# BAB IV

# Relasi Kabur

## 4.1 Relasi Biasa ke Relasi Kabur

Suatu relasi biasa $\Re$ pada suatu himpunan merepresentasikan adanya atau tidak adanya asosiasi, interaksi atau keterhubungan di antara elemen-elemen dari dua atau lebih himpunan. Relasi $\Re$ antara himpunan $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$, yaitu $\Re(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$ merupakan himpunan bagian dari hasil kali kartesian $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}$, yaitu :

$$\Re(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) \subseteq \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V} = \{(x, y) \mid x\in\boldsymbol{U},\ y\in\boldsymbol{V}\},$$

sehingga $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$ merupakan himpunan semesta dari relasi $\Re(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$.

Hasil kali kartesian dapat diperluas pada suatu keluarga himpunan-himpunan $\{\boldsymbol{U}_i \mid i\in\mathbb{N}_n\}$, yang dinyatakan dengan $\boldsymbol{U}_1\times\boldsymbol{U}_2\times\ldots\times\boldsymbol{U}_n$. Suatu relasi di antara himpunan-himpunan $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$,…, $\boldsymbol{U}_n$ , yaitu $\Re(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2,\ldots,\boldsymbol{U}_n)$ merupakan himpunan bagian dari $\boldsymbol{U}_1\times\boldsymbol{U}_2\times\ldots\times\boldsymbol{U}_n$. Karena relasi $\Re$ sendiri merupakan suatu himpunan, maka operasi-operasi dasar himpunan, seperti ketermuatan, gabungan, irisan dan komplemen dapat diberlakukan pada relasi $\Re$.

Suatu relasi $\Re$ dapat didefinisikan dengan menggunakan fungsi keanggotaan nol-satu $\mu_\Re$, yaitu suatu fungsi yang memetakan himpunan $\boldsymbol{U}_1\times\boldsymbol{U}_2\times\ldots\times\boldsymbol{U}_n$ ke himpunan {0, 1}, yaitu

$$\mu_\Re : \boldsymbol{U}_1\times\boldsymbol{U}_2\times\ldots\times\boldsymbol{U}_n \to \{0, 1\}, \qquad (4.1)$$

sedemikian sehingga

$$\mu_\Re(u_1, u_2,\ldots, u_n) = \begin{cases} 1 & ; \ (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \Re,\ u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Nilai dari $\mu_{\Re}(u_1, u_2,\ldots, u_n)$ disebut derajat keanggotaan. Apabila nilai derajat keanggotaan sama dengan satu berarti elemen $u_1$, $u_2$, …, $u_n$ berelasi, dan apabila nilai derajat keanggotaan sama dengan nol berarti elemen $u_1$, $u_2$, …, $u_n$ tidak berelasi sama sekali. Jadi relasi biasa $\Re$ hanya mempunyai dua kemungkinan, yaitu berelasi atau tidak berelasi sama sekali, tidak ada kemungkinan lain.

Suatu relasi biasa di antara dua himpunan disebut relasi biner. Jika terdapat tiga, empat atau lima himpunan yang dilibatkan maka relasinya berturut-turut biasa disebut relasi *ternary*, relasi *quaternary* dan relasi *quinary*. Secara umum, jika didefinisikan pada *n* himpunan, maka disebut sebagai relasi *n-ary* atau *n-dimensional*.

***Contoh 4.1*** (*relasi biner*)

Misalkan $\boldsymbol{U}$={1, 2, 3} dan $\boldsymbol{V}$={2, 3, 4} maka hasil kali kartesian $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$={ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}. Misalkan relasi $\Re(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$ didefinisikan sebagai "elemen pertama lebih besar atau sama dengan elemen kedua," maka $\Re(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$ = {(2, 2), (3, 2), (3, 3)}; atau dapat dinyatakan dengan matriks relasional berikut:

| | | ***V*** | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\Re$ | 2 | 3 | 4 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 |
| ***U*** | 2 | 1 | 0 | 0 |
| | 3 | 1 | 1 | 0 |

Entri-entri dalam matriks relasional di atas merupakan nilai dari derajat keanggotaan $\mu_{\Re}(u, v)$. $\mu_{\Re}(2, 2)$=1 berarti 2 berelasi dengan 2, yaitu " 2 lebih besar atau sama dengan 2"; $\mu_{\Re}(2, 3) = 0$ berarti 2 tidak berelasi dengan 3, *y*aitu " 2 tidak lebih besar atau tidak sama dengan 3" ; dan seterusnya.

***Contoh 4.2*** (*relasi ternary*)

Misalkan relasi $\Re$ di antara himpunan $\boldsymbol{U}_1$ = {bahasa Inggris, bahasa Perancis}, $\boldsymbol{U}_2$ = {Dollar, Pound, Euro}, dan $\boldsymbol{U}_3$ = {AS, Perancis, Inggris, Canada, Belanda } menyatakan hubungan suatu negara dengan mata uang dan bahasa yang digunakan. Maka relasi $\Re(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{U}_3)$ = {(Bahasa Inggris, Dollar, AS), (Bahasa Perancis, Euro, Perancis), (Bahasa Inggris, Pound, Inggris)}. Relasi ini dapat juga dinyatakan dengan matriks relasional berikut:

$\boldsymbol{U}_3$

| | $\Re$ | AS | Perancis | Inggris | Canada | Belanda |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Dollar | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\boldsymbol{U}_2$ | Pound | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | Euro | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bahasa Inggris

$\boldsymbol{U}_3$

| | $\Re$ | AS | Perancis | Inggris | Canada | Belanda |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Dollar | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\boldsymbol{U}_2$ | Pound | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Euro | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Bahasa Perancis

Fungsi keanggotaan nol-satu pada relasi biasa dapat diperluas dengan mengubah kodomain dari himpunan {0, 1} menjadi interval [0, 1] yaitu:

$$\mu_{\Re} : \boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{U}_n \rightarrow [0, 1]$$

Hal ini mengakibatkan bahwa satu relasi $\Re$ dapat berelasi secara sempurna jika derajat keanggotaanya sama dengan satu, tidak berelasi sama sekali jika derajat keanggotaannya sama dengan nol, dan "agak berelasi" atau "sangat berelasi" atau "kurang berelasi" dan sebagainya, jika derajat keanggotaannya terletak antara nol dan satu. Relasi semacam ini biasa disebut relasi kabur, yang disimbolkan dengan $\tilde{R}$. Secara formal, relasi kabur didefinisikan sebagai berikut:

***Definisi 4.1***

Suatu relasi kabur $\tilde{R}$ adalah suatu himpunan kabur yang didefinisikan pada hasil kali kartesian himpunan-himpunan $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$,..., $\boldsymbol{U}_n$, yaitu:

$$\tilde{R} = \{((x_1, x_2, \ldots, x_n), \mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)) | (x_1, \ldots, x_n) \in (\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{U}_n)\} \qquad (4.2)$$

di mana $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah derajat keanggotaan dari relasi kabur $\tilde{R}$.

Suatu kasus khusus, jika $n$ = 2 maka relasi $\tilde{R}$ disebut relasi kabur biner. Relasi kabur biner pada hasil kali kartesian yang anggota himpunannya berhingga biasanya direpresentasikan dengan matriks relasional, yaitu matriks yang elemen-elemennya merupakan derajat keanggotaan pasangan-pasangan dari relasi yang bersesuaian (seperti dalam Contoh 4.1 dan 4.2, untuk relasi biasa)

***Contoh 4.3***

Misalkan $\boldsymbol{U}_1$ = {Banda Aceh, Jakarta, Surabaya}
$\boldsymbol{U}_2$ = { Makassar, Surabaya, Jayapura }

Jika didefinisikan relasi "sangat berjauhan" di antara dua himpunan ibu kota provinsi tersebut, yaitu $\boldsymbol{U}_1$ dan $\boldsymbol{U}_2$, maka relasi biasa tidak cocok untuk digunakan karena relasi "sangat berjauhan" tidak terdefinisi dengan jelas dalam kerangka himpunan dan relasi biasa. Akan tetapi, kita dapat memberikan suatu nilai pada relasi "sangat berjauhan" di antara anggota himpunan $\boldsymbol{U}_1$ dan anggota himpunan $\boldsymbol{U}_2$. Nilai satu akan diberikan pada relasi "sangat jauh" di antara dua ibu kota provinsi pada himpunan $\boldsymbol{U}_1$ dan $\boldsymbol{U}_2$ jika kedua ibu kota tersebut dianggap paling berjauhan, dan nilai nol akan diberikan pada relasi "sangat berjauhan" jika kedua ibu kota provinsi tersebut dianggap paling berdekatan (jarak keduanya mungkin nol kilometer). Sedangkan nilai di antara nol dan satu diberikan kepada pasangan-pasangan ibu kota provinsi yang dianggap agak berjauhan, cukup berjauhan, sangat berjauhan dan sebagainya. Nilai-nilai yang diberikan tersebut adalah derajat keanggotaan dari relasi kabur $\tilde{R}$, yang biasa diinterpretasikan sebagai "kekuatan hubungan" yang ada di antara elemen-elemen dari himpunan $\boldsymbol{U}_1$ dan himpunan $\boldsymbol{U}_2$. Seperti pada himpunan kabur, pemberian derajat keanggotaan untuk relasi kabur $\tilde{R}$ juga bersifat subjektif, namun pemberian derajat keanggotaan tersebut tidak dapat ditentukan secara bebas. Penentuannya harus merefleksikan konteks persoalan dari relasi yang diberikan.

