

Chapitre 20 - Espaces probabilisés finis

en PTSI

1 Univers d'une expérience aléatoire

1.1 Notion d'expérience aléatoire

On considère des expériences dont chacune peut avoir plusieurs résultats (ou issues) possibles qui dépendent du hasard.

Exemple :

- lancer d'un D6 (un dé à six faces)

résultats possibles 1, 2, 3, 4, 5, 6

L'univers correspondant est l'ensemble des résultats possibles

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- lancer deux dés à 6 faces

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$$

on peut aussi utiliser 36 résultats

$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots, 12\}$ si on s'intéresse
uniquement à la somme des 2 dés
(celui qui n'a pas des résultats équivalents)

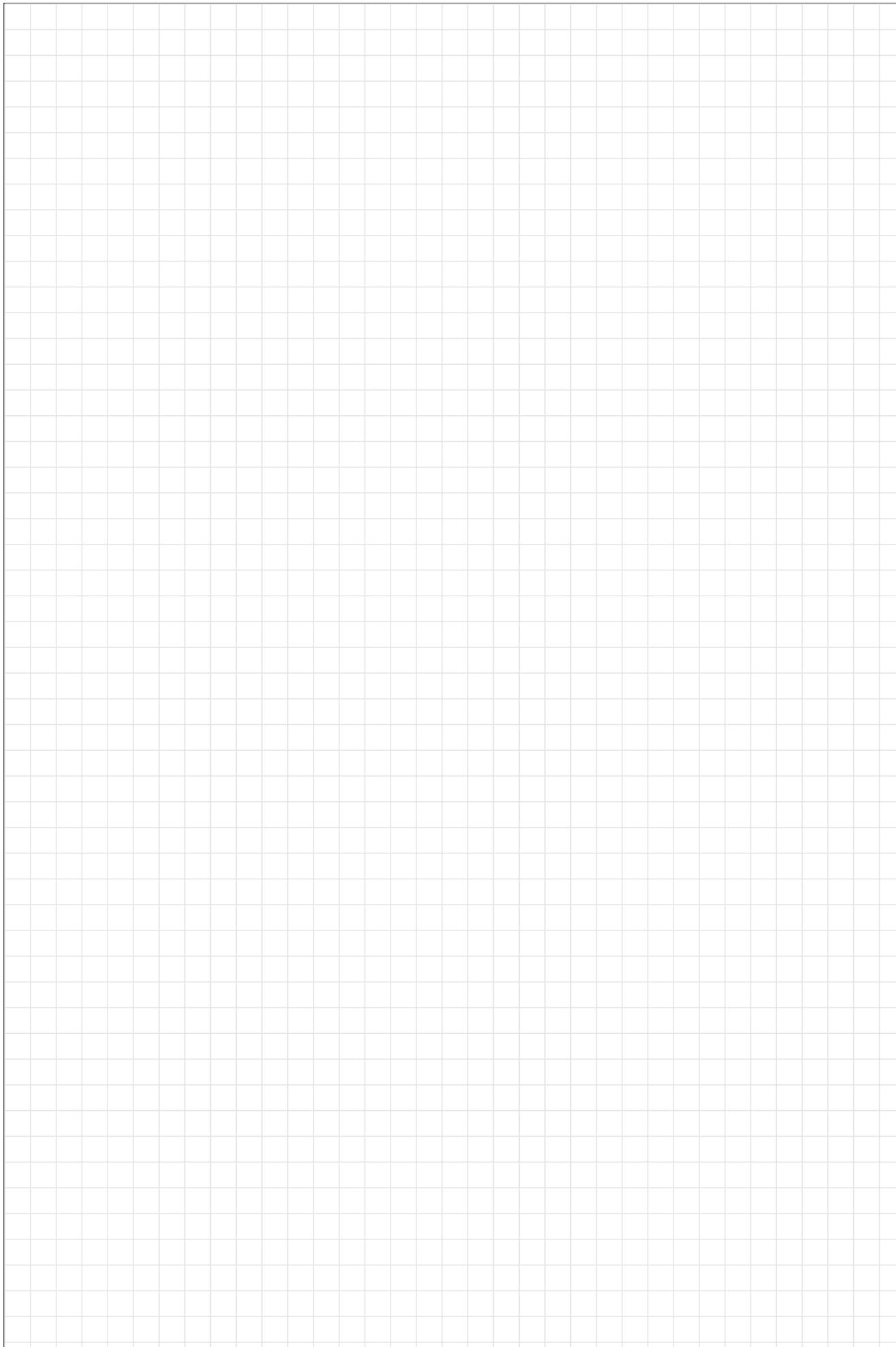
- tirage de boules dans une cuve contenant plusieurs
des boules de plusieurs couleurs

- tirage de numéros dans une urne

- sondage

- jouer à pile ou face : on lance la fois une pièce
on peut utiliser $\Omega = \{\text{PPP}, \text{PPPF}, \text{PPFP}, \text{PFFP}, \dots\}$

(on n'a pas compté de l'ordre : 2^4 résultats possibles)



1.2 Événements liés à une expérience aléatoire

Un événement lié à une expérience aléatoire est une condition sur le résultat de l'expérience qui est ou qui n'est pas réalisée et que l'on ne peut pas vérifier avant d'avoir réalisé l'expérience.

Exemple 1.1. Exemples d'événement :

« l'un des numéros obtenus est pair », « on a tiré plus de boules rouges que de vertes », « plus de 13 personnes sont entrées en 1 heure », « la pièce est conforme », « l'un des dés donne un 5 » ...

- on lance 2 dés à 6 faces.

$A = \text{"les 2 chiffres obtenus sont pairs"}$

Événement

$$= \{(2,2)(2,4)(2,6)(4,2)(4,4)(4,6)(6,2)(6,4)(6,6)\}$$

ensemble élémentaire

Univers

c'est un événement aléatoire = c'est une partie de Ω

$$\text{on a } |A| = 9 \text{ et } |\Omega| = 36$$

cardinal de $A = \text{nb d'éléments dans } A$

$B = \text{"le premier chiffre est strictement supérieur au deuxième"}$

$$B = \{(2,1)(3,2)(3,1)(4,3)(4,2)(4,1), \dots\}$$

$$|B| = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$B = \{(i,j) \in \mathbb{I}[1,6]^2 \mid i > j\}$$

- 3 personnes qui posent leurs 3 chapeaux les mélangent et les repartent au hasard.

$E = \text{"aucune des trois personnes ne retrouve son chapeau"}$

on peut utiliser

$$\Omega = \{(1,2,3), (1,3,2), (3,1,2), \dots, (3,2,1)\}$$

tutte monde échange de chapeau entre les personnes 2 et 3 de son chapeau

$$= \{(a,b,c) \mid \text{avec } a,b,c \text{ distincts parmi } \{1,2,3\}\}$$

$$\text{d'où } |\Omega| = 3! = 6$$

$$\text{et } E = \{(2,3,1), (3,1,2)\}$$

$F = \{(\text{tous les marques retournent leur chapeau})\}$

$$= \{(1, 2, 3)\} \quad |F| = 1$$

1.3 Univers

On admet que pour chaque expérience aléatoire, il existe un ensemble, noté Ω , appelé univers, dont les éléments représentent les différentes issues (résultats) possibles de l'expérience.

