Chapitre 20 - Espaces probabilisés finis

en PTSI

1 Univers d'une expérience aléatoire

1.1 Notion d'expérience aléatoire

On considère des expériences dont chacune peut avoir plusieurs résultats (ou issues) possibles qui dépendent du hasard.

Exemple :

- lancer d'1D6 (un dé à six faces)
  résultats possibles 1, 2, 3, 4, 5, 6

l'univers correspondant est l'ensemble des résultats possibles

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- lancer deux dés à 6 faces

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 = \{\underbrace{(1,1), (1,2)\, (1,3) \ldots\ldots (6,5), (6,6)}_{36 \text{ résultats possibles}}\}$$

on peut aussi utiliser

$$\Omega = \{\underbrace{2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 12}_{11 \text{ résultats}}\}$$ si on s'intéresse uniquement à la somme des 2 dés
(celui là n'a pas des résultats équiprobables)

- tirage de boules dans une urne contenant plusieurs des boules de plusieurs couleurs
- tirage de numéros dans une urne
- sondage
- jouer à pile ou face : on lance 4 fois une pièce

on peut utiliser $\Omega = \{PPPP, PPPF, PPFP, PPFF, \ldots\}$

(en tenant compte de l'ordre : 2^4 résultats possibles)

1.2 Événements liés à une expérience aléatoire

Un événement lié à une expérience aléatoire est une condition sur le résultat de l'expérience qui est ou qui n'est pas réalisée et que l'on ne peut pas vérifier avant d'avoir réalisé l'expérience.

Exemple 1.1. Exemples d'événement :
« l'un des numéros obtenus est pair », « on a tiré plus de boules rouges que de vertes », « plus de 13 personnes sont entrées en 1 heure », « la pièce est conforme », « l'un des dés donne un 5 » ...

- on lance 2 dés à 6 faces.

$A =$ " les 2 chiffres obtenus sont pairs "

événement

résultat élémentaire

$= \{(2,2)(2,4)(2,6)(4,2)(4,4)(4,6)(6,2)(6,4)(6,6)\}$

univers

c'est un événement aléatoire = c'est une partie de Ω

on a $|A| = 9$ et $|\Omega| = 36$

cardinal de A = nb d'éléments dans A

$B =$ " le premier chiffre est strictement supérieur au deuxième "

$B = \{(2,1)(3,2)(3,1)(4,3)(4,2)(4,1)\dots\}$

$|B| = 1+2+3+4+5 = 15$

$B = \{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \mid i > j\}$

- 3 personnes qui posent leurs 3 chapeaux les mélangent et les reprennent au hasard.

$E =$ " aucune des trois personnes ne retrouve son chapeau "

on peut utiliser

$\Omega = \{(1,2,3),(1,3,2),(3,1,2),\dots,(3,2,1)\}$

tout le monde a son chapeau

échange de chapeau entre les personnes 2 et 3

$= \{(a,b,c)$ avec a,b,c distincts parmi $[\![1,3]\!]\}$

d'où $|\Omega| = 3! = 6$

et $E = \{(2,3,1),(3,1,2)\}$

$F =$ "tout le monde retrouve son chapeau"

$= \{(1, 2, 3)\}$ $\quad |F| = 1$

1.3 Univers

On admet que pour chaque expérience aléatoire, il existe un ensemble, noté Ω, appelé univers, dont les éléments représentent les différentes issues (résultats) possibles de l'expérience.

On note souvent $\omega \in \Omega$ une issue de l'expérience. (ω est un élément de Ω)

Un événement lié à une expérience aléatoire est représenté par une partie A de l'univers Ω de cette expérience : $A \subset \Omega$. Un événement représente donc un ensemble de résultats possibles.

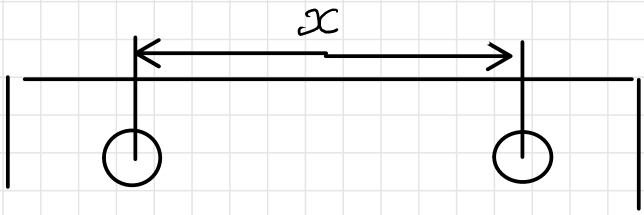
Parmi toutes les issues possibles, celles pour lesquelles l'événement A est réalisé sont représentées par $\omega \in A$.

En PTSI, Ω est un ensemble fini et l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω : $\mathscr{P}(\Omega)$.

Vous avez le choix de l'univers !

on en a intérêt de choisir l'univers où il y a équiprobabilité si possible

Exemple



les valeurs possibles pour x sont en nombre infini

1.4 Langage des événements

un seul résultat
||

Définition 1.1. Un événement A est une partie de Ω : $A \subset \Omega$.
Un événement élémentaire est un événement qui peut être représenté par un singleton $\{\omega\}$. $\omega \in \Omega$

Définition 1.2. À chaque événement A correspond son contraire « non A » que l'on note $\overline{A}$

A et $\bar{A}$ sont complémentaires dans l'ensemble Ω

Ω est fini

L'événement certain est représenté par Ω et son contraire est l'événement impossible qui est représenté par $\emptyset$.

