微分積分学 II

奈良　忠央

(I) 偏微分

（a） ２変数関数

（b） 偏導関数

（c） 連鎖律

（d） 陰関数

（e） 高次偏導関数

（f） マクローリン展開（テイラー展開）

（g） 接平面

（h） 極値

(II) 二重積分

（a） 長方形領域上の二重積分

（b） 不等式の表す領域

（c） 縦（横）線形領域上の二重積分

（d） 変数変換

（e） 極座標変換

（f） 体積・表面積

$\boxed{\text{教科書}}$：「計算力をつける微分積分」

神永 正博 ・ 藤田 育嗣 著

$\boxed{\text{問題集}}$：「計算力をつける微分積分 問題集」

神永 正博 ・ 藤田 育嗣 著

この授業でのみ使う記号

$\square$ ・・・ 定義， $\circledcirc$ ・・・ 定理 (命題や公式も含む)， $\triangle$ ・・・ 注意

$\boxed{\square}$ 数学で一般的に使われる記号

(I) $a \cdot b$ $\cdots$ $a \times b$ の意味． a/b $\cdots$ $\dfrac{a}{b}$ の意味．

(II) $\geq$, $\leq$ $\cdots$ $\geqq$, $\leqq$ と同じ意味．

(III) $a \neq b$ $\cdots$ a と b は等しくないの意味．

(IV) $A \overset{\text{def}}{=} B$ $\cdots$ A というものを B というものによって定義する．

$\boxed{\text{例}}$ $2^5 \overset{\text{def}}{=} \overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{5\,\text{コ}}$, $\boxed{\text{例}}$ $n! \overset{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

(V) $A \Longrightarrow B$ $\cdots$ 「主張 A が成り立つならば, 主張 B も成り立つ」, を意味する．

$\boxed{\text{例}}$ $a = 1 \Longrightarrow a^2 = 1$

(VI) $A \Longleftrightarrow B$ $\cdots$ 「主張 A が成り立つならば, 主張 B も成り立ち, 逆に主張 B が成り立つならば, 主張 A も成り立つ」, を意味する．

$\boxed{\text{例}}$ $a = b + 1 \Longleftrightarrow a - b = 1$, $\boxed{\text{正しくない例}}$ $a = 1 \Longleftrightarrow a^2 = 1$

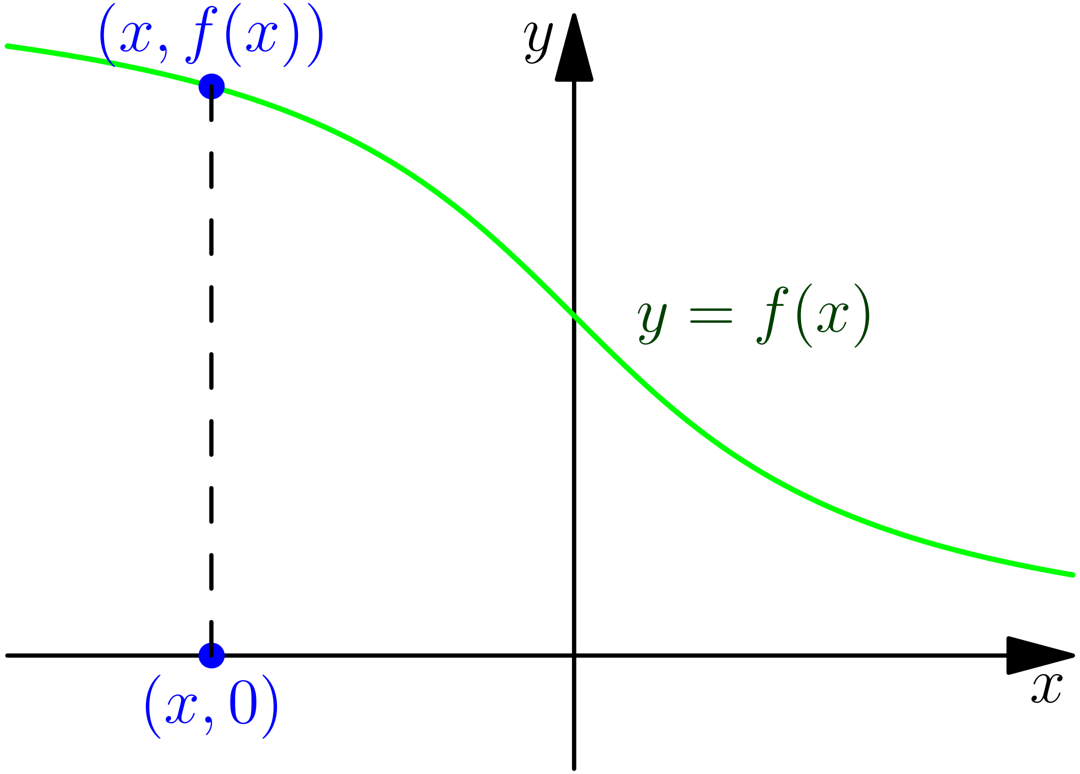
□ ２変数関数

２つ変数がある関数（言い換えれば２つの入力がある関数）を２変数関数と呼ぶ．

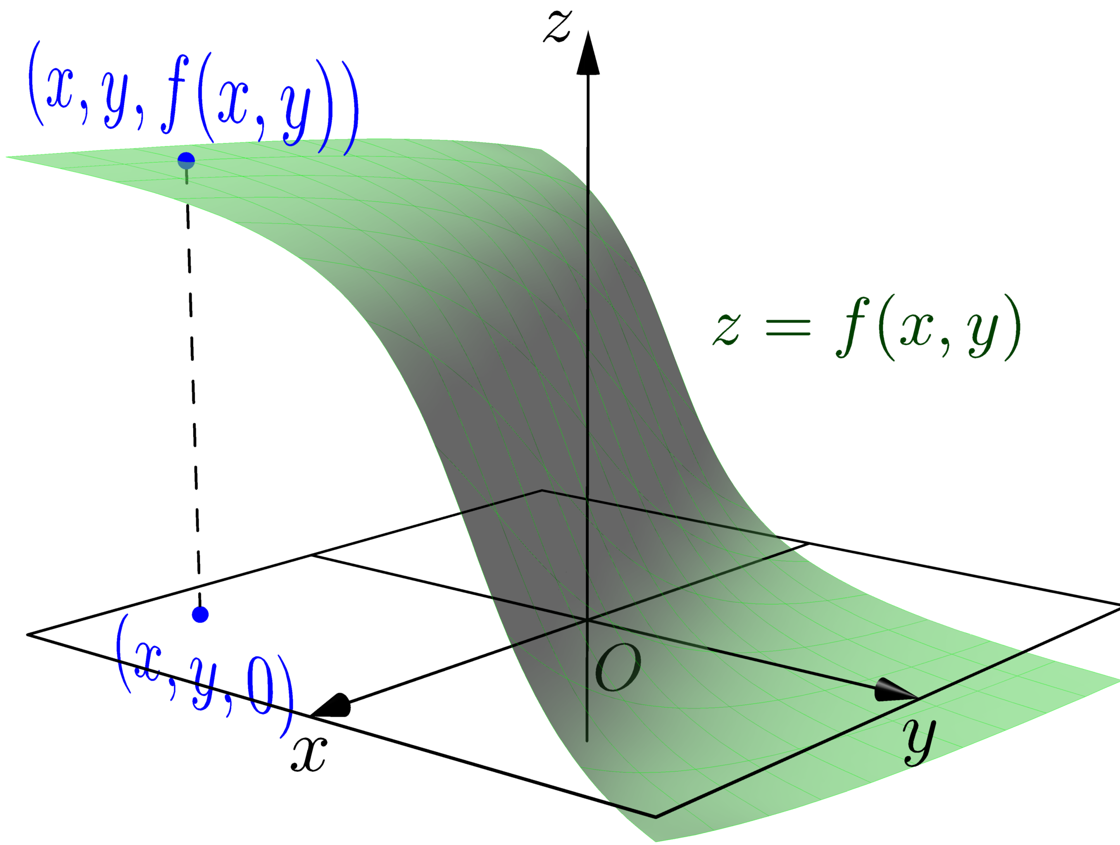
（今まで扱ってきた関数（$f(x) = x^2$ など）は変数が１つなので、正確には１変数関数と呼ぶ．）

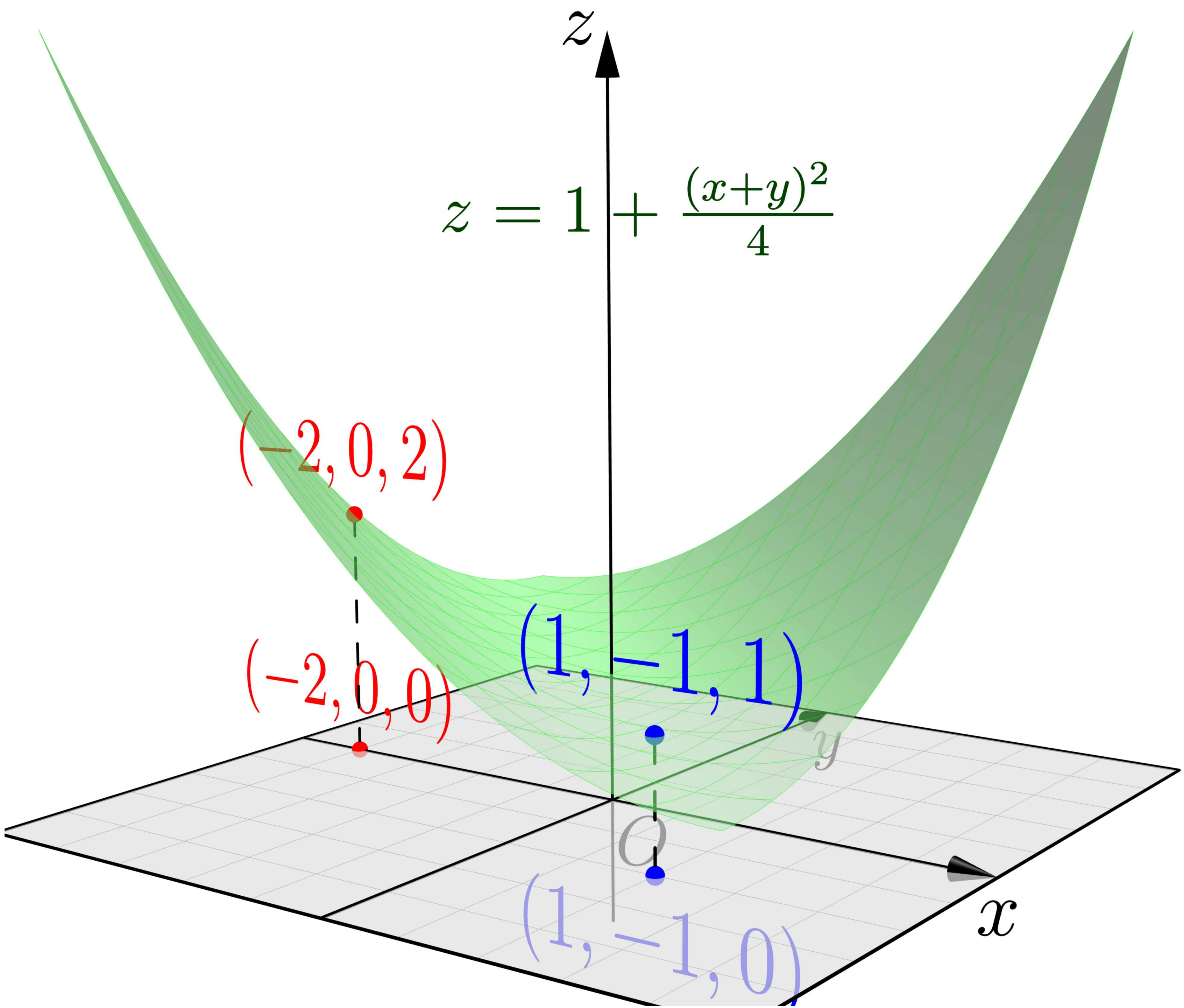
例
- $f(x, y) = x + y$ $\cdots$ これは，例えば $x = 1,\ y = 2$ を入力すると 3 を出力する．
- $f(s, t) = s - t^2$ $\cdots$ これは，例えば $s = 3,\ t = 2$ を入力すると $3 - 2^2 (= -1)$ を出力する．

１変数関数のグラフは曲線



２変数関数のグラフは曲面




z
$z = 1 + \frac{(x+y)^2}{4}$
$(-2, 0, 2)$
$(-2, 0, 0)$
$(1, -1, 1)$
y
O
x
$(1, -1, 0)$

□ 偏導関数

2 変数関数 $f(x,y)$ にたいして，x と y についての偏導関数を、それぞれ

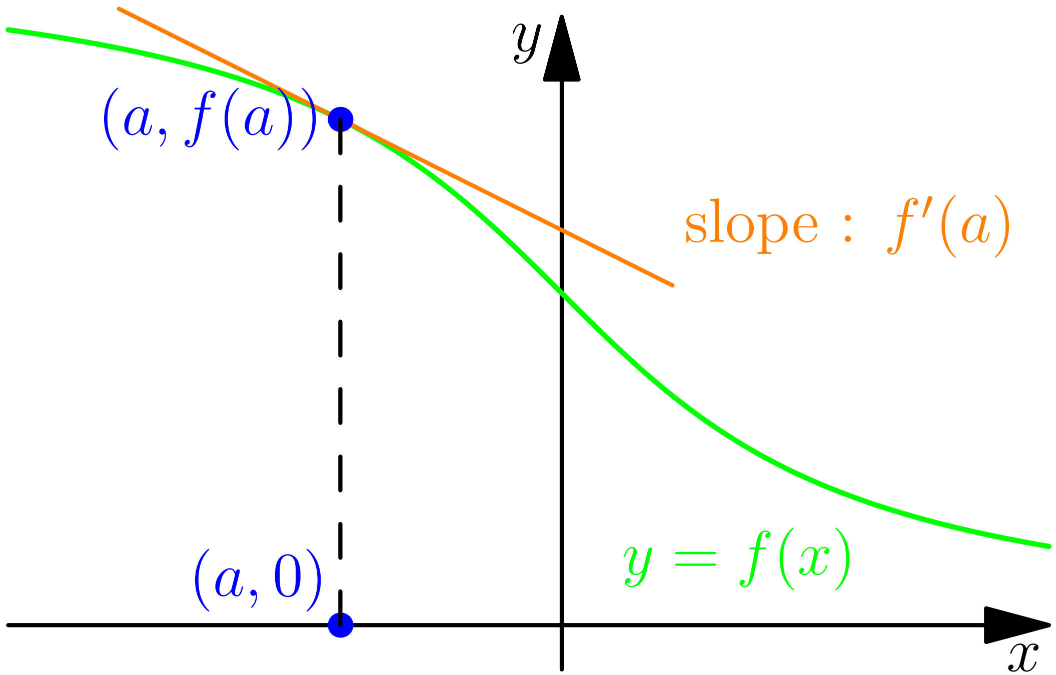
$$f_x(x,y) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial x} \text{ などとも書く} \right)$$

$$f_y(x,y) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y} \text{ などとも書く} \right)$$

で定義する．（x, y の値によっては極限が存在しないこともある（微分不可能））

△ $(x^2+y)'$ のようなダッシュの形は使わず，替りに $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y)$ や $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y)$ を使う．

微分の図形的な意味（1 変数関数の場合）

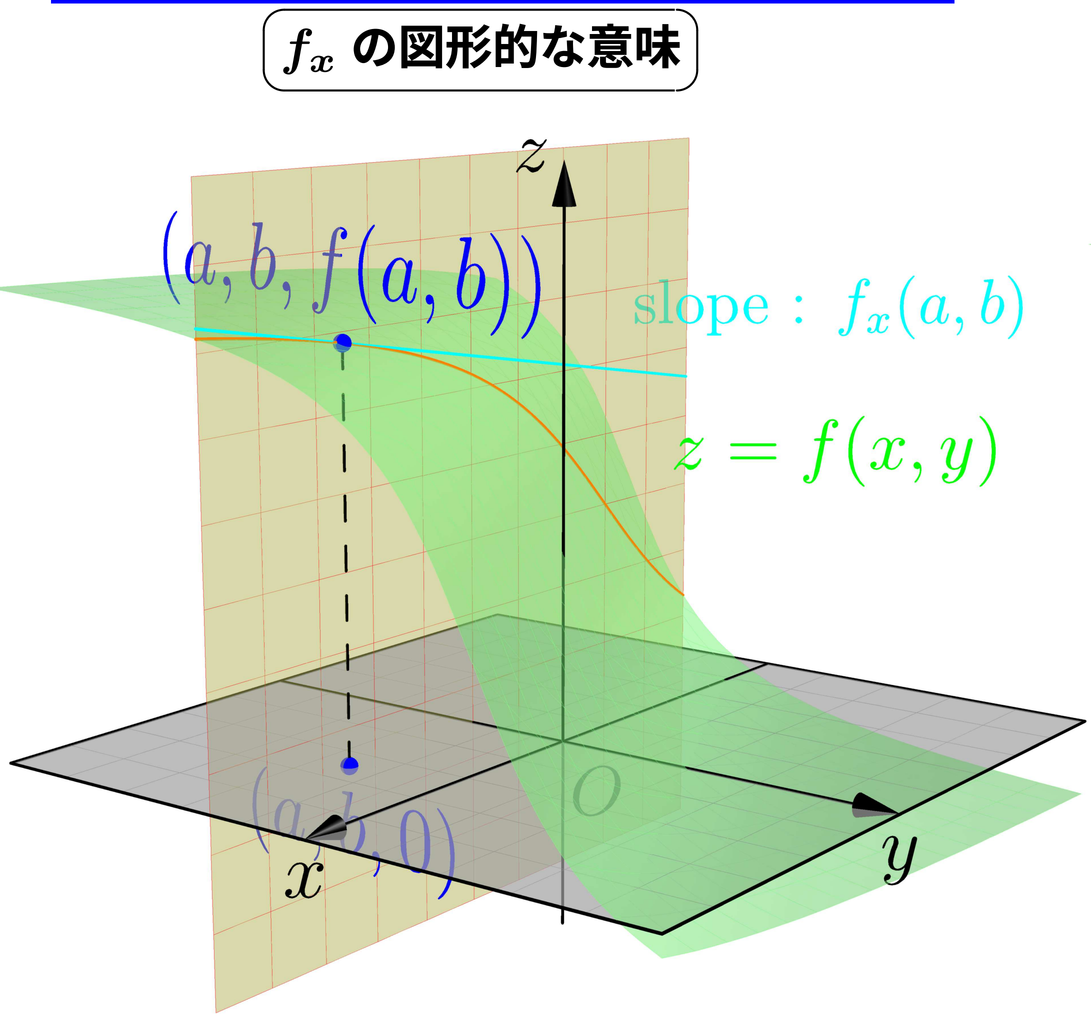


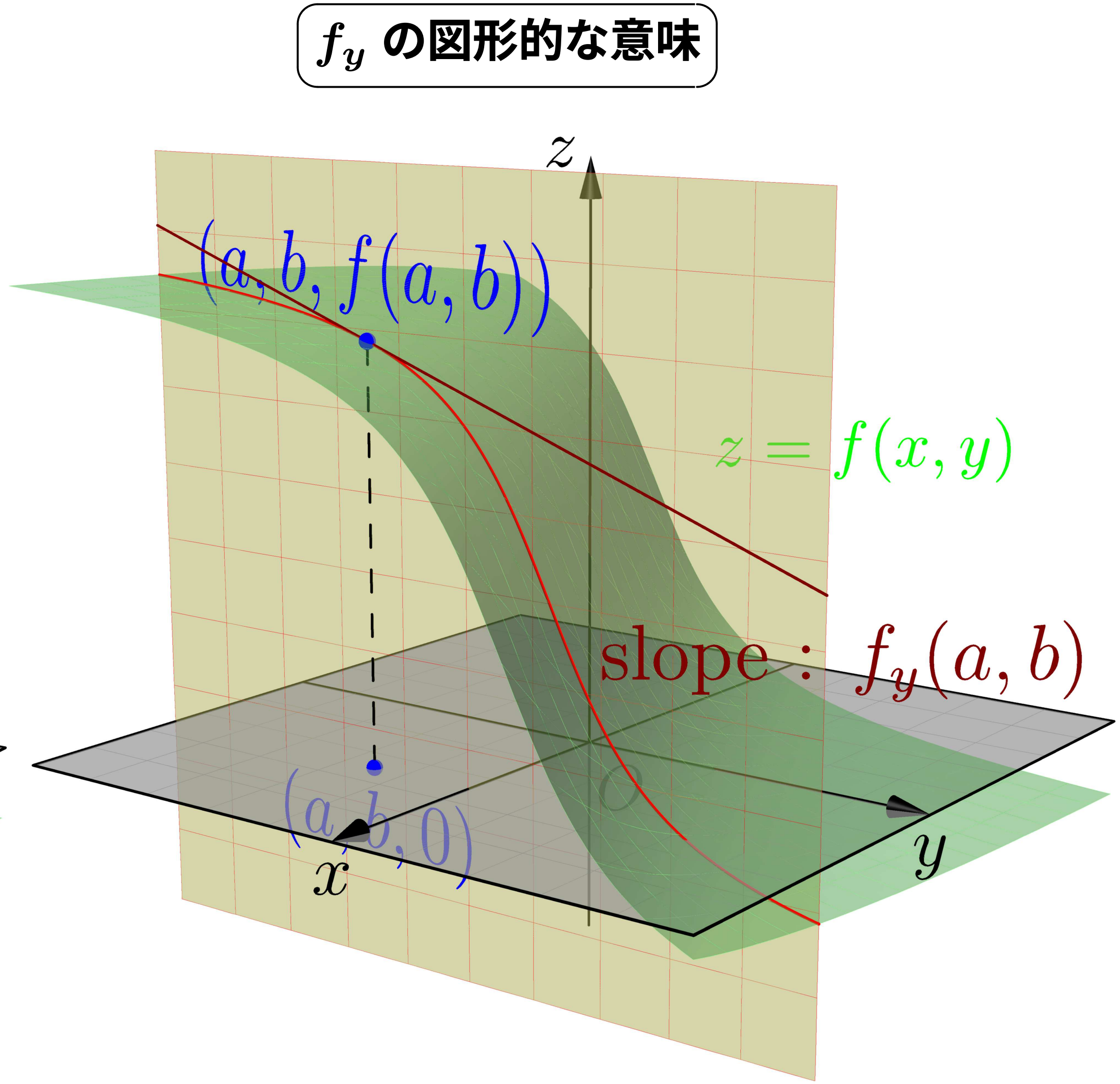
f' の図形的な意味

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ での

接線の傾き (slope) が $f'(a)$.

