

# Chapitre 21 - Variables aléatoires

## 1 Variables aléatoires

### 1.1 Définition

**Définition 1.1.** Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini et  $E$  un ensemble.

On appelle variable aléatoire une application définie sur  $(\Omega, P)$  à valeurs dans  $E : X : \begin{matrix} \Omega & \longrightarrow & E \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{matrix}$ .

Lorsque  $E$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , on parle de variable aléatoire réelle.

L'ensemble des valeurs susceptibles d'être prises par  $X$  est  $X(\Omega)$  défini par  $X(\Omega) = \{x \in E \mid \exists \omega \in \Omega : x = X(\omega)\}$ .

Lorsque  $\Omega$  est fini,  $X(\Omega)$  est fini et on notera souvent  $X(\Omega) = (x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  avec  $n = |\Omega|$ .

**Remarque 1.1.** Par défaut, on suppose que les variables aléatoires sont des variables aléatoires réelles (V.A.R.).

**Définition 1.2.** Soit une variable aléatoire  $X : \Omega \longrightarrow E$ . Soit  $A$  une partie de  $E : A \subset E$ .

On définit l'événement  $(X \in A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ .

On a donc  $(X \in A) = X^{-1}(A)$  et on le note aussi  $(X \in A) = \{X \in A\}$ .

**Définition 1.3.** Pour une variable aléatoire réelle  $X$  et pour  $a, b$  réels, on définit les événements suivants :

$(X = a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\} = \{\text{tous les résultats } \omega \text{ tels que } X(\omega) = a\}$

$(X \leq a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\} = \{\text{tous les résultats } \omega \text{ tels que } X(\omega) \leq a\}$

$(a \leq X < b) = \{\omega \in \Omega \mid a \leq X(\omega) < b\} = \{\text{tous les résultats } \omega \text{ tels que } a \leq X(\omega) < b\}$

Exemples : on lance 2 D6 un rouge et un vert

$S =$  la somme des deux dés est une V.A.R. (variable réelle)

On a  $S(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 10, 11, 12\}$

L'événement  $(S = 8)$  est  $\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$P(S = 8) = \frac{5}{36}$  car on a équiprobabilité des 36 résultats de deux dés.

$X =$  le plus grand numéro sorti

on a  $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$   $P(X = 3) = \frac{5}{36}$

car  $(X = 3) = \{\text{le plus grand numéro sorti est un 3}\}$   
 $= \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 3)\}$

Exemple: On s'intéresse aux  $n$  premières naissances de l'année et à la répartition fille/garçon.  
et on pose  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de filles nées.

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad (\text{c'est une v.a. r.}) \quad (\text{réelle})$$

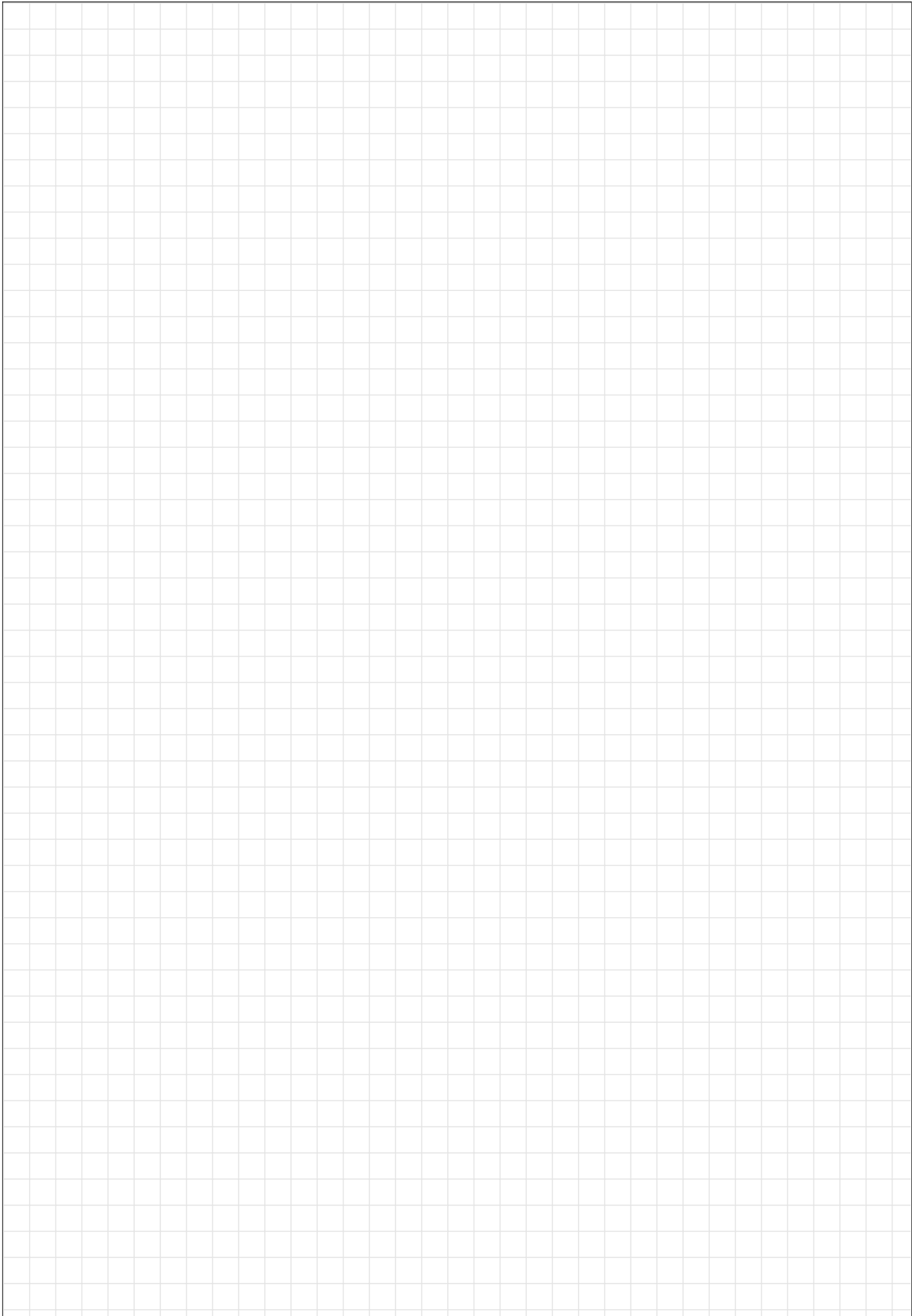
Toutes les naissances sont indépendantes  
on note  $p$  la probabilité d'obtenir une fille  
on suppose que cette probabilité est la même pour chaque naissance  $p = \frac{97}{200}$

il est connu que  $X$  "suit une loi binomiale"  
car "ça compte le nombre de succès dans la répétition de  $n$  expériences identiques et indépendantes ayant deux résultats possibles succès de probabilité  $p$  et échec avec une probabilité  $1-p$ ."

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec } k \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$\Omega = \{F, G\}^n = \{FFF\dots F, FF\dots FG, FF\dots GGF\dots, GGG\dots G\}$   
c'est-à-dire  $\binom{n}{k}$  listes de  $n$  lettres prises parmi  $F$  et  $G$  avec  $k$   $F$   
chacun des résultats correspondant à la même probabilité  
 $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

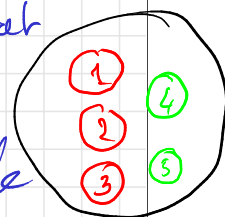
## 1.2 Exemples



suite page 6. Cas 2: on tire simultanément 3 boules dans  $\Omega = 2V + 3R$ . loi de  $X = \text{nb de vertes}$

(calcul en tenant compte de l'ordre (à éviter car le résultat pour  $X$  ne tient pas compte de l'ordre))

on suppose que les boules sont discernables; par exemple numérotées de 1 à 5.



on choisit  $\Omega =$  l'ensemble des listes de 3 éléments distincts pris parmi 5 (arrangements de 3 parmi 5) donc  $|\Omega| = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3$

$$P(X=0) = \frac{3!}{|\Omega|} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \text{ car il y a équiprobabilité des tirages et } 3! \text{ listes compatibles avec 1, 2, 3 sans répétition}$$

$$P(X=1) = \frac{2 \text{ choix du numéroté } \times 3 \text{ tirages } \times 3 \text{ choix pour la } 1^{\text{ère}} \text{ rouge } \times 2 \text{ pour la } 2^{\text{ème}}}{|\Omega|}$$

$$= \frac{36}{60} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2} \text{ choix des positions } V \times 2 \text{ choix pour la } 1^{\text{ère}} V \times 3 \text{ choix pour la rouge}}{|\Omega|}$$

$$= \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \text{ on vérifie } P(X=1) + P(X=2) + P(X=0) = \frac{60}{60}$$

Cas 3: on tire jusqu'à obtenir une rouge; loi de  $X$   
 $\Omega = 2V + 3R$   $X = \text{nb de } V \text{ tirées}$  dans remise.

On note  $R_i =$  "obtenir une rouge au  $i^{\text{ème}}$  tirage".

$$\text{car } X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$(X=0) = R_1 \text{ donc } P(X=0) = P(R_1) = \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$$

$$(X=1) = \overline{R_1} \cap R_2 \quad P(X=1) = P(\overline{R_1}) \cdot P_{\overline{R_1}}(R_2) \quad \text{formule des probas conditionnelles}$$

$$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

$$(X=2) = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3 \quad P(X=2) = P(\overline{R_1}) \cdot P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \cdot P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(R_3)$$

donc  $P(X=2) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{20}$

### 1.3 Loi de probabilité d'une v.a. réelle finie

*Soit  $(\Omega, \mathcal{P})$  un espace probabilisé*

**Définition 1.4.** Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire finie. L'application  $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1]$   
 $A \mapsto P(X^{-1}(A))$   
 est une probabilité appelée loi de probabilité de la v.a.  $X$  et  $(X(\Omega), P_X)$  est un espace probabilisé.

**Définition 1.5.** Soit  $X$  une v.a. finie  $X : \Omega \rightarrow E$ . On appelle loi de probabilité de  $X$  la donnée de toutes les valeurs prises par  $X : X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$  et de toutes les probabilités  $(P(X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$ .

**Remarque 1.2.** On peut utiliser un tableau

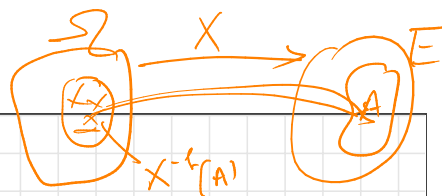
$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	...
$P(X = x)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$	$P(X = x_4)$	$P(X = x_5)$	...

$\exists (E) =$  ensemble des parties de  $E$

**Théorème 1.1.** Soit  $\{(x_i, p_i) | i \in I\}$  une partie finie de  $\mathbb{R}^2$  telle que les  $x_i$  soient distincts.

$\{(x_i, p_i) | i \in I\}$  est la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie si et seulement si

$$\begin{cases} \forall i \in I, p_i \geq 0 \\ \sum_{i \in I} p_i = 1 \end{cases}$$



**Exemple** On lance 2 dés à 6 faces équilibrés  
 on note  $S$  la v.a. égale à la somme des 2 nombres obtenus  
 Loi de  $S$  ?

On a  $S(\Omega) = [2, 12]$  l'univers image  
 On calcule

$$P(S=2) = \frac{1}{36} \quad P(S=3) = \frac{2}{36}$$

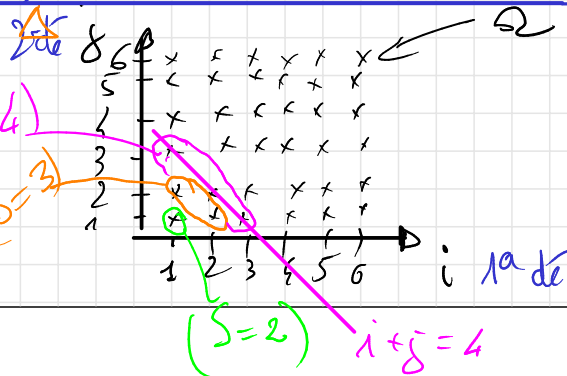
$$\text{car } (S=2) = \{(1,1)\} \quad \text{car } (S=3) = \{(1,2), (2,1)\}$$

$|\Omega| = 36$   
 équiprobabilité

on peut les ranger dans un tableau

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$P(S=n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$

$(S=x)$  est une CF  
 $x \in [2, 12]$



$$E(S) = \sum_{x \in S(\Omega)} x \cdot P(S=x) = 7$$

Exemple Une urne contient 5 boules: 3 rouges et 2 vertes.  
On appelle  $X$  la v.a. égale au nombre de boules vertes tirées.  
Cas 1: on tire successivement avec remise 3 boules.  
Loi de  $X$ ?

on a  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ . On répète 3 fois la même expérience, de manière indépendante (l'urne contient à chaque fois les mêmes boules),  $X$  compte le nombre de succès: "tirer une boule verte" et l'expérience n'a que 2 résultats possibles: boule verte ou boule rouge.

Alors  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n=3$  et  $p=\frac{2}{5}=P(\text{"verte"})$

$$P(X=k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$$

$$P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \quad \text{avec } R_i: \text{"on tire une rouge au } i\text{-ième tirage"}$$

$$P(X=1) = P((R_1 \cap R_2 \cap \bar{R}_3) \cup (R_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3) \cup (\bar{R}_1 \cap R_2 \cap R_3))$$

$$= P(R_1 \cap R_2 \cap \bar{R}_3) + P(R_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3) + P(\bar{R}_1 \cap R_2 \cap R_3) \quad \text{car ces 3 sont incompatibles. Et les 3 ont la même probabilité:}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = P(R_1 \cap R_2 \cap \bar{R}_3) = P(R_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3) = P(\bar{R}_1 \cap R_2 \cap R_3)$$

$$P(X=1) = 3 \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Cas 2: On tire simultanément 3 boules. Loi de  $X$ ?

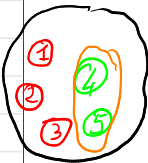
$$\text{on a } X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

On utilise  $\Omega$  l'ensemble des tirages de 3 boules parmi les 5 boules qu'on suppose numérotées (discernables) sans tenir compte de l'ordre.

On a donc  $\binom{5}{3}$  tirages possibles  $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$   
ce qui correspond à l'ensemble des parties à 3 éléments de  $\llbracket 1, 5 \rrbracket$  et tous ces tirages sont équiprobables.

$$P(X=0) = \frac{|X=0|}{|\Omega|} = \frac{1}{10} \quad P(X=1) = \frac{6}{10} = \frac{2 \text{ choix de } V \times 3 \text{ choix de } R}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{|X=2|}{|\Omega|} = \frac{3}{10} \quad \text{même si } \sum_{k=0}^3 P(X=k) = 1$$





### 1.4 Système complet associé à une v.a. finie

**Proposition 1.2.** Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une v.a. sur un espace probabilisé fini.  
 $((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$  est un système complet d'événements.

 infini en PT

**Corollaire 1.3.** On en déduit que  $\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1$ .

← somme finie (PTSI)

→ somme infinie  
= dérivé en PT

#### Démonstration

Pour  $x_i \in X(\Omega)$ , l'événement  $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$  est une partie de  $\Omega$ :  $(X = x_i) \subset \Omega$

Donc  $\bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X = x_i) \subset \Omega$

Soit  $\omega \in \Omega$ , on pose  $x_0 = X(\omega)$  et  $\omega \in (X = x_0)$   
 donc  $\omega \in \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X = x_i)$  donc  $\Omega \subset \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X = x_i)$

Ce qui prouve que  $\Omega = \bigcup_{x_i \in X(\Omega)} (X = x_i)$

Soit  $\omega \in (X = x_i) \cap (X = x_j)$  avec  $x_i, x_j \in X(\Omega)$   
 $\Rightarrow X(\omega) = x_i$  et  $X(\omega) = x_j$  mais  $X$  est une application,  $X(\omega)$  ne peut prendre qu'une valeur  
 donc  $x_i = x_j$

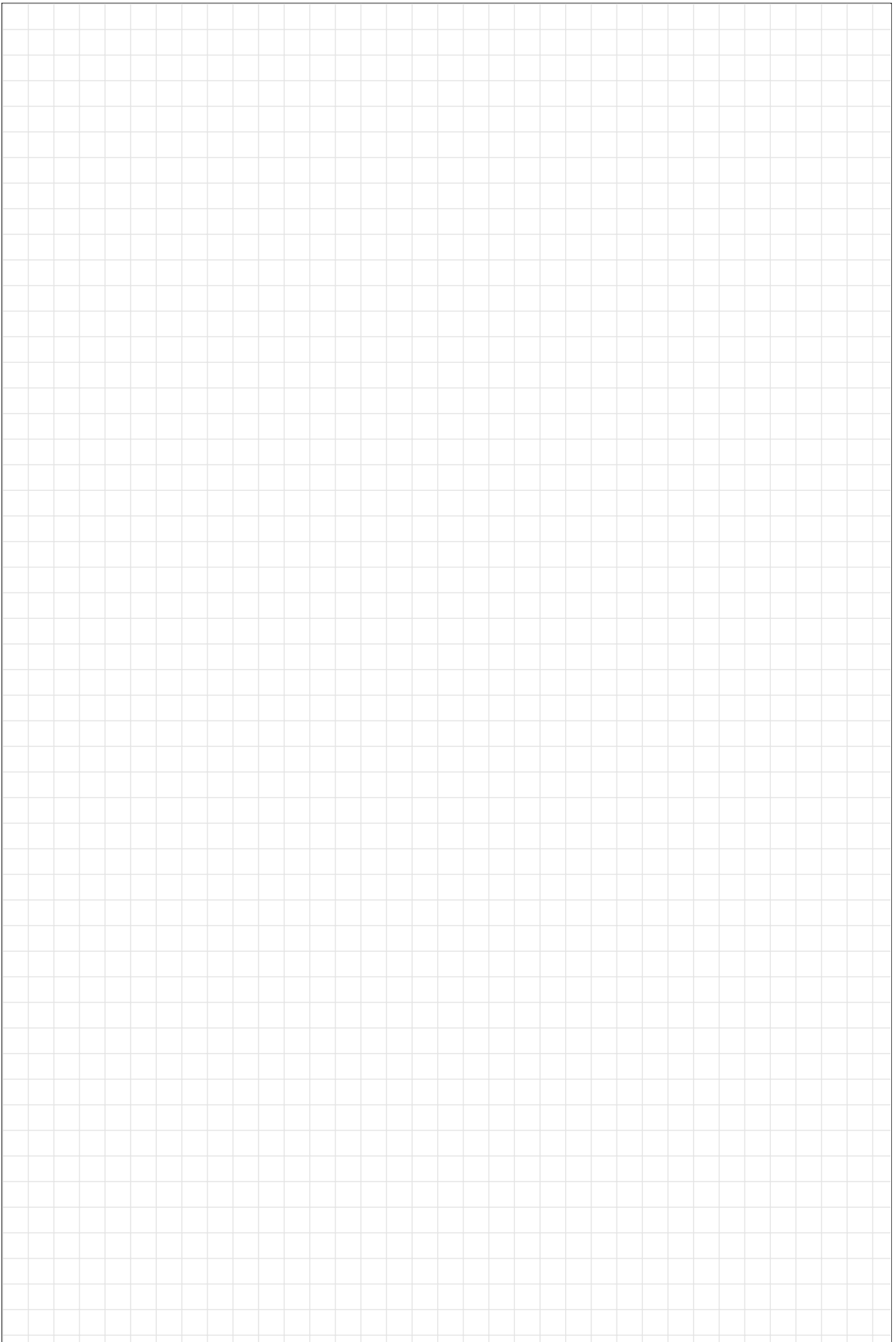
Cela prouve que pour  $x_i \neq x_j$ ,  $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$   
 alors  $((X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)}$  est un SCE.