Définition 1.3. L'événement « A et B » est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés au cours de la même expérience aléatoire. L'événement « A et B » est représenté par $A \cap B$.

Définition 1.4. Deux événements A et B sont dits incompatibles si et seulement si A et B sont disjoints, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$. A = "boule jaune" B = "boule bleue"

Définition 1.5. L'événement « A ou B » est réalisé si et seulement si au moins l'un des 2 événements A ou B est réalisé au cours de la même expérience aléatoire. L'événement « A ou B » est représenté par $A \cup B$.

Définition 1.6. La condition « l'événement A implique l'événement B » est représenté par $A \subset B$.

Définition 1.7. On appelle système complet d'événements une famille $(B_i)_i \in I$ d'événements de Ω vérifiant :

$$\cancel{\forall i \in I, \quad B_i \neq \emptyset} \text{ et } \forall (i,j) \in I^2 \text{ tels que } i \neq j, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$$

non !

incompatibles et exhaustifs

On lance 2D6

A = "les 2 résultats sont pairs"

B = " le premier est strictement supérieur au deuxième"

$A \cap B = \{(6,2),(6,4),(4,2)\}$ = "A et B"

$|A \cap B| = 3$

$A \cup B$ = "A ou B" = $\overbrace{\{(2,2)(2,4)\ldots\}}^{A} \cup \{(2,1)(3,1)(3,2) \ldots\}$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ formule du crible

$= 9 + 15 - 3 = 21$

Exemple : On tire 3 cartes d'un jeu de 52 cartes

E = " on a tiré au moins un as "

Ona $\overline{E}$ = " on n'a tiré aucun as "

ou encore en notant E_i = " on a tiré exactement i as " $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$\to \overline{E} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ $\qquad E_4 = \emptyset$ (!)

ici les E_1, E_2, E_3 sont incompatibles

ou encore en notant

E_T, E_C, E_K, E_P les événements " on a tiré l'as de " trèfle, carreau, coeur ou pique.

$\to \overline{E} = E_T \cup E_C \cup E_K \cup E_P$ ici $E_T, E_C, \ldots$ sont equiprobables

2 Espace probabilisé fini

2.1 Probabilité

Définition 2.1. Une probabilité sur un univers fini Ω est une application $P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ qui vérifie :

$$\begin{cases} P(\Omega) = 1 \\ \text{pour tous événements } A \text{ et } B \text{ tels que } A \cap B = \emptyset, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$$ σ-additivité

Un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω s'appelle un espace probabilisé fini.

Note : $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω
comme Ω est fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements

Exemple : on lance 1 D6 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
et $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $P(\text{"pair"}) = \frac{|\{2,4,6\}|}{6}$
on dit que P est "l'équiprobabilité" sur Ω.

Exemple on lance 1 D6 non équilibré avec
$P(\{6\}) = \frac{1}{5}$ $P(\{k\}) = \frac{4}{25}$ $\frac{1}{5} + 5 \times \frac{4}{25} = 1$
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité

Exemple : On met des boules numérotées de 1 à n dans une urne
On tire k boules simultanément $k \in [\![1,n]\!]$
Probabilité de $A_i =$ "on a tiré la boule n° i" $i \in [\![1,n]\!]$

On utilise Ω tel que $|\Omega| = \binom{n}{k}$ tirages de k boules parmi n
sans remise et sans ordre.

Tous les tirages sont équiprobables
Parmi ces tirages, combien comportent la boule n° i ?
On compte les tirages de k boules sans ordre sans remise contenant
la boule n° i $|A_i| = 1 \times \binom{n-1}{k-1}$

$P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{\text{nb de tirages favorables}}{\text{nb de tirages total}} = \frac{k}{n}$

Exemple : Même urne, on tire k boules successivement et sans remise. $P(A_i)$?

On utilise Ω l'ensemble des tirages de k boules successivement et sans remise et $|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$ nb de tirages de k boules sans remise en tenant compte de l'ordre

$A_{i,r}$ = " on a tiré la boule i au r^{e} tirage " $1 \leq r \leq k$

$P(A_{i,r})$?

$$|A_{i,r}| = \underbrace{\underset{\text{1 avec la boule } i}{(n-1)} \times (n-2) \times \dots \times \underset{\text{tirage } r-1}{(n-(r-1))}}_{r-1 \text{ tirages}} \times \underset{\substack{r^e \text{ tirage} \\ \text{choix de } i}}{1} \times \underbrace{(n-r) \times \dots \times \underset{k^e \text{ tirage}}{(n-(k-1))}}_{k-r \text{ tirages}}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \qquad P(A_{i,r}) = \frac{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{1}{n} = \frac{|A_{i,r}|}{|\Omega|}$$

$$\boxed{P(A_i) = P\left(\bigcup_{r=1}^{k} A_{i,r}\right) = \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}} = \sum_{r=1}^{k} P(A_{i,r})$$

car les $(A_{i,r})_{r \in [\![1,k]\!]}$ sont incompatibles.