微分の図形的な意味（２変数関数の場合）





オレンジの曲線は 点 $(a, b, f(a, b))$ を通り y 軸に垂直な平面と曲面 $z = f(x, y)$ の交わる部分．その平面内での**曲線**の接線の傾き (slope) が $f_x(a, b)$.

赤の曲線は 点 $(a, b, f(a, b))$ を通り x 軸に垂直な平面と曲面 $z = f(x, y)$ の交わる部分．その平面内での**曲線**の接線の傾き (slope) が $f_y(a, b)$.

◎ 偏導関数の計算

偏導関数は以下のように計算できる．

$f_x(x,y)$	$\cdots$	y を定数とみなして，f を x で微分
$f_y(x,y)$	$\cdots$	x を定数とみなして，f を y で微分

例 ● $f(x,y)=x^2-3y$ のとき

$f_x(x,y)=2x,$ $\qquad$ $f_y(x,y)=-3.$

● $f(x,y)=xy^2$ のとき

$f_x(x,y)=y^2,$ $\qquad$ $f_y(x,y)=2xy.$

● $f(x,y)=\sin(xy)$ のとき

$f_x(x,y)=y\cos(xy),$ $\qquad$ $f_y(x,y)=x\cos(xy).$

● $f(x,y)=(x^2-2)\sin(x-3y)$ のとき

$f_x(x,y)=2x\cdot\sin(x-3y)+(x^2-2)\cos(x-3y),$

$f_y(x,y)=(x^2-2)\cos(x-3y)\cdot(-3)=-3(x^2-2)\cos(x-3y).$

問題 問１（p．９８）(1) ～ (8)

問１（ｐ．９８）

(1) $f(x,y)=x^3-3x^2y+2xy^2-4y^3$ のとき

$f_x(x,y)=3x^2-6xy+2y^2,\quad f_y(x,y)=-3x^2+2x\cdot 2y-12y^2=-3x^2+4xy-12y^2.$

(2) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ のとき　（つまり $f(x,y)=xy^{-1}$）

$f_x(x,y)=y^{-1},\quad f_y(x,y)=x\cdot(-y^{-2})=-xy^{-2}.$

(3) $f(x,y)=\dfrac{\sin y}{\log x}$ のとき　（つまり $f(x,y)=\sin y(\log x)^{-1}$）

$$f_x(x,y)=\sin y\cdot(-(\log x)^{-2})\cdot\frac{1}{x}=-x^{-1}\sin y(\log x)^{-2},\quad f_y(x,y)=\cos y(\log x)^{-1}.$$

(4) $f(x,y)=xe^y$ のとき　　$f_x(x,y)=e^y,\quad f_y(x,y)=xe^y.$

(5) $f(x,y)=x^y\ (x>0)$ のとき

$f_x(x,y)=yx^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\log x.$　（$(a^x)'=a^x\log a$ と同様に考える.）

(6) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ のとき

$$f_x(x,y)=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y(x,y)=\frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

(7) $f(x,y)=xy\cos x$ のとき

$f_x(x,y)=1\cdot y\cos x+x\cdot(-y\sin x)=y\cos x-xy\sin x,\quad f_y(x,y)=x\cos x.$

(8) $f(x,y)=\sqrt{y}e^{-x}\log y$ のとき （つまり $f(x,y)=e^{-x}y^{\frac{1}{2}}\log y$）

$f_x(x,y)=\sqrt{y}\log y\cdot(-e^{-x})=-e^{-x}\sqrt{y}\log y,$

$$f_y(x,y)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\log y+y^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{y}\right)=e^{-x}y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\log y+1\right).$$

□ 偏微分係数

$f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ を，それぞれ， x, y についての $(a,\ b)$ での偏微分係数と呼ぶ．（厳密には $\lim$ で定義されるが，多くの場合，導関数に $x=a$, $y=b$ を代入して計算する．）

問題　１．（問題集 p．５９）

(1) $f(x,y)=xy,\quad (a,b)=(1,-1)$ のとき

$f_x(x,y)=y,\quad f_y(x,y)=x$ であり $f_x(1,-1)=-1,\quad f_y(1,-1)=1.$

(2) $f(x,y)=e^{x+y},\quad (a,b)=(0,1)$ のとき

$f_x(x,y)=e^{x+y},\quad f_y(x,y)=e^{x+y}$ であり $f_x(0,1)=e,\quad f_y(0,1)=e.$

(3) $f(x,y)=\sin x+\cos y,\quad (a,b)=(\pi/4,\pi/4)$ のとき　$f_x(x,y)=\cos x,$

$f_y(x,y)=-\sin y$ であり $f_x(\pi/4,\pi/4)=1/\sqrt{2},\quad f_y(\pi/4,\pi/4)=-1/\sqrt{2}.$

(4) $f(x,y)=x\tan y,\quad (a,b)=(1,\pi/3)$ のとき　$f_x(x,y)=\tan y,$

$f_y(x,y)=\dfrac{x}{\cos^2 y}$ であり $f_x(1,\pi/3)=\tan(\pi/3)=\sqrt{3},\quad f_y(1,\pi/3)=1/(1/2)^2=4.$

(8) $f(x,y)=\sqrt{y}e^{-x}\log y$ のとき （つまり $f(x,y)=e^{-x}y^{\frac{1}{2}}\log y$）

$f_x(x,y)=\sqrt{y}\log y\cdot(-e^{-x})=-e^{-x}\sqrt{y}\log y,$

$f_y(x,y)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\log y+y^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{y}\right)=e^{-x}y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\log y+1\right).$

□ 偏微分係数

$f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ を，それぞれ， x, y についての $(a,\ b)$ での偏微分係数と呼ぶ．（厳密には $\lim$ で定義されるが，多くの場合，導関数に $x=a$, $y=b$ を代入して計算する．）

問題 1．（問題集 p．59）

(1) $f(x,y)=xy,\quad (a,b)=(1,-1)$ のとき

$f_x(x,y)=y,\quad f_y(x,y)=x$ であり $f_x(1,-1)=-1,\quad f_y(1,-1)=1.$

(2) $f(x,y)=e^{x+y},\quad (a,b)=(0,1)$ のとき

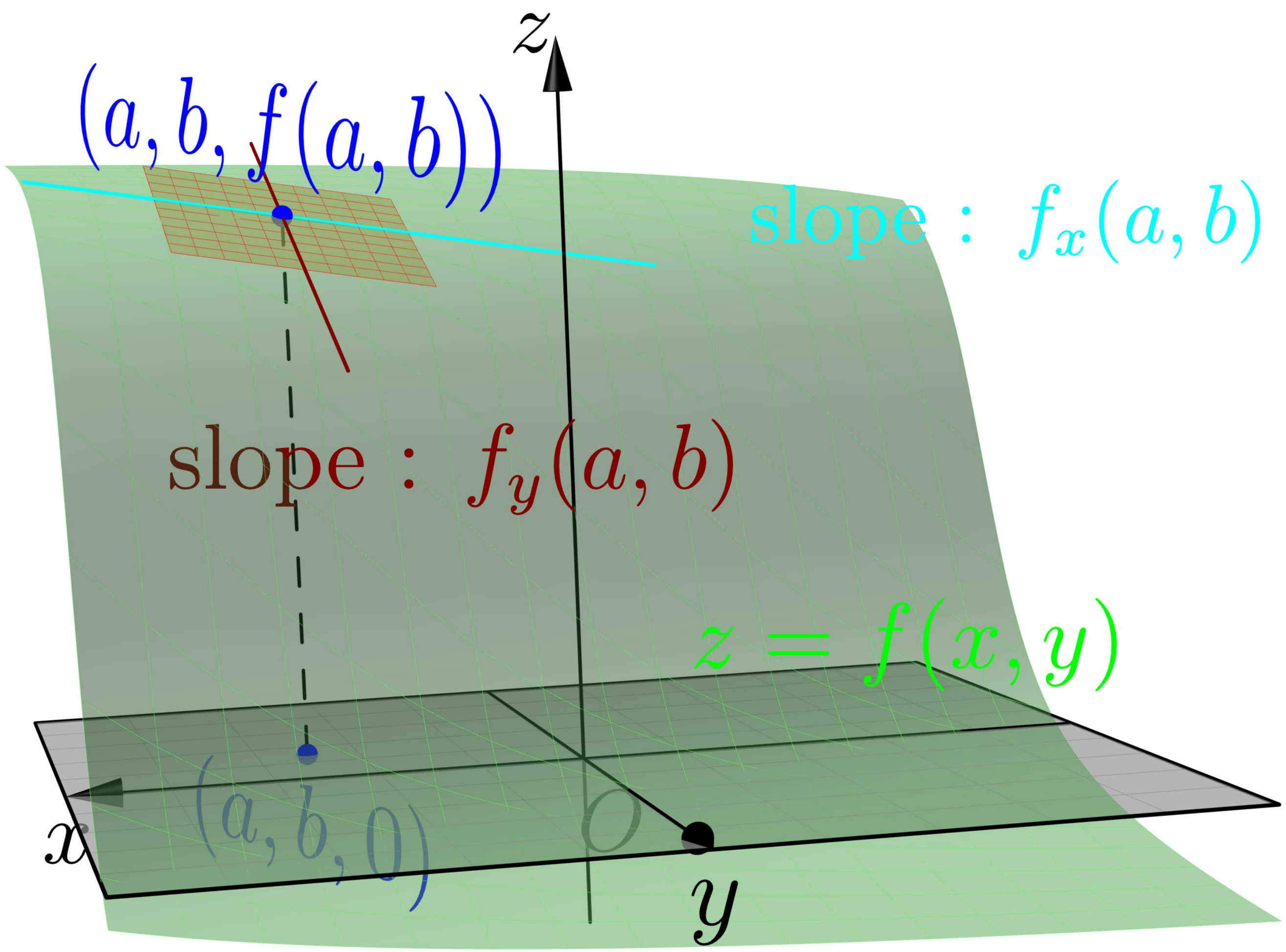
$f_x(x,y)=e^{x+y},\quad f_y(x,y)=e^{x+y}$ であり $f_x(0,1)=e,\quad f_y(0,1)=e.$

(3) $f(x,y)=\sin x+\cos y,\quad (a,b)=(\pi/4,\pi/4)$ のとき $f_x(x,y)=\cos x,$ $f_y(x,y)=-\sin y$ であり $f_x(\pi/4,\pi/4)=1/\sqrt{2},\quad f_y(\pi/4,\pi/4)=-1/\sqrt{2}.$

(4) $f(x,y)=x\tan y,\quad (a,b)=(1,\pi/3)$ のとき $f_x(x,y)=\tan y,$

$f_y(x,y)=\dfrac{x}{\cos^2 y}$ であり $f_x(1,\pi/3)=\tan(\pi/3)=\sqrt{3},\quad f_y(1,\pi/3)=1/(1/2)^2=4.$

接平面による曲面の近似



曲面 $z = f(x, y)$ 上において，点 $(a,\ b,\ f(a, b))$ の近くでは，

$$\Delta z \approx f_x(a, b) \cdot \Delta x + f_y(a, b) \cdot \Delta y$$

$\left(\Delta z \cdots\ z\right.$ 方向の変化量，　$\Delta x \cdots\ x$ 方向の変化量，　$\left.\Delta y \cdots\ y \text{ 方向の変化量} \right)$

となっている．

復習 $y=g(x)$（１変数関数）としたとき，$\dfrac{dy}{dx}$ は $g'(x)$ と同じ意味であった．

同様に，$z=f(x,y)$（２変数関数）としたとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ は，それぞれ，$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ と同じものを意味する．

◎ 合成関数の微分法（連鎖律）

$z=f(x,y)$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ とする．（それぞれ，ファイ，プサイと読む）
つまり，z が x, y についての２変数関数で，x, y は，それぞれ，t についての１変数関数であり，結果的に z は t についての１変数関数となっている．

このとき，
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$
が成り立つ．

例 • $z=xy$, $x=2t$, $y=10-t^2$ のとき，　$(z=2t(10-t^2))$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=y\cdot 2+x\cdot(-2t)=(10-t^2)\cdot 2+2t\cdot(-2t)=-6t^2+20.$$

例 • $z=x^2-y^2$, $x=t^2+1$, $y=t^2-1$ のとき，　$(z=(t^2+1)^2-(t^2-1)^2)$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=2x\cdot 2t+(-2y)\cdot 2t=(2t^2+2)\cdot 2t+(-2t^2+2)\cdot 2t=8t.$$

問題 ４．（問題集 ｐ．６０） (1)〜(3)

問題　４．（問題集 ｐ．６０）

(1) $z = x^3 - y^3,\quad x = 2t - 1,\quad y = t - 2$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 3x^2\cdot 2 + (-3y^2)\cdot 1 = 3(2t-1)^2\cdot 2 - 3(t-2)^2\cdot 1$$

$$= 6(4t^2 - 4t + 1) - 3(t^2 - 4t + 4) = 21t^2 - 12t - 6.$$

(2) $z = \dfrac{x - y}{x + y},\quad x = e^t,\quad y = e^{-t}$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}\cdot e^t + \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}\cdot(-e^{-t})$$

$$= \frac{2y}{(x+y)^2}\cdot e^t + \frac{-2x}{(x+y)^2}\cdot(-e^{-t}) = \frac{2e^{-t}e^t + 2e^te^{-t}}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

(3) $z = \log(x^2 + y^2),\quad x = \sqrt{t},\quad y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ のとき (つまり $x = t^{\frac{1}{2}},\quad y = t^{-\frac{1}{2}}$)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{t^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{3}{2}}}{t + t^{-1}} = \frac{1 - t^{-2}}{t + t^{-1}}\ \left(= \frac{t^2 - 1}{t^3 + t}\right).$$

問題　４．（問題集 p．６０）

(1) $z = x^3 - y^3, \quad x = 2t - 1, \quad y = t - 2$ **のとき**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 3x^2 \cdot 2 + (-3y^2) \cdot 1 = 3(2t-1)^2 \cdot 2 - 3(t-2)^2 \cdot 1$$
$$= 6(4t^2 - 4t + 1) - 3(t^2 - 4t + 4) = 21t^2 - 12t - 6.$$

(2) $z = \dfrac{x - y}{x + y}, \quad x = e^t, \quad y = e^{-t}$ **のとき**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} \cdot e^t + \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} \cdot (-e^{-t})$$
$$= \frac{2y}{(x+y)^2} \cdot e^t + \frac{-2x}{(x+y)^2} \cdot (-e^{-t}) = \frac{2e^{-t}e^t + 2e^te^{-t}}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

(3) $z = \log(x^2 + y^2), \quad x = \sqrt{t}, \quad y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ **のとき (つまり** $x = t^{\frac{1}{2}}, \quad y = t^{-\frac{1}{2}}$)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot (-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}})$$
$$= \frac{t^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{3}{2}}}{t + t^{-1}} = \frac{1 - t^{-2}}{t + t^{-1}} \left(= \frac{t^2 - 1}{t^3 + t} \right).$$

◎ 合成関数の偏微分法（連鎖律）

$z=f(x,y),\quad x=\varphi(s,t),\quad y=\psi(s,t)$ とする．

つまり，z が x，y についての２変数関数で，x，y は，それぞれ，s，t についての２変数関数であり，結果的に z は s，t についての２変数関数となっている．

このとき $$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s},\qquad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

例 ● $z=x^2y,\quad x=s+t,\quad y=s-t$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=2xy\cdot 1+x^2\cdot 1=2(s+t)(s-t)+(s+t)^2=3s^2+2st-t^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=2xy\cdot 1+x^2\cdot(-1)=2(s+t)(s-t)-(s+t)^2=s^2-2st-3t^2.$$

例 ● $z=4x^2+9y^2-4,\quad x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=8x\cdot\cos\theta+18y\cdot\sin\theta=8r\cos^2\theta+18r\sin^2\theta=r(10\sin^2\theta+8),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=8x\cdot(-r\sin\theta)+18y\cdot r\cos\theta=10r^2\sin\theta\cos\theta=5r^2\sin 2\theta.$$

例 ● $w=f(u,v),\quad u=g(x,y),\quad v=h(x,y)$ のとき

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

問題

５．（問題集 ｐ．６０）

(1), (5)

問題　**５．（問題集 p．６０）**

(1) $z = x^3 - y^3, \quad x = 2t - s, \quad y = t - 2s$ **のとき**

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = 3x^2\cdot(-1) + (-3y^2)\cdot(-2) = 3(2t-s)^2\cdot(-1) - 3(t-2s)^2\cdot(-2)$$

$$= -3(4t^2 - 4ts + s^2) + 6(t^2 - 4ts + 4s^2) = -6t^2 - 12ts + 21s^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = 3x^2\cdot 2 + (-3y^2)\cdot 1 = 6(2t-s)^2 - 3(t-2s)^2$$

$$= 6(4t^2 - 4ts + s^2) - 3(t^2 - 4ts + 4s^2) = 21t^2 - 12ts - 6s^2.$$

(5) $z = \sin x \cos y, \quad x = (s+t)^2, \quad y = (s-t)^2$ **のとき**

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = \cos x \cos y \cdot 2(s+t) + \sin x(-\sin y)\cdot 2(s-t)$$

$$= 2s(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + 2t(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$$

$$= 2s\cos(x+y) + 2t\cos(x-y) = 2s\cos(2s^2+2t^2) + 2t\cos(4st).$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \cos x \cos y \cdot 2(s+t) + \sin x(-\sin y)\cdot(-2(s-t))$$

$$= 2s(\cos x \cos y + \sin x \sin y) + 2t(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$= 2s\cos(x-y) + 2t\cos(x+y) = 2s\cos(4st) + 2t\cos(2s^2+2t^2).$$

問題　５．（問題集 p．６０）

(1) $z = x^3 - y^3, \quad x = 2t - s, \quad y = t - 2s$ **のとき**

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = 3x^2\cdot(-1) + (-3y^2)\cdot(-2) = 3(2t-s)^2\cdot(-1) - 3(t-2s)^2\cdot(-2)$$

$$= -3(4t^2 - 4ts + s^2) + 6(t^2 - 4ts + 4s^2) = -6t^2 - 12ts + 21s^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = 3x^2\cdot 2 + (-3y^2)\cdot 1 = 6(2t-s)^2 - 3(t-2s)^2$$

$$= 6(4t^2 - 4ts + s^2) - 3(t^2 - 4ts + 4s^2) = 21t^2 - 12ts - 6s^2.$$

(5) $z = \sin x \cos y, \quad x = (s+t)^2, \quad y = (s-t)^2$ **のとき**

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = \cos x \cos y \cdot 2(s+t) + \sin x(-\sin y)\cdot 2(s-t)$$

$$= 2s(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + 2t(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$$

$$= 2s\cos(x+y) + 2t\cos(x-y) = 2s\cos(2s^2 + 2t^2) + 2t\cos(4st),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \cos x \cos y \cdot 2(s+t) + \sin x(-\sin y)\cdot(-2(s-t))$$

$$= 2s(\cos x \cos y + \sin x \sin y) + 2t(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$= 2s\cos(x-y) + 2t\cos(x+y) = 2s\cos(4st) + 2t\cos(2s^2 + 2t^2).$$

補足

$z = f(x), \quad x = \varphi(s,t)$ とする．

つまり，z が x についての１変数関数で，x は，s，t についての２変数関数であり，結果的に z は s，t についての２変数関数となっている．

このとき　$\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{dz}{dx} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial s}$,　　$\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{dz}{dx} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t}$.

