Vorlesungsaufzeichnungen
Numerik von gewöhnlichen Differentialgleichungen

J. M. Melenk

Wien
SS 2008

Vorbemerkungen

Literatur

Literatur zum Thema gewöhnliche Differentialgleichungen:

1. W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer 1976
2. Coddington, Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill 1955

Literatur zum numerischen Behandlung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen:

1. Hairer, Nørsett, Wanner: Solving ODEs I: non-stiff problems, Springer Verlag
2. Hairer, Wanner: Solving ODEs II: stiff problems, Springer Verlag
3. Deuflhard, Bornemann: Numerische Mathematik II: Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, deGruyter 1994
4. Das Vorlesungsskript von V. Mehrmann:
`http://wftp.tu-chemnitz.de/pub/Local/mathematik/Skripte/Mehrmann/num2/`
5. Das Vorlesungsskript von R. Rannacher:
`http://gaia.iwr.uni-heidelberg.de/httpdoc/Lectures/Notes/numerik2.ps.gz`
6. Stoer, Bulirsch: Einführung in die Numerische Mathematik II, Springer

1 Grundlagen von gewöhnlichen Differentialgleichungen

1.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, $(t_0, y_0) \in G$, $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir sagen, daß die Funktion y Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

ist, wenn y auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ definiert ist und folgendes gilt:

$$y \in C^1(J, \mathbb{R}^n), \tag{1.1a}$$

$$\operatorname{graph}(y) := \{(t, y(t)) \,|\, t \in J\} \subset G, \tag{1.1b}$$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad \forall t \in J. \tag{1.1c}$$

Eine Funktion y ist Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y), \tag{1.2a}$$

$$y(t_0) = y_0, \tag{1.2b}$$

wenn y auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in J$ die Differentialgleichung im Sinn von (1.1) löst und zusätzlich die Anfangsbedingung (1.2b) erfüllt.
Es gilt das folgende Existenzresult, das auf Peano[1] aus Jahre 1890 zurückgeht:

Satz 1.1 (Peano) *Sei $G \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$. Dann geht durch jeden Punkt $(t_0, y_0) \in G$ mindestens eine Lösung y des Anfangswertproblems (1.2).*

Beweis: Die Formulierung dieses Theorems wurde [10] entnommen. Man beachte, daß nur die Existenz eines Intervalls J mit $t_0 \in J$ und die Existenz von $y \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ garantiert ist—es wird keine Aussage über die Länge von J gemacht. □

Satz 1.1 garantiert die Existenz von Lösungen für stetige rechte Seiten f. Eindeutigkeit von Lösungen ist nicht notwendigerweise gegeben, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.2 Satz 1.1 macht eine Existenz- aber keine Eindeutigsaussage. Ein Beispiel für die Existenz von mehreren Lösungen einer Differentialgleichung durch einen Punkt ist das Problem

$$y' = \sqrt{|y|}, \qquad (t_0, y_0) = (0, 0). \tag{1.3}$$

Offenbar sind die Funktionen

$$y_1(t) = 0, \qquad y_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

zwei verschiedene C^1-Lösung von (1.3). In der Tat existieren überabzählbar viele Lösungen, denn für jedes $c > 0$ ist die Funktion

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(t - c)^2 & t \geq c \\ 0 & t < c \end{cases}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems. ■

[1]Peano, Giuseppe, 1858–1932

Eindeutigkeit von Lösungen kann man z.B. erhalten, indem man über die Stetigkeit der rechten Seite hinaus lokale Lipschitzstetigkeit[2], im zweiten Argument fordert wie im folgenden Satz, der auf Picard[3] und Lindelöf[4] zurückgeht:

