Chapitre 16 - Analyse asymptotique

1 Comparaison des suites

1.1 Relations de comparaison

Uniquement pour les suites réelles : on se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.1. Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels. On dit que :

- (u_n) est dominée par (v_n) si à partir du rang N_0 $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.
- (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
- (u_n) est équivalente à (v_n) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Théorème 1.1. *Soit (v_n) une suite de réels non nuls à partir d'un certain rang N_0 et (u_n) une suite de réels.*

(u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 telle que $u_n = v_n.\varepsilon_n$.

1.2 Propriétés des relations de comparaison

Proposition 1.2. *Soit* $(u_n), (v_n), (w_n)$ *des suites réelles.*
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *alors* $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ *alors* $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$.
Si u_n *et* v_n *ne s'annulent pas, alors* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *alors* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(u_n)$.

1.3 Suites de référence

Proposition 1.3. *Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, on a*

$$\ln^{\beta}(n) \underset{+\infty}{=} o(n^{\alpha}) \text{ et } n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma n}) \qquad \text{et pour } q > 1\text{, on a } n^{\alpha} = o(q^{n}).$$

1.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 1.4. *Soit* $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ *des suites réelles.*
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ *alors* $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n x_n$.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $w_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ *et si* w_n *et* x_n *ne s'annulent pas alors* $\dfrac{u_n}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{x_n}$.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et si* p *est un entier* $p \in \mathbb{N}$ *alors* $u_n^p \underset{+\infty}{\sim} v_n^p$.

1.5 Relations de comparaison et limites

Théorème 1.5. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.*

Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a $\quad u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$

En particulier, (u_n) est convergente si et seulement si (v_n) est convergente.

Proposition 1.6. *Soit (u_n)et (v_n) deux suites réelles.*

- *Si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) converge, alors (u_n) converge vers 0.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge.*
- *Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

2 Relations de comparaison appliquées aux fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ élément ou extrémité de I.

2.1 Fonction dominée par une autre

Définition 2.1. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} O(g)$

2.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2.2. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a.

On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou bien $f(x) = g(x).\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

2.3 Fonctions équivalentes

Définition 2.3. Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a. On note $f \underset{a}{\sim} g$

Proposition 2.1. *Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.*

$$\text{Si } f'(a) \neq 0, \text{ alors } f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

Proposition 2.2. *Soit f et g définies sur I, ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$. On a :*

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} o(g).$$

2.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 2.3. *Si $f, g, h, f_1, g_1, f_2, g_2$ sont des fonctions définies au voisinage de a, on a :*

- $f \underset{a}{\sim} g \Longrightarrow g \underset{a}{\sim} f$
- $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h \Longrightarrow f \underset{a}{\sim} h$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Longrightarrow f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \Longrightarrow \dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$

2.5 Utilisation des équivalents

Proposition 2.4. *Étant donnés deux fonctions f et g équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Si g a une limite finie ou infinie en a alors f aussi et $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g$.

Proposition 2.5. *Étant donnés deux fonctions f et g définies sur I et équivalentes en a : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Si g est positive sur I alors f est positive au voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur I, alors f ne s'annule pas au voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, alors la restriction de f à $I \setminus \{a\}$ ne s'annule pas au voisinage de a.

3 Développements limités

3.1 Définition

Définition 3.1. On dit qu'une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ élément ou extrémité de I si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(a+h) = P(h) + o(h^n)$ au voisinage de 0 (pour h).

n = ordre

C'est à dire $$f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_{n-1}h^{n-1} + a_n h^n + o(h^n)$$

ou $$f(x) \underset{a}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_n(x-a)^n}_{\text{polynôme en } \cancel{x}\ X-a} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{reste}}$$

On le note $DL_n(a)$ de f.

Exemple $g(x) = 1 + x^2 + x^3 \sin(x)$.

on a $\dfrac{x^3 \sin(x)}{x^2} = x\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $x^3\sin(x) \underset{0}{=} o(x^2)$

alors on a $g(x) \underset{0}{=} 1 + (x-0)^2 + o((x-0)^2)$ a

$g(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + o(x^2)$ $DL_2(0)$: à l'ordre 2 en 0 de g

autre écriture $\boxed{g(x) = 1 + x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$

On a également

$g(x) = 1 + (x^2 + x^2\varepsilon_1(x)) = 1 + o(x)$ car $x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \underset{0}{=} o(x)$

$\boxed{g(x) \underset{0}{=} 1 + o(x)}$ est un DL à l'ordre 1 de g

Autre idée $\sin(x) \underset{0}{=} \sin(0) + \sin'(0).(x-0) + o(x-0)$

car sin est dérivable en 0 (c'est un DL_1)

soit $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$ et $g(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + x^3(x + o(x))$

il vient $g(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + x^4 + x^3 o(x)$

⚠ $x^3.o(x)$ s'écrit $x^3 o(x) = x^3 x \varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

car $o(x) = x\,\varepsilon_2(x)$ donc $x^3 o(x) = x^4\varepsilon_2(x) = o(x^4)$

♡ Règle : $f(x).o(h(x)) \underset{0}{=} o(f(x).h(x))$ $\quad f(x-a)\,o(h(x-a)) \underset{a}{=} o(f(x-a)\,h(x-a))$

Alors $\boxed{g(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)}$ on a DL_4 en 0 de g

