BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2024
BÀI THI TOÁN
MÃ ĐỀ: 101

Câu 1: Cho số phức z có $\overline{z}=-5+6i$. Phần ảo của z bằng

A. -5. **B.** -6. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 2: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int(2x+3)dx=\frac{1}{2}x^2+3x+C$. **B.** $\int(2x+3)dx=x^2+C$.

C. $\int(2x+3)dx=2x^2+3x+C$. **D.** $\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-3}$. Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_1}=(1;2;0)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-1;2;0)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;-1;-3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(1;1;3)$.

Câu 4: Cho hình trụ có diện tích xung quanh $S_{xq}=36\pi$ và chiều cao $h=6$. Bán kính của hình trụ đã cho bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

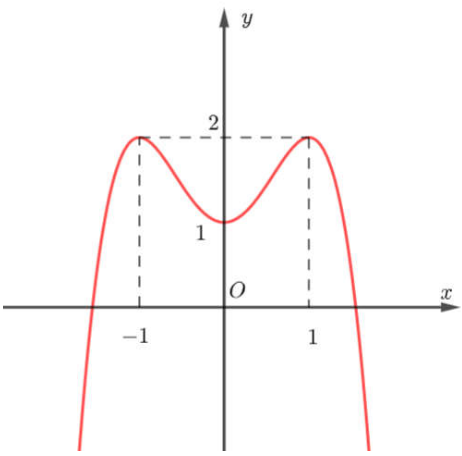
Câu 5: Dãy số nào dưới đây là một cấp số cộng?

A. $1,3,5,7$. **B.** $1,0,2,4$. **C.** $1,3,5,10$. **D.** $1,2,3,-4$.

Câu 6: Với a, b là các số thực dương tuỳ ý và $a\neq1$, $\log_{a^2}b^2$ bằng

A. $\log_a b$. **B.** $\log_{a^4}b$. **C.** $(\log_a b)^2$. **D.** $\log_a b^4$.

Câu 7: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{3}{2}$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 8: Cho khối lăng trụ tam giác có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. 24. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 18.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=3$, $f(2)=1$. Giá trị của $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 4.

Câu 10: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-1}{3x+2}$ có phương trình là

A. $x=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $x=\dfrac{4}{3}$. **C.** $y=\dfrac{4}{3}$. **D.** $y=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 11: Số phức $z=i+i^2+i^3$ bằng

A. -1. **B.** $-1+2i$. **C.** 1. **D.** i.

Câu 12: Trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, hàm số $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f_3(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $f_4(x)=-\dfrac{1}{4}\cos 2x$. **C.** $f_2(x)=\cos 2x$. **D.** $f_1(x)=-\cos 2x$.

Câu 13: Nếu $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-1$ và $\int\limits_{1}^{7} f(x)\mathrm{d}x=-5$ thì $\int\limits_{-2}^{7} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -4. **B.** 5. **C.** -6. **D.** 4.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

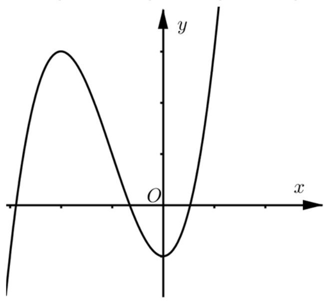
Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)>-1$ là

A. $(-2;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 16: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình bên?



A. $y=-x^3+3x^2+3$. **B.** $y=x^4-2x^2-4$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{2x+1}$. **D.** $y=x^3+3x^2-1$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(3;0;1)$. Gọi (S) là mặt cầu nhận AB làm đường kính, tâm của (S) có tọa độ là

A. $(2;-1;2)$. **B.** $(-1;-1;1)$. **C.** $(4;-2;4)$. **D.** $(1;1;-1)$.

Câu 18: Nghiệm của phương trình $2^{2x}=2^{x+6}$ là

A. $x=-6$. **B.** $x=2$. **C.** $x=6$. **D.** $x=-2$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2x+4, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 20: Hàm số nào dưới đây là hàm số mũ?

A. $y = x^{2024}$. **B.** $y = 2024^x$. **C.** $y = \log_3 x$. **D.** $y = x^{-4}$.

Câu 21: Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{1}{7}}$ là

A. $y' = \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}$. **B.** $y' = \frac{1}{7}x^{\frac{6}{7}}$. **C.** $y' = x^{-\frac{6}{7}}$. **D.** $y' = \frac{7}{8}x^{\frac{8}{7}}$.

Câu 22: Cho hình nón có bán kính đáy $r = 3$ và độ dài đường sinh $l = 5$. Chiều cao của hình nón đã cho bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** 2.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a} = (2;3;-1)$ và $\vec{b} = (-3;2;-4)$. Vecto $\vec{a} + \vec{b}$

A. $(-1;-5;5)$. **B.** $(-5;-1;-3)$. **C.** $(-1;5;-5)$. **D.** $(1;-5;5)$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(3;4;-2)$ và vuông góc với trục Oz có phương trình là

A. $y - 4 = 0$. **B.** $z + 2 = 0$. **C.** $x + y + z - 5 = 0$. **D.** $x - 3 = 0$.

Câu 26: Cho khối chóp tứ giác có thể tích $V = 3a^3$ và diện tích đáy $B = a^2$. Chiều cao cúa khối chóp đã cho bằng

A. a. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $9a$.

Câu 27: Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người thành một hàng ngang?

A. 36. **B.** 720. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 28: Trên mặt phẳng tọa độ, $M(2;-5)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

A. -5. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông gơc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{2\sqrt{10}}{5}a$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}a$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}a$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điềm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 1 - t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Câu 31: Cho số phức $z = 3 + 4i$. Môđun của số phức iz bằng

A. 7. **B.** 49. **C.** 25. **D.** 5.

Câu 32: Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 6 điểm phân biệt khác O. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 12 điểm (gồm điểm O và 11 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

A. $\dfrac{19}{22}$. **B.** $\dfrac{27}{44}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{39}{44}$.

Câu 33: Một ô tô đang chuyển động với vận tốc $20\,\text{m/s}$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v(t) = -4t + 20\,(\text{m/s})$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

A. $32\,\text{m}$. **B.** $50\,\text{m}$. **C.** $48\,\text{m}$. **D.** $30\,\text{m}$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(3;2;5)$. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA}$, độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{74}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{14}$.

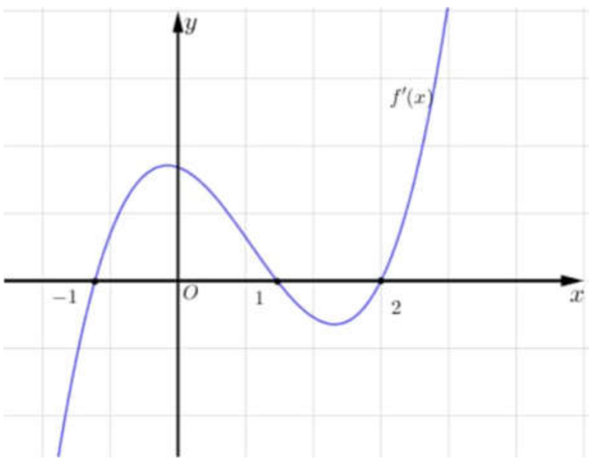
Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{3}a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Câu 36: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -6x^3 + 27x^2 - 16x + 1$ trên đoạn $[1;5]$ bằng

A. 6. **B.** $\dfrac{329}{9}$. **C.** $-\dfrac{14}{9}$. **D.** -154.

Câu 37: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 38: Với a, b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab} b$ bằng

A. $\dfrac{1}{1+\log_b a}$. **B.** $\dfrac{1}{\log_b a}$. **C.** $1-\log_b a$. **D.** $1+\log_b a$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(e)=\frac{1}{5}$ và $f'(x)=\frac{1}{3}\ln x,\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $\int\limits_{e}^{e^3}\frac{f(x)}{x^2}\text{d}x=ae^{-3}+be^{-1}+c$, với a,b,c là số hữu tỉ, giá trị của $a-b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{4};1\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi số a tồn tại không quá 4 số nguyên b thỏa mãn $5^{b^2}<25^{-b}.a^{b+2}$?

A. 125. **B.** 100. **C.** 99. **D.** 124.

Câu 41: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là $-\frac{3}{2}$; 2; $\frac{11}{2}$ và đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x)\le m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(3)$ **B.** $f(2)\ge m\ge f(3)$ **C.** $m\ge f(0)$ **D.** $m\ge f(2)$

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $|z-1-5i|+|z-1+5i|=10$ và $|z-2-i|=m$?

A. 5 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R},\ a>0)$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 (với $x_1<x_2$) thoả mãn $x_1+x_2=0$. Hình phẳng giới hạn bởi đường $y=f'(x).f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{4}$. Biết $\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{3^x+1}\text{d}x=-\frac{7}{2}$, giá trị của $\int\limits_{0}^{x_2}(x+2)f''(x)\text{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(6;7)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-7;-6)$.

Câu 44: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB=a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $30°$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng.

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$ **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{36}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}}{4}a^3$ **D.** $\frac{3\sqrt{6}}{4}a^3$

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+3}{-5}$ và $d_2:\frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$. Trong các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2, gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6\cdot$ **B.** $x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=6\cdot$

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6\cdot$ **D.** $x^2+(y+1)^2+z^2=6\cdot$

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=\frac{2}{x^3}+\ln\frac{x+3}{x-3}$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-\infty;2100)$ thoả mãn $f(a-2024)+f(6a-27)\ge 0$

A. 2096. **B.** 288. **C.** 1807. **D.** 360.

Câu 47: Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1-\frac{1}{9}\right|=|z_1-z_2|$. Giả sử $|z_1|=\frac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thoả mãn $c\mathrm{w}^2+b\mathrm{w}+a=0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho ứng với mỗi k tồn tại đúng 9 số phức z_3 có phần ảo nguyên, $z_3-\mathrm{w}$ là số thuần ảo và $|z_3|\le|\mathrm{w}|$?

A. 23. **B.** 22. **C.** 11. **D.** 12

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a$, mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng:

A. $\frac{25\pi}{9}a^2$. **B.** $\frac{25\pi}{3}a^2$. **C.** $\frac{28\pi}{3}a^2$. **D.** $\frac{28\pi}{9}a^2$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;6;-1)$, $B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua A. Điểm $M(a;b;c)$ $(c>0)$ thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và AI lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 50: Xét hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(-1)=5$. Hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-100;0)$ sao cho ứng với mỗi a, hàm số $y=\left|f(x)+\frac{5}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;+\infty)$?

A. 9. **B.** 89. **C.** 10. **D.** 90.

---------- **HẾT** ----------

BẢNG ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT THAM KHẢO

1.B	2.D	3.C	4.C	5.A	6.A	7.B	8.D	9.C	10.A
11.A	12.C	13.C	14.B	15.C	16.D	17.A	18.C	19.A	20.B
21.A	22.A	23.A	24.C	25.B	26.D	27.B	28.C	29.D	30.D
31.D	32.C	33.B	34.B	35.A	36.B	37.D	38.A	39.B	40.D
41.C	42.D	43.A	44.A	45.A	46.D	47.B	48.C	49.D	50.C

Câu 1: Cho số phức z có $\overline{z}=-5+6i$. Phần ảo của z bằng

A. -5. **B.** -6. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overline{z}=-5+6i\Rightarrow z=-5-6i$.

Phần ảo của z bằng -6.

Câu 2: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int(2x+3)dx=\frac{1}{2}x^2+3x+C$. **B.** $\int(2x+3)dx=x^2+C$.

C. $\int(2x+3)dx=2x^2+3x+C$. **D.** $\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-3}$. Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_1}=(1;2;0)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-1;2;0)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;-1;-3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(1;1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 4: Cho hình trụ có diện tích xung quanh $S_{xq}=36\pi$ và chiều cao $h=6$. Bán kính của hình trụ đã cho bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S_{xq}=2\pi rl=2\pi rh\Rightarrow r=\frac{S_{xq}}{2\pi.h}=\frac{36\pi}{2\pi.6}=3$.

Câu 5: Dãy số nào dưới đây là một cấp số cộng?

A. $1,3,5,7$. **B.** $1,0,2,4$. **C.** $1,3,5,10$. **D.** $1,2,3,-4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $1,3,5,7$ là cấp số cộng với $u_1=1$ và $d=2$.

Câu 6: Với a, b là các số thực dương tuỳ ý và $a\neq 1$, $\log_{a^2}b^2$ bằng

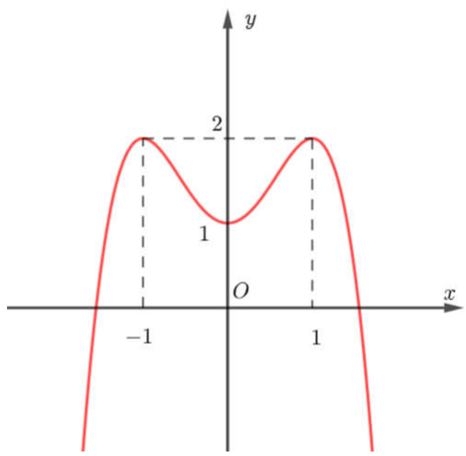
A. $\log_a b$. **B.** $\log_{a^4}b$. **C.** $(\log_a b)^2$. **D.** $\log_a b^4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{a^2} b^2 = \frac{1}{2}.2.\log_a b = \log_a b$.

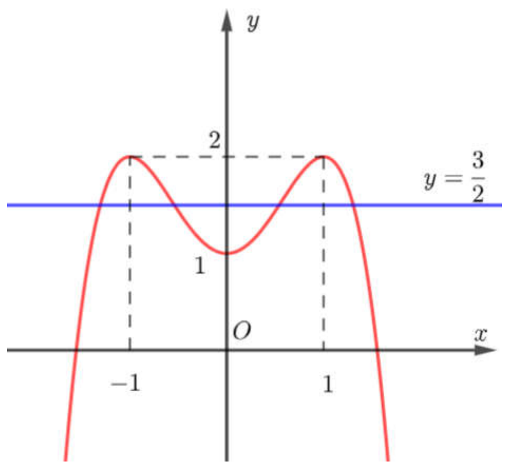
Câu 7: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{3}{2}$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B



Ta có số nghiệm của phương trình $f(x) = \frac{3}{2}$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 8: Cho khối lăng trụ tam giác có diện tích đáy $B = 6$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. 24. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D

Ta có thể tích khối lăng trụ là: $V = B.h = 6.3 = 18$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 3$, $f(2) = 1$. Giá trị của $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 1 - 3 = -2$.

Câu 10: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x-1}{3x+2}$ có phương trình là

A. $x = -\dfrac{2}{3}$. **B.** $x = \dfrac{4}{3}$. **C.** $y = \dfrac{4}{3}$. **D.** $y = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}^-} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}^+} y = -\infty$.

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x-1}{3x+2}$ có phương trình là $x = -\dfrac{2}{3}$

Câu 11: Số phức $z = i + i^2 + i^3$ bằng

A. -1. **B.** $-1+2i$. **C.** 1. **D.** i.

Lời giải

Chọn A

$z = i + i^2 + i^3 = -1$.

Câu 12: Trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, hàm số $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f_3(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $f_4(x) = -\dfrac{1}{4}\cos 2x$. **C.** $f_2(x) = \cos 2x$. **D.** $f_1(x) = -\cos 2x$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \frac{1}{2}.2.\cos 2x = \cos 2x$$

Câu 13: Nếu $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -1$ và $\int\limits_{1}^{7} f(x)\mathrm{d}x = -5$ thì $\int\limits_{-2}^{7} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -4. **B.** 5. **C.** -6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$$\int\limits_{-2}^{7} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{7} f(x)\mathrm{d}x = -6.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = 2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn B

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -1$ là

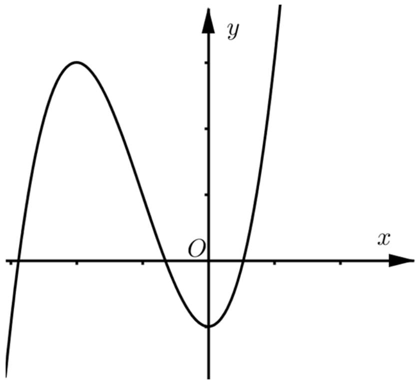
A. $(-2;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -1 \Leftrightarrow 0 < x+2 < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 0$.

Câu 16: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình bên?



A. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 4$. **C.** $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$. **D.** $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn D

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(3;0;1)$. Gọi (S) là mặt cầu nhận AB làm đường kính, tâm của (S) có tọa độ là

A. $(2;-1;2)$. **B.** $(-1;-1;1)$. **C.** $(4;-2;4)$. **D.** $(1;1;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Tâm của mặt cầu (S) là trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là $(2;-1;2)$.

Câu 18: Nghiệm của phương trình $2^{2x} = 2^{x+6}$ là

A. $x = -6$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 6$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2x} = 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x = x + 6 \Leftrightarrow x = 6$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x) = 2x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -2$.

Vậy nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Câu 20: Hàm số nào dưới đây là hàm số mũ?

A. $y = x^{2024}$. **B.** $y = 2024^x$. **C.** $y = \log_3 x$. **D.** $y = x^{-4}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số mũ có dạng $y = a^x \left(0 < a \neq 1\right)$.

Câu 21: Trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{1}{7}}$ là

A. $y' = \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}$. **B.** $y' = \frac{1}{7}x^{\frac{6}{7}}$. **C.** $y' = x^{-\frac{6}{7}}$. **D.** $y' = \frac{7}{8}x^{\frac{8}{7}}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 22: Cho hình nón có bán kính đáy $r = 3$ và độ dài đường sinh $l = 5$. Chiều cao của hình nón đã cho bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Câu 23: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a} = \left(2;3;-1\right)$ và $\vec{b} = \left(-3;2;-4\right)$. Vecto $\vec{a} + \vec{b}$

A. $\left(-1;-5;5\right)$. **B.** $\left(-5;-1;-3\right)$. **C.** $\left(-1;5;-5\right)$. **D.** $\left(1;-5;5\right)$.

Lời giải

Chọn C

$\vec{a} + \vec{b} = \left(-1;5;-5\right)$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M\left(3;4;-2\right)$ và vuông góc với trục Oz có phương trình là

A. $y - 4 = 0$. **B.** $z + 2 = 0$. **C.** $x + y + z - 5 = 0$. **D.** $x - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng vuông góc với trục Oz nên có VTPT là $\vec{k} = \left(0;0;1\right)$.

Mặt phẳng đi qua điểm $M\left(3;4;-2\right)$ và VTPT là $\vec{k} = \left(0;0;1\right)$ có phương trình $z + 2 = 0$.

Câu 26: Cho khối chóp tứ giác có thể tích $V = 3a^3$ và diện tích đáy $B = a^2$. Chiều cao cúa khối chóp đã cho bằng

A. a. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $9a$.

Lời giải

Chọn D

$V = \frac{1}{3}.B.h \Rightarrow 3a^3 = \frac{1}{3}.a^2.h \Rightarrow h = 9a$.

Câu 27: Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người thành một hàng ngang?

A. 36. **B.** 720. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Có $6!=720$ cách sắp xếp 6 người thành một hàng ngang.

Câu 28: Trên mặt phẳng tọa độ, $M(2;-5)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

A. -5. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

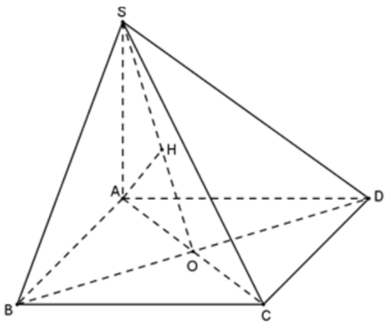
$M(2;-5)$ là điểm biểu diễn của số phức z, suy ra $z=2-5i$. Vậy phần thực của z bằng 2.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{2\sqrt{10}}{5}a$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}a$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}a$.

Lời giải

Chọn D



$$d\left(C;(SBD)\right)=d\left(A;(SBD)\right)=AH.$$

Ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AO^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}\Rightarrow AK=\frac{\sqrt{10}}{5}a$

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-z+1=0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=2t\\z=-1-t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-1+t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2\\z=1-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2\\z=-1-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có véc tơ chỉ phương là $(2;0;-1)$ và đi qua $A(1;2;-1)$ là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=2\\z=-1-t\end{cases}$

Câu 31: Cho số phức $z=3+4i$. Môđun của số phức iz bằng

A. 7. **B.** 49. **C.** 25. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left|iz\right|=\left|i\left(3+4i\right)\right|=\left|-4+3i\right|=\sqrt{\left(-4\right)^2+3^2}=5$.

Câu 32: Trên hai tia Ox,Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 6 điểm phân biệt khác O. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 12 điểm (gồm điểm O và 11 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

A. $\dfrac{19}{22}$. **B.** $\dfrac{27}{44}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{39}{44}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử không gian mẫu $n\left(\Omega\right)=C_{12}^3$.

Gọi A là biến cố "3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác".

TH1: 3 điểm được chọn có điểm O, khi đó ta chọn 1 điểm trên Ox và 1 điểm trên Oy. Số cách chọn là $6.5=30$.

TH2: 3 điểm được chọn không có điểm O, khi đó ta chọn 2 điểm trên Ox và 1 điểm trên Oy. Số cách chọn là $C_5^2.C_6^1=60$.

TH3: 3 điểm được chọn không có điểm O, khi đó ta chọn 1 điểm trên Ox và 2 điểm trên Oy. Số cách chọn là $C_5^1.C_6^2=75$.

Suy ra $n\left(A\right)=30+60+75=165$.

Vậy xác suất là $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{165}{C_{12}^3}=\dfrac{3}{4}$.

Câu 33: Một ô tô đang chuyển động với vận tốc $20\,\text{m/s}$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v\left(t\right)=-4t+20\left(\text{m/s}\right)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

A. 32m. **B.** 50m. **C.** 48m. **D.** 30m.

Lời giải

Chọn B

Gọi $t_0;\, t_1$ lần lượt là thời điểm người lái xe đạp phanh và thời điểm ô tô dừng hẳn.

Khi đó, $t_0=0$ và $v\left(t_1\right)=0\Leftrightarrow -4t_1+20=0\Leftrightarrow t_1=5$.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

$s=\int\limits_{t_0}^{t_1}v\left(t\right)\text{d}t=\int\limits_0^5\left(-4t+20\right)\text{d}t=50\left(m\right)$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;2;3\right)$ và $B\left(3;2;5\right)$. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MA}$, độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{74}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M\left(x;y;z\right)$

Ta có:

$\overrightarrow{MB}=(3-x;2-y;5-z)$

$\overrightarrow{MA}=(1-x;2-y;3-z)$

Theo bài ra: $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MA}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x=3(1-x)\\2-y=3(2-y)\\5-z=3(3-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=2\\z=2\end{cases}$. Suy ra $M(0;2;2)$.

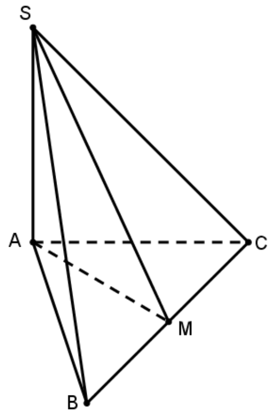
Khi đó: $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $BC=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{3}a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM\perp BC$

Mặt khác, $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$

Khi đó: $BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp SM$

Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $\widehat{SMA}$

Ta có: $AM=\frac{1}{2}BC=a$, $SA=\sqrt{3}a$

Xét tam giác vuông SAM: $\tan\widehat{SMA}=\frac{SA}{AM}=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SMA}=60^\circ$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°.

Câu 36: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-6x^3+27x^2-16x+1$ trên đoạn $[1;5]$ bằng

A. 6. **B.** $\frac{329}{9}$. **C.** $-\frac{14}{9}$. **D.** -154.

Lời giải

Chọn B

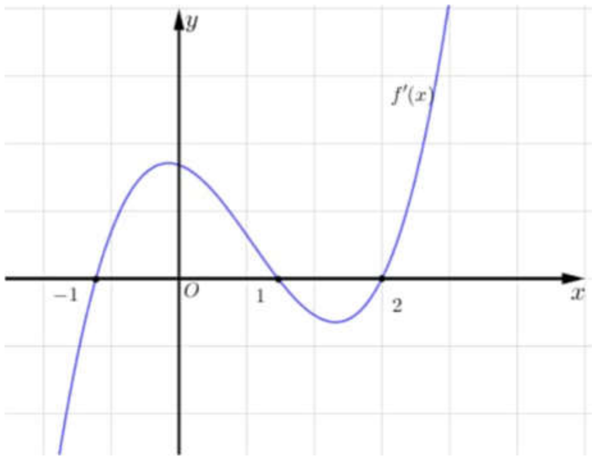
Ta có: $f'(x)=-18x^2+54x-16$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow-18x^2+54x-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{8}{3}\in[1;5]\\x=\frac{1}{3}\notin[1;5]\end{array}\right.$$

Khi đó: $f\left(1\right)=6,\ f\left(5\right)=-154,\ f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{329}{9}$

Suy ra $\max\limits_{[1;5]} f\left(x\right)=f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{329}{9}$.