Exemple: Dans un groupe de  $n$  personnes, on compte le nombre de personnes nées le 11 février. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 personnes nées le 11 février?  
 on note  $X$  la v.a.  $\pi$  égale au nombre de personnes nées le 11 février. On veut  $P(X \geq 2)$ .

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - P(X < 2)$$

$X$  suit une loi binomiale  $B(n, p = \frac{1}{365})$

$$= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n - n \times \frac{1}{365} \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}$$





## 1.5 Loi d'une fonction d'une variable aléatoire finie

**Définition 1.6.** Soit  $X$  une v.a. finie sur  $(\Omega, P)$  avec  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Soit  $f : D \subset E \rightarrow E$  une fonction telle que  $X(\Omega) \subset D$ .

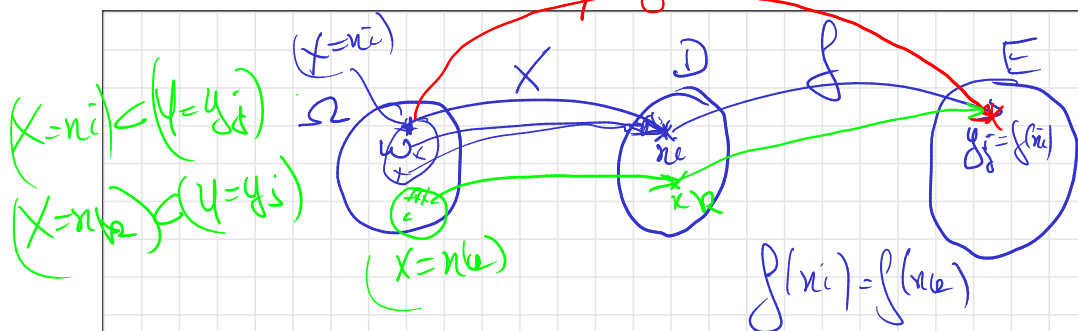
Alors  $Y = f \circ X$  est une v.a. finie sur  $\Omega$ .

De plus,

$$Y(\Omega) = (f \circ X)(\Omega) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

et

$$P(Y = y_j) = \sum_{f(x_i) = y_j} P(X = x_i) \quad (\text{somme sur toutes les valeurs } x_i \text{ telles que } f(x_i) = y_j).$$



Exemple: on joue à Pile ou Face 2 fois de suite.

on note  $X$  la v.a. égale au nombre de piles obtenus

et on gagne 1 € par Face, on perd 2 € par pile

on note  $G$  la v.a. égale au gain algébrique de la partie.

Quelle est la loi de  $G$  ?

$$\text{on a } X(\Omega) = \{0, 1, 2\} \quad P(X=0) = \frac{1}{4} \quad P(X=1) = \frac{2}{4}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4} \quad (X=0) \subset (G=2) \quad (\text{si } X \text{ vaut 0, alors } G \text{ vaut 2})$$

$$(X=1) \subset (G=-1) \quad (X=2) \subset (G=-4)$$

$$\text{C'est à dire que } (X=0) = (G=2), \quad (X=1) = (G=-1) \\ (G=-4) = (X=2)$$

Exemple: On joue 2 fois à Pile ou Face. On gagne 1 € pour chaque Pile, on perd 1 € pour chaque Face.  
On note  $X$  le gain après avoir joué deux fois  
et  $Y = X^2$ . Quelle est la loi de  $Y$ ?

On a  $X(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$  et la loi

$x$	-2	0	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

on a  $Y(\Omega) = \{0, 4\}$

et  $(Y=0) = (X=0)$  et  $(Y=4) = (X=2) \cup (X=-2)$

$$P(Y=0) = \frac{2}{4} \quad \text{et} \quad P(Y=4) = P(X=2) + P(X=-2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

Exemple: On note  $S$  la v.a. égale à la somme des résultats du lancer de 2 D6.

et on pose  $T = S \bmod 3$  (reste de la division de  $S$  par 3)

Quelle est la loi de  $T$ ?

on a  $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$   
on connaît la loi de  $S$

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$
valeurs de $T$	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	

on a  $(T=0) = (S=3) \cup (S=6) \cup (S=9) \cup (S=12)$  et les

4 sont incompatibles donc  $P(T=0) = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36}$

$(T=1) = (S=4) \cup (S=7) \cup (S=10)$   $P(T=1) = \frac{3}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{12}{36}$

$$P(T=2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$T$  est une loi uniforme sur  $\{0, 1, 2\}$

## 2 Lois usuelles

### 2.1 Loi uniforme

**Définition 2.1.** On dit que  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  suit une loi uniforme sur  $[[1, n]]$  si  $\forall k \in [[1, n]], \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$ .

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ .

*notation pour "X suit la loi uniforme sur  $[[1, n]]$ "*

**Définition 2.2.** On dit que  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  suit une loi uniforme sur  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  si  $\forall k \in [[1, n]], \quad P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ .

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ .

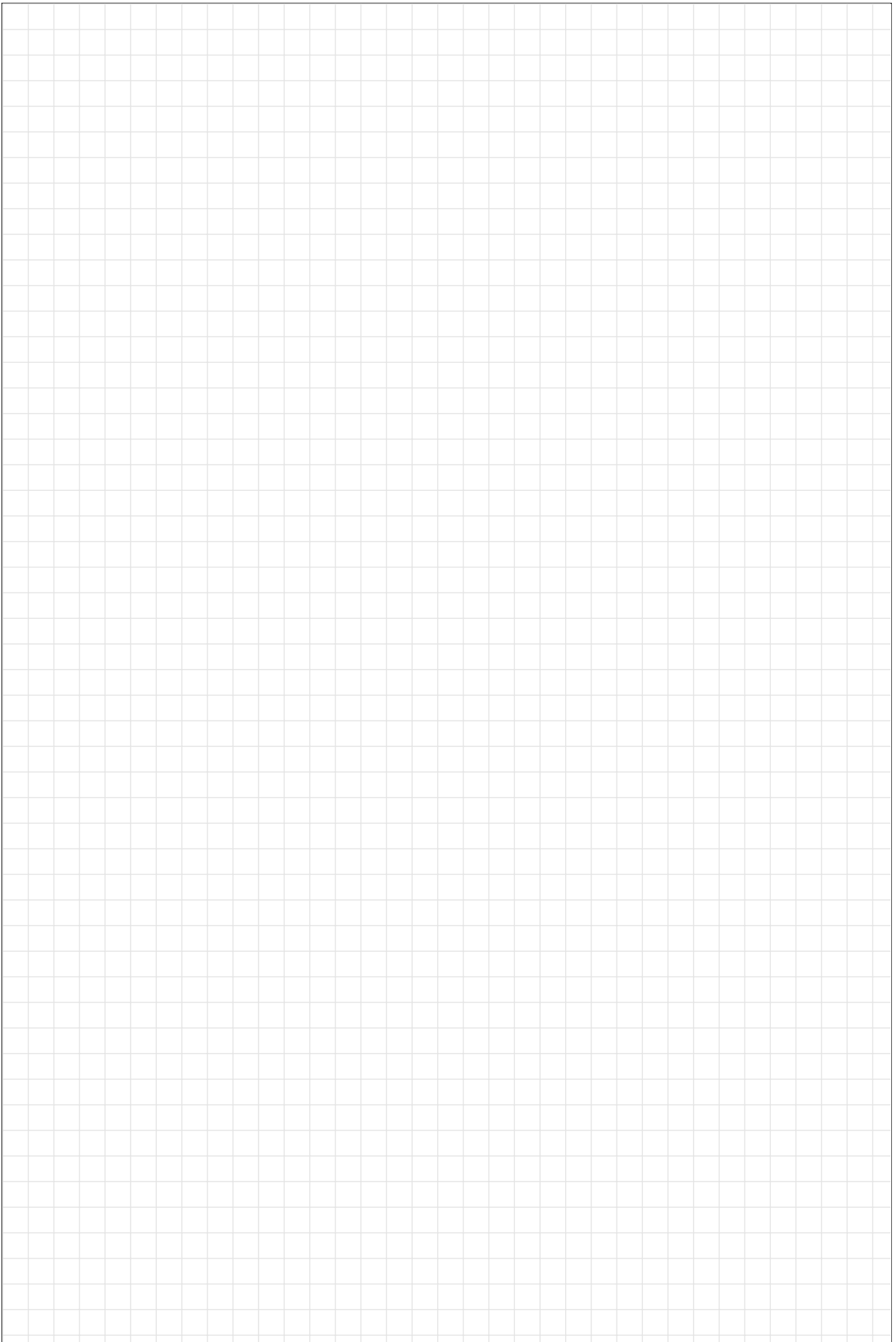
Exemple: Dans une urne contenant  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ , on tire au hasard les jetons sans remise jusqu'à obtenir le 1. On note  $X$  la v.a. égale au nombre de tirages effectués. Alors  $X$  suit une loi uniforme sur  $[[1, n]]$   $P(X=k) = \frac{1}{n} \quad k \in [[1, n]]$

On note  $A_k =$  "on tire le numéro 1 au  $k^{\text{ème}}$  tirage"

$$(X=k) = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k$$

on utilise la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \dots P(A_k | \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{k-1}) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$



## 2.2 Loi de Bernoulli

**Définition 2.3.** On dit que  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  avec  $0 < p < 1$  si  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  et  $P(X = 1) = p$  donc  $P(X = 0) = 1 - p$ .

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .

2 résultats possibles

**Définition 2.4.** Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $\Omega$ . On appelle fonction indicatrice de  $A$  notée  $\chi_A$  la fonction  $\chi_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$  définie pour  $\omega \in \Omega$  par

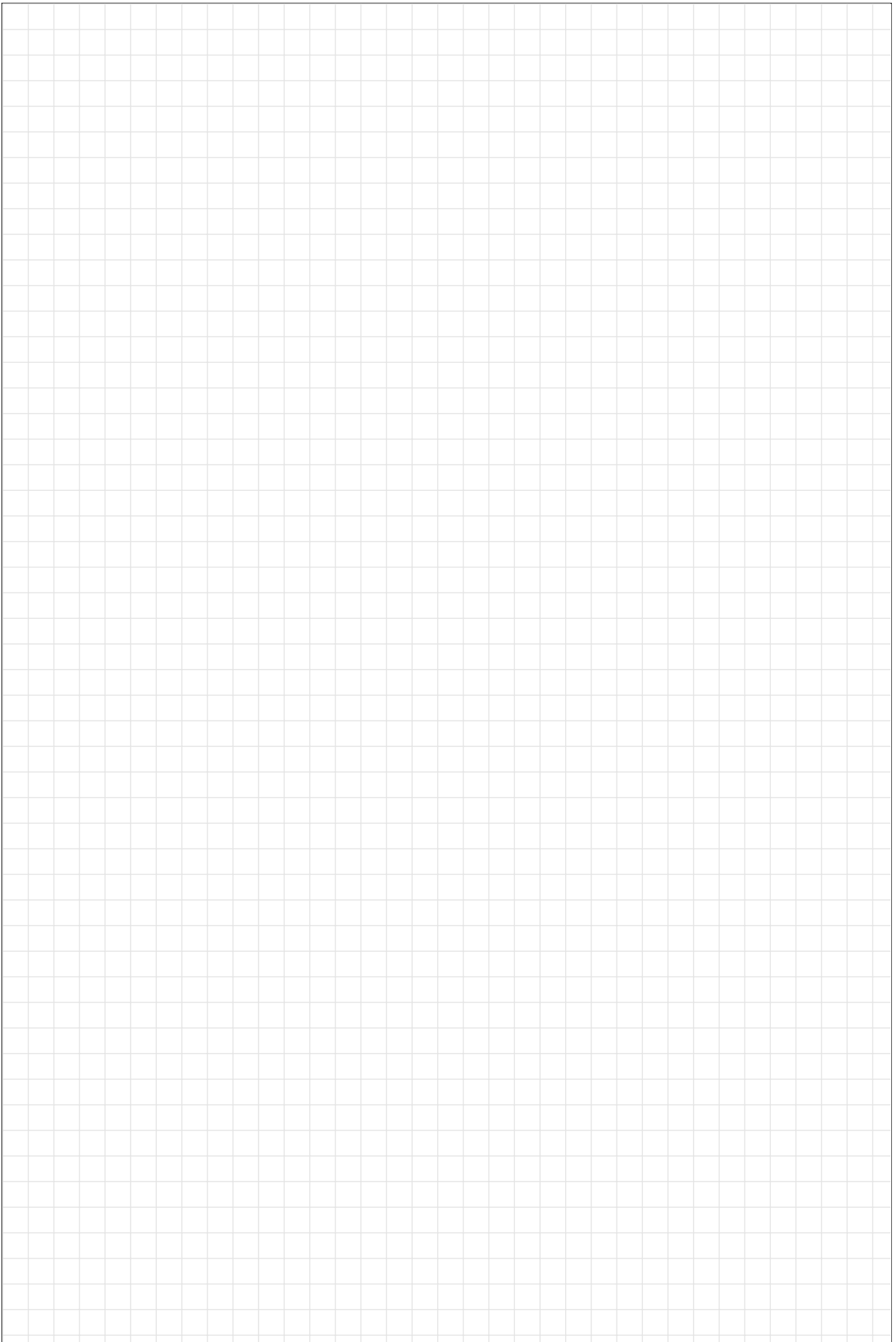
$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Remarque 2.1.** Lors d'une expérience aléatoire, soit un événement  $A$  qui est réalisé (succès) ou qui ne l'est pas (échec), on peut modéliser cette situation avec une variable aléatoire  $X$  telle que l'événement  $(X = 1) = A$  modélise le succès et l'événement  $(X = 0) = \bar{A}$ , l'échec de l'expérience.  $X$  est alors la fonction indicatrice de  $A$ .

Exemple: Dans une urne qui contient  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ , on tire  $k$  simultanément. On note  $X$  la v.a qui vaut 1 si on a tiré la boule n°1 et 0 sinon.

$X$  ne peut prendre que 2 valeurs 0 ou 1 alors  $X$  suit une loi de Bernoulli.

Quelle est la probabilité de  $(X=1)$  ?



## 2.3 Loi Binomiale

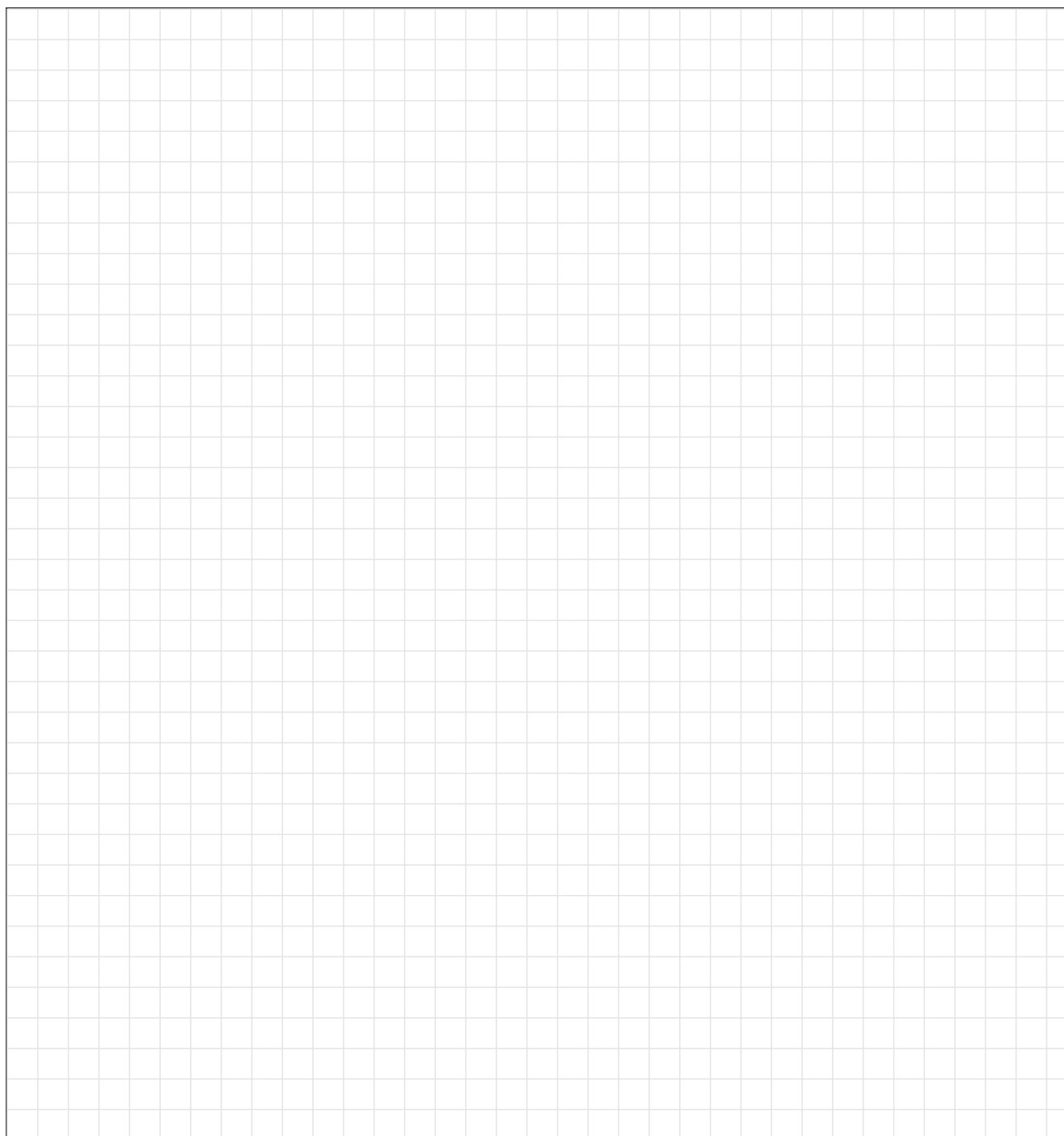
**Définition 2.5.** On dit que  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  suit une loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$  avec  $0 < p < 1$  et  $n \in \mathbb{N}$  si  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

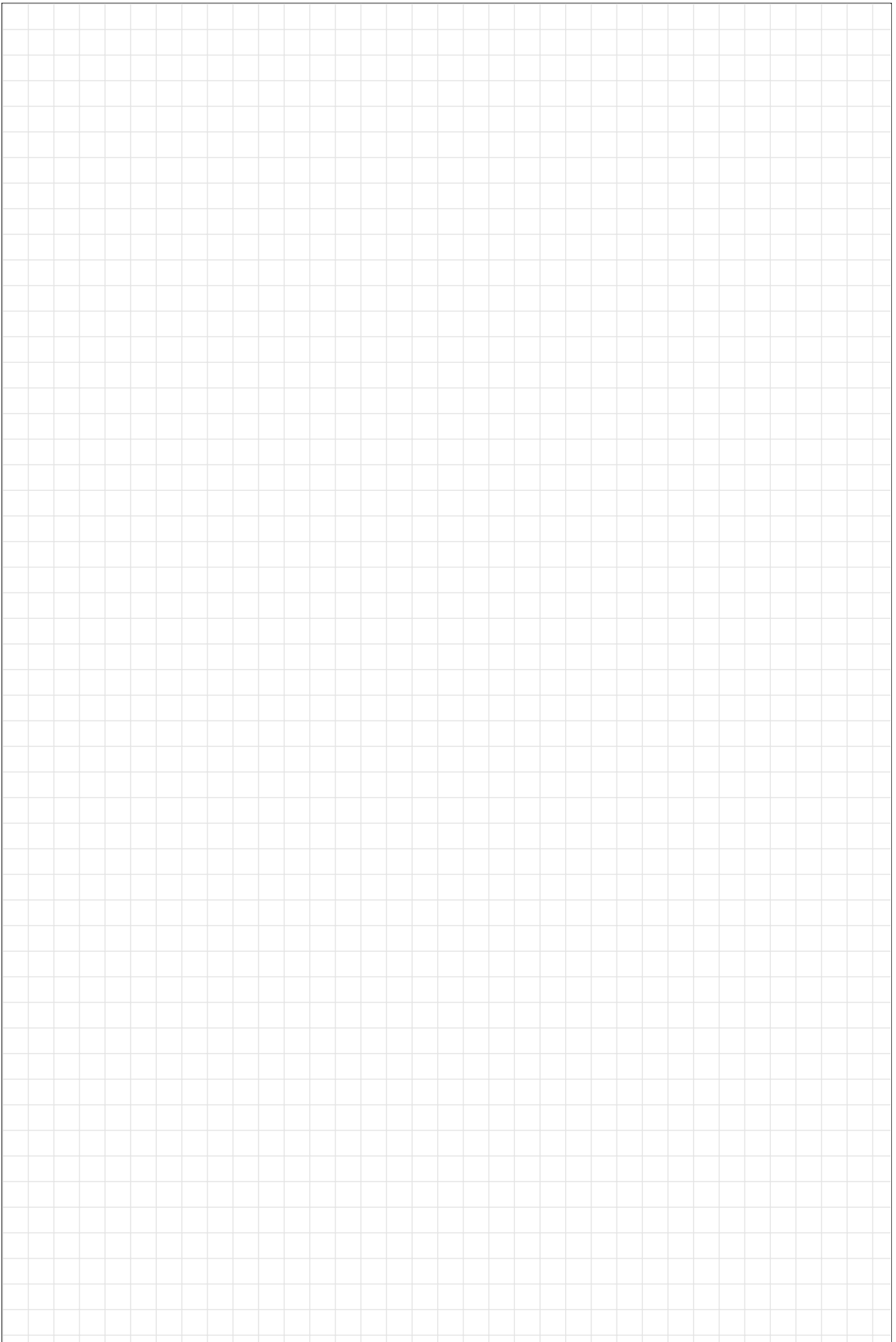
*Remarque 2.2.* On vérifie 
$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1.$$

*Remarque 2.3.* Une variable aléatoire  $X$  de loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  modélise le nombre de succès lors de la répétition de  $n$  expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes.