Misalkan derajat keanggotaan relasi "sangat berjauhan" di antara himpunan $\boldsymbol{U}_1$ dan himpunan $\boldsymbol{U}_2$ dinyatakan dengan matriks relasional berikut:

| | | | $\boldsymbol{U}_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $\tilde{R}$ | Surabaya | Makassar | Jayapura |
| | Banda Aceh | 0,62 | 0,72 | 1 |
| $\boldsymbol{U}_1$ | Jakarta | 0,4 | 0,65 | 0,8 |
| | Surabaya | 0 | 0,6 | 0,7 |

maka relasi kabur ”sangat berjauhan” $\tilde{R}$ adalah sebagai berikut:

$\tilde{R}$ ={((Banda Aceh, Surabaya), 0.62), ((Banda Aceh, Makassar), 0.72),
((Banda Aceh, Jayapura),1), ((Jakarta, Surabaya), 0.4),
((Jakarta, Makassar), 0.65), ((Jakarta, Jayapura), 0.8),
((Surabaya, Surabaya), 0), ((Surabaya, Makassar), 0.6),
((Surabaya, Jayapura), 0.7)}

***Contoh 4.4.***

Misalkan $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2 = \mathbb{R}$, relasi kabur $\tilde{R}$ di antara $\boldsymbol{U}_1$ dan $\boldsymbol{U}_2$ didefinisikan sebagai “x jauh lebih besar dari y”, di mana $x \in \boldsymbol{U}_1$ dan $y \in \boldsymbol{U}_2$. Relasi kabur $\tilde{R}$ merupakan himpunan kabur pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ dengan fungsi keanggotaan didefinisikan sebagai:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,\ y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le y \\ \frac{x-y}{10y} & ; \quad y < x < 11y \\ 1 & ; \quad x \ge 11y \end{cases} ; \qquad (x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

atau dapat didefinisikan sebagai:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,\ y) = \begin{cases} (1+(y\text{-}x)^{-2})^{-1} & ; \quad x \le y \\ 0 & ; \quad x > y \end{cases} ; \quad (x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

## 4.2 Operasi-operasi Dasar antar Relasi Kabur

Seperti pada himpunan kabur, maka pada relasi kabur dapat juga diberlakukan operasi-operasi dasar, seperti komplemen, irisan dan gabungan.

**Komplemen**

Misalkan $\tilde{R}$ adalah relasi kabur pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$, maka komplemen dari relasi kabur $\tilde{R}$ adalah $\tilde{R}^c$ dengan derajat keanggotaan:

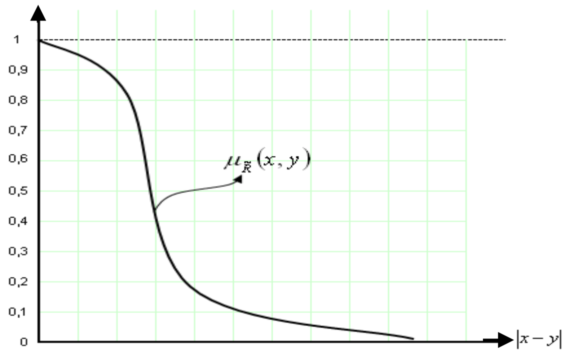
$$\mu_{\tilde{R}^c}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y), \ \forall (x, y) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$$

***Contoh 4.5***

Diketahui relasi kabur $\tilde{R}$ pada $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, di mana $\tilde{R}$ menyatakan relasi "*x* dan *y* sangat berdekatan." Fungsi keanggotaan $\tilde{R}$ didefinisikan sebagai :

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = e^{-(x-y)^2}, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

sehingga grafik dari fungsi keanggotaan $\tilde{R}$ adalah seperti diperlihatkan dalam Gambar 4.1.

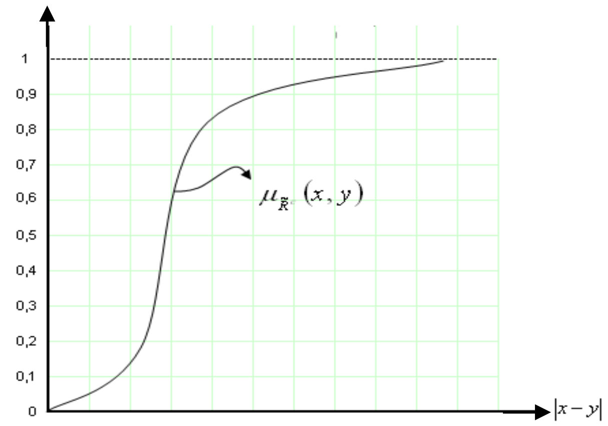



**Gambar 4.1** Grafik fungsi keanggotaan relasi kabur $\tilde{R}$ (Contoh 4.5)

Komplemen dari relasi kabur $\tilde{R}$ mempunyai fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{R}^c}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y)$$
$$= 1 - e^{-(x-y)^2}, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

seperti diperlihatkan dalam Gambar 4.2.



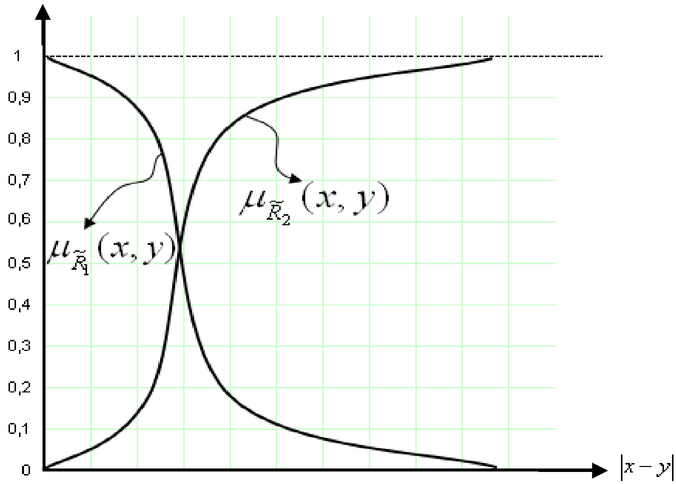

**Gambar 4.2** Grafik fungsi keanggotaan relasi kabur $\tilde{R}^c$ (Contoh 4.5)

## Gabungan dan Irisan

Misalkan $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ masing-masing adalah relasi kabur pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$, maka gabungan dari $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ adalah $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$ dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2}(x, y) = max[\mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \mu_{\tilde{R}_2}(x, y)]$, $\forall(x, y) \in \boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$, kemudian irisan dari $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ adalah $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$ dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2}(x, y) = min[\mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \mu_{\tilde{R}_2}(x, y)]$ $\forall(x, y) \in \boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$.

### *Contoh 4.6*

Misalkan $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ masing-masing adalah relasi kabur pada $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, di mana $\tilde{R}_1$ menyatakan relasi "*x* dan *y* hampir sama" dan $\tilde{R}_2$ menyatakan relasi "*x* dan *y* sangat berbeda". Grafik dari fungsi keanggotaan $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ adalah seperti pada Gambar 4.3.




**Gambar 4.3** Grafik fungsi keanggotaan $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ (Contoh 4.6)

Fungsi keanggotaan gabungan antara $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ dapat diperoleh sebagai berikut:

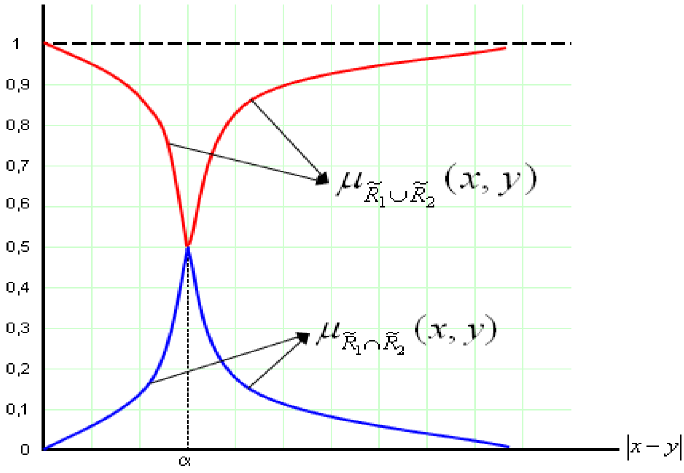
Misalkan $\alpha$ =$|x_0 - y_0|$ sedemikian hingga $\mu_{\tilde{R}_1}(x_0, y_0) = \mu_{\tilde{R}_2}(x_0, y_0)$,

maka $\mu_{\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2}(x, y) = \begin{cases} \mu_{\tilde{R}_1}(x, y) & ; \quad 0 \le |x - y| \le \alpha \\ \mu_{\tilde{R}_2}(x, y) & ; \quad |x - y| \ge \alpha \end{cases}$

Sedangkan fungsi keanggotaan irisan antara $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ adalah :

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2}(x, y) = \begin{cases} \mu_{\tilde{R}_2}(x, y) & ; \quad 0 \le |x - y| \le \alpha \\ \mu_{\tilde{R}_1}(x, y) & ; \quad |x - y| \ge \alpha \end{cases}$$

Gambar 4.4 memperlihatkan grafik fungsi keanggotaan $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$ dan $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$.




