Corrigé TD 13 - Géométrie spatiale

Exercice 1 :

1. On écrit que $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont coplanaires $\iff \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right] = 0$. On obtient
$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 = -(x+2) + 3(y-2) - (z-1) \text{ qui donne } \boxed{\mathcal{P} : x - 3y + z + 7 = 0}$$

2. On écrit $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0$.
$$\begin{vmatrix} x+2 & 3 & 5 \\ y-2 & -5 & 0 \\ z-1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 = 10(x+2) + 26(y-2) + 25(z-1)$$
qui donne $\boxed{\mathcal{P} : 10x + 26y + 25z - 57 = 0}$

3. Si $\mathcal{P}$ est parallèle au plan Π, alors ils ont les mêmes vecteurs normaux. Donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme : $3x - 2y + z + c = 0$. Avec les coordonnées de A, on obtient $c = 9$. $\boxed{\mathcal{P} : 3x - 2y + z + 9 = 0}$

4. On écrit que $D = B + \mathbb{R}.\overrightarrow{u}$. Alors $\mathcal{P}$ est le plan passant par B et dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$.
$$D : \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x - 4y - z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
D passe par $(\frac{3}{2}, 0, -\frac{5}{2})$ et est dirigée par $(3, 2, -5)$. Elle passe alors par $B : (0, -1, 0)$.
Alors l'équation de $\mathcal{P}$ est $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ y+1 & -3 & 2 \\ z & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$ soit $\boxed{\mathcal{P} : 17x + 7y + 13z + 7 = 0}$

5. Si $\mathcal{P}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{w}$ alors $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $2x + 3y - 2z + d = 0$. Comme $\mathcal{P}$ passe par E, on trouve $2 - 12 - 4 + d = 0$ soit $d = 14$. $\boxed{\mathcal{P} : 2x + 3y - 2z + 14 = 0}$

6. $\mathcal{P}$ est dirigé par $\overrightarrow{u}$ qui dirige D et $\overrightarrow{v}$ qui dirige Δ. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, le plan $\mathcal{P}$ n'est pas unique. De plus, $\mathcal{P}$ passe par tout point de D.
On étudie D :
$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x - 4y + z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 4y + z = 2 \\ 11y - 2z = -5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{11} z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$
D passe par $(\frac{2}{11}, -\frac{5}{11}, 0)$ et est dirigée par $(-3, 2, 11)$.
De même pour Δ
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - z = -6 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
Δ passe par $(2, 2, 0)$ et est dirigée par $(-2, -1, 3)$.
Alors $\mathcal{P}$ a pour équation :
$$\begin{vmatrix} x - \frac{2}{11} & -3 & -2 \\ y + \frac{5}{11} & 2 & -1 \\ z & 11 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
On obtient $17x - 13y + 7z + d = 0$ et on calcule $d = -9$.
$\boxed{\mathcal{P} : 17x - 13y + 7z - 9 = 0}$
La distance de $M : (-1, 1, 3)$ à $\mathcal{P}$ se calcule à l'aide de la formule :
$$\boxed{d(M, \mathcal{P}) = \frac{|-17 - 13 + 21 - 9|}{\sqrt{17^2 + 13^2 + 7^2}} = \frac{18}{\sqrt{507}} = \frac{6\sqrt{3}}{13}.}$$

7. L'intersection $(xOy) \cap \pi$ est une droite invariante par symétrie, alors elle est incluse dans $\mathcal{P}$.

   On cherche un vecteur directeur de cette intersection. Or les vecteurs directeurs de π vérifient $x - y + 2z = 0$ et ceux de xOy vérifient $z = 0$. Alors $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$ est un vecteur directeur de cette droite et elle passe par $A(3, 0, 0)$.

   Le point $O(0, 0, 0)$ est un point de xOy, on cherche son projeté H_O sur π parallèlement à Oz.

   Alors $\quad H_O = O + \lambda\overrightarrow{u_z}$ d'où $H_O = (0, 0, \lambda)$ et $H_O \in \pi$ donne $\lambda = \frac{3}{2}$.

   Alors le symétrique O' de O par rapport à π est tel que $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OH_O}$ soit $O' = 2H_O - O$. On trouve $O'(0, 0, 3)$.

