Chapitre 18 et 19 - TD - 18 mai 2020

TD 19 - Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de E et $\mathscr{B}'$ la base de E formée des vecteurs $v_1 = (-1, 1, -3)$, $v_2 = (3, 2, 1)$ et $v_3 = (2, 1, 1)$ dans la base $\mathscr{B}$.

1. Calculer la matrice du vecteur $(5, 1, 2)$ dans la base $\mathscr{B}'$.
2. Calculer la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ de l'endomorphisme f défini dans $\mathscr{B}$ par
$$f(x, y, z) = (2x + z, x - 3y, -x + z).$$
3. Calculer la matrice de l'endomorphisme g défini par $g(v_i) = i.v_i$ pour $i = 1, 2, 3$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

2- On a $A = M_B(f) = \begin{array}{c} f(1,0,0) \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array}$ en utilisant l'expression analytique de f

On veut $M_{B'}(f)$. On a la formule $M_{B'}(f) = P^{-1} M_B(f) \cdot P$

avec P matrice de passage de B à B' : $P = P_{B \to B'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array}$

Puis, on calcule :

$\boxed{A' = P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 7 \\ -6 & -49 & -28 \\ 7 & 83 & 48 \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\boxed{A' = P^{-1}AP \iff PA'P^{-1} = A}$ (!)

3) On connaît $G' = M_{B'}(g) = M_{(v_1,v_2,v_3)}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(v_1) & g(v_2) & g(v_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$

car $g(v_1) = 1.v_1$, $g(v_2) = 2v_2$, $g(v_3) = 3v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 3v_3$

Puis par la formule de changement de base

$M_B(g) = G = \begin{pmatrix} 17 & -17 & -11 \\ 6 & -5 & -4 \\ 10 & -11 & -6 \end{pmatrix}$ $\boxed{G = PG'P^{-1}}$

$g(x,y,z) = (17x - 17y - 11z,\ 6x - 5y - 4z, \dots)$ car $G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

base B

TD 18 - Exercice 7

On pose $u_0 = v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = u_n - u_{n-1}.$$

1. Déterminer un équivalent de (v_n) et en déduire la nature de $\sum v_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On calcule pour $n \geqslant 1$ $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n-1)$

$v_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

On utilise le DL $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ d'après la formule de Taylor. Puis, on pose $u = -\frac{1}{n}$

$v_n \underset{+\infty}{=} \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc convergente. On a $-2v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc $-2v_n > 0$ à partir d'un certain rang.

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum -2v_n$ converge. Par opération sur les séries convergentes

$\boxed{\sum v_n \text{ converge}}$

2) On a $\forall n$, $v_n = u_n - u_{n-1}$ donc $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge alors par théorème des séries télescopiques, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$

$\left[S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k-1} = u_n - u_0 \right]$

(culture générale $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \gamma$
γ = constante d'Euler)

Remarque :

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sommes partielles de la série harmonique

$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ résultat connu.

mais

$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

⚠

Pour $w_n = \ln(n)$, on a $w_n - w_{n-1} \longrightarrow 0$

$w_n \longrightarrow +\infty$

TD 18 - Exercice 6

Soit $\alpha > 0$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \alpha$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-\frac{1}{u_n}}$.

1. Étudier la suite (u_n).
2. Comparer la série $\sum u_n$ à une série géométrique et en déduire sa nature.

1.) On a $u_0 = \alpha > 0$. Si pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, alors u_{n+1} est défini et $u_{n+1} > 0$ car exp est strictement positive.
D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (et est défini)
On a pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-\frac{1}{u_n}}$ et $-\frac{1}{u_n} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{u_n}} < e^0 = 1$
car exp est strictement croissante donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
Alors (u_n) est strictement décroissante.
(u_n) est décroissante et minorée par 0, alors d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\ell \neq 0$, alors $-\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{\ell}$ par opération
et $e^{-\frac{1}{u_n}} \to e^{-\frac{1}{\ell}}$ car exp est continue en $-1/\ell$.
On a également $\lim\limits_{+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{+\infty} u_n$ qui donne $\cancel{\ell} = \cancel{\ell} e^{-\frac{1}{\ell}}$
$e^{-\frac{1}{\ell}} = 1 \iff -\frac{1}{\ell} = 0$ car exp est bijective. C'est impossible.
donc $\ell = 0$