$g(x) = 1 + x^2 + x^3 \sin(x)$ au voisinage de 1

On pose $\boxed{x = 1 + h}$ $\quad x \to 1 \iff h \to 0 \quad h = x - 1$

ce qui donne $g(x) = 1 + (1 + 2h + h^2) + (1 + 3h + 3h^2 + h^3)\sin(1+h)$

nouvelle fonction $\to f(h) = g(1+h) =$

$=$

On utilise $\sin(1+h) = \sin(1)\cos(h) + \cos(1)\sin(h)$

$\sin(h) \underset{0}{\sim} h \iff \sin(h) \underset{0}{=} h + o(h)$

$\cos(h) \underset{0}{\sim} 1 \iff \cos(h) \underset{0}{=} 1 + o(1)$ fonction constante = 1

⚠ $o(1) =$ qui tend vers 0

~~On termine le calcul~~ $\cancel{\sin(1+h) = \sin(1) + o(1) + \cos(1)(h + o(h))}$

$\cancel{g(1+h) = 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1) + \cos(1))h}$

$\cancel{+ (1 + 3\sin(1) +}$

on obtient

$\sin(1+h) = \sin(1)\,(1 + o(1)) + \underbrace{\cos(1)(h + o(h))}_{h \to 0}$

$= \underbrace{\sin(1)}_{\text{cte}} + \underbrace{\underbrace{\sin(1)}_{\text{cte}}\,\underbrace{o(1)}_{\to 0} + \underbrace{o(1)}_{\to 0}}$

$\sin(1+h) \underset{0}{=} \sin(1) + o(1) \to 0$

alors

$$g(1+h) \underset{h\to 0}{=} 2 + 2h + h^2 + (1 + 3h + 3h^2 + h^3)(\sin(1) + o(1))$$

$$= 2 + \sin(1) + (2 + 3\sin(1))h + o(1)$$

$$+ h^2 + 3h.o(1) + (3h^2 + h^3)(\sin(1) + o(1))$$

on a $(2 + 3\sin(1))h \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ donc $(2 + 3\sin(1))h \underset{0}{=} o(1)$

$h^2 + 3h\,o(1) + (3h^2 + h^3)(\sin(1) + o(1)) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$g(1+h) \underset{0}{=} 2 + \sin(1) + o(1)$

$\boxed{g(x) \underset{1}{=} 2 + \sin(1) + o(1)}$ DL à l'ordre 0 en 1 deg

3.2 Exemple fondamental

Proposition 3.1. *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \dfrac{1}{1-u} \end{array}$ *admet des développements limités à l'ordre n, pour tout entier n, au voisinage de* 0 :

$$\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} \underbrace{1+u+u^2+\cdots+u^n}+o(u^n)$$

Pour $u \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} = \frac{1}{1-u} - \frac{u^{n+1}}{1-u}$

D'où

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\cdots+u^n + \frac{u^{n+1}}{1-u} \quad \text{pour } u \neq 1$$

On montre $\dfrac{u^{n+1}}{1-u} = o(u^n)$: On calcule donc pour $u \neq 0$

$$\frac{\frac{u^{n+1}}{1-u}}{u^n} = \frac{u}{1-u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0 \quad \text{alors} \quad \frac{u^{n+1}}{1-u} \underset{0}{=} o(u^n)$$

D'où

$$\boxed{\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1+u+u^2+\cdots+u^n + o(u^n)}$$

Si on pose $u=-x$, on a $\dfrac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\cdots+u^n + u^n \varepsilon_1(u)$

avec $\varepsilon_1(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Alors $u^n\varepsilon_1(u) = (-x)^n \varepsilon_1(-x)$

$$= x^n (-1)^n \varepsilon_1(-x)$$

et on peut poser $\varepsilon_2(x) = (-1)^n \varepsilon_1(-x)$. On a $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Donc $u^n \varepsilon_1(u) = x^n \varepsilon_2(x)$ donc $o(u^n) \underset{0}{=} o(x^n)$

alors

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

par théorème

on obtient par primitivation

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} K + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

avec K constante d'intégration à déterminer

L'égalité est vraie au voisinage de 0 donc $\ln(1+0) = K + 0$

d'où la formule

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})}$$

On pose $u = -x^2$ dans $\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + \dots + u^n + o(u^n)$

On a $u^n = -x^{2n}$ alors $o(u^n) \underset{0}{=} o(x^{2n}) = o(42 . x^{2n})$

D'où au voisinage de 0

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Par intégration, en remarquant que $\operatorname{Arctan}(0) = 0$

$\boxed{\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{=} 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})}$

$n \in \mathbb{N}$ entier

Exercice Calculer un $DL_2(0)$ de $g(x) = \frac{1}{1-x} + \sin(x)$

On a

$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$ $n=2$ dans la formule

$\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$ vrai mais insuffisant : DL_1

$\underset{0}{=} x + 0 . x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ vrai mais trop DL_3

$\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x^2)$ est le $DL_2(0)$ de $\sin(x)$

On somme

$$\boxed{g(x) \underset{0}{=} 1 + 2x + x^2 + o(x^2)}$$

3.3 Unicité du développement limité

Proposition 3.2. *Si f est une fonction admettant deux développements limités à l'ordre n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors ces développements sont égaux.*

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ *et* $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, *alors* $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = b_k$.