例 ● $z = x^2, \quad x = 2s - t$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = 2x \cdot 2 = 4(2s - t),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = 2x \cdot (-1) = -2(2s - t).$$

例 ● $z = \sin x, \quad x = s^2 - t$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = \cos x \cdot 2s = 2s\cos(s^2 - t),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \cos x \cdot (-1) = -\cos(s^2 - t).$$

連鎖律を利用した導関数の計算

例 ● $f(x,y)=\tan(x^3+x^2y-2xy+5y^2)$ の偏導関数を求めたい.

$z=f(x,y),\quad u=x^3+x^2y-2xy+5y^2$ とおくと $z=\tan u$.

よって

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot(3x^2+2xy-2y)=\frac{3x^2+2xy-2y}{\cos^2(x^3+x^2y-2xy+5y^2)},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot(x^2-2x+10y)=\frac{x^2-2x+10y}{\cos^2(x^3+x^2y-2xy+5y^2)}.$$

例 ● $f(x,y)=\left(\dfrac{xy}{x^2+2y^2+1}\right)^3$ の偏導関数を求めたい.

$z=f(x,y),\quad s=xy,\quad t=x^2+2y^2+1$ とおくと $z=(s/t)^3=s^3t^{-3}$.

よって

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=3s^2t^{-3}\cdot y-3s^3t^{-4}\cdot 2x$$

$$=3s^2t^{-4}(ty-2sx)=3(xy)^2(x^2+2y^2+1)^{-4}(x^2y+2y^3+y-2x^2y),$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=3s^2t^{-3}\cdot x-3s^3t^{-4}\cdot 4y$$

$$=3s^2t^{-4}(tx-4sy)=3(xy)^2(x^2+2y^2+1)^{-4}(x^3+2xy^2+x-4xy^2).$$

問題　３．（問題集 ｐ．５９） (1), (3), (4), (6), (10), (11)

問題　**３．（問題集 p．５９）**

(1) $f(x, y) = (x^2 + y^3)^4$

$z = f(x, y), \quad u = x^2 + y^3$ **とおくと** $z = u^4$．よって

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 4u^3 \cdot 2x = 8x(x^2 + y^3)^3,$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 4u^3 \cdot 3y^2 = 12y^2(x^2 + y^3)^3.$$

(3) $f(x, y) = (x + 2y)\sqrt{x - 2y}$

$z = f(x, y), \quad s = x + 2y, \quad t = x - 2y$ **とおくと** $z = st^{\frac{1}{2}}$．よって

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = t^{\frac{1}{2}} \cdot 1 + \frac{1}{2} st^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (2t + s) = \frac{1}{2} (x - 2y)^{-\frac{1}{2}} (3x - 2y),$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = t^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + \frac{1}{2} st^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2)$$

$$= t^{-\frac{1}{2}} (2t - s) = (x - 2y)^{-\frac{1}{2}} (x - 6y).$$

問題　３．（問題集 p．５９）

(1) $f(x,y)=(x^2+y^3)^4$

$z=f(x,y),\quad u=x^2+y^3$ **とおくと** $z=u^4$. **よって**

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=4u^3\cdot 2x=8x(x^2+y^3)^3,$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=4u^3\cdot 3y^2=12y^2(x^2+y^3)^3.$$

(3) $f(x,y)=(x+2y)\sqrt{x-2y}$

$z=f(x,y),\quad s=x+2y,\quad t=x-2y$ **とおくと** $z=st^{\frac{1}{2}}$. **よって**

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=t^{\frac{1}{2}}\cdot 1+\frac{1}{2}st^{-\frac{1}{2}}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(2t+s)=\frac{1}{2}(x-2y)^{-\frac{1}{2}}(3x-2y),$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=t^{\frac{1}{2}}\cdot 2+\frac{1}{2}st^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)$$

$$=t^{-\frac{1}{2}}(2t-s)=(x-2y)^{-\frac{1}{2}}(x-6y).$$

問題　３．（問題集 p．５９）**(4)**, **(6)**, **(10)**, **(11)**

(4) $f(x,y) = \left(\dfrac{2x+3y}{3x+2y}\right)^3$

$z = f(x,y)$, $\quad s = 2x+3y$, $\quad t = 3x+2y$ とおくと $z = (s/t)^3 = s^3t^{-3}$. よって

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 3s^2t^{-3}\cdot 2 + (-3)s^3t^{-4}\cdot 3$$

$$= 3s^2t^{-4}(2t-3s) = 3(2x+3y)^2(3x+2y)^{-4}\{(2(3x+2y)-3(2x+3y)\}$$

$$= -15y(2x+3y)^2(3x+2y)^{-4},$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = 3s^2t^{-3}\cdot 3 + (-3)s^3t^{-4}\cdot 2$$

$$= 3s^2t^{-4}(3t-2s) = 3(2x+3y)^2(3x+2y)^{-4}\{(3(3x+2y)-2(2x+3y)\}$$

$$= 15x(2x+3y)^2(3x+2y)^{-4}.$$

(6) $f(x,y) = e^{xy+x}$

$z = f(x,y)$, $\quad u = xy+x$ とおくと $z = e^u$. よって

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = e^u\cdot(y+1) = (y+1)e^{xy+x},$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = e^u\cdot x = xe^{xy+x}.$$

(4) $f(x,y)=\left(\dfrac{2x+3y}{3x+2y}\right)^3$

$z=f(x,y),\quad s=2x+3y,\quad t=3x+2y$ とおくと $z=(s/t)^3=s^3t^{-3}$. よって

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=3s^2t^{-3}\cdot 2+(-3)s^3t^{-4}\cdot 3$$

$$=3s^2t^{-4}(2t-3s)=3(2x+3y)^2(3x+2y)^{-4}\{(2(3x+2y)-3(2x+3y)\}$$

$$=-15y(2x+3y)^2(3x+2y)^{-4},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=3s^2t^{-3}\cdot 3+(-3)s^3t^{-4}\cdot 2$$

$$=3s^2t^{-4}(3t-2s)=3(2x+3y)^2(3x+2y)^{-4}\{(3(3x+2y)-2(2x+3y)\}$$

$$=15x(2x+3y)^2(3x+2y)^{-4}.$$

(6) $f(x,y)=e^{xy+x}$

$z=f(x,y),\quad u=xy+x$ とおくと $z=e^u$. よって

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=e^u\cdot(y+1)=(y+1)e^{xy+x},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=e^u\cdot x=xe^{xy+x}.$$

(10) $f(x,y)=\cos(x-y)^2$ 　($\cos(x-y)^2$ は $\cos\{(x-y)^2\}$ の意味)

$z=f(x,y),\quad u=(x-y)^2$ とおくと $z=\cos u$. よって

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin u\cdot 2(x-y)=-2(x-y)\sin(x-y)^2,$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=-\sin u\cdot 2(x-y)\cdot(-1)=2(x-y)\sin(x-y)^2.$$

(11) $f(x,y)=\cos^2(x-y)$

$z=f(x,y),\quad u=x-y$ とおくと $z=\cos^2 u$. よって

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2\cos u(-\sin u)\cdot 1$$

$$=-2\cos u\sin u=-\sin 2u=-\sin 2(x-y).$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2\cos u(-\sin u)\cdot(-1)$$

$$=2\cos u\sin u=\sin 2u=\sin 2(x-y).$$

(10) $f(x,y) = \cos(x-y)^2$　（ $\cos(x-y)^2$ は $\cos\{(x-y)^2\}$ の意味 ）

$z = f(x,y),\quad u = (x-y)^2$ とおくと $z = \cos u$. よって

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin u\cdot 2(x-y) = -2(x-y)\sin(x-y)^2,$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin u\cdot 2(x-y)\cdot(-1) = 2(x-y)\sin(x-y)^2.$$

(11) $f(x,y) = \cos^2(x-y)$

$z = f(x,y),\quad u = x-y$ とおくと $z = \cos^2 u$. よって

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos u(-\sin u)\cdot 1$$

$$= -2\cos u\sin u = -\sin 2u = -\sin 2(x-y),$$

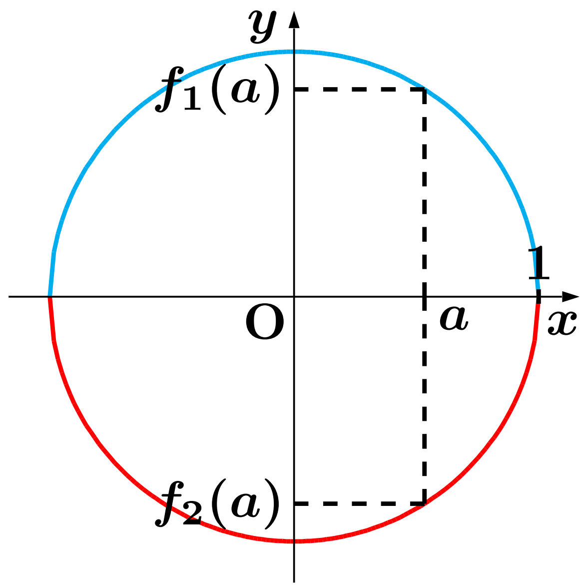
$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 2\cos u(-\sin u)\cdot(-1)$$

$$= 2\cos u\sin u = \sin 2u = \sin 2(x-y).$$

□ 陰関数

$F(x, y)$ を2変数関数とする．このとき $F(x, y) = 0$ をみたす点 $(x,\ y)$ が描くグラフは，適切に範囲を限定すると，x（入力）と y（出力）の対応関係を与える．この対応関係によって定義される関数を $F(x, y) = 0$ が定める陰関数と呼ぶ．

（言い換えると $F(x, f(x)) = 0$ を満たす関数 $f(x)$ が陰関数.）



例 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ のとき

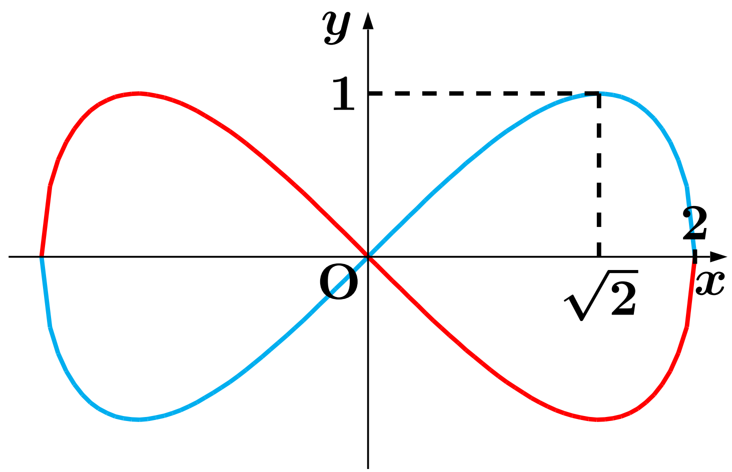
$F(x, y) = 0$ が定める陰関数として

$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}\ (-1 \leq x \leq 1)$ と

$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}\ (-1 \leq x \leq 1)$ がある.

たしかに $F(x, f_1(x)) = x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 - 1$

$= x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0$ となっている.



例 $F(x, y) = x^4 - 4x^2 + 4y^2$ のとき

$F(x, y) = 0$ が定める陰関数として

$f_1(x) = \dfrac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}\ (-2 \leq x \leq 2)$ と

$f_2(x) = -\dfrac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}\ (-2 \leq x \leq 2)$ がある.

◎ 陰関数の導関数

$F(x,y)=0$ が定める陰関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ は $-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ と表せる.

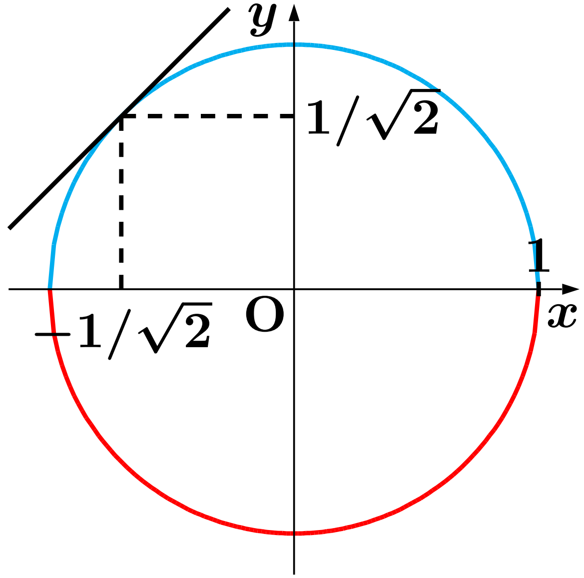
例 $F(x,y)=x^2+y^2-1$ のとき

$F(x,y)=0$ が定める陰関数の導関数:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}.$$

よって, 例えば $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ における接線の傾きは

$$-\frac{-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}=1$$ とわかる.



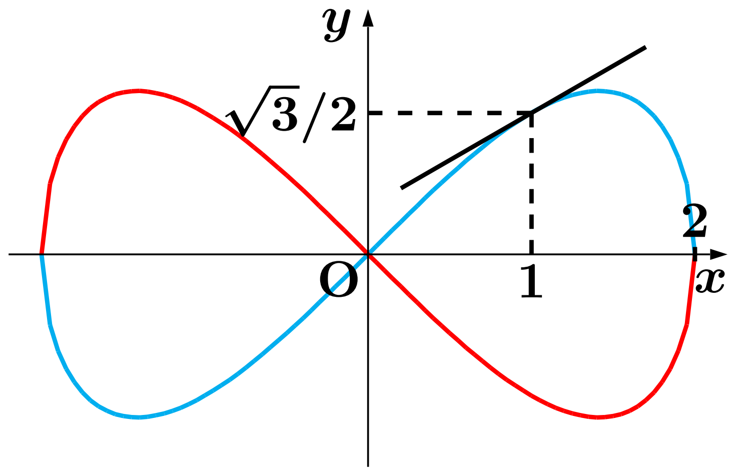
例 $F(x,y)=x^4-4x^2+4y^2$ のとき

$F(x,y)=0$ が定める陰関数の導関数:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{4x^3-8x}{8y}=-\frac{x^3-2x}{2y}.$$

よって, 例えば $(1,\sqrt{3}/2)$ における接線の傾きは

$$-\frac{1^3-2\cdot 1}{2\cdot\sqrt{3}/2}=1/\sqrt{3}$$ とわかる.



問題 問５（p．１０５）(1), (2)

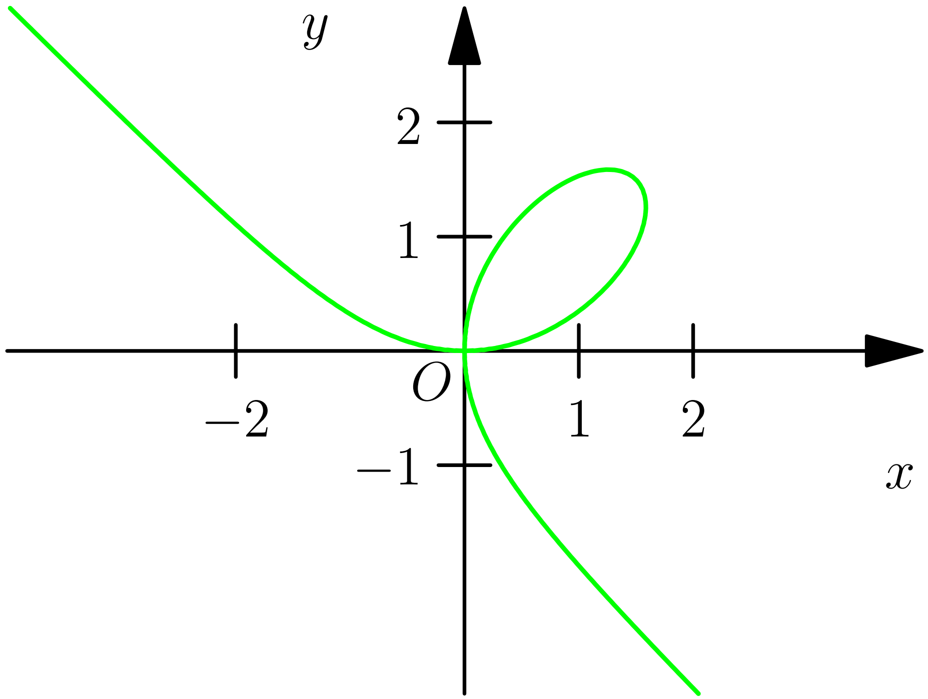
問題 問5（p．105）

(1) $F(x,y)=x^3-3xy+y^3$ のとき

$F(x,y)=0$ が定める陰関数の導関数:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{3x^2-3y}{-3x+3y^2}$$

$$=\frac{x^2-y}{x-y^2}.$$



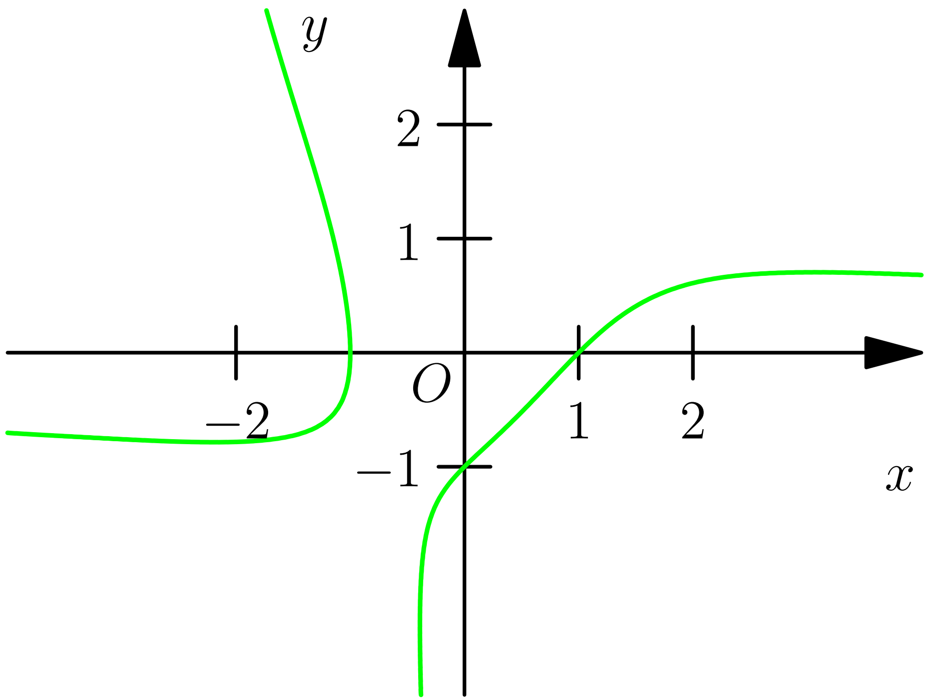
(2) $F(x,y)=-x^2+y+e^{xy}$ のとき

$F(x,y)=0$ が定める陰関数の導関数:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{-2x+ye^{xy}}{1+xe^{xy}}$$

$$\left(=-\frac{x^2y-2x-y^2}{x^3-xy+1}\right).$$

($e^{xy}=x^2-y$ より)



□ 第２次偏導関数

２変数関数 $f(x,y)$ にたいして以下を定義する．

$f_{xx} \overset{\mathrm{def}}{=}$ （ f_x を x で偏微分したもの ），　　$f_{xy} \overset{\mathrm{def}}{=}$ （ f_x を y で偏微分したもの ），

$f_{yx} \overset{\mathrm{def}}{=}$ （ f_y を x で偏微分したもの ），　　$f_{yy} \overset{\mathrm{def}}{=}$ （ f_y を y で偏微分したもの ）．

例 • $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - y^4$ のとき

$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2$,　　$f_y(x,y) = 6xy - 4y^3$,

よって $f_{xx}(x,y) = 6x$,　$f_{xy}(x,y) = 6y$,　$f_{yx}(x,y) = 6y$,　$f_{yy}(x,y) = 6x - 12y^2$.