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{k} A_{i,r}\right) = \sum_{r=1}^{k} P(A_{i,r})$$

2.2 Propriétés d'une probabilité

Proposition 2.1. *Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et soit A et B deux événements. On a*

- $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$ *car A est la réunion disjointe des évènements élémentaires $\{\omega\}$ où ω est élément de A.*
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, passage du complémentaire
- $P(\emptyset) = 0$,
- *Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$,* croissance de la probabilité
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$. formule du crible

$A \subset B$: l'événement A implique l'événement B

Démonstration de $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$:

soit $A \subset \Omega$ un événement. On a $A \cap \overline{A} = \emptyset$ ils sont incompatibles

alors par σ-additivité $P(A\cup\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

mais $A \cup \overline{A} = \Omega$ par définition du complémentaire

et $P(\Omega) = 1$ d'où $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

Exemple : Dans une classe de n personnes, calculer la probabilité de « deux personnes ont leur anniversaire le même jour ».

hypothèses raisonnables : - les années ont 365 jours (faux)
- les dates de naissance sont équiprobables (faux)
- les dates de naissance des personnes sont indépendantes

On peut utiliser l'univers $\Omega = [\![1, 365]\!]^n$ (ens des n-listes de $[\![1,365]\!]$)

on étudie E = « deux personnes ont la même date d'anniversaire (au moins) »

on a $|\Omega| = 365^n$ nb de listes de n éléments pris parmi 1 à 365 (avec répétition)

$P(E) = 1 - \frac{(365)!}{(365-n)!\,(365)^n}$

on n'étudie plutôt $\overline{E}$ = « toutes les personnes ont des dates d'anniversaire différentes » On a $|\overline{E}| = \frac{365!}{(365-n)!} = 365\times 364\times\dots\times(365-(n-1))$

nb de listes de n éléments distincts dans $[\![1,365]\!]$ pour $n \leqslant 365$

et $|\overline{E}| = 0$ pour $n > 365$ d'où $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \cancel{\frac{365!}{(365-n)!}}$ écrire une fonction en Python (ou calculer

Proposition 2.2. *Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.*

- *Pour A, B, C trois événements, $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$,* formule du crible
- *Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a $P(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$.*
- *Si $(B_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{i\in I} P(B_i) = 1$.*

cette somme est finie

événements deux à deux incompatibles : $\forall i\ \forall j$ avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$

Exemple : 3 personnes qui échangent leurs chapeaux.
B = " personne ne retrouve son chapeau ". $P(B) = ?$

A_i = " l'individu n° i retrouve son chapeau " $i = 1, 2, 3$
$\overline{B}$ = " au moins une personne retrouve son chapeau "

on a $\overline{B} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

d'où
$$P(\overline{B}) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1\cap A_2) - P(A_2\cap A_3) - P(A_3 \cap A_1) + P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

on utilise l'équiprobabilité des répartitions de chapeaux :

$$P(A_i) = \frac{\text{nb de répartition où } i \text{ retrouve son chapeau}}{\text{nb de répartition total}} = \frac{2!}{3!}$$

pour $i \neq j$ $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{3!}$ si 2 personnes retrouvent leurs chapeaux, la 3ème aussi

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3!} \quad (A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

d'où $P(\overline{B}) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

d'où $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{1}{3}$

2.3 Germes de probabilité

Théorème 2.3. *Soit* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ *et* $p_1, p_2, \dots, p_n$ *des réels.*
Il existe une probabilité P *sur* Ω *telle que* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ *si et seulement si* $\forall i,\ p_i \geqslant 0$ *et* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
Dans ce cas, la probabilité P *est unique et pour tout événement* A*, on a* $P(A) = \sum_{i \text{ tq } \omega_i \in A} p_i$.

Exemple : On note $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
et $q \in]0,1[$ et $p_k = q^{k-1}(1-q)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$
et $p_0 = q^n$
Mq $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ définit une probabilité sur Ω

On a $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $p_k > 0$ car $0 < q < 1$ donc $1-q > 0$
et $\sum_{k=0}^{n} p_k = q^n + \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}(1-q) = q^n + (1-q) \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1$
donc les $(p_k)_{k=0,\dots,n}$ définissent une probabilité sur Ω.
avec $P(\{\omega_k\}) = p_k$ pour tout k

À quelle expérience cela correspond-il ?
On tire n fois à pile ou face avec une pièce truquée
$P(\text{"Face"}) = q \in]0,1[$
On note pour $k \in [\![1,n]\!]$, A_k = " on a tiré le premier Pile au $k$ème tirage "
A_0 = "on n'a tiré aucun pile sur les n tirages".

$P(A_0) = ?$ On note F_k = " on a tiré Face au $k$ème tirage "
alors
$$A_0 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n} = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$$
$P(A_0) = P(F_1 \cap F_2 \dots \cap F_n) = P(F_1) \times P(F_2) \times \dots \times P(F_n)$
car les tirages sont indépendants $\boxed{P(A_0) = q^n}$

Or $A_k = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k}$

d'où $P(A_k) = P(F_1) . P(F_2) \dots P(F_{k-1}) . P(\overline{F_k})$ car ces tirages sont indépendants

$$\boxed{P(A_k) = q^{k-1} \cdot (1-q)}$$

2.4 Équiprobabilité

Définition 2.2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. On dit qu'il y a équiprobabilité si les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n}$

On dit que P est la probabilité uniforme.

