Mathématique - Devoir Maison n°16

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une rotation vectorielle. Préciser l'axe et un angle de cette rotation.

Exercice 2

I- Étude d'une application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Soit B une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Soit φ_B l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui à la matrice X associe la matrice $\varphi_B(X) = B \times X$

1. Montrer que φ_B est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
2. On suppose dans cette question que $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) φ_B est-elle surjective ? Bijective ?
   (b) Déterminer la matrice de φ_B dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est constituée des matrices $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ où $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On prend dans cette question $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. φ_B est-elle surjective ? Bijective ?

II- Calcul des puissances n-ième d'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique, que l'on notera $\mathscr{B}_0$.
Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ; \ (x, y, z) \longmapsto (y - ax, 2x - ay + 2z, y - az)$$

4. Expliciter la matrice, notée M_a, de f_a relativement à la base canonique $\mathscr{B}_0$.
5. Déterminer, en fonction du réel a, le rang de cette matrice.
6. Déterminer une famille génératrice du noyau de f_a dans les trois cas particuliers suivants : $a = -2, a = 0$ et $a = 2$.

   Pour la suite, on choisit $a = -2$ et on définit les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ et $u_3 = (1, -2, 1)$.
7. (a) Vérifier que $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}_1$, notée $P_{\mathscr{B}_0\mathscr{B}_1}$. Déterminer de même la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}_0$, notée $P_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_0}$.
   (c) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, exprimer $f_{-2}(u_i)$ en fonction de u_i. En déduire la matrice D_{-2} de l'endomorphisme f_{-2} relativement à la base $\mathscr{B}_1$.
   (d) Donner, sans démonstration, une égalité reliant les matrices M_{-2} , D_{-2}, $P_{\mathscr{B}_0\mathscr{B}_1}$ et $P_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_0}$.
   (e) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Donner l'expression de ${D_{-2}}^n$ en fonction de n puis en déduire l'expression de ${M_{-2}}^n$ en fonction de n. (on explicitera les neuf coefficients)
   (f) L'expression de ${M_{-2}}^n$ ainsi obtenue peut-elle se généraliser à tout entier relatif n ?