On appelera le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ *la partie régulière du DL de f à l'ordre n en a.*

Corollaire 3.3. *Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors pour tout entier $p \leqslant n$, f admet un développement limité à l'ordre p obtenu en tronquant le développement d'ordre n.*

Corollaire 3.4. *Soit f admettant un développement limité en 0 de partie régulière P. Si f est paire, alors P est pair. Si f est impaire, alors P est impair.*

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_p(x-a)^p + \underbrace{a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)}_{o((x-a)^p)}$$

par ordre de négligeabilité croissante

Exercice : $f(x) = \frac{1}{1+x}$ DL_3 en $a = 4$

Méthode 1 : on change de variable $x = 4 + h \iff h = x - 4$

on a $x \to 4 \iff h \to 0$

on calcule

$$g(h) = f(4+h) = \frac{1}{5+h} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1+h/5}$$ puis on pose $u = -\frac{h}{5}$

on a $h \to 0 \iff u \to 0$ et

$$\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$$ et $u^3 = -\frac{h^3}{125}$ donc $o(u^3) \underset{0}{=} o(h^3)$

Alors

$$f(4+h) \underset{h \to 0}{=} \frac{1}{5}\left(1 - \frac{h}{5} + \frac{h^2}{25} - \frac{h^3}{125} + o(h^3)\right)$$

Soit

$$f(x) \underset{x \to 4}{=} \frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-4) + \frac{1}{125}(x-4)^2 - \frac{1}{625}(x-4)^3 + o((x-4)^3)$$

DL à l'ordre 3 en $a = 4$ de $f(x) = \frac{1}{1+x}$

Autre méthode : par la formule de Taylor Young

f est $\mathcal{C}^3$ en $a=4$ alors

$$f(x) \underset{4}{=} f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4)^1 + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f^{(3)}(4)}{3!}(x-4)^3 + o((x-4)^3)$$

on calcule les dérivées

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad f(4) = \frac{1}{5}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad f'(4) = -\frac{1}{25}$

$f''(x) = -(-2)\cdot\frac{1}{(1+x)^3}$ $\quad f''(4) = \frac{2}{125}$ $\quad f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$ $\quad f'''(4) = -\frac{6}{625}$

Alors

$$\boxed{f(x) \underset{4}{=} \frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-4) + \frac{1}{125}(x-4)^2 - \frac{1}{625}(x-4)^3 + o((x-4)^3) \quad DL_3(4)}$$

Exemple : $g(x) = \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

On veut un DL_3 en 0

On ne peut pas appliquer la formule de Taylor à g en 0.

On calcule avec les formules :

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$$

il y a $0.x^7$ ici

$$\cos(x) - 1 \underset{\cancel{0}}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^7.\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

d'où en divisant

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} \underset{\cancel{0}}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^4}{720} + \underbrace{x^5\,\varepsilon(x)}_{o(x^5) = \frac{o(x^7)}{x^2}}$$

qui est le $DL_5(0)$ de g. Alors

$$\boxed{g(x) \underset{0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^3) \quad DL_3(0) \text{ de } g}$$

3.4 Forme normalisée d'un développement limité

Définition 3.2. Soit f une application admettant un développement limité l'ordre $n+p$ au voisinage de a. On appelle forme normalisée du développement limité de f, l'écriture :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)\right) \text{ où } a_0 \neq 0.$$

Proposition 3.5. *Si f a un développement limité normalisé $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(\right.$ où $a_0 \neq 0$, alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$ et f est de même signe que $a_0 h^p$.*

Exemple si $f(x) \underset{a}{=} 2(x-a)^2 - 6(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right)$

alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \underbrace{2h^2}_{} - 6h^3 + o(h^3) \underset{0}{=} \underbrace{h^2\left(2 - 6h + o(h)\right)}_{}$

ce terme est le + gros au voisinage de 0

forme normalisée

⚠ $h^3 \underset{0}{=} o(h^2)$

Remarque : $f(x) \underset{a}{=} 2(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right)$

alors $f(x) \underset{a}{\sim} 2(x-a)^2$

$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{a}{=} g(x) + o(g(x))$

Exemple : Calculons un $DL_3(0)$ de $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{1-x}$

On écrit $h(x) = \sin(x) \times \left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

$$h(x) \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(1 + x + x^2 + o(x^2)\right)$$

On sait que $-\dfrac{x^3}{6} \cdot x = -\dfrac{x^4}{6} \underset{0}{=} o(x^3)$

$o(x^4) \cdot x \underset{0}{=} o(x^5) \underset{0}{=} o(x^3)$

$o(x^4) \cdot o(x^2) \underset{0}{=} o(x^6) \underset{0}{=} o(x^3)$

$a \cdot 1 + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$

... On obtient après calcul des 12 termes

$$h(x) \underset{0}{=} \underset{x\cdot 1}{x} + \underset{x\cdot x}{x^2} + \left(\underset{x\cdot x^2}{1} - \underset{-\frac{x^3}{6}\cdot 1}{\frac{1}{6}}\right)x^3 + \underbrace{o(x^3) + o(x^4) + o(x^5) + o(x^6)}_{o(x^3)}$$

$$\boxed{\frac{\sin(x)}{1-x} \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)}$$

3.5 Translation d'un développement limité

Proposition 3.6. *Si f est une fonction vérifiant $f(a+h) = g(h)$ pour tout h dans l'intervalle I contenant 0, et si g admet un développement limité à l'ordre n en 0 : $g(x) \underset{0}{=} P(x) + o(x^n)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$.*

Pour calculer un DL_n, en a pour une fonction f, on pose $x = a+h \iff h = x-a$. On a $x \to a \iff h \to 0$.

Ce changement de variables définit une nouvelle fonction $g(h) = f(a+h) = f(x)$

Alors f a un DL_n en a si et seulement si g a un DL_n en 0.