Satz 1.3 (Picard-Lindelöf) *Seien $a,\ b > 0$ und $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $R = \{(t,y)\,|\,|t-t_0| \leq a,\ \|y-y_0\| \leq b\}$, $f \in C(R,\mathbb{R}^n)$. Setze*

$$M := \|f\|_{C(R,\mathbb{R}^n)}, \qquad \alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Sei f zusätzlich lipschitzstetig bzgl. y, d.h. es gebe $L > 0$ derart, daß

$$\|f(t,y) - f(t,\hat{y})\| \leq L\|y-\hat{y}\| \qquad \forall (t,y),(t,\hat{y}) \in R. \tag{1.4}$$

Dann existiert für $J = (t_0-\alpha, t_0+\alpha)$ eine Lösung $y \in C^1(J,R^n)$ des Anfangswertproblems

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Diese Lösung ist eindeutig im folgenden Sinn: Jede weitere Lösung $\tilde{y} \in C^1(\tilde{J},\mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems erfüllt $y = \tilde{y}$ für alle $t \in J \cap \tilde{J}$.

Beweis: Einen Beweis findet man z.B. in [8] oder [10]. □

Satz 1.3 gibt lokale Existenz und Eindeutigkeit von Anfangswertaufgaben vom Typ (1.2), falls die Funktion f lipschitzstetig im zweiten Argument ist. Man beachte, daß Satz 1.3 eine Aussage über die Länge des Intervalls macht, in dem die Lösung $y(t)$ definiert ist.
Unter den Annahmen des Satzes von Picard-Lindelöf ist die Lösung des Anfangswertproblems (1.2) in der Nähe von (t_0, y_0) eindeutig. Diese Lösung bezeichnen wir dann mit

$$t \mapsto y_{t_0,y_0}(t).$$

Für eine genauere Betrachtung des Bereiches, in dem die Lösung definiert ist, verweisen wir auf Abschnitt 1.2.1.

1.2 Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten

Für Differentialgleichungen, die physikale Probleme modellieren und die mit numerischen Methoden behandelt werden, ist eine wichtige Frage, ob die Lösung stetig von den Eingabedaten abhängt, d.h. ob die Aufgabe im Sinne von Hadamard[5] korrekt gestellt ist. Der Hintergrund für diese Forderung ist, daß Eingabedaten und Parameter oft nicht genau bekannt sind, so daß stetige Abhängigkeit von diesen entscheidend ist für die Aussagekraft des Ergebnisses. Desgleichen werden auch bei der numerischen Approximation der Lösung einer Differentialgleichung Fehler gemacht, die sich nicht zu stark auf das Endergebnis auswirken dürfen. Es gilt Satz 1.5, für dessen Beweis wir das folgende Lemma benötigen[6].

[2] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz 1832–1903
[3] Picard, Émile (Schwiegersohn von Hermite) 1856–1941
[4] Lindelöf, Ernst Leonhard, 1870–1946
[5] Hadamard, Jacques, 1865–1963
[6] Hakon Grönwall, 1877–1932, schwedischer, in die USA ausgewanderter Mathematiker

Lemma 1.4 (Gronwall Lemma) *Sei J ein Intervall, $t_0 \in J$. Seien A, $B \geq 0$, $L > 0$ und erfülle die nichtnegative Funktion $v \in C(J, \mathbb{R})$ die Ungleichung*

$$v(t) \leq A + B|t - t_0| + L \left| \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds \right| \qquad \forall t \in J.$$

Dann gilt:

$$v(t) \leq Ae^{L|t-t_0|} + \frac{B}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right) \qquad \forall t \in J.$$

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $t > t_0$. Aus Notationsgründen nehmen wir zudem o.B.d.A. $t_0 = 0$ an. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$y(t) = Bt + L \int_0^t v(s)\, ds.$$

Dann gilt

$$y'(t) = B + Lv(t) \leq B + L\left(A + Bt + L \int_0^t v(s)\, ds\right) = B + L(A + y(t)),$$

woraus sich $y'(t) - Ly(t) \leq LA + B$ ergibt. Multiplikation dieser Ungleichung mit e^{-Lt} ergibt

$$\left(e^{-Lt} y(t)\right)' \; = \; e^{-Lt}\left(y'(t) - Ly(t)\right) \leq e^{-Lt}(LA + B).$$