**Gambar 4.4** Grafik fungsi keanggotaan $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$ dan $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$ (Contoh 4.6)

***Contoh 4.7.***

Diketahui relasi kabur $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ masing-masing pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ dalam bentuk matriks relasional berikut

| $\tilde{R}_1$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,3 | 0,2 | 1 | 0 |
| $x_2$ | 0,8 | 1 | 0 | 0,2 |
| $x_3$ | 0,5 | 0 | 0,4 | 0,2 |

| $\tilde{R}_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,3 | 0 | 0.7 | 0 |
| $x_2$ | 0,6 | 0.8 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0,6 | 0.9 | 0,3 | 0,2 |

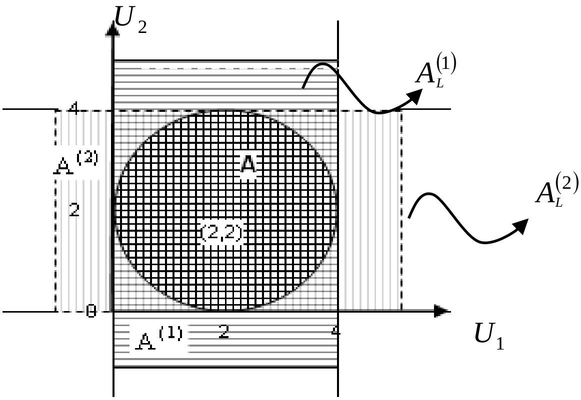
maka $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$ dan $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$ dalam bentuk matriks relasional adalah sebagai berikut:

| $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,3 | 0.2 | 1 | 0 |
| $x_2$ | 0,8 | 1 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0,6 | 0.9 | 0,4 | 0,2 |

| $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,3 | 0 | 0.7 | 0 |
| $x_2$ | 0,1 | 0.8 | 0 | 0.2 |
| $x_3$ | 0,5 | 0 | 0,3 | 0,2 |

## 4.3 Proyeksi dan Perluasan Cylindric Relasi Kabur

Misalkan suatu himpunan $\boldsymbol{A}=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4,\ x \in \boldsymbol{U}_1 = \mathbb{R},\ y \in \boldsymbol{U}_2 = \mathbb{R}\}$ yang merupakan suatu relasi dalam $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 = \mathbb{R}^2$. Proyeksi $\boldsymbol{A}$ pada $\boldsymbol{U}_1$ yang dinyatakan oleh $\boldsymbol{A}^{(1)}$, adalah $\boldsymbol{A}^{(1)} = [0, 4] \subset \boldsymbol{U}_1$, dan proyeksi $\boldsymbol{A}$ pada $\boldsymbol{U}_2$ yang dinyatakan oleh $\boldsymbol{A}^{(2)}$ adalah $\boldsymbol{A}^{(2)} = [0, 4] \subset \boldsymbol{U}_2$. Perluasan cylindric dari $\boldsymbol{A}^{(1)}$ ke $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ yang dinyatakan oleh $A_L^{(1)}$ adalah $A_L^{(1)} = [0, 4] \times \boldsymbol{U}_2 \subset \boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 = \mathbb{R}^2$, dan perluasan cylindric dari $\boldsymbol{A}^{(2)}$ ke $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ yang dinyatakan oleh $A_L^{(2)}$ adalah $A_L^{(2)} = [0, 4] \times \boldsymbol{U}_2 \subset \boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 = \mathbb{R}^2$, seperti diperlihatkan dalam Gambar 4.5.




**Gambar 4.5**. Proyeksi dan perluasan cylindric *A*

Misalkan relasi ***A*** dinyatakan dalam bentuk matriks relasional berikut:

| ***A*** | ... | -1 | ... | 0 | ... | 1 | ... | 2 | ... | 3 | ... | 4 | ... | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| -1 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 1 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 1 | ... | 1 | ... | 1 | ... | 0 | ... | 0 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 2 | ... | 0 | ... | 1 | ... | 1 | ... | 1 | ... | 1 | ... | 1 | ... | 0 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 3 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 1 | ... | 1 | ... | 1 | ... | 0 | ... | 0 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 4 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 1 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 5 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... | 0 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Dengan menggunakan derajat keanggotaan pada matriks relasional di atas, maka proyeksi ***A*** pada $\boldsymbol{U}_1$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\vdots$$

$$\mu_{A^{(1)}}(-1) = max[\ldots, \mu_A(-1,-1),\ldots, \mu_A(-1,0),\ldots, \mu_A(-1,1),\ldots, \mu_A(-1, 5),\ldots] = 0$$

$$\vdots$$

$$\mu_{A^{(1)}}(0) = max[\ldots, \mu_A(0, -1),\ldots, \mu_A(0, 0),\ldots, \mu_A(0, 1),\ldots, \mu_A(0, 5),\ldots] = 1$$

$$\vdots$$

$$\mu_{A^{(1)}}(1) = max[\ldots, \mu_A(1, -1),\ldots, \mu_A(1, 0),\ldots, \mu_A(1, 1),\ldots, \mu_{\boldsymbol{A}}(1, 5),\ldots] = 1$$

$$\vdots$$

$$\mu_{A^{(1)}}(2) = max[\ldots, \mu_A(2, -1),\ldots, \mu_A(2, 0),\ldots, \mu_A(2, 1),\ldots, \mu_A(2, 5),\ldots] = 1$$

$$\vdots$$

$$\mu_{A^{(1)}}(3) = max[\ldots, \mu_A(3, -1),\ldots, \mu_A(3, 0),\ldots, \mu_A(3, 1),\ldots, \mu_{\boldsymbol{A}}(3, 5),\ldots] = 1$$

$$\vdots$$

$$\mu_{A^{(1)}}(4) = max[\ldots, \mu_A(4, -1),\ldots, \mu_A(4, 0),\ldots, \mu_A(4, 1),\ldots, \mu_A(4, 5),\ldots] = 1$$

$$\vdots$$

$$\mu_{A^{(1)}}(5) = max[\ldots, \mu_A(5, -1),\ldots, \mu_A(5, 0),\ldots, \mu_A(5, 1),\ldots, \mu_A(5, 5),\ldots] = 0$$

$$\vdots$$

atau secara umum dapat dinyatakan sebagai

$$\mu_{A^{(1)}}(x) = \max_{y\in U_2=\mathbb{R}}[\mu_A(x,\, y)] = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad x \in [0,\, 4] \\ 0 & x \quad \text{yang} \quad \text{lain} \end{cases}, \quad \forall x \in \boldsymbol{U}_1$$

Dengan cara yang serupa, proyeksi ***A*** pada $\boldsymbol{U}_2$ dapat dinyatakan dengan menggunakan fungsi keanggotaan nol-satu (fungsi karakteristik), yaitu:

$$\mu_{A^{(2)}}(y) = \max_{x\in U_1=\mathbb{R}}[\mu_A(x, y)] = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad y \in [0,\, 4] \\ 0 & y \quad \text{yang} \quad \text{lain} \end{cases}, \quad \forall y \in \boldsymbol{U}_2$$

Selanjutnya, perluasan cylindric dari $\boldsymbol{A}^{(1)}$ ke $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ adalah

$$A_L^{(1)} = \{((x,\, y),\ \mu_{A_L^{(1)}}(x,y))\}$$

di mana $\mu_{A_L^{(1)}}(x,y) = \mu_{A^{(1)}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad x \in [0,\ 4] \\ 0 & x \text{ yang lain} \end{cases}$, $x \in \boldsymbol{U}_1$, $y \in \boldsymbol{U}_2$.

Adapun perluasan cylindric dari $\boldsymbol{A}^{(2)}$ ke $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ adalah

$$A_L^{(2)} = \{((x, y),\ \mu_{A_L^{(2)}}(x,y))\}$$

di mana $\mu_{A_L^{(2)}}(x,y) = \mu_{A^{(2)}}(y) = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad y \in [0,4] \\ 0 & y \text{ yang lain} \end{cases}$, $x \in \boldsymbol{U}_1$, $y \in \boldsymbol{U}_2$.

Proyeksi dan perluasan cylindric pada relasi biner biasa dapat diperluas ke relasi kabur biner, yang secara formal didefinisikan sebagai berikut:

***Definisi 4.2***

Misalkan $\tilde{R} = \{((x,\ y), \mu_{\tilde{R}}(x,y)) \mid (x,\ y) \in \boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2\}$ adalah relasi kabur biner. Proyeksi pertama relasi $\tilde{R}$ (proyeksi $\tilde{R}$ pada $\boldsymbol{U}_1$) didefinisikan sebagai

$$\tilde{R}^{(1)} = \{(x,\ \mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x)) \mid x \in \boldsymbol{U}_1\}, \tag{4.3}$$

di mana $\mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x) = \max\limits_{y \in U_2}[\mu_{\tilde{R}}(x,\ y)]$,

dan proyeksi kedua relasi $\tilde{R}$ (proyeksi $\tilde{R}$ pada $\boldsymbol{U}_2$) didefinisikan sebagai

$$\tilde{R}^{(2)} = \{(y,\ \mu_{\tilde{R}^{(2)}}(y)) \mid y \in \boldsymbol{U}_2\} \tag{4.4}$$

di mana $\mu_{\tilde{R}^{(2)}}(y) = \max\limits_{x \in U_1}[\mu_{\tilde{R}}(x,\ y)]$.