*Remarque 2.4.* Une variable aléatoire  $X$  de loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  modélise le nombre d'obtention de boules rouges pour  $n$  tirages avec remise dans une urne contenant une proportion  $p$  de boules rouges.







### 3 Couple de variables aléatoires

#### 3.1 Loi conjointe

**Définition 3.1.** Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. Soit  $X, Y$  deux v.a. sur  $\Omega$ .

On appelle couple de v.a.  $(X, Y)$  l'application 
$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

C'est une variable aléatoire sur  $E^2$ . On notera  $(X = x_i, Y = y_j)$  l'événement  $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i \text{ et } Y(\omega) = y_j\}$ .

**Définition 3.2.** On appelle loi conjointe du couple  $(X, Y)$  la loi de la variable aléatoire  $(X, Y)$  c'est-à-dire la donnée de

- toutes les valeurs prises par le couple  $(X, Y) = X(\Omega) \times Y(\Omega) = (x_i)_{i \in I} \times (y_j)_{j \in J} = \{(x_i, y_j) | x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)\}$
- et de toutes les probabilités

$$p_{i,j} = (P(X = x_i, Y = y_j))_{x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)} = (P((X = x_i) \cap (Y = y_j)))_{x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)}$$

ce que l'on pourra noter  $((x_i, y_j), p_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ .

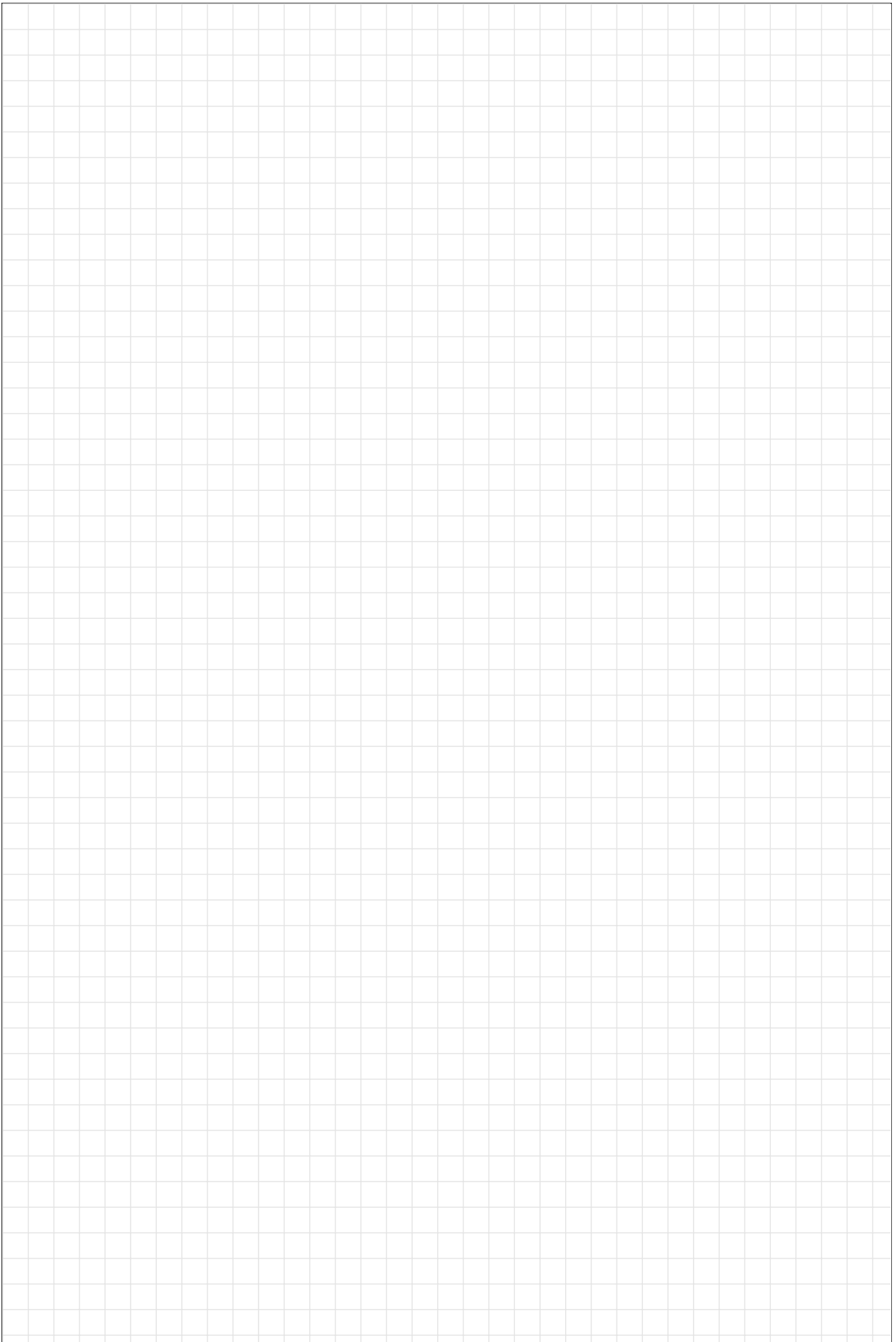
**Théorème 3.1.** Soit  $\{((x_i, y_j), p_{i,j}) | i \in I, j \in J\}$  une partie finie de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  telle que les  $x_i$  soient distincts et que les  $y_j$  soient distincts.

$\{((x_i, y_j), p_{i,j}) | i \in I, j \in J\}$  est la loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles finies si et seulement si 
$$\begin{cases} \forall i \in I, \forall j \in J, & p_{i,j} \geq 0 \\ \sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = 1 \end{cases}.$$

**Remarque 3.1.** Par définition, comme cette somme est finie, on peut sommer d'abord sur les lignes ou d'abord sur les colonnes :

$$\sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{i,j} = 1$$





## 3.2 Lois marginales

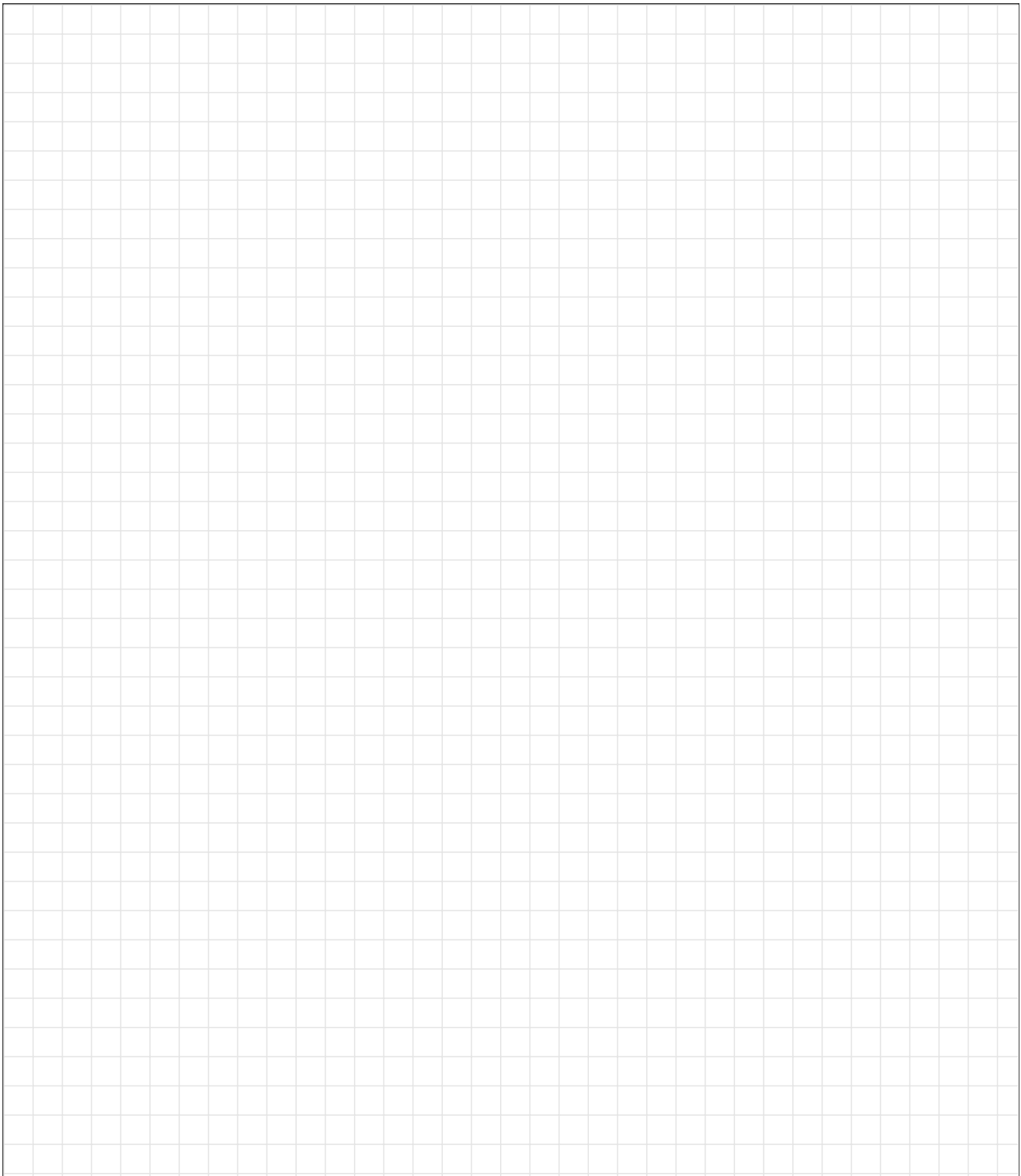
**Définition 3.3.** Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. Les lois de  $X$  et  $Y$  s'appellent les lois marginales du couple  $(X, Y)$ .

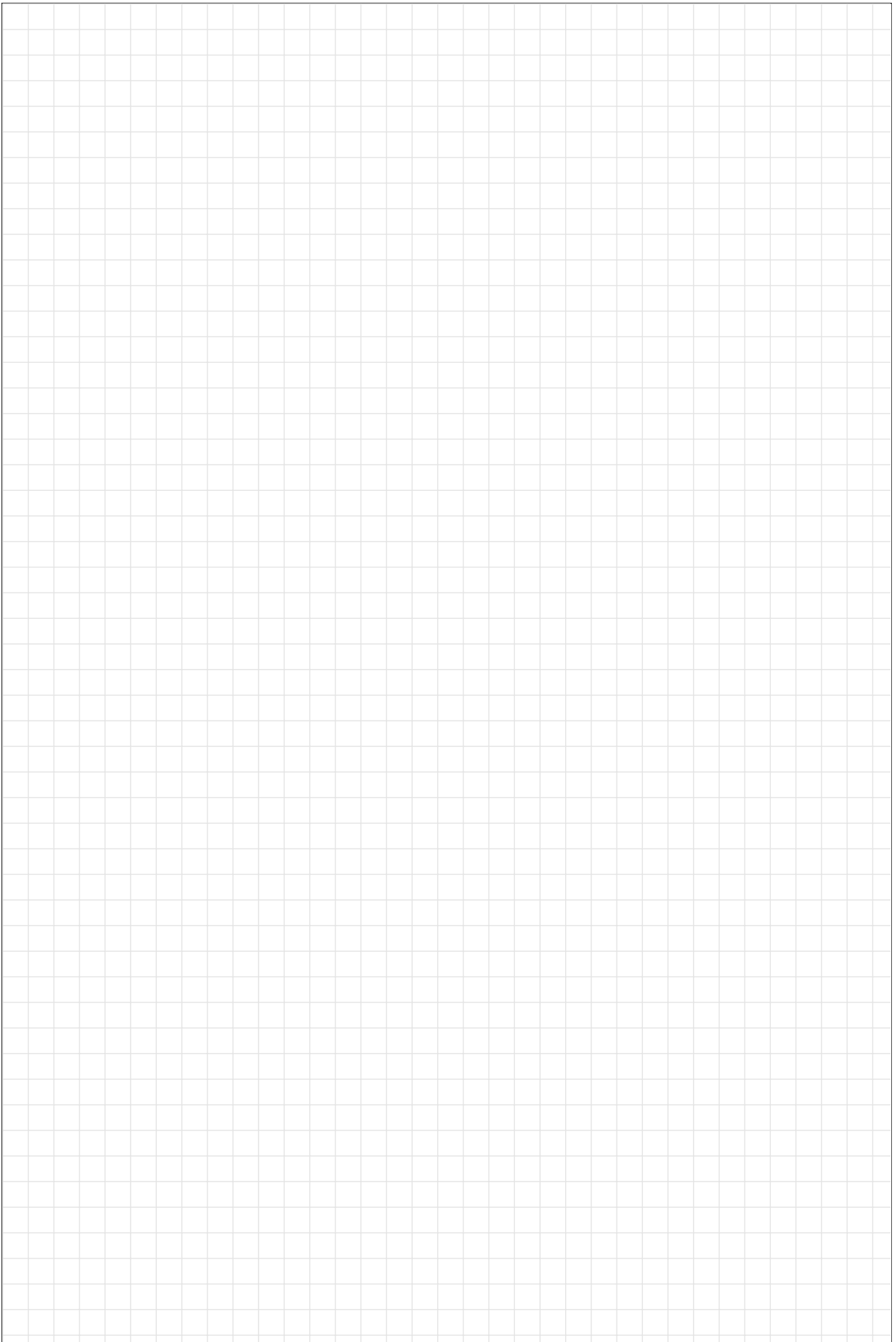
**Proposition 3.2.** On a

$$\text{pour tout } x_i \in X(\Omega), \quad P(X = x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) \text{ notée } p_{i,\bullet}$$

et

$$\text{pour tout } y_j \in Y(\Omega), \quad P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) \text{ notée } p_{\bullet,j}.$$





### 3.3 Loi conditionnelles

**Définition 3.4.** Soit  $Y$  une v.a. sur  $(\Omega, P)$  telle que  $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$ . Soit  $A$  un événement de  $\mathcal{P}(\Omega)$  de probabilité non nulle.

La loi de  $Y$  conditionnée par  $A$  ou loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $A$  est l'ensemble des probabilités

$$(P_A(Y = y_j))_{y_j \in Y(\Omega)} = \left( \frac{P((Y = y_j) \cap A)}{P(A)} \right)_{y_j \in Y(\Omega)}$$

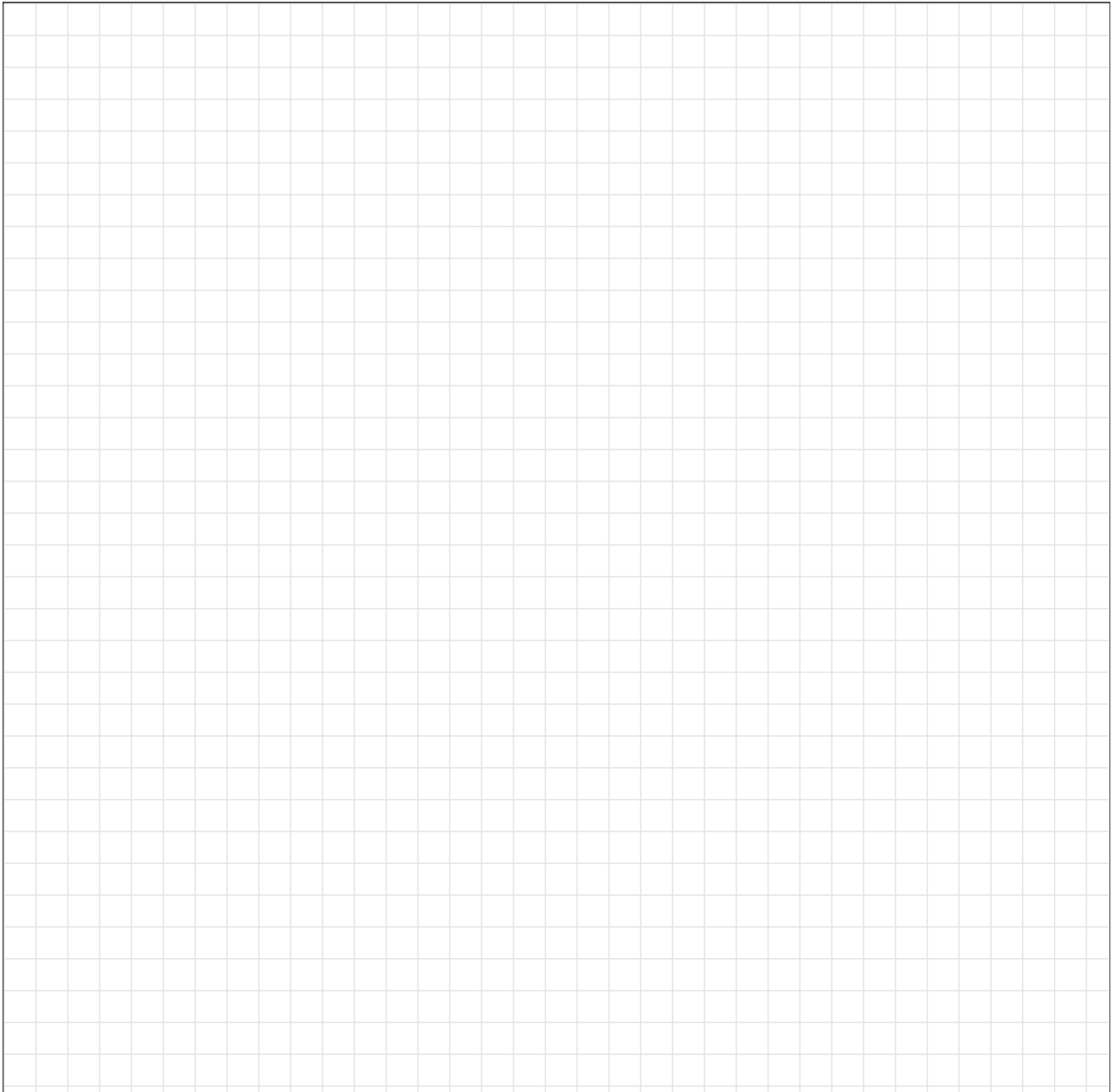
**Définition 3.5.** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. sur  $(\Omega, P)$  telles que  $X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}$  et  $Y(\Omega) = (y_j)_{j \in J}$ .