On note souvent $\omega \in \Omega$ une issue de l'expérience. (ω est un élément de Ω)

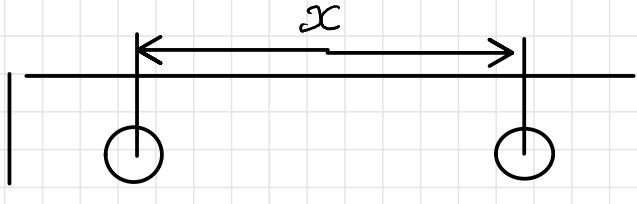
Un événement lié à une expérience aléatoire est représenté par une partie A de l'univers Ω de cette expérience : $A \subset \Omega$. Un événement représente donc un ensemble de résultats possibles.

Parmi toutes les issues possibles, celles pour lesquelles l'événement A est réalisé sont représentées par $\omega \in A$.

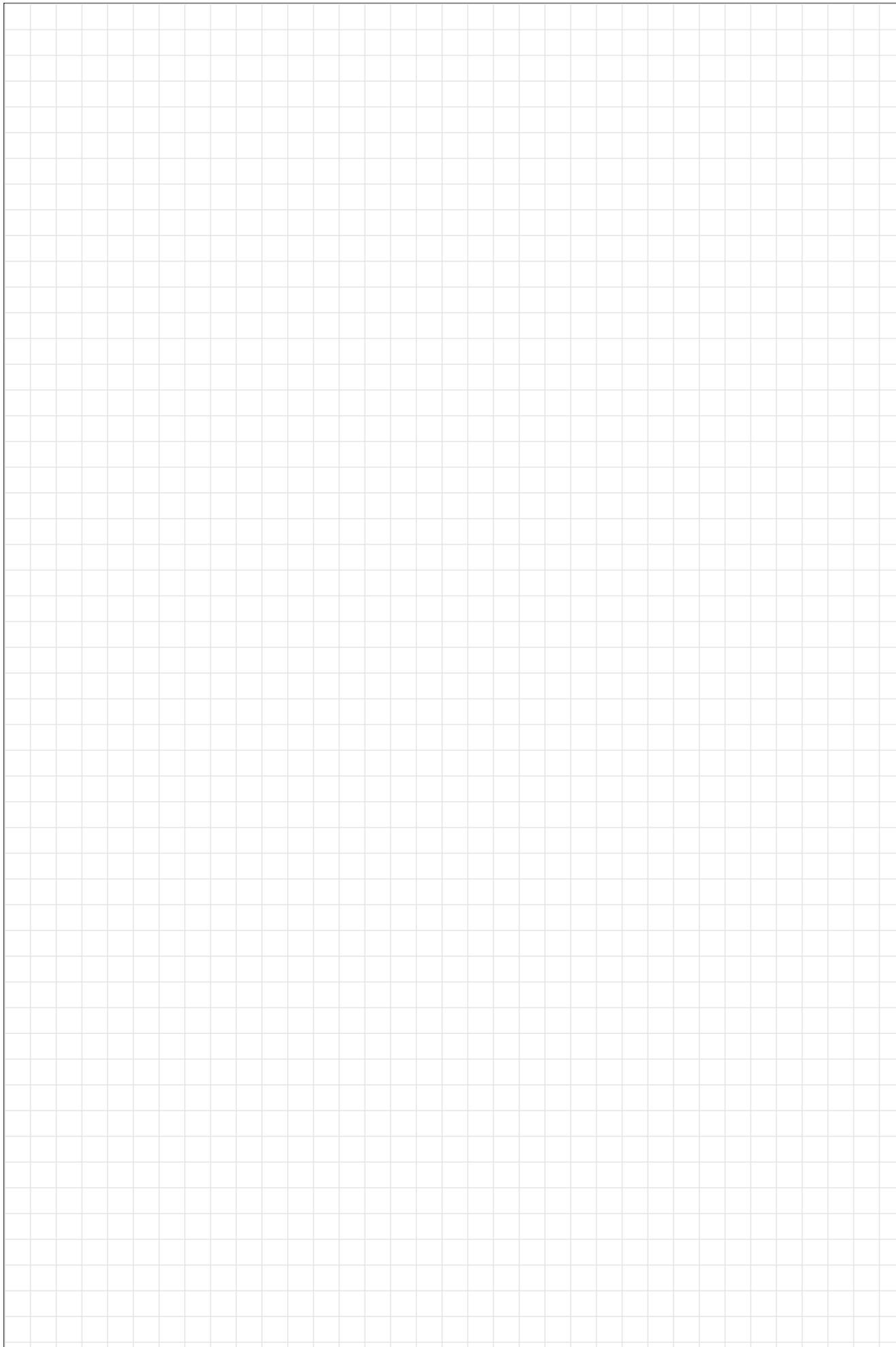
En PTSI, Ω est un ensemble fini et l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$.

Vous avez le choix de l'univers !
 on m'aide de choisir l'univers où il y a équiprobabilité
 si possible

Exemple



les valeurs possibles
 pour x sont en
 nombre infini



1.4 Langage des événements

un seul résultat
||
 $\omega \in \Omega$

Définition 1.1. Un événement A est une partie de Ω : $A \subset \Omega$.

Un événement élémentaire est un événement qui peut être représenté par un singleton $\{\omega\}$. $\omega \in \Omega$

Définition 1.2. À chaque événement A correspond son contraire « non A » que l'on note \bar{A}

A et \bar{A} sont complémentaires dans l'univers Ω

L'événement certain est représenté par Ω et son contraire est l'événement impossible qui est représenté par \emptyset .

Définition 1.3. L'événement « A et B » est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés au cours de la même expérience aléatoire. L'événement « A et B » est représenté par $A \cap B$.

Définition 1.4. Deux événements A et B sont dits incompatibles si et seulement si A et B sont disjoints, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$. $A = \text{"boule jaune"}$ $B = \text{"boule bleue"}$

Définition 1.5. L'événement « A ou B » est réalisé si et seulement si au moins l'un des 2 événements A ou B est réalisé au cours de la même expérience aléatoire. L'événement « A ou B » est représenté par $A \cup B$.

Définition 1.6. La condition « l'événement A implique l'événement B » est représenté par $A \subset B$.

Définition 1.7. On appelle système complet d'événements une famille $(B_i)_{i \in I}$ d'événements de Ω vérifiant :

$$\forall i \in I, \quad B_i \neq \emptyset \text{ et } \forall (i, j) \in I^2 \text{ tels que } i \neq j, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$$

mon ! incompatible cf exhaustive

on Claude 2D6

$A = \text{"les 2 résultats sont pairs"}$

$B = \text{"le premier est strictement supérieur au deuxième"}$

$$A \cap B = \{(6, 2), (6, 4), (4, 2)\} = \text{"A et B"}$$

$|A \cap B| = 3$

$$A \cup B = \text{"A ou B"} = \overbrace{\{(2, 2), (2, 4), \dots\}}^A \cup \overbrace{\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}}^B$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \text{formule duable}$$

$$= 9 + 15 - 3 = 21$$

Exemple: On tire 3 cartes d'un jeu de 52 cartes

$E =$ "on tire au moins un as"