Câu 37: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\infty;-1\right)$. **B.** $\left(-1;2\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(-1;1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

Câu 38: Với a,b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab} b$ bằng

A. $\frac{1}{1+\log_b a}$. **B.** $\frac{1}{\log_b a}$. **C.** $1-\log_b a$. **D.** $1+\log_b a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{ab} b=\frac{1}{\log_b ab}=\frac{1}{\log_b a+\log_b b}=\frac{1}{1+\log_b a}$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(e)=\frac{1}{5}$ và $f'(x)=\frac{1}{3}\ln x, \forall x\in(0;+\infty)$. Biết $\int\limits_e^{e^3}\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=ae^{-3}+be^{-1}+c$, với a,b,c là số hữu tỉ, giá trị của $a-b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{4};1\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\frac{1}{3}\int\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(x\ln x-\int\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{3}(x\ln x-x+C)$.

Do $f(e)=\frac{1}{5}\Rightarrow C=\frac{3}{5}$ hay $f(x)=\frac{1}{3}\left(x\ln x-x+\frac{3}{5}\right)$.

Khi đó $f\left(e^3\right)=\frac{2e^3}{3}+\frac{1}{5}$.

Ta có $\int\limits_e^{e^3}\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\limits_e^{e^3}f(x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}f(x)\Big|_e^{e^3}+\int\limits_e^{e^3}\frac{f'(x)}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}f(x)\Big|_e^{e^3}+\frac{1}{3}\int\limits_e^{e^3}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{x}f(x)\Big|_e^{e^3}+\frac{1}{6}\ln^2x\Big|_e^{e^3}=-\frac{1}{e^3}\left(\frac{2e^3}{3}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{5e}+\frac{4}{3}=-\frac{1}{5}e^{-3}+\frac{1}{5}e^{-1}+\frac{2}{3}$.

Vậy $a=-\frac{1}{5};b=\frac{1}{5};c=\frac{2}{3}\Rightarrow a-b+c=\frac{4}{15}$.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi số a tồn tại không quá 4 số nguyên b thỏa mãn $5^{b^2}<25^{-b}.a^{b+2}$?

A. 125. **B.** 100. **C.** 99. **D.** 124.

Lời giải

Chọn D

Ta có $5^{b^2}<25^{-b}.a^{b+2}\Leftrightarrow 5^{b^2}.25^b<a^{b+2}\Leftrightarrow 5^{b^2+2b}<a^{b+2}$

$\Leftrightarrow b(b+2)<(b+2)\log_5 a\Leftrightarrow(b+2)(b-\log_5 a)<0\Leftrightarrow -2<b<\log_5 a$ (do $\log_5 a>0$)

Để thỏa mãn thì $\log_5 a\le 3\Leftrightarrow a\le 125$.

Do a nguyên và lớn hơn 1 nên có 124 giá trị thỏa mãn.

Câu 41: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là $-\frac{3}{2}$; 2; $\frac{11}{2}$ và đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x)\le m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(3)$ **B.** $f(2)\ge m\ge f(3)$ **C.** $m\ge f(0)$ **D.** $m\ge f(2)$

Lời giải

Chọn C

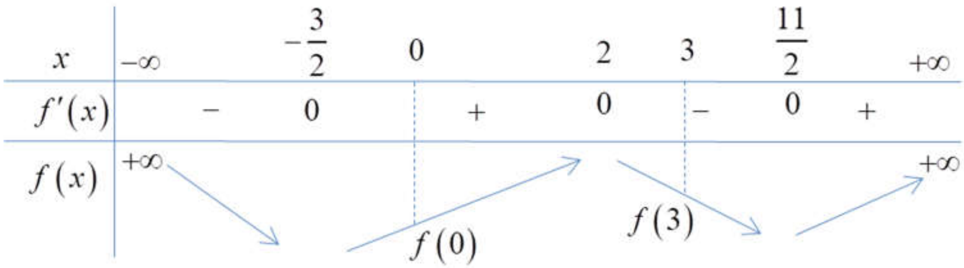
$f(x)$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow a>0\Rightarrow f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.

$$f'(x)=4a\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)\left(x-\frac{11}{2}\right)=a(2x+3)(x-2)(2x-11)=4ax^3-24ax^2-ax+66a.$$

$$\Rightarrow f(x)=ax^4-8ax^3-\frac{a}{2}x^2+66ax+e.$$

Ta có $f(0)=e$; $f(3)=\frac{117a}{2}+e\Rightarrow f(0)<f(3)$.



Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge f(0)$.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $|z-1-5i|+|z-1+5i|=10$ và $|z-2-i|=m$?

A. 5 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z=x+yi$ $(x;\ y\in\mathbb{R})$ và M là điểm biểu diễn số phức z.

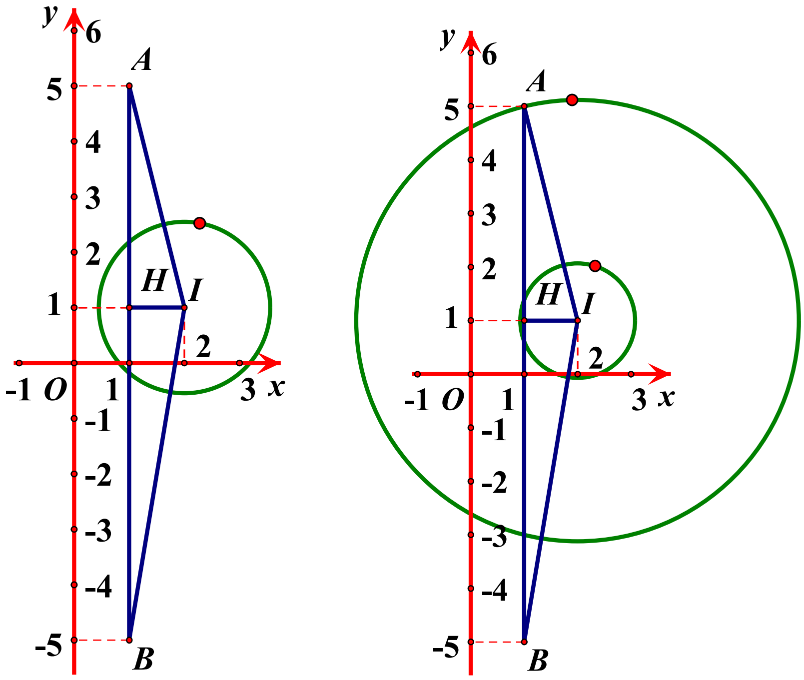
$A(1;5),\ B(1;-5)$

Ta có $|z-1-5i|+|z-1+5i|=10\Rightarrow\begin{cases}MA+MB=10\\AB=10\end{cases}\Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đoạn thẳng AB.

$|z-2-i|=m\Rightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=m^2$

Với $m>0$ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;1)$, bán kính $R=m$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $I(2;1)$ trên đoạn AB, suy ra $IH=1$.



$IA < IB$

Theo yêu cầu bài toán $1 < m \le IA \Leftrightarrow 1 < m \le \sqrt{17}$.

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} m > 0 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{2;3;4\}$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a > 0)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) thoả mãn $x_1 + x_2 = 0$. Hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x).f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{4}$. Biết $\int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x + 1}\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}$, giá trị của $\int_0^{x_2} (x+2) f''(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(6;7)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-7;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c;\ f''(x) = 6ax \Rightarrow f''(x)$ là hàm số lẻ.

Vì $x_1 + x_2 = 0$ nên $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Do đó $f'(x) = 3ax^2 + c$ là hàm số chẵn và $ac < 0$, $x_1 = -x_2$.

Xét phương trình $f'(x).f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f''(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm x_2 \\ x = 0 \end{array}\right.$, vì $x_1 = -x_2$.

$S = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \int_{-x_2}^{x_2} |f'(x).f''(x)|\mathrm{d}x = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 2\int_0^{x_2} |f'(x).f''(x)|\mathrm{d}x = \frac{9}{4}$, vì $|f'(x).f''(x)|$ là hàm chẵn.

$\Leftrightarrow \left| 2\int_0^{x_2} [f'(x).f''(x)]\mathrm{d}x \right| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left| [f'(x)]^2 \Big|_0^{x_2} \right| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left| [f'(x_2)]^2 - [f'(0)]^2 \right| = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow [f'(0)]^2 = \frac{9}{4}$. Vì $f'(0) = c < 0$ nên $f'(0) = -\frac{3}{2}$.

+ Xét tích phân $I=\int_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-x_2}^{x_2}\frac{f'(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$:

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, với $x=-x_2\Rightarrow t=x_2$; $x=x_2\Rightarrow t=-x_2$ nên

$I=-\int_{x_2}^{-x_2}\frac{f'(-t)}{3^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_{-x_2}^{x_2}\frac{3^t.f'(t)}{3^t+1}\mathrm{d}t=\int_{-x_2}^{x_2}\frac{3^x.f'(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$, vì $f'(x)$ là hàm chẵn.

$\Rightarrow 2I=\int_{-x_2}^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x=-7\Leftrightarrow\int_{-x_2}^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x=-7\Leftrightarrow 2\int_0^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x=-7\Leftrightarrow\int_0^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$.

+ Xét tích phân $K=\int_0^{x_2}(x+2)f''(x)\mathrm{d}x$:

Đặt $\begin{cases}u=x+2\\dv=f''(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=f'(x)\end{cases}$.

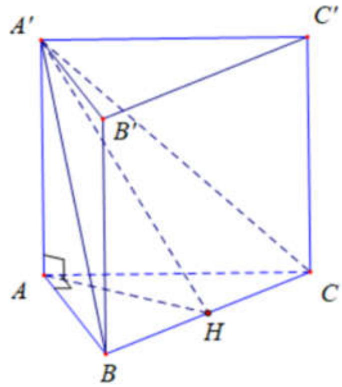
Khi đó $K=(x+2)f'(x)\Big|_0^{x_2}-\int_0^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x=-2f'(0)-\int_0^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x=3+\frac{7}{2}=\frac{13}{2}$.

Câu 44: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB=a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $30°$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng.

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$ **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{36}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}}{4}a^3$ **D.** $\frac{3\sqrt{6}}{4}a^3$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm BC

ΔABC vuông cân tại $A\Rightarrow AH\perp BC$

Khi đó: $\begin{cases}BC\perp AH\\BC\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'HA)\Rightarrow((A'BC),(ABC))=(A'H,AH)=\widehat{A'HA}$

Xét $\Delta A'HA$ vuông tại A có $AH=\frac{BC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$:

$\tan\widehat{A'HA}=\frac{AA'}{AH}\Rightarrow AA'=AH\tan 30°=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Vậy $V=S_{ABC}.AA'=\frac{1}{2}a^2.\frac{a\sqrt{6}}{6}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+3}{-5}$ và $d_2: \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$. Trong các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2, gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$.
B. $x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=6$.
C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$.
D. $x^2+(y+1)^2+z^2=6$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;3;-5)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;-1)$.

Giả sử $M(2+a;4+3a;-3-5a)\in d_1$, $N(-2+b;-2-b;-1-b)\in d_2$ và MN là đoạn vuông góc chung của d_1, d_2.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(-4+b-a;-6-b-3a;2-b+5a)$.

Suy ra $\begin{cases} MN\perp d_1 \\ MN\perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u_1}=0 \\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{u_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot(-4+b-a)+3\cdot(-6-b-3a)-5\cdot(2-b+5a)=0 \\ 1\cdot(-4+b-a)-1\cdot(-6-b-3a)-1\cdot(2-b+5a)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow M(1;1;2),\ N(-3;-1;0)$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(-4;-2;-2)\Rightarrow MN=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 và có bán kính nhỏ nhất nên tâm I của mặt cầu (S) là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Khi đó, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;1)$ và bán kính $R=\frac{MN}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$.

Vậy mặt cầu (S) cần tìm là $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=\frac{2}{x^3}+\ln\frac{x+3}{x-3}$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-\infty;2100)$ thoả mãn $f(a-2024)+f(6a-27)\geq 0$

A. 2096.
B. 288.
C. 1807.
D. 360.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x)=\frac{2}{x^3}+\ln\frac{x+3}{x-3}$ có tập xác định $D=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$

Có $f'(x)=-\frac{6}{x^4}-\frac{6}{(x-3)^2}\cdot\left(\frac{x-3}{x+3}\right)<0\ \forall x\in D$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định $(-\infty;-3)$ và $(3;+\infty)$

Ta lại có $f(-x)=\frac{2}{(-x)^3}+\ln\left(\frac{-x+3}{-x-3}\right)=-\left(\frac{2}{x^3}+\ln\frac{x+3}{x-3}\right)=-f(x)$

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ. và nghịch biến trên từng khoảng của TXĐ

Từ đó suy ra $f(a-2024)+f(6a-27)\ge 0$ điều kiện $a\in(-\infty;4)\cup(5;2021)\cup(2027;+\infty)$

$\Leftrightarrow f(a-2024)\ge -f(6a-27)=f(-6a+27)$ (1)

Lập BBT có: $\forall x\in(3;+\infty)$ thì $f(x)>0$

Trường hợp 1: $\begin{cases}a-2024>3\\6a-27>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>2027\\a>5\end{cases}$ suy ra $a\in[2028;2099]$ bất phương trình được nghiệm đúng., TH này có 72 giá trị nguyên của a.

Trường hợp 2: $a<2027$ bất phương trình trở thành

$\Leftrightarrow f(a-2024)\ge -f(6a-27)=f(-6a+27)$ (2)

Khi đó (2) $\Leftrightarrow a-2024\le -6a+27\Leftrightarrow 7a\le 2051\Leftrightarrow a\le 293$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $5<a\le 293$ mà $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\{6;...;293\}$

Có $293-6+1=288$ giá trị a.

Vậy có tất cả $288+72=360$ giá trị nguyên của a thoả đề.

Câu 47: Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\ne 0)$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1-\frac{1}{9}\right|=|z_1-z_2|$. Giả sử $|z_1|=\frac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thoả mãn $c\mathrm{w}^2+b\mathrm{w}+a=0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho ứng với mỗi k tồn tại đúng 9 số phức z_3 có phần ảo nguyên, $z_3-\mathrm{w}$ là số thuần ảo và $|z_3|\le|\mathrm{w}|$?

A. 23. **B.** 22. **C.** 11. **D.** 12

Lời giải

Chọn B

$z_1=x+yi$; $z_2=x-yi$ $\forall x;y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\left|2z_1-\frac{1}{9}\right|=|z_1-z_2|=|z_1-\overline{z_1}|$

$\Leftrightarrow\left(2x-\frac{1}{9}\right)^2+4y^2=4y^2\Rightarrow x=\frac{1}{18}$

$\begin{cases}az^2+bz+c=0\\c\mathrm{w}^2+b\mathrm{w}+a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{w}=\frac{1}{z}\\|\mathrm{w}|=\frac{1}{|z|}=\sqrt{k}\end{cases}$

Ta có $z_1=\frac{1}{18}+yi$

Suy ra $z_1\overline{z_1}=\frac{1}{k}=y^2+\frac{1}{324}$

$\mathrm{w}=\frac{1}{z_1}=\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}=k\left(\frac{1}{18}-yi\right)$

$z_3=m+ni$ $(n\in\mathbb{Z})$; $k\in\mathbb{N}^*$

$\mathrm{Re}(z_3-\mathrm{w})=0$; $|z_3|\le|\mathrm{w}|=\sqrt{k}$

$\begin{cases}m^2+n^2\le k\\m=\frac{1}{18}k\end{cases}\Rightarrow n^2\le k-\frac{k^2}{324}$

$f\left(k\right)=k-\dfrac{k^2}{324}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 9$ số phức $z_3 \Rightarrow 16\le f\left(k\right)<25 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(k\right)\ge 16 \\ f\left(k\right)<25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-\dfrac{k^2}{324}\ge 16 \\ k-\dfrac{k^2}{324}<25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow k\in\left\{17;....27;297;...;307\right\}$.

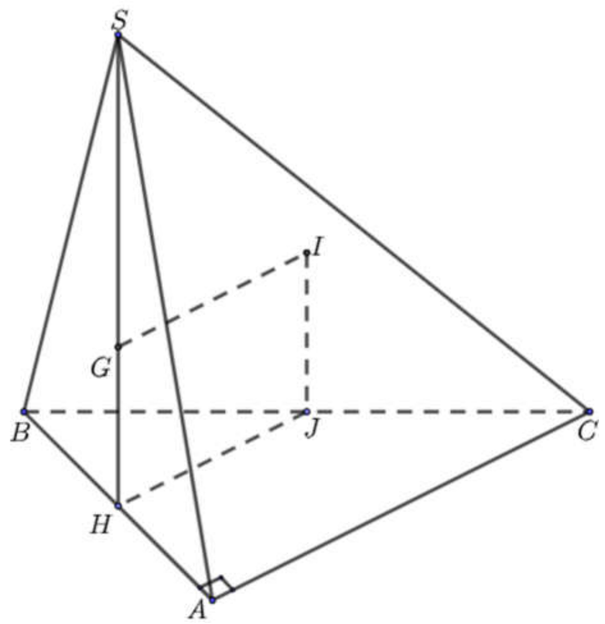
Vậy có 22 số nguyên dương k.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a$, mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng:

A. $\dfrac{25\pi}{9}a^2$. **B.** $\dfrac{25\pi}{3}a^2$. **C.** $\dfrac{28\pi}{3}a^2$. **D.** $\dfrac{28\pi}{9}a^2$.

Lời giải

Chọn C



ΔABC vuông tại $A, AB=2a$ nên $BC=2a\sqrt{2}$.

Gọi G là tâm tam giác đều SAB và H, J lần lượt là trung điểm của AB, BC. Ta có $GH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ đường thẳng $Gx//HJ, Jy//SH$.

Do mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SH\perp AB$ và vì vậy $SH\perp\left(ABC\right)$. Mà ΔABC vuông tại A nên J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vậy nên Jy là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Hoàn toàn tương tự, Gx là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.

Trong mặt phẳng qua H, vuông góc với AB hai đường thẳng Gx và Jy cắt nhau tại I.

Dễ dàng có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng:

$$R=\sqrt{JI^2+JB^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}.$$

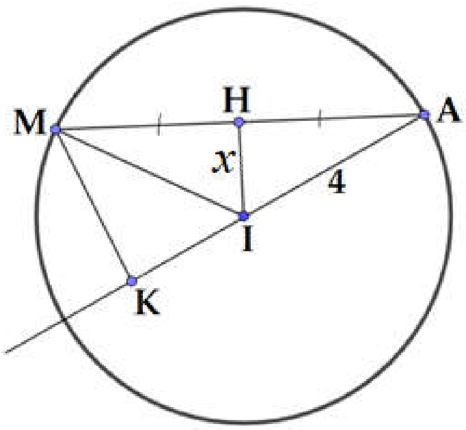
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng $S_{mc}=4\pi R^2=\dfrac{28\pi}{3}a^2$.

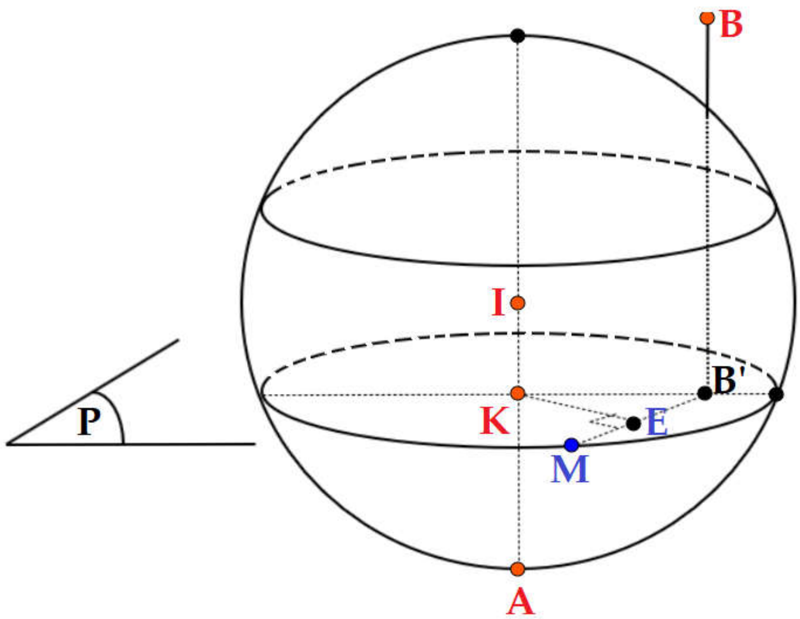
Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;6;-1)$, $B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua A. Điểm $M(a;b;c)$ $(c>0)$ thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và AI lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D





Ta có: $\overrightarrow{IA}=(0;4;0)\Rightarrow IA=4$.

Mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua A nên bán kính của (S) là $R=IA=4$.

Phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$. Nhận thấy $B(2;-4;-1)$ nằm ngoài (S).

Gọi H là trung điểm MA suy ra $IH\perp MA$. Đặt $IH=x$ $(0<x<4)$.

Diện tích tam giác IAM bằng $2\sqrt{7}$, suy ra:

$$\frac{1}{2}IH.MA=2\sqrt{7}\Rightarrow\frac{1}{2}IH.2.HA=2\sqrt{7}\Rightarrow IH.HA=2\sqrt{7}$$

$\Rightarrow x\sqrt{16-x^2}=2\sqrt{7}\Rightarrow x^4-16x^2+28=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=14 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{14} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$.

+) Với $x=\sqrt{14}\Rightarrow HA=\sqrt{2}\Rightarrow MA=2\sqrt{2}<IA$ (loại do tam giác IAM tù).

+) Với $x=\sqrt{2}\Rightarrow HA=\sqrt{14}\Rightarrow MA=2\sqrt{14}>IA$ (thỏa mãn).

Gọi K là hình chiếu của M lên IA.Ta có:

$\sin\widehat{IAH}=\frac{IH}{IA}=\frac{\sqrt{2}}{4}=\sin\widehat{KAM}=\frac{MK}{AM}=\frac{MK}{2\sqrt{14}}\Rightarrow MK=\sqrt{7}.$

Ta có điểm A,I cố định, điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) sao cho $MK=\sqrt{7}$, suy ra M thuộc mặt trụ (T) trục là AI, bán kính $MK=\sqrt{7}$.

Vậy M thuộc giao tuyến của mặt trụ (T) và mặt cầu (S) là đường tròn (C) tâm K, bán kính $MK=\sqrt{7}$.

Ta có: $AK=\sqrt{AM^2-MK^2}=7\Rightarrow IK=3\Rightarrow \overrightarrow{IK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}\Rightarrow K(1;-1;-1)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn (C), suy ra (P) đi qua $K(1;-1;-1)$ và nhận $\vec{n}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}=(0;1;0)$ làm VTPT. Phương trình mặt phẳng (P): $y+1=0$.

Gọi B' là hình chiếu của B lên (P), suy ra $B'(2;-1;-1)$, $KB'=1<\sqrt{7}=MK\Rightarrow B'$ nằm trong (C).

Ta có: $\overrightarrow{KB'}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{B'M}=(a-2;b+1;c+1)$. Khi đó: $d(IA;BM)=KE\le KB'=1$.

$\Rightarrow d(IA;BM)_{\max}=1\Leftrightarrow KB'\perp B'M\Rightarrow \overrightarrow{KB'}.\overrightarrow{B'M}=0\Leftrightarrow a-2=0\Leftrightarrow a=2.$

Lại có: $M(a;b;c)\in(P)\Rightarrow b+1=0\Rightarrow b=-1\Rightarrow M(2;-1;c)$.

Mà $MK=\sqrt{7}\Leftrightarrow 1^2+0^2+(c+1)^2=7\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} c=\sqrt{6}-1 & (tm) \\ c=-\sqrt{6}-1 & (loai\ do\ c>0) \end{array}\right.$.

Vậy $a+b+c=2-1+\sqrt{6}-1=\sqrt{6}\approx 2,45\in\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 50: Xét hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(-1)=5$. Hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-100;0)$ sao cho ứng với mỗi a, hàm số $y=\left|f(x)+\frac{5}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;+\infty)$?