Exemple $DL_3(4)$ de $x \mapsto \ln(x)$ $f(x) = \ln(x) = \ln(4+h) = g(h)$

Méthode 1 : on pose $f(x) = \ln(x)$ et $x = 4+h$

et $g(h) = \ln(4+h) = \ln\left(4\left(1+\frac{h}{4}\right)\right) = \ln(4) + \ln\left(1+\frac{h}{4}\right)$

on pose $u = \frac{h}{4}$, on a $u \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

d'où $g(h) \underset{0}{=} \ln(4) + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{192} + o(h^3)$

$$\ln(x) \underset{4}{=} \ln(4) + \frac{(x-4)}{4} - \frac{(x-4)^2}{32} + \frac{(x-4)^3}{192} + o\left((x-4)^3\right)$$

Méthode 2 : Par la formule de Taylor, f est C^3 en 4 alors

$f(4) = \ln(4)$, $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f''(4) = -\frac{1}{16}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = +\frac{2}{x^3}$, $f^{(3)}(4) = \frac{1}{32}$

$$f(x) \underset{4}{=} \ln(4) + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1/16}{2!}(x-4)^2 + \frac{1/32}{3!}(x-4)^3 + o\left((x-4)^3\right)$$

Exemple Calculer le DL_2 en $a=-1$ de $f(x)=xe^x$

Méthode 1 : on pose $x=-1+h$. On a $x\to -1 \iff h\to 0$

et $f(x)=f(-1+h)=(-1+h)e^{-1+h} = (-1+h)e^{-1}.e^h$

on utilise la formule $e^h \underset{0}{=} 1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)$

Puis on calcule

$$f(x)\underset{0}{=}\frac{1}{e}(-1+h)\left(1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)$$

$$\underset{0}{=}\frac{1}{e}\left(-1+h-h+h^2-\frac{h^2}{2}+\overbrace{(-1)o(h^2)+h\,o(h^2)+\frac{h^3}{2}}^{o(h^2)}\right)$$

d'où $\boxed{f(x)\underset{0}{=}\frac{1}{e}\left(-1+\frac{h^2}{2}+o\left(\frac{h^2}{2}\right)\right) \underset{-1}{=} \frac{1}{e}\left(-1+\frac{(x+1)^2}{2}+o((x+1)^2)\right)}$

Méthode 2 par la formule de Taylor : f est C^2 sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=(1+x)e^x$ $\quad f''(x)=(2+x)e^x$ $\quad f'(-1)=0$ $\quad f''(-1)=\frac{1}{e}$

d'où

$$f(x)\underset{-1}{=} -\frac{1}{e}+0+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+o((x+1)^2)$$

$\dfrac{-h^3/2}{h^2} = -\frac{h}{2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ donc $-\frac{h^3}{2}\underset{0}{=}o(h^2)$ mais $h^2\underset{+\infty}{=}o(h^3)$

et $h^2 \underset{1}{\sim} h^3$

3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si la fonction g définie par $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n sur l'intervalle $J_+ = \left\{\frac{1}{x} \middle| x \in I \cap \mathbb{R}_+^*\right\}$ (respectivement sur $J_- = \left\{\frac{1}{x} \middle| x \in I \cap \mathbb{R}_-^*\right\}$), alors on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Si $g(u) \underset{0^+}{=} P(u) + o(u^n)$, alors $f(x) \underset{+\infty}{=} P(\frac{1}{x}) + o(\frac{1}{x^n})$.

on pose le changement de variables $u = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{u}$

et $f(x) = f(\frac{1}{u}) = g(u)$ et $x \to +\infty \iff u \to 0^+$

Si g a un DL_n en 0^+, alors on dit que f a un DL_n en $+\infty$

0^- $\qquad$ $-\infty$

Exemple : DL_n en $+\infty$ de $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$

On pose $u = \frac{1}{x}$ et on calcule $g(u) = f(\frac{1}{u}) = f(x)$

On trouve $g(u) = \frac{2/u}{3/u - 1} = \frac{2}{3-u}$ dont on calcule un DL_n en 0

$g(u) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-u/3}$. on pose $v = \frac{u}{3}$. On a bien $v \xrightarrow[u \to 0]{} 0$ et on a la formule $\frac{1}{1-v} \underset{0}{=} 1 + v + v^2 + \dots + v^n + o(v^n)$

n est fixé

d'où

$$g(u) \underset{0}{=} \frac{2}{3}\left(1 + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{3^2} + \dots + \frac{u^n}{3^n} + o(u^n)\right) \quad \text{car } o(u^n) \underset{0}{=} o\left(\frac{u^n}{3^n}\right)$$

g a un DL_n en 0 donc en 0^+ alors f a un DL_n en $+\infty$ qui est

$$f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x^2} + \dots + \frac{1}{3^n x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)$$

valable aussi en $-\infty$

Suite : d'après le DL, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{2}{3}$

On a $f(x) \underset{\pm\infty}{=} \frac{2}{3} + \frac{2}{9x} + o(\frac{1}{x})$ $\quad DL_1(+\infty)$ de f

