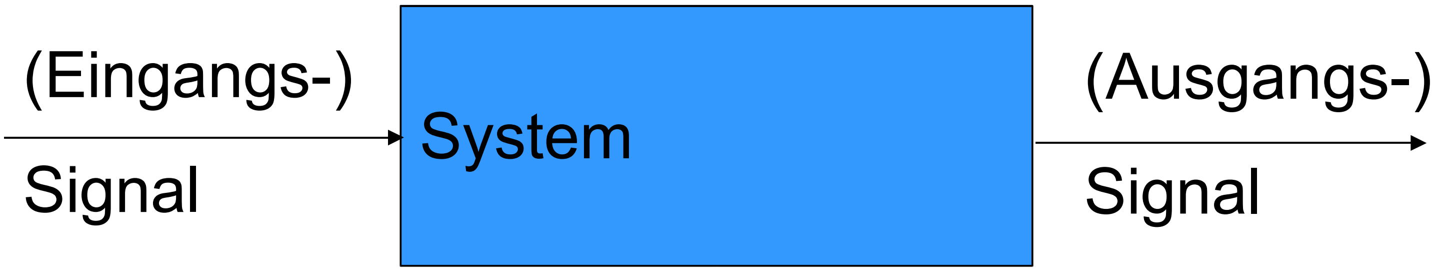
III.1 Einführung in die Beschreibung und Analyse nichtlinearer Systeme

Beschreibung und Analyse nichtlinearer Systeme

- Was ist ein nichtlineares System?
- Klassen nichtlinearer Systeme
- Darstellung nichtlinearer Systeme
- Eigenschaften nichtlinearer Systeme
  vs. Eigenschaften linearer Systeme
- Zusammenfassung

Beschreibung und Analyse nichtlinearer Systeme

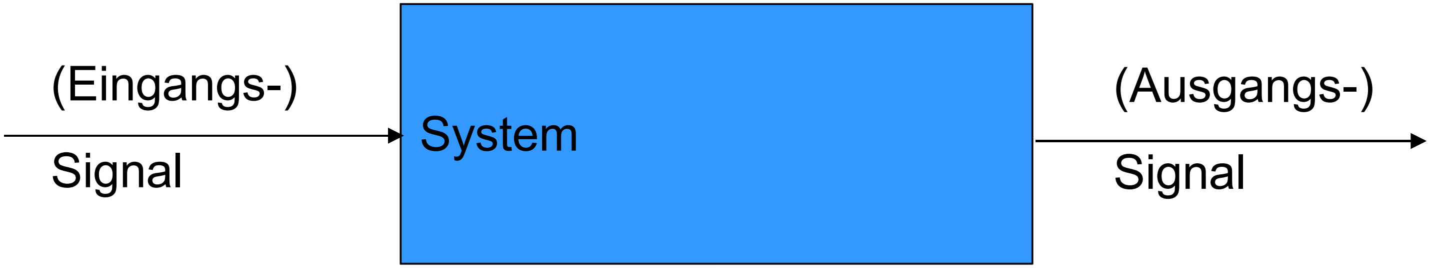
- **Was ist ein nichtlineares System?**
- Klassen nichtlinearer Systeme
- Darstellung nichtlinearer Systeme
- Eigenschaften nichtlinearer Systeme
  vs. Eigenschaften linearer Systeme
- Zusammenfassung



Durch Systeme werden **Signale** transformiert.

System: Operator der Signale in Signale abbildet.

Beschreibung und Analyse nichtlinearer Systeme



Klassifikation von Systemen:

- statisch - dynamisch
- Eingrössensysteme - Mehrgrössensysteme
- zeitkontinuierlich - zeitdiskret
- konzentriert - verteilt
- linear - nichtlinear
- ...

Linearität – Nichtlinearität

System F

Linearitätseigenschaft:

2. Superpositionsprinzip erfüllt:

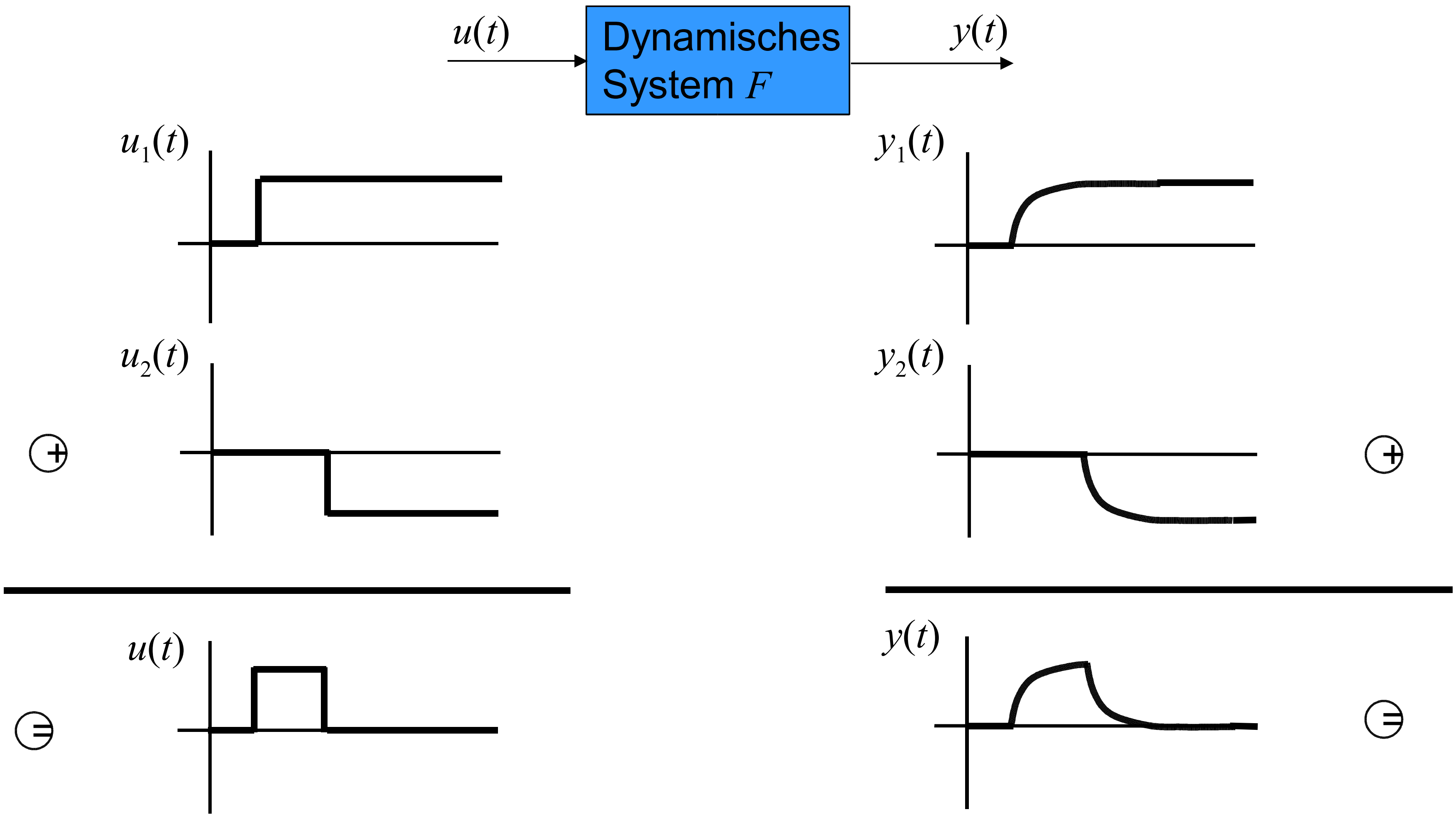
$$F\left[u_1+u_2\right]=F\left[u_1\right]+F\left[u_2\right]$$

1. Homogenitätsprinzip erfüllt:

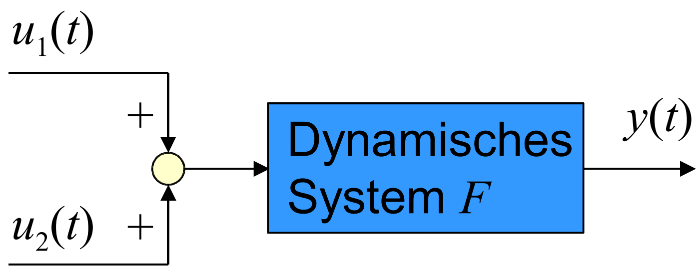
$$F\left[ku\right]=k\ F\left[u\right]$$

Nichtlineares System: nicht linear, d.h. Homogenitätsprinzip und/oder Superpositionsprinzip wird verletzt.

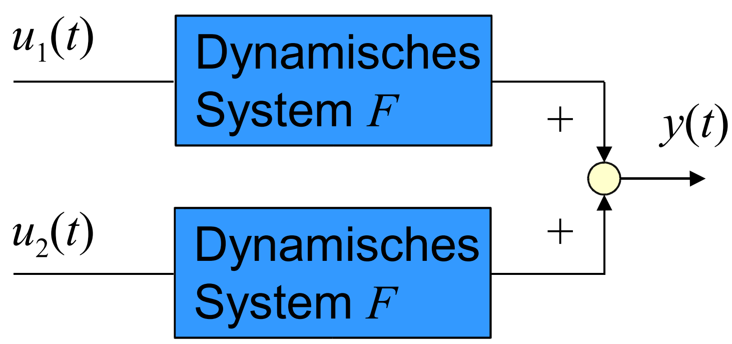
Superpositionsprinzip für dynamische Systeme