Durch Integration über $(0, t)$ sowie Ausnutzen von $y(0) = 0$ ergibt sich dann

$$e^{-Lt} y(t) \leq \frac{LA + B}{-L}(e^{-Lt} - 1) = \frac{LA + B}{L}(1 - e^{-Lt}).$$

Anschließende Multiplikation mit e^{Lt} erzielt dann

$$y(t) \leq \frac{LA + B}{L}(e^{Lt} - 1).$$

Damit ergibt sich schließlich

$$v(t) \;\leq\; A + Bt + L \int_0^t v(s)\, ds = A + y(t) \leq A + A(e^{Lt} - 1) + \frac{B}{L}(e^{Lt} - 1).$$

□

Das Gronwall-Lemma ist ein fundamentales Hilfsmittel bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Z.B. ergibt sich damit, daß Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen typischerweise nicht schneller als exponentiell wachsen. Zudem liefert es eine Aussage über stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten:

Satz 1.5 (stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten) *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und erfülle $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ eine Lipschitzbedingung im zweiten Argument, d.h.*

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\| \qquad \forall (t, y), (t, z) \in G.$$

Erfüllen weiter die zwei Funktionen y, $z \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y), \\ \|z' - f(t,z)\| &\leq \delta \end{aligned}$$

für ein $\delta > 0$ und alle $t \in J$. Dann gilt für alle $t \in J$

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| e^{L|t-t_0|} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right).$$

Beweis: Wir schätzen den Fehler $\|y(t) - z(t)\|$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &\leq \|y(t_0) - z(t_0)\| + \|\int_{t_0}^t y'(s) - z'(s)\, ds\| \\ &\leq \|y(t_0) - z(t_0)\| + \|\int_{t_0}^t f(s,y(s)) - f(s,z(s))\, ds\| + \|\int_{t_0}^t z'(s) - f(s,z(s))\, ds\| \\ &\leq \|y(t_0) - z(t_0)\| + L\left|\int_{t_0}^t \|y(s) - z(s)\|\, ds\right| + \delta|t - t_0|. \end{aligned}$$

Die Aussage des Satzes folgt nun aus dem Gronwall-Lemma mit $v(t) = \|y(t) - z(t)\|$. □

Beispiel 1.6 Satz 1.5 zeigt, daß zwei Lösungen y_1, y_2, welche

$$y_i' = f(t, y_i)$$

und $\|y_1(t_0) - y_2(t_0)\| \leq \varepsilon$ erfüllen die *a priori* Abschätzung

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \varepsilon e^{L|t-t_0|}$$

erfüllen, wenn f einer Lipschitzbedingung (mit Lipschitzkonstante L) genügt. Inbesondere können sich die beiden Lösungen exponentiell in der Zeit voneinander entfernen. Diese Abschätzung ist i.a. scharf, wie das folgende Beispiel zeigt: die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = 10\left(y - \frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2t}{(1+t^2)^2}, \qquad y(0) = y_0$$

ist gegeben durch

$$y(t) = y_0 e^{10t} + \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Wie man an der Figur 1.1 sehen kann, ist zwar für kleine t die Differenz zwischen den Lösungen für $y_0 = 0$ und $y_0 = -10^{-4}$ klein, wächst aber exponentiell an wenn t groß wird. ■