   Par conséquent le plan $\mathcal{P}$ est le plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AO'}$. Son équation est :

$$\begin{vmatrix} x-0 & 1 & -1 \\ y-0 & 1 & 0 \\ z-0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P} : -x + y - z + 3 = 0}$$

Exercice 2 :

1. On sait que $\mathcal{D}$ est la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ alors le plan orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et passant par A contient B et $\overrightarrow{AB}$ donc il contient $\mathcal{D}$.

   Si l'on répète l'opération avec deux vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ non colinéaires, on obtient deux plans dont l'intersection est la droite $\mathcal{D}$.

   On a $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 1)$. On trouve deux vecteurs orthogonaux non colinéaires : $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{n_2} = (1, 0, -2)$. Le plan P_1 passant par A et normal à $\overrightarrow{n_1}$ a pour équation $x + y - 3 = 0$. Le plan P_2 passant par A et normal à $\overrightarrow{n_2}$ a pour équation $x - 2z + 5 = 0$. Alors on a des équations de $\mathcal{D}$:

$$\boxed{\mathcal{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x + y - 3 & = & 0 \\ x - 2z + 5 & = & 0 \end{array}\right.}$$

   Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige $\mathcal{D}$. Alors la distance de M à la droite $\mathcal{D}$ est $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{AB}||}$. On a $\overrightarrow{AB}(2, -2, 1)$ et $\overrightarrow{AM}(0, -3, 3)$. D'où $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = (3, 6, 6)$. Et $\boxed{d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = 3.}$

2. On a immédiatement une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ par $(x, y, z) = (1, 3, -1) + \lambda(-3, 2, 1)$.

   On élimine λ ce qui donne : $\left\{\begin{array}{rcl} x \quad + 3z & = & -2 \\ y - 2z & = & 5 \\ z & = & -1 + \lambda \end{array}\right.$. Et finalement les équations de $\mathcal{D}$ sont : $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x \quad + 3z & = & -2 \\ y - 2z & = & 5 \end{array}\right.}$

3. $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\lambda \\ y & = & 2 - \lambda \\ z & = & 2 + 2\lambda \end{array}\right.$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 5 \\ y & = & 2 - \lambda \\ 2y + z & = & 6 \end{array}\right.$ Et finalement les équations de $\mathcal{D}$ sont : $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 5 \\ 2y + z & = & 6 \end{array}\right.}$

Exercice 3 :

1. Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\ (2, -4, 3)$ est normal à $\mathcal{P}_1$ et le vecteur $\overrightarrow{n_2}\ (1, -2, 3)$ est normal à $\mathcal{P}_2$. Leur produit vectoriel vaut $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}\ (-6, -3, 0)\ //$ à $(2, 1, 0) \neq \overrightarrow{0}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc $\boxed{\text{les plans } \mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ ne sont pas parallèles.}}$

   Leur intersection est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(2, 1, 0)$.

   Pour trouver un point de l'intersection, il faut résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 4y + 3z + 5 & = & 0 \\ x - 2y + 3z - 2 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + 3z - 2 & = & 0 \\ -3z + 9 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -7 + 2y \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Alors
$$\boxed{\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (-7,0,3) + \mathbb{R}.(2,1,0) \text{ est la droite passant par } (-7,0,3) \text{ et dirigée par } (2,1,0).}$$

2. Un plan perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}$ $(2,1,0)$. Alors $\mathcal{P}_3$ a une équation de la forme $2x+y+d=0$.
   Comme $\mathcal{P}_3$ passe par A $(2,-2,0)$, on a $d=-2$ et on trouve $\boxed{\mathcal{P}_3 : 2x+y-2=0}$.

Exercice 4 :

On résout le système définissant D :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+z &=& -5 \\ x+y+2z &=& -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3y+3z &=& -9 \\ x+y+2z &=& -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -3-z \\ x &=& -1-z \end{array}\right.$$

Ce qui donne : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc D est dirigée par $\overrightarrow{u} = (1,1,-1)$ et passe par le point de coordonnées $(-1,-3,0)$.

Δ est l'intersection de deux plans P_1 et P_1', donc Δ est dirigée par le produit vectoriel des normales de P_1 et P_1' : $(1,2,-1) \wedge (0,0,1) = (2,-1,0)$.

De plus, on cherche une solution du système définissant Δ : $z=5$, puis $y=0$ et enfin $x=-1$.

