

GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Christian Kanzow

Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Am Hubland
97074 Würzburg

e-mail: kanzow@mathematik.uni-wuerzburg.de
URL: <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/>

Vorlesungsskript, Sommersemester 2006

Stand: 24.07.2006

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|------------|
| 1 | Einführung | 1 |
| 1.1 | Definitionen | 1 |
| 1.2 | Geometrische Interpretation | 5 |
| 1.3 | Beispiele | 9 |
| 1.4 | Umformulierungen von Differentialgleichungen | 14 |
| 1.5 | Einige elementare numerische Verfahren | 17 |
| 2 | Skalare Differentialgleichungen | 25 |
| 2.1 | Skalare lineare Differentialgleichungen | 25 |
| 2.2 | Bernoulli- und Riccati-Differentialgleichungen | 29 |
| 2.3 | Differentialgleichungen mit getrennten Variablen | 34 |
| 2.4 | Exakte Differentialgleichungen | 38 |
| 3 | Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen | 43 |
| 3.1 | Normierte Räume | 43 |
| 3.2 | Der Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf | 50 |
| 3.3 | Der Satz von Arzelà-Ascoli | 57 |
| 3.4 | Der Existenzsatz von Peano | 60 |
| 3.5 | Fortsetzungssätze | 65 |
| 3.6 | Stetige Abhängigkeit von Störungen | 68 |
| 4 | Lineare Differentialgleichungen | 73 |
| 4.1 | Lineare Systeme mit variablen Koeffizienten | 73 |
| 4.2 | Die Matrix-Exponentialfunktion | 83 |
| 4.3 | Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten | 88 |
| 4.4 | Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung | 95 |
| 4.5 | Lineare Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten | 102 |
| 4.6 | Die Laplace-Transformation | 106 |
| 5 | Autonome Differentialgleichungen | 115 |
| 5.1 | Trajektorien | 115 |
| 5.2 | Klassifikation von Trajektorien | 119 |
| 5.3 | Ebene autonome Systeme | 121 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.4 | Hamiltonsche Systeme | 124 |
| 5.5 | Erste Integrale | 127 |
| 5.6 | Der Satz von Liouville | 130 |
| 6 | Qualitative Theorie und Stabilität | 137 |
| 6.1 | Trennungs-, Oszillations- und Amplitudensätze | 137 |
| 6.2 | Gleichgewichtspunkte und Stabilität | 144 |
| 6.3 | Stabilität bei linearen Differentialgleichungen | 148 |
| 6.4 | Linearisierte Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen | 154 |
| 6.5 | Die direkte Methode von Lyapunov | 158 |
| 7 | Randwertaufgaben | 165 |
| 7.1 | Randwertaufgaben für Probleme zweiter Ordnung | 165 |
| 7.2 | Maximumprinzip und Folgerungen | 169 |
| 7.3 | Nichtlineare Randwertprobleme und Greensche Funktion | 174 |
| 7.4 | Sturm–Liouville–Probleme | 177 |
| | Literatur | 185 |

Kapitel 1

Einführung

- 1.1 Definitionen
- 1.2 Geometrische Interpretation
- 1.3 Beispiele
- 1.4 Umformulierungen von Differentialgleichungen
- 1.5 Einige elementare numerische Verfahren

1.1 Definitionen

Wir beschäftigen uns in dieser Vorlesung mit Differentialgleichungen. Bevor wir eine formale Definition angeben, stellen wir zur besseren Illustration zunächst ein paar Differentialgleichungen vor:

- (a) $y'(t) = 2ty(t)$;
- (b) $y''(t) + \sin(t)y(t) = 0$;
- (c) $y(t)(y'(t))^2 = \cos(t)$;
- (d) $\frac{\partial y}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial y}{\partial t}(t, x) = y(t, x)$.

In allen diesen Beispielen wird eine Funktion y gesucht, so dass die angegebenen Gleichungen für alle t bzw. alle (t, x) aus einem gewissen Bereich erfüllt sind. Im Beispiel (d) treten dabei partielle Ableitungen auf, man spricht daher von einer *partiellen Differentialgleichung*. In allen anderen Beispielen hängt die gesuchte Funktion y nur von einer Variablen ab (die hier mit t bezeichnet wird, da sie in den Anwendungen meist für die Zeit steht), es tauchen daher nur gewöhnliche Ableitungen auf, weshalb man sie als *gewöhnliche Differentialgleichungen* bezeichnet. Wir werden uns hier fast ausschließlich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen. Unter einer Differentialgleichung verstehen wir daher stets eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Allgemein ist eine (gewöhnliche) *Differentialgleichung* eine Gleichung, in der unabhängige Variable, Funktionen und Ableitungen dieser Funktionen auftreten. So eine Differentialgleichung hat also die Gestalt

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad (1.1)$$

wobei F eine gegebene Funktion sowie y die gesuchte Funktion ist. Auf die Angabe des Definitions- und Wertebereiches wollen wir an dieser Stelle bewusst verzichten, da wir dies später nachholen werden. Die höchste auftretende Ableitung in (1.1) wird als *Ordnung* der Differentialgleichung bezeichnet. Lässt sich die Differentialgleichung explizit nach der höchsten Ableitung (in (1.1) also $y^{(n)}$) auflösen, so spricht man von einer *expliziten Differentialgleichung*, anderenfalls von einer *impliziten Differentialgleichung*. Wir werden fast nur explizite Differentialgleichungen betrachten.

Die hier eingeführten Begriffe sollen kurz an den obigen Beispielen (a)–(c) verdeutlicht werden:

- (a) Hier ist $F(t, y, y') := y' - 2ty$. Es handelt sich um eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung.
- (b) Für dieses Beispiel ist $F(t, y, y', y'') := y'' + \sin(t)y$. Dies ist eine explizite Differentialgleichung zweiter Ordnung.
- (c) Es ist $F(t, y, y') = y(y')^2 - \cos(t)$. Die Differentialgleichung ist von erster Ordnung, und zwar implizit, da eine Auflösung nach y' (zumindest nicht ohne Weiteres) möglich ist.

Zwei Typen von (expliziten) Differentialgleichungen spielen eine besondere Rolle in dieser Ausarbeitung, nämlich die Differentialgleichungen n -ter Ordnung und die Differentialgleichungssysteme erster Ordnung. Diese sollen daher formal eingeführt werden. Dazu beginnen wir mit den Differentialgleichungen n -ter Ordnung.

Definition 1.1 Eine (explizite) *Differentialgleichung n -ter Ordnung* besitzt die Gestalt

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.2)$$

mit einer gegebenen Abbildung $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine gegebene Teilmenge bezeichnen. Unter einer *Lösung* von (1.2) versteht man eine n -mal differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in D \quad \forall t \in I \quad (1.3)$$

und

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (1.4)$$

für alle $t \in I$.

Das in der Definition 1.1 nicht näher spezifizierte Intervall I darf offen, halboffen oder abgeschlossen und sowohl endlich als auch unendlich sein. Sofern keine weiteren Angaben gemacht werden, gilt dies auch für jedes weitere Intervall, das in den nachstehenden Ausführungen auftritt. Die Forderung (1.3) wird ansonsten nur benötigt, um in (1.4) die Funktion f in dem betreffenden Punkt überhaupt auswerten zu können. Im Allgemeinen werden wir diese Bedingung für eine Lösung als selbstverständlich voraussetzen und daher nicht mehr explizit erwähnen, sondern uns auf die Identität (1.4) beschränken, wenn wir von einer Lösung sprechen. Dies ist auch dadurch gerechtfertigt, dass in vielen hier zu behandelnden Fällen (etwa bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten) der Definitionsbereich D gleich dem gesamten Raum \mathbb{R}^n ist.

Die Differentialgleichung (1.2) hat häufig sehr viele (sogar unendlich viele) Lösungen. Betrachten wir beispielsweise die besonders einfache Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y \quad (1.5)$$

für eine gesuchte Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Offenbar ist dann jede der Funktionen

$$y(t) := c \exp(t) \quad (1.6)$$

mit einer beliebigen Zahl $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Oft ist man aber nur an einer Lösung interessiert, die außerdem zu einer bestimmten Zeit einen speziellen Wert annimmt, etwa

$$y(0) = 1. \quad (1.7)$$

Unter allen Lösungen (1.6) der Differentialgleichung (1.5) gibt es offenbar nur eine, die auch dem so genannten Anfangswert (1.7) genügt, nämlich $y(t) = \exp(t)$. Später werden wir sehen, dass dies tatsächlich die einzige Lösung von (1.5), (1.7) ist. Zunächst aber wollen wir die am Beispiel durchgeführte Diskussion verallgemeinern.

Definition 1.2 Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $t_0 \in I$. Unter einem **Anfangswertproblem** für eine Differentialgleichung n -ter Ordnung versteht man die Aufgabe, eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (1.2) zu finden, die außerdem noch den n so genannten Anfangswerten

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

genügt. Die Funktion $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$) und die Werte $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ sind dabei gegeben.

Die (physikalische, biologische etc.) Bedeutung der Anfangswerte werden wir bei der Behandlung einiger Beispiele im Abschnitt 1.3 noch besprechen.

Wir führen als Nächstes die zweite Klasse von Differentialgleichungen ein, die neben den Differentialgleichungen n -ter Ordnung eine herausragende Rolle spielen werden, und zwar die Differentialgleichungssysteme erster Ordnung.

Definition 1.3 Ein (explizites) Differentialgleichungssystem erster Ordnung besitzt die Gestalt

$$y' = f(t, y) \quad (1.8)$$

mit einer gegebenen Abbildung $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine gegebene Teilmenge bezeichnen. Unter einer Lösung von (1.8) versteht man eine differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $y(t) \in D$ für alle $t \in I$ und

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.9)$$

für alle $t \in I$.

Man beachte, dass in der obigen Definition sowohl die gegebene Funktion f als auch die gesuchte Lösung y vektorwertig sind. Schreiben wir f_1, \dots, f_n sowie y_1, \dots, y_n für die Komponentenfunktionen von f und y und beachten, dass wir die Ableitung von y komponentenweise zu nehmen haben, so suchen wir also eine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)). \end{aligned}$$

Wir werden diese ausführliche Schreibweise für ein Differentialgleichungssystem nur selten verwenden, da (1.8) (bzw. (1.9)) deutlich kürzer ist.

Nun wird ein Differentialgleichungssystem im Allgemeinen wieder unendlich viele Lösungen haben. Im Spezialfall $n = 1$ (man spricht dann von einer *skalaren Differentialgleichung*) erkennt man dies unter Verwendung des schon vorher diskutierten Beispiels. Zur eindeutigen Festlegung einer Lösung wird man daher auch hier gewisse Anfangswerte vorgeben.

Definition 1.4 Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $t_0 \in I$. Unter einem *Anfangswertproblem* für ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung versteht man die Aufgabe, eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Differentialgleichungssystems (1.8) zu finden, die außerdem noch den n so genannten *Anfangswerten*

$$y(t_0) = y_0$$

genügt, wobei die Funktion $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$) und der Vektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben sind.

Im Abschnitt 1.4 werden wir sehen, dass man jede Differentialgleichung n -ter Ordnung äquivalent in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung umschreiben kann, weshalb wir uns im Folgenden (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) die meiste Zeit über nur mit Differentialgleichungssystemen erster Ordnung beschäftigen werden. Außerdem werden wir die rechte Seite f immer als mindestens stetige Funktion voraussetzen. Man kann

aber auch mit schwächeren Glattheitseigenschaften arbeiten und gelangt dann zu Differentialgleichungen und Lösungen im Sinne von Carathéodory. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die ergänzenden Ausführungen in dem Buch [18] von Walter.

Wir beschließen diesen Abschnitt noch mit einigen Bemerkungen.

Bemerkung 1.5 (a) Die von der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ abhängige Lösung des Differentialgleichungssystems (1.8) wird manchmal mit $y(\cdot; t_0, y_0)$ bezeichnet, um den Einfluss der Anfangsbedingung explizit zum Ausdruck zu bringen.

(b) Eine Lösung von (1.8) ist (per Definition) eine differenzierbare Funktion y mit $y'(t) = f(t, y(t))$. Handelt es sich bei der rechten Seite f daher um eine stetige Funktion, so ist y automatisch stetig differenzierbar. Ist f sogar k -mal stetig differenzierbar, so ist die Lösung y natürlich $k + 1$ -mal stetig differenzierbar.

(c) Manchmal ist es sinnvoll, die Definition 1.3 etwas zu verallgemeinern und die rechte Seite f in (1.8) als Abbildung $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit einer Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aufzufassen (der Spezialfall $\mathcal{D} = I \times D$ mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ergibt gerade die Definition 1.3). Eine Lösung ist dann wieder eine auf einem geeigneten Intervall I definierte und dort differenzierbare Abbildung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $(t, y(t)) \in \mathcal{D}$ für alle $t \in I$ derart, dass $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$ gilt.

(d) Liegt ein Differentialgleichungssystem wie in (c) vor oder wird der Definitionsbereich der Abbildung f nicht explizit angegeben, so sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, dass beim Auffinden einer Lösung y nicht nur die Funktion selbst gesucht ist, sondern auch das zugehörige Intervall I .

1.2 Geometrische Interpretation

In dem Spezialfall einer skalaren Differentialgleichung erster Ordnung ergibt sich die folgende geometrische Interpretation, die in einigen Fällen bereits die gesuchte Lösung errahnen lässt: Die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Vektor (t, y) eine Steigung $y' = f(t, y)$ zu. Jede Lösung $y(t)$ dieser Differentialgleichung besitzt in dem Punkt (t, y) also die Steigung $y'(t) = f(t, y)$. Tragen wir diese Steigung in jedem Punkt (t, y) ein, so erhalten wir das so genannte *Richtungsfeld*. Wir illustrieren dies an einigen Beispielen, wobei wir natürlich nur in endlich vielen Punkten (t, y) die Steigungen einzeichnen können, da wir anderenfalls ein vollständig schwarzes Bild erhalten würden.

Beispiel 1.6 Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = t^2 - 1,$$

die von besonders einfachem Typ ist, da die rechte Seite von y unabhängig ist. Die Lösung erhalten wir somit durch Bilden der Stammfunktion als $y(t) = \frac{1}{3}t^3 - t + c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Das zugehörige Richtungsfeld ist in der Abbildung 1.1 angedeutet. Der

Verlauf des kubischen Lösungspolynoms $y(t)$ ist deutlich zu erkennen, wobei eine Lösung sogar explizit eingezeichnet ist. \diamond

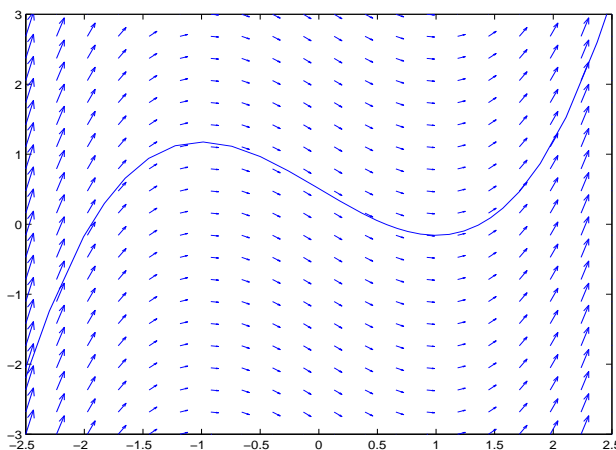


Abbildung 1.1: Richtungsfeld für die Differentialgleichung aus dem Beispiel 1.6

Wir wollen im Folgenden kurz darauf eingehen, wie man sich das Richtungsfeld aus der Abbildung 1.1 konstruieren kann. Hierfür gibt es eine Reihe von guten Programmpaketen wie [Maple](#), [Mathematica](#) oder [Matlab](#), die allesamt weitaus mehr können, als wir das hier in Kürze darstellen werden. Dabei benutzen wir in diesem Skript stets Matlab, das sich insbesondere auch zur numerischen Lösung von vielen Problemen aus der angewandten Mathematik einsetzen lässt.

Zunächst schreibt man in MATLAB ein Unterprogramm, das die gegebene rechte Seite $f(t, y)$ in einem Punkt (t, y) auswertet. Nennen wir dieses Unterprogramm `fAuswert`, so sieht dies in MATLAB für die Funktion f aus dem Beispiel 1.6 wie folgt aus:

```
function dy = fAuswert (t,y);
dy=t^2-1;
return
```

Dieses kurze Unterprogramm sollte fast selbsterklärend sein: Der Punkt (t, y) wird übergeben, dann berechnet das Programm den Wert der rechten Seite $f(t, y)$ in diesem Punkt (und für das gegebene f), speichert diesen Wert in einer Variablen mit dem Namen dy und liefert diesen an das noch zu beschreibende Hauptprogramm zurück.

Das Hauptprogramm sieht nun wie folgt aus:

```
%
%   M-file zur Erzeugung eines Richtungsfeldes
%
t=linspace(-2.5,2.5,20);
y=linspace(-3,3,20);
```

```

for i=1:length(y)
    for j=1:length(t)
        dy(i,j)=fAuswert(t(j),y(i));
        dt(i,j)=1;
    end
end
quiver(t,y,dt,dy);
axis([-2.5 2.5 -3 3]);
hold on
[t,y]=ode23(@fAuswert,[-2.5,2.5],-2.2);
plot(t,y);

```

Dieses ist nun schon etwas komplizierter, wir begnügen uns hier mit einigen Hinweisen: Alle mit einem %-Zeichen beginnenden Zeilen enthalten Kommentare, die im Allgemeinen nur der besseren Lesbarkeit des Programmes dienen. Der zweimal benutzte Befehl `linspace(a,b,n)` sorgt dafür, dass auf dem Intervall $[a, b]$ insgesamt n äquidistante Punkte definiert werden. In unserem Fall liefert dies eine Diskretisierung des t -Intervalls $[-2.5, 2.5]$ in 20 gleichabständige Punkte. Ebenso wird auch die y -Achse in dem Bereich $[-3, +3]$ durch 20 Punkte diskretisiert. Die anschließende Schleife berechnet die Steigungen y' in den diskreten Punkten (t_j, y_i) . Der Befehl `quiver` sorgt dann dafür, dass in allen diesen diskreten Punkten Pfeile mit den gerade gegebenen Steigungen gemalt werden. Die anschließende `axis`-Zeile garantiert, dass MATLAB die t - und y -Achsen tatsächlich nur in dem uns interessierenden Bereich $[-2.5, 2.5]$ bzw. $[-3, +3]$ ausgibt (anderenfalls würde MATLAB von selbst meist etwas größere Intervalle wählen).

Der Befehl `[t,y]=ode23(@fAuswert,[-2.5,2.5],-2.2)` löst unsere Differentialgleichung zum Anfangswert $y(-2.5) = -2.2$ numerisch unter Verwendung einer MATLAB-Routine, die unter dem Namen `ode23` verfügbar ist. In unserem speziellen Fall kennen wir zwar die exakte Lösung, das ist oft aber nicht der Fall, weshalb wir unser Programm etwas allgemeiner halten. Mit dem Befehl `plot(t,y)` wird dann die (numerische) Lösung gezeichnet. Damit diese auch in das schon vorher erzeugte Bild mit dem Richtungsfeld kommt, wurde vorher der Befehl `hold on` eingegeben, denn anderenfalls würde MATLAB ein neues Bild erzeugen.

Mittels dieser Erläuterungen sollte der Leser in der Lage sein, die obigen MATLAB-Programme selbst so zu ändern, dass er die zugehörigen Abbildungen 1.2 und 1.3 für die nächsten beiden Beispiele selbst erzeugen kann.

Beispiel 1.7 Gegeben sei hier die Differentialgleichung

$$y' = y,$$

deren Lösungen gegeben sind durch $y(t) = c \exp(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Diese Lösungen lassen sich auch aus dem zugehörigen Richtungsfeld in der Abbildung 1.2 erahnen. Dabei ist auch in dieser Abbildung eine Lösung explizit eingezeichnet. \diamond

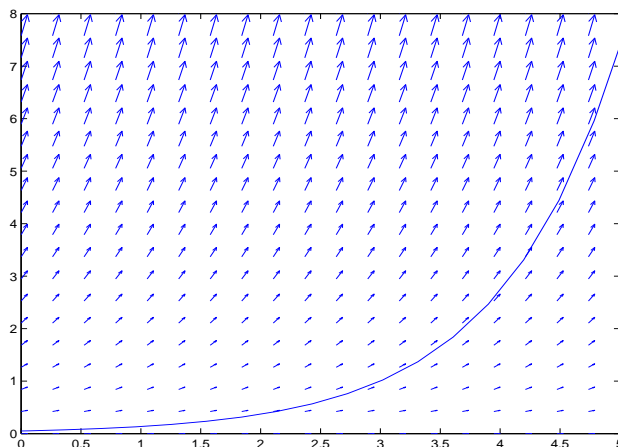


Abbildung 1.2: Richtungsfeld für die Differentialgleichung aus dem Beispiel 1.7

Beispiel 1.8 Wir betrachten jetzt die Differentialgleichung

$$y' = y^2 - t.$$

Das zugehörige Richtungsfeld befindet sich in der Abbildung 1.3. Man erkennt darin deutlich den Verlauf der Lösungskurven (eine Lösung ist wieder explizit eingezeichnet), auch wenn es momentan etwas schwer fällt, hierfür eine explizite Formel anzugeben (es handelt sich in diesem Beispiel um eine Riccatische Differentialgleichung, die wir im nächsten Kapitel noch gesondert behandeln werden). \diamond

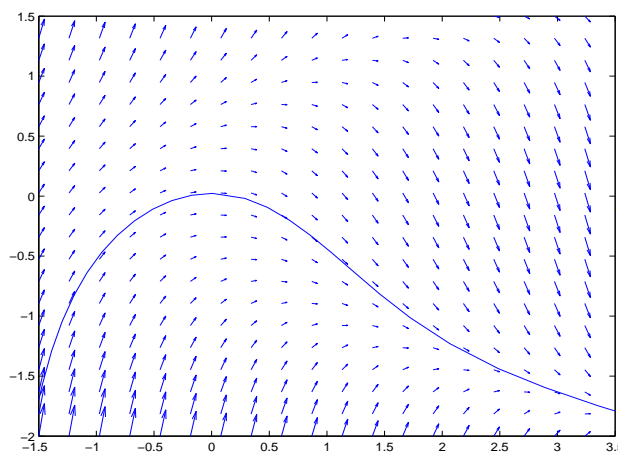


Abbildung 1.3: Richtungsfeld für die Differentialgleichung aus dem Beispiel 1.8

1.3 Beispiele

Wir besprechen in diesem Abschnitt eine Reihe von verschiedenen Anwendungen aus der Physik, Chemie und Biologie, deren mathematische Formulierung auf Differentialgleichungen führen, und zwar sowohl auf Differentialgleichungen höherer Ordnung als auch auf Differentialgleichungssysteme erster Ordnung. Einige dieser Beispiele werden bei unseren späteren Untersuchungen dabei wieder auftreten.

Zunächst beginnen wir mit einem sehr einfachen Beispiel.

Beispiel 1.9 (Radioaktiver Zerfall)

Es sei $y(t)$ die Masse einer radioaktiven Substanz zur Zeit t . Durch Beobachtung weiß man, dass für kleines Δt die im Zeitintervall $[t, t + \Delta t)$ zerfallende Masse proportional zu Δt und zu $y(t)$ ist. Mit einem Proportionalitätsfaktor $\lambda > 0$ gilt also

$$y(t + \Delta t) = y(t) - \lambda \cdot y(t) \cdot \Delta t \iff \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\lambda y(t).$$

Mit $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man damit die Differentialgleichung

$$y'(t) = -\lambda y(t) \quad (1.10)$$

für den radioaktiven Zerfall. Die Proportionalitätskonstante λ ist hierbei im Allgemeinen bekannt und hängt von der jeweiligen Substanz ab. Lösungen von (1.10) sind offenbar alle Funktionen der Gestalt

$$y(t) := c \exp(-\lambda t)$$

mit einem beliebigen $c \in \mathbb{R}$. Misst man zu einem speziellen Zeitpunkt $t = t_0$ die noch vorhandene Masse y_0 , so kann man den weiteren Zerfall der Substanz als (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = -\lambda y(t), \quad y(t_0) = y_0$$

bestimmen. Diese Lösung ist offenbar gegeben durch $y(t; t_0, y_0) = y_0 \exp(-\lambda(t - t_0))$. \diamond

Wir betrachten als Nächstes ein einfaches Modell für das Wachstum einer Population. Man kann sich hierunter etwa die Bevölkerung der Erde vorstellen.

Beispiel 1.10 (Wachstum einer Population)

Eine Population von Tieren, Menschen, Bakterien etc. habe zum Zeitpunkt t die Größe $y(t)$. Aufgrund beschränkter Ressourcen (etwa Nahrungsmittel) gehen wir davon aus, dass die Population eine gewisse Maximalgröße K nicht überschreiten kann. Unter dieser Voraussetzung erscheint die Annahme sinnvoll, dass die Wachstumsrate $y'(t)$ der Population zum Zeitpunkt t zum einen proportional zur gerade vorhandenen Größe $y(t)$ und zum anderen proportional zum noch verbleibenden Spielraum $K - y(t)$ ist. Damit erhalten wir die Differentialgleichung

$$y'(t) = \lambda y(t)(K - y(t)) \quad (\lambda, K > 0 \text{ konstant})$$

als Wachstumsmodell für die betrachtete Population. Setzen wir $\mu := \lambda K$, so lässt sich diese schreiben als

$$y'(t) = y(t)(\mu - \lambda y(t)) \quad (\mu, \lambda > 0).$$

Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ die (gemessene) Größe der Population zu einem (Anfangs-) Zeitpunkt $t = t_0$. Dann suchen wir also die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = y(t)(\mu - \lambda y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Wir werden diese im Abschnitt 2.2 bei der Behandlung der logistischen Differentialgleichung angeben. \diamond

Die beiden bisher betrachteten Beispiele führten jeweils auf eine Differentialgleichung erster Ordnung. Wir betrachten als Nächstes ein klassisches Schwingungsproblem aus der Physik, das uns auf natürliche Weise eine Differentialgleichung zweiter Ordnung liefern wird.

Beispiel 1.11 (Feder-Masse-System)

Eine vertikal aufgehängte Feder befinde sich mit ihrem unteren Ende im Nullpunkt einer ebenfalls vertikalen y -Achse. An diesem unteren Ende werde nun ein Massenpunkt M mit Masse $m > 0$ befestigt, vergleiche die Abbildung 1.4. Dann wird die Feder natürlich ausgedehnt aufgrund der auf sie einwirkenden Kraft F . Bezeichnen wir mit $y(t)$ die Lage des Massenpunktes M zum Zeitpunkt t , so gilt nach dem Kraftgesetz von Newton (Kraft = Masse \times Beschleunigung)

$$my'' = F,$$

wobei sich die Kraft F in diesem Fall zusammensetzt aus zwei entgegengesetzt wirkenden Kräften F_1 und F_2 : $F_1 = mg$ ist die Erdanziehungskraft mit $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$, und F_2 ist die Rückstellkraft der Feder. Nach Hooke ist diese, zumindest bei kleinen Auslenkungen, proportional zur Ausdehnung der Feder, also $F_2 = -ky$ mit der so genannten **Federkonstanten** $k > 0$. Sieht man von dämpfenden Reibungskräften ab, so ergibt sich daher die Differentialgleichung

$$my'' = mg - ky.$$

Zur eindeutigen Lösbarkeit dieser Gleichung hat man wieder gewisse Anfangsvorgaben zu machen, etwa die Anfangslage $y(0) = 0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $y'(0) = 1$. \diamond

Bislang führten alle betrachteten Beispiele auf eine einzelne Differentialgleichung. Wir besprechen als Nächstes ein sehr populäres Modell aus der Biologie, bei dem erstmals ein Differentialgleichungssystem entsteht (in diesem Fall handelt es sich um ein System von zwei Differentialgleichungen, jedoch würde man auf analoge Weise ein Differentialgleichungssystem mit n Gleichungen erhalten, indem man einfach weitere – miteinander konkurrierende – Populationen zulassen würde).

Beispiel 1.12 (Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra)

Seien $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$ die Populationen von Beutetieren bzw. Raubtieren zum Zeitpunkt t ,

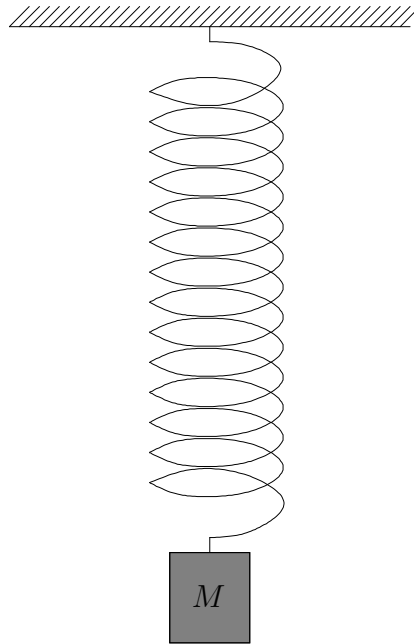


Abbildung 1.4: Veranschaulichung zum Beispiel 1.11

wobei sich die Raubtiere ausschließlich von den Beutetieren ernähren mögen. Das Räuber–Beute–Modell von Lotka–Volterra besteht dann aus dem folgenden System von zwei nicht-linearen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t)(\mu_1 - \lambda_1 y_1(t) - \rho_1 y_2(t)), \\ y_2'(t) &= y_2(t)(-\mu_2 - \lambda_2 y_2(t) + \rho_2 y_1(t)) \end{aligned}$$

mit gewissen nichtnegativen Parametern μ_i , λ_i und ρ_i ($i = 1, 2$) (bei dem klassischen Modell von Lotka–Volterra ist $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$). Speziell für $y_2 \equiv 0$ bzw. $\rho_1 = 0$ (keine Raubtiere) ergibt sich für die Beutetiere gerade die logistische Differentialgleichung aus dem Beispiel 1.10. Gleiches gilt für die Differentialgleichung der Raubtiere, wenn $y_1 \equiv 0$ bzw. $\rho_2 = 0$ ist, wobei wir hier $-\mu_2$ statt $+\mu_2$ schreiben, da die Anzahl der Raubtiere natürlich abnimmt (und schließlich ganz ausstirbt), wenn keine Beutetiere vorhanden sind.

Nun wird die Zahl der Beutetiere natürlich umso geringer, je größer die Population der Raubtiere ist, so dass wir die (logistische) Differentialgleichung für die Beutetiere um einen entsprechenden negativen Term ergänzt haben. Ähnliche Überlegungen führen zu dem analogen Term für die Differentialgleichung der Raubtiere, wobei sich mehr Beutetiere natürlich positiv auf die Anzahl der Raubtiere auswirken.

Eine explizite Lösung dieses Räuber–Beute–Modells ist im Allgemeinen nicht bekannt. Qualitative Aussagen über das Lösungsverhalten werden wir später allerdings noch machen können. Ansonsten erhält man approximative Lösungen durch den Einsatz geeigneter numerischer Verfahren, vergleiche den Abschnitt 1.5 für einen sehr kurzen Einstieg. \diamond

Ein weiteres zentrales Anwendungsgebiet für Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die Simulation von elektrischen Schaltkreisen. Wir betrachten im Folgenden als einfaches Modell einen Schwingkreis, vergleiche die Abbildung 1.5. Dabei verwenden wir die nachstehenden Bezeichnungen:

| | |
|-----------------|------------------------------|
| U : | Spannung, |
| Q : | Ladung, |
| $I = \dot{Q}$: | Strom, |
| R : | Widerstand, |
| C : | Kapazität des Kondensators, |
| L : | Eigeninduktivität der Spule. |

Ferner benötigen wir zur Modellierung verschiedene Gesetze der Physik:

- *Ohmsches Gesetz* für den Widerstand: $U_{\text{Wid}} = R \cdot I$
- *Faradaysches Gesetz* für den Kondensator: $Q = C \cdot U_{\text{Kap}}$
- Induktionsspannung einer Spule: $U_{\text{Sp}} = L \cdot \dot{I}$
- *Zweites Kirchhoffsches Gesetz* („Maschenregel“): Die Summe der (vorzeichenbehafteten) Spannungen in einer Masche ist Null.

Damit sind wir nun in der Lage, das folgende Modell für einen Schwingkreis anzugeben, vergleiche [4].

Beispiel 1.13 (Schwingkreis)

Wir betrachten den Schwingkreis aus der Abbildung 1.5 und benutzen die gerade eingeführten Bezeichnungen. Aus dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz erhalten wir zunächst

$$U_{\text{Sp}} + U_{\text{Wid}} + U_{\text{Kap}} = U_0,$$

wobei U_0 die Versorgungsspannung ist. Durch Einsetzen der entsprechenden Spannungen erhalten wir hieraus die Gleichung

$$L \cdot \dot{I} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = U_0.$$

Verwenden wir noch $\dot{Q} = I$, so bekommen wir ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für Q und I , nämlich

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= I, \\ \dot{I} &= -\frac{R}{L} \cdot I - \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q + \frac{U_0}{L}.\end{aligned}$$

Für die Versorgungsspannung nimmt man oft das Modell

$$U_0(t) = U_{\text{max}} \cos(\omega t)$$

mit gewissen Konstanten $U_{\max} > 0$ (Amplitude) und $\omega \geq 0$ (Frequenz). Hiermit wird sowohl der Fall einer Gleichspannung ($\omega = 0$) als auch der Fall einer Wechselspannung ($\omega > 0$) abgedeckt. Ansonsten werden noch geeignete Startwerte für Q und I benötigt, etwa $Q(0) = 0$ und $I(0) = \frac{U_{\max}}{R}$. \diamond

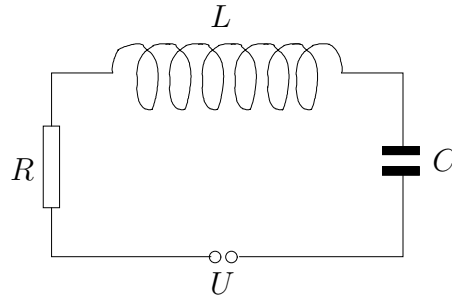
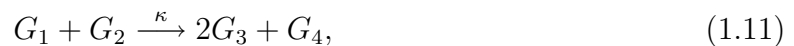


Abbildung 1.5: Schwingkreis zum Beispiel 1.13

Häufig sehr schwer zu lösende Differentialgleichungssysteme treten in der chemischen Reaktionskinetik auf. Wir betrachten hierzu das Reaktionsschema



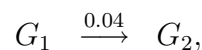
welches andeuten soll, dass je ein Molekül der Gase G_1 und G_2 zu zwei Molekülen von G_3 und einem Molekül von G_4 reagieren. Sind Druck, Volumen und Temperatur konstant, so ist die Reaktionsgeschwindigkeit nach dem *Massenwirkungsgesetz* proportional zu dem Produkt der Konzentrationen von G_1 und G_2 . Die Proportionalitätskonstante κ ist in dem Schema (1.11) über dem Pfeil angegeben. Je größer κ , desto größer ist die Reaktionsgeschwindigkeit. Bezeichnen wir die Konzentrationen der Gase G_1, G_2, G_3 und G_4 zum Zeitpunkt t mit $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ und $y_4(t)$ (in mol/l), so erhält man aus dem Reaktionsschema (1.11) das Differentialgleichungssystem

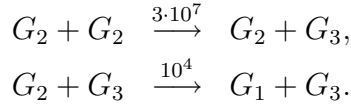
$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -\kappa y_1(t) y_2(t), \\ y_2'(t) &= -\kappa y_1(t) y_2(t), \\ y_3'(t) &= 2\kappa y_1(t) y_2(t), \\ y_4'(t) &= \kappa y_1(t) y_2(t). \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Differentialgleichungen in dem folgenden Beispiel herleiten, das in der Numerik ein sehr beliebtes Testbeispiel für so genannte steife Differentialgleichungen darstellt.

Beispiel 1.14 (Chemische Reaktionskinetik)

Gegeben seien drei Gase G_1, G_2 und G_3 mit dem Reaktionsschema





Das zugehörige System von Differentialgleichungen lautet:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -0.04y_1(t) + 10^4y_2(t)y_3(t), \\ y_2'(t) &= 0.04y_1(t) - 10^4y_2(t)y_3(t) - 3 \cdot 10^7y_2(t)^2, \\ y_3'(t) &= 3 \cdot 10^7y_2(t)^2. \end{aligned}$$

Als Anfangswerte benötigt man noch gewisse Anfangskonzentrationen, beispielsweise $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0$ zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$. \diamond

Die Addition der drei Differentialgleichungen aus dem Beispiel 1.14 liefert übrigens

$$(y_1 + y_2 + y_3)'(t) = 0 \tag{1.12}$$

für alle Zeiten t , so dass die Summe der Konzentrationen $y_1 + y_2 + y_3$ konstant bleibt. Dies ist das *Gesetz der Massenerhaltung*.

Zahlreiche weitere Anwendungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen findet der interessierte Leser in den beiden Büchern [6] von Braun sowie [13] von Heuser.

1.4 Umformulierungen von Differentialgleichungen

Wir geben in diesem Abschnitt drei Umformulierungen von Differentialgleichungen an, die für unsere weitere Vorgehensweise von zentraler Bedeutung sein werden. Zunächst wollen wir zeigen, dass eine Differentialgleichung n -ter Ordnung stets als ein aus n Gleichungen bestehendes System von Differentialgleichungen erster Ordnung geschrieben werden kann. Danach geben wir dann eine Umformulierung eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung in der Gestalt einer Integralgleichung an, die insbesondere für theoretische Zwecke wichtig werden wird. Schließlich zeigen wir, dass jede Differentialgleichung im Prinzip als eine so genannte autonome Differentialgleichung geschrieben werden kann. Solche Differentialgleichungen spielen insbesondere in der qualitativen Theorie eine große Rolle.

Zunächst sei also eine Differentialgleichung n -ter Ordnung wie in (1.2) gegeben. Als zugehöriges System von Differentialgleichungen erster Ordnung betrachten wir

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dann gilt das folgende Resultat.

Satz 1.15 Ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung n -ter Ordnung (1.2) und setzen wir

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) := (y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

so handelt es sich bei der vektorwertigen Funktion

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

um eine Lösung des Systems (1.13) erster Ordnung. Ist umgekehrt (y_1, y_2, \dots, y_n) eine Lösung von dem System (1.13), so ist die erste Komponente y_1 hinreichend glatt und eine Lösung von (1.2).

Beweis: Die erste Aussage ist offensichtlich und bedarf keines Beweises. Zum Nachweis der Umkehrung sei also (y_1, y_2, \dots, y_n) eine Lösung des Systems (1.13). Aus (1.13) folgt dann sukzessive

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1', \\ y_3 &= y_2' = y_1'', \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1}' = \dots = y_1^{(n-1)} \end{aligned}$$

und somit

$$y_1^{(n)} = y_n' = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = f(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}),$$

so dass $y := y_1$ in der Tat eine Lösung von (1.2) darstellt. \square

Aufgrund des Satzes 1.15 sind Differentialgleichungen n -ter Ordnung vollständig äquivalent zu Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung. Im Hinblick auf die Herleitung dieser Äquivalenz in dem Satz 1.15 sollte auch klar sein, wie man eventuell gegebene Anfangswerte umzuformulieren hat.

Betrachten wir konkret die Situation aus dem Beispiel 1.11, so haben wir es mit dem Anfangswertproblem

$$y'' = g - \frac{k}{m}y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

zu tun. Als System erster Ordnung ergibt dies die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= g - \frac{k}{m}y_1 \end{aligned}$$

mit den zugehörigen Anfangswerten $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$.

Entsprechend lassen sich auch Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung umformulieren, indem man jede einzelne Differentialgleichung höherer Ordnung in ein entsprechendes System erster Ordnung umschreibt. Aus diesem Grunde werden wir uns im Folgenden fast ausschließlich und quasi ohne Einschränkung mit Differentialgleichungssystemen erster Ordnung auseinandersetzen.

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass ein solches Differentialgleichungssystem stets in der Gestalt einer Integralgleichung geschrieben werden kann. Diese Äquivalenz werden wir insbesondere beim Nachweis von Existenz- und Eindeigkeitssätzen ausnutzen.

Satz 1.16 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $t_0 \in I$. Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I, \quad y(t_0) = y_0 \quad (1.14)$$

für eine gegebene stetige Funktion $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einen Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar und löst das Anfangswertproblem (1.14).
- (b) $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig und löst die *Integralgleichung*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (1.15)$$

Beweis: Sei $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zunächst eine Lösung des Anfangswertproblems (1.14). Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir durch Integration der Differentialgleichung daher

$$y(t) = c + \int_{t_0}^t y'(s) ds = c + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

und aus $y(t_0) = y_0$ folgt für die noch freie Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}^n$ unmittelbar $c = y_0$. Also ist y eine (stetige) Lösung der Integralgleichung (1.15).

Sei umgekehrt y jetzt eine mindestens stetige Lösung der Integralgleichung (1.15). Dann ist der Integrand insbesondere eine stetige Funktion, und wir erhalten aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung durch Ableiten aus der Identität (1.15) sofort

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I.$$

Ebenso ergibt sich aus (1.15) unmittelbar $y(t_0) = y_0$, so dass y in der Tat eine stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (1.14) ist. \square

Man beachte, dass im Satz 1.16 nichts über die Existenz einer Lösung von Anfangswertproblemen ausgesagt wird. Vielmehr wird nur behauptet, dass ein Anfangswertproblem genau dann eine Lösung hat, wenn eine gewisse Integralgleichung eine Lösung besitzt. Es könnte also durchaus vorkommen, dass beide Probleme gar keine Lösung haben. Wir werden später jedoch sehen, dass dies (bei stetigem f) nicht der Fall ist, sondern tatsächlich stets mindestens eine Lösung existiert.

Wir betrachten schließlich so genannte *autonome Differentialgleichungen*

$$y' = f(y),$$

bei der die rechte Seite f nicht explizit von t abhängt. Das folgende Resultat besagt, dass man jedes System von Differentialgleichungen in ein (weitgehend) äquivalentes autonomes System umwandeln kann.

Satz 1.17 Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Betrachte einerseits das System von Differentialgleichungen

$$y' = f(t, y) \quad (1.16)$$

und andererseits das zugehörige autonome System

$$\zeta' = 1, \quad z' = f(\zeta, z). \quad (1.17)$$

Dann gelten:

- (a) Ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.16), so ist $(\zeta(t), z(t)) := (t, y(t))$ eine Lösung von (1.17).
- (b) Ist $(\zeta(t), z(t)) : I \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.17) und gilt $\zeta(s) = s$ für mindestens ein $s \in I$, so ist $y := z$ eine Lösung von (1.16).

Beweis: (a) Aus $\zeta'(t) \equiv 1$ und $z'(t) = y'(t) = f(t, y(t)) = f(\zeta(t), z(t))$ für alle $t \in I$ folgt sofort die Behauptung (a).

(b) Aus $\zeta'(t) \equiv 1$ folgt durch Integration zunächst $\zeta(t) = t + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Wegen $\zeta(s) = s$ für mindestens ein $s \in I$ folgt hieraus $c = 0$. Also ist $\zeta(t) = t$ und daher

$$y'(t) = z'(t) = f(\zeta(t), z(t)) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I,$$

womit auch die Aussage (b) bewiesen ist. □

Für den praktischen Gebrauch ist der Satz 1.17 nicht sehr wertvoll. Beispielsweise kann es vorkommen, dass das System (1.16) linear ist und das zugehörige autonome System (1.17) eine nichtlineare Differentialgleichung enthält. Außerdem besitzt das autonome System (1.17) wegen $\zeta' \equiv 1$ mindestens eine unbeschränkte Komponente in der Lösung, während man bei der Betrachtung von autonomen Systemen speziell an beschränkten Lösungen interessiert ist. Trotzdem ist der Satz 1.17 für gewisse theoretische Zwecke manchmal recht nützlich. Außerdem haben wir auf diese Weise den Begriff einer autonomen Differentialgleichung eingeführt, der später noch eine gewisse Rolle spielen wird, vergleiche das Kapitel 6. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass viele Differentialgleichungen per se autonom sind und daher gar nicht erst in eine solche umformuliert werden müssen.

1.5 Einige elementare numerische Verfahren

Obwohl die theoretischen Untersuchungen von Differentialgleichungen im Mittelpunkt dieser Ausarbeitung stehen und wir für einige wichtige Klassen von Differentialgleichungen mehr oder weniger explizite Lösungen werden angeben können, so muss man doch feststellen, dass es viele Differentialgleichungen gibt, bei denen eine direkte Angabe einer Lösung

nicht möglich ist. In diesem Fall hat man auf numerische Verfahren zurückzugreifen, die unter gewissen Voraussetzungen zumindest eine approximative Lösung einer solchen Differentialgleichung liefern. Aus diesem Grunde beschreiben wir in diesem Abschnitt kurz die Idee einiger elementarer numerischer Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben. Mehr zu diesem Thema wird meist in einer Numerik-Vorlesung angeboten.

Wir betrachten konkret das Anfangswertproblem (mit leicht modifizierter Bezeichnung)

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [a, b], \quad y(a) = y_a \quad (1.18)$$

für ein gegebenes Intervall $[a, b]$, eine ebenfalls gegebene und mindestens stetige Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einen Anfangswert $y_a \in \mathbb{R}^n$. Dem Leser sei empfohlen, im Folgenden speziell an den skalaren Fall $n = 1$ zu denken.

Zunächst zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in der Gestalt

$$\Delta := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

und setzen zur Abkürzung

$$h_k := t_{k+1} - t_k \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Die Idee praktisch aller numerischen Verfahren zur Lösung des Anfangswertproblems (1.18) besteht darin, möglichst gute Näherungen y_k für die exakte Lösung $y(t)$ an den Stellen $t = t_k$ zu bestimmen. Für $k = 0$ wählt man üblicherweise den gegebenen Anfangswert $y_0 := y_a$. Für $k > 0$ hingegen gelangt man beispielsweise mittels der folgenden Motivation zu Näherungen y_k für $y(t_k)$: Aufgrund des Taylorschen Satzes gilt bei nicht zu großer (lokaler) *Schrittweite* $h_k = t_{k+1} - t_k$ bekanntlich

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &\approx y(t_k) + y'(t_k)(t_{k+1} - t_k) \\ &= y(t_k) + h_k y'(t_k) \\ &= y(t_k) + h_k f(t_k, y(t_k)), \end{aligned} \quad (1.19)$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Differentialgleichung (1.18) ergibt. Anschaulich besagt die Formel (1.19), dass man die exakte Lösung $y(t)$ an der Stelle $t = t_{k+1}$ approximieren kann, indem man, ausgehend von der exakten Lösung $y(t)$ in $t = t_k$, mit der Steigung $y'(t_k)$ am linken Intervallende des Teilintervalls $[t_k, t_{k+1}]$ nach t_{k+1} geht, vergleiche die Abbildung 1.6.

Ersetzt man in (1.19) nun die unbekannten Werte $y(t_{k+1})$ und $y(t_k)$ durch Näherungen y_{k+1} und y_k , so ergibt sich die Iterationsvorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.20)$$

die man als (explizites) *Euler-Verfahren* oder *Polygonzugmethode* bezeichnet, vergleiche nochmals die Abbildung 1.6.

Zu einem verwandten Verfahren gelangt man, wenn man in (1.19) die am linken Intervallende von $[t_k, t_{k+1}]$ auftretende Steigung $y'(t_k)$ durch die in der Intervallmitte $t_k + h_k/2$

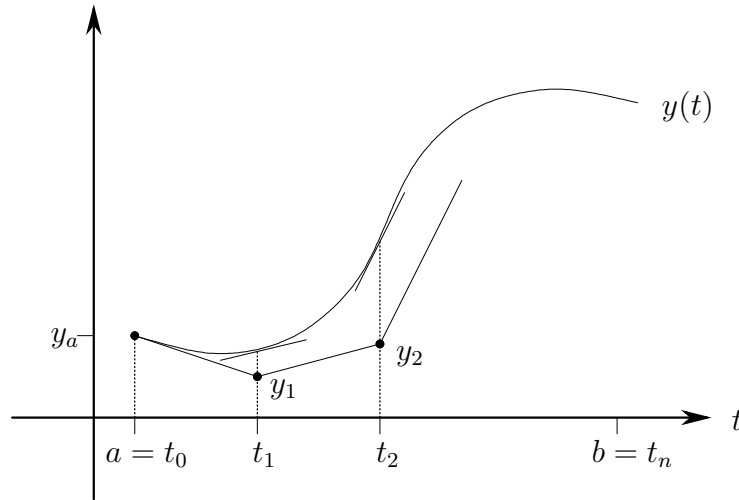


Abbildung 1.6: Veranschaulichung des Euler-Verfahrens

vorkommende Steigung $y'(t_k + h_k/2)$ ersetzt. Verwendet man wieder die Differentialgleichung (1.18), so ergibt sich analog zu (1.19) daher

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &\approx y(t_k) + y'(t_k + h_k/2)(t_{k+1} - t_k) \\ &= y(t_k) + h_k y'(t_k + h_k/2) \\ &= y(t_k) + h_k f(t_k + h_k/2, y(t_k + h_k/2)). \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin wieder $y(t_k)$ und $y(t_{k+1})$ durch Näherungen y_k und y_{k+1} und approximiert den unbekannten Wert $y(t_k + h_k/2)$ durch Anwendung des Euler-Verfahrens (1.20) durch

$$y(t_k + h_k/2) \approx y_k + \frac{h_k}{2} f(t_k, y_k),$$

so ergibt sich das so genannte *modifizierte Euler-Verfahren*

$$y_{k+1} = y_k + h_k f\left(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{h_k}{2} f(t_k, y_k)\right), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.21)$$

zur Lösung des Anfangswertproblems (1.18).

Ein weiteres Verfahren erhält man, indem man in (1.19) die am linken Intervallende von $[t_k, t_{k+1}]$ auftretende Ableitung $y'(t_k)$ durch den Mittelwert

$$\frac{1}{2}(y'(t_k) + y'(t_{k+1}))$$

der an den beiden Intervallenden auftretenden Ableitungen $y'(t_k)$ und $y'(t_{k+1})$ ersetzt. Wie in (1.19) erhält man unter Benutzung von (1.18) dann

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &\approx y(t_k) + \frac{1}{2}(y'(t_k) + y'(t_{k+1}))(t_{k+1} - t_k) \\ &= y(t_k) + \frac{1}{2}h_k(y'(t_k) + y'(t_{k+1})) \\ &= y(t_k) + \frac{1}{2}h_k\left(f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))\right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Würden wir jetzt wieder die exakten Werte $y(t_k)$ und $y(t_{k+1})$ durch Näherungen y_k und y_{k+1} ersetzen, so würde y_{k+1} auf beiden Seiten auftreten, und die entstehende Gleichung wäre im Allgemeinen nicht mehr explizit nach y_{k+1} auflösbar. Aus diesem Grunde ersetzen wir $y(t_{k+1})$ in der rechten Seite durch die aus dem Euler-Verfahren (1.20) resultierende Näherung

$$y(t_{k+1}) \approx y_k + h_k f(t_k, y_k),$$

womit man insgesamt die Vorschrift

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} h_k \left(f(t_k, y_k) + f\left(t_k + h_k, y_k + h_k f(t_k, y_k)\right) \right) \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (1.23)$$

erhält, die als *Verfahren von Heun* bezeichnet wird.