Proposition 2.4. *Soit (Ω, P) un univers fini. La probabilité uniforme P sur Ω est définie par pour tout événement A,* $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas total}}$

Remarque 2.1. L'équiprobabilité est souvent une hypothèse que l'on pose pour adapter un modèle probabiliste à une expérience.

exemple : le résultat du lancer d'un dé à 6 faces équilibré

exemple : On lance 2D6, calculer P("la somme vaut 6")

on utilise $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ avec l'équiprobabilité

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$ soit 36 couples

$A =$ "la somme vaut 6" $= \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{36}$

Exemple : On lance une pièce équilibrée n fois.

Probabilité d'obtenir k Piles avec $k \in [\![0, n]\!]$?

On utilise $\Omega = \{P, F\}^n = \{PPP\dots P, PPPP\dots PF, P\dots, FFFF\}$

Un résultat possible est une liste ordonnée de n éléments pris parmi P ou F

on a $|\Omega| = 2^n$ les 2^n résultats sont équiprobables (pièce équilibrée)

A_k : "on a obtenu k Piles"

$k \times P + (n-k) F$

$\underbrace{F, F, P, F, P, P, F, F, F, P, P, F, F, F, F}_{n \text{ cases}}$

$P(A_k) = \dfrac{|A_k|}{|\Omega|} = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

on reconnaît la loi binomiale $\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$

Exercice : On lance 5 D6 équilibrés. Probabilités de

A = " avoir 5 numéros différents "

B = " on a au moins un multiple de 3 "

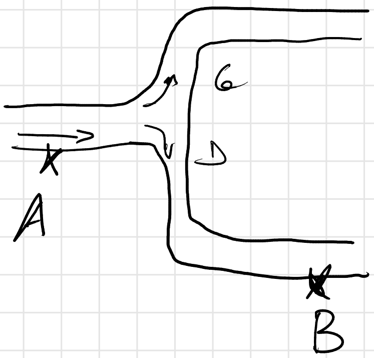
C = " au moins deux faces identiques "

D = " produit des chiffres obtenus est pair "

E = " au moins un multiple de 3 et au moins un nombre pair "

On utilise $\Omega = [\![1, 6]\!]^5$ et l'équiprobabilité

3 Probabilités conditionnelles



voitures → droite ou gauche (D, G)

couleur verte ou rouge (V, R)

en A $\quad P(R) \simeq \dfrac{N_R}{N}$ ← nb de rouges vues en A ; N ← nbre de voitures

en B $\quad P_D(R) \simeq \dfrac{N_{B,R}}{N_B}$

3.1 Définition

Définition 3.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement tel que $P(B) > 0$. On appelle probabilité de l'événement A sachant B (sachant que l'événement B est réalisé) :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Théorème 3.1. *Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement avec $P(B) > 0$.*

L'application P_B : $\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(A|B) \end{array}$ est une probabilité sur Ω appelée probabilité conditionnée à l'événement B.

(Ω, P_B) est un espace probabilité

Proposition 3.2. *Pour A, B, C des événements avec $P(B) > 0$, on a $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$ et $P_B(A \cup C) = P_B(A) + P_B(C) - P_B(A \cap C)$.*

La probabilité conditionnée par B est une autre vraie probabilité.

Exemple On lance 1D6. On note $A =$ " nombre ≤ 5 " $B =$ " nombre ≥ 3 "

$P_A(B) = \frac{3}{5}$

$P(A) = \frac{5}{6}$ car $|A| = 5$

$P(A \cap B) = \frac{3}{6}$ car $A \cap B = \{3, 4, 5\}$

Exemple On lance 2D6. Quelqu'un regarde le résultat et le cache. Proba de " au moins un 6 " ?

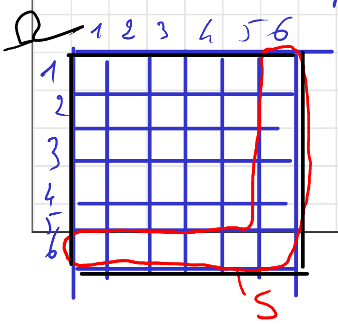
$P(S) = \frac{11}{36}$

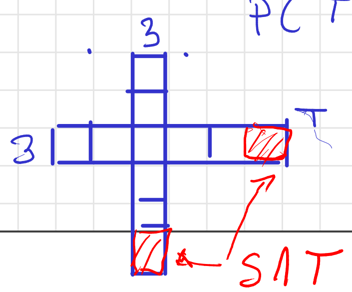
On a 36 résultats possibles avec $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ qui sont équiprobables et $S = \{(1,6), (2,6), (3,6), (5,6), (6,6), (6,5), \dots, (6,1)\}$

La personne montre un des 2 dés : c'est un 3. Quelle est la probabilité de S = " au moins un 6 " ?

