Chapitre 22 - Déterminants

Déterminant d'une matrice carrée

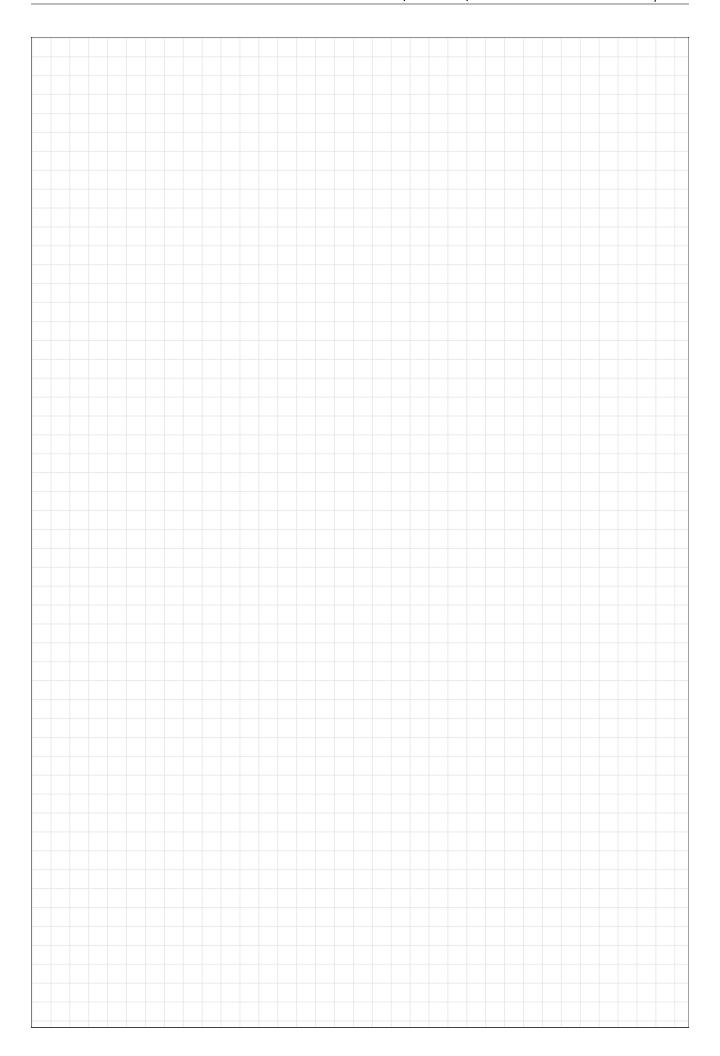
Linéarité par rapport aux colonnes de la variable

Soit M une matrice de $\underline{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, on note ses colonnes $M = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ et on note C_j' une autre colonne. **Définition 1.1.** Soit $j \in [[1,n]]$ et $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, on dit que f est linéaire par rapport à la colonne C_j si pour toute $\alpha \in \mathbb{K}$, pour toute matrice M et pour toute colonne C_j' ,

 $f\left(C_{1}|C_{2}|\ldots|\alpha C_{j}+C_{j}'\ldots|C_{n}\right)=\alpha f\left(C_{1}|C_{2}|\ldots|C_{j}|\ldots|C_{n}\right)+f\left(C_{1}|C_{2}|\ldots|C_{j}'|\ldots|C_{n}\right)$

loi colonne est me combination linéaire Exemple: le produét misteest l'inécère par roparà chacun de ses recteurs $[\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$ l'inéquité jur rajort à la 2 re variable Exemple: Soit (: M3(IR) - s IR Cinétine jar reporta chaque des colonnes. Calculons car $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ arbitaire

+ 2 ((2 1 -5) t ...

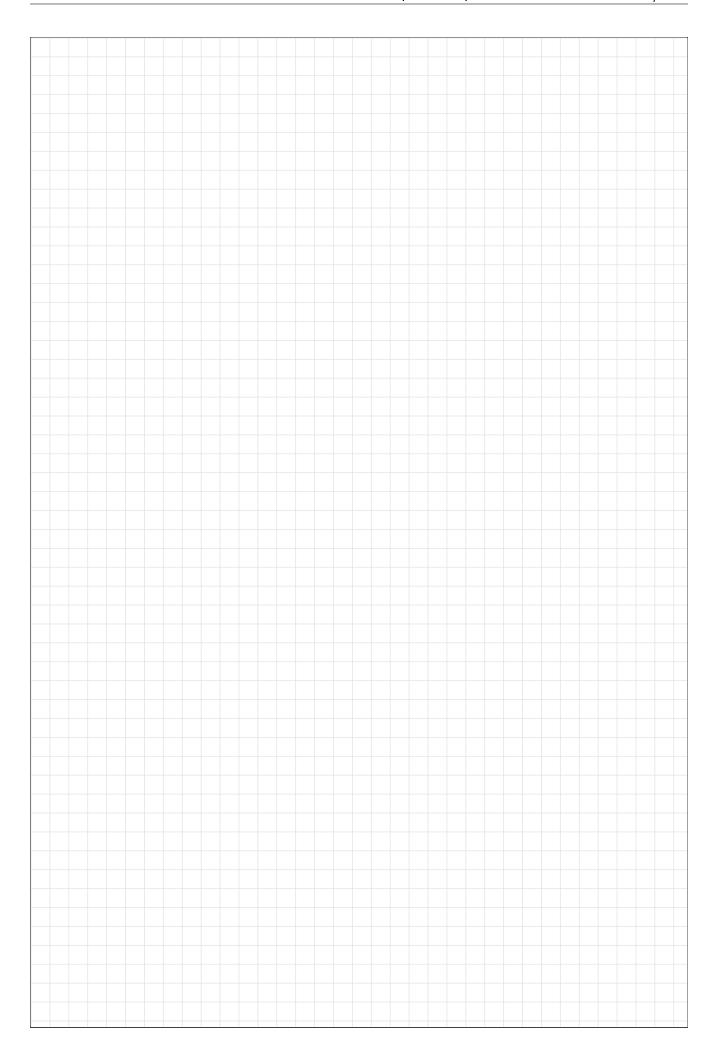


1.2 Antisymétrie par rapport aux colonnes

Définition 1.2. Soit $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable si pour toute matrice $M = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ et pour tous indices i, j

$$f\left(C_{1}|C_{2}|\ldots|C_{i}|\ldots|C_{j}|\ldots|C_{n}\right) = -f\left(C_{1}|C_{2}|\ldots|C_{j}|\ldots|C_{i}|\ldots|C_{n}\right)$$

la faction Per autisymétrique quand elle change de rique à chaque échange de colonne Préportion: Si fort outrymétique par réport out Colomes de sa variable, alors f s'amule quand su varoable a donc colomes égales A= { (C1 -- | Ci-1 | Ci | Ci+1 -- Ci | Ci | Ci+1 -- | Cu)



PTSI 2

1.3 Théorème d'existence et d'unicité

matrice cause nombre

Théorème 1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- 1. f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de la matrice,
- 2. f est antisymétrique par rapport aux colonnes de la matrice,
- 3. $f(I_n) = 1$.