• $f(x,y) = \cos(x-y)$ のとき

$f_x(x,y) = -\sin(x-y)$,　　$f_y(x,y) = \sin(x-y)$,

よって

$f_{xx}(x,y) = -\cos(x-y)$,　　$f_{xy}(x,y) = \cos(x-y)$,

$f_{yx}(x,y) = \cos(x-y)$,　　$f_{yy}(x,y) = -\cos(x-y)$.

⚠ 同様にして f_{xxx} や f_{xxy} などの第３次偏導関数も定義でき，さらに一般の第 n 次の偏導関数も定義できる．（微分可能なとき）

⚠ 多くのとき（f がある程度なめらかな関数のとき）$f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ．

問題　問６　（ｐ．１０６）(1), (2)

問題　問６　（ｐ．１０６）

(1) $f(x,y)=2x^3-x^2y+3xy^2-y^3$ のとき

$$f_x(x,y)=6x^2-2xy+3y^2,\qquad f_y(x,y)=-x^2+6xy-3y^2,$$

$$f_{xx}(x,y)=12x-2y,\qquad f_{xy}(x,y)=-2x+6y,$$

$$f_{yx}(x,y)=-2x+6y,\qquad f_{yy}(x,y)=6x-6y.$$

(2) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ のとき

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2},\qquad f_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2},$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{2\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{0\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{0\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{2\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

◎ マクローリン展開（２変数関数）

次の関数を $f(x,y)$ のマクローリン級数と呼び，（この授業で扱う）多くの場合，$(x,y)=(0,0)$ の十分近くでは $f(x,y)$ と一致する．

$$\begin{aligned} & f(0,0)+\frac{f_x(0,0)}{1!}x+\frac{f_y(0,0)}{1!}y \\ & \quad +\frac{f_{xx}(0,0)}{2!}x^2+\frac{f_{xy}(0,0)}{1!1!}xy+\frac{f_{yy}(0,0)}{2!}y^2 \\ & \quad +\frac{f_{xxx}(0,0)}{3!}x^3+\frac{f_{xxy}(0,0)}{2!1!}x^2y+\frac{f_{xyy}(0,0)}{1!2!}xy^2+\frac{f_{yyy}(0,0)}{3!}y^3 \\ & \quad +\cdots . \end{aligned}$$

例 $f(x,y)=(1+x+y)^{1/2}$ のとき，$f_x(x,y)=f_y(x,y)=(1/2)(1+x+y)^{-1/2}$，
$f_{xx}(x,y)=f_{xy}(x,y)=f_{yy}(x,y)=(-1/4)(1+x+y)^{-3/2}$.
よって $f(0,0)=1$，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=1/2$，$f_{xx}(0,0)=f_{xy}(0,0)=f_{yy}(0,0)=-1/4$.
よって $f(x,y)$ のマクローリン級数（ここでは３次以上の項は省略する）は

$$\begin{aligned} & 1+\frac{1/2}{1!}x+\frac{1/2}{1!}y+\frac{-1/4}{2!}x^2+\frac{-1/4}{1!1!}xy+\frac{-1/4}{2!}y^2+\cdots \\ & =1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}xy-\frac{1}{8}y^2+\cdots . \end{aligned}$$

問題 問７（p．１１０） (1)

問題　問７（p．１１０）(1) $f(x,y)=e^{-(x+y)}$ のとき，

$f_x(x,y)=f_y(x,y)=-e^{-(x+y)}$,

$f_{xx}(x,y)=f_{xy}(x,y)=f_{yy}(x,y)=e^{-(x+y)}$.

よって $f(0,0)=e^0=1$,　$f_x(0,0)=f_y(0,0)=-e^0=-1$,

$f_{xx}(0,0)=f_{xy}(0,0)=f_{yy}(0,0)=e^0=1$.

よってマクローリン展開は

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) \\
&\quad +\frac{f_x(0,0)}{1!}x^1 + \frac{f_y(0,0)}{1!}y^1 \\
&\quad +\frac{f_{xx}(0,0)}{2!}x^2 + \frac{f_{xy}(0,0)}{1!1!}xy + \frac{f_{yy}(0,0)}{2!}y^2+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{-(x+y)} &= 1 \\
&\quad +\frac{-1}{1!}x^1 + \frac{-1}{1!}y^1 \\
&\quad +\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{1!1!}xy + \frac{1}{2!}y^2+\cdots \\
&= 1-x-y+\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+\cdots.
\end{aligned}
$$

問題　９．（問題集p．６１）(5) $f(x,y)=\log(1-x+y)$ のマクローリン展開を求めよ．

問題 9.（p.61）**(5)** $f(x,y)=\log(1-x+y)$ のとき,

$$f_x(x,y)=-\frac{1}{1-x+y},\quad f_y(x,y)=\frac{1}{1-x+y},$$

$$f_{xx}(x,y)=-\frac{1}{(1-x+y)^2},\quad f_{xy}(x,y)=\frac{1}{(1-x+y)^2},\quad f_{yy}(x,y)=-\frac{1}{(1-x+y)^2}.$$

よって $f(0,0)=\log 1=0,\quad f_x(0,0)=-1,\quad f_y(0,0)=1,$

$f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=-1,\quad f_{xy}(0,0)=1.$

よってマクローリン展開は

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) \\ &\quad +\frac{f_x(0,0)}{1!}x^1 + \frac{f_y(0,0)}{1!}y^1 \\ &\quad +\frac{f_{xx}(0,0)}{2!}x^2 + \frac{f_{xy}(0,0)}{1!1!}xy + \frac{f_{yy}(0,0)}{2!}y^2+\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(1-x+y) &= 0 \\ &\quad +\frac{-1}{1!}x^1 + \frac{1}{1!}y^1 \\ &\quad +\frac{-1}{2!}x^2 + \frac{1}{1!1!}xy + \frac{-1}{2!}y^2+\cdots \\ &= -x+y-\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2+\cdots. \end{aligned}$$

◎ テイラー展開（２変数関数）

次の関数を $(x, y) = (a, b)$ の周りの $f(x, y)$ のテイラー級数と呼び，（この授業で扱う）多くの場合，$(x, y) = (a, b)$ の十分近くでは $f(x, y)$ と一致する．

$$
\begin{aligned}
&f(a,b) + \frac{f_x(a,b)}{1!}(x-a) + \frac{f_y(a,b)}{1!}(y-b) \\
&\qquad + \frac{f_{xx}(a,b)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f_{xy}(a,b)}{1!1!}(x-a)(y-b) + \frac{f_{yy}(a,b)}{2!}(y-b)^2 \\
&\qquad + \cdots .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{例}}$ $f(x, y) = e^{x-y+1}$ のとき　$f_x(x, y) = e^{x-y+1}$,　$f_y(x, y) = -e^{x-y+1}$,

$f_{xx}(x, y) = e^{x-y+1}$,　$f_{xy}(x, y) = -e^{x-y+1}$,　$f_{yy}(x, y) = e^{x-y+1}$.

よって $f(1, 2) = e^0 = 1$,　$f_x(1, 2) = e^0 = 1$,　$f_y(1, 2) = -e^0 = -1$,

$f_{xx}(1, 2) = f_{yy}(1, 2) = e^0 = 1$,　$f_{xy}(1, 2) = -e^0 = -1$

よって $(x, y) = (1, 2)$ の周りのテイラー展開は

$$
\begin{aligned}
&e^{x-y+1} \\
&= 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{1!}(y-2) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{-1}{1!1!}(x-1)(y-2) + \frac{1}{2!}(y-2)^2 + \cdots \\
&= 1 + (x-1) - (y-2) + \frac{(x-1)^2}{2} - (x-1)(y-2) + \frac{(y-2)^2}{2} + \cdots .
\end{aligned}
$$

テイラー展開とグラフ

$f(x,y)=e^{-x^2+x-2y^2}+\dfrac{1}{2}$ のとき

$(x,y)=(0,0)$ の周りのテイラー展開は

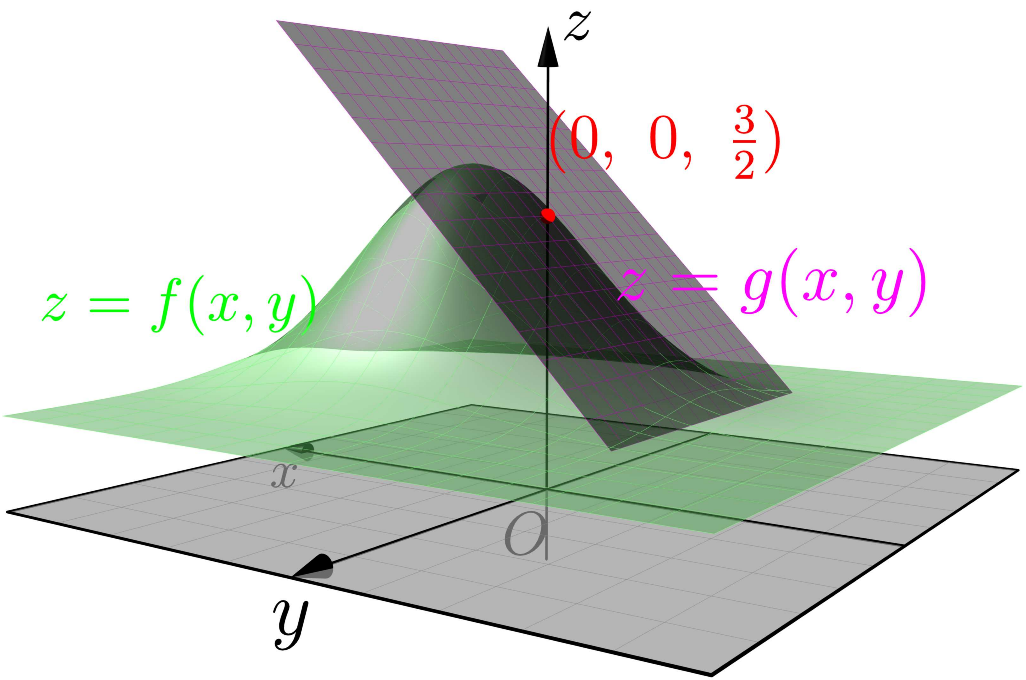
$$e^{-x^2+x-2y^2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+x-\frac{x^2}{2}-2y^2-\frac{5}{6}x^3-2xy^2+\cdots$$

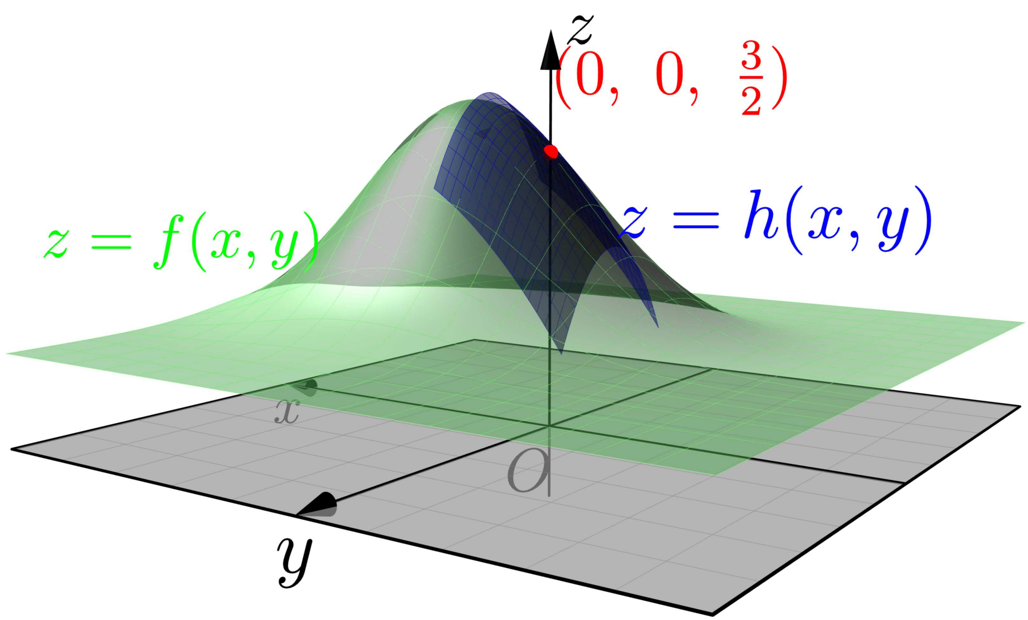
そこで

$g(x,y)=\dfrac{3}{2}+x$ （１次の項までで切ったもの）

$h(x,y)=\dfrac{3}{2}+x-\dfrac{x^2}{2}-2y^2$ （２次の項までで切ったもの）

とおくと，それらのグラフは以下のとおり．





◎ 接平面の方程式

曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面の方程式は

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

例 $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 1$ **のとき，** $f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -4y.$

よって曲面 $z = f(x, y)$ **上の点** $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 0)$ **における接平面の方程式は**

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) = 2(x - 1) - 4(y - 1) = 2x - 4y + 2.$$

つまり $\quad z = 2x - 4y + 2.$

問題 6．（問題集p．63） **(1)** **曲面** $z = x^2 + y^2, \quad$ **点** $(\sqrt{2}, 1, 3).$ $\quad f_x = 2x, \quad f_y = 2y.$

よって接平面の方程式は $z = f(\sqrt{2}, 1) + f_x(\sqrt{2}, 1)(x - \sqrt{2}) + f_y(\sqrt{2}, 1)(y - 1)$

$$= 3 + 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 2(y - 1) = 2\sqrt{2}x + 2y - 3.$$

つまり $z = 2\sqrt{2}x + 2y - 3.$

(6) **曲面** $z = \sin(2x + y), \quad$ **点** $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 0\right).$ $\quad f_x = 2\cos(2x + y), \quad f_y = \cos(2x + y).$

よって接平面の方程式は

$$z = f(\pi/4, \pi/2) + f_x(\pi/4, \pi/2)(x - \pi/4) + f_y(\pi/4, \pi/2)(y - \pi/2)$$

$$= \sin\pi + 2\cos\pi(x - \pi/4) + \cos\pi(y - \pi/2)$$

$$= -2(x - \pi/4) - (y - \pi/2) = -2x - y + \pi.$$

つまり $z = -2x - y + \pi.$

◎ 接平面の方程式

曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式は

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b).$$

例 $f(x,y)=x^2-2y^2+1$ のとき，$f_x(x,y)=2x,\quad f_y(x,y)=-4y.$

よって曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(1,1,f(1,1))=(1,1,0)$ における接平面の方程式は

$z=f(1,1)+f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)=2(x-1)-4(y-1)=2x-4y+2.$

つまり　　$z=2x-4y+2.$

問題　６．(問題集ｐ．６３) **(1)** 曲面 $z=x^2+y^2,\quad$ 点 $(\sqrt{2},1,3).\qquad f_x=2x,\quad f_y=2y.$

よって接平面の方程式は $z=f(\sqrt{2},1)+f_x(\sqrt{2},1)(x-\sqrt{2})+f_y(\sqrt{2},1)(y-1)$

$$=3+2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+2(y-1)=2\sqrt{2}x+2y-3.$$

つまり $z=2\sqrt{2}x+2y-3.$

(6) 曲面 $z=\sin(2x+y),\quad$ 点 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},0\right).\qquad f_x=2\cos(2x+y),\quad f_y=\cos(2x+y).$

よって接平面の方程式は

$$\begin{aligned}z&=f(\pi/4,\pi/2)+f_x(\pi/4,\pi/2)(x-\pi/4)+f_y(\pi/4,\pi/2)(y-\pi/2)\\&=\sin\pi+2\cos\pi(x-\pi/4)+\cos\pi(y-\pi/2)\\&=-2(x-\pi/4)-(y-\pi/2)=-2x-y+\pi.\end{aligned}$$

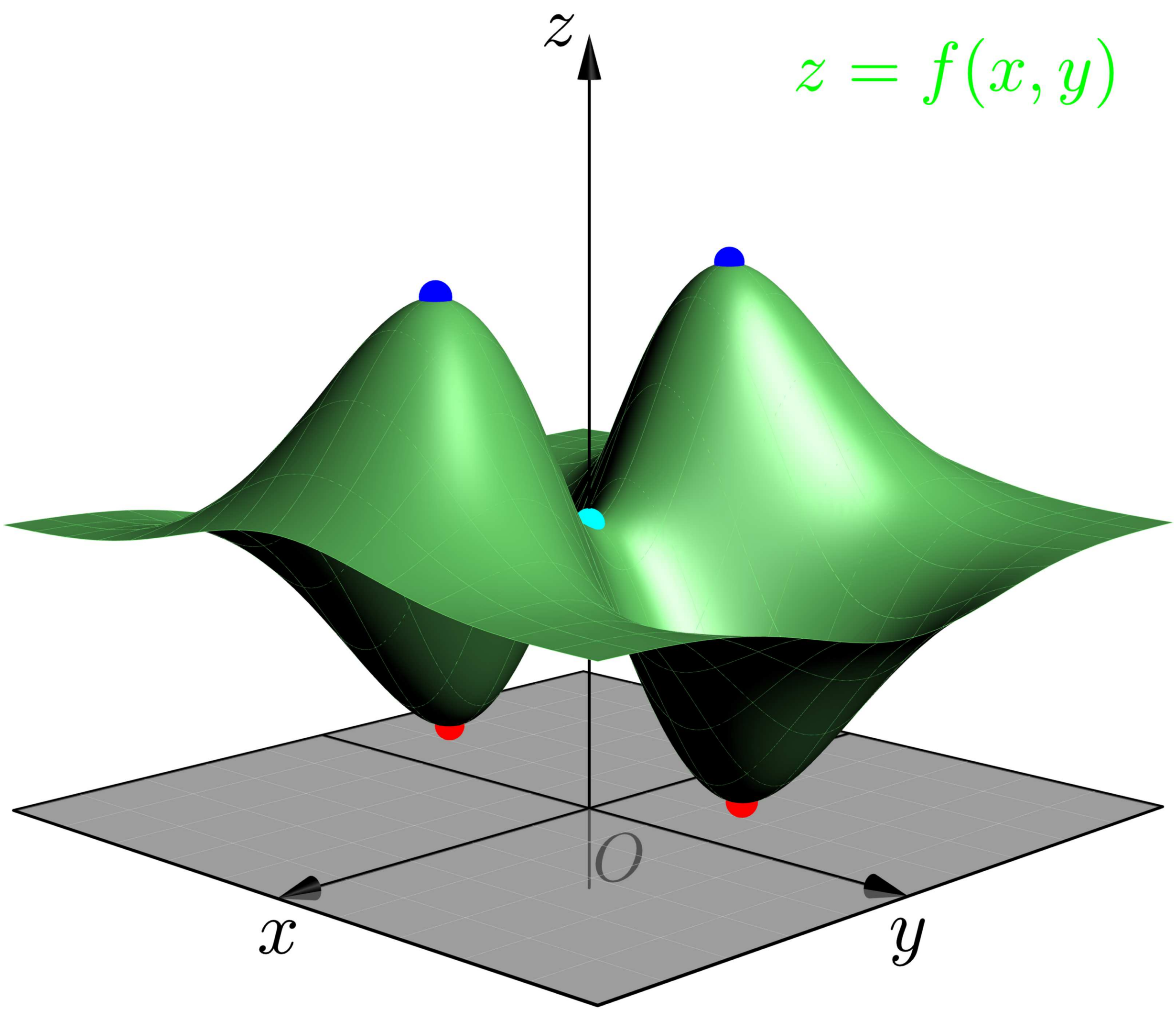
つまり $z=-2x-y+\pi.$

□ 極値（極大値・極小値）

関数の値が局所的に最大（最小）になるところを極大（極小）と呼び，その値を極大値（極小値）と呼ぶ. またそれらをまとめて極値と呼ぶ.

例えば 2 変数関数 $f(x, y)$ の**極大**（local maximum）と**極小**（local minimum）のイメージは右の図のようになる.

点 ● のように，ある方向からは極大で，別の方向からは極小になっている点を**鞍点**（あんてん）(saddle point) と呼ぶ.



◎ 極値の判定

関数 $f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で極値をとるためには、少なくとも $f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ が必要である．その上で $\Delta(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ と定義したとき

- $\Delta(a,b) > 0,\quad f_{xx}(a,b) > 0 \quad\Rightarrow$ 極小
- $\Delta(a,b) < 0 \quad\Rightarrow$ 鞍点
- $\Delta(a,b) > 0,\quad f_{xx}(a,b) < 0 \quad\Rightarrow$ 極大
- $\Delta(a,b) = 0 \quad\Rightarrow$ 未確定

例 $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^2$ の極値を考える．

Step1 まず偏導関数を求めると，$f_x(x,y) = 3x^2 - 6y$,　$f_y(x,y) = -6x + 2y$,
$f_{xx}(x,y) = 6x$,　$f_{xy}(x,y) = -6$,　$f_{yy}(x,y) = 2$.
また $\Delta(x,y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 6x \cdot 2 - (-6)^2 = 12(x-3)$.

