(-8X^3 + 12X^2 - 6X + 1) \text{ est une base de } G}$.

2. La famille $\mathcal{F}$ est échelonnée en degré donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est libre}}$.
   C'est une famille de 3 polynômes, or $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ ne peut pas être une base de } \mathbb{R}_3[X]}$.
3. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X^2) - (X^2+1)(\lambda P + Q) = \lambda P(X^2) + Q(X^2) - \lambda(X^2+1)P - (X^2+1)Q = \lambda P(X^2) - (X^2+1)P + Q(X^2) - (X^2+1)Q = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$
   Alors, $\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, avec $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$, alors $P(X^2) - (X^2+1)P = 0$ donne $2n - (n+2) = 0$ donc $\deg(P) = 2$.
   On pose $P = aX^2 + bX + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a $\quad P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff P(X^2) - (X^2+1)P = 0$
   $\iff aX^4 + bX^2 + c - aX^4 - bX^3 - (a+c)X^2 - bX - c = 0$
   Or, un polynôme est nul si et seulemnent si tous ses coefficients sont nuls, donc
   $$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 0 \\ b-(a+c) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 0 \\ a &=& -c \end{array}\right. \iff P = a(X^2-1)$$
   Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^2-1)}$.
5. Comme $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$, $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$.
   On a $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$, alors d'après le théorème du rang $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$ d'où $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 4 - 1 = 3$.
   On a $\mathrm{Im}(\varphi)$ qui est de dimension finie et $\mathbb{R}[X]$ qui est de dimension infinie, donc $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}[X]$ et $\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjective}}$.
   Alors φ n'est pas un isomorphisme, car elle n'est pas bijective. Et, ce n'est pas non plus un endomorphisme car les espaces de départ et d'arrivée sont différents.
6. Montrons que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont en somme directe. Soit $P \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \cap \mathrm{Ker}(\varphi)$.
   On a $P = \lambda(X^2-1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ car $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$
   et $P = \mu(2X-1) + \nu(3) + \gamma(3X^3+1)$ avec $(\mu, \nu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ car $P \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
   Par unicité de l'écriture polynomiale, le coefficient de degré 2 vaut $\lambda = 0$, donc $P = 0$
   Ainsi $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) \subset \{0\}$ et l'inclusion réciproque est toujours vraie.
   On a bien montré que <u>ces espaces sont en somme directe</u>.
   De plus $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) = 3$ car la famille de 3 vecteurs qui l'engendre est libre et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$ car cet espace est engendré par un vecteur non nul.
   Alors, $\underline{\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 3 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])}$.
   Ainsi, par théorème, nous avons montré $\boxed{\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_3[X]}$.
7. On calcule d'abord les projections sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
   Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\quad P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
   On cherche $F \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et $K \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ telles que $P = F + K$.
   $F \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, donc $F = \lambda(2X-1) + 3\mu + \nu(3X^3+1)$ avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$
   $K \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, donc $K = \gamma(X^2-1)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, par unicité de l'écriture polynômiale,
   $$P = F + K \iff aX^3 + bX^2 + cX + d = \lambda(2X-1) + 3\mu + \nu(3X^3+1) + \gamma(X^2-1)$$
   $$\iff aX^3 + bX^2 + cX + d = 3\nu X^3 + \gamma X^2 + 2\lambda X + 3\mu - \lambda + \nu - \gamma$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 3\nu &=& a \\ \gamma &=& b \\ 2\lambda &=& c \\ \nu - \gamma - \lambda + 3\mu &=& d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \nu &=& a/3 \\ \gamma &=& b \\ \lambda &=& c/2 \\ \mu &=& -a/9 + b/3 + c/6 + d/3 \end{array}\right.$$
   On a donc trouvé les expressions pour les vecteurs K et F. Sachant que K est la projection sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et F est la projection sur $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Le symétrique de P est donc $K-F=\gamma(X^2-1)-\lambda(2X-1)-3\mu-\nu(3X^3+1)$
ce qui donne