A. 9. **B.** 89. **C.** 10. **D.** 90.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$ nên ta có bảng biến thiên của các hàm số $f'(x)$, $f(x)$ trên $(-1;+\infty)$ như sau:

x	-1		4		$+\infty$
$f'(x)$	a	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	-5	$\searrow$	$f(-4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $h(x)=f(x)+\frac{5}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$

Ta có: $h'(x)=f'(x)-\frac{10}{x^3}=0\Rightarrow f'(x)=\frac{10}{x^3}(1)$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{10}{x^3}$. Ta có: $g'(x)=\frac{-30}{x^4}<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$g(x)$	-10	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	0

Dễ thấy rằng $g(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $f'(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\alpha$ trên $(4;+\infty)$.

Bảng biến thiên hàm số $h(x)$ trên $(0;+\infty)$:

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\|\;+\infty$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Mặt khác $h(\alpha)=f(\alpha)+\frac{5}{\alpha^2}<-5+\frac{5}{\alpha^2}<0$ do $\alpha>4$.

Khi đó hàm số $h(x)=f(x)+\frac{5}{x^2}$ có một điểm cực trị và hai nghiệm phân biệt trên $(0;+\infty)$.

Nên để hàm số $y=\left|f(x)+\frac{5}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;+\infty)$ thì hàm số $h(x)=f(x)+\frac{5}{x^2}$ không có nghiệm hoặc điểm cực trị trên $(-1;0)$ hay $a\geq -10$.

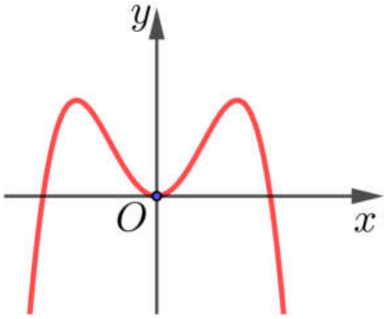
Mà a là số nguyên và $a\in(-100;0)$ nên $a\in\{-10;-9;...;-1\}$.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2024
BÀI THI TOÁN
MÃ ĐỀ: 102

Câu 1: Cho số phức $z=1+2i$. Số phức $2z$ bằng

A. $2+4i$. **B.** $-3+4i$. **C.** $3+4i$. **D.** $3+2i$.

Câu 2: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong như hình bên dưới?

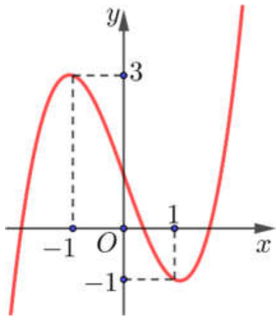


A. $y=2x^3+x^2$. **B.** $y=x^2-2x$. **C.** $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

Câu 3: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z=3+5i$ có tọa độ là

A. $(3;-5)$. **B.** $(5;-3)$. **C.** $(5;3)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 5: Cho số phức $z=2024-2i$. Số phức liên hợp của z là

A. $2+2024i$. **B.** $2024+2i$. **C.** $-2+2024i$. **D.** $-2024+2i$.

Câu 6: Cho khối nón có diện tích đáy $B=8$ và chiều cao $h=9$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 24. **B.** 216. **C.** 192. **D.** 72.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(1;-2;1)$. **B.** $(2;-4;2)$. **C.** $(-2;4;-2)$. **D.** $(-1;2;-1)$.

Câu 8: Cho khối lăng trụ tam giác có thể tích $V=36a^3$ và diện tích đáy $B=4a^2$. Chiều cao của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $27a$. **B.** $3a$. **C.** $9a$. **D.** $6a$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;5)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

A. Điểm $N(2;5;-1)$. **B.** Điểm $P(-2;-5;1)$. **C.** Điểm $M(-1;2;3)$. **D.** Điểm $Q(1;3;2)$.

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{3}{2}}$ là

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -2.

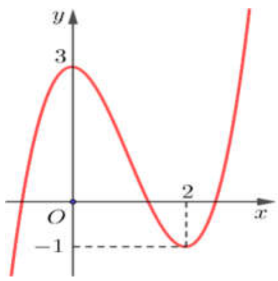
Câu 13: Nếu $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$ thì $\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** -2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 14: Với a,b là các số thực dương tuỳ ý, $\log_2(ab)$ bằng

A. $\log_2 a.\log_2 b$. **B.** $\log_2 a-\log_2 b$. **C.** $\log_2 a+\log_2 b$. **D.** $b\log_2 a$.

Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=0$.

Câu 16: Trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=4^x$ là

A. $y'=\frac{4^{x+1}}{x+1}$. **B.** $y'=\frac{4^x}{\ln x}$. **C.** $y'=x.4^{x-1}$. **D.** $y'=4^x\ln 4$.

Câu 17: Từ một đội văn nghệ gồm 6 nam và 5 nữ, có bao nhiêu cách chọn một nam và một nữ để hát song ca với nhau?

A. 55. **B.** 110. **C.** 30. **D.** 11.

Câu 18: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$ công sai $d=6$. Giá trị của u_2 bằng

A. 18. **B.** 3. **C.** 9. **D.** -3.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(3;-2;0)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là

A. $(4;0;-4)$. **B.** $(2;-4;4)$. **C.** $(2;0;-2)$. **D.** $(-2;4;-4)$.

Câu 20: Cho hình trụ có bán kính đáy $r=3$ và chiều cao $h=5$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 30π. **B.** 20π. **C.** 15π. **D.** 9π.

Câu 21: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int 5^x \mathrm{d}x=\dfrac{5^{x+1}}{\ln 5}+C$. **B.** $\int 5^x \mathrm{d}x=\dfrac{5^x}{\ln 5}+C$. **C.** $\int 5^x \mathrm{d}x=5^x\ln 5+C$. **D.** $\int 5^x \mathrm{d}x=5^x+C$.

Câu 22: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>-1$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy)?

A. Điểm $P(2;0;5)$. **B.** Điểm $Q(0;3;1)$. **C.** Điểm $N(-1;0;5)$. **D.** Điểm $M(2;3;0)$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2)=-5$, $f(3)=7$. Giá trị của $\int_{-2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -35. **B.** -12. **C.** 12. **D.** 2.

Câu 25: Nghiệm của phương trình $2^{2x+1}=\dfrac{1}{8}$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Câu 26: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \cos 2x dx=\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $\int \cos 2x dx=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

C. $\int \cos 2x dx=-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$. **D.** $\int \cos 2x dx=-2\cos 2x+C$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

A. $x=1$. **B.** $y=3$. **C.** $y=1$. **D.** $x=3$.

Câu 28: Cho khối chóp tứ giác có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=6$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 24. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 18.

Câu 29: Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 30: Trong không gian Oxy, cho điểm $M\left(1;-2;1\right)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=1-t\end{cases}$. Đường thẳng đi qua M và song song với d có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.
B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.
C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.
D. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=4$. Môđun của z bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 32: Với a,b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab} a$ bằng

A. $\dfrac{1}{1+\log_a b}$. **B.** $1-\log_a b$. **C.** $\dfrac{1}{\log_a b}$. **D.** $1+\log_a b$.

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Câu 34: Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 8 điểm phân biệt khác 0. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 14 điểm (gồm điểm O và 13 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

A. $\dfrac{5}{7}$. **B.** $\dfrac{75}{91}$. **C.** $\dfrac{149}{182}$. **D.** $\dfrac{55}{91}$.

Câu 35: Một ô tô đang chuyển động với vận tốc $24\ \text{m/s}$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v\left(t\right)=-4t+24\ \left(\text{m/s}\right)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

A. 42 m. **B.** 64 m. **C.** 72 m. **D.** 50 m.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua hai điểm $M\left(3;1;-1\right)$, $N\left(2;-1;4\right)$ và vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right):2x-y+3z-1=0$ có phương trình là

A. $2x-11y-5z=0$. **B.** $x-13y-5z+5=0$. **C.** $x-13y-5z-5=0$. **D.** $x+2y+z-4=0$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Câu 38: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=6x^3-21x^2+20x+1$ trên đoạn $\left[1;4\right]$ bằng

A. $\dfrac{34}{9}$. **B.** 6. **C.** $\dfrac{61}{9}$. **D.** 129.

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi a tồn tại không quá 7 số nguyên b thỏa mãn $2^{b^2}<8^{-b}.a^{b+3}$

A. 32. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 31.

Câu 40: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là $x=-\frac{7}{2}$, $x=-1$, $x=\frac{3}{2}$, đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f\left(x\right)\ge m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-3;0\right]$ khi và chỉ khi

A. $m\le f\left(-1\right)$. **B.** $f\left(-1\right)\le m\le f\left(0\right)$. **C.** $m\le f\left(0\right)$. **D.** $m\le f\left(-3\right)$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$ và $f'\left(x\right)=\tan^3 x+\tan x$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(x+1\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x=a\pi\sqrt{3}+b\sqrt{3}+c\ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỉ, giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{2}{3};1\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};0\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

Câu 42: Xét hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R},\ a>0\right)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 (với $x_1<x_2$) thỏa mãn $x_1+x_2=0$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)f''\left(x\right)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{16}$. Biết $\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{f'\left(x\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x=-\frac{5}{2}$, giá trị của $\int\limits_{0}^{x_2}\left(x+2\right)f''\left(x\right)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{9}{2};-\frac{7}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 43: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB=\sqrt{3}a$ và $AC=a$. Biết góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng $30°$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{9}a^3$.

Câu 44: Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R},\ a\ne 0)$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1-\frac{1}{7}\right|=\left|z_1-z_2\right|$. Giả sử $\left|z_1\right|=\frac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thỏa mãn $cw^2+bw+a=0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho ứng với mỗi k tồn tại đúng 5 số phức z_3 có phần ảo nguyên, z_3-w là số thuần ảo và $\left|z_3\right|\le\left|w\right|$?

A. 11. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $\left(P\right):2x+y+z=0$. Đường thẳng đối xứng với Δ qua $\left(P\right)$ có phương trình là

A. $\frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{1}$. **B.** $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$. **C.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. **D.** $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$.

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $\left|z+1-7i\right|+\left|z+1+7i\right|=14$ và $\left|z-1-i\right|=m$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 47: Trong không gian, cho hình thoi $ABCD$ có $AB=6$ và $BD=4$. Khi quay hình thoi $ABCD$ quanh trục AB thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành hình tròn xoay (H). Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi (H) bằng

A. $\frac{8704\pi}{81}$. **B.** $\frac{256\pi}{3}$. **C.** $\frac{64\pi}{3}$. **D.** $\frac{2368\pi}{27}$.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$, $B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;\ 2;-1)$ đi qua A. Điểm $M(a;b;c)$ (với $c>0$) thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng BM và IA lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(8;\frac{17}{2}\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{17}{2};9\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Câu 49: Xét hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(-1)=-6$. Hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-100;0)$ sao cho ứng với mỗi a, hàm số $y=\left|f(x)+\frac{6}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;+\infty)$?

A. 88. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 87.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=\frac{5}{x^3}+\ln\frac{x+2}{x-2}$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-\infty;2100)$ thỏa mãn $f(a-2023)+f(5a-29)\geq 0$?

A. 1758. **B.** 2093. **C.** 336. **D.** 410.

---------- **HẾT** ----------

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT THAM KHẢO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	D	D	B	B	A	A	C	C	A	B	A	D	C	A	D	C	C	B	A	B	C	D	C	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	A	C	B	D	C	A	C	A	C	B	A	A	D	D	D	C	C	D	A	D	B	A	B	D

Câu 1: Cho số phức $z=1+2i$. Số phức $2z$ bằng

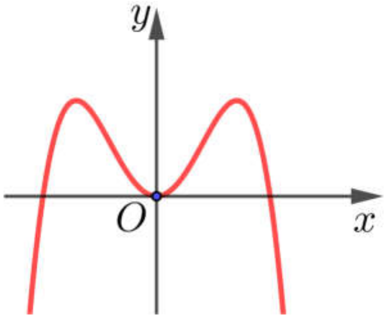
A. $2+4i$. **B.** $-3+4i$. **C.** $3+4i$. **D.** $3+2i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z=1+2i \Rightarrow 2z=2(1+2i)=2+4i$.

Câu 2: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong như hình bên dưới?



A. $y=2x^3+x^2$. **B.** $y=x^2-2x$. **C.** $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị ta thấy là hình dạng của đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương có hệ số $a<0$.

Nên chọn $y=-x^4+2x^2$

Câu 3: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z=3+5i$ có tọa độ là

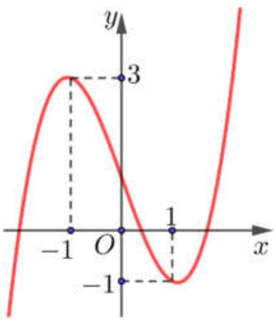
A. $(3;-5)$. **B.** $(5;-3)$. **C.** $(5;3)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điểm biểu diễn số phức $z=3+5i$ là $M(3;5)$.

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là

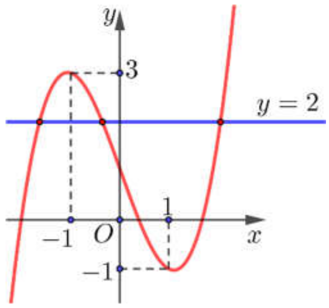
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $f\left(x\right)=2$:

Ta kẻ đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại ba điểm phân biệt.



Do đó phương trình $f\left(x\right)=2$ có ba nghiệm thực.

Câu 5: Cho số phức $z=2024-2i$. Số phức liên hợp của z là

A. $2+2024i$. **B.** $2024+2i$. **C.** $-2+2024i$. **D.** $-2024+2i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có số phức liên hợp của $z=2024-2i$ là $\overline{z}=2024+2i$.

Câu 6: Cho khối nón có diện tích đáy $B=8$ và chiều cao $h=9$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 24. **B.** 216. **C.** 192. **D.** 72.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối nón $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}.8.9=24$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$. Tâm của $\left(S\right)$ có tọa độ là

A. $\left(1;-2;1\right)$. **B.** $\left(2;-4;2\right)$. **C.** $\left(-2;4;-2\right)$. **D.** $\left(-1;2;-1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Tâm của mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$ là $I\left(1;-2;1\right)$.

Câu 8: Cho khối lăng trụ tam giác có thể tích $V=36a^3$ và diện tích đáy $B=4a^2$. Chiều cao của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $27a$. **B.** $3a$. **C.** $9a$. **D.** $6a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $V=36a^3\Leftrightarrow B.h=36a^3\Leftrightarrow 4a^2.h=36a^3\Rightarrow h=9a$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=2-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;5\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;2\right)$. **D.** $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

$f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow 2-x>0\Leftrightarrow x<2$.

Khi đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;2)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

A. Điểm $N(2;5;-1)$. **B.** Điểm $P(-2;-5;1)$. **C.** Điểm $M(-1;2;3)$. **D.** Điểm $Q(1;3;2)$.

Lời giải

Chọn A

Điểm thuộc đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ là $(2;5;-1)$.

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{3}{2}}$ là

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Vậy TXĐ: $D=(1;+\infty)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 2.

Câu 13: Nếu $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=-2$ thì $\int\limits_3^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** -2. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=-2 \Rightarrow \int\limits_3^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2$.

Câu 14: Với a,b là các số thực dương tuỳ ý, $\log_2(ab)$ bằng

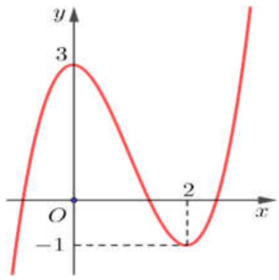
A. $\log_2 a.\log_2 b$. **B.** $\log_2 a-\log_2 b$. **C.** $\log_2 a+\log_2 b$. **D.** $b\log_2 a$.

Lời giải

Chọn C

Với $a>0,\ b>0$, ta có: $\log_2(ab)=\log_2 a+\log_2 b$.

Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=0$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị, ta có điểm trị cực tiểu của hàm số đã cho là $x=2$.

Câu 16: Trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=4^x$ là

A. $y'=\dfrac{4^{x+1}}{x+1}$. **B.** $y'=\dfrac{4^x}{\ln x}$. **C.** $y'=x.4^{x-1}$. **D.** $y'=4^x\ln 4$.

Lời giải

Chọn D

$y=4^x \Rightarrow y'=4^x\ln 4$.

Câu 17: Từ một đội văn nghệ gồm 6 nam và 5 nữ, có bao nhiêu cách chọn một nam và một nữ để hát song ca với nhau?

A. 55. **B.** 110. **C.** 30. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn một bạn nam để hát song ca là: 6 (cách).

Ứng với mỗi một cách chọn bạn nam ta có 5 cách chọn bạn nữ để hát song ca.

Áp dụng quy tắc nhân ta có số cách chọn một nam và một nữ để hát song ca với nhau là:

$6.5=30$ (cách).

Câu 18: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$ công sai $d=6$. Giá trị của u_2 bằng

A. 18. **B.** 3. **C.** 9. **D.** -3.

Lời giải

Chọn C

Cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$ công sai $d=6 \Rightarrow u_2=u_1+d \Rightarrow u_2=9$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(3;-2;0)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là

A. $(4;0;-4)$. **B.** $(2;-4;4)$. **C.** $(2;0;-2)$. **D.** $(-2;4;-4)$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}=(2;-4;4)$.

Câu 20: Cho hình trụ có bán kính đáy $r=3$ và chiều cao $h=5$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 30π. **B.** 20π. **C.** 15π. **D.** 9π.

Lời giải

Chọn A

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

$S_{xq}=2\pi rh \Rightarrow S_{xq}=2\pi.3.5=30\pi$.

Câu 21: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int 5^x \mathrm{d}x = \dfrac{5^{x+1}}{\ln 5} + C$. **B.** $\int 5^x \mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$. **C.** $\int 5^x \mathrm{d}x = 5^x \ln 5 + C$. **D.** $\int 5^x \mathrm{d}x = 5^x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int 5^x \mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$.

Câu 22: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -1$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -1 \Leftrightarrow x+1<2 \Leftrightarrow x<1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình: $S=(-1;1)$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy)?

A. Điểm $P(2;0;5)$. **B.** Điểm $Q(0;3;1)$. **C.** Điểm $N(-1;0;5)$. **D.** Điểm $M(2;3;0)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) là điểm $M(2;3;0)$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2)=-5$, $f(3)=7$. Giá trị của $\int_{-2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -35. **B.** -12. **C.** 12. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_{-2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x = f(3)-f(-2)=12$.

Câu 25: Nghiệm của phương trình $2^{2x+1}=\dfrac{1}{8}$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{2x+1}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 2x+1=-3 \Leftrightarrow x=-2$.

Câu 26: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \cos 2x dx = \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **B.** $\int \cos 2x dx = \dfrac{1}{2} sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x dx = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$. **D.** $\int \cos 2x dx = -2\cos 2x + C$.

Lời giải

Chọn B

$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

A. $x = 1$. **B.** $y = 3$. **C.** $y = 1$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã có phương trình là $x = 1$.

Câu 28: Cho khối chóp tứ giác có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 6$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 24. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.3.6 = 6.$

Câu 29: Hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{x^2 - 4}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(-2;2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \left(-\infty;-2\right] \cup \left[2;+\infty\right)$.

Hàm số đồng biến khi $f'\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$.

Câu 30: Trong không gian Oxy, cho điểm $M\left(1;-2;1\right)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Đường thẳng đi qua M và song song với d có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$. **B.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

Lời giải

Chọn D

Vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng d nên có vecto chỉ phương $\vec{u}=(2;2;-1)$.

và đi qua $M(1;-2;1)$ có phương trình: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=4$. Môđun của z bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|z|^2=z.\overline{z}=4\Rightarrow |z|=2$.

Câu 32: Với a,b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab} a$ bằng

A. $\dfrac{1}{1+\log_a b}$. **B.** $1-\log_a b$. **C.** $\dfrac{1}{\log_a b}$. **D.** $1+\log_a b$.

Lời giải

Chọn A

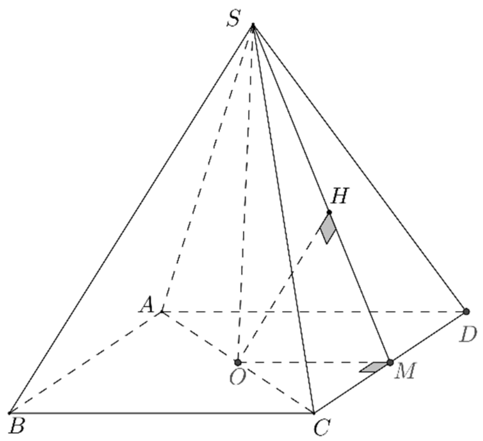
Ta có $\log_{ab} a=\dfrac{1}{\log_a(ab)}=\dfrac{1}{\log_a a+\log_a b}=\dfrac{1}{1+\log_a b}$.

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và M là trung điểm của CD. Ta có

$$\begin{cases} SO\perp(ABCD) \\ CD\perp OM \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} SO\perp CD \\ CD\perp OM \end{cases}\Rightarrow CD\perp(SOM).$$

Gọi H là hình chiếu của O lên SM thì $\begin{cases} OH\perp SM \\ OH\perp CD \end{cases}\Rightarrow OH\perp(SCD)$ tại H.

Do đó $d(A,(SCD))=2d(O,(SCD))=2OH$.

Ta lại có $\begin{cases} OM=\dfrac{1}{2}AB=a \\ SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{4a^2-2a^2}=a\sqrt{2} \end{cases}$

Xét tam giác SOM vuông tại O ta có $OH=\dfrac{SO.OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{2a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Vậy $d\left(A,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Câu 34: Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 8 điểm phân biệt khác 0. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 14 điểm (gồm điểm O và 13 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

A. $\dfrac{5}{7}$. **B.** $\dfrac{75}{91}$. **C.** $\dfrac{149}{182}$. **D.** $\dfrac{55}{91}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $n\left(\Omega\right)=C_{14}^3=364$.

Gọi A là biến cố: “3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác”.

Xét 13 điểm nằm trên hai tia Ox, Oy không tính điểm O.

TH1: tam giác có 2 đỉnh thuộc Ox và 1 đỉnh thuộc Oy có: $C_5^2.8=80$.

TH2: tam giác có 2 đỉnh thuộc Oy và 1 đỉnh thuộc Ox có: $5.C_8^2=140$.

Xét tam giác có 1 đỉnh là O, 1 đỉnh thuộc Oy, 1 đỉnh thuộc Ox có: $1.5.8=40$.

Vậy $n\left(A\right)=260$

Vậy $P\left(A\right)=\dfrac{260}{364}=\dfrac{5}{7}$.

Câu 35: Một ô tô đang chuyển động với vận tốc $24\ \text{m/s}$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v\left(t\right)=-4t+24\ \left(\text{m/s}\right)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

A. $42\ \text{m}$. **B.** $64\ \text{m}$. **C.** $72\ \text{m}$. **D.** $50\ \text{m}$.

Lời giải

Chọn C

Khi xe dừng hẳn ta có: $v\left(t\right)=0\Leftrightarrow -4t+24=0\Leftrightarrow t=6\ \left(s\right)$.

Ta có quãng đường ô tô đi được là: $s\left(t\right)=\int\limits_0^6\left(-4t+24\right)\mathrm{d}t=72\ \left(m\right)$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua hai điểm $M\left(3;1;-1\right)$, $N\left(2;-1;4\right)$ và vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right):2x-y+3z-1=0$ có phương trình là

A. $2x-11y-5z=0$. **B.** $x-13y-5z+5=0$. **C.** $x-13y-5z-5=0$. **D.** $x+2y+z-4=0$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng cần tìm có cặp VTCP $\begin{cases}\vec{u}=\left(2;-1;3\right)\\ \overrightarrow{MN}=\left(-1;-2;5\right)\end{cases}\Rightarrow VTPT\ \vec{n}=\left(1;-13;-5\right)$.

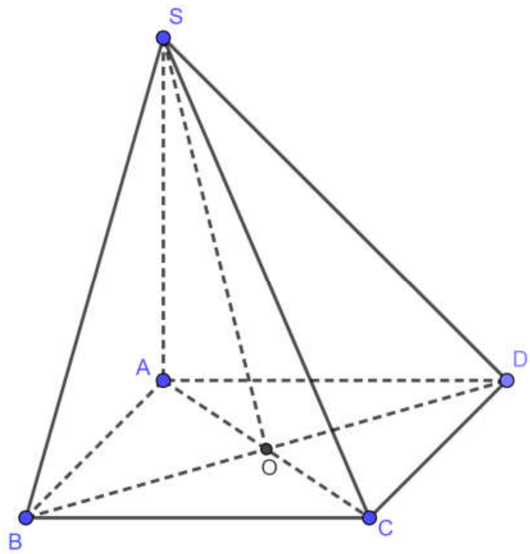
PTMP: $1\left(x-3\right)-13\left(y-1\right)-5\left(z+1\right)=0\Leftrightarrow x-13y-5z+5=0$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $OA = \dfrac{BD}{2} = a$.