Adapun perluasan cylindric dari $\tilde{R}^{(1)}$ ke $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ adalah himpunan kabur $\tilde{R}_L^{(1)}$ dalam $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{R}_L^{(1)}}(x,\ y) = \mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x) \tag{4.5}$$

dan perluasan cylindric dari $\tilde{R}^{(2)}$ ke $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ adalah himpunan kabur $\tilde{R}_L^{(2)}$ dalam $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{R}_L^{(2)}}(x,\ y) = \mu_{\tilde{R}^{(2)}}(y) \tag{4.6}$$

## *Contoh 4.8*

Misalkan $\tilde{R}$ adalah relasi kabur pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ yang dinyatakan dengan matriks relasional berikut:

| $\tilde{R}$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $Y_4$ | $y_5$ | $Y_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,1 | 0.6 | 0 | 0.8 | 0.9 | 0.9 |
| $x_2$ | 0,2 | 0.8 | 1 | 0.1 | 0.7 | 0 |
| $x_3$ | 1 | 0 | 0,3 | 1 | 0 | 0.3 |
| $x_4$ | 0.3 | 0.1 | 0.6 | 0 | 0.5 | 0.7 |

maka proyeksi pertama dari $\tilde{R}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$\mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x_1) = \max\limits_y[\mu_{\tilde{R}}(x_1, y)]$ = *max*[0.1, 0.6, 0, 0.8, 0.9, 0.9 ] = 0.9

$\mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x_2) = \max\limits_y[\mu_{\tilde{R}}(x_2, y)]$ = *max*[0.2, 0.8, 1, 0.1, 0.7, 0] =1

$\mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x_3) = \max\limits_y[\mu_{\tilde{R}}(x_3, y)]$ = *max*[1, 0, 0.3, 1, 0, 0.3] =1

$\mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x_4) = \max\limits_y[\mu_{\tilde{R}}(x_4, y)]$ = *max*[0.3, 0.1, 0.6, 0, 0.5, 0.7] = 0.7,

sehingga

$\tilde{R}^{(1)}$ = {($x_1$, 0.9), ($x_2$, 1), ($x_3$, 1), ($x_4$, 0.7)}

Dengan cara yang serupa, proyeksi kedua dari $\tilde{R}$ diperoleh:

$\tilde{R}^{(2)}$ = {($y_1$, 1), ($y_2$, 0.8), ($y_3$, 1), ($y_4$, 1), ($y_5$, 0.9), ($y_6$, 0.9)}

Perluasan cylindric dari $\tilde{R}^{(1)}$ pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ mempunyai derajat keanggotaan sebagai berikut:

$\mu_{R_L^{(1)}}(x_1, y_1) = \mu_{R_L^{(1)}}(x_1, y_2) = \ldots = \mu_{R_L^{(1)}}(x_1, y_6) = \mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x_1) = 0.9$

$\mu_{R_L^{(1)}}(x_2, y_1) = \mu_{R_L^{(1)}}(x_2, y_2) = \ldots = \mu_{R_L^{(1)}}(x_2, y_6) = \mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x_2) = 1$

$\mu_{R_L^{(1)}}(x_3, y_1) = \mu_{R_L^{(1)}}(x_3, y_2) = \ldots = \mu_{R_L^{(1)}}(x_3, y_6) = \mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x_3) = 1$

$\mu_{R_L^{(1)}}(x_4, y_1) = \mu_{R_L^{(1)}}(x_4, y_2) = \ldots = \mu_{R_L^{(1)}}(x_4, y_6) = \mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x_4) = 0.7$

sehingga $\tilde{R}_L^{(1)}$ = {(($x_1$, $y_1$), 0.9), (($x_1$, $y_2$), 0.9), ..., (($x_1$, $y_6$), 0.9),
(($x_2$, $y_1$), 1), (($x_2$, $y_2$), 1), ..., (($x_2$, $y_6$), 1), (($x_3$, $y_1$), 1),
(($x_3$, $y_2$), 1), ..., (($x_3$, $y_6$), 1), (($x_4$, $y_1$), 0.7),
(($x_4$, $y_2$), 0.7), ..., (($x_4$, $y_6$), 0.7)}

Dengan cara yang serupa, $\tilde{R}_L^{(2)}$ dapat diperoleh, yaitu

$\tilde{R}_L^{(2)}$ = {(($x_1$, $y_1$), 1), ($x_2$, $y_1$), 1), ($x_3$, $y_1$), 1), ($x_4$, $y_1$), 1), (($x_1$, $y_2$), 0.8),

$((x_2, y_2), 0.8)$, $((x_3, y_2), 0.8)$, $((x_4, y_2), 0.8)$, $((x_1, y_3),1)$, $((x_2, y_3), 1)$, $((x_3, y_3), 1)$, $((x_4, y_3), 1)$, $((x_1, y_4),1)$, $((x_2, y_4),1)$, $((x_3, y_4),1)$, $((x_4, y_4),1)$, $((x_1, y_5), 0.9)$, $((x_2, y_5), 0.9)$, $((x_3,y_5), 0.9)$, $((x_4, y_5),0.9)$, $((x_1, y_6), 0.9)$, $((x_2, y_6), 0.9)$, $((x_3, y_6), 0.9)$, $((x_4, y_6), 0.9)\}$

***Contoh 4.9***

Misalkan relasi kabur $\tilde{R}$ didefinisikan pada $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, di mana $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = e^{-(x-y)^2}$, $\forall(x, y)\in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. Proyeksi pertama dan proyeksi kedua dari $\tilde{R}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

*Proyeksi pertama*:

Misalkan dipilih sebarang $x_0 \in \mathbb{R}^+$ sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x_0) &= \max_y[\mu_{\tilde{R}}(x_0, y)] \\
&= \max_y[e^{-(x_0-y)^2}] \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Persamaan (4.7) dapat diselesaikan dengan memaksimumkan fungsi $f(y)= e^{-(x_0-y)^2}$, yaitu kita cari $y$ sedemikian sehingga $f'(y) = 0$, yaitu $f'(y) = 2(x_0 - y)e^{-(x_0-y)^2} = 0$ jika dan hanya jika $y = x_0$. Jadi $\mu_{\tilde{R}^{(1)}}(x_0) = \max_y[e^{-(x_0-y)^2}] = 1$. Karena $x_0$ dipilih sebarang elemen dari $\mathbb{R}^+$, maka :

$$\tilde{R}^{(1)} = \{(x_0, 1) \mid x_0\in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+$$

*Proyeksi kedua*:

Misalkan dipilih sebarang $y_0 \in \mathbb{R}^+$, sehingga diperoleh :

$$\mu_{\tilde{R}^{(2)}}(y_0) = \max_x[\mu_{\tilde{R}}(x, y_0)] = \max_x[e^{-(x-y_0)^2}]$$

Dengan cara yang serupa pada proyeksi pertama, maka diperoleh:

$$\max_x[e^{-(x-y_0)^2}] = 1$$

Karena $y_0$ dipilih sebarang elemen dalam $\mathbb{R}^+$, maka :

$$\tilde{R}^{(2)} = \{(y_0, 1) \mid y_0 \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+$$

Misalkan suatu ruang yang lebih umum, yaitu $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{U}_n$, maka akan ada suatu relasi kabur *n*-ary pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{U}_n$, yaitu $\tilde{R}$ ($\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$,…,$\boldsymbol{U}_n$), dan misalkan ada suatu proyeksi dari relasi kabur *n*-ary $\tilde{R}$, yaitu $\tilde{R}^{(q)}$, pada $\boldsymbol{U}_{i_1} \times \boldsymbol{U}_{i_2} \times \ldots \times \boldsymbol{U}_{i_k}$ di mana {$i_1$, $i_2$,…, $i_k$} adalah suatu subbarisan dari {1, 2, …, *n*}. Proyeksi relasi kabur *n*-ary $\tilde{R}$ pada $\boldsymbol{U}_{i_1} \times \boldsymbol{U}_{i_2} \times \ldots \times \boldsymbol{U}_{i_n}$ didefinisikan sebagai berikut:

***Definisi 4.3***

Misalkan $\tilde{R}$ adalah relasi kabur pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{U}_n$, maka proyeksi $\tilde{R}$ pada $\boldsymbol{U}_{i_1} \times \boldsymbol{U}_{i_2} \times \ldots \times \boldsymbol{U}_{i_k}$ adalah suatu relasi kabur $\tilde{R}^{(q)}$ pada $\boldsymbol{U}_{i_1} \times \boldsymbol{U}_{i_2} \times \ldots \times \boldsymbol{U}_{i_k}$ dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{R}^{(q)}}(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}) = \max_{u_{j_1} \in \boldsymbol{U}_{j_1}, \ldots, u_{j(n-k)} \in \boldsymbol{U}_{j(n-k)}} [\mu_{\tilde{R}}(u_1, \ldots, u_n)] \qquad (4.8)$$

di mana $\{u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_{(n-k)}}\}$ adalah komplemen dari $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}\}$ terhadap {$u_1$, $u_2$, …, $u_n$}.