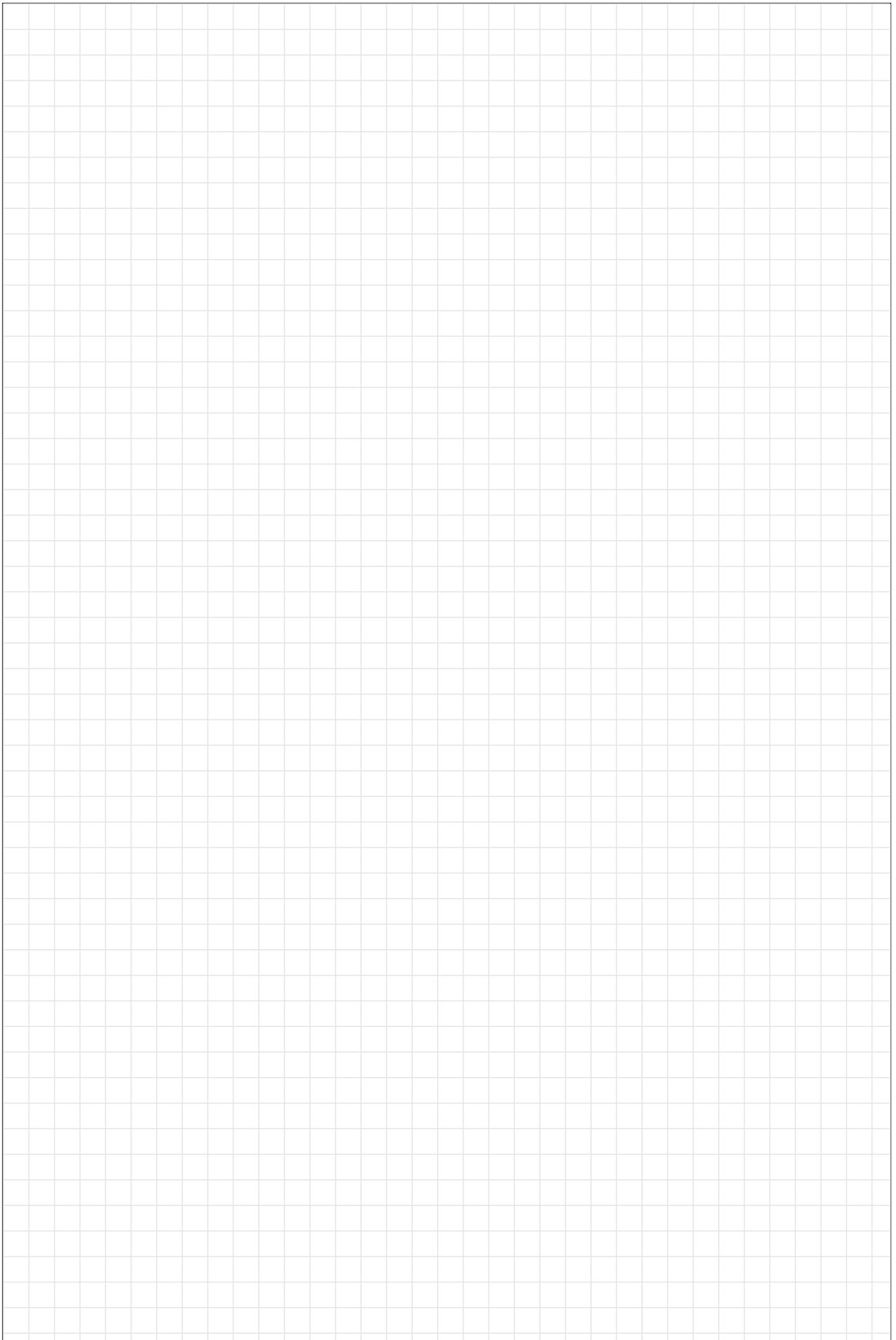
Soit  $j \in J$ . La loi de  $X$  conditionnée par  $(Y = y_j)$  est l'ensemble des valeurs

$$(P_{(Y=y_j)}(X = x_i))_{x_i \in X(\Omega)} = \left( \frac{P(Y = y_j \cap X = x_i)}{P(Y = y_j)} \right)_{i \in I}$$

Soit  $i \in I$ . La loi de  $Y$  conditionnée par  $(X = x_i)$  est l'ensemble des valeurs

$$(P_{(X=x_i)}(Y = y_j))_{y_j \in Y(\Omega)} = \left( \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(X = x_i)} \right)_{j \in J}$$







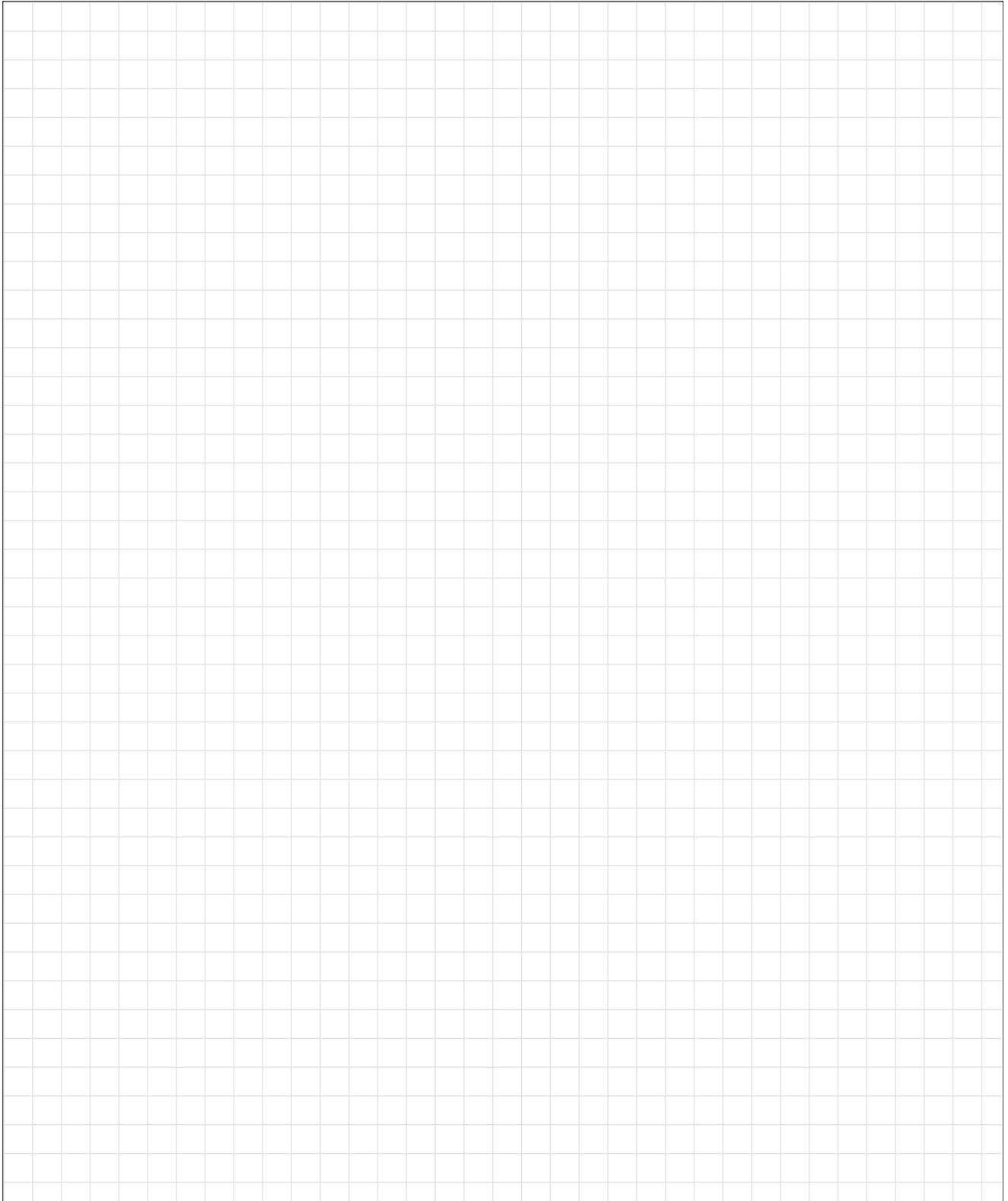
### 3.4 Fonction de deux variables aléatoires

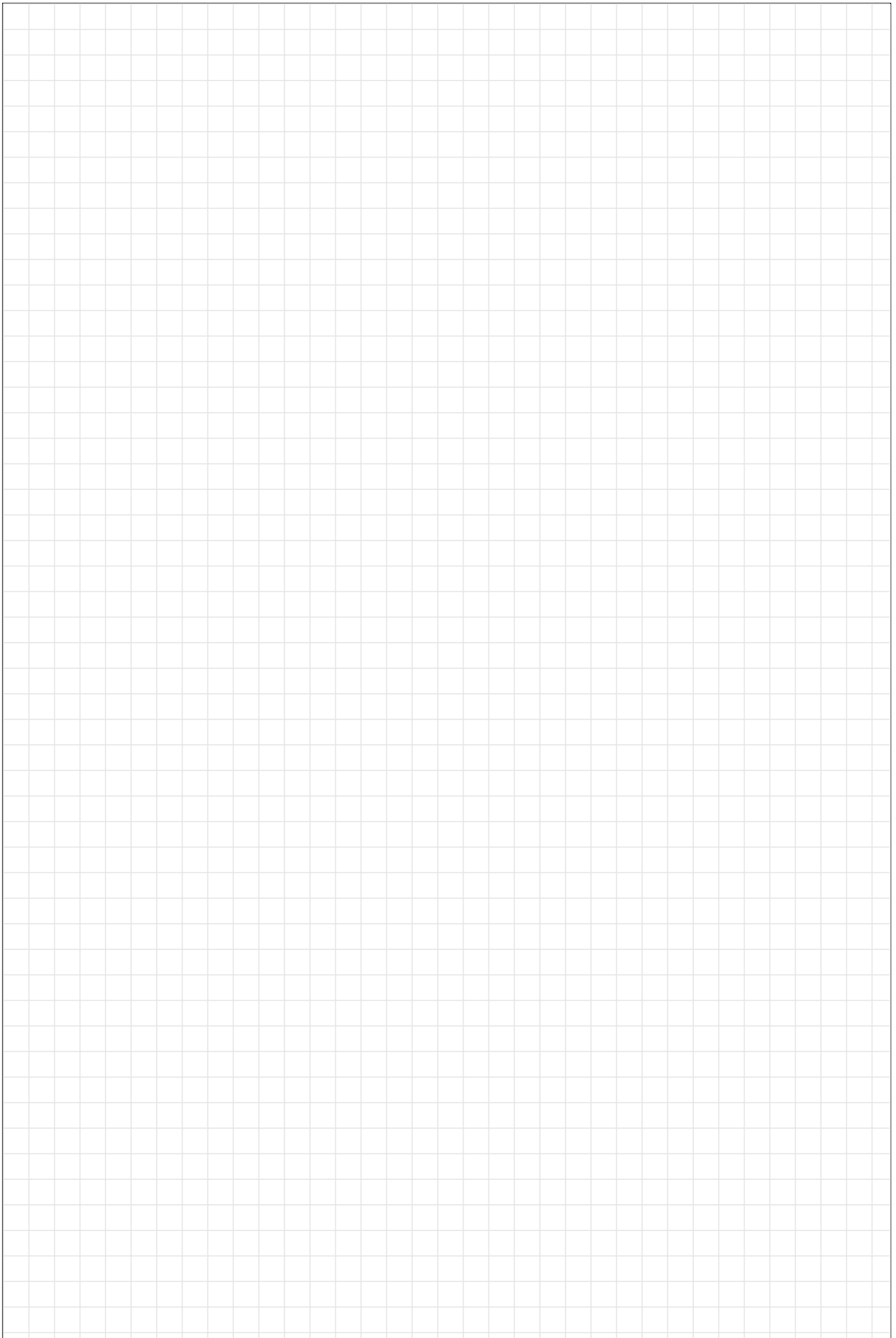
Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. réelles sur  $\Omega$ . Comme le couple  $(X, Y)$  est une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ , on peut définir pour une fonction  $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  la variable aléatoire  $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  par  $Z = g(X, Y)$ .

On a  $Z(\Omega) = \{g(x_i, y_j) | x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega)\}$  : ensemble des valeurs prises par  $Z$

Les  $g(x_i, y_j)$  ne sont pas nécessairement distincts.

$$\text{On a } P(Z = z_k) = \sum_{\substack{(x_i, y_j) \text{ tels que} \\ g(x_i, y_j) = z_k}} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$





## 4 Variables aléatoires indépendantes

### 4.1 Indépendance d'un couple de variables aléatoires

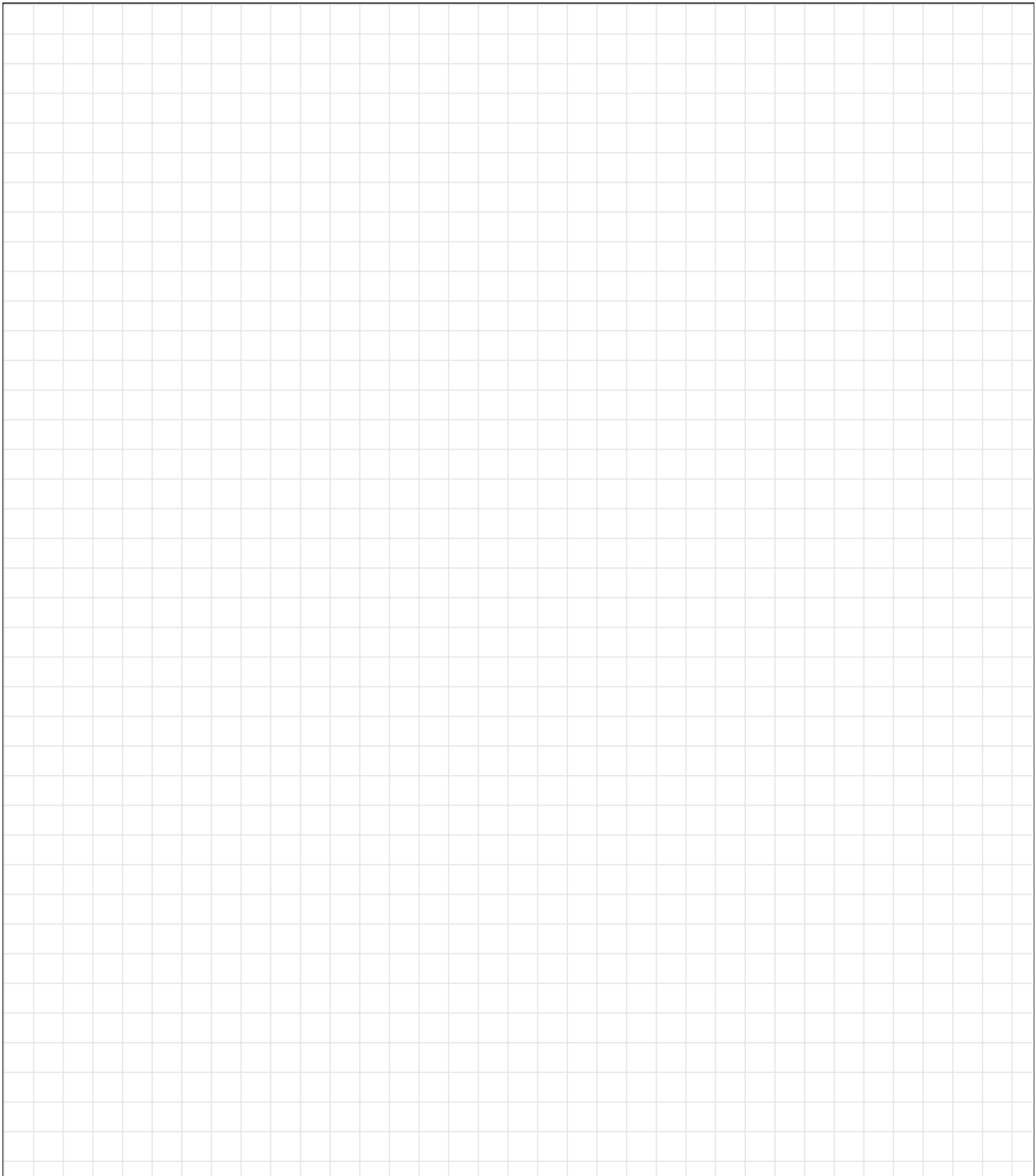
**Définition 4.1.** Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. sur  $(\Omega, P)$  avec  $X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}$  et  $Y(\Omega) = (y_j)_{j \in J}$ .