Donc $\bar{E} =$ "on tire aucun as"

ou encore en notant $E_i =$ "on tire i as" $i=0, 1, 2, 3, 4$

$$\rightarrow \bar{E} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

$$E_4 = \emptyset (!)$$

ici les E_1, E_2, E_3 sont incompatibles

ou encore en notant

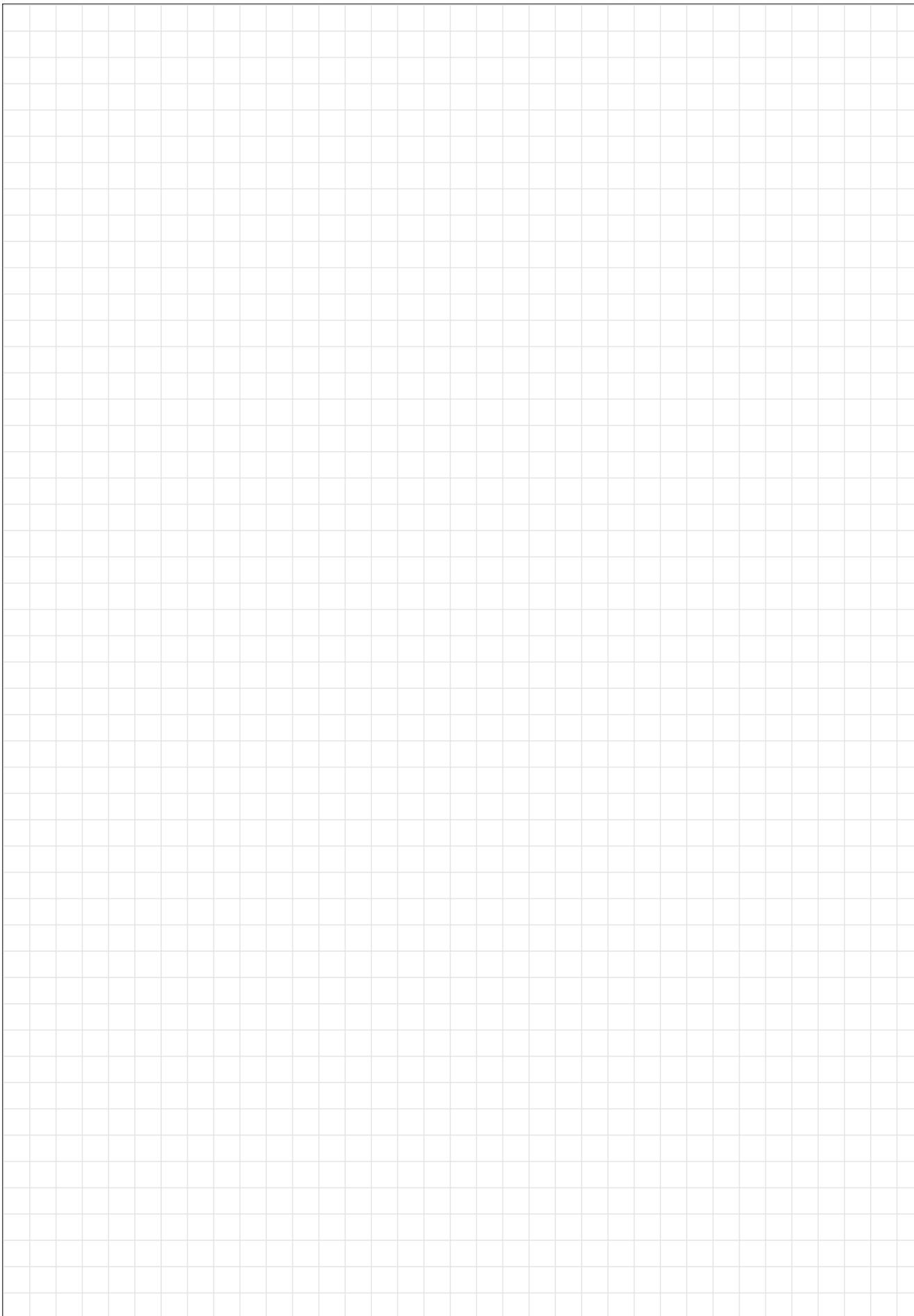
E_+, E_c, E_k, E_p les événements "on a tiré l'as de" trefle, carreau, coeur ou pique .

$$\rightarrow \bar{E} = E_+ \cup E_c \cup E_k \cup E_p$$

ici E_+, E_c, \dots

sont équivalables

2 Espace probabilisé fini



2.1 Probabilité

Définition 2.1. Une probabilité sur un univers fini Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie :

$$\begin{cases} P(\Omega) = 1 \\ \text{pour tous événements } A \text{ et } B \text{ tels que } A \cap B = \emptyset, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$$

σ -additivité

Un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω s'appelle un espace probabilisé fini.

Note : $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω
 comme Ω est fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements

Exemple, on lance 1 D6 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 et $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $P(\{\text{lancer}\}) = \frac{1}{6}$
 on dit que P est "l'équiprobabilité" sur Ω .

Exemple on lance 1 D6 non équilibré avec
 $P(\{6\}) = \frac{1}{5}$ $P(\{k\}) = \frac{1}{25}$ $\frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{25} = 1$
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mais il n'y a pas d'équiprobabilité

Exemple : On met des boules numérotées de 1 à m dans une urne
 On tire k boules simultanément $k \in \{1, m\}$
 Probabilité de $A_i = \{\text{on tire la boule } m^{\circ i}\}$ $i \in \{1, m\}$

On utilise Ω tel que $|\Omega| = \binom{m}{k}$ tirages de k boules parmi m
 sans remise et sans ordre.

Tous les tirages sont équiprobables

Parmi ces tirages, combien comportent la boule $m^{\circ i}$?

on compte les tirages de k boules sans remise contenant
 la boule $m^{\circ i}$ $|A_i| = 1 \times \binom{m-1}{k-1}$

$$P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{\text{nb de tirages favorables}}{\text{nb de tirages total}} = \frac{k}{m}$$

Exemple: Pêche nème, tire k boules successivement et sans remise. $P(A_i)$?

On utilise Ω l'ensemble des tirages de k boules successivement et sans remise et $|\Omega| = \frac{m!}{(m-k)!}$ nb de tirages de k boules sans remise en tenant compte de l'ordre

$A_{i,r} =$ "on a tiré la boule i au r^e tirage"

$P(A_{i,r})$?

$$P(A_{i,r}) = \frac{(m-1) \times (m-2) \times \dots \times (m-(r-1)) \times 1 \times (m-r) \times \dots \times (m-(k-1))}{(m-k)!}$$

1 tirage

r-1 tirages

tirages r-1

r^e tirage

1 ≤ r ≤ k

k-r+1 tirages

$$P(A_{i,r}) = \frac{\cancel{(m-1)!}}{\cancel{(m-k)!}} = \frac{1}{m} = \frac{|A_{i,r}|}{|\Omega|}$$