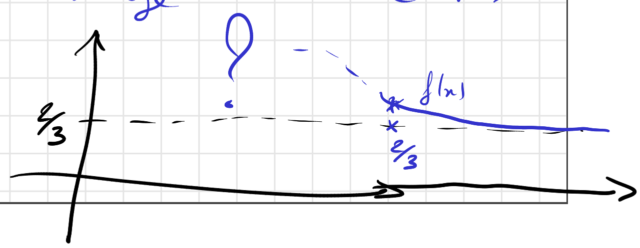
soit $f(x) - \frac{2}{3} \underset{+\infty}{=} \frac{2}{9x} + o(\frac{1}{x}) \iff f(x) - \frac{2}{3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{9x}$

alors on connaît le signe de $f(x) - \frac{2}{3}$ au voisinage de $+\infty$

$f(x) - \frac{2}{3}$ est du signe de $\frac{2}{9x}$ au voisinage de $+\infty$: c'est ≥ 0

la courbe de f a pour asymptote $y = \frac{2}{3}$

et la courbe est au dessus de l'asymptote en $+\infty$



-1

Exemple $f(x) = x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. On cherche un DL en $+\infty$

f est définie pour $1+\frac{1}{x} > 0 \iff \frac{1}{x} > -1 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

on pose $u = \frac{1}{x}$ et $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u^2}\ln(1+u)$.

on calcule un développement en 0 de g : $u \to 0$

⚠ g n'a pas de DL en 0 mais on peut calculer :

$\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ $DL_3(0)$ de $\ln(1+u)$

$g(u) \underset{0}{=} \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + \frac{u}{3} + o(u)$ développement asymptotique

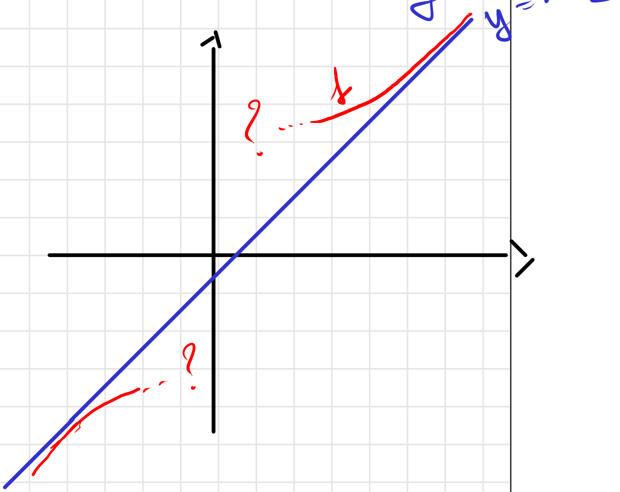
c'est-à-dire $g(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + \frac{u}{3} + u\varepsilon(u)$ avec $\varepsilon(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$

d'où

$$f(x) \underset{\pm\infty}{=} x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$ développement asymptotique de f

Alors $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \underset{\pm\infty}{=} \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - \left(\underbrace{x - \frac{1}{2}}_{\text{affine}}\right) = 0$ donc la courbe de f a une asymptote oblique $y = x - \frac{1}{2}$ au voisinage de $\pm\infty$



Et en $+\infty$, $\frac{1}{3x} > 0$, donc la courbe est au-dessus de l'asymptote

Et en $-\infty$, elle est en-dessous

4 Formule de Taylor-Young

4.1 Intégration terme à terme d'un DL

Théorème 4.1. *Soit I un intervalle contenant a et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue possédant un développement limité à l'ordre n en a qui est :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Alors toute primitive F de f sur I possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en a qui est :

$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

⚠ attention à la constante.

Exemple : $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x)$

Exemple : $x \longmapsto \tan(x)$ calcul d'un DL en 0

$\tan$ est C^1 en 0 alors on a le DL suivant $\tan(x) \underset{0}{=} \tan(0) + \tan'(0)\, x + o(x)$

$\tan(x) \underset{0}{=} x + o(x)$. On sait que $\forall x \in D_{\tan}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

d'où $\tan'(x) \underset{0}{=} 1 + (x + o(x))^2 \underset{0}{=} 1 + x^2 + 2x\,o(x) + o(x)\cdot o(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + o(x^2)$

On intègre terme à terme :

$\tan(x) \underset{0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ $DL_3(0)$ de $\tan$

on calcule

$\tan^2(x) \underset{0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \underset{0}{=} x^2 + 2x \cdot \frac{x^3}{3} + o(x^4) + o(x^4) + o(x^4)$

alors

$\tan'(x) \underset{0}{=} 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$

On intègre terme à terme

$\tan(x) \underset{0}{=} 0 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ $DL_5(0)$ de $\tan$ et .....

4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.2. *Soit f une fonction de classe C^n d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ avec $n \in \mathbb{N}$. f possède en tout point a de I un développement limité d'ordre n donné par :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \qquad \text{ou}$$

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

Exemple exp en 0 $f(x) = e^x$ est de classe C^n pour tout n en 0 et $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(x) = e^x$ $f^{(k)}(0) = 1$ d'où

$$\boxed{e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)}$$

DLn en 0 de exp

Exemple important $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ CONSTANT

$g(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$ est définie et de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$

pour $k \in \mathbb{N}$, et $x \in]-1, +\infty[$ $g^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}$

$g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $g''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ et preuve par récurrence :

si la formule est vraie pour $k \in \mathbb{N}$

$$g^{(k+1)}(x) = \left(g^{(k)}\right)'(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(\alpha-k)(1+x)^{\alpha-(k+1)}$$

alors la formule est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$

On utilise la formule de Taylor-Young :

$$\boxed{(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{1.2.3\cdots n} x^n + o(x^n)}$$

pour $(1+x)^3 \underset{0}{=} 1 + 3x + 3 \cdot \frac{2}{2} x^2 + 3 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{3 \cdot 2 \cdot \cancel{1 \cdot 0}}{\cancel{4!}} x^4 + \cdots + 0 \cdot x^n + o(x^n)$