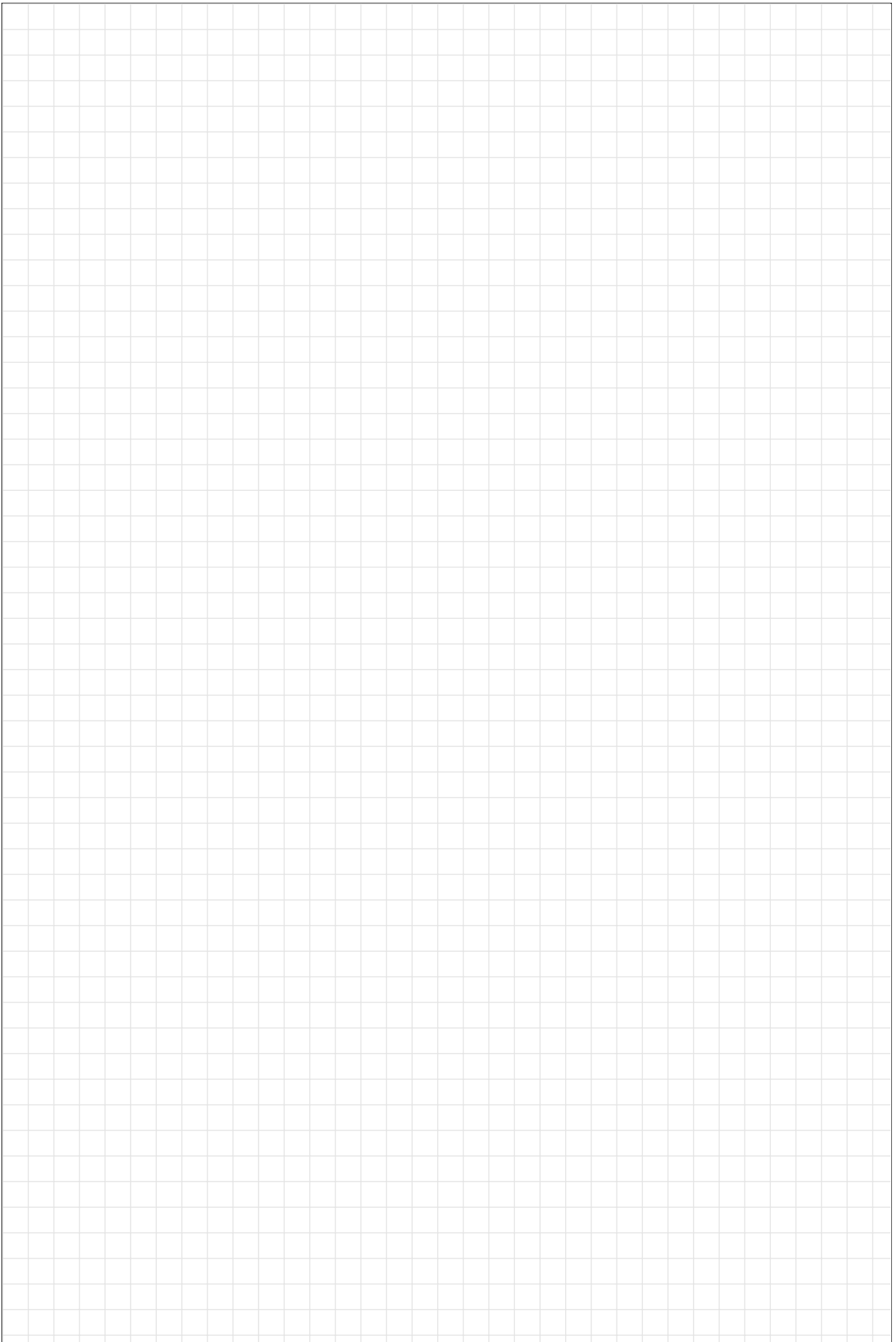
On dit que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes pour la probabilité  $P$  si

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j) \text{ pour tout } x_i \in X(\Omega) \text{ et } y_j \in Y(\Omega).$$

**Proposition 4.1.** Si  $X$  et  $Y$  sont 2 v.a. indépendantes sur  $(\Omega, P)$  alors pour toutes parties  $A \subset X(\Omega)$  et  $B \subset Y(\Omega)$ , on a

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A).P(Y \in B).$$





## 4.2 Variables aléatoires mutuellement indépendantes

**Définition 4.2.** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des v.a. sur un même espace probabilisé  $(\Omega, P)$ .

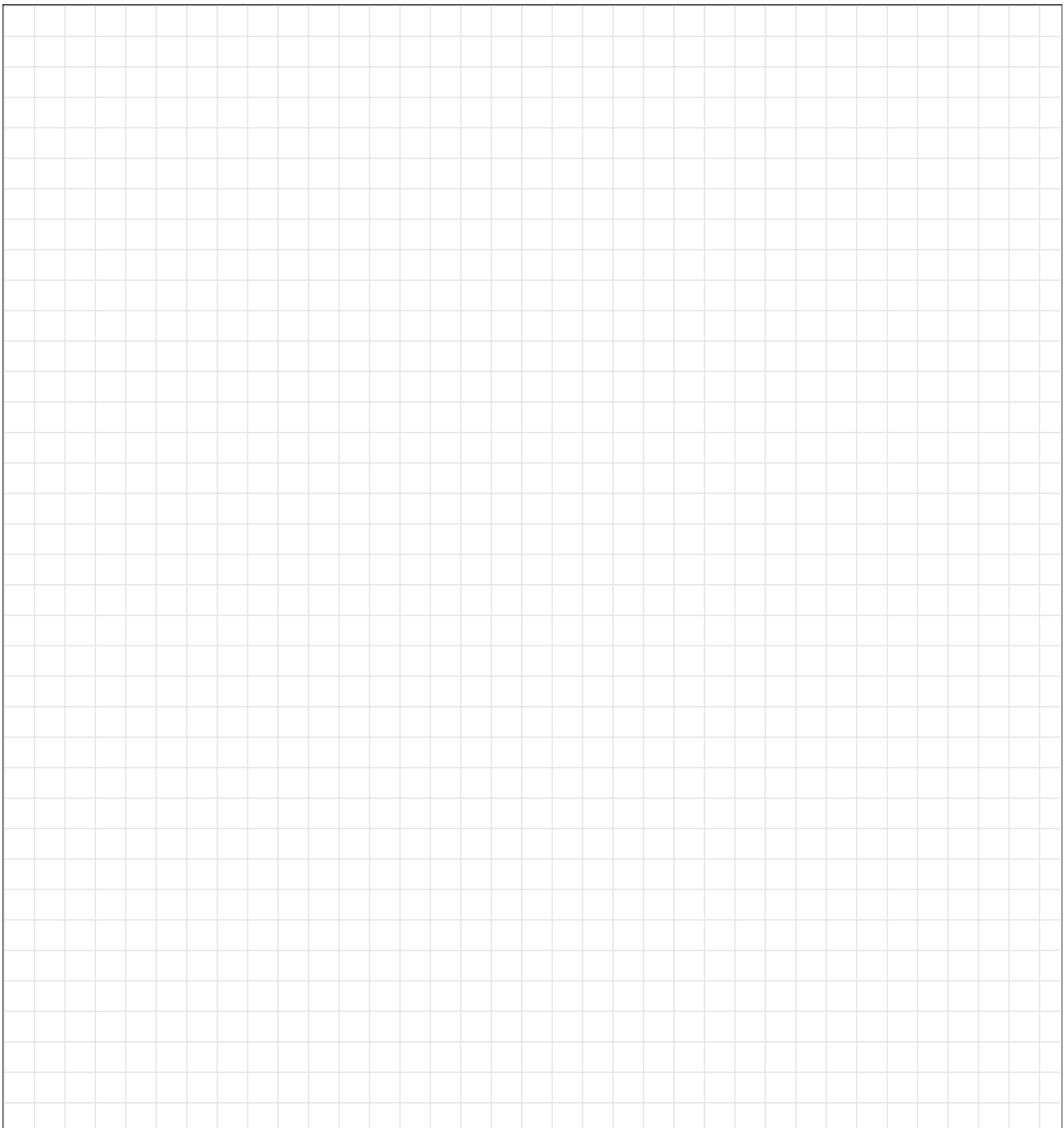
On dit que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes pour la probabilité  $P$  si  $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \forall x_2 \in X_2(\Omega), \dots, \forall x_n \in X_n(\Omega)$ ,

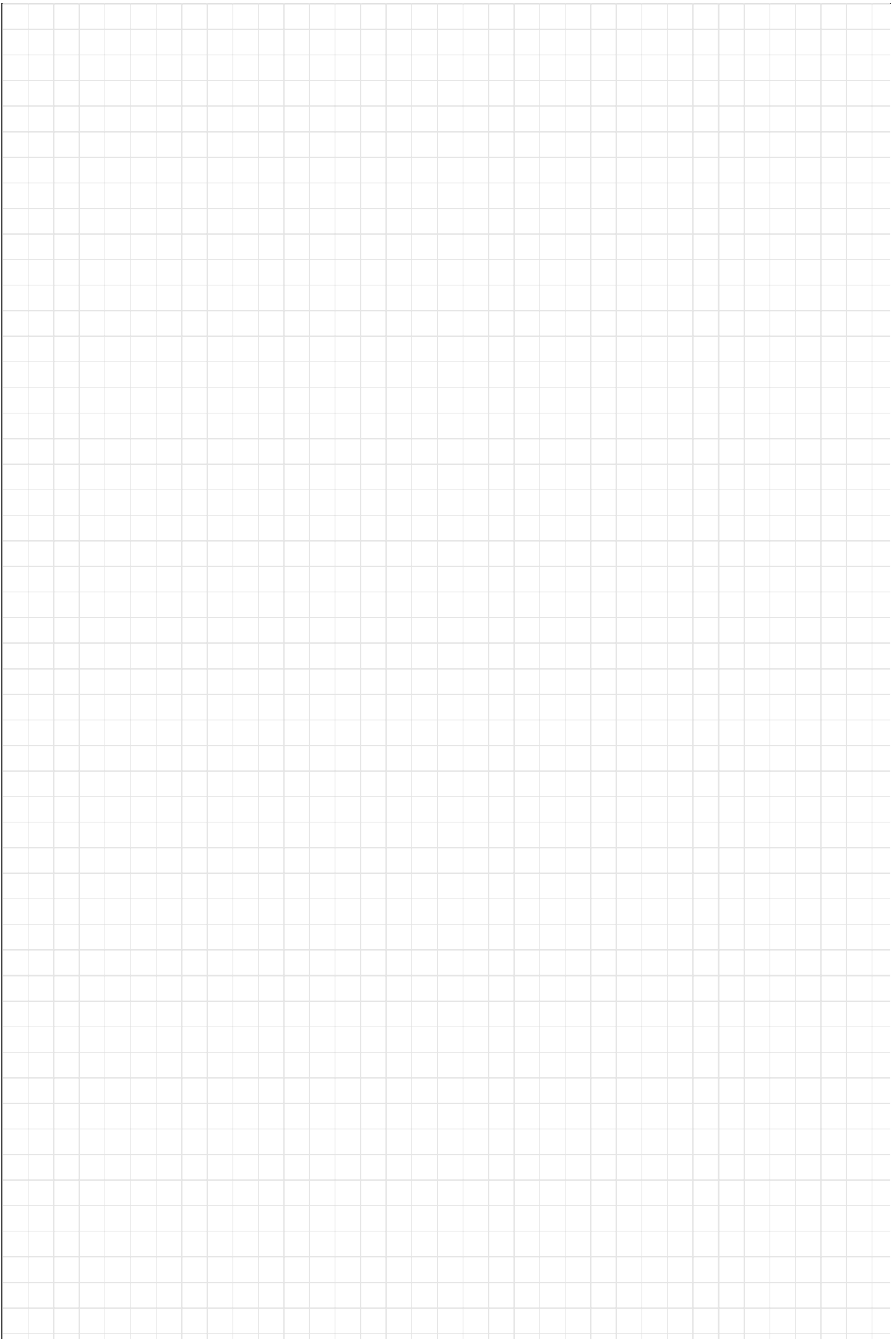
$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \dots P(X_n = x_n)$$

**Théorème 4.2.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des v.a. mutuellement indépendantes sur  $(\Omega, P)$ , alors

quelque soit  $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$ , les événements  $(X_i \in A_i)_{i=1, \dots, n}$  sont mutuellement indépendants pour la probabilité  $P$ .

**Proposition 4.3.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des v.a. mutuellement indépendantes sur  $(\Omega, P)$ , alors elles sont indépendantes deux à deux.

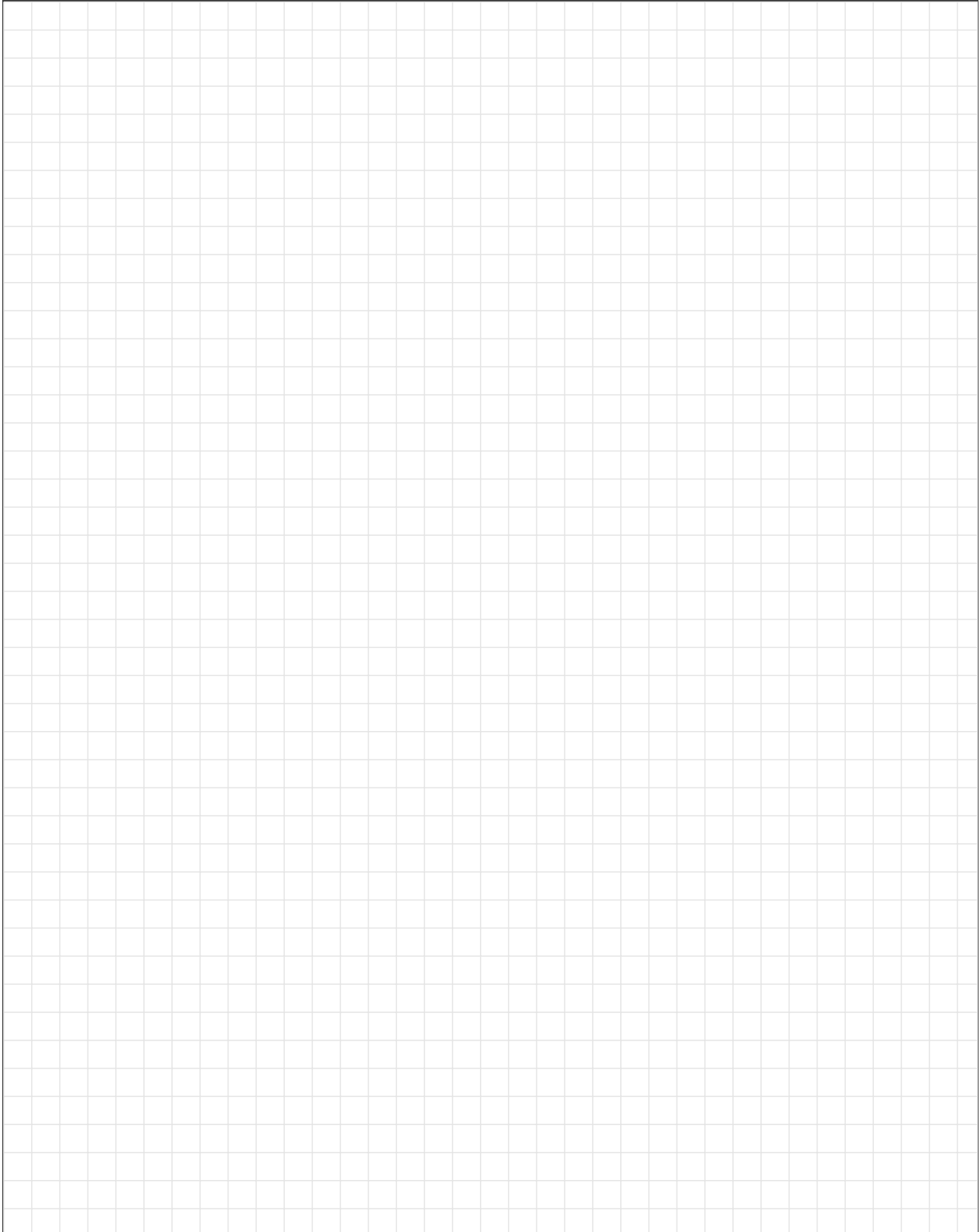




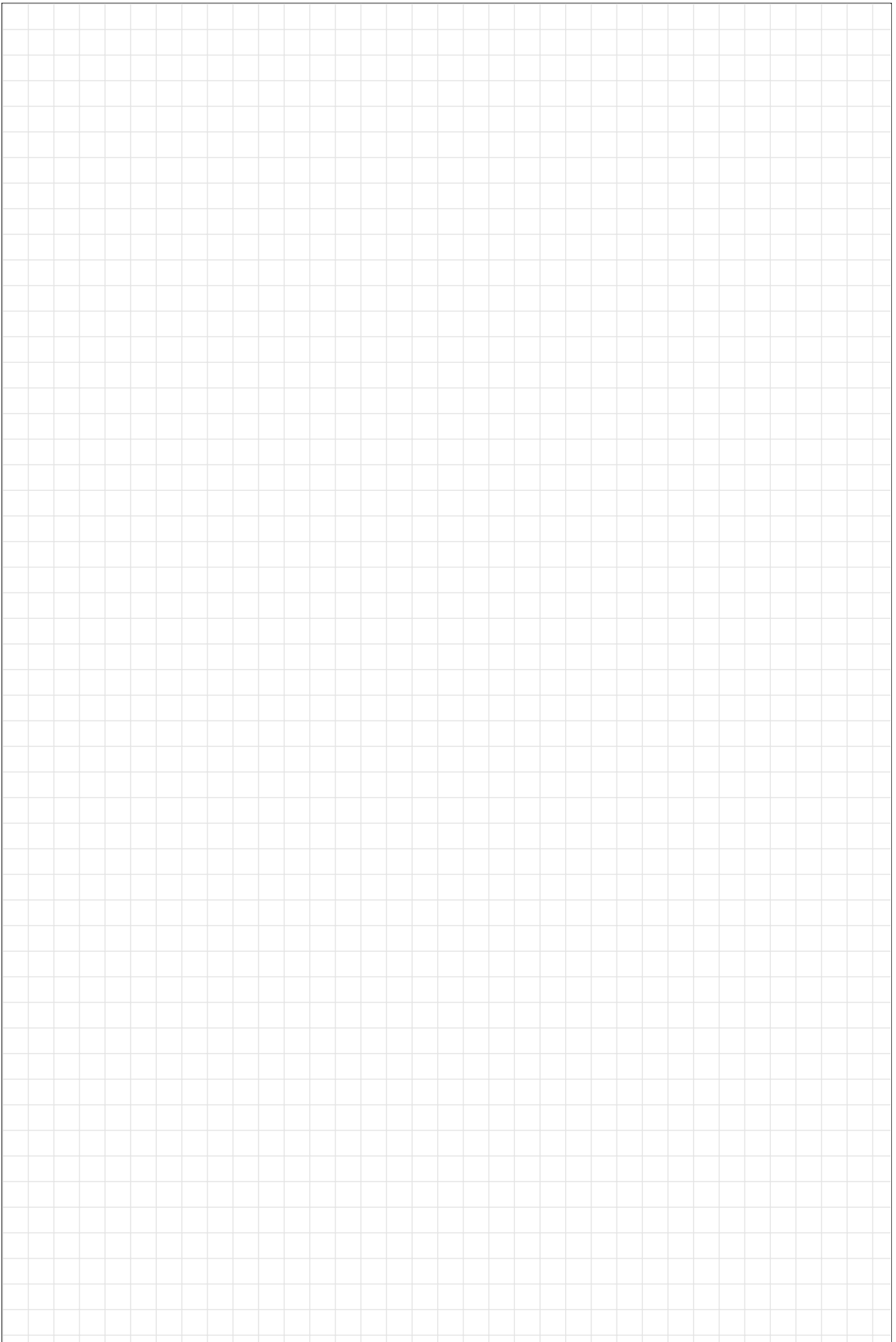
### 4.3 Somme de v.a. suivant la loi de Bernoulli

**Proposition 4.4.** Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  des v.a. mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de même paramètre  $p$  avec  $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$ . Alors la v.a.  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$  binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

*Remarque 4.1.* On utilise cette proposition pour modéliser  $n$  expériences identiques et indépendantes avec 2 issues (succès et échec). La variable aléatoire somme compte le nombre de succès.



