Corrigé TD 18 - Séries numériques

Exercice 1 :

a) $u_n = \tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$

On a $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, alors $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})$.

On en déduit $u_n \sim \dfrac{1}{6n^3}$.

Comme la série de référence $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs,

on en déduit que $\boxed{\sum \tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \text{ converge.}}$

b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^2}$

On a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$ et $\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

Alors $u_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}\left(\dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})\right)$. Ce qui donne $u_n \sim \dfrac{1}{2n^{5/2}}$.

Comme la série de référence $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\sum \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^2} \text{ converge.}}$

c) $u_n = \dfrac{\sin n}{n^3}$

On étudie $\sum |u_n|$. On a $|u_n| = \dfrac{|\sin n|}{n^3}$ et $|\sin n| \leqslant 1$, d'où $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$.

Comme la série de référence $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente.

Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente : $\boxed{\sum \dfrac{\sin n}{n^3} \text{ converge}}$.

d) $u_n = \dfrac{n^n}{2^n}$

On a pour $n \geqslant 4$, $\dfrac{n}{2} \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto t^n$ est croissante, donc $u_n \geqslant 2^n$ pour $n \geqslant 4$.

Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors $\boxed{\sum \frac{n^n}{2^n} \text{ est grossièrement divergente}}$.

Exercice 2 :

a) $a_n = \ln\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$ On a $\dfrac{n^3+1}{n^3+2} = \dfrac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^3}}$

Par ailleurs, $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$, d'où $\dfrac{1}{1+\frac{2}{n^3}} = 1 - \frac{2}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})$ car $\frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On en déduit que $\dfrac{n^3+1}{n^3+2} = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(1 - \frac{2}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})\right) = 1 - \dfrac{1}{n^3} + o(\dfrac{1}{n^3})$

Par ailleurs, on a $\ln(1+u) = u + o(u)$ ou $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ ce qui donne $a_n \sim -\dfrac{1}{n^3}$

La série $\sum(-a_n)$ est à termes positifs et son terme général est équivalent à celui de la série de référence $\sum \frac{1}{n^3}$ qui est convergente, alors la série $\sum(-a_n)$ converge donc $\boxed{\sum \ln\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right) \text{ converge}}$.

b) $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt$

Tout d'abord $a_n \geqslant 0$ car c'est l'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction positive.

Ensuite, on intègre par parties en posant $u(t) = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$ et $v(t) = \sin(\pi t)$. u, v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et on obtient

$a_n = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \sin(\pi t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n+1} t^{n+1} \cos(\pi t)\, dt = \dfrac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} \cos(\pi t)\, dt$

On a $|\cos(\pi t)| \leqslant 1$ ce qui donne

$$0 \leqslant |a_n| \leqslant \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left|t^{n+1}\right|\, dt \leqslant \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1}\, dt = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

On a $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Et, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de référence convergente, alors par le théorème d'équivalence, la série $\sum \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge.

On en déduit, par le théorème de comparaison des séries positives que la série Σa_n est absolument convergente.

Donc, $\boxed{\text{la série } \sum \int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt \text{ converge}}$.

c) $a_n = \ln\left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)\right)$

On utilise la formule $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x > 0$ qui donne

$\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$.

On a $\dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\right)$

Ensuite $\operatorname{Arctan} x = x + o(x)$, ce qui donne $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})$.

Puis $a_n = \ln\left(1 - \dfrac{2}{\pi n} + o(\dfrac{1}{n})\right)$

Comme $\ln(1-u) = u + o(u)$, on a $a_n = -\dfrac{2}{\pi n} + o(\frac{1}{n})$ soit $a_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{\pi n}$.

Comme $\dfrac{2}{\pi n}$ est le terme général d'une série de référence divergente, on en déduit que

$\boxed{\sum \ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) \text{ est divergente.}}$

d) $a_n = \dfrac{2^n + n}{\ln n + 3^n}$,

On a $a_n = \dfrac{2^n}{3^n}\dfrac{1+\frac{n}{2^n}}{1+\frac{\ln n}{3^n}} \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. La série $\sum(\frac{2}{3})^n$ est une série géométrique convergente, alors par le théorème d'équivalence, $\boxed{\text{la série } \sum \frac{2^n+n}{\ln n+3^n} \text{ est convergente}}$.

e) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$,

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n > 0$.

On calcule $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{e}$

On en déduit qu'il existe un rang N tel que pour $n \geqslant N$, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors par récurrence, on montre que pour $n \geqslant N, \quad 0 \leqslant a_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n 2^N a_N$.

