TD16 - Exercice 12 :
Prouver que la suite définie par $u_1 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$ est convergente.

Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec a, b réels à déterminer.

On montre par récurrence : " $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq 2$ "
c'est vrai pour $n=1$ car $0 < u_1 < 1$. La proposition est initialisée au rang $n=1$.
On suppose que la proposition est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$0 \leq u_n \leq 2$ alors $0 \leq \dfrac{u_n}{n+1} \leq \dfrac{2}{n+1}$
mais $n \geq 1$ donc $\dfrac{2}{n+1} \leq 1$
on a alors $1 \leq 1 + \dfrac{u_n}{n+1} \leq 2$ soit $0 \leq u_{n+1} \leq 2$
La proposition est donc héréditaire et initialisée alors par le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq u_n \leq 2$.
Par produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n+1} = 0$
Et par somme de suites convergentes, (u_n) converge vers 1
Alors on a $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{=} 1 + o(1)} \underset{n \to +\infty}{=} 1 + 1 \cdot \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\varepsilon(u) \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0$
On injecte ce développement dans la relation de récurrence
$$u_{n+1} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1+o(1)}{n+1} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n+1}\right) \text{ avec } \varepsilon_1(u) \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0$$
on change d'indice :
$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

On recommence :

$$u_{n+1} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

on change d'indice

$$u_n \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)n} + o\left(\frac{1}{(n-1)n}\right)$$

mais

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

en utilisant $\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+o(u)$ avec $u=\frac{1}{n}$

alors $\frac{1}{n(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $o\left(\frac{1}{n(n-1)}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On trouve :

$$u_n \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

on peut recommencer :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n+1}$$

$$= \dots$$