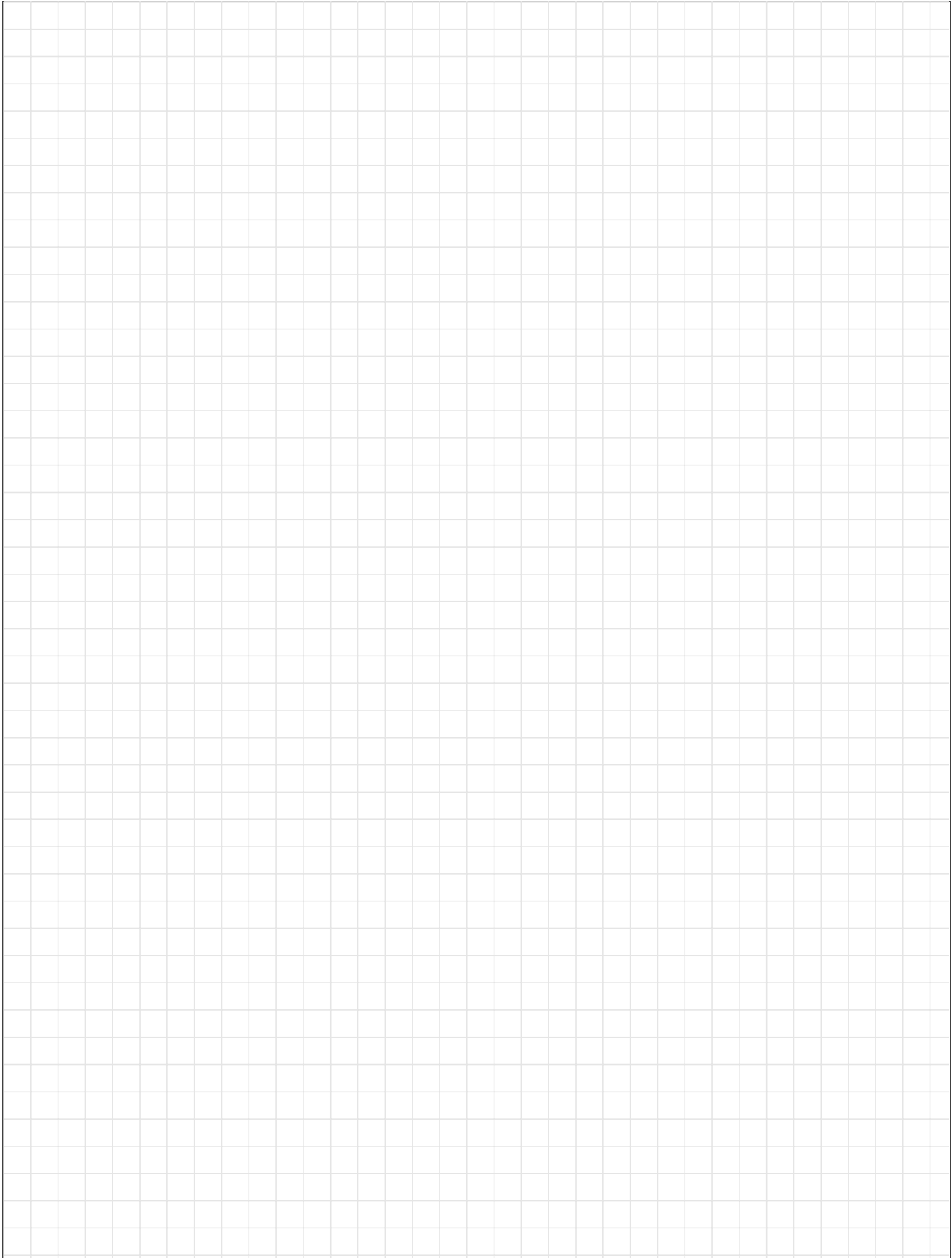


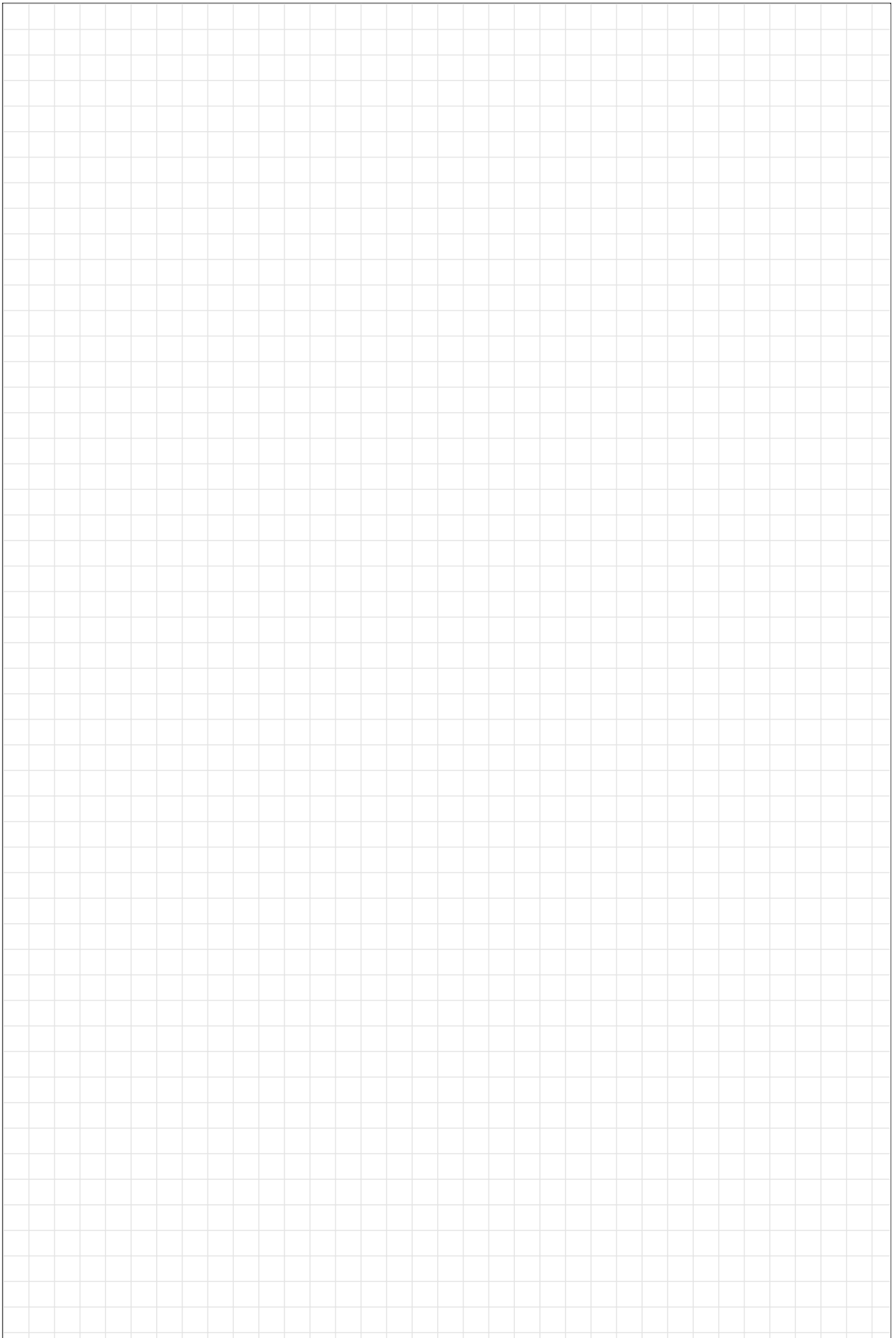


#### 4.4 Indépendance de fonctions de v.a. indépendantes

**Théorème 4.5.** Soit  $X, Y$  deux v.a. sur  $(\Omega, P)$  fini. Soit  $f, g$  deux fonctions définies respectivement sur  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.





## 5 Moments d'une v.a. réelle finie

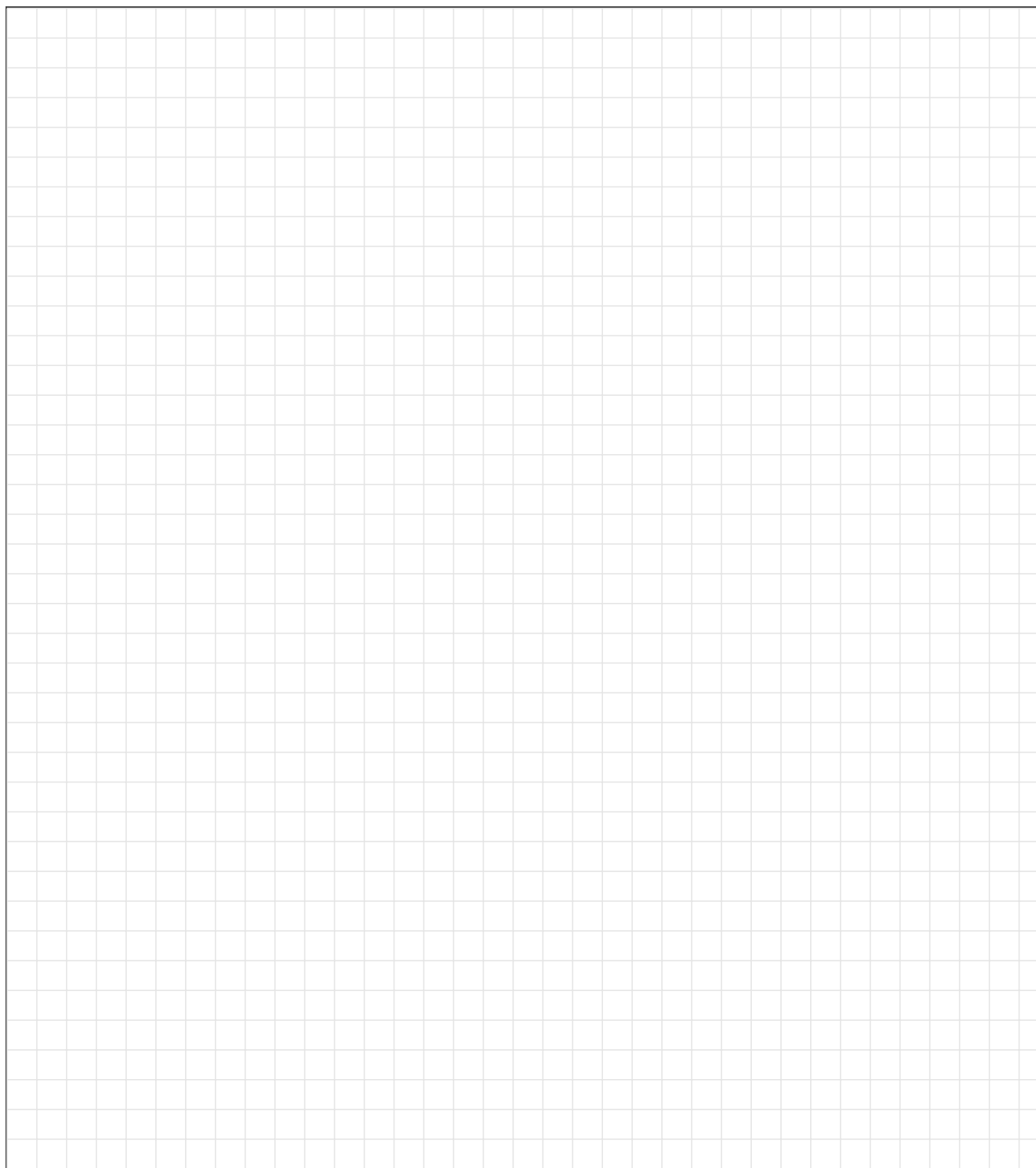
### 5.1 Espérance

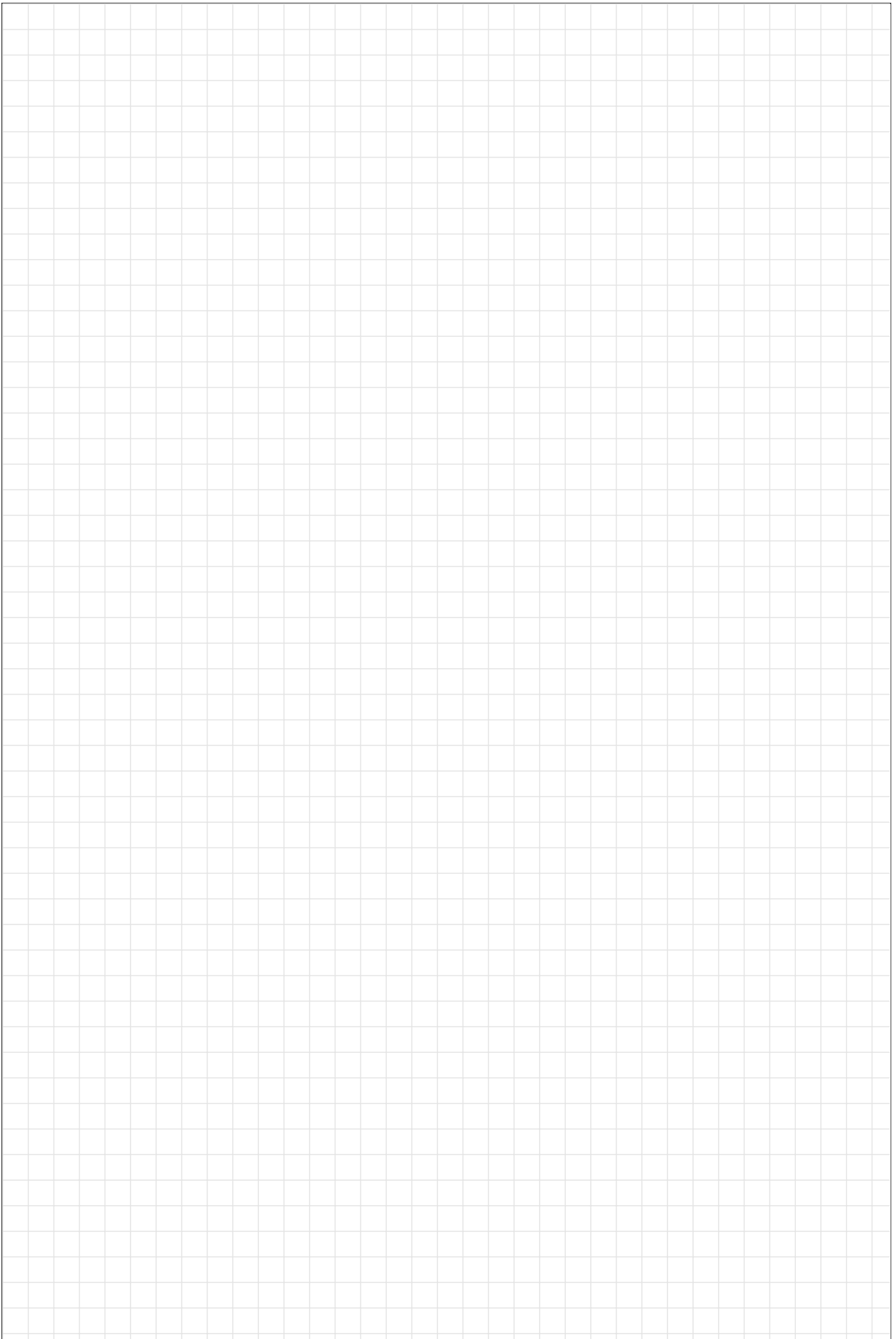
**Définition 5.1.** Soit  $X$  une v.a.r. sur  $\Omega$ . On appelle espérance de  $X$  le réel  $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ .

Ce qui s'écrit également  $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$  avec  $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$ .

On a donc  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$ .

**Proposition 5.1.** Si pour tout  $x \in X(\Omega)$ , on a  $a \leq x \leq b$ , alors  $a \leq E(x) \leq b$ .





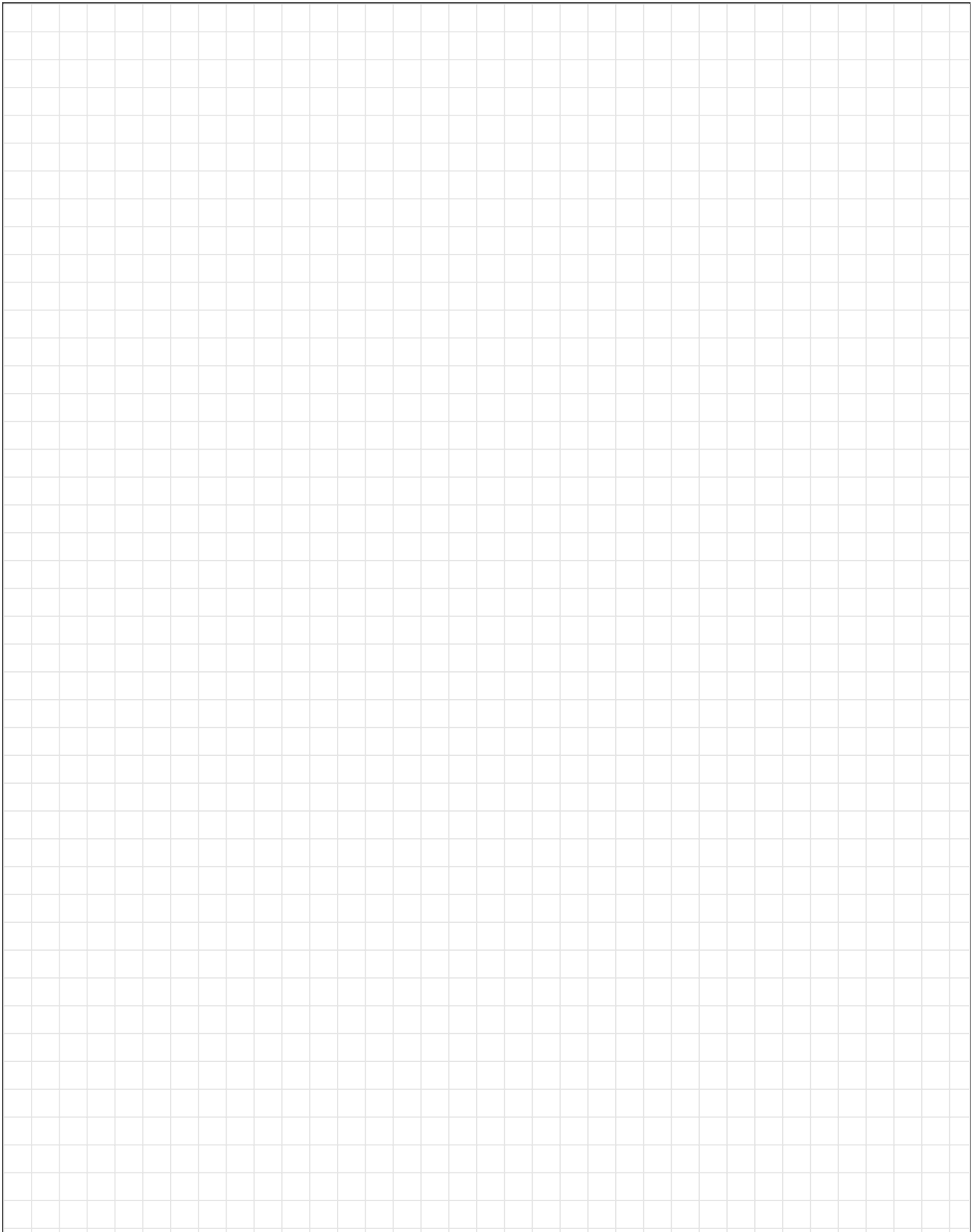
## 5.2 Propriétés de l'espérance : linéarité et croissance