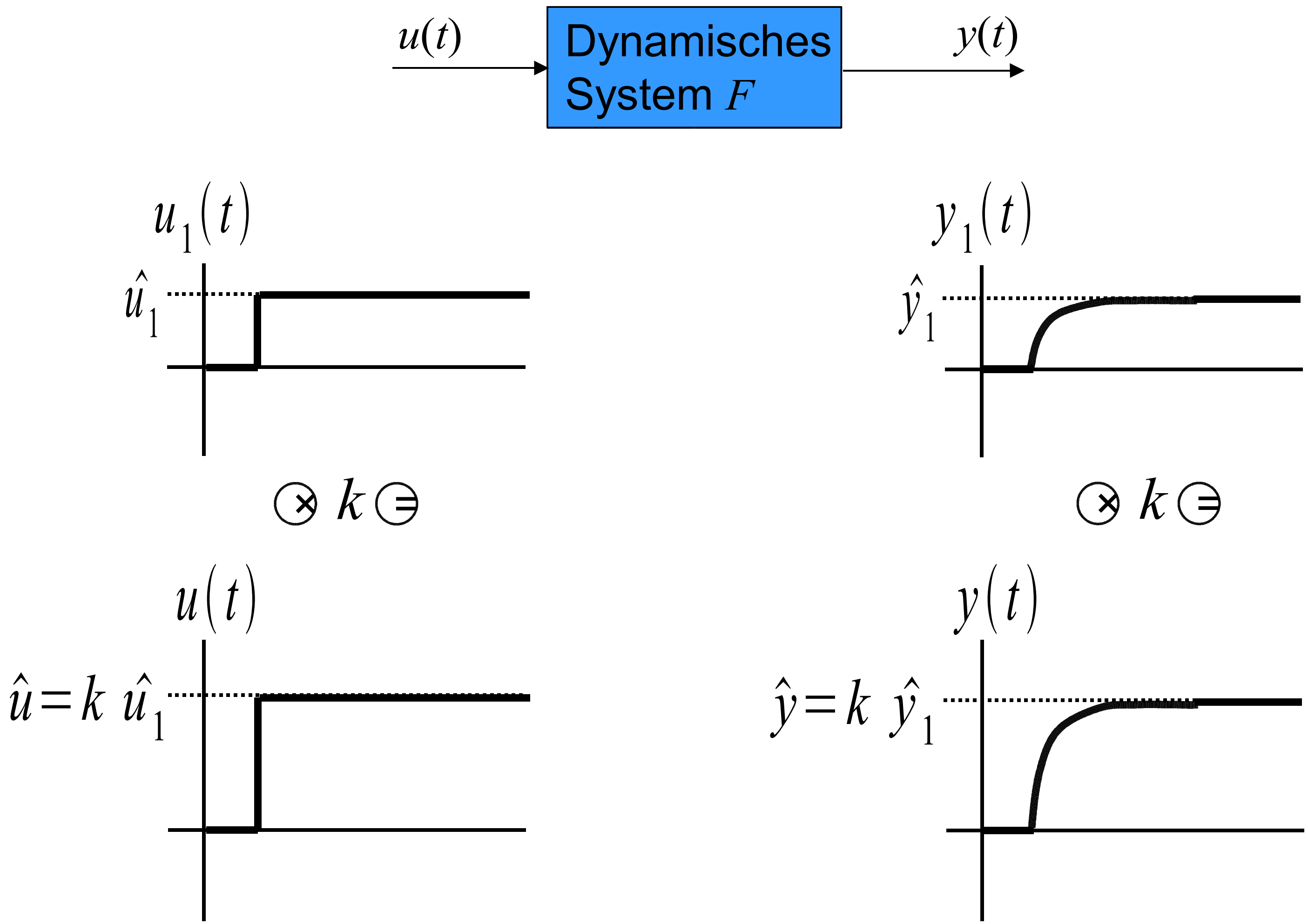
Superpositionsprinzip für dynamische Systeme



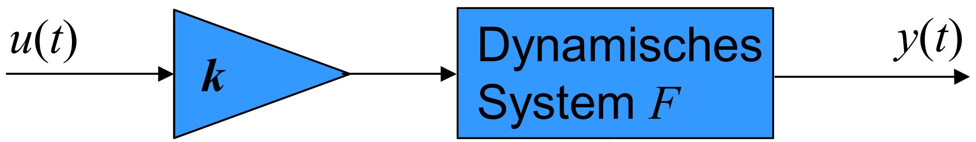
$$\Leftrightarrow$$



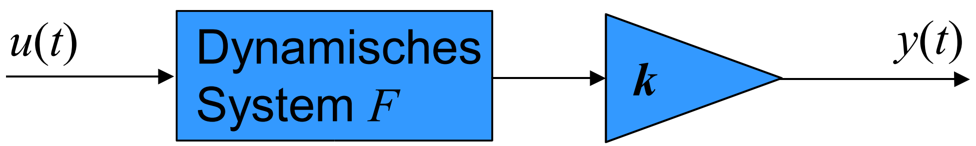
Homogenitätsprinzip für dynamische Systeme



Homogenitätsprinzip für dynamische Systeme



$\Leftrightarrow$



Beispiel: Linearität / Nichtlinearität

- **Beispiel:** statisches System

$$y(t) = F[u](t) = f(u(t)) = u^2(t)$$

- Gilt Superpositionsprinzip?

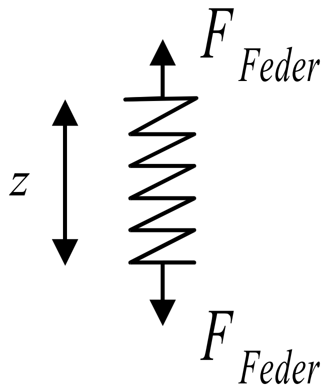
$$(u_1 + u_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad f.A.$$

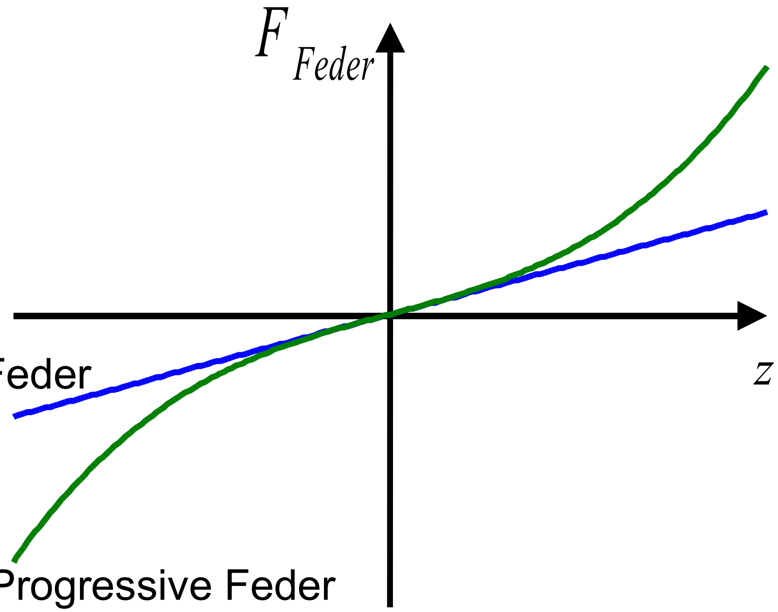
- Gilt Homogenitätsprinzip?

$$(k\,u)^2 = k\,u^2 \quad f.A.$$

$\Rightarrow$ System ist nichtlinear.