$\left.\begin{matrix} BD \perp OA \\ BD \perp SO \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left((SBD),(ABCD)\right) = \widehat{SOA}$.

$\tan\widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = 1 \Rightarrow \widehat{SOA} = 45°$.

Câu 38: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 6x^3 - 21x^2 + 20x + 1$ trên đoạn $[1;4]$ bằng

A. $\dfrac{34}{9}$. **B.** 6. **C.** $\dfrac{61}{9}$. **D.** 129.

Lời giải

Chọn A

$f(x) = 6x^3 - 21x^2 + 20x + 1$.

$f'(x) = 18x^2 - 42x + 20$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 18x^2 - 42x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3} \vee x = \dfrac{2}{3}$ (loại).

$f(1) = 6$; $f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{34}{9}$; $f(4) = 129$.

Vậy $\min\limits_{[1;4]} f(x) = \dfrac{34}{9}$.

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi a tồn tại không quá 7 số nguyên b thỏa mãn $2^{b^2} < 8^{-b}.a^{b+3}$

A. 32. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 31.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^{b^2} < 8^{-b}.a^{b+3} \Leftrightarrow 2^{b^2+3b} < a^{b+3}$

$\Leftrightarrow b^2 + 3b < (b+3)\log_2 a$

$\Leftrightarrow (b+3)(b - \log_2 a) < 0 \Leftrightarrow -3 < b < \log_2 a$ (vì $\log_2 a > 0$).

Để có không quá 7 số nguyên b thì $\log_2 a \le 5 \Leftrightarrow 1 < a \le 32$

Mà a là số nguyên lớn hơn 1 nên $a \in \{2;3;4....32\}$.

Có 31 số nguyên thỏa mãn.

Câu 40: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là $x = -\frac{7}{2}$, $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$, đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x) \ge m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3;0]$ khi và chỉ khi

A. $m \le f(-1)$. **B.** $f(-1) \le m \le f(0)$. **C.** $m \le f(0)$. **D.** $m \le f(-3)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ (a \ne 0)$. Vì $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R} \Rightarrow a < 0$.

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 4a\left(x + \frac{7}{2}\right)(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 4ax^3 + 12ax^2 - 13ax - 21a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4a \\ c = -\dfrac{13}{2}a \\ d = -21a \\ a < 0 \end{cases}. \text{ Chọn } a = -2 \Rightarrow f(x) = -2x^4 - 8x^3 + 13x^2 + 42x + e.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	-3	-1	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'		0		0		0	
y	$-\infty$	$\frac{441}{8} + e$	$45 + e$	$-23 + e$	e	$\frac{441}{8} + e$	$-\infty$

Xét trên đoạn $[-3;0]$, Để bất phương trình $m \le f(x)$ có nghiệm thì $m \le 45 + e = f(-3)$.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = \tan^3 x + \tan x$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (x+1) f(x)\,\mathrm{d}x = a\pi\sqrt{3} + b\sqrt{3} + c\ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỉ, giá trị của $a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{2}{3};1\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};0\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(\tan^3 x+\tan x)\mathrm{d}x=\int \tan x(\tan^2 x+1)\mathrm{d}x=\int \tan x\mathrm{d}(\tan x)=\dfrac{\tan^2 x}{2}+C$.

Khi $x=0$, ta có $f(0)=\dfrac{\tan^2 0}{2}+C\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $f(x)=\dfrac{\tan^2 x}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(\tan^2 x+1)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Theo đề bài $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(x+1)f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{2}(x+1)\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{1}{2}(x+1) \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x \\ v=\tan x \end{cases}$

$\Rightarrow I=\left(\dfrac{1}{2}(x+1)\tan x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{2}\tan x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{3}+1\right)\tan\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6}+1\right)\tan\dfrac{\pi}{6}+\left(\dfrac{1}{2}\ln|\cos x|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{\pi}{6}\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{36}\sqrt{3}-\dfrac{1}{6}\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5}{36}\pi\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}\ln 3$.

Nên $a=\dfrac{5}{36}$, $b=\dfrac{1}{3}$ và $c=-\dfrac{1}{4}$. Khi đó $a+b+c=\dfrac{2}{9}\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 42: Xét hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R},\,a>0)$ có hai điểm cực trị $x_1,\,x_2$ (với $x_1<x_2$) thỏa mãn $x_1+x_2=0$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\dfrac{9}{16}$. Biết $\int\limits_{x_1}^{x_2}\dfrac{f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x=-\dfrac{5}{2}$, giá trị của $\int\limits_{0}^{x_2}(x+2)f''(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\dfrac{9}{2};-\dfrac{7}{2}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=a(x-x_1)(x+x_1)=a(x^2-x_1^2)\Rightarrow f'(0)<0$

$\Rightarrow f'(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow f'(x)=f'(-x)$.

Ta có $f''(x)=6ax=0\Leftrightarrow x=0$.

Xét $f'(x)f''(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_2 \\ x=-x_2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow\int\limits_{x_1}^{x_2}|f'(x)f''(x)|\mathrm{d}x=\dfrac{9}{16}\Leftrightarrow\left|\int\limits_{x_1}^{0}f'(x)f''(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{0}^{x_2}f'(x)f''(x)\mathrm{d}x\right|=\dfrac{9}{16}$

$\Leftrightarrow\left|\dfrac{1}{2}[f'(x)]^2\Big|_{x_1}^{0}\right|+\left|\dfrac{1}{2}[f'(x)]^2\Big|_{0}^{x_2}\right|=\dfrac{9}{16}$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\left[f'(0)\right]^2-\frac{1}{2}\left[f'(x_1)\right]^2\right|+\left|\frac{1}{2}\left[f'(x_2)\right]^2-\frac{1}{2}\left[f'(0)\right]^2\right|=\frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left|\left[f'(0)\right]^2\right|=\frac{9}{16}\Leftrightarrow f'(0)=-\frac{3}{4}.$$

Xét $I=\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow \int\limits_{-x_2}^{x_2}\frac{f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x=-\frac{5}{2}$. Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

$I=-\int\limits_{x_2}^{-x_2}\frac{f'(-t)}{2^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{-x_2}^{x_2}\frac{f'(x)}{2^{-x}+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-x_2}^{x_2}\frac{2^x f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$ (vì $f'(x)$ là hàm chẵn)

$$\Rightarrow \int\limits_{-x_2}^{x_2}\frac{f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{-x_2}^{x_2}\frac{2^x f'(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x=-5\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{2}.$$

Xét $I_1=\int\limits_{0}^{x_2}(x+2)f''(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x+2\\ \mathrm{d}v=f''(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}v\\ v=f'(x)\end{cases}$

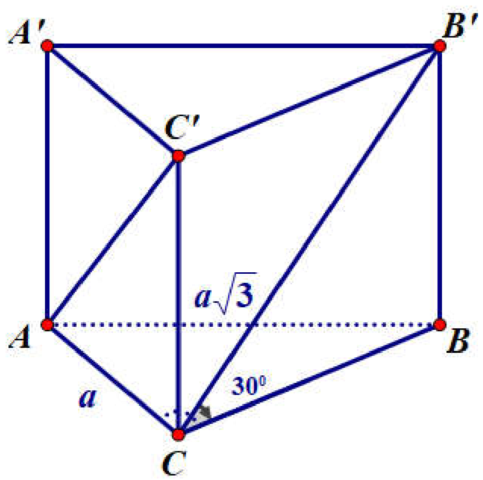
$$I_1=(x+2).f'(x)\Big|_0^{x_2}-\int\limits_0^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x=(x_2+2).f'(x_2)-2f'(0)-\left(-\frac{5}{2}\right)=-2\left(\frac{-3}{4}\right)+\frac{5}{2}=4.$$

Câu 43: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB=\sqrt{3}a$ và $AC=a$. Biết góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{9}a^3$.

Lời giải

Chọn C



+) Thể tích của khối lăng trụ là $V=S_{\Delta ABC}.BB'$.

+) Tam giác ABC vuông tại C nên $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=a\sqrt{2}$. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

+) Góc giữa $B'C$ và mặt phẳng (ABC) là góc giữa $B'C$ và BC $\Rightarrow \widehat{B'CB}=30°$.

+) Ta có $BB'=BC.\tan\widehat{B'CB}=a\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}.=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44: Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R},\,a\neq 0)$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1-\frac{1}{7}\right|=\left|z_1-z_2\right|$. Giả sử $\left|z_1\right|=\frac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thỏa mãn $cw^2+bw+a=0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho ứng với mỗi k tồn tại đúng 5 số phức z_3 có phần ảo nguyên, z_3-w là số thuần ảo và $\left|z_3\right|\le\left|w\right|$?

A. 11. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có: $\left|2z_1-\frac{1}{7}\right|=\left|z_1-z_2\right|=\left|z_1-\overline{z_1}\right|\Leftrightarrow\left|2z_1-\frac{1}{7}\right|^2=\left|z_1-\overline{z_1}\right|^2$.

Đặt $z_1=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$, thay vào biểu thức trên ta được:

$\left(2x-\frac{1}{7}\right)^2+4y^2=4y^2\Leftrightarrow x=\frac{1}{14}\Rightarrow z_{1,2}=\frac{1}{14}\pm yi,\ (y\in\mathbb{R})$.

Bài toán phụ: nếu phương trình $az^2+bz+c=0$ có 2 nghiệm z_1,z_2 thì khi đó phương trình $cz^2+bz+a=0$ có 2 nghiệm là $\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2}$.

Áp dụng: Phương trình $az^2+bz+c=0$ có 2 nghiệm z_1,z_2 thì phương trình $cw^2+bw+a=0$ có nghiệm $w=\frac{1}{z}\Rightarrow|w|=\frac{1}{|z|}=\sqrt{k}\Rightarrow|w|^2=\frac{1}{|z|^2}=k$.

Mà $z_1=\frac{1}{14}+yi,\ (y\in\mathbb{R})$ nên ta suy ra $w=\frac{1}{z_1}=\frac{\overline{z_1}}{z_1.\overline{z_1}}=\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}=\frac{1}{|z_1|^2}.\overline{z_1}=k\overline{z_1}=k\left(\frac{1}{14}-yi\right)$ với k là số nguyên dương.

Mặt khác, đặt $z_3=m+ni\ (m\in\mathbb{R},\,n\in\mathbb{Z})$.

Do z_3-w là số thuần ảo, nên $\mathrm{Re}(z_3-w)=0$ hay $m=\frac{k}{14}$.

Theo giả thiết: $|z_3|\le|w|\Leftrightarrow|z_3|^2\le|w|^2=k$, nên ta có: $m^2+n^2=\frac{k^2}{196}+n^2\le k\Rightarrow n^2\le k-\frac{k^2}{196}=f(k)$.

Do có đúng 5 số phức z_3, nghĩa là tồn tại đúng 5 giá trị $n\in\mathbb{Z}$ lần lượt là $\{-2;-1;0;1;2\}$ nên $n^2\in[4;9)$, suy ra $f(k)\in[4;9)$ hay $4\le k-\frac{k^2}{196}<9$.

Sử dụng máy tính CASIO ta tìm được $\begin{cases}4,09<k<191,91\\ \left[\begin{array}{l}k<9,45\\ k>186,54\end{array}\right.\end{cases}$;

mà $k\in\mathbb{N}^*$ nên: $\left[\begin{array}{l}5\le k\le 9\\ 187\le k\le 191\end{array}\right.$ hay $k\in\{5;\,6;\,7;\,8;\,9;\,187;\,188;\,189;\,190;\,191\}$, tức là có 10 giá trị k nguyên dương thỏa mãn đầu bài.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z=0$. Đường thẳng đối xứng với Δ qua (P) có phương trình là

A. $\frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{1}$. **B.** $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+t \\ y=3+5t \\ z=1-t \end{cases}$.

Xét hệ phương trình tọa độ giao điểm của Δ và (P):

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=3+5t \\ z=1-t \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow (P)\cap\Delta=A(0;-2;2).$$

Lấy điểm $M(1;3;1)\in\Delta$, gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) suy ra d có phương trình tham số là $d:\begin{cases} x=1+2t_1 \\ y=3+t_1 \\ z=1+t_1 \end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P) thì $H=d\cap(P)$.

Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x=1+2t_1 \\ y=3+t_1 \\ z=1+t_1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \\ t_1=-1 \end{cases} \Rightarrow H(-1;2;0)$.

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua (P) nên H là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(-3;1;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'}=(-3;3;-3)=-3.(1;-1;1)$.

Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua (P) là đường thẳng có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;1)$ nên loại các phương án B, D.

Thay tọa độ 2 điểm A và M' lần lượt vào các phương án A, B, ta chọn đáp án A.

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $|z+1-7i|+|z+1+7i|=14$ và $|z-1-i|=m$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(z)$ và $A(-1;7)$, $B(-1;-7) \Rightarrow AB=14$.

Ta có $|z+1-7i|+|z+1+7i|=14 \Leftrightarrow MA+MB=14=AB$, suy ra $M(z)$ thuộc đoạn AB.

Mặt khác $|z-1-i|=m$.

+ Nếu $m=0 \Leftrightarrow z=1+i$ (không thỏa).

+ Với $m>0$ thì $M(z)$ thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;1)$, bán kính $R=m$.

Ta có phương trình đoạn $AB: x+1=0$, với $-7\le y\le 7$.

$IA=2\sqrt{10}$, $IB=2\sqrt{17}$.

Để tồn tại đúng hai số phức z thì đoạn AB và đường tròn (C) có 2 điểm chung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(I,AB) < R \\ R \le IA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m \\ m \le 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \le 2\sqrt{10}.$$

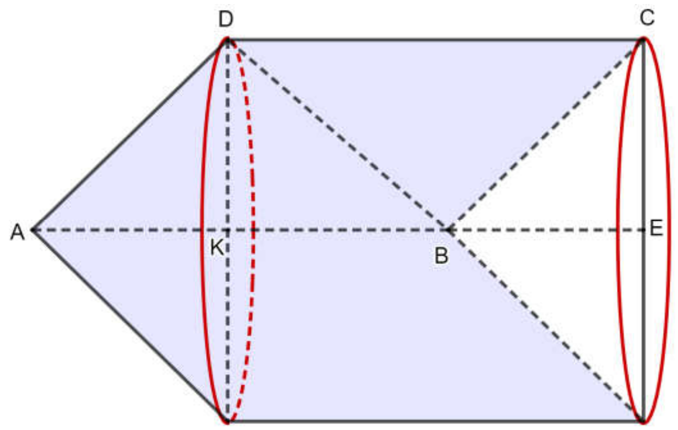
Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 47: Trong không gian, cho hình thoi $ABCD$ có $AB = 6$ và $BD = 4$. Khi quay hình thoi $ABCD$ quanh trục AB thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành hình tròn xoay (H). Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi (H) bằng

A. $\dfrac{8704\pi}{81}$. **B.** $\dfrac{256\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{64\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{2368\pi}{27}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $S_{\Delta ABD} = 8\sqrt{2}$.

Gọi E, K lần lượt là hình chiếu của C, D lên $AB \Rightarrow CE = DK = \dfrac{2S_{\Delta ABD}}{AB} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.

Do hai khối nón đỉnh A, đáy là đường tròn bán kính DK và khối nón đỉnh B đáy là đường tròn bán kính CE có thể tích bằng nhau nên thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi (H) bằng

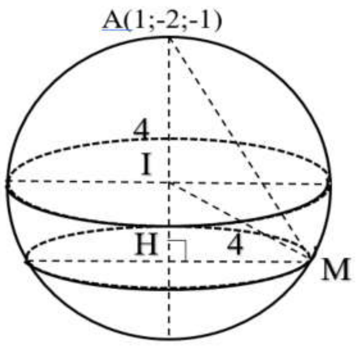
$$V = \pi.DK^2.CD = \frac{256\pi}{3}.$$

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$, $B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;\ 2;-1)$ đi qua A. Điểm $M(a;b;c)$ (với $c > 0$) thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng BM và IA lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(8;\dfrac{17}{2}\right)$. **B.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{17}{2};9\right)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn A



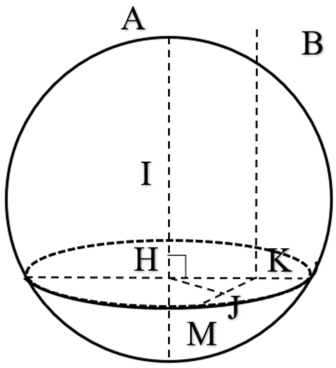
Mặt cầu có tâm I bán kính $R=4$; $S_{AIM}=\frac{1}{2}.4^2.\sin\widehat{AIM}=2\sqrt{7}\Rightarrow\sin\widehat{AIM}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Gọi H là hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AI.

Ta có: $\sin\widehat{HIM}=\sin\left(180°-\widehat{AIM}\right)\Rightarrow HM=\sqrt{7}$.

$\overrightarrow{IH}=\frac{IH}{IA}\overrightarrow{AI}\Rightarrow H(1;5;-1)$.

Vậy M thuộc giao tuyến (C) của mặt phẳng (P) đi qua H vuông góc với AI và mặt cầu (S).



Mặt phẳng $(P): y-5=0$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (P) $\Rightarrow K(2;5;-1)$.

K nằm trong đường tròn giao tuyến, suy ra $d(IA,BM)\le HK=1$.

$d(IA,BM)_{\max}=1$ khi và chỉ khi $\begin{cases}HK\perp KM\\ M\in\left(H;\sqrt{7}\right)\end{cases}$. Suy ra $M\left(2;5;-1+\sqrt{6}\right)$.

Vậy $a+b+c=6+\sqrt{6}$.

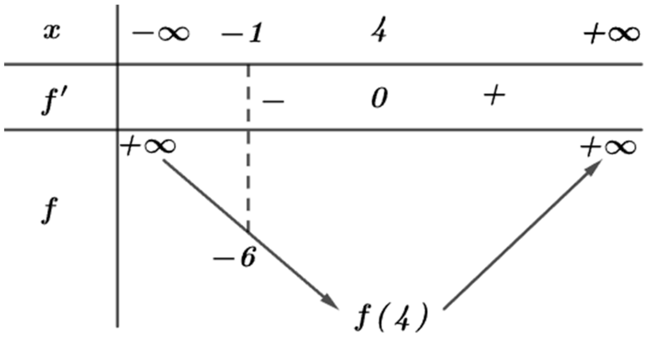
Câu 49: Xét hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(-1)=-6$. Hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-100;0)$ sao cho ứng với mỗi a, hàm số $y=\left|f(x)+\frac{6}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;+\infty)$?

A. 88. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 87.

Lời giải

Chọn B

Do $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba, đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và có $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$ nên ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau



Xét $g(x)=f(x)+\dfrac{6}{x^2}$, $g'(x)=f'(x)-\dfrac{12}{x^3}$, xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Với $g(-1)=f(-1)+6=0$ và $g(4)=f(4)+\dfrac{3}{8}<-6+\dfrac{3}{8}=-\dfrac{45}{8}$

Mặt khác

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}\left[f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\left[f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right]=+\infty$

nên $g(x)=f(x)+\dfrac{6}{x^2}$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 0.

Vậy hàm số $y=\left|f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right|$ có 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra, để hàm $y=\left|f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;+\infty)$ thì

$g(x)=f(x)+\dfrac{6}{x^2}$ không có cực trị trong khoảng $(-1;0)$, suy ra $g'(x)=f'(x)-\dfrac{12}{x^3}$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.

Vậy $f'(x)$ không cắt $h(x)=\dfrac{12}{x^3}$ trong khoảng $(-1;0)\Rightarrow f'(-1)=a\geq h(-1)=\dfrac{12}{(-1)^3}=-12$.

Kết hợp với điều kiện, ta có $a\in[-12;0)$, vậy có 12 giá trị nguyên của a.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{5}{x^3}+\ln\dfrac{x+2}{x-2}$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-\infty;2100)$ thỏa mãn $f(a-2023)+f(5a-29)\geq 0$?

A. 1758. **B.** 2093. **C.** 336. **D.** 410.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}x\neq 0\\ \dfrac{x+2}{x-2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\ x>2\end{array}\right.\Rightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)=D$.

Ta có $f(-x)=\dfrac{5}{(-x)^3}+\ln\dfrac{-x+2}{-x-2}=-\dfrac{5}{x^3}-\ln\dfrac{x+2}{x-2}=-\left(\dfrac{5}{x^3}+\ln\dfrac{x+2}{x-2}\right)=-f(x)$, $\forall x\in D$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ trên tập xác định D.

Ta có $f\left(x\right)=\frac{5}{x^3}+\ln\frac{x+2}{x-2}\Rightarrow f'\left(x\right)=-\frac{15}{x^4}-\frac{4}{x^2-4}<0$ với $\forall x\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$, nên hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$. Và $f\left(x\right)<0,\ \forall x<-2$; $f\left(x\right)>0,\ \forall x>2$.

Khi đó: $f\left(a-2023\right)+f\left(5a-29\right)\geq 0\Leftrightarrow f\left(a-2023\right)\geq -f\left(5a-29\right)$

$\Leftrightarrow f\left(a-2023\right)\geq f\left(-5a+29\right)\ \left(*\right)$.

+ *Trường hợp 1:* $\begin{cases}a-2023<-2\\-5a+29<-2\end{cases}\Leftrightarrow\frac{31}{5}<a<2025$.

Khi đó $\left(*\right)\Leftrightarrow a-2023\leq -5a+29\Leftrightarrow a\leq 342$.

Do đó, $\frac{31}{5}<a\leq 342$.

Mà a nguyên, $a\in\left(-\infty;2100\right)\Rightarrow a\in\left\{7;8;9;...;342\right\}$.

+ *Trường hợp 2:* $\begin{cases}a-2023>2\\-5a+29>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>2025\\a<\frac{27}{5}\end{cases}\Rightarrow$ vô nghiệm.

+ *Trường hợp 3:* $a-2023$ và $-5a+29$ mỗi số thuộc 1 tập $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

Do $f\left(x\right)<0,\ \forall x<-2$; $f\left(x\right)>0,\ \forall x>2$ nên $\left(*\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a-2023>2\\-5a+29<-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>2025\\a>\frac{31}{5}\end{cases}\Leftrightarrow a>2025.$

Mà a nguyên, $a\in\left(-\infty;2100\right)\Rightarrow a\in\left\{2026;2027;2028;...;2099\right\}$.

Vậy có 410 số nguyên a thỏa mãn đề bài.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2024
BÀI THI TOÁN
MÃ ĐỀ: 103

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)>-1$ là

A. $(-2;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 3: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-1}{3x+2}$ có phương trình là

A. $x=\dfrac{4}{3}$. **B.** $y=\dfrac{4}{3}$. **C.** $x=-\dfrac{2}{3}$. **D.** $y=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 4: Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người thành một hàng ngang?

A. 36. **B.** 720. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 5: Cho khối chóp tứ giác có thể tích $V=3a^3$ và diện tích đáy $B=a^2$. Chiều cao của khối chóp đã cho bằng

A. $3a$. **B.** $6a$. **C.** $9a$. **D.** a.

Câu 6: Nếu $\int_{-2}^{1} f(x)dx=-1$ và $\int_{1}^{7} f(x)dx=-5$ thì $\int_{-2}^{7} f(x)dx$ bằng

A. -6. **B.** 5. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{a}=(2;3;-1)$ và $\vec{b}=(-3;2;-4)$. Vec tơ $\vec{a}+\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1;-5;5)$. **B.** $(-5;-1;-3)$. **C.** $(-1;-5;5)$. **D.** $(-1;5;-5)$.

Câu 8: Số phức $z=i+i^2+i^3$ bằng

A. 1. **B.** i. **C.** $-1+2i$. **D.** -1.

Câu 9: Hàm số nào dưới đây là hàm số mũ?

A. $y=\log_3 x$. **B.** $y=x^{-4}$. **C.** $y=x^{2024}$. **D.** $y=2024^x$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(3;0;1)$. Gọi (S) là mặt cầu nhận AB làm đường kính, tâm của (S) có tọa độ là

A. $(1;1;-1)$. **B.** $(-1;-1;1)$. **C.** $(2;-1;2)$. **D.** $(4;-2;4)$.

Câu 11: Cho hình nón có bán kính đáy $r=3$ và độ dài đường sinh $l=5$. Chiều cao của hình nón đã cho bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** $\sqrt{34}$.