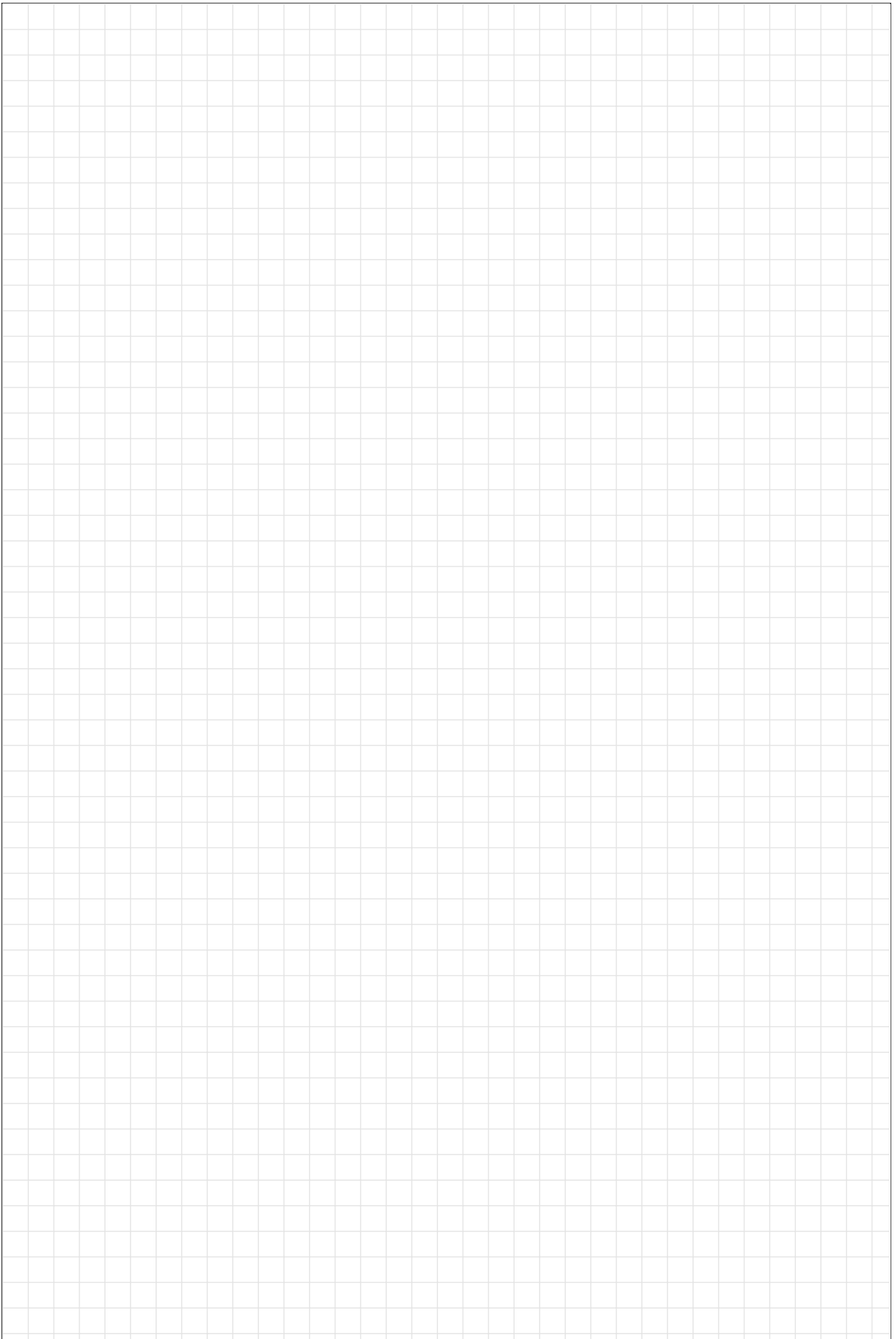
**Proposition 5.2.** Soit  $X, Y$  deux v.a.r. sur  $(\Omega, P)$  et  $a, b$  réels. On a

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

**Proposition 5.3.** Soit  $X, Y$  deux v.a.r. sur  $\Omega$ .

Si on a  $X \leq Y$ , c'est à dire  $\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leq Y(\omega)$ , alors  $E(X) \leq E(Y)$ .



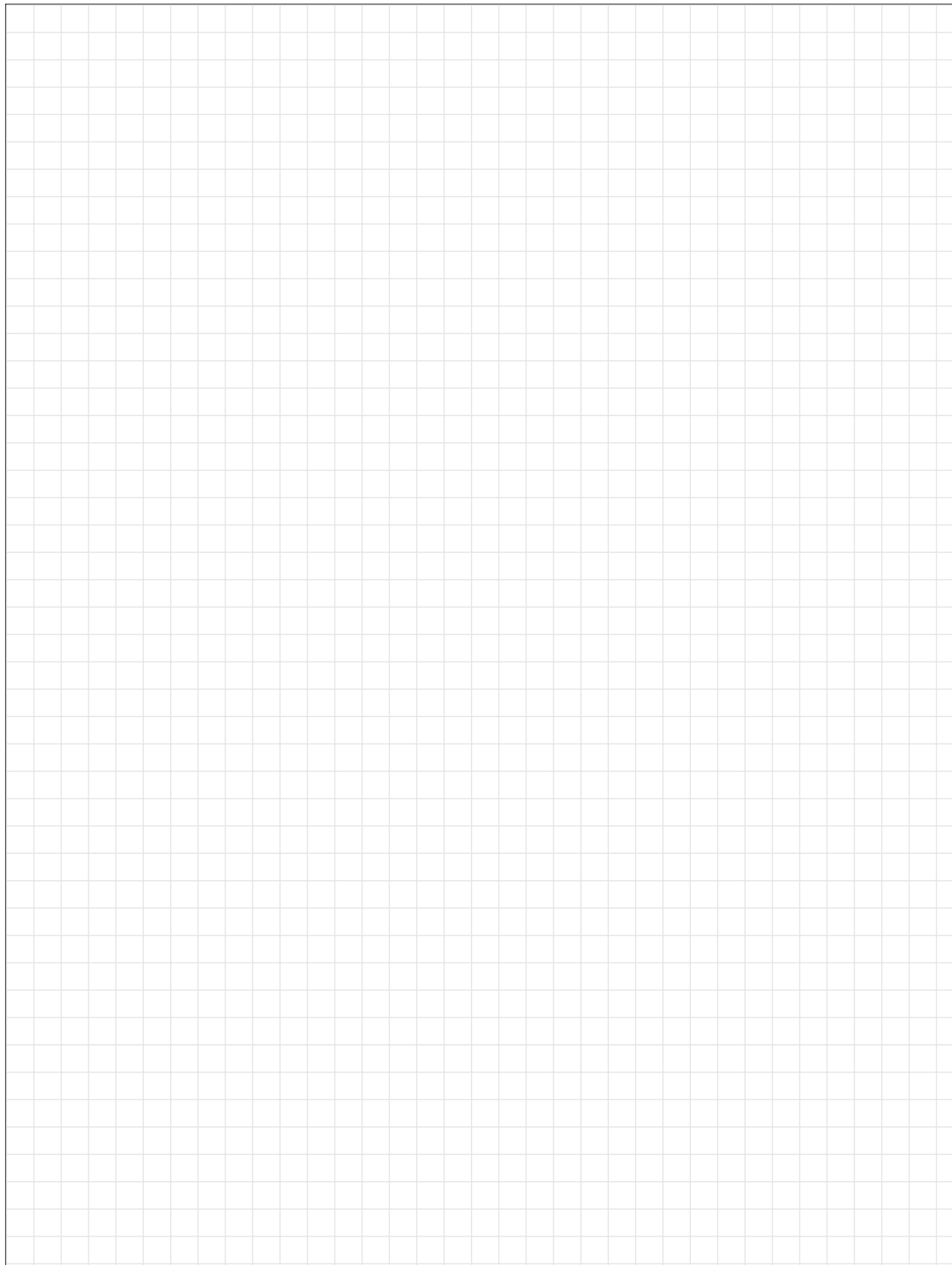


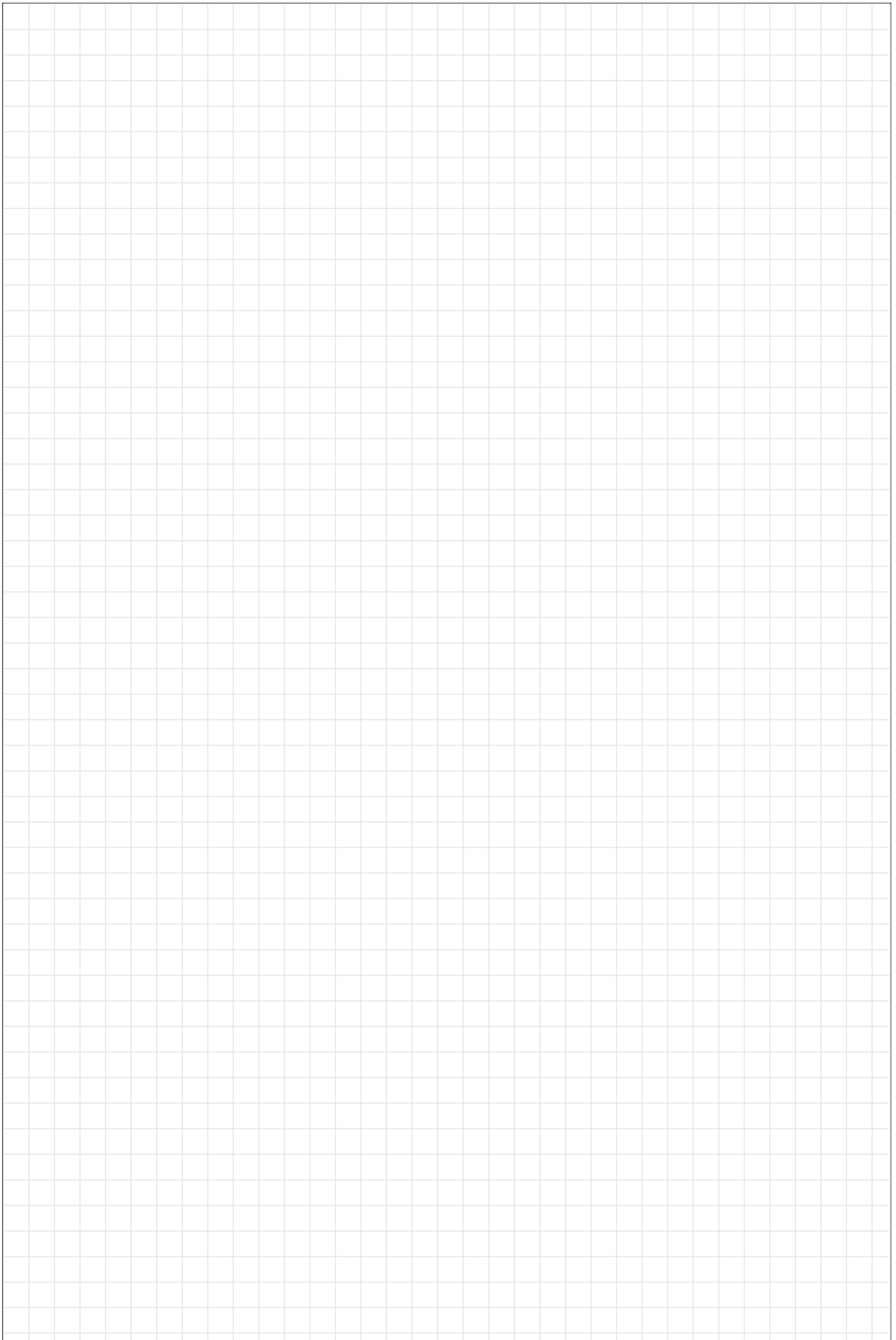


### 5.3 Théorème de transfert

**Théorème 5.4.** Soit  $g$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$  et  $X$  une v.a.r. sur  $(\Omega, P)$  fini.

$$\text{On a } E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x) = \sum_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i).$$

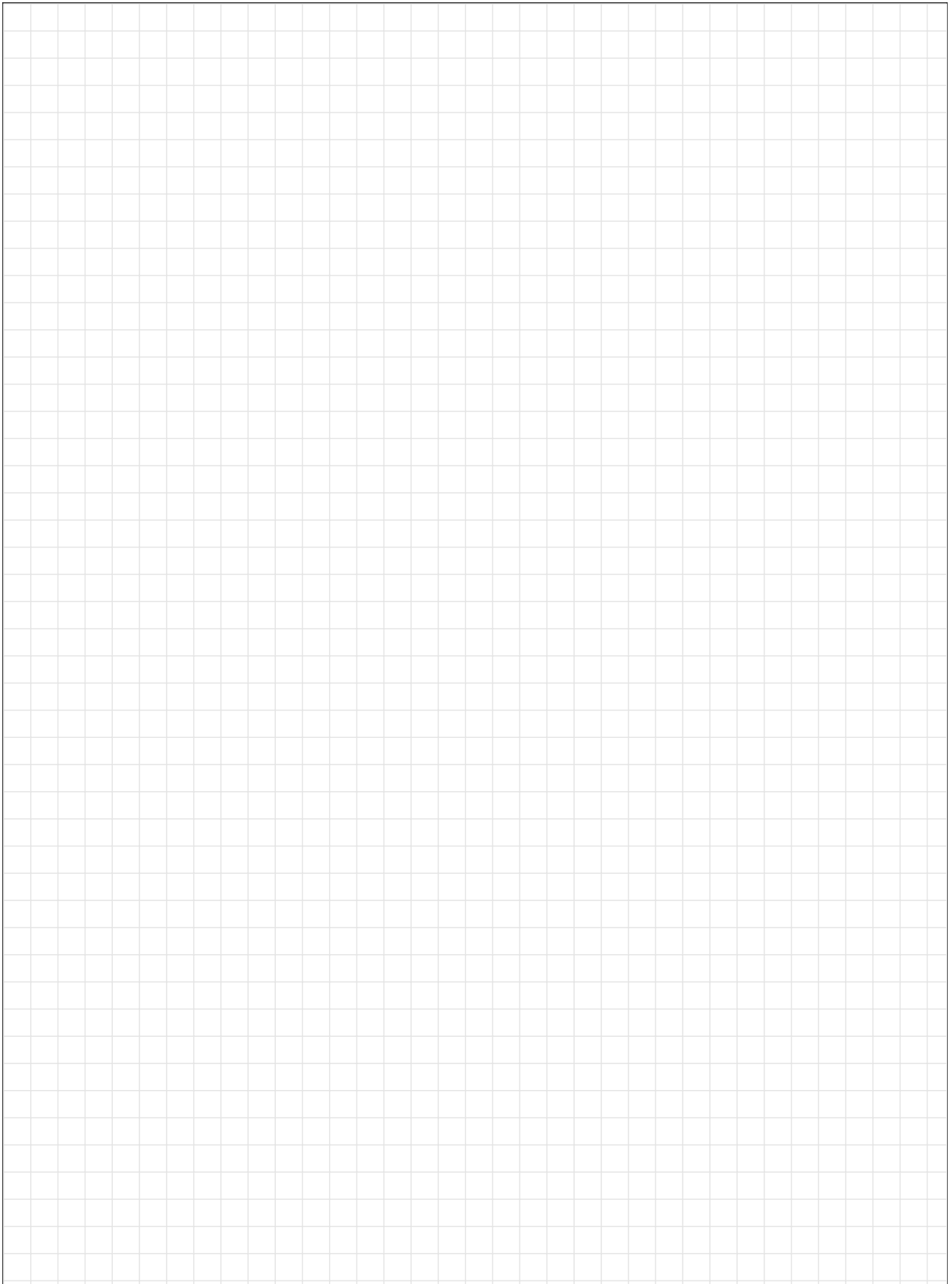


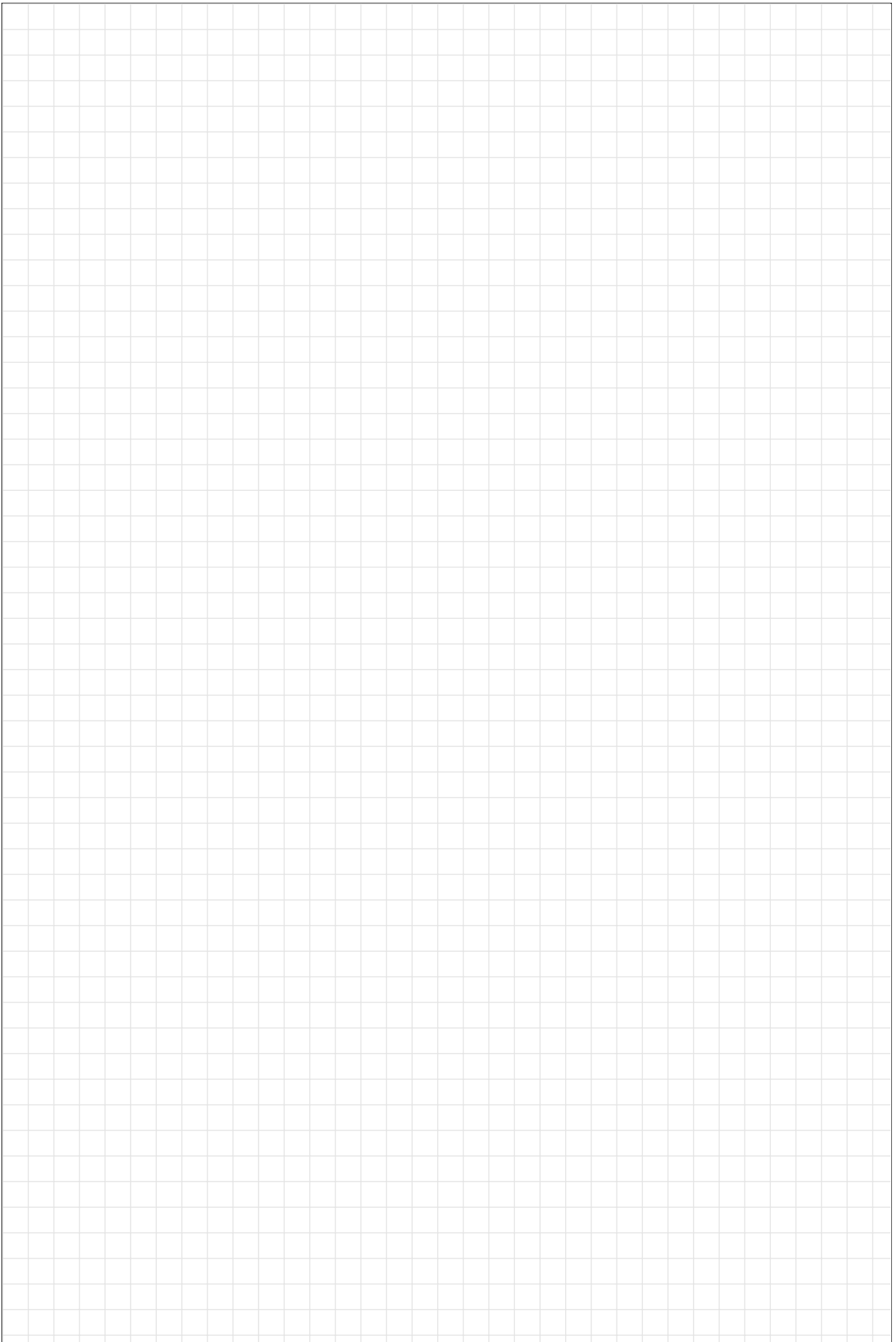


## 5.4 Espérance et indépendance

**Théorème 5.5.** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. sur  $\Omega$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .





## 5.5 Variance et écart-type

**Définition 5.2.** Soit  $X$  une v.a.r. finie. On appelle variance de  $X$  le réel  $V(X) = E((X - E(X))^2)$  et écart-type de  $X$  le réel  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

On a donc  $V(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$ .