Ähnliche (allerdings etwas langwierigere, vergleiche beispielsweise [15]) Überlegungen führen auf das *klassische Runge-Kutta-Verfahren*

$$y_{k+1} := y_k + \frac{h_k}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &:= f(t_k, y_k), \\ k_2 &:= f\left(t_k + \frac{1}{2}h_k, y_k + \frac{1}{2}h_k k_1\right), \\ k_3 &:= f\left(t_k + \frac{1}{2}h_k, y_k + \frac{1}{2}h_k k_2\right), \\ k_4 &:= f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3). \end{aligned}$$

Wir wollen im Folgenden dieses klassische Runge-Kutta-Verfahren auf das Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra aus dem Beispiel 1.12 anwenden. Das MATLAB-Hauptprogramm zur Realisierung dieses Verfahrens könnte beispielsweise wie folgt aussehen:

```
%
% M-File mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren
%

% Beispiel
problem='RBeute';

% Intervall und Anfangswerte
a=0;
b=5;
ya=[3 1]';

% Initialisierung
y=ya;
```



```

t=a;
k=0;

% Schrittweite
h=(b-a)/100;

% Ausgabe im Startpunkt
disp(' k      t      y(1)      y(2)')
disp('=====')
fprintf('%4.0f %8.3f %10.5f %10.5f\n',k,t,y(1),y(2));

% Iteration
halfh=h/2;
while (t+halfh)<b

    % Updates
    k=k+1;
    k1=feval(problem,t,y);
    k2=feval(problem,t+0.5*h,y+0.5*h*k1);
    k3=feval(problem,t+0.5*h,y+0.5*h*k2);
    k4=feval(problem,t+h,y+h*k3);
    y=y+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    t=t+h;

    % Ausgabe in jedem Iterationsschritt
    fprintf('%4.0f %8.3f %10.5f %10.5f\n',k,t,y(1),y(2));

end

```

Dieses Programm benötigt eine Unteroutine, nämlich `RBeute`. Diese wertet die rechte Seite f der Räuber-Beute-Gleichung aus und lautet wie folgt:

```

function f = RBeute (t,y)

%
%   f-Auswertung fuer das Raeuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra
%

mu1=10;
mu2=1;
lambda1=0;
lambda2=0;
rho1=10;

```

```

rho2=1;

f1=y(1)*(mu1-lambda1*y(1)-rho1*y(2));
f2=y(2)*(-mu2-lambda2*y(2)+rho2*y(1));

f=[f1 f2]';

return

```

Das Programm dürfte weitgehend selbsterklärend sein: Im Hauptprogramm wird durch den Befehl `problem='RBeute'` der Name des zu lösenden Testbeispiels eingegeben. Dies ist der Name unseres Unterprogramms zur Auswertung von f , wobei man beachte, dass f hier ein Vektor aus dem \mathbb{R}^2 ist. Die für das Räuber-Beute-Modell zu spezifizierenden Parameter $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ sind ebenfalls in diesem Unterprogramm festgelegt. Im Hauptprogramm werden anschließend das Intervall $[a, b]$ und ein Anfangswert für $y(a)$ angegeben ($t_0 = a$ ist hier der Anfangszeitpunkt). Danach wird die Iterationsvorschrift initialisiert, der Iterationszähler k auf Null gesetzt und als (konstante) Schrittweite $h = \frac{1}{100}(b - a)$ gewählt. Einige dieser Anfangsdaten werden dann am Bildschirm mit den Befehlen `disp` und `fprintf` ausgegeben. Der `disp`-Befehl schreibt genau den in einfachen Anführungszeichen stehenden Text auf den Bildschirm, der `fprintf`-Befehl sorgt für eine strukturierte Ausgabe der Daten: Durch `%8.3f` wird beispielsweise dafür gesorgt, dass die Zeit t in jedem Schritt auf acht Stellen ausgegeben wird, von denen drei Stellen nach dem Komma liegen. Die `while`-Schleife enthält dann die eigentliche Iteration, die Vorschriften hierin realisieren das klassische Runge-Kutta-Verfahren.

Lässt man das so beschriebene Programm mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren unter MATLAB laufen, so ergibt sich die folgende Ausgabe:

| k | t | y(1) | y(2) |
|----|-------|---------|---------|
| 0 | 0.000 | 3.00000 | 1.00000 |
| 1 | 0.050 | 2.92393 | 1.10377 |
| 2 | 0.100 | 2.70351 | 1.20920 |
| 3 | 0.150 | 2.37525 | 1.30638 |
| 4 | 0.200 | 1.99583 | 1.38629 |
| 5 | 0.250 | 1.62036 | 1.44329 |
| 6 | 0.300 | 1.28638 | 1.47606 |
| 7 | 0.350 | 1.01036 | 1.48667 |
| 8 | 0.400 | 0.79311 | 1.47904 |
| 9 | 0.450 | 0.62725 | 1.45748 |
| 10 | 0.500 | 0.50278 | 1.42591 |
| 11 | 0.550 | 0.41017 | 1.38752 |
| 12 | 0.600 | 0.34151 | 1.34477 |
| 13 | 0.650 | 0.29068 | 1.29948 |
| 14 | 0.700 | 0.25318 | 1.25297 |

| | | | |
|----|-------|---------|---------|
| 15 | 0.750 | 0.22572 | 1.20617 |
| 16 | 0.800 | 0.20600 | 1.15976 |
| 17 | 0.850 | 0.19237 | 1.11421 |
| 18 | 0.900 | 0.18373 | 1.06987 |
| 19 | 0.950 | 0.17934 | 1.02695 |
| 20 | 1.000 | 0.17879 | 0.98564 |
| 21 | 1.050 | 0.18189 | 0.94604 |
| 22 | 1.100 | 0.18865 | 0.90826 |
| 23 | 1.150 | 0.19930 | 0.87237 |
| : | : | : | : |
| : | : | : | : |

Diese Ausgabe geht bis $k = 100$ und ist hier aus Platzgründen nicht vollständig wiedergegeben.

Man kann sich das Leben allerdings auch vereinfachen und auf vorhandene Programmbibliotheken in MATLAB zurückgreifen. MATLAB besitzt unter anderem nämlich verschiedene Löser für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, die obendrein viele weitere Feinheiten beinhalten als unsere recht einfach gehaltene Implementation des klassischen Runge–Kutta–Verfahrens.

Im Abschnitt 1.2 haben wir mit `ode23` bereits einen solchen MATLAB–Löser kennengelernt. Dieser ist insbesondere für relativ einfache Probleme und geringe Genauigkeiten ausreichend. Für das etwas kompliziertere Räuber–Beute–Modell wollen wir hier ein etwas präziseres Verfahren verwenden, das den Namen `ode45` trägt. Das zugehörige Programm könnte dann wie folgt aussehen:

```
[t,y]=ode45(@RBeute,[0 5],[3 1]);
plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'--');
```

Dieses Programm ist extrem kurz und zeichnet mittels des `plot`–Befehls obendrein die zugehörigen Populationsgrößen der Beute– und der Raubtiere, vergleiche die Abbildung 1.7. Man erkennt deutlich ein periodisches Verhalten, das durchaus plausibel ist: Eine relativ hohe Anzahl an Beutetieren sorgt zunächst dafür, dass die Raubtiere genügend zu fressen haben. Irgendwann aber sind nicht mehr genügend Beutetiere vorhanden, die Zahl der Raubtiere schrumpft, und zeitlich leicht versetzt erholt sich die Zahl der Beutetiere und erreicht im Prinzip wieder ihre Ausgangspopulation. Fast parallel hierzu steigt aber auch die Population der Raubtiere wieder an usw.

Mehr zur Numerik von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die hier nicht im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen wird, findet der interessierte Leser in den Büchern [11, 17] oder in dem Skript [15] im Rahmen dessen, was innerhalb einer Numerik–Vorlesung üblich ist.

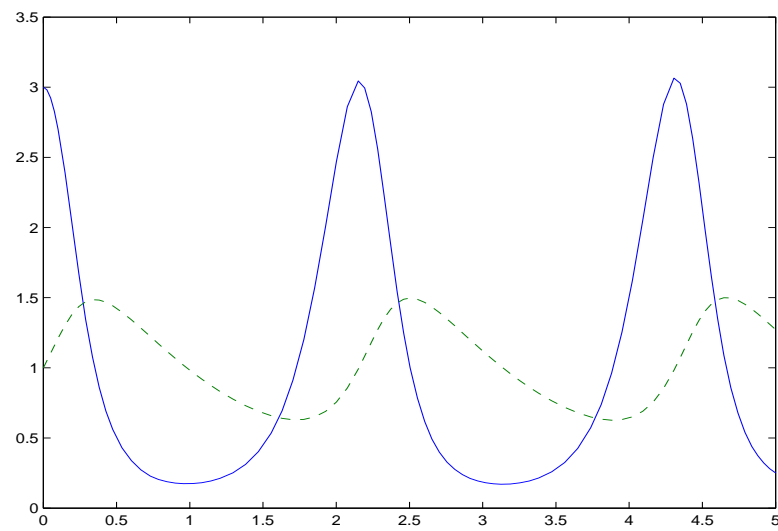


Abbildung 1.7: Populationsgrößen der Beutetiere (durchgezogene Linie) und der Raubtiere (gestrichelte Linie)

Kapitel 2

Skalare Differentialgleichungen

- 2.1 Skalare lineare Differentialgleichungen
- 2.2 Bernoulli- und Riccati-Differentialgleichungen
- 2.3 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen
- 2.4 Exakte Differentialgleichungen

2.1 Skalare lineare Differentialgleichungen

Eine (skalare) *lineare Differentialgleichung* (erster Ordnung) hat die Gestalt

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad \forall t \in I, \quad (2.1)$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein gegebenes Intervall ist und $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Speziell für $b(t) \equiv 0$ spricht man von dem *homogenen Problem*, anderenfalls von dem *inhomogenen Problem*. Die Unterscheidung zwischen dem homogenen und dem inhomogenen Problem spielt im Folgenden für die explizite Lösung der linearen Differentialgleichung (2.1) eine große Rolle.

Wir betrachten zunächst die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad \forall t \in I. \quad (2.2)$$

Da $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, besitzt sie nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Stammfunktion. Mit $A(t)$ bezeichnen wir eine beliebige solche Stammfunktion. Eine spezielle Stammfunktion ist beispielsweise gegeben durch

$$A_0(t) := \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \quad \forall t \in I,$$

wobei $t_0 \in I$ beliebig sein darf und im Allgemeinen aus einer Anfangsbedingung der Form

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.3)$$

stammt. Mit diesen Bezeichnungen haben wir den folgenden Satz.

Satz 2.1 Für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist

$$y_c(t) := ce^{A(t)} \quad \forall t \in I \quad (2.4)$$

eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung (2.2). Umgekehrt ist jede Lösung von (2.2) zwangsläufig von dieser Gestalt. Das zugehörige Anfangswertproblem (2.2), (2.3) hat die eindeutige Lösung

$$y(t; t_0, y_0) := y_0 e^{A_0(t)} \quad \forall t \in I.$$

Beweis: Wegen

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = A'(t) e^{A(t)} = a(t) e^{A(t)}$$

ist jede Funktion der Gestalt (2.4) offenbar eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung (2.2). Ist umgekehrt y eine beliebige Lösung von (2.2), so folgt mit einem y_c aus (2.4) sofort

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y}{y_c} \right) = \frac{y_c y' - y'_c y}{y_c^2} = \frac{y_c \cdot a \cdot y - a \cdot y_c \cdot y}{y_c^2} = 0 \quad \text{auf } I,$$

also ist y/y_c konstant auf I und daher y selbst eine Funktion von der Gestalt (2.4).

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem (2.2), (2.3). Aufgrund der gerade bewiesenen Aussage hat eine Lösung hiervon notwendig die Form

$$y(t; t_0, y_0) = ce^{A(t)} \quad \forall t \in I.$$

Die Forderung

$$y_0 \stackrel{!}{=} y(t_0; t_0, y_0) = ce^{A(t_0)}$$

liefert sofort

$$c = y_0 e^{-A(t_0)}.$$

Damit erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t; t_0, y_0) = y_0 e^{A(t) - A(t_0)} = y_0 e^{A_0(t)}$$

unter Verwendung der speziellen Stammfunktion $A_0(t)$. □

Für die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad \forall t \in I$$

mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ liefert der Satz 2.1 (mit $a(t) \equiv \alpha$) insbesondere die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t; t_0, y_0) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \in I$$

für das zugehörige Anfangswertproblem.

Wir betrachten als Nächstes die inhomogene Differentialgleichung (2.1). Die Gestalt der Lösungsmenge wird durch das nachstehende Resultat beschrieben.

Satz 2.2 Sei $y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.1) und y_c eine beliebige Lösung der homogenen Differentialgleichung, vergleiche (2.4). Dann ist

$$y(t) := y_p(t) + y_c(t) \quad \forall t \in I \quad (2.5)$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.1). Umgekehrt ist jede Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.1) notwendig von dieser Gestalt.

Beweis: Man verifiziert sofort, dass jede Funktion der Gestalt (2.5) tatsächlich eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.1) ist. Sei umgekehrt eine beliebige Lösung y von (2.1) gegeben und y_p eine partikuläre Lösung von (2.1). Dann ist

$$\begin{aligned} (y - y_p)' &= y' - y_p' \\ &= a(t)y(t) + b(t) - [a(t)y_p(t) + b(t)] \\ &= a(t)[y(t) - y_p(t)] \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Also ist $y - y_p$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (2.2). Wegen Satz 2.1 ist daher

$$y(t) - y_p(t) = y_c(t)$$

mit einem y_c aus (2.4), womit der Beweis vollständig erbracht ist. \square

In Worten kann man den Satz 2.2 wie folgt beschreiben:

allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung =
partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung +
allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Da wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung wegen Satz 2.1 kennen, bleibt somit nur noch zu klären, wie man an eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gelangt. Dazu benutzt man als Trick die so genannte Methode der *Variation der Konstanten*: Hierbei fasst man die Konstante c in der allgemeinen Lösung (2.4) als eine differenzierbare Funktion $c = c(t)$ von t auf und versucht, diese dann so zu bestimmen, dass

$$y_p(t) := c(t)e^{A(t)} \quad \forall t \in I \quad (2.6)$$

tatsächlich eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.1) ist. Die nachstehenden Ausführungen zeigen, dass dieser Ansatz stets zum Ziel führt.

Setzt man die Funktion (2.6) in die inhomogene Differentialgleichung (2.1) ein, so erhält man unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned} y_p'(t) = a(t)y_p(t) + b(t) &\iff c(t)a(t)e^{A(t)} + c'(t)e^{A(t)} = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t) \\ &\iff c'(t)e^{A(t)} = b(t) \\ &\iff c'(t) = b(t)e^{-A(t)}. \end{aligned}$$

Wählt man $c(t)$ daher als Stammfunktion der nach Voraussetzung stetigen Abbildung $b(t)e^{-A(t)}$, so erhält man mit dem Ansatz (2.6) tatsächlich eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.1). Hat man zusätzlich einen Anfangswert (2.3), so kann man den in (2.4) auftretenden Parameter c eindeutig mittels dieses Anfangswertes bestimmen und erhält auf diese Weise eine eindeutig bestimmte Lösung für das Anfangswertproblem (2.1), (2.3) der inhomogenen Differentialgleichung.

Bei der praktischen Rechnung wird man nicht versuchen, sich die obigen Formeln (etwa für $c(t)$ bei der Methode der Variation der Konstanten) explizit zu merken. Vielmehr wird man die obige Vorgehensweise nachvollziehen. Wir illustrieren dies an einem Beispiel.

Beispiel 2.3 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = (\sin t)y + \sin t, \quad y(0) = 0.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$y' = a(t)y \quad \text{mit} \quad a(t) := \sin t.$$

Dann ist

$$A(t) := -\cos t$$

eine Stammfunktion von $a(t)$ und wegen Satz 2.1

$$y_c(t) := ce^{-\cos t}, \quad c \in \mathbb{R},$$

somit die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung machen wir den Ansatz

$$y_p(t) := c(t)e^{-\cos t}$$

aus der Methode der Variation der Konstanten. Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (\sin t)y_p(t) + \sin t \\ \iff c(t)e^{-\cos t}\sin t + c'(t)e^{-\cos t} &= (\sin t)c(t)e^{-\cos t} + \sin t \\ \iff c'(t)e^{-\cos t} &= \sin t \\ \iff c'(t) &= (\sin t)e^{\cos t}. \end{aligned}$$

Als Stammfunktion erhalten wir beispielsweise

$$c(t) = -e^{\cos t}$$

und damit die partikuläre Lösung

$$y_p(t) \equiv -1,$$

von der man sofort bestätigt, dass es sich tatsächlich um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung handelt (man beachte in diesem Zusammenhang, dass wir nur

eine partikuläre Lösung brauchen und daher nur eine Stammfunktion $c(t)$ benötigen). Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist wegen Satz 2.2 daher gegeben durch

$$y(t) = y_p(t) + y_c(t) = -1 + ce^{-\cos t}$$

mit einer noch beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Diese hat man an den Anfangswert $y(0) = 0$ anzupassen:

$$0 \stackrel{!}{=} y(0) = -1 + ce^{-\cos 0} = -1 + ce^{-1} \implies c = e.$$

Die eindeutige Lösung des gegebenen Anfangswertproblems lautet somit

$$y(t; t_0, y_0) = y(t; 0, 0) = -1 + e^{1-\cos t},$$

wie man durch Einsetzen in die Differentialgleichung unmittelbar bestätigt. \diamond

Zusammenfassend halten wir fest, dass man bei der Lösung eines Anfangswertproblems für eine (skalare) lineare Differentialgleichung im Allgemeinen wie folgt vorgehen wird:

Schema zur Lösung von skalaren linearen Differentialgleichungen:

1. Bestimme die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung gemäß Satz 2.1.
2. Bestimme eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels der Methode der Variation der Konstanten.
3. Bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gemäß Satz 2.2.
4. Passe die freie Konstante c an die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ an.

Problematisch sind hierbei insbesondere diejenigen Schritte, in denen man eine Stammfunktion bestimmen muss, da diese zwar existiert, sich relativ oft aber nicht in Form eines geschlossenen Ausdrucks explizit wird angeben lassen.

2.2 Bernoulli– und Riccati–Differentialgleichungen

Es gibt eine Reihe von nichtlinearen Differentialgleichungen, die sich durch geeignete Transformationen auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen lassen. Wir illustrieren dies in diesem Abschnitt am Beispiel zweier nichtlinearer Differentialgleichungen.

Zunächst behandeln wir die so genannte *Bernoulli–Differentialgleichung*

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\alpha \quad \forall t \in I \tag{2.7}$$

mit stetigen Funktionen $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem gegebenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und einem Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$. Speziell für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ erhält man eine (inhomogene bzw. homogene)

lineare Differentialgleichung, die sich mit den Methoden des vorigen Abschnitts behandeln lässt. Für die weiteren Untersuchungen dieses Abschnitts dürfen wir daher $\alpha \notin \{0, 1\}$ annehmen. Speziell für $\alpha = 2$ spricht man auch von einer *logistischen Differentialgleichung*.

Unter den genannten Voraussetzungen können wir die Bernoulli-Differentialgleichung (2.7) mit dem Faktor $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ multiplizieren und erhalten die (zumindest für alle t mit $y(t) \neq 0$) äquivalente Differentialgleichung

$$\underbrace{(1 - \alpha)y'y^{-\alpha}}_{=(y^{1-\alpha})'} = (1 - \alpha)a(t)y^{1-\alpha} + (1 - \alpha)b(t),$$

die sich somit schreiben lässt als

$$(y^{1-\alpha})' = (1 - \alpha)a(t)y^{1-\alpha} + (1 - \alpha)b(t).$$

Für die Funktion

$$z(t) := y(t)^{1-\alpha}$$

ergibt sich daher die lineare Differentialgleichung

$$z' = (1 - \alpha)a(t)z + (1 - \alpha)b(t). \quad (2.8)$$

Diese lässt sich mit den Methoden des vorigen Abschnitts behandeln. Hat man daher eine Lösung $z(t)$ dieser linearen Differentialgleichung, so erhält man mittels der Rücktransformation

$$y(t) := z(t)^{1/(1-\alpha)}$$

eine Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung (2.7). Streng genommen erhält man auf diese Weise eine Schar von Lösungen, die noch von einem freien Parameter $c \in \mathbb{R}$ abhängt, der sich aus der allgemeinen Lösung der transformierten linearen Differentialgleichung (2.8) ergibt. Dieser Parameter ist gegebenenfalls an einen vorgegebenen Anfangswert $y(t_0) = y_0$ anzupassen.

Prinzipiell gestattet der oben skizzierte Gedankengang, einen vollständigen Aufschluss über die Lösungen der Bernoulli-Differentialgleichung zu gewinnen. Allerdings sind wegen der auftretenden Potenzen y^α weitere elementare Überlegungen notwendig. Wird über den Exponenten α nichts vorausgesetzt, so ist die Funktion y^α nur für positive y definiert, als Lösungen der Bernoulli-Differentialgleichung kommen daher nur positive Funktionen $y(t)$ in Frage. Deshalb dürfen nur positive Lösungen $z(t)$ der transformierten Differentialgleichung (2.8) betrachtet werden. Das Anfangswertproblem

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\alpha \quad \forall t \in I, \quad y(t_0) = y_0$$

mit stetigen Funktionen $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $t_0 \in I$ und $y_0 > 0$ hat daher genau eine Lösung, denn für jede Lösung y ist $z = y^{1-\alpha}$ eine durch den Punkt $(t_0, y_0^{1-\alpha})$ gehende Lösung von (2.8), und aufgrund der Ausführungen im vorigen Abschnitt existiert genau eine solche Lösung.

Für spezielle Exponenten α sind auch Lösungen $y < 0$ zugelassen. Hier sind dann weitere Zusatzüberlegungen nötig, was wir dem Leser als Aufgabe überlassen.

Wir betrachten als Nächstes ein (uns schon bekanntes) Beispiel einer Bernoulli-Differentialgleichung mit dem Exponenten $\alpha = 2$, also einer logistischen Differentialgleichung.

Beispiel 2.4 Im Beispiel 1.10 sind wir bei der Betrachtung des Wachstums einer Population (etwa der Weltbevölkerung) auf das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \mu y(t) - \lambda y(t)^2, \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.9)$$

mit zwei Parametern $\mu, \lambda > 0$ gestoßen. Hierbei handelt es sich offenbar um eine logistische Differentialgleichung. Zu ihrer Lösung betrachten wir die zugehörige lineare Differentialgleichung

$$z' = -\mu z + \lambda,$$

vergleiche (2.8). Mit den Methoden des vorigen Abschnitts erhält man als allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung den Ausdruck

$$z(t) = ce^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu} \quad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}).$$

Mittels Rücksubstitution erhalten wir hieraus die allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{1}{ce^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}}$$

der hier betrachteten logistischen Differentialgleichung. Die Einarbeitung der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ liefert

$$c = \left(\frac{1}{y_0} - \frac{\lambda}{\mu} \right) e^{\mu t_0}$$

und somit die auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung

$$y(t; t_0, y_0) = 1 / \left[\left(\frac{1}{y_0} - \frac{\lambda}{\mu} \right) e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{\lambda}{\mu} \right]$$

des Anfangswertproblems (2.9). ◇

Wendet man das Ergebnis des Beispiels 2.4 auf das Wachstum der Weltbevölkerung an und wählt hierzu die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ mit $t_0 = 2000, y_0 = 6$ (das soll 6 Milliarden Menschen im Jahre 2000 entsprechen) sowie die Parameter $\lambda = 0.001$ und $\mu = \lambda \cdot K$ mit $K := 12$, so ergibt sich die in der Abbildung 2.1 für die Jahre 1700–2300 angegebene Lösungsfunktion. Demnach wächst die Bevölkerung momentan sehr stark, das Wachstum nimmt in Zukunft allerdings immer mehr ab.

Wir fassen die einzelnen Schritte zur Lösung einer Bernoulli-Differentialgleichung (2.7) noch einmal zusammen:

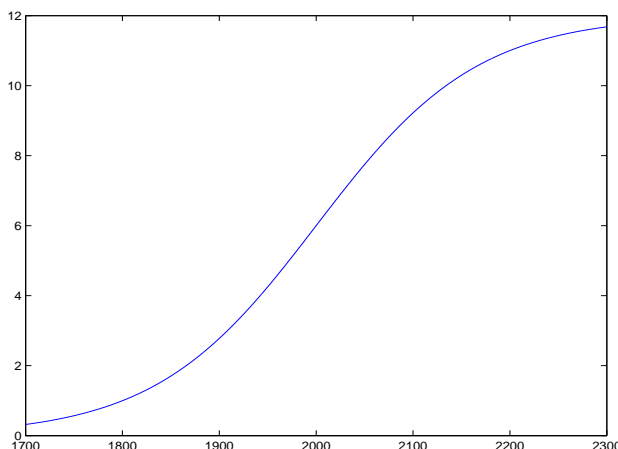


Abbildung 2.1: Entwicklung der Weltbevölkerung nach dem logistischen Modell aus dem Beispiel 2.4

Schema zur Lösung von Bernoulli–Differentialgleichungen:

1. Bestimme die allgemeine (von einem Parameter c abhängige) Lösung z der zugehörigen linearen Differentialgleichung (2.8) mit den Methoden des vorigen Abschnitts.
2. Setze $y(t) := z(t)^{1/(1-\alpha)}$.
3. Passe die noch freie Konstante c aus Schritt 1 an die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ an.

Wir betrachten als Nächstes die so genannte *Riccati–Differentialgleichung*

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 + c(t) \quad \forall t \in I, \quad (2.10)$$

mit stetigen Funktionen $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Speziell für $c \equiv 0$ erhalten wir hieraus die logistische Differentialgleichung, so dass (2.10) auch als eine Art Verallgemeinerung der vorher betrachteten Bernoulli–Differentialgleichung angesehen werden kann.

Eine Lösung der Riccati–Differentialgleichung (2.10) lässt sich im Allgemeinen nicht in geschlossener Form angeben. Kennt man jedoch (woher auch immer) eine partikuläre Lösung y_p von (2.10), so erhält man alle Lösungen der Riccati–Differentialgleichung durch den Ansatz

$$y(t) := y_p(t) + u(t),$$

wobei u eine beliebige Lösung der logistischen (oder Bernoulli–) Differentialgleichung

$$u'(t) = [2b(t)y_p(t) + a(t)]u(t) + b(t)u(t)^2 \quad (2.11)$$

bezeichnet. Ist nämlich y irgendeine Lösung der Riccati-Differentialgleichung (2.10), so erhalten wir für die Differenz

$$u(t) := y(t) - y_p(t)$$

wegen

$$y(t)^2 - y_p(t)^2 = (y(t) - y_p(t))(y(t) + y_p(t)) = u(t)(u(t) + 2y_p(t))$$

unmittelbar

$$\begin{aligned} u'(t) &= y'(t) - y_p'(t) \\ &= a(t)u(t) + b(t)[y(t)^2 - y_p(t)^2] \\ &= a(t)u(t) + b(t)u(t)[u(t) + 2y_p(t)] \\ &= [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u(t) + b(t)u(t)^2, \end{aligned}$$

die Differenz u ist also in der Tat eine Lösung von (2.11). Ist umgekehrt u eine beliebige Lösung von (2.11), so ist

$$y(t) := y_p(t) + u(t)$$

wegen

$$y(t)^2 = y_p(t)^2 + 2y_p(t)u(t) + u(t)^2$$

und daher

$$\begin{aligned} y'(t) &= y_p'(t) + u'(t) \\ &= a(t)y_p(t) + b(t)y_p(t)^2 + c(t) + [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u(t) + b(t)u(t)^2 \\ &= a(t)[y_p(t) + u(t)] + b(t)[y_p(t)^2 + 2y_p(t)u(t) + u(t)^2] + c(t) \\ &= a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 + c(t) \end{aligned}$$

tatsächlich eine Lösung der Riccati-Differentialgleichung (2.10). Aus unseren Ausführungen über Bernoulli-Differentialgleichungen mit Exponentem $\alpha = 2$ erhalten wir somit das nachstehende Resultat, indem man (2.11) auf die zugehörige lineare Differentialgleichung transformiert, vergleiche (2.8).

Satz 2.5 Seien $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und y_p eine partikuläre Lösung der Riccati-Differentialgleichung (2.10). Dann erhält man alle Lösungen der Riccati-Gleichung (2.10) durch den Ansatz

$$y(t) = y_p(t) + \frac{1}{z(t)},$$

wobei $z(t)$ eine beliebige Lösung der linearen Differentialgleichung

$$z'(t) = -[2b(t)y_p(t) + a(t)]z(t) - b(t) \quad (2.12)$$

bezeichnet.

Als Anwendung des Satzes 2.5 betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 2.6 Gegeben sei die Riccati-Differentialgleichung

$$y'(t) = (2t - 1)y(t) + (1 - t)y(t)^2 - t.$$

Eine partikuläre Lösung ist offenbar $y_p(t) \equiv 1$. Die zugehörige lineare Differentialgleichung (2.12) lautet

$$z'(t) = -z + t - 1,$$

deren allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$z(t) = ce^{-t} + t - 2.$$

Aus dem Satz 2.5 erhalten wir somit

$$y(t) = 1 + \frac{1}{ce^{-t} + t - 2}$$

als allgemeine Lösung der gegebenen Riccati-Differentialgleichung. \diamond

2.3 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Unter einer *Differentialgleichung mit getrennten Variablen* (oder *Veränderlichen*) versteht man eine Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(t) = f(t)g(y) \quad \forall t \in I \quad (2.13)$$

mit stetigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf gewissen Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$. Ist zusätzlich eine Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.14)$$

vorgegeben, so gehen wir im Folgenden davon aus, dass $t_0 \in I$ und $y_0 \in J$ jeweils innere Punkte der betrachteten Intervalle sind. Diese Voraussetzung erspart uns später, gewisse Spezialfälle wie etwa einseitige Umgebungen von t_0 extra zu betrachten.

Die Namensgebung für die Differentialgleichung (2.13) wird sofort ersichtlich, wenn wir diese zunächst schreiben als

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \quad (2.15)$$

und diese Identität durch Trennung der Variablen formal in die Gestalt

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)dt \quad (2.16)$$

bringen. Durch unbestimmte Integration (bzgl. y auf der linken Seite und bzgl. t auf der rechten Seite) folgt hieraus

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + c, \quad (2.17)$$

wobei noch eine Integrationskonstante zu berücksichtigen ist, die man an den Anfangswert (2.14) anzupassen hat. Diese nachträgliche Anpassung lässt sich vermeiden, indem man (2.14) bereits in die Integration einarbeitet und somit

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

löst, man also auf beiden Seiten spezielle Stammfunktionen von g und f berechnet. Diese Vorgehensweise soll zunächst an einem Beispiel illustriert werden.

Beispiel 2.7 Betrachte das Anfangswertproblem $y' = -t/y, y(1) = 1$. Setzt man $f(t) := -t$ auf $I := \mathbb{R}$ und $g(y) := 1/y$ auf (wegen des Anfangswertes) $J := (0, +\infty)$, so hat man mit den obigen Bezeichnungen gerade eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen vorliegen. Wir schreiben diese zunächst als

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-t}{y}$$

und erhalten hieraus

$$y dy = -t dt.$$

Unbestimmte Integration liefert

$$\int y dy = - \int t dt + c \iff \frac{1}{2} y^2 = c - \frac{1}{2} t^2$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Aus $y(1) = 1$ folgt sofort $c = 1$, so dass wir die gesuchte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems aus der Gleichung $y^2 = 2 - t^2$ erhalten. Dies liefert $y(t) = +\sqrt{2 - t^2}$, wobei man wegen der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ die positive Wurzel zu wählen hat. Man beachte übrigens, dass die Lösung nur in dem Intervall $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$ existiert, also nur in einer gewissen Umgebung von $t_0 = 1$. \diamond

Die gerade skizzierte und an einem Beispiel illustrierte Vorgehensweise zur Lösung von Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen fassen wir noch einmal zusammen.

Schema zur Lösung von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen:

1. Schreibe die Differentialgleichung (2.13) durch formale Trennung der Variablen um in $\frac{dy}{g(y)} = f(t)dt$.
2. Integriere unbestimmt: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t)dt + c$.
3. Löse die integrierte Gleichung möglichst nach y auf.
4. Passe den noch freien Parameter c aus Schritt 2 an die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ an.

Das hier angegebene Schema zur Lösung von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen ist relativ leicht zu merken. Es basierte beim Übergang von (2.15) zu (2.16) allerdings

darauf, dass wir die Ableitung $y' = \frac{dy}{dt}$ in (2.15) formal als einen Bruch mit dem Zähler dy und dem Nenner dt aufgefasst haben und wir diesen Ausdruck trennen dürfen. Der folgende Satz gibt letztlich eine Rechtfertigung für diese Vorgehensweise an.

Satz 2.8 *Betrachte das Anfangswertproblem (2.13), (2.14) mit den dort genannten Voraussetzungen. Gilt dann $g(y_0) \neq 0$, so existiert eine Umgebung U von t_0 , in der das Anfangswertproblem (2.13), (2.14) genau eine Lösung $y : U \rightarrow \mathbb{R}$ hat. Diese ist gegeben durch*

$$y(t) = G^{-1}\left(G(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right), \quad (2.18)$$

wobei G eine Stammfunktion von $1/g$ ist und G^{-1} deren Umkehrfunktion bezeichnet.

Beweis: Da g stetig ist mit $g(y_0) \neq 0$, handelt es sich bei $1/g$ um eine in einer Umgebung von y_0 stetige Funktion, die nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung somit eine Stammfunktion G besitzt. Wegen $G'(y_0) = \frac{1}{g(y_0)} \neq 0$ hat G lokal außerdem eine Umkehrfunktion G^{-1} . Daher ist die in (2.18) angegebene Funktion zumindest wohldefiniert. Wir zeigen zunächst, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Lösung des Anfangswertproblems (2.13), (2.14) handelt.

Wegen

$$y(t_0) = G^{-1}(G(y_0) + 0) = y_0$$

ist zumindest die Anfangsbedingung erfüllt. Aus der Definition (2.18) folgt außerdem

$$G(y(t)) = G(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

Differentiation nach t liefert somit

$$G'(y(t))y'(t) = f(t).$$

Nun war aber

$$G'(y(t)) = \frac{1}{g(y(t))}$$

per Definition von G als Stammfunktion von $1/g$, so dass wir

$$\frac{1}{g(y(t))}y'(t) = f(t)$$

erhalten. Also ist die Funktion y aus (2.18) in der Tat eine Lösung von (2.13), (2.14).

Zu zeigen bleibt daher nur noch die Eindeutigkeit dieser Lösung. Sei dazu $y(t)$ eine beliebige Lösung von (2.13), (2.14). Dann ist $y'(t) = f(t)g(y(t))$ und $y(t_0) = y_0$. Wegen $g(y_0) \neq 0$ ist aus Stetigkeitsgründen dann auch $g(y(t)) \neq 0$ für alle t aus einer hinreichend kleinen Umgebung von t_0 . Daher gilt

$$f(t) = \frac{y'(t)}{g(y(t))} \quad \text{für alle diese } t.$$

Integration liefert somit

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))} d\tau \\ &= \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} \\ &= G(y(t)) - G(y(t_0)) \\ &= G(y(t)) - G(y_0),\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $\xi = y(\tau)$ verwendet haben. Also ist

$$G(y(t)) = G(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau,$$

so dass durch Anwendung von G^{-1} unmittelbar folgt, dass die beliebig gegebene Lösung y notwendig die Gestalt (2.18) hat. \square

Im Fall $g(y_0) = 0$ ist $y(t) \equiv y_0$ offenbar eine Lösung des Anfangswertproblems (2.13), (2.14). In diesem Fall handelt es sich allerdings nicht notwendig um die eindeutige Lösung. Betrachten wir beispielsweise das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 3\sqrt[3]{y(t)^2}, \quad y(0) = 0,$$

so haben wir neben $y(t) \equiv 0$ auch die Lösung $y(t) = t^3$.

Man beachte übrigens, dass die in (2.18) angegebene Lösung natürlich mit jener aus unserer formalen Herleitung in (2.17) übereinstimmt. Dazu brauchen wir (2.17) mit Hilfe der Stammfunktion G von $\frac{1}{g}$ nur zu integrieren und anschließend durch Anwendung der Inversen G^{-1} nach y aufzulösen. Man erhält auf diese Weise zumindest eine einfache Merkmregel für die Formel aus (2.18).

Es gibt einige Typen von Differentialgleichungen, die sich durch geeignete Transformationen auf solche mit getrennten Variablen überführen lassen. Wir gehen hierauf kurz in der folgenden Bemerkung ein.

Bemerkung 2.9 Die manchmal als *Euler-homogene Differentialgleichung* bezeichnete Differentialgleichung

$$y'(t) = f\left(\frac{y}{t}\right) \quad (t \neq 0)$$

lässt sich mit

$$u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

schreiben als

$$u + tu' = y' = f(u),$$

welches die Differentialgleichung

$$u' = \frac{f(u) - u}{t}$$

in u mit getrennten Variablen ergibt. Jede Lösung u dieser Differentialgleichung führt mittels der Rücktransformation $y(t) := tu(t)$ offenbar auf eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

2.4 Exakte Differentialgleichungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Differentialgleichungen der Gestalt

$$p(t, y) + q(t, y)y' = 0 \quad (2.19)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $p, q : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $I, J \subseteq \mathbb{R}$ geeignete Intervalle bezeichnen.

Definition 2.10 Die Differentialgleichung (2.19) heißt **exakt** (auf $I \times J$), wenn eine so genannte **Stammfunktion** u existiert mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $u : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar.

(b) Es gelten

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, y) = p(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = q(t, y) \quad \text{für alle } (t, y) \in I \times J.$$

Die in der Definition 2.10 auftretende Stammfunktion u ist natürlich nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt, d.h., mit u sind auch alle Abbildungen der Gestalt $u(t, y) + c$ ($c \in \mathbb{R}$ konstant) Stammfunktionen der Differentialgleichung (2.19). Statt von einer Stammfunktion spricht man manchmal auch von einem *Potential*.

Wir geben als Nächstes ein einfaches Kriterium für das Vorliegen einer exakten Differentialgleichung an.

Satz 2.11 Die Differentialgleichung (2.19) ist genau dann exakt (auf $I \times J$), wenn

$$\frac{\partial p}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial q}{\partial t}(t, y) \quad (2.20)$$

für alle $(t, y) \in I \times J$ gilt.

Beweis: Sei (2.19) eine exakte Differentialgleichung. Dann gibt es eine Stammfunktion u mit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, y) = p(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = q(t, y) \quad \forall (t, y) \in I \times J.$$

Nach Voraussetzung ist u zweimal stetig differenzierbar. Nach einem bekannten Satz von Schwarz folgt daher

$$\frac{\partial p}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}(t, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(t, y) = \frac{\partial q}{\partial t}(t, y)$$

und daher die Gültigkeit von (2.20).

Umgekehrt folgt aus einem Resultat der Analysis (siehe beispielsweise [12]), dass (2.20) auch eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion und somit für die Exaktheit der Differentialgleichung (2.19) darstellt. Hierzu beachte man lediglich, dass das kartesische Produkt $I \times J$ der beiden Intervalle I, J natürlich eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist. \square

Die in (2.20) angegebene Charakterisierung für die Exaktheit einer vorliegenden Differentialgleichung stellt ein sehr handliches Kriterium dar, welches im Wesentlichen nur den Nachteil hat, dass man sich nur schwer merken kann, ob man nun die Funktion p nach y und die Funktion q nach t partiell ableiten muss, oder ob dies gerade umgekehrt der Fall war.

Hierfür mag die nachstehende Merkregel nützlich sein: Man schreibt die Differentialgleichung (2.19) zunächst in der Gestalt

$$p(t, y) + q(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

und multipliziert diese anschließend formal mit dt durch:

$$p(t, y)dt + q(t, y)dy = 0.$$

In dieser Schreibweise lässt sich das Kriterium (2.20) leichter einprägen: Man hat die Funktion vor dt partiell nach y und die Funktion vor dy partiell nach t zu differenzieren.

Das nächste Resultat ist für die praktische Lösung einer exakten Differentialgleichung von größter Bedeutung.

Satz 2.12 *Die Funktion $y(t)$ ist genau dann eine Lösung der exakten Differentialgleichung (2.19), wenn $u(t, y(t))$ für alle t konstant ist (hierbei bezeichnet u eine Stammfunktion von (2.19)).*

Beweis: Für die Stammfunktion u gilt per Definition

$$\frac{d}{dt}u(t, y(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t))y'(t) = p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t).$$

Also ist $y(t)$ genau dann eine Lösung der exakten Differentialgleichung (2.19), wenn

$$\frac{d}{dt}u(t, y(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

gilt. Letzteres ist natürlich äquivalent dazu, dass $u(t, y(t))$ für alle $t \in I$ konstant ist. \square

Wegen Satz 2.12 erhält man sämtliche Lösungen der exakten Differentialgleichung (2.19), indem man die Gleichung $u(t, y(t)) = c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$ nach y auflöst. Diese Konstante hat man gegebenenfalls an einen Anfangswert $y(t_0) = y_0$ anzupassen, beispielsweise dadurch, dass man $c = u(t_0, y_0)$ setzt und die Gleichung $u(t, y(t)) = u(t_0, y_0)$ nach $y(t)$ auflöst.

Wollen wir die vorliegende exakte Differentialgleichung allerdings auf diesem Wege lösen, so benötigen wir explizit eine Stammfunktion u . Aus diesem Grunde überlegen wir uns jetzt, wie man eine solche Stammfunktion berechnen kann. Per Definition der Stammfunktion u gelten

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, y) = p(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = q(t, y). \quad (2.21)$$

Integrieren wir die erste Gleichung unbestimmt nach t hoch, so erhalten wir

$$u(t, y) = \int p(t, y) dt + \varphi(y), \quad (2.22)$$

wobei $\int p(t, y) dt$ eine Stammfunktion von p bzgl. t bezeichnet und $\varphi(y)$ eine differenzierbare Funktion in y ist (dies ist die „Integrationskonstante“ bei der Integration nach t). Partielle Differentiation nach y liefert unter Verwendung der zweiten Gleichung in (2.21) unmittelbar

$$\frac{\partial}{\partial y} \int p(t, y) dt + \varphi'(y) = q(t, y),$$

also

$$\varphi'(y) = q(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int p(t, y) dt.$$

Durch nochmalige unbestimmte Integration gewinnt man hieraus die Funktion φ und somit die gesuchte Stammfunktion gemäß (2.22). Wir illustrieren die Vorgehensweise an einem einfachen Beispiel.

Beispiel 2.13 Betrachte das Anfangswertproblem

$$12ty + 3 + 6t^2y' = 0, \quad y(1) = 1.$$

Mit

$$p(t, y) := 12ty + 3 \quad \text{und} \quad q(t, y) := 6t^2$$

erhalten wir eine Differentialgleichung der Gestalt (2.19), die wegen

$$\frac{\partial p}{\partial y}(t, y) = 12t = \frac{\partial q}{\partial t}(t, y) \quad \text{für alle } (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

und Satz 2.11 auf dem gesamten \mathbb{R}^2 exakt ist. Also existiert eine Stammfunktion u , für die definitionsgemäß

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, y) = 12ty + 3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = 6t^2$$

gelten muss. Aus der ersten Gleichung bekommen wir durch unbestimmte Integration nach t sofort

$$u(t, y) = 6t^2y + 3t + \varphi(y)$$

mit einer noch unbekannten Funktion $\varphi(y)$. Für diese muss zwangsläufig

$$6t^2 + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = 6t^2$$

gelten, woraus $\varphi'(y) \equiv 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ folgt. Daher können wir zum Beispiel $\varphi(y) \equiv 0$ wählen (beachte, dass wir nur eine Stammfunktion brauchen und nicht alle Stammfunktionen benötigen, so dass wir die hier auftretende Integrationskonstante beliebig wählen können). Damit erhalten wir die Stammfunktion

$$u(t, y) = 6t^2y + 3t.$$

Wegen Satz 2.12 bekommen wir jetzt alle Lösungen der exakten Differentialgleichung durch Auflösen der Gleichung

$$u(t, y(t)) = c \iff 6t^2y(t) + 3t = c.$$

Dies liefert uns die Lösungsschar

$$y(t) = \frac{c - 3t}{6t^2} \quad (t \neq 0).$$

Einarbeitung der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ ergibt sofort $c = 9$ und daher die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t; t_0, y_0) = \frac{3 - t}{2t^2} \quad \text{für } t > 0$$

des gegebenen Anfangswertproblems. ◇

Wir fassen die allgemeine Vorgehensweise zur Lösung eines Anfangswertproblems mit einer exakten Differentialgleichung in dem nachstehenden Schema zusammen:

Schema zur Lösung von exakten Differentialgleichungen:

1. Überprüfe die Differentialgleichung (2.19) unter Verwendung des Kriteriums (2.20) auf Exaktheit.
2. Bestimme eine Stammfunktion u von (2.19) (sofern diese exakt war).
3. Löse die Gleichung $u(t, y(t)) = c$ mit einem beliebigen $c \in \mathbb{R}$ möglichst nach y auf.
4. Passe den noch freien Parameter c aus Schritt 3 an die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ an.

Ist die Differentialgleichung (2.19) nicht exakt, so kann man in einigen Fällen durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor eine äquivalente Differentialgleichung gewinnen, die sehr wohl exakt ist.

Definition 2.14 Eine nirgends verschwindende Funktion $m(t, y)$ heißt **integrierender Faktor** oder **Eulerscher Multiplikator** der Differentialgleichung (2.19), falls die Differentialgleichung

$$m(t, y)p(t, y) + m(t, y)q(t, y)y' = 0 \quad (2.23)$$

exakt ist.

Man beachte, dass die beiden Differentialgleichungen (2.19) und (2.23) wegen $m(t, y) \neq 0$ für alle t, y in der Tat äquivalent sind in dem Sinne, dass sie dieselben Lösungen besitzen (zumindest auf dem Bereich, wo p, q definiert sind und $m(t, y) \neq 0$ ist).

Beispiel 2.15 Die Differentialgleichung

$$y + 2ty' = 0$$

ist nicht exakt, denn mit $p(t, y) := y$ und $q(t, y) := 2t$ gilt

$$\frac{\partial p}{\partial y}(t, y) = 1 \neq 2 = \frac{\partial q}{\partial t}(t, y) \quad \forall t, y \in \mathbb{R}.$$

Multiplizieren wir die gegebene Differentialgleichung jedoch mit dem Faktor $m(t, y) := y$ (wobei $y \neq 0$ gelten muss, wir also je nach Anfangsbedingungen nur $y < 0$ oder $y > 0$ betrachten), so erhalten wir

$$y^2 + 2tyy' = 0,$$

und diese Differentialgleichung ist wegen

$$\frac{\partial(m \cdot p)}{\partial y}(t, y) = 2y = \frac{\partial(m \cdot q)}{\partial t}(t, y)$$

exakt. Als Stammfunktion erhält man beispielsweise $u(t, y) = ty^2$. Die gesuchten Lösungen ergeben sich daher aus der Gleichung $u(t, y(t)) = c$ und lauten

$$y(t) = \frac{c}{\sqrt{|t|}} \quad (t \neq 0)$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. ◇

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, dass das Auffinden eines integrierenden Faktors (sofern überhaupt existent) im Allgemeinen ein nichttriviales Problem darstellt. Hinreichende Glattheit aller beteiligten Funktionen vorausgesetzt, kann man dies beispielsweise daran erkennen, dass man das Exaktheitskriterium (2.20) jetzt für die mit dem integrierenden Faktor m multiplizierte Gleichung (2.23) zu verifizieren hat, was eine *partielle* Differentialgleichung für die gesuchte Funktion m darstellt. Partielle Differentialgleichungen sind im Allgemeinen aber sehr viel schwerer zu lösen als gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Situation vereinfacht sich etwas, wenn man m nur als Funktion von t oder y ansetzt, wie dies im Beispiel 2.15 mit Erfolg getan wurde.

Kapitel 3

Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

- 3.1 Normierte Räume
- 3.2 Der Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard–Lindelöf
- 3.3 Der Satz von Arzelá–Ascoli
- 3.4 Der Existenzsatz von Peano
- 3.5 Fortsetzungssätze
- 3.6 Stetige Abhängigkeit von Störungen

3.1 Normierte Räume

Wir erinnern in diesem Abschnitt an einige Grundlagen aus dem Bereich der Funktionalanalysis, die später beim Beweis von Existenz- und Eindeigkeitssätzen benötigt werden. Dazu beginnen wir mit der folgenden Definition.

Definition 3.1 Sei V ein (reeller) Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- (a) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in V$;
- (b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- (c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ für alle $x \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$ (Dreiecksungleichung)

heißt **Norm** auf V , das Paar $(V, \|\cdot\|)$ wird dann als ein **normierter Raum** bezeichnet.

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Folge $\{x^k\} \subseteq V$ **konvergiert** dann gegen einen Grenzwert $x^* \in V$, wofür wir kurz

$$x^k \rightarrow x^* \text{ für } k \rightarrow \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^* \quad \text{oder} \quad \|x^k - x^*\| \rightarrow 0$$

schreiben, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit $\|x^k - x^*\| \leq \varepsilon$ für alle $k \geq n$. Dagegen bezeichnen wir $\{x^k\} \subseteq V$ als eine **Cauchy-Folge**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|x^k - x^\ell\| \leq \varepsilon$ für alle $k, \ell \geq n$. Bekanntlich ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge. Die Umkehrung dieser Aussage gilt im Allgemeinen nicht und gibt Anlass zu der folgenden Definition.

Definition 3.2 Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt **vollständig** oder **Banach-Raum**, wenn jede Cauchy-Folge in V konvergiert.

Im Allgemeinen lässt sich ein Vektorraum V mit verschiedenen Normen versehen, wobei V bezüglich einer Norm vollständig sein mag und bezüglich einer anderen nicht. In diesem Zusammenhang spielt der folgende Begriff eine wichtige Rolle.

Definition 3.3 Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf einem (reellen) Vektorraum V heißen zueinander **äquivalent**, wenn es Konstanten $\beta \geq \alpha > 0$ gibt mit

$$\alpha\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta\|x\|_a$$

für alle $x \in V$.

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\{x^k\}$ eine Cauchy-Folge oder eine konvergente Folge in diesem Raum, so ist $\{x^k\}$ offenbar auch eine Cauchy-Folge oder eine konvergente Folge, wenn wir den Vektorraum V mit einer zu $\|\cdot\|$ äquivalenten Norm $\|\cdot\|$ versehen. Handelt es sich bei $(V, \|\cdot\|)$ daher um einen Banach-Raum, so ist auch der normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum (und umgekehrt).

Wir geben als Nächstes einige Beispiele von normierten Räumen an, von denen allerdings nicht alle vollständig sind. Diese Beispiele enthalten implizit eine Reihe von Behauptungen, wobei wir davon ausgehen, dass diese dem Leser meist schon bekannt sind.

Beispiel 3.4 (a) Der n -dimensionale Raum \mathbb{R}^n mit der üblichen Addition

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^T \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

und der üblichen Multiplikation mit Skalaren

$$\alpha x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)^T \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$$

wird mittels der so genannten **euklidischen Norm**

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

zu einem vollständigen normierten Raum. Alternativ kann man den \mathbb{R}^n auch mit jeder der Vorschriften

$$\|x\|_p := \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}, & \text{falls } p \in [1, \infty), \\ \max |x_i|, & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

zu einem Banach-Raum machen, denn jede der Normen $\|\cdot\|_p$ ist äquivalent zu der euklidischen Norm. Eine beliebige Norm im \mathbb{R}^n wird auch gerne als **Vektornorm** bezeichnet, da es sich, anschaulich, beim \mathbb{R}^n um den Raum der üblichen Vektoren handelt.