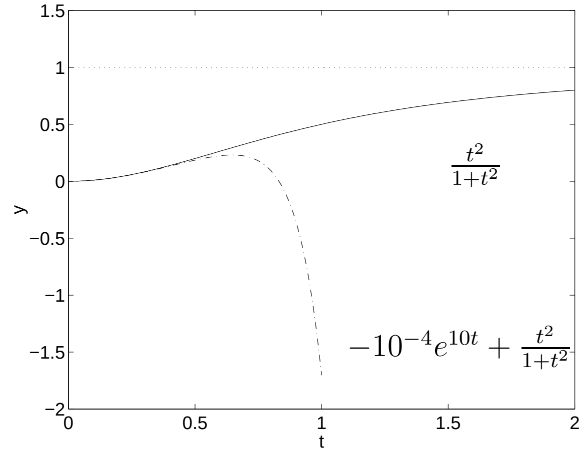
Übung 1.7 Ist die rechte Seite f stetig differenzierbar, dann hängt die Lösung $y(t, y_0)$ sogar stetig differenzierbar von dem Anfangsdatum y_0 ab. Überlegen Sie sich für den Fall $n = 1$ (und der Einfachheithalber $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), daß die Ableitung der Lösung nach dem Anfangswert y_0, d.h.

$$R(t) := \partial_{y_0} y_{t_0,y_0}(t)$$

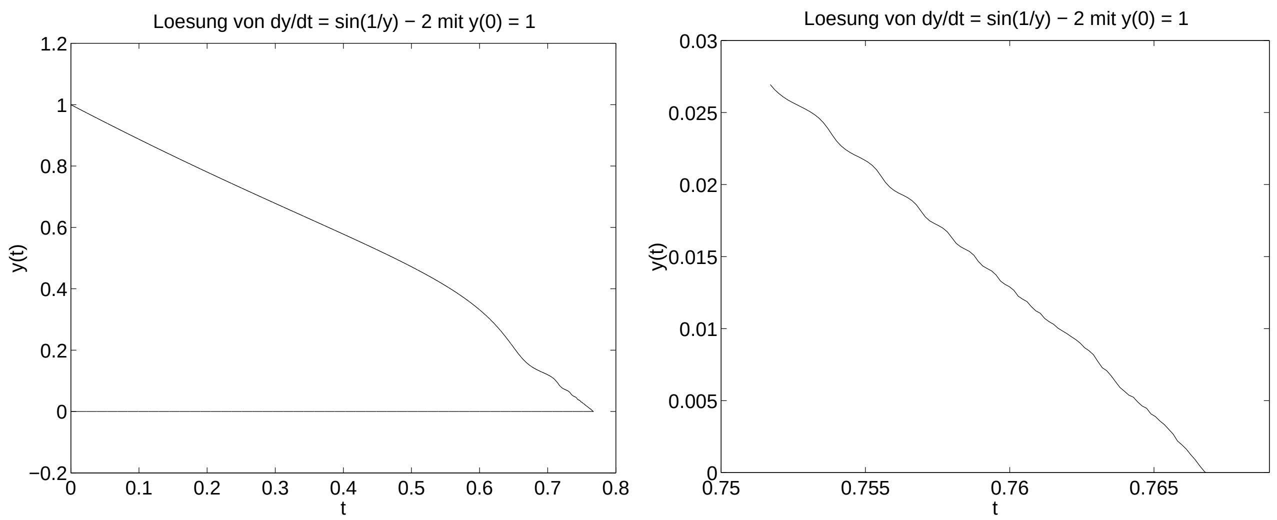
folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\partial_t R(t) = \partial_y f(t, y_{t_0,y_0}(t)) R(t), \qquad R(t_0) = 1 \tag{1.5}$$

■



Figur 1.1: Funktionsplot für $y_0 = 0$ und $y_0 = 10^{-4}$ in Beispiel 1.6



Figur 1.2: Plot der Lösung des Anfangswertproblems $y' = \sin(1/y) - 2$ mit $y(0) = 1$. Links: Plot für $t \in (0, 0.74\ldots)$. Rechts: Ausschnitt.