C'est vrai pour $n = N$. Si c'est vrai pour un entier $n \geqslant N$, alors $a_{n+1} \geqslant 0$ et $a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} a_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} 2^N a_N$. Donc la propriété est héréditaire et initialisée à $n = N$: par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant N$.

La série $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente, alors par théorème de comparaison des séries positives, on en déduit que $\sum a_n$ est convergente. $\boxed{\sum \frac{n!}{n^n} \text{ converge}}$.

f) $a_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

On a $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ d'où $a_n = \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2}$, alors $a_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de référence convergente.

Alors par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs,

$\boxed{\text{la série } \sum a_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \text{ est convergente}}$.

Exercice 3 :

La limite de référence $\lim\limits_{u \to +\infty} u^4 e^{-u}$, prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n})^4 e^{-\sqrt{n}} = 0$

On a donc $e^{-\sqrt{n}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de référence convergente.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on peut en déduire que

$\boxed{\sum e^{-\sqrt{n}} \text{ est convergente}}$.

Exercice 4 :

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, On calcule les sommes partielles :

$S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\sqrt{k}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Et en ré-indexant les sommes, on obtient :

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\sqrt{k}} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{(1-2+1)}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Et finalement, comme les sommes se télescopent, $S_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Alors $\boxed{\sum(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}) \text{ est convergente}}$ et

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

b) $a_n = \displaystyle\int_0^1 (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\, dx$, On calcule les sommes partielles :

$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \left(\sum_{k=0}^{n} (-e^{-x})^n\right) dx$, par linéarité de l'intégrale,

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-e^{-x})^n = \frac{1 - (-e^{-x})^{n+1}}{1 + e^{-x}}$.

On a donc $S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1 - (-e^{-x})^{n+1})e^x}{(1+e^x)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\, dx - \int_0^1 \frac{(-e^{-x})^{n+1} e^x}{(1+e^x)^2}\, dx$,

On a $0 \leqslant x \leqslant 1$ d'où $2 \leqslant 1 + e^x \leqslant 1 + e$ donc $0 \leqslant \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \leqslant \dfrac{e}{4}$

Et

$\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{(-e^{-x})^{n+1} e^x}{(1+e^x)^2}\, dx\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-e^{-x})^{n+1} e^x}{(1+e^x)^2}\right| dx \leqslant \frac{e}{4} \int_0^1 (e^{-x})^{n+1}\, dx = \frac{e}{4(n+1)}(1 - \tfrac{1}{e})$

On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{(-e^{-x})^{n+1} e^x}{(1+e^x)^2}\, dx = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n =$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx.$

Alors la série $\sum a_n$ est convergente et sa somme est $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}$

$$\boxed{\sum \int_0^1 (-1)^n \tfrac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx \text{ converge et sa somme est } \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}\ .}$$

c) $a_n = \dfrac{\cos n}{2^n}$,

On a $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, alors $\sum |a_n|$ est convergente. On en déduit que $\sum a_n$ converge.

On utilise les nombres complexes pour simplifier les sommes partielles :

$$S_n = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{in}}{2^n}\right) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^i}{2}\right)^n\right)$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{e^i}{2} \neq 1$

$$S_n = \mathcal{R}e\left(\frac{1-(e^i/2)^{n+1}}{1-e^i/2}\right)$$

Mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e^i}{2}\right)^{n+1} = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $\left|\dfrac{e^i}{2}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$,

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \mathcal{R}e(\left(\frac{1}{1-e^i/2}\right) = \mathcal{R}e\left(\frac{2}{2-\cos 1 + i\sin 1}\right) = \frac{2(2-\cos(1))}{\sin(1)^2 + (2-\cos(1))^2}$

Finalement,

$$\boxed{\text{la série } \sum \tfrac{\cos n}{2^n} \text{ est convergente et sa somme est } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n} = \frac{2(2-\cos(1))}{5-4\cos(1)}}.$$

d) $a_n = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

On écrit une décomposition en éléments simples : $a_n = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}$.

Puis la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ est télescopique $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = 1 - \frac{1}{2n+3}$ ce qui donne la convergence et la somme de la série $\sum a_n$.

e) $a_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$.