Cette application s'appelle déterminant et on la note det(M) pour une matrice carrée M.

notations 1.3. Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$, on note $\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Démenstration: Jour n = 3 Avalyse: on mojore qu'il criste une efficution f qui vérific les conditions. $7: \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ d & c & g \end{pmatrix} \in 1_3 (1R)$ for = for b c for a for a la reve colonne = ab { (1 5 + ac } (0 6 6) + aj \$ (0 0 a) + db | 6 9 8 Mar autinymétrie, 3 termes s'annulent il en reste 6 f(n) = aec (100) + aeg (30) + ael (+ agc. 0 + aggg(100) + agl. 0 + dblg(016) = 1let aulingmétrie dreste 6 termes

et g(100) = g(13) = 1 g(100) = g(100) = -1 g(100) = -1

1.4 Dimension 2 et 3



Proposition 1.2. Pour
$$M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$
, on a



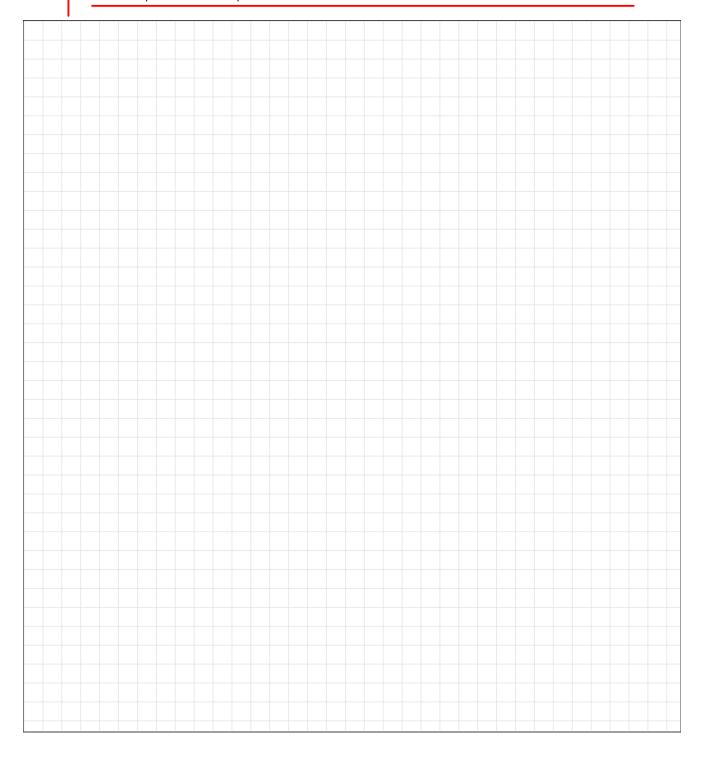
$$\det M = \left| \begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{array} \right| = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

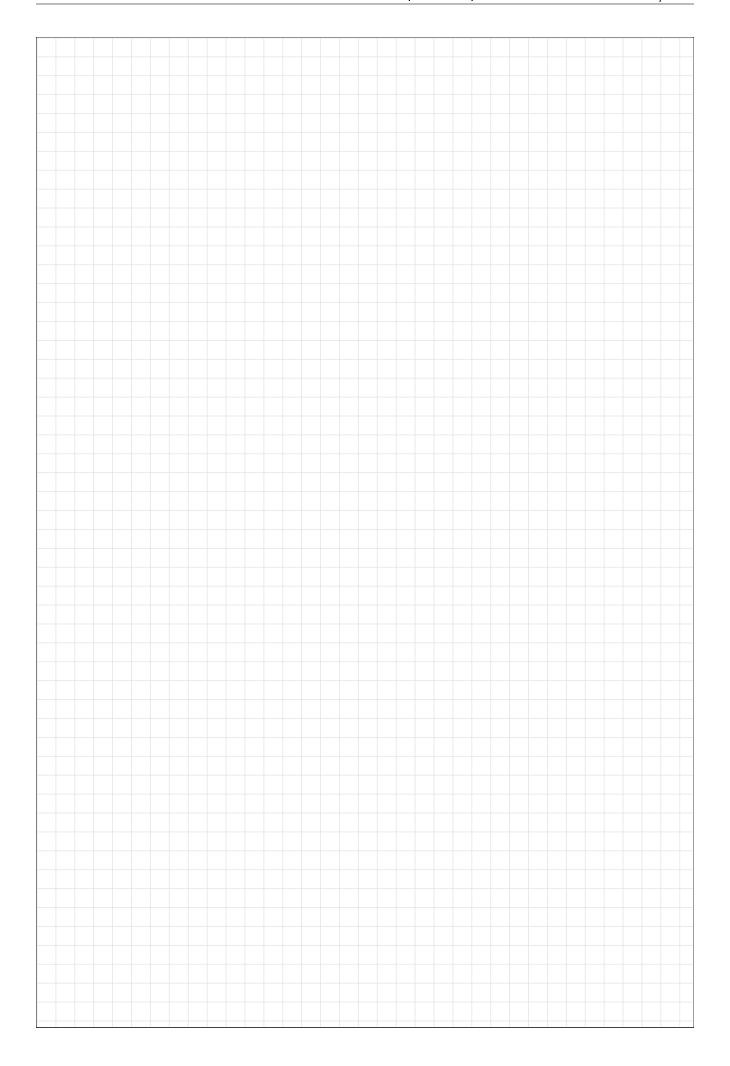


Proposition 1.3. Pour
$$M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$$
, on a



$$\det(M) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_1 w_2 v_3 - v_1 u_2 w_3 - w_1 v_2 u_3.$$