cancel

cancel

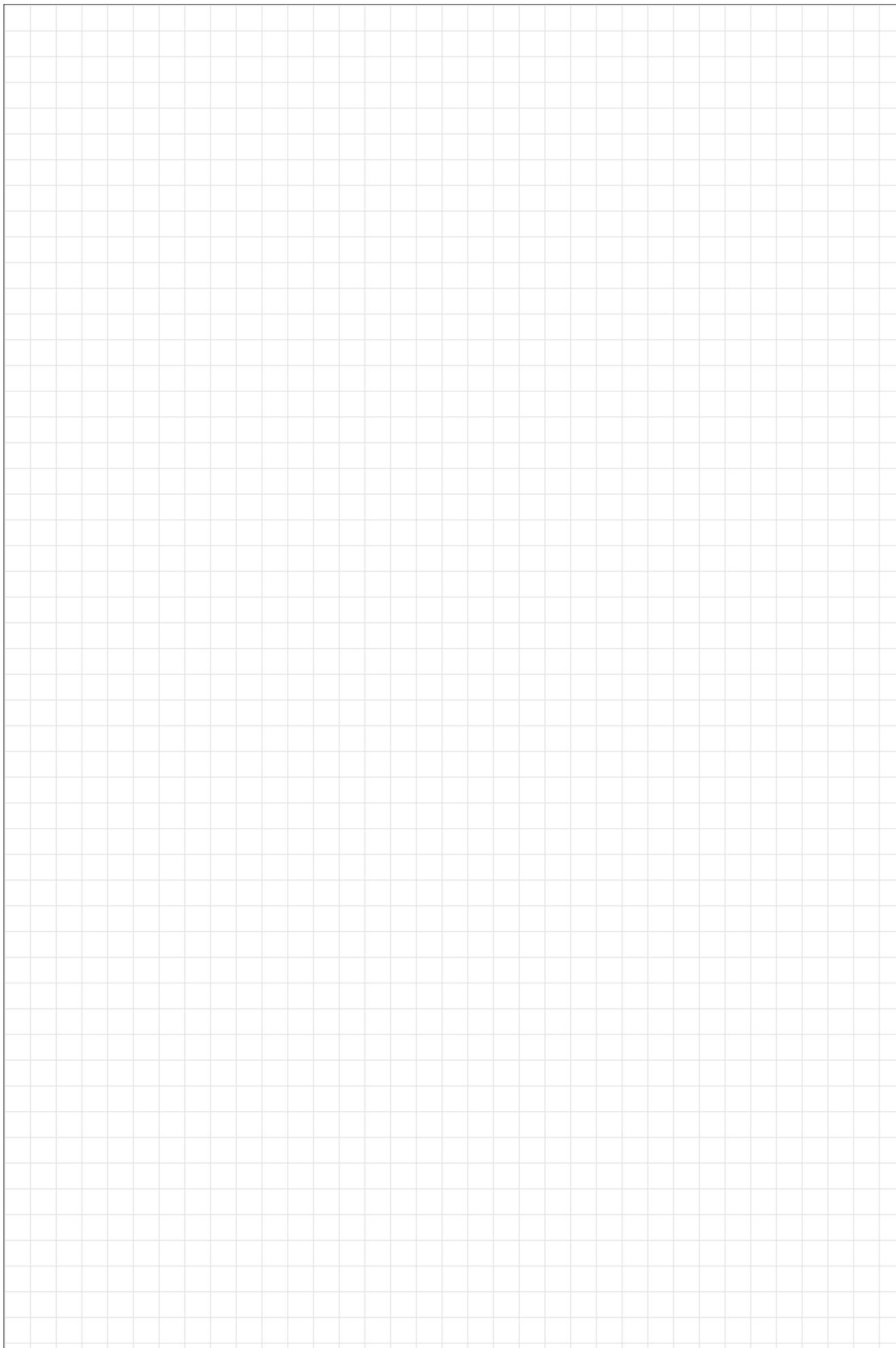
cancel

cancel

$$P(A_i) = P\left(\bigcup_{r=1}^k A_{i,r}\right) = \sum_{r=1}^k \frac{1}{m} = \frac{k}{m} = \sum_{r=1}^m P(A_{i,r})$$

Car les $(A_{i,r})_{r \in \{1, \dots, k\}}$ sont incompatibles.

$$P\left(\bigcup_{r=1}^k A_{i,r}\right) = \sum_{r=1}^k P(A_{i,r})$$



2.2 Propriétés d'une probabilité

Proposition 2.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et soit A et B deux événements. On a

- $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ car A est la réunion disjointe des événements élémentaires $\{\omega\}$ où ω est élément de A .
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, *passage du complémentaire*
- $P(\emptyset) = 0$,
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$, *croissance de la probabilité*
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. *formule du cube*

$A \subset B$: l'événement A implique l'événement B

Démonstration de $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$:

Soit $A \subset \Omega$ un événement. On a $A \cap \bar{A} = \emptyset$ ils sont incompatibles alors par σ -additivité $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ mais $A \cup \bar{A} = \Omega$ par définition du complémentaire et $P(\Omega) = 1$ d'où $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

Exemple : Dans une classe de n personnes, calculer la probabilité de "deux personnes ont la même anniversaire le même jour".

Hypothèses raisonnables : - les années ont 365 jours (faut)
 - les dates de naissance sont équiprobables (faut)
 - les dates de naissance des personnes sont indépendantes

On peut utiliser l'univers $\Omega = \{1, 2, \dots, 365\}^n$ (- ensembles de $\mathbb{N}_{1,365}$)
 on étudie $E =$ "deux personnes ont la même date d'anniversaire"
 (au moins)

On a $|\Omega| = 365^n$ nb de listes de n éléments pris parmi 1 à 365 (avec répétition)

$P(E) = 1 - \frac{(365)!}{(365-n)! (365)^n}$

on n'étudie plutôt $\bar{E} =$ "toutes les personnes ont des dates d'anniversaire différentes" On a $|\bar{E}| = \frac{365!}{(365-n)!} = 365 \times 364 \times \dots \times (365-(n-1))$

nb de listes de n éléments distincts dans $\{1, 2, \dots, 365\}^n$ pour $n \leq 365$

et $|\bar{E}| = 0$ pour $n > 365$ d'où $\boxed{P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{(365)!}{(365-n)!}}$

écrire la fonction en Python (ou calculer)

Proposition 2.2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- Pour A, B, C trois événements, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$, *formule de laire*
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$.
- Si $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{i \in I} P(B_i) = 1$. *cette somme égale 1*

événements deux à deux incompatibles : $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$
avec $i \neq j$

Exemple : 3 personnes qui échangent leurs chapeaux.

$B =$ "personne ne retrouve son chapeau". $P(B) = ?$

$A_i =$ "l'individu n° i retrouve son chapeau" $i = 1, 2, 3$

$\bar{B} =$ "au moins une personne retrouve son chapeau"

on a $\bar{B} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

d'où

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) \\ &\quad - P(A_3 \cap A_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

on utilise l'équiprobabilité des répartitions de chapeau :