Câu 12: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int(2x+3)\mathrm{d}x = 2x^2+3x+C$.
B. $\int(2x+3)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2+3x+C$.
C. $\int(2x+3)\mathrm{d}x = x^2+C$.
D. $\int(2x+3)\mathrm{d}x = x^2+3x+C$.

Câu 13: Trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ hàm số $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f_3(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ **B.** $f_4(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x$ **C.** $f_1(x)=-\cos 2x$ **D.** $f_2(x)=\cos 2x$

Câu 14: Nghiệm của phương trình $2^{2x}=2^{x+6}$ là:

A. $x=2$ **B.** $x=-2$ **C.** $x=6$ **D.** $x=-6$

Câu 15: Trên mặt phẳng tọa độ, $M(2;-5)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

A. 2 **B.** 5 **C.** -5 **D.** -2

Câu 16: Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{1}{7}}$ là

A. $y'=\frac{7}{8}x^{\frac{8}{7}}$ **B.** $y'=\frac{1}{7}x^{\frac{6}{7}}$ **C.** $y'=\frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}$ **D.** $y'=x^{-\frac{6}{7}}$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=3; f(2)=1$. Giá trị của $\int_1^2 f'(x)dx$ bằng

A. 4 **B.** -2 **C.** 2 **D.** -4

Câu 18: Cho hình trụ có diện tích xung quanh $S_{xq}=36\pi$ và chiều cao $h=6$. Bán kính của hình trụ đã cho bằng

A. 9 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 12

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_4=(1;1;3)$. **B.** $\vec{u_2}=(-1;2;0)$. **C.** $\vec{u_3}=(1;-1;-3)$. **D.** $\vec{u_1}=(1;2;0)$.

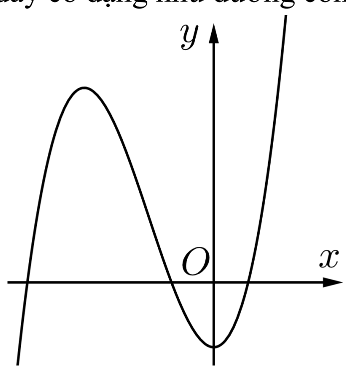
Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2x+4, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 21: Với a,b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1, \log_{a^2} b^2$ bằng

A. $\log_a b$. **B.** $\log_a b^4$. **C.** $(\log_a b)^2$. **D.** $\log_{a^4} b$.

Câu 22: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=\frac{x-2}{2x+1}$. **B.** $y=x^3+3x^2-1$. **C.** $y=x^4-2x^2-4$. **D.** $y=-x^3+3x^2+3$.

Câu 23: Cho khối lăng trụ tam giác có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 6. **B.** 24. **C.** 18. **D.** 12.

Câu 24: Dãy số nào dưới đây là một cấp số cộng?

A. $1,2,3,-4$. **B.** $1,3,5,10$. **C.** $1,0,2,4$. **D.** $1,3,5,7$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(3;4;-2)$ và vuông góc với trục Oz có phương trình là

A. $x-3=0$. **B.** $y-4=0$. **C.** $x+y+z-5=0$. **D.** $z+2=0$.

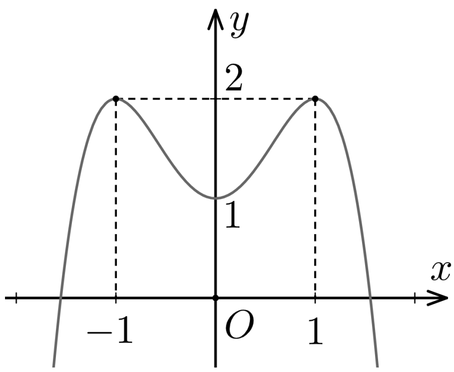
Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			-3				-3		

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 27: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{3}{2}$ là



A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 28: Cho số phức z có $\overline{z}=-5+6i$. Phần ảo của z bằng

A. 5. **B.** -6. **C.** 6. **D.** -5.

Lời giải

Câu 29: Với a, b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab}b$ bằng

A. $1-\log_b a$. **B.** $1+\log_b a$. **C.** $\dfrac{1}{\log_b a}$. **D.** $\dfrac{1}{1+\log_b a}$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-z+1=0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-1+t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2 \\ z=1-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=2t \\ z=-1-t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2 \\ z=-1-t \end{cases}$

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{10}}{5}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{10}}{5}a$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}a$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(3;2;5)$. Gọi M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MA}$, độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{74}}{2}$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** 8.

Câu 33: Cho số phức $z=3+4i$. Môđun của số phức iz bằng

A. 25. **B.** 49. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $BC=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $SA=\sqrt{3}a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Câu 35: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-6x^3+27x^2-16x+1$ trên đoạn $[1;5]$ bằng

A. 6. **B.** $-\frac{14}{9}$. **C.** -154. **D.** $\frac{329}{9}$.

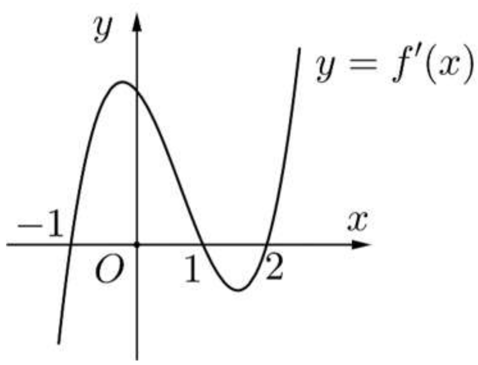
Câu 36: Một ô tô đang chuyển động với vận tốc 20 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v(t)=-4t+20\,(\text{m/s})$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

A. 50 m. **B.** 30 m. **C.** 32 m. **D.** 48 m.

Câu 37: Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 6 điểm phân biệt khác O. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 12 điểm (gồm điểm O và 11 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

A. $\frac{27}{44}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{39}{44}$. **D.** $\frac{19}{22}$.

Câu 38: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** s$(1;2)$.

Câu 39: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là $-\frac{7}{2};-1;\frac{3}{2}$ và đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x)\geq m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3;0]$ khi và chi khi

A. $m\leq f(-1)$. **B.** $f(-1)\leq m\leq f(0)$. **C.** $m\leq f(0)$. **D.** $m\leq f(-3)$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=\frac{1}{2}$ và $f'(x)=\tan^3 x+\tan x, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(x+1)f(x)\mathrm{d}x=a\pi\sqrt{3}+b\sqrt{3}+c\ln 3$, với a,b,c là các số hữu tỉ, giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{3};1\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};0\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi a tồng tại không quá 7 số nguyên b thỏa mãn $2^{b^2}<8^{-b}.a^{b+3}$?

A. 15. **B.** 31. **C.** 16. **D.** 32.

Câu 42: Trong không gian, cho hình thoi $ABCD$ có $AB=6$ và $BD=4$. Khi quay hình thoi $ABCD$ quanh trục AB thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành hình tròn xoay (H). Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi (H) bằng

A. $\frac{256\pi}{3}$. **B.** $\frac{8704\pi}{81}$. **C.** $\frac{2368\pi}{27}$. **D.** $\frac{64\pi}{3}$.

Câu 43: Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0\,(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1-\frac{1}{7}\right|=|z_1-z_2|$. Giả sử $|z_1|=\frac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thỏa mãn $cw^2+bw+a=0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho úng với mỗi k tồn tại đúng 5 số phức z_3 có phần ảo nguyên, z_3-w là số thuần ảo và $|z_3|\leq|w|$?

A. 10. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 11.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z=0$. Đường thẳng đối xứng với Δ qua (P) có phương trình là

A. $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$. **B.** $\frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$. **D.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$.

Câu 45: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $C, AB=\sqrt{3}a$ và $AC=a$. Biết góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 30°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{9}a^3$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $|z+1-7i|+|z+1+7i|=14$ và $|z-1-i|=m$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 47: Xét hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d\in\mathbb{R},a>0)$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 (với $x_1<x_2$) thỏa mãn $x_1+x_2=0$. Hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=f'(x)f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{16}$. Biết $\int_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{2^x+1}dx=-\frac{5}{2}$, giá trị của $\int_0^{x_2}(x+2)f''(x)dx$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{9}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1),B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua A. Điểm $M(a;b;c)$ (với $c>0$) thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và IA lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{17}{2};9\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(8;\frac{17}{2}\right)$.

Câu 49: Xét hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(-1)=-6$. Hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty,+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-100;0)$ sao cho ứng với mỗi số a, hàm số $y=\left|f(x)+\frac{6}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1,+\infty)$?

A. 11 **B.** 12 **C.** 87 **D.** 88

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=\frac{5}{x^2}+\ln\frac{x+2}{x-2}$ có bao nhiêu số nguyên $a\in(-\infty;2100)$ thỏa mãn $f(a-2023)+f(5a-29)\geq 0$?

A. 336 **B.** 410 **C.** 2093 **D.** 1758

---------- HẾT ----------

BẢNG ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT THAM KHẢO

1.D	2.C	3.C	4.B	5.C	6.A	7.D	8.D	9.D	10.C
11.A	12.D	13.D	14.C	15.A	16.C	17.B	18.B	19.C	20.C
21.A	22.B	23.C	24.D	25.D	26.C	27.C	28.B	29.D	30.D
31.A	32.A	33.D	34.B	35.D	36.A	37.B	38.B	39.D	40.A
41.B	42.A	43.A	44.B	45.A	46.A	47.A	48.D	49.B	50.B

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)>-1$ là

A. $(-2;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=(-2;+\infty)$,

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)>-1 \Rightarrow x+2<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x+2<2 \Leftrightarrow x<0.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-2<x<0$. Vậy tập nghiệm là $(-2;0)$.

Câu 3: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-1}{3x+2}$ có phương trình là

A. $x=\dfrac{4}{3}$. **B.** $y=\dfrac{4}{3}$. **C.** $x=-\dfrac{2}{3}$. **D.** $y=-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là $x=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 4: Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người thành một hàng ngang?

B. 36. **B.** 720. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Để sắp xếp 6 người thành một hàng ngang có $6!=720$ cách.

Câu 5: Cho khối chóp tứ giác có thể tích $V=3a^3$ và diện tích đáy $B=a^2$. Chiều cao của khối chóp đã cho bằng

A. $3a$. **B.** $6a$. **C.** $9a$. **D.** a.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối chóp có công thức $V=\frac{1}{3}Bh\Rightarrow h=\frac{3V}{B}=\frac{3.3a^3}{a^2}=9a$.

Câu 6: Nếu $\int_{-2}^{1}f(x)dx=-1$ và $\int_{1}^{7}f(x)dx=-5$ thì $\int_{-2}^{7}f(x)dx$ bằng

A. -6. **B.** 5. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$\int_{-2}^{7}f(x)dx=\int_{-2}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{7}f(x)dx=(-1)+(-5)=-6$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{a}=(2;3;-1)$ và $\vec{b}=(-3;2;-4)$. Vec tơ $\vec{a}+\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1;-5;5)$. **B.** $(-5;-1;-3)$. **C.** $(-1;-5;5)$. **D.** $(-1;5;-5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(2+(-3);3+2;(-1)+(-4))=(-1;5;-5)$.

Câu 8: Số phức $z=i+i^2+i^3$ bằng

A. 1. **B.** i. **C.** $-1+2i$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $i+i^2+i^3=i-1-i=-1$.

Câu 9: Hàm số nào dưới đây là hàm số mũ?

A. $y=\log_3 x$. **B.** $y=x^{-4}$. **C.** $y=x^{2024}$. **D.** $y=2024^x$.

Lời giải

Chọn D

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(3;0;1)$. Gọi (S) là mặt cầu nhận AB làm đường kính, tâm của (S) có tọa độ là

A. $(1;1;-1)$. **B.** $(-1;-1;1)$. **C.** $(2;-1;2)$. **D.** $(4;-2;4)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm của mặt cầu (S) là trung điểm của đoạn AB.

Ta có: $I(2;-1;2)$.

Câu 11: Cho hình nón có bán kính đáy $r=3$ và độ dài đường sinh $l=5$. Chiều cao của hình nón đã cho bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** $\sqrt{34}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $h^2+r^2=l^2\Rightarrow h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Câu 12: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int(2x+3)\mathrm{d}x=2x^2+3x+C$. **B.** $\int(2x+3)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+3x+C$.

C. $\int(2x+3)\mathrm{d}x=x^2+C$. **D.** $\int(2x+3)\mathrm{d}x=x^2+3x+C$.

Lời giải

Chọn D

Câu 13: Trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ hàm số $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f_3(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ **B.** $f_4(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x$

C. $f_1(x)=-\cos 2x$ **D.** $f_2(x)=\cos 2x$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x=\cos 2x=f_2(x)$

Câu 14: Nghiệm của phương trình $2^{2x}=2^{x+6}$ là:

A. $x=2$ **B.** $x=-2$ **C.** $x=6$ **D.** $x=-6$

Lời giải

$2^{2x}=2^{x+6}$

$\Leftrightarrow 2x=x+6$

$\Leftrightarrow x=6$

Chọn C

Câu 15: Trên mặt phẳng tọa độ, $M(2;-5)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

A. 2 **B.** 5 **C.** -5 **D.** -2

Lời giải

Chọn A

$M(2;-5)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=2-5i$

Vậy phần thực của z bằng 2

Câu 16: Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{1}{7}}$ là

A. $y'=\frac{7}{8}x^{\frac{8}{7}}$ **B.** $y'=\frac{1}{7}x^{\frac{6}{7}}$ **C.** $y'=\frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}$ **D.** $y'=x^{-\frac{6}{7}}$

Lời giải

Chọn C

$y=x^{\frac{1}{7}}$

$\Rightarrow y'=\frac{1}{7}\cdot x^{\frac{1}{7}-1}=\frac{1}{7}\cdot x^{-\frac{6}{7}}$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=3; f(2)=1$. Giá trị của $\int_1^2 f'(x)dx$ bằng

A. 4 **B.** -2 **C.** 2 **D.** -4

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx=f(x)\Big|_1^2=f(2)-f(1)=1-3=-2$

Câu 18: Cho hình trụ có diện tích xung quanh $S_{xq} = 36\pi$ và chiều cao $h = 6$. Bán kính của hình trụ đã cho bằng

A. 9 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 12

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S_{xq} = 2\pi Rh$

$\Leftrightarrow 36\pi = 2\pi R.6$

$\Rightarrow R = \dfrac{36\pi}{12\pi} = 3$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{-3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chi phương của d?

A. $\vec{u}_4 = (1;1;3)$. **B.** $\overrightarrow{u_2} = (-1;2;0)$. **C.** $\overrightarrow{u_3} = (1;-1;-3)$. **D.** $\overrightarrow{u_1} = (1;2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -2$

Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Câu 21: Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^2} b^2$ bằng

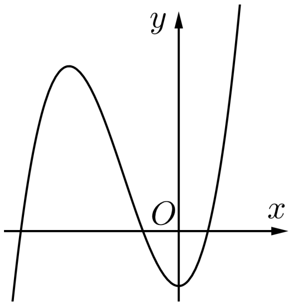
A. $\log_a b$. **B.** $\log_a b^4$. **C.** $(\log_a b)^2$. **D.** $\log_{a^4} b$.

Lời giải

Chọn A

$\log_{a^2} b^2 = \dfrac{2}{2}\log_a b = \log_a b$

Câu 22: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$. **B.** $y = x^3 + 3x^2 - 1$. **C.** $y = x^4 - 2x^2 - 4$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số đã cho có 2 cực trị và hướng lên khi $x \to +\infty$ nên hàm số là $y = x^3 + 3x^2 - 1$

Câu 23: Cho khối lăng trụ tam giác có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 6. **B.** 24. **C.** 18. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Ta có thể tích khối lăng trụ là $V=B.h=6.3=18(\text{dvtt})$

Câu 24: Dãy số nào dưới đây là một cấp số cộng?

A. $1,2,3,-4$. **B.** $1,3,5,10$. **C.** $1,0,2,4$. **D.** $1,3,5,7$.

Lời giải

Chọn D

Vì $1+\boxed{2}=3;\ 3+\boxed{2}=5;\ 5+\boxed{2}=7$ nên $1,3,5,7$ là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=1$ và công sai $d=2$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(3;4;-2)$ và vuông góc với trục Oz có phương trình là

A. $x-3=0$. **B.** $y-4=0$. **C.** $x+y+z-5=0$. **D.** $z+2=0$.

Lời giải

Chọn D

Trục Oz có VTCP $\vec{k}=(0;0;1)$

Phương trình mặt phẳng đi qua $M(3;4;-2)$ và có VTPT $\vec{k}=(0;0;1)$ có phương trình $z+2=0$

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

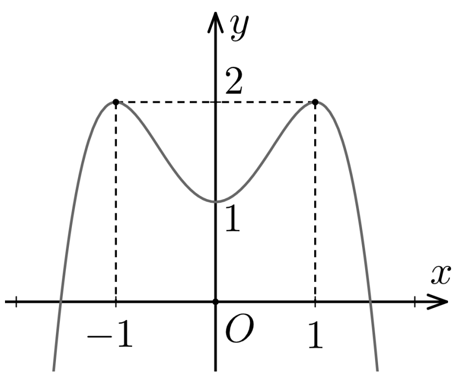
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Câu 27: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\dfrac{3}{2}$ là

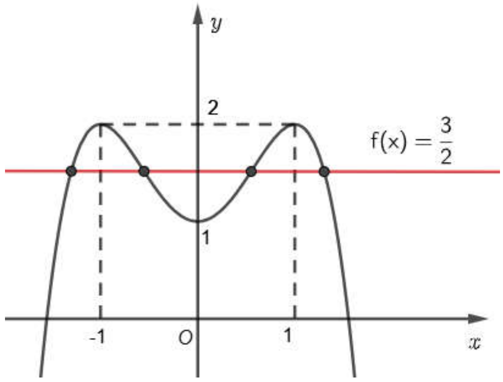


A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $f(x)=\dfrac{3}{2}$ có đồ thị là đường thẳng đi qua điểm có tọa độ $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ và song song với trục Ox cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt.



Câu 28: Cho số phức z có $\overline{z}=-5+6i$. Phần ảo của z bằng

A. 5. **B.** -6. **C.** 6. **D.** -5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overline{z}=-5+6i$ nên $z=-5-6i$

Vậy phần ảo của z là: -6

Câu 29: Với a, b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab}b$ bằng

A. $1-\log_b a$. **B.** $1+\log_b a$. **C.** $\dfrac{1}{\log_b a}$. **D.** $\dfrac{1}{1+\log_b a}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{ab}b=\dfrac{1}{\log_b ab}$

$\log_{ab}b=\dfrac{1}{\log_b a+\log_b b}$

$\log_{ab}b=\dfrac{1}{\log_b a+1}$

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-z+1=0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-1+t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=2t\\z=-1-t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2\\z=-1-t\end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: VTPT $\vec{n}_{(P)}=(2;0;-1)$

Vì đường thẳng $\perp(P)$ nên VTCT $\vec{u}=\vec{n}_{(P)}=(2;0;-1)$

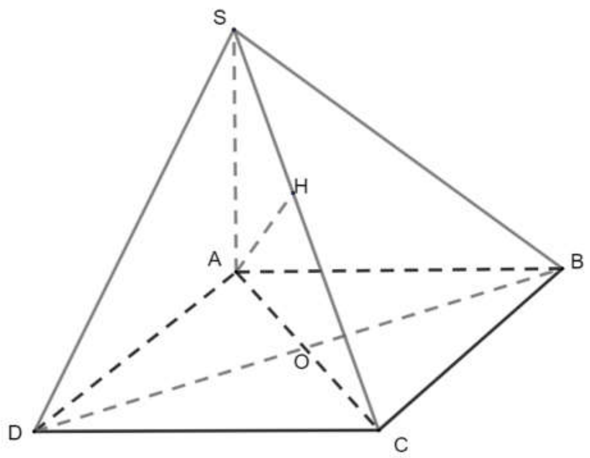
Phương trình đường thẳng có dạng $\begin{cases} x = x_o + 2t \\ y = y_o \\ z = z_o - t \end{cases}$

Mà $A(1;2;-1) \in$ đường thẳng nên Phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{10}}{5}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{10}}{5}a$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}a$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

Lời giải



Chọn A

Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\frac{d(C;(SBD))}{d(A;(SBD))} = \frac{CO}{AO} = 1 \Rightarrow d(C;(SBD)) = d(A;(SBD))$.

Ta chứng minh được $(SAO) \perp (SBD)$ và $(SAO) \cap (SBD) = SO$

Trong tam giác SAO kẻ $AH \perp SO (H \in SO) \Rightarrow AH \perp (SBD)$

Do đó $d(A;(SBD)) = AH$.

Xét tam giác vuông SAO vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{\frac{AC^2}{4}} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{5}{2a^2}$$

$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{10}a}{5}$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(3;2;5)$. Gọi M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA}$, độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{74}}{2}$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MA}\Rightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{3x_A-x_B}{3-1}=\dfrac{3\cdot1-3}{2}=0\\ y_M=\dfrac{3y_A-y_B}{3-1}=\dfrac{3\cdot2-2}{2}=2\\ z_M=\dfrac{3z_A-z_B}{3-1}=\dfrac{3\cdot3-5}{2}=2\end{cases}$$

$\Rightarrow M\left(0;2;2\right)\Rightarrow OM=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

Câu 33: Cho số phức $z=3+4i$. Môđun của số phức iz bằng

A. 25. **B.** 49. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

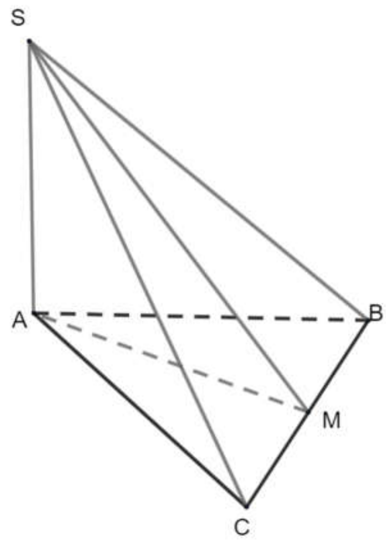
Chọn D

Ta có $iz=i\left(3+4i\right)=-4+3i\Rightarrow\left|iz\right|=\sqrt{\left(-4\right)^2+3^2}=5$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $BC=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $SA=\sqrt{3}a$. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải



Chọn B

Gọi M là trung điểm của BC.

Tam giác vuông cân tại A nên $AM\perp BC$ và $AM=\dfrac{BC}{2}=a$.

Mà $BC\perp SA$ (do SA vuông góc với mặt phẳng đáy) nên $BC\perp\left(SAM\right)\Rightarrow BC\perp SM$.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng $\widehat{SMA}$.

Xét tam giác SMA vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SMA}=\dfrac{AS}{AM}=\dfrac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SMA}=60^\circ$.

Câu 35: Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=-6x^3+27x^2-16x+1$ trên đoạn $\left[1;5\right]$ bằng

A. 6. **B.** $-\dfrac{14}{9}$. **C.** -154. **D.** $\dfrac{329}{9}$.

Lời giải

Chọn D

$f\left(x\right)=-6x^3+27x^2-16x+1\Rightarrow f'\left(x\right)=-18x^2+54x-16$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{8}{3}\in\left[1;5\right]\\x=\frac{1}{3}\notin\left[1;5\right]\end{array}\right..$$

Ta có $f\left(1\right)=6$; $f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{329}{9}$; $f\left(5\right)=-154$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=-6x^3+27x^2-16x+1$ trên đoạn $\left[1;5\right]$ bằng $\frac{329}{9}$.