- (b) Der Raum $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit der üblichen Addition von Matrizen und der ebenfalls bekannten Multiplikation mit Skalaren lässt sich beispielsweise mittels der **Frobenius-Norm**

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

zu einem Banach-Raum machen. Er wird auch mit jeder anderen Norm zu einem vollständigen Raum, da endlich-dimensionale normierte Räume stets vollständig sind. Beispielsweise verifiziert man sehr leicht, dass durch die Vorschrift

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

eine Norm auf dem $\mathbb{R}^{n \times n}$ definiert wird, wobei auf der rechten Seite dieser Gleichung eine beliebige Norm in \mathbb{R}^n gewählt werden kann. Man spricht dann von der durch diese Vektornorm **induzierten Matrixnorm**.

- (c) Sei

$$V := C([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

die Menge aller auf dem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen. Mit den üblichen Vorschriften

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ und } (\alpha f)(x) := \alpha f(x) \text{ für } f, g \in C([a, b]), \alpha \in \mathbb{R},$$

wird aus $C([a, b])$ ein Vektorraum. Dieser wird sowohl mit der so genannten **Maximumnorm**

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

als auch mittels der Vorschrift

$$\|f\|_{L_2} := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

zu einem normierten Raum. Versieht man $C([a, b])$ mit der Maximumnorm, so handelt es sich dabei um einen Banach-Raum. Dies folgt relativ leicht aus einem bekannten Resultat der Analysis, wonach der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen selbst wieder stetig ist. Betrachtet man den Raum $C([a, b])$ hingegen mit der Norm $\|\cdot\|_{L_2}$, so ist dieser normierte Raum nicht vollständig (was in der Analysis zur Einführung des Lebesgue-Integrals führt). Die beiden Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{L_2}$ können also nicht zueinander äquivalent sein.

(d) In Verallgemeinerung von Beispiel (c) sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und

$$V := C(G) := \{f : G \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

die Menge aller stetigen Funktionen $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ auf G (der Fall $G = [a, b]$ entspricht gerade dem Beispiel (c)). Mittels der *Maximumnorm*

$$\|f\|_\infty := \max \{|f(x)| \mid x \in G\}$$

erhält man dann erneut einen Banach-Raum. Dies gilt auch, wenn man stattdessen die *gewichtete Maximumnorm*

$$\|f\|_{\infty, p} := \max\{|f(x)| \cdot p(x) \mid x \in G\}$$

mit einer stetigen Gewichtsfunktion p nimmt, für die eine Abschätzung der Gestalt $0 < \alpha \leq p(x) \leq \beta$ für alle $x \in G$ mit gewissen Konstanten α, β gilt. Letzteres impliziert sofort

$$\alpha \|f\|_\infty \leq \|f\|_{\infty, p} \leq \beta \|f\|_\infty \quad \text{für alle } f \in C(G),$$

so dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{\infty, p}$ zueinander äquivalent sind. Mit $(C(G), \|\cdot\|_\infty)$ ist daher auch $(C(G), \|\cdot\|_{\infty, p})$ ein Banach-Raum. \diamond

Wir greifen noch einmal das Beispiel 3.4 (b) auf. Sei dazu $\|\cdot\|$ eine beliebige (aber feste) Vektornorm im \mathbb{R}^n sowie

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \text{für } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die zugehörige (induzierte) Matrixnorm im $\mathbb{R}^{n \times n}$. Die Bezeichnungen für die Vektor- und Matrixnormen sind zwar identisch, aus dem Zusammenhang wird aber stets klar sein, welche Norm gerade gemeint ist. Das folgende Resultat über Vektor- und induzierte Matrixnormen wird später noch häufiger verwendet.

Lemma 3.5 *Für eine Vektornorm und ihre induzierte Matrixnorm gelten die folgenden Eigenschaften:*

$$(a) \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$$(b) \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Den einfachen Beweis des Lemmas 3.5 überlassen wir dem Leser als Aufgabe. Die Eigenschaft (a) wird oft als *Verträglichkeit* von Vektor- und induzierter Matrixnorm bezeichnet, die Eigenschaft (b) dagegen als *Submultiplikativität* von induzierten Matrixnormen.

In vollständigen Räumen gilt der nachstehende Fixpunktsatz von Banach, der insbesondere zum Beweis eines Existenz- und Eindeutigkeitsatzes für Differentialgleichungen verwendet werden kann, wenngleich wir im nächsten Abschnitt einen alternativen und vom Banachschen Fixpunktsatz unabhängigen Beweis eines Existenz- und Eindeutigkeitsresultates angeben werden.

Satz 3.6 (**Fixpunktsatz von Banach**)

Seien X eine abgeschlossene Teilmenge eines Banach-Raumes V und $\Phi : X \rightarrow X$ eine kontrahierende Abbildung, d.h., es gelte

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \kappa \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

mit einer Kontraktionskonstanten $\kappa \in (0, 1)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Φ besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in X$ (d.h., es gilt $x^* = \Phi(x^*)$).

(b) Jede durch die Vorschrift

$$x^{k+1} := \Phi(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

erzeugte Folge $\{x^k\}$ konvergiert bei beliebigem Startwert $x^0 \in X$ gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt x^* von Φ .

(c) Für die gemäß (b) erzeugte Folge $\{x^k\}$ gelten die Fehlerabschätzungen

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\kappa^k}{1 - \kappa} \|x^0 - x^1\|$$

und

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{\kappa}{1 - \kappa} \|x^{k+1} - x^k\|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Unter Verwendung der Iterationsvorschrift (3.1) und der vorausgesetzten Kontraktionseigenschaft von Φ folgt zunächst

$$\|x^k - x^{k+1}\| = \|\Phi(x^{k-1}) - \Phi(x^k)\| \leq \kappa \|x^{k-1} - x^k\|$$

für $k = 1, 2, \dots$. Hieraus ergibt sich induktiv

$$\|x^k - x^{k+1}\| \leq \kappa^k \|x^0 - x^1\|$$

und daher

$$\begin{aligned} \|x^k - x^{k+p}\| &\leq \|x^k - x^{k+1}\| + \dots + \|x^{k+p-1} - x^{k+p}\| \\ &\leq (\kappa^k + \dots + \kappa^{k+p-1}) \|x^0 - x^1\| \\ &= \kappa^k (1 + \kappa + \dots + \kappa^{p-1}) \|x^0 - x^1\| \\ &= \frac{\kappa^k - \kappa^{k+p}}{1 - \kappa} \|x^0 - x^1\| \end{aligned} \quad (3.2)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $p \in \mathbb{N}$. Wegen $\kappa \in (0, 1)$ zeigt die Ungleichung (3.2), dass $\{x^k\}$ eine Cauchy-Folge ist. Nach Voraussetzung ist V aber vollständig, und somit konvergiert $\{x^k\}$ gegen einen Punkt $x^* \in X$ (hier geht die Abgeschlossenheit von X ein).

Wir zeigen jetzt, dass x^* ein Fixpunkt von Φ ist. Zunächst gilt

$$\|x^* - \Phi(x^*)\| \leq \|x^* - x^k\| + \|x^k - \Phi(x^*)\|$$

$$\begin{aligned}
&= \|x^* - x^k\| + \|\Phi(x^{k-1}) - \Phi(x^*)\| \\
&\leq \|x^* - x^k\| + \kappa\|x^{k-1} - x^*\|.
\end{aligned}$$

Wegen $\{x^k\} \rightarrow x^*$ folgt hieraus für $k \rightarrow \infty$:

$$\|x^* - \Phi(x^*)\| = 0,$$

also $x^* = \Phi(x^*)$. Also besitzt Φ mindestens einen Fixpunkt.

Wir weisen als Nächstes die Eindeutigkeit des Fixpunktes x^* nach. Wäre nämlich x^{**} ein weiterer Fixpunkt von Φ , so ergäbe sich aus

$$\|x^* - x^{**}\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(x^{**})\| \leq \kappa\|x^* - x^{**}\|$$

wegen $\kappa \in (0, 1)$ unmittelbar $x^* = x^{**}$.

Wir kommen nun zum Nachweis der Fehlerabschätzungen. Die erste Fehlerabschätzung folgt unmittelbar aus (3.2) mit $p \rightarrow +\infty$. Zum Beweis der zweiten Fehlerabschätzung bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &= \|\Phi(x^k) - \Phi(x^*)\| \\
&\leq \kappa\|x^k - x^*\| \\
&\leq \kappa\|x^k - x^{k+1}\| + \kappa\|x^{k+1} - x^*\|
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, was nach Umsortierung

$$(1 - \kappa)\|x^{k+1} - x^*\| \leq \kappa\|x^{k+1} - x^k\|$$

liefert. Division durch $1 - \kappa$ ergibt gerade die zweite Ungleichung. Damit sind alle Aussagen (a), (b) und (c) bewiesen. \square

Die erste Fehlerabschätzung im Teil (c) des Satzes 3.6 wird oft als *a priori-Abschätzung* bezeichnet, da man mit ihrer Hilfe die Größe des unbekannten Fehlers $\|x^k - x^*\|$ bereits nach Durchführung von nur einer Iteration des Fixpunktverfahrens abschätzen kann. Eine genauere Schranke für diesen Fehler liefert häufig die zweite Ungleichung, die aber erst nach Durchführung von k (bzw. $k + 1$) Schritten anwendbar ist und daher gerne als *a posteriori-Abschätzung* bezeichnet wird.

Eine anschauliche Interpretation der Fixpunktiteration von Banach ist in der Abbildung 3.1 angegeben.

Will man den Satz 3.6 anwenden, so hat man zunächst einen geeigneten normierten Raum V sowie eine Teilmenge $X \subseteq V$ zu finden und natürlich auch die Abbildung Φ zur Beschreibung des Fixpunktproblems. Sobald dies geschehen ist, muss man lediglich die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes verifizieren, d.h.,

- der normierte Raum V muss vollständig sein
- die Teilmenge $X \subseteq V$ muss abgeschlossen sein

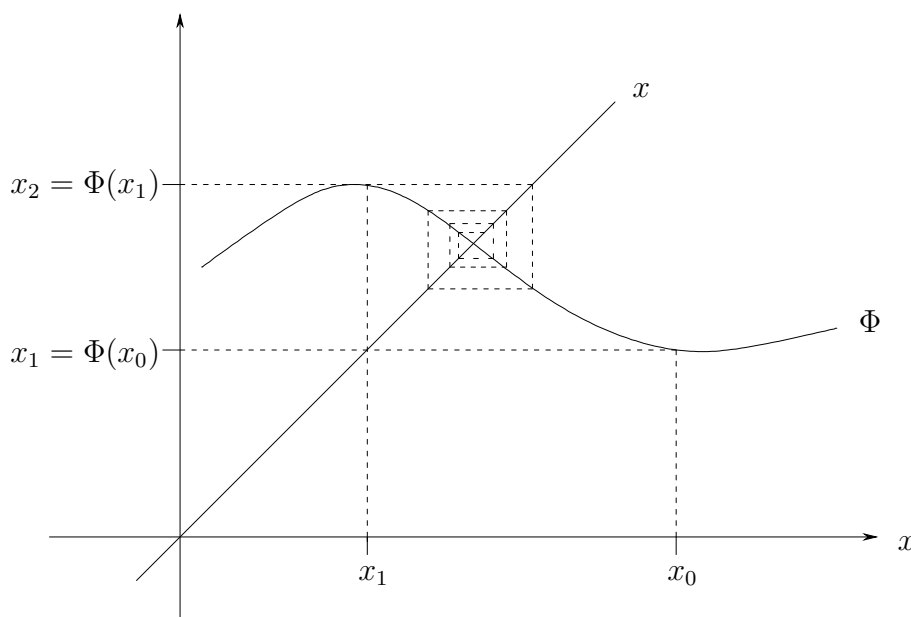


Abbildung 3.1: Veranschaulichung des Fixpunktverfahrens

- Φ muss eine Abbildung von X in X sein (so genannte *Selbstabbildung* von X)
- Φ muss kontrahierend sein.

Die Wahl des Banach–Raumes V und die Wahl der Abbildung Φ ist durch die Problemstellung oft (aber nicht immer) vorgegeben. Die meisten Schwierigkeiten bereitet daher nicht selten die Wahl der abgeschlossenen Teilmenge $X \subseteq V$ derart, dass Φ tatsächlich eine kontrahierende Selbstabbildung von X in X darstellt.

Wir illustrieren diese Problematik an einem einfachen Beispiel, wobei wir die Verifikation einiger Details dem Leser als Übung empfehlen.

Beispiel 3.7 Gesucht sei eine Nullstelle der Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^x - 3x^2.$$

Dieses Nullstellenproblem ist beispielsweise äquivalent zu der Fixpunktaufgabe

$$x = \frac{e^x}{3x} =: \Phi(x) \quad (x \neq 0).$$

(Man beachte allerdings, dass es auch noch andere Fixpunktformulierungen der ursprünglichen Nullstellenaufgabe gibt.) Dann ist

$$\Phi'(x) = \frac{x-1}{3x^2} e^x.$$

Wählt man beispielsweise $X := [0.6, 2]$, so kann man relativ schnell einsehen, dass Φ eine Selbstabbildung von X in X ist. Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gilt außerdem

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \max_{\xi \in X} |\Phi'(\xi)| \cdot |x - y| =: \kappa |x - y| \quad \forall x, y \in X$$

mit

$$\kappa := \max_{\xi \in X} |\Phi'(\xi)| \approx 0.68 < 1,$$

so dass alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes 3.6 mit der so gewählten Teilmenge X erfüllt sind. \diamond

3.2 Der Existenz– und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass ein Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

unter gewissen Voraussetzungen genau eine Lösung besitzt. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst zwei Beispiele.

Beispiel 3.8 (a) Das Anfangswertproblem

$$y' = (\sin(t))y, \quad y(0) = 1,$$

besitzt offenbar die Lösung

$$y(t) := \exp(1 - \cos(t))$$

auf $I := \mathbb{R}$. Wie wir gleich noch sehen werden, handelt es sich hierbei auch um die eindeutig bestimmte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems (da es sich hierbei um eine skalare lineare Differentialgleichung handelt, folgt die Eindeutigkeit dieser Lösung natürlich auch aus dem uns schon bekannten Satz 2.1).

(b) Das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0,$$

besitzt beispielsweise die Nullfunktion

$$y \equiv 0$$

als Lösung. Aber auch die Abbildung

$$y(t) := \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & \text{für } t \geq 0, \\ -\frac{1}{4}t^2 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

löst das gegebene Anfangswertproblem. Die Lösung ist in diesem Fall also nicht eindeutig bestimmt. Der Leser kann sich sogar leicht überlegen, dass es unendlich viele weitere Lösungen gibt. Drei dieser Lösungen sind in der Abbildung 3.2 eingezeichnet. \diamond

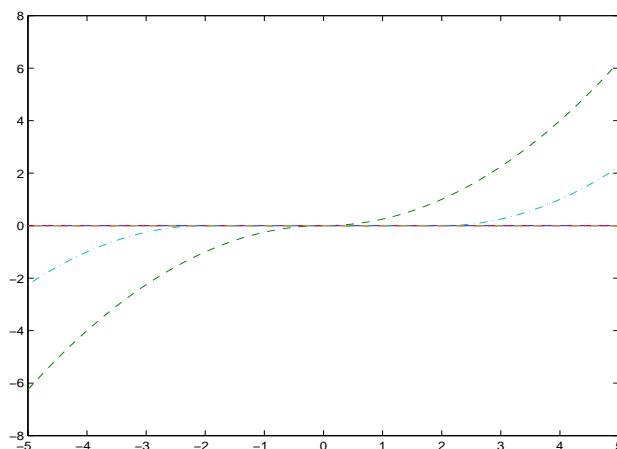


Abbildung 3.2: Drei Lösungen des Anfangswertproblems aus dem Beispiel 3.8 (b)

Bevor wir einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz formulieren, erinnern wir an den Satz 1.16, wonach y genau dann das gegebene Anfangswertproblem löst, wenn y stetig ist und der Fixpunktgleichung

$$Ty = y$$

genügt, wobei Ty die durch

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

definierte Funktion bezeichnet. Damit liegt es nahe, eine Lösung des Anfangswertproblems zu konstruieren, indem man die zugehörige Folge

$$y_{k+1} := Ty_k$$

betrachtet, die sich ausführlich schreiben lässt als

$$y_{k+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_k(\tau)) d\tau.$$

Die durch diese Fixpunkt-Iteration gewonnenen Näherungen $y_k(t)$ an die gesuchte Lösung $y(t)$ werden auch als *Picard-Iterierte* bezeichnet. Dass die Picard-Iterierten unter gewissen Voraussetzungen tatsächlich gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergieren, wird in dem Beweis des nachfolgenden Satzes gezeigt.

Satz 3.9 (*Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf — Quantitative Fassung*)
Gegeben sei ein Anfangswertproblem der Form

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.3)$$

bei dem $f : Z_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion ist mit dem „Zylinder“

$$Z_{a,b} := \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\} \quad (a, b > 0)$$

als Definitionsbereich. Ferner sei f bezüglich y **Lipschitz-stetig**, es gelte also

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\| \quad \text{für alle } (t, y), (t, \tilde{y}) \in Z_{a,b}$$

mit einer Konstanten $L \geq 0$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (3.3) genau eine Lösung auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ mit

$$\alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad \text{und} \quad M := \max \{ \|f(t, y)\| \mid (t, y) \in Z_{a,b} \},$$

wobei wir im Fall $M = 0$ formal $\frac{b}{M} := \infty$ setzen.

Beweis: Wir beweisen hier nur die Existenz einer Lösung und zerlegen den Beweis dazu in vier Schritte. Die Eindeutigkeit wird anschließend in einem gesonderten Resultat gezeigt, siehe Satz 3.11. In unserem gesamten Beweis werden wir dabei ohne Einschränkung $M > 0$ annehmen, denn anderenfalls wäre $f(t, y) \equiv 0$ und daher $y(t) \equiv y_0$ Lösung von (3.3).

Schritt 1: Wir bemerken hier zunächst, dass die Picard-Iterierten

$$\begin{aligned} y_0(t) &:= y_0, \\ y_{k+1}(t) &:= y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_k(\tau)) d\tau \quad \text{für } k = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{3.4}$$

wohldefiniert sind. Dazu haben wir zu zeigen, dass $(\tau, y_k(\tau)) \in Z_{a,b}$ gilt für alle $\tau \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, so dass f an diesen Stellen ausgewertet werden kann. Für $k = 0$ ist dies aber klar, und für $k \geq 1$ folgt es induktiv aus der für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} \|y_k(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, y_{k-1}(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, y_{k-1}(\tau))\| d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M d\tau \right| \\ &= M |t - t_0| \\ &\leq M\alpha \\ &\leq b, \end{aligned}$$

so dass wir die Picard-Iterierten bilden dürfen.

Schritt 2: Wir beweisen hier durch vollständige Induktion nach k , dass für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ die Abschätzung

$$\|y_{k+1}(t) - y_k(t)\| \leq ML^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad (3.5)$$

gilt. Für $k = 0$ folgt aus (3.4) zunächst

$$\|y_1(t) - y_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, y_0) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t M d\tau \right| = M|t - t_0|.$$

Verwenden wir (3.5) als Induktionsannahme, so folgt weiter

$$\begin{aligned} \|y_{k+2}(t) - y_{k+1}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(\tau, y_{k+1}(\tau)) - f(\tau, y_k(\tau))] d\tau \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, y_{k+1}(\tau)) - f(\tau, y_k(\tau))\| d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|y_{k+1}(\tau) - y_k(\tau)\| d\tau \right| \\ &\stackrel{(3.5)}{\leq} \frac{ML^{k+1}}{(k+1)!} \left| \int_{t_0}^t |\tau - t_0|^{k+1} d\tau \right| \\ &= \frac{ML^{k+1}}{(k+1)!} \frac{|t - t_0|^{k+2}}{k+2} \\ &= ML^{k+1} \frac{|t - t_0|^{k+2}}{(k+2)!} \end{aligned}$$

und damit der Induktionsschluss.

Schritt 3: Wir beweisen die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $\{y_k(t)\}$ auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Wegen

$$y_k(t) - y_0 \equiv y_k(t) - y_0(t) \equiv \sum_{i=0}^{k-1} [y_{i+1}(t) - y_i(t)]$$

ist $\{y_k(t) - y_0\}$ die Folge der Partialsummen der unendlichen Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} [y_{i+1}(t) - y_i(t)].$$

Diese Funktionenreihe ist auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gleichmäßig konvergent, denn sie besitzt dort wegen (3.5) die konvergente Majorante

$$\sum_{i=0}^{\infty} ML^i \frac{\alpha^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{M}{L} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(L\alpha)^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{M}{L} (e^{L\alpha} - 1).$$

Mit der Folge $\{y_k(t) - y_0\}$ ist dann offensichtlich auch die Folge $\{y_k(t)\}$ gleichmäßig konvergent auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Schritt 4: Sei $y_*(t)$ die (nach Schritt 3 existierende) Grenzfunktion von $\{y_k(t)\}$. Wir zeigen in diesem Schritt, dass es sich hierbei um eine Lösung des Anfangswertproblems handelt. Führen wir in (3.4) einfach den Grenzübergang durch, so folgt

$$y_*(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_*(\tau)) d\tau,$$

und die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem Satz 1.16, denn y_* ist als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen bekanntlich selbst stetig. Bei der Durchführung des Grenzübergangs in (3.4) müssen wir aber aufpassen, da wir Integration und Limes-Bildung vertauscht haben. Aus der Analysis ist bekannt, dass diese Vertauschung erlaubt ist, sofern die Funktionenfolge

$$\{f(\tau, y_k(\tau))\}$$

der Integranden gleichmäßig konvergiert. Aus der Lipschitz-Stetigkeit folgt aber

$$\|f(\tau, y_k(\tau)) - f(\tau, y_*(\tau))\| \leq L \|y_k(\tau) - y_*(\tau)\| \quad \forall \tau \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha],$$

so dass mit $\{y_k\}$ auch die Folge $\{f(\tau, y_k(\tau))\}$ gleichmäßig auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ konvergiert (und zwar gegen $f(\tau, y_*(\tau))$). \square

Die Situation des Satzes 3.9 ist in der Abbildung 3.3 veranschaulicht. Die Lösung $y(t)$ geht entweder vom linken Rand $t_0 - a$ bis zum rechten Rand $t_0 + a$ auf der t -Achse, oder sie bricht vorher ab, da aufgrund der maximalen Steigung M der Lösung diese den Zylinder $Z_{a,b}$ bereits vorher oben bzw. unten verlassen kann, so dass die Existenz einer Lösung (zunächst) nur auf dem kleineren Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ garantiert werden kann.

Ein alternativer Beweis des Satzes 3.9 ergibt sich, indem man zeigt, dass der Integraloperator T auf dem Raum $C(I)$, $I := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, versehen mit einer gewichteten Maximumnorm (vergleiche Beispiel 3.4 (d)), den Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach genügt. Der Leser sei hierzu beispielsweise auf das Buch [18] von Walter verwiesen.

Der Satz 3.9 wird oft in der folgenden Gestalt formuliert.

Satz 3.10 (*Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf — Qualitative Fassung*)
 Seien $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige und bezüglich y Lipschitz-stetige Abbildung. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

für jedes $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ eine eindeutig bestimmte lokale Lösung, d.h., es existiert ein (im Allgemeinen von t_0 und y_0 abhängiges) $\alpha > 0$ derart, dass das Anfangswertproblem auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ genau eine Lösung hat.

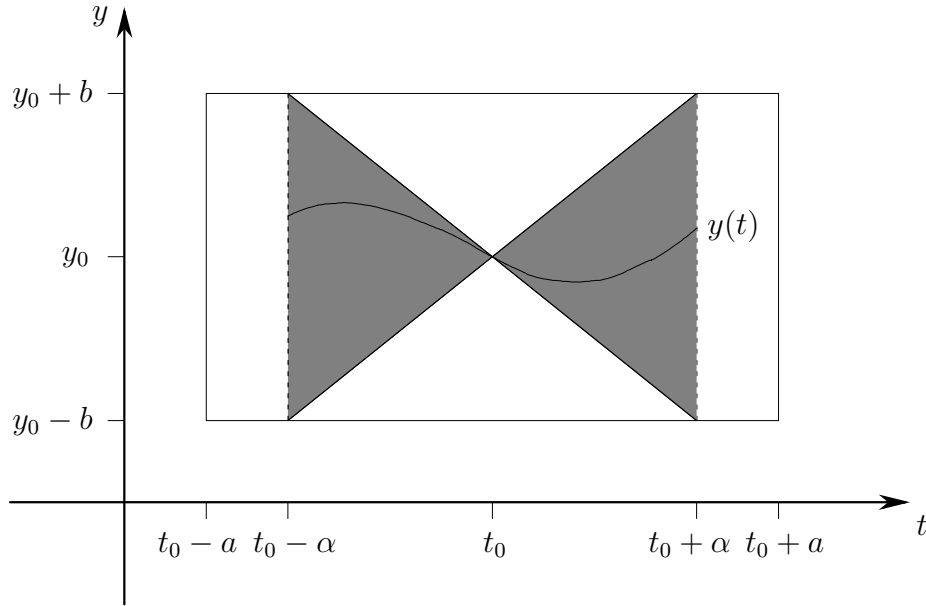


Abbildung 3.3: Veranschaulichung des Satzes 3.9

Beweis: Wegen $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ und \mathcal{D} offen existieren $a, b > 0$, so dass der zugehörige Zylinder

$$Z_{a,b} := \{(t, y) \mid |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$$

ganz in \mathcal{D} enthalten ist. Da f dann insbesondere einer (einseitigen) Lipschitz-Bedingung auf $Z_{a,b}$ genügt, folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Satz 3.9. \square

Wir tragen jetzt die noch nicht bewiesene Eindeutigkeit im Satz 3.9 von Picard-Lindelöf nach. Diese ergibt sich aus dem nachstehenden Resultat, das hier gleich für etwas allgemeinere Definitionsbereiche der rechten Seite f gezeigt wird, da wir dieses Ergebnis später auch in dieser allgemeineren Form benötigen.

Satz 3.11 Seien $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine gegebene Menge und $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die der Lipschitz-Bedingung (bezüglich y)

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\| \quad \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in \mathcal{D} \quad (3.6)$$

mit einer Konstanten $L \geq 0$ genüge. Seien $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y) \quad (3.7)$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Gilt dann $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, so ist bereits $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis: Wir zerlegen den Beweis in zwei Schritte. Der erste Schritt wird zeigen, dass aus der Gleichheit der zwei Lösungen y_1, y_2 in einem beliebigen Punkt des Intervalls I bereits deren Gleichheit in einer ganzen Umgebung folgt, der zweite Schritt zeigt schließlich die eigentliche Behauptung, dass nämlich y_1 und y_2 bereits auf dem gesamten Intervall I übereinstimmen müssen.

Schritt 1: Wir zeigen hier die folgende Aussage: Gilt $y_1(a) = y_2(a)$ für ein $a \in I$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass bereits $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in I$ mit $|t - a| \leq \varepsilon$ ist.

Nach Voraussetzung sind y_1 und y_2 Lösungen der Differentialgleichung (3.7), so dass wir

$$y_1'(t) = f(t, y_1(t)) \quad \text{und} \quad y_2'(t) = f(t, y_2(t)) \quad \forall t \in I$$

haben. Integration liefert somit

$$y_1(t) = y_1(a) + \int_a^t f(s, y_1(s)) ds \quad \text{und} \quad y_2(t) = y_2(a) + \int_a^t f(s, y_2(s)) ds \quad \forall t \in I.$$

Subtraktion ergibt wegen $y_1(a) = y_2(a)$ daher

$$y_1(t) - y_2(t) = \int_a^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))) ds \quad \forall t \in I.$$

Mit der Lipschitz-Bedingung (3.6) erhalten wir deshalb

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq L \left| \int_a^t \|y_1(s) - y_2(s)\| ds \right| \quad \forall t \in I.$$

Definiere nun die von t abhängige Konstante

$$M(t) := \max \{ \|y_1(s) - y_2(s)\| \mid |s - a| \leq |t - a| \}.$$

Dann folgt für alle $\tau \in I$ mit $|\tau - a| \leq |t - a|$ offenbar

$$\|y_1(\tau) - y_2(\tau)\| \leq L \left| \int_a^\tau \|y_1(s) - y_2(s)\| ds \right| \leq L|\tau - a|M(\tau) \leq L|t - a|M(t).$$

Dies impliziert wiederum

$$M(t) \leq L|t - a|M(t).$$

Für $\varepsilon := \frac{1}{2L}$ erhält man hieraus für alle $t \in I$ mit $|t - a| \leq \varepsilon$ die Abschätzung

$$M(t) \leq L \frac{1}{2L} M(t) = \frac{1}{2} M(t)$$

und daher $M(t) = 0$ für alle $t \in I$ mit $|t - a| \leq \varepsilon$. Dies bedeutet aber gerade $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in I$ mit $|t - a| \leq \varepsilon$.

Schritt 2: Wir nehmen nun an, dass $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ gilt und beweisen in diesem Schritt, dass dies bereits $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$ impliziert. Da man analog auch die Gleichheit von $y_1(t)$ und $y_2(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \leq t_0$ zeigen kann, erhalten wir hieraus die eigentliche Behauptung des Satzes.

Definiere

$$t_1 := \sup \{ \xi \in I \mid y_1(t) = y_2(t) \text{ für alle } t \in [t_0, \xi] \}.$$

Ist $t_1 = \infty$, so ist nichts mehr zu zeigen. Anderenfalls gilt aus Stetigkeitsgründen zumindest $y_1(t_1) = y_2(t_1)$. Ist t_1 dabei gleich dem rechten Intervallende von I , so müssen wir daher nichts weiter beweisen. Anderenfalls gäbe es nach Schritt 1 ein $\varepsilon > 0$ mit $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in I$ mit $|t - t_1| \leq \varepsilon$, was allerdings einen Widerspruch zur Definition von t_1 liefern würde. Also ist in der Tat $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$. \square

Speziell für den Zylinder $\mathcal{D} := Z_{a,b}$ folgt die Eindeutigkeitsaussage im Satz 3.9 offenbar aus dem Satz 3.11.

3.3 Der Satz von Arzelà–Ascoli

Wir beweisen in diesem Abschnitt eine einfache Version des Satzes von Arzelà–Ascoli, die hier mehr den Charakter eines Hilfsresultats trägt, da er im nächsten Abschnitt zum Beweis eines Existenzsatzes für Differentialgleichungen herangezogen wird.

Satz 3.12 (Satz von Arzelà–Ascoli)

Gegeben seien ein kompaktes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sowie eine Folge $\{f_k\}$ von stetigen Funktionen $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:

- (a) Die Folge $\{f_k\}$ ist (punktweise) **gleichmäßig beschränkt**, d.h., zu jedem $t \in [a, b]$ existiert ein $S = S(t) > 0$ mit der Eigenschaft

$$\|f_k(t)\| \leq S \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

- (b) Die Folge $\{f_k\}$ ist **gleichgradig stetig**, d.h., zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, dass die folgende Implikation für alle $t_1, t_2 \in [a, b]$ gilt:

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies \|f_k(t_1) - f_k(t_2)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann besitzt die Folge $\{f_k\}$ eine auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass die Menge $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ der in dem Intervall $[a, b]$ liegenden rationalen Zahlen abzählbar ist, etwa

$$\mathbb{Q} \cap [a, b] = \{r_i \mid i = 1, 2, \dots\}.$$

Wir zerlegen den Beweis jetzt in zwei Schritte.

Schritt 1: Im ersten Beweisschritt benutzen wir ein beliebtes Diagonalfolgenargument, um eine Teilfolge $\{g_k\}$ von $\{f_k\}$ zu finden, die in allen Punkten r_i punktweise konvergiert.

Nach Voraussetzung (a) ist zunächst die Folge $\{f_k(r_1)\}$ beschränkt im \mathbb{R}^n . Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß besitzt sie daher eine konvergente Teilfolge. Es gibt also eine Teilfolge $\{f_k^{(1)}\}$ von $\{f_k\}$ und einen Grenzwert $f_1^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f_k^{(1)}(r_1) \rightarrow f_1^* \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Wiederum nach Voraussetzung (a) ist aber auch die Folge $\{f_k^{(1)}(r_2)\}$ beschränkt im \mathbb{R}^n . Nach Bolzano–Weierstraß existiert daher eine weitere Teilfolge $f_k^{(2)}$ von $f_k^{(1)}$ sowie ein Grenzwert $f_2^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f_k^{(2)}(r_2) \rightarrow f_2^* \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

So fortfahrend, erhält man induktiv für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ Teilfolgen $\{f_k^{(\ell)}\}$ von $\{f_k\}$ und Grenzwerte $f_\ell^* \in \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(r_1), f_2^{(1)}(r_1), f_3^{(1)}(r_1), \dots &\longrightarrow f_1^*, \\ f_1^{(2)}(r_2), f_2^{(2)}(r_2), f_3^{(2)}(r_2), \dots &\longrightarrow f_2^*, \\ f_1^{(3)}(r_3), f_2^{(3)}(r_3), f_3^{(3)}(r_3), \dots &\longrightarrow f_3^*, \\ \vdots &\qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dabei ist $\{f_k^{(\ell+1)}\}$ eine Teilfolge von $\{f_k^{(\ell)}\}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Für beliebiges $\ell \in \mathbb{N}$ gilt daher

$$\{f_k^{(\ell)}(r_j)\} \rightarrow f_j^* \quad \text{für alle } j = 1, \dots, \ell.$$

Betrachten wir nun die Diagonalfolge

$$g_k := f_k^{(k)} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots,$$

so ist

$$g_k(r_j) \rightarrow f_j^* \quad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, \tag{3.9}$$

denn die Folge $\{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ ist, zumindest von ihrem j -ten Glied an, eine Teilfolge der j -ten Zeile von (3.8) und somit sicherlich in r_j konvergent. Damit ist der erste Beweisschritt abgeschlossen.

Schritt 2: Wir zeigen nun, dass die im ersten Schritt konstruierte Folge $\{g_k\}$ auf dem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wähle ein zugehöriges $\delta > 0$ gemäß Voraussetzung (b). Offenbar gibt es dann endlich viele Punkte $t_1, \dots, t_s \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$, so dass zu jedem $t \in [a, b]$ ein t_j ($j \in \{1, \dots, s\}$) existiert mit

$$|t - t_j| < \delta. \tag{3.10}$$

Wegen (3.9) sind die Folgen $\{g_k(t_j)\}$ dann für jedes $j = 1, \dots, s$ konvergent, insbesondere handelt es sich daher um Cauchy–Folgen. Da es sich hier um endlich viele Punkte t_j handelt, existiert daher eine zwar von ε , nicht jedoch von dem speziellen j abhängige Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|g_k(t_j) - g_m(t_j)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } k, m \geq N \text{ und alle } j = 1, \dots, s.$$

Wegen der Voraussetzung (b) ergibt sich unter Berücksichtigung von (3.10) dann für alle $t \in [a, b]$ (wobei t_j einer der am dichtesten an t liegenden Punkte sei):

$$\begin{aligned} \|g_k(t) - g_m(t)\| &\leq \|g_k(t) - g_k(t_j)\| + \|g_k(t_j) - g_m(t_j)\| + \|g_m(t_j) - g_m(t)\| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon \end{aligned}$$

für alle $k, m \geq N$. Dies impliziert offenbar die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{g_k\}$ auf $[a, b]$. \square

Die Voraussetzung der (punktweise) gleichmäßigen Beschränktheit im Satz 3.12 wird in der Literatur oft durch die stärkere Voraussetzung

$$\|f_k(t)\| \leq S \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und alle } t \in [a, b]$$

(mit einer von t unabhängigen Konstanten S) der (gleichmäßigen) Beschränktheit der Funktionenfolge $\{f_k\}$ ersetzt und stellt in den Anwendungen oft keine großen Probleme dar. Kritischer (und für den Leser vermutlich neuer) hingegen ist die Voraussetzung der gleichgradigen Stetigkeit.

Wir gehen zum Abschluss dieses Abschnitts daher noch etwas näher auf diese gleichgradige Stetigkeit der Funktionenfolge $\{f_k\}$ ein. Würde statt einer ganzen Folge von Funktionen f_k nur *eine* Funktion f vorliegen, welche der entsprechenden Bedingung

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies \|f(t_1) - f(t_2)\| < \varepsilon$$

für alle $t_1, t_2 \in [a, b]$ genügen soll, so hätten wir es gerade mit der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit zu tun. Die gleichgradige Stetigkeit besagt daher, dass alle Elemente f_k der Funktionenfolge $\{f_k\}$ gleichmäßig stetig sind, und dass sie dies gleichgradig sind in dem Sinne, dass die Wahl von δ nicht von dem speziellen Element f_k abhängt. Wir illustrieren dies kurz mittels des nachstehenden Beispiels.

Beispiel 3.13 (a) Seien $L > 0$ eine (Lipschitz–) Konstante und $\{f_k\}$ eine Folge von Funktionen mit der Eigenschaft

$$\|f_k(t_1) - f_k(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2| \quad \text{für alle } t_1, t_2 \in [a, b] \text{ und alle } k \in \mathbb{N}.$$

Alle Funktionen f_k seien also Lipschitz–stetig, wobei die Konstante L hierbei universell für alle f_k gewählt werden kann. Wir zeigen, dass die Folge $\{f_k\}$ dann gleichgradig stetig ist auf dem Intervall $[a, b]$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Setze

$$\delta := \delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{L}.$$

Dann gilt für alle f_k und für alle $t_1, t_2 \in [a, b]$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$ die Abschätzung

$$\|f_k(t_1) - f_k(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2| \leq L\delta = \varepsilon,$$

womit die gleichgradige Stetigkeit der Funktionenfolge $\{f_k\}$ bereits bewiesen ist.

(b) Betrachte die Funktionenfolge $\{f_k\}$, deren Elemente gegeben sind durch

$$f_k : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, f_k(t) := \sin(kt) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Jedes f_k ist offenbar eine stetige und somit auf dem kompakten Intervall $[0, \pi]$ sogar gleichmäßig stetige Funktion. Wir behaupten allerdings, dass $\{f_k\}$ keine gleichgradig stetige Funktionenfolge darstellt. Denn für

$$t_1 := 0 \quad \text{und} \quad t_2 := \frac{\pi}{2k}$$

gilt zwar $|t_1 - t_2| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, jedoch ist

$$|f_k(t_1) - f_k(t_2)| = |f_k(t_2)| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, während für die gleichgradige Stetigkeit

$$|f_k(t_1) - f_k(t_2)| < \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$ und zumindest alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$ gelten müsste. \diamond

3.4 Der Existenzsatz von Peano

Wir betrachten in diesem Abschnitt das Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

mit einer lediglich stetigen Funktion f . Unser Ziel besteht darin, zumindest die Existenz einer Lösung dieses Anfangswertproblems nachzuweisen (Eindeutigkeit können wir im Hinblick auf das Beispiel 3.8 (b) nicht erwarten). Dazu bedienen wir uns einer konstruktiven Methode und beginnen mit einigen Vorbetrachtungen.

Die Differentialgleichung werde in diesen Vorbetrachtungen für alle $t \in [a, b]$ betrachtet, wobei natürlich $t_0 \in [a, b]$ sei. Genau genommen untersuchen wir in unseren Vorbetrachtungen nur das Teilintervall $[t_0, b]$ (entsprechende Überlegungen gelten für $[a, t_0]$) und zerlegen dieses in die äquidistanten Zwischenpunkte

$$t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

mit

$$t_{k+1} := t_k + h \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, m-1$$

und der festen Schrittweite

$$h := \frac{b - t_0}{m}.$$

Bezeichnet y eine Lösung der Differentialgleichung, so folgt

$$y(t_{k+1}) = y(t_k + h) \approx y(t_k) + hy'(t_k) = y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) \quad (3.11)$$

aus dem Satz von Taylor. Sind nun y_0, y_1, \dots, y_k bereits vorhandenen Näherungen an die exakte Lösung $y(t)$ zu den Zeitpunkten $t = t_0, \dots, t_k$ (für $t = t_0$ ist y_0 sogar vorgegeben), so erhält man aus (3.11) eine neue Näherung y_{k+1} für $y(t_{k+1})$ durch die Vorschrift

$$y_{k+1} := y_k + hf(t_k, y_k),$$

die wir bereits als Euler-Verfahren kennengelernt haben, vergleiche den Abschnitt 1.5. Verbinden wir die so erhaltenen Näherungswerte y_k und y_{k+1} zu den Zeitpunkten t_k und t_{k+1} mittels einer linearen Funktion, nämlich

$$p_k(t) := y_k + (t - t_k)f(t_k, y_k) \quad \text{für } t \in [t_k, t_{k+1}],$$

und stückeln wir die p_k für $k = 0, 1, \dots, m-1$ zusammen, so erhalten wir eine stückweise lineare Funktion $p(t)$, die als das zugehörige *Euler-Polygon* bezeichnet wird.

Dieses Euler-Polygon hängt natürlich von der Feinheit der Unterteilung des Teilintervalls $[t_0, b]$ und somit von der Länge der Schrittweite $h > 0$ ab, die ihrerseits durch die Zahl der Zwischenpunkte $m \in \mathbb{N}$ definiert ist. Will man diese Abhängigkeit explizit zum Ausdruck bringen, so müsste man $p^{(m)}(t)$ statt $p(t)$ für das Euler-Polygon schreiben. Damit stellt sich die Frage, ob ein Euler-Polygon $p^{(m)}(t)$ für große $m \in \mathbb{N}$ nicht eine hinreichend gute Näherung für eine Lösung des Anfangswertproblems liefert. Anders formuliert: Konvergiert die Folge $p^{(m)}(t)$ für $m \rightarrow \infty$ vielleicht gegen eine Lösung des Anfangswertproblems?

Genau dies ist die wesentliche Beweisidee bei dem nun folgenden Existenzsatz von Peano, wobei allerdings nur die Konvergenz einer Teilfolge der Euler-Polygone bewiesen werden kann, was für den Nachweis der Existenz einer Lösung allerdings ausreicht. Mehr kann man letztlich auch nicht erwarten, denn die Lösung des Anfangswertproblems muss ja nicht eindeutig sein, und warum sollte die gesamte Folge der Euler-Polygone dann gegen eine bestimmte dieser Lösungen konvergieren?

Satz 3.14 (*Existenzsatz von Peano — Quantitative Fassung*)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (3.12)$$

mit einer stetigen Funktion $f : Z_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die auf dem „Zylinder“

$$Z_{a,b} := \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$$

mit gewissen $a, b > 0$ definiert sei. Dann besitzt das Anfangswertproblem (3.12) mindestens eine Lösung auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, wobei wir

$$\alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad \text{mit} \quad M := \max \{ \|f(t, y)\| \mid (t, y) \in Z_{a,b} \}$$

gesetzt haben und für den trivialen Fall $M = 0$ die Konvention „ $\frac{b}{M} := \infty$ “ verwenden.

Beweis: Für $M = 0$ ist $f(t, y) \equiv 0$ und somit $y(t) \equiv y_0$ eine Lösung des Anfangswertproblems (3.12). Für den Rest des Beweises können wir daher $M > 0$ annehmen. Wir gliedern den Beweis nun in fünf Schritte.

Schritt 1: Wir konstruieren auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ zunächst eine Folge von Euler-Polygonen $p^{(k)}$. Dazu sei bemerkt, dass die stetige Funktion f auf dem kompakten Zylinder $Z_{a,b}$ natürlich gleichmäßig stetig ist. Daher gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\delta = \delta_k > 0$ derart, dass für alle $(t, y), (\tilde{t}, \tilde{y}) \in Z_{a,b}$ die folgende Implikation gilt:

$$|t - \tilde{t}| \leq \delta_k \quad \text{und} \quad \|y - \tilde{y}\| \leq \delta_k \quad \implies \quad \|f(t, y) - f(\tilde{t}, \tilde{y})\| \leq \frac{1}{k}. \quad (3.13)$$

Da $\{\frac{\alpha}{m}\}$ eine Nullfolge ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $m = m_k \in \mathbb{N}$ derart, dass für $h := h_k := \frac{\alpha}{m_k}$ die Ungleichung

$$0 < h_k < \min \left\{ \delta_k, \frac{\delta_k}{M} \right\} \quad (3.14)$$

gilt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und die gerade definierte zugehörige Schrittweite $h = h_k$ definieren wir nun induktiv (wobei wir die Abhängigkeit der verschiedenen Größen von k vorübergehend in unserer Notation unterschlagen) die $2m + 1$ „Eckpunkte“ $(t_i, y_i), i = -m, \dots, +m$ des zu konstruierenden Euler-Polygons durch $t_i := t_0 + ih, i = -m, \dots, +m$ und

$$y_i := \begin{cases} y_{i-1} + hf(t_{i-1}, y_{i-1}) & \text{für } i = 1, \dots, m, \\ y_{i+1} - hf(t_{i+1}, y_{i+1}) & \text{für } i = -1, \dots, -m. \end{cases}$$

Auf diese Weise erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Euler-Polygon $p^{(k)}(t)$, das sich stückweise auf den Teilintervallen $[t_i, t_{i+1}], i = -m, \dots, m - 1$ wie folgt definiert:

$$p^{(k)}(t) := \begin{cases} y_i + (t - t_i)f(t_i, y_i) & \text{für } i = 0, 1, \dots, m - 1, \\ y_{i+1} + (t - t_{i+1})f(t_{i+1}, y_{i+1}) & \text{für } i = -1, \dots, -m. \end{cases} \quad (3.15)$$

Dann gilt insbesondere

$$p^{(k)}(t_i) = y_i \quad \text{für } i = -m, \dots, m. \quad (3.16)$$

Dabei ist die hier beschriebene Konstruktion möglich, weil die Punkte (t_i, y_i) für alle $i = -m, \dots, +m$ in $Z_{a,b}$ und somit im Definitionsbereich von f liegen; für $i = 1, \dots, m$ gilt nämlich

$$\|y_i - y_0\| = \left\| \sum_{j=0}^{i-1} y_{j+1} - y_j \right\|$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.16)}{=} \left\| \sum_{j=0}^{i-1} p^{(k)}(t_{j+1}) - y_j \right\| \\
& \stackrel{(3.15)}{=} \left\| \sum_{j=0}^{i-1} (t_{j+1} - t_j) f(t_j, y_j) \right\| \\
& \leq M \sum_{j=0}^{i-1} (t_{j+1} - t_j) \\
& \leq M\alpha \\
& \leq b.
\end{aligned}$$

Entsprechend argumentiert man für $i = -1, \dots, -m$. Im Folgenden werden wir die Argumente ebenfalls nur für $i = 0, 1, \dots, m$ ausführen, also die Eigenschaften der Euler-Polygone $p^{(k)}$ lediglich rechts vom Anfangspunkt t_0 untersuchen. Analoge Betrachtungen sind jedoch auch für das links von t_0 liegende Teilintervall $[t_0 - \alpha, t_0]$ richtig. Die Einzelheiten hierfür bleiben dem Leser überlassen.

Schritt 2: Wir zeigen jetzt, dass der Satz von Arzelà–Ascoli auf die spezielle Funktionenfolge der Euler-Polygone $p^{(k)}$ anwendbar ist. Zunächst ist diese Folge gleichmäßig beschränkt (nicht nur punktweise), da alle Polygone im kompakten Zylinder $Z_{a,b}$ verlaufen.

Zum Nachweis der gleichgradigen Stetigkeit zeigen wir, dass die Ungleichung

$$\|p^{(k)}(t_1) - p^{(k)}(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad (3.17)$$

und alle $t_1, t_2 \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ erfüllt ist. Aus dem Beispiel 3.13 (a) folgt dann nämlich die Behauptung. Seien also $t_1, t_2 \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gegeben. Liegen beide Punkte t_1, t_2 im gleichen Intervall $[t_i, t_{i+1}]$, so gilt

$$\|p^{(k)}(t_1) - p^{(k)}(t_2)\| = \|(t_1 - t_i)f(t_i, y_i) - (t_2 - t_i)f(t_i, y_i)\| \leq M|t_1 - t_2|.$$

Anderenfalls ist $t_1 \in [t_i, t_{i+1}]$ und $t_2 \in [t_j, t_{j+1}]$ für gewisse Indizes i, j , wobei wir ohne Einschränkung $i < j$ annehmen. Unter Verwendung des bereits erledigten Falles folgt dann

$$\begin{aligned}
& \|p^{(k)}(t_1) - p^{(k)}(t_2)\| \\
& \leq \|p^{(k)}(t_1) - p^{(k)}(t_{i+1})\| + \sum_{\ell=i+1}^{j-1} \|p^{(k)}(t_\ell) - p^{(k)}(t_{\ell+1})\| + \|p^{(k)}(t_j) - p^{(k)}(t_2)\| \\
& \leq M[(t_{i+1} - t_1) + \sum_{\ell=i+1}^{j-1} (t_{\ell+1} - t_\ell) + (t_2 - t_j)] \\
& = M(t_2 - t_1) \\
& = M|t_1 - t_2|.
\end{aligned}$$

Also können wir den Satz 3.12 von Arzelà–Ascoli anwenden. Demnach existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge der betrachteten Euler-Polygone $p^{(k)}$. Im weiteren Verlauf des

Beweises betrachten wir nun nur noch diese Teilfolge, die wir der Einfachheit halber wieder mit $\{p^{(k)}(t)\}$ bezeichnen.

Schritt 3: Wir zeigen hier, dass das Euler–Polygon $p^{(k)}$ der Abschätzung

$$\|\dot{p}^{(k)}(t) - f(t, p^{(k)}(t))\| \leq \frac{1}{k} \quad \text{für alle } t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \setminus \{t_i \mid i = -m, \dots, +m\}$$

genügt und somit näherungsweise als eine Lösung der Differentialgleichung angesehen werden kann. In der Tat gilt auf jedem der offenen Teilintervalle (t_i, t_{i+1}) nämlich

$$\|p^{(k)}(t) - y_i\| \stackrel{(3.15)}{=} |t - t_i| \cdot \|f(t_i, y_i)\| \leq h_k M \stackrel{(3.14)}{\leq} \delta_k$$

sowie

$$|t - t_i| < h_k \stackrel{(3.14)}{\leq} \delta_k.$$

Hieraus folgt

$$\|\dot{p}^{(k)}(t) - f(t, p^{(k)}(t))\| \stackrel{(3.15)}{=} \|f(t_i, y_i) - f(t, p^{(k)}(t))\| \stackrel{(3.13)}{\leq} \frac{1}{k}, \quad (3.18)$$

womit der Schritt 3 vollständig bewiesen ist.

Schritt 4: Wir verifizieren in diesem Teil des Beweises die Gültigkeit von

$$\|p^{(k)}(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, p^{(k)}(\tau)) d\tau\| \leq \frac{1}{k} |t - t_0| \quad (3.19)$$

für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Sei dazu $t \in [t_i, t_{i+1}]$ für ein $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ beliebig gegeben (analog für $i \in \{-m, \dots, -1\}$). Dann folgt

$$\begin{aligned} & \|p^{(k)}(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, p^{(k)}(\tau)) d\tau\| \\ &= \left\| p^{(k)}(t) - y_i - \int_{t_i}^t f(\tau, p^{(k)}(\tau)) d\tau + \sum_{j=0}^{i-1} [y_{j+1} - y_j - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau, p^{(k)}(\tau)) d\tau] \right\| \\ &\stackrel{(3.16)}{=} \left\| \int_{t_i}^t [\dot{p}^{(k)}(\tau) - f(\tau, p^{(k)}(\tau))] d\tau + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\dot{p}^{(k)}(\tau) - f(\tau, p^{(k)}(\tau))] d\tau \right\| \\ &\stackrel{(3.18)}{\leq} \int_{t_i}^t \frac{1}{k} d\tau + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{1}{k} d\tau \\ &= \frac{1}{k} |t - t_0|, \end{aligned}$$

so dass (3.19) in der Tat erfüllt ist.