Step2 もし $(x,y) = (a,b)$ で極値をとるなら $f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ が必要であり，つまり $3a^2 - 6b = 0 \quad \cdots (*1)$ かつ $-6a + 2b = 0 \quad \cdots (*2)$.
$(*2)$ より $b = 3a$ なので，それを $(*1)$ に代入して整理すると $a^2 - 6a = 0$ つまり $a = 0,\ 6$ であり，そのとき順に $b = 0,\ 18$. よって極値をとる点の候補は $(0,0)$,　$(6,18)$.

Step3
- $(0,0)$ において $\Delta(0,0) = 12(0-3) < 0$ なので鞍点（極値をとらない）．
- $(6,18)$ において $\Delta(6,18) = 12(6-3) > 0$ なので極値をとる．今 $f_{xx}(6,18) = 6 \cdot 6 > 0$ なので極小をとり，極小値は $f(6,18) = 6^3 - 6 \cdot 6 \cdot 18 + 18^2 = -108$.

問題　問８（ｐ．１１４）**(1)**, **(2)**

問題　問８（ｐ．１１４）

(1) $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2$ の極値を考える.

Step1 まず偏導関数を求めると, $f_x(x,y)=4x^3-4y,\qquad f_y(x,y)=-4x+4y,$
$f_{xx}(x,y)=12x^2,\qquad f_{xy}(x,y)=-4,\qquad f_{yy}(x,y)=4.$
また $\Delta(x,y)=f_{xx}\cdot f_{yy}-(f_{xy})^2=12x^2\cdot 4-(-4)^2=16(3x^2-1).$

Step2 もし $(x,y)=(a,b)$ で極値をとるなら $f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$ が必要であり,
つまり $4a^3-4b=0\quad\cdots(*1)$ かつ $-4a+4b=0\quad\cdots(*2).$
$(*2)$ より $b=a$ なので, それを $(*1)$ に代入して $4a^3-4a=0\iff a(a-1)(a+1)=0$. つまり $a=0,\ \pm1$ であり, そのとき順に $b=0,\ \pm1.$
よって極値をとる点の候補は $(0,0),\quad(1,1),\quad(-1,-1).$

Step3 ● $(0,0)$ において $\Delta(0,0)=16(0-1)<0$ なので鞍点（極値をとらない）.
● $(1,1)$ において $\Delta(1,1)=16(3\cdot1^2-1)>0$ なので極値をとる. 今 $f_{xx}(1,1)=12\cdot1^2>0$ なので極小をとり, 極小値は $f(1,1)=1-4+2=-1.$
● $(-1,-1)$ において $\Delta(-1,-1)=16(3\cdot(-1)^2-1)>0$ なので極値をとる. 今 $f_{xx}(-1,-1)=12\cdot(-1)^2>0$ なので極小をとり, 極小値は $f(-1,-1)=-1.$

(2) $f(x,y)=xe^{-(x-1)y}$ の極値を考える.

Step1 まず偏導関数を求めると,

$f_x(x,y)=e^{-(x-1)y}+x\cdot e^{-(x-1)y}(-y)=(1-xy)e^{-(x-1)y}$,

$f_y(x,y)=xe^{-(x-1)y}(-(x-1))=(1-x)xe^{-(x-1)y}$,

$f_{xx}(x,y)=y(xy-2)e^{-(x-1)y}$,

$f_{xy}(x,y)=(x^2y-xy-2x+1)e^{-(x-1)y}$,

$f_{yy}(x,y)=(x-1)^2xe^{-(x-1)y}$.

また $\Delta(x,y)=y(xy-2)e^{-(x-1)y}\cdot(x-1)^2xe^{-(x-1)y}-\{(x^2y-xy-2x+1)e^{-(x-1)y}\}^2$

$=(2x^3y-2x^2y-4x^2+4x-1)xe^{-2(x-1)y}$.

Step2 もし $(x,y)=(a,b)$ で極値をとるなら $f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$ が必要であり,

つまり $(1-ab)e^{-(a-1)b}=0 \quad \cdots(*1)$ かつ $(1-a)a\,e^{-(a-1)b}=0 \quad \cdots(*2)$.

$(*2)$ より $a=0,\ 1$ **(注)** であるが, $a=0$ のとき明らかに $(*1)$ を満たさないので $a=1$.

それを $(*1)$ に代入して $(1-b)e^{-(a-1)b}=0$. つまり $b=1$ であり,

よって極値をとる点の候補は $(1,1)$ のみ.

Step3 ● $(1,1)$ において $\Delta(1,1)=(2-2-4+4-1)e^0<0$ なので鞍点（極値をとらない）.

以上より極値はとらない.

(注): 任意の実数 x で $e^x>0$ に注意. つまり $e^{-(a-1)b}$ の部分は 0 にはならない.

問題 １０． （問題集　ｐ．６１） **(6)** $f(x,y)=x^4-2xy+2y^2$

１０．（問題集　ｐ．６１） $\boxed{(6)}$

$f(x,y) = x^4 - 2xy + 2y^2$ の極値を考える.

$\boxed{\text{Step1}}$ まず偏導関数を求めると,

$f_x(x,y) = 4x^3 - 2y = 4x^3 - 2y = 2(2x^3 - y)$,

$f_y(x,y) = -2x + 4y = -2(x - 2y)$,

$f_{xx}(x,y) = 12x^2, \quad f_{xy}(x,y) = -2, \quad f_{yy}(x,y) = 4.$

また $\Delta(x,y) = 12x^2 \cdot 4 - (-2)^2 = 4(12x^2 - 1)$.

$\boxed{\text{Step2}}$ もし $(x,y) = (a,b)$ で極値をとるなら $f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ が必要であり,

つまり $2a^3 - b = 0 \quad \cdots (*1)$ かつ $a - 2b = 0 \quad \cdots (*2)$.

$(*2)$ より $a = 2b$ なので, それを $(*1)$ に代入して

$2(2b)^3 - b = 0 \Longleftrightarrow b(16b^2 - 1) = 0$. つまり $b = 0,\ \pm\dfrac{1}{4}$ であり, そのとき順に $a = 0,\ \pm\dfrac{1}{2}$.

よって極値をとる候補は $(0,0)$, $(\pm 1/2, \pm 1/4)$.

$\boxed{\text{Step3}}$ ● $(0,0)$ において $\Delta(0,0) = 4(12 \cdot 0 - 1) < 0$ なので鞍点（極値をとらない）.

● $(\pm 1/2, \pm 1/4)$ において $\Delta(\pm 1/2, \pm 1/4) = 4(12 \cdot (\pm 1/2)^2 - 1) = 4(3 - 1) > 0$

なので極値をとる. 今, $f_{xx}(\pm 1/2, \pm 1/4) = 12 \cdot (\pm 1/2)^2 > 0$ なのでいずれも極小であり,

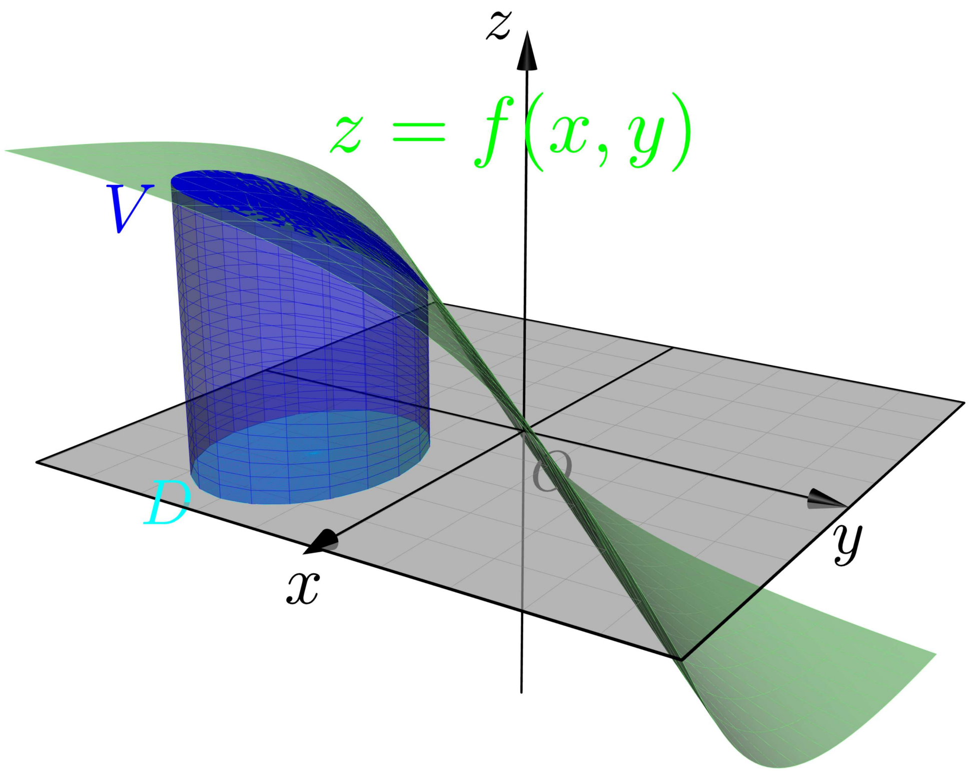
極小値は $f(\pm 1/2, \pm 1/4) = -1/16$.

□ 二重積分

領域 D 上の $f(x,y)$ の二重積分を以下のように定義する．

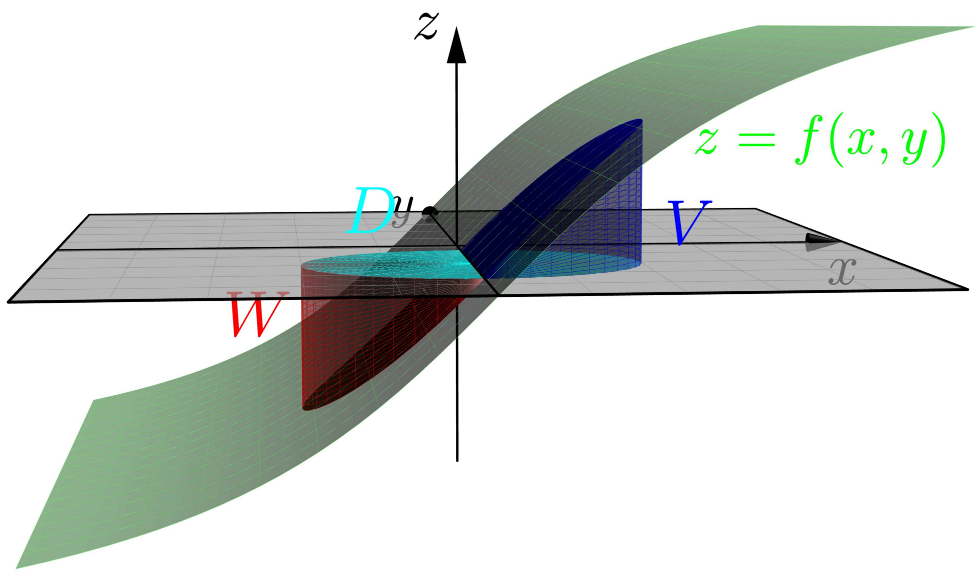
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \stackrel{\text{def}}{=} V\,(\text{体積}).$$

V は D と $z=f(x,y)$ ではさまれる立体とする．ただし，立体が xy 平面より下にある部分はマイナスにする．



例 右図のようなとき，

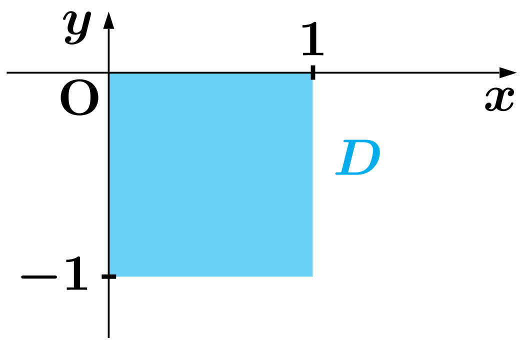
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = V - W.$$



◎ 長方形領域上の二重積分

$D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ のとき（つまり D が長方形領域のとき），

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy.$$



例 $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$ のとき，

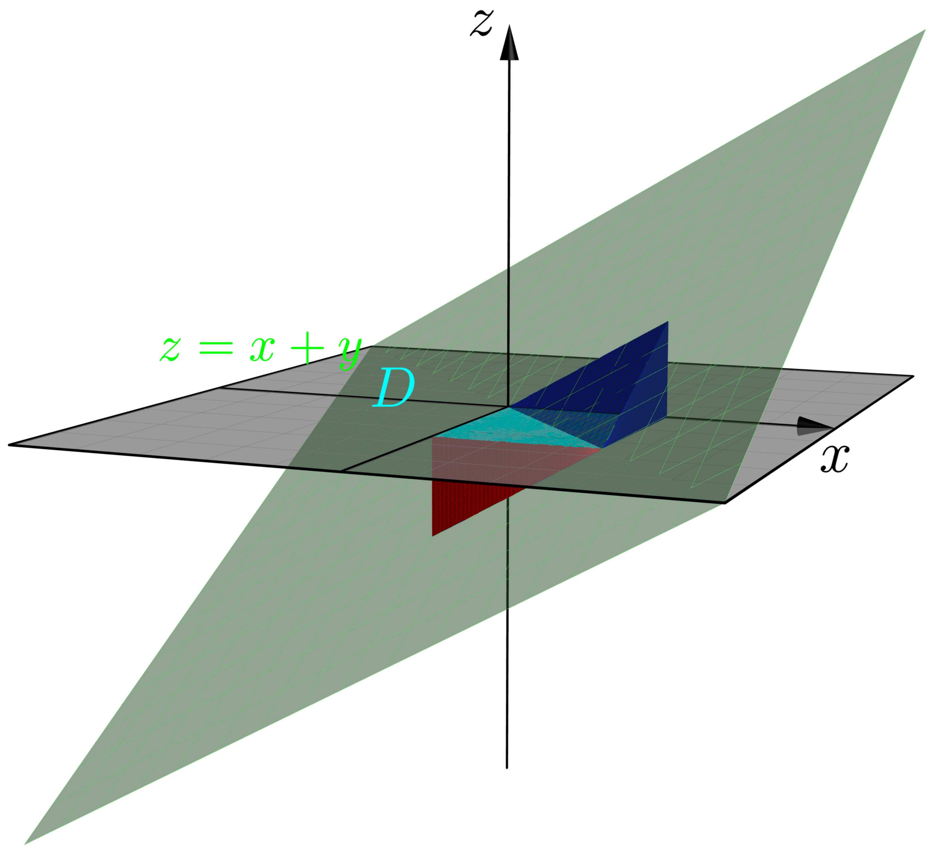
$$\iint_D (x+y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_{-1}^0 (x+y)\,dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=-1}^{y=0} dx$$

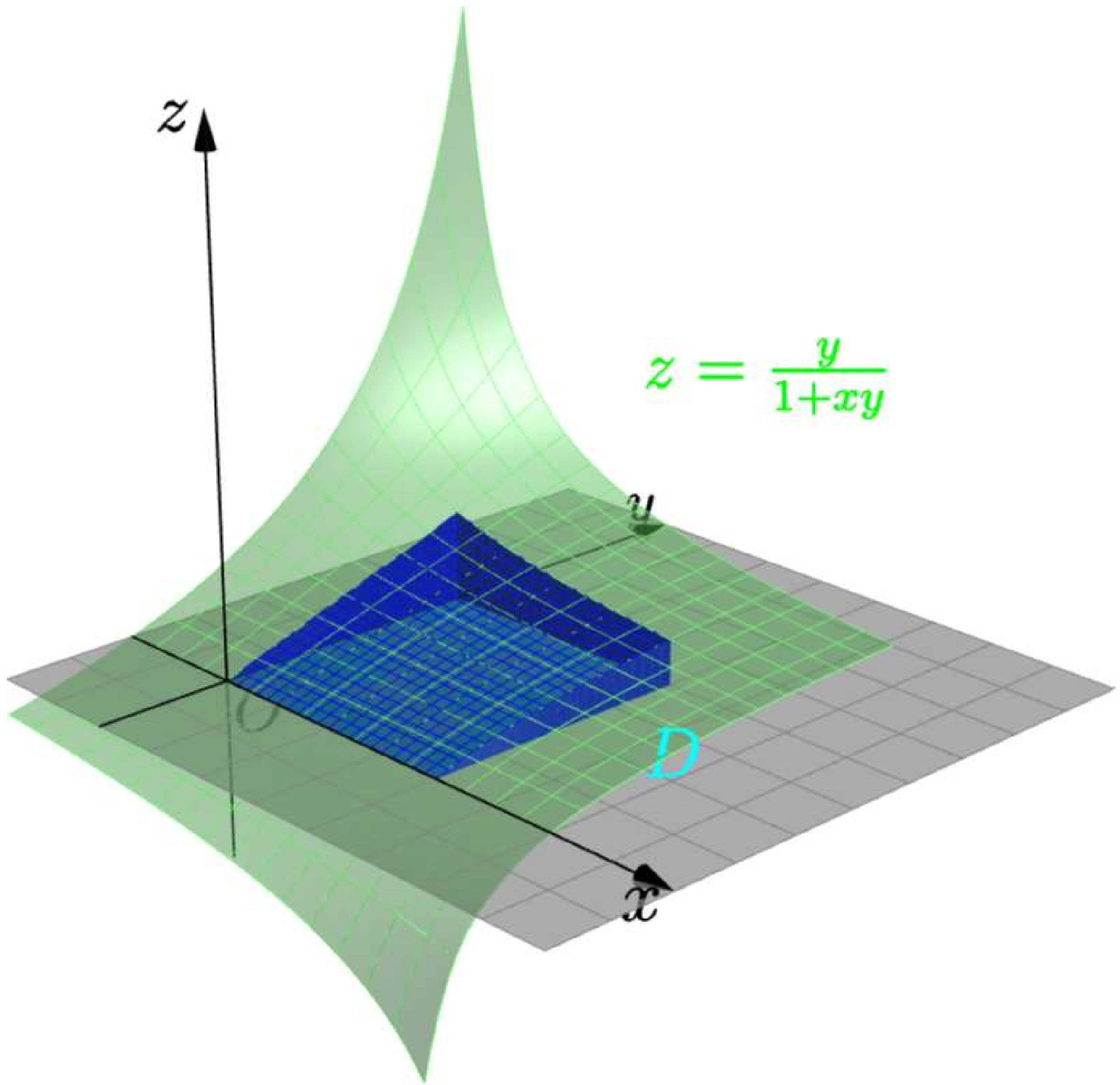
$$= \int_0^1 \left\{ 0 - \left(-x + \frac{1}{2} \right) \right\} dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right]_0^1 = 0.$$



$\boxed{例}$ $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ **のとき,**

$$\iint_D \frac{y}{1+xy}\,dxdy$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{y}{1+xy}\,dx \right\} dy$$
$$= \int_0^1 \Big[\log|1+xy| \Big]_{x=0}^{x=1} dy$$
$$= \int_0^1 \Big\{ \log|1+y| - \log 1 \Big\}\,dy$$
$$= \int_0^1 \log|1+y|\,dy$$
$$= \int_0^1 (1+y)' \log|1+y|\,dy$$
$$= \Big[(1+y)\log|1+y|\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1+y}{1+y}\,dy$$
$$= 2\log 2 - 1\cdot\log 1 - \int_0^1 1\,dy$$
$$= 2\log 2 - \Big[y\Big]_0^1 = 2\log 2 - 1.$$



問題 　**問１（ｐ．１２１）** (1), (3)

問題　問１（p．１２１）

(1) $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 0 \end{cases}$ のとき，

$$\iint_D (x+y)\,dxdy$$
$$= \int_{-1}^{0} \left\{ \int_0^1 (x+y)\,dx \right\} dy$$
$$= \int_{-1}^{0} \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=0}^{x=1} dy$$
$$= \int_{-1}^{0} \left\{ \left(\frac{1}{2} + y \right) - 0 \right\} dy$$
$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2} + y \right) dy$$
$$= \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{0} = 0.$$

(3) $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$ のとき，

$$\iint_D e^x \sin y\,dxdy$$
$$= \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^1 e^x \sin y\,dx \right\} dy$$
$$= \int_0^{\pi} \left[e^x \sin y \right]_{x=0}^{x=1} dy$$
$$= \int_0^{\pi} \left\{ e \sin y - \sin y \right\} dy$$
$$= (e-1) \int_0^{\pi} \sin y\,dy$$
$$= (e-1) \left[-\cos y \right]_0^{\pi} = 2(e-1).$$