Δ est dirigée par $\overrightarrow{v} = (2,-1,0)$. Alors, la perpendiculaire commune à D et Δ est dirigée par $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$: $(1,1,-1) \wedge (2,-1,0) = (-1,-2,-3)$. On choisit $\overrightarrow{w} = (1,2,3)$

Soit Q le plan contenant Δ et $\overrightarrow{w}$. On sait que le point $(-1,0,5) \in \Delta$ alors Q a pour équation :
$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y & -1 & 2 \\ z-5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ce qui donne } Q : -3x-6y+5z-28=0.$$

On note H_1 le point d'intersection de Q et D : $H_1 = Q \cap D$. On calcule :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+z &=& -5 \\ x+y+2z &=& -4 \\ -3x-6y+5z &=& 28 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& -4 \\ 3y+3z &=& -9 \\ -3y+11z &=& 16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& -4 \\ y+z &=& -3 \\ 14z &=& 7 \end{array}\right.$$

On trouve $H_1 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Donc, la perpendiculaire commune est $H_1 + \mathbb{R}.\overrightarrow{w} = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(1,2,3) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Soit $\overrightarrow{n_1} = (-2,1,0)$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{w}$. Alors Q_1 le plan normal à $\overrightarrow{n_1}$ et passant par H_1 contient la perpendiculaire commune $H_1 + \mathbb{R}.\overrightarrow{w}$. Q_1 a pour équation : $-2x+y+\frac{1}{2}=0$.

Alors, $\boxed{\text{La perpendiculaire commune à } D \text{ et } \Delta \text{ est } Q \cap Q_1 = \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+\frac{1}{2} &=& 0 \\ -3x-6y+5z-28 &=& 0 \end{array}\right. .}$

Soit P le plan contenant D et $\overrightarrow{w}$. On calcule $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = (1,1,-1) \wedge (1,2,3) = (5,-4,1)$ qui est un vecteur normal de P.

On sait que le point $(-1,-3,0) \in D$ alors P a pour équation : $5x-4y+z-7=0$.

On cherche le point d'intersection H_2 de la perpendiculaire commune avec Δ. On a $H_2 = P \cap D$. Donc H_2 est l'unique solution du système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x-4y+z &=& 7 \\ -x+2y+z &=& -5 \\ x+y+2z &=& -4 \end{array}\right. . \text{ On trouve } H_2 = (0, -\frac{1}{2}, 5).$$

Alors $d(D,\Delta)=||\overrightarrow{H_1H_2}||$ avec $\overrightarrow{H_1H_2}=(\frac{3}{2},3,\frac{9}{2})$. $\boxed{\text{La distance entre } D \text{ et } \Delta \text{ est } 3\sqrt{\frac{7}{2}}.}$

Exercice 5 :

On utilise une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x &= 3+t \\ y &= -1+2t \\ z &= 1-t \end{cases}$

Soit $M(x_M,y_M,z_M)$ un point de l'espace. On appelle N le projeté de M sur $\mathcal{D}$ parallèlement à $\mathcal{P}$.

On calcule une équation du plan $\mathcal{Q}$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par M : elle est de la forme

$2x-3y+z+d=0$ qui donne $\mathcal{Q}: 2x-3y+z-2x_M+3y_M-z_M=0$

Le point recherché N est à l'intersection de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{D}$:

On cherche le paramètre de la représentation de $\mathcal{D}$ qui correspond à N :

$2(3+t)-3(-1+2t)+(1-t)-2x_M+3y_M-z_M=0 \iff 5t=10-2x_M+3y_M-z_M$

$\iff t=2-\frac{2}{5}x_M+\frac{3}{5}y_M-\frac{1}{5}z_M$.

$\iff N\left(5-\frac{2}{5}x_M+\frac{3}{5}y_M-\frac{1}{5}z_M, 1-\frac{4}{5}x_M+\frac{6}{5}y_M-\frac{2}{5}z_M, -1+\frac{2}{5}x_M-\frac{3}{5}y_M+\frac{1}{5}z_M\right)$

Pour le symétrique par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$, on calcule d'abord le projeté correspondant H : H est sur la droite passant par M et dirigée par $\overrightarrow{u}$. Elle a pour représentation paramétrique :

$(x,y,z)=(x_M,y_M,z_M)+s(1,2,-1)$ avec $s\in\mathbb{R}$.