$K-F=b(X^2-1)-\dfrac{c}{2}(2X-1)-\left(-\dfrac{a}{3}+b+\dfrac{c}{2}+d\right)-\dfrac{a}{3}(3X^3+1)$

$K-F=-aX^3+bX^2-cX+(-b+c/2-d-b-c/2+a/3-a/3)=-aX^3+bX^2-cX+-d-2b$

Donc la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(\varphi)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est l'application

$$\begin{array}{rcl}\sigma:\mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X]\\ aX^3+bX^2+cX+d & \longmapsto & -aX^3+bX^2-cX+-d-2b\end{array}$$

8. On a $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Vect}(\varphi(1),\varphi(X),\varphi(X^2),\varphi(X^3))=\mathrm{Vect}(-X^2,X^2-X^3+X,-X^2,X^6-X^5+X^3)=\mathrm{Vect}(-X^3+X^2+X,-X^2,X^6-X^5+X^3)$ Or cette famille est échelonnée en degré donc libre, et c'est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$ donc c'est bien une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
9. La restriction à un sev d'une application linéaire est linéaire, donc φ est linéaire.
$\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))=3=\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$, ces espaces étant isomorphes, l'application est bijective si et seulement si elle est injective.
Or $u\in\mathrm{Ker}(\tilde{\varphi})\iff u\in\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $u\in\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))\iff u=\overrightarrow{0}$ car ces espaces sont supplémentaires. Donc $\mathrm{Ker}(\tilde{\varphi})=\{\overrightarrow{0}\}$.
Donc l'application est bijective et linéaire, $\boxed{\tilde{\varphi}\text{ est bien un isomorphisme}}$.

Exercice 5

1. (a) On écrit un développement limité de sin en 0 :
$\sin(t)\underset{0}{=}t-\dfrac{t^3}{6}+t^3\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t)\underset{\to t\to 0}{\longrightarrow}0$ qui donne par soustraction :
$\sin(t)-t\underset{0}{=}-\dfrac{t^3}{6}+t^3\varepsilon(t)$ qui donne par quotient :
$\dfrac{\sin(t)-t}{t^2}\underset{0}{=}-\dfrac{t}{6}+t\varepsilon(t)$.
On remarque que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(t)-t}{t^2}=0=g(0)$ alors on peut écrire $\boxed{g(t)\underset{0}{=}-\dfrac{t}{6}+t\varepsilon(t)}$.
La fonction g a donc un développement limité d'ordre 0 en 0 et g est définie en 0, alors g est continue en 0.
Comme $t\mapsto\dfrac{\sin(t)-t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas, g est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc $\boxed{g\text{ est continue sur }\mathbb{R}}$.
(b) g est continue sur le segment $[-2,2]$ alors sur $[-2,2]$, g est majorée par M : $\forall t\in[-2,2]$, $|g(t)|\leqslant M$.
   — Pour $x\in]0,1]$, on a pour tout $t\in[x,2x]$, $|t|\leqslant 2$ donc $|g(t)|\leqslant M$.
   L'intégrale est croissante et les bornes sont dans le bon sens, alors
   $$\left|\int_x^{2x}g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^{2x}|g(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{2x}M\,\mathrm{d}t$$
   On trouve après calculs :
   $$\underline{\left|\int_x^{2x}g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant Mx}$$
   — Pour $x\in[-1,0[$, on a pour tout $t\in[2x,x]$, $|t|\leqslant 2$ donc $|g(t)|\leqslant M$.
   L'intégrale est croissante et les bornes sont dans le bon sens, alors
   $$\left|\int_{2x}^{x}g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{2x}^{x}|g(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{2x}^{x}M\,\mathrm{d}t$$
   On trouve après calculs :
   $$\underline{\left|\int_x^{2x}g(t)\,\mathrm{d}t\right|\left|\int_{2x}^{x}g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant -Mx}$$

Alors $\boxed{\text{pour tout } x \in [-1,1], \quad \left|\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|x|}$

L'intervalle $[-1,1]$ est un voisinage de 0 et $\lim\limits_{x\to 0} M|x| = 0$, alors par théorème d'encadrement $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = 0}$.