問題　問２（p．１２１）**(1)**, **(2)**

問題　問２（p．１２１）

(1) $D : \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ -e \le y \le -1 \end{cases}$ のとき，

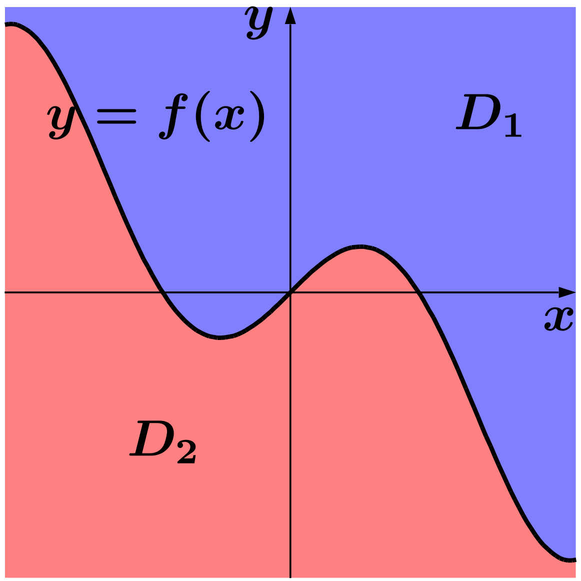
$$\iint_D \frac{1}{xy}\,dxdy$$
$$= \int_{-e}^{-1} \left\{ \int_1^2 \frac{1}{xy}\,dx \right\} dy$$
$$= \int_{-e}^{-1} \left[\frac{1}{y} \log|x| \right]_{x=1}^{x=2} dy$$
$$= \int_{-e}^{-1} \left\{ \frac{1}{y} \log 2 - 0 \right\} dy$$
$$= \log 2 \int_{-e}^{-1} \frac{1}{y}\,dy$$
$$= \log 2 \Big[\log|y| \Big]_{-e}^{-1} = \log 2 (0 - \log e)$$
$$= -\log 2.$$

(2) $D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ のとき，

$$\iint_D y\cos(xy)\,dxdy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^1 y\cos(xy)\,dx \right\} dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sin(xy) \Big]_{x=0}^{x=1} dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big\{ \sin y - 0 \Big\}\, dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy$$
$$= \Big[-\cos y \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1.$$

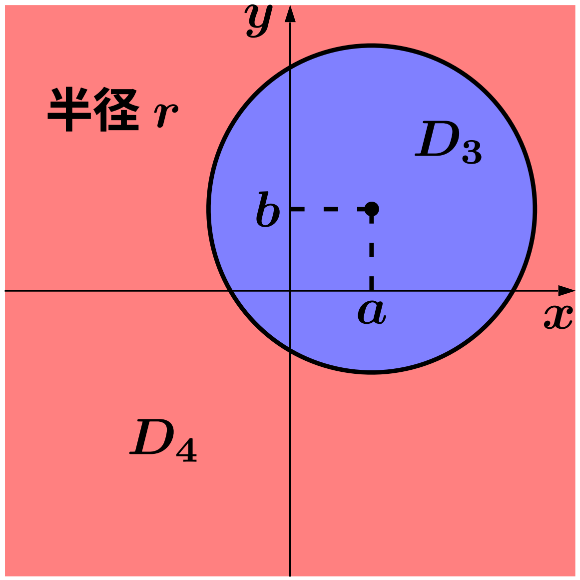
復習 不等式の表す領域

$D_1 : y \geq f(x)$, $D_2 : y \leq f(x)$

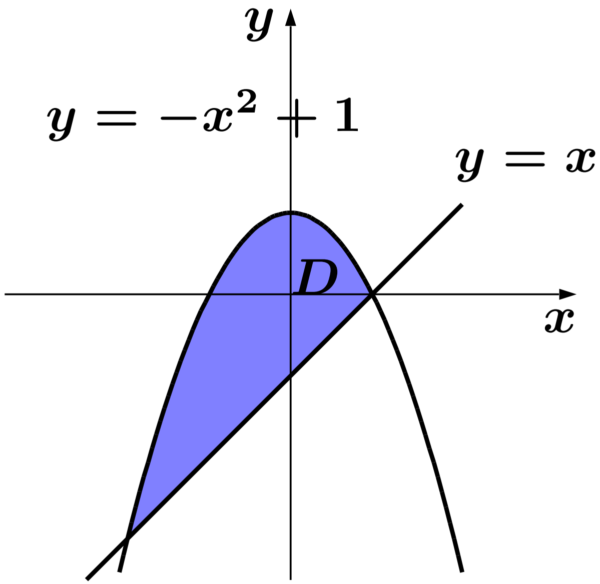


$D_3 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$,

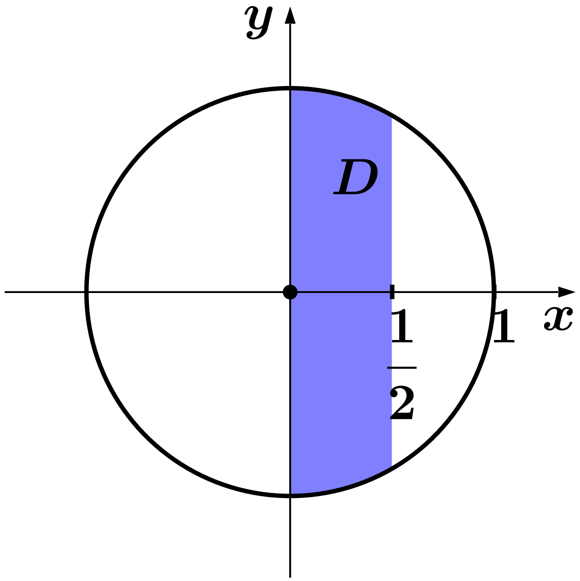
$D_4 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \geq r^2$



例 $D : x - 1 \leq y \leq -x^2 + 1$



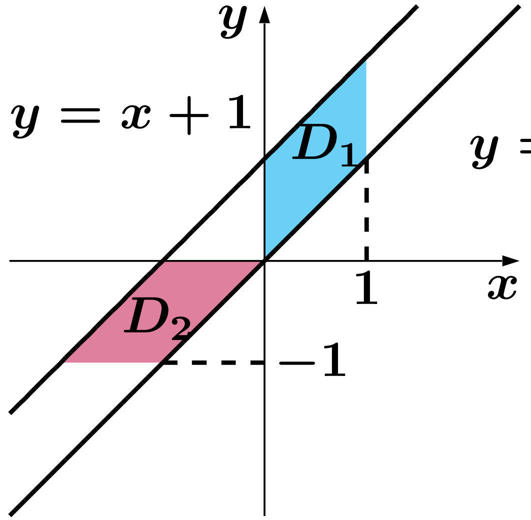
例 $D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1/2 \end{cases}$



□ 縦線形領域・横線形領域

D : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ p(x) \leq y \leq q(x) \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l}\text{ただし } a \leq x \leq b \\ \text{で } p(x) \leq q(x)\end{array}\right)$ の形で表せる領域を縦線形領域と呼び，

D : $\begin{cases} p(y) \leq x \leq q(y) \\ a \leq y \leq b \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l}\text{ただし } a \leq y \leq b \\ \text{で } p(y) \leq q(y)\end{array}\right)$ の形で表せる領域を横線形領域と呼ぶ.

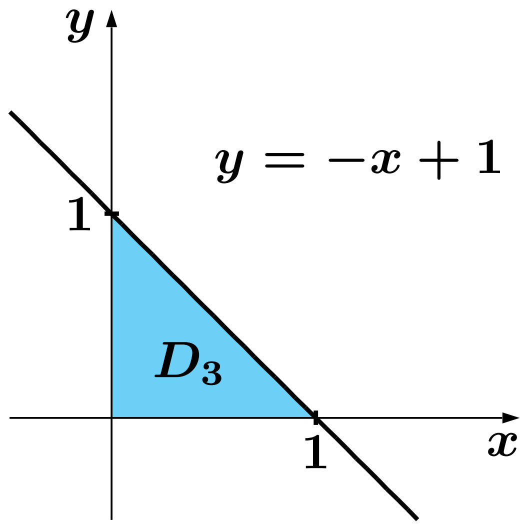


例 D_1 : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq x + 1 \end{cases}$ は縦線形領域.

例 D_2 : $\begin{cases} y - 1 \leq x \leq y \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$ は横線形領域.

例 D_3 : $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$ は縦線形領域．なぜなら，$x + y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq -x + 1$ に注意して図を描くと右のようになり

D_3 : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq -x + 1 \end{cases}$ と表すことができるから.



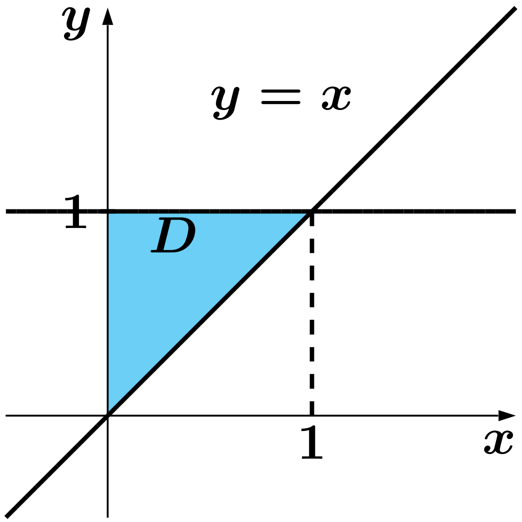
例 (問題集p．６９，２．(3))

$D:\ 0\leq x\leq y\leq 1$ で表される領域を,

$0\leq x\leq y\leq 1 \Leftrightarrow x\geq 0$ かつ $y\geq x$ かつ $y\leq 1$

であることに注意して, 図を描くと右のようになる.

よって $D:\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ x\leq y\leq 1 \end{cases}$.

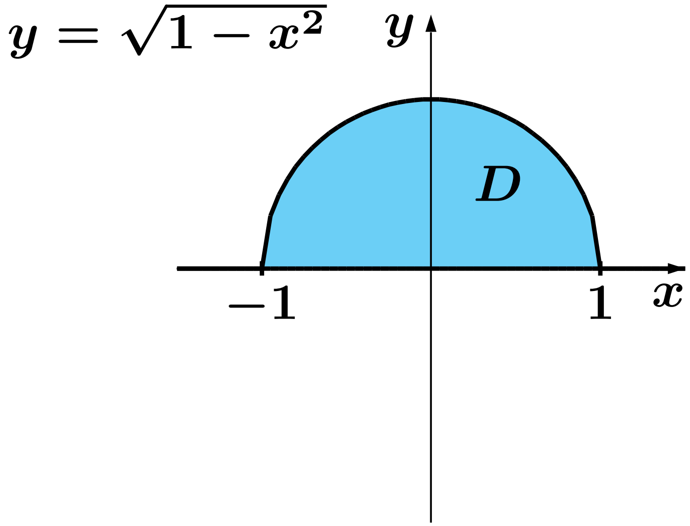


例 (問題集p．６９，２．(7))

$D:\begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ y\geq 0 \end{cases}$ で表される領域の図を描くと右

のようになり

$D:\begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$.



問題 ２．（問題集p．６９）

(1) $D:\begin{cases} x+y\leq 2 \\ x\geq 0,\ \ y\geq 0 \end{cases}$

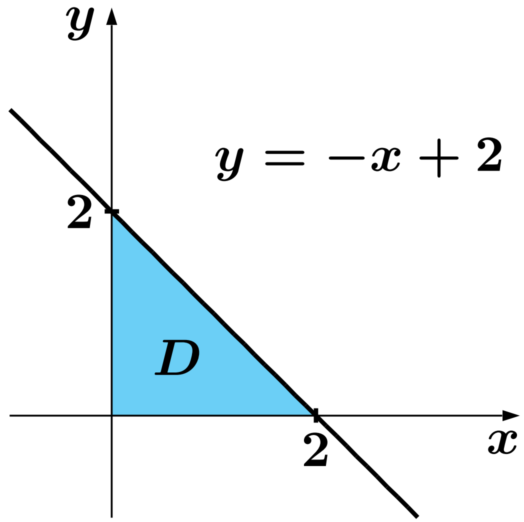
(4) $D: x^2-1\leq y\leq 0$

問題 2．（問題集 p．６９） (1), (4)

(1) $D:\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

の表す領域を，$x+y \leq 2 \Leftrightarrow y \leq -x+2$ に注意して図を描くと右のようになり

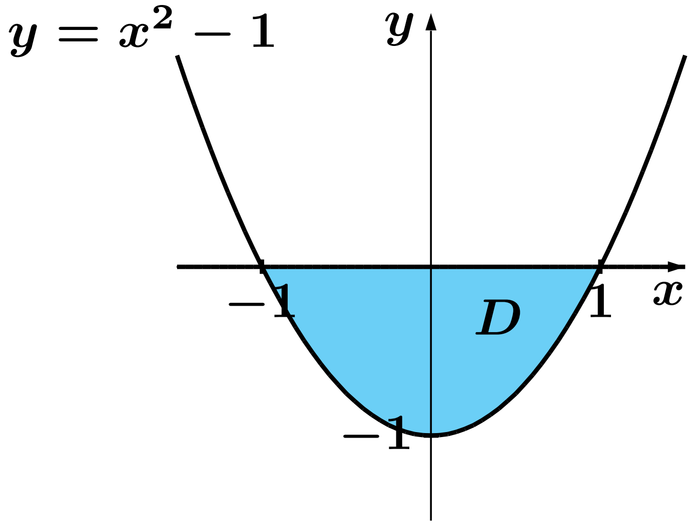
$$D:\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq -x+2 \end{cases}.$$



(4) $D: x^2-1 \leq y \leq 0$

の表す領域の図を描くと右のようになり

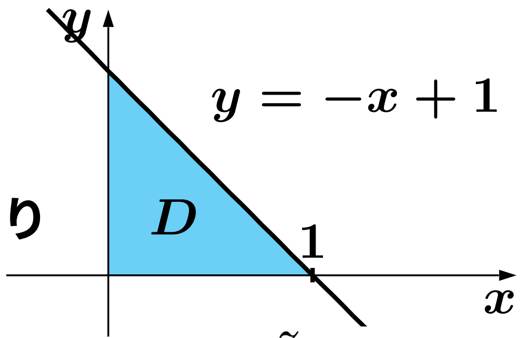
$$D:\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2-1 \leq y \leq 0 \end{cases}.$$



◎ 縦線形領域上の二重積分

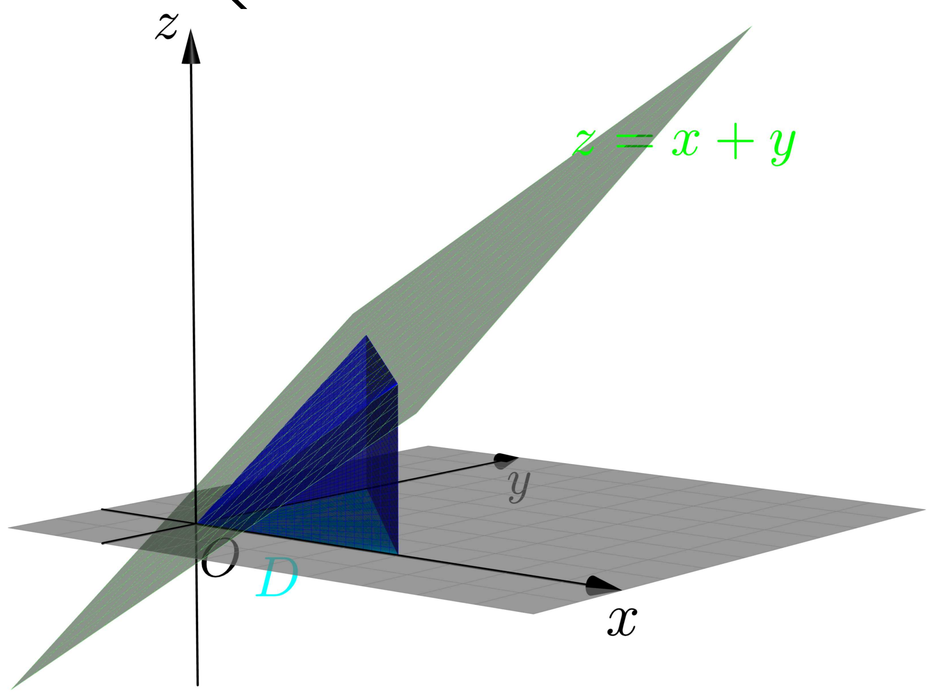
$$D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ p(x) \leq y \leq q(x) \end{cases} \quad \text{のとき，} \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

例 $D : \begin{cases} x + y \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$ のとき，



$I = \displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$ を求める．まず D は右図より

$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq -x+1 \end{cases}$ と変形できる．よって



$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^{-x+1} (x+y)\,dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=-x+1} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ x(-x+1) + \frac{(-x+1)^2}{2} - 0 \right\} dx$$

$$= \int_0^1 (-x+1)\frac{x+1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

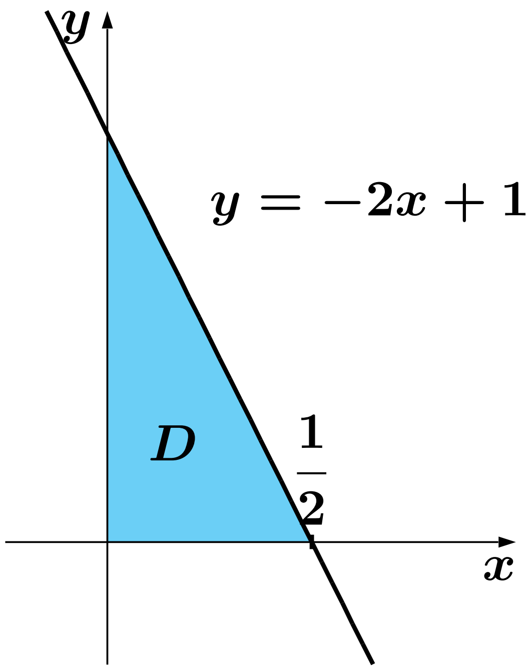
問題 問3（p．125）(1)，　(2)

問題 問３（p．１２５）

(1) $D : \begin{cases} 2x + y \leq 1 \\ x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{cases}$ のとき，

$I = \displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を求める．まず D は右図より

$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq -2x + 1 \end{cases}$ と変形できる．よって



$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{-2x+1} xy\,dy \right\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=-2x+1} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{x(-2x+1)^2}{2} - 0 \right\} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (4x^3 - 4x^2 + x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2^4} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 \right) = \frac{1}{96}.$$

問題 問3（p．125）

(2) $D:\begin{cases} x^2-y\leq 0 \\ -x+y\leq 2 \end{cases}$ のとき，

$I=\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ を求める．まず D は右図より

$D:\begin{cases} -1\leq x\leq 2 \\ x^2\leq y\leq x+2 \end{cases}$ と変形できる．よって

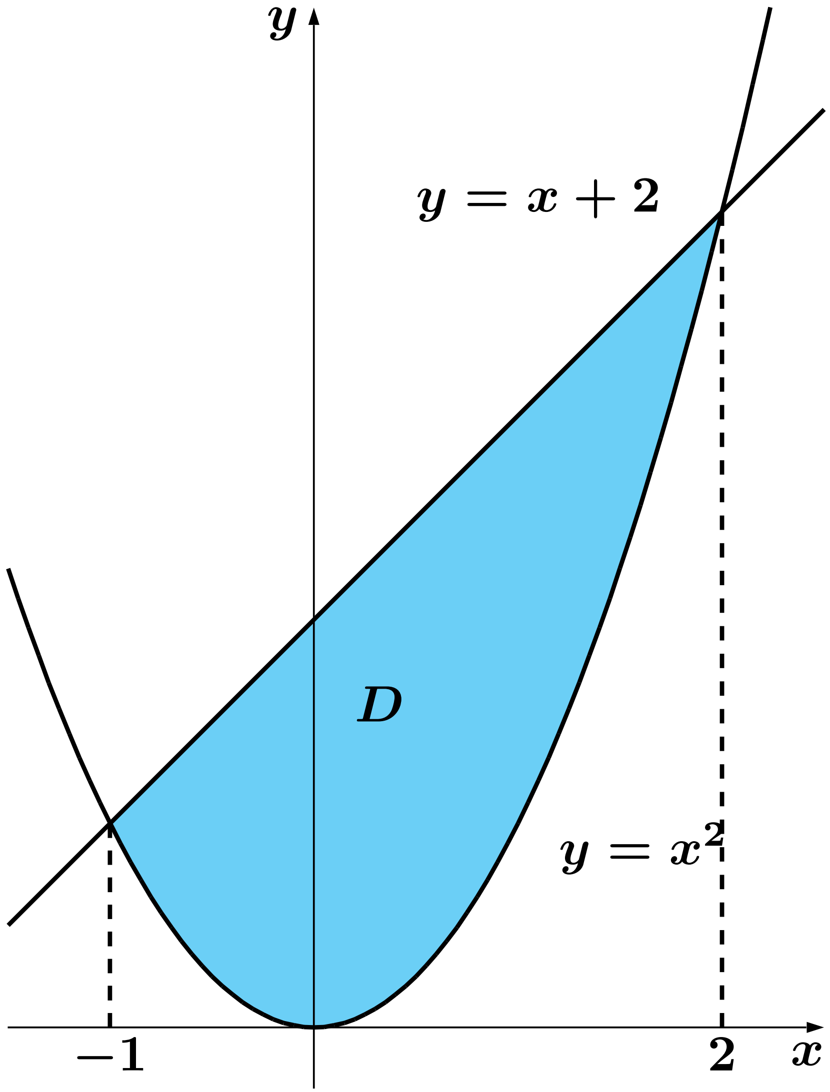
$$I=\int_{-1}^{2}\left\{\int_{x^2}^{x+2} y\,dy\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x+2}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left\{\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{(x^2)^2}{2}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(-x^4+x^2+4x+4)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right]_{-1}^{2}=\frac{36}{5}.$$