Schritt 5: Wir kommen nun zum Beweis der eigentlichen Behauptung. Sei dazu $p^*(t)$ die Grenzfunktion der auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gleichmäßig konvergenten (Teil-) Folge der Euler-Polygone $p^{(k)}(t)$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz dieser Folge und (3.13) konvergiert die Folge $\{f(t, p^{(k)}(t))\}$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gleichmäßig gegen $f(t, p^*(t))$. Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ in der Beziehung (3.19) liefert dann die Identität

$$\|p^*(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, p^*(\tau)) d\tau\| = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Aus dem Satz 1.16 folgt daher die Behauptung, denn p^* ist als gleichmäßiger Grenzwert einer konvergenten (Teil-) Folge stetiger Funktionen selbst wieder stetig. \square

Häufig wird der Existenzsatz von Peano auch wie in dem nachstehenden Resultat formuliert.

Satz 3.15 (*Existenzsatz von Peano — Qualitative Fassung*)

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

für jedes Paar $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ eine lokale Lösung, d.h., es existiert ein (im Allgemeinen von t_0 und y_0 abhängiges) $\alpha > 0$ derart, dass das Anfangswertproblem auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ mindestens eine Lösung hat.

Beweis: Wegen $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ und \mathcal{D} offen existieren $a, b > 0$ derart, dass der im Satz 3.14 definierte Zylinder $Z_{a,b}$ ganz in \mathcal{D} enthalten ist. Wendet man den Satz 3.14 daher mit diesem Zylinder an, so folgt gerade die Behauptung. \square

Wie wir bereits aus dem Beispiel 3.8 (b) wissen, reicht die Stetigkeit von f nicht aus, um auch die Eindeutigkeit der Lösung zu garantieren. Insofern lässt sich die Aussage des Existenzsatzes von Peano nicht verschärfen.

Ein alternativer (und eleganterer) Beweis des Existenzsatzes von Peano (der allerdings ebenfalls den Satz von Arzelà–Ascoli benötigt) ergibt sich unter Verwendung des Fixpunktsatzes von Schauder. Der Leser konsultiere hierzu beispielsweise wieder das Buch [18] von Walter.

3.5 Fortsetzungssätze

Bisher haben wir zeigen können, dass ein Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{3.20}$$

unter gewissen Voraussetzungen stets eine (eindeutige) Lösung in einer (eventuell kleinen) Umgebung des Anfangszeitpunktes t_0 besitzt. Die Existenz (und Eindeutigkeit) wird also lokal garantiert. In diesem Abschnitt stellen wir uns die Frage nach der Existenz (und Eindeutigkeit) einer globalen Lösung. Wir untersuchen also die Frage, inwieweit sich eine lokal existierende Lösung auf der Zeitachse t nach links und/oder rechts fortsetzen lässt. Wir sprechen in diesem Zusammenhang daher von Fortsetzungssätzen. In der Literatur findet man stattdessen auch häufig den Begriff eines globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes.

Zunächst soll ein einfaches Beispiel betrachtet werden.

Beispiel 3.16 Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t_0) = y_0.$$

Die rechte Seite $f(t, y) := \frac{1}{t}$ ist hier nur definiert für $t \neq 0$. Der Definitionsbereich einer Lösung dieses Anfangswertproblems kann daher nur ein Teilintervall von $(-\infty, 0)$ oder $(0, +\infty)$ sein. Gilt $t_0 > 0$, so wird man also eine Lösung auf $(0, +\infty)$ suchen. Tatsächlich ist

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \frac{1}{s} ds = y_0 + \ln(t) - \ln(t_0) = y_0 + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

in diesem Fall eine auf ganz $I := (0, +\infty)$ definierte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems. \diamond

Die Situation in dem vorigen Beispiel war sehr einfach, da bereits der Definitionsbereich von f eingeschränkt war und von daher a priori klar war, dass eine Lösung nicht auf der gesamten reellen Achse existieren konnte. Das nächste Beispiel zeigt allerdings, dass auch bei harmlos aussehenden rechten Seiten die Lösung nur auf gewissen Teilintervallen zu existieren braucht.

Beispiel 3.17 Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y^2 t, \quad y(t_0) = y_0$$

mit der auf ganz \mathbb{R}^2 erklärten Funktion $f(t, y) := y^2 t$ und beliebigen Anfangsdaten $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Die Abbildung f ist offenbar stetig und genügt bezüglich y (zumindest lokal) einer Lipschitz-Bedingung. Nach dem Satz 3.9 hat das Anfangswertproblem daher zumindest lokal eine eindeutig bestimmte Lösung. Durch Trennung der Variablen gelangt man in der Tat sehr schnell zu der Lösung

$$y(t) = y(t; t_0, y_0) = \frac{2y_0}{2 + y_0(t_0^2 - t^2)},$$

die allerdings nur auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert ist, das keine Punkte $t \in \mathbb{R}$ mit $2 + y_0(t_0^2 - t^2) = 0$ enthält. Sehen wir einmal von dem trivialen Fall $y_0 = 0$ ab, bei der das

Anfangswertproblem durch die Nullfunktion gelöst wird, so kann eine Lösung nur für alle t mit $t^2 \neq t_0^2 + \frac{2}{y_0}$ existieren, also nur auf einem der drei möglichen Intervalle

$$\left(-\infty, -\sqrt{t_0^2 + \frac{2}{y_0}}\right), \quad \left(-\sqrt{t_0^2 + \frac{2}{y_0}}, +\sqrt{t_0^2 + \frac{2}{y_0}}\right), \quad \left(+\sqrt{t_0^2 + \frac{2}{y_0}}, +\infty\right),$$

nicht jedoch auf ganz \mathbb{R} , wobei wir an dieser Stelle zunächst davon ausgehen, dass $t_0^2 + \frac{2}{y_0} \geq 0$ ist. Als Lösungsintervall I kommt natürlich nur dasjenige in Frage, in dem t_0 enthalten ist. Für $t_0 = 0, y_0 = 1$ ist es das mittlere (beschränkte) Intervall, für $t_0 = 1, y_0 = -2$ ist es das nach rechts unbeschränkte Intervall, und für $t_0 = -1, y_0 = -2$ ist es das nach links unbeschränkte Intervall. In dem zuerst ausgeschlossenen Fall $t_0^2 + \frac{2}{y_0} < 0$ besitzt die Lösung $y(\cdot; t_0, y_0)$ keine (reellen) Polstellen und existiert daher auf der gesamten reellen Achse. \diamond

Wir beweisen jetzt einen Fortsetzungssatz unter den Voraussetzungen des lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes 3.9 von Picard–Lindelöf.

Satz 3.18 (*Fortsetzungssatz/Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz*)

Seien $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig sowie bzgl. y Lipschitz-stetig. Dann existiert zu jedem $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall $I_{\max} = I_{\max}(t_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I_{\max}$ derart, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

- (a) Das Anfangswertproblem (3.20) besitzt genau eine Lösung y auf dem Existenzintervall I_{\max} .
- (b) Ist $z: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung von (3.20) auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$, so gilt $J \subseteq I_{\max}$, und z ist die Einschränkung der Lösung y aus Teil (a) auf das Teilintervall J .

Beweis: Wir bezeichnen mit \mathcal{I} die Menge aller offenen Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- $t_0 \in I$
- $(t, y(t)) \in \mathcal{D}$ für alle $t \in I$
- das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I, y(t_0) = y_0$ hat eine Lösung.

Aufgrund des lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes 3.10 von Picard–Lindelöf ist die Menge \mathcal{I} nichtleer.

Sind nun $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ zwei solche Intervalle mit zugehörigen Lösungen y_1, y_2 , so gilt $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ und daher

$$y_1(t) = y_2(t) \quad \text{für alle } t \in I_1 \cap I_2 \quad (3.21)$$

aufgrund des Satzes 3.11. Wir definieren jetzt

$$I_{\max} := \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I.$$

Dann besitzt I_{\max} die folgenden Eigenschaften:

- $t_0 \in I_{\max}$
- I_{\max} ist eine offene Menge
- I_{\max} ist ein Intervall.

Die erste dieser Eigenschaften ist klar wegen $t_0 \in I$ für jedes $I \in \mathcal{I}$. Die zweite Eigenschaft ist ebenfalls klar, denn I_{\max} ist als beliebige Vereinigung von offenen Mengen bekanntlich selbst offen. Die dritte Eigenschaft schließlich folgt sehr leicht aus der Beobachtung, dass zu jedem $x \in I_{\max}$ stets ein Intervall $I_x \in \mathcal{I}$ existiert mit $x \in I_x$. Nun ist aber auch $t_0 \in I_x$, also auch $[t_0, x] \subseteq I_x \subseteq I_{\max}$ bzw. $[x, t_0] \subseteq I_x \subseteq I_{\max}$, je nachdem, ob $t_0 \leq x$ oder $x \leq t_0$ gilt.

Mittels des so definierten Intervalls I_{\max} setzen wir für jedes $t \in I_{\max}$ nun

$$y(t) := \tilde{y}(t),$$

wobei $\tilde{I} \in \mathcal{I}$ ein beliebiges Intervall mit $t \in \tilde{I}$ und zugehöriger Lösung \tilde{y} bezeichnet. Wegen (3.21) ist diese Definition unabhängig von der speziellen Wahl des Intervalls \tilde{I} und y somit wohldefiniert. Auf diese Weise erhalten wir also eine Funktion y , die der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ genügt und die Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ auf dem gesamten Intervall I_{\max} löst.

Die Aussagen (a) und (b) folgen nun unmmittelbar aus der Konstruktion von I_{\max} und der Definition von y unter Beachtung der Tatsache, dass die Lösung y lokal (in der Umgebung eines jeden Punktes) eindeutig ist. \square

3.6 Stetige Abhängigkeit von Störungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir, inwieweit die Lösung eines Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y), \quad y'(t_0) = y_0$$

von Störungen im Anfangswert t_0 und in der rechten Seite f abhängt. Störungen in y_0 treten dabei sowohl durch Messfehler oder Schätzungen auf (die exakte Population der Erdbevölkerung zu einem Zeitpunkt t_0 ist beispielsweise gar nicht bekannt), aber auch durch Rundungsfehler im Computer (der Wert $y(t_0) = \pi$ ist beispielsweise auf dem Rechner nicht exakt realisierbar). Störungen von f wiederum sind deshalb von Interesse, da die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ im Allgemeinen nur ein mathematisches Modell für die Realität darstellt, etwa die früher betrachteten physikalischen Vorgänge, chemischen Reaktionen oder das relativ einfache Modell für das Wachstum der Erdbevölkerung. Ein solches mathematisches Modell stellt fast immer eine Vereinfachung der tatsächlichen Vorgänge dar und gibt die Realität daher nicht exakt wieder. Aus diesem Grunde ist man insbesondere an Aussagen interessiert, wonach sich (möglichst kleine) Störungen in y_0 und f hoffentlich nur geringfügig auf die Lösung der gegebenen Differentialgleichung auswirken.

Um ein geeignetes Störungsresultat formulieren zu können, beweisen wir als Vorbereitung zunächst das folgende Resultat.

Lemma 3.19 (*Lemma von Gronwall*)

Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und es seien $v, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige, nicht-negative Funktionen. Weiterhin existiere eine Konstante $c > 0$ mit

$$v(t) \leq c + \int_a^t v(s)g(s)ds \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Dann gilt für alle $t \in [a, b]$ die Ungleichung

$$v(t) \leq c \cdot e^{\int_a^t g(s)ds}.$$

Beweis: Wir betrachten die durch

$$f(t) := c + \int_a^t v(s)g(s)ds$$

definierte Funktion $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$. Nach Voraussetzung gilt für alle $t \in [a, b]$ sowohl $v(t) \leq f(t)$ als auch $0 < c \leq f(t)$. Für alle $t \in [a, b]$ ist daher

$$f'(t) = v(t)g(t) \leq f(t)g(t).$$

Daraus folgt mit $f(a) = c$ wegen $f(t) > 0, c > 0$ unmittelbar

$$\ln \left(\frac{f(t)}{c} \right) = \ln(f(t)) - \ln(f(a)) = \int_a^t \frac{f'(s)}{f(s)} ds \leq \int_a^t g(s) ds.$$

Anwendung der Exponentialfunktion liefert

$$f(t) \leq c \cdot e^{\int_a^t g(s)ds}$$

und somit wegen $v(t) \leq f(t)$ die Behauptung. □

Damit sind wir nun in der Lage, das folgende Störungsresultat zu beweisen, wobei wir in unserer Formulierung davon ausgehen, dass ein gegebenes Anfangswertproblem eine Lösung auf einem Intervall $[a, b]$ besitzt, bei welcher der linke Intervallpunkt a mit der Anfangszeit t_0 übereinstimmt (wir schauen also nur in die „Zukunft“). Dies wird uns eine direkte Anwendung des Lemmas 3.19 von Gronwall in der bewiesenen Form erlauben, die Aussage selbst gilt allerdings auch allgemeiner.

Satz 3.20 (*Störungssatz*)

Seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall in \mathbb{R} , $O \subseteq \mathbb{R}^n$ eine gegebene Menge, $f, \tilde{f} : I \times O \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen, wobei f überdies bezüglich y Lipschitz-stetig mit der Konstanten

$L > 0$ sei, sowie gewisse Anfangswerte $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ zum Zeitpunkt $t_0 := a$ gegeben. Seien y und \tilde{y} Lösungen der zugehörigen Anfangswertprobleme

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{und} \quad \tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t)), \quad \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0.$$

Dann gilt

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1) \quad (3.22)$$

für alle $t \in [a, b]$ mit der Konstanten

$$M := \sup_{t \in [a, b]} \|f(t, \tilde{y}(t)) - \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))\|.$$

Beweis: Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt zunächst

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(s) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

und

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{y}'(s) ds = \tilde{y}_0 + \int_{t_0}^t \tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) ds$$

für alle $t \in [a, b] = [t_0, b]$. Subtraktion liefert daher

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{y}(s))\| ds$$

für alle $t \in [a, b]$. Der Integrand lässt sich hierbei abschätzen durch

$$\begin{aligned} \|f(s, y(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{y}(s))\| &\leq \|f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))\| + \|f(s, \tilde{y}(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{y}(s))\| \\ &\leq L\|y(s) - \tilde{y}(s)\| + M. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\| + \frac{M}{L} \leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| + \frac{M}{L} + L \int_{t_0}^t \left(\|y(s) - \tilde{y}(s)\| + \frac{M}{L} \right) ds,$$

wobei wir auf beiden Seiten die Konstante $\frac{M}{L}$ hinzuaddiert haben. Setzen wir nun

$$\begin{aligned} v(t) &:= \|y(t) - \tilde{y}(t)\| + \frac{M}{L}, \\ g(t) &\equiv L, \\ c &:= \|y_0 - \tilde{y}_0\| + \frac{M}{L} \end{aligned}$$

und wenden das Lemma von Gronwall an (wobei wir ohne Einschränkung $M > 0$ voraussetzen dürfen, damit garantiert $c > 0$ ist), so ergibt sich

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\| + \frac{M}{L} \leq \left(\|y_0 - \tilde{y}_0\| + \frac{M}{L} \right) \exp \left(\int_{t_0}^t L ds \right)$$

$$= \left(\|y_0 - \tilde{y}_0\| + \frac{M}{L} \right) \exp(L|t - t_0|).$$

Umordnung der Terme liefert dann die Behauptung. \square

Die Abschätzung (3.22) enthält in ihrem ersten Summanden den durch eine Störung des Anfangswertes y_0 verursachten Fehler, während der zweite Summand ausdrückt, wie sich eine Störung der Funktion f auf die zugehörigen Lösungen auswirkt. Hierbei beachte man, dass dieser Term im Fall $f = \tilde{f}$ verschwindet, da die Konstante M dann gleich Null ist.

Aus dem Satz 3.20 folgt daher beispielsweise die folgende Stetigkeitseigenschaft: Ist y die Lösung des ungestörten Problems

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [a, b], \quad y(a) = y_0,$$

und ist \tilde{y}_n Lösung des (nur im Anfangswert) gestörten Problems

$$\tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t)) \quad \forall t \in [a, b], \quad \tilde{y}(a) = y_n$$

für eine Folge $\{y_n\} \rightarrow y_0$, so konvergieren die Lösungen \tilde{y}_n auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen die Lösung y .

Kapitel 4

Lineare Differentialgleichungen

- 4.1 Lineare Systeme mit variablen Koeffizienten
- 4.2 Die Matrix-Exponentialfunktion
- 4.3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten
- 4.4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung
- 4.5 Lineare Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten
- 4.6 Die Laplace-Transformation

4.1 Lineare Systeme mit variablen Koeffizienten

Wir betrachten in diesem Abschnitt Differentialgleichungssysteme der Gestalt

$$y' = A(t)y + g(t) \quad (4.1)$$

mit stetigen Funktionen $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Man bezeichnet (4.1) als ein *lineares Differentialgleichungssystem*. Im Falle $g \equiv 0$ spricht man von einem *homogenen linearen Differentialgleichungssystem*, anderenfalls von einem *inhomogenen linearen Differentialgleichungssystem*.

Wir beweisen zunächst einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Satz 4.1 *Gegeben seien ein offenes Intervall I und ein lineares Differentialgleichungssystem*

$$y'(t) = A(t)y(t) + g(t)$$

mit stetigen Funktionen $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem Paar $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ genau eine auf ganz I definierte Lösung y des zugehörigen Anfangswertproblems.

Beweis: Wir setzen

$$f(t, y) := A(t)y + g(t)$$

für die rechte Seite der linearen Differentialgleichung. Der Beweis erfolgt nun weitgehend analog zu dem des Satzes 3.9 von Picard-Lindelöf.

Zu diesem Zweck wählen wir zunächst ein kompaktes Teilintervall $J \subseteq I$. Aus Stetigkeitsgründen existiert dann die Zahl

$$L := \max \{ \|A(t)\| \mid t \in J \}.$$

Hiermit erhält man für alle $t \in J$ und alle $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ unter Verwendung des Lemmas 3.5 die Abschätzung

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| = \|A(t)(y - \tilde{y})\| \leq \|A(t)\| \|y - \tilde{y}\| \leq L \|y - \tilde{y}\|,$$

so dass f einer Lipschitz-Bedingung bezüglich y genügt. Wegen Satz 3.11 kann es daher höchstens eine Lösung für ein gegebenes Anfangswertproblem bei linearen Differentialgleichungssystemen geben.

Zum Nachweis der Existenz benutzen wir zu einem gegebenen Anfangswert $y(t_0) = y_0$ wieder die zugehörigen Picard-Iterierten

$$\begin{aligned} y_0(t) &:= y_0, \\ y_{k+1}(t) &:= y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_k(\tau)) d\tau \quad \text{für } k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Da unsere spezielle rechte Seite f für alle $y \in \mathbb{R}^n$ definiert ist, kann der Schritt 1 aus dem Beweis des Satzes 3.9 hier entfallen.

Die Rolle der Konstanten M im Satz 3.9 übernimmt jetzt die Konstante

$$K := \max \{ \|y_1(t) - y_0(t)\| \mid t \in J \}.$$

Durch vollständige Induktion zeigt man wie im Schritt 2 des Beweises von Satz 3.9 die Gültigkeit der Ungleichung

$$\|y_{k+1}(t) - y_k(t)\| \leq KL^k \frac{|t - t_0|^k}{k!} \quad (4.2)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Hieraus folgt wiederum die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $\{y_k\}$ auf dem Intervall J gegen eine (dann automatisch stetige) Grenzfunktion y_* , vergleiche den Schritt 3 im Beweis des Satzes 3.9. Wie im Schritt 4 desselben Beweises erhält man schließlich, dass diese Grenzfunktion y_* eine Lösung der gegebenen Anfangswertaufgabe auf dem kompakten Intervall J ist.

Da es zu jedem $t \in I$ ein kompaktes Intervall $J \subseteq I$ mit $t, t_0 \in J$ gibt, folgt aus der gerade bewiesenen Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung auf J auch die Existenz und Eindeutigkeit auf dem gesamten Intervall I . \square

Wir vernachlässigen im Folgenden die Anfangsbedingung und untersuchen die Struktur der allgemeinen Lösung des linearen Systems (4.1). Dazu unterscheiden wir den homogenen und inhomogenen Fall und setzen

$$L_{\text{hom}} := \{ y : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid y \text{ löst } y' = A(t)y \}$$

sowie

$$L_{\text{inhom}} := \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid y \text{ löst } y' = A(t)y + g(t)\}.$$

Dann gilt zunächst das folgende Resultat.

Lemma 4.2 *Die Menge L_{hom} bildet einen Vektorraum.*

Beweis: Offenbar ist L_{hom} eine Teilmenge des Vektorraums aller differenzierbaren Funktionen von I in \mathbb{R}^n . Zum Beweis der Behauptung brauchen wir daher nur die Kriterien für einen Teilraum zu verifizieren:

- Es ist offenbar $0 \in L_{\text{hom}}$.
- Mit $y_1, y_2 \in L_{\text{hom}}$ ist auch $y_1 + y_2 \in L_{\text{hom}}$ wegen

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = A(t)y_1 + A(t)y_2 = A(t)(y_1 + y_2).$$

- Mit $y \in L_{\text{hom}}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist auch $\alpha y \in L_{\text{hom}}$ wegen

$$(\alpha y)' = \alpha y' = \alpha A(t)y = A(t)(\alpha y).$$

Damit ist das Lemma auch schon bewiesen. □

Wir wollen uns als Nächstes die Dimension des Lösungsraums L_{hom} überlegen. Dazu sei daran erinnert, dass gegebene Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind, wenn die folgende Implikation gilt:

$$\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_k \varphi_k = 0 \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Ausführlich lässt sich dies auch schreiben als

$$\alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_k \varphi_k(t) = 0 \quad \forall t \in I \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

In dieser Formulierung wird auch deutlich, dass das Intervall I eine Rolle spielt. Handelt es sich bei den Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ speziell um Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems zu (4.1), so gilt die folgende starke Charakterisierung der linearen Unabhängigkeit, die für beliebige Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ im Allgemeinen nicht richtig ist.

Lemma 4.3 *Seien $y_1, \dots, y_k \in L_{\text{hom}}$ Lösungen des homogenen Systems $y' = A(t)y$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) y_1, \dots, y_k sind linear unabhängig.
- (b) Es existiert ein $t_0 \in I$ derart, dass die Vektoren $y_1(t_0), \dots, y_k(t_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.
- (c) Für jedes $t \in I$ sind die Vektoren $y_1(t), \dots, y_k(t) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

Beweis: Die Implikationen $(c) \implies (b) \implies (a)$ sind klar. Also ist nur noch die Richtung $(a) \implies (c)$ zu zeigen. Seien daher y_1, \dots, y_k linear unabhängig und $t \in I$ beliebig. Angenommen, die Vektoren $y_1(t), \dots, y_k(t)$ wären linear abhängig. Dann gibt es Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich Null sind, mit

$$\alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_k y_k(t) = 0.$$

Wegen Lemma 4.2 ist

$$y := \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k \in L_{\text{hom}}.$$

Außerdem gilt $y(t) = 0$. Also ist y eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = A(t)y, y(t) = 0$. Dieses hat aber auch die triviale Lösung $z \equiv 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung gemäß Satz 4.1 ist dann $y \equiv z \equiv 0$. Also sind die Funktionen y_1, \dots, y_k linear abhängig, Widerspruch. \square

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt die Dimension des Lösungsraums L_{hom} angeben.

Satz 4.4 (a) L_{hom} ist ein n -dimensionaler Vektorraum.

(b) $L_{\text{inhom}} = y_p + L_{\text{hom}}$ ist ein affiner Raum, wobei y_p eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems (4.1) bezeichnet.

Beweis: (a) Seien $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des \mathbb{R}^n . Wegen Satz 4.1 gibt es dann zu einem fest gewählten $t_0 \in I$ eindeutig bestimmte Lösungen y_i des Anfangswertproblems $y' = A(t)y, y(t_0) = b_i$. Wegen Lemma 4.3 sind diese Lösungen linear unabhängig, woraus $\dim L_{\text{hom}} \geq n$ folgt. Andererseits ist $\dim L_{\text{hom}} \leq n$, denn gäbe es $n+1$ linear unabhängige Lösungen y_1, \dots, y_{n+1} , so müssten die Vektoren $y_1(t_0), \dots, y_{n+1}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ wegen Lemma 4.3 linear unabhängig sein, was wegen $\dim \mathbb{R}^n = n$ nicht sein kann.

(b) Sei y_p eine beliebige partikuläre Lösung des inhomogenen Systems $y' = A(t)y + g(t)$. Wir zeigen zunächst die Inklusion $L_{\text{inhom}} \subseteq y_p + L_{\text{hom}}$. Sei dazu $y_q \in L_{\text{inhom}}$ beliebig gegeben. Setze $y := y_p - y_q$. Dann gilt

$$y' = y'_p - y'_q = (Ay_p + g) - (Ay_q + g) = A(y_p - y_q) = Ay,$$

also $y \in L_{\text{hom}}$. Wegen $y_q = y_p - y$ folgt $y_q \in y_p + L_{\text{hom}}$, denn mit y gehört auch $-y$ zu L_{hom} .

Als Nächstes verifizieren wir die Inklusion $y_p + L_{\text{hom}} \subseteq L_{\text{inhom}}$. Sei dazu $y_q \in y_p + L_{\text{hom}}$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $y \in L_{\text{hom}}$ mit $y_q = y_p + y$. Folglich ist

$$y'_q = y'_p + y' = (Ay_p + g) + Ay = A(y_p + y) + g = Ay_q + g$$

und y_q somit eine Lösung des inhomogenen Systems. \square

Der Satz 4.4 motiviert die folgende Definition.

Definition 4.5 Unter einem **Fundamentalsystem** der Differentialgleichung $y' = A(t)y$ versteht man eine Basis y_1, \dots, y_n des Lösungsraums L_{hom} .

Seien nun $y_1, \dots, y_n \in L_{\text{hom}}$ insgesamt n (nicht notwendig linear unabhängige) Lösungen von $y' = A(t)y$. Mittels dieser Lösungen definieren wir die Matrix

$$Y(t) := \begin{pmatrix} | & & | \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{für jedes } t \in I. \quad (4.3)$$

Die zugehörige Determinante

$$w(t) := \det(Y(t)), \quad t \in I,$$

heißt **Wronski-Determinante** der gegebenen Lösungen y_1, \dots, y_n . Diese liefert ein recht einfaches Kriterium dafür, ob diese Lösungen linear unabhängig sind.

Satz 4.6 Für die Wronski-Determinante gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Es ist $w(t) \equiv 0$ für alle $t \in I$ genau dann, wenn die Lösungen $y_1, \dots, y_n \in L_{\text{hom}}$ linear abhängig sind.
- (b) Es ist $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ genau dann, wenn die Lösungen $y_1, \dots, y_n \in L_{\text{hom}}$ linear unabhängig sind.

Insbesondere ist die Wronski-Determinante entweder identisch Null, oder sie verschwindet für kein einziges $t \in I$.

Beweis: Die Aussagen folgen unmittelbar aus dem Lemma 4.3, indem man dort speziell $k = n$ wählt. \square

Die in (4.3) definierte Matrix $Y(t)$ ist im Folgenden von zentraler Bedeutung und erhält daher nun einen eigenen Namen für den Fall, dass die Lösungen y_1, \dots, y_n linear unabhängig sind, also ein Fundamentalsystem von $y' = A(t)y$ bilden.

Definition 4.7 Bilden die Funktionen y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = A(t)y$, so bezeichnet man die hiermit definierte Matrix $Y(t)$ aus (4.3) als die zugehörige **Fundamentalmatrix** dieses Fundamentalsystems.

Die Berechnung einer Determinante ist im Allgemeinen recht aufwändig, im Falle der Wronski-Determinante ist jedoch das folgende Resultat manchmal hilfreich.

Satz 4.8 (**Formel von Liouville**)

Die Wronski-Determinante $w(t)$ von n linear unabhängigen Lösungen des homogenen Systems $y' = A(t)y$ genügt der skalaren linearen Differentialgleichung

$$w' = [\text{Spur}(A(t))] w.$$

Sie besitzt daher die Darstellung

$$w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Spur} A(s) ds}$$

für alle $t, t_0 \in I$.

Beweis: Seien y_1, \dots, y_n linear unabhängige Lösungen von $y' = A(t)y$ und $Y(t)$ die zugehörige Fundamentalmatrix. Aus der Leibniz-Darstellung einer Determinante folgt dann (Beweis als Aufgabe)

$$(\det Y(t))' = \sum_{k=1}^n \det(y_1(t), \dots, y_{k-1}(t), y'_k(t), y_{k+1}(t), \dots, y_n(t)). \quad (4.4)$$

Setze nun

$$B(t) := Y(t)^{-1} A(t) Y(t),$$

wobei wir natürlich ausgenutzt haben, dass $Y(t)$ stets regulär ist. Dann gilt

$$Y'(t) = A(t)Y(t) = Y(t)B(t). \quad (4.5)$$

Bezeichnen wir die k -te Spalte von $B(t)$ mit $b_k(t)$ und die Elemente dieser Matrix mit $b_{ik}(t)$, so ergibt sich aus (4.5) durch Vergleich der k -ten Spalten die Identität

$$y'_k(t) = Y(t)b_k(t) = \sum_{i=1}^n b_{ik}(t)y_i(t).$$

Mit (4.4) und der Linearität der Determinante in jeder Spalte erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned} w'(t) &= (\det Y(t))' \\ &= \sum_{k=1}^n \det(y_1(t), \dots, y'_k(t), \dots, y_n(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ik}(t) \det(y_1(t), \dots, y_i(t), \dots, y_n(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kk}(t) \det(y_1(t), \dots, y_k(t), \dots, y_n(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kk}(t) \det Y(t) \\ &= \text{Spur}(B(t)) \det Y(t) \\ &= \text{Spur}(A(t)) w(t), \end{aligned}$$

denn ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur. Außerdem haben wir hierbei ausgenutzt, dass die Determinante einer Matrix verschwindet, sobald diese Matrix zwei gleiche Spaltenvektoren besitzt und somit singulär ist.

Also genügt $w(t)$ einer skalaren linearen Differentialgleichung, woraus sich mit Satz 2.1 insbesondere die explizite Darstellung für $w(t)$ ergibt. \square

Die Bestimmung eines Fundamentalsystems für die Lösung der homogenen Gleichung $y'(t) = A(t)y(t)$ ist im Allgemeinen ziemlich schwierig. Wir werden in Kürze eine Methode für den Spezialfall angeben, wo $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine konstante Matrix ist, vergleiche den Abschnitt 4.3. Kennt man allerdings *eine* (nichttriviale) Lösung y der homogenen Gleichung $y' = A(t)y$, so ist es möglich, die Dimension dieses Systems um eine Einheit zu verringern und die restlichen Lösungen aus dem dann reduzierten System zu bestimmen. Dies ist das so genannte *Reduktionsverfahren von d'Alembert*, das im Folgenden näher beschrieben wird.

Sei also $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nichttriviale Lösung von $y' = A(t)y$ (woher auch immer diese kommen möge). Wir schreiben $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ und nehmen ohne Einschränkung $y_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ an (notfalls hat man das Intervall I zu verkleinern oder die nachfolgenden Ausführungen mit einer anderen Komponente von $y(t)$ durchzuführen). Um eine weitere Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu erhalten, machen wir den Ansatz

$$x(t) := \eta(t)y(t) + z(t) \quad (4.6)$$

mit noch näher zu spezifizierenden Funktionen

$$\eta : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad z : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Differentiation von (4.6) liefert nach der Produktregel

$$x'(t) = \eta'(t)y(t) + \eta(t)y'(t) + z'(t) = \eta'(t)y(t) + \eta(t)A(t)y(t) + z'(t),$$

wobei wir für die zweite Gleichung ausgenutzt haben, dass y der homogenen Differentialgleichung $y' = A(t)y$ genügt. Nun soll aber auch (4.6) diese Differentialgleichung erfüllen, also

$$x'(t) = A(t)x(t) = \eta(t)A(t)y(t) + A(t)z(t)$$

gelten. Gleichsetzen der beiden letzten Ausdrücke für $x'(t)$ liefert sofort

$$z' = A(t)z - \eta'(t)y(t),$$

was sich komponentenweise äquivalent schreiben lässt als

$$z'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)z_j - \eta'(t)y_i(t) \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

Wählt man die Funktion η nun so, dass

$$\eta'(t) = \sum_{j=2}^n a_{1j}(t) \frac{z_j(t)}{y_1(t)} \quad (4.8)$$

gilt, dann vereinfacht sich die erste Gleichung in (4.7) zu

$$z_1' = a_{11}(t)z_1.$$

Für diese wählen wir jetzt die triviale Lösung $z_1(t) \equiv 0$. Dann lauten die restlichen Gleichungen in (4.7)

$$z_i' = \sum_{j=2}^n a_{ij}(t)z_j - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}(t)y_i(t)}{y_1(t)}z_j = \sum_{j=2}^n \left(a_{ij}(t) - \frac{a_{1j}(t)y_i(t)}{y_1(t)} \right) z_j$$

für alle $i = 2, \dots, n$. Dies ist ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem mit variablen Koeffizienten, welches nur noch aus $n - 1$ Gleichungen besteht.

Wir fassen unsere Ausführungen in dem folgenden Resultat zusammen.

Satz 4.9 (*Reduktionsverfahren von d'Alembert*)

Seien y eine Lösung des homogenen Systems $y' = A(t)y$ mit $y_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, z eine nichttriviale Lösung des $(n - 1)$ -dimensionalen Systems

$$z' = B(t)z \quad \text{mit } B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=2}^n, \quad b_{ij}(t) := a_{ij}(t) - \frac{a_{1j}(t)y_i(t)}{y_1(t)}$$

sowie

$$x(t) := \eta(t)y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ z(t) \end{pmatrix},$$

wobei $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von η' aus (4.8) sei. Dann ist x eine von y linear unabhängige weitere Lösung von $y' = A(t)y$.

Beweis: Aufgrund unserer Vorbetrachtungen ist nur noch die lineare Unabhängigkeit von x und y zu beweisen. Sei dazu

$$\alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

mit gewissen Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, also

$$\alpha_1 \left(\eta(t)y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ z(t) \end{pmatrix} \right) + \alpha_2 y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Umordnung der Terme liefert

$$(\alpha_1 \eta(t) + \alpha_2)y(t) + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \in I.$$

Wegen $y_1(t) \neq 0$ folgt hieraus unmittelbar $\alpha_1 \eta(t) + \alpha_2 = 0$. Da $z(t) \not\equiv 0$ gilt, liefert dies wiederum $\alpha_1 = 0$, was sofort $\alpha_2 = 0$ impliziert und damit die lineare Unabhängigkeit der Funktionen x und y beweist. \square

Im Prinzip lässt sich das Reduktionsverfahren von d'Alembert rekursiv anwenden: Hat man eine nichttriviale Lösung des n -dimensionalen Systems $y' = A(t)y$ vorliegen, lässt sich das Problem auf die Lösung eines nur noch $(n-1)$ -dimensionalen Systems $z' = B(t)z$ reduzieren. Kennt man hiervon wieder eine Lösung, erhält man auf analoge Weise ein wiederum um eine Dimension verringertes System usw. In der Praxis wird man das Reduktionsverfahren von d'Alembert allerdings nur für den Fall $n = 2$ anwenden. Das reduzierte System ist dann eine skalare lineare Differentialgleichung, die sich mit den Methoden aus dem Abschnitt 2.1 lösen lässt. Wir illustrieren die allgemeine Vorgehensweise an einem Beispiel.

Beispiel 4.10 Betrachte das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{t}y_1 - y_2, \\ y_2' &= \frac{1}{t^2}y_1 + \frac{2}{t}y_2. \end{aligned}$$

Man bestätigt sehr leicht, dass

$$y(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$$

eine Lösung ist. Für diese ist $y_1(t) = t^2 \neq 0$ für alle $t \in I$ mit dem (zum Beispiel) Intervall $I := (0, +\infty)$. Das gemäß Satz 4.9 reduzierte System $z' = B(t)z$ lautet daher

$$z' = \frac{1}{t}z$$

und besitzt etwa die Lösung $z(t) = z_2(t) = t$. Als Stammfunktion von

$$\eta'(t) = -\frac{1}{t}$$

aus (4.8) erhält man beispielsweise

$$\eta(t) = -\log(t) \quad \forall t \in I.$$

Wegen Satz 4.9 erhalten wir als zweite Lösung des Differentialgleichungssystems damit

$$x(t) = -\log t \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \log t \\ t \log t + t \end{pmatrix},$$

von der man sofort verifiziert, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt. ◇

Hat man nun ein Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n der homogenen Differentialgleichung $y' = A(t)y$ vorliegen und definiert die zugehörige Matrix $Y(t)$ gemäß (4.3), so gelingt die Bestimmung einer partikulären Lösung wie im skalaren Fall mittels der Methode der *Variation der Konstanten*. Diese benutzt als Idee wieder die Tatsache, dass sich jede Lösung von $y' = A(t)y$ schreiben lässt als $y(t) = Y(t)\alpha$ mit einem konstanten Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Um zu

einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems zu gelangen, fassen wir α als differenzierbare Funktion von t auf. Wir machen also den Ansatz

$$y_p(t) := Y(t)\alpha(t)$$

mit einer noch näher zu spezifizierenden Funktion $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Differentiation liefert dann

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= Y'(t)\alpha(t) + Y(t)\alpha'(t) \\ &= A(t)Y(t)\alpha(t) + Y(t)\alpha'(t) \\ &= A(t)y_p(t) + Y(t)\alpha'(t). \end{aligned}$$

Also ist y_p genau dann eine Lösung des inhomogenen Systems $y' = A(t)y + g(t)$, wenn

$$Y(t)\alpha'(t) = g(t) \quad \text{für alle } t \in I$$

gilt. Da $Y(t)$ für alle $t \in I$ regulär ist, liefert dies

$$\alpha'(t) = Y(t)^{-1}g(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Komponentenweise Integration ergibt somit

$$\alpha(t) = C + \int_{t_0}^t Y(s)^{-1}g(s)ds \quad \text{für alle } t \in I$$

mit einer Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}^n$. Somit ist

$$y_p(t) = Y(t)\alpha(t) = Y(t)C + Y(t) \int_{t_0}^t Y(s)^{-1}g(s)ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Die Konstante C berechnet sich aus der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ zu

$$y_0 = y_p(t_0) = Y(t_0)C \quad \Longleftrightarrow \quad C = Y(t_0)^{-1}y_0.$$

Wir fassen unsere Ausführungen in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 4.11 *Sei $Y(t)$ die Fundamentalmatrix eines beliebigen Fundamentalsystems des homogenen Problems $y' = A(t)y$. Dann ist*

$$y(t) = Y(t) \left[Y(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^t Y(s)^{-1}g(s)ds \right] \quad \text{für alle } t \in I$$

die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = A(t)y + g(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Aus dem Beweis des Satzes 4.4 ist klar, wie man die Spalten $y_k(t)$ einer Fundamentalmatrix erhält: Man wähle eine beliebige Basis b_1, \dots, b_n des \mathbb{R}^n und bestimme $y_k(t)$ als eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $y' = A(t)y, y(t_0) = b_k$. Die sich speziell durch die Wahl von $b_k = e_k$ (e_k bezeichnet hierbei den k -ten Einheitsvektor im \mathbb{R}^n) ergebende Wahl der Basis liefert die so genannte *Haupt-Fundamentalmatrix* oder *Übergangsmatrix*, wobei wir den zweitgenannten Begriff noch erläutern müssen.

Sei dazu $Y(t)$ eine beliebige Fundamentalmatrix der linearen Differentialgleichung $y' = A(t)y$. Die im Satz 4.11 angegebene Lösungsformel scheint zunächst von der Wahl der Fundamentalmatrix $Y(t)$ (bzw. des zugehörigen Fundamentalsystems) abzuhängen. Tatsächlich ist dies nicht der Fall. Wähle hierzu eine weitere Fundamentalmatrix $\tilde{Y}(t)$ von $y' = A(t)y$. Dann ist wegen Satz 4.11 (mit $g \equiv 0$) sowohl die Funktion

$$y(t) := Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0$$

als auch die Abbildung

$$\tilde{y}(t) := \tilde{Y}(t)\tilde{Y}(t_0)^{-1}y_0$$

eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = A(t)y, y(t_0) = y_0$. Die Lösung eines solchen Anfangswertproblems ist aber eindeutig. Da $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ hierbei beliebig sein können, ergibt sich hieraus unmittelbar

$$Y(t)Y(t_0)^{-1} = \tilde{Y}(t)\tilde{Y}(t_0)^{-1}$$

für alle $t, t_0 \in I$. Die von dem speziellen Fundamentalsystem daher unabhängige Matrix

$$\Lambda(t, t_0) := Y(t)Y(t_0)^{-1}$$

heißt *Übergangsmatrix* und stimmt gerade mit der weiter oben eingeführten Haupt-Fundamentalmatrix überein, denn einerseits bilden die Spalten von $\Lambda(t, t_0)$ offenbar ein Fundamentalsystem von $y' = A(t)y$, andererseits ist $\Lambda(t_0, t_0) = I$, die k -te Spalte von $\Lambda(t, t_0)$ löst also gerade das Anfangswertproblem $y' = A(t)y, y(t_0) = e_k$ für $k = 1, \dots, n$. Mittels der Übergangsmatrix lässt sich die Lösungsformel aus dem Satz 4.11 auch schreiben als

$$y(t) = \Lambda(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \Lambda(t, s)g(s)ds$$

für alle $t \in I$.

4.2 Die Matrix-Exponentialfunktion

Dieser Abschnitt führt ein mehr technisches Hilfsmittel ein, das mit Differentialgleichungen zunächst nur sehr wenig zu tun hat, ab dem nächsten Abschnitt jedoch massiv zur Untersuchung von gewissen Klassen von linearen Differentialgleichungen benutzt wird.

Dazu bezeichnen wir in diesem gesamten Abschnitt mit dem Symbol $\|\cdot\|$ eine beliebige (aber feste) Vektornorm im \mathbb{R}^n sowie mit

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \text{für } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die zugehörige (induzierte) Matrixnorm im $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Wir wollen im Folgenden den Ausdruck e^A für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sinnvoll definieren. Sei dazu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig und setze

$$s_k(A) := I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^k \frac{A^\ell}{\ell!}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Aus den im Lemma 3.5 genannten Eigenschaften der induzierten Matrixnorm folgt dann für $k > m$ unmittelbar

$$\begin{aligned} \|s_k(A) - s_m(A)\| &= \left\| \frac{A^{m+1}}{(m+1)!} + \dots + \frac{A^k}{k!} \right\| \\ &\leq \frac{\|A^{m+1}\|}{(m+1)!} + \dots + \frac{\|A^k\|}{k!} \\ &\leq \frac{\|A\|^{m+1}}{(m+1)!} + \dots + \frac{\|A\|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\|A\|^{m+\ell}}{(m+\ell)!}. \end{aligned}$$

Nun gilt bekanntlich

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} = e^t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

insbesondere konvergiert diese Reihe (absolut) für alle $t \in \mathbb{R}$. Also gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} = 0,$$

denn die Reihenreste bei konvergenten Reihen werden beliebig klein. Somit existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{t^{m+\ell}}{(m+\ell)!} = \sum_{\ell=m+1}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n_0.$$

Daher existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ auch ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|s_k(A) - s_m(A)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } k > m \geq n_0.$$

Also ist $\{s_k(A)\}$ ein Cauchy-Folge in dem vollständigen Raum $(\mathbb{R}^{n \times n}, \|\cdot\|)$ und deshalb konvergent (sogar absolut). Aus diesem Grund ist die folgende Definition der Matrix-Exponentialfunktion sinnvoll.

Definition 4.12 Für jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ setzen wir

$$e^A := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Entsprechend definieren wir für $t \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

und nennen die Abbildung $t \mapsto e^{tA}$ die **Matrix-Exponentialfunktion**.

In einigen Fällen lässt sich der Ausdruck e^A leicht berechnen. Wir betrachten dazu einige Beispiele.

Beispiel 4.13 (a) Ist $A = (a) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, so stimmt e^A mit der üblichen Definition der Exponentialfunktion überein.

(b) Ist $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix, so ist

$$D^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Für e^A erhalten wir daher

$$e^D = \text{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n}).$$

(c) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, so existieren aufgrund des Spektralsatzes eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ mit $A = QDQ^T$. Wegen $(QDQ^T)^k = QD^kQ^T$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt dann

$$e^A = e^{QDQ^T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(QDQ^T)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{QD^kQ^T}{k!} = Q \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \right) Q^T = Qe^DQ^T,$$

wobei e^D wie in Teil (b) gegeben ist.

(d) Handelt es sich bei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ um eine **nilpotente Matrix** vom Index m , gilt also $A^{m-1} \neq 0$ und $A^m = 0$, so bricht die unendliche Reihe in der Definition von e^A nach endlich vielen Summationen ab, und wir haben

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Beispielsweise ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wegen

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nilpotent vom Index 2. ◇

Wir formulieren als Nächstes eine Reihe von wichtigen Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion. Man beachte dabei insbesondere die Analogie zu den entsprechenden Eigenschaften der skalaren Exponentialfunktion.

Satz 4.14 (a) Es ist $e^0 = I$, wobei $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Nullmatrix bezeichnet.

(b) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei kommutierende Matrizen, gilt also $AB = BA$, so ist

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

(c) Die Matrix e^A ist für jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

(d) Die Abbildung $t \mapsto e^{tA}$ mit festem $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

(e) Es ist

$$\det(e^A) = e^{\text{Spur}(A)} \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

wobei $\text{Spur}(A) := a_{11} + \dots + a_{nn}$ die Spur von A bezeichnet.

(f) Für jede reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist

$$e^{BAB^{-1}} = B e^A B^{-1}.$$

Beweis: Die Behauptung (a) ist nach Definition von $s_k(A)$ klar.

(b) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $AB = BA$ gegeben. Dann berechnen wir mit Hilfe des Cauchy-Produktes für (absolut konvergente) Reihen

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{A^l}{l!} \frac{B^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} A^l B^{k-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \\ &= e^{A+B}. \end{aligned}$$

Dabei können wir in der vorletzten Gleichung den binomischen Lehrsatz anwenden, da die Matrizen A und B nach Voraussetzung kommutieren.

(c) Zunächst ist $(A)(-A) = -A^2 = (-A)(A)$. Nach (b) ist demnach

$$e^{A+(-A)} = e^A e^{-A}.$$

Andererseits ist nach (a)

$$e^{A+(-A)} = e^{A-A} = e^0 = I,$$

woraus die Behauptung folgt.

(d) Offensichtlich ist für $t, h \in \mathbb{R}$ die Relation $(tA)(hA) = (hA)(tA)$ erfüllt, d.h., die beiden Matrizen tA und hA kommutieren. Folglich ist wegen Teil (b)

$$\begin{aligned} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} &= \frac{e^{(tA)+(hA)} - e^{tA}}{h} \\ &= \frac{e^{hA} - I}{h} e^{tA} \\ &= A \left(I + \frac{hA}{2!} + \frac{h^2 A^2}{3!} + \dots \right) e^{tA} \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = A e^{tA},$$

insbesondere existiert also der Differentialquotient.

(e) Den Beweis dieses (im Folgenden nicht weiter benötigten) Teils überlassen wir dem Leser aus Übung.

(f) Aus

$$(BAB^{-1})^2 = BAB^{-1}BAB^{-1} = BA^2B^{-1}$$

ergibt sich induktiv die Gültigkeit von

$$(BAB^{-1})^k = BA^k B^{-1} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

woraus mit der Stetigkeit der Abbildung $A \mapsto BAB^{-1}$ unmittelbar

$$e^{BAB^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(BAB^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{BA^k B^{-1}}{k!} \right) = B \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) B^{-1} = B e^A B^{-1}$$

folgt. □

Einfache Beispiele zeigen, dass man im Satz 4.14 (b) nicht auf die Kommutativität der beiden Matrizen A und B verzichten kann (Aufgabe).

Wegen Satz 4.14 hat die Matrix-Exponentialfunktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad F(t) := e^{tA},$$

insbesondere die beiden Eigenschaften

$$\frac{d}{dt}F(t) = AF(t) \quad \text{und} \quad F(0) = I. \quad (4.9)$$

Hierdurch ist die Matrix-Exponentialfunktion bereits eindeutig bestimmt, denn es gilt das nachstehende Resultat, das im nächsten Abschnitt dann noch eine gewisse Rolle spielen wird.

Satz 4.15 *Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit den beiden Eigenschaften (4.9). Dann gilt $F(t) = e^{tA}$.*

Beweis: Betrachte die Funktion $g(t) := e^{-tA}F(t)$. Dann ist wegen Satz 4.14

$$g'(t) = -Ae^{-tA}F(t) + e^{-tA}F'(t) = -e^{-tA}AF(t) + e^{-tA}AF(t) = 0.$$

Also ist $g(t)$ konstant, wegen $g(0) = e^{-0}F(0) = I$ gilt daher $g(t) = I$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies impliziert $F(t) = e^{tA}$, und zwar erneut wegen Satz 4.14. \square

Die Definition des Ausdrucks e^A und alle diesbezüglichen Aussagen gelten übrigens auch für komplexe Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die Beweise können hierfür wörtlich übernommen werden. Wir erwähnen diese leichte Verallgemeinerung an dieser Stelle, da später aufgrund von eventuell komplexen Eigenwerten durchaus komplexe Matrizen im Zusammenhang mit der Matrix-Exponentialfunktion auftreten.

4.3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten in diesem Abschnitt lineare Differentialgleichungssysteme der Gestalt

$$y' = Ay + g(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (4.10)$$

mit einer stetigen Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Insbesondere beschäftigen wir uns mit der Frage, wie man eine Fundamentallösung für das homogene System

$$y' = Ay \quad (4.11)$$

erhält, denn hieraus lässt sich mittels Variation der Konstanten sofort die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems bestimmen, vergleiche die Ausführungen am Ende des Abschnitts 4.1.

Aufgrund des Satzes 4.14 ist $Y(t) := e^{tA}$ eine Haupt-Fundamentalmatrix von (4.11). Wir halten dieses Ergebnis formal in dem folgenden Resultat fest.

Satz 4.16 *Das homogene lineare Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ besitzt die Haupt-Fundamentalmatrix $Y(t) := e^{tA}$, die Spalten von e^{tA} bilden also ein Fundamentalsystem.*

Aus den Sätzen 4.11 und 4.16 erhalten wir unmittelbar die nachstehende Darstellung für die Lösung des inhomogenen Systems mit konstanten Koeffizienten.

Satz 4.17 *Die Lösung des linearen Anfangswertproblems (4.10) lässt sich mittels der Matrix-Exponentialfunktion schreiben als*

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}g(s)ds.$$

Der Satz 4.17 wird für uns das zentrale Resultat zur Gewinnung einer Lösung des Problems (4.10) darstellen. Bevor wir hierauf jedoch näher eingehen, betrachten wir zwecks Motivation zunächst einen Spezialfall. Dabei lassen wir uns von der Tatsache leiten, dass bei linearen Differentialgleichungen Lösungen stets in Form von Exponentialfunktionen auftraten. Deshalb probieren wir hier ebenfalls den Ansatz

$$y(t) := e^{\lambda t}v \quad (4.12)$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$ sowie $v \in \mathbb{C}^n$ (beachte, dass wir sowohl λ als auch v hier komplex wählen). Einsetzen in die Differentialgleichung liefert die Bedingung

$$\lambda e^{\lambda t}v = y'(t) = Ay(t) = e^{\lambda t}Av.$$

Division durch $e^{\lambda t} \neq 0$ ergibt somit $Av = \lambda v$. Also ist $y(t) = e^{\lambda t}v$ genau dann eine Lösung von $y' = Ay$, wenn λ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v ist (dies erklärt nachträglich, warum wir in unserem Ansatz (4.12) auch komplexe Werte für λ zulassen, denn reelle Matrizen können durchaus komplexe Eigenwerte haben). Besitzt A daher n linear unabhängige Eigenvektoren, so erhalten wir auf diese Weise ein Fundamentalsystem. Damit haben wir das folgende Resultat bewiesen.