Beispiel: Federkennlinien



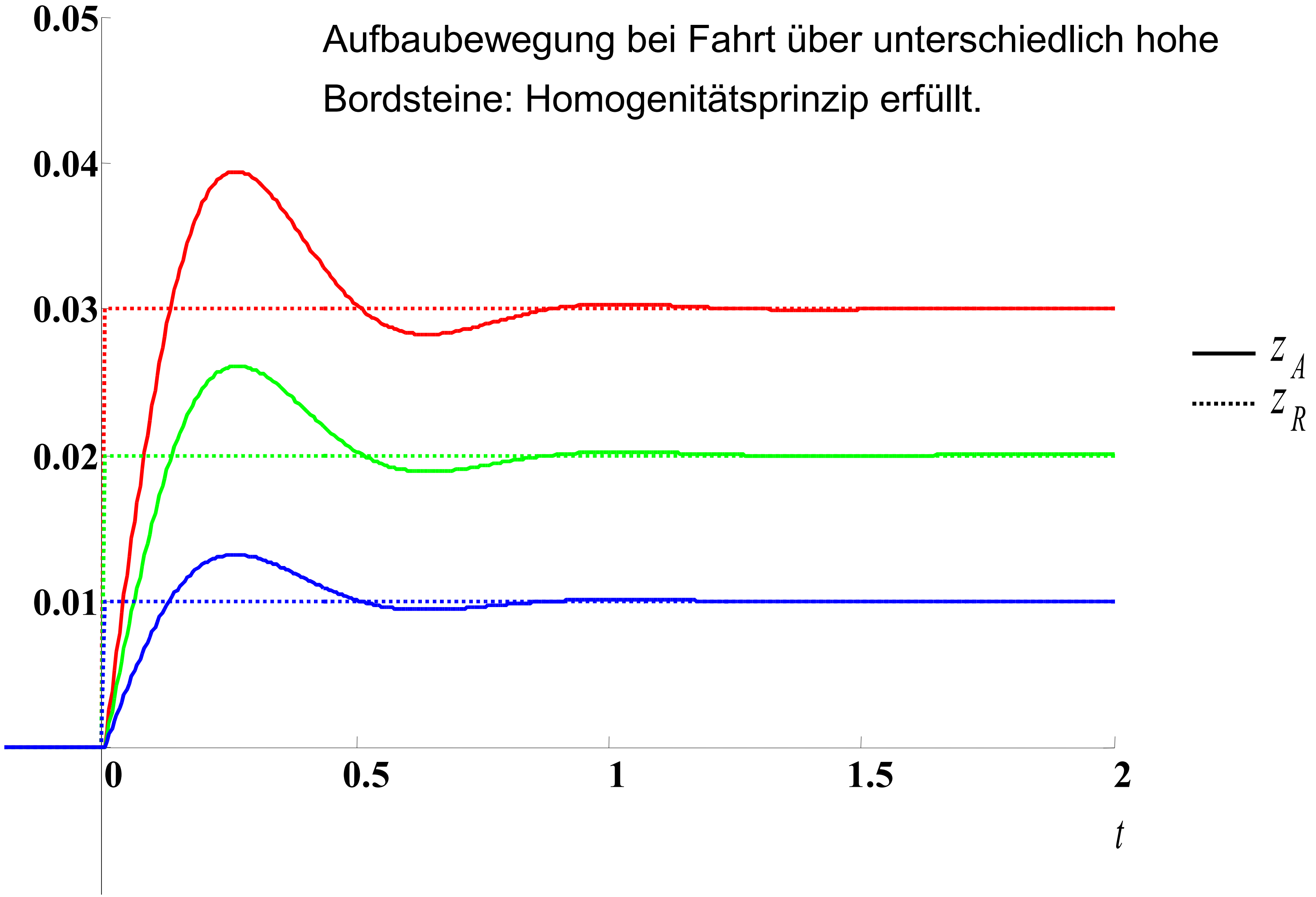


Hooke'sche Feder: $F_{Feder} = c\, z$

Progressive Feder: $F_{Feder} = c_1\, z + c_2\, z^3$

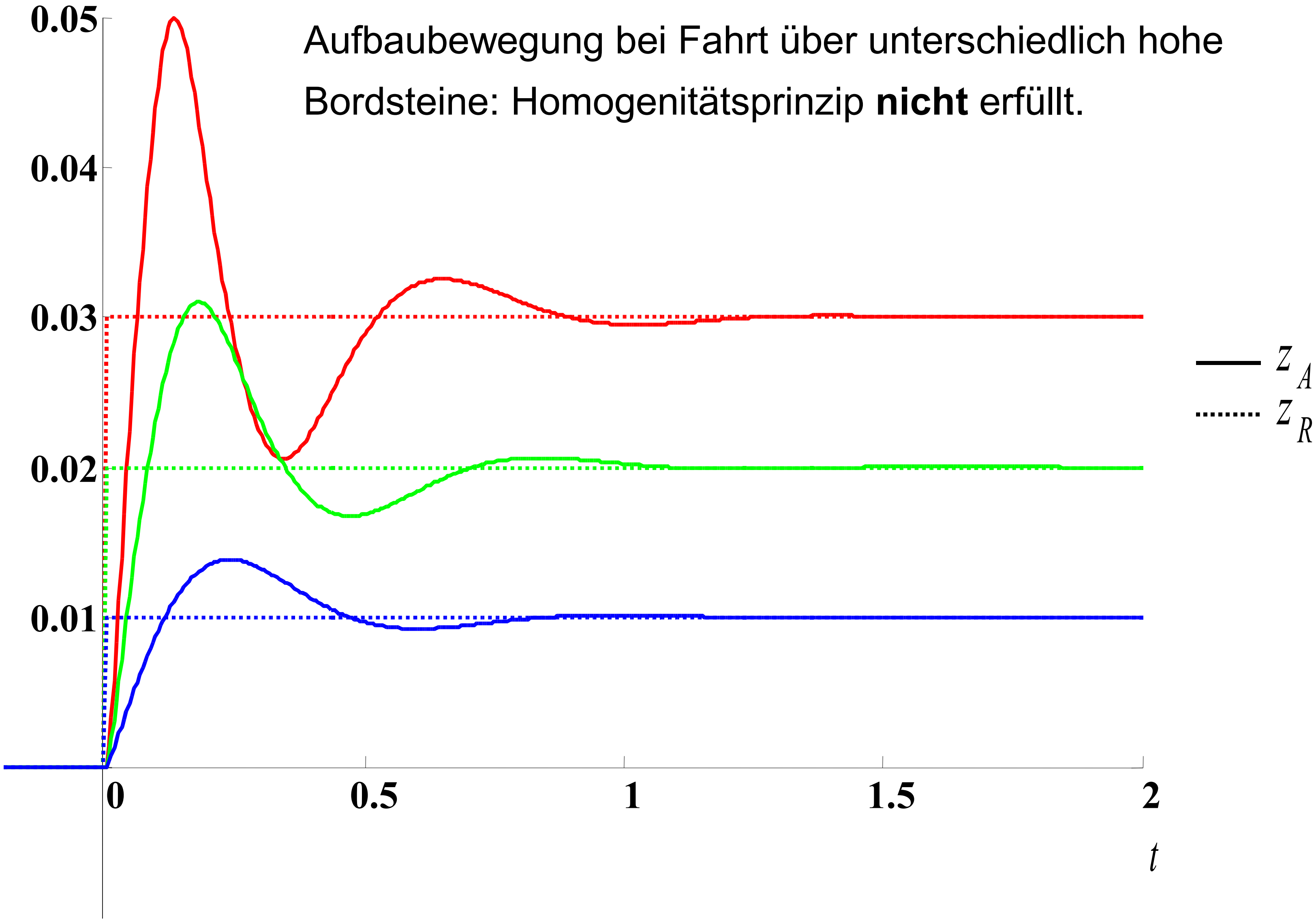
Beispiel: passives Fahrwerk mit Hooke‘scher Feder

Aufbaubewegung bei Fahrt über unterschiedlich hohe Bordsteine: Homogenitätsprinzip erfüllt.



Beispiel: passives Fahrwerk mit progressiver Feder

Aufbaubewegung bei Fahrt über unterschiedlich hohe Bordsteine: Homogenitätsprinzip **nicht** erfüllt.



Beispiel: Linearität / Nichtlinearität

- **Beispiel:** allgemeines dynamisches System

$$y(t)=\int_0^t \underline{c}^T e^{A(t-\tau)} \underline{b}\, u(\tau)\, d\tau$$

gilt Superpositionsprinzip?

$$y(t)=\int_0^t \underline{c}^T e^{A(t-\tau)} \underline{b} \left(u_1(\tau)+u_2(\tau) \right) d\tau$$

$$¿ \int_0^t \underline{c}^T e^{A(t-\tau)} \underline{b}\, u_1(\tau)\, d\tau + \int_0^t \underline{c}^T e^{A(t-\tau)} \underline{b}\, u_2(\tau)\, d\tau = y_1(t)+y_2(t)$$

$\Rightarrow$ System ist linear.

Beispiel: Linearität / Nichtlinearität

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$$
$$y = h(\underline{x}, u)$$

Satz: System in ZR-Darstellung ist genau dann linear, wenn die Funktionen f und h linear in x und u sind (genauer: wenn sie *affin* in x und u sind).

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= A\,\underline{x} + \underline{b}\,u \\ y &= \underline{c}^T\,\underline{x} + du \end{aligned}$$

Beispiel: Linearität / Nichtlinearität

$$\dot{z} = -3(z-1) + 3\left(\sqrt[3]{z-1}\right)^2 u$$
$$y = 2\sqrt[3]{z-1}$$

- Nichtlineares Verhalten bzgl. AB wegen nichtlinearer ZR-Gleichungen
- ABER: Lineares Übertragungsverhalten

$$y + \dot{y} = 2\sqrt[3]{z-1} + \frac{2}{3\left(\sqrt[3]{z-1}\right)^2}\dot{z} = \cdots$$
$$\text{¿}\, 2\sqrt[3]{z-1} + \left(-2\sqrt[3]{z-1} + 2u\right)$$
$$\text{¿}\, 2u$$

Beschreibung und Analyse nichtlinearer Systeme

- Was ist ein nichtlineares System?
- **Klassen nichtlinearer Systeme**
- Darstellung nichtlinearer Systeme
- Eigenschaften nichtlinearer Systeme
  vs. Eigenschaften linearer Systeme
- Zusammenfassung

Beschreibung und Analyse nichtlinearer Systeme

- **Klassen nichtlinearer Systeme**
- Darstellung nichtlinearer Systeme
- Eigenschaften nichtlinearer Systeme
  vs. Eigenschaften linearer Systeme
- Zusammenfassung

Klassen nichtlinearer Systeme

$$\underline{\dot{x}} = A\,\underline{x} + \underline{b}\,u$$
$$y = \underline{c}^T\,\underline{x} + du$$

Lineares System

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x})\,u$$

Eingangsaffines System

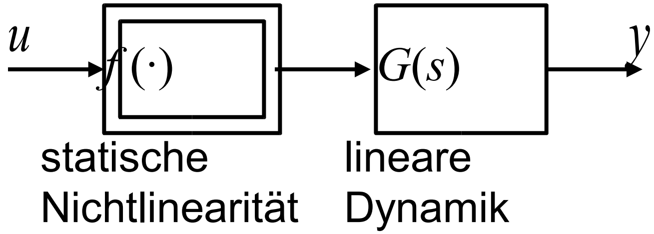
$$\underline{\dot{x}} = A\,\underline{x} + N\,\underline{x}\,u + \underline{b}\,u$$

Bilineares System

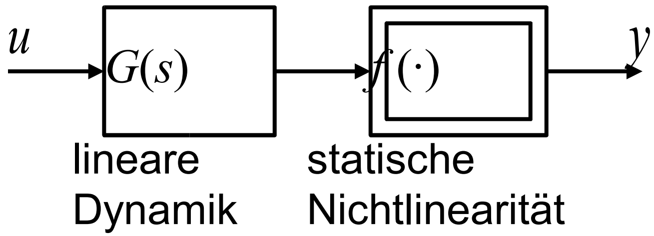
Klassen nichtlinearer Systeme

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u, t)$$
$$y = h(\underline{x}, u, t)$$

Nichtlineares, zeitvariantes System



System vom Hammerstein-Typ



System vom Wiener-Typ

Klassen nichtlinearer Systeme

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$$
$$y = h(\underline{x}, u)$$

Klassifizierung nach der rechten Seite:

- Stetigkeit,
- Differenzierbarkeit,
- Lipschitz-Stetigkeit
- ...

Nichtlineare Systeme können sehr unterschiedliche Struktur aufweisen

$\rightarrow$ sehr unterschiedliches Verhalten

Beispiele: Klassen nichtlinearer Systeme

- $y(t)=\int_0^t \underline{c}^T e^{A(t-\tau)} \underline{b}\, u^2(\tau)\, d\tau$
  Superpositionsprinzip gilt nicht $\Rightarrow$ nichtlinear
- $\dot{x}=-x^3+(1+x^2)u$ nichtlinear (eingangsaffin)
- $\dot{x}=-x+u^2$ nichtlinear (Hammerstein-Typ)
- $\dot{x}=x^3+u$ nichtlinear (eingangsaffin)
- $\dot{x}=-3x+u$ linear
- $\dot{x}=-3x+9+0\cdot u$ nichtlinear (affin)

Beispiele: Klassen nichtlinearer Systeme

- $\dot{x} = -3t^2 x + u$ — linear (zeitvariant)
- $\dot{x}^2 = -3x + u$ — nichtlinear, nicht eindeutig
- $\dot{x} = -|x| + u$ — nichtlinear, nicht differenzierbare rechte Seite
- $\dot{x} = \begin{cases} -3x + u & \text{für } |x| < 1 \\ x^2 + u & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$ — nichtlinear, unstetige re. Seite

Klassen nichtlinearer Systeme

Fast alle realen Systeme sind nichtlinear!

Beispiel für ein nichtlineares System

- CSTR für Cyclopentenol-Synthese
- Van der Vusse Reaktionsschema

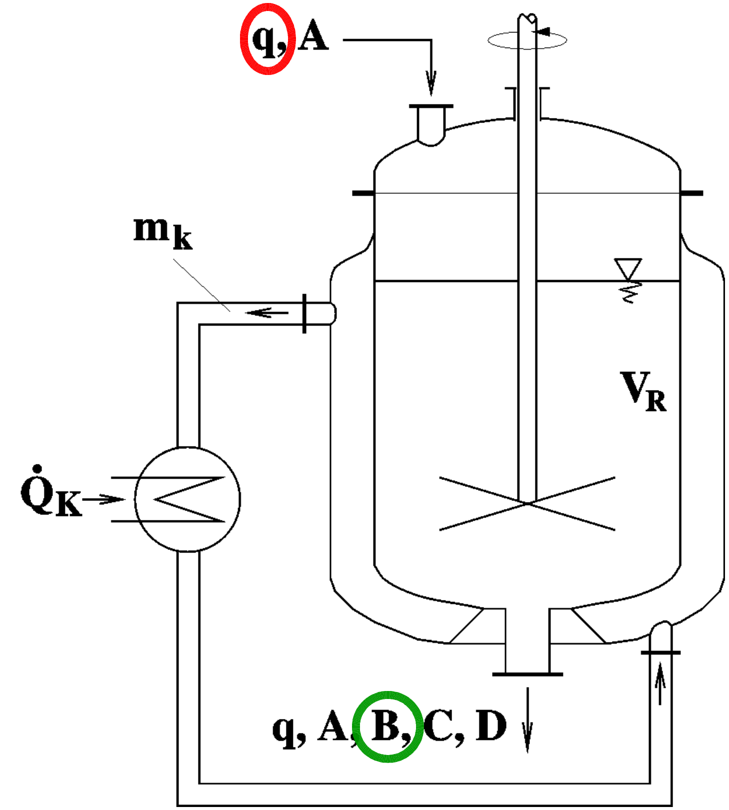
$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$
$$2A \xrightarrow{k_3} D$$