(c) On a pour $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \ln(2) = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

soit pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\quad f(x) - f(0) = \int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

De plus, l'égalité est vraie pour $x = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(0) = \int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) - f(0) = 0$ ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On effectue le changement de variables $u = -t$ qui est licite car la fonction $t \mapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On calcule l'élément différentiel $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$. Les bornes deviennent $t = x \iff u = -x$ et $t = 2x \iff u = -2x$

Alors, d'après le théorème de changement de variables :

$$f(x) = -\int_{-x}^{-2x} \frac{\sin(-u)}{(-u)^2}\,\mathrm{d}u$$

$$f(x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \text{ car } \sin(-u) = -\sin(u)\text{x}$$

On trouve donc $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et comme $f(0) = 0$, on a $f(0) = f(-0)$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.

3. (a) La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, alors elle possède des primitives : soit F_1 une de ces primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $F_1'(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $f(x) = [F_1(t)]_x^{2x} = F_1(2x) - F_1(x)$.

Comme $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, F_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $x \mapsto 2x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors par composition, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 2F_1'(2x) - F_1'(x) = 2\frac{\sin(2x)}{(2x)^2} - \frac{\sin(x)}{x^2}$

De la même manière, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, alors elle possède des primitives : soit F_2 une de ces primitives. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $F_2'(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $f(x) = [F_2(t)]_x^{2x} = F_2(2x) - F_2(x)$.

F_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $x \mapsto 2x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors par composition, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f'(x) = 2F_2'(2x) - F_2'(x) = 2\frac{\sin(2x)}{(2x)^2} - \frac{\sin(x)}{x^2}$

On en conlut que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{\sin(2x)}{2x^2} - \frac{2\sin(x)}{2x^2}}$

(b) On calcule un DL de f' en 0 :

$$\sin(x) = 0x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \text{ et } \sin(2x) = 2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^4)$$

Alors, $\sin(2x) - 2\sin(x) \underset{0}{=} -x^3 + o(x^4)$ qui donne par quotient, $\boxed{f(x) \underset{0}{=} -x + o(x^2)}$.

Alors $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et f' a une limite finie en 0, alors d'après le théorème de la limite de la dérivée, $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0}$ et f' est continue en 0.

(c) On a pour $x > 0$, $f'(x) > 0 \iff \sin(2x) > 2\sin(x) \iff 2\sin(x)\cos(x) > 2\sin(x)$.

- Pour $x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a $\sin(x) > 0$ donc $f'(x) > 0 \iff \cos(x) > 1$ ce qui est impossible donc $f'(x) \leqslant 0$.
- Pour $x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a $\sin(x) < 0$ donc $f'(x) > 0 \iff \cos(x) < 1$ ce qui est toujours vrai donc $f'(x) > 0$.
- Et $f'(k\pi) = 0$.

4. On a pour $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$, $|\sin(t)| \leqslant 1$ donc $\left|\dfrac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ car $t^2 > 0$.

L'intégrale est croissante et les bornes x et $2x$ sont dans l'ordre croissant alors
$$\left|\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{2x} \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right|\,\mathrm{d}t$$
Et, à nouveau par croissance de l'intégrale :
$$\int_x^{2x} \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
On calcule :
$$\left|\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$
On obtient $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2x}}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$, alors, d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

5. (a) On pose $x = \dfrac{\pi}{2}$. Pour $t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\quad \sin(t) \geqslant 0$ donc $\dfrac{\sin(t)}{t^2} \geqslant 0$.