*Remarque 5.1.* On a  $V(X) \geq 0$  donc  $\sigma(X)$  existe.

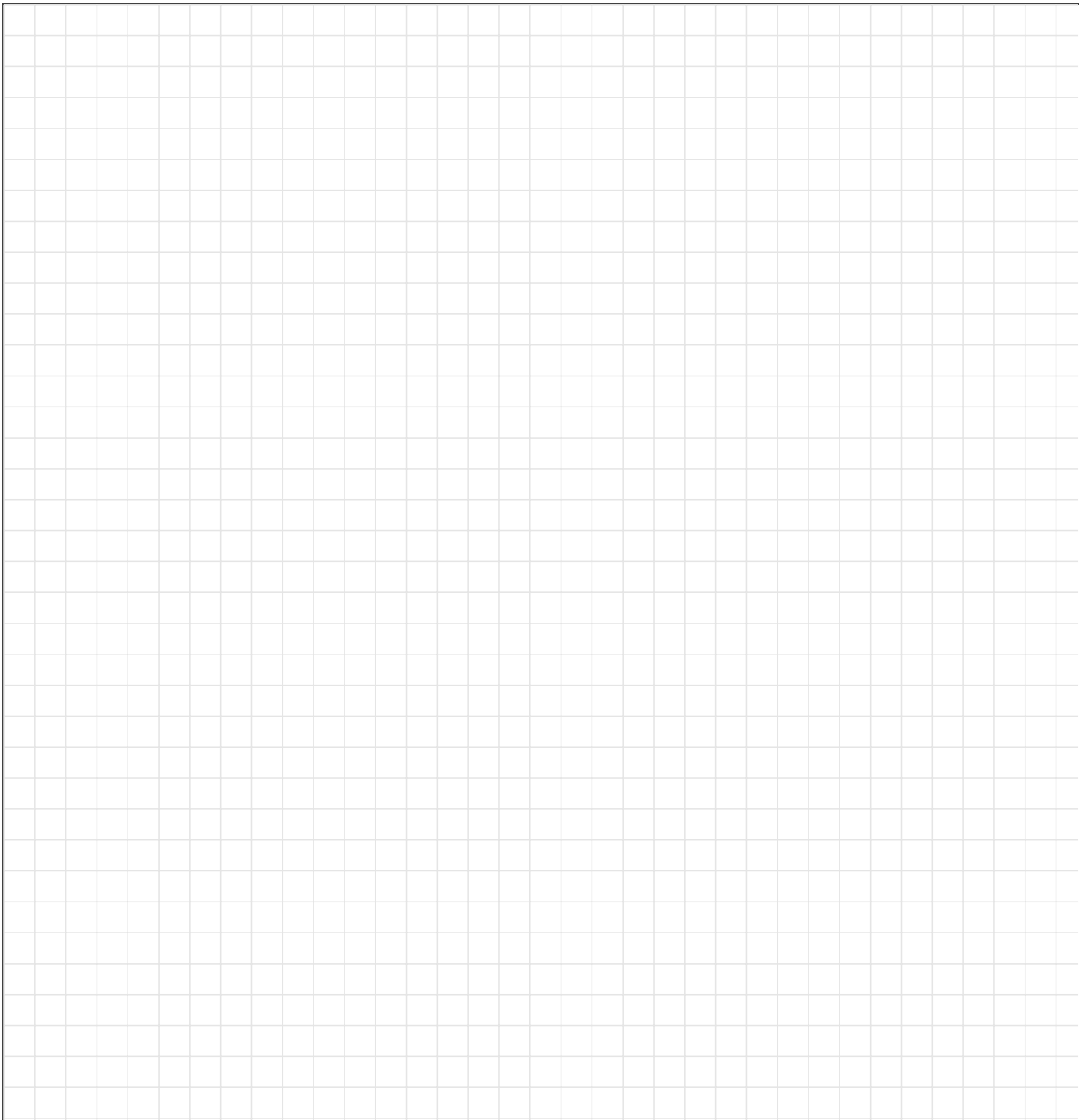
**Théorème 5.6** (Formule de Kœnig-Huygens).

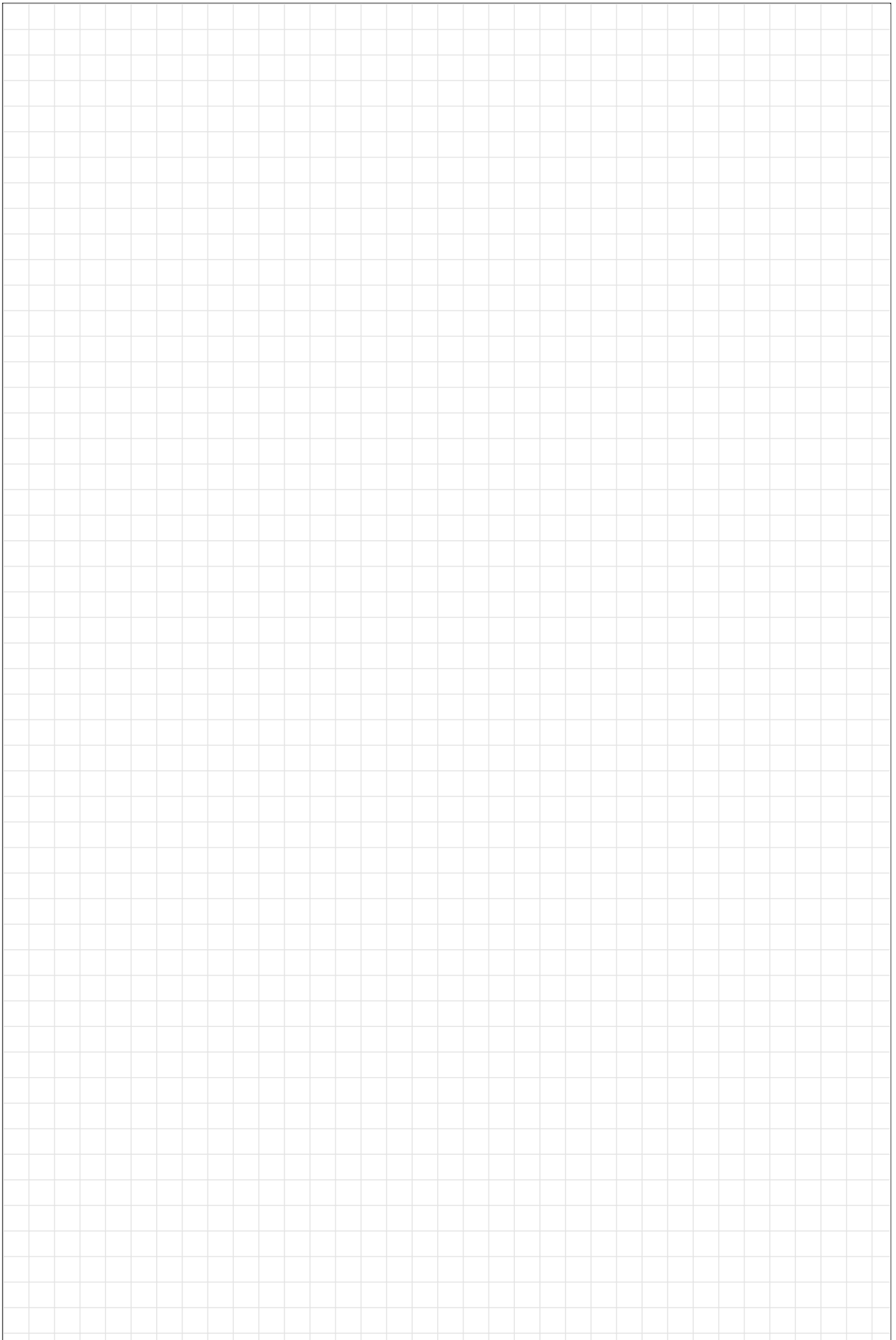
On a pour une v.a.r. finie  $X$  :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

**Théorème 5.7.** Soit  $X$  une v.a. finie. On a pour tous réels  $a, b$

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$





## 5.6 Espérance et variance des lois usuelles finies

- Si  $X$  est une v.a. finie constante,  $X = c$  avec  $P(X = c) = 1$ , alors

$$E(X) = c \text{ et } V(X) = 0.$$

- Si  $X$  suit la loi uniforme sur  $[[1, n]] : \mathcal{U}([1, n])$  alors

$$E(X) = \frac{1+n}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

- Si  $X$  suit la loi uniforme sur  $\Omega : X(\omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et  $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$ , alors

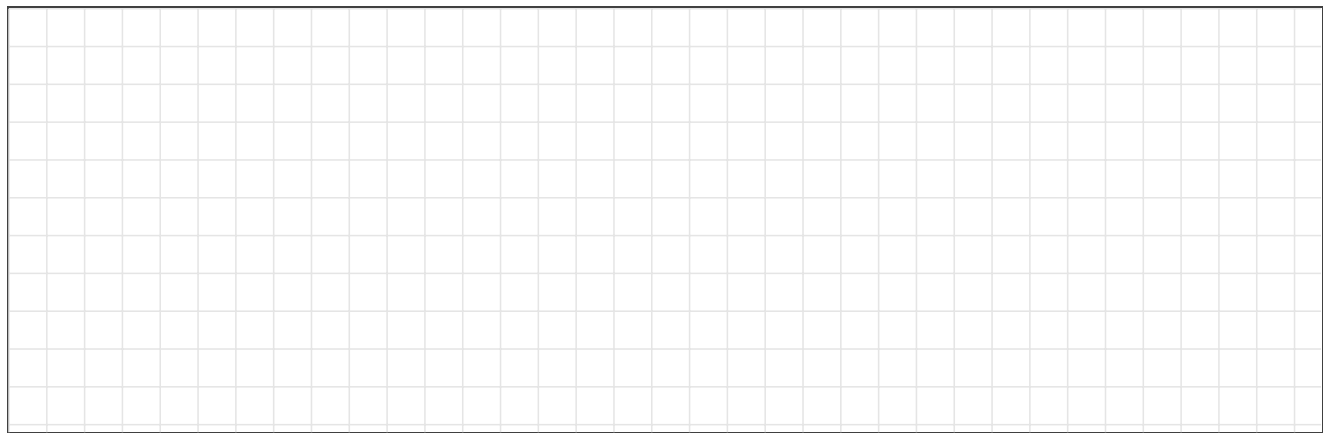
$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ et } V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

- Si  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p : \mathcal{B}(p)$ , alors

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p).$$

- Si  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p : \mathcal{B}(n, p)$ , alors

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p).$$



*Démonstration.*

- Soit  $X$  une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme :  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ .

$$\text{Alors } E(X) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{n} \implies \boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}.$$

$$\text{On calcule également } E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{où on a utilisé } \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{Et } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}.$$

On trouve

$$V(X) = \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} \implies \boxed{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}.$$

- Soit  $X$  une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .

$X$  prend les valeurs 0 avec la probabilité  $1-p$  et la valeur 1 avec  $p$ .

$$\text{Alors } E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p \text{ soit } \boxed{E(X) = p}. \text{ On calcule également } E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p.$$

$$\text{Et } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 \text{ soit } \boxed{V(X) = p(1-p)}.$$

— Soit  $X$  une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

Alors  $E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . Mais on sait que  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$  pour  $k \geq 1$ .

On obtient :

$$E(X) = 0 + \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

On reconnaît une formule du binôme :

$$E(X) = np(p + 1 - p)^{n-1} \text{ soit } \boxed{E(X) = np}. \text{ (résultat facile à obtenir par linéarité)}$$

On calcule maintenant  $E(X(X-1))$  qui donnera  $E(X^2) - E(X)$  :

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \text{ Mais on sait que}$$

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \text{ pour } k \geq 2.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= 0 + 0 + \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)}. \end{aligned}$$

On reconnaît une formule du binôme :

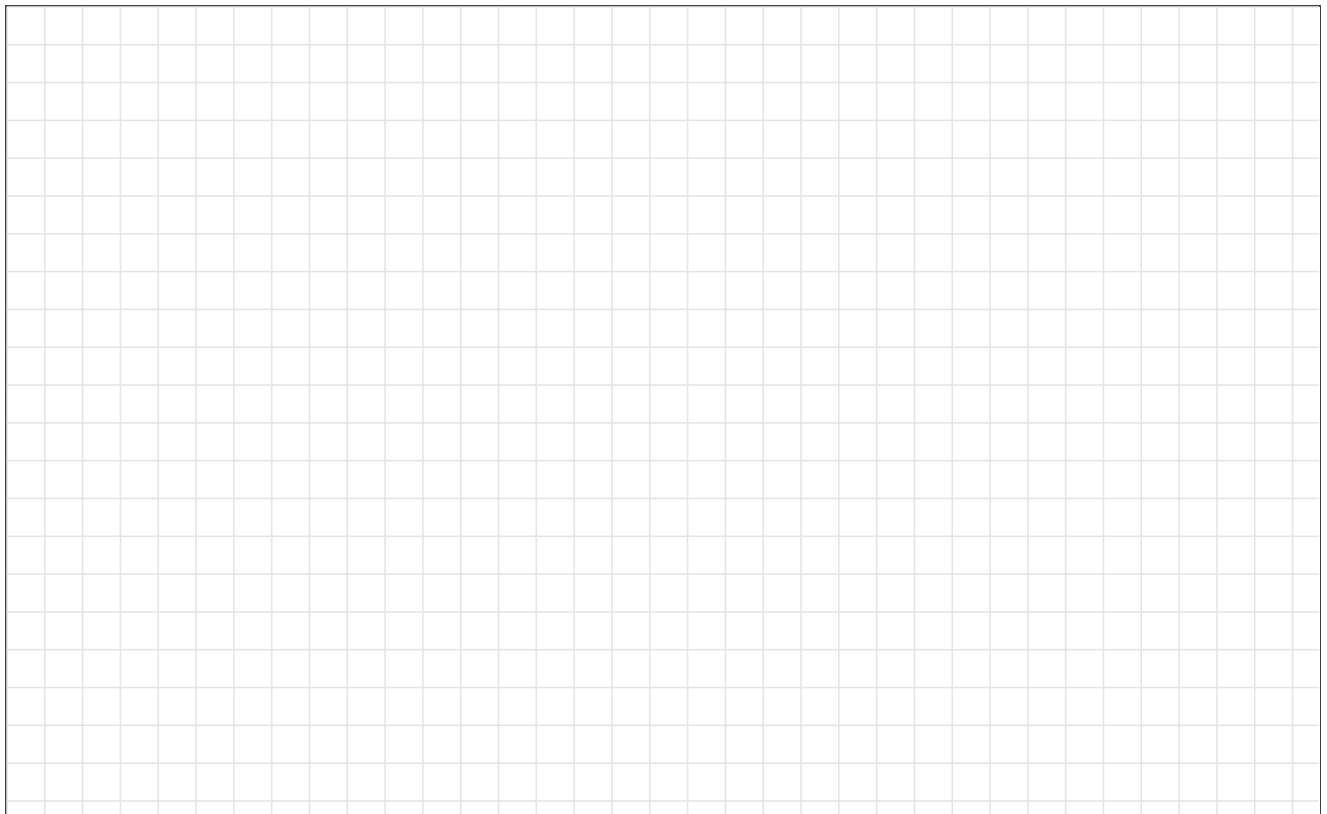
$$E(X(X-1)) = n(n-1)p^2(p + 1 - p)^{n-2} = n(n-1)p^2.$$

Et,

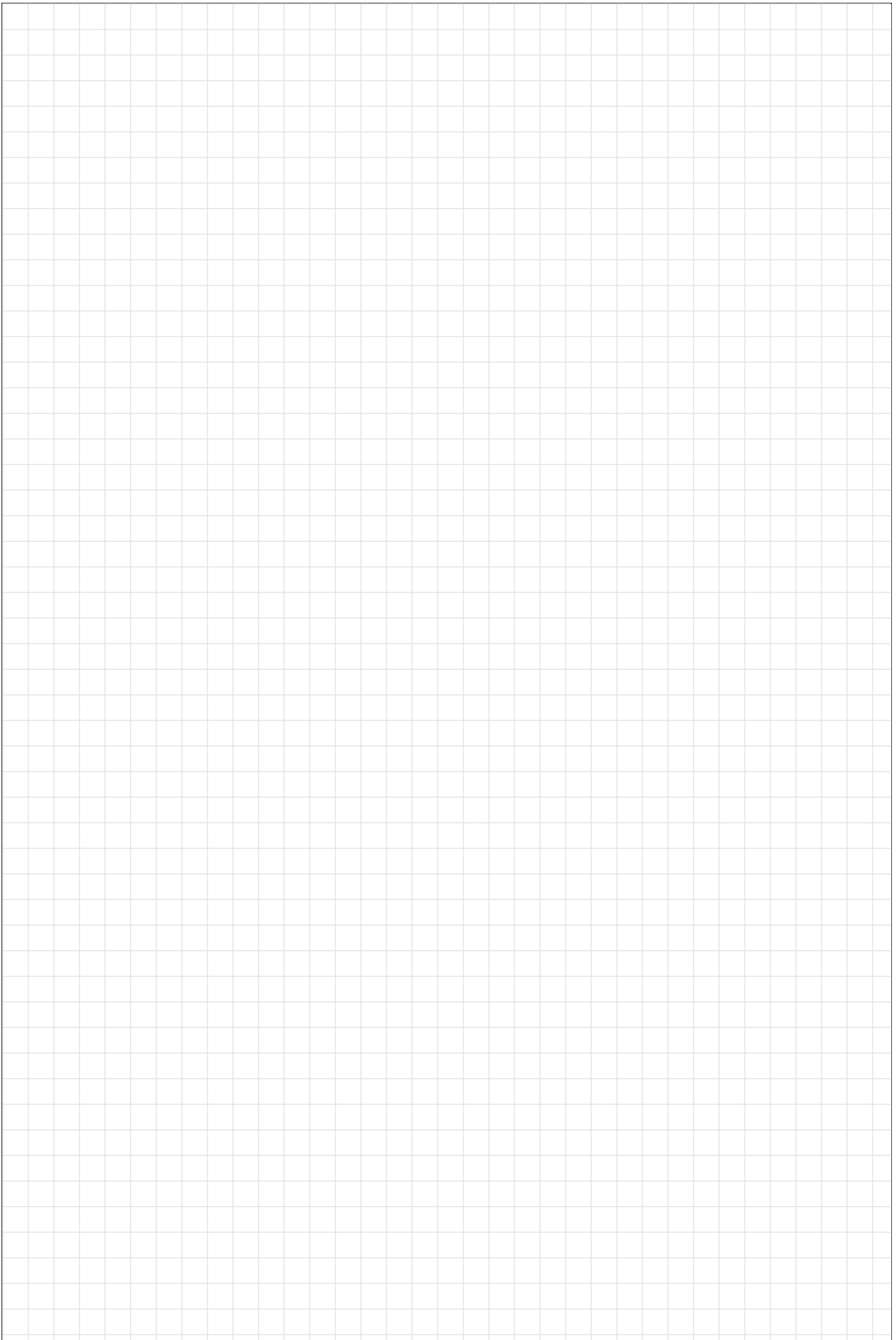
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np((n-1)p + 1 - np).$$

$$\text{D'où } \boxed{V(X) = np(1-p)}.$$

□







## 5.7 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Théorème 5.8.** *Si  $X$  est une v.a. définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  d'espérance  $E(X)$  et de variance  $V(X)$ , alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