- Arbeitspunkt bei maximaler Ausbeute

$$\varphi = \frac{c_{B_S}}{c_{A_0}}$$

- Regelgröße: Konzentration c_B
- Stellgröße: Durchfluss q
- Störgrössen: Zuflusstemperatur T_f

  Zuflusskonzentration c_{A0}



Beispiel für ein nichtlineares System

Zustandsraumdarstellung

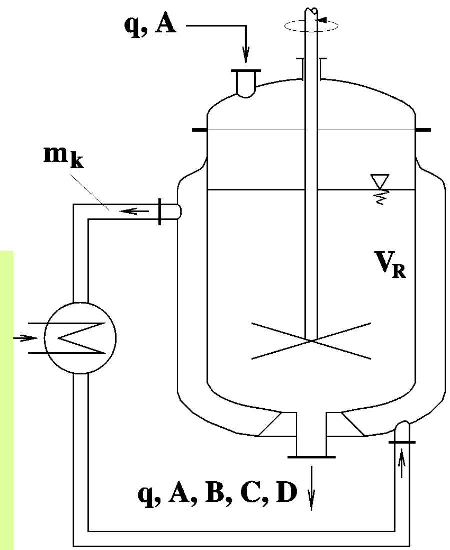
$$\dot{c}_A = \frac{V}{V_R}\left(c_{A_0} - c_A\right) - k_1(\quad)c_A - k_3(\quad)c_A^2$$

$$\dot{c}_B = -\frac{V}{V_R}c_B + k_1(\quad)c_A - k_2(\quad)c_B$$

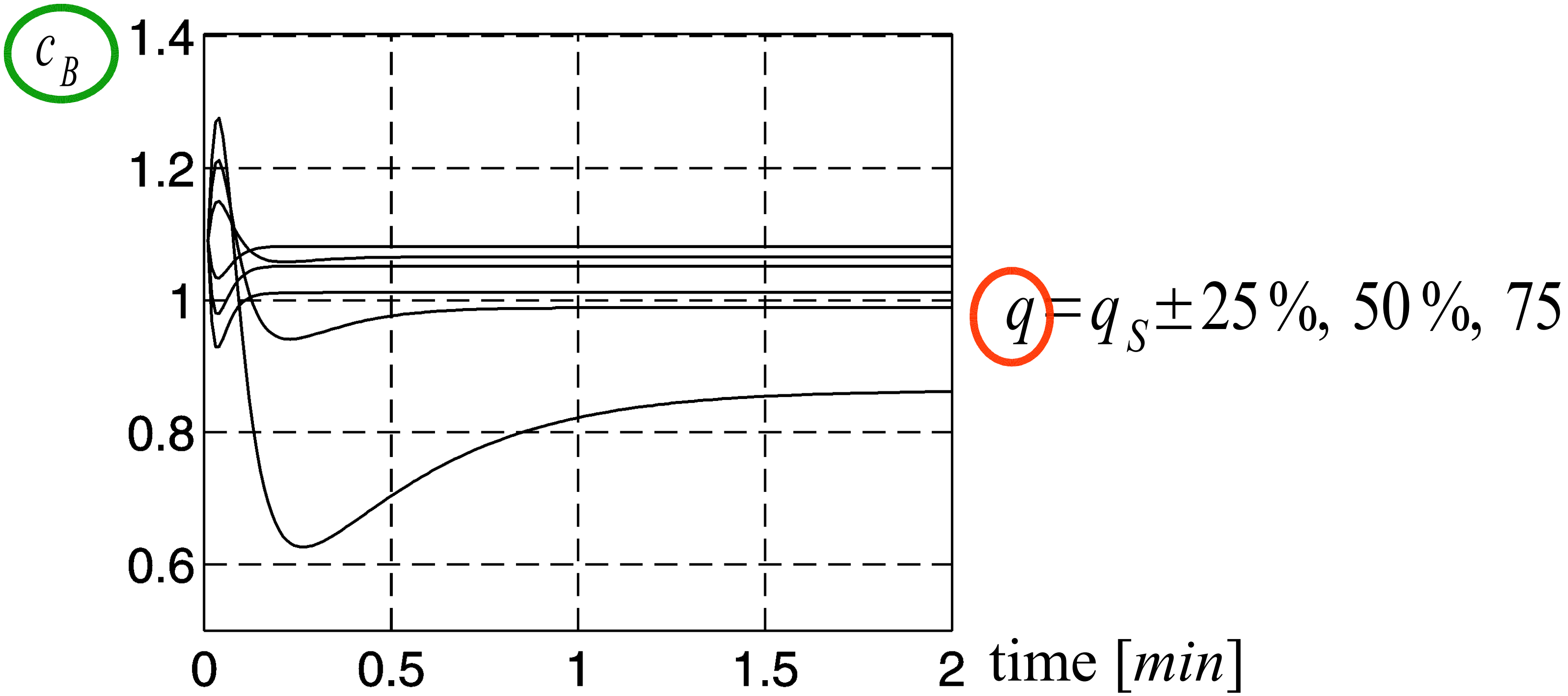
$$\dot{\ } = \frac{V}{V_R}\left(\ _0 - \quad\right) - \frac{1}{\rho C_P}\left(k_1(\quad)c_A \Delta H_{R_{AB}} + k_2(\quad)c_B \Delta H_{R_{BC}}\right.$$

$$\left. + k_3(\quad)c_A^2 \Delta H_{R_{AD}}\right) + \frac{k_w A_R}{\rho C_P V_R}\left(\ _K - \quad\right)$$

$$\dot{\ }_K = \frac{1}{m_K C_{PK}}\left(\dot{Q}_K - k_w A_R(\ _K - \quad)\right)$$