1.5 Propriétés du déterminant



Proposition 1.4. Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

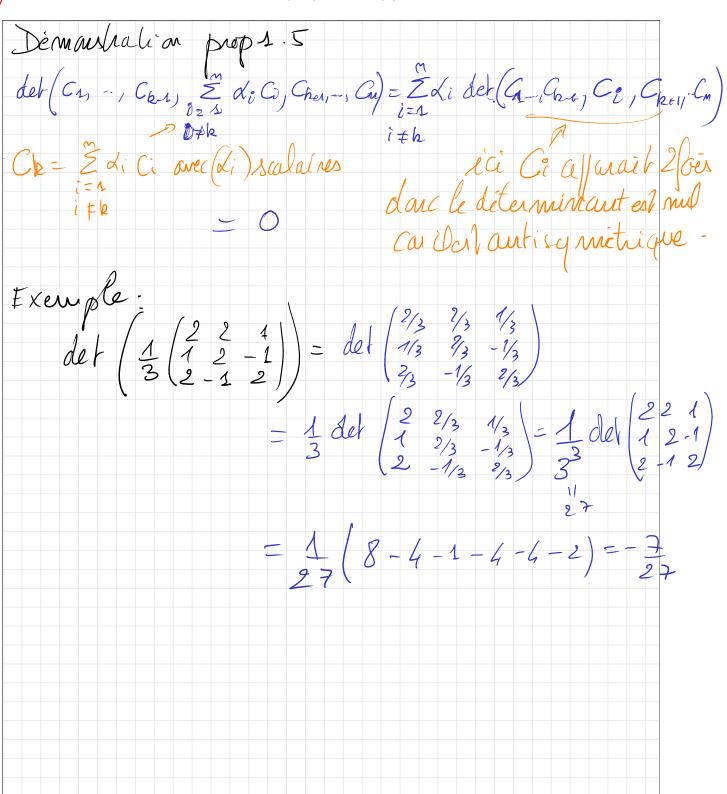
$$\det\left(C_1|C_2|\dots|C_{i-1}|C|C_{i+1}|\dots|C_{j-1}|C|C_{j+1}|\dots|C_n\right) = 0$$

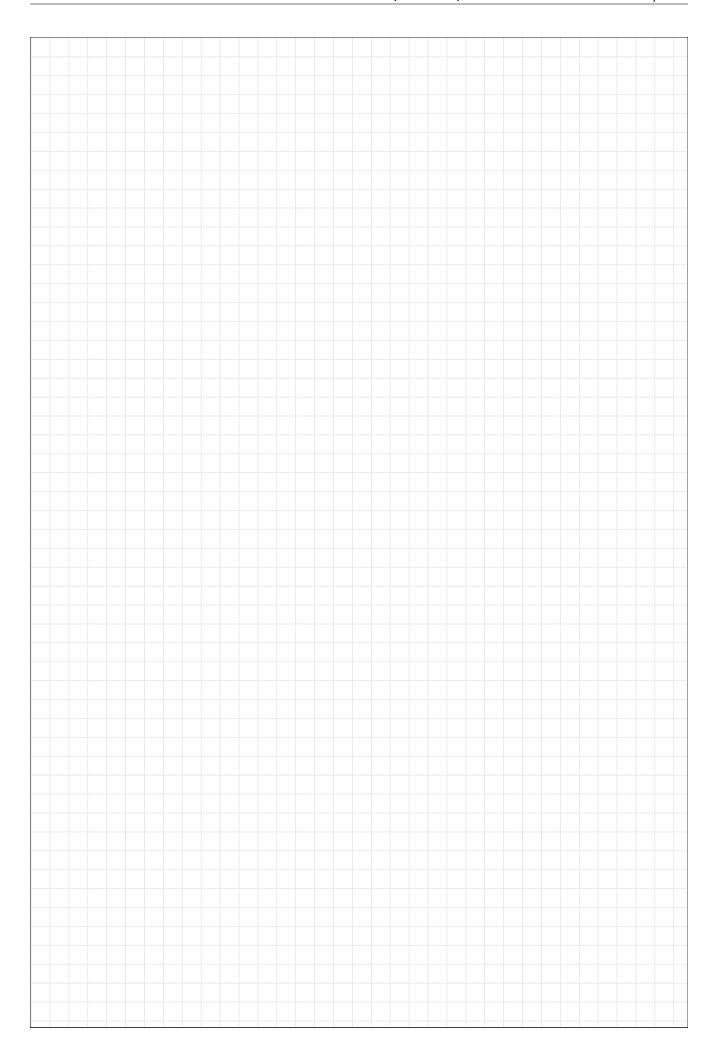
Proposition 1.5.



Si une des colonnes d'une matrice est combinaison linéaire des autres alors son déterminant est nul.

Proposition 1.6. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$





2 Déterminant et opérations élémentaires

2.1 Opérations élémentaires sur les colonnes



Proposition 2.1. L'opération élémentaire sur les matrices $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, ne change pas la valeur du déterminant.

Proposition 2.2. L'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant.

Proposition 2.3. L'opération $C_i \leftarrow \mu C_i$, $\mu \in \mathbb{K}$ multiplie le déterminant par μ .

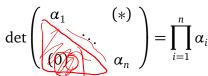
Proposition 2.4. Soit M une matrice carrée et E_1 une matrice d'opération élémentaire.



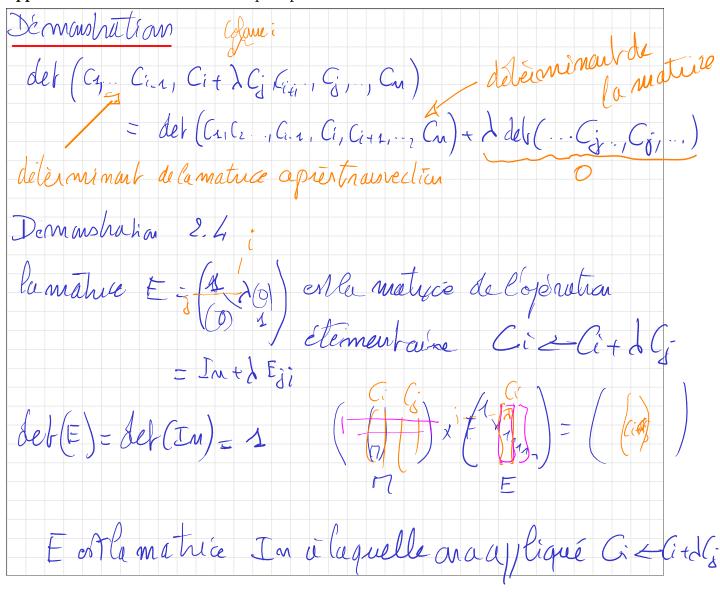
On a $\det(\underline{M}.\underline{E_1}) = \det(M)\det(E_1)$.