Satz 4.18 *Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitze n linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann bilden die Funktionen*

$$y_k(t) := e^{\lambda_k t}v_k \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

Das Ergebnis des Satzes 4.18 lässt sich auch mittels des Satzes 4.17 und den Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion gewinnen: Unter den im Satz 4.18 genannten Voraussetzungen ist die Matrix A diagonalisierbar, also $A = SDS^{-1}$ mit der Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und einer Matrix $S = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, deren Spalten v_k gerade die Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_k sind. Dann ist

$$y' = Ay \iff y' = SDS^{-1}y \iff z' = Dz \quad \text{mit } z(t) := S^{-1}y(t).$$

Aus dem Satz 4.16 und den Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion folgt, dass die Abbildungen

$$z_k(t) := Z(t)e_k = e^{tD}e_k = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} e_k = e^{t\lambda_k}e_k$$

für $k = 1, \dots, n$ ein Fundamentalsystem von $z' = Dz$ bilden. Durch Rücktransformation erhalten wir hieraus das Fundamentalsystem

$$y_k(t) := Sz_k(t) = e^{t\lambda_k}Se_k = e^{t\lambda_k}v_k$$

für $k = 1, \dots, n$ von $y' = Ay$ aus dem Satz 4.18.

Dieses so gefundene Fundamentalsystem hat allerdings zwei Nachteile:

- Ist λ_k bzw. v_k komplex, so liefert die zugehörige Funktion $y_k(t) = e^{\lambda_k t}v_k$ eine komplexe Lösung der reellen Differentialgleichung $y' = Ay$.
- Eine reelle Matrix besitzt im Allgemeinen keine n linear unabhängigen Eigenvektoren. Dies ist genau dann der Fall, wenn A diagonalisierbar ist, anderenfalls kann man den Satz 4.18 nicht anwenden.

Diese beiden Nachteile treten beispielsweise bei symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht auf. In diesem Fall gibt es n linear unabhängige (sogar orthonormale) Eigenvektoren zu n reellen (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten. Nun wird die Matrix A in den meisten Anwendungen leider nicht symmetrisch sein, so dass es zur Vermeidung der beiden obigen Nachteile weiterer Überlegungen bedarf.

Sei zunächst $\lambda = \mu + i\nu$ mit $\nu \neq 0$ ein nicht-reeller Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit zugehörigem Eigenvektor $v = u + iw$, $u, w \in \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor \bar{v} . Wir erhalten im Satz 4.18 somit die beiden komplexen Lösungen

$$y(t) = e^{\lambda t}v \quad \text{und} \quad z(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{v}.$$

Durch die Setzungen

$$\begin{aligned} y_1(t) &:= \Re(y(t)) = e^{\mu t}(\cos(\nu t)u - \sin(\nu t)w), \\ y_2(t) &:= \Im(y(t)) = e^{\mu t}(\sin(\nu t)u + \cos(\nu t)w) \end{aligned}$$

erhalten wir hieraus zwei reelle Lösungen von $y' = Ay$, die linear unabhängig sind, was wir in dem folgenden Resultat zeigen (alternativ könnte man auch den Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung z wählen).

Lemma 4.19 *Die beiden gerade definierten Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ sind zwei reelle und linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$.*

Beweis: Offenbar sind mit y auch der Realteil y_1 und der Imaginärteil y_2 Lösungen von $y' = Ay$, wie man unmittelbar durch Einsetzen in die Differentialgleichung sowie Vergleich von Real- und Imaginärteil erkennt.

Zu zeigen bleibt somit nur die lineare Unabhängigkeit der beiden Abbildungen y_1 und y_2 . Seien dazu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gegebene Skalare mit

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dies lässt sich nach Umordnung der Terme schreiben als

$$(\alpha_1 \cos(\nu t) + \alpha_2 \sin(\nu t))u + (\alpha_2 \cos(\nu t) - \alpha_1 \sin(\nu t))w = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir hier zum einen $t = 0$ und zum anderen $t = \frac{\pi}{2\nu}$ (nach Voraussetzung ist $\nu \neq 0$) ein, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\alpha_1 u + \alpha_2 w = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_2 u - \alpha_1 w = 0.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit α_2 und die zweite Gleichung mit α_1 , so bekommen wir

$$\alpha_1 \alpha_2 u + \alpha_2^2 w = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 \alpha_2 u - \alpha_1^2 w = 0.$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)w = 0.$$

Wegen $w \neq 0$ (sonst müsste λ nämlich doch ein reeller Eigenwert sein) folgt hieraus $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und damit die behauptete lineare Unabhängigkeit von y_1 und y_2 . \square

Auf die gerade beschriebene Weise verfährt man mit jedem Paar von konjugiert-komplexen Eigenwerten bzw. -vektoren im Satz 4.18. Hinzu kommen die Lösungen $y(t) = e^{\lambda t}v$, die zu reellen Eigenwerten λ und (ohne Einschränkung) reellen Eigenvektoren v gehören. Besitzt die Matrix A somit n linear unabhängige Eigenvektoren, so erhalten wir mit dem Satz 4.18 und den obigen Überlegungen ein reelles Fundamentalsystem.

Kommen wir nun zur Behandlung des zweiten Nachteils. Die Matrix A möge also keine n linear unabhängigen Eigenvektoren haben, ist also nicht diagonalisierbar. Dann können wir A immer noch auf Jordansche Normalform transformieren. Wir erinnern hierzu an dieses zentrale Resultat aus der linearen Algebra.

Satz 4.20 (*Jordansche Normalform*)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Dann existiert eine reguläre (unter Umständen komplexe) Matrix S , so dass die Matrix $J = S^{-1}AS$ von so genannter Jordanscher Normalform ist, d.h., J ist eine Block-Diagonalmatrix der Gestalt

$$J = \text{diag}\left(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_r}(\lambda_r)\right)$$

mit $n_1 + \dots + n_r = n$ und den so genannten **Jordan-Blöcken**

$$J_k := J_{n_k}(\lambda_k) := \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k} \quad (4.13)$$

für $k = 1, \dots, r$. (Die λ_k sind dabei natürlich die Eigenwerte der Matrix A .)

Um das homogene Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ für eine im Allgemeinen nicht diagonalisierbare Matrix A lösen zu können, gehen wir im Prinzip wie im Anschluss an den Satz 4.18 vor und verwenden statt der Diagonalisierbarkeit von A die Jordansche Normalform $A = SJS^{-1}$ mit J, S wie im Satz 4.20. Dann gilt

$$y' = Ay \iff y' = SJS^{-1}y \iff z' = Jz \quad \text{mit } z(t) := S^{-1}y(t). \quad (4.14)$$

Aufgrund der speziellen Gestalt der Matrix J zerfällt das System $z' = Jz$ dabei in die r voneinander unabhängigen Differentialgleichungssysteme

$$z'_k = J_k z_k \quad \forall k = 1, \dots, r, \quad (4.15)$$

wobei $J_k = J_{n_k}(\lambda_k)$ den Jordan-Block aus (4.13) bezeichnet und die Abbildung z entsprechend in die Block-Komponenten $z = (z_1, \dots, z_r)$ mit $z_k(t) \in \mathbb{R}^{n_k}$ ($k = 1, \dots, r$) zerlegt wurde. Wegen Satz 4.16 bilden die Spalten der zugehörigen Fundamentalmatrix

$$Z_k(t) := e^{tJ_k}$$

dann ein Fundamentalsystem von (4.15), so dass wir einen möglichst einfachen Ausdruck für e^{tJ_k} suchen. Dieser wird durch das folgende Resultat geliefert.

Satz 4.21 Für einen Jordan-Block $J_k = J_{n_k}(\lambda_k) \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k}$ gemäß (4.13) gilt

$$e^{tJ_k} = e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Beweis: Wir bezeichnen die rechte Seite in (4.16) mit $F(t)$. Wegen Satz 4.15 genügt es wegen $F(0) = I$ zu zeigen, dass $F'(t) = J_k F(t)$ gilt. Mit

$$\frac{d}{dt} \frac{t^j}{j!} = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$$

folgt aus der Produktregel aber sofort

$$\begin{aligned}
 F'(t) &= \lambda_k F(t) + e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & t \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} F(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} F(t) \\
 &= J_k F(t),
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

Zur Illustration der bisherigen Resultate betrachten wir eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, deren Jordansche Normalform die Gestalt

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ \hline & & & \lambda_2 & \\ \hline & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & \lambda_3 \end{array} \right)$$

habe mit gewissen (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. In diesem Fall liegen also drei Jordan-Blöcke vor. Wegen Satz 4.21, angewandt auf jeden dieser drei Jordan-Blöcke, erhalten wir für das transformierte System $z' = Jz$ die Fundamentalmatrix

$$Z(t) = \left(\begin{array}{ccc|cc} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & \\ & & e^{\lambda_1 t} & & \\ \hline & & & e^{\lambda_2 t} & \\ \hline & & & & e^{\lambda_3 t} & te^{\lambda_3 t} \\ & & & & & e^{\lambda_3 t} \end{array} \right),$$

deren Spalten das gewünschte Fundamentalsystem von $z' = Jz$ liefern. Durch Rücktransformation

$$Y(t) := SZ(t)$$

erhält man hieraus eine Fundamentalmatrix des Ausgangssystems $y' = Ay$. Die Spalten sind gegeben durch $y_k(t) = Y(t)e_k = SZ(t)e_k = Sz_k(t)$. Zur Berechnung des Fundamentalsystems $y_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) benötigt man neben den Eigenwerten λ_k somit auch die

Spalten der Matrix S . Im Falle einer diagonalisierbaren Matrix handelt es sich dabei gerade um die Eigenvektoren von A , im Allgemeinen kommen zu den Eigenvektoren auch noch so genannte Hauptvektoren hinzu.

Wir erinnern daher an dieser Stelle an einige weitere Tatsachen aus der linearen Algebra. Unter einem **Hauptvektor** der Stufe p zum Eigenwert λ von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ versteht man einen (eventuell komplexen) Vektor v mit der Eigenschaft

$$(A - \lambda I)^p v = 0 \quad \text{und} \quad (A - \lambda I)^{p-1} v \neq 0.$$

Ein Hauptvektor der Stufe $p = 1$ ist daher gerade ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Eine **Jordan-Kette** ist eine Folge von Vektoren v_1, \dots, v_k mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)v_1 &= 0, \quad v_1 \neq 0, \\ (A - \lambda I)v_{i+1} &= v_i \quad \forall i = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Die Elemente v_1, \dots, v_k einer solchen Jordan-Kette sind offenbar linear unabhängig, und der Vektor v_i ist dabei ein Hauptvektor der Stufe i zum Eigenwert λ . Mittels einer solchen Jordan-Kette lassen sich also Eigen- und Hauptvektoren berechnen, wobei diese allerdings nicht eindeutig bestimmt sind, da die Matrix $A - \lambda I$ singulär ist.

Wir illustrieren die Ergebnisse dieses Abschnittes an einem Beispiel.

Beispiel 4.22 Betrachte die homogene Differentialgleichung

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Zunächst bestimmt man die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$. Im vorliegenden Fall hat dieses die Gestalt $p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2$. Folglich ist $\lambda_1 := 0$ ein einfacher Eigenwert und $\lambda_2 := 1$ ein doppelter Eigenwert. Aus der Gleichung $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$ erhält man beispielsweise den Eigenvektor $v_1 = (1, 0, 1)^T$. Entsprechend ergibt sich aus der Gleichung $(A - \lambda_2 I)v_2 = 0$ der Eigenvektor $v_2 = (4, 4, 6)^T$, und es existiert kein weiterer hierzu linear unabhängiger Eigenvektor, so dass die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ_2 in diesem Fall echt kleiner ist als die algebraische Vielfachheit. Wir benötigen daher noch einen Hauptvektor der Stufe 2 zum Eigenwert λ_2 . Nach den obigen Ausführungen erhalten wir einen solchen aus dem Ansatz $(A - \lambda_2 I)v_3 = v_2$. Beispielsweise erhält man hieraus $v_3 = (0, 4, 1)^T$.

Aus diesen Ausführungen ergibt sich insbesondere, dass die Matrix A die Jordansche Normalform

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

besitzt. Die Lösung des zu $y' = Ay$ gemäß (4.14) äquivalenten transformierten Systems $z' = Jz$ ist wegen

$$Z(t) = e^{tJ} = \left(\begin{array}{c|cc} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{\lambda_2 t} & t e^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array} \right)$$

gegeben durch

$$z_1(t) := e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_2(t) := e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_3(t) := t e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $S := (v_1, v_2, v_3)$ erhalten wir somit aus $y_k := S z_k$ für $k = 1, 2, 3$ das Fundamentalsystem

$$y_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) := e^t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad y_3(t) := e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right]$$

für die gegebene Differentialgleichung (4.17). \diamond

Treten bei der obigen Berechnung wieder (konjugiert-) komplexe Lösungen auf (etwa durch komplexe Eigenwerte), so erhält man in Analogie zur Argumentation beim Lemma 4.19 durch den Übergang auf Real- und Imaginärteil wieder zwei reelle Lösungen.

4.4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eine *lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung* hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b(t) \quad (4.18)$$

mit gewissen stetigen Funktionen $a_i, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind. Speziell für $b \equiv 0$ spricht man von einer *homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung*, anderenfalls von einer *inhomogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung*.

Wegen Satz 1.15 ist (4.18) äquivalent zu dem linearen Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$y' = A(t)y + g(t) \quad (4.19)$$

mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad g(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

und

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & \dots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Aus den Sätzen 4.1 und 4.4 erhalten wir somit das folgende Existenz- und Eindeutigkeitsresultat.

Satz 4.23 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein gegebenes Intervall und $a_i, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Die Menge aller Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung bildet einen Vektorraum der Dimension n .*
- (b) *Jede Lösung y von (4.18) hat die Gestalt $y = y_h + y_p$, wobei y_h eine beliebige Lösung der homogenen Differentialgleichung und y_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4.18) ist.*
- (c) *Das zugehörige Anfangswertproblem*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b(t), y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

hat für beliebig vorgegebene Werte $t_0 \in I$ und $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ genau eine (auf ganz I definierte) Lösung.

Sei als Nächstes $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix des zu (4.18) gehörenden Systems (4.19) mit y, g, A gemäß (4.20), (4.21). Ferner bezeichnen wir mit $w(t) := \det Y(t)$ wieder die entsprechende Wronski-Matrix. Aufgrund der speziellen Gestalt von $A(t)$ in (4.21) ist $\text{Spur} A(t) = -a_{n-1}(t)$. Wegen Satz 4.8 lautet die **Formel von Liouville** daher

$$w' = -a_{n-1}(t)w.$$

Sind y_1, \dots, y_n linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung n -ter Ordnung aus (4.18), so hat die Fundamentalmatrix $Y(t)$ des zugehörigen Systems (4.19) erster Ordnung aufgrund des Zusammenhangs aus dem Satz 1.15 offenbar die Gestalt

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Man beachte in diesem Zusammenhang, dass die Spalten von $Y(t)$ offenbar genau dann linear unabhängig sind, wenn die Funktionen y_1, \dots, y_n dies sind. Speziell für $n = 2$ halten wir an dieser Stelle noch fest, dass die Wronski-Determinante somit die Gestalt

$$w(t) = \det Y(t) = y_1(t)y'_2(t) - y_2(t)y'_1(t) \quad (4.23)$$

hat, die wir später noch mehrfach verwenden werden.

Entsprechend lassen sich alle anderen Resultate des Abschnitts 4.1 übertragen, indem man sich das zugehörige System erster Ordnung anschaut. Insbesondere lässt sich eine partikuläre Lösung y_p wieder durch Variation der Konstanten bestimmen.

Wir gehen im Folgenden noch auf die Bestimmung eines Fundamentalsystems für eine *lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) näher ein. Da dieser Spezialfall sehr wichtig ist, wollen wir die nachstehenden Ausführungen unabhängig von den Ergebnissen des Abschnitts 4.3 führen.

Um eine Lösung des homogenen Problems

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \quad (4.24)$$

zu erhalten, machen wir den Exponentialansatz

$$y(t) := e^{\lambda t} \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Die Ableitungen dieser Funktion sind gegeben durch

$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}, y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}, \dots, y^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t}.$$

Einsetzen der Funktion $y(t) = e^{\lambda t}$ in (4.24) liefert daher

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0$$

und somit

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

wegen $e^{\lambda t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das gerade definierte Polynom p nennt man das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung (4.24). Diese Namensgebung ist deshalb gerechtfertigt, da p offenbar gerade das (im üblichen Sinne) charakteristische Polynom derjenigen Matrix $A = A(t)$ ist, das man bei der Umformulierung unserer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung in ein System erster Ordnung erhält, vergleiche (4.21).

Um eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (4.24) durch den Exponentialansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ zu erhalten, benötigen wir also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt dieses genau n Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Sind diese alle verschieden, so sind die Abbildungen

$$y_1(t) := e^{\lambda_1 t}, y_2(t) := e^{\lambda_2 t}, \dots, y_n(t) := e^{\lambda_n t}$$

offenbar linear unabhängig (Beweis als Aufgabe!) und spannen daher den Lösungsraum von (4.24) auf, bilden also ein Fundamentalsystem, sofern alle λ_i reell sind. Ist eines der λ_i komplex, so ist auch $\bar{\lambda}_i$ eine Nullstelle, und wir erhalten aus $e^{\lambda_i t}, e^{\bar{\lambda}_i t}$ zwei reelle Lösungen durch den Übergang auf Real- und Imaginärteil einer dieser beiden komplexen Lösungen. Ist eines der λ_i hingegen eine mehrfache Nullstelle von p , so sind die zugehörigen Lösungen y_i natürlich linear abhängig und können daher kein Fundamentalsystem bilden. Hier hilft die folgende Beobachtung: Gilt $\lambda_i = \lambda_{i+1}$, so sind die beiden Funktionen

$$y_i(t) := e^{\lambda_i t}, y_{i+1}(t) := te^{\lambda_i t}$$

linear unabhängige Lösungen von (4.24). Ist sogar $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2}$, so erhalten wir mit den Abbildungen

$$y_i(t) := e^{\lambda_i t}, y_{i+1}(t) := te^{\lambda_i t}, y_{i+2}(t) := t^2 e^{\lambda_i t}$$

linear unabhängige Lösungen von (4.24). Ganz allgemein gilt das folgende Resultat.

Satz 4.24 *Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung (4.24) mit konstanten Koeffizienten. Sei p das zugehörige charakteristische Polynom mit den reellen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ mit Vielfachheiten n_1, \dots, n_p und den Paaren von konjugiert-komplexen Nullstellen $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_q, \bar{\mu}_q$ mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_q . Dann bildet die Menge der $n := n_1 + \dots + n_p + 2m_1 + \dots + 2m_q$ Funktionen*

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ &e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{n_2-1} e^{\lambda_2 t}, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &e^{\lambda_p t}, te^{\lambda_p t}, \dots, t^{n_p-1} e^{\lambda_p t} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\Re(e^{\mu_1 t}), \Im(e^{\mu_1 t}), \Re(te^{\mu_1 t}), \Im(te^{\mu_1 t}), \dots, \Re(t^{m_1-1} e^{\mu_1 t}), \Im(t^{m_1-1} e^{\mu_1 t}), \\ &\Re(e^{\mu_2 t}), \Im(e^{\mu_2 t}), \Re(te^{\mu_2 t}), \Im(te^{\mu_2 t}), \dots, \Re(t^{m_2-1} e^{\mu_2 t}), \Im(t^{m_2-1} e^{\mu_2 t}), \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &\Re(e^{\mu_q t}), \Im(e^{\mu_q t}), \Re(te^{\mu_q t}), \Im(te^{\mu_q t}), \dots, \Re(t^{m_q-1} e^{\mu_q t}), \Im(t^{m_q-1} e^{\mu_q t}) \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von (4.24).

Beweis: Wir skizzieren hier einen Beweis des Resultates, der unabhängig von früheren Ergebnissen ist. Zunächst folgt aus unseren obigen Betrachtungen sofort, dass die Funktionen $y_1(t) := e^{\lambda_1 t}, \dots, y_n(t) := e^{\lambda_n t}$ in der Tat reelle Lösungen von (4.24) sind, sofern die λ_i reell sind. Sind alle λ_i außerdem voneinander verschieden, so haben wir bereits n Lösungen vorliegen. Ist dies nicht der Fall und λ beispielsweise eine doppelte (reelle) Nullstelle von p , so gelten $p(\lambda) = 0$ und $p'(\lambda) = 0$. Ferner verifiziert man durch vollständige Induktion nach k unmittelbar, dass die Ableitungen der Funktion $y(t) := te^{\lambda t}$ gegeben sind durch

$$y^{(k)}(t) := (t\lambda^k + k\lambda^{k-1})e^{\lambda t} \quad \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

Einsetzen in die homogene Differentialgleichung liefert daher

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) \\ &= (t\lambda^n + n\lambda^{n-1})e^{\lambda t} + a_{n-1}(t\lambda^{n-1} + (n-1)\lambda^{n-2})e^{\lambda t} + \dots + a_1(t\lambda + 1)e^{\lambda t} + a_0te^{\lambda t} \\ &= t(\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0}_{=p(\lambda)=0})e^{\lambda t} + (\underbrace{n\lambda^{n-1} + (n-1)\lambda^{n-2} + \dots + a_1}_{=p'(\lambda)=0})e^{\lambda t} \\ &= 0, \end{aligned}$$

so dass $y(t) := te^{\lambda t}$ in diesem Fall tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung ist. Handelt es sich bei λ schließlich um eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so erkennt man durch Vergleich von Real- und Imaginärteil sehr leicht, dass sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von $e^{\lambda t}$ reelle Lösungen von (4.24) sind. Auf diese Weise sieht man ein, dass alle n angegebenen Abbildungen die Differentialgleichung (4.24) lösen. Damit bleibt nur noch deren lineare Unabhängigkeit zu zeigen, was wir dem Leser als Aufgabe überlassen wollen. \square

Für eine komplexe Nullstelle $\mu = a + ib$ des charakteristischen Polynoms p ist

$$e^{\mu t} = e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt))$$

und daher

$$\begin{aligned}\Re(t^r e^{\mu t}) &= t^r e^{at} \cos(bt), \\ \Im(t^r e^{\mu t}) &= t^r e^{at} \sin(bt).\end{aligned}$$

Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiel 4.25 (a) Die Differentialgleichung

$$y'''(t) - y''(t) + y'(t) - y(t) = 0$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$$

mit den Nullstellen 1 und $\pm i$. Wegen Satz 4.24 bilden die drei Funktionen

$$e^t, \cos(t), \sin(t)$$

somit ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Jede Lösung ist daher von der Gestalt

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t)$$

mit beliebigen Koeffizienten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0$$

ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

und besitzt die beiden konjugierten-komplexen Nullstellen $2 + 3i$ und $2 - 3i$. Folglich bilden die beiden Funktionen

$$e^{2t} \cos(3t), e^{2t} \sin(3t)$$

ein Fundamentalsystem.

(c) Die Differentialgleichung

$$y''(t) - 8y'(t) + 16y(t) = 0$$

hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 16$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = -4$. Wir bekommen somit das Fundamentalsystem

$$e^{-4t}, te^{-4t}$$

und daher die allgemeine Lösung

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-4t}$$

unserer Differentialgleichung. ◇

Wir gehen zum Abschluss dieses Abschnittes noch kurz auf die Methode der Variation der Konstanten für die Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(t) \quad (4.25)$$

mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ ein. Seien y_1, \dots, y_n linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems, definiere $g(t)$ gemäß (4.20) und $Y(t)$ wie in (4.22).

Satz 4.26 (*Variation der Konstanten*)

Unter Verwendung der gerade eingeführten Bezeichnungen bestimme man zunächst eine Lösung $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ von $Y(t)c(t) = g(t)$ und anschließend beliebige Stammfunktionen $C_1(t), \dots, C_n(t)$ von $c_1(t), \dots, c_n(t)$. Dann ist die Abbildung

$$y_p(t) := C_1(t)y_1(t) + \dots + C_n(t)y_n(t)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (4.25).

Beweis: Aus $Y(t)c(t) = g(t)$ sowie der Definition von $Y(t)$ und $g(t)$ folgt unmittelbar

$$\sum_{i=1}^n c_i(t)y_i^{(k)}(t) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-2 \quad (4.26)$$

und

$$\sum_{i=1}^n c_i(t)y_i^{(n-1)}(t) = b(t).$$

Die Definition von y_p liefert daher induktiv

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i(t),$$

$$\begin{aligned}
y_p'(t) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{C_i'(t)}_{=c_i(t)} y_i(t) + \sum_{i=1}^n C_i(t) y_i'(t) = \sum_{i=1}^n \underbrace{c_i(t) y_i(t)}_{=0 \text{ nach (4.26)}} + \sum_{i=1}^n C_i(t) y_i'(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) y_i'(t), \\
&\vdots \\
y_p^{(n-1)}(t) &= \sum_{i=1}^n C_i(t) y_i^{(n-1)}(t), \\
y_p^{(n)}(t) &= \sum_{i=1}^n C_i(t) y_i^{(n)}(t) + b(t).
\end{aligned}$$

Setzt man $y_p(t)$ nun in die Differentialgleichung ein, verwendet die Linearität dieser Differentialgleichung sowie die obigen Formeln, so ergibt sich in der Tat, dass $y_p(t)$ der Differentialgleichung genügt. \square

Wir illustrieren das obige Resultat an einem Beispiel.

Beispiel 4.27 Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'' + 4y' = e^{-4t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Offenbar sind

$$y_1(t) \equiv 1, \quad y_2(t) := e^{-4t}$$

zwei linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems. Gemäß Satz 4.26 bestimmen wir dann zunächst Lösungen $c_1(t), c_2(t)$ des Systems

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-4t} \\ 0 & -4e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Offenbar erhalten wir $c_1(t) \equiv \frac{1}{4}e^{-4t}$ und $c_2(t) \equiv -\frac{1}{4}$. Als Stammfunktionen können wir daher $C_1(t) := -\frac{1}{16}e^{-4t}$ und $C_2(t) := -\frac{1}{4}t$ wählen. Damit ergibt sich als partikuläre Lösung

$$y_p(t) = -\frac{1}{16}e^{-4t} - \frac{1}{4}te^{-4t}.$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems ist somit gegeben durch

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + y_p(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t} - \frac{1}{4}te^{-4t}$$

mit noch freien Parametern $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Anpassung dieser Parameter an die beiden Anfangsbedingungen liefert $\alpha_1 = \frac{5}{16}, \alpha_2 = -\frac{1}{4}$. Die gesuchte Lösung ist also gegeben durch

$$y(t) = \frac{5}{16} - \frac{1}{4}e^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t} - \frac{1}{4}te^{-4t},$$

wie man durch unmittelbares Nachrechnen auch sofort verifiziert. \diamond

4.5 Lineare Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten

Bislang haben wir gesehen, dass lineare Differentialgleichungen, seien es nun Systeme oder solche von höherer Ordnung, im Allgemeinen keine geschlossen angebbare Lösung besitzen, sofern die Koeffizienten nicht konstant sind. Handelt es sich bei den Koeffizienten allerdings nicht nur um stetige, sondern sogar um analytische Funktionen, so lassen sich die Lösungen ebenfalls in Potenzreihen entwickeln. Für den Spezialfall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung formulieren wir das Resultat in dem folgenden Satz.

Satz 4.28 *Gegeben sei die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (4.27)$$

mit Funktionen p, q , die beide in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt t_0 entwickelbar sind und einen Konvergenzradius $r > 0$ besitzen. Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung (4.27) ebenfalls in eine Potenzreihe um t_0 entwickelbar und hat mindestens den Konvergenzradius r .

Der Satz 4.28 gilt sinngemäß auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung sowie für Differentialgleichungssysteme. Auf einen Beweis verzichten wir an dieser Stelle (siehe beispielsweise [3]), da die nachfolgenden Beispiele implizit den Beweis enthalten: Er besteht von seiner Grundidee her aus einem zunächst formalen Rechnen mit Potenzreihen und dem anschließenden Nachweis, dass die als Lösungskandidat erhaltene Potenzreihe tatsächlich den gewünschten Konvergenzradius besitzt und der Differentialgleichung genügt. Wir illustrieren diese Vorgehensweise an zwei Beispielen, wobei wir in allen Rechenschritten implizit davon ausgehen, dass die auftretenden Potenzreihen einen positiven Konvergenzradius besitzen und damit die einzelnen Rechnungen tatsächlich gerechtfertigt sind.

Beispiel 4.29 (Airysche Differentialgleichung)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - ty = 0$$

und machen einen Lösungsansatz in Form einer Potenzreihe

$$y(t) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ und gewissen Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$. Formales Ableiten liefert

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}t^k \quad \text{und} \quad y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2}t^k.$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2}t^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} = 0,$$

was sich äquivalent schreiben lässt als

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2}t^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}t^k = 0,$$

also

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)(k+2)c_{k+2} - c_{k-1}]t^k = 0.$$

Mit dem Identitätssatz für Potenzreihen erhalten wir hieraus durch Koeffizientenvergleich das unendliche Gleichungssystem

$$2c_2 = 0, \quad (k+1)(k+2)c_{k+2} - c_{k-1} = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Die beiden ersten Koeffizienten c_0, c_1 bleiben unbestimmt und ergeben sich aus zugehörigen Anfangswerten. Ansonsten erhalten wir aus $c_2 = 0$ sofort

$$c_5 = c_8 = c_{11} = \dots = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_{3k-1} = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{c_0}{2 \cdot 3}, \\ c_6 &= \frac{c_3}{5 \cdot 6} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{c_0}{2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2!}, \\ c_9 &= \frac{c_6}{8 \cdot 9} = \frac{c_0}{2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2! \cdot 8 \cdot 9} = \frac{c_0}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3^3 \cdot 3!} \end{aligned}$$

und ganz allgemein

$$c_{3k} = \frac{c_0}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3k-1) \cdot 3^k \cdot k!} \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Analog bekommt man

$$c_{3k+1} = \frac{c_1}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3k+1) \cdot 3^k \cdot k!} \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Als allgemeine Lösung der Airyschen Differentialgleichung erhält man somit

$$y(t) = c_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3k-1) \cdot 3^k \cdot k!} \right) +$$

$$c_1 \left(t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k+1}}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3k+1) \cdot 3^k \cdot k!} \right)$$

mit noch freien Konstanten $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Um die obigen Rechnungen zu rechtfertigen, hat man sich lediglich davon zu überzeugen, dass diese Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius $r > 0$ hat und der Differentialgleichung genügt. Dies kann mit Standardmethoden geschehen und soll hier nicht ausgeführt werden. Man erhält $r = +\infty$. \diamond

Wir betrachten noch ein zweites Beispiel, das in den Anwendungen häufiger auftritt als das vorige Problem.

Beispiel 4.30 (Hermite'sche Differentialgleichung)

Wir betrachten hier die von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung

$$y'' - 2ty' + \lambda y = 0.$$

Mit dem Ansatz

$$y(t) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2}t^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}t^{k+1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k &= 0 \\ \iff 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2}t^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^k + \lambda c_0 + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k &= 0 \\ \iff (2c_2 + \lambda c_0) + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)(k+2)c_{k+2} - 2k c_k + \lambda c_k] t^k &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei sind $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ wieder frei wählbar (bzw. an geeignete Anfangsbedingungen anzupassen), während sich die übrigen c_k dann rekursiv bestimmen lassen aus der Formel

$$c_{k+2} = \frac{2k - \lambda}{(k+1)(k+2)} c_k \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (4.28)$$

Die zugehörige Potenzreihe konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $c_0 = 0$ erhält man eine ungerade Lösung, für $c_1 = 0$ eine gerade Lösung. Tatsächlich erhält man in Spezialfällen die so genannten Hermite-Polynome als Lösungen der hier betrachteten Differentialgleichung.

Sei nämlich $c_0 = 1, c_1 = 0$ sowie $\lambda = 4n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Aufgrund der obigen Ausführungen handelt es sich bei der Lösung $y(t)$ somit um eine gerade Potenzreihe, so dass wir

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} t^{2k}$$

haben. Wegen $\lambda = 4n$ und (4.28) sind hierbei aber nur endlich viele Summanden von Null verschieden, und wir erhalten ein Polynom vom Grad $2n$, das wir mit H_{2n} bezeichnen.

Ist hingegen $c_0 = 0, c_1 = 1$ und $\lambda = 4n + 2$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so erhalten wir eine ungerade Potenzreihe

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} t^{2k+1},$$

bei der im Hinblick auf (4.28) wieder nur endlich viele Summanden nicht verschwinden, so dass wir insgesamt ein Polynom vom Grad $2n + 1$ erhalten, das wir mit H_{2n+1} bezeichnen.

Die so erhaltenen Polynome H_0, H_1, H_2, \dots heißen **Hermite-Polynome**. Ihre ersten Vertreter sind gegeben durch

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1, \\ H_1(t) &= t, \\ H_2(t) &= 1 - 2t^2, \\ H_3(t) &= t - \frac{2}{3}t^3, \\ H_4(t) &= 1 - 4t^2 + \frac{4}{3}t^4. \end{aligned}$$

Die Graphen dieser Polynome sind in der Abbildung 4.1 wiedergegeben. Es sei in diesem Zusammenhang noch erwähnt, dass die Hermite-Polynome in der Literatur oft mit einem anderen Faktor versehen werden, so dass der Koeffizient vor der höchstens Potenz von H_n von der Gestalt 2^n ist. \diamond

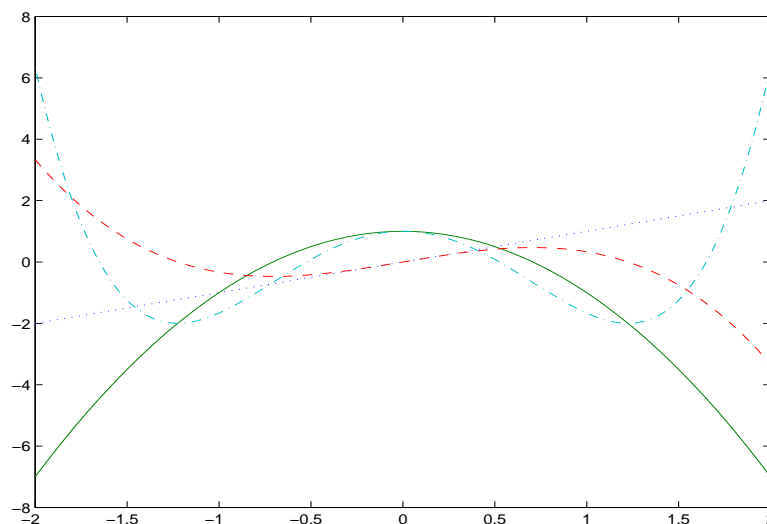


Abbildung 4.1: Die Hermite-Polynome H_1, H_2, H_3 und H_4

4.6 Die Laplace–Transformation

Die Methode der Laplace–Transformation erlaubt die Umwandlung eines Anfangswertproblems für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in algebraische Gleichungen. Sie erfreut sich insbesondere bei Physikern und Ingenieuren einer großen Beliebtheit und soll aus diesem Grunde hier kurz skizziert werden. Mehr zu diesem Thema findet man beispielsweise in [8].

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Dann heißt

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

die *Laplace–Transformation* von f , wobei stillschweigend (zumindest zunächst) vorausgesetzt wird, dass die Funktion f sich hinreichend gutartig verhält, damit das rechts stehende uneigentliche Integral existiert. Für die Laplace–Transformierte von f benutzt man auch die Notationen

$$F = \mathcal{L}f, \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad \text{oder} \quad f \circ\!\!\!\bullet F.$$

Wir bezeichnen die Laplace–Transformierte im Folgenden meist mit dem jeweiligen Großbuchstaben.

Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz der Laplace–Transformierten wird in dem folgenden Resultat angegeben. Man beachte in diesem Zusammenhang übrigens, dass wir f als reellwertig gewählt haben und das Argument s ebenfalls als reelle Zahl nehmen, dass man f aber auch als komplexwertige Funktion zulassen könnte und s ebenfalls aus \mathbb{C} sein dürfte.

Satz 4.31 *Sei f auf jedem Intervall der Form $[0, T]$ mit $T > 0$ (Riemann–) integrierbar und zusätzlich *exponentiell beschränkt*, also*

$$|f(t)| \leq Ke^{at} \quad \forall t \in [0, \infty)$$

mit gewissen Konstanten $K, a \geq 0$. Dann existiert die Laplace–Transformierte F von f für alle $s > a$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$|e^{-st} f(t)| = e^{-st} |f(t)| \leq Ke^{-st} e^{at} = Ke^{(a-s)t} \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s > a$ ist $a - s$ somit negativ und das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{(a-s)t} dt$$

daher offenbar konvergent. Mit dem Majorantenkriterium für (absolut–konvergente) uneigentliche Integrale folgt daher die Behauptung. \square

Wir erwähnen noch eine einfache Konsequenz dieses Resultates.

Korollar 4.32 Existiert die Laplace-Transformierte $F(s_0)$ von f in einem Punkt $s_0 \in \mathbb{R}$, so existiert $F(s)$ auch für jedes $s \geq s_0$.

Beweis: Aus der Identität

$$e^{-st}f(t) = e^{-(s-s_0)t}e^{-s_0t}f(t) \quad \forall t \in [0, \infty)$$

ergibt sich für alle $s \geq s_0$ sofort

$$|e^{-st}f(t)| = \underbrace{|e^{-(s-s_0)t}|}_{\leq 1} |e^{-s_0t}f(t)| \leq |e^{-s_0t}f(t)|$$

und daher die Behauptung. \square

Das Infimum aller reellen Werte s , für die $F(s)$ existiert, wird als **Konvergenzabszisse** von f bezeichnet und mit σ_f notiert. Wegen Korollar 4.32 ist $F(s)$ dann für alle $s > \sigma_f$ wohldefiniert.

Wir berechnen im nächsten Beispiel die Laplace-Transformation für einige elementare Funktionen f .

Beispiel 4.33 (a) Für die konstante Funktion $f \equiv 1$ ist

$$F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \right) = \frac{1}{s},$$

sofern $s > 0$ gilt. Für $s \leq 0$ hingegen divergiert das uneigentliche Integral. Als Konvergenzabszisse erhalten wir daher $\sigma_f = 0$.

(b) Für $f(t) = e^{at}$ erhält man (mit einer analogen Rechnung wie in Teil (a)) als Laplace-Transformierte

$$F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a},$$

sofern $s > a$ gilt. Anderenfalls divergiert das uneigentliche Integral wieder, so dass wir $\sigma_f = a$ erhalten.

(c) Die Laplace-Transformation ist ein linearer Operator, d.h., es gilt

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g) \quad \text{und} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

sofern die einzelnen Laplace-Transformierten existieren. Unter Verwendung des letzten Beispiels folgt daher beispielsweise

$$\mathcal{L}(\cosh(at)) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

für $s > \max\{a, -a\} = |a|$.

(d) Die *Heavyside-Funktion* ist definiert durch

$$H(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ 1, & \text{falls } t \geq 0. \end{cases}$$

Sei nun

$$f(t) := H(t - a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < a, \\ 1, & \text{falls } t \geq a \end{cases}$$

für ein gegebenes $a \geq 0$. Als zugehörige Laplace-Transformation ergibt sich dann

$$\mathcal{L}(H(t - a)) = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

für $s > 0$, wie man mit einer ähnlichen Rechnung wie in (a) bestätigt.

(e) Für die *Rechteckfunktion*

$$f(t) := H(t - a) - H(t - b) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in [a, b), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (0 \leq a < b)$$

ergibt sich aus der Linearität der Laplace-Transformation mit Teil (d) unmittelbar

$$F(s) = \mathcal{L}(H(t - a)) - \mathcal{L}(H(t - b)) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$

für jedes $s > 0$.

(f) Für die *Rechteckschwingung*

$$f(t) := H(t) - 2H(t - a) + 2H(t - 2a) - 2H(t - 3a) \pm \dots \quad (a > 0)$$

erhält man für jedes $s > 0$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} (1 - 2e^{-as} + 2e^{-2as} - 2e^{-3as} \pm \dots) \\ &= \frac{1}{s} \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-aks} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{s} \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} (-e^{-as})^k - 1 \right) \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{2}{1 + e^{-as}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{s} \frac{1 - e^{-sa}}{1 + e^{sa}} \\ &= \frac{1}{s} \tanh \frac{as}{2} \end{aligned}$$

als Laplace-Transformierte.

◇

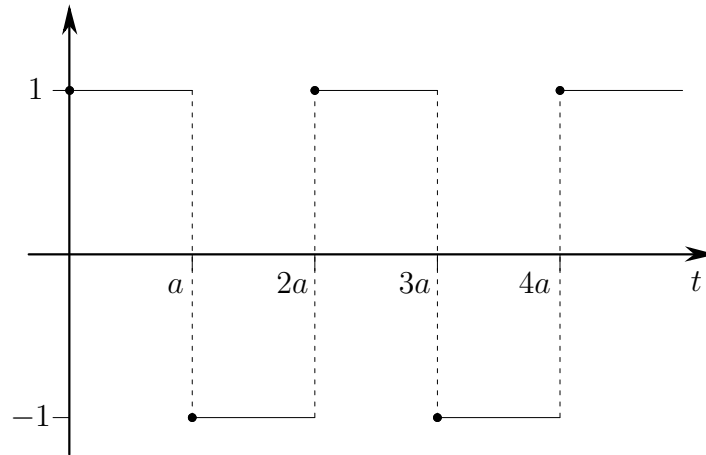


Abbildung 4.2: Die Rechteckschwingung aus dem Beispiel 4.33 (f)

Wir fassen als Nächstes einige (neben der Linearität) der elementaren Eigenschaften der Laplace-Transformation in dem folgenden Resultat zusammen.

Satz 4.34 Sei $F = \mathcal{L}f$ die Laplace-Transformierte einer hinreichend „gutartigen“ Abbildung f . Dann gelten:

- (a) Es ist $\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) = s^k F(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)$, speziell also $\mathcal{L}f' = sF(s) - f(0)$ und $\mathcal{L}f'' = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.
- (b) Es ist $\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ für jedes $a > 0$.
- (c) Es ist $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s - a)$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.
- (d) Es ist $\mathcal{L}\{f(t - a)H(t - a)\}(s) = e^{-as}F(s)$ für jedes $a > 0$, wobei H die Heavyside-Funktion bezeichnet.

Beweis: Aus den hier angegebenen Beweisen wird sich insbesondere ergeben, was unter einer „gutartigen“ Funktion f zu verstehen ist.

- (a) Für ein beliebiges $T > 0$ gilt nach der Regel der partiellen Integration zunächst

$$\int_0^T e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^T + s \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Für hinreichend gutartiges f gilt deshalb

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f'(t) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) \Big|_0^T + s \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \\
&= -f(0) + s\mathcal{L}(f).
\end{aligned}$$

Dies beweist die Aussage (a) für $k = 1$. Allgemein lässt sich (a) durch Induktion nach k zeigen, was hier im Einzelnen nicht durchgeführt werden soll.

(b) Mittels Substitution $x := at$ erhält man

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(at) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_0^{aT} e^{-(s/a)x} f(x) dx \\
&= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-(s/a)x} f(x) dx \\
&= \frac{1}{a} \mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}$$

und damit die Aussage (b).

(c) Aus der Definition der Laplace-Transformierten erhält man sofort

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a),$$

was gerade die Behauptung (c) ist.

(d) Aus den Definitionen der Heavyside-Funktion und der Laplace-Transformierten ergibt sich mittels der Substitution $x := t - a$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)H(t-a) dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s(x+a)} f(x) dx \\
&= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \\
&= e^{-sa} \mathcal{L}\{f(x)\}(s),
\end{aligned}$$

so dass auch Teil (d) bewiesen ist. \square

Wir kommen nun zur Frage der Umkehrung der Laplace-Transformation: Ist f durch die Beziehung $F = \mathcal{L}f$ eindeutig bestimmt? Dies ist aufgrund des nachstehenden Resultates in der Tat der Fall, so dass wir statt $F = \mathcal{L}f$ auch $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ mit der **inversen Laplace-Transformation** \mathcal{L}^{-1} schreiben können.

Satz 4.35 (*Eindeutigkeit der Laplace-Transformation*)
Seien f und g stetige Funktionen mit

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s > \sigma$ für ein $\sigma \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f \equiv g$.

Beweis: Betrachte die Differenzfunktion $h := f - g$ und setze $H := \mathcal{L}(h)$. Aus der Linearität der Laplace-Transformation folgt nach Voraussetzung dann $H(s) = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s > \sigma$. Speziell gilt somit $H(\sigma + n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Per Definition der Laplace-Transformation bedeutet dies

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma+n)t} h(t) dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mittels der Substitution $\tau := e^{-t}$ folgt mit $\varphi(\tau) := e^{-\sigma t} h(t)$ (wobei $t = -\log \tau$ gilt) daher

$$\int_0^1 \tau^{n-1} \varphi(\tau) d\tau = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Somit gilt

$$\int_0^1 p(\tau) \varphi(\tau) d\tau = 0$$

für alle Polynome p . Nun ist φ eine stetige Funktion auf dem Intervall $(0, 1]$, die sich unter den Voraussetzungen des Satzes durch

$$\varphi(0) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \varphi(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} h(t) = 0$$

zu einer stetigen Funktion auf der kompakten Menge $[0, 1]$ fortsetzen lässt. Daher existiert einerseits eine Konstante $M > 0$ mit

$$|\varphi(\tau)| \leq M \quad \forall \tau \in [0, 1],$$

und andererseits lässt sich φ beliebig gut durch ein Polynom approximieren. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert also ein zugehöriges Polynom q mit

$$|\varphi(\tau) - q(\tau)| \leq \varepsilon \quad \forall \tau \in [0, 1].$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |\varphi(\tau)|^2 d\tau &= \int_0^1 \varphi(\tau) [\varphi(\tau) - q(\tau)] d\tau + \underbrace{\int_0^1 q(\tau) \varphi(\tau) d\tau}_{=0} \\
 &\leq \int_0^1 \underbrace{|\varphi(\tau)|}_{\leq M} \underbrace{|\varphi(\tau) - q(\tau)|}_{\leq \varepsilon} d\tau \\
 &\leq M \cdot \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ hierbei beliebig klein sein konnte, folgt sofort

$$\int_0^1 |\varphi(\tau)|^2 d\tau = 0.$$

Die Stetigkeit von φ impliziert daher $\varphi(\tau) = 0$ für alle $\tau \in [0, 1]$. Aus der Definition von φ erhalten wir somit $h \equiv 0$ und daher $f \equiv g$. \square

Die Laplace-Transformation $\mathcal{L}f$ lässt sich stets durch geeignete numerische Methoden bestimmen. In vielen Fällen ist sie sogar explizit bekannt. In der Tabelle 4.1 fassen wir einige Laplace-Transformierte mitsamt ihren Konvergenzabszissen zusammen.

Wir kehren nun zurück zu unserem eigentlichen Thema, der Lösung von Differentialgleichungen. Wir betrachten hierzu das Anfangswertproblem

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t) \quad (t \geq 0), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$$

mit gewissen Konstanten $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ sowie einer stetigen Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Mit den Laplace-Transformationen $Y = \mathcal{L}y, F = \mathcal{L}f$ erhält man aus der Differentialgleichung unter Verwendung der obigen Sätze unmittelbar

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(y'') + a_1 \mathcal{L}(y') + a_0 \mathcal{L}(y) &= \mathcal{L}(f) \\
 \iff s^2 Y - s y(0) - y'(0) + a_1 (s Y - y(0)) + a_0 Y &= F \\
 \iff s^2 Y - s y_0 - y_1 + a_1 (s Y - y_0) + a_0 Y &= F,
 \end{aligned}$$

also

$$Y(s) = \frac{(s + a_1)y_0 + y_1 + F(s)}{s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Durch Anwendung der inversen Laplace-Transformation bekommt man nun y . Wir illustrieren diese Vorgehensweise an einem einfachen Beispiel.

Beispiel 4.36 Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

| $f(t)$ für $t \geq 0$ | $F(s)$ für $s > \sigma_f$ | σ_f |
|--|-----------------------------|------------|
| 1 | $\frac{1}{s}$ | 0 |
| e^{at} | $\frac{1}{s-a}$ | a |
| $\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2 - a^2}$ | $ a $ |
| $\sinh(at)$ | $\frac{a}{s^2 - a^2}$ | $ a $ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2 + a^2}$ | 0 |
| $\sin(at)$ | $\frac{a}{s^2 + a^2}$ | 0 |
| $e^{bt} \cos(at)$ | $\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$ | b |
| $e^{bt} \sin(at)$ | $\frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$ | b |
| t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | 0 |
| $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ | a |
| $H_a(t) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$ | $\frac{e^{-sa}}{s}$ | 0 |

Tabelle 4.1: Tabelle mit einigen Laplace-Transformationen

Durch Laplace-Transformation entsteht hieraus

$$s^2Y - s - 6(sY - 1) + 9Y = 0$$

und damit

$$Y(s) = \frac{s-6}{s^2-6s+9} = \frac{s-6}{(s-3)^2} = \frac{s}{(s-3)^2} - \frac{6}{(s-3)^2}.$$

Durch Rücktransformation (vergleiche die Tabelle 4.1) erhält man die Lösung

$$y(t) = (1+3t)e^{3t} - 6te^{3t} = (1-3t)e^{3t}$$

der gegebenen Differentialgleichung.

◇

Kapitel 5

Autonome Differentialgleichungen

- 5.1 Trajektorien
- 5.2 Klassifikation von Trajektorien
- 5.3 Ebene autonome Systeme
- 5.4 Hamiltonsche Systeme
- 5.5 Erste Integrale
- 5.6 Der Satz von Liouville

5.1 Trajektorien

Wir betrachten in diesem Kapitel ausschließlich autonome Differentialgleichungssysteme

$$y' = f(y) \tag{5.1}$$

mit einer (bezüglich y) Lipschitz-stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Für autonome Systeme lassen sich eine Reihe von qualitativen Aussagen machen, die für explizit von t abhängige rechte Seiten f im Allgemeinen nicht richtig sind. Beispielsweise gilt für autonome Systeme die folgende Beobachtung.

Lemma 5.1 *Sei $y(t) = y(t; 0, y_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $\tilde{y}(t) := y(t - t_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0$$

auf dem entsprechend verschobenen Intervall $\tilde{I} := I + t_0 := \{t + t_0 \mid t \in I\}$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \forall t \in I, \quad y(0) = y_0.$$

Daraus folgt

$$\tilde{y}'(t) = y'(t - t_0) = f(y(t - t_0)) = f(\tilde{y}(t)) \quad \forall t - t_0 \in I, \quad \tilde{y}(t_0) = y(0) = y_0,$$

womit die Behauptung auch schon bewiesen ist. \square

Wegen Lemma 5.1 kann man bei der Betrachtung von Anfangswertproblemen bei autonomen Differentialgleichungen stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass der Anfangszeitpunkt t_0 im Nullpunkt liegt. Wir werden im Folgenden daher fast immer (ohne Einschränkung) $t_0 = 0$ wählen.

