TD 19 - Matrices et applications linéaires

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E et $\mathcal{B}'$ la base de E formée des vecteurs $v_1 = (-1, 1, -3)$, $v_2 = (3, 2, 1)$ et $v_3 = (2, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Calculer la matrice du vecteur $(5, 1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
2. Calculer la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de l'endomorphisme f défini dans $\mathcal{B}$ par
$$f(x, y, z) = (2x + z, x - 3y, -x + z).$$
3. Calculer la matrice de l'endomorphisme g défini par $g(v_i) = i.v_i$ pour $i = 1, 2, 3$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Exercice 2 : Soit u l'application linéaire canoniquement associée à A. Déterminer le noyau et l'image de u (équations et bases). Même question pour les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On pose $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, -1)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette base. En déduire une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 4 : Soit $\Delta : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ défini par $\quad P \longmapsto \Delta(P) = Q$ avec $Q(X) = P(X + 1) - P(X)$.
Déterminer la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. En déduire le noyau, l'image et le rang de Δ.

Exercice 5 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice carrée réelle et Φ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à une matrice M associe la matrice $AM - MA$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
2. Calculer la dimension du noyau et de l'image de Φ et donner une base de ces espaces.

Exercice 6 : Soit $f_1 : x \mapsto e^{2x}$, $f_2 : x \mapsto xe^{2x}$ et $f_3 : x \mapsto x^2e^{2x}$ trois fonctions de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

1. On pose $E = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et donner la dimension de E.
2. On considère $\varphi : E \longrightarrow E$, définie par $f \mapsto \varphi(f) = f'$. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base (f_1, f_2, f_3). Montrer que φ est un automorphisme, donner la matrice de sa réciproque et déterminer une primitive de $x \mapsto (7 - 8x + 3x^2)e^{2x}$.

Exercice 7 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer l'image et le noyau de f avec le minimum de calcul.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 : Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans laquelle la matrice de u est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 :

Écrire la matrice A définie par ses coefficients $a_{i,j} = \begin{cases} \dbinom{j-1}{i-1} \text{ si } i \leqslant j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ pour tous $i \in [\![1, n+1]\!], j \in [\![1, n+1]\!]$.

En utilisant un endomorphisme bien choisi de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer l'inverse de la matrice A.

Exercice 10 : Soit m un réel quelconque. On note A_m, D_m, J_m les matrices suivantes

$$A_m = \begin{pmatrix} 3+m & m-1 & m-1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad D_m = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix} \quad J_m = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On appelle f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A_m dans la base canonique.

1. Pour quelles valeurs de m, f_m est-elle bijective ?
2. Déterminer le noyau de $f_m - (m+1)Id$. indication : on traite à part le cas $m = 3$.
3. A quelle condition sur m, les noyaux de $f_m - 4Id$ et de $f_m - (m+1)Id$ sont -ils supplémentaires ?
4. Montrer que si cette condition est remplie, il existe une base $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans laquelle la matrice de f_m est D_m.
5. Montrer que sinon il existe une base $\mathcal{B}_2 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans laquelle la matrice de f_m est J_m.

Exercice 11 : Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par les expressions analytiques dans la base canonique suivantes :

1. $\begin{cases} 3x' = x + 2\sqrt{2}y \\ 3y' = 2\sqrt{2}x - y \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x' = 3x - 4y \\ 5y' = 4x + 3y \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5x' = 3x + 4y \\ 5y' = 4x - 3y \end{cases}$

Exercice 12 : Dans $\mathbb{R}^2$, écrire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $y = 2x$.

Exercice 13 : Montrer que les transformations suivantes sont des rotations dont on donnera l'axe et l'angle :

1. $\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$
2. $\begin{cases} 9x' = 8x + y - 4z \\ 9y' = -4x + 4y - 7z \\ 9z' = x + 8y + 4z \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x' = -2x + 2y - z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = -x - 2y - 2z \end{cases}$

Montrer que les transformations suivantes sont des réflexions dont on donnera le plan de réflexion :

4. $\begin{cases} 3x' = x + 2y + 2z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = 2x - 2y + z \end{cases}$
5. $\begin{cases} 7x' = -2x + 6y - 3z \\ 7y' = 6x + 3y + 2z \\ 7z' = -3x + 2y + 6z \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x' = 2x - 2y + z \\ 3y' = -2x - y + 2z \\ 3z' = x + 2y + 2z \end{cases}$

Exercice 14 : Déterminer la matrice M de la rotation d'axe $\text{Vect}(1,1,1)$ et d'angle π dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15 : Déterminer la matrice M de la rotation d'axe $\text{Vect}(1,2,-1)$ et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$ dans la base canonique.

Exercice 16 : Déterminer la matrice N de la réflexion par rapport au plan $\text{Vect}((1,0,-1),(2,-2,3))$ dans la base canonique.