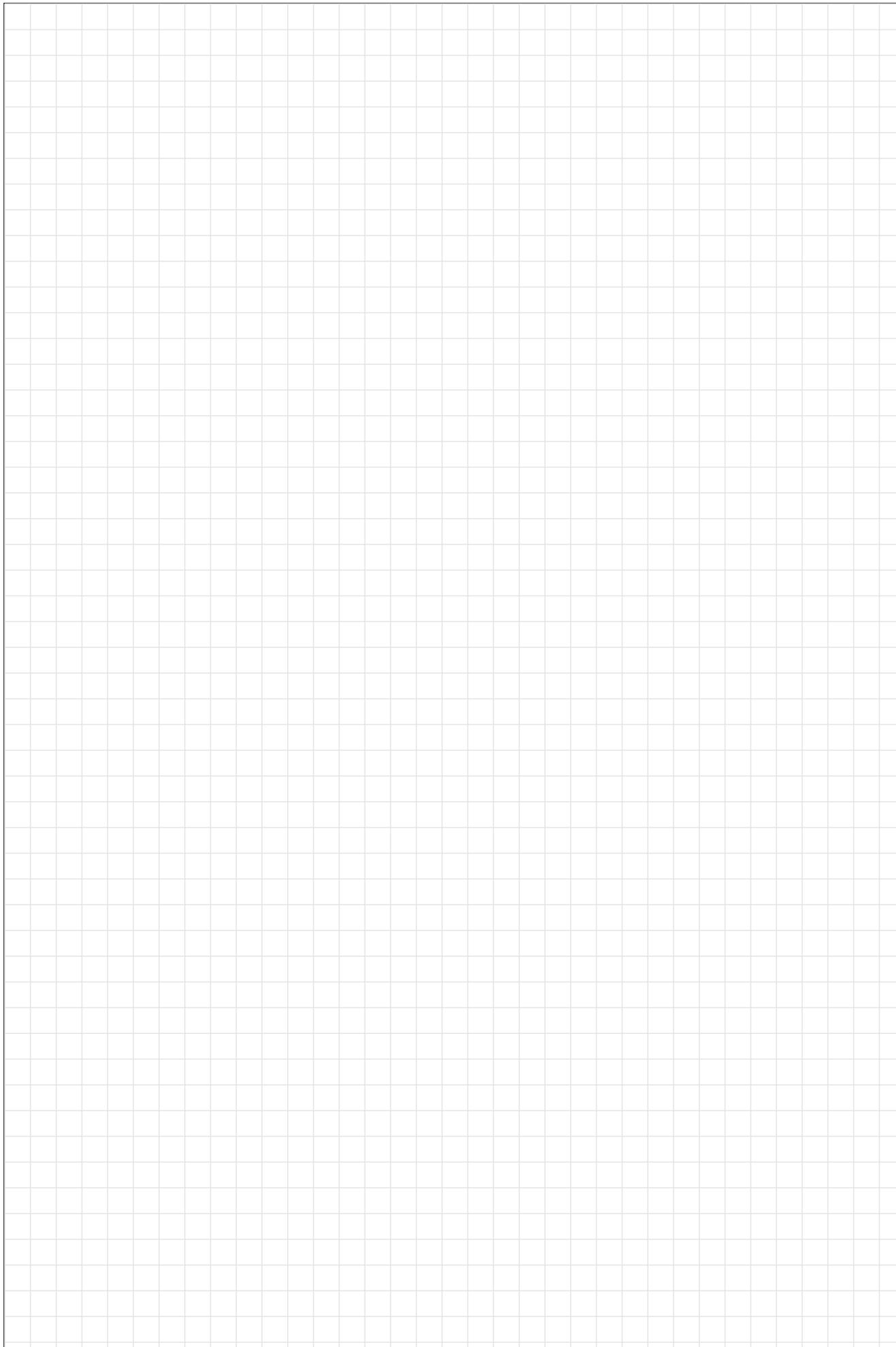
$$P(A_i) = \frac{\text{nb de répartition où } i \text{ retrouve son chapeau}}{\text{nb de répartition total}} = \frac{2!}{3!}$$

pour $i \neq j$ $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{3!}$ Si 2 personnes retrouvent leur chapeau,
la 3^e aussi

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3!} \quad (A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

d'où $P(\bar{B}) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

d'où $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{1}{3}$



2.3 Germes de probabilité

Théorème 2.3. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ et p_1, p_2, \dots, p_n des réels.

Il existe une probabilité P sur Ω telle que $\forall i \in [[1, n]], P(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si $\forall i, p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Dans ce cas, la probabilité P est unique et pour tout événement A , on a $P(A) = \sum_{i \text{ tq } \omega_i \in A} p_i$.

Exemple : On note $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_m\}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $q \in]0, 1[$ et $P_k = q^{k-1}(1-q)$ pour $k \in \{1, \dots, m\}$ et $p_0 = q^m$.
 Alors (p_0, p_1, \dots, p_m) définit une probabilité sur Ω .

On a $\forall k \in \{0, \dots, m\}, p_k > 0$ car $0 < q < 1$ donc $1-q > 0$ et $\sum_{k=0}^m p_k = q^m + \sum_{k=1}^m q^{k-1}(1-q) = q^m + (1-q) \cdot \frac{1-q^m}{1-q} = 1$.
 donc les $(p_k)_{k=0, \dots, m}$ définissent une probabilité sur Ω .
 avec $P(\{\omega_k\}) = p_k$ pour tout k .

À quelle expérience cela correspond-il ?

on tire n fois à pile ou face avec une pièce truquée
 $P("Face") = q \in]0, 1[$

on note
 pour $k \in \{1, \dots, m\}, F_k = "on a tiré le premier Face au k^e tirage"
 $A_0 = "on n'a tiré aucun pile sur les n tirages".$$

$P(A_0) = ?$ On note $F_k = "on a tiré Face au k^e tirage"$
 alors

$$A_0 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_m} = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_m$$

$$P(A_0) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_m) = P(F_1) \times P(F_2) \times \dots \times P(F_m)$$

car les tirages sont indépendants

$$\boxed{P(A_0) = q^m}$$

On a

$$A_k = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k}$$

d'où $P(A_k) = P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot \dots \cdot P(F_{k-1}) \cdot P(\overline{F_k})$ car ces
événements sont indépendants

$$\boxed{P(A_k) = q^{k-1} \cdot (1-q)}$$

2.4 Équiprobabilité

Définition 2.2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. On dit qu'il y a équiprobabilité si les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales : $\forall i \in [[1, n]]$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$

On dit que P est la probabilité uniforme.

Proposition 2.4. Soit (Ω, P) un univers fini. La probabilité uniforme P sur Ω est définie par

pour tout événement A ,
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$$

Remarque 2.1. L'équiprobabilité est souvent une hypothèse que l'on pose pour adapter un modèle probabiliste à une expérience.

exemple : le résultat du lancer d'un dé à 6 faces équilibré

exemple : On lance 2D6, calculer $P(\text{"la somme vaut 6"})$

on utilise $\Omega = \{1, 6\}^2$ avec l'équiprobabilité

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$ soit 36 couples

$A = \text{"la somme vaut 6"} = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$$

Exemple : On lance une pièce équilibrée n fois.

Probabilité d'obtenir k Piles avec $k \in [0, n]$?

On utilise $\Omega = \{P, F\}^n = \{PPP\dots P, PPPP\dots PF, P\dots, FFFF\}$

Un résultat possible est une liste ordonnée de n éléments pris parmi P ou F .

mais $|\Omega| = 2^n$ les 2^n résultats sont également probables
(pièce équilibrée)

A_k : "on a obtenu k Piles" $k \in [0, n]$

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \binom{n}{k}$$

$\underbrace{F, \overline{F}, P, \overline{P}, P, \overline{P}, F, \overline{F}, P, \overline{P}, F, \overline{F}, E}_{n \text{ cases}}$

on reconnaît le binomiale $\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$

Exercice: On lance 5 D6 équilibrés. Probabilités de

A = "avoir 5 nombres différents"

B = "on a au moins un multiple de 3"

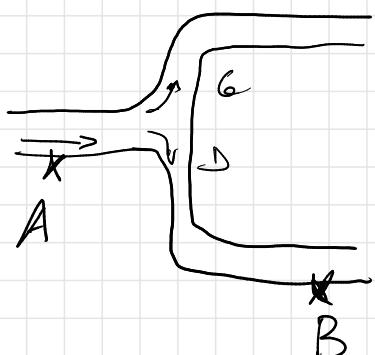
C = "au moins deux faces identiques"

D = "produit des chiffres obtenus est pair"

E = "au moins un multiple de 3 et au moins un nombre pair"

On utilise $\Omega = \{1, 6\}^5$ et l'équiprobabilité

3 Probabilités conditionnelles



voiture \rightarrow droite ou gauche
couleur verte ou rouge
cuit $P(R) \approx \frac{N_R}{N}$

D G
V R

$N_R \leftarrow$ nombre rouge
 $N \leftarrow$ nombre total

$$\text{en } B \quad P_D(R) \approx \frac{N_{B,R}}{N_B}$$

3.1 Définition

M Définition 3.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement tel que $P(B) > 0$. On appelle probabilité de l'événement A sachant B (sachant que l'événement B est réalisé) :

$$\underline{P_B(A)} = \underline{P(A|B)} = \frac{\underline{P(A \cap B)}}{\underline{P(B)}}.$$

Théorème 3.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement avec $P(B) > 0$.