Alors H est déterminé par la valeur de s telle que $2x-3y+z-1=0$ soit $2(x_M+s)-3(y_M+2s)+(z_M-s)-1=0 \iff 5s=2x_M-3y_M+z_M-1 \iff s=\frac{2}{5}x_M-\frac{3}{5}y_M+\frac{1}{5}z_M-1$

Le symétrique M' de M par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$ vérifie $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MH}=2s\overrightarrow{u}$

Alors M' a pour coordonnées $(x',y',z')=(x_M,y_M,z_M)+2s(1,2,-1)$

soit $(x',y',z')=(x_M,y_M,z_M)+2\left(\frac{2}{5}x_M-\frac{3}{5}y_M+\frac{1}{5}z_M-1\right)(1,2,-1)$

On trouve $\boxed{M'\left(\frac{9}{5}x_M-\frac{6}{5}y_M+\frac{2}{5}z_M-2, \frac{8}{5}x_M-\frac{7}{5}y_M+\frac{4}{5}z_M-4, -\frac{4}{5}x_M+\frac{6}{5}y_M+\frac{3}{5}z_M+2\right)}$

Exercice 6 :

Le point B vérifie $OB=OA=\sqrt{2}\alpha$. De plus, B appartient au plan médiateur du segment $[OA]$ car B est équidistant de A et O.

Ce plan $\mathcal{P}$ a pour équation $\alpha x+\alpha y+d=0$ et il passe par le milieu du segment $[OA]$ qui est $(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2},0)$ ce qui donne $d=-\alpha^2$.

L'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan $y=0$ donne $\alpha x=\alpha^2$. On trouve une droite passant par $(\alpha,0,0)$ et dirigée par $(0,0,1)$.

Alors B s'écrit $(\alpha,0,z)$ et on cherche z tel que $OB=\sqrt{2}\alpha \iff (\alpha)^2+(z)^2=2\alpha^2 \iff z=\pm\alpha$

On trouve deux points symétriques par rapport à $z=0$ qui est un plan de symétrie du problème.

On trouve pour chacun des cas, le point C sur la droite intersection des plans médiateurs de $[OA]$ et $[OB]$, tel que $OC=\sqrt{2}\alpha$.

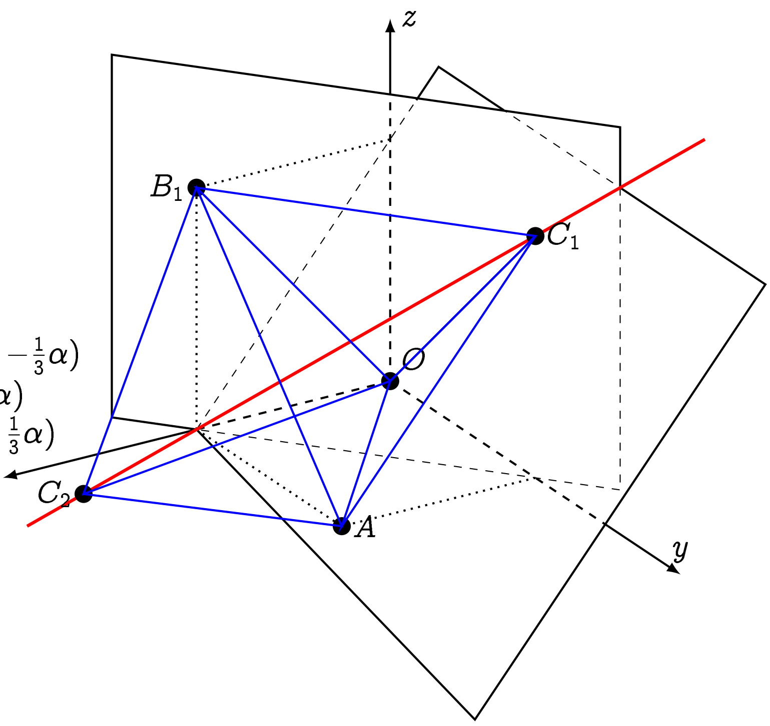
Pour $B(\alpha,0,\alpha)$, le plan médiateur de $[OB]$ est $x+z-\alpha=0$. L'intersection avec le plan $\mathcal{P}: x+y-\alpha=0$ donne une droite $M_t(t,\alpha-t,\alpha-t)$ avec $t\in\mathbb{R}$.

On cherche t tel que

$$BM_t=\sqrt{2}\alpha \iff (t-\alpha)^2+(\alpha-t)^2+t^2=2\alpha^2 \iff 3t^2-4\alpha t=0 \iff t=0 \text{ ou } t=\frac{4\alpha}{3}.$$

On trouve donc deux points possibles $(0,\alpha,\alpha)$ ou $(\frac{4}{3}\alpha,-\frac{1}{3}\alpha,-\frac{1}{3}\alpha)$

Et par symétrie par rapport à $z=0$, on trouve les deux autres possibilités.



