理论分析及工作计划

1 总体框架

LVOC 的总体框架如下图所示。虚线内为训练变分形式部分，给定几组

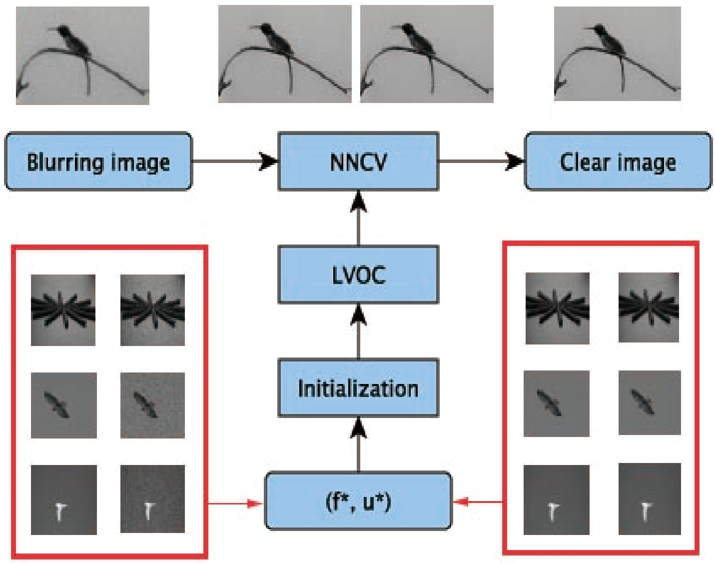

图 1: 框架

训练图像 $\hat{u}, \hat{f}$，其中 $\hat{u}$ 表示模糊图像，$\hat{f}$ 表示 Groudtruth，经过初始化参数后，进入 $M_1 M_2$ 进行训练系数，训练后的系数输入到 cgm 模型中，给定真实的模糊图像后，经过 cgm 模型处理后得到清晰图像，原 L-PDE 给出大致思路也是这样（经过训练后的系数用于解决一类问题如去模糊）。

对于某一类问题，训练得到的系数不一定都使用。例如对于同一图像的去模糊问题，系数可能和模糊程度有关，所以希望引入评价指标，对图像的模糊程度进行评价，进而选择同等级的系数。

2 模型 (M1)

考虑三个校正项 $|u|_{TV}$,u^2,$|\nabla u|^2$:

$$\min_u\{\frac{1}{2}||Ku-f||^2+\frac{1}{2}\beta_1 u^2+\beta_2|u|_{TV}+\frac{1}{2}\beta_3|\nabla u|^2\} \tag{1}$$

引入对偶变量 $p=\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 后等价与解决下列方程:

$$\begin{array}{rcl} -\beta_2 divp-K^Tf+(K^TK+\beta_1 I+\beta_3\Delta)u & = & 0 \\ |\nabla u|p-\nabla u & = & 0 \end{array} \tag{2}$$

应用牛顿法解上述方程:

$$\begin{bmatrix} -\beta_2 div & K^TK+\beta_1 I+\beta_3\Delta \\ |\nabla u| & -(I-\frac{p(\nabla u)^T}{|\nabla u|})\nabla \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(p,u) \\ F_2(p,u) \end{bmatrix} \tag{3}$$

与原有 CGM 模型不同的是我们假设对（3）迭代求解时的系数 β_k 是随迭代步数变化而变化的，这也与 L-PDE 设定系数 $a(t)$ 随时间变化而变化是一致的，而系数同样是通过模块 M_1M_2 训练而来。

3 模型 M1M2

对模型 (M1) 加目标函数:

$$\begin{array}{cc} \min & \{\frac{1}{2}\int_\Omega (u-\hat{f})^2 d\Omega + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^3 a_k\beta_k^2\} \\ s.t. \quad \min_u & \{\frac{1}{2}||Ku-f||^2 + \frac{1}{2}\beta_1 u^2 + \beta_2 |u|_{TV} + \frac{1}{2}\beta_3|\nabla u|^2\} \end{array} \tag{4}$$

记 $J = \{\frac{1}{2}\int_\Omega (u-\hat{f})^2 d\Omega + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^3 a_k\beta_k^2\}$, $E = \{\frac{1}{2}||Ku-f||^2 + \frac{1}{2}\beta_1 u^2 + \beta_2|u|_{TV} + \frac{1}{2}\beta_3|\nabla u|^2\}$, E 对应的欧拉 -拉格朗日方程是 $(K^TK+\beta_1 I-\beta_3\Delta)u-\beta_2 divp - K^Tf = 0$, 故 (4) 等价于

$$\begin{array}{cc} \min & \{\frac{1}{2}\int_\Omega (u-\hat{f})^2 d\Omega + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^3 a_k\beta_k^2\} \\ s.t. & (K^TK+\beta_1 I-\beta_3\Delta)u-\beta_2 divp - K^Tf = 0 \end{array} \tag{5}$$

考虑上述方程的拉格朗日方程:

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= J + <\phi, (K^TK+\beta_1 I-\beta_3\Delta)u-\beta_2 divp - K^Tf> \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega (u-\hat{f})^2 d\Omega + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^3 a_k\beta_k^2 + \int_\Omega \phi[(K^TK+\beta_1 I-\beta_3\Delta)u-\beta_2 divp - K^Tf]d\Omega \end{aligned} \tag{6}$$

所以,

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial u} = (u-\hat{f}) + \phi(K^TK+\beta_1 I) - \beta_3\Delta\phi = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \beta_1} = a_1\beta_1 + \int_\Omega \phi u d\Omega = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \beta_2} = a_2\beta_2 - \int_\Omega \phi div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \beta_3} = a_3\beta_3 - \int_\Omega \phi\Delta u = 0 \tag{10}$$

下一步:

- 加备注, 整理代码.
- Pre-analysis: 实验 $|u|_{TV}|\nabla u|^2u^2$ 的对图像的影响, 包括不同等级的噪声, 不同等级的模糊和噪声模糊都有的情况.
- 对于每一组训练图像, 寻找其最优参数值, 加大训练图像, 得到多个参数值, 做拟合或最小二乘估计.
- 引入评价图像质量的指标, 分析训练参数对指标的敏感程度, 若比较敏感, 用评价指标相同的图构成不同训练集, 得到与之对应的参数, 从而建立评价指标与参数之间的映射关系, 当对新图像运用 M1 模型处理时, 先对该图像进行评价, 根据评价指标得到事先训练好的参数, 然后将该参数代入 M1 模型处理.
- 此处学习和有监督学习之间的不同: 可能此处学习每一步计算目标函数, 反馈在下一步, 而有监督学习整体运算结束后计算目标函数, 反馈到每一步.
- 目标函数右端 $\frac{1}{2}a\beta^2$ 是否换成 $\frac{1}{2}\int_0^t a\beta^2 dt$, 值得思考.