Suatu relasi kabur yang berbeda dalam ruang yang sama (semestanya sama) dapat mempunyai proyeksi yang sama, akan tetapi harus ada relasi terbesar pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{U}_n$. Relasi terbesar tersebut merupakan perluasan cylindric dari $\tilde{R}^{(q)}$ ke $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{U}_n$, yang secara formal didefinisikan sebagai berikut:

***Definisi 4.4***

Misalkan $\tilde{R}^{(q)}$ adalah suatu proyeksi pada $\boldsymbol{U}_{i_1} \times \boldsymbol{U}_{i_2} \times \ldots \times \boldsymbol{U}_{i_n}$, maka perluasan cylindric dari $\tilde{R}^{(q)}$ ke $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{U}_n$ adalah suatu relasi kabur $\tilde{R}^{(q)}$ pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{U}_n$, dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{R}_L^{(q)}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mu_{\tilde{R}^{(q)}}(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}) \qquad (4.9)$$

Sebagai kasus khusus, apabila $\tilde{R}$ adalah suatu relasi kabur biner, yaitu $\tilde{R}$ ($\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$), maka (4.8) akan menjadi himpunan kabur dan (4.9) akan menjadi perluasan cylindric seperti pada Definisi 4.2. Dari definisi tentang proyeksi dan perluasan cylindric, terlihat bahwa proyeksi akan membatasi suatu relasi kabur pada suatu subruang sedangkan perluasan cylindric akan memperluas suatu relasi kabur/himpunan kabur dari subruang ke ruang yang lebih luas.

## 4.4 Komposisi antar Relasi Kabur

Seperti pada relasi biasa, maka pada relasi kabur dalam ruang hasil kali yang berbeda dapat dikombinasikan antara satu dengan yang lain dengan menggunakan operasi "komposisi". Terdapat banyak versi komposisi yang diusulkan oleh para ahli yang penggunaannya sesuai dengan keperluan bidang aplikasi. Akan tetapi, terdapat dua jenis komposisi yang paling sering digunakan dan paling sering muncul dalam literatur-literatur himpunan kabur, yaitu *komposisi max-min* dan *komposisi max-hasil kali*.

Komposisi pada relasi biasa $\Re_1(x, y)$ dan $\Re_2(y, z)$ di mana $x \in \boldsymbol{U}_1$, $y \in \boldsymbol{U}_2$, $z \in \boldsymbol{U}_3$ dapat diinterpretasikan sebagai keberadaan suatu rantai relasi di antara elemen-elemen dari $\boldsymbol{U}_1$ dan $\boldsymbol{U}_3$, sementara komposisi pada relasi kabur dapat diinterpretasikan sebagai indikasi "kekuatan" dari suatu rantai relasi di antara elemen-elemen $\boldsymbol{U}_1$ dan $\boldsymbol{U}_3$. "Kekuatan" ini direpresentasikan oleh derajat keanggotaan pasangan $(x, z)$ dalam komposisi tersebut. Secara formal, beberapa komposisi didefinisikan sebagai berikut:

***Definisi 4.5***

Misalkan $\tilde{R}_1(x, y)$, $(x, y) \in \boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ dan $\tilde{R}_2(y, z)$, $(y, z) \in \boldsymbol{U}_2 \times \boldsymbol{U}_3$ adalah relasi kabur yang berturut-turut didefinisikan pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$ dan $\boldsymbol{U}_2 \times \boldsymbol{U}_3$, maka komposisi *max-min* $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$, yaitu $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$, adalah suatu himpunan kabur dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x, z) = \max_{y \in U_2}[\min(\mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \mu_{\tilde{R}_2}(y, z))]; \; x \in \boldsymbol{U}_1, y \in \boldsymbol{U}_2, z \in \boldsymbol{U}_3 \quad (4.10)$$

***Definisi 4.6***

Misalkan $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ adalah relasi kabur yang didefinisikan seperti pada Definisi 4.5, maka komposisi *max-*$*$ $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$, yaitu $\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2$, adalah suatu himpunan kabur dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(x, z) = \max_{y \in U_2}[(\mu_{\tilde{R}_1}(x, y) * \mu_{\tilde{R}_2}(y, z)]; \; x \in \boldsymbol{U}_1, \; y \in \boldsymbol{U}_2, \; z \in \boldsymbol{U}_3 \quad (4.11)$$

Jika operator $*$ merupakan operasi assosiatif yang monoton tidak turun, maka komposisi *max*-$*$ akan bersesuaian dengan komposisi *max-min*.

***Definisi 4.7.***

Misalkan $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ adalah relasi kabur yang didefinisikan seperti pada Definisi 4.5, maka komposisi *max-hasil kali* $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$, yaitu $\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2$, adalah suatu himpunan kabur dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2}(x,\ z) = \max_{y \in U_2}[(\mu_{\tilde{R}_1}(x,\ y).\mu_{\tilde{R}_2}(y,\ z)]\ ; \quad x \in \boldsymbol{U}_1,\ y \in \boldsymbol{U}_2,\ z \in \boldsymbol{U}_3 \quad (4.12)$$

***Definisi 4.8.***

Misalkan $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ adalah relasi kabur yang didefinisikan seperti pada Definisi 4.5, maka komposisi *max-rata-rata* $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$, yaitu $\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2$ , adalah suatu himpunan kabur dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2}(x,\ z) = \tfrac{1}{2}\max_{y \in U_2}[\mu_{\tilde{R}_1}(x,\ y) + \mu_{\tilde{R}_2}(y,\ z)]\ ; \quad x \in \boldsymbol{U}_1,\ y \in \boldsymbol{U}_2,\ z \in \boldsymbol{U}_3 \quad (4.13)$$

***Contoh 4.10***

Misalkan $\tilde{R}_1(x,y)$ dan $\tilde{R}_2(y,z)$ didefinisikan dengan menggunakan matriks relasional berikut:

| $\tilde{R}_1$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.1 | 0.2 | 0 | 1 |
| $x_2$ | 0.3 | 0.5 | 0 | 0.2 |

| $\tilde{R}_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0.9 | 0 | 0.3 |
| $y_2$ | 0.2 | 1 | 0.8 |
| $y_3$ | 0.8 | 0 | 0.7 |
| $y_4$ | 0.4 | 0.2 | 0.3 |

(i) Komposisi *max-min* $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ dapat diperoleh sebagai berikut:

Kita akan menghitung $\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_i, z_j)$, $i$ = 1, 2; $j$ = 1, 2, 3. Untuk mendapatkannya, maka terlebih dahulu harus dihitung

$$min[\mu_{\tilde{R}_1}(x_i, y_k),\ \mu_{\tilde{R}_2}(y_k, z_j)],\ \forall k = 1, 2, 3, 4$$

a) untuk $i$ = 1, $j$ = 1 :

$k$ = 1, $min[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1),\ \mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_1)] = min[0.1, 0.9] = 0.1$

$k$ = 2, $min[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2),\ \mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_1)] = min[0.2, 0.2] = 0.2$

$k$ = 3, $min[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_3),\ \mu_{\tilde{R}_2}(y_3, z_1)] = min[0, 0.8] = 0$

$k$ = 4, $min[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_4),\ \mu_{\tilde{R}_2}(y_4, z_1)] = min[1, 0.4] = 0.4$

sehingga $\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_1, z_1) = max[0.1, 0.2, 0, 0.4] = 0.4$

b) untuk $i$ = 1, $j$ = 2 :

$k$ = 1, $min[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1),\ \mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_2)] = min[0.1, 0] = 0$

$k$ = 2, $min[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2),\ \mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_2)] = min[0.2, 1] = 0.2$

$k = 3$, $min[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_3), \mu_{\tilde{R}_2}(y_3, z_2)] = min[0, 0] = 0$

$k = 4$, $min[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_4), \mu_{\tilde{R}_2}(y_4, z_2)] = min[1, 0.2] = 0.2$

sehingga $\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_1, z_2) = max[0, 0.2, 0, 0.2] = 0.2$

c) untuk $i = 1$, $j = 3$

$k = 1$, $min\,[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1), \mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_3)] = min[0.1, 0.3] = 0.1$

$k = 2$, $min\,[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2), \mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_3)] = min[0.2, 0.8] = 0.2$

$k = 3$, $min\,[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_3), \mu_{\tilde{R}_2}(y_3, z_3)] = min[0, 0.7] = 0$

$k = 4$, $min\,[\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_4), \mu_{\tilde{R}_2}(y_4, z_3)] = min[1, 0.3] = 0.3$

sehingga $\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_1, z_3) = max[0.1, 0.2, 0, 0.3] = 0.3$

d) untuk $i = 2$, $j = 1$,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_2, z_1) = 0.3$

e) untuk $i = 2$, $j = 2$,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_2, z_2) = 0.5$

f) untuk $i = 2$, $j = 3$,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_2, z_3) = 0.5$

Jadi komposisi *max-min* $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ dalam bentuk matriks relasional adalah sebagai berikut :

| $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.4 | 0.2 | 0.3 |
| $x_2$ | 0.3 | 0.5 | 0.5 |

(ii) Komposisi *max-hasil kali* $\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2$ dapat diperoleh sebagai berikut:

Kita akan menghitung $\mu_{\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2}(x_i, z_j)$ $i$ = 1, 2; $j$ = 1, 2, 3.