Résumons ; on trouve 4 tétraèdres possibles :

$$O\,(0,0,0),\, A\,(\alpha,\alpha,0), \left\{ \begin{array}{l} B_1\,(\alpha,0,\alpha), \left\{ \begin{array}{l} C_1\,(\ 0,\ \alpha,\ \alpha) \\ C_2\,(\frac{4}{3}\alpha, -\frac{1}{3}\alpha, -\frac{1}{3}\alpha) \end{array} \right. \\ B_2\,(\alpha,0,\alpha), \left\{ \begin{array}{l} C_3\,(\ 0,\ \alpha,\ -\alpha) \\ C_4\,(\frac{4}{3}\alpha, -\frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exercice 7 :

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, alors $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = \vec{0}$ et par ailleurs si $\vec{w}$ n'est pas nul, on peut écrire $\vec{v} = \dfrac{||\vec{v}||}{||\vec{w}||}\vec{w}$. On en déduit que $(\vec{v}.\vec{w})\vec{w} = (\vec{w}.\vec{w})\dfrac{||\vec{v}||}{||\vec{w}||}\vec{w} = (\vec{w}.\vec{w})\vec{v}$. On a donc bien $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = (v.w)\vec{w} - ||\vec{w}||^2\,\vec{v}$. Si $\vec{w} = \vec{0}$, la formule est évidente.

   Si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, on note $\vec{k} = \dfrac{1}{||\vec{v} \wedge \vec{w}||}\vec{v} \wedge \vec{w}$. $\vec{k}$ est unitaire.

   Alors $\vec{v} \wedge \vec{w} = ||\vec{v}||||\vec{w}||\sin\theta\vec{k}$ et $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = -||\vec{v}||||\vec{w}||\sin\theta||\vec{w}||\vec{j}$ où $\vec{j}$ est un vecteur unitaire tel que $(\vec{w}, \vec{k}, \vec{j})$ soit un trièdre orthogonal direct.

   Le vecteur $\vec{v}$ se projète sur $\vec{w}$ et $\vec{j}$ de la manière suivante : $\vec{v} = ||\vec{v}||\cos\theta\dfrac{1}{||\vec{w}||}\vec{w} + ||\vec{v}||\sin\theta\vec{j}$ où θ est l'angle $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$ (orienté par la normale $\vec{k}$ au plan $\text{Vect}(\vec{v},\vec{w})$).

   On obtient alors $\sin\theta\vec{j} = \dfrac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} - \cos\theta\dfrac{1}{||\vec{w}||}\vec{w}$, ce qui donne
$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = -||\vec{v}||||\vec{w}||^2(\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} - \cos\theta\frac{1}{||\vec{w}||}\vec{w}).$$
   On réécrit cela en faisant apparaître le produit scalaire $\vec{v}.\vec{w} = ||\vec{v}||.||\vec{w}||.\cos\theta$:
$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = -||\vec{w}||^2\vec{v} + ||\vec{v}||.||\vec{w}||\cos\theta\vec{w}$$
   On obtient donc $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = -(\vec{w}.\vec{w})\vec{v} + (\vec{v}.\vec{w})\vec{w}$

2. Si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs orthogonaux non nuls, on pose $\vec{u}_0 = -\dfrac{1}{||\vec{w}||^2}(\vec{v} \wedge \vec{w})$. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires ni nuls, donc le vecteur $\vec{u}_0$ est non nul. Par sa définition comme produit vectoriel, on a nécessairement $\vec{u}_0 \perp \vec{w}$ et $\vec{u}_0 \wedge \vec{w} = -\dfrac{1}{||\vec{w}||^2}((\vec{v}.\vec{w})\vec{w} - (\vec{w}.\vec{w})\vec{v})$, d'après la formule de la question précédente.

   On en déduit : $\vec{u}_0 \wedge \vec{w} = \dfrac{1}{||\vec{w}||^2}(\vec{w}.\vec{w})\vec{v}) = \vec{v}$.

   Alors l'existence du vecteur $\vec{u}_0$ est acquise.