$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases}$ から y を消去して

$x^2=x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$

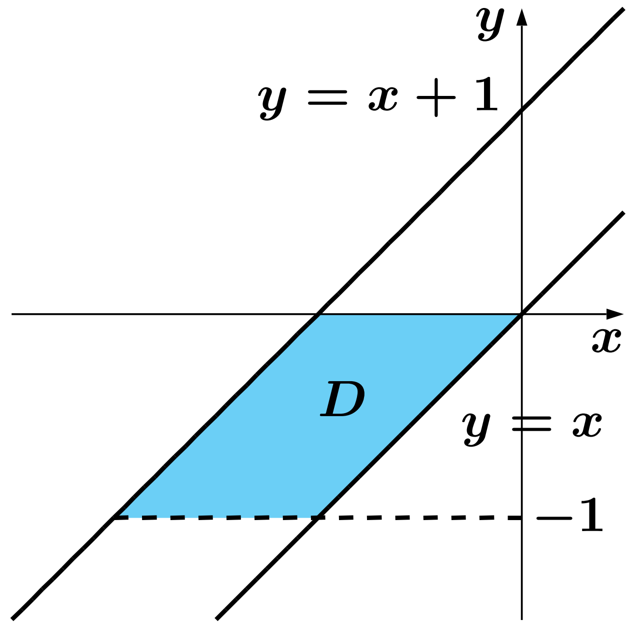
$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1,\ 2$

◎ 横線形領域上の二重積分

$$D:\begin{cases} p(y) \le x \le q(y) \\ a \le y \le b \end{cases} \quad \text{のとき,} \quad \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy$$

例 $D:\begin{cases} y-1 \le x \le y \\ -1 \le y \le 0 \end{cases}$ のとき,

$I = \iint_D (x+y)\,dxdy$ を求める.



$$I = \int_{-1}^{0} \left\{ \int_{y-1}^{y} (x+y)\,dx \right\} dy$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=y-1}^{x=y} dy$$

$$= \int_{-1}^{0} \left\{ \left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) - \left(\frac{(y-1)^2}{2} + y(y-1) \right) \right\} dy$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(y - \frac{1}{2} + y \right) dy = \int_{-1}^{0} \left(2y - \frac{1}{2} \right) dy$$

$$= \left[y^2 - \frac{y}{2} \right]_{-1}^{0} = -\frac{3}{2}.$$

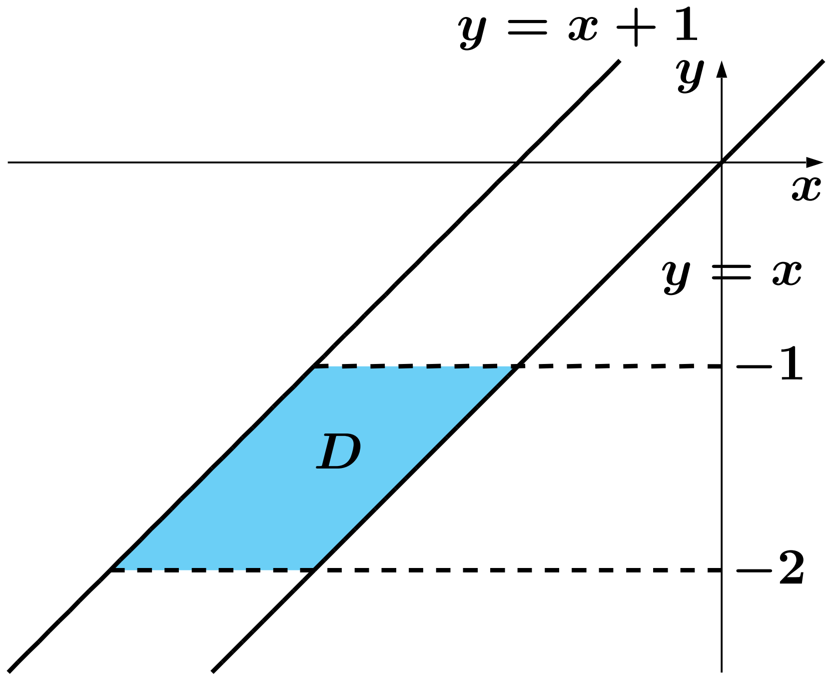
追加問題 $D:\begin{cases} y-1 \le x \le y \\ -2 \le y \le -1 \end{cases}$

のとき, $I = \iint_D \frac{x}{y}\,dxdy$ を求めよ.

追加問題

$$D:\begin{cases} y-1\leq x\leq y \\ -2\leq y\leq -1 \end{cases}$$ のとき,

$I=\iint_D \dfrac{x}{y}\,dxdy$ を求めよ.



解答 $I=\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left\{\int_{y-1}^{y}\frac{x}{y}\,dx\right\}dy$

$$=\int_{-2}^{-1}\left[\frac{x^2}{2y}\right]_{x=y-1}^{x=y}dy$$

$$=\int_{-2}^{-1}\left\{\frac{y}{2}-\frac{(y-1)^2}{2y}\right\}dy$$

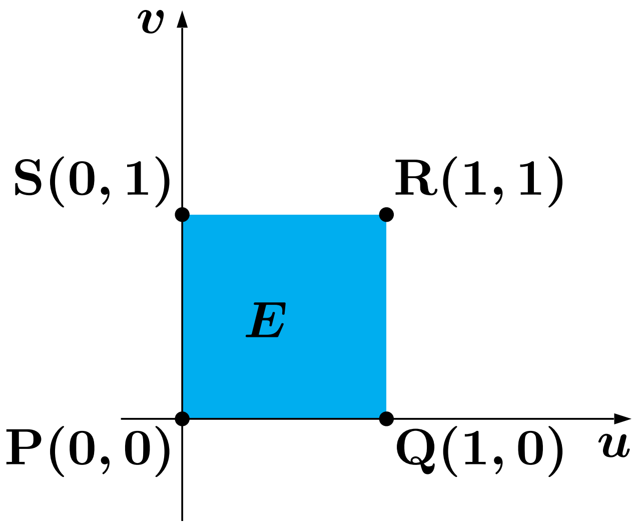
$$=\int_{-2}^{-1}\left(1-\frac{1}{2y}\right)dy$$

$$=\left[y-\frac{\log|y|}{2}\right]_{-2}^{-1}=1+\frac{\log 2}{2}.$$

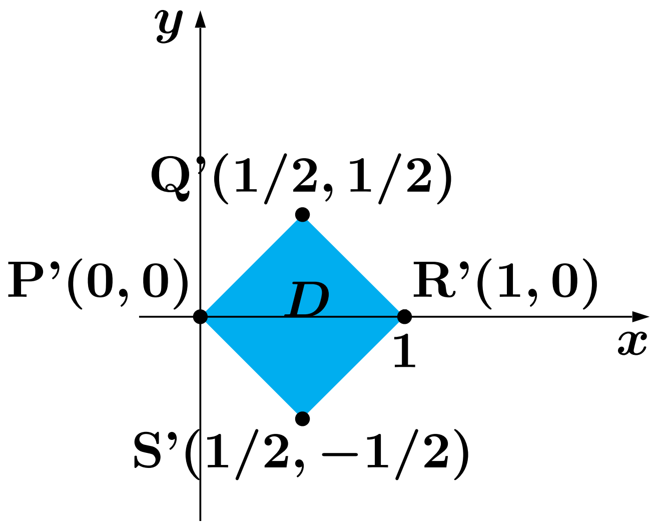
□ 変数変換（置換）とヤコビアン

関係式 $\begin{pmatrix} x = \phi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{pmatrix}$ によって変数変換を表し，$J \overset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ をその変換のヤコビアンと呼ぶ．点 (u,v) がある領域 E を動くとき，上の関係式の通して，点 (x,y) が領域 D を重複なく動くならば，E と D は１対１で対応すると呼ぶ．（$D \leftrightarrow E$ などと書く．）

例 $E : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$ 　　　　$D : \begin{cases} 0 \leq x + y \leq 1 \\ 0 \leq x - y \leq 1 \end{cases}$



$$\begin{pmatrix} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u = x + y \\ v = x - y \end{pmatrix}$$



$$J = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

◎ 二重積分の変数変換

変数変換 $\begin{pmatrix} x = \phi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{pmatrix}$ によって領域 D が E に（ほぼ）１対１で対応しているとする.

このとき $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(\phi(u,v),\ \psi(u,v))\,|J|\,dudv.$ （J はヤコビアン.)

例 $\displaystyle I = \iint_D (x+y)^2(x-y)^5\,dxdy,$

$D : \begin{cases} 0 \leq x+y \leq 1 \\ 0 \leq x-y \leq 1 \end{cases}$ を考える.

ここで変数変換 $\begin{pmatrix} u = x+y \\ v = x-y \end{pmatrix}$ を使う．そのとき

D と対応する領域は $E : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$ となる（注）.

また $\begin{pmatrix} u = x+y \\ v = x-y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{pmatrix}$ なので

$$J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

よって

$$I = \iint_E u^2v^5\left|-\frac{1}{2}\right|\,dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\int_0^1 u^2v^5\,dv\right\}du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{u^2v^6}{6}\right]_{v=0}^{v=1} du$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 u^2\,du = \cdots = \frac{1}{36}.$$

（注）

D を表す不等式に変換の式を代入した.

問題 問５（p．１２９）

問題 問5（p．129）

$$I=\iint_D e^{x-y}\sin(x+y)\,dxdy,$$

$D:\begin{cases}0\le x+y\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0\le x-y\le 1\end{cases}$ を考える.

ここで変換 $\begin{pmatrix}u=x+y\\ v=x-y\end{pmatrix}$ を使う．そのとき

D と対応する領域は $E:\begin{cases}0\le u\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0\le v\le 1\end{cases}$ となる.

(D を表す不等式に変換の式を代入した.)

また $\begin{pmatrix}u=x+y\\ v=x-y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x=\dfrac{u+v}{2}\\ y=\dfrac{u-v}{2}\end{pmatrix}$ なので

$$J=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

$=-1/2.$

よって $I=\displaystyle\iint_E e^v\sin u\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\int_0^{\pi/2}e^v\sin u\,du\right\}dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\Big[-e^v\cos u\Big]_{u=0}^{u=\pi/2}dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\{0-(-e^v)\}\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^v\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\Big[e^v\Big]_0^1=\frac{e-1}{2}.$$

問題 5．（問題集 p．71） (4)

$$I=\iint_D e^{-(x+y)^2}\,dxdy,$$

$D:\begin{cases}x+y\le 1\\ x\ge 0,\ \ y\ge 0\end{cases}$

変換 $\begin{pmatrix}x=u-uv\\ y=uv\end{pmatrix}$

問題 5．（問題集p．71）(4)

$$I=\iint_D e^{-(x+y)^2}\,dxdy,\ D:\begin{cases} x+y\le 1 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}.$$

ここで変換 $\begin{pmatrix} x=u-uv \\ y=uv \end{pmatrix}$ を使う.

このとき $x+y\le 1 \Leftrightarrow u\le 1$,

$x\ge 0 \Leftrightarrow u(1-v)\ge 0\cdots(*1)$,

$y\ge 0 \Leftrightarrow uv\ge 0\cdots(*2)$ である（注）．

ここで $u<0$ ならば $(*1)\Leftrightarrow v\ge 1$, $(*2)\Leftrightarrow v\le 0$ となり，これらを共に満たす実数 v はないので $u\ge 0$.

そのとき $(*1)\Leftrightarrow v\le 1$, $(*2)\Leftrightarrow v\ge 0$ となり，

よって D と対応する領域は $E:\begin{cases} 0\le u\le 1 \\ 0\le v\le 1 \end{cases}$ となる.

また $\begin{pmatrix} x=u-uv \\ y=uv \end{pmatrix}$ より

$$J=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix}$$

$$=(1-v)u-(-u)v=u.$$

よって

$$I=\iint_E e^{-(u-uv+uv)^2}|u|\,dudv$$

$$I=\iint_E ue^{-u^2}\,dudv$$

（領域 E において $u\ge 0$ だから）

$$=\int_0^1\left\{\int_0^1 ue^{-u^2}\,du\right\}dv$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{1}{2}e^{-u^2}\right]_{u=0}^{u=1}dv$$

$$=\int_0^1\left\{-\frac{1}{2}e^{-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}dv$$

$$=\frac{1-e^{-1}}{2}\int_0^1 dv$$

$$=\frac{1-e^{-1}}{2}\Big[v\Big]_0^1$$

$$=\frac{1-e^{-1}}{2}.$$

（注）

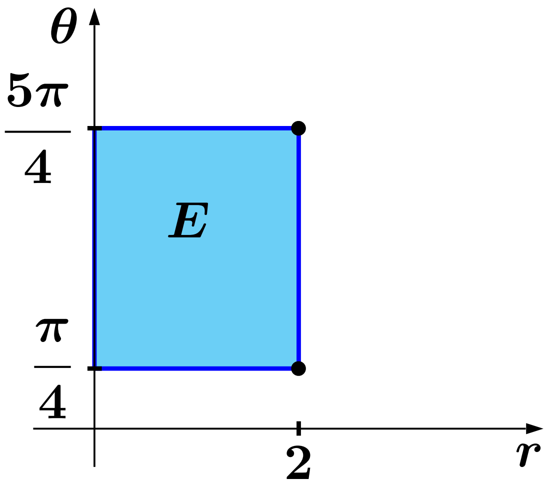
D を表す不等式に変換の式を代入した.

□ 極座標変換

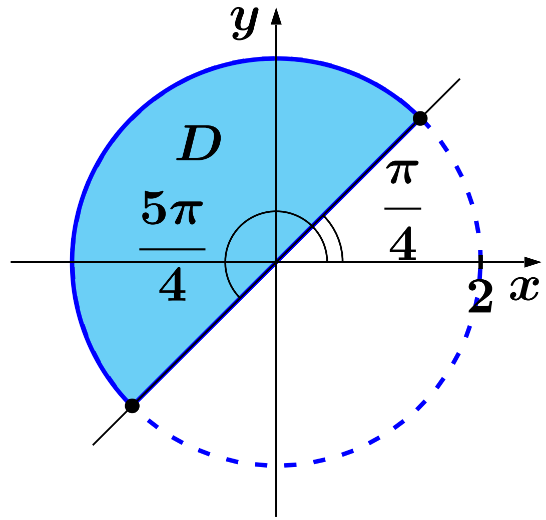
変換 $\begin{pmatrix} x = r\cos\theta & (r \geqq 0) \\ y = r\sin\theta & (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \end{pmatrix}$ による変数変換を極座標変換と呼ぶ.

例 例えば右下の領域 D は, 極座標変換によって左下の領域 E と対応する.

$$E : \begin{cases} 0 \leqq r \leqq 2 \\ \dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{5\pi}{4} \end{cases} \qquad D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 4 \\ y \geqq x \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(x + iy) \end{pmatrix}$$



$$J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\cdot\sin\theta$$

$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$ （つまり 極座標変換のヤコビアンは r.）

◎ 二重積分の変数変換（極座標変換）

極座標変換 $\left(\begin{array}{l} x = r\cos\theta \ \ (r \geq 0) \\ y = r\sin\theta \ \ (0 \leq \theta \leq 2\pi)\text{(注)} \end{array}\right)$ によって D と E が対応しているとき，

J(ヤコビアン)$= r$ であり，よって $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,drd\theta.$

(注)：状況に応じて $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ とすることもある．

例 $\displaystyle I = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,$

$D : x^2+y^2 \leq 1$ を考える．

ここで変換 $\left(\begin{array}{l} x = r\cos\theta \ \ (r \geq 0) \\ y = r\sin\theta \ \ (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{array}\right)$ を使う．

そのとき $x^2+y^2 \leq 1 \Leftrightarrow (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow r^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq r \leq 1$ であるが，

$r \geq 0$ と決めているので $0 \leq r \leq 1$.

また θ については特に条件は増えないので $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

以上より D と対応する領域は $E : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.

よって

$$I = \iint_E \{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\} r\,drd\theta$$

$$= \iint_E r^2 \cdot r\,drd\theta$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} r^3\,d\theta \right\} dr$$

$$= \int_0^1 \Big[r^3\theta \Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr$$

$$= \int_0^1 2\pi r^3\,dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

問題 問６（ｐ．１３１） (1)

問題 問６（ｐ．１３１）(1)

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

$D: x^2+y^2 \leq 2$ を求める.

ここで変換 $\begin{pmatrix} x=r\cos\theta\ (r\geq 0) \\ y=r\sin\theta\ (0\leq\theta\leq 2\pi) \end{pmatrix}$ を使う.

そのとき $x^2+y^2\leq 2 \Leftrightarrow (r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\leq 2$

$\Leftrightarrow r^2\leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq r\leq\sqrt{2}$ であるが,

$r\geq 0$ と決めているので $0\leq r\leq\sqrt{2}$.

また θ については条件は増えないので $0\leq\theta\leq 2\pi$.

以上より D と対応する領域は $E: \begin{cases} 0\leq r\leq\sqrt{2} \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$.

よって

$$I=\iint_E \sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\,r\,drd\theta$$

$$=\iint_E \sqrt{r^2}\cdot r\,drd\theta$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\left\{\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta\right\}dr$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\left[r^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}dr$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi r^2\,dr=2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi.$$

問題 問６（ｐ．１３１）(2)

極座標変換 $\begin{pmatrix} x=r\cos\theta\ (r\geq 0) \\ y=r\sin\theta\ (-\pi\leq\theta\leq\pi) \end{pmatrix}$ を使う.

問題 問６（p．１３１）**(2)**

$I=\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$,

$D: x^2+y^2 \leq x$ を求める.

ここで変換 $\left(\begin{array}{l} x=r\cos\theta\ (r\geq 0) \\ y=r\sin\theta\ (-\pi\leq\theta\leq\pi) \end{array}\right)$ を使う.

そのとき $x^2+y^2 \leq x \Leftrightarrow (r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2 \leq r\cos\theta \Leftrightarrow r\leq\cos\theta$ である.

$r\geq 0$ と決めているので $0\leq r\leq\cos\theta$.

またこれより $0\leq\cos\theta$ なので $-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$.

以上より D と対応する領域は $E:\left\{\begin{array}{l} 0\leq r\leq\cos\theta \\ -\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$.

よって

$$I=\iint_E \frac{r\cos\theta}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\,r\,drd\theta$$

$$=\iint_E \frac{r\cos\theta}{r^2}\,r\,drd\theta$$

$$=\iint_E \cos\theta\,drd\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\int_0^{\cos\theta}\cos\theta\,dr\right\}d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big[r\cos\theta\Big]_{r=0}^{r=\cos\theta}d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{2}\Big\{\frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big\}=\frac{\pi}{2}.$$

問題 ６．(問題集 p．７１) **(2)**

$I=\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy,\ D: 1\leq x^2+y^2\leq 4$

問題 **6.（問題集　p．71）(2)**

$$I=\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy,\ D:1\leq x^2+y^2\leq 4.$$

ここで変換 $\begin{pmatrix} x=r\cos\theta\ (r\geq 0) \\ y=r\sin\theta\ (0\leq\theta\leq 2\pi)\end{pmatrix}$ を使う.

そのとき $1\leq x^2+y^2\leq 4 \Leftrightarrow 1\leq (r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\leq 4 \Leftrightarrow 1\leq r^2\leq 4$ である.