Untuk mendapatkannya, maka terlebih dahulu harus dihitung

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x_i, y_k) \, . \, \mu_{\tilde{R}_2}(y_k, z_j), \ \forall \, k = 1, 2, 3, 4$$

(a) untuk $i$ = 1, $j$ = 1

$k$ = 1, $\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1) \, . \, \mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_1)$ = (0.1) (0.9) = 0.09

$k$ = 2, $\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2) \, . \, \mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_1)$ = (0.2) (0.2) = 0.04

$k$ = 3, $\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_3) \, . \, \mu_{\tilde{R}_2}(y_3, z_1)$ = (0) (0.8) = 0

$k$ = 4, $\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_4) \, . \, \mu_{\tilde{R}_2}(y_4, z_1)$ = (1) (0.4) = 0.4

sehingga $\mu_{\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2}(x_1, z_1)$ = *max* [0.09, 0.04, 0, 0.4] = 0.4

(b) untuk $i$ = 1, $j$ = 2,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2}(x_1, z_2)$ = 0.2

(c) untuk $i$ = 1, $j$ = 3,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2}(x_1, z_3)$ = 0.3

(d) untuk $i$ = 2, $j$ = 1,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2}(x_2, z_1)$ = 0.27

(e) untuk $i$ = 2, $j$ = 2,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2}(x_2, z_2)$ = 0.5

(f) untuk $i$ = 2, $j$ = 3,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2}(x_2, z_3)$ = 0.4

Jadi komposisi *max-hasil kali* $\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2$ dalam bentuk matriks relasional adalah sebagai berikut :

| $\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.4 | 0.2 | 0.3 |
| $x_2$ | 0.27 | 0.5 | 0.4 |

(iii) Komposisi *max-rata-rata* $\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2$ dapat diperoleh sebagai berikut:

Kita akan menghitung $\mu_{\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2}(x_i, z_j)$, $i = 1, 2$ ; $j = 1, 2, 3.$

Untuk mendapatkannya, maka terlebih dahulu harus dihitung

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x_i, y_k) + \mu_{\tilde{R}_2}(y_k, z_j), \quad \forall\, k = 1, 2, 3, 4$$

(a) untuk $i = 1$, $j = 1$.

$k = 1$, $\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1) + \mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_1) = (0.1) + (0.9) = 1$

$k = 2$, $\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2) + \mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_1) = (0.2) + (0.2) = 0.4$

$k = 3$, $\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_3) + \mu_{\tilde{R}_2}(y_3, z_1) = (0) + (0.8) = 0.8$

$k = 4$, $\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_4) + \mu_{\tilde{R}_2}(y_4, z_1) = (1) + (0.4) = 1.4$

sehingga $\mu_{\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2}(x_1, z_1) = \frac{1}{2}\, max[1, 0.4, 0.8, 1.4] = 0.7$

(b) untuk $i = 1$, $j = 2$,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2}(x_1, z_2) = 0.6$

(c) untuk $i = 1$, $j = 3$,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2}(x_1, z_3) = 0.65$

(d) untuk $i$ = 2, $j$ = 1,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2}$ ($x_2$, $z_1$) = 0.6

(e) untuk $i$ = 2, $j$ = 2,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2}$ ($x_2$, $z_2$)= 0.75

(f) untuk $i$ = 2, $j$ = 3,

dengan cara yang serupa, diperoleh $\mu_{\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2}$ ($x_2$, $z_3$)= 0.65

Jadi komposisi *max-rata-rata* $\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2$ dalam bentuk matriks relasional adalah sebagai berikut :

| $\tilde{R}_1 \mp \tilde{R}_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.7 | 0.6 | 0.65 |
| $x_2$ | 0.6 | 0.75 | 0.65 |

Ada suatu cara sederhana untuk menghitung komposisi $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ yaitu dengan menggunakan perkalian matriks pada matriks relasional $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$. Caranya adalah sebagai berikut:

- untuk komposisi *max-min*, matriks relasional $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ dikalikan dengan cara perkalian matriks, tetapi operator "kali" diganti dengan operator *min* dan operator "jumlah" diganti dengan operator *max*.
- untuk komposisi *max-hasil kali*, matriks relasional $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ dikalikan dengan cara perkalian matriks, tetapi operator "jumlah" diganti dengan operator *max*.
- untuk komposisi *max rata-rata*, matriks relasional $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ dikalikan dengan cara perkalian matriks, tetapi operator "kali" diganti dengan operator "jumlah" dan operator "jumlah" diganti dengan operator *max*, kemudian hasilnya dikalikan dengan ½.

Kita akan mengecek hasil komposisi $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ pada Contoh 4.10, dengan menggunakan cara sederhana di atas.

- Untuk komposisi *max-min*:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- Untuk komposisi *max-hasil kali*

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.27 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

- Untuk komposisi *max-rata-rata*:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1.4 & 1.2 & 1.3 \\ 1.2 & 1.5 & 1.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.65 \\ 0.6 & 0.75 & 0.65 \end{bmatrix}$$

hasilnya sama dengan yang diperoleh dalam Contoh 4.10.

## 4.5 Beberapa Definisi pada Relasi Kabur dan Sifat Komposisi antar Relasi Kabur

**- Kerefleksifan**

***Definisi 4.9.***

Misalkan $\tilde{R}$ adalah suatu relasi kabur pada $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{U}$, maka :

1. $\tilde{R}$ disebut *refleksif* jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{R}}(x,\ x)$ =1, $\forall x \in \boldsymbol{U}$

   $\tilde{R}$ disebut *anti-refleksif* jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{R}}(x,\ x) \neq 1$, $\forall x \in \boldsymbol{U}$

   $\tilde{R}$ disebut *irrefleksif* jika dan hanya jika $\exists x \in \boldsymbol{U}$ sedemikian sehingga $\mu_{\tilde{R}}(x,\ x) \neq 1$

2. $\tilde{R}$ disebut *ε-refleksif* jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{R}}(x,\ x) \geq \varepsilon$ , $\forall x \in \boldsymbol{U}$, $0 < \varepsilon < 1$.

3. $\tilde{R}$ disebut *refleksif lemah* jika dan hanya jika

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{\tilde{R}}(x,y) \leq \mu_{\tilde{R}}(x,x) \\ \mu_{\tilde{R}}(y,x) \leq \mu_{\tilde{R}}(x,x) \end{array}\right\} \quad \forall x,\ y \in \boldsymbol{U}$$

**- Kesimetrisan**

***Definisi 4.10.***

Misalkan $\tilde{R}$ adalah suatu relasi kabur pada $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{U}$, maka :

$\tilde{R}$ disebut *simetris* jika dan hanya jika

$$\mu_{\tilde{R}}(x,\ y) = \mu_{\tilde{R}}(y,\ x),\ \forall x, y \in \boldsymbol{U}$$

$\tilde{R}$ disebut *asimetris* jika dan hanya jika

$$\exists x, y \in \boldsymbol{U} \ni \mu_{\tilde{R}}(x,\ y) \neq \mu_{\tilde{R}}(y,\ x)$$

$\tilde{R}$ disebut *antisimetris* jika dan hanya jika

$$\mu_{\tilde{R}}(x,\ y) > 0 \text{ dan } \mu_{\tilde{R}}(y,\ x) > 0, \text{ maka } x = y, \forall x, y \in \boldsymbol{U}.$$

**- Ketransitifan** (*ketransitifan max-min*)

***Definisi 4.11***

Misalkan $\tilde{R}$ adalah relasi kabur pada $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{U}$, maka:

$\tilde{R}$ disebut *transitif* jika dan hanya jika

$$\mu_{\tilde{R}}(x,\ z) \geq \max_{y \in U} [\min(\mu_{\tilde{R}}(x,\ y), \mu_{\tilde{R}}(y,\ z))], \forall x, y, z \in \boldsymbol{U}$$

$\tilde{R}$ disebut *nontransitif* jika dan hanya jika

$$\exists x, y, z \in \boldsymbol{U} \ni \mu_{\tilde{R}}(x,\ z) < \max_{y \in U} [\min(\mu_{\tilde{R}}(x,\ y), \mu_{\tilde{R}}(y,\ z))]$$

$\tilde{R}$ disebut *anti-transitif* jika dan hanya jika

$$\mu_{\tilde{R}}(x,\ z) < \max_{y \in U} [\min(\mu_{\tilde{R}}(x,\ y), \mu_{\tilde{R}}(y,\ z))], \quad \forall x, y, z \in \boldsymbol{U}$$

***Contoh 4.11***

Misalkan $\tilde{R}$ adalah relasi kabur yang didefinisikan pada himpunan kota-kota di dunia yang menyatakan relasi “sangat dekat”. Kita dapat mengasumsikan bahwa setiap kota sangat dekat dengan kota itu sendiri (jaraknya 0 km) dengan derajat keanggotaan sama dengan satu. Jadi $\tilde{R}$ adalah relasi refleksif. Selanjutnya, jika kota A sangat dekat dengan kota B, maka kota B juga sangat dekat dengan kota A dengan derajat keanggotaan yang sama, jadi $\tilde{R}$ adalah relasi simetris. Demikian juga, jika kota A sangat dekat dengan kota B dengan derajat keanggotaan $\mu_{\tilde{R}}(A, B)$ dan kota B sangat dekat dengan kota C dengan derajat keanggotaan $\mu_{\tilde{R}}(B, C)$, maka ada kemungkinan bahwa kota A sangat dekat dengan kota C dengan derajat keanggotaan yang lebih kecil dari derajat keanggotaan $\mu_{\tilde{R}}(A, B)$ dan $\mu_{\tilde{R}}(B, C)$. Oleh karena itu, relasi $\tilde{R}$ yang menyatakan relasi “sangat dekat” pada himpunan kota-kota di dunia tidak transitif (nontransitif).