   Si il existe un vecteur $\vec{u}_1$ qui vérifie les mêmes conditions, alors par linéarité, on a $(\vec{u}_1 - \vec{u}_0) \wedge w = \vec{0}$ et $(\vec{u}_1 - \vec{u}_0) \perp \vec{w}$. De la première égalité, on tire que $\vec{u}_1 - \vec{u}_0$ est colinéaire à $\vec{w}$ et de la deuxième que $\vec{u}_1 - \vec{u}_0$ est orthogonal à $\vec{w}$. Comme $\vec{w} \neq \vec{0}$, on en déduit que $\vec{u}_1 - \vec{u}_0 = \vec{0}$. C'est à dire $\vec{u}_1 = \vec{u}_0$. Donc $\vec{u}_0$ est unique.

On en conclut qu' $\boxed{\text{il existe un unique vecteur } \vec{u}_0\text{, orthogonal à } \vec{w} \text{ et tel que } \vec{u}_0 \wedge \vec{w} = \vec{v}.}$

Exercice 8 :

On note H_i la projection orthogonale du point $M(1,1,\lambda)$ sur le plan $\mathcal{P}_i$.

Le plan $\mathcal{P}_1$ admet $(1,1,0)$ pour vecteur normal.

Alors on sait que $H_1 = M + a_1(1,1,0) = (1+a_1, 1+a_1, \lambda)$ où a_1 est un réel à déterminer.

On écrit que $H_1 \in \mathcal{P}_1 : (1+a_1) + (1+a_1) - 1 = 0 \iff a_1 = -\dfrac{1}{2}$.

Le plan $\mathcal{P}_2$ admet $(0,1,1)$ pour vecteur normal. Alors on sait que $H_2 = M + a_2(0,1,1) = (1, 1+a_2, \lambda+a_2)$ avec $a_2 \in \mathbb{R}$. On écrit que $H_2 \in \mathcal{P}_2 : (1+a_2) + (\lambda + a_2) - 1 = 0 \iff a_2 = -\dfrac{\lambda}{2}$.

Le plan $\mathcal{P}_3$ admet $(1,0,1)$ pour vecteur normal. Alors on sait que $H_3 = M + a_3(1,0,1) = (1+a_3, 1, \lambda+a_3)$ avec $a_3 \in \mathbb{R}$. On écrit que $H_3 \in \mathcal{P}_3 : (1+a_3) + (\lambda + a_3) - 1 = 0 \iff a_3 = -\dfrac{\lambda}{2}$.

Le plan $\mathcal{P}_4$ admet $(1,2,1)$ pour vecteur normal. Alors on sait que $H_4 = M + a_4(1,2,1) = (1+a_4, 1+2a_4, \lambda+a_4)$ avec $a_4 \in \mathbb{R}$. On écrit que $H_4 \in \mathcal{P}_4 : (1+a_4) + 2(1+2a_4) + (\lambda+a_4) = 0 \iff a_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\lambda}{6}$.

Alors les projections orthogonales de M sont

$$H_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda\right),\ H_2 = \left(1, 1 - \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right),\ H_3 = \left(1 - \frac{\lambda}{2}, 1, \frac{\lambda}{2}\right) \text{ et } H_4 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{6}, -\frac{\lambda}{3}, -\frac{1}{2} + \frac{5\lambda}{6}\right).$$

Les vecteurs reliant ces points sont :

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right),\ \overrightarrow{H_1H_3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right),\ \overrightarrow{H_1H_4} = \left(-\frac{\lambda}{6}, -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{3}, -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{6}\right)$$

Les quatre points sont coplanaires si et seulement si $\left[\overrightarrow{H_1H_2}, \overrightarrow{H_1H_2}, \overrightarrow{H_1H_4}\right] = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{6} \\ \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \dfrac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2} - \dfrac{\lambda}{6} \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{6} \\ -\frac{\lambda}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{3} \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{6} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{6} \\ 0 & 1 - \frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{6} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \tfrac{\lambda}{2}\left((1 - \tfrac{\lambda}{2})(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\lambda}{6}) - (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\lambda}{2})(-\tfrac{\lambda}{2})\right) = 0 \iff \tfrac{\lambda}{2}\left(-\tfrac{\lambda^2}{6} - \tfrac{1}{6}\lambda - \tfrac{1}{2}\right) = 0$$

L'équation $x^2 + x + 3 = 0$ n'a pas de racines réelles. Alors la seule possibilité est $\lambda = 0$.