On a $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, alors $\ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right) \sim \dfrac{2}{n(n+3)}$ qui est le terme général d'une série convergente.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum \ln\left(1+\tfrac{2}{n(n+3)}\right) \text{ converge.}}$

On calcule une somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1} n \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+3)+2}{k(k+3)}\right)$$

Or $1 + \dfrac{2}{k(k+3)} = \dfrac{k(k+3)+2}{k(k+3)} = \dfrac{k^2+3k+2}{k(k+3)} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}$

$$S_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} (k+1)(k+2)k(k+3)\right) = \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1) \times \prod_{k=1}^{n}(k+2)}{\prod_{k=1}^{n}(k) \times \prod_{k=1}^{n}(k+3)}\right)$$

On change les indices

$$S_n = \ln\left(\frac{\prod_{k=2}^{n+1}(k) \times \prod_{k=3}^{n+2}(k)}{\prod_{k=1}^{n}(k) \times \prod_{k=4}^{n+3}(k)}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)\times 3}{1 \times (n+3)}\right) = \ln 3 + \ln\frac{n+1}{n+3}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n+1}{n+3} = 0$ donc S_n converge vers $\ln 3$.

$$\boxed{\text{La somme de la série } \sum \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right) \text{ est } \ln 3.}$$

f) $a_n = \dfrac{2}{n(n^2-1)}$: on utilise une décomposition en éléments simples puis une série télescopique.

On a pour $n \geqslant 2$, $\quad \dfrac{2}{n(n^2-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n+1}$

Alors les sommes partielles s'écrivent :

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n(n^2-1)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1}$$
$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$$

On retrouve 2 sommes télescopiques, ce qui donne :

$$S_N = 1 - \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2}$$

Alors $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n \text{ converge et sa somme est } \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2}{n(n^2-1)} = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 5 :

1. Soit $a \in I$, on a $|f(x) - f(a)| \leqslant k.|x-a| \leqslant |x-a|$. Comme $\lim\limits_{x\to a} x - a = 0$, on en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

   Ce qui prouve que f est continue en a et on en conclut que $\boxed{f \text{ est continue sur } I}$.

   On a $u_0 \in I$. Si $u_n \in I$, alors comme on a, par hypothèse, $f(I) \subset I$, on a $u_{n+1} \in I$.

   Par le principe de récurrence, tous les termes de u_n sont définis donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie}}$.

2. On a $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k|u_n - u_{n-1}|$ pour tout $n \geqslant 1$, alors, par récurrence, on obtient
$$\forall n \geqslant 1, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$$
   Alors, comme la série $\sum k^n|u_1 - u_0|$ est convergente car $0 < k < 1$, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum |u_{n+1} - u_n| \text{ converge}}$.

   Il s'ensuit que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente donc cenvergente.

   On a par télescopage de sommes, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) + u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

   Comme I est un intervalle fermé de la forme $I = [a, b]$, comme $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$, alors $\forall n \in N$, $a \leqslant u_n \leqslant b$ qui donne par passage à la limite $\alpha \in [a, b] = I$.

   De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$, comme f est continue sur I on obtient par passage à la limite $\alpha = f(\alpha)$.

   Si on a un deuxième réel β tel que $f(\beta) = \beta$.

   On a $|f(\alpha) - f(\beta)| \leqslant k|\beta - \alpha|$, ce qui donne $|\alpha - \beta| < |\beta - \alpha|$ car $k < 1$. On obtient une contradiction, donc α est unique.

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \alpha \in I \text{ tel que } f(\alpha) = \alpha.}$$

Exercice 6 :

1. La suite (u_n) est définie. On a $u_0 > 0$. Si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} > 0$. On en déduit par le principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Alors on a $u_{n+1} < u_n$ car $e^{-u_n} < 1$. donc la suite (u_n) est strictement décroissante et minorée par 0. Alors, la suite (u_n) est convergente vers une limite réelle ℓ.
Comme la fonction exp est continue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-u_n} = e^{-\ell}$. Et, $\ell = \ell e^{-\ell} \iff e^{-\ell} = 1 \iff \ell = 0$.

Donc $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$

2. On a pour tout entier n, $0 < u_n \leqslant \alpha$ qui donne $-\dfrac{1}{u_n} \leqslant -\dfrac{1}{\alpha}$. On en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad e^{-\frac{1}{u_n}} \leqslant e^{-\frac{1}{\alpha}}$. On a donc $0 < u_1 \leqslant \alpha e^{-\frac{1}{\alpha}}$.
Si pour un entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha \left(e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^n$, alors
$$u_{n+1} > 0 \text{ et } u_{n+1} \leqslant \alpha e^{-\frac{n}{\alpha}} e^{-\frac{1}{u_n}} \leqslant \alpha \left(e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{n+1}.$$
La proposition est initialisée et héréditaire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha(e^{-\frac{1}{\alpha}})^n$.
La série $\sum \alpha \left(e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^n$ est convergente car $0 < e^{-\frac{1}{\alpha}} < 1$. Alors par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge}}$.
Autre version : On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-\frac{1}{u_n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.
Par théorème, on en déduit qu'il existe un rang N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Par comparaison à la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant N_0} \dfrac{1}{2^n}$, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 7 :