S = " au moins un 6 " T = " l'un des deux dés a donné un 3 "

on veut $P_T(S) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}$





Exemple : Dans une urne, on place 5 boules Rouges et 7 boules Vertes. On tire 2 boules successivement et sans remise. On note A_i = " la i^e boule tirée est rouge ".
Calculer $P_{A_1}(A_2)$ (proba de A_2 sachant A_1)

On a $P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{11}$ car sachant A_1 réalisé, l'urne contient 4 R et 7 V

Avec les formules :

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{5\times4}{12\times11}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{11}$$

$$P(A_1) = \frac{5}{12} \qquad P(A_1 \cap A_2) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11}$$

explication : on suppose que les boules sont numérotées 1 à 5 R et 7 à 12 pour V

on a $\Omega = [\![1,12]\!]^2$ = ens des listes de 2 éléments distincts pris parmi $[\![1,12]\!]$

on a $|\Omega| = 12 \times 11$ résultats equiprobables

$A_1 \cap A_2$ = ens des listes de 2 éléments entre 1 et 5

$|A_1 \cap A_2| = 5 \times 4$

3.2 Formule des probabilités composées

Théorème 3.3.
Pour A, B des événements avec $P(B) > 0$, on a $P(A \cap B) = P_B(A).P(B)$.
Pour $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1).P_{A_1}(A_2).P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration pour 3 événements A, B, C $\quad P(A \cap B) \neq 0$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap (B \cap C)) = P(A).P_A(B \cap C)$$

Mais $P_A(B \cap C) = P_{A \cap B}(C).P_A(B)$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P_A(B).P_{A \cap B}(C)$$

Démonstration générale par récurrence.

Remarque $\quad P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0 \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \neq 0$

pour $k \leq n-1$ car $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \supset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$

et la probabilité est croissante donc

$$0 < P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \leq P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

$\neq 0$

Exemple : Dans une urne contenant 7 boules vertes et 3 boules rouges, on tire successivement et sans remise 3 boules.
Probabilité d'obtenir 3 boules rouges ?

On note

$R_i =$ "on a tiré une boule rouge au i^{e} tirage"

pour $i = 1, 2, 3$

On cherche $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$. On utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R_1 \cap R_2}(R_3)$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

car $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{2}{9}$ car l'événement R_1 étant réalisé, l'urne contient 9 boules dont 2 rouges

Exemple : Une urne contient n boules rouges et n boules vertes avec $n \in \mathbb{N}^*$. On tire successivement et sans remise n boules. Quelle est la probabilité de ne tirer que des rouges ?

On note R_i = " on tire une boule rouge au i^{e} tirage "
On cherche $P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n)$. On utilise la formule des probabilités conditionnelles : $P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) > 0$: c'est possible

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(R_4) \times \dots \times P_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}}(R_n)$$

pour $1 \leq k \leq n-1$

$$P_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k}(R_{k+1}) = \frac{n-k}{2n-k}$$ par équiprobabilité $\frac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas total}}$

car si l'événement $R_1 \cap R_2 \dots \cap R_k$ est réalisé, l'urne contient $2n-k$ boules dont $n-k$ boules rouges

Alors

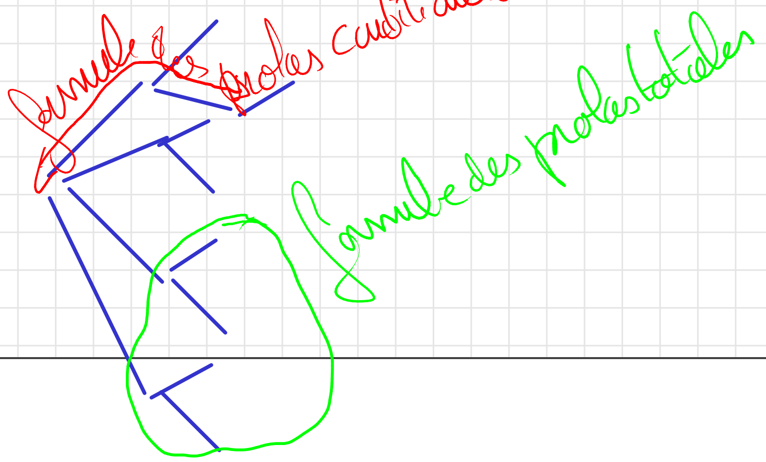
$$P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)} = \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \frac{n-2}{2n-2} \times \dots \times \frac{n-(n-1)}{2n-(n-1)}$$

$$= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{2n \times (2n-1) \dots \underbrace{(2n-(n-1))}_{=n+1}} = \frac{n!}{\frac{(2n)!}{n!}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Finalement

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{1}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

$$(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times (n+1) \times \frac{n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{(2n)!}{n!}$$



3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 3.4. *Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B, on a* si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$, alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Corollaire 3.5. *Soit A un événement tel que $0 < P(A) < 1$. Pour tout événement B, on a $P(B) = P(A).P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$.* car $\begin{cases} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = \Omega \end{cases}$

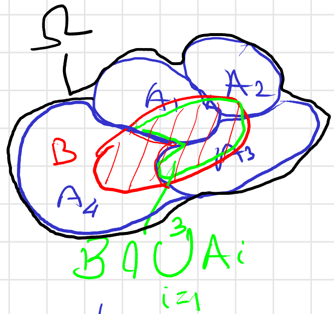
$(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

Démonstration du th 3.4 :