Beberapa sifat komposisi kabur (khusus max-min):

1. Komposisi *max-min* bersifat assosiatif yaitu

$$(\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2) \circ \tilde{R}_3 = \tilde{R}_1 \circ (\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_3)$$

2. Jika $\tilde{R}_1$ refleksif dan $\tilde{R}_2$ sebarang relasi kabur, maka

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 \supseteq \tilde{R}_2 \text{ dan } \tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1 \supseteq \tilde{R}_2$$

3. Jika $\tilde{R}$ refleksif maka $\tilde{R} \subseteq \tilde{R} \circ \tilde{R}$
4. Jika $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ relasi refleksif, maka $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ juga refleksif.
5. Jika $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ simetris dan $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$, maka

   $\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$ simetris.
6. Jika $\tilde{R}$ transitif maka $\tilde{R} \circ \tilde{R} \subseteq \tilde{R}$
7. Jika $\tilde{R}$ simetris maka $\tilde{R}^2$ simetris
8. Jika $\tilde{R}$ simetris dan transitif, maka $\mu_{\tilde{R}}(x, y) \le \mu_{\tilde{R}}(x, x)$, $\forall x, y \in \boldsymbol{U}$
9. Jika $\tilde{R}$ refleksif dan transitif, maka $\tilde{R} \circ \tilde{R} = \tilde{R}$
10. Jika $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ transitif dan $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$, maka

    $\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$ transitif.

Sifat-sifat di atas hanya berlaku untuk komposisi *max-min*, akan tetapi ada juga beberapa sifat yang berlaku untuk komposisi *max-hasil kali* dan komposisi *max-rata-rata*. Pembaca dipersilahkan untuk memeriksa sifat yang berlaku pada komposisi *max-hasil kali* dan komposisi *max-rata-rata* sebagai latihan.

## 4.6 Relasi Kemiripan

Pada relasi biner biasa $\Re$, kita mengenal adanya relasi kesetaraan (*ekivalensi*), yaitu relasi $\Re$ yang bersifat refleksif, simetris dan transitif. Pada relasi $\Re$ yang demikian dapat didefinisikan himpunan $\boldsymbol{A}_x$ yang memuat semua elemen $\boldsymbol{U}$ yang dihubungkan ke $x$ oleh relasi kesetaraan $\Re$, yaitu $\boldsymbol{A}_x=\{y|\ (x, y)\in \Re\}\ \forall x\in\boldsymbol{U}$. Himpunan $\boldsymbol{A}_x$ disebut kelas kesetaraan dari $\Re$. Anggota dalam masing-masing kelas kesetaraan adalah setara satu sama lain dan keluarga semua kelas kesetaraan akan membentuk suatu partisi pada $\boldsymbol{U}$.

***Contoh 4.12***

Misalkan $\boldsymbol{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hasil kali kartesian $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{U}$ akan memuat 100 anggota, yaitu $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{U}=\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (10, 10)\}$. Misalkan $\Re$ adalah relasi pada $\boldsymbol{U}$ yang didefinisikan sebagai "*x* dan *y* mempunyai sisa yang sama kalau dibagi tiga". Dengan mudah diperlihatkan bahwa relasi $\Re$ adalah relasi kesetaraan. Kelas-kelas kesetaraan yang terbentuk adalah: $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{A}_7=\boldsymbol{A}_{10}=\{1, 4, 7, 10\}$, $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_5=\boldsymbol{A}_8=\{2, 5, 8\}$, dan $\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{A}_6=\boldsymbol{A}_9=\{3, 6, 9\}$. Jadi 1, 4, 7 dan 10 setara satu sama lain, yaitu 1 dan 4 mempunyai sisa yang sama kalau masing-masing dibagi tiga, 1 dan 7 mempunyai sisa yang sama kalau masing-masing dibagi tiga, 1 dan 10 mempunyai sisa yang sama kalau masing-masing dibagi tiga, dan seterusnya. Demikian juga, 2, 5, 8 dan 3, 6, 9 akan setara satu sama lain.

Seperti pada relasi biner biasa di atas, maka pada relasi kabur biner $\tilde{R}$ juga dikenal adanya relasi yang memenuhi sifat refleksif, simetris dan transitif. Relasi kabur biner yang memenuhi sifat tersebut biasa disebut relasi kemiripan. Relasi transitif yang dipakai pada pambahasan relasi kemiripan dalam buku ini adalah relasi transitif bentuk *max-min*. Konsep relasi transitif bentuk lain dapat dipakai untuk mendefinisikan relasi kemiripan.

Relasi kemiripan dapat membentuk himpunan-himpunan yang elemen-elemennya mirip (*similar*) satu sama lain pada derajat keanggotaan yang dispesifikasikan. Himpunan yang terbentuk tersebut disebut kelas kemiripan, yaitu suatu himpunan bagian $\boldsymbol{M}_\alpha$ dari $\boldsymbol{U}$ sedemikian sehingga $\mu_{\tilde{R}}(x, y) \geq \alpha$, $\forall x, y \in \boldsymbol{M}_\alpha$ di mana $\alpha$ adalah elemen himpunan-tingkat (*level set*) $\Lambda_\alpha$ dari $\tilde{R}$. Derajat keanggotaan yang dispesifikasikan tersebut dapat diinterpretasikan sebagai derajat kemiripan antara satu elemen dengan elemen yang lain dalam kelas kemiripan. Jika derajat keanggotaan sama dengan satu ($\alpha$=1) maka kelas kemiripan menjadi kelas kesetaraan (elemen yang mirip satu sama lain menjadi setara satu sama lain). Masing-masing $\boldsymbol{M}_\alpha$ untuk semua $\alpha\in\Lambda_\alpha$ akan membentuk suatu partisi dalam $\boldsymbol{U}$. Kelas-kelas kemiripan dari suatu relasi kemiripan yang elemennya berhingga pada derajat keanggotaan yang dispesifikasikan dapat direpresentasikan dalam bentuk diagram yang biasa disebut pohon-kemiripan yang mirip dengan suatu *dendogram*.

### *Contoh 4.13*

Misalkan relasi kabur $\tilde{R}$ pada himpunan ***U***={*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*} dinyatakan oleh matriks relasional berikut:

| $\tilde{R}$ | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 1 | 0.8 | 0 | 0.4 | 0 | 0 | 0 |
| *b* | 0.8 | 1 | 0 | 0.4 | 0 | 0 | 0 |
| *c* | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0.9 | 0.5 |
| *d* | 0.4 | 0.4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| *e* | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0.9 | 0.5 |
| *f* | 0 | 0 | 0.9 | 0 | 0.9 | 1 | 0.5 |
| *g* | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0.5 | 0.5 | 1 |

Dengan mudah dapat diperiksa bahwa relasi kabur $\tilde{R}$ tersebut di atas adalah relasi kemiripan pada ***U***. Himpunan tingkat dari $\tilde{R}$ adalah $\Lambda_\alpha$={0, 0.4, 0.5, 0.8, 0.9, 1}, sehingga diperoleh kelas kemiripan pada derajat keanggotaan $\alpha$, yaitu:

$\boldsymbol{M}_0$ = ***U***

$\boldsymbol{M}_{0.4}$= {*a*, *b*, *d*}, {*c*, *e*, *f*, *g*}

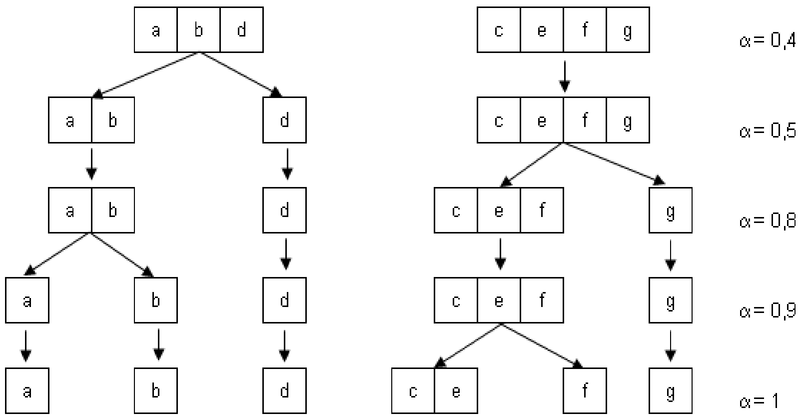
$\boldsymbol{M}_{0.5}$= {*a*, *b*}, {*d*}, {*c*, *e*, *f*, *g*}

$\boldsymbol{M}_{0.8}$={*a*, *b*}, {*d*}, {*c*, *e*, *f*}, {*g*}

$\boldsymbol{M}_{0.9}$={*a*}, {*b*}, {*d*}, {*c*, *e*, *f*}, {*g*}

$\boldsymbol{M}_1$={*a*}, {*b*}, {*d*}, {*c*, *e*}, {*f*}, {*g*}

Relasi kemiripan tersebut dapat direpresentasikan dalam pohon-kemiripan atau *dendogram* berikut:




**Gambar 4.6** Pohon kemiripan untuk relasi kemiripan $\tilde{R}$ (Contoh 4.13)

Dari Contoh 4.13, terlihat bahwa *c*, *e*, *f* dan *g* adalah mirip satu sama lain dengan derajat kemiripan 0.5; *c*, *e* dan *f* mirip satu sama lain dengan derajat kemiripan 0.8; *c* dan *e* mirip dengan derajat kemiripan sama dengan satu; dan seterusnya.

