Chapitre 15 - Cours - Correction exemple

Exemple 5.xx :
Montrer que les suites réelles qui convergent vers 0 et les suites constantes forment deux sev supplémentaires de l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.

- Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles, on note E l'ensemble des suites convergentes réelles.
  On a $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et la suite nulle $\tilde{0}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente donc $\tilde{0} \in E$
  Soit u, v deux suites de E elles sont convergentes et réelles alors, par théorème, $u+v$ est une suite convergente : $u+v \in E$
  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, par théorème, $(\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente : $\alpha u \in E$
  donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc c'est un ev.
- On note F l'ensemble des suites qui convergent vers 0 :
  On a $\tilde{0} \in F$ car la suite nulle converge vers 0, si $\alpha \in \mathbb{R}$, si $u \in F$ et $v \in F$, alors $\alpha u + v$ converge vers 0 par opération sur les suites convergentes donc $\alpha u + v \in F$
  De plus $F \subset E$ donc F est un sev de E.
- On note G l'ensemble des suites constantes
  Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle
  $u \in G \iff \exists \alpha : \forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \alpha$ ce qui prouve que $G = \mathrm{Vect}\left((1)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ avec $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à 1. donc G est un sev de E car $G \subset E$: les suites constantes sont convergentes

* Soit $u \in E$ une suite convergente. Notons ℓ la limite
on pose $w_n = \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: (w_n) est constante
et $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$
Par opération sur les suites convergentes (v_n) converge
et (v_n) converge vers 0
On a donc $u = v + w$ et $v \in F$ et $w \in G$
on a prouvé $E \subset F + G$ et comme on avait $F \subset E$ et $G \subset E$
on avait $F + G \subset E$ Alors $\boxed{E = F + G}$

* On prend $u \in F \cap G$ alors d'une part $u \in G$ donc
u est constante : $\forall n, u_n = C$ avec $C \in \mathbb{R}$
et $u \in F$ donc elle converge vers 0 donc $C = 0$
et $u = 0$. On a prouvé $F \cap G \subset \{\vec{0}\}$
Comme on a toujours $\{\vec{0}\} \subset F \cap G$ alors $\boxed{F \cap G = \{\vec{0}\}}$

On a prouvé $\boxed{E = F \oplus G}$
les suites qui convergent vers 0 et les suites constantes sont deux sev supplémentaires de l'ev des suites convergentes.