1.2.1 Maximale Existenzbereiche von Lösungen

Der Satz von Peano (Satz 1.1) und der Satz von Picard-Lindelöf (Satz 1.3) machen lokale Existenzaussagen für die Lösung von Anfangswertproblemen, d.h. sie zeigen die Existenz von Intervallen J und Funktionen $y \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$, die die Differentialgleichung auf J lösen. Es stellt sich die Frage, wie groß diese Intervalle gewählt werden können, insbesondere, ob eine gegebene Lösung y auch über die Endpunkte von J als Lösung der Differentialgleichung fortgesetzt werden kann. Hierzu wird das Konzept der Fortsetzung eine Lösung wie folgt präzise gefaßt:

Definition 1.8 *Sei $J = (t^-, t^+)$ ein Intervall und $y_J \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$, d.h. y_J erfülle (1.1). Sei $\tilde{J}$ ein Intervall mit*

$$J \subsetneq \tilde{J}.$$

Dann heißt y_J auf $\tilde{J}$ fortsetzbar, falls es eine Lösung $\tilde{y} \in C^1(\tilde{J}, \mathbb{R}^n)$ der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ auf $\tilde{J}$ gibt, die $\tilde{y}|_J = y_J$ erfüllt.
Die Funktion y_J heißt nach rechts fortsetzbar, wenn es ein $\tilde{t}^+ > t^+$ gibt, so daß y_J auf das Intervall $(t^-, \tilde{t}^+)$ fortsetzbar ist. Analog heißt y_J nach links fortsetzbar, wenn es ein $\tilde{t}^- < t^-$ gibt, so daß y_J auf $(\tilde{t}^-, t^+)$ fortsetzbar ist.
Der Definitionsbereich J einer Lösung $y_J \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ heißt maximal*, wenn y_J weder nach rechts noch nach links fortsetzbar ist.*

Damit man sinnvoll von einer Lösung der Differentialgleichung sprechen kann, muß der Graph der Lösung im Definitionsgebiet der rechten Seite enthalten sein, vgl. (1.1b). Erstaunlicherweise legt diese minimale Forderung auch bereits fest, ob und wie weit eine Lösung fortgesetzt werden kann. Eine Verschärfung des Satz von Peano zeigt nämlich, daß eine Lösung $y \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ einer Differentialgleichung nach links und rechts fortgesetzt werden kann, bis der Graph der (fortgesetzten) Lösung an den Rand ∂G des Definitionsgebietes "anstößt":

Satz 1.9 (Peano) *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet und $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$. Dann existiert für jedes $(t_0, y_0) \in G$ ein Intervall $J_{max} = (t^-, t^+)$ mit $t_0 \in J_{max}$ und eine Funktion $y \in C^1(J_{max}, \mathbb{R}^n)$, die das Anfangswertproblem (1.2) auf J_{max} löst. Das Intervall J_{max} ist maximal in dem Sinn, daß die Lösung y nicht über die Endpunkte t^- und t^+ von J_{max} hinaus fortsetzbar ist. Der Zeitpunkt t^+ (analog: der Zeitpunkt t^-) kann dadurch charakterisiert werden, daß genau einer der folgenden drei Fälle eintritt:*

1. *$t^+ = \infty$: in diesem Fall existiert eine Lösung für alle Zeiten $t > t_0$;*
2. *$t^+ < \infty$ und $\limsup_{t \to t^+} \|y(t)\| = \infty$: in diesem Fall spricht man von blow-up der Lösung.*
3. *$t^+ < \infty$ und $\liminf_{t \to t^+} \operatorname{dist}((t, y(t)), \partial G) = 0$: In diesem Fall kommt die Lösung dem Rand des Definitionsgebietes der rechten Seite beliebig nahe. Man spricht auch vom "Kollaps" der Lösung.*

Beispiel 1.10 Wir illustrieren die drei Arten, wie eine Lösung einer Differentialgleichung bis zum Rand von G fortgesetzt werden kann. In den drei Beispielen ist die rechte Seite immer lokal lipschitzstetig, so daß die Lösung sogar eindeutig ist (siehe Satz 1.3).