Les événements $(B \cap A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont incompatibles deux à deux car les $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont incompatibles deux à deux : $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$

Par σ-additivité, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$



Mais

$$\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i) = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$
$$= B \cap \Omega \quad \text{car les } (A_i) \text{ sont un SCE}$$
$$= B \quad \text{car } B \subset \Omega$$

D'où $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P_{A_i}(B)$

Exemple : Deux joueurs tirent sur une cible appelés X et Y. X touche la cible 6 fois sur 10, Y touche la cible 9 fois sur 10. X joue 2 fois sur 3 et Y 1 fois sur 3. Quelqu'un tire sur la cible, quelle est la probabilité que la cible soit touchée ? On note A = "X tire" B = "la cible est touchée". On sait $P_A(B) = \frac{6}{10}$, $P_{\bar{A}}(B) = \frac{9}{10}$, $P(A) = \frac{2}{3}$

$(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements. On veut $P(B)$. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A).P_A(B) + P(\bar{A}).P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{3}\times\frac{6}{10} + \frac{1}{3}\times\frac{9}{10} = \frac{7}{10}$$

Exemple On a 5 dés à 6 faces dont un pipé avec $P(\text{"}6\text{"}) = \frac{1}{4}$ (et donc $P(\text{"}x\text{"}) = \frac{3}{20}$ pour $x \neq 6$). On choisit un dé au hasard et on le lance. Probabilité d'obtenir un 6 ?

On note S = "on obtient un 6" T = "le dé choisi est pipé"

On sait d'après l'énoncé : $P_T(S) = 1/4$, $P_{\overline{T}}(S) = \frac{1}{6}$, $P(T) = 1/5$ et $P(\overline{T}) = 4/5$

on utilise la formule des probabilités totales :

$(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements et

$$P(S) = P(T) \cdot P_T(S) + P(\overline{T}) \cdot P_{\overline{T}}(S)$$
$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{60}$$

Bonus : On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

On cherche $P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)}$ par définition d'une proba conditionnelle

mais $P(S \cap T) = P(T) \times P_T(S)$ d'après la formule des probas conditionnelles

d'où

$$P_S(T) = \frac{P_T(S) \cdot P(T)}{P(S)}$$ Formule de Bayes

$$= \frac{1/4 \cdot 1/5}{11/60} = \frac{3}{11}$$

voir exemple p 28

3.4 Formules de Bayes

Théorème 3.6. *Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors*

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

Théorème 3.7. *Si $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et B est un événement de probabilité non nulle, alors*

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Formules des probabilités totales.

Exemple : X et Y tirent sur une cible. X touche la cible 6 fois sur 10 et Y 9 fois sur 10. X tire 2 fois sur 3. Un des joueurs touche la cible. Quelle est la probabilité que X ait tiré ?

$A =$ "X tire" $B =$ "la cible est touchée". On veut $P_B(A)$

D'après la formule de Bayes, comme $P(B) \neq 0$,

$$P_B(A) = \frac{P(A).P_A(B)}{P(B)}$$

$(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements et $P(A) \neq 0$, $P(\bar{A}) \neq 0$

alors $P(B) = P(A).P_A(B) + P(\bar{A}).P_{\bar{A}}(B)$

ce qui donne $$P_B(A) = \frac{P(A).P_A(B)}{P(A).P_A(B) + P(\bar{A}).P_{\bar{A}}(B)}$$

$$= \frac{2/3 \cdot 6/10}{2/3 \cdot 6/10 + 1/3 \cdot 9/10} = \frac{4}{7}$$

Un test qualité permet de s'assurer qu'une pièce n'est pas défectueuse.
Le test répond «conforme» pour une pièce défectueuse dans 5/100 des cas.
Le test répond «non conforme» pour une pièce conforme 3 fois sur 100.
Un lot contient 1% de pièces défectueuses. On tire une pièce au hasard, on la teste, elle est déclarée conforme. Quelle est la probabilité qu'elle soit vraiment conforme ?

$C =$ "la pièce est conforme" $T =$ "la pièce est déclarée conforme"

On sait $P \quad = \frac{5}{100}$, $P \quad = \frac{3}{100}$, $P \quad = \frac{1}{100}$

on calcule $$P_T(C) = \frac{P(C).P_C(T)}{P(T)}$$ d'après la formule de Bayes

$$= \frac{P(C).P_C(T)}{P(C).P_C(T) + P(\bar{C}).P_{\bar{C}}(T)} =$$

Exemple : On dispose de $n+1$ urnes $U_1, U_2, \dots, U_n$ et U_0. L'urne U_k contient k boules rouges et $n-k$ boules vertes. On choisit une urne au hasard et on tire 2 boules successivement sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules rouges ?