(u_n) converge vers 0, alors par définition de la limite, il existe un rang N à partir duquel $0 < u_n \leq \frac{1}{10}$
alors
$\forall n \geq N \quad -\frac{1}{u_n} \leq -10$ et $e^{-\frac{1}{u_n}} \leq e^{-10}$
et $\forall n \geq N, \quad u_{n+1} \leq u_n e^{-10}$

Alors on montre par récurrence que $\forall n \geq N$, $u_n \leq \left(e^{-10}\right)^{n-N} u_N$
Initialisation : pour $n = N$, $u_N \leq 1 \cdot u_N$ c'est vrai

Hérédité :

Alors par le principe de récurrence, $\forall n \geq N \quad u_n \leq \frac{u_N}{(e^{-10})^N}(e^{-10})^n$

La série $\sum_{n\geq N} \frac{u_N}{(e^{-10})^N}(e^{-10})^n$ (fixe) est une série géométrique

de raison $q = e^{-10}$ avec $0 < e^{-10} < 1$ donc

elle converge. Alors par critère de comparaison des séries à termes positifs $\sum_{n\geq N} u_n$ converge

donc $\sum u_n$ converge.

TD 19 - Exercice 8

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans laquelle la matrice de u est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On sait que

$$\mathcal{M}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}(u) = D = \begin{array}{c|l} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array}$$

alors on cherche $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ tels que :

$$u(\vec{e_1}) = 0\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 0\vec{e_3} = \vec{0}$$
$$u(\vec{e_2}) = 0\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 0\vec{e_3} = 2\vec{e_2}$$
$$u(\vec{e_3}) = 3\vec{e_3}$$

On écrit $\vec{e_1}$ dans la base B : $\vec{e_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

sa matrice $\mathcal{M}_B(\vec{e_1}) = X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $u(\vec{e_1})$ a pour matrice $\mathcal{M}.X_1$

On a $u(\vec{e_1}) = \vec{0} \iff \mathcal{M}X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \\ -x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ 3z_1 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ z_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ (x_1, y_1, z_1) = \alpha(1, 1, 0)$.

On choisit $\vec{e_1} : (1, 1, 0)$ $\quad \vec{e_1} = \vec{i} + \vec{j}$

On résout $u(\vec{e_2}) = 2\vec{e_2}$ avec $\vec{e_2}$ de matrice $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dans B

en obtenant $\mathcal{M}X_2 = 2X_2$

$\iff \begin{cases} x_2 - y_2 = 2x_2 \\ -x_2 + y_2 + z_2 = 2y_2 \\ 3z_2 = 2z_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -y_2 \\ z_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\iff \exists \beta \in \mathbb{R} ;\ (x_2, y_2, z_2) = \beta(+1, -1, 0) \iff (x_2, y_2, z_2) \in \mathrm{Vect}((1, -1, 0))$

on choisit $\vec{e_2} : (1, -1, 0)$ $\quad \vec{e_2} = \vec{i} - \vec{j}$

Coordonnées de $\vec{e_2}$ dans B

On resout $u(\vec{e_3}) = 3\vec{e_3}$ avec $\vec{e_3}$ de matrice dans B : $X_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$

On trouve le système $\begin{cases} x_3 - y_3 = 3x_3 \\ x_3 + y_3 + z_3 = 3y_3 \\ 3z_3 = 3z_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_3 = -2x_3 \\ z_3 = -3x_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} : (x_3, y_3, z_3) = \gamma(1, -2, -3)$ on choisit $\vec{e_3} = (1, -2, -3)$

$\vec{e_3} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

On prouve que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

La matrice des 3 vecteurs $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est notée $P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} \end{array}$ et on prouve que P est inversible.

On échelonne P :

$P \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice est échelonnée et a 3 pivots alors $rg(P) = 3$: P est de rang maximal donc inversible donc $\boxed{(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) \text{ est une base}}$

On a avec $P = P_{B \to B'}$

$$\boxed{D = P^{-1} M P}$$

d'après la formule de changement de base.

TD 19 - Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer l'image et le noyau de f avec le minimum de calcul.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

TD 19 - Exercice 6

Soit $f_1 : x \mapsto e^{2x}$, $f_2 : x \mapsto xe^{2x}$ et $f_3 : x \mapsto x^2e^{2x}$ trois fonctions de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

1. On pose $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et donner la dimension de E.
2. On considère $\varphi : E \longrightarrow E$, définie par $f \mapsto \varphi(f) = f'$. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base (f_1, f_2, f_3). Montrer que φ est un automorphisme, donner la matrice de sa réciproque et déterminer une primitive de $x \mapsto (7 - 8x + 3x^2)e^{2x}$.