Anschaulich besagt das Lemma 5.1 einfach, dass sich die Lösungskurven von autonomen Differentialgleichungen bei festem Anfangswert $y_0 \in D$ lediglich durch eine Verschiebung in Richtung der t -Achse unterscheiden. Man bezeichnet diese Eigenschaft auch als *Translationsinvarianz* von autonomen Differentialgleichungssystemen, vergleiche die Abbildung 5.1, in der die Aussage des Lemmas 5.1 veranschaulicht wird.

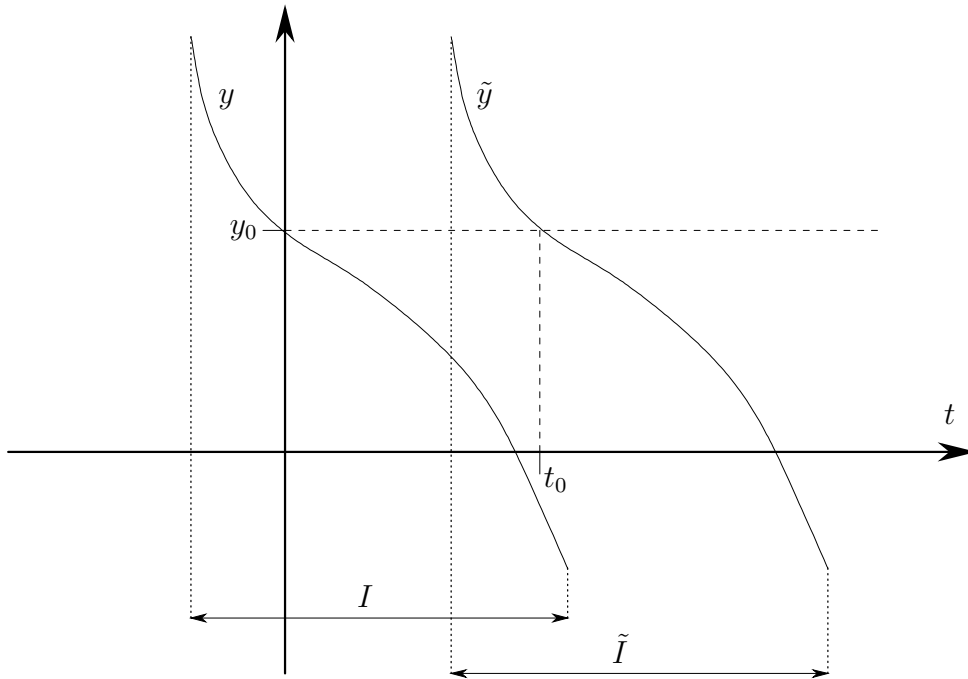


Abbildung 5.1: Veranschaulichung der Translationsinvarianz bei autonomen Differentialgleichungen

Da der Anfangswert $y_0 \in D$ oft variabel sein wird, schreiben wir hierfür in diesem Kapitel häufig ξ statt y_0 . Wir betrachten also Anfangswertprobleme der Gestalt

$$y' = f(y), \quad y(0) = \xi \tag{5.2}$$

für ein $\xi \in D$ und eine (bezüglich y) Lipschitz-stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wegen der Sätze 3.10 und 3.18 hat das Anfangswertproblem (5.2) eine eindeutig bestimmte Lösung $y(t) = y(t; 0, \xi)$ auf einem ebenfalls eindeutig bestimmten Existenzintervall $I_{\max} = I_{\max}(0, \xi)$. Da hierbei $t_0 = 0$ fixiert ist, benutzen wir zur Abkürzung der Bezeichnungen im Folgenden stets die Schreibweisen

$$\begin{aligned} y(t; \xi) &:= y(t; 0, \xi) \quad \text{für die eindeutige Lösung von (5.2),} \\ I_{\max}(\xi) &:= I_{\max}(0, \xi) \quad \text{für das maximale Existenzintervall der Lösung.} \end{aligned}$$

Mittels dieser Notation lässt sich insbesondere das nächste Resultat formulieren.

Lemma 5.2 *Für eine Lösung $y(t; \xi)$ des Anfangswertproblems (5.2) (mit beliebigem $\xi \in D$) gelten die beiden folgenden so genannten **Flussaxiome**:*

- (a) *Es ist $y(0; \xi) = \xi$ für alle $\xi \in D$.*
- (b) *Es ist $y(t; y(s; \xi)) = y(t + s; \xi)$ für alle $t \in I_{\max}(y(s; \xi)) = I_{\max}(\xi) - s$.*

Beweis: Aussage (a) folgt sofort aus der Definition von $y(t; \xi)$ als Lösung des Anfangswertproblems (5.2). Zum Nachweis von (b) beachte man, dass sowohl $y(t; y(s; \xi))$ als auch $\tilde{y}(t) := y(t + s; \xi)$ das Anfangswertproblem

$$y' = f(y), \quad y(0) = y(s; \xi)$$

lösen und diese Lösungen wegen der Eindeutigkeit auf ihren jeweiligen (maximalen) Existenzintervallen daher übereinstimmen. \square

Wir wollen als Nächstes den zentralen Begriff dieses Abschnittes einführen. Sei dazu $y(\cdot; \xi)$ die Lösung des Anfangswertproblems (5.2) auf dem maximalen Existenzintervall $I_{\max}(\xi)$. Bei dieser Lösung handelt es sich daher um eine Abbildung

$$y(\cdot; \xi) : I_{\max}(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die somit eine Kurve im \mathbb{R}^n beschreibt, wobei die Zeit t der Kurve eine Orientierung gibt, also die Durchlaufungsrichtung der Kurve bestimmt. Diese Beobachtung führt uns zu den nachstehenden Begriffen.

Definition 5.3 *Sei $y(t; \xi)$ die Lösung des Anfangswertproblems (5.2) mit dem maximalen Existenzintervall $I_{\max}(\xi)$. Das durch diese Lösung definierte Bild*

$$T(\xi) := y(I_{\max}(\xi)) := \{y(t; \xi) \mid t \in I_{\max}(\xi)\}$$

*heißt dann **Trajektorie** (oder **Orbit** oder **Bahnkurve** oder **Phasenkurve**) des Systems (5.2) durch den Punkt ξ . Ist $I_{\max}(\xi) = (t^-(\xi), t^+(\xi))$, so heißen*

$$\begin{aligned} T^+(\xi) &:= \{y(t; \xi) \mid t \in [0, t^+(\xi))\}, \\ T^-(\xi) &:= \{y(t; \xi) \mid t \in (t^-(\xi), 0]\} \end{aligned}$$

*die **positive** bzw. **negative Halbtrajektorie** durch ξ .*

Die Menge aller Trajektorien des Systems (5.2) bezeichnet man als das **Phasenportrait** der autonomen Differentialgleichung (5.2). Das Phasenportrait besteht also aus der Menge aller Trajektorien, die sich aus Lösungen $y = y(\cdot; \xi)$ ergeben, wenn der Anfangswert $\xi \in D$ alle möglichen Werte durchläuft. Anschaulich spielt so ein Phasenportrait insbesondere im Fall $n = 2$ eine große Rolle, wobei man sich damit begnügen muss, einige wichtige Trajektorien einzuzichnen, da anderenfalls das Bild komplett zugemalt wäre (vergleiche Lemma 5.4).

Als Beispiel betrachten wir das lineare autonome System

$$y' = f(y) \quad \text{mit} \quad f(y) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y. \quad (5.3)$$

Das zugehörige Phasenportrait befindet sich in der Abbildung 5.2. Die dort eingezeichneten Trajektorien verlaufen allesamt kreisförmig um den stationären Punkt, die zugehörigen Lösungen besitzen also ein periodisches Verhalten. Tatsächlich bilden die beiden Funktionen

$$y_1(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_2(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem der gegebenen Differentialgleichung, an der man die Periodizität aller Lösungen sofort erkennt.

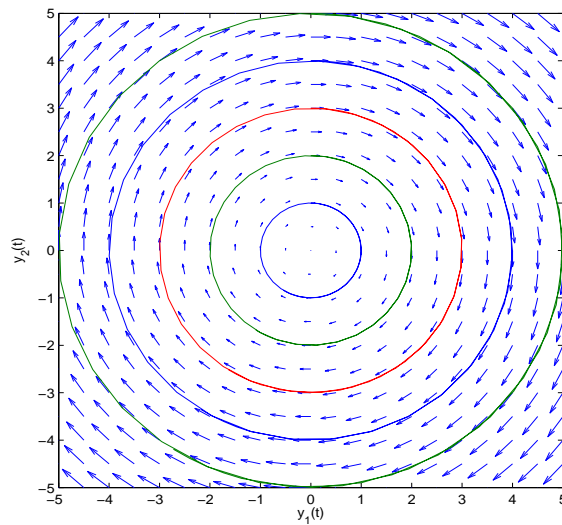


Abbildung 5.2: Phasenportät für das autonome System (5.3)

Eine erste wichtige Eigenschaft von Trajektorien ist in dem folgenden Resultat enthalten.

Lemma 5.4 *Je zwei Trajektorien des autonomen Systems (5.2) sind entweder gleich oder disjunkt. Ferner geht durch jeden Punkt $\xi \in D$ genau eine Trajektorie.*

Beweis: Seien $\xi_1, \xi_2 \in D$ sowie $T(\xi_1)$ und $T(\xi_2)$ die zugehörigen Trajektorien durch ξ_1 und ξ_2 . Sei ferner $\xi \in T(\xi_1) \cap T(\xi_2)$. Dann existieren ein $t_1 \in I_{\max}(\xi_1)$ und ein $t_2 \in I_{\max}(\xi_2)$ mit $y(t_1; \xi_1) = \xi$ und $y(t_2; \xi_2) = \xi$. Also ist $y(t; \xi_1)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y(t_1) = \xi$$

und $y(t; \xi_2)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y(t_2) = \xi.$$

Analog zum Beweis des Lemmas 5.1 folgt daher, dass sowohl $y_1(t) := y(t + t_1; \xi_1)$ als auch $y_2(t) := y(t + t_2; \xi_2)$ das Anfangswertproblem

$$y' = f(y), \quad y(0) = \xi$$

lösen. Daher stimmen beide Lösungen überein und erzeugen folglich dieselbe Trajektorie, so dass $T(\xi_1) = T(\xi_2)$ gilt.

Per Definition geht die zur Lösung $y(t; \xi)$ zugehörige Trajektorie wegen $y(0) = \xi$ durch den Punkt $\xi \in D$. Also verläuft durch jeden Punkt $\xi \in D$ mindestens eine Trajektorie. Wegen des gerade bewiesenen Teils kann aber nur eine Trajektorie durch ξ verlaufen, was auch den zweiten Teil der Behauptung beweist. \square

5.2 Klassifikation von Trajektorien

Wir betrachten weiterhin das Anfangswertproblem (5.2) für eine autonome Differentialgleichung und beginnen gleich mit dem Hauptresultat dieses Abschnittes, wonach es lediglich drei Typen von Trajektorien geben kann.

Satz 5.5 *Für eine maximale Lösung $y(\cdot; \xi) : I_{\max}(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ des autonomen Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = \xi$ und die zugehörige Trajektorie $T(\xi)$ gilt genau einer der folgenden drei Fälle:*

- (a) $I_{\max}(\xi)$ ist gleich $(-\infty, +\infty)$, und $y(t; \xi)$ ist konstant, d.h., die Trajektorie $T(\xi)$ ist einpunktig, und es gilt $T(\xi) = T^+(\xi) = T^-(\xi) = \{\xi\}$.
- (b) $I_{\max}(\xi)$ ist gleich $(-\infty, +\infty)$, und $y(t; \xi)$ ist nicht konstant und periodisch, d.h., die Trajektorie $T(\xi)$ ist eine geschlossene Kurve, und es gilt $T(\xi) = T^+(\xi) = T^-(\xi) \neq \{\xi\}$.
- (c) Die Funktion $y(\cdot; \xi) : I_{\max}(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist injektiv, d.h., die Trajektorie $T(\xi)$ ist eine doppelpunktfreie Kurve, nämlich das injektive Bild des offenen Intervalls $I_{\max}(\xi)$.

Beweis: Ist die Funktion $y(\cdot; \xi)$ injektiv, so liegt der Fall (c) vor und wir haben nichts mehr zu zeigen.

Sei daher $y(\cdot; \xi) : I_{\max}(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung, die nicht injektiv ist. Dann existieren $t_1, t_2 \in I_{\max}(\xi)$ mit $t_1 \neq t_2$ und

$$y(t_1; \xi) = y(t_2; \xi). \quad (5.4)$$

Wegen der Translationsinvarianz bei autonomen Differentialgleichungen ist neben $y(t; \xi)$ aber auch die auf dem Intervall

$$\tilde{I}_{\max}(\xi) := \{t + t_1 - t_2 \mid t \in I_{\max}(\xi)\}$$

definierte Funktion

$$\tilde{y}(t) := y(t - t_1 + t_2; \xi)$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$, die wegen (5.4) außerdem der Anfangsbedingung

$$\tilde{y}(t_1) = y(t_1; \xi)$$

genügt. Daher stimmen y und \tilde{y} mitsamt den maximalen Existenzintervallen überein, so dass wir

$$y(t; \xi) = y(t - t_1 + t_2; \xi) \quad (5.5)$$

und

$$I_{\max}(\xi) = \tilde{I}_{\max}(\xi)$$

haben. Schreiben wir

$$I_{\max}(\xi) =: (t^-(\xi), t^+(\xi)) \quad \text{und} \quad \tilde{I}_{\max}(\xi) =: (\tilde{t}^-(\xi), \tilde{t}^+(\xi)),$$

so folgt aus der Definition von $\tilde{I}_{\max}(\xi)$ daher

$$t^-(\xi) = \tilde{t}^-(\xi) = t^-(\xi) + t_1 - t_2 \quad \text{und} \quad t^+(\xi) = \tilde{t}^+(\xi) = t^+(\xi) + t_1 - t_2.$$

Wegen $t_1 \neq t_2$ sind diese Gleichheiten aber nur für $t^-(\xi) = -\infty$ und $t^+(\xi) = +\infty$ möglich, so dass wir $I_{\max}(\xi) = \mathbb{R}$ erhalten. Aus (5.5) wiederum folgt dann, dass $y(t; \xi)$ die nichttriviale Periode $t_2 - t_1$ besitzt. Bezeichnet

$$\omega := \inf \{ \rho > 0 \mid y(t + \rho; \xi) = y(t; \xi) \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

die kleinste Periode von $y(\cdot; \xi)$, so ist $\omega = 0$ oder $\omega > 0$. Im Fall $\omega = 0$ ist $y(\cdot; \xi)$ konstant und $T(\xi) = T^+(\xi) = T^-(\xi) = \{\xi\}$, im Fall $\omega > 0$ ist $y(\cdot; \xi)$ nicht konstant und $\{y(t; \xi) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{y(t; \xi) \mid t \in [0, \omega]\} = \{y(t; \xi) \mid t \in [0, +\infty)\}$, woraus sich $T(\xi) = T^+(\xi) \neq \{\xi\}$ ergibt. Analog folgt auch $T(\xi) = T^-(\xi)$. \square

Wir illustrieren die drei Klassen von Trajektorien mittels des folgenden Beispiels, bei dem, je nach Wahl des Anfangswertes ξ , alle drei Typen auftreten.

Beispiel 5.6 Betrachte das zweidimensionale autonome System $y' = f(y)$ mit

$$f(y) := f(y_1, y_2) := \begin{pmatrix} y_2 + y_1(1 - y_1^2 - y_2^2) \\ -y_1 - y_2(1 - y_1^2 - y_2^2) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieses Systems zu einem Anfangswert $y(0) = \xi$ mit einem $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$y(t; \xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)e^{-2t}}} \begin{pmatrix} \xi_1 \cos t + \xi_2 \sin t \\ \xi_2 \cos t - \xi_1 \sin t \end{pmatrix}.$$

Für den Anfangswert $\xi = 0$ ergibt sich wegen $y(t; 0) \equiv 0$ offenbar die einpunktige Trajektorie $T(0) = \{0\}$. Für ein beliebiges ξ mit $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$ hingegen wird der Nenner in der Lösung $y(t; \xi)$ gleich Eins, so dass wir als zugehörige Trajektorie $T(\xi)$ den Einheitskreis erhalten. In allen anderen Fällen (also für $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $\xi_1^2 + \xi_2^2 \notin \{0, 1\}$) ergeben sich nichtgeschlossene Trajektorien, und zwar in Form von Spiralen. Die Abbildung 5.3 enthält einige dieser spiralförmigen Trajektorien, die sich übrigens sowohl von innen als auch von außen dem Einheitskreis anschmiegen. Man bezeichnet den Einheitskreis in diesem Fall daher auch als einen **Grenzzzyklus**. \diamond

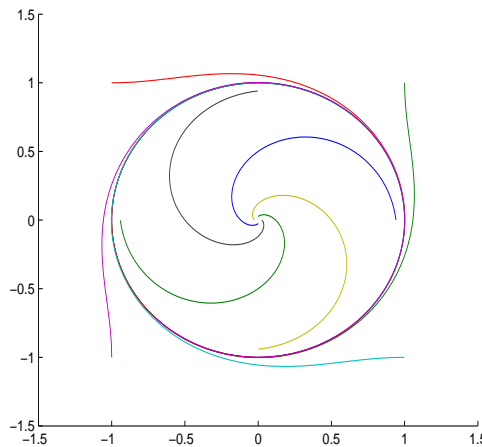


Abbildung 5.3: Einige Trajektorien zum Beispiel 5.6 mit dem Einheitskreis als Grenzzzyklus

5.3 Ebene autonome Systeme

Wir betrachten in diesem Abschnitt autonome Systeme $y' = f(y)$ mit einer auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definierten rechten Seite. Im Mittelpunkt unserer Untersuchungen stehen

jetzt also zweidimensionale Systeme. Man spricht deshalb auch von **ebenen autonomen Systemen**.

Ausgeschrieben lautet ein solches ebenes autonomes System daher

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(y_1, y_2), \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2).\end{aligned}$$

Um die Notation in diesem Abschnitt etwas zu vereinfachen, schreiben wir im Folgenden stets (x, y) statt (y_1, y_2) sowie (f, g) statt (f_1, f_2) . Damit erhalten wir das ebene autonome System

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y)\end{aligned}\tag{5.6}$$

mit gesuchten Lösungen $x(t), y(t)$.

Systeme der Gestalt (5.6) besitzen einen engen Zusammenhang mit skalaren Differentialgleichungen, wie wir sie im Kapitel 2 behandelt haben. Formal lässt sich dieser Zusammenhang wie folgt einsehen: Wir dividieren die zweite Gleichung in (5.6) einfach durch die erste Gleichung (wobei $f(x, y) \neq 0$ vorausgesetzt sei) und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Dies ist eine skalare Differentialgleichung erster Ordnung für $y(x)$. Gerechtfertigt wird dieser formale Ansatz durch das nachstehende Resultat.

Satz 5.7 *Gegeben sei das ebene autonome System (5.6) mit einer auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetigen rechten Seite. Ferner sei $(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Ist $f(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in D$, so ist die Trajektorie $T(\xi, \eta)$ durch den Punkt (ξ, η) identisch mit der maximalen Lösungskurve des Anfangswertproblems*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad y(\xi) = \eta.\tag{5.7}$$

- (b) *Ist $g(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in D$, so ist die Trajektorie $T(\xi, \eta)$ durch den Punkt (ξ, η) identisch mit der maximalen Lösungskurve des Anfangswertproblems*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad x(\eta) = \xi.$$

Beweis: Wir beweisen hier lediglich die Aussage (a), da sich Teil (b) analog verifizieren lässt.

Sei dazu $(x(t), y(t))$ eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, also

$$x'(t) = f(x(t), y(t)), \quad y'(t) = g(x(t), y(t))\tag{5.8}$$

für alle $t \in I_{\max}(\xi, \eta)$ auf einem maximalen Existenzintervall $I_{\max}(\xi, \eta)$ und

$$x(0) = \xi, \quad y(0) = \eta. \quad (5.9)$$

Aus der ersten Gleichung in (5.8) sowie der Voraussetzung $f(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in D$ folgt unmittelbar, dass entweder $x'(t) > 0$ für alle $t \in I_{\max}(\xi, \eta)$ oder $x'(t) < 0$ für alle $t \in I_{\max}(\xi, \eta)$ gilt. In jedem Fall ist x dann streng monoton (wachsend oder fallend) und besitzt daher eine auf dem Intervall $J_{\max}(\xi, \eta) := x(I_{\max}(\xi, \eta))$ definierte Umkehrfunktion $z := x^{-1} : J_{\max}(\xi, \eta) \rightarrow I_{\max}(\xi, \eta)$ mit der Eigenschaft

$$z(\xi) = 0. \quad (5.10)$$

Mittels der bijektiven Transformation $t = z(\zeta)$ lässt sich die Trajektorie $T(\xi, \eta)$ dann wie folgt umparametrisieren:

$$\begin{aligned} T(\xi, \eta) &= \{(x(t), y(t)) \mid t \in I_{\max}(\xi, \eta)\} \\ &= \{(x(z(\zeta)), y(z(\zeta))) \mid \zeta \in J_{\max}(\xi, \eta)\} \\ &= \{(\zeta, y(z(\zeta))) \mid \zeta \in J_{\max}(\xi, \eta)\}. \end{aligned}$$

Damit ist $T(\xi, \eta)$ der Graph der Funktion $y \circ z$. Also müssen wir nur noch zeigen, dass die auf dem offenen Intervall $J_{\max}(\xi, \eta)$ definierte Funktion

$$\mu(\zeta) := y(z(\zeta))$$

eine maximale Lösung des Anfangswertproblems (5.7) ist. Wegen (5.10) und (5.9) ist zunächst

$$\mu(\xi) = y(z(\xi)) = y(0) = \eta$$

und somit schon mal die Anfangsbedingung erfüllt. Außerdem ergibt sich aus der Identität $x(z(\zeta)) = \zeta$ durch Differentiation sofort

$$x'(z(\zeta)) \cdot z'(\zeta) = 1 \quad \text{und daher} \quad z'(\zeta) = \frac{1}{x'(z(\zeta))}$$

(Ableitung der Umkehrfunktion). Hieraus folgt mit der Kettenregel

$$\frac{d\mu}{d\zeta}(\zeta) = y'(z(\zeta)) \cdot z'(\zeta) = \frac{y'(z(\zeta))}{x'(z(\zeta))} = \frac{g(x(z(\zeta)), y(z(\zeta)))}{f(x(z(\zeta)), y(z(\zeta)))} = \frac{g(\zeta, \mu(\zeta))}{f(\zeta, \mu(\zeta))}$$

aus (5.8). Die noch verbleibende Aussage über die Maximalität der Lösung sei dem Leser als Aufgabe überlassen. \square

Bei der praktischen Anwendung des Satzes 5.7, etwa von Teil (a), hat man den Definitionsbereich D der rechten Seite eventuell weiter einzuschränken, um die Voraussetzung $f(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in D$ gewährleisten zu können. Ansonsten eignet sich der Satz 5.7 hervorragend zum Zeichnen von Phasenportraits von ebenen autonomen Systemen. Wir illustrieren dies an einem kleinen Beispiel.

Beispiel 5.8 Wir betrachten das ebene autonome System

$$x' = -x, \quad y' = y + x^2.$$

Sofern $x \neq 0$ ist (also für $x > 0$ bzw. $x < 0$), erhalten wir gemäß Satz 5.7 als zugehörige skalare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + x^2}{x} = -\frac{1}{x}y - x.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, deren eindeutige Lösung zu einem Anfangswert $y(\xi) = \eta$ mit $\xi \neq 0$ gegeben ist durch

$$y(x) = y(x; \xi, \eta) = \frac{\xi\eta}{x} - \frac{x^2}{3} + \frac{\xi^3}{3x}.$$

Die Graphen dieser Lösungen ergeben wegen Satz 5.7 gerade das Phasenportrait für das ursprüngliche ebene autonome System. Die Abbildung 5.4 enthält einige Trajektorien, die das Lösungsverhalten qualitativ beschreiben. \diamond

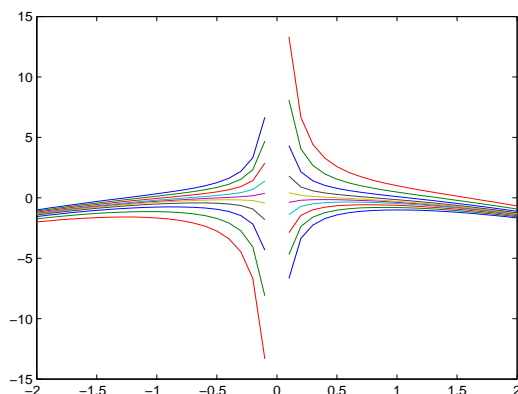


Abbildung 5.4: Einige Trajektorien zum Beispiel 5.8 (Bild fehlerhaft!?)

5.4 Hamiltonsche Systeme

Wir betrachten in diesem Abschnitt wieder ebene autonome Systeme der Gestalt (5.6). Wegen Satz 5.7 erhalten wir die Trajektorien (und damit das Phasenportrait) von (5.6), indem wir die Graphen der Lösungen der zugehörigen skalaren Differentialgleichung aus (5.7) zeichnen. Multiplizieren wir diese skalare Differentialgleichung mit $f(x, y)$ durch, so erhalten wir die skalare Gleichung

$$f(x, y) \frac{dy}{dx} - g(x, y) = 0. \quad (5.11)$$

Dies ist eine implizite Differentialgleichung, die genau von der Form ist, wie wir sie im Abschnitt 2.4 über exakte Differentialgleichungen betrachtet haben. Zur Überprüfung von (5.11) auf Exaktheit benötigt man eine Stammfunktion im Sinne der Definition 2.10. In der Sprache des ursprünglich gegebenen ebenen autonomen Systems (5.6) verwendet man den nachstehenden Begriff.

Definition 5.9 *Ein ebenes autonomes System*

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \quad (5.12)$$

mit einer auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetigen rechten Seite heißt **Hamilton-System**, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -g(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D.$$

Eine solche Funktion H heißt **Hamilton-Funktion** des Systems (5.12).

Sofern die Menge D beispielsweise konvex (oder sternförmig) ist, existiert genau dann eine Hamilton-Funktion für das autonome System (5.12), wenn die zugehörige skalare Gleichung (5.11) exakt ist, also genau dann, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

gilt, vergleiche Satz 2.11. Sofern dieses Exaktheitskriterium erfüllt ist, kann man wie im Abschnitt 2.4 eine Hamilton-Funktion von (5.12) (Stammfunktion von (5.11)) bestimmen. Die Bedeutung der Hamilton-Funktion für ebene autonome Systeme ergibt sich aus dem folgenden Resultat.

Satz 5.10 *Gegeben sei ein Hamilton-System*

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$

mit einer auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetigen rechten Seite. Dann ist eine zugehörige Hamilton-Funktion längs jeder Trajektorie konstant, es gilt also

$$H(y(t; \xi, \eta)) = H(\xi, \eta)$$

für alle $(\xi, \eta) \in D$ und alle $t \in I_{\max}(\xi, \eta)$.

Beweis: Für alle $(\xi, \eta) \in D$ und alle $t \in I_{\max}(\xi, \eta)$ gilt

$$y'(t; \xi, \eta) = (f(y(t; \xi, \eta)), g(y(t; \xi, \eta))) \quad \text{mit} \quad y(t; \xi, \eta) = (y_1(t; \xi, \eta), y_2(t; \xi, \eta))^T.$$

Aus der Definition einer Hamilton-Funktion folgt durch Anwendung der Kettenregel daher

$$\frac{d}{dt} H(y(t; \xi, \eta)) = \frac{\partial H}{\partial x}(y(t; \xi, \eta)) \cdot y'_1(t; \xi, \eta) + \frac{\partial H}{\partial y}(y(t; \xi, \eta)) \cdot y'_2(t; \xi, \eta)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial H}{\partial x}(y(t; \xi, \eta)) \cdot f(y(t; \xi, \eta)) + \frac{\partial H}{\partial y}(y(t; \xi, \eta)) \cdot g(y(t; \xi, \eta)) \\
&= -g(y(t; \xi, \eta)) \cdot f(y(t; \xi, \eta)) + f(y(t; \xi, \eta)) \cdot g(y(t; \xi, \eta)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit ist die Funktion $H(y(t; \xi, \eta))$ konstant bezüglich $t \in I_{\max}(\xi, \eta)$. Da für $t = 0$ speziell $H(y(0; \xi, \eta)) = H(\xi, \eta)$ gilt, erhalten wir somit $H(y(t; \xi, \eta)) = H(\xi, \eta)$ für alle $t \in I_{\max}(\xi, \eta)$. \square

Bezeichnen wir mit

$$N(\xi, \eta) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = H(\xi, \eta)\}$$

die **Niveau-Menge** einer Hamilton-Funktion zum Niveau $H(\xi, \eta)$, so besagt der Satz 5.10 gerade, dass die Trajektorien eines Hamilton-Systems gerade in diesen Niveaumengen enthalten sind. Wir betrachten hierzu ein Beispiel.

Beispiel 5.11 (Mathematisches Pendel)

Ein Massenpunkt M mit Masse $m > 0$ sei mittels einer masselosen Stange der Länge $\ell > 0$ an einem festen Punkt P aufgehängt und führe eine pendelartige Bewegung in der Ebene aus, vergleiche die Abbildung 5.5. Aufgrund der idealisierten Voraussetzungen spricht man hierbei von einem *mathematischen Pendel*.

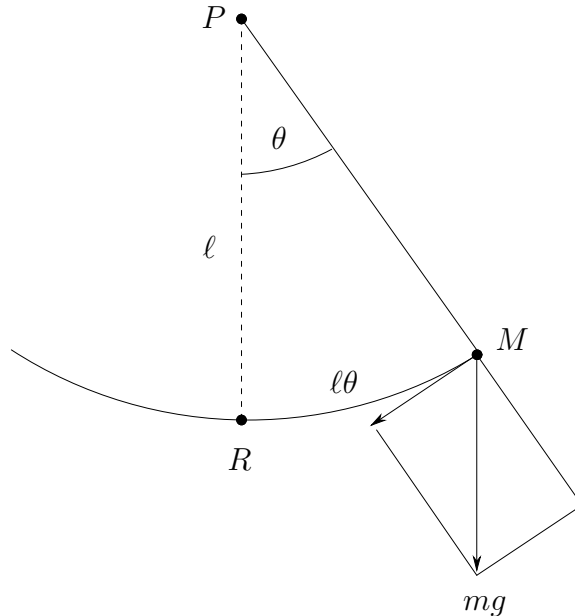


Abbildung 5.5: Veranschaulichung zum Beispiel 6.11

Die Position des Massenpunktes M lässt sich unter Vernachlässigung von Reibung mittels des Kraftgesetzes von Newton näherungsweise beschreiben durch die Bewegungsgleichungen

$$\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

mit der Gravitationskonstanten g , denn auf die Masse wirkt als tangentielle Komponente der Schwerkraft $-mg \sin \theta$ (präzise Herleitung als Aufgabe, $\theta(t)$ bezeichnet hier den Winkel zwischen der Senkrechten und dem Ausschlag zur Zeit t). Nach geeigneter Normierung können wir davon ausgehen, dass $\frac{g}{\ell} = 1$ gilt, so dass wir die nichtlineare und nicht geschlossen lösbare Differentialgleichung

$$\theta'' + \sin \theta = 0$$

erhalten. Mit $x := \theta$ und $y := \theta'$ erhalten wir das hierzu äquivalente autonome System

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \tag{5.13}$$

mit den Funktionen

$$f(x, y) := y \quad \text{und} \quad g(x, y) := -\sin x.$$

Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ist (5.13) ein Hamilton-System. Als Hamilton-Funktion von (5.13) erhält man beispielsweise

$$H(x, y) := \frac{1}{2}y^2 - \cos x.$$

Die Abbildung 5.6 enthält einige Niveaumengen

$$\begin{aligned} N(\xi, \eta) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = H(\xi, \eta)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}(y^2 - \eta^2) - \cos x + \cos \xi = 0\} \end{aligned}$$

für verschiedene Werte von $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ auf dem letztlich relevanten Bereich $[-2\pi, 2\pi] \times [-\pi, +\pi]$. ◇

5.5 Erste Integrale

Der im vorigen Abschnitt für Hamilton-Systeme im \mathbb{R}^2 beschriebene Zugang lässt sich auch auf autonome Systeme

$$y' = f(y) \tag{5.14}$$

anwenden, bei denen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge D des n -dimensionalen Raumes \mathbb{R}^n ist. Zu diesem Zweck benötigen wir den folgenden Begriff.

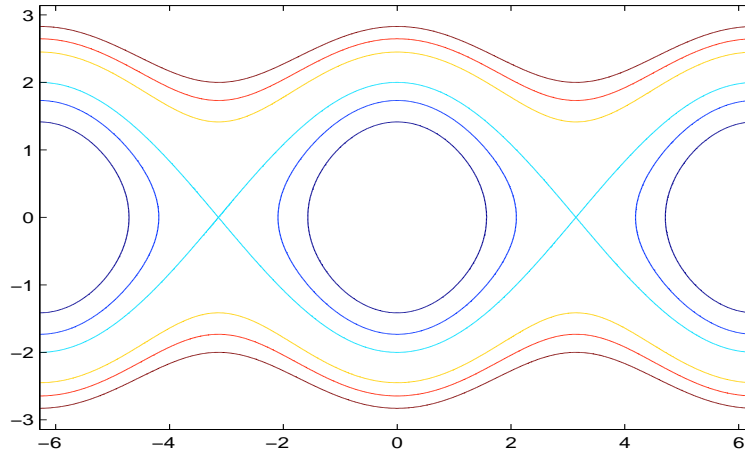


Abbildung 5.6: Einige Niveaumengen für die Hamilton-Funktion aus dem Beispiel 5.11

Definition 5.12 Eine stetig differenzierbare Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* des autonomen Systems (5.14), wenn

$$\nabla H(y)^T f(y) = 0 \quad \forall y \in D$$

gilt.

Anschaulich ist ein erstes Integral von (5.14) eine stetig differenzierbare Abbildung H , deren Gradient in jedem Punkt $y \in D$ senkrecht auf dem Vektorfeld $f(y)$ steht.

Aufgrund des nachstehenden Resultates sind Hamilton-Funktionen für ebene autonome Systeme spezielle erste Integrale.

Lemma 5.13 Sei H eine Hamilton-Funktion des ebenen autonomen Systems (5.12). Dann ist H auch ein erstes Integral von (5.12).

Beweis: Da H eine Hamilton-Funktion von (5.12) ist, handelt es sich bei H um eine stetig differenzierbare Funktion auf der Menge D mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -g(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

für alle $(x, y) \in D$. Hieraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \nabla H(x, y)^T \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} &= \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)f(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)g(x, y) \\ &= -g(x, y)f(x, y) + f(x, y)g(x, y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in D$. Also ist H ein erstes Integral von (5.12). \square

Für erste Integrale von autonomen Systemen im \mathbb{R}^n gilt ein zum Satz 5.10 analoges Resultat über den Verlauf von Trajektorien.

Satz 5.14 *Gegeben sei das autonome System (5.14) mit einer auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ferner sei $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral von (5.14). Dann ist H längs jeder Trajektorie konstant, also*

$$H(y(t; \xi)) = H(\xi)$$

für alle $\xi \in D$ und alle $t \in I_{\max}(\xi)$.

Beweis: Sei $y(t; \xi)$ die Lösung eines Anfangswertproblems $y' = f(y), y(0) = \xi$ mit beliebigem $\xi \in D$. Aus der Definition eines ersten Integrals folgt dann

$$\frac{d}{dt}H(y(t; \xi)) = \nabla H(y(t; \xi))^T y'(t; \xi) = \nabla H(y(t; \xi))^T f(y(t; \xi)) = 0$$

für alle $t \in I_{\max}(\xi)$. Daher ist $H(y(t; \xi))$ konstant für alle $t \in I_{\max}(\xi)$. Wegen $H(y(0; \xi)) = H(\xi)$ impliziert dies $H(y(t; \xi)) = H(\xi)$ für alle $t \in I_{\max}(\xi)$. \square

Wir beschließen diesen Abschnitt mit zwei Beispielen zum vorigen Satz.

Beispiel 5.15 Betrachte das autonome System

$$\begin{aligned} x' &= 2yz, \\ y' &= -xz, \\ z' &= -xy \end{aligned} \tag{5.15}$$

auf $D := \mathbb{R}^3$. Offenbar ist $H(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ ein erstes Integral des Systems (5.15). Die Niveaumengen von H sind gegeben durch

$$N(c) = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = c\} \quad (c \geq 0)$$

und beschreiben anschaulich die Sphären um den Nullpunkt. Wegen Satz 5.14 verlaufen die Trajektorien des Systems (5.15) vollständig auf diesen Sphären. Man beachte in diesem Zusammenhang allerdings, dass diese Sphären zweidimensionale Objekte sind, während es sich bei den Trajektorien im Allgemeinen um eindimensionale Gebilde handelt, so dass die Trajektorien in diesem Fall echt in den Niveaumengen $N(c)$ enthalten sind. \diamond

Beispiel 5.16 (Klassisches Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra)

Wir betrachten hier das autonome Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t)(\mu_1 - \rho_1 y_2(t)), \\ y_2'(t) &= y_2(t)(-\mu_2 + \rho_2 y_1(t)) \end{aligned} \tag{5.16}$$

aus dem Beispiel 1.12. Mittels elementarer Rechnung bestätigt man sofort, dass die Abbildung

$$H(y) := H(y_1, y_2) := \rho_2 y_1 - \mu_2 \log y_1 + \rho_1 y_2 - \mu_1 \log y_2$$

auf $D := \mathbb{R}_{++}^2$ ein erstes Integral von (5.16) bildet. Die Abbildung 5.7 enthält (für $\mu_1 = 10, \rho_1 = 10, \mu_2 = 1, \rho_2 = 1$) einige Höhenlinien dieser Funktion und liefert somit einen qualitativen Eindruck über den Verlauf der zugehörigen Trajektorien. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass wir es hier zwar mit einem ebenen autonomen System zu tun haben, dennoch unser erstes Integral H offenbar keine Hamilton-Funktion von (5.16) darstellt. Die Umkehrung des Lemmas 5.13 gilt im Allgemeinen also nicht. \diamond

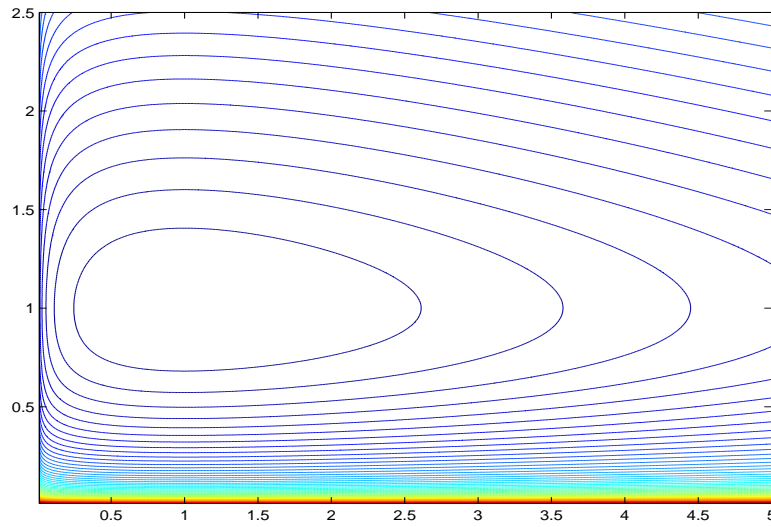


Abbildung 5.7: Einige Niveaumengen für das erste Integral aus dem Beispiel 5.16

5.6 Der Satz von Liouville

Wir betrachten zu Beginn ein Anfangswertproblem

$$y' = f(y), \quad y(0) = \xi \tag{5.17}$$

für eine autonome Differentialgleichung. Wegen Satz 3.20 hängt die Lösung $y(t; \xi)$ von (5.17) stetig vom Anfangswert ξ ab. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass diese Lösung unter gewissen Voraussetzungen sogar stetig differenzierbar von ξ abhängt. Kümmern wir uns vorübergehend mal nicht um die Existenz und Vertauschbarkeit der Ableitungen und differenzieren die beiden Gleichungen in (5.17) formal nach ξ , so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} y(t; \xi) \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{d}{dt} y(t; \xi) \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(y(t; \xi)) \right) = Df(y(t; \xi)) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} y(t; \xi), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} y(0; \xi) = I_n,$$

die Abbildung $t \mapsto \frac{\partial}{\partial \xi} y(t; \xi)$ genügt also dem (Matrix-) Anfangswertproblem

$$Y' = Df(y(t; \xi))Y, \quad Y(0) = I_n \quad (5.18)$$

mit der Einheitsmatrix $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dieses zunächst nur formal erhaltene Ergebnis wird in dem folgenden Resultat präzisiert.

Satz 5.17 *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $y(t; \xi)$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (5.17) für ein beliebiges $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann ist y nach ξ differenzierbar, und die (sogar stetig differenzierbare) Abbildung $t \mapsto \frac{\partial}{\partial \xi} y(t; \xi)$ genügt dem Anfangswertproblem (5.18).*

Beweis: Sei $\xi \in D$ gegeben und $h \in \mathbb{R}^n$ zunächst fest (aber beliebig) gewählt. Definiere hiermit die beiden Größen

$$\begin{aligned} z(t, h) &:= y(t; \xi + h) - y(t; \xi), \\ A(t, h) &:= \int_0^1 D_y f(y(t; \xi) + sz(t, h)) ds. \end{aligned}$$

Für die (per Definition existierende) Ableitung von z nach t gilt aufgrund des Mittelwertsatzes der Integralrechnung dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z(t, h) &= y'(t; \xi + h) - y'(t; \xi) \\ &= f(y(t; \xi + h)) - f(y(t; \xi)) \\ &= \int_0^1 D_y f(y(t; \xi) + sz(t, h)) ds \cdot z(t, h) \\ &= A(t, h) z(t, h). \end{aligned}$$

Wegen $z(0, h) = \xi + h - \xi = h$ löst die Abbildung $t \mapsto z(t, h)$ somit das Anfangswertproblem

$$z' = A(t, h)z, \quad z(0) = h. \quad (5.19)$$

Sei nun $Y(t, h)$ die Lösung der linearen (Matrix-) Differentialgleichung

$$Y' = A(t, h)Y \quad \text{mit dem Anfangswert} \quad Y(0) = I_n. \quad (5.20)$$

Dann ist $t \mapsto Y(t, h) \cdot h$ offenbar eine Lösung von (5.19) und daher

$$z(t, h) = Y(t, h)h$$

aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit von (5.19).

Die bisherigen Ausführungen galten für ein festes (aber beliebiges) h . Sei nun eine Folge $h \rightarrow 0$ gegeben. Dann erhalten wir

$$\|y(t; \xi + h) - y(t; \xi) - Y(t, 0)h\| = \|z(t, h) - Y(t, 0)h\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \|Y(t, h) - Y(t, 0)\| \cdot \|h\| \\ &= o(\|h\|), \end{aligned} \quad (5.21)$$

denn aufgrund des Störungssatzes 3.20 hängt die Lösung $Y(t, h)$ von (5.20) stetig von Störungen in h ab, weshalb wir

$$\|Y(t, h) - Y(t, 0)\| \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$ erhalten, und zwar gleichmäßig in $t \in I$ für jedes kompakte Intervall I . Aus (5.21) und der Definition der Differenzierbarkeit folgt nun, dass die Abbildung $\xi \mapsto y(t; \xi)$ differenzierbar ist und die Ableitung $\frac{\partial}{\partial \xi} y(t; \xi) = Y(t, 0)$ besitzt. Gemäß Definition ist $Y(t, 0)$ aber eine Lösung des Anfangswertproblems (5.20) mit $h = 0$. Wegen

$$z(t, 0) \equiv 0 \quad \text{und daher} \quad A(t, 0) = D_y f(t, y(t; \xi))$$

ist dies gerade die Behauptung des Satzes. In diesem Zusammenhang beachte man, dass wegen der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von f die Ableitung von y nach ξ als Lösung von (5.18) offenbar noch stetig ist. \square

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ wieder eine offene Menge und $y(t; \xi)$ die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(y), y(0) = \xi$ mit dem maximalen Existenzintervall $I_{\max}(\xi)$. Definiere dann die beiden Mengen

$$\begin{aligned} \Omega &:= \{(t, \xi) \mid \xi \in D, t \in I_{\max}(\xi)\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \Omega_t &:= \{\xi \in D \mid (t, \xi) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Schließlich sei noch daran erinnert, dass man eine Abbildung als einen *Diffeomorphismus* bezeichnet, wenn diese bijektiv ist und sowohl die Abbildung selbst als auch ihre Umkehrfunktion stetig differenzierbar sind.

Mit diesen Bezeichnungen und Vorbemerkungen können wir das nachstehende Resultat formulieren.

Lemma 5.18 *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann sind die Mengen Ω und Ω_t offen, und die für ein festes t definierte Abbildung*

$$\phi_t(\xi) := y(t; \xi) \quad \text{für } \xi \in \Omega_t$$

ist ein Diffeomorphismus von Ω_t auf Ω_{-t} mit der Umkehrfunktion $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$.

Beweis: Wegen Satz 3.18 sind die maximalen Existenzintervalle $I_{\max}(\xi)$ stets offen, woraus sich relativ leicht die Offenheit der beiden Mengen Ω und Ω_t ergibt.

Bevor wir die eigentliche Behauptung für die Abbildung ϕ_t beweisen, erinnern wir den Leser zunächst an das Lemma 5.2: Die beiden dort angegebenen Flussaxiome lassen sich unter Verwendung der gerade eingeführten Notation schreiben als

$$\phi_0(\xi) = \xi \quad \text{und} \quad \phi_t(\phi_s(\xi)) = \phi_{t+s}(\xi).$$

Wir werden hiervon im Folgenden ausführlich Gebrauch machen.

Es soll nun gezeigt werden, dass ϕ_t bijektiv ist. Für jedes $\xi \in \Omega_t$ gilt aufgrund der beiden Flussaxiome im Lemma 5.2 die Beziehung

$$\xi = y(0; \xi) = y(-t + t; \xi) = y(-t; y(t; \xi)) \quad \forall -t \in I_{\max}(y(t; \xi)) = I_{\max}(\xi) - t.$$

Also ist $(-t, y(t; \xi)) \in \Omega$ und daher $\phi_t(\xi) = y(t; \xi) \in \Omega_{-t}$ für alle $\xi \in \Omega_t$ sowie

$$(\phi_{-t} \circ \phi_t)(\xi) = \phi_{-t}(\phi_t(\xi)) = \phi_{-t+t}(\xi) = \xi \quad \forall \xi \in \Omega_t.$$

Somit gilt $\phi_{-t} \circ \phi_t = \text{id}_{\Omega_t}$. Analog verifiziert man die Gültigkeit von $\phi_t \circ \phi_{-t} = \text{id}_{\Omega_{-t}}$. Folglich ist ϕ_t bijektiv mit der Umkehrfunktion $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$.

Die stetige Differenzierbarkeit von $\phi_t = y(t; \cdot)$ und $\phi_t^{-1} = \phi_{-t} = y(-t; \cdot)$ folgt jetzt unmittelbar aus dem Satz 5.17. \square

Betrachte weiterhin das autonome System $y' = f(y)$ mit einer stetig differenzierbaren rechten Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist die *Divergenz* von f bekanntlich definiert als

$$\text{div } f(y) := \text{Spur}(D_y f(y)) := \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y).$$

Sei wieder $\phi_t(\xi) = y(t; \xi)$ eine Lösung von $y' = f(y)$ zu einem Anfangswert $y(0) = \xi$ mit $\xi \in D$ beliebig. Bezeichnet $M \subseteq D$ eine beliebige Teilmenge, so schreiben wir (bei festem t)

$$\phi_t(M) := y(t; M) := \{y(t; \xi) \mid \xi \in M\},$$

so dass $\phi_t(M)$ das Bild von M unter der Abbildung ϕ_t ist. Letztere ist wegen Lemma 5.18 aber ein Diffeomorphismus. Handelt es sich bei M daher um eine messbare Menge (im Sinne von Lebesgue), so ist $\phi_t(M)$ ebenfalls messbar. Schließlich bezeichnen wir mit

$$\lambda(M) := \int_M 1 dx$$

noch das *Volumen* der messbaren Menge M . Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu einem der Hauptresultate dieses Abschnittes, bei dem es sich um eine Verallgemeinerung des Satzes 4.8 auf nichtlineare Differentialgleichungen handelt.

Satz 5.19 (*Satz von Liouville*)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $K \subseteq D$ eine kompakte Menge und $M \subseteq K$ messbar. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \lambda(\phi_t(M)) = \int_{\phi_t(M)} \text{div} f(x) dx.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass für die Abbildungen $\phi_t(\xi) = y(t; \xi)$ stets $\det(D\phi_t(\xi)) > 0$ gilt. Speziell für $t = 0$ folgt aus $\phi_0(\xi) = y(0; \xi) = \xi$ offenbar

$$\det(D\phi_0(\xi)) = \det I_n = 1 \quad \forall \xi \in \Omega_0.$$

Nach Lemma 5.18 ist ϕ_t für jedes feste t aber ein Diffeomorphismus, so dass insbesondere $\det(D\phi_t(\xi)) \neq 0$ für alle $\xi \in \Omega_t$ und alle t mit $(t, \xi) \in \Omega$ gilt. Aus Stetigkeitsgründen folgt hieraus unmittelbar $\det(D\phi_t(\xi)) > 0$ für alle $\xi \in \Omega_t$ und alle t mit $(t, \xi) \in \Omega$. (Man beachte in diesem Zusammenhang, dass mit jedem $(t, \xi) \in \Omega$ auch die gesamte Verbindungsstrecke von (t, ξ) zu $(0, \xi)$ in Ω liegt.)

Aus der Definition des Volumens und dem Transformationssatz für mehrdimensionale Integrale ergibt sich daher

$$\lambda(\phi_t(M)) = \int_{\phi_t(M)} 1 dx = \int_M |\det(D\phi_t(\xi))| d\xi = \int_M \det(D\phi_t(\xi)) d\xi.$$

Per Definition ist $\phi_t(\xi) = y(t; \xi)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit dem Anfangswert $y(0) = \xi$. Wegen Satz 5.17 genügt $D\phi_t(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} y(t; \xi)$ daher der (Matrix-) Differentialgleichung (5.18). Somit bilden die Spalten von $D\phi_t(\xi)$ ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$y' = Df(\phi_t(\xi))y.$$

Sei $w(t) := \det(D\phi_t(\xi))$ die zugehörige Wronski-Determinante. Wegen Satz 4.6 gilt dann

$$\frac{d}{dt} \det D\phi_t(\xi) = w'(t) = \text{Spur}(Df(\phi_t(\xi)))w(t) = \text{div} f(\phi_t(\xi)) \det(D\phi_t(\xi)).$$

Mit einem bekannten Resultat über die Differentiation von parameterabhängigen Integralen folgt unter erneuter Verwendung des Transformationssatzes nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda(\phi_t(M)) &= \frac{d}{dt} \int_M \det(D\phi_t(\xi)) d\xi \\ &= \int_M \frac{d}{dt} \det(D\phi_t(\xi)) d\xi \\ &= \int_M \text{div} f(\phi_t(\xi)) \det D\phi_t(\xi) d\xi \\ &= \int_M \text{div} f(\phi_t(\xi)) |\det D\phi_t(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\phi_t(M)} \text{div} f(x) dx, \end{aligned}$$

so dass der Satz vollständig bewiesen ist. □

Eine wichtige Konsequenz des vorigen Satzes ist in dem folgenden Resultat angegeben.