Sprungantwort des Reaktors



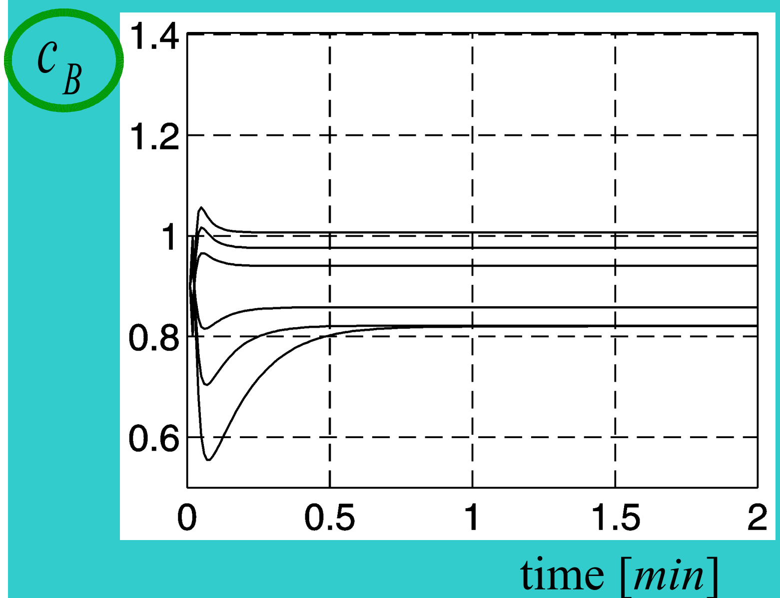
Homogenitätsprinzip ist nicht erfüllt

→ **System ist (stark) nichtlinear**

Wahl des Arbeitspunktes für den CSTR

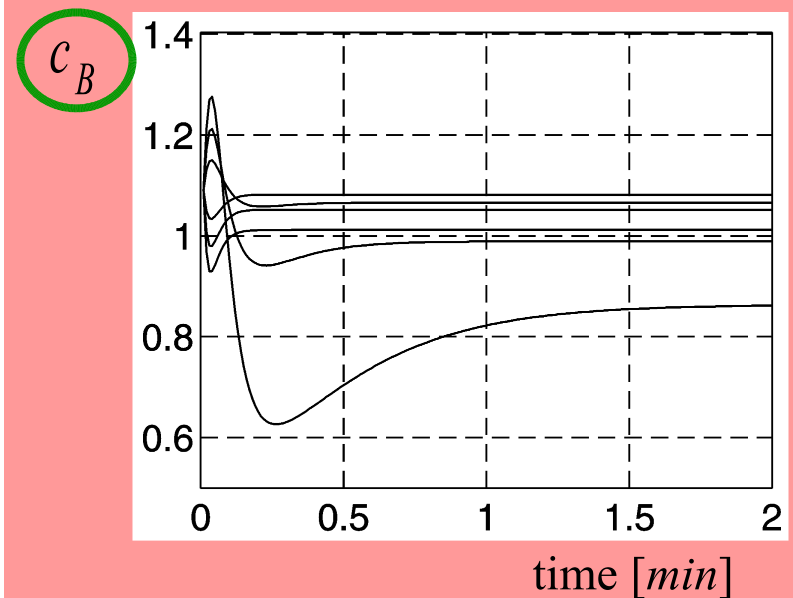
A. Industrieller Arbeitspunkt

Lineare Regelung möglich



A. Optimaler Arbeitspunkt

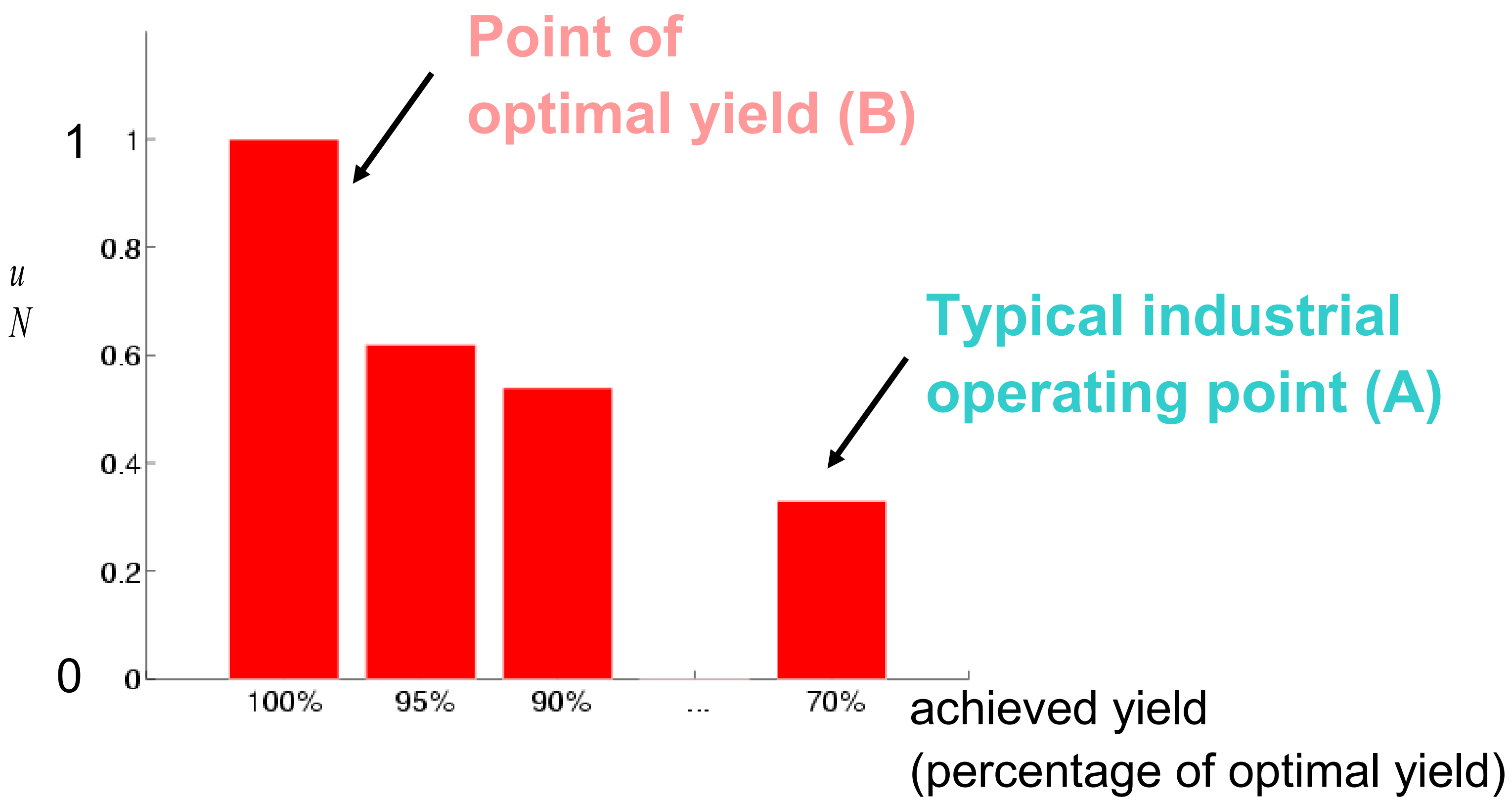
Lineare Regelung nicht möglich



Schwere der Nichtlinearität hängt vom Arbeitspunkt ab!

Analyse des Beispielreaktors mittels Nichtlinearitätsmaßen

(Allgöwer, 1993)



- Klassen nichtlinearer Systeme
- **Darstellung nichtlinearer Systeme**
- Eigenschaften nichtlinearer Systeme
  vs. Eigenschaften linearer Systeme
- Zusammenfassung

Zustandsraumdarstellung nichtlinearer Systeme

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$$
$$y = h(\underline{x}, u)$$

$$\underline{x}(t) \in R^n \quad (\text{Zustand})$$
$$u(t) \in R \quad (\text{Eingang})$$
$$y(t) \in R \quad (\text{Ausgang})$$

Beispiel

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + u$$
$$y = x_1$$

E/A-Darstellung nichtlinearer Systeme

- (Nichtlineare) Differentialgleichung höherer Ordnung

$$f\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, \dot{y}, y, u^{(m)}, \ldots, \dot{u}, u\right)=0, \quad m \leq n$$

Beispiel

$$\ddot{y}+3\dot{y}^2+y\dot{y}=2\dot{u}+u^2$$

- Keine Darstellung im Frequenzbereich möglich!

Beispiel:

$$\dot{y}=u^3$$

$$u=\cos(\omega t) \Rightarrow y=\frac{3}{4\omega}\sin(\omega t)+\frac{1}{12\omega}\sin(3\omega t)$$

Beschreibung und Analyse nichtlinearer Systeme

- Klassen nichtlinearer Systeme
- Darstellung nichtlinearer Systeme
- **Eigenschaften nichtlinearer Systeme vs. Eigenschaften linearer Systeme**
- Zusammenfassung

Eigenschaften linearer Systeme

$$\dot{\underline{x}}(t)=A\,\underline{x}(t)+\underline{b}\,u(t),\quad \underline{x}(0)=\underline{x}_0\in R^n$$
$$y(t)=\underline{c}^T\,\underline{x}(t)+du(t)$$

a1) Für $\det A\neq 0$ und $u_S=const.$ gibt es nur eine Ruhelage. Speziell für $u_S=0$ ist $x_S=0$ die einzige Ruhelage.

Beispiel:

$$\dot{x}_1=-x_1+3x_2$$
$$\dot{x}_2=-x_2+4u \qquad \text{aus } \dot{x}_2=0 \text{ und } u_S=0 \text{ folgt } x_{2S}=0$$
$$y=x_2 \qquad \text{aus } \dot{x}_1=0 \text{ und } x_{2S}=0 \text{ folgt } x_{1S}=0$$

a2) Für $\det A=0$ sind zusätzlich alle Punkte zu den Eigenrichtungen zum Eigenwert 0 Ruhelagen.

Eigenschaften linearer Systeme

b) Die Lösung $x(\bullet)$ der Differentialgleichung existiert für alle Zeiten und ist eindeutig

c) Die Lösung kann analytisch berechnet werden

d) Instabilität bedeutet $\left\|x(t)\right\| \to \infty \text{ für } t \to \infty$

Einige nichtlineare Phänomene

a1) Ruhelagen für unangeregte Systeme

$$\dot{x} = f(x) \quad (u \equiv 0)$$

Beispiele

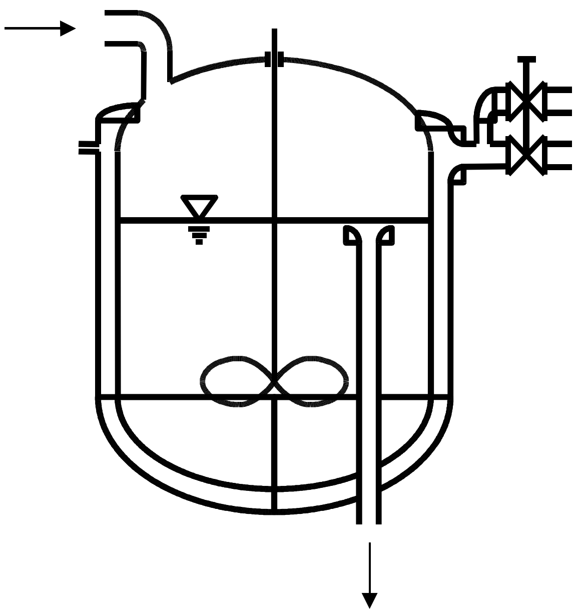
$$\dot{x} = x - 1 \Rightarrow x_S = 1 \ (\neq 0)$$

$$\dot{x} = x - x^3 \Rightarrow x_{S1} = 0, \quad x_{S2/3} = \pm 1$$

$$\dot{x} = \sin x \Rightarrow x_{Sk} = k\pi$$ unendlich viele Ruhelagen

$$\dot{x} = 1 + x^2 \Rightarrow \text{keine Ruhelage}$$

Zustandsraummodell des CSTR

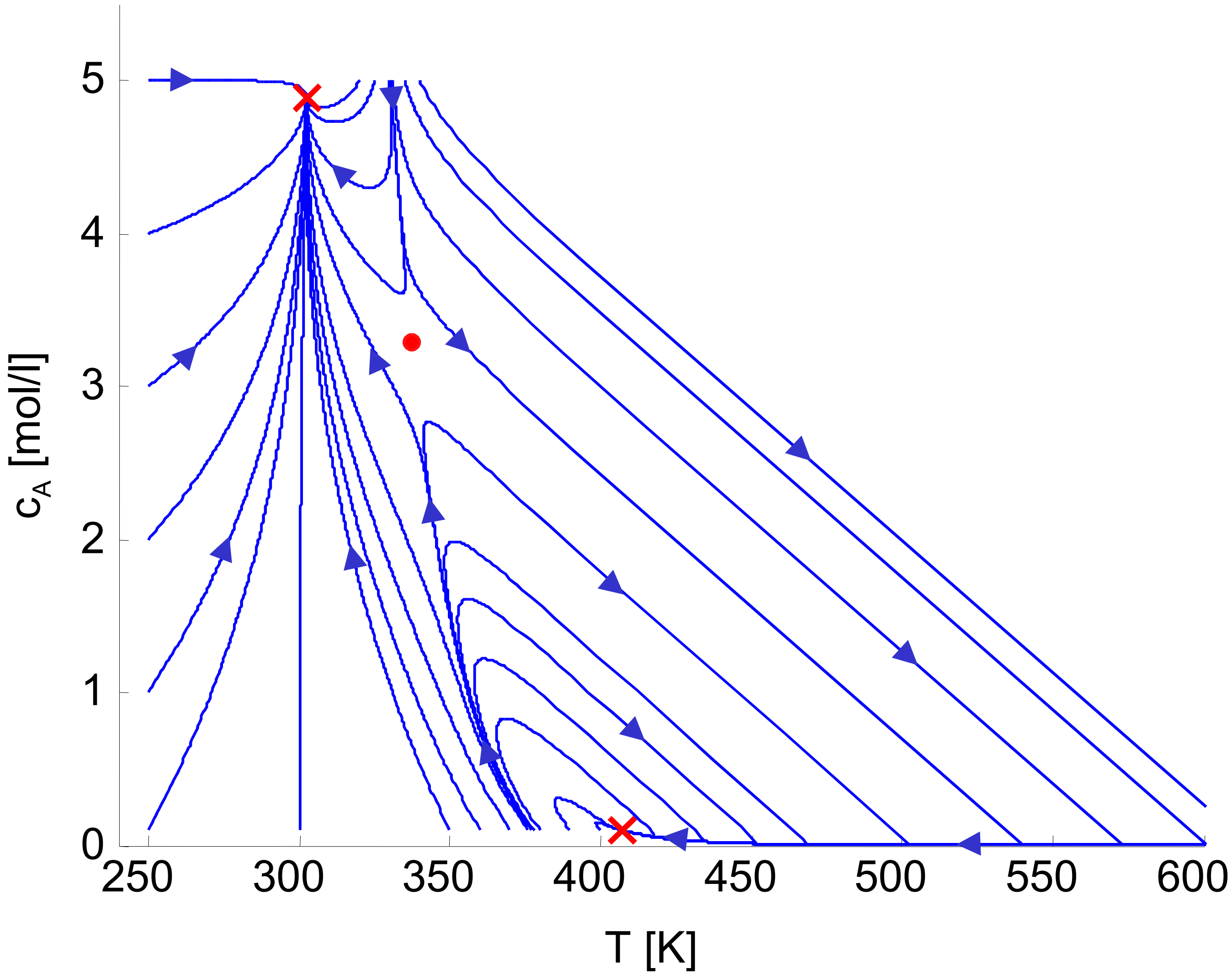


irreversible Reaktion: $A \rightarrow B$

$$\frac{dc_A}{dt} = \frac{\dot{V}^+}{V_R}\left(c_A^+ - c_A\right) - k_\infty e^{-\frac{E}{RT}} c_A$$

$$\frac{dT}{dt} = K_C\left(T_C - T\right) - \frac{\left(-\Delta h_R\right)}{\rho c_P} k_\infty e^{-\frac{E}{RT}} c_A$$

Phasenportrait des CSTR



Einige nichtlineare Phänomene

a2) Ruhelagen für angeregte Systeme

$$\dot{x} = f(x,u) \quad (u \neq 0)$$

– Mehrfachstationäre Zustände

$$\dot{x} = x^2 + u$$

$$\Rightarrow \text{zu jedem } u_S < 0 \text{ gibt es zwei } x_{S1/2} = \pm\sqrt{u_S}$$