L'application $P_B : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ A & \longmapsto & P(A|B) \end{array}$ est une probabilité sur Ω appelée probabilité conditionnée à l'événement B . (Q, P_B) est un espace probabilisé

Proposition 3.2. Pour A, B, C des événements avec $P(B) > 0$, on a $\underline{P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)}$ et $\underline{P_B(A \cup C) = P_B(A) + P_B(C) - P_B(A \cap C)}$.

La probabilité conditionnée par B est une autre probabilité.

Exemple On lance 1 D6. On note $A = \text{"Nombre } \leq 5"$

$B = \text{"Nombre } \geq 3"$

$$P_A(B) = \frac{3}{5}$$

$$P(A) = \frac{5}{6} \text{ car } |A| = 5$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \text{ car } A \cap B = \{3, 4, 5\}$$

Exemple On lance 2 D6. Quelqu'un regarde le résultat du lancer. Règle de "au moins un 6" ?

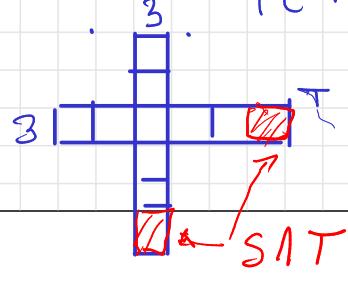
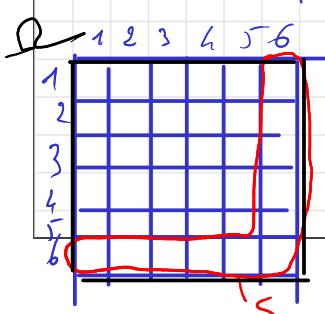
$$P(S) = \frac{11}{36}$$

On a 36 résultats possibles avec $S = \{1, 6\}^2$ qui sont équiprobables et $S = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

La personne montre un des 2 dés: c'est un 3. Quelle est la probabilité de $S = \text{"au moins un 6"}$?

$S = \text{"au moins un 6"}$ $T = \text{"l'autre dé a donné un 3"}$

$$\text{on veut } P_T(S) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}$$



Exemple: Dans une urne, on place 5 boules Rouges et 7 boules Vertes. On tire 2 boules successivement et sans remise. On note $A_i = \text{"la } i^{\text{e}} \text{ boule tirée est rouge"}$

Calculer $P_{A_1}(A_2)$ (prob de A_2 sachant A_1)

On a $P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{11}$ car sachant A_1 réalisé, l'urne contient 4 R et 7 V

avec les formules:

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{5 \times 4}{12 \times 11}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{11}$$

$$P(A_1) = \frac{5}{12} \quad P(A_1 \cap A_2) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11}$$

explication: on suppose que les couleurs sont numérotées 1 à 2 et 7 à 12 pour V
on a $\Omega = \boxed{\{1, 12\}}^2 = \text{ens des listes de 2 éléments dist. pris parmi } \{1, 12\}$

on a $|\Omega| = 12 + 11$ résultats équi-probables

$A_1 \cap A_2 = \text{ens des listes de 2 éléments entre 1 et 5}$

$$|A_1 \cap A_2| = 5 \times 4$$

3.2 Formule des probabilités composées

Théorème 3.3.

Pour A, B des événements avec $P(B) > 0$, on a $P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(A)$.

Pour A_1, A_2, \dots, A_n des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration pour 3 événements A, B, C $P(A \cap B) \neq 0$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap (B \cap C)) = P(A) \cdot P_A(B \cap C)$$

mais $P_A(B \cap C) = P_{A \cap B}(C) \cdot P_A(B)$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

Démonstration générale par récurrence.

Remarque $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0 \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$

pour $k \leq n-1$ car $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \supseteq A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}$
et la probabilité est croissante donc

$$0 < P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \leq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

≠ 0

Exemple: Dans une urne contenant 7 boules vertes et 3 boules rouges, on tire successivement et sans remise 3 boules.
Probabilité d'obtenir 3 boules rouges ?

On note

R_i = "on obtient une boule rouge au i^{e} tirage"

pour $i = 1, 2, 3$

On cherche $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$. On utilise la formule des probabilités conditionnelles:

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= P(R_1) \cdot P_{R_1}(R_2) \cdot P_{R_1 \cap R_2}(R_3) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

car $P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{9}$ car l'événement R_1 étant réalisé, il reste 9 boules dont 2 rouges

Exemple : Une urne contient m boules rouges et n boules vertes avec $m \in \mathbb{N}^+$. On tire successivement et sans remise m boules. Quelle est la probabilité de ne tirer que des rouges ?

On note $R_i =$ "on tire une boule rouge au i ème tirage" on cherche $P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_m)$. On utilise la formule des probabilités conditionnelles : $P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_m) > 0$ c'est possible

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_m) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(R_4) \times \dots \times P_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{m-1}}(R_m)$$

$\text{pour } 1 \leq k \leq m-1$

$$P_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k}(R_{k+1}) = \frac{m-k}{2m-k}$$

parce que la probabilité nb de boules rouges
nb de boules
car si l'événement $R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k$ est réalisé, l'urne contient $2m-k$ boules dont $m-k$ boules rouges

Alors

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_m) &= \prod_{k=1}^m \frac{m-(k-1)}{2m-(k-1)} = \frac{\textcircled{1}}{m} \times \frac{\textcircled{2}}{2m-1} \times \frac{\textcircled{3}}{2m-2} \times \dots \times \frac{\textcircled{m}}{2m-(m-1)} \\ &= \frac{m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{2m \times (2m-1) \times \dots \times (2m-(m-1))} = \frac{m!}{\frac{(2m)!}{m!}} = \frac{(m!)^2}{(2m)!} \end{aligned}$$

Finallement

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_m) = \frac{1}{\frac{(2m)!}{m!m!}} = \frac{1}{\binom{2m}{m}}$$

♡ $(2m) \times (2m-1) \times (2m-2) \times \dots \times (m+1) \times \frac{m \times (m-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{m \times (m-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{(2m)!}{m!}$

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 3.4. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ un système complet d'événements.

Pour tout événement B , on a Si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(A_i) \neq 0$, alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Corollaire 3.5. Soit A un événement tel que $0 < P(A) < 1$.

Pour tout événement B , on a $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$. Car $\begin{cases} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = \Omega \end{cases}$

(A, \bar{A}) est un système complet d'événements.

Démonstration du th 3.4 :

Les événements $(B \cap A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont incompatibles deux à deux car les $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont incompatibles deux à deux : $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

Pour σ -additivité, on a

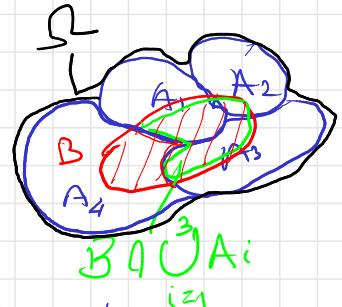
$$P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

Mais

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i) &= B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= B \cap \Omega \text{ car } \{A_i\} \text{ sont un SCE} \\ &= B \text{ car } B \subseteq \Omega \end{aligned}$$

D'où

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$$



Exemple : Deux joueurs tirent sur une cible appelée X et Y. X touche la cible 6 fois sur 10, Y touche la cible 3 fois sur 10. X joue 2 fois sur 3 et Y 1 fois sur 3. Quelqu'un tire sur la cible, quelle est la cible soit touchée ? On note $A = \text{"X tire"}$ $B = \text{"la balle est touchée"}$.

On sait $P_A(B) = \frac{6}{10}, P_{\bar{A}}(B) = \frac{9}{10}, P(A) = \frac{2}{3}$.