Si E est une matrice produit de matrices d'opérations élémentaires, alors $\det(M.E) = \det(M)\det(E)$.

Proposition 2.5. Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure ou supérieure est le produit de ses coefficients diagonaux.



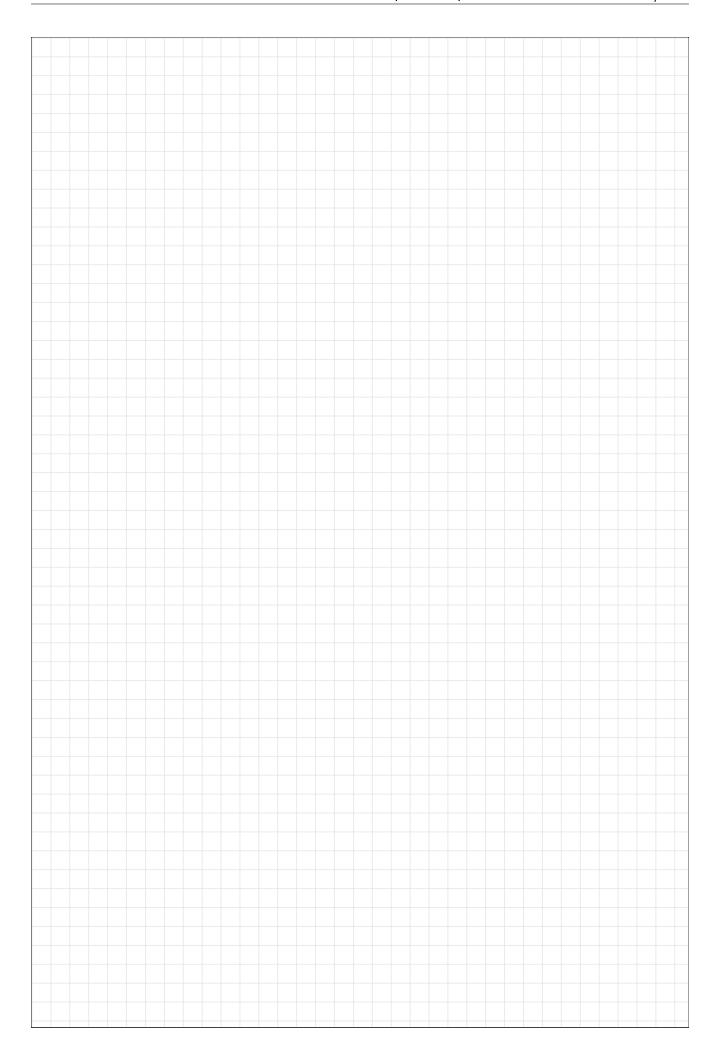
Application : Calcul du déterminant par opérations sur les colonnes.



2.2 Matrices inversibles et déterminant

Théorème 2.6. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

une matrice canied est imus ble seis par opénetians elémentaires sur les colonner, on peut transformer A en l'identité. Es d'enste une matrice E produit
de motion d'oférations el comentaires telle que At-In
= Oet (AE) = det (In) = det(A) , det(E) = 1
= det (A) = det (A) * det(E) = 1 Si A m ort jas invernible, alus on feut obtenir
A E = 1/2 1/2 = Jr (9cznang (A)) Native chelonie reducte for colonner on a det (In) = D car Je est niongulies inférious et det (A)-det (E) = D = p det (A) = 0
on a det/In) - o car Ja entringuardire inférieure
et det (A)-det (E) = 0 = s det (A)=0
Exemple
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ cst-elle inventible }?$
on calcule det (A)=
A = 1 000 = 200 = 1 x (-4) 1 = -4 = 0
C2 = C2 2 Ca necharger par le determinant donc A
estimueusible



2.3 Développement selon une ligne ou une colonne

Proposition 2.7. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A = \{a_{ij}\}_{(i,j) \in [1,n]^2}$.

On note Δ_{ij} le déterminant extrait de A en supprimant la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne. On peut calculer $\det A$ en développant par rapport à n'importe quelle ligne p:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj}^{p} (-1)^{p+j} \Delta_{pj}^{p} \text{ pour tout } p \in [[1, n]],$$

ou en développant par rapport à n'importe quelle colonne q :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{iq} (-1)^{i+q} \Delta_{iq} \text{ pour tout } q \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

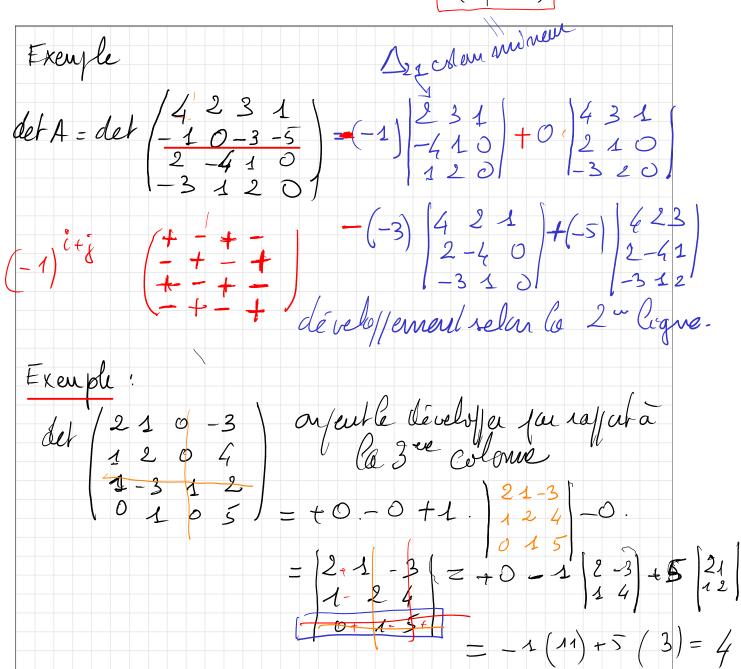
Lemme 2.8. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det B$$