– Eingangsmehrdeutigkeiten

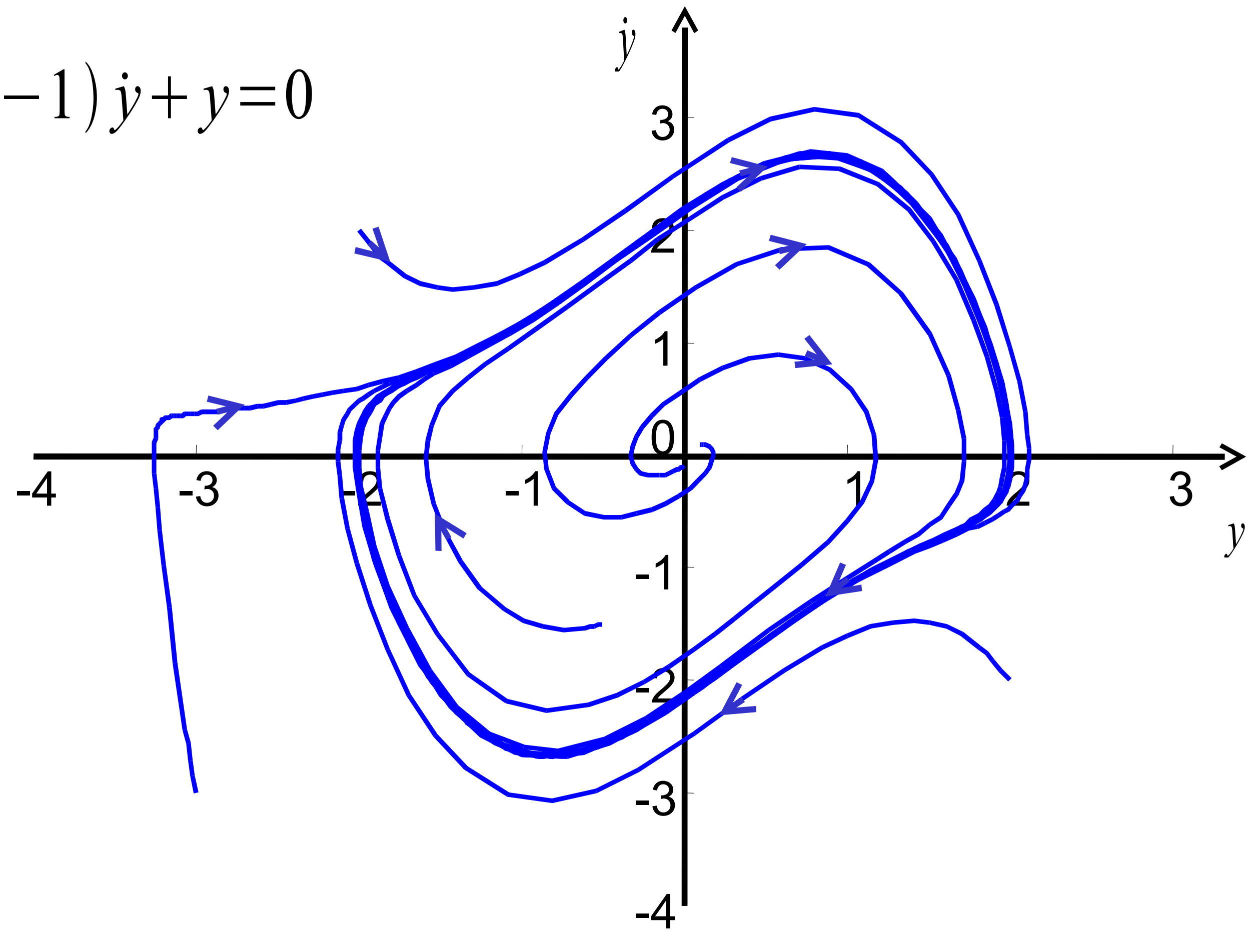
$$\dot{x} = x + u^2$$

$$\Rightarrow \text{zu jedem } x_S < 0 \text{ gibt es zwei } u_{S1/2} = \pm\sqrt{x_S}$$

Einige nichtlineare Phänomene

a3) Grenzzyklen, z.B. van der Pol-Oszillator

$$\ddot{y} + (y^2 - 1)\dot{y} + y = 0$$



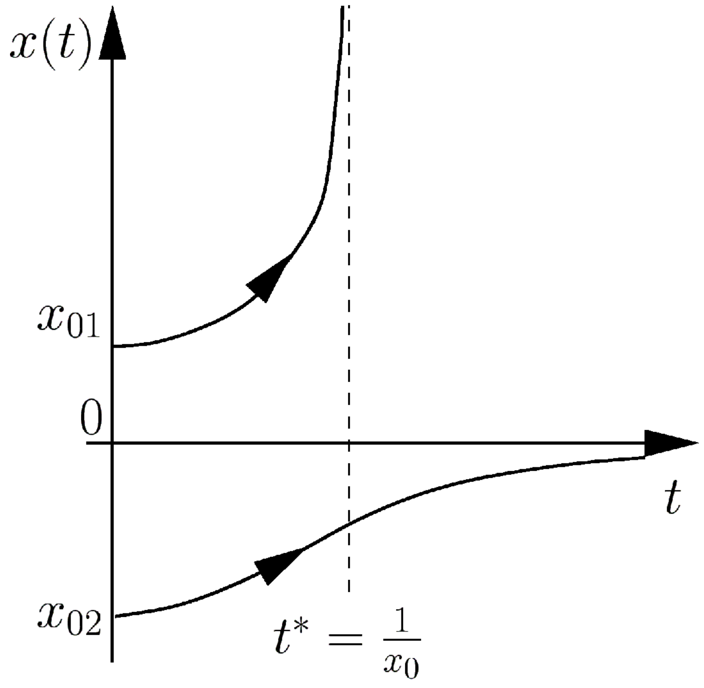
Einige nichtlineare Phänomene

b1) Existenz von Lösungen

Lösung existiert nicht immer für alle Zeiten

Beispiel (endliche Entweichzeit)

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$



Lösung der Dgl.
(Trennung der Veränderlichen)

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^t dt$$

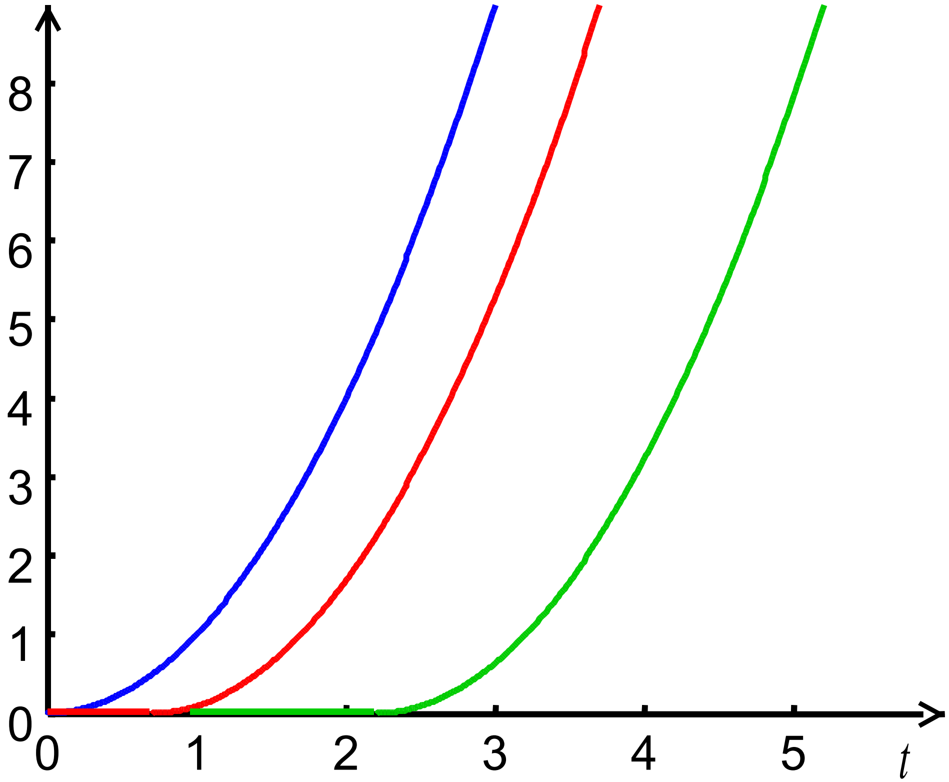
$$\Rightarrow -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} = t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$$

Einige nichtlineare Phänomene

b2) Eindeutigkeit von Lösungen

Beispiel:
Lösung ist nicht eindeutig

$$\dot{x}=2\sqrt{x},\quad x\geq 0$$
$$x(0)=0$$
$$\Rightarrow x=h(t-t_0)(t-t_0)^2,$$
t_0 beliebig



Einige nichtlineare Phänomene

c) Berechnung von Lösungen

- Beispiel

$$\dot{x} = \sqrt[7]{e^{x} + x^{3}} + \sin x \ln\left(x + 7\sqrt{x}\right) + u$$

- Berechnung im allgemeinen analytisch nicht möglich
  $\rightarrow$ numerische Berechnung (Simulation)