Câu 36: Một ô tô đang chuyển động với vận tốc $20\ \text{m/s}$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v\left(t\right)=-4t+20\left(\text{m/s}\right)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

A. $50\ \text{m}$. **B.** $30\ \text{m}$. **C.** $32\ \text{m}$. **D.** $48\ \text{m}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu phanh: $t_0=0\left(\text{s}\right)$

Gọi t là thời điểm ô tô dừng lại. Khi đó vận tốc lúc dừng là $v\left(t\right)=0\left(\text{m/s}\right)$

Vậy thời gian từ lúc đạp phanh đến lúc dừng lại là: $v\left(t\right)=0\Leftrightarrow-4t+20=0\Leftrightarrow t=5\left(\text{s}\right)$

Gọi $S\left(t\right)$ là quãng đường ô tô đi được trong thời gian t, ta có:

$$S\left(t\right)=\int_0^5 v\left(t\right)dt=\int_0^5\left(-4t+20\right)dt=50\left(\text{m}\right)$$

Câu 37: Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 6 điểm phân biệt khác O. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 12 điểm (gồm điểm O và 11 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

A. $\frac{27}{44}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{39}{44}$. **D.** $\frac{19}{22}$.

Lời giải

Chọn B

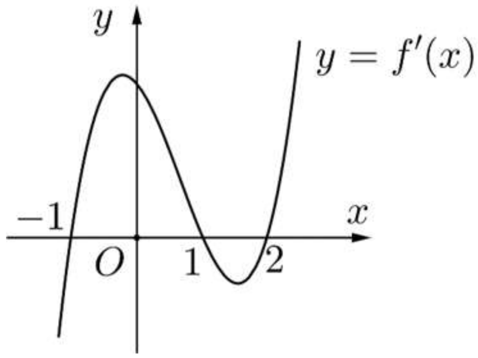
Không gian mẫu Ω " Chọn ngẫu nhiên 3 điểm trong 12 điểm phân biệt" $\Rightarrow n_\Omega=C_{12}^3=220$

Biến cố A " 3 điểm được chọn là 3 đỉnh của một tam giác"

$n_A=C_{12}^3-C_6^3-C_7^3=165$

Xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác là: $P\left(A\right)=\frac{n_A}{n_\Omega}=\frac{165}{220}=\frac{3}{4}$

Câu 38: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

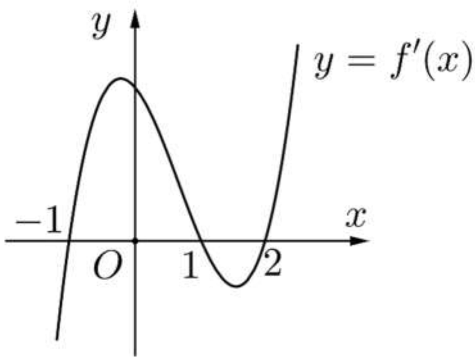


Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** s$(1;2)$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$y=f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Nên ta có hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;+\infty)$

Câu 39: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là $-\frac{7}{2};-1;\frac{3}{2}$ và đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3;0]$ khi và chi khi

A. $m \leq f(-1)$. **B.** $f(-1) \leq m \leq f(0)$. **C.** $m \leq f(0)$. **D.** $m \leq f(-3)$.

Lời giải

Chọn D

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là $-\frac{7}{2};-1;\frac{3}{2}$ và đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

Gọi $f'(x) = a\left(x+\frac{7}{2}\right)(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ và $a>0$

Đặt $t = x+1$ với $x \in [-3;0] \Rightarrow t \in [-2;1]$

Khi đó hàm số $y = f(x)$ trở thành hàm số $y = g(t)$ có ba điểm cực trị $-\frac{5}{2};0;\frac{5}{2}$

Nên $g'(t) = a.t\left(4t^2-25\right)$

Do đó $y=g(t)$ là hàm trùng phương có hệ số $a<0$ nên $g(-2)>g(1)\Rightarrow f(-3)>f(0)$

Để bất phương trình $f(x)\ge m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3;0]$ $\Leftrightarrow m\le f(-3)$

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=\frac{1}{2}$ và $f'(x)=\tan^3 x+\tan x,\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(x+1)f(x)\mathrm{d}x=a\pi\sqrt{3}+b\sqrt{3}+c\ln 3$, với a,b,c là các số hữu tỉ, giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{3};1\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};0\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=\tan^3 x+\tan x,\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x)=\tan^3 x+\tan x=\tan x\left(\tan^2 x+1\right)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$

$\Rightarrow f(x)=\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$, đặt $t=\cos x$ $\Rightarrow dt=-\sin x\,dx$

$\Rightarrow f(x)=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{-1}{t^3}dt=\frac{1}{2t^2}+C=\frac{1}{2\cos^2 x}+C$

Mà: $f(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2\cos^2 0}+C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=0$

Vậy $f(x)=\frac{1}{2\cos^2 x}$

Ta có: $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(x+1)f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(x+1)\frac{1}{2\cos^2 x}dx$

Đặt $u=x+1\Rightarrow du=dx$, $dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx\Rightarrow v=\tan x$

$$I=\frac{1}{2}\left[(x+1)\tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x+1)\tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{3}+1\right)\sqrt{3}-\left(\frac{\pi}{6}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{3}+1\right)\sqrt{3}-\left(\frac{\pi}{6}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{36}\pi+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{4}\ln 3$$

Vậy $a=\frac{5}{36},b=\frac{1}{3},c=-\frac{1}{4}$ $\Rightarrow a+b+c=\frac{5}{36}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2}{9}$

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi a tồng tại không quá 7 số nguyên b thỏa mãn $2^{b^2} < 8^{-b}.a^{b+3}$?

A. 15. **B.** 31. **C.** 16. **D.** 32.

Lời giải

Chọn B

$2^{b^2} < 8^{-b}.a^{b+3} \Leftrightarrow 2^{b^2} < 2^{-3b}.a^{b+3}$.

$\Leftrightarrow 2^{b^2+3b} < a^{b+3}$.

$\Leftrightarrow b(b+3).\log_a 2 < b+3$.

$\Leftrightarrow (b+3)(b\log_a 2 - 1) < 0$.

Vì a nguyên lớn hơn 1 $\begin{cases} \log_2 a > 0 \\ \log_a 2 > 0 \end{cases}$

Vì không quá 7 giá trị b nguyên nên $\log_2 a \le 5 \Rightarrow a \le 2^5 = 32$.

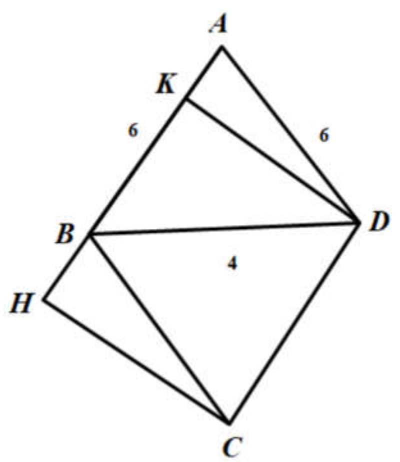
$\Rightarrow$ có 31 số số nguyên a lớn hơn 1 thỏa mãn.

Câu 42: Trong không gian, cho hình thoi $ABCD$ có $AB = 6$ và $BD = 4$. Khi quay hình thoi $ABCD$ quanh trục AB thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành hình tròn xoay (H). Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi (H) bằng

A. $\dfrac{256\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{8704\pi}{81}$. **C.** $\dfrac{2368\pi}{27}$. **D.** $\dfrac{64\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Nửa chu vi tam giác ABD là $p = \dfrac{6+6+4}{2} = 8$.

$S_{ABD} = \sqrt{p(p-6)(p-6)(p-4)} = 8\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 16\sqrt{2} \Rightarrow CH = DK = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

Vì khi quay AD và BC tạo hai hình nón bằng nhau nên thể tích là thể tích lăng trụ do CD quay tạo ra.

$V = \pi.CH^2.CD = \dfrac{256}{3}\pi$.

Câu 43: Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0\left(a,b,c \in \mathbb{R}, a \ne 0\right)$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1 - \dfrac{1}{7}\right| = \left|z_1 - z_2\right|$. Giả sử $\left|z_1\right| = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thỏa mãn $cw^2 + bw + a = 0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho úng với mỗi k tồn tại đúng 5 số phức z_3 có phần ảo nguyên, $z_3 - w$ là số thuần ảo và $\left|z_3\right| \le \left|w\right|$?

A. 10. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Đặt $w = x + yi$

do w thỏa mãn $cw^2+bw+a=0$

Thoả mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow |y|\le 2$

Khi đó ta có $\frac{1}{w}$ là nghiệm của $az^2+bz+c=0$

từ $\left|2z_1-\frac{1}{7}\right|=|z_1-z_2|\Rightarrow z_1$ có phần thực là $\frac{1}{14}$

$\Rightarrow \frac{1}{w}$ có phần thực là $\frac{1}{14}$

$\Rightarrow \frac{\overline{w}}{|w|^2}$ có phần thực là $\frac{1}{14}$

$\Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{14}$

Mặt khác $|z|=\frac{1}{\sqrt{k}}$ với $k\in N^*$

$\Rightarrow x^2+y^2=k$ với $k\in N^*$

$\Rightarrow \frac{x}{k}=\frac{1}{14}\Rightarrow x=\frac{k}{14}$

$\Rightarrow y^2=k-\frac{k^2}{196}$

$\Rightarrow 4\le k-\frac{k^2}{196}<9$

do $k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow k\in\{5;6;7;8;9;187;188;189;190;191\}$

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z=0$. Đường thẳng đối xứng với Δ qua (P) có phương trình là

A. $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$. **B.** $\frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$. **D.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$.

Lời giải

Chọn B

Xét đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-1}$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;5;-1)$.

Xét mặt phẳng $(P):2x+y+z=0$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;1)$.

Vì $\vec{u}.\vec{n}\ne 0$ nên Δ cắt (P).

Gọi $M=\Delta\cap(P)$ suy ra $M(1+t;3+5t;1-t)$

Ta có $M\in(P)\Leftrightarrow 2(1+t)+3+5t+1-t=0\Leftrightarrow t=-1$ suy ra $M(0;-2;2)$.

Gọi $N(1;3;1)\in\Delta$ và $H(a;b;c)$ là hình chiếu của N lên (P).

Ta có $H\in(P)\Leftrightarrow 2a+b+c=0$ và $\overrightarrow{NH}=(a-1;b-3;c-1)$

Ta có $\overrightarrow{NH}$ và $\vec{n}$ cùng phương nên $\frac{a-1}{2}=\frac{b-3}{1}=\frac{c-1}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a-1}{2}=\frac{b-3}{1}\\ \frac{a-1}{2}=\frac{c-1}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=-5\\ a-2c=-1\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases}a=-1\\ b=2\\ c=0\end{cases}$ suy ra $H(-1;2;0)$

Gọi N' là điểm đối xứng của N qua H suy ra H là trung điểm của NN', nghĩa là

$$\begin{cases}x_H=\frac{x_N+x_{N'}}{2}\\ y_H=\frac{y_N+y_{N'}}{2}\\ z_H=\frac{z_N+z_{N'}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=\frac{1+x_{N'}}{2}\\ 2=\frac{3+y_{N'}}{2}\\ 0=\frac{1+z_{N'}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{N'}=-3\\ y_{N'}=1\\ z_{N'}=-1\end{cases}$$

Suy ra $N'(-3;1;-1)$

Ta có $\overrightarrow{MN'}=(-3;3;-3)$.

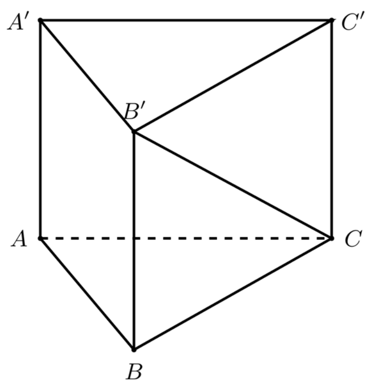
Đường thẳng đối xứng với Δ qua (P) đi qua $N'(-3;1;-1)$ và nhận $\overrightarrow{u_1}=-\overrightarrow{MN'}=(1;-1;1)$ làm véc tơ chỉ phương có phương trình là $\frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{1}$.

Câu 45: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $C, AB=\sqrt{3}a$ và $AC=a$. Biết góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 30°, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{9}a^3$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Vì $BB'\perp(ABC)$ nên suy ra CB là hình chiếu của $B'C$ lên (ABC)

Suy ra $(B'C;(ABC))=(B'C;BC)=\widehat{B'CB}=30^\circ$

Xét ΔABC vuông tại C ta có $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{(a\sqrt{3})^2-a^2}=a\sqrt{2}$.

Diện tích ΔABC là $S=\frac{1}{2}AC.CB=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Xét $\Delta BB'C$ vuông tại B ta có $\tan\widehat{B'CB}=\frac{BB'}{BC}\Rightarrow BB'=BC.\tan\widehat{B'CB}=a\sqrt{2}.\tan 30^\circ=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy thể tích khối trụ là $V=S.BB'=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $|z+1-7i|+|z+1+7i|=14$ và $|z-1-i|=m$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

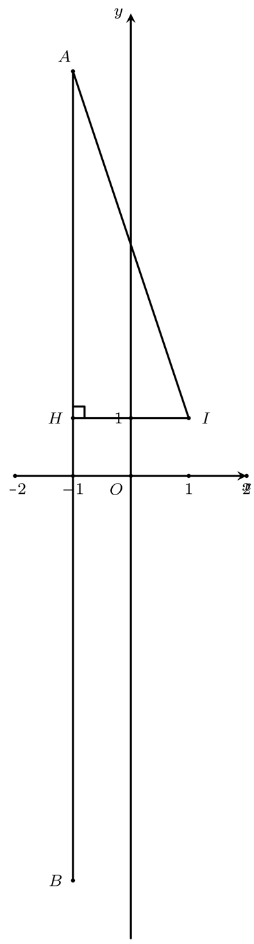
Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z

Đặt $z_1=-1+7i$ có điểm biểu diễn là $A(-1;7)$ và $z_2=-1-7i$ có điểm biểu diễn là $B(-1;-7)$

Vì $AB=\sqrt{(-1+1)^2+(-7-7)^2}=14$ kết hợp với hệ thức $|z+1-7i|+|z+1+7i|=14$ ta suy ra hệ thức $MA+MB=AB$

Từ đó suy ra $M\in AB$ (1).

Mặt khác: $|z-1-i|=m$ nên suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=m$ (2)



Từ (1), (2) suy ra điều kiện $IH<m<IA\Leftrightarrow 2<m<\sqrt{6^2+2^2}\Leftrightarrow 2<m<\sqrt{40}$

Suy ra $m\in\{3;4;5;6\}$.

Câu 47: Xét hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d\in\mathbb{R},a>0)$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 (với $x_1<x_2$) thỏa mãn $x_1+x_2=0$. Hình phẳng giới hạn bởi đường $y=f'(x)f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{16}$. Biết $\int_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{2^x+1}dx=-\frac{5}{2}$, giá trị của $\int_0^{x_2}(x+2)f''(x)dx$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{9}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3a\left(x^2-x_2^2\right),n_2>0\Rightarrow f'(x)$ là hàm số chẵn

$$\Rightarrow\int_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{2^x+1}dx=\int_{-x_2}^{x_2}\frac{f'(x)}{2^x+1}dx=2\int_0^{x_2}f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 2a(x^3-3x.x_2^2)\Big|_0^{x_2}=\frac{-5}{2}\Leftrightarrow ax_2^3=\frac{5}{8}\qquad(1)$$

$f''(x)=6ax\Rightarrow f'.f''$ là hàm lẻ.

$$S=\frac{9}{16}=\int_{-x_2}^{x_2}\left|f'(x).f''(x)\right|dx=\int_0^{x_2}2f'(x)df'(x)=\left(f'\right)^2\Big|_0^{x_2}$$

$$=9a^2x_2^4\Rightarrow ax_2^2=\frac{1}{4}\qquad(2)$$

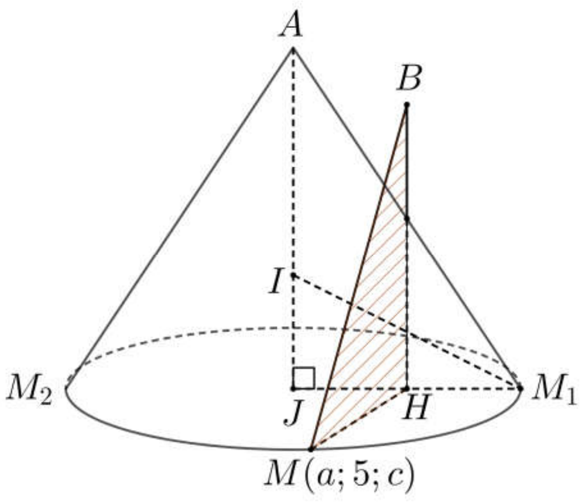
Từ (1) và (2) $\Rightarrow x_1=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{25}$

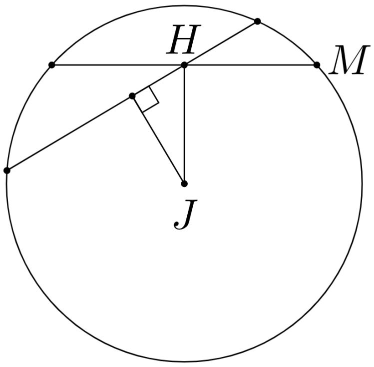
$$\int_0^{x_2}(x+2)f''(x)dx=\int_0^{\frac{5}{2}}(x+2)\frac{6}{25}x\,dx=\frac{11}{4}$$

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1),B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua A. Điểm $M(a;b;c)$ (với $c>0$) thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và IA lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{17}{2};9\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(8;\frac{17}{2}\right)$.

Lời giải





Chọn D

$S_{\Delta IAM}=2\sqrt{7}\Rightarrow \sin\widehat{AIM}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\Rightarrow\begin{cases}AM=2\sqrt{14};JM=\sqrt{7}\\ AJ=7\Rightarrow J(1;5;-1)\end{cases}$

Suy ra $(P):y=5\Rightarrow H(2;5;-1)\Rightarrow JH=1$

$d_{(AJ,BM)}=d_{(J;(BMH))\max}=d_{(J;MH)\max}=JH.$

$\Leftrightarrow JH\perp HM\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{JH}=0\Leftrightarrow a=0\\ JM^2=(a-1)^2+(c+1)^2=7\end{cases}\Rightarrow c=-1+\sqrt{6}$ (do $c>0$).

Suy ra $a+b+c=6+\sqrt{6}\in\left(8;\dfrac{17}{2}\right)$.

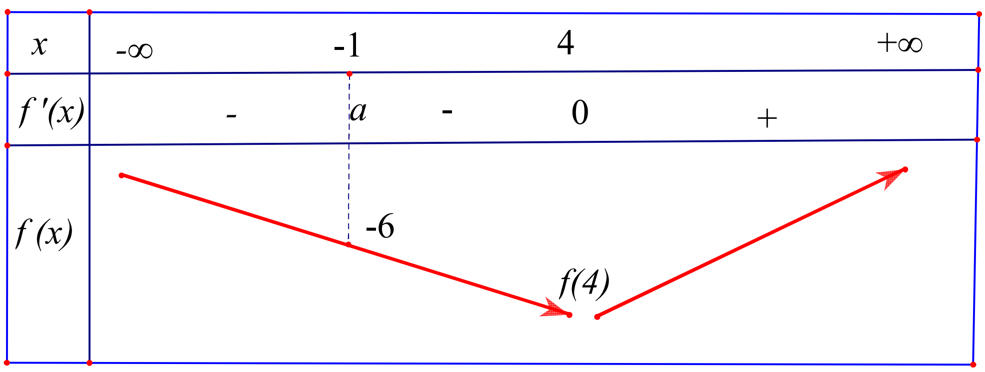
Câu 49: Xét hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(-1)=-6$. Hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty,+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-100;0)$ sao cho ứng với mỗi số a, hàm số $y=\left|f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1,+\infty)$?

A. 11 **B.** 12 **C.** 87 **D.** 88

Lời giải

Chọn B

Do $f'(x)$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ và $f'(4)=0$ nên ta có bảng biến thiên.



Xét $g(x)=f(x)+\dfrac{6}{x^2}\Rightarrow g'(x)=f'(x)-\dfrac{12}{x^3}$

Ta có $g(-1)=0$; $g(4)=f(4)+\dfrac{6}{16}<-6+\dfrac{6}{16}<0$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ nên phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$. Nên hàm số $y=\left|f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right|$ có ba cực trị thuộc khoảng $(0;+\infty)$

Do đó để hàm số $y=\left|f(x)+\dfrac{6}{x^2}\right|$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;+\infty)$ thì hàm số $y=g(x)$ không có cực trị thuộc khoảng $(-1;0)$ hay $g'(x)=0$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$ từ đó ta được $g'(-1)\ge 0 \Leftrightarrow a+12\ge 0 \Leftrightarrow a\ge -12$ (do dễ thấy $g'(x)$ là hàm đồng biến).

Vậy có tất cả 12 giá trị nguyên của a.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{5}{x^2}+\ln\dfrac{x+2}{x-2}$ có bao nhiêu số nguyên $a\in(-\infty;2100)$ thỏa mãn $f(a-2023)+f(5a-29)\ge 0$?

A. 336 **B.** 410 **C.** 2093 **D.** 1758

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=R\backslash[-2;2]$

$f(x)=\dfrac{5}{x^3}+\ln\dfrac{x+2}{x-2}$ khi đó $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

Ta có $f'(x)=\dfrac{-15}{x^4}-\dfrac{4}{(x-2)^2}.\dfrac{x+2}{x-2}<0 \quad \forall x\in D$ nên $f(x)$ là hàm nghịch biến. Mặt khác dễ thấy $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên ta có:

$f(a-2023)+f(5a-29)\ge 0 \Leftrightarrow f(a-2023)\ge f(29-5a)\ (*)$

ta xét các trường hợp sau

TH1: $\begin{cases} a-2023>2 \\ 29-5a<-2 \end{cases} \Leftrightarrow a>2025$ khi đó $f(a-2023)>0; f(29-5a)<0$ nên $(*)$ đúng.

TH2: $\begin{cases} a-2023<-2 \\ 29-5a>2 \end{cases} \Leftrightarrow a<\dfrac{31}{5}$ dễ thấy không thỏa mãn $(*)$

TH3: $\begin{cases} a-2023>2 \\ 29-5a>2 \end{cases}$ (không có giá trị a thỏa mãn)

TH4: $\begin{cases} a-2023<-2 \\ 29-5a<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{31}{5}<a<2021$ khi đó $(*) \Leftrightarrow a-2023\le 29-5a \Leftrightarrow a\le 342$

Kết hợp điều kiện và do a là số nguyên nên $7\le a\le 342$

Vậy số số nguyên a là: 410.

---------- **HẾT** ----------

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2024
BÀI THI TOÁN
MÃ ĐỀ: 104

Câu 1: Cho số phức $z=1+2i$. Số phức $2z$ bằng

A. $3+2i$. **B.** $3+4i$. **C.** $-3+4i$. **D.** $2+4i$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

A. Điểm $M(-1;2;3)$. **B.** Điểm $Q(1;3;2)$. **C.** Điểm $P(-2;-5;1)$. **D.** Điểm $N(2;5;-1)$.

Câu 3: Nếu $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=-2$ thì $\int\limits_3^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

A. $y=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $y=1$.

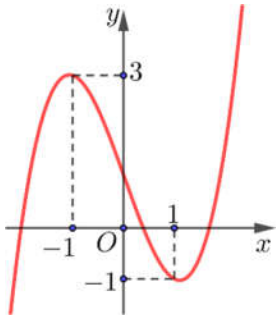
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=2$ là

A. 2.   **B.** 1.   **C.** 0.   **D.** 3.

Câu 7: Cho khối chóp tứ giác có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=6$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 12.   **B.** 24.   **C.** 6.   **D.** 18.

Câu 8: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \cos 2xdx=\frac{1}{2}\cos 2x+C$.   **B.** $\int \cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

C. $\int \cos 2xdx=-2\cos 2x+C$.   **D.** $\int \cos 2xdx=-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Câu 9: Trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$, đạo hàm của hàm số $y=4^x$ là

A. $y'=x.4^{x-1}$.   **B.** $y'=\frac{4^{x+1}}{x+1}$.   **C.** $y'=4^x\ln 4$.   **D.** $y'=\frac{4^x}{\ln x}$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)>-1$ là

A. $\left(-1;1\right)$.   **B.** $\left(0;1\right)$.   **C.** $\left(-\infty;1\right)$.   **D.** $\left(1;+\infty\right)$.

Câu 11: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z=3+5i$ có tọa độ là

A. $\left(5;-3\right)$.   **B.** $\left(3;-5\right)$.   **C.** $\left(5;3\right)$.   **D.** $\left(3;5\right)$.

Câu 12: Cho khối lăng trụ tam giác có thể tích $V=36a^3$ và diện tích đáy $B=4a^2$. Chiều cao của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3a$.   **B.** $6a$.   **C.** $27a$.   **D.** $9a$.

Câu 13: Cho hình trụ có bán kính đáy $r=3$ và chiều cao $h=5$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 30π.   **B.** 9π.   **C.** 15π.   **D.** 20π.

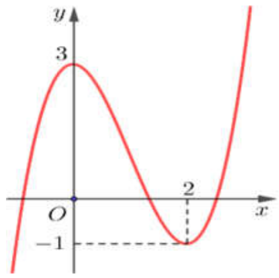
Câu 14: Tập xác định của hàm số $y=\left(x-1\right)^{\frac{3}{2}}$ là

A. $\left(0;+\infty\right)$.   **B.** $\left(-\infty;+\infty\right)$.   **C.** $\left(1;+\infty\right)$.   **D.** $\left(-\infty;1\right)$.