mineur =

hilèrminaul

he raille m-1



3 Déterminant d'un produit de matrices

3.1 Déterminant d'un produit

Théorème 3.1. Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

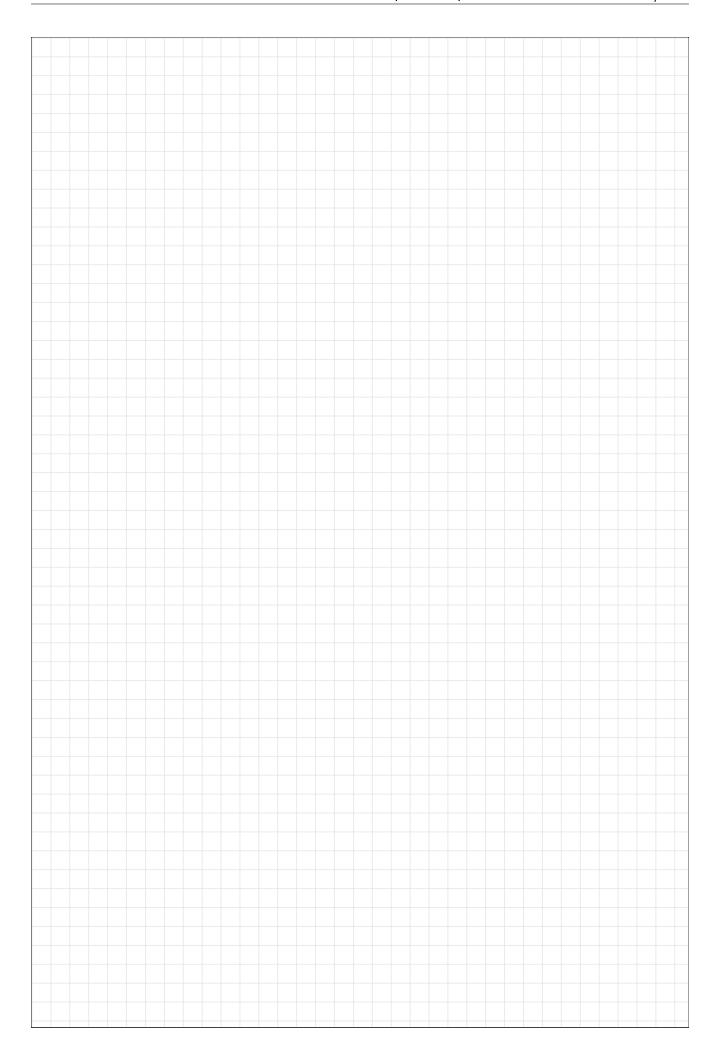
$$\det(AB) = \det A. \det B.$$

Excuple:
$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} -6 & 15 \\ -14 & 25 \end{pmatrix}\right) = 20 + 210$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\right) = 5 \times 18 = 30$$
graye bricke

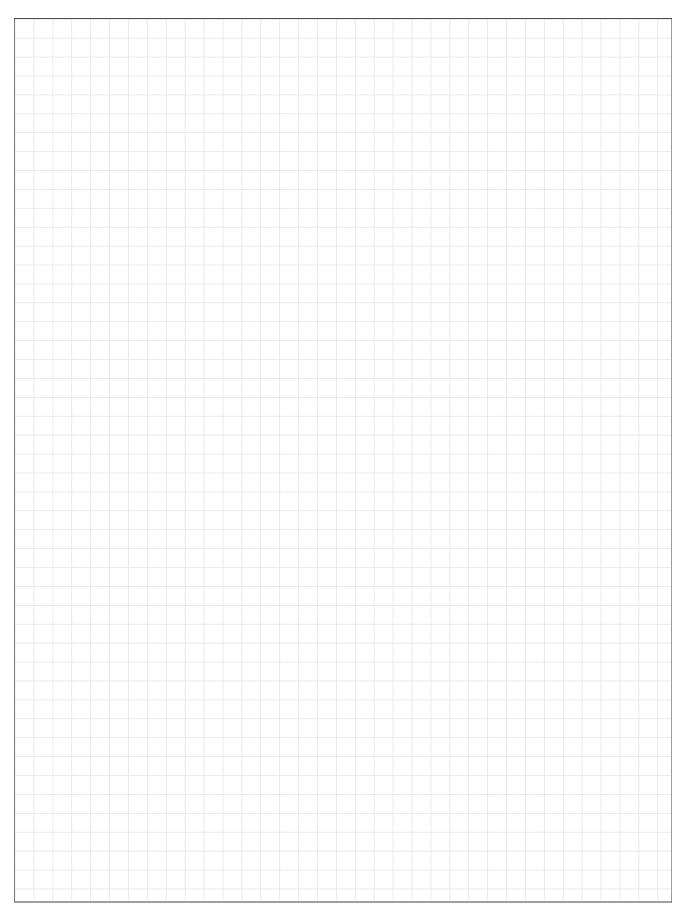
Exemple: Pour A-Brack), PEGIn(||k|) instructs
$$\det\left(\begin{pmatrix} P^{-1}A & P \end{pmatrix}\right) = \det\left(A \end{pmatrix} \longrightarrow \text{a provere}, \text{ de rank to the problem}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} P^{-1}A & P \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} P^{1}A & P \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} P^{-1}A & P \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} P^{-1}A$$