Korollar 5.20 Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 5.19 von Liouville sei f **divergenzfrei** auf D (also $\operatorname{div} f(y) = 0$ für alle $y \in D$). Dann gilt

$$\lambda(\phi_t(M)) = \lambda(M)$$

für alle messbaren Teilmengen $M \subseteq K$, die Abbildung ϕ_t ist also volumenerhaltend.

Beweis: Aus Satz 5.19 folgt sofort

$$\frac{d}{dt} \lambda(\phi_t(M)) = 0$$

für alle t und daher $\lambda(\phi_t(M)) = \lambda(\phi_0(M))$ für alle t . Wegen

$$\phi_0(M) = y(0; M) = \{y(0; \xi) \mid \xi \in M\} = \{\xi \mid \xi \in M\} = M$$

ist dies gerade die Behauptung. □

Wie man leicht bestätigt, ist insbesondere jedes Hamilton-System divergenzfrei und das Korollar 5.20 daher insbesondere auf derartige Systeme anwendbar.

Um eine weitere Folgerung aus dem Satz 5.19 von Liouville zu formulieren, benötigen wir noch den Begriff einer invarianten Menge.

Definition 5.21 Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Eine Menge $M \subseteq D$ heißt

- (a) **invariant**, wenn $T(\xi) \subseteq M$ für alle $\xi \in M$ gilt;
- (b) **positiv invariant**, wenn $T^+(\xi) \subseteq M$ für alle $\xi \in M$ gilt;
- (b) **negativ invariant**, wenn $T^-(\xi) \subseteq M$ für alle $\xi \in M$ gilt.

Eine Menge $M \subseteq D$ ist also genau dann invariant, wenn sie sowohl positiv als auch negativ invariant ist. Invariante Menge sind also dadurch gekennzeichnet, dass die durch einen Punkt ξ dieser Menge verlaufende Trajektorie $T(\xi)$ stets in dieser Menge verbleibt. Insbesondere ist jede Trajektorie $M := T(\xi)$ eine invariante Menge, und zwar die kleinste invariante Menge, die den Punkt ξ enthält.

Satz 5.22 (**Wiederkehrrsatz von Poincaré**)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und divergenzfrei auf D sowie $K \subseteq D$ eine kompakte und invariante Menge der autonomen Gleichung $y' = f(y)$. Ist $M \subseteq K$ eine messbare Menge, so existiert für fast jedes $\xi \in M$ eine Folge $t_k \rightarrow \infty$ mit

$$\phi_{t_k}(\xi) \in M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Da K eine invariante Menge ist, gilt $T(\xi) \subseteq K$ für alle Anfangswerte $\xi \in K$. Die Kompaktheit von K liefert außerdem $I_{\max}(\xi) = \mathbb{R}$ für alle $\xi \in K$. Daher existieren für solche ξ insbesondere Folgen $t_k \rightarrow \infty$, auf denen man das Verhalten der zugehörigen Lösungen $\phi_{t_k}(\xi) = y(t_k; \xi)$ betrachten kann.

Sei $M \subseteq K$ nun eine beliebige messbare Menge. Für $\xi \in K$ und $k \in \mathbb{N}$ ist wegen der Invarianz von K offenbar

$$\phi_k(\xi) \notin M \iff \phi_k(\xi) \in K \setminus M \iff \xi \in \phi_{-k}(K \setminus M).$$

Folglich ist

$$B_\ell := M \cap \bigcap_{k \geq \ell} \phi_{-k}(K \setminus M)$$

die (messbare) Menge aller Punkte $\xi \in M$, für die $\phi_k(\xi) \notin M$ für alle $k \geq \ell$ gilt. Somit ist

$$B := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} B_\ell$$

die Menge aller Punkte $\xi \in M$, so dass für höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$ auch $\phi_k(\xi) \in M$ gilt. Wir zeigen nun, dass $\lambda(B_\ell) = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt, was natürlich $\lambda(B) = 0$ und damit die eigentliche Behauptung impliziert.

Für beliebiges $\xi \in B_\ell$ ist $\phi_k(\xi) \notin M$ für alle $k \geq \ell$, insbesondere also $\phi_{j\ell}(\xi) \notin M$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also auch $\phi_{j\ell}(\xi) \notin B_\ell$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dies liefert

$$B_\ell \cap \phi_{j\ell}(B_\ell) = \emptyset \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.22)$$

Also sind die Mengen $\phi_{j\ell}(B_\ell)$ ($j \in \mathbb{N}$) paarweise disjunkt, denn gäbe es ein $\xi \in \phi_{j\ell}(B_\ell) \cap \phi_{m\ell}(B_\ell)$ für gewisse $1 \leq j < m$, so würden $\xi_j, \xi_m \in B_\ell$ existieren mit $\phi_{j\ell}(\xi_j) = \xi = \phi_{m\ell}(\xi_m)$, woraus wir unter Benutzung der Lemmata 5.2 und 5.18 aber den Widerspruch

$$\begin{aligned} \xi_j &= \phi_{j\ell}^{-1}(\phi_{j\ell}(\xi_j)) \\ &= \phi_{j\ell}^{-1}(\phi_{m\ell}(\xi_m)) \\ &= \phi_{-j\ell}(\phi_{m\ell}(\xi_m)) \\ &= \phi_{(m-j)\ell}(\xi_m) \\ &\in B_\ell \cap \phi_{(m-j)\ell}(B_\ell) \end{aligned}$$

zu (5.22) erhielten. Aus der σ -Additivität des Lebesgue-Maßes und der Invarianz von K folgt daher

$$\infty > \lambda(K) \geq \lambda\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \phi_{j\ell}(B_\ell)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda(\phi_{j\ell}(B_\ell)) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda(B_\ell),$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus dem Korollar 5.20 ergibt. Dies impliziert aber zwangsläufig $\lambda(B_\ell) = 0$. \square

Der Satz 5.22 besagt insbesondere, dass fast jeder Punkt einer kompakten invarianten Menge eines Hamilton-Systems beliebig oft nahe zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

Kapitel 6

Qualitative Theorie und Stabilität

- 6.1 Trennungs-, Oszillations- und Amplitudensätze
- 6.2 Gleichgewichtspunkte und Stabilität
- 6.3 Stabilität bei linearen Differentialgleichungen
- 6.4 Linearisierte Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen
- 6.5 Die direkte Methode von Lyapunov

6.1 Trennungs-, Oszillations- und Amplitudensätze

Wir betrachten in diesem Abschnitt einige qualitative Aussagen über die Lösungen von (homogenen) linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten.

Satz 6.1 (Trennungssatz von Sturm)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $a_0, a_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und betrachte die Differentialgleichung

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (6.1)$$

Dann gelten:

- (a) Die Nullstellen jeder nichttrivialen Lösung von (6.1) sind allesamt einfach und besitzen keinen Häufungspunkt in I .
- (b) Die Nullstellen zweier linear unabhängiger Lösungen y_1, y_2 von (6.1) „trennen“ sich, d.h., zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der einen Lösung liegt genau eine Nullstelle der anderen Lösung.

Beweis: (a) Sei y eine nichttriviale Lösung von (6.1). Angenommen, y hat eine mehrfache Nullstelle $\xi \in I$. Dann ist $y(\xi) = 0$ und $y'(\xi) = 0$. Also löst y das Anfangswertproblem

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \quad y(\xi) = 0, y'(\xi) = 0.$$

Dieses hat wegen Satz 4.23 genau eine Lösung. Da die Nullfunktion dieses Anfangswertproblem löst, erhalten wir den Widerspruch $y \equiv 0$.

Zum Beweis der zweiten Aussage nehmen wir an, dass sich die Nullstellen einer nicht-trivialen Lösung y von (6.1) in einem Punkt $t_* \in I$ häufen. Dann existiert eine Folge von Nullstellen $\{t_k\}$ mit $t_k \rightarrow t_*$. Aus der stetigen Differenzierbarkeit von y folgt dann

$$y(t_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(t_k) = 0 \quad \text{und} \quad y'(t_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y(t_k) - y(t_*)}{t_k - t_*} = 0.$$

Also wäre y eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \quad y(t_*) = 0, y'(t_*) = 0.$$

Wie oben erhalten wir hieraus jedoch den Widerspruch $y \equiv 0$.

(b) Seien y_1, y_2 zwei linear unabhängige Lösungen von (6.1) und $\xi_1 < \xi_2$ zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von y_2 . Dann ist die zugehörige Wronski-Determinante (vergleiche (4.23))

$$w(t) := y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$$

für alle $t \in I$ von Null verschieden, aus Stetigkeitsgründen also ständig positiv oder ständig negativ. Ohne Einschränkung gelte $w(t) > 0$ für alle $t \in I$ (anderenfalls folgt der Beweis analog). Dann ist insbesondere

$$w(\xi_k) = y_1(\xi_k)y_2'(\xi_k) > 0 \quad \text{für } k = 1, 2. \quad (6.2)$$

Insbesondere sind die vier Zahlen $y_1(\xi_1), y_1(\xi_2), y_2'(\xi_1), y_2'(\xi_2)$ alle von Null verschieden. Wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $y_2'(\xi_1) > 0$. Dann geht y_2 streng monoton wachsend durch die Nullstelle ξ_1 . Folglich muss $y_2'(\xi_2) < 0$ gelten, denn anderenfalls müsste zwischen ξ_1 und ξ_2 aus Stetigkeitsgründen noch eine weitere Nullstelle liegen (beachte hierbei, dass ξ_1, ξ_2 wegen Teil (a) einfache Nullstellen sind). Gemeinsam mit (6.2) ergibt sich hieraus $y_1(\xi_1) > 0$ und $y_1(\xi_2) < 0$. Aus dem Zwischenwertsatz erhalten wir daher die Existenz von mindestens einer Nullstelle ζ_1 in dem Intervall (ξ_1, ξ_2) . Eine zweite Nullstelle ζ_2 von y_1 kann in dem Intervall (ξ_1, ξ_2) nicht existieren, denn sonst könnten wir unsere obige Argumentation (mit vertauschten Rollen von y_1 und y_2) anwenden und erhielten den Widerspruch, dass die Funktion y_2 in dem Teilintervall $(\zeta_1, \zeta_2) \subseteq (\xi_1, \xi_2)$ (bzw. $(\zeta_2, \zeta_1) \subseteq (\xi_1, \xi_2)$) eine weitere Nullstelle haben müsste. \square

Es sei ausdrücklich erwähnt, dass der Trennungssatz 6.1 keinerlei Aussagen über die Existenz von Nullstellen macht, sondern lediglich die Verteilung von eventuell vorhandenen Nullstellen beschreibt. Insbesondere erhalten wir aus dem Satz 6.1, dass eine nichttriviale Lösung von (6.1) auf einem kompakten Intervall I höchstens endlich viele Nullstellen haben kann, da es anderenfalls doch einen Häufungspunkt in I geben müsste.

Beispiel 6.2 Die Differentialgleichung

$$y'' + y = 0$$

besitzt zum Beispiel die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(t) := \sin t \quad \text{und} \quad y_2(t) := \cos t,$$

deren Nullstellen gegeben sind durch

$$\zeta_k := k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \xi_k := \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Dies sind jeweils abzählbar viele Nullstellen, die sich im Sinne des Satzes 6.1 trennen. \diamond

Für die verbleibenden Ausführungen in diesem Abschnitt betrachten wir statt der Differentialgleichung (6.1) mit stetigen Funktionen $a_0, a_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$\textcolor{red}{L}u := (p(t)u')' + q(t)u = 0 \tag{6.3}$$

mit $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und positiv auf I . Ausdifferenzieren liefert die zu (6.3) äquivalente Differentialgleichung

$$p(t)u'' + p'(t)u'(t) + q(t)u = 0. \tag{6.4}$$

Obwohl (6.3) bzw. (6.4) sehr speziell anmutet, handelt es sich letzten Endes nur um eine andere Schreibweise von (6.1). Offenbar ist (6.4) und damit auch (6.3) von der Gestalt (6.1), wenn man (6.4) einfach durch den (als positiv vorausgesetzten) Term $p(t)$ dividiert.

Umgekehrt lässt sich (6.1) immer auf eine Differentialgleichung der Form (6.3) bringen. Dazu wählt man eine Stammfunktion $A_1(t)$ von der stetigen Abbildung $a_1(t)$ und multipliziert die Differentialgleichung durch mit der stetig differenzierbaren und auf ganz I positiven Funktion $p(t) := \exp(A_1(t))$. Mit $q(t) := p(t)a_0(t)$ erhält man dann eine Differentialgleichung der Form (6.3).

Im Folgenden können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass wir eine lineare Differentialgleichung der Gestalt (6.3) vorliegen haben. Für eine derartige Differentialgleichung gilt beispielsweise das folgende Resultat.

Satz 6.3 (Vergleichssatz von Sturm)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und positiv, $q_1, q_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie u, v nichttriviale Lösungen von

$$(pu')' + q_1u = 0 \quad \text{bzw.} \quad (pv')' + q_2v = 0. \tag{6.5}$$

Gilt dann

$$q_2(t) < q_1(t) \quad \text{für alle } t \in I, \tag{6.6}$$

so liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von v mindestens eine Nullstelle von u .

Beweis: Seien $\xi_1, \xi_2 \in I$ zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von v (mit $\xi_1 < \xi_2$). Multiplizieren wir die erste der beiden Differentialgleichungen in (6.5) mit v und die zweite mit u , so erhalten wir nach Subtraktion den Ausdruck

$$u(pv')' - v(pu')' + (q_2 - q_1)uv = 0. \quad (6.7)$$

Definieren wir noch den Operator

$$Lu := (pu')' + q_1u,$$

so bestätigt man durch einfache Rechnung die Gültigkeit der so genannten **Lagrange-Identität**

$$u(pv')' - v(pu')' = u \cdot Lv - v \cdot Lu = \frac{d}{dt}(p(t)[u(t)v'(t) - v(t)u'(t)]) \quad \forall t \in I. \quad (6.8)$$

Aus (6.7) und (6.8) folgt daher

$$\frac{d}{dt}(p(t)[u(t)v'(t) - v(t)u'(t)]) + (q_2(t) - q_1(t))u(t)v(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Integration von ξ_1 nach ξ_2 liefert unter Ausnutzung von $v(\xi_1) = v(\xi_2) = 0$ daher

$$p(\xi_2)u(\xi_2)v'(\xi_2) - p(\xi_1)u(\xi_1)v'(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (q_1(t) - q_2(t))u(t)v(t)dt. \quad (6.9)$$

Nun hat v auf dem Teilintervall (ξ_1, ξ_2) stets dasselbe Vorzeichen, das wir ohne Einschränkung als positiv annehmen. Der Beweis erfolgt jetzt durch Widerspruch.

Angenommen, u hat keine Nullstelle in (ξ_1, ξ_2) . Dann hat auch u ein konstantes Vorzeichen auf (ξ_1, ξ_2) , das erneut ohne Einschränkung als positiv angenommen werden darf. Wegen (6.6) ist das Integral in (6.9) dann positiv. Somit ist auch

$$p(\xi_2)u(\xi_2)v'(\xi_2) - p(\xi_1)u(\xi_1)v'(\xi_1) > 0. \quad (6.10)$$

Wegen $v(\xi_1) = v(\xi_2) = 0$ und $v(t) > 0$ für $t \in (\xi_1, \xi_2)$ ist

$$v'(\xi_1) > 0 \quad \text{und} \quad v'(\xi_2) < 0$$

(wegen Satz 6.1 ist zumindest $v'(\xi_1) \neq 0, v'(\xi_2) \neq 0$). Unter Verwendung von $p(\xi_1) > 0, p(\xi_2) > 0$ und $u(\xi_1) \geq 0, u(\xi_2) \geq 0$ ergibt sich somit

$$p(\xi_2)u(\xi_2)v'(\xi_2) - p(\xi_1)u(\xi_1)v'(\xi_1) \leq 0$$

im Widerspruch zu (6.10). □

Beispiel 6.4 Betrachte die beiden Differentialgleichungen

$$u'' + u = 0 \quad \text{und} \quad v'' + \frac{1}{4}v = 0.$$

Jeweils eine nichttriviale Lösung dieser Differentialgleichungen ist gegeben durch

$$u(t) := \sin t \quad \text{und} \quad v(t) := \sin(t/2).$$

Die Nullstellen von u sind $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), während v die Nullstellen $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) besitzt. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von v liegt also stets eine Nullstelle von u (nicht jedoch umgekehrt). Dies ist konform mit der Aussage des Satzes 6.3. \diamond

Keines der bisherigen Resultate garantiert bislang die Existenz von Nullstellen. Dies wird nun nachgeholt. Dabei nennen wir die Differentialgleichung

$$Lu := (pu')' + qu = 0 \tag{6.11}$$

oszillatorisch auf dem Intervall I , wenn jede (nichttriviale) Lösung dieser Differentialgleichung unendlich viele Nullstellen besitzt.

Satz 6.5 (*Oszillationssatz*)

Seien $I := [a, \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}$, $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und positiv sowie $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ferner gelte

$$q(t) > 0 \quad \text{für alle } t \in I, \tag{6.12}$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{p(t)} dt = \infty, \tag{6.13}$$

$$\int_a^\infty q(t) dt = \infty. \tag{6.14}$$

Dann ist die Differentialgleichung (6.11) *oszillatorisch* auf $I = [a, \infty)$.

Beweis: Sei u eine nichttriviale Lösung von (6.11) und

$$v := pu', \quad \text{also} \quad v' = -qu. \tag{6.15}$$

Dann existiert kein $\xi \in I$ mit $u(\xi) = 0$ und $v(\xi) = 0$, denn sonst wäre wegen (6.15) sowohl $u(\xi) = 0$ als auch $u'(\xi) = 0$ und daher $u \equiv 0$ aufgrund eines mittlerweile vertrauten Arguments. Also ist

$$r(t) := \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2} > 0 \quad \forall t \in I,$$

und durch Einführung von kontinuierlichen Polarkoordinaten (so genannte *Prüfer-Transformation*) erhalten wir daher stetig differenzierbare Funktionen r und φ mit

$$u(t) = r(t) \sin \varphi(t) \quad \text{und} \quad v(t) = r(t) \cos \varphi(t) \quad \text{für } t \in I. \tag{6.16}$$

Falls nun $\varphi(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ strebt, so verschwindet $\sin \varphi(t)$ und daher auch $u(t)$ unendlich oft und die Behauptung wäre damit bewiesen.

Zu diesem Zweck stellen wir zunächst fest, dass φ zumindest monoton wächst. Aus (6.16) folgt durch Differentiation nämlich

$$u' = r' \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \varphi' \quad \text{und} \quad v' = r' \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \varphi'.$$

Andererseits haben wir

$$u' = \frac{v}{p} = \frac{1}{p} r \cos \varphi \quad \text{und} \quad v' = -qu = -qr \sin \varphi$$

wegen (6.15) und (6.16). Gleichsetzen der letzten beiden Ausdrücke für u' und v' liefert

$$r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \varphi' = \frac{1}{p} r \cos \varphi \quad \text{und} \quad r' \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \varphi' = -qr \sin \varphi.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\cos \varphi$, die zweite mit $-\sin \varphi$ und addieren wir anschließend die erhaltenen Identitäten, so bekommt man unter zusätzlicher Verwendung von (6.12)

$$\varphi' = \frac{1}{p} \cos^2 \varphi + q \sin^2 \varphi > 0. \quad (6.17)$$

Dies liefert die Monotonie von φ . Der Rest des Beweises erfolgt nun durch Widerspruch.

Angenommen, φ ist beschränkt. Dann existiert der Grenzwert $\varphi_* := \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$ und damit auch die Grenzwerte

$$\alpha := \lim_{t \rightarrow \infty} \cos^2 \varphi(t) \quad \text{und} \quad \beta := \lim_{t \rightarrow \infty} \sin^2 \varphi(t),$$

wobei offensichtlich $\alpha + \beta = 1$ gilt, also mindestens eine der beiden nichtnegativen Zahlen α, β sogar positiv ist. Wähle $t_0 \geq a$ mit

$$\cos^2 \varphi(t) \geq \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \sin^2 \varphi(t) \geq \frac{\beta}{2} \quad \text{für alle } t \geq t_0.$$

Für diese t gilt wegen (6.17) dann

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi(t_0) &= \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t \frac{1}{p} \cos^2 \varphi + q \sin^2 \varphi ds \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \int_{t_0}^t \frac{1}{p(s)} ds + \frac{\beta}{2} \int_{t_0}^t q(s) ds \quad (\text{mit } \alpha > 0 \text{ oder } \beta > 0). \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow +\infty$ folgt aus den Voraussetzungen (6.13), (6.14) dann $\varphi_* - \varphi(t_0) \geq \infty$ im Widerspruch zur angenommenen Endlichkeit von φ_* . Also gilt $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ für $t \rightarrow +\infty$, womit die Behauptung bewiesen ist, wie wir weiter oben eingesehen haben. \square

Beispiel 6.6 Betrachte die Differentialgleichung

$$y'' + ty' + y = 0,$$

die sich offenbar in der Gestalt (6.11) mit $p(t) := t$ und $q \equiv 1$ schreiben lässt. Dann sind alle Voraussetzungen des Satzes 6.5 erfüllt, wenn man ein Intervall $I := [a, +\infty)$ mit $a > 0$ wählt. Hierzu beachte man, dass das uneigentliche Integral $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ bekanntlich divergiert. Die Differentialgleichung ist also oszillatorisch.

Für physikalisch-technische Zwecke ist das folgende Theorem von besonderer Bedeutung, in dem wir unter den **Amplituden** („Ausschlägen“) einer Funktion die Absolutbeträge ihrer relativen Extrema verstehen.

Satz 6.7 (**Amplitudensatz**)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und positiv sowie $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Hat q keine Nullstelle in I und ist das Produkt pq monoton (wachsend oder fallend), so verhalten sich die Amplituden jeder nichttrivialen Lösung der Differentialgleichung (6.3) bei wachsendem t gerade umgekehrt wie pq , nehmen also zu (ab), wenn pq abnimmt (zunimmt).

Beweis: Sei u eine nichttriviale Lösung und

$$v := u^2 + \frac{1}{pq}(pu')^2 \quad (6.18)$$

(nach Voraussetzung ist der Nenner $p(t)q(t)$ für alle $t \in I$ von Null verschieden). Differentiation liefert

$$\begin{aligned} v' &= 2uu' + \frac{1}{pq} \cdot \underbrace{2pu'(pu')'}_{=-qu} - \frac{(pq)'}{(pq)^2} \cdot (pu')^2 \\ &= 2uu' - 2uu' - (pq)' \left(\frac{u'}{q} \right)^2 \\ &= -(pq)' \left(\frac{u'}{q} \right)^2. \end{aligned}$$

Folglich gilt $v' \geq 0$ ($v' \leq 0$), wenn $(pq)' \leq 0$ ($(pq)' \geq 0$) ist, d.h., v nimmt zu (ab), wenn pq abnimmt (zunimmt). Nun ist aber $u'(\xi) = 0$ für jedes relative Extremum von u gilt (wobei ξ natürlich aus dem Inneren von I stammen muss) und wegen (6.18) somit $v(\xi) = u(\xi)^2$ in jedem solchen Punkt ξ . Bezeichnen ξ_1 und ξ_2 daher zwei aufeinanderfolgende lokale Extrema von u , so folgt $|u(\xi_1)| \geq |u(\xi_2)|$, falls pq monoton wächst, und $|u(\xi_1)| \leq |u(\xi_2)|$, falls pq monoton fällt. Dies ist gerade die Behauptung. \square

Der Beweis des Satzes 6.7 zeigt sogar, dass die Amplituden jeder nichttrivialen Lösung streng monoton wachsen (fallen), wenn das Produkt pq streng monoton fällt (wächst).

Beispiel 6.8 (Besselsche Differentialgleichung)

Wir betrachten die Besselsche Differentialgleichung

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0$$

mit einem Parameter $\nu \geq 0$ auf einem Intervall der Form $I := [a, +\infty)$ für ein $a > \nu$. Auf einem solchen Intervall können wir die Differentialgleichung dann äquivalent schreiben als

$$(ty')' + \left(t - \frac{\nu^2}{t}\right)y = 0.$$

Mit $p(t) := t$ und $q(t) := t - \frac{\nu^2}{t}$ erhalten wir also gerade eine Differentialgleichung der Form (6.3). Aus dem Oszillationssatz 6.5 folgt sofort, dass jede nichttriviale Lösung der Besselschen Differentialgleichung unendlich viele Nullstellen hat. Wegen

$$p \cdot q = t^2 - \nu^2 \text{ streng monoton wachsend für } t \rightarrow \infty$$

ergibt sich aus dem Amplitudensatz 6.7 ferner, dass die Ausschläge jeder nichttrivialen Lösung auf dem Intervall $[a, \infty)$ streng monoton fallen.

6.2 Gleichgewichtspunkte und Stabilität

Wir betrachten in diesem und den folgenden Abschnitten ausschließlich autonome Systeme

$$y' = f(y) \tag{6.19}$$

mit einer Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Im Hinblick auf den Satz 1.17 stellt die Betrachtung von solchen autonomen Systemen keine große Einschränkung dar. Im Mittelpunkt des Interesses steht die Frage nach dem Langzeitverhalten von Lösungen des Systems (6.19), also das Verhalten von Lösungen $y(t)$ für $t \rightarrow \infty$. Wann sind solche Lösungen beschränkt bzw. unbeschränkt? Konvergieren die Lösungen vielleicht sogar gegen eine spezielle Grenzfunktion? Die Beantwortung solcher Fragen hängt sicherlich von der zusätzlich gegebenen Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ ab, wenn man den Anfangswert y_0 hierbei variiert. Für den Anfangszeitpunkt t_0 können wir im Folgenden hingegen ohne Einschränkung stets $t_0 = 0$ betrachten.

Definition 6.9 Ein $p \in D$ mit $f(p) = 0$ heißt *Gleichgewichtspunkt, Ruhepunkt oder stationärer Punkt* der Differentialgleichung (6.19).

Jeder Gleichgewichtspunkt p liefert mittels der Setzung $y(t) \equiv p$ offenbar eine Lösung der autonomen Differentialgleichung (6.19). Diese Lösung ist konstant, sie ruht also und ändert sich nicht mehr.

Zur Illustration dieses Begriffes betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 6.10 (a) Die lineare Differentialgleichung $y' = Ay$ mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat stets $p := 0$ als stationären Punkt. Ist A regulär, so handelt es sich hierbei auch um den einzigen stationären Punkt.

- (b) Das klassische Räuber–Beute–Modell von Lotka–Volterra aus dem Beispiel 1.12 hat die Gestalt

$$y' = f(y) \quad \text{mit} \quad f(y) := f(y_1, y_2) := \begin{pmatrix} y_1(\mu_1 - \rho_1 y_2) \\ y_2(-\mu_2 + \rho_2 y_1) \end{pmatrix}$$

mit gewissen positiven Konstanten μ_i, ρ_i ($i = 1, 2$). Gehen wir einmal von dem einzig interessanten Fall aus, dass die Populationen y_1 und y_2 stets positiv sind, so ist $p \in \mathbb{R}^2$ genau dann ein stationärer Punkt dieser nichtlinearen Differentialgleichung, wenn $\mu_1 - \rho_1 y_2 = 0$ und $-\mu_2 + \rho_2 y_1 = 0$ gelten. Damit erhalten wir $p := \left(\frac{\mu_2}{\rho_2}, \frac{\mu_1}{\rho_1}\right)^T$ als einzigen stationären Punkt für das klassische Räuber–Beute–Modell. \diamond

Wir geben noch ein weiteres Beispiel, das den Begriff einer Ruhelage oder eines stationären Punktes besonders gut veranschaulicht.

Beispiel 6.11 (Mathematisches Pendel)

Wir betrachten wieder die schon im Beispiel 5.11 aufgetretende nichtlineare Differentialgleichung

$$\theta'' + \sin \theta = 0$$

des mathematischen Pendels. Mittels der Transformation $y_1 := \theta, y_2 := \theta'$ bekommen wir das hierzu äquivalente autonome System

$$y' = f(y) \quad \text{mit} \quad f(y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}.$$

Dieses System hat offenbar die stationären Punkte

$$p = \begin{pmatrix} n\pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Anschaulich sind dies nur zwei verschiedene Punkte: Für gerade n erhält man den Fall, wo sich die Masse genau unter dem Aufhängepunkt befindet (vertikal nach unten hängend, $\theta = 0$), für ungerade n hingegen befindet sich die Masse genau oberhalb des Aufhängepunktes (vertikal nach oben stehend, $\theta = \pi$), vergleiche die Abbildung 5.5. \diamond

Eng verknüpft mit den Gleichgewichtspunkten ist der Begriff der Stabilität, den wir hier zunächst etwas unmathematisch diskutieren wollen, bevor eine formale Definition eingeführt wird. Dazu kommen wir noch einmal auf das mathematische Pendel zurück. Sei p eine der beiden Ruhelagen. Was passiert nun, wenn wir diese Ruhelage etwas stören, etwa durch leichtes Anticken des Massenpunktes M ? Dies hängt offenbar ganz wesentlich davon ab, in welcher Ruhelage sich der Massenpunkt befunden hat: Befand sich die Masse senkrecht unter dem Aufhängepunkt, so wird sie sich für $t \rightarrow \infty$ wieder in diesen Zustand einpendeln (sofern Reibung berücksichtigt wird, was im obigen Modell allerdings nicht der Fall war). Man wird eine solche Ruhelage daher als stabil bezeichnen. Befand sich die Masse

hingegen senkrecht über dem Aufhängepunkt, so wird das System kippen und für $t \rightarrow \infty$ in die andere (als stabil bezeichnete) Ruhelage einpendeln. Eine solche Ruhelage wird man daher als instabil bezeichnen.

Zur Motivation betrachten wir noch einige weitere Beispiele.

Beispiel 6.12 (a) Sei y eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y, \quad y(0) = y_0.$$

Ferner sei z eine Lösung des leicht gestörten Problems

$$z' = z, \quad z(0) = y_0 + \varepsilon$$

für ein kleines $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$y(t) = y_0 e^t \quad \text{und} \quad z(t) = (y_0 + \varepsilon) e^t$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt

$$z(t) - y(t) = \varepsilon e^t.$$

Eine kleine Störung des Anfangswertes bewirkt also, dass die beiden Lösungen wie e^t für $t \rightarrow +\infty$ auseinanderdriften, d.h., der zunächst kleine Fehler bei $t = 0$ wird mit zunehmender Zeit beliebig groß (und nimmt sogar exponentiell zu).

(b) Seien y und z jetzt Lösungen der beiden Anfangswertprobleme

$$y' = -y, \quad y(0) = y_0$$

und

$$z' = -z, \quad z(0) = y_0 + \varepsilon$$

für eine kleine Störung $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$y(t) = y_0 e^{-t} \quad \text{und} \quad z(t) = (y_0 + \varepsilon) e^{-t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$z(t) - y(t) = \varepsilon e^{-t} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad t \rightarrow +\infty,$$

so dass der Fehler von anfänglich $\varepsilon > 0$ immer kleiner wird und asymptotisch schließlich verschwindet. \diamond

Nach diesen Vorbereitungen führen wir nun auch ganz formal die verschiedenen Stabilitätsbegriffe ein.

Definition 6.13 Sei y eine auf $[0, +\infty)$ definierte Lösung des autonomen Differentialgleichungssystems (6.19) mit einer Lipschitz-stetigen Funktion f .

- (a) Die Lösung y heißt **stabil**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle Lösungen z von $z' = f(z)$ mit

$$\|y(0) - z(0)\| < \delta$$

für alle $t \geq 0$ existieren und der Ungleichung

$$\|y(t) - z(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in [0, +\infty)$$

genügen.

- (b) Die Lösung y heißt **attraktiv**, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass alle Lösungen z von $z' = f(z)$ mit

$$\|y(0) - z(0)\| < \delta$$

für alle $t \geq 0$ existieren und der Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - z(t)\| = 0$$

genügen.

- (c) Die Lösung y heißt **asymptotisch stabil**, wenn sie sowohl stabil als auch attraktiv ist.
 (d) Die Lösung y heißt **instabil**, wenn sie nicht stabil ist.

Jeder Gleichgewichtspunkt p von (6.19) liefert natürlich die konstante Lösung $y(t) \equiv p$ von (6.19). Wir nennen einen solchen Gleichgewichtspunkt daher stabil, asymptotisch stabil bzw. instabil, wenn diese konstante Lösung im obigen Sinne stabil, asymptotisch stabil bzw. instabil ist. Attraktive Lösungen werden im Folgenden keine Rolle spielen. Es sei allerdings ausdrücklich erwähnt, dass es durchaus attraktive Lösungen gibt, die nicht stabil und daher insbesondere nicht asymptotisch stabil sind (Aufgabe).

Das folgende Resultat besagt, dass wir uns bei der Untersuchung von Stabilitätseigenschaften im Prinzip auf stationäre Lösungen beschränken können, und hierbei sogar nur die triviale Lösung untersuchen müssen.

Lemma 6.14 Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = f(y) \tag{6.20}$$

mit einer auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ definierten Lipschitz-stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei ferner $y^* = y^*(t)$ eine auf dem Intervall $[0, +\infty)$ existierende Lösung von (6.20). Setze hiermit

$$x := y - y^*(t)$$

und betrachte die entsprechend transformierte Differentialgleichung

$$x' = f(x + y^*(t)) - f(y^*(t)). \tag{6.21}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Die transformierte Differentialgleichung (6.21) besitzt die auf dem Intervall $[0, \infty)$ definierte triviale Lösung $x^* \equiv 0$.
- (b) Die triviale Lösung x^* von (6.21) ist genau dann stabil (attraktiv, asymptotisch stabil, instabil), wenn die Lösung y^* von (6.20) stabil (attraktiv, asymptotisch stabil, instabil) ist.

Beweis: Die Aussage (a) ist klar, so dass lediglich Teil (b) bewiesen werden muss. Zu diesem Zweck verifizieren wir lediglich, dass x^* genau dann stabil für (6.21) ist, wenn y^* stabil für (6.20) ist. Die entsprechende Charakterisierung der Attraktivität lässt sich völlig analog zeigen. Die Aussage über asymptotische Stabilität folgt dann aus jener über Stabilität und Attraktivität, während sich die Äquivalenz der Instabilität durch Negation der Stabilität ergibt.

Sei zunächst $x^* \equiv 0$ stabil für (6.21) sowie $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann existiert ein zugehöriges $\delta > 0$ derart, dass alle Lösungen x von (6.21) mit $\|x(0) - x^*(0)\| = \|x(0)\| < \delta$ für alle $t \geq 0$ existieren und der Ungleichung $\|x(t)\| = \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \in [0, +\infty)$ genügen. Hieraus folgt für alle Lösungen y von (6.20) mit $\|y(0) - y^*(0)\| < \delta$ unmittelbar

$$\|y(t) - y^*(t)\| = \|x(t)\| < \varepsilon,$$

denn $x(t) := y(t) - y^*(t)$ ist dann gerade eine Lösung von (6.21) mit $\|x(0)\| < \delta$. Also ist y^* eine stabile Lösung von (6.20).

Seien umgekehrt y^* eine stabile Lösung von (6.20) und $\varepsilon > 0$ wieder beliebig gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\|y(t) - y^*(t)\| < \varepsilon$ für alle Lösungen y von (6.20) mit $\|y(0) - y^*(0)\| < \delta$. Für jede Lösung x von (6.21) mit $\|x(0)\| < \delta$ ergibt sich dann

$$\|x(t)\| = \|y(t) - y^*(t)\| < \varepsilon,$$

denn $y(t) := x(t) + y^*(t)$ ist dann gerade eine Lösung von (6.20) mit $\|y(0) - y^*(0)\| = \|x(0)\| < \delta$. Somit ist x^* eine stabile Lösung von (6.21). \square

6.3 Stabilität bei linearen Differentialgleichungen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Stabilität des linearen Systems $y' = Ay$ mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dazu betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall, der das unterschiedliche Verhalten in Abhängigkeit von dem Matrixeintrag (dies ist der einzige Eigenwert von A) gut verdeutlicht.

Beispiel 6.15 Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = \lambda y$ mit einem beliebigen $\lambda \in \mathbb{R}$. Seien y bzw. z Lösungen dieser Differentialgleichung zu den Anfangswerten $y(0) = y_0$ bzw. $y(0) = z_0$, also

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} \quad \text{bzw.} \quad z(t) = z_0 e^{\lambda t}.$$

Wegen $|y(t) - z(t)| = |y_0 - z_0| e^{\lambda t}$ ist der Gleichgewichtspunkt $y^* \equiv 0$ daher

- asymptotisch stabil, falls $\lambda < 0$ gilt
- stabil (aber nicht asymptotisch stabil), falls $\lambda = 0$ gilt
- instabil, falls $\lambda > 0$ ist.

Im Fall $n > 1$ lässt sich die Stabilität des Systems $y' = Ay$ ebenfalls vollständig mit Hilfe der Eigenwerte von A charakterisieren. Dazu erinnern wir zunächst an unsere Ausführungen im Abschnitt 4.3, wonach die Spalten der Matrix-Exponentialfunktion

$$Y(t) := e^{tA}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = Ay$ bilden. Sei

$$y_k(t) := Y(t)e_k$$

der k -te Spaltenvektor für ein beliebiges $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$y_k(t) = SZ(t)e_k$$

mit einer aus Eigen- und Hauptvektoren bestehenden Matrix

$$S = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

sowie einer Matrix $Z(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, deren k -te Spalte von der Gestalt

$$Z(t)e_k = e^{\lambda t} \left(0, \dots, 0, \frac{1}{m!} t^m, \dots, \frac{1}{2!} t^2, t, 1, 0, \dots, 0 \right)^T \in \mathbb{C}^n$$

ist, vergleiche die Ausführungen nach Satz 4.21. Hierbei ist λ ein Eigenwert von A , die Eins steht an der k -ten Stelle des Vektors und $m \in \mathbb{N}$ genügt auf alle Fälle der Ungleichung $m \leq n$. Die genaue Größe von m ergibt sich aus der Jordanschen Normalform von A und spielt im Folgenden keine Rolle. Insgesamt haben wir somit die Darstellung

$$y_k(t) = SZ(t)e_k = e^{\lambda t} \left(v_k + t v_{k-1} + \frac{1}{2!} t^2 v_{k-2} + \dots + \frac{1}{m!} t^m v_{k-m} \right)^T,$$

wofür wir auch

$$y_k(t) = e^{\lambda t} p(t) \tag{6.22}$$

mit einem (vektorwertigen) Polynom $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ schreiben können, dessen Grad höchstens gleich n ist. Unter Verwendung dieser Bezeichnungen beweisen wir nun das nachstehende Resultat.

Lemma 6.16 *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Konstante mit $\Re(\lambda_i) < \alpha$ für alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ mit $\|e^{tA}\| \leq C e^{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis: Sei $y_k(t)$ die k -te Spalte der Matrix-Exponentialfunktion $Y(t) := e^{tA}$. Dann ist $y_k(t)$ von der Gestalt (6.22) für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A und eine Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, deren Komponenten $p_1(t), \dots, p_n(t)$ allesamt Polynome vom Höchstgrad $m \leq n$ sind. Nach Voraussetzung ist $\varepsilon := \alpha - \Re(\lambda) > 0$. Wegen $e^{-\varepsilon t} t^\ell \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$ und jeden festen Exponenten $\ell \in \mathbb{N}$ existiert offenbar eine Konstante $c > 0$ mit

$$|p_i(t)|e^{-\varepsilon t} \leq c \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

und alle $t \geq 0$. Dies impliziert

$$|p_i(t)| \leq ce^{\varepsilon t} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

und daher

$$|e^{\lambda t} p_i(t)| = |e^{\lambda t}| |p_i(t)| = e^{\Re(\lambda)t} |p_i(t)| \leq ce^{(\varepsilon + \Re(\lambda))t} = ce^{\alpha t}$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $t \geq 0$. Hieraus folgt

$$\|y_k(t)\|_\infty = \|e^{\lambda t} p(t)\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |e^{\lambda t} p_i(t)| \leq ce^{\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Eine entsprechende Abschätzung (mit einer eventuell etwas größeren Konstanten $c = c_k > 0$) gilt für alle Spalten $y_k(t)$ der Matrix-Exponentialfunktion $Y(t) = e^{tA}$. Aus der Definition einer induzierten Matrixnorm sowie der Äquivalenz aller Normen in endlich-dimensionalen Vektorräumen folgt daher die Behauptung. \square

Mittels des obigen Lemmas können wir nun das zentrale Stabilitätsresultat für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten beweisen.

Satz 6.17 *Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die Eigenwerte von A , die hier so angeordnet seien, dass jedem Eigenwert λ_k ein Jordan-Block J_k in der Jordanschen Normalform entspricht. Dann gelten:*

- (a) *Das Gleichgewicht $y^* \equiv 0$ ist genau dann stabil, wenn $\Re(\lambda_k) \leq 0$ für alle $k = 1, \dots, r$ gilt und der Jordan-Block J_k für die Eigenwerte mit $\Re(\lambda_k) = 0$ eindimensional ist.*
- (b) *Das Gleichgewicht $y^* \equiv 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\Re(\lambda_k) < 0$ für alle $k = 1, \dots, r$ gilt.*
- (c) *Das Gleichgewicht $y^* \equiv 0$ ist genau dann instabil, wenn es einen Eigenwert λ_k gibt, so dass entweder $\Re(\lambda_k) > 0$ gilt oder $\Re(\lambda_k) = 0$ ist, der zugehörige Jordan-Block J_k jedoch mindestens die Dimension 2×2 hat.*

Beweis: (a) Sei zunächst $\Re(\lambda_k) \leq 0$ für alle $k = 1, \dots, r$ und der Jordan-Block zu allen Eigenwerten λ_k mit $\Re(\lambda_k) = 0$ nur eindimensional. Eine beliebige Lösung von $y' = Ay$ hat die Gestalt $y(t) = e^{tA}y(0)$. Hieraus folgt

$$\|y(t)\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|y(0)\|. \quad (6.23)$$

Wir zeigen nun, dass $\|e^{tA}\|$ unter den genannten Voraussetzungen beschränkt ist. Dazu brauchen wir nur zu verifizieren, dass alle Spalten von e^{tA} beschränkt sind. Wegen (6.22) sind diese aber von der Gestalt

$$y_k(t) := e^{tA}e_k = e^{\lambda t}p(t) \quad (6.24)$$

für einen gewissen Eigenwert λ von A und ein vektorwertiges Polynom p . Im Fall $\Re(\lambda) < 0$ folgt aus (6.24) daher

$$\|y_k(t)\| = e^{\Re(\lambda)t}\|p(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Im Fall $\Re(\lambda) = 0$ hingegen ist $p(t) \equiv 1$, da der zugehörige Jordan-Block dann nur eindimensional sein sollte. Dies wiederum impliziert mit (6.24)

$$\|y_k(t)\| = e^{\Re(\lambda)t}\|p(t)\| = e^{0t}\|1\| = \|1\|.$$

Da dies für alle Spalten y_k gilt, existiert somit eine Konstante $M > 0$ mit $\|e^{tA}\| \leq M$ für alle $t \geq 0$. Aus (6.23) folgt somit

$$\|y(t)\| \leq M \cdot \|y(0)\|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$ und eine Lösung $y(t) = e^{tA}y(0)$ mit $\|y(0) - 0\| = \|y(0) - y^*(0)\| < \delta$. Dann ist

$$\|y(t) - y^*(t)\| = \|y(t)\| \leq M \cdot \|y(0)\| = M \cdot \|y(0) - y^*(0)\| < M\delta = \varepsilon$$

für alle $t \geq 0$. Dies beweist die Stabilität von $y^* \equiv 0$.

Sei umgekehrt die Lösung $y^* \equiv 0$ als stabil vorausgesetzt. Wir haben zu zeigen, dass dann die zugehörigen Eigenwertbedingungen erfüllt sind. Dies geschieht dadurch, dass wir die beiden möglichen Fälle durch Widerspruch beweisen.

Sei also zunächst angenommen, dass es einen Eigenwert $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ gibt mit $\Re(\lambda) > 0$. Dann gibt es einen zugehörigen Eigenvektor v derart, dass

$$y(t) := e^{\lambda t}v$$

eine (eventuell komplexe) Lösung von $y' = Ay$ ist. Dann ist auch jedes Vielfache hiervon eine Lösung der Differentialgleichung, insbesondere also jede Funktion der Gestalt

$$y_\sigma(t) := \sigma e^{\lambda t}v \quad \text{mit einem } \sigma \in \mathbb{R}.$$

Der zugehörige Anfangswert

$$\|y_\sigma(0)\| = |\sigma|\|v\|$$

kann dann beliebig klein gemacht werden, während wir

$$\|y_\sigma(t)\| = |\sigma|e^{\Re(\lambda)t}\|v\| \rightarrow +\infty \quad \text{für } t \rightarrow +\infty$$

haben. Zu beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ kann somit kein $\delta > 0$ existieren mit $\|y_\sigma(0)\| < \delta$ und $\|y_\sigma(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ im Widerspruch zur vorausgesetzten Stabilität der Lösung $y^* \equiv 0$.

Damit müssen wir nur noch den zweiten Fall zum Widerspruch führen. Sei dazu angenommen, dass es einen Eigenwert λ von A gibt mit $\Re(\lambda) = 0$ derart, dass der zugehörige Jordan-Block mindestens zweidimensional ist. Dann existiert eine (eventuell wieder komplexe) Lösung der Gestalt

$$y_\sigma(t) := \sigma(v^1 + tv^2)e^{\lambda t},$$

wobei v^1 ein Eigenvektor und v^2 ein Hauptvektor zum Eigenwert λ bezeichnet sowie $\sigma \in \mathbb{R}$ (wie oben) ein geeigneter Skalierungsfaktor ist. Dann ist

$$\|y_\sigma(0)\| = |\sigma| \|v^1\|$$

für kleines $|\sigma|$ wieder beliebig klein, während wir

$$\|y_\sigma(t)\| = |\sigma| \|v^1 + tv^2\| \geq |\sigma| (t\|v^2\| - \|v^1\|) \rightarrow +\infty$$

für $t \rightarrow +\infty$ haben, da λ ein rein imaginärer Eigenwert ist. Dies widerspricht aber erneut der Voraussetzung, dass die Lösung $y^* \equiv 0$ stabil ist.

(b) Sei zunächst $\Re(\lambda_k) < 0$ für alle $k = 1, \dots, r$. Eine beliebige Lösung von $y' = Ay$ hat wieder die Gestalt $y(t) = e^{tA}y(0)$, woraus sich erneut

$$\|y(t)\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|y(0)\|$$

ergibt. Wegen $\Re(\lambda_k) < 0$ für alle $k = 1, \dots, r$ ist $\alpha := \frac{1}{2} \max_{k=1, \dots, r} \Re(\lambda_k) < 0$. Aus dem Lemma 6.16 folgt daher mit einer Konstanten $C > 0$ die Abschätzung

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{\alpha t} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Also ist

$$\|y(t)\| \leq Ce^{\alpha t} \|y(0)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ beliebig und sei $y(t) = e^{tA}y(0)$ eine Lösung mit $\|y(0) - y^*(0)\| < \delta$. Dann folgt

$$\|y(t) - y^*(t)\| = \|y(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty,$$

also die asymptotische Stabilität von y^* .

Sei umgekehrt $y^* \equiv 0$ asymptotisch stabil. Angenommen, es gibt einen Eigenwert λ von A mit $\Re(\lambda) \geq 0$. Dann ist

$$y_\sigma(t) := \sigma e^{\lambda t} v$$

eine Lösung von $y' = Ay$, wobei v einen (eventuell komplexen) Eigenvektor zum Eigenwert λ bezeichnet und $\sigma \in \mathbb{R}$ wieder ein geeigneter Skalierungsfaktor ist. Dann ist

$$\|y_\sigma(0)\| = |\sigma| \|v\|$$

für geeignetes $|\sigma|$ sicherlich kleiner als jedes gegebene $\delta > 0$, andererseits gilt jedoch

$$\|y_\sigma(t)\| = |\sigma| e^{\Re(\lambda)t} \|v\| \geq |\sigma| \|v\| \quad \forall t \geq 0.$$

Dies widerspricht jedoch der vorausgesetzten asymptotischen Stabilität von $y^* \equiv 0$, wonach $\|y_\sigma(t)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und hinreichend kleines $|\sigma|$ gelten müsste.

(c) Gemäß Definition ist die Lösung $y^* \equiv 0$ genau dann instabil, wenn diese Lösung nicht stabil ist. Also ergibt sich die Aussage (c) unmittelbar durch Negation der in (a) angegebenen Charakterisierung einer stabilen Lösung. \square

Die Aussage des Satzes 6.17 lässt sich auch wie folgt formulieren: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von A und

$$\gamma := \max \{ \Re(\lambda_i) \mid i = 1, \dots, n \}.$$

Dann gelten:

- Das Gleichgewicht $y^* \equiv 0$ ist genau dann stabil, wenn $\gamma = 0$ gilt und zusätzlich die algebraische und geometrische Vielfachheit aller rein imaginären Eigenwerte übereinstimmen.
- Das Gleichgewicht $y^* \equiv 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\gamma < 0$ ist.
- Das Gleichgewicht $y^* \equiv 0$ ist genau dann instabil, wenn entweder $\gamma > 0$ ist oder es einen rein imaginären Eigenwert gibt, bei dem die geometrische Vielfachheit echt kleiner ist als die algebraische Vielfachheit.

Wir illustrieren nun noch das typische Aussehen von Lösungen im Fall von **ebenen autonomen Systemen**, also von zweidimensionalen Differentialgleichungssystemen

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung 6.1 zeigt das Phasenportrait für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{6.25}$$

Diese Matrix hat die beiden Eigenwerte $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := -2$, die beide reell sind und unterschiedliches Vorzeichen besitzen. Die Lösung $y \equiv 0$ ist somit instabil. Im Hinblick auf die Abbildung 6.1 spricht man in diesem Fall auch von einem **Sattelpunkt**.

Die Abbildung 6.2 hingegen zeigt das Phasenportrait für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{6.26}$$

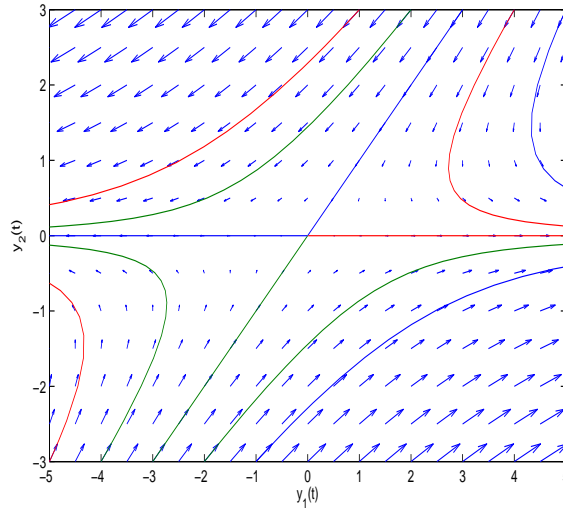


Abbildung 6.1: Phasenportät für Beispiel (6.25)

mit den beiden verschiedenen reellen Eigenwerten $\lambda_1 := -1$ und $\lambda_2 := -2$. Die Lösung $y \equiv 0$ ist hier asymptotisch stabil. Wegen Abbildung 6.2 spricht man hier von einem **Knotenpunkt**.