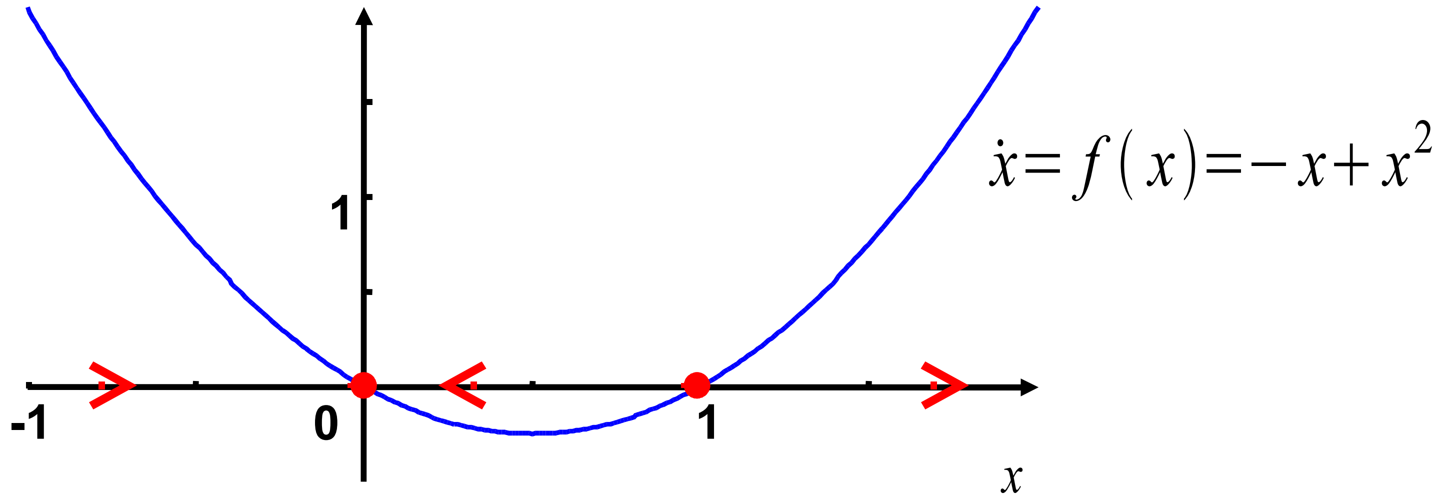
Einige nichtlineare Phänomene

d) Stabilität / Instabilität

Beispiel

$$\dot{x} = -x + x^2, \quad x(0) = x_0$$

$$\Rightarrow \text{Ruhelagen} \quad x_{S1} = 0, x_{S2} = 1$$



Aus lokaler Stabilität folgt **nicht** globale Stabilität

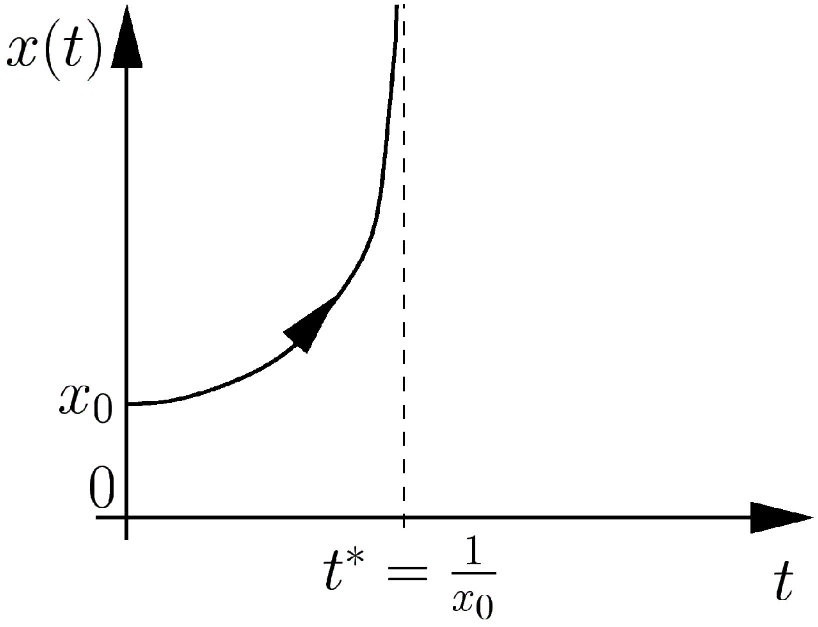
Einige nichtlineare Phänomene

a) Stabilität / Instabilität

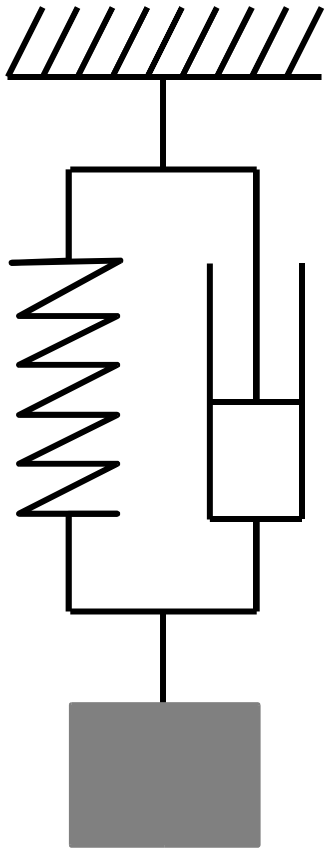
$$\|x(t)\| \to \infty \text{ für } t \to \infty$$

ist nur eine Form der Instabilität

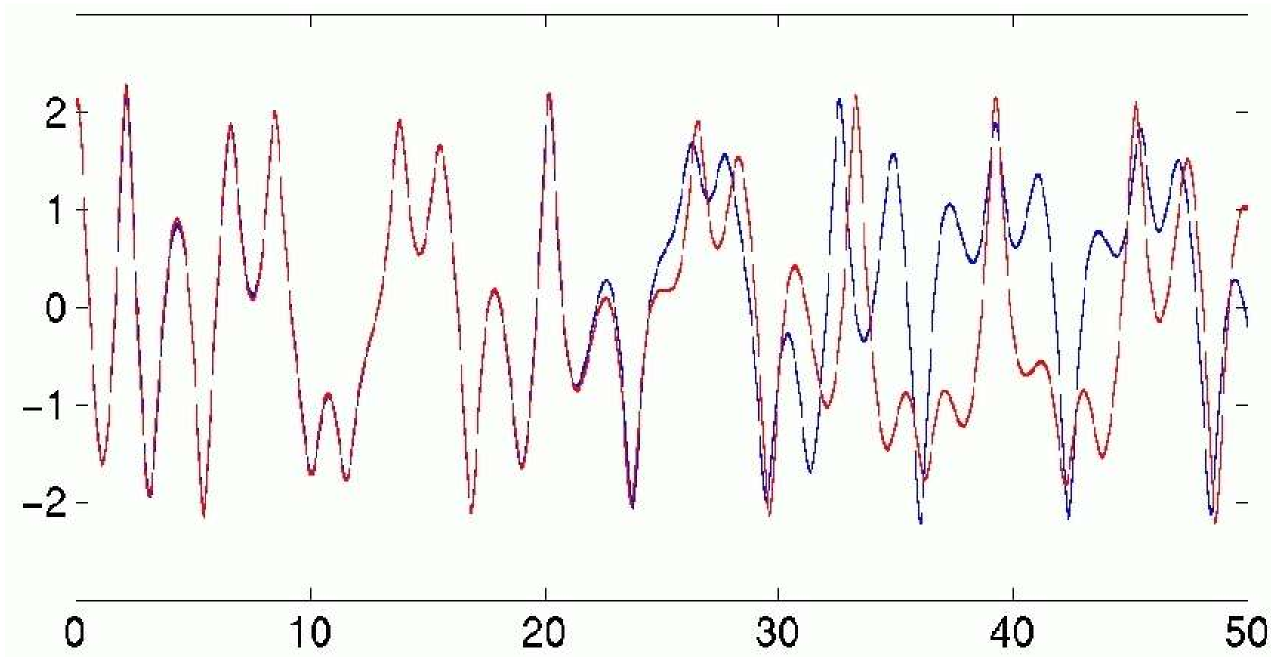
Beispiel (bereits gesehen):
endliche Endweichzeit



Einige nichtlineare Phänomene – Feder-Masse-System



$$\ddot{x} + 0.1\,\dot{x} + x^5 = 6 \sin t$$



— $x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 3$

— $x(0) = 2.01,\ \dot{x}(0) = 3.01$

Chaos: Extreme Sensitivität bzgl. Anfangsbedingungen

October 25, 1987

The New York Times

How Butterflies Cause Hurricanes

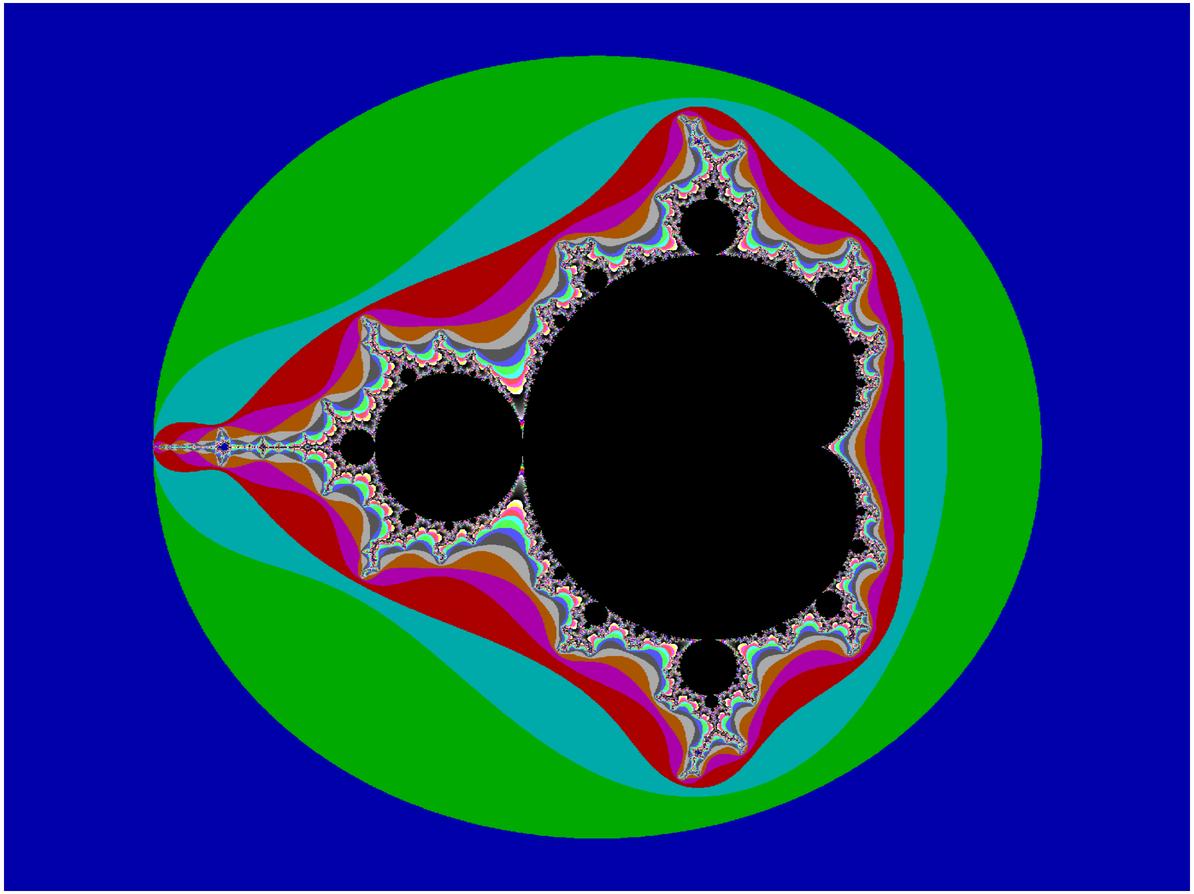
Stabilität nichtlinearer zeitdiskreter Systeme

Mandelbrotmenge:

Menge der Punkte c, für die die Folge

$$x_{k+1} = x_k^2 + c\,,\quad x_j \in C$$

nicht divergiert.