Câu 15: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int 5^x\mathrm{d}x=\frac{5^x}{\ln 5}+C$.   **B.** $\int 5^x\mathrm{d}x=5^x\ln 5+C$.   **C.** $\int 5^x\mathrm{d}x=\frac{5^{x+1}}{\ln 5}+C$.   **D.** $\int 5^x\mathrm{d}x=5^x+C$.

Câu 16: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(0;5)$.

Câu 18: Với a,b là các số thực dương tuỳ ý, $\log_2(ab)$ bằng

A. $\log_2 a+\log_2 b$. **B.** $\log_2 a-\log_2 b$. **C.** $\log_2 a.\log_2 b$. **D.** $b\log_2 a$.

Câu 19: Cho số phức $z=2024-2i$. Số phức liên hợp của z là

A. $2+2024i$. **B.** $-2024+2i$. **C.** $-2+2024i$. **D.** $2024+2i$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(3;-2;0)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là

A. $(2;-4;4)$. **B.** $(4;0;-4)$. **C.** $(2;0;-2)$. **D.** $(-2;4;-4)$.

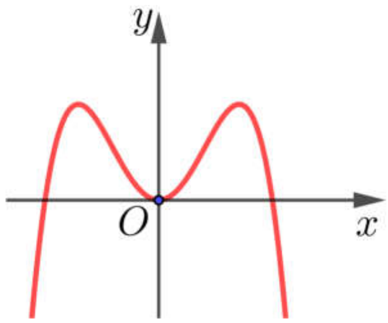
Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2)=-5$, $f(3)=7$. Giá trị của $\int_{-2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -35. **B.** 12. **C.** -12. **D.** 2.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy)?

A. Điểm $Q(0;3;1)$. **B.** Điểm $N(-1;0;5)$. **C.** Điểm $P(2;0;5)$. **D.** Điểm $M(2;3;0)$.

Câu 23: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong như hình bên dưới?



A. $y=x^2-2x$. **B.** $y=2x^3+x^2$. **C.** $y=-x^4+2x^2$. **D.** $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$.

Câu 24: Nghiệm của phương trình $2^{2x+1}=\dfrac{1}{8}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Câu 25: Từ một đội văn nghệ gồm 6 nam và 5 nữ, có bao nhiêu cách chọn một nam và một nữ để hát song ca với nhau?

A. 110. **B.** 30. **C.** 11. **D.** 55.

Câu 26: Cho khối nón có diện tích đáy $B=8$ và chiều cao $h=9$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 24. **B.** 192. **C.** 72. **D.** 216.

Câu 27: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$ công sai $d=6$. Giá trị của u_2 bằng

A. -3. **B.** 9. **C.** 18. **D.** 3.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;-1)$. **B.** $(-2;4;-2)$. **C.** $(2;-4;2)$. **D.** $(1;-2;1)$.

Câu 29: Cho số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=4$. Môđun của z bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 30: Với a,b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab} a$ bằng

A. $1-\log_a b$. **B.** $\dfrac{1}{1+\log_a b}$. **C.** $1+\log_a b$. **D.** $\dfrac{1}{\log_a b}$.

Câu 31: Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 8 điểm phân biệt khác 0. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 14 điểm (gồm điểm O và 13 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

A. $\dfrac{5}{7}$. **B.** $\dfrac{149}{182}$. **C.** $\dfrac{75}{91}$. **D.** $\dfrac{55}{91}$.

Câu 32: Trong không gian Oxy, cho điểm $M(1;-2;1)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=1-t\end{cases}$. Đường thẳng đi qua M và song song với d có phương trình là

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Câu 34: Một ô tô đang chuyển động với vận tốc 24 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v(t)=-4t+24\ (\text{m/s})$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

A. 64 m. **B.** 42 m. **C.** 72 m. **D.** 50 m.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua hai điểm $M(3;1;-1)$, $N(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x-y+3z-1=0$ có phương trình là

A. $x+2y+z-4=0$. **B.** $2x-11y-5z=0$.

C. $x-13y-5z-5=0$. **D.** $x-13y-5z+5=0$.

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=6x^3-21x^2+20x+1$ trên đoạn $[1;4]$ bằng

A. $\frac{61}{9}$. **B.** $\frac{34}{9}$. **C.** 6. **D.** 129.

Câu 38: Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 39: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là $-\frac{3}{2};2;\frac{11}{2}$ và đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x)\le m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(2)$. **B.** $f(2)\ge m\ge f(3)$. **C.** $m\ge f(0)$. **D.** $m\ge f(3)$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(e)=\frac{1}{5}$ và $f'(x)=\frac{1}{3}\ln x\,;\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $\int_e^{e^3}\frac{f(x)}{x^2}dx=a.e^{-3}+b.e^{-1}+c$ với a,b,c là các số hữu tỷ giá trị của $a-b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây:

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{4};1\right)$.

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi a tồn tại không quá 4 số nguyên b thỏa mãn: $5^{b^2}<25^{-b}.a^{b+2}$

A. 100. **B.** 99. **C.** 125. **D.** 124.

Câu 42: Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\ne0)$ có hai nghiệm z_1,z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1-\frac{1}{9}\right|=|z_1-z_2|$. Giả sử $|z_1|=\frac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thoả mãn $cw^2+bw+a=0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho ứng với mỗi k tồn tại đúng 9 số phức z_3 có phần ảo nguyên, z_3-w là số thuần ảo và $|z_3|\le|w|$?

A. 12. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 11.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $|z-1-5i|+|z-1+5i|=10$ và $|z-2-i|=m$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB=2a$, mặt bên là tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{28\pi}{9}a^2$. **B.** $\frac{28\pi}{3}a^2$. **C.** $\frac{25\pi}{3}a^2$. **D** $\frac{25\pi}{9}a^2$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $30°$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng.

A. $\frac{3\sqrt{6}}{4}a^3$ **B.** $\frac{\sqrt{6}}{4}a^3$ **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{36}$

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+3}{-5}$ và $d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{-1}$. Trong các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2, gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, phương trình của (S) là

A. $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6$. **B.** $x^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 6$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$. **D.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{x^3} + \ln\frac{x+3}{x-3}$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-\infty; 2100)$ thoả mãn $f(a-2024) + f(6a-27) \ge 0$?

A. 1807. **B.** 288. **C.** 2096. **D.** 360.

Câu 48: Xét hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}; a > 0)$ có hai cực trị x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn $x_1 + x_2 = 0$. Hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x)f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{4}$. Biết $\int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x+1}dx = -\frac{7}{2}$, giá trị của $\int_0^{x_2}(x+2)f''(x)dx$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-7;-6)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(6;7)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 49: Xét hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có $f(-1) = -5$. Hàm số $y = f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, $f'(4) = 0$ và $f'(-1) = a$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-100; 0)$ sao cho ứng với mỗi a, hàm số $y = \left|f(x) + \frac{5}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; +\infty)$?

A. 9. **B.** 10. **C.** 90. **D.** 89.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;6;-1)$, $B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua điểm A. Điểm $M(a;b;c)$ (với $c > 0$) thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và IA lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

---------- **HẾT** ----------

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT THAM KHẢO

1D	2D	3A	4B	5C	6D	7C	8B	9C	10A	11D	12D	13A	14C	15A
16B	17A	18A	19D	20A	21B	22D	23C	24A	25B	26A	27B	28D	29A	30B
31A	32B	33A	34C	35C	36D	37B	38D	39C	40C	41D	42B	43D	44B	45C
46C	47D	48C	49B	50B										

Câu 1: Cho số phức $z=1+2i$. Số phức $2z$ bằng

A. $3+2i$. **B.** $3+4i$. **C.** $-3+4i$. **D.** $2+4i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z=1+2i \Rightarrow 2z=2(1+2i)=2+4i$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

A. Điểm $M(-1;2;3)$. **B.** Điểm $Q(1;3;2)$. **C.** Điểm $P(-2;-5;1)$. **D.** Điểm $N(2;5;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm thuộc đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{3}$ là $(2;5;-1)$.

Câu 3: Nếu $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=-2$ thì $\int_3^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

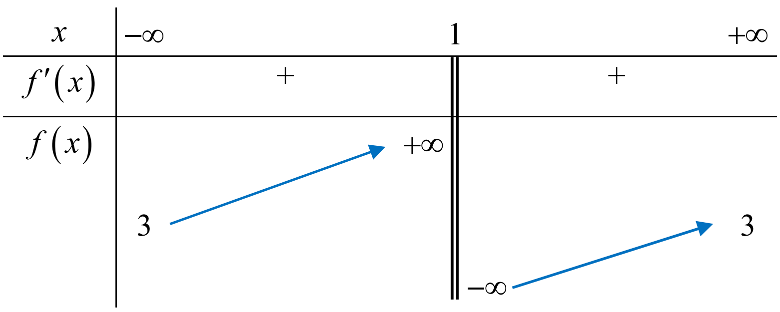
A. 2. **B.** -2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=-2 \Rightarrow \int_3^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2.$$

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

A. $y=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã có phương trình là $x=1$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

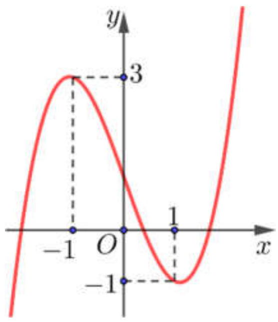
A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 2.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là

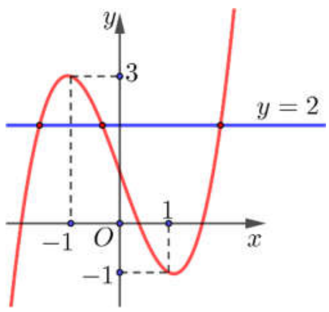
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f(x)=2$:

Ta kẻ đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.



Do đó phương trình $f\left(x\right)=2$ có ba nghiệm thực.

Câu 7: Cho khối chóp tứ giác có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=6$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 12. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

$V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.3.6=6.$

Câu 8: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

C. $\int\cos 2xdx=-2\cos 2x+C$. **D.** $\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Câu 9: Trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$, đạo hàm của hàm số $y=4^x$ là

A. $y'=x.4^{x-1}$. **B.** $y'=\frac{4^{x+1}}{x+1}$. **C.** $y'=4^x\ln 4$. **D.** $y'=\frac{4^x}{\ln x}$.

Lời giải

Chọn C

$y=4^x\Rightarrow y'=4^x\ln 4$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)>-1$ là

A. $\left(-1;1\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(-\infty;1\right)$. **D.** $\left(1;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)>-1\Leftrightarrow x+1<2\Leftrightarrow x<1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình: $S=\left(-1;1\right)$.

Câu 11: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z=3+5i$ có tọa độ là

A. $\left(5;-3\right)$. **B.** $\left(3;-5\right)$. **C.** $\left(5;3\right)$. **D.** $\left(3;5\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điểm biểu diễn số phức $z = 3 + 5i$ là $M(3;5)$.

Câu 12: Cho khối lăng trụ tam giác có thể tích $V = 36a^3$ và diện tích đáy $B = 4a^2$. Chiều cao của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3a$. **B.** $6a$. **C.** $27a$. **D.** $9a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $V = 36a^3 \Leftrightarrow B.h = 36a^3 \Leftrightarrow 4a^2.h = 36a^3 \Rightarrow h = 9a$.

Câu 13: Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 3$ và chiều cao $h = 5$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 30π. **B.** 9π. **C.** 15π. **D.** 20π.

Lời giải

Chọn A

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

$S_{xq} = 2\pi rh \Rightarrow S_{xq} = 2\pi.3.5 = 30\pi$.

Câu 14: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{3}{2}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Câu 15: Khẳng định nào dưới đây đúng?

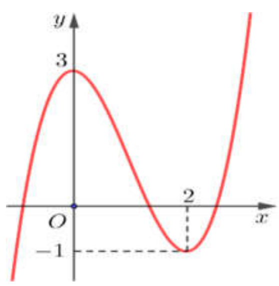
A. $\int 5^x \mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln 5} + C$. **B.** $\int 5^x \mathrm{d}x = 5^x \ln 5 + C$. **C.** $\int 5^x \mathrm{d}x = \frac{5^{x+1}}{\ln 5} + C$. **D.** $\int 5^x \mathrm{d}x = 5^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int 5^x \mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln 5} + C$.

Câu 16: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta có điểm trị cực tiểu của hàm số đã cho là $x=2$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=2-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;2\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;+\infty\right)$. **D.** $\left(0;5\right)$.

Lời giải

Chọn A

$f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow 2-x>0\Leftrightarrow x<2$.

Khi đó hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-\infty;2\right)$.

Câu 18: Với a,b là các số thực dương tuỳ ý, $\log_2\left(ab\right)$ bằng

A. $\log_2 a+\log_2 b$. **B.** $\log_2 a-\log_2 b$. **C.** $\log_2 a.\log_2 b$. **D.** $b\log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

Với $a>0,\ b>0$, ta có: $\log_2\left(ab\right)=\log_2 a+\log_2 b$.

Câu 19: Cho số phức $z=2024-2i$. Số phức liên hợp của z là

A. $2+2024i$. **B.** $-2024+2i$. **C.** $-2+2024i$. **D.** $2024+2i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có số phức liên hợp của $z=2024-2i$ là $\overline{z}=2024+2i$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;2;-4\right)$ và $B\left(3;-2;0\right)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là

A. $\left(2;-4;4\right)$. **B.** $\left(4;0;-4\right)$. **C.** $\left(2;0;-2\right)$. **D.** $\left(-2;4;-4\right)$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}=\left(2;-4;4\right)$.

Câu 21: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(-2\right)=-5$, $f\left(3\right)=7$. Giá trị của $\int_{-2}^{3}f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -35. **B.** 12. **C.** -12. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_{-2}^{3}f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(3\right)-f\left(-2\right)=12$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy)?

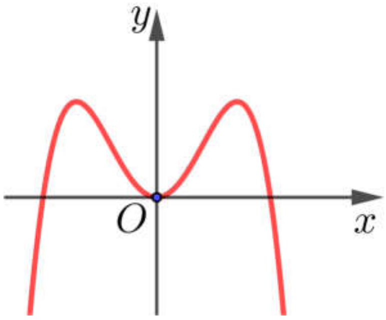
A. Điểm $Q(0;3;1)$. **B.** Điểm $N(-1;0;5)$. **C.** Điểm $P(2;0;5)$. **D.** Điểm $M(2;3;0)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) là điểm $M(2;3;0)$.

Câu 23: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong như hình bên dưới?



A. $y=x^2-2x$. **B.** $y=2x^3+x^2$. **C.** $y=-x^4+2x^2$. **D.** $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$.

Lời giải

Chọn C

Quan sát đồ thị ta thấy là hình dạng của đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương có hệ số $a<0$.

Nên chọn $y=-x^4+2x^2$

Câu 24: Nghiệm của phương trình $2^{2x+1}=\dfrac{1}{8}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{2x+1}=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow 2x+1=-3\Leftrightarrow x=-2$.

Câu 25: Từ một đội văn nghệ gồm 6 nam và 5 nữ, có bao nhiêu cách chọn một nam và một nữ để hát song ca với nhau?

A. 110. **B.** 30. **C.** 11. **D.** 55.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn một bạn nam để hát song ca là: 6 (cách).

Ứng với mỗi một cách chọn bạn nam ta có 5 cách chọn bạn nữ để hát song ca.

Áp dụng quy tắc nhân ta có số cách chọn một nam và một nữ để hát song ca với nhau là: $6.5=30$ (cách).

Câu 26: Cho khối nón có diện tích đáy $B=8$ và chiều cao $h=9$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 24. **B.** 192. **C.** 72. **D.** 216.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối nón $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}.8.9=24$.

Câu 27: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$ công sai $d=6$. Giá trị của u_2 bằng

A. -3. **B.** 9. **C.** 18. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$ công sai $d=6\Rightarrow u_2=u_1+d\Rightarrow u_2=9$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;-1)$. **B.** $(-2;4;-2)$. **C.** $(2;-4;2)$. **D.** $(1;-2;1)$.

Lời giải

Chọn D

Tâm của mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$ là $I(1;-2;1)$.

Câu 29: Cho số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=4$. Môđun của z bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z|^2=z.\overline{z}=4\Rightarrow |z|=2$.

Câu 30: Với a,b là hai số thực lớn hơn 1, $\log_{ab}a$ bằng

A. $1-\log_a b$. **B.** $\frac{1}{1+\log_a b}$. **C.** $1+\log_a b$. **D.** $\frac{1}{\log_a b}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{ab}a=\frac{1}{\log_a(ab)}=\frac{1}{\log_a a+\log_a b}=\frac{1}{1+\log_a b}$.

Câu 31: Trên hai tia Ox, Oy của góc nhọn xOy lần lượt cho 5 điểm và 8 điểm phân biệt khác 0. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 14 điểm (gồm điểm O và 13 điểm đã cho), xác suất để 3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác bằng

A. $\frac{5}{7}$. **B.** $\frac{149}{182}$. **C.** $\frac{75}{91}$. **D.** $\frac{55}{91}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $n(\Omega)=C_{14}^{3}=364$.

Gọi A là biến cố: "3 điểm chọn được là ba đỉnh của một tam giác".

Xét 13 điểm nằm trên hai tia Ox, Oy không tính điểm O.

TH1: tam giác có 2 đỉnh thuộc Ox và 1 đỉnh thuộc Oy có: $C_5^2.8=80$.

TH2: tam giác có 2 đỉnh thuộc Oy và 1 đỉnh thuộc Ox có: $5.C_8^2=140$.

Xét tam giác có 1 đỉnh là O, 1 đỉnh thuộc Oy, 1 đỉnh thuộc Ox có: $1.5.8=40$.

Vậy $n(A)=260$

Vậy $P(A)=\dfrac{260}{364}=\dfrac{5}{7}$.

Câu 32: Trong không gian Oxy, cho điểm $M(1;-2;1)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=1-t\end{cases}$. Đường thẳng đi qua M và song song với d có phương trình là

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.
B. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.
D. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải

Chọn B

Vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng d nên có vecto chỉ phương $\vec{u}=(2;2;-1)$.

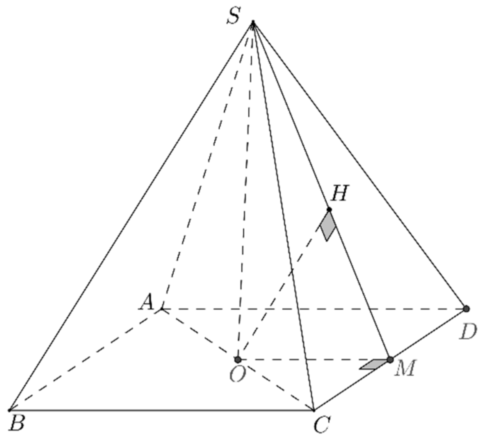
và đi qua $M(1;-2;1)$ có phương trình: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.
B. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$.
C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.
D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và M là trung điểm của CD. Ta có

$$\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SO \perp CD \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM).$$

Gọi H là hình chiếu của O lên SM thì $\begin{cases} OH \perp SM \\ OH \perp CD \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$ tại H.

Do đó $d\left(A,(SCD)\right) = 2d\left(O,(SCD)\right) = 2OH$.

Ta lại có $\begin{cases} OM = \dfrac{1}{2}AB = a \\ SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2} \end{cases}$

Xét tam giác SOM vuông tại O ta có $OH = \dfrac{SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Vậy $d\left(A,(SCD)\right) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Câu 34: Một ô tô đang chuyển động với vận tốc 24 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động thẳng, chậm dần đều với vận tốc biến thiên theo thời gian được xác định bởi quy luật $v(t) = -4t + 24\ (\text{m/s})$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi được từ lúc người lái xe bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng hẳn bằng

A. 64 m. **B.** 42 m. **C.** 72 m. **D.** 50 m.

Lời giải

Chọn C

Khi xe dừng hẳn ta có: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -4t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 6\ (s)$.

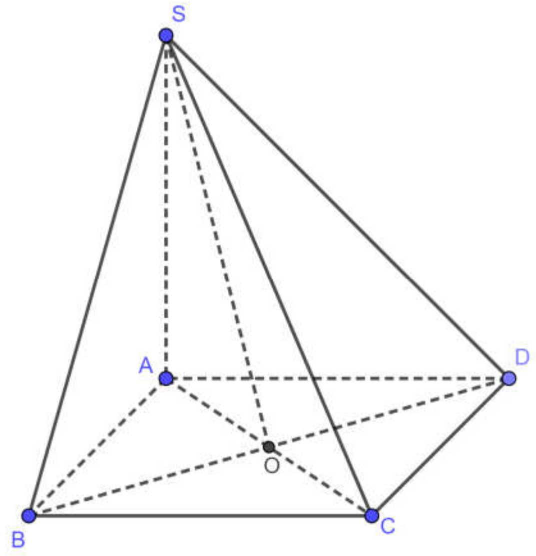
Ta có quãng đường ô tô đi được là: $s(t) = \int\limits_0^6 (-4t + 24)\,\mathrm{d}t = 72\ (m)$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $OA = \dfrac{BD}{2} = a$.

$\left.\begin{array}{l} BD \perp OA \\ BD \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow \left((SBD),(ABCD)\right) = \widehat{SOA}$.

$\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = 1 \Rightarrow \widehat{SOA} = 45°$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua hai điểm $M(3;1;-1)$, $N(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 1 = 0$ có phương trình là

A. $x + 2y + z - 4 = 0$. **B.** $2x - 11y - 5z = 0$.

C. $x - 13y - 5z - 5 = 0$. **D.** $x - 13y - 5z + 5 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng cần tìm có cặp VTCP $\begin{cases} \vec{u} = (2;-1;3) \\ \overrightarrow{MN} = (-1;-2;5) \end{cases} \Rightarrow VTPT\ \vec{n} = (1;-13;-5)$.

PTMP: $1(x-3) - 13(y-1) - 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 13y - 5z + 5 = 0$.

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 6x^3 - 21x^2 + 20x + 1$ trên đoạn $[1;4]$ bằng

A. $\dfrac{61}{9}$. **B.** $\dfrac{34}{9}$. **C.** 6. **D.** 129.

Lời giải

Chọn B

$f(x) = 6x^3 - 21x^2 + 20x + 1$.

$f'(x) = 18x^2 - 42x + 20$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 18x^2 - 42x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3} \vee x = \dfrac{2}{3}$ (loại).

$f(1) = 6$; $f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{34}{9}$; $f(4) = 129$.

Vậy $\min\limits_{[1;4]} f(x) = \dfrac{34}{9}$.

Câu 38: Hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$.

Hàm số đồng biến khi $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 39: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là $-\dfrac{3}{2}; 2; \dfrac{11}{2}$ và đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x) \le m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ khi và chỉ khi

A. $m \ge f(2)$. **B.** $f(2) \ge m \ge f(3)$. **C.** $m \ge f(0)$. **D.** $m \ge f(3)$.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra ta có $f'(x) = a\left(x + \dfrac{3}{2}\right)(x-2)\left(x - \dfrac{11}{2}\right)$.

Hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc bốn và đạt giá trị nhỏ nhất nên $a > 0$.

Ta có $f(3) - f(0) = \int\limits_0^3 f'(x).dx = a\int\limits_0^3 \left(x + \dfrac{3}{2}\right)(x-2)\left(x - \dfrac{11}{2}\right).dx = a.\dfrac{117}{8} > 0$ (vì $a > 0$).