$\boxed{\text{Les projections orthogonales de } M \text{ sur les plans } \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3 \text{ et } \mathcal{P}_4 \text{ sont coplanaires si et seulement si } \lambda = 0.}$

Exercice 9 :

1. On écrit l'équation sous forme canonique :
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 5 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 - 4 - 1 - 9 + 5 = 0.$$
On en déduit l'équation équivalente suivante : $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 3^2$ soit en notant $M = (x,y,z)$ et $\Omega = (2,1,-3)$, $||\overrightarrow{\Omega M}|| = 3$.
L'équation proposée est donc l'équation de la sphère de centre $\Omega = (2,1,-3)$ et de rayon 3.

2. Le plan tangent à la sphère en B est orthogonal au rayon, donc $\overrightarrow{\Omega B}$ est un vecteur normal de ce plan.

On a $\overrightarrow{\Omega B}\,(-3,0,0)$ donc ce plan a pour équation $x+d=0$ et comme il passe par B, on trouve $d=1$.

$\boxed{\text{Le plan tangent à la sphère } x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+5=0 \text{ en } B(-1,1,-3) \text{ a pour équation } x=-1.}$

3. On détermine la distance de Ω au plan $\mathcal{P}$: $d(\Omega,\mathcal{P})=\dfrac{|2.2-1.1+3.(-3)-2|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$.
   On compare avec le rayon 3 au carré : $64<14.9$ donc le plan rencontre la sphère $\mathcal{S}$.
   On cherche l'intersection qui est un cercle de centre H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.
   Soit $\vec{n}=(2,-1,3)$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$, ona $\overrightarrow{\Omega H}=\lambda\vec{n}$ et $H\in\mathcal{P}$ ce qui donne les équation suivantes $H=(2+2\lambda,1-\lambda,-3+3\lambda)$ et $2(2+2\lambda)-(1-\lambda)+3(-3+3\lambda)-2=0$ ce qui donne $14\lambda=8$.
   Alors H est le point $\left(\frac{44}{14},\frac{6}{14},\frac{-18}{14}\right)$. Et le rayon du cercle R' est donné par $R'^2=R^2-\Omega H^2$ où $R=3$ est le rayon de la sphère. On en déduit que $R'=\sqrt{9-\frac{64}{14}}=\sqrt{\frac{62}{14}}$.

   $\boxed{\text{L'intersection du plan et de la sphère est un cercle de centre } \left(\dfrac{22}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{-9}{7}\right) \text{ et de rayon } \sqrt{\dfrac{31}{7}}.}$

Exercice 10 :

On note $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à D passant par A. La droite D est dirigée par $(1,1,-2)\wedge(2,-1,-3)=(-5,-1,-3)$. Alors $\mathcal{P}$ a pour équation $-5x-y-3z+c=0$ et on trouve en utilisant les coordonnées de A, $c=10$. $\mathcal{P}:-5x-y-3z+10=0$.

On note $\mathcal{P}'$ le plan orthogonal à D' passant par A'. La droite D' est dirigée par $(2,1,2)\wedge(1,-1,-1)=(1,4,-3)$. Alors $\mathcal{P}'$ a pour équation $x+4y-3z+c'=0$ et on trouve en utilisant les coordonnées de A', $c'=-3$. $\mathcal{P}:x+4y-3z-3=0$.

On note $\mathcal{K}$ le plan médiateur de $[AA']$: c'est l'ensemble des points qui sont à la même distance de A et de A'. $\mathcal{K}$ admet $\overrightarrow{AA'}$ pour vecteur normal et passe par I le milieu de $[AA']$. On a $\overrightarrow{AA'}=(0,-3,-3)$ alors $\mathcal{K}$ a une équation de la forme $-y-z+d=0$. Le point I a pour coodonnées $(1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$. On en déduit que $d=0$ et $\mathcal{K}:-y-z=0$.

Le centre Ω de la sphère tangente à D en A se trouve sur le plan $\mathcal{P}$. De même, Ω appartient au plan $\mathcal{P}'$. De plus comme A et A' sont sur la sphère, le centre est à égale distance de A et A' donc il est sur $\mathcal{K}$. Finalement, Ω est à l'intersection des trois plans $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'\cap\mathcal{K}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl}-5x-y-3z+10&=&0\\x+4y-3z-3&=&0\\-y-z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x+4y-3z&=&3\\19y-18z&=&5\\y+z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}-x+3y-3z&=&2\\y+z&=&0\\-37z&=&5\end{array}\right.$$

On en tire $z=-\dfrac{5}{37}$, puis $y=\dfrac{5}{37}$ et enfin $x=\dfrac{76}{37}$.