L'intégrale est croissante et les bornes $\dfrac{\pi}{2}$ et π sont dans l'ordre croissant. Alors,

$\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\pi/2}^{\pi} 0\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ Donc $\underline{f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue, positive sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ et ne s'annule pas en $\dfrac{\pi}{2}$ donc elle n'est pas identiquement nulle sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ alors son intégrale ne peut pas être nulle : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$. $\qquad$ On en déduit $\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0}$

On pose $x = \pi$. Pour $t \in [\pi, 2\pi]$, $\quad \sin(t) \leqslant 0$ donc $\dfrac{\sin(t)}{t^2} \leqslant 0$.

L'intégrale est croissante et les bornes π et 2π sont dans l'ordre croissant. Alors,

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ $\qquad$ Donc $\underline{f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant 0}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue, négative sur $[\pi, 2\pi]$ et n'est pas identiquement nulle sur $[\pi, 2\pi]$ alors son intégrale ne peut pas être nulle : $f(\pi) \neq 0$.

Donc $\boxed{f(\pi) < 0}$

(b) On a

$\displaystyle f(2\pi) = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ par relation de Chasles

Dans la deuxième intégrale, on pose $u = t - \pi$ alors $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ et $u \in [3\pi, 4\pi] \iff [2\pi, 3\pi]$

On peut changer de variables dans l'intégrale :
$$\int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{(u+\pi)^2}\,\mathrm{d}u$$
On a $\sin(u+\pi) = -\sin(u)$. D'où
$$\int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{2\pi}^{3\pi} -\frac{\sin(u)}{(u+\pi)^2}\,\mathrm{d}u = \int_{2\pi}^{3\pi} -\frac{\sin(t)}{(t+\pi)^2}\,\mathrm{d}t$$
Alors, $f(2\pi) = \displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(t)}{(t+\pi)^2}\,\mathrm{d}t$

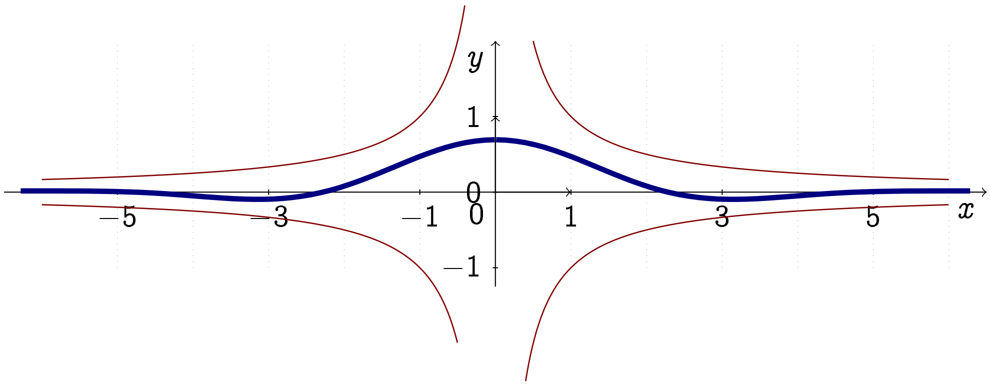
soit $\boxed{f(2\pi) = \displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right)\sin(t)\,\mathrm{d}t}$

On a pour tout $t \in [2\pi, 3\pi]$, $\quad \sin(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{(t+\pi)^2} > 0$. L'intégrale est croissante et les bornes sont $2\pi < 3\pi$, alors, on a $\displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right)\sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

On a donc $f(2\pi) \geqslant 0$.

La fonction à intégrer $t \longmapsto \left(\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{(t+\pi)^2}\right)\sin(t)$ est continue et positive sur $[2\pi, 3\pi]$ et n'est pas nulle en $\dfrac{5\pi}{2}$, alors son intégrale ne peut pas être nulle.

On a donc $\boxed{f(2\pi) > 0}$.



(c)