Suy ra $f(3) > f(0)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ là

x	0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$

Bất phương trình $f(x) \le m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ khi và chỉ khi

$$m \ge \min_{[0;3]} f(x) \Leftrightarrow m \ge f(0).$$

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(e)=\frac{1}{5}$ và $f'(x)=\frac{1}{3}\ln x\,;\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $\int_e^{e^3}\frac{f(x)}{x^2}dx=a.e^{-3}+b.e^{-1}+c$ với a,b,c là các số hữu tỷ giá trị của $a-b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây:

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{4};1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$f'(x)=\frac{1}{3}\ln x \Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{3}\ln xdx=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{3}\int xd(\ln x)=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{3}\int x.\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{3}x+c$

Do $f(e)=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{3}.e\ln e-\frac{1}{3}e+c=\frac{1}{5}\Rightarrow c=\frac{1}{5}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}$

Suy ra: $f(e^3)=\frac{1}{3}e^3\ln e^3-\frac{1}{3}e^3+\frac{1}{5}=\frac{2}{3}e^3+\frac{1}{5}$

Ta có:

$\int_e^{e^3}\frac{f(x)}{x^2}dx=\int_e^{e^3}f(x)d\left(\frac{-1}{x}\right)=\frac{-1}{x}f(x)\Big|_{e^3}^{e^3}-\int_e^{e^3}\frac{-1}{x}df(x)=\frac{-1}{x}f(x)\Big|_e^{e^3}+\int_e^{e^3}\frac{1}{x}.f'(x)dx=\frac{-1}{x}f(x)\Big|_e^{e^3}+\int_e^{e^3}\frac{1}{x}.\frac{1}{3}\ln xdx$

$=\frac{-1}{x}f(x)\Big|_e^{e^3}+\frac{1}{3}\int_e^{e^3}\ln xd(\ln x)=\frac{-1}{x}f(x)\Big|_e^{e^3}+\frac{1}{6}\ln^2x\Big|_e^{e^3}=\left(\frac{-1}{x}f(x)+\frac{1}{6}\ln^2x\right)\Big|_e^{e^3}$

$=\left(\frac{-1}{e^3}f(e^3)+\frac{1}{6}\ln^2e^3\right)-\left(\frac{-1}{e}f(e)+\frac{1}{6}\ln^2e\right)$

$=\left[\frac{-1}{e^3}.\left(\frac{2}{3}e^3+\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{2}\right]-\left(\frac{-1}{5e}+\frac{1}{6}\right)=--\frac{1}{5e^3}+\frac{1}{5e}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{5}e^{-3}+\frac{1}{5}e^{-1}+\frac{2}{3}$

Vậy $\begin{cases}a=\frac{-1}{5}\\ b=\frac{1}{5}\\ c=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow a-b+c=\frac{4}{15}\approx 0,266$.

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên a lớn hơn 1 sao cho ứng với mỗi a tồn tại không quá 4 số nguyên b thỏa mãn: $5^{b^2}<25^{-b}.a^{b+2}$

A. 100. **B.** 99. **C.** 125. **D.** 124.

Lời giải

Chọn D

Ta có $5^{b^2}<25^{-b}.a^{b+2}\Leftrightarrow 5^{b^2}.25^b<a^{b+2}\Leftrightarrow 5^{b^2+2b}<a^{b+2}$

$\Leftrightarrow b(b+2)<(b+2)\log_5 a\Leftrightarrow(b+2)(b-\log_5 a)<0\Leftrightarrow -2<b<\log_5 a$ (do $\log_5 a>0$)

Để thỏa mãn thì $\log_5 a \le 3 \Leftrightarrow a \le 125$.

Do a nguyên và lớn hơn 1 nên có 124 giá trị thỏa mãn.

Câu 42: Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0\ (a,b,c\in\mathbb{R}, a\ne 0)$ có hai nghiệm z_1,z_2 có phần ảo khác 0 và $\left|2z_1-\frac{1}{9}\right|=|z_1-z_2|$. Giả sử $|z_1|=\frac{1}{\sqrt{k}}$ và w là số phức thoả mãn $cw^2+bw+a=0$, có bao nhiêu số nguyên dương k sao cho ứng với mỗi k tồn tại đúng 9 số phức z_3 có phần ảo nguyên, z_3-w là số thuần ảo và $|z_3|\le|w|$?

A. 12. **<u>B</u>.** 22. **C.** 23. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z_1=x+iy,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow z_2=x-iy$.

Ta có $\left|2z_1-\frac{1}{9}\right|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow\left(2x-\frac{1}{9}\right)^2+4y^2=4y^2\Leftrightarrow x=\frac{1}{18}$.

$\Rightarrow z_1=\frac{1}{18}+yi;z_2=\frac{1}{18}-yi$.

Ta thấy w là số phức thoả mãn $cw^2+bw+a=0$ nên $w=\frac{1}{z}$.

$\Rightarrow\frac{1}{w}=z$ có phần thực là $\frac{1}{18}$.

$\Rightarrow w=\frac{1}{z}=k.\bar{z}\Rightarrow w$ có phần thực là $\frac{k}{18}$.

Do z_3-w là số thuần ảo nên z_3 có phần thực là $\frac{k}{18}$.

Khi đó $z_3=\frac{k}{18}+mi,(m\in\mathbb{Z})$. Do ứng với mỗi k tồn tại đúng 9 số phức z_3 nên $m\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;0\}$.(1)

Ta lại có $|z_3|\le|w|=\frac{1}{|z|}=\sqrt{k}\Rightarrow|z_3|^2\le k\Leftrightarrow\frac{k^2}{324}+m^2\le k\Leftrightarrow m^2\le k-\frac{k^2}{324}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$16\le k-\frac{k^2}{324}<25\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{k^2}{324}+k-25<0\\-\frac{k^2}{324}+k-16\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}k<162-36\sqrt{14}\\k>162+36\sqrt{14}\end{array}\right.\\162-18\sqrt{65}\le k\le162+18\sqrt{65}\end{cases}.$$

$\xrightarrow{k\in\mathbb{N}^*}k\in\{17;18;19;...;25;26;27;297;298;299;...;306;307\}$.

Vậy có 22 số nguyên dương k.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m tồn tại đúng hai số phức z thỏa mãn $|z-1-5i|+|z-1+5i|=10$ và $|z-2-i|=m$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$; $A(1;5)$, $B(1;-5)$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức $1+5i, 1-5i$.

Theo giả thiết $|z-1-5i|+|z-1+5i|=10$ suy ra $MA+MB=10$, mà $AB=10$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đoạn AB.

Phương trình đường thẳng AB là $x-1=0$

Điều kiện cần để tồn tại hai số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m>0$.

Với $m>0$ ta có điểm M biểu diễn cho số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(2;1)$ và bán kính $r=m$.

Yêu cầu bài toán tương đương với điều kiện (C) cắt đoạn AB tại hai điểm phân biệt.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} d(I,AB)<r \\ IA\ge r \\ IB\ge r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m\le\sqrt{17} \\ m\le\sqrt{37} \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\le\sqrt{17}$.

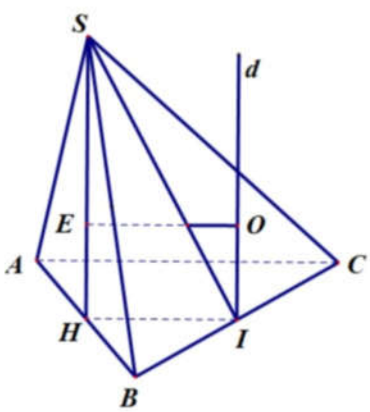
Vậy có 3 giá trị nguyên của $m\in\{2;3;4\}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB=2a$, mặt bên là tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{28\pi}{9}a^2$. **B.** $\dfrac{28\pi}{3}a^2$. **C.** $\dfrac{25\pi}{3}a^2$. **D** $\dfrac{25\pi}{9}a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của BC.

Do ΔABC vuông cân tại A nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Suy ra $IB = \dfrac{BC}{2} = a\sqrt{2}.$

Dựng đường thẳng $d \perp (ABC)$ tại I.

Gọi H là trung điểm của AB.

Do ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) nên $SH \perp AB$; $SH \perp (ABC)$

Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.

Ta có $EH = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{1}{3}.2a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{cases} IH \perp AB \\ IH \perp SH \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SAB)$$

Dựng đường thẳng $d' \perp (SAB) \equiv E \Rightarrow d'//IH$, d'cắt d tại O.

Khi đó O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bán kính $R = OB$.

Ta có $OEHI$ là hình chữ nhật nên $OI = EH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\Rightarrow R^2 = OB^2 = OI^2 + IB^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

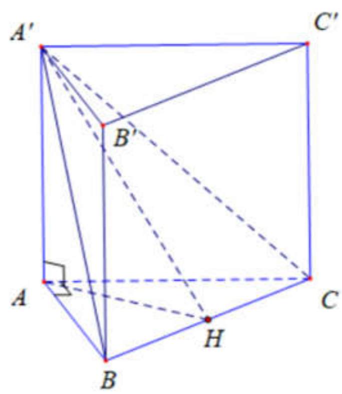
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \dfrac{28a^2}{3}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $30°$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng.

A. $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}a^3$ **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a^3$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{36}$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm BC

ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow AH \perp BC$

Khi đó: $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow ((A'BC),(ABC)) = (A'H, AH) = \widehat{A'HA}$

Xét $\Delta A'HA$ vuông tại A có $AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$:

$\tan \widehat{A'HA} = \dfrac{AA'}{AH} \Rightarrow AA' = AH \tan 30° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Vậy $V = S_{ABC}.AA' = \dfrac{1}{2}a^2.\dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$

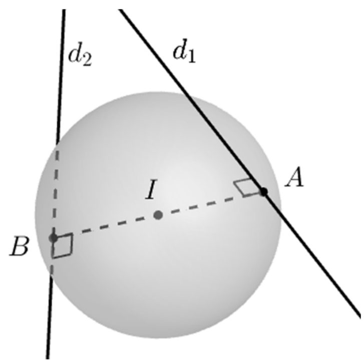
Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+3}{-5}$ và $d_2: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$. Trong các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2, gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, phương trình của (S) là

A. $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6$. **B.** $x^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 6$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$. **D.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$.

Lời giải

Chọn C



Ta có:

$d_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+3}{-5} \Leftrightarrow d_1: \begin{cases} x = t+2 \\ y = 3t+4 \\ z = -5t-3 \end{cases}$ có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (1;3;-5)$

$d_2: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t-2 \\ y = -t-2 \\ z = -t-1 \end{cases}$ có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (1;-1;-1)$

Đường tròn vừa tiếp xúc với hai đường thẳng d_1, d_2 và có bán kính nhỏ nhất có tâm là trung điểm của đoạn thẳng vuông góc chung và đường kính bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

Gọi AB là đoạn thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2 với $A(t_1+2;3t_1+4;-5t_1-3)\in d_1$ và $B(t_2-2;-t_2-2;-t_2-1)\in d_2$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(t_2-t_1-4;-t_2-3t_1-6;-t_2+5t_1+2)$

Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1}\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t_2-t_1-4+3(-t_2-3t_1-6)-5(-t_2+5t_1+2)=0\\ t_2-t_1-4-(-t_2-3t_1-6)-(-t_2+5t_1+2)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-35t_1+3t_2=32\\ -3t_1+3t_2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=-1\\ t_2=-1\end{cases}$

Nên $A(1;1;2)$, $B(-3;-1;0)$, $\overrightarrow{AB}=(-4;-2;-2)$

Gọi I và R là tâm và bán kính của đường tròn cần tìm

Khi đó I là trung điểm đoạn thẳng AB và $R=\dfrac{AB}{2}$

Suy ra $I(-1;0;1), R=\sqrt{6}$

Phương trình đường tròn cần tìm là: $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^3}+\ln\dfrac{x+3}{x-3}$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-\infty;2100)$ thoả mãn $f(a-2024)+f(6a-27)\geq 0$?

A. 1807. **B.** 288. **C.** 2096. **D.** 360.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Ta thấy $\forall x\in D$ thì $\begin{cases}-x\in D\\ f(-x)=\dfrac{2}{(-x)^3}+\ln\dfrac{-x+3}{-x-3}=-\dfrac{2}{x^3}+\ln\dfrac{x-3}{x+3}=-\dfrac{2}{x^3}-\ln\dfrac{x+3}{x-3}=-f(x)\end{cases}$.

Suy ra hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Lại có $f'(x) = -\dfrac{6}{x^4} - \dfrac{6}{(x-3)^2}.\dfrac{1}{\dfrac{x+3}{x-3}} < 0, \forall x \in D$.

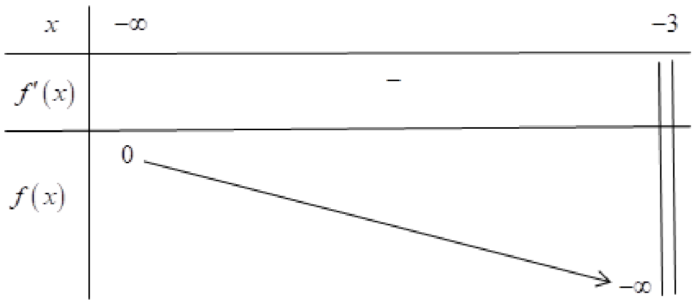
Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-3)$ và $(3;+\infty)$.

Để tồn tại $f(a-2024), f(6a-27)$ thì

$$\begin{cases} a-2024 \notin [-3;3] \\ 6a-27 \notin [-3;3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a-2024 < -3 \\ a-2024 > 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 6a-27 < -3 \\ 6a-27 > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 2021 \\ a > 2027 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a < 4 \\ a > 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 4 \\ 5 < a < 2021 \\ a > 2027 \end{array}\right..$$

+) TH1: $a < 4$ thì $a-2024 < -3$ và $6a-27 < -3$.

Bảng biến thiên hàm số đã cho trên $(-\infty;-3)$ như sau



Khi đó $f(a-2024) < 0, f(6a-27) < 0 \Rightarrow f(a-2024) + f(6a-27) < 0$.

Suy ra $a < 4$ không thoả mãn bài toán.

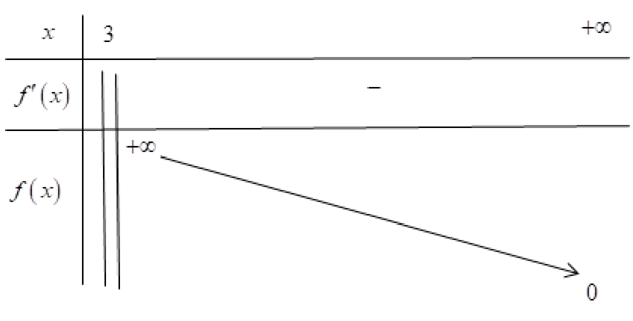
+) TH2: $5 < a < 2021$ thì $a-2024 < -3$ và $-6a+27 < -3$.

Khi đó $f(a-2024) + f(6a-27) \geq 0 \Leftrightarrow f(a-2024) \geq f(-6a+27) \Leftrightarrow a \leq 293$.

Suy ra $5 < a \leq 293$.

+) TH3: $a > 2027$ thì $a-2024 > 3$ và $6a-27 > 3$.

Bảng biến thiên hàm số đã cho trên $(3;+\infty)$ như sau



Khi đó $f(a-2024) > 0, f(6a-27) > 0 \Rightarrow f(a-2024) + f(6a-27) > 0$.

Suy ra $a > 2027$ thoả mãn bài toán.

Vậy $\left[\begin{array}{l} 5 < a \le 293 \\ 2027 < a < 2100 \end{array}\right.$ hay có 360 giá trị nguyên của $a \in (-\infty; 2100)$ thoả mãn $f(a-2024) + f(6a-27) \ge 0$.

Câu 48: Xét hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a,b,c,d \in \mathbb{R}; a > 0)$ có hai cực trị x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn $x_1 + x_2 = 0$. Hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x) f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{4}$. Biết $\int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{3^x + 1} dx = -\frac{7}{2}$, giá trị của $\int_0^{x_2} (x+2) f''(x) dx$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-7;-6)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(6;7)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do $f(x)$ có hai cực trị x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) nên $f'(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2.

Vì $x_1 + x_2 = 0$ nên $\frac{-2b}{3a} = 0 \Rightarrow b = 0$ suy ra $f'(x) = 3ax^2 + c \Rightarrow f''(x) = 6ax$

Ta có $f'(x) f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	|	-	0	+	
$f''(x)$		-	|	-	0	+	|	+	
$y = f'(x).f''(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x) f''(x)$ và trục hoành có diện tích bằng $\frac{9}{4}$

$$\frac{9}{4} = \int_{x_1}^{x_2} |f'(x) f''(x)| dx = \int_{x_1}^{0} f'(x) f''(x) dx - \int_0^{x_2} f'(x) f''(x) dx$$

$$= \frac{1}{2}[f'(x)]^2\Big|_{x_1}^{0} - \frac{1}{2}[f'(x)]^2\Big|_0^{x_2} = c^2 \Rightarrow c = -\frac{3}{2} \text{ (do } c < 0\text{)}$$

suy ra $f'(x)=3ax^2-\frac{3}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-\sqrt{\frac{1}{2a}}\\x_2=\sqrt{\frac{1}{2a}}\end{array}\right.$

Ta có $\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{3^x+1}dx=\int\limits_{x_1}^{0}\frac{f'(x)}{3^x+1}dx+\int\limits_{0}^{x_2}\frac{f'(x)}{3^x+1}dx$

Xét $A=\int\limits_{x_1}^{0}\frac{f'(x)}{3^x+1}dx$. Đặt $t=-x$

Ta có $A=-\int\limits_{-x_1}^{0}\frac{f'(-t)}{3^{-t}+1}dt=\int\limits_{0}^{-x_1}\frac{3^t f'(t)}{3^t+1}dt=\int\limits_{0}^{x_2}\frac{3^x f'(x)}{3^x+1}dx$

Do đó $\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{3^x+1}dx=\int\limits_{0}^{x_2}\frac{3^x f'(x)}{3^x+1}dx+\int\limits_{0}^{x_2}\frac{f'(x)}{3^x+1}dx=\int\limits_{0}^{x_2}f'(x)dx=\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{1}{2a}}}\left(3ax^2-\frac{3}{2}\right)dx$

$=\left.\left(ax^3-\frac{3}{2}x\right)\right|_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}}=-\sqrt{\frac{1}{2a}}=-\frac{7}{2}\Rightarrow a=\frac{2}{49}\Rightarrow f''(x)=\frac{12}{49}x$ và $x_2=\frac{7}{2}$.

$\int\limits_{0}^{x_2}(x+2)f''(x)dx=\int\limits_{0}^{\frac{7}{2}}\frac{12}{49}x(x+2)dx=\frac{13}{2}$.

Câu 49: Xét hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(-1)=-5$. Hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, $f'(4)=0$ và $f'(-1)=a$. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-100;0)$ sao cho ứng với mỗi a, hàm số $y=\left|f(x)+\frac{5}{x^2}\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;+\infty)$?

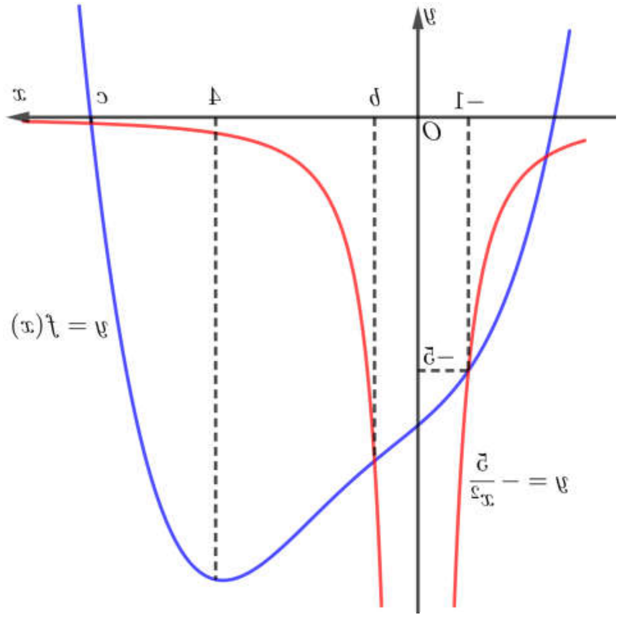
A. 9. **B.** 10. **C.** 90. **D.** 89.

Lời giải

Chọn B

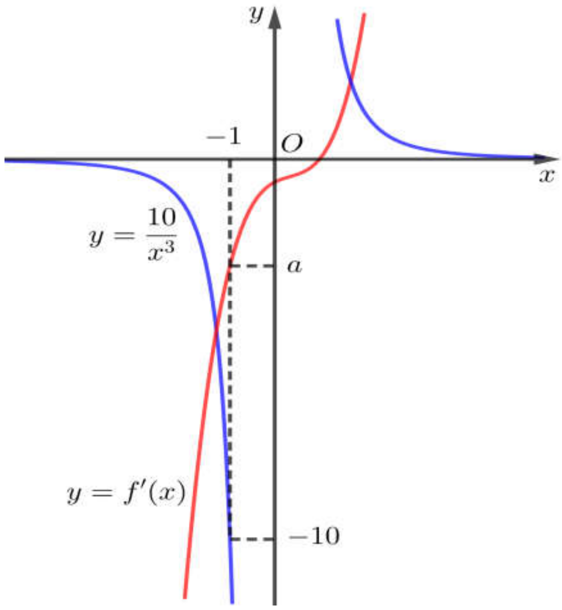
Xét hàm số $g(x)=f(x)+\frac{5}{x^2}\Rightarrow g'(x)=f'(x)-\frac{10}{x^3}$.

Từ giả thiết suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Ta có: $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{5}{x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=b \\ x=c \end{array}\right.$.

Từ giả thiết suy ra đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{10}{x^3}$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x)=\dfrac{10}{x^3}$ có nghiệm duy nhất trên khoảng $(-1;+\infty)$

$\Leftrightarrow a \geq -10$.

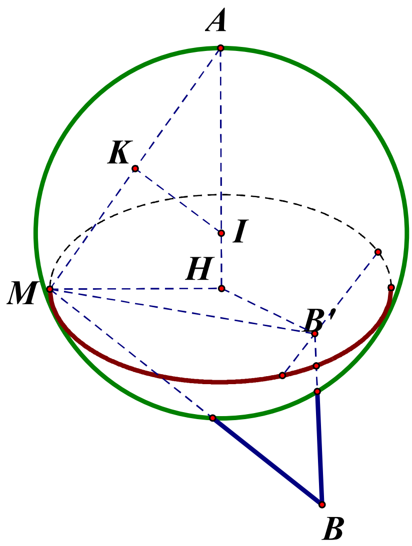
Do a nguyên thuộc khoảng $(-100;0)$ nên $a \in \{-10;-9;...;-1\}$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;6;-1)$, $B(2;-4;-1)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ đi qua điểm A. Điểm $M(a;b;c)$ (với $c>0$) thuộc (S) sao cho IAM là tam giác tù, có diện tích bằng $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và IA lớn nhất. Giá trị của $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$ bán kính $R = IA = 4$

Đặt $KA = x, IK = y$.

Tam giác IAM có diện tích bằng: $IK.IA = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow xy = 2\sqrt{7} \Rightarrow y = \dfrac{2\sqrt{7}}{x}$.

Vì tam giác IAK vuông tại K có $IA = 4$ nên:

$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow x^2 + \frac{28}{x^2} = 16 \Leftrightarrow x^4 - 16x^2 + 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 2 \\ x^2 = 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{14} \end{array}\right..$$

Vì IAM là tam giác tù nên $x = \sqrt{2}$ không thỏa mãn. Do đó, $x = \sqrt{14} \Rightarrow y = \dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{14}} = \sqrt{2}$.

Suy ra, AM là đường sinh của hình nón đỉnh A, M thuộc đường tròn đáy tâm H

$$\tan\widehat{MAH} = \frac{IK}{AK} = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \cos\widehat{MAH} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{AH}{2x} \Rightarrow AH = 7.$$

Suy ra, bán kính đường tròn đáy của hình nón là:

$$r = \sqrt{\left(2\sqrt{14}\right)^2 - 7^2} = \sqrt{7} \Rightarrow IH = 7 - 4 = 3 \Rightarrow \overrightarrow{HI} = \frac{3}{7}\overrightarrow{HA} \Rightarrow H(1;-1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (0;-7;0).$$

Suy ra, M thuộc mặt phẳng đi qua H, có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AH} = (0;-7;0)$, có phương trình:

$(P): y + 1 = 0$.

Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng $(P): y + 1 = 0 \Rightarrow B'(2;-1;-1)$

$\Rightarrow IB' = \sqrt{10} < R$

$d(AI, BM) = d(AI, B'M) = d(H, B'M) \le HB'$.

Suy ra, $d(AI, BM)$ lớn nhất bằng HB' đạt được khi $HB' \perp MB' \Rightarrow M(a;-1;c)$

$\overrightarrow{HB'} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{MB'} = (2-a;0;-1-c)$

$\overrightarrow{HB'}.\overrightarrow{MB'} = 0 \Leftrightarrow 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow M(2;-1;c)$

Vì $HM=r=\sqrt{7}\Rightarrow 1+\left(c+1\right)^2=7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c+1=\sqrt{6}\\c+1=-\sqrt{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=-1+\sqrt{6}\left(TM\right)\\c=-1-\sqrt{6}\left(L\right)\end{array}\right.$

Vậy $a+b+c=2-1-1+\sqrt{6}\approx 2,45$.

---------- **HẾT** ----------