D'où $\Omega:\left(\dfrac{76}{37},\dfrac{5}{37},-\dfrac{5}{37}\right)$. Alors $\overrightarrow{\Omega A}:\left(\dfrac{39}{37},-\dfrac{69}{37},-\dfrac{42}{37}\right)$.

D'où le rayon du cercle $R=||\overrightarrow{\Omega A}||=\dfrac{\sqrt{8046}}{37}=\dfrac{3}{37}\sqrt{894}$.

$$\boxed{\text{La sphère a pour équation } x^2+y^2+z^2-\frac{152}{37}x-\frac{10}{37}y+\frac{10}{37}z-\frac{60}{37}=0.}$$

Exercice 11 : $\mathcal{C}$ est le cercle d'équations $\left\{\begin{array}{rcl}x+y+z&=&3\\x^2+y^2+z^2&=&5\end{array}\right.$

1. L'équation $x+y+z=3$ définit le plan $\mathcal{P}$ et l'équation $x^2+y^2+z^2=5$ définit la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon $R=\sqrt{5}$.

Calculons la distance du centre de $\mathcal{S}$ au plan $\mathcal{P}$ $d(O,\mathcal{P}) = \dfrac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$.

On a $d(O,\mathcal{P}) \leqslant R$, alors l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$ est un cercle $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathcal{P}$.
Le centre Ω est le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$: $\Omega = O + k.\overrightarrow{n}$ avec $\overrightarrow{n}\,(1,1,1)$ vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
On trouve avec $\Omega \in \mathcal{P}$: $k=1$ et $\Omega\,(1,1,1)$.
Pour le rayon r du cercle $\mathcal{C}$, on a $r = \sqrt{R^2 - O\Omega^2} = \sqrt{5-3} = \sqrt{2}$.

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est le cercle de centre } (1,1,1)\text{, de rayon } \sqrt{2} \text{ dans le plan } x+y+z=3.}$$

2. Pour $\mathcal{C} \cap xOy$, on résout
$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 3 \\ x^2+y^2+z^2 &=& 5 \\ z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3 \\ x^2+y^2 &=& 5 \\ z &=& 0 \end{array}\right.$ On obtient $(3-y)^2+y^2=5 \iff 2y^2-6y+4=0$
$\iff y=2$ ou $y=1$. Ce qui donne les deux points $(2,1,0)$ et $(1,2,0)$
Pour des raisons de symétrie, en échangeant les rôles de x, y et z, on obtient les 4 autres points d'intersections avec les plans de coordonnées :

$$\boxed{(2,1,0) \text{ et } (1,2,0) \quad (0,2,1) \text{ et } (0,1,2) \quad (1,0,2) \text{ et } (2,0,1)}$$

3. Les tangentes au cercle $\mathcal{C}$ sont dans le plan $\mathcal{P}$ du cercle. Si une tangente au cercle rencontre l'axe Oz elle ne peut le faire qu'au point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec Oz qui est le point $Q\,(0,0,3)$.
On a $\Omega Q = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} > \sqrt{2} = r$ donc le point Q est à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathcal{P}$.
On en déduit qu'il existe deux tangentes à $\mathcal{C}$ qui passe par Q.
On cherche les points de contact K_1 et K_2 de ces tangentes avec le cercle.
On écrit $\overrightarrow{\Omega K_1} \perp \overrightarrow{QK_1} \iff \Omega K_1.QK_1 = 0$ ce qui donne une sphère
$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-3 \end{pmatrix} = 0 \iff x^2+y^2+z^2-x-y-4z+3=0$$
On cherche l'intersection de cette sphère avec le cercle
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 3 \\ x^2+y^2+z^2 &=& 5 \\ x^2+y^2+z^2-x-y-4z+3 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 3 \\ x+y+4z &=& 8 \\ x^2+y^2+z^2 &=& 5 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& \frac{4}{3} \\ z &=& \frac{5}{3} \\ x^2+y^2+z^2 &=& 5 \end{array}\right. \iff z = \frac{5}{3} \text{ et } x = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ et } y = \frac{2}{3} \mp \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les tangentes à } \mathcal{C} \text{ qui rencontrent l'axe } Oz \text{ sont donc les droites passant par } (0,0,3) \text{ et} \\ \text{par chacun des points } \left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{ et } \left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}\right)\end{array}}$$