CGMOC

Remark: 这是 CGM 模型加上最优控制（目标函数）的理论分析。

在论文《A Primal-Dual Active-Set Method for Non-negeativity Constrained Total Variation Deblurring Problems》中考虑的目标函数为:

$$\max_p \min_u \{\frac{1}{2}||Ku-f||^2+\frac{\alpha}{2}||u||^2+\beta|u|_{TV}+I(u\geq 0)+I(|p_{ij}|\leq 1)\} \tag{1}$$

同时其对应的 CGM 模型的原始问题为:

$$\min_u \{\frac{1}{2}||Ku-f||^2+\beta|u|_{TV}\} \tag{2}$$

对偶问题为:

$$\begin{array}{ll} \min_p & \frac{1}{2} < (K^TK)^{-1}(-divp+K^Tf), -divp+K^Tf > \\ s.t. & |p| \leftarrow \beta \end{array} \tag{3}$$

故先做 CGM 模型加目标函数:

$$\begin{array}{ll} \min_\beta & \{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^K\int_\Omega(u_k(t)-\hat{u_k})^2d\Omega+\frac{1}{2}a_1\beta^2\} \\ s.t.\ \ \min_{u_k} & \{\frac{1}{2}||Ku_k-f||^2+\beta|u_k|_{TV}\} \end{array} \tag{4}$$

记 $J(u,\beta)=\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^K\int_\Omega(u_k(t)-\hat{u_k})^2d\Omega+\frac{1}{2}a_1\beta^2\}$，$E_1(u,\beta)=\{\frac{1}{2}||Ku_k-$

$f||^2 + \beta|u_k|_{TV}\}$，借助于 G-导数对 $\min_\beta J(u,\beta)$ 进行求解:

$$\frac{\partial J(u,\beta)}{\partial \beta} = a_1\beta + \sum_{k=1}^{K}\int_\Omega (u_k(t) - \hat{u_k})\frac{\partial u_k(t)}{\partial \beta} d\Omega = 0 \tag{5}$$

对于 $E_1(u,\beta)$ 有:

$$\nabla_u E_1(u,\beta) = K^T K u - K^T f - \beta divp = 0 \tag{6}$$

两边同时对上式求 β 导数:

$$K^T K \frac{\partial u}{\partial \beta} - divp = 0 \tag{7}$$

所以

$$\frac{\partial u_k(t)}{\partial \beta} = (K^T K)^{-1} divp \tag{8}$$

初始化 β，在最小化 $E_1(u,\beta)$ 的第 t 步时，希望下一步就得到 $\hat{u_k}$，令 $u_k(t+1) = \hat{u_k}$，又由（6）可得:

$$K^T K \hat{u_k} - K^T f_k - \beta_k(t+1) divp = 0 \tag{9}$$

然后对 $\beta_k(t+1)$ 取平均。

由此得到 CGMOC 算法:

- 给定一些模糊图片和 Groundtruth$(f_k, \hat{u_k})$
- 利用（9）初始化 $\beta_0(t)$
- 训练系数（模型）: 若系数不收敛,
  - CGM 模型计算 $u_k(t)$
  - $\frac{\partial J(u_k(t),\beta)}{\partial \beta} \rightarrow \beta_k(t)$

- 系数收敛，得到 CGM 系数。