1. Die Lösung der linearen Differentialgleichung $y'(t) = \lambda y(t)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $G = \mathbb{R}^2$ läßt sich nach rechts bis $t^+ = \infty$ und nach links bis $t^- = -\infty$ fortsetzen, da sie gegeben ist durch $y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$.

2. Sei $G = \mathbb{R}^2$, $(t_0, y_0) = (0, 1)$. Die Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = |y(t)|^2$ mit $y(t_0) = y_0$ ist gegeben durch
$$y(t) = \frac{1}{1-t},$$
welche offensichtlich bei $t^+ = 1$ "explodiert".

3. Wir betrachten $y'(t) = \sin(1/y(t)) - 2$ mit $t_0 = 0$ und $y_0 = 1$. Hier ist das Definitionsgebiet von G sinnvollerweise $G = \{(t, y) \,|\, t \in \mathbb{R}, y > 0\}$. Dieses Problem fällt in die dritte Kategorie: Die Lösung $y(t)$ erfüllt (siehe Fig. 1.2) für $t^+ = 0.7574...$ die Bedingung $\lim_{t \to t^+} y(t) = 0$, so daß der Graph von der Lösung beliebig nahe an den Rand des Definitionsgebietes G gelangt.

■

Bereits oben hatten wir mit dem Satz 1.3 die Lipschitzstetigkeit im zweiten Argument als hinreichende Bedingung für Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen erkannt. Die meisten Differentialgleichungen erfüllen jedoch keine globale Lipschitzbedingung (z.B. die Gleichung $f(t, y) = y^2$ für $G = \mathbb{R}^2$), wohl aber auf kompakten Teilmengen des Definitionsgebietes. Weil dieser Fall so oft auftritt, führt man den Begriff der *lokalen Lipschitzstetigkeit im zweiten Argument* ein:

Definition 1.11 *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ heißt* lokal lipschitzstetig *im zweiten Argument, falls es für jedes $(t_0, y_0) \in G$ eine Umgebung U von (t_0, y_0) und eine Konstante $L_U > 0$ gibt, so daß*
$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L_U \|y - z\| \qquad \forall (t, y), (t, z) \in U.$$

Für die Klasse der Differentialgleichungen mit rechten Seiten, die lokal lipschitzstetig im zweiten Argument sind, ergibt sich dann das folgende Existenz- und Eindeutigkeitsresultat:

Satz 1.12 (globale Existenz und Eindeutigkeit) *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ lokal lipschitzstetig im zweiten Argument (vgl. Def. 1.11). Dann existiert für jedes $(t_0, y_0) \in G$ ein offenes Intervall J_{t_0,y_0} und eine Funktion $y \in C^1(J_{t_0,y_0}, \mathbb{R}^n)$, so daß folgendes gilt:*
Existenz: Die Funktion $y \in C^1(J_{t_0,y_0}, \mathbb{R}^n)$ löst das Anfangswertproblems (1.2).
Maximalität des Definitionsbereiches: Der Definitionsbereich J_{t_0,y_0} von y ist maximal (siehe Def. 1.8), d.h. y läßt sich nicht nach links oder rechts fortsetzen. An den Intervallgrenzen von J_{t_0,y_0} können nur die in Satz 1.9 aufgeführten Fälle eintreten.
Eindeutigkeit: Diese Lösung y ist eindeutig in dem Sinn, daß jede weitere Lösung $\tilde{y} \in C^1(\tilde{J}, \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems (1.2) durch Einschränken von y erhalten werden kann, d.h. es muß gelten:

- $\tilde{J} \subset J_{t_0,y_0}$
- $y|_{\tilde{J}} = \tilde{y}$

Damit ist auch das Intervall J_{t_0,y_0} eindeutig.
Differenzierbarkeitseigenschaften: Ist $f \in C^r(G, \mathbb{R}^n)$ für ein $r \in \mathbb{N}$, so ist $y \in C^{r+1}(J_{t_0,y_0}, \mathbb{R}^n)$.