3.2 Déterminant de l'inverse

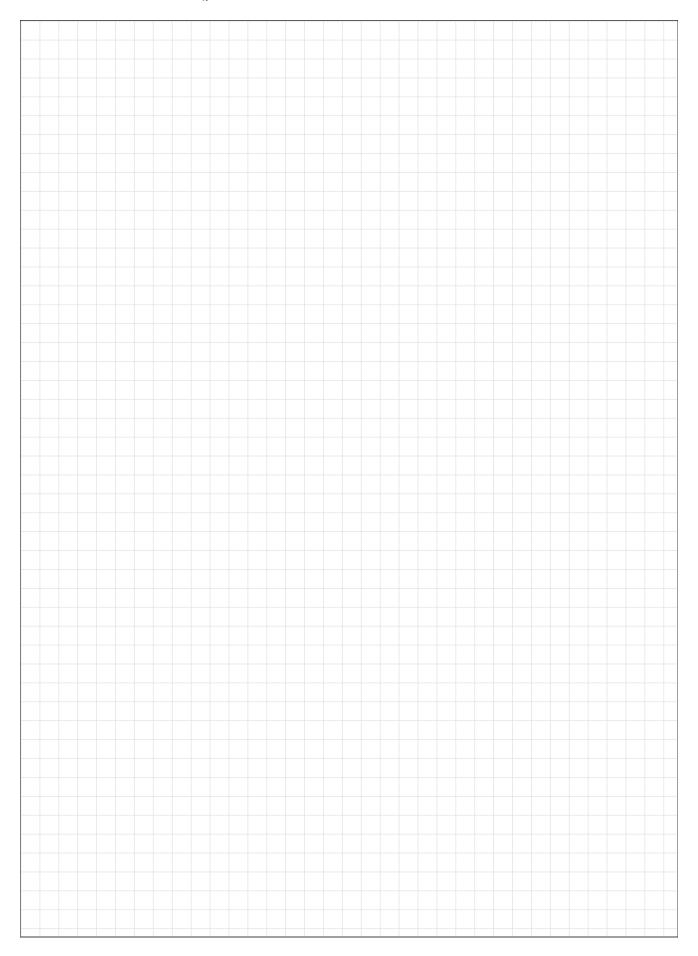
Théorème 3.2. Une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et dans ce cas, on a $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

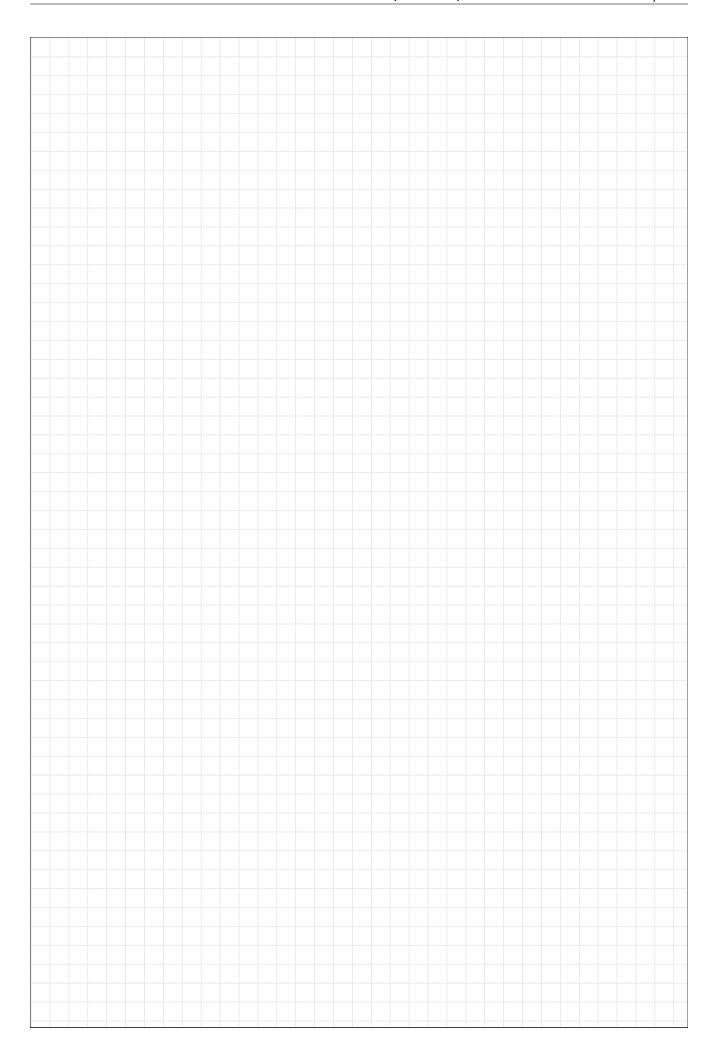


evenjo	-3 le	de f (?	1 - 1 4	+	det (-	3(2-14)
det =	A: d	$ \begin{array}{c c} & \underline{1} \\ & \underline{2} \\ & \underline{1} \\ & \underline{1} \\ & \underline{2} \\ & 2$	3 2	4\ e 0\ 5 -3	n dereloff a le 1 -1 4 2 10 +	aut pu raffat 2 2 colome - (-3) 2 1 0
	(-3)	(O) lye 2 meme 12 ×	t (-3) Lance Cique -4	15 x	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $3 = -1$	48-45 = -93

3.3 Déterminant de la transposée

Théorème 3.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det A^T = \det A$.





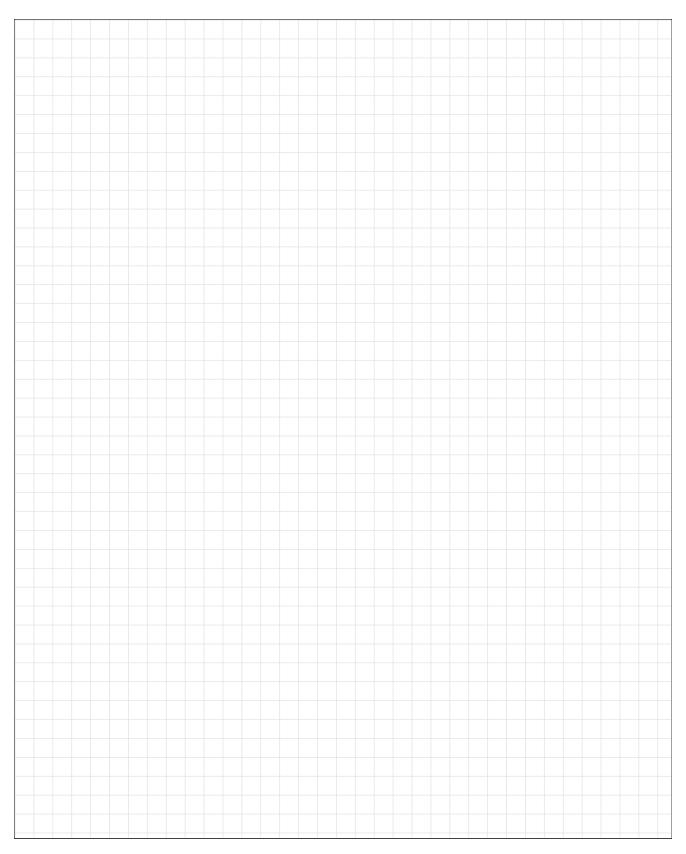
3.4 Déterminant d'une famille de vecteurs