Seltsame Attraktoren

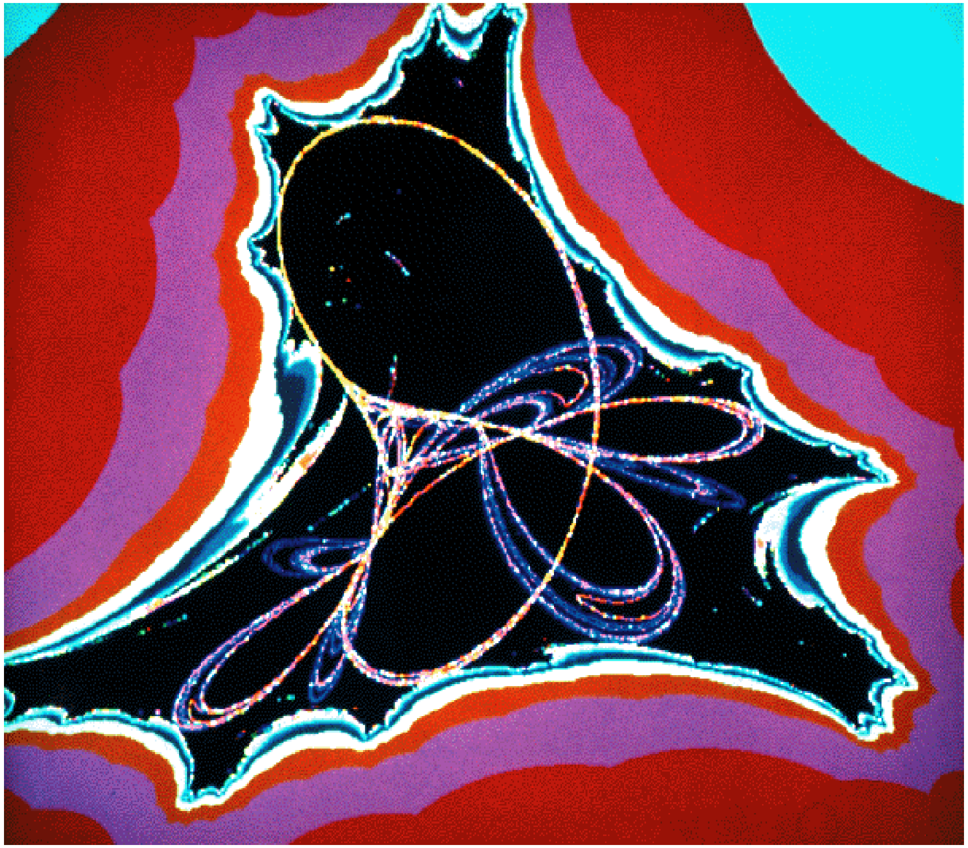
$$x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + c_1 x_k + c_2 y_k$$
$$y_{k+1} = 2 x_k y_k + c_3 x_k + c_4 y_k$$

$c_1 = 0.9$

$c_2 = -0.6013$

$c_3 = 2.0$

$c_4 = 0.4$



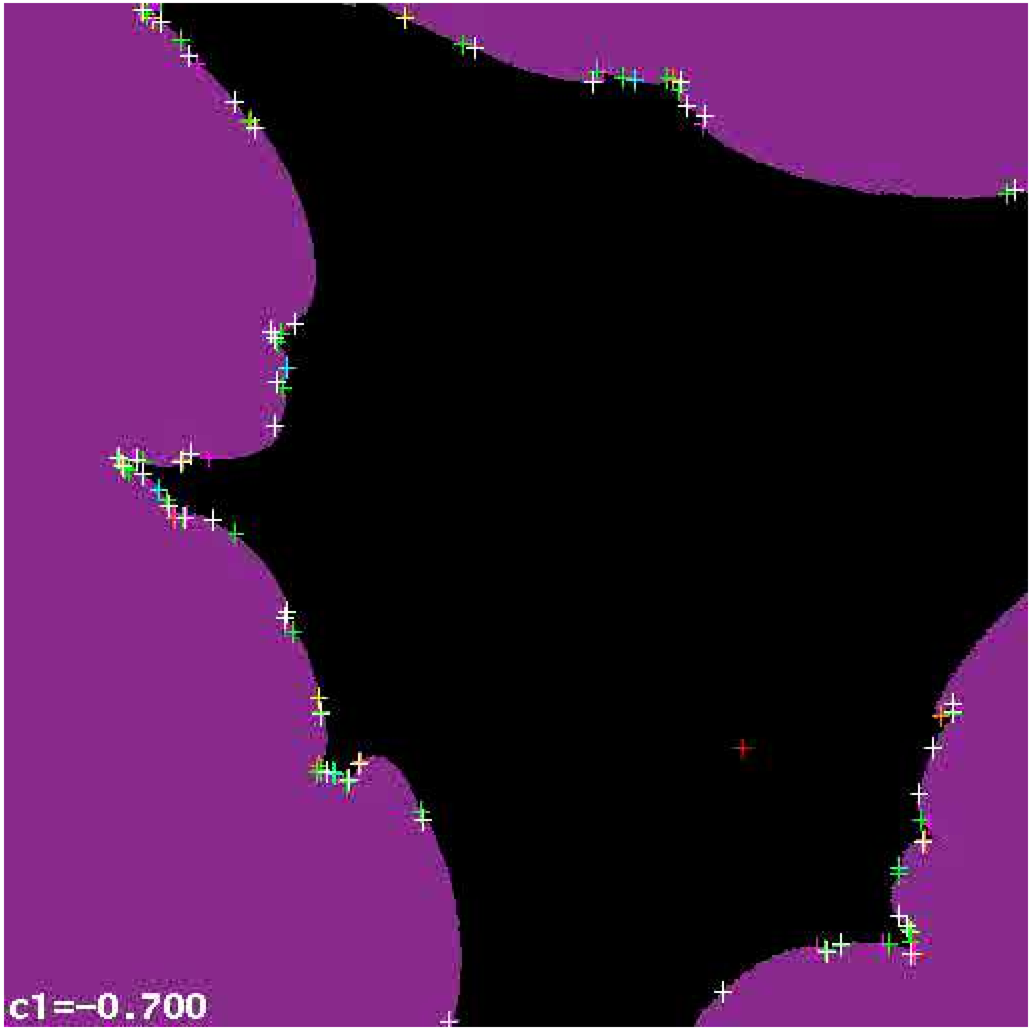
Tinkerbell Attraktor

Seltsame Attraktoren

$$x_{k+1}=x_k^2-y_k^2+c_1 x_k+c_2 y_k$$
$$y_{k+1}=2 x_k y_k+c_3 x_k+c_4 y_k$$

c_1=-0.7...0.9
c_2=-0.6013
c_3=2.0
c_4=0.4

Tinkerbell Attraktor



Nichtlineare Systeme – Zusammenfassung

- Nichtlineares System = nicht lineares System, d.h. Superpositionsprinzip/Homogenitätsprinzip verletzt
- Reale Systeme sind im allgemeinen nichtlinear
- Keine Frequenzbereichsdarstellung
- Einige Phänomene nichtlinearer Systeme:
  - Voneinander getrennte Ruhelagen möglich
  - Mehrfachstationäre Zustände und Eingangsmehrdeutigkeiten
  - Grenzzyklen
  - Existenz/Eindeutigkeit nicht sichergestellt
  - Neue Arten der Instabilität
  - Chaos
- Analyse nichtlineare Systeme i.a. schwieriger als Analyse linearer Systeme

Typische Systemeigenschaften Stand des Wissens

- Beschränkte Meßmöglichkeiten

  Lineare Beobachtertheorie 60er Jahre
- Mehrgrößensysteme

  Lineare Mehrgrößenregelung 70er Jahre
- Modellunsicherheiten

  Lineare robuste Regelungstheorie 80er Jahre
- Nichtlinearitäten

  Nichtlineare Regelungstheorie 90er Jahre
- Begrenzungen

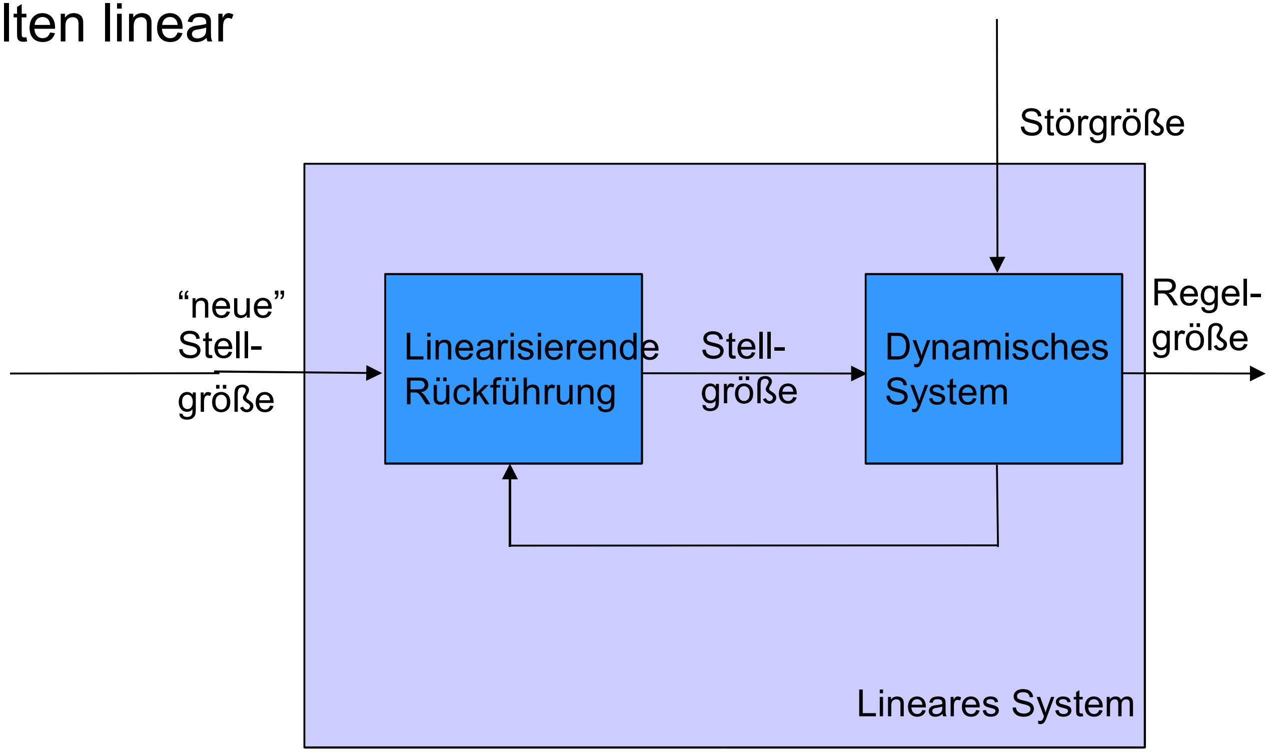
Historischer Abriß

1990	Moderne Verfahren / Anwendungen
1980	Differentialgeometrische Systemtheorie
1970	Optimale Steuerung
1960	E/A-Operatoren
1940	Relaisregelungen/Beschreibungsfunktion
1700	Brachistochronen-Problem

Ein-/Ausgangs-Linearisierung

Idee: 2-Schritt Reglerentwurf

(i) Berechne Rückführung so, dass E/A-Verhalten linear



Ein-/Ausgangs-Linearisierung

Idee: 2-Schritt Reglerentwurf

(i) Berechne Rückführung so, daß E/A-Verhalten linear

(ii) Entwerfe linearen Regler für linearisiertes System