On note A = "on a tiré deux boules rouges"

U_k = "on a tiré dans l'urne U_k"

Les événements $(U_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont un système complet d'événements car pour $i\neq j$ $U_i\cap U_j=\emptyset$ et $\bigcup_{k=0}^{n} U_k=\Omega$

De plus $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $P(U_k)\neq 0$ car $P(U_k)=\frac{1}{n+1}$

On calcule $P_{U_k}(A)=P_{U_k}(R_1\cap R_2)$ avec R_i : "on a tiré une rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage". $P_{U_k}(A)=P_{U_k}(R_1)\times P_{U_k\cap R_1}(R_2)$

$P_{U_k}(A)=\frac{k}{n}\times\frac{k-1}{n-1}$ pour $k\geqslant 2$

$P_{U_0}(A)=0$ et $P_{U_1}(A)=0$ car il n'y a pas assez de boules rouges

Donc $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $P_{U_k}(A)=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}=\frac{\frac{k(k-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}}$

on peut utiliser la formule des probabilités totales :

$$P(A)=\sum_{k=0}^{n}P(U_k).P_{U_k}(A)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}.\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$P(A)=\frac{1}{(n+1)n(n-1)}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)=\frac{2}{6}\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)n(n-1)}=\frac{1}{3}$$

Car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)=\sum_{k=0}^{n}2\times\binom{k}{2}=2\binom{n+1}{3}=2\frac{(n+1)n(n-1)}{3\times2\times1}$

question classique.

$$\boxed{P(A)=\frac{1}{3}}$$

Dans le cas de tirages avec remise : $P_{U_k}(A)=\frac{k}{n}\times\frac{k}{n}=\frac{k^2}{n^2}$

d'où $P(A)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\times\frac{k^2}{n^2}=\frac{1}{n^2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$

4 Indépendance

4.1 Indépendance de deux événements

Définition 4.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On dit que 2 événements A et B sont indépendants pour la probabilité P lorsque $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Proposition 4.1. *Soit A et B deux événements avec $P(B) > 0$. On a*

A et B sont indépendants pour la probabilité P si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Proposition 4.2. *Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont deux événements indépendants ainsi que A et $\overline{B}$, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$.*

Remarque : A et B deux événements sont indépendants si la probabilité de A ne change pas si on sait que B est réalisé $P(A) = P_B(A)$.

preuve de 4.1. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}$ si A et B sont indépendants

Démonstration de 4.2 :

$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (B \cup \overline{B})) = P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}))$

$= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ car $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles

Si A et B sont indépendants, $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B)$

alors A et $\overline{B}$ sont indépendants $= P(A)(1 - P(B)) = P(A).P(\overline{B})$

Remarque 4.1. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ un univers fini et deux probabilités P_1 et P_2 :

ω	1	2	3	4	5	6
$P_1(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

"pipé"

ω	1	2	3	4	5	6
$P_2(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

équiprobabilité

On considère les 2 événements $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$.

On montre que A et B sont indépendants pour la probabilité P_1 mais A et B ne sont pas indépendants pour la probabilité P_2.

événement singleton

On calcule $P_1(A \cap B) = P_1(\{2\}) = \frac{1}{6}$

et $P_1(A) = P(\{1,2\}) = P(\{1\} \cup \{2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\})$

$= \frac{1}{3}$

et $P_1(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ alors $P_1(A \cap B) = P_1(A).P_1(B)$

A et B sont indépendants pour P_1

De même

$P_2(A \cap B) = \frac{1}{6}$ $P_2(A) = \frac{1}{3}$ $P_2(B) = \frac{1}{3}$

$P_2(A \cap B) \neq P_2(A).P_2(B)$

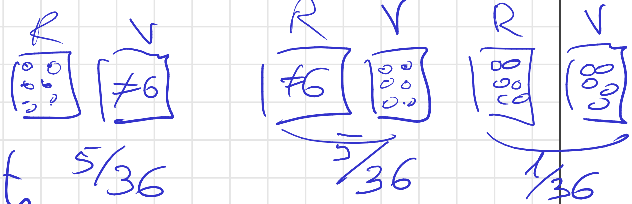
Exemple : On lance 2 D6. A = "on obtient un 6"
B = "La somme des deux dés est supérieure ou égale à 10"
A et B sont-ils indépendants ?

On utilise $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$: ensemble des couples qui sont équiprobables (R,V)

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{11}{36}$ $\quad P(B) = \dfrac{|B|}{36} = \dfrac{6}{36}$.

car $B = \{(4,6),(5,5),(6,4),\underbrace{(5,6),(6,5)}_{A\cap B},(6,6)\}$

et $P(A\cap B) = \dfrac{5}{36}$



$P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B)$

A et B ne sont pas indépendants.

$P_A(B) = \dfrac{5}{11} = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ $\quad A = \{11 \text{ résultats avec un } 6\}$ $\quad A\cap B = \{5 \text{ résultats}\}$

Remarque : Si A et B sont incompatibles ($A\cap B = \emptyset$) mais pas impossibles $P(A)>0$ et $P(B)>0$ alors A et B ne sont pas indépendants.

$(P(A\cap B) = 0$ mais $P(A)\cdot P(B) \neq 0)$.

Exemple : On tire avec remise n jetons dans un sac qui contient autant de rouges R que de verts V avec $n \geq 2$.

On note A = " on a tiré au moins deux jetons rouge"

B = " On a tiré des jetons des deux couleurs".

Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(\bar{A}\cap B)$ et $P(A\cap B)$

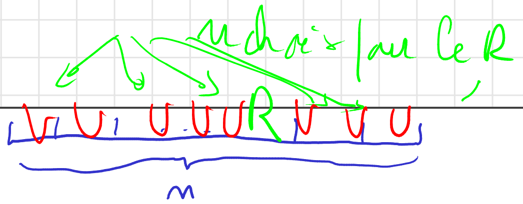
On étudie $\bar{A}$ = "On a tiré 0 ou 1 jeton rouge"

= "on a tiré 0 jeton rouge" $\cup$ " on a tiré 1 jeton rouge"

$P(\bar{A}) = P(\text{"}R=0\text{"}) + P(\text{"}R=1\text{"})$ $\quad R$ est une Variable Aléatoire

$= \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{n}{2^n}$

$= \dfrac{n+1}{2^n}$



on peut utiliser $\Omega = \{R, V\}^n$ = ens des listes de n lettres R ou V

$|\Omega| = 2^n$ $\quad \Omega = \{RR\ldots R, R\ldots RV, R\ldots VR, R\ldots, \overbrace{VV\ldots V}\}$

et ces 2^n tirages sont équiprobables

D'où $\underline{P(A)} = 1 - P(\bar{A}) = \underline{1 - \frac{n+1}{2^n}}$

On a $\bar{B}$ = "on n'a tiré que des rouges ou que des verts"

d'où $P(\bar{B}) = P(\text{"}R=0\text{"}) + P(\text{"}R=n\text{"})$

$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}$ d'où $\boxed{P(B) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}}$

Ensuite
$\bar{A} \cap B$ = "on a tiré un jeton rouge exactement"

d'où $P(\bar{A} \cap B) = P(\text{"}R=1\text{"}) = \frac{n}{2^n}$

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ et B sont indépendants

$\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \Leftrightarrow \frac{n}{\cancel{2^n}} = \frac{n+1}{\cancel{2^n}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$\Leftrightarrow \cancel{n} = \cancel{n} + 1 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow n+1 = 2^{n-1}$

$\Leftrightarrow$ pour $n = 2$, $3 = 2$ faux

pour $n = 3$, $4 = 4$ vrai

pour $n = 4$, $5 = 8$ faux

pour $n \geq 4$, $2^{n-1} > n+1$ faux

A et B sont indépts si et seulement $n = 3$

4.2 Indépendance de n événements

Définition 4.2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ des événements.
On dit que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour toute partie $J \subset [\![1, n]\!]$, on a

on étudie toutes les intersections possibles

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

On dit que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont indépendants deux à deux si pour tous les indices $(i, j) \in ([\![1, n]\!])^2$, on a pour $i \neq j$

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j)$$

indépendance deux à deux ($\binom{n}{2}$ paires à vérifier)

Remarque 4.2. On lance 2 fois un dé cubique parfait. Soient les événements A_1 : "le premier nombre obtenu est pair", A_2 : "le deuxième nombre obtenu est impair", A_3 : "la somme des 2 nombres obtenus est paire".

On montre que A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

mutuellement indépendants $\Rightarrow$ indépendants

On utilise $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$: ensemble des 36 couples de résultats. Ils sont supposés équiprobables.

$P(A_1) = P\left(\{(2,x),(4,x)(6,x) \text{ avec } x \in [\![1,6]\!]\}\right) = \dfrac{3\times 6}{36} = \dfrac{18}{36}$
$= \dfrac{1}{2}$

$P(A_2) = \dfrac{1}{2}$ comme pour A_1, $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{3+3+3}{36} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

donc A_1 et A_2 sont indépendants.

$P(A_3) = P(\text{"les 2 sont pairs"}) + P(\text{"les 2 sont impairs"})$
$= \dfrac{9}{36} + \dfrac{9}{36} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

$P(A_2 \cap A_3) = P(\text{"les 2 sont impairs"}) = \dfrac{1}{4} = P(A_2).P(A_3)$

$P(A_1 \cap A_3) = P(\text{"les 2 sont pairs"}) = \dfrac{1}{4} = P(A_1).P(A_3)$

A_1, A_2, A_3 sont indépendants deux à deux.

on calcule

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

donc A_1, A_2, A_3 ne sont pas mutuellement indépendants

Rappel : A, B, C, D sont mutuellement indépendants pour l'espace probabilisé (Ω, P) si : les probabilités des 11 intersections utilisant les événements sont égales au produit des probabilités des événements composant l'intersection :

$$\binom{4}{2}\begin{cases} P(A\cap B) = P(A).P(B) \\ P(A\cap C) = P(A).P(C) \\ P(A\cap D) = P(A).P(D) \\ P(B\cap C) = P(B).P(C) \\ P(B\cap D) = P(B).P(D) \\ P(C\cap D) = P(C)P(D) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B).P(C) \\ P(A\cap C\cap D) = P(A)P(C)P(D) \\ P(B\cap C\cap D) = P(B).P(C).P(D) \\ P(A\cap B\cap D) = P(A)P(B).P(B) \end{matrix}\right\}\binom{4}{3}$$

$$P(A\cap B\cap C\cap D) = P(A).P(B)P(C)P(D). \quad \binom{4}{4}$$