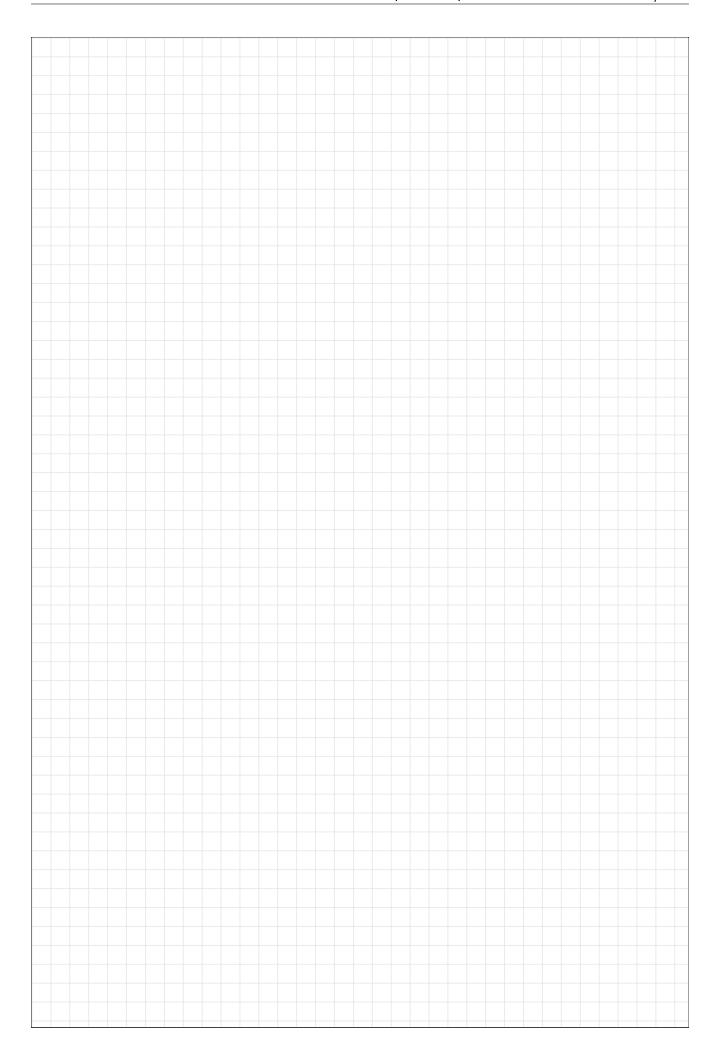
Définition 3.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et \mathcal{B} une base E. Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une famille de E.

On appelle déterminant de (x_1, x_2, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} le scalaire :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det A$$
 où $A = M_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Proposition 3.4. On $a \det_B(B) = 1$.