1. $v_n = u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.
Un DL nous donne $v_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
On a donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
La série $\Sigma(-v_n)$ est à termes positifs à partir d'un certain rang et la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, alors par le critère d'équivalence des séries à termes positifs $\Sigma(-v_n)$ converge.
Donc $\boxed{\sum v_n \text{ converge}}$.
Alors par théorème des séries télescopiques, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$.
<u>Remarque</u> : sa limite s'appelle la constante d'Euler notée γ

Exercice 8 :

1. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)n^n e^{n+1-n}}{(n+1)^{n+1}} \times \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \times \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \times e$
d'où $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = e\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-(n+\frac{1}{2})}$
Alors $b_n = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$
On obtient $b_n = 1 - 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n^2} - \dfrac{1}{3n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
$\Longrightarrow b_n = -\dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \Longrightarrow b_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$

Alors par le critère d'équivalernce des séries à termes positifs, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum -b_n$ converge. Et par multiplication par le scalaire -1 :

$$\boxed{\sum b_n \text{ converge}}.$$

2. On a $b_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ et $\sum b_n$ converge alors par théorème sur les séries télescopiques, $(\ln(a_n))$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n) = \ell$.

   Comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, $\boxed{(a_n) \text{ converge vers } e^\ell = L = \sqrt{2\pi}}$.

3. On a alors $a_n \sim \sqrt{2\pi\, n} \Longrightarrow \boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}$

4. $\displaystyle \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\right)^2} \sim \frac{\sqrt{2}(2n)^{2n}}{\sqrt{\pi n}\,(n^n)^2} \Longrightarrow \boxed{\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\times 4^n}{\sqrt{\pi n}}}$

Exercice 9 :

1. $\displaystyle\sum \frac{1}{k\ln(k)}$

   On pose $h(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

   La fonction h est décroissante sur $[3, +\infty[$, alors pour $k \geqslant 3$, et pour $x \in [k-1, k]$, on a
   $$x \geqslant 2 \text{ et } \quad \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \frac{1}{x\ln(x)} \leqslant \frac{1}{(k-1)\ln(k-1)}$$
   Alors comme l'intégrale est croissante, on a
   $$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k\ln(k)}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(k-1)\ln(k-1)}\,\mathrm{d}x$$
   qui donne
   $$\forall k \geqslant 3, \quad \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(k-1)\ln(k-1)}$$
   Alors pour $j = k-1$, $j \geqslant 2$, on a $\displaystyle\int_j^{j+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{j\ln(j)}$

   On a donc
   $$\boxed{\forall k \geqslant 3, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x}$$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités précédentes pour $k = 3, \dots, n$:
   $$\sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$
   On utilise la relation de Chasles pour les sommes d'intégrales :
   $$\int_3^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_2^{n} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$
   Or, on sait calculer ces intégrales :
   $$\int_a^b \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln(x))]_a^b = \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(a))$$
   D'où pour tout entier $n \geqslant 3$, en ajoutant les termes manquants à la somme :
   $$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$
   Comme $\ln(\ln(n))$ tend vers $+\infty$, $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{k\ln(k)} \text{ diverge}}$.

2. $\sum \dfrac{1}{k\ln^2(k)}$:

   On pose $h(x) = \dfrac{1}{x\ln^2(x)}$. La fonction h est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$.

   Alors pour tout entier $n \geqslant 3$, on a
   $$\int_3^{n+1} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \int_2^{n} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,\mathrm{d}x$$
   On calcule les intégrales :
   $$\int_a^b \frac{1}{x\ln^2(x)}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_a^b = \frac{1}{\ln(a)} - \frac{1}{\ln(b)}$$
   D'où pour tout entier $n \geqslant 3$, en ajoutant les termes manquants à la somme :
   $$\frac{1}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} - \frac{1}{2\ln^2(2)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)}$$
   On a donc la majoration $\forall n \geqslant 3, \quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2\ln^2(2)}$.

   La série $\sum \dfrac{1}{k\ln^2(k)}$ est à termes positifs et majorée, alors $\boxed{\text{la série } \sum \dfrac{1}{k\ln^2(k)} \text{ converge}}$.