## 4.7 Relasi Kedekatan

Pada relasi biner biasa $\Re$, kita mengenal adanya relasi kecocokan, yaitu relasi biner $\Re$ yang bersifat refleksif dan simetris. Suatu konsep penting yang berhubungan dengan relasi kecocokan adalah kelas kecocokan. Jika diberikan suatu relasi kecocokan $\Re$, maka kelas kecocokan merupakan suatu himpunan bagian **A** dari ***U*** sedemikian sehingga $(x, y) \in \Re(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U})$, $\forall x, y \in \boldsymbol{A}$. Suatu kelas kecocokan yang tidak termuat (sejati) dalam kelas kecocokan yang lain disebut kelas kecocokan maksimal. Keluarga yang memuat semua kelas kecocokan maksimal disebut penutup lengkap dari ***U***.

Seperti pada relasi biner biasa, maka pada relasi kabur biner $\tilde{R}$ juga dikenal adanya relasi yang memenuhi sifat refleksif dan simetris. Relasi kabur biner $\tilde{R}$ yang memenuhi sifat tersebut biasa disebut sebagai relasi kedekatan. Apabila $\tilde{R}$ relasi kedekatan, maka kelas kedekatan didefinisikan berdasarkan suatu derajat keanggotaan $\alpha$ yang dispesifikasikan. Kelas kedekatan-$\alpha$ merupakan suatu himpunan bagian $\boldsymbol{D}_\alpha$ dari $\boldsymbol{U}$ sedemikian sehingga $\mu_{\tilde{R}}(x, y) \geq \alpha$, $\forall x, y \in \boldsymbol{D}_\alpha$ di mana $\alpha$ adalah elemen himpunan-tingkat (*level set*) dari $\tilde{R}$. Kelas kedekatan-$\alpha$ maksimal dan penutup-$\alpha$ lengkap merupakan perluasan dari konsep kelas kecocokan maksimal dan penutup lengkap. Kelas kendekatan-$\alpha$ maksimal dan penutup-$\alpha$ lengkap berturut-turut akan sama dengan kelas kecocokan dan penutup lengkap pada $\alpha$=1.

***Contoh 4.14***

Misalkan relasi kabur $\tilde{R}$ didefinisikan pada $\boldsymbol{U}$ = $\mathbb{N}_9$ yang dinyatakan oleh matriks relasional berikut:

| $\tilde{R}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0.8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0.8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0.8 | 0.7 | 0.5 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0.8 | 0.8 | 1 | 0.7 | 0.5 | 0.7 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0.7 | 0.7 | 1 | 0.4 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 | 0.4 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Karena matriks di atas simetris dan semua entri pada diagonal utama sama dengan satu, maka relasi kabur $\tilde{R}$ adalah simetris dan refleksif. Dengan demikian $\tilde{R}$ adalah suatu relasi kedekatan. Himpunan tingkat dari $\tilde{R}$ adalah $\Lambda_\alpha$ = {0, 0.4, 0.5, 0.7, 0.8, 1}, sehingga diperoleh kelas kedekatan pada masing-masing tingkat:

$\boldsymbol{D}_0 = N_9$

$\boldsymbol{D}_{0.4}$ = {1,2},{3, 4, 5}, {4, 5, 6, 7}, {5, 8}, {9}

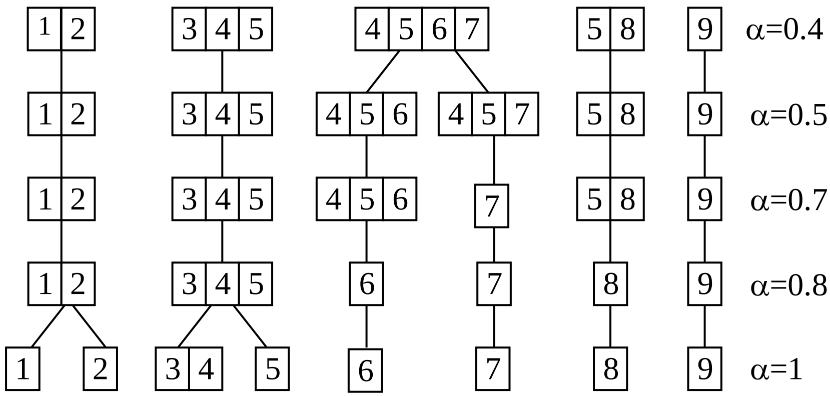
$\boldsymbol{D}_{0.5}$ = {1,2},{3, 4, 5}, {4, 5, 6}, {4, 5, 7}, {5, 8},{9}

$\boldsymbol{D}_{0.7}$ = {1,2},{3, 4, 5}, {4, 5, 6}, {7}, {5, 8}, {9}

$\boldsymbol{D}_{0.8}$ = {1,2},{3, 4, 5}, {6}, {7}, {8}, {9}

$\boldsymbol{D}_1$ = {1}, {2},{3, 4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}

Relasi kedekatan tersebut dapat direpresentasikan dalam pohon kedekatan seperti diperlihatkan dalam Gambar 4.7. Kelas-kelas kedekatan tersebut tidak ada yang termuat (sejati) dalam kelas kedekatan yang lain pada tingkat $\alpha$ yang sama. Oleh karena itu, kelas-kelas kedekatan tersebut merupakan kelas kedekatan-$\alpha$ maksimal. Jadi {{1,2},{3, 4, 5}, {4, 5, 6, 7}, {5, 8}, {9}} adalah penutup-0.4 lengkap, {{1,2},{3, 4, 5}, {4, 5, 6},{4, 5, 7}, {5, 8}, {9}} adalah penutup-0.5 lengkap dan seterusnya.




**Gambar 4.7** Pohon kedekatan untuk relasi kedekatan $\tilde{R}$ (Contoh 4.14).

## Soal-Soal Latihan

4.1 Berikan suatu contoh fungsi keanggotaan relasi kabur $\tilde{R}$ :="jauh lebih kecil dari pada" dalam $\mathbb{N}_{10} \times \mathbb{N}_{10}$ dengan menggunakan matriks relasional.

4.2 Relasi kabur $\tilde{R}$ yang didefinisikan dalam $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \boldsymbol{U}_3 \times \boldsymbol{U}_4$, di mana $\boldsymbol{U}_1 = \{a, b, c\}$, $\boldsymbol{U}_2=\{s, t\}$, $\boldsymbol{U}_3=\{x, y\}$ dan $\boldsymbol{U}_4=\{i, j\}$ adalah sebagai berikut:

$$\tilde{R}(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{U}_3, \boldsymbol{U}_4) = \{((b, t, y, i), 0.4), ((a, s, x, i), 0.6), ((b, s, y, i), 0.9), ((b, s, y, j), 1), ((a, t, y, i), 0.6), ((c, s, y, i), 0.2)\}.$$

a) Hitunglah proyeksi $\tilde{R}$ pada $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \boldsymbol{U}_4$, $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2$, dan $\boldsymbol{U}_4$

b) Hitunglah perluasan cylindric dari proyeksi dalam (a) ke $\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \boldsymbol{U}_3 \times \boldsymbol{U}_4$.

4.3 Misalkan suatu relasi kabur $\tilde{R}$ pada $\tilde{A} \times \tilde{B}$ didefinisikan dengan menggunakan matriks relasional berikut:

| $\tilde{R}$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.5 | 0 | 1 | 0.9 | 0.9 |
| $x_2$ | 1 | 0.4 | 0.5 | 0.3 | 0.1 |
| $x_3$ | 0.7 | 0.8 | 0 | 0.2 | 0.6 |
| $x_4$ | 0.1 | 0.3 | 0.7 | 1 | 0 |

a) Tentukan proyeksi pertama dan proyeksi kedua dari relasi $\tilde{R}$ **.**

b) Tentukan perluasan cylindric dari proyeksi pertama dan proyeksi kedua relasi $\tilde{R}$ .

4.4 Carilah $\tilde{R}_L^{(1)}$ dan $\tilde{R}_L^{(2)}$ dalam Contoh 4.8

4.5 Komposisikan dua relasi kabur $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ berikut

| $\tilde{R}_1$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0 | 0.7 | 0.3 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0.2 | 0 |

| $\tilde{R}_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | 0 | 1 |
| $y_2$ | 0 | 0.5 | 0.4 |
| $y_3$ | 0.7 | 0.9 | 0.6 |
| $y_4$ | 0 | 0 | 0 |

dengan menggunakan komposisi maksimun, komposisi max-hasil kali dan komposisi max-rata-rata.

4.6 Misalkan didefinisikan relasi kedekatan $\tilde{R}$ pada $\mathbb{N}_7 \times \mathbb{N}_7$ dengan menggunakan matriks relasional berikut:

| $\tilde{R}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0.8 | 0 | 0.6 | 0.8 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0.6 | 0 | 0.5 | 0 |
| 3 | 0.8 | 0 | 1 | 0.8 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0.6 | 0.8 | 1 | 0 | 0 | 0.8 |
| 5 | 0.6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.6 | 0 |
| 6 | 0.8 | 0.5 | 0 | 0 | 0.6 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0.8 | 0 | 0 | 1 |

Tentukan: a) Pohon kedekatan dari relasi $\tilde{R}$ .

b) Semua penutup-$\alpha$ lengkap dari relasi $\tilde{R}$ .