$(1+x)^3 \underset{0}{=} 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + o(x^n)$ DLn(0)

Exemple : DL$_2$(0) de $\varphi(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1.2} x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2.3} x^3 + o(x^3)$$

$$\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\varphi(x) \underset{0}{=} \sqrt{1+1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)} = \sqrt{2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)}$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+o(x^2)}$$

on pose $u \underset{0}{=} \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)$ et on utilise le DL de $\sqrt{1+u}$ en 0 car $\boxed{u \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$

$$\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+o(u^2)$$

on calcule
$$u^2 \underset{0}{=} \left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+o(x^2)\right)^2 = \frac{1}{16}x^2+o(x^2)$$

$\frac{1}{4}x \cdot \frac{1}{4}x$

car les 8 autres termes sont négligeables devant x^2

alors on a
$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sqrt{1+u} \underset{0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+o(x^2)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}x^2+o(x^2)\right)+o(x^2)\right)$$

car $o(u^2) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{16}x^2\right)$ car $u^2 \underset{0}{\sim} \frac{1}{16}x^2$ donc $o(u^2) \underset{0}{=} o(x^2)$

D'où
$$\varphi(x) \underset{0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2+o(x^2)\right)$$

Exemple $\operatorname{Arcsin}(x)$ DL en 0

on utilise $\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1-\frac{1}{2}u+\frac{3}{8}u^2+o(u^2) \qquad \frac{-\frac{1}{2}\times -\frac{3}{2}}{1\times 2}$$

et $u = -x^2$ $u^2 = x^4$ et $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+o(x^4)$

on intègre
$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{0}{=} \operatorname{Arcsin}(0)+x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+o(x^5)$$
$$= x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+o(x^6)$$

⚠ $o(x^6)$ est gratuit car la fonction Arcsin est impaire donc son DL en 0 n'a que des termes impairs.

5 Opérations sur les développement limités

5.1 Somme et produit

Proposition 5.1. *Soit f et g deux fonctions réelles admettant en a des développements limités à l'ordre n :*

$$f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \text{ et } g(x) \underset{a}{=} Q(x-a) + o((x-a)^n)$$

où Pet Q sont des polynômes réels de degré au plus égal à n.
Alors les fonctions $f+g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n qui sont :

$$(f+g)(x) \underset{a}{=} P(x-a) + Q(x-a) + o\left((x-a)^n\right).$$

$$(fg)(x) \underset{a}{=} R(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$$

où R est le polynôme obtenu tronquant le produit PQ au degré n.

⚠ $x^2 + o(x^2) + x^4 + 42x^5 \underset{0}{=} x^2 + o(x^2)$

5.2 Dérivation d'un développement limité

Proposition 5.2. *Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I contenant a, admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n.$$

Si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a, alors ce développement s'obtient en dérivant celui de f :

$$f'(x) \underset{a}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-a)^{k-1} + o(x-a)^{n-1}.$$

ON NE DÉRIVE PAS LES DL !

Mais on sait que :

① Si f est continue en a alors f a un DL_0 en a : $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(\underbrace{1}_{(x-a)^0})$

② Si f a un DL_0 en a : $f(x) \underset{a}{=} b_0 + o(1)$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_0$
et si, de plus, f est définie en a, alors $b_0 = f(a)$ et f est continue en a

③ Si f est dérivable en a, alors par théorème, f a un $DL_1(a)$:
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{(x-a)\varepsilon(x-a)}_{o(x-a)} \quad \text{avec } \varepsilon \underset{0}{\longrightarrow} 0$$

④ Réciproquement, si f est définie en a et si f a un $DL_1(a)$
$f(x) \underset{a}{=} b_0 + b_1(x-a) + o(x-a)$, alors f est continue en a et
$f(a) = b_0$ et $f(x) - f(a) \underset{a}{=} b_1(x-a) + o(x-a) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a}{=} b_1 + o(1)$
alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = b_1$ donc f est dérivable en a et $f'(a) = b_1$

et c'est tout :

exemple : $f(x) = \begin{cases} x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f a un DL_2 en 0 $\quad f(x) \underset{0}{=} x + o(x^2) \quad$ car $\dfrac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2} = \underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\varepsilon(x)}$, $x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = x^2 \varepsilon(x)$

alors f a un DL_1 en 0 $f(x) \underset{0}{=} 1.x + o(x)$ et f est définie en 0
alors f est continue en 0 et f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

Mais, par calcul, on montre que f' n'a pas de limite en 0 donc f' n'est pas dérivable en 0
donc f n'est pas 2 fois dérivable en 0

5.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 5.3. *soit f une fonction définie sur I admettant un $Dl_n(a)$ en $a \in I$, telle que $f(I) \subset J$, avec $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$.*

Soit g une fonction définie sur J admettant un DL_n en $b = f(a)$ avec $g(u) \underset{b}{=} Q(u-b) + o(u-b)^n$.

Alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme composé $Q(P(X))$:

$$g \circ f(x) \underset{a}{=} \text{reste de la division de } Q(P(x-a)) \text{ par } (x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^n\right).$$

exemple : $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$

$M_1 =$ Taylor

M_2 on commence par $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

puis $e^{\cos(x)} \underset{0}{=} e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} \underset{0}{=} e^1 . e^{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}$ $= u \to 0$

on pose $u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et on a $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et

$e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2!} + o(u^2)$ et $u^2 \underset{0}{=} \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

On a $u^2 \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{4}$ donc $u^2 = o(x^3)$

alors u $\quad u^2/2 \quad o(u^2)$

$$e^{\cos(x)} \underset{0}{=} e . \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \frac{o(x^3)}{2} + o(x^4)\right)$$

$$\underset{0}{=} e\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \leftarrow DL_3$$

Erreur commune : $e^u = 1 + u + o(u)$ donne

$$e^{\cos(x)} \underset{0}{=} e\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + o\left(-\frac{x^2}{2} + \cancel{o(x^3)}\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} e\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + o(x^2)\right) \underset{0}{=} e\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

DL_2

5.4 Développement limité d'un quotient

Proposition 5.4. *Si u est une fonction telle que $\lim_a u = 0$ et si u a un développement limité à l'ordre n en a, alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un $DL_n(a)$.*

Si $u(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$, alors $\dfrac{1}{1-u(x)} \underset{a}{=} 1 + P(x-a) + P^2(x-a) + P^3(x-a) + \cdots + P^n(x-a) + o(x-a)^n$: le développement limité s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $1 + P(X) + P^2(X) + \cdots + P^n(X)$.

Règle : on utilise la formule de Taylor

OU la formule $\dfrac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + \cdots + u^n + o(u^n)$

OU $(1+u)^\alpha$ avec α négatif $\dfrac{1}{1+v}$

Exemple $f(x) = \dfrac{1}{e^x - e} - \dfrac{1}{e(x-1)}$ développement limité en 1

On pose $x = 1 + h \iff h = x - 1$ $\quad$ f n'est pas définie en 1

$g(h) = f(1+h) = \dfrac{1}{e^{1+h} - e} - \dfrac{1}{e\,h}$

$e^{1+h} - e = e(e^h - 1) \underset{0}{=} e\left(h + \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)\right)$

$\dfrac{1}{e^{1+h} - e} \underset{0}{=} \dfrac{1}{e\left(h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)} = \dfrac{1}{e\,h\left(1 + \frac{h}{2} + o(h)\right)}$

et $\dfrac{1}{1+v} \underset{0}{=} (1+v)^{-1} \underset{0}{=} 1 - v + v^2 + o(v^2) \underset{0}{=} 1 - v + o(v)$

avec $v \underset{0}{=} \dfrac{h}{2} + o(h)$ $\quad$ $o(v) \underset{0}{=} o(h)$

$\dfrac{1}{e^{1+h} - e} = \dfrac{1}{e\,h}\Big(1 - \underbrace{\left(\frac{h}{2} + o(h)\right)}_{v} + \underbrace{o(h)}_{o(v)}\Big)$

Alors $f(x) \underset{h \to 0}{=} \dfrac{1}{e\,h}\left(\cancel{1} - \dfrac{h}{2} + o(h) - \cancel{1}\right) \underset{\substack{h \to 0 \\ x \to 1}}{=} -\dfrac{1}{2e} + o(1)$

on a $DL_0(1)$ de f $\quad$ $f(x) \underset{1}{=} -\dfrac{1}{2e} + o(1)$ $\quad$ $(x-1)^0 = 1$

on sait donc que $\quad$ $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} -\dfrac{1}{2e}$ $\quad$ $o((x-a)^n)$

6 Formulaire

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$

$\sum x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}x^n + \circ(x^n)$$

par intégration

$$\arctan x \underset{0}{=} x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^p \tfrac{1}{2p+1}x^{2p+1} + \circ(x^{2p+1})$$

par intégration

$$e^x \underset{0}{=} 1 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

Taylor

termes pairs de e^x

$$\operatorname{ch} x \underset{0}{=} 1 + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots + \tfrac{1}{(2p)!}x^{2p} + \circ(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{0}{=} x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \cdots + \tfrac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + \circ(x^{2p+1})$$

viennent de exp

se ressemblent

$$\cos x \underset{0}{=} 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^p \tfrac{1}{(2p)!}x^{2p} + \circ(x^{2p})$$

$$\sin x \underset{0}{=} x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^p \tfrac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + \circ(x^{2p+1})$$

$$\tan x \underset{0}{=} x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{17}{315}x^7 + \circ(x^8)$$

DIFFICILE à RETROUVER

7 Applications

7.1 Étude de limites

Proposition 7.1. *Si une fonction f a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f a une limite en a qui vaut a_0.*

Exemple : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{e^{x^2} - 1}$

C'est une forme indéterminée. On calcule un équivalent en 0 de $\sqrt{\cos(x)} - 1$: $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. On pose $u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$

et $\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}u + o(u) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$ car $o(u) = o(x^2)$

alors $\sqrt{\cos(x)} - 1 \underset{0}{=} -\frac{x^2}{4} + o(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{4}$

Et $e^{x^2} - 1 \underset{0}{=} x^2 + o(x^2)$ car $e^V \underset{0}{=} 1 + V + o(V)$

$e^{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} x^2$ alors $\displaystyle\frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{e^{x^2} - 1} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2/4}{x^2} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{4}$

donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{e^{x^2} - 1} = -1/4$

7.2 Prolongement par continuité

Proposition 7.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.