(A, \bar{A}) est un système complet d'événements. On veut $P(B)$. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{3} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{7}{10}$$

Exemple On a 5 dés à 6 faces dont un pipé avec $P(\text{"6"}) = \frac{1}{4}$ (et donc $P(\text{"x"}) = \frac{3}{20}$ pour $x \neq 6$). On choisit un dé au hasard et on l'élance. Probabilité d'obtenir un 6 ?

On note $S = \text{"arôleur au 6"}$, $T = \text{"le dé choisi est pipé"}$.
On sait d'après l'énoncé : $P_T(S) = \frac{1}{4}$, $P_{\bar{T}}(S) = \frac{1}{6}$, $P(T) = \frac{1}{5}$ et $P(\bar{T}) = \frac{4}{5}$.

on utilise la formule des probabilités totales :
 (T, \bar{T}) est un système complet d'événements et

$$\begin{aligned} P(S) &= P(T) \cdot P_T(S) + P(\bar{T}) \cdot P_{\bar{T}}(S) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{60} \end{aligned}$$

Bonus : On arôleur un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?.

On cherche $P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)}$ (par définition d'une proba conditionnelle)
mais $P(S \cap T) = P(T) \cdot P_T(S)$ d'après la formule des probas conditionnelles
d'où

$$\begin{aligned} P_S(T) &= \frac{P_T(S) \cdot P(T)}{P(S)} \quad \text{Formule de Bayes} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{11}{60}} = \frac{3}{11} \end{aligned}$$

Voir exemple p 28

3.4 Formules de Bayes

Théorème 3.6. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors

$$P_B(A) = \frac{\overbrace{P_A(B)P(A)}^{\text{formule des probabilités totales}}}{P(B)}$$

Théorème 3.7. Si $(A_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et B est un événement de probabilité non nulle, alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad P(A_j | B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

formules des probabilités totales -

Exemple : X et Y tirent sur une cible. X touche l'œil 6 fois sur 10 et Y 9 fois sur 10. X tire 2 fois sur 3. Un des deux touche la cible. Quelle est la probabilité que X ait tiré ?

$A = \text{"X tire"}$ $B = \text{"la cible est touchée"}$. On veut $P_B(A)$

D'après la formule de Bayes, comme $P(B) \neq 0$,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$$

(A, \bar{A}) est un système complet d'événements et $P(A) \neq 0$, $P(\bar{A}) \neq 0$ alors $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$

ce qui donne

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Un test qualité permet de s'assurer qu'une pièce n'est pas défectueuse.

Le test répond «conforme» pour une pièce défectueuse dans 5/100 des cas.

Le test répond «non conforme» pour une pièce conforme 3 fois sur 100.

Un lot contient 1% de pièces défectueuses. On tire une pièce au hasard, on la teste, elle est déclarée conforme. Quelle est la probabilité qu'elle soit vraiment conforme ?

$C = \text{"la pièce est conforme"}$ $T = \text{"la pièce est déclarée conforme"}$

On sait $P_C = \frac{5}{100}$, $P_{\bar{C}} = \frac{3}{100}$, $P_T = \frac{1}{100}$

on calcule $P_T(C) = \frac{P(C) \cdot P_C(T)}{P(T)}$ *d'après la formule de Bayes*

$$= \frac{P(C) \cdot P_C(T)}{P(C) \cdot P_C(T) + P(\bar{C}) \cdot P_{\bar{C}}(T)} =$$

Exemple: On dispose de $m+1$ urnes U_1, U_2, \dots, U_m et U_0 .
 L'urne U_k contient k boules rouges et $m-k$ boules vertes.
 On choisit une urne au hasard et on tire 2 boules successivement sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules rouges?

On note $A = \text{"on a tiré deux boules rouges"}$

$U_k = \text{"on a tiré dans l'urne } U_k\text{"}$

Les événements $(U_k)_{k \in \{0, m\}}$ sont un système complet

d'événements car pour $i \neq j$ $U_i \cap U_j = \emptyset$ et $\bigcup_{k=0}^m U_k = \Omega$

De plus $\forall k \in \{0, m\} \quad P(U_k) \neq 0$ car $P(U_k) = \frac{1}{m+1}$

On calcule $P_{U_k}(A) = P_{U_k}(R_1 \cap R_2)$ avec $R_i = \text{"on a tiré une rouge au } i\text{-ème tirage"}$

$P_{U_k}(A) = P_{U_k}(R_1) \cdot P_{U_k \cap R_1}(R_2)$

$$P_{U_k}(A) = \frac{k}{m} \times \frac{k-1}{m-1} \quad \text{pour } k \geq 2$$

$$P_{U_0}(A) = 0 \quad \text{et} \quad P_{U_1}(A) = 0 \quad \text{car il n'y a pas assez de boules rouges}$$

$$\text{Donc } \forall k \in \{0, m\}, \quad P_{U_k}(A) = \frac{k(k-1)}{m(m-1)} = \frac{\frac{k(k-1)}{2}}{\frac{m(m-1)}{2}} = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{m}{2}}$$

on peut utiliser la formule des probabilités totales:

$$P(A) = \sum_{k=0}^m P(U_k) \cdot P_{U_k}(A) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{m+1} \cdot \frac{k(k-1)}{m(m-1)}$$

$$P(A) = \frac{1}{(m+1)m(m-1)} \sum_{k=0}^m k(k-1) = \frac{1}{6} \frac{(m+1)m(m-1)}{(m+1)m(m-1)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Car } \sum_{k=0}^m k(k-1) = \sum_{k=0}^m 2 \times \binom{k}{2} = 2 \binom{m+1}{3} = 2 \frac{(m+1)m(m-1)}{3 \times 2 \times 1}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

Dans le cas de tirages avec remise: $P_{U_k}(A) = \frac{k}{m} \times \frac{k}{m} = \frac{k^2}{m^2}$

donc $P(A) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{m+1} \times \frac{k^2}{m^2} = \frac{1}{m^2(m+1)} \sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6 m^2(m+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6m}$

4 Indépendance

4.1 Indépendance de deux événements

Définition 4.1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On dit que 2 événements A et B sont indépendants pour la probabilité P lorsque $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Proposition 4.1. Soit A et B deux événements avec $P(B) > 0$. On a

A et B sont indépendants pour la probabilité P si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Proposition 4.2. Si A et B sont deux événements indépendants, alors \bar{A} et B sont deux événements indépendants ainsi que A et \bar{B} , ainsi que \bar{A} et \bar{B} .