$r\geq 0$ と決めているので $1\leq r\leq 2$.

また θ については条件は増えないので $0\leq\theta\leq 2\pi$.

以上より D と対応する領域は $E:\begin{cases} 1\leq r\leq 2 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{cases}$.

よって

$$I=\iint_E \frac{1}{\{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\}^2}\,r\,drd\theta$$

$$=\iint_E \frac{1}{(r^2)^2}\,r\,drd\theta$$

$$=\iint_E r^{-3}\,drd\theta$$

$$=\int_1^2\left\{\int_0^{2\pi} r^{-3}\,d\theta\right\}dr$$

$$=\int_1^2\Big[r^{-3}\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}dr$$

$$=\int_1^2 2\pi r^{-3}\,dr$$

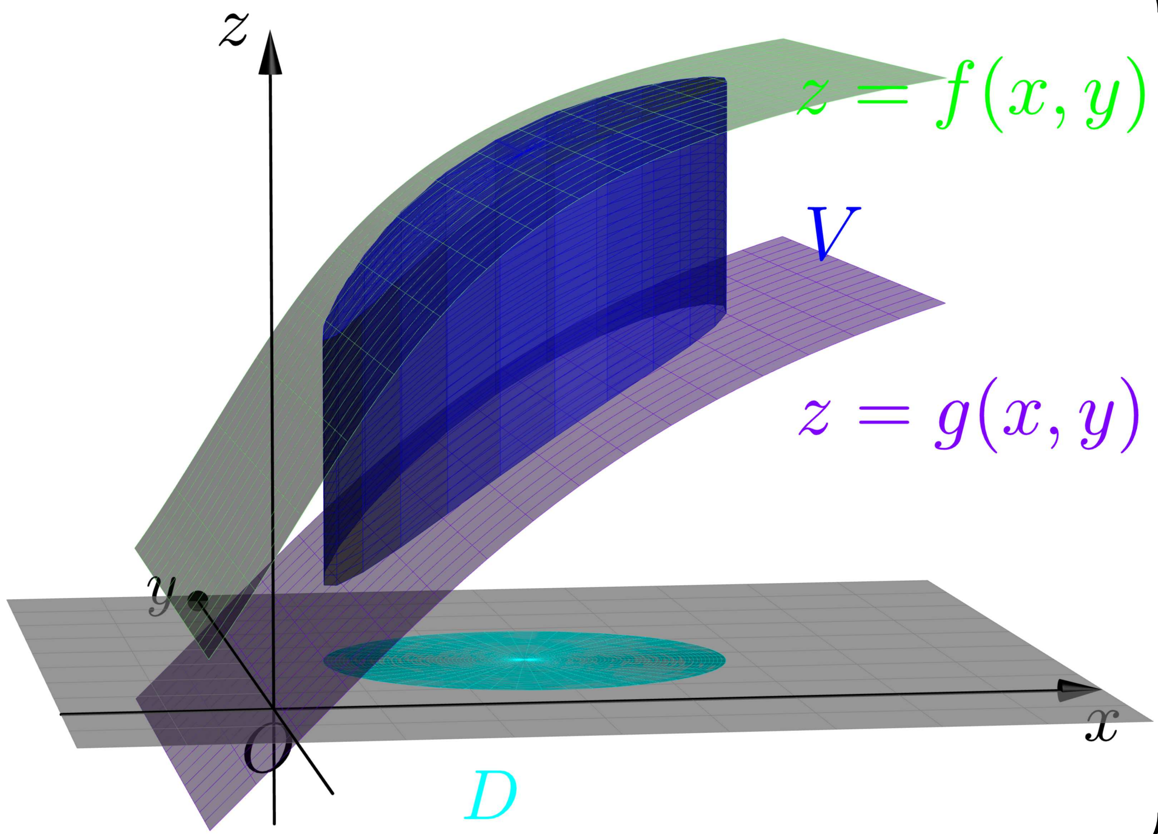
$$=2\pi\left[\frac{r^{-2}}{-2}\right]_1^2$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{3}{4}\pi.$$

◎ 立体の体積

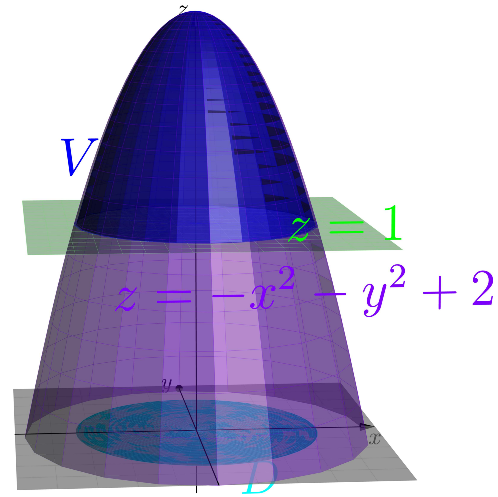
(x, y) が領域 D において常に $f(x, y) \geq g(x, y)$ のとき，D 上で曲面 $z = f(x, y)$ と曲面 $z = g(x, y)$ の間の部分の体積 V は

$$V = \iint_D \{f(x, y) - g(x, y)\}\, dxdy.$$

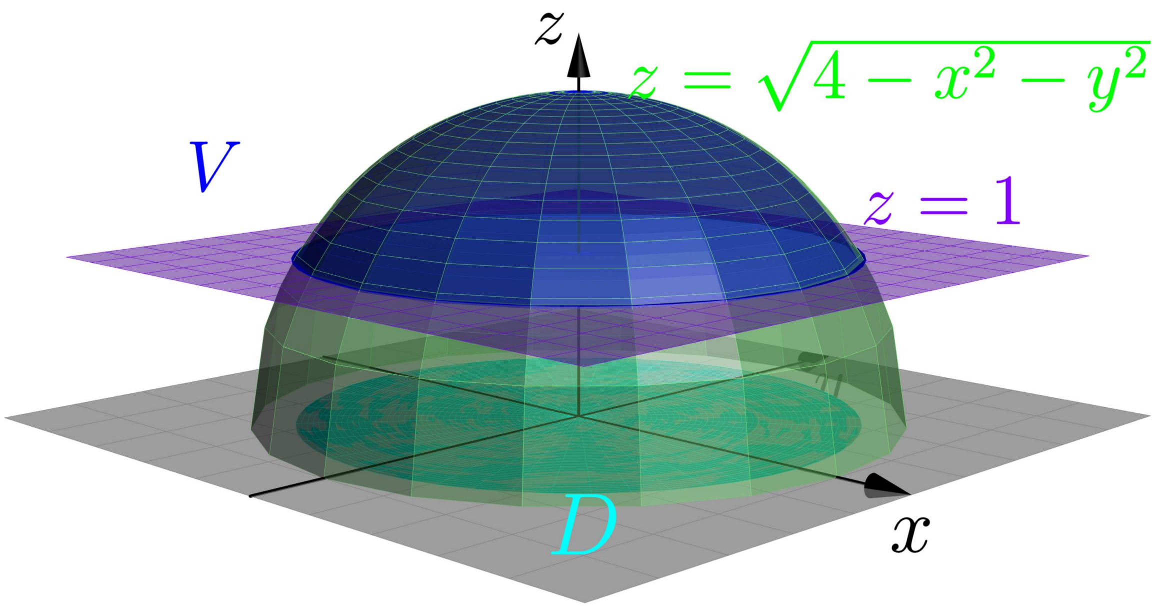


例 $z \leq -x^2 - y^2 + 2$ と $z \geq 1$ の交わりの部分の体積 V を考える．これは言い換えれば曲面 $z = -x^2 - y^2 + 2$ と平面 $z = 1$ で囲まれた部分の体積である．およその図は右のようになり，$z = -x^2 - y^2 + 2$ のほうが上にある．そこで $-x^2 - y^2 + 2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ であることから，$D : x^2 + y^2 \leq 1$ において常に $-x^2 - y^2 + 2 \geq 1$.

よって $V = \iint_D \{(-x^2 - y^2 + 2) - 1\}\, dxdy$ となる．



$\boxed{\text{例}}$ $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ と $z \geq 1$ の交わりの部分の体積 V を求める．それは球面 $x^2+y^2+z^2=4$ (上側) と $z=1$ (下側) で囲まれた部分の体積である．



$x^2+y^2+z^2=4 \Leftrightarrow z^2=4-x^2-y^2$ なので，この球面は $z>0$ において $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ と書ける． また $\sqrt{4-x^2-y^2} \geq 1 \Leftrightarrow 4-x^2-y^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 3$ より $D: x^2+y^2 \leq 3$,

$V=\iint_D \{\sqrt{4-x^2-y^2}-1\}\,dxdy$ となる．

ここで変換 $\begin{pmatrix} x=r\cos\theta \ (r \geq 0) \\ y=r\sin\theta \ (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{pmatrix}$ を使うと，

$x^2+y^2 \leq 3 \Leftrightarrow r^2 \leq 3 \Leftrightarrow r \leq \sqrt{3}$ となり，よって

D と対応する領域は $E: \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.

よって $V=\iint_E \{\sqrt{4-r^2}-1\}\,r\,drd\theta$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\left\{\int_0^{2\pi}(r\sqrt{4-r^2}-r)\,d\theta\right\}dr$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\left[(r\sqrt{4-r^2}-r)\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}dr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(r\sqrt{4-r^2}-r)\,dr$$

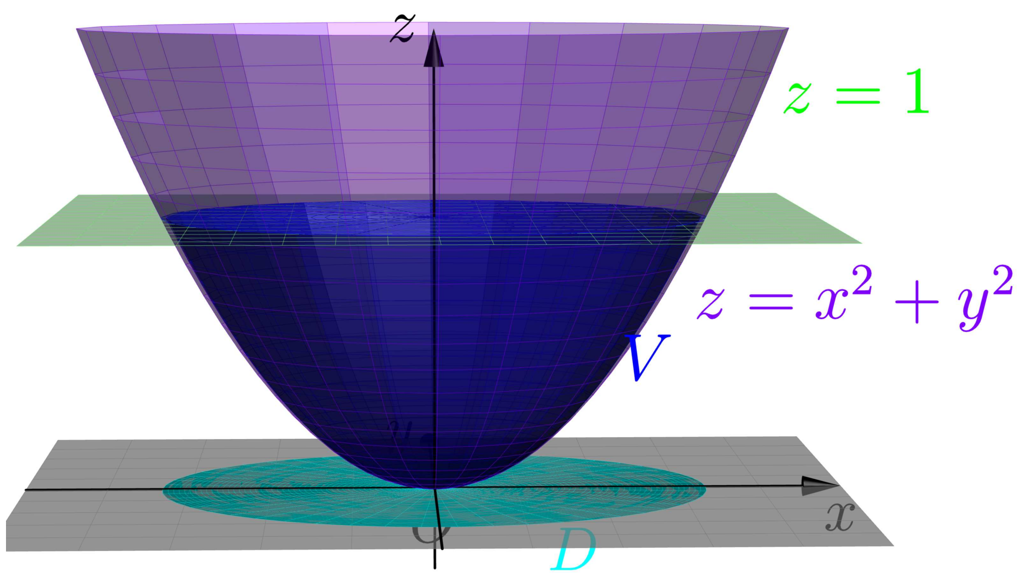
$$=2\pi\left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\cdots=\frac{5}{3}\pi.$$

問題 問７（ｐ．１３４）

問題 問７（ｐ．１３４）

V は曲面 $z=x^2+y^2$ (下側) と $z=1$ (上側) で囲まれた部分の体積である.



$1 \geq x^2+y^2$ となるのは (x,y) が領域 $D: x^2+y^2 \leq 1$ にあるときであり, よって

$$V=\iint_D \{1-(x^2+y^2)\}\,dxdy.$$

ここで変換 $\begin{pmatrix} x=r\cos\theta\ (r \geq 0) \\ y=r\sin\theta\ (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{pmatrix}$ を使う.

そのとき $x^2+y^2 \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \leq 1$ であり，よって $0 \leq r \leq 1$.

以上より D と対応する領域は $E: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.

よって $V=\iint_E \{1-r^2\}\,r\,drd\theta$

$$=\int_0^1 \left\{\int_0^{2\pi}(r-r^3)\,d\theta\right\}dr$$

$$=\int_0^1 \Big[(r-r^3)\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr$$

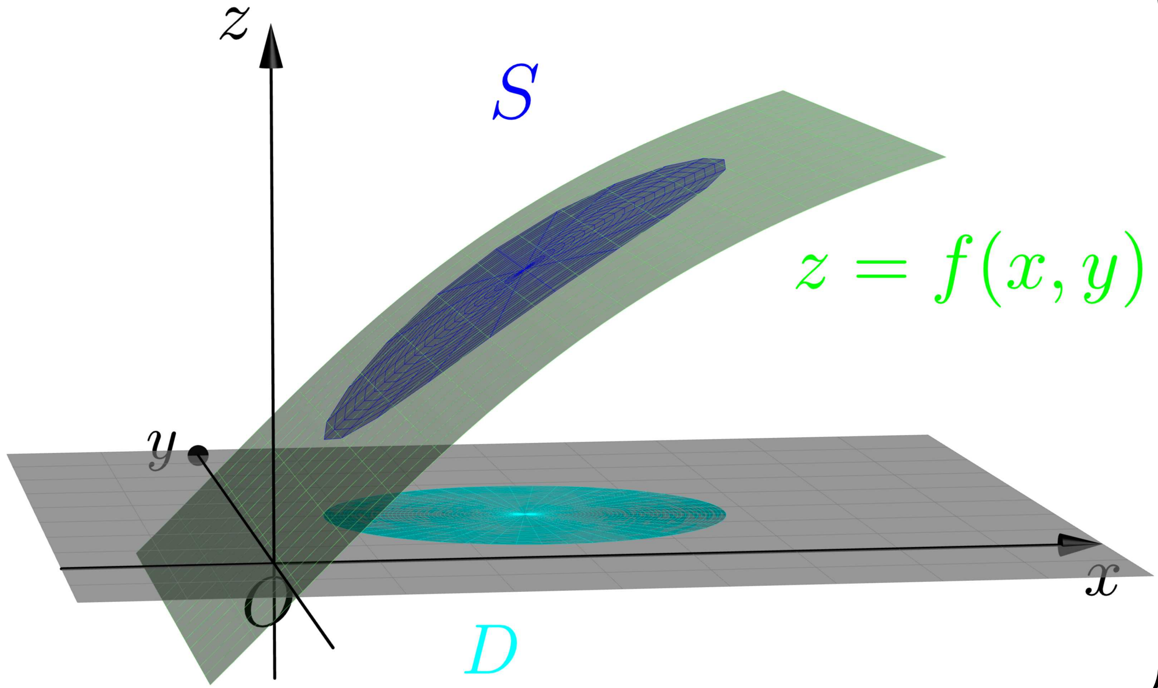
$$=2\pi\int_0^1 (r-r^3)\,dr$$

$$=2\pi\Big[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

◎ 曲面の表面積

領域 D 上における曲面 $z=f(x,y)$ の表面積 S は

$$S=\iint_D \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy.$$



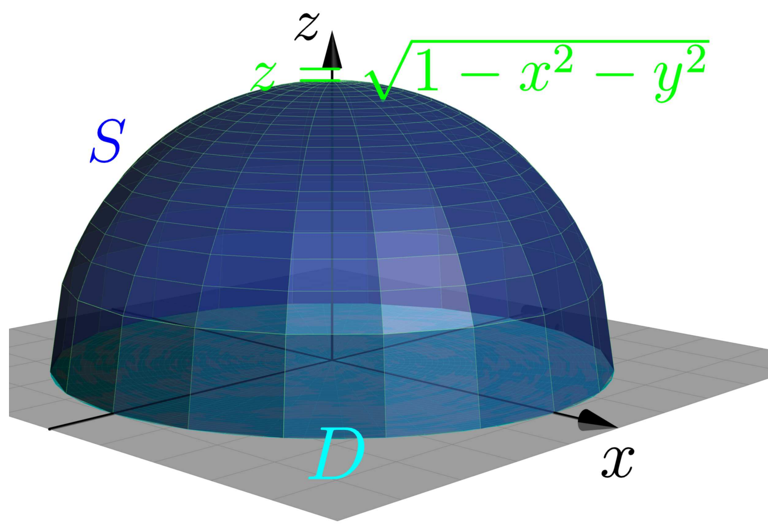
例 曲面 $x^2+y^2+z^2=1(z\geq 0)$ の表面積 S を考える．

この曲面は領域 $D: x^2+y^2\leq 1$ の上にあり，$z\geq 0$ なので曲面の方程式は $z=\sqrt{1-x^2-y^2}=(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ と書ける．

$f(x,y)=(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ とおくと，

$$f_x=\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=-x(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

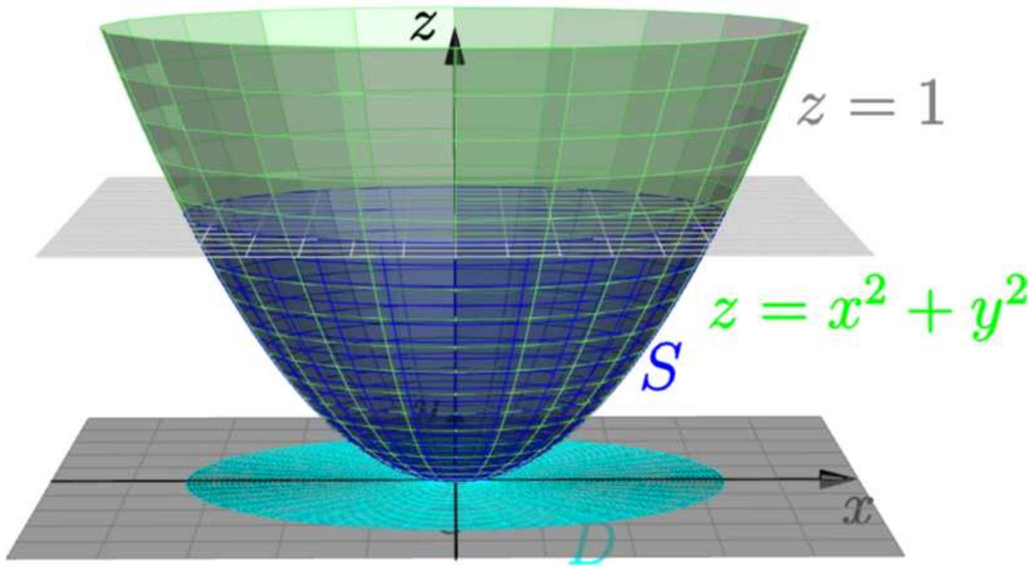
$$f_y=\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2y)=-y(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$



よって $S=\iint_D \sqrt{1+x^2(1-x^2-y^2)^{-1}+y^2(1-x^2-y^2)^{-1}}\,dxdy=\cdots\cdots=2\pi.$

問題 問8（p．137）

$f(x,y)=x^2+y^2$ とおく．曲面 $z=f(x,y)$ において $z\leq 1$ となるのは (x,y) が領域 $D: x^2+y^2\leq 1$ にあるときであり，



よって

$$S=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy.$$

ここで変換 $\begin{pmatrix} x=r\cos\theta\ (r\geq 0) \\ y=r\sin\theta\ (0\leq\theta\leq 2\pi) \end{pmatrix}$ を使う．

そのとき $x^2+y^2\leq 1 \Leftrightarrow r^2\leq 1$ であり，よって $0\leq r\leq 1$.

以上より D と対応する領域は $E:\begin{cases} 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$.

よって

$$S=\iint_E \sqrt{1+(2r\cos\theta)^2+(2r\sin\theta)^2}\,r\,drd\theta$$

$$=\int_0^1\left\{\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}\,d\theta\right\}dr$$

$$=\int_0^1\left[r\sqrt{1+4r^2}\,\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}dr$$

$$=2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$$

問題 8．（問題集 p．72） **(1)**

$x+y+z=1\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ の表面積.

問題 **8．(問題集 p．72)** **(1)**

$x+y+z=1 \Leftrightarrow z=1-x-y$ なので $f(x,y)=1-x-y$ とおく．また $z \geq 0 \Leftrightarrow 1-x-y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1-x$ なので曲面 $z=f(x,y)$ において $x,y,z \geq 0$ となるのは (x,y) が領域 D : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}$

にあるときであり，よって

$$S=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$
$$=\iint_D \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy$$
$$=\sqrt{3}\iint_D 1\,dxdy$$
$$=\sqrt{3}\int_0^1 \left\{\int_0^{1-x} 1\,dy\right\}dx$$
$$=\sqrt{3}\int_0^1 \Big[y\Big]_{y=0}^{y=1-x}\,dx$$
$$=\sqrt{3}\int_0^1 (1-x)\,dx=\cdots=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$