Exemple $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ en 0

on calcule un DL_0 en 0 de f

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \left(1 - \exp(-x)\right) \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \left(1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

alors $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)} \Rightarrow f(x) \underset{0}{\sim} 1$

f a un DL_0 en 0 donc on peut la prolonger en posant $f(0) = 1$

on pose $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{en } 0 \end{cases}$

on a $\tilde{f}(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ $\tilde{f}$ est définie en 0 et a un DL_1

alors $\boxed{\tilde{f} \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \tilde{f}'(0) = -\frac{1}{2} \text{ (coeff de } x)}$

7.3 Dérivabilité d'un prolongement par continuité

voir ci-dessus

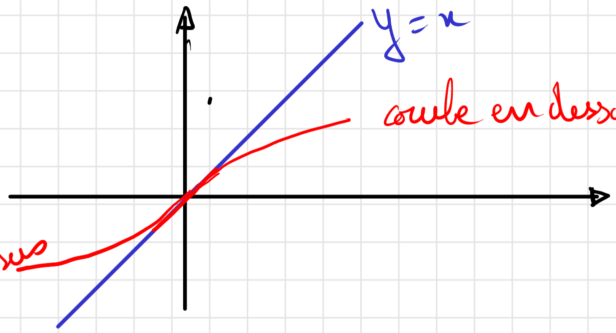
Proposition 7.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$, a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $\tilde{f}(a) = a_0$ et le prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = a_1$.

1er terme non nul après l'ordre 1

7.4 Position relative de la courbe et de la tangente

Proposition 7.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $p \geqslant 2$ et $a_p \neq 0$, alors la droite $y = a_0 + a_1(x-a)$ est tangente à la courbe représentative de f en a.
De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point a est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$: au-dessus si $a_p(x-a)^p \geqslant 0$.

Exemple : $f(x) = \text{Arctan}(x)$ en 0 :
$f(x) \underset{0}{=} \underline{x} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ est un DL_3 en 0
alors $y = 0 + x$ est tangente à la courbe de f en 0.
la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $f(x) - (x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$ c'est $\geqslant 0$ pour $x \leqslant 0$
et $\leqslant 0$ pour $x \geqslant 0$



$$f(x) \underset{a}{=} \underbrace{b_0 + b_1(x-a)}_{\text{éq de la tangente}} + \underline{b_p(x-a)^p} + o((x-a)^p)$$

le 1er terme non nul d'ordre $\geqslant 2$ donne la position de la courbe par rapport à la tangente

tout ceci est $\underset{a}{\sim} b_p(x-a)^p$

Exemple
$g(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ a un DL en 1 $\quad g(x) \underset{1}{=} (x-1) - (x-1)^2 + o(x-1)^2$
alors la tangente à la courbe de g en 1 est $y = x - 1$
et la courbe est en dessous de la tangente.

7.5 Étude d'un extremum

Proposition 7.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si une fonction f définie sur I a un développement limité de la forme $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$ avec $a_2 \neq 0$, alors la fonction f a un extremum local en a : maximum local si $a_2 < 0$ et minimum local si $a_2 > 0$.

si $f(x) \underset{a}{=} b_0 + b_2(x-a)^2 + o(x-a)^2$
alors $f(x) - b_0 \underset{a}{\sim} b_2(x-a)^2$

si $b_2 \geqslant 0$, au voisinage de a, $f(x) - b_0 \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant b_0$
alors b_0 est un minimum local
⚠ la tangente en a est $y = b_0$ horizontale.

7.6 Asymptotes

Proposition 7.6. *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).*

Si il existe un réel k tel que $$f(x) - kx \underset{+\infty \text{ ou } -\infty}{=} a_0 + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right) \text{ avec } a_p \neq 0,$$

alors la droite $y = kx + a_0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$). De plus, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\frac{a_p}{x^p}$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

Exemple $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ $\Delta < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 \geq 0$

h est définie sur $\mathbb{R}$. Etude en $\pm\infty$?

on calcule un développement asymptotique en $+\infty$

en posant : $u = \frac{1}{x}$. On calcule $g(u) = h\left(\frac{1}{u}\right) = \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + 1}$

On a $u \to 0^+$. on utilise $\sqrt{1+v} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}v - \frac{3}{8}v^2 + o(v^2)$

On factorise par le plus gros terme :

$$\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + 1} = \sqrt{\frac{1}{u^2}\left(1 + \underbrace{u+u^2}_{v}\right)} = \frac{1}{|u|}\sqrt{1+v} \quad \text{avec } v = u + u^2$$

$$= \frac{1}{|u|}\left(1 + \frac{1}{2}v - \frac{3}{8}v^2 + o(v^2)\right) \text{ avec } v^2 = u^2 + o(u^2) \text{ et } v^2 \sim u^2$$

donc $o(v^2) = o(u^2)$

$$g(u) \underset{0}{=} \frac{1}{|u|}\left(1 + \frac{1}{2}u + \overbrace{\left(\frac{4}{8} - \frac{3}{8}\right)}^{>0} u^2 + o(u^2)\right)$$

d'où

$$f(x) \underset{+\infty}{=} |x|\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \quad \text{et } x > 0 \text{ en } +\infty$$

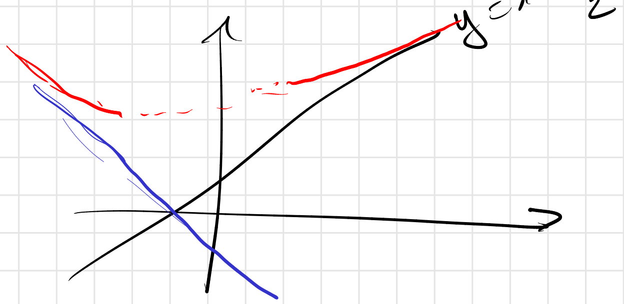
$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

On a $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc la droite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f et $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{8x} \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ donc la courbe est au dessus

en $-\infty$

$f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Il y a une autre asymptote $y = -x - \frac{1}{2}$



$f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$