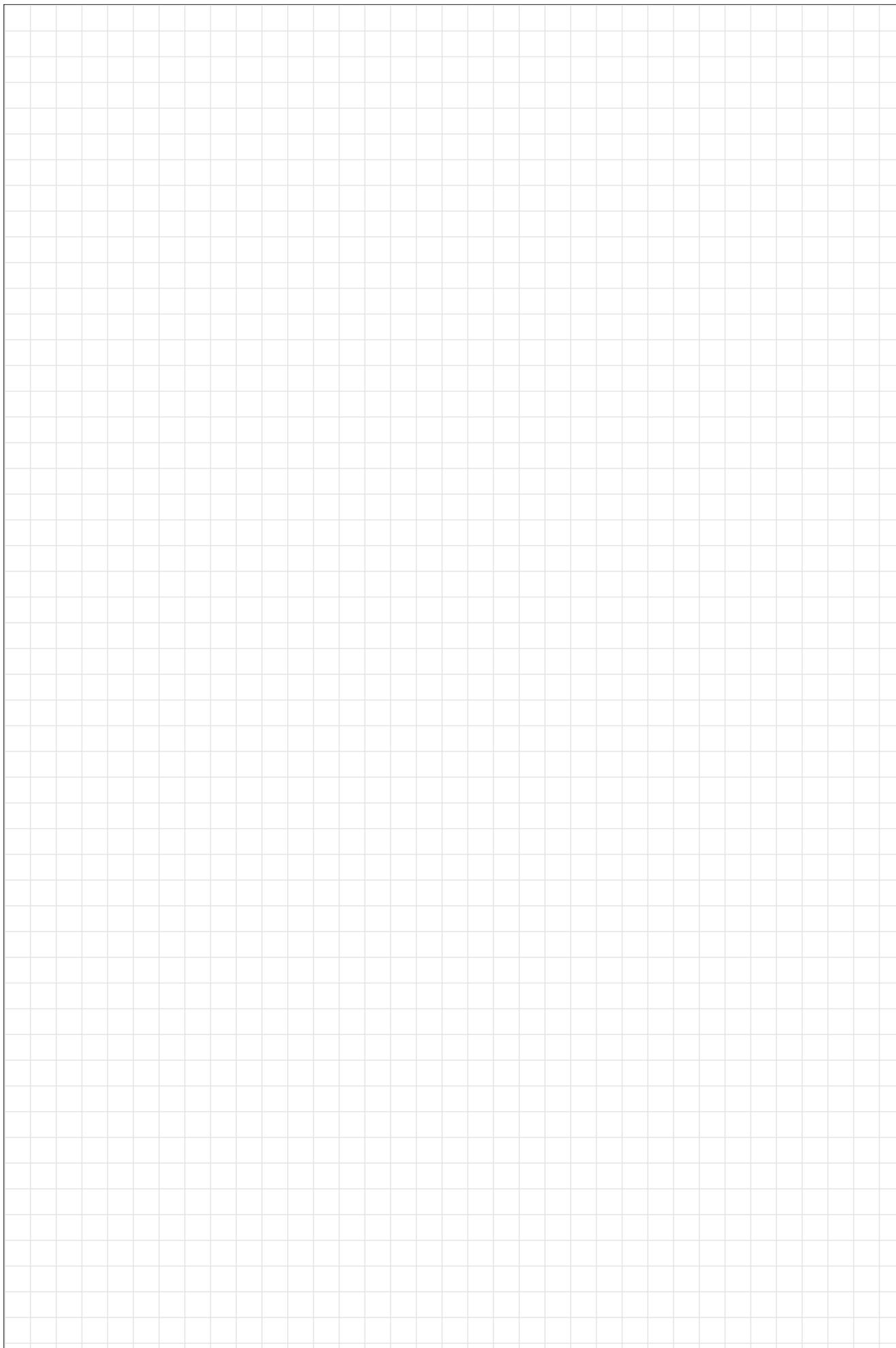
Remarque 4.1. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ un univers fini et deux probabilités P_1 et P_2 :

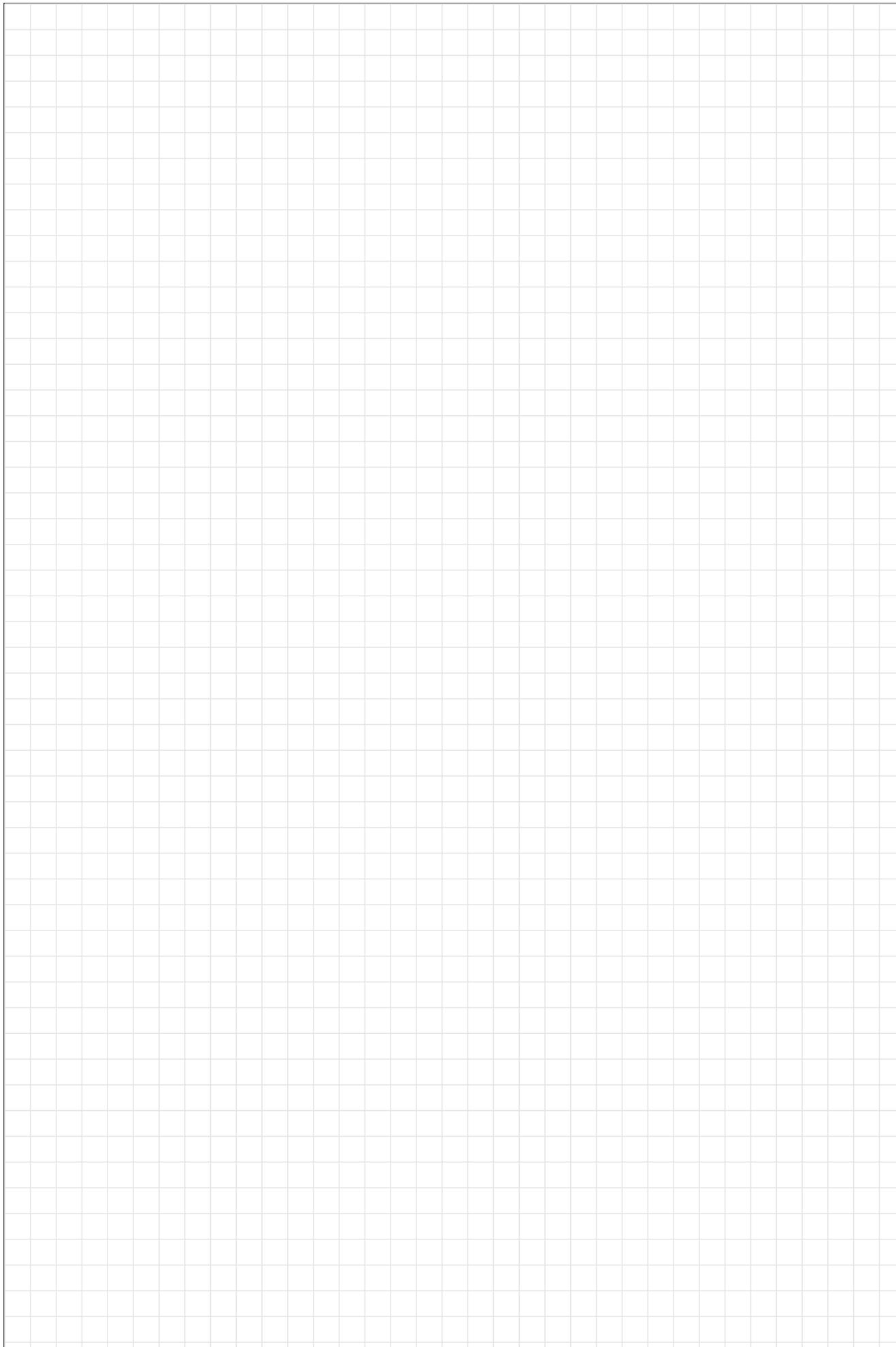
ω	1	2	3	4	5	6
$P_1(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

ω	1	2	3	4	5	6
$P_2(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On considère les 2 événements $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$.

On montre que A et B sont indépendants pour la probabilité P_1 mais A et B ne sont pas indépendants pour la probabilité P_2 .





4.2 Indépendance de n événements

Définition 4.2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) des événements.

On dit que les événements A_1, A_2, \dots, A_n sont mutuellement indépendants si pour toute partie $J \subset [\![1, n]\!]$, on a

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

On dit que les événements A_1, A_2, \dots, A_n sont indépendants deux à deux si pour tous les indices $(i, j) \in ([\![1, n]\!])^2$, on a

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

Remarque 4.2. On lance 2 fois un dé cubique parfait. Soient les événements A_1 : “le premier nombre obtenu est pair”, A_2 : “le deuxième nombre obtenu est impair”, A_3 : “la somme des 2 nombres obtenus est paire”.

On montre que A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