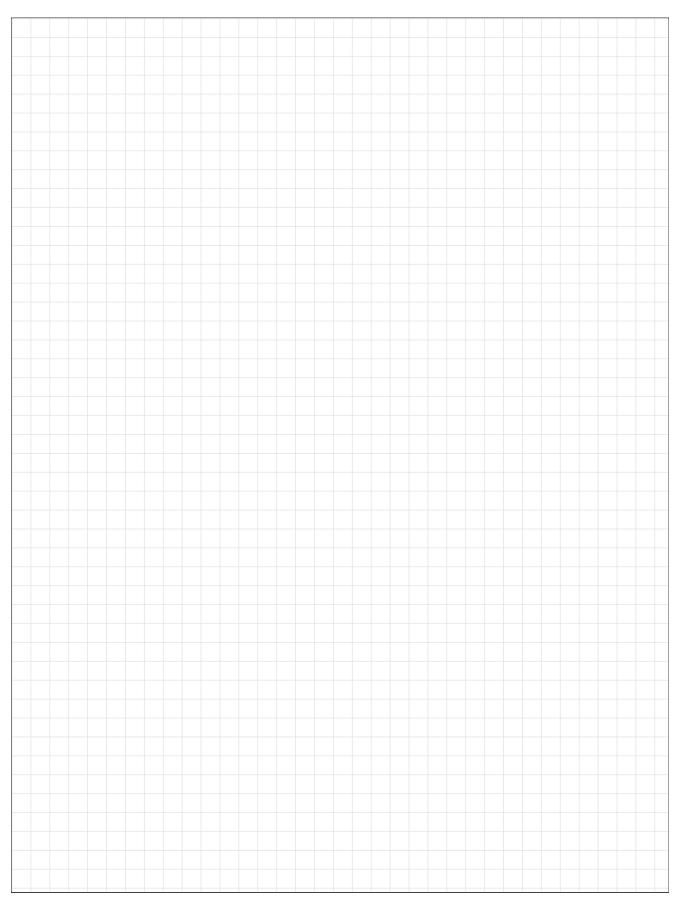


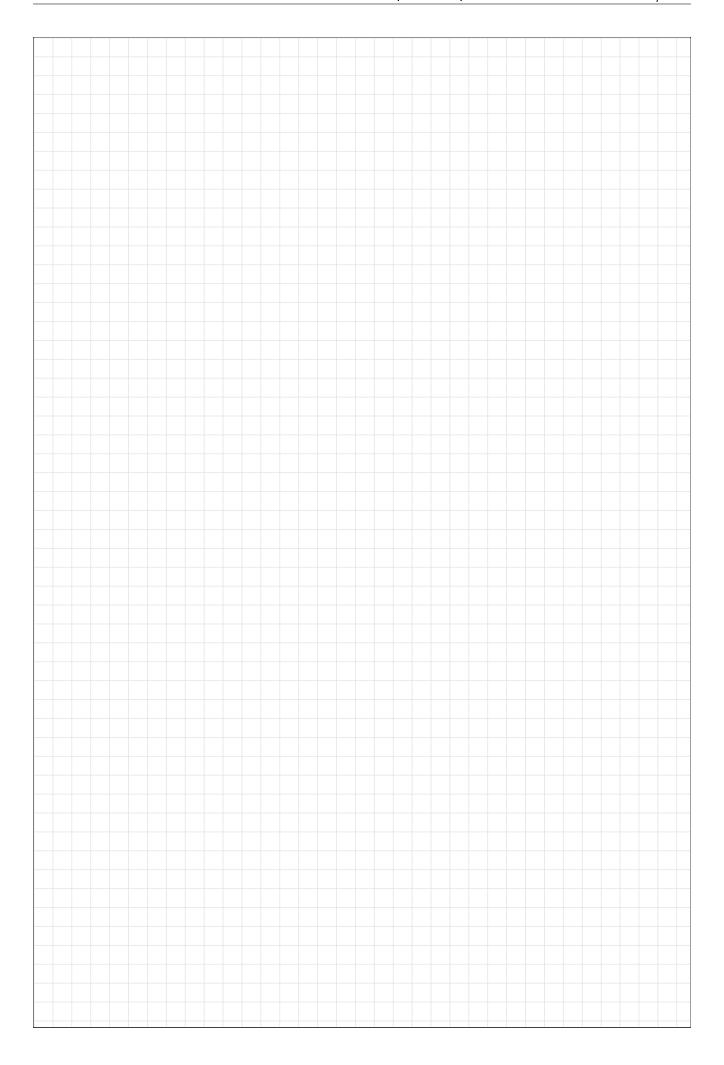


3.5 Caractérisation des bases

Théorème 3.5. Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n muni d'une base \mathcal{B} .

 (u_1,u_2,\ldots,u_n) est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,\ldots,u_n)\neq 0$.





4 Déterminant d'un endomorphisme

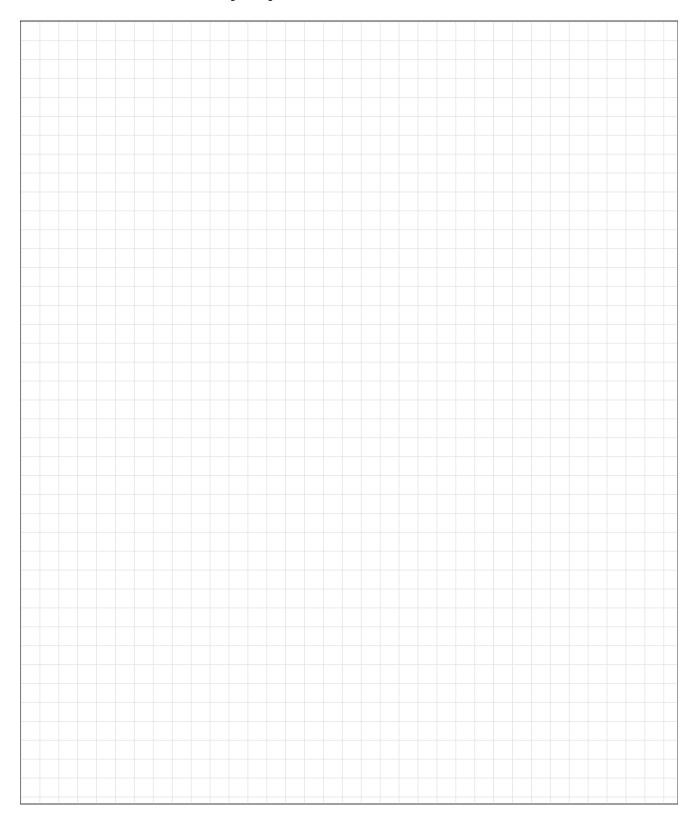
4.1 Définition

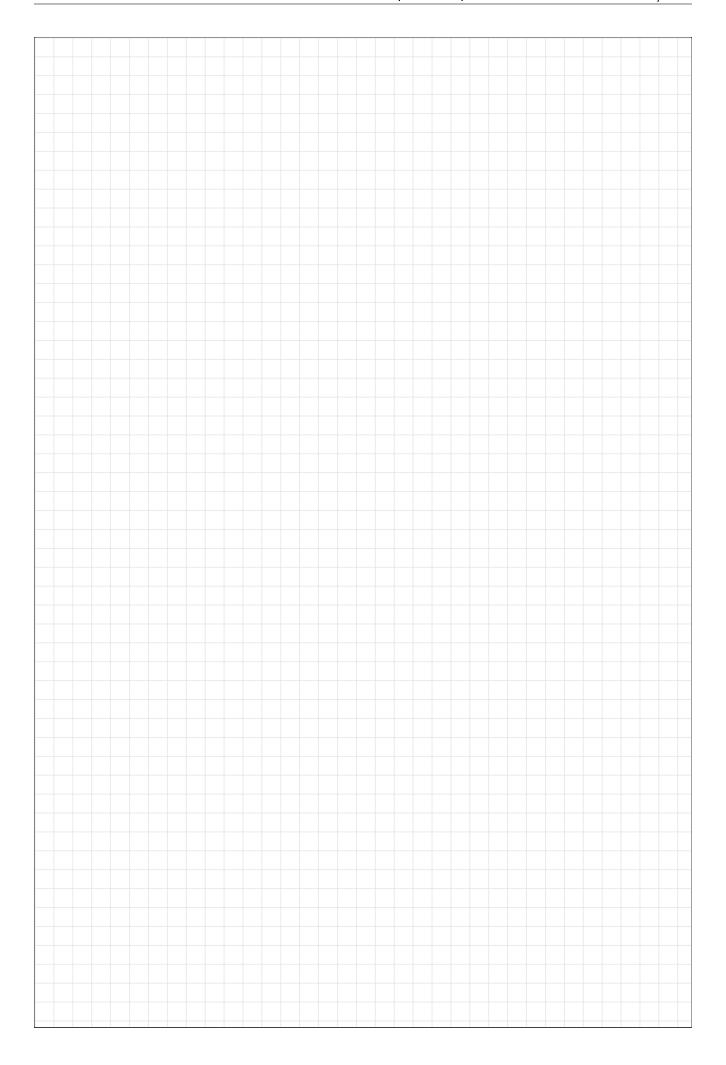
Définition 4.1.

On appelle déterminant d'un endomorphisme f de E le déterminant de la matrice de f dans une base B de E :

$$\det f = \det(M_B(f)).$$

La valeur du déterminant ne dépend pas de la base choisie.





4.2 Propriétés

Proposition 4.1. *Pour tout* $f, g \in \mathcal{L}(E)$ *avec* dim E = n, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$, det $(f \circ g) = \det f$. det g det $(\alpha f) = \alpha^n \det f$

Corollaire 4.2. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *avec* E *de dimension finie.*

$$f$$
 est bijective si et seulement si det $f \neq 0$. Alors det $f^{-1} = \frac{1}{\det f}$.

Théorème 4.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n finie. Soit B une base de E et x_1, x_2, \ldots, x_n une famille de vecteurs de E. On a

$$\det_B(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = \det f \times \det_B(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