Entsprechend kann man weitere Phasenportraits für ebene autonome Systeme konstruieren, vergleiche auch die frühere Abbildung 5.2. Qualitativ hat man hierbei zu unterscheiden, ob die beiden Eigenwerte reell oder konjugiert-komplex sind, ob es sich um einfache oder doppelte Eigenwerte handelt und welches Vorzeichen diese Eigenwerte besitzen. Wir gehen auf die Einzelheiten hier nicht weiter ein. Der interessierte Leser findet die relevanten Fälle beispielsweise in dem Buch [10] alle abgebildet.

6.4 Linearisierte Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt zunächst autonome Differentialgleichungssysteme der Gestalt

$$y' = Ay + g(y) \quad (6.27)$$

mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie einer im Allgemeinen nichtlinearen Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Frage ist, ob man aus den Eigenschaften der Matrix A auf die (asymptotische) Stabilität oder Instabilität des Systems (6.27) schließen kann.

Zu diesem Zweck beginnen wir mit einer Vorbetrachtung und schauen uns zunächst die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y' = Ay + b \quad (6.28)$$

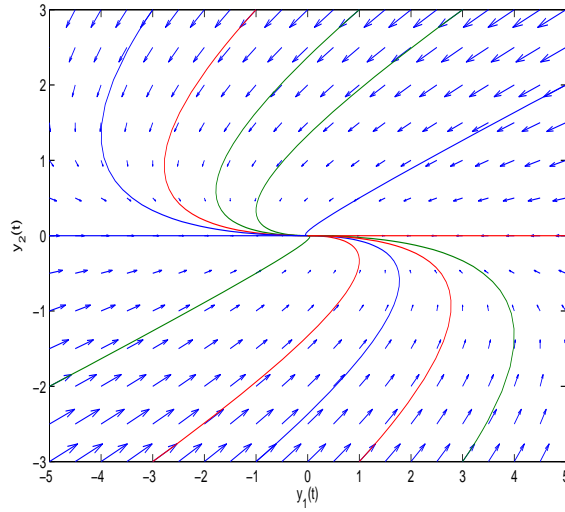


Abbildung 6.2: Phasenportät für Beispiel (6.26)

mit der Inhomogenität $b = b(t)$ an. Wegen Satz 4.17 besitzt diese die eindeutig bestimmte Lösung zum Anfangswert $y_0 := y(0)$

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Sei nun \tilde{y} eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (6.27). Dann ist \tilde{y} auch eine Lösung von (6.28) mit der speziellen Inhomogenität $b(t) := g(\tilde{y}(t))$. Daher lässt sich die Lösung von (6.27) darstellen in der Gestalt

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(y(s))ds. \quad (6.29)$$

Wir werden diese Beobachtung im Beweis des nachfolgenden Resultates verwenden.

Satz 6.18 Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine gegebene Matrix, deren Eigenwerte allesamt negativen Realteil haben, sowie $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit

$$g(y) = o(\|y\|), \quad \text{d.h.} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0. \quad (6.30)$$

Dann ist die Ruhelage $y^* \equiv 0$ der Differentialgleichung (6.27) asymptotisch stabil.

Beweis: Zunächst folgt aus der Eigenschaft (6.30) in der Tat, dass $y^* \equiv 0$ eine Ruhelage der Differentialgleichung (6.27) ist. Ansonsten haben wir zu zeigen, dass die Lösung $y(t) = y(t; y_0)$ der Differentialgleichung (6.27) für hinreichend kleine Anfangswerte y_0 für alle $t \geq 0$

existiert, stets in einer geeigneten Umgebung von y^* verbleibt und schließlich $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ gilt.

Aufgrund unserer Vorbemerkungen können wir die Lösung $y(t)$ von (6.27) in der Gestalt (6.29) schreiben. Nach Voraussetzung an die Eigenwerte der Matrix A existiert eine Konstante $\alpha > 0$ mit $\Re(\lambda) < -\alpha$ für alle Eigenwerte λ von A . Wegen Lemma 6.16 gibt es daher ein $C > 0$ (ohne Einschränkung sei dabei $C > 1$) mit $\|e^{tA}\| \leq Ce^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$. Aus der Darstellung (6.29) folgt daher

$$\|y(t)\| = Ce^{-\alpha t}\|y_0\| + \int_0^t Ce^{-\alpha(t-s)}\|g(y(s))\|ds.$$

Sei $\varepsilon \in (0, \alpha)$ beliebig gegeben. Wegen (6.30) können wir ein $\delta > 0$ wählen mit $\|g(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{C}\|y\|$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| < \delta$. Sei nun y_0 mit $\|y_0\| < \frac{\delta}{C}$ beliebig gewählt. Dann ist, solange $\|y(s)\| < \delta$ gilt (was aus Stetigkeitsgründen zumindest für alle hinreichend kleinen $s > 0$ der Fall ist), offenbar

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq Ce^{-\alpha t}\|y_0\| + \int_0^t Ce^{-\alpha(t-s)}\frac{\varepsilon}{C}\|y(s)\|ds \\ &\leq \delta e^{-\alpha t} + \int_0^t \varepsilon e^{-\alpha(t-s)}\|y(s)\|ds. \end{aligned}$$

Multiplikation beider Seiten mit $e^{\alpha t}$ liefert

$$\|y(t)\|e^{\alpha t} \leq \delta + \int_0^t \varepsilon e^{\alpha s}\|y(s)\|ds.$$

Wenden wir hierauf das Lemma 3.19 von Gronwall (mit der Funktion $v(t) := \|y(t)\|e^{\alpha t}$) an, so erhalten wir

$$\|y(t)\|e^{\alpha t} \leq \delta e^{\varepsilon t}$$

und damit

$$\|y(t)\| \leq \delta e^{-(\alpha-\varepsilon)t} < \delta.$$

Dies zeigt einerseits, dass wir stets $\|y(t)\| < \delta$ haben, die obige Argumentation also für alle $t \geq 0$ angewandt werden kann, und andererseits $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ gilt (wegen $\alpha - \varepsilon > 0$). \square

Ein zum Satz 6.18 entsprechendes Resultat gilt für instabile Lösungen. Wir geben das Ergebnis hier ohne Beweis an und verweisen den interessierten Leser auf [18].

Satz 6.19 *Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine gegebene Matrix, so dass mindestens ein Eigenwert positiven Realteil hat, sowie $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit der Eigenschaft (6.30). Dann ist die Ruhelage $y^* \equiv 0$ der Differentialgleichung (6.27) instabil.*

Betrachte nun eine allgemeine autonome Differentialgleichung der Gestalt

$$y' = f(y) \tag{6.31}$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei ferner $f(0) = 0$, also $y^* \equiv 0$ eine Ruhelage der Differentialgleichung. Setzen wir $A := Df(0)$ und $g(y) := f(y) - Df(0)y$, so lässt sich (6.31) offenbar in der Gestalt (6.27) schreiben, und für die hier definierte Funktion g gilt nach dem Satz von Taylor

$$g(y) = f(y) - Df(0)y = f(0) + Df(0)y + o(\|y\|) - Df(0)y = o(\|y\|)$$

und damit die Bedingung (6.30). Aus den Sätzen 6.18 und 6.19 erhalten wir deshalb das nachstehende Resultat (beachte hierbei, dass die stetige Differenzierbarkeit von f automatisch die – zumindest lokale – Lipschitz-Stetigkeit von f impliziert).

Korollar 6.20 (Prinzip der linearisierten Stabilität)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$. Dann gelten:

- (a) Die Ruhelage $y^* \equiv 0$ von (6.31) ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $Df(0)$ negativen Realteil haben.
- (b) Die Ruhelage $y^* \equiv 0$ von (6.31) ist instabil, wenn mindestens ein Eigenwert der Jacobi-Matrix $Df(0)$ positiven Realteil hat.

Wir illustrieren die Aussage des Prinzips der linearisierten Stabilität an dem folgenden Beispiel.

Beispiel 6.21 (Mathematisches Pendel mit Reibung)

Wir betrachten wieder das uns schon bekannte mathematische Pendel aus dem Beispiel 5.11, wollen jetzt aber zusätzlich die auftretende Reibung berücksichtigen. Da diese proportional zur aktuellen Geschwindigkeit ist, erhalten wir durch Modifikation des Ansatzes aus dem Beispiel 5.11 die Differentialgleichung

$$\theta'' + \mu\theta' + \sin \theta = 0$$

mit einem Proportionalitätsfaktor $\mu > 0$. Als hierzu äquivalentes System bekommen wir

$$y' = f(y) \quad \text{mit} \quad f(y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ -\mu y_2 - \sin y_1 \end{pmatrix}.$$

Für die Ruhelage $y^* = 0$ gilt dann

$$Df(y^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Für den einzig realistischen Fall $\mu \in (0, 2)$ sind die beiden Eigenwerte dieser Jacobi-Matrix gegeben durch $\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4 - \mu^2}$. Da diese einen negativen Realteil besitzen, handelt es sich bei der Ruhelage $y^* \equiv 0$ wegen Korollar 6.20 um eine asymptotisch stabile Lösung. Die Abbildung 6.3 enthält das Phasenportrait für das mathematische Pendel mit Reibung.

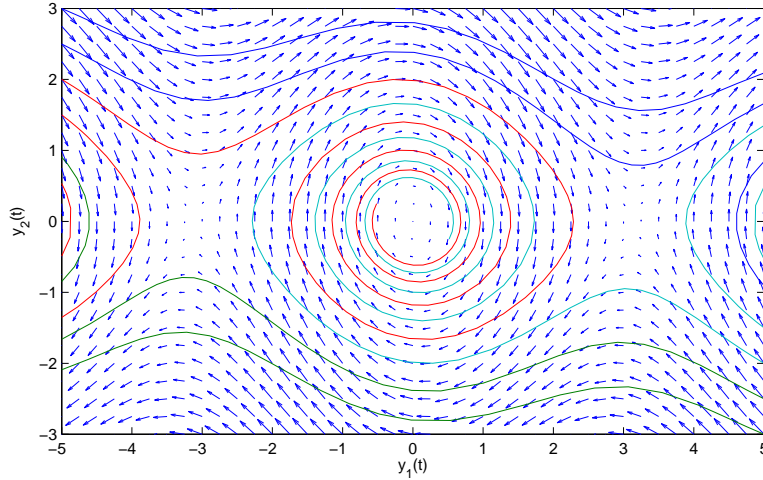


Abbildung 6.3: Phasenportrait für die Differentialgleichung des mathematischen Pendels mit Reibung

In dem Grenzfall, wo der maximale Realteil eines Eigenwertes von $Df(0)$ gleich Null ist, kann man im Allgemeinen nicht auf die Stabilität, Instabilität oder asymptotische Stabilität der nichtlinearen Differentialgleichung (6.27) schließen. Dies wird durch das nachstehende Beispiel illustriert.

Beispiel 6.22 Betrachte die autonome Differentialgleichung

$$y' = f(y) := \alpha y + \beta y^3, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

mit der Ruhelage $y^* \equiv 0$. Wegen $Df(0) = \alpha$ folgt aus dem Korollar 6.20, dass diese Ruhelage instabil ist für $\alpha > 0$ sowie asymptotisch stabil ist für $\alpha < 0$. Der Fall $\alpha = 0$ muss gesondert betrachtet werden.

Für $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ist die Lösung von $y' = \beta y^3, y(0) = y_0$ gegeben durch

$$y(t) = \text{sign}(y_0) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 2\beta t}},$$

wie man mittels elementarer Rechnung sofort verifiziert. Ist $\beta < 0$, so ist $y(t)$ für alle $t > 0$ definiert mit $y(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, die Ruhelage also asymptotisch stabil. Ist $\beta > 0$, so ist $y(t)$ nur in dem beschränkten Intervall $(0, \frac{1}{2\beta y_0^2})$ definiert. Für $\beta = 0$ hingegen ist die Ruhelage stabil.

6.5 Die direkte Methode von Lyapunov

Wir betrachten in diesem Abschnitt ein autonomes System der Gestalt

$$y' = f(y) \tag{6.32}$$

mit einer Lipschitz-stetigen Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, die auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $0 \in D$ definiert sei und der Bedingung

$$f(0) = 0$$

genüge, so dass $y^* \equiv 0$ ein Gleichgewichtspunkt des Systems (6.32) ist. Ein wichtiger Spezialfall von (6.32) ist dabei das schon vorher betrachtete lineare System

$$y' = Ay$$

mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Wir wollen in diesem Abschnitt Kriterien für die Stabilität, asymptotische Stabilität und Instabilität des Gleichgewichtspunktes $y \equiv 0$ des autonomen Systems (6.32) herleiten, die in manchen Fällen stärkere Aussagen erlauben als jene aus dem Prinzip der linearisierten Stabilität. Dazu erweist sich der nachfolgend definierte Begriff einer Lyapunov-Funktion als recht nützlich.

Definition 6.23 Eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Lyapunov-Funktion** des autonomen Systems (6.32) (auf der Menge D), wenn

$$\dot{V}(y) := \nabla V(y)^T f(y) \leq 0 \quad \text{für alle } y \in D$$

gilt.

Die Bezeichnungsweise \dot{V} deutet an, dass es sich bei der in Definition 6.23 eingeführten Funktion \dot{V} um die Ableitung von der Lyapunov-Funktion V nach der Zeitvariablen t handelt. Dies ist in der Tat der Fall, wenn wir die Variable y durch eine Lösung $y(t)$ des autonomen Systems (6.32) ersetzen (der Anfangswert spielt hierbei keine Rolle). Dann gilt nämlich

$$\dot{V}(y(t)) = \nabla V(y(t))^T y'(t) = \nabla V(y(t))^T f(y(t)). \quad (6.33)$$

Dies motiviert nachträglich die Definition der Funktion \dot{V} .

Mittels einer Lyapunov-Funktion lässt sich jetzt ein einfaches Stabilitätskriterium beweisen.

Satz 6.24 (**Stabilität nach Lyapunov**)

Sei $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion des autonomen Systems (6.32) mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$V(0) = 0 \quad \text{und} \quad V(y) > 0 \quad \forall y \in D \setminus \{0\}. \quad (6.34)$$

Dann ist der Gleichgewichtspunkt $y^* \equiv 0$ stabil.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ mit $\overline{K_\varepsilon}(0) \subseteq D$ und setze

$$m := m(\varepsilon) := \min \{V(y) \mid \|y\| = \varepsilon\}.$$

Wegen (6.34) ist $m > 0$. Erneute Anwendung von (6.34) liefert aufgrund der Stetigkeit von V die Existenz eines $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$0 \leq V(y) \leq \frac{m}{2} \quad \text{für alle } y \in K_\delta(0).$$

Sei nun $y_0 \in K_\delta(0)$ ein beliebiger Anfangswert und $y(t; y_0)$ die Lösung des Problems $y' = f(y)$ mit $y(0) = y_0$, so dass insbesondere $\|y(0; y_0) - y^*\| < \delta$ gilt. Wir zeigen jetzt, dass $y(t; y_0) \in K_\varepsilon(0)$ für alle $t > 0$ gilt. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann existiert ein $T > 0$ mit

$$\|y(t; y_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \in (0, T) \quad \text{und} \quad \|y(T; y_0)\| = \varepsilon,$$

$T > 0$ ist also der kleinste Zeitpunkt t , bei dem der Rand $\|y(t; y_0)\| = \varepsilon$ erreicht wird. Nun gilt aber $\dot{V}(y) \leq 0$ für alle y und somit

$$\begin{aligned} V(y(t; y_0)) - V(y_0) &= V(y(t; y_0)) - V(y(0; y_0)) \\ &= \int_0^t \dot{V}(y(s; y_0)) ds \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (vergleiche (6.33)). Insbesondere gilt somit $V(y(T; y_0)) \leq V(y_0)$. Dies liefert jedoch den Widerspruch

$$m \leq V(y(T; y_0)) \leq V(y_0) \leq \frac{m}{2},$$

womit der Beweis bereits erbracht ist. □

Unter etwas stärkeren Voraussetzungen an die Lyapunov-Funktion V erhält man auch ein Kriterium für die asymptotische Stabilität.

Satz 6.25 (*Asymptotische Stabilität nach Lyapunov*)

Sei $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion des autonomen Systems (6.32) mit den zusätzlichen Eigenschaften

$$V(0) = 0 \quad \text{und} \quad V(y) > 0 \quad \forall y \in D \setminus \{0\}, \quad (6.35)$$

$$\dot{V}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{V}(y) < 0 \quad \forall y \in D \setminus \{0\}. \quad (6.36)$$

Dann ist der Gleichgewichtspunkt $y^* \equiv 0$ asymptotisch stabil.

Beweis: Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\overline{K}_\varepsilon(0) \subseteq D$. Nach Satz 6.24 ist der Gleichgewichtspunkt $y^* \equiv 0$ zumindest stabil. Also existiert ein $\eta > 0$ derart, dass die Lösung $y(t; y_0)$ des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ für jedes y_0 mit $\|y_0\| < \eta$ und für alle Zeiten $t \geq 0$ in der kompakten Menge $K := \overline{K}_\varepsilon(0)$ verbleibt.

Wir zeigen jetzt, dass für jedes solche y_0 sogar $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; y_0) = 0$ gilt. Da $V(y(t; y_0))$ als Funktion von t monoton fällt (denn V ist Lyapunov-Funktion) und durch Null nach unten beschränkt ist, existiert der Grenzwert

$$V^* := \lim_{t \rightarrow \infty} V(y(t; y_0)).$$

Wir beweisen nun, dass $V^* = 0$ gilt. Sei dazu $V^* > 0$ angenommen. Da $V(y(t; y_0))$ monoton fällt, ergibt sich hieraus

$$V(y(t; y_0)) \geq V^* > 0 \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Wähle ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(0) \subseteq K$ und

$$0 \leq V(y) < V^* \quad \text{für alle } y \in K_\delta(0),$$

was aus Stetigkeitsgründen unter Verwendung von (6.35) möglich ist. Dann ist

$$y(t; y_0) \in K \setminus K_\delta(0) \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad (6.37)$$

Da $\dot{V}(y)$ stetig ist und es sich bei $K \setminus K_\delta(0)$ um eine kompakte Menge handelt, existiert die Zahl

$$\mu := \max \{ \dot{V}(y) \mid y \in K \setminus K_\delta(0) \}.$$

Wegen (6.36) ist $\mu < 0$. Mit (6.37) folgt

$$\dot{V}(y(t; y_0)) \leq \mu < 0 \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dies impliziert wiederum

$$V(y(t; y_0)) - V(y_0) = \int_0^t \dot{V}(y(s; y_0)) ds \leq \mu t \quad \text{für alle } t \geq 0$$

und daher $\lim_{t \rightarrow \infty} V(y(t; y_0)) = -\infty$ im Widerspruch zu (6.35).

Also gilt $V^* = 0$. Die Stetigkeit von V und die Eigenschaft (6.35) zusammen implizieren aus diesem Grunde unmittelbar $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; y_0) = 0$. Dazu nehmen wir wieder an, dass dies nicht der Fall wäre. Da die Vektoren $y(t; y_0)$ für alle $t \geq 0$ in der kompakten Menge K liegen, müsste es sonst einen Vektor $\bar{y} \neq 0$ und eine Teilfolge t_k geben mit $y(t_k; y_0) \rightarrow \bar{y}$. Als Stetigkeitsgründen wäre dann aber

$$0 = V^* = \lim_{t \rightarrow \infty} V(y(t; y_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(y(t_k; y_0)) = V(\bar{y}).$$

Wegen $\bar{y} \neq 0$ ist aber $V(\bar{y}) > 0$ im Hinblick auf (6.35), so dass wir den Widerspruch $0 > 0$ erhalten. Also gilt in der Tat $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; y_0) = 0$. \square

Zum Abschluss formulieren wir noch ein Instabilitätskriterium.

Satz 6.26 (*Instabilität nach Lyapunov*)

Sei $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion des autonomen Systems (6.32) mit den zusätzlichen Eigenschaften

$$V(0) = 0, \quad \dot{V}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{V}(y) < 0 \quad \text{für alle } y \in D \setminus \{0\}. \quad (6.38)$$

Gibt es in jeder Umgebung von Null dann einen Punkt, in dem V einen negativen Wert annimmt, so ist der Gleichgewichtspunkt $y^* \equiv 0$ instabil.

Beweis: Angenommen, $y^* \equiv 0$ wäre ein stabiler Gleichgewichtspunkt. Wählen wir $\varepsilon > 0$ dann so, dass $\overline{K}_\varepsilon(0) \subseteq D$ gilt, so gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|y(t; \xi)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0 \text{ und alle } \xi \in K_\delta(0).$$

Nach Voraussetzung existiert ein spezieller Anfangswert $\xi = y_0 \in K_\delta(0)$ mit $V(y_0) < 0$, so dass wir aus (6.38) und der Stetigkeit von V die Existenz eines positiven $\eta < \varepsilon$ erhalten mit

$$V(y) > V(y_0) \quad \text{für alle } y \in K_\eta(0).$$

Da V längs der Lösung $y(t; y_0)$ monoton fällt, haben wir $V(y(t; y_0)) \leq V(y_0)$ für alle $t \geq 0$. Dies impliziert

$$0 < \eta \leq \|y(t; y_0)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad (6.39)$$

Setzen wir

$$\mu := \max \{ \dot{V}(y) \mid \eta \leq \|y\| \leq \varepsilon \} < 0,$$

so folgt $\dot{V}(y(t; y_0)) \leq \mu < 0$ für alle $t \geq 0$ und damit

$$V(y(t; y_0)) - V(y_0) = \int_0^t \dot{V}(y(s; y_0)) ds \leq \mu t \rightarrow -\infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Damit erhalten wir jedoch einen Widerspruch zu (6.39), wonach die Lösung $y(t; y_0)$ in der kompakten Menge $\overline{K}_\varepsilon(0)$ verbleibt und die stetige Funktion V auf dieser Menge endlich ist. \square

Wir untersuchen als Nächstes die Stabilität der Ruhelage des mathematischen Pendels.

Beispiel 6.27 (*Mathematisches Pendel*)

Schreiben wir die Differentialgleichung des mathematischen Pendels aus dem Beispiel 6.11 um in die Form eines Differentialgleichungssystems, so erhalten wir

$$y' = f(y) \quad \text{mit} \quad f(y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir

$$V(y) := \frac{1}{2}y_2^2 - \cos y_1 + 1,$$

so ist V stetig differenzierbar mit $V(0) = 0$ und $V(y) > 0$ für alle $y \neq 0$ mit $y \in D := \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in (-2\pi, +2\pi), y_2 \in \mathbb{R}\}$. Eine elementare Rechnung zeigt außerdem $\dot{V}(y) = \nabla V(y)^T f(y) = 0 \leq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$. Daher ist V eine Lyapunov-Funktion auf D und genügt zusätzlich den Voraussetzungen des Satzes 6.24. Also ist der Gleichgewichtspunkt $y^* \equiv 0$ stabil, was uns anschaulich auch schon vorher klar war. \diamond

Die Abbildung 6.4 enthält das Phasenportrait für die Differentialgleichung des mathematischen Pendels. Man erkennt hieran, dass die Ruhelage $y^* \equiv 0$ von geschlossenen Trajektorien umgeben wird und daher offenbar nicht asymptotisch stabil ist. Ebenso deutet die Abbildung an, dass die Ruhelagen $y^* \equiv (\pm\pi, 0)$ instabil sind.

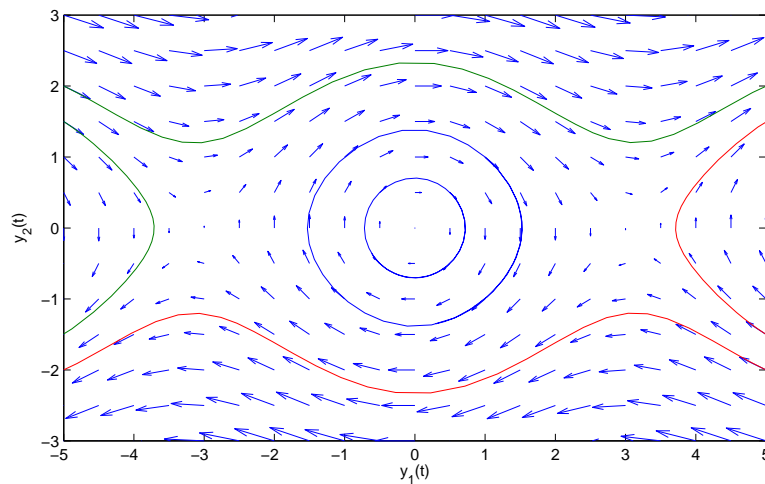


Abbildung 6.4: Phasenportrait für die Differentialgleichung des mathematischen Pendels

Als Nächstes kommen wir noch einmal auf lineare Differentialgleichungssysteme mit einer konstanten Koeffizientenmatrix zurück. Das folgende Beispiel zeigt, dass man mittels einer geeigneten Lyapunov-Funktion die Aussage über die asymptotische Stabilität des Gleichgewichtspunktes $y^* \equiv 0$ aus dem Satz 6.17 zurückerhalten kann.

Beispiel 6.28 Betrachte die Differentialgleichung $y' = Ay$. Wir nehmen an, dass es eine symmetrische und positiv definite Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit

$$x^T (PA + A^T P)x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \quad (6.40)$$

die Matrix $PA + A^T P$ soll also negativ definit sein. Dann setzen wir

$$V(y) := y^T P y.$$

Hierfür ist $V(0) = 0$, $V(y) > 0$ für alle $y \neq 0$ sowie $\dot{V}(0) = 0$ und

$$\dot{V}(y) = \nabla V(y)^T f(y)$$

$$\begin{aligned}
&= y^T (P + P)^T Ay \\
&= y^T PAy + y^T P^T Ay \\
&= y^T PAy + y^T A^T Py \\
&= y^T (PA + A^T P)y \\
&< 0
\end{aligned}$$

für alle $y \neq 0$. Somit ist V eine Lyapunov-Funktion und genügt allen Bedingungen des Satzes 6.25. Der Gleichgewichtspunkt $y^* \equiv 0$ ist daher asymptotisch stabil. \diamond

Im Beispiel 6.28 stellt sich natürlich die Frage, wann überhaupt eine positiv definite Matrix P mit der Eigenschaft (6.40) existiert. Im Hinblick auf das gerade erzielte Ergebnis und den Satz 6.17 erhalten wir als notwendige Bedingung gerade, dass die Realteile aller Eigenwerte von A negativ sind. Tatsächlich ist diese Bedingung auch hinreichend, einen Beweis findet man in [14].

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem Hinweis, dass die Konstruktion einer Lyapunov-Funktion im Allgemeinen sehr schwierig sein mag.

Kapitel 7

Randwertaufgaben

- 7.1 Randwertaufgaben für Probleme zweiter Ordnung
- 7.2 Maximumprinzip und Folgerungen
- 7.3 Nichtlineare Randwertprobleme und Greensche Funktion
- 7.4 Sturm–Liouville–Probleme

7.1 Randwertaufgaben für Probleme zweiter Ordnung

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem kleinen Beispiel, das vor allem dazu dient, das Auftreten von so genannten Randwertaufgaben zu motivieren.

Beispiel 7.1 Wir betrachten einen Stab der Länge $L > 0$. Dieser Stab sei dünn und möge im idealisierten Zustand daher als ein eindimensionales Gebilde betrachtet werden. Die beiden Enden des Stabes werden auf konstanten Temperaturen T_0 und $T_L < T_0$ gehalten, so dass ein Wärmefluss vom Ausgangspunkt 0 zum Endpunkt L stattfindet. Der Stab sei ansonsten isoliert, so dass kein weiterer Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet. Bezeichnen wir mit

$$y(x, t)$$

die Temperatur des Stabes zum Zeitpunkt t im Ort $x \in [0, L]$, so genügt die Temperaturverteilung der *eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$$

für eine gewisse Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$. Der stationäre Zustand (keine Abhängigkeit von der Zeit) liefert somit die Differentialgleichung

$$0 = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x)$$

in der Ortsvariablen x . Dabei sind die beiden Randbedingungen

$$y(0) = T_0 \quad \text{und} \quad y(L) = T_L$$

zu berücksichtigen. Die Lösung ist offenbar eine lineare Funktion, welche die beiden Randwerte T_0 und T_L miteinander verbindet. \diamond

In Verallgemeinerung des Beispiels 7.1 betrachten wir jetzt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{auf } (a, b) \subseteq \mathbb{R} \quad (7.1)$$

mit einer gegebenen skalaren Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die außerdem die beiden Randwerte

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (7.2)$$

für gewisse $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ vorgegeben seien. Man nennt (7.1), (7.2) ein *nichtlineares Randwertproblem* zweiter Ordnung. Anders als bei den bisher betrachteten Anfangswertaufgaben werden hier keine Vorgaben der Gestalt $y(a) = y_a, y'(a) = y'_a$ für zwei Zahlen $y_a, y'_a \in \mathbb{R}$ am linken Intervallrand gemacht, sondern es wird jeweils eine Vorgabe am Anfangspunkt a und am Endpunkt b gegeben.

Ein sehr wichtiger Spezialfall von (7.1), (7.2) ist das *lineare Randwertproblem* zweiter Ordnung

$$-y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

mit den Randwerten

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

sowie mindestens stetigen Funktionen $c, d, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und gegebenen Werten $y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Man beachte hierbei, dass die Funktion f bei den linearen Randwertproblemen eine andere Bedeutung hat als im Falle eines nichtlinearen Randwertproblems. Ansonsten sei noch darauf hingewiesen, dass wir unsere Notation leicht geändert haben: Bei den bisher betrachteten Anfangswertproblemen haben wir die Variable der gesuchten Funktion y immer mit t bezeichnet, da diese in den meisten Fällen für die Zeit stand. Bei Randwertproblemen hingegen ist die Lösung y oft eine Funktion des Ortes (vergleiche hierzu nochmals das Beispiel 7.1), weshalb wir für das Argument in diesem Kapitel stets x statt t schreiben wollen.

Die Frage nach der Existenz einer Lösung oder gar einer eindeutigen Lösung ist bei Randwertaufgaben leider nicht so einfach zu beantworten wie bei Anfangswertproblemen. Tatsächlich muss sogar bei sehr einfachen linearen Randwertproblemen mit großen Schwierigkeiten gerechnet werden. Dies wird durch das folgende Beispiel illustriert.

Beispiel 7.2 Wir betrachten das lineare Randwertproblem

$$y'' + y = 0 \quad \text{auf } [a, b], \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b \quad (7.3)$$

mit einem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und gegebenen Werten $y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Je nach Vorgabe dieser Werte und des Intervalls $[a, b]$ können verschiedene Fälle eintreten:

- (a) Für $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$ sowie $y_a = 0, y_b = 1$ besitzt das Randwertproblem (7.3) offenbar die eindeutig bestimmte Lösung $y(x) = \sin x$.

- (b) Für $[a, b] = [0, \pi]$ sowie $y_a = 0, y_b = 0$ hat das Randwertproblem (7.3) die unendlich vielen Lösungen $y(x) = c \sin x$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.
- (c) Für $[a, b] = [0, \pi]$ und $y_a = 0, y_b = 1$ hingegen hat das Randwertproblem (7.3) überhaupt keine Lösung. \diamond

Der Existenz von Lösungen bei Randwertaufgaben zweiter Ordnung werden wir uns erst im nächsten Abschnitt widmen. Die nachfolgenden Ausführungen spielen hierbei allerdings eine große Rolle und erlauben im Prinzip, das Randwertproblem auf eine einfachere Gestalt zu reduzieren.

Satz 7.3 Seien $c, d, f \in C[a, b]$ gegebene Funktionen und betrachte die Randwertaufgabe

$$-y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)), \quad y(a) = 0, y(b) = 0 \quad (7.4)$$

sowie das zugehörige homogene Problem

$$-y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = 0 \quad (x \in (a, b)), \quad y(a) = 0, y(b) = 0. \quad (7.5)$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Das Randwertproblem (7.4) hat genau eine Lösung.
- (b) Das homogene Problem (7.5) besitzt nur die triviale Lösung.

Beweis: (a) \implies (b): Sei y die nach Voraussetzung eindeutig existierende Lösung von (7.4). Angenommen, das homogene Problem (7.5) besitzt eine nichttriviale Lösung y_h . Dann ist $y + y_h \neq y$ eine weitere Lösung von (7.4) im Widerspruch zur vorausgesetzten Eindeutigkeit von y .

(b) \implies (a): Das homogene Problem (7.5) habe nur die triviale Lösung. Zum Nachweis der Aussage (a) zeigen wir zunächst, dass (7.4) höchstens eine Lösung haben kann. Seien dazu y_1, y_2 zwei Lösungen von (7.4). Dann ist die Differenz $y := y_1 - y_2$ offenbar eine Lösung der homogenen Aufgabe (7.5) (hier geht die Linearität der betrachteten Differentialgleichung ein). Nach Voraussetzung ist daher $y \equiv 0$, also $y_1 \equiv y_2$.

Wir beweisen als Nächstes die Existenz einer Lösung. Zunächst ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $-y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = f(x)$ auf (a, b) gegeben durch

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

wobei y_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bezeichnet und y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Also hat die Randwertaufgabe (7.4) genau dann eine Lösung, wenn wir die Koeffizienten c_1, c_2 so wählen können, dass

$$0 = y(a) = y_p(a) + c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a),$$

$$0 = y(b) = y_p(b) + c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b)$$

gilt. Dies ist äquivalent zu der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_p(a) \\ y_p(b) \end{pmatrix}.$$

Die hier auftretende Matrix ist aber regulär, denn sonst hätte das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Lösung $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Dann wäre $y_h(x) := c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ aber eine nichttriviale Lösung des homogenen Problems (7.5) im Widerspruch zur Voraussetzung (b). \square

Der Satz 7.3 sagt nichts über die Lösbarkeit des inhomogenen Problems

$$-y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)), \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b \quad (7.6)$$

für gegebene Randwerte $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ aus, sondern betrachtet nur das *halbhomogene* Problem (7.4), bei dem lediglich homogene Randwerte auftreten. Wir wollen im verbleibenden Teil dieses Abschnitts zeigen, dass sich das inhomogene Problem (7.6) stets auf ein halbhomogenes Problem der Gestalt

$$-\tilde{y}''(x) + c(x)\tilde{y}'(x) + d(x)\tilde{y}(x) = \tilde{f}(x) \quad (x \in (a, b)), \quad \tilde{y}(a) = 0, \tilde{y}(b) = 0 \quad (7.7)$$

mit einer geeigneten Funktion \tilde{f} transformieren lässt, so dass wir im Folgenden ohne Einschränkung nur noch halbhomogene Randwertprobleme betrachten müssen.

Sei dazu g diejenige lineare Funktion, welche durch die Punkte (a, y_a) und (b, y_b) verläuft. Dann gelten offenbar die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & -y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b), \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b \\ \iff & \quad -y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b), \\ & \quad y(a) = g(a), y(b) = g(b) \\ \iff & \quad -y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b), \\ & \quad y(a) - g(a) = 0, y(b) - g(b) = 0 \\ \stackrel{\tilde{y} := y - g}{\iff} & \quad -\tilde{y}''(x) - \underbrace{g''(x)}_{=0} + c(x)(\tilde{y}'(x) + g'(x)) + d(x)(\tilde{y}(x) + g(x)) = f(x) \quad \forall x \in (a, b), \\ & \quad \tilde{y}(a) = 0, \tilde{y}(b) = 0 \\ \iff & \quad -\tilde{y}''(x) + c(x)\tilde{y}'(x) + d(x)\tilde{y}(x) = \underbrace{f(x) - c(x)g'(x) - d(x)g(x)}_{=: \tilde{f}(x)} \quad \forall x \in (a, b), \\ & \quad \tilde{y}(a) = 0, \tilde{y}(b) = 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow -\tilde{y}''(x) + c(x)\tilde{y}'(x) + d(x)\tilde{y}(x) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \in (a, b), \quad \tilde{y}(a) = 0, \tilde{y}(b) = 0.$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass die zweite Ableitung der linearen Funktion g verschwindet. Ansonsten zeigen die obigen Äquivalenzen deutlich, dass die inhomogene Randwertaufgabe genau dann eine Lösung besitzt, wenn die halbhomogene Aufgabe lösbar ist. Bevor wir im nächsten Abschnitt tatsächlich ein Kriterium für die Existenz einer Lösung angeben, sei in diesem Zusammenhang auch noch darauf hingewiesen, dass die transformierte rechte Seite \tilde{f} genau dann stetig ist, wenn f selbst dies ist (wobei wir c und d grundsätzlich als stetig voraussetzen).

Wir fassen die obigen Ausführungen in dem folgenden Resultat zusammen.

Satz 7.4 *Genau dann ist y eine Lösung der inhomogenen Randwertaufgabe (7.6), wenn $\tilde{y} := y - g$ das halbhomogene Problem (7.7) mit $\tilde{f}(x) := f(x) - c(x)g'(x) - d(x)g(x)$ löst (dabei bezeichnet g die durch die Punkte (a, y_a) und (b, y_b) gehende lineare Funktion).*

Aus den Sätzen 7.3 und 7.4 folgt insbesondere, dass die inhomogene Randwertaufgabe (7.6) genau dann eindeutig lösbar ist, wenn das homogene Problem (7.5) nur die triviale Lösung besitzt. Keines dieser Resultate garantiert bislang allerdings die Existenz (und eventuell Eindeutigkeit) einer Lösung. Hierum werden wir uns unter anderem in dem nächsten Abschnitt kümmern.

7.2 Maximumprinzip und Folgerungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Randwertprobleme der Gestalt

$$(Ly)(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (7.8)$$

mit dem durch

$$(Ly)(x) := -y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x), \quad x \in (a, b) \quad (7.9)$$

definierten Operator $L : C^2(a, b) \rightarrow C(a, b)$, wobei $c, d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktionen seien.

Lemma 7.5 *Seien $c \in C[a, b]$ und $d(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt für jede Funktion $v \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$:*

- (a) *Aus $(Lv)(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ folgt $v(x) \leq \max\{v(a), v(b)\}$ für alle $x \in [a, b]$.*
- (b) *Aus $(Lv)(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ folgt $v(x) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $x \in [a, b]$.*

Beweis: Die Aussage (b) folgt offenbar aus (a), indem man v durch $-v$ ersetzt. Daher müssen wir lediglich die Behauptung (a) verifizieren.

Dazu nehmen wir zunächst an, dass sogar die stärkere Voraussetzung $(Lv)(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ erfüllt ist. Angenommen, die Funktion v nimmt ihr Maximum nicht am

Rand, sondern im Inneren des Intervalls $[a, b]$ an. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $v'(\xi) = 0$ und $v''(\xi) \leq 0$. Dies impliziert aber

$$-v''(\xi) + c(\xi)v'(\xi) \geq 0$$

im Widerspruch zu $(Lv)(\xi) < 0$ nach Voraussetzung.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis der Aussage (a). Sei also $(Lv)(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Definiere eine von zwei Parametern $\delta, \lambda > 0$ abhängige Funktion

$$w(x) := \delta e^{\lambda x}, \quad x \in [a, b].$$

Für hinreichend große λ , nämlich $\lambda > \max_{x \in [a, b]} c(x)$, gilt dann

$$(Lw)(x) = -\lambda(\lambda - c(x))w(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Die Linearität des Operators L liefert somit

$$(L(v + w))(x) = (Lv)(x) + (Lw)(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Aufgrund des ersten Beweisteils folgt daher

$$v(x) + w(x) \leq \max \{v(a) + w(a), v(b) + w(b)\} \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Diese Ungleichung gilt für jeden Parameter $\delta > 0$ in der Definition von w . Mit $\delta \rightarrow 0$ erhalten wir somit die Behauptung. \square

Das Lemma 7.5 ist die Vorstufe zu dem nun folgenden Maximumprinzip, bei dem die Voraussetzung $d \equiv 0$ ersetzt wird durch die deutlich schwächere Forderung, dass die Funktion d nichtnegativ ist.

Satz 7.6 (*Maximum- und Minimumprinzip*)

Seien $c, d \in C[a, b]$ und $d(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt für jede Funktion $v \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$:

(a) Aus $(Lv)(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ folgt $v(x) \leq \max\{0, v(a), v(b)\}$ für alle $x \in [a, b]$.

(b) Aus $(Lv)(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ folgt $v(x) \geq \min\{0, v(a), v(b)\}$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis: Offenbar brauchen wir wieder nur die Aussage (a) zu beweisen, da der Teil (b) hieraus unmittelbar folgt, wenn man v durch $-v$ ersetzt. Der Beweis von (a) verläuft nun in weitgehender Analogie zum Beweis des Lemmas 7.5.

Dazu beweisen wir die Aussage zunächst wieder unter der stärkeren Voraussetzung $(Lv)(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$. Sei ξ ein Maximum von v auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Für $\xi = a$ und $\xi = b$ ist nichts zu zeigen. Liegt ξ hingegen im Inneren (a, b) , so haben wir wieder $v'(\xi) = 0$ und $v''(\xi) \leq 0$. Dies impliziert

$$0 > (Lv)(\xi) = -v''(\xi) + c(\xi)v'(\xi) + d(\xi)v(\xi) \geq d(\xi)v(\xi)$$

und daher zwangsläufig $v(\xi) < 0$ wegen $d(\xi) \geq 0$. In jedem Fall ist also $v(x) \leq v(\xi) \leq \max\{0, v(a), v(b)\}$ für alle $x \in [a, b]$.

Sei nun lediglich $(Lv)(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ vorausgesetzt. Wir betrachten erneut die von zwei Parametern $\delta, \lambda > 0$ abhängige Funktion

$$w(x) := \delta e^{\lambda x}, \quad x \in [a, b].$$

Dann ist

$$(Lw)(x) = (-\lambda^2 + \lambda c(x) + d(x))w(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Der in Klammern stehende Ausdruck wird von $-\lambda^2$ dominiert und wird aufgrund der Stetigkeit (und somit Beschränktheit) von c und d negativ für alle $x \in [a, b]$, sofern wir λ nur hinreichend groß wählen. Dann ist auch

$$(L(v + w))(x) = (Lv)(x) + (Lw)(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Aus dem ersten Beweisteil erhalten wir somit

$$v(x) + w(x) \leq \max\{0, v(a) + w(a), v(b) + w(b)\} \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Mit $\delta \rightarrow 0$ folgt wieder die Behauptung. □

Aus dem Satz 7.6 erhalten wir sofort die nachstehende Folgerung.

Korollar 7.7 (*Inverse Monotonie*)

Seien $c, d \in C[a, b]$ und $d(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Gilt dann

$$(Lv)(x) \leq (Lw)(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b)$$

für zwei Funktionen $v, w \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$ mit $v(a) \leq w(a)$ und $v(b) \leq w(b)$, so ist $v(x) \leq w(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar durch Anwendung des Maximumprinzips auf die Differenzfunktion $v - w$. □

Wir erläutern noch kurz die Namensgebung des gerade bewiesenen Korollars: Der Operator L würde *monoton* heißen, wenn aus $v \leq w$ bereits $Lv \leq Lw$ für je zwei Funktionen $v, w \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$ gelte. (Anschaulich entspricht dies der Definition einer monoton steigenden Funktion.) Das Korollar 7.7 zeigt hingegen die Gültigkeit der umgekehrten Richtung (unter gewissen Voraussetzungen), dass nämlich aus $Lv \leq Lw$ bereits $v \leq w$ für die Funktionen v, w folgt. Aus diesem Grunde spricht man von *inverser Monotonie*.

Aus dem Maximumprinzip lassen sich eine Reihe von weiteren wichtigen Folgerungen ziehen. So erhält man beispielsweise unmittelbar ein Existenzresultat, das wir zunächst nur für das homogene Randwertproblem formulieren.

Korollar 7.8 Seien $c, d \in C[a, b]$ und $d(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann besitzt das Randwertproblem

$$(Ly)(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b), \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \quad (7.10)$$

nur die triviale Lösung $y \equiv 0$.

Beweis: Sei y eine Lösung von (7.10). Dann ist $y \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$ und $(Ly)(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Wegen $y(a) = 0, y(b) = 0$ erhalten wir aus dem Maximumprinzip 7.6 daher $y(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$, während das Minimumprinzip unmittelbar $y(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ impliziert. Zusammen folgt gerade $y \equiv 0$. \square

Damit haben wir nun den zentralen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Randwertaufgaben zweiter Ordnung.

Satz 7.9 (*Existenz- und Eindeutigkeitssatz*)

Seien $c, d, f \in C[a, b]$ und $d(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann besitzt das inhomogene Randwertproblem

$$(Ly)(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (7.11)$$

für beliebig gegebene Randwerte $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung.

Beweis: Das Resultat folgt direkt aus dem Korollar 7.8 und den Ausführungen im Abschnitt 7.1 (beachte, dass sich die inhomogenen Randbedingungen in die rechte Seite der Differentialgleichung einarbeiten lassen). \square

Wir ziehen noch eine weitere Folgerung aus dem Maximumprinzip, die man als einen Störungssatz für Randwertprobleme auffassen kann, wie wir anschließend zeigen werden.

Satz 7.10 Betrachte das inhomogene Randwertproblem (7.11) mit stetigen Funktionen $c, d, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $d(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt für die nach Satz 7.9 eindeutig existierende Lösung y die Abschätzung

$$\|y\|_\infty \leq \gamma \|f\|_\infty + \max\{|y_a|, |y_b|\}$$

mit einer Konstanten $\gamma > 0$, die zwar von c, d sowie $b - a$ abhängt, nicht jedoch von f oder y_a, y_b .

Beweis: Für ein noch näher zu spezifizierendes $\lambda > 0$ setzen wir

$$w(x) := Be^{\lambda(x-a)} - A, \quad x \in [a, b],$$

wobei

$$A := \gamma B + \max\{|y_a|, |y_b|\}, \quad B := \|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad \gamma := e^{\lambda(b-a)} - 1$$

sei. Dann gilt für alle $x \in (a, b)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}(Lw)(x) &= -(\lambda^2 - \lambda c(x) - d(x))Be^{\lambda(x-a)} - Ad(x) \\ &\leq -(\lambda^2 - \lambda c(x) - d(x))Be^{\lambda(x-a)}.\end{aligned}$$

Wir bestimmen λ nun derart, dass $(\lambda^2 - \lambda c(x) - d(x))e^{\lambda(x-a)} \geq 1$ gilt für alle $x \in [a, b]$. Dies ist sicherlich dann der Fall, wenn $(\lambda^2 - \lambda c(x) - d(x)) \geq 1$ für alle $x \in [a, b]$ ist. Diese Ungleichung ist beispielsweise für alle λ mit

$$\lambda \geq \max_{x \in [a, b]} \left(\frac{c(x)}{2} + \sqrt{\frac{c(x)^2}{4} + d(x) + 1} \right)$$

erfüllt. Dann ist

$$(Lw)(x) \leq -B \quad \forall x \in (a, b),$$

und daher folgt mit der Lösung y von (7.11)

$$(L(\pm y + w))(x) = \pm f(x) + (Lw)(x) \leq |f(x)| - \|f\|_\infty \leq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Nach dem Maximumprinzip ist dann auch

$$\pm y(x) + w(x) \leq \max\{0, \pm y_a + w(a), \pm y_b + w(b)\} \quad \forall x \in [a, b].$$

Nun ist aber

$$w(x) \geq w(a) = B - A \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{und} \quad w(b) = Be^{\lambda(b-a)} - A.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}|y(x)| &\leq \max\{0, \pm y_a + w(a), \pm y_b + w(b)\} - w(x) \\ &\leq \max\{0, |y_a| + w(a), |y_b| + w(b)\} - w(a) \\ &= \max\{0, |y_a| + w(a), |y_b| + w(b)\} + A - B \\ &= \max\{A - B, |y_a|, |y_b| + \gamma B\} \\ &\leq A\end{aligned}$$

für alle $x \in [a, b]$. Die Definition von A liefert daher gerade die Behauptung. \square

Der vorige Satz impliziert, dass die Lösung des Randwertproblems (7.11) stetig von der rechten Seite f und den Randwerten y_a, y_b abhängt. Ist unter den dort genannten Voraussetzungen y nämlich die Lösung von (7.11) sowie \tilde{y} die Lösung des leicht gestörten Problems

$$-\tilde{y}''(x) + c(x)\tilde{y}'(x) + d(x)\tilde{y}(x) = \tilde{f}(x), \quad x \in (a, b), \quad \tilde{y}(a) = \tilde{y}_a, \tilde{y}(b) = \tilde{y}_b,$$

so ist die Differenz $y - \tilde{y}$ eine Lösung des Randwertproblems

$$-z''(x) + c(x)z'(x) + d(x)z(x) = (f - \tilde{f})(x), \quad x \in (a, b), \quad z(a) = y_a - \tilde{y}_a, \quad z(b) = y_b - \tilde{y}_b.$$

Nach Satz 7.10 gilt daher

$$\|y - \tilde{y}\|_\infty \leq \gamma \|f - \tilde{f}\|_\infty + \max\{|y_a - \tilde{y}_a|, |y_b - \tilde{y}_b|\}.$$

Da $\gamma > 0$ nicht von f, y_a, y_b abhängt, erhalten wir somit

$$\|y - \tilde{y}\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|f - \tilde{f}\|_\infty \rightarrow 0, \quad \tilde{y}_a \rightarrow y_a, \quad \tilde{y}_b \rightarrow y_b,$$

was die behauptete stetige Abhängigkeit zeigt.

7.3 Nichtlineare Randwertprobleme und Greensche Funktion

In diesem Abschnitt betrachten wir das nichtlineare Randwertproblem

$$-y''(x) = f(x, y(x)), \quad x \in (a, b), \quad y(a) = y(b) = 0 \quad (7.12)$$

mit einer stetigen Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass die rechte Seite f nicht von y' abhängt.

Zur Untersuchung der Lösbarkeit von (7.12) benötigen wir die für alle $(x, \xi) \in [a, b] \times [a, b]$ definierte *Greensche Funktion*

$$G(x, \xi) := \frac{1}{b-a} \begin{cases} (b-x)(\xi-a), & \text{falls } a \leq \xi \leq x \leq b, \\ (x-a)(b-\xi), & \text{falls } a \leq x \leq \xi \leq b. \end{cases}$$

Sie hat eine Reihe von elementaren Eigenschaften:

- Es ist $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ für alle $(x, \xi) \in [a, b] \times [a, b]$ (Symmetrie).
- Es ist $G(x, \xi) \geq 0$ für alle $(x, \xi) \in [a, b] \times [a, b]$.
- G ist stetig auf $[a, b] \times [a, b]$.

Hingegen ist G nicht differenzierbar, denn die partiellen Ableitungen besitzen einen „Sprung“ entlang der Diagonalen $x = \xi$.

Mittels der Greenschen Funktion lässt sich das Randwertproblem (7.12) äquivalent als eine Integralgleichung schreiben.

Lemma 7.11 *Eine Funktion y ist genau dann Lösung des nichtlinearen Randwertproblems (7.12), wenn sie stetig ist und die Integralgleichung*

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi \quad \forall x \in [a, b] \quad (7.13)$$

löst, wobei G die vorher eingeführte Greensche Funktion bezeichnet. (Insbesondere ist jede Lösung von (7.13) aus $C^2(a, b) \cap C[a, b]$).

Beweis: Sei y zunächst eine Lösung des Randwertproblems (7.12). Aus der Definition der Greenschen Funktion folgt mittels partieller Integration dann

$$\begin{aligned}
 \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi &= - \int_a^b G(x, \xi) y''(\xi) d\xi \\
 &= - \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (\xi-a) y''(\xi) d\xi - \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-\xi) y''(\xi) d\xi \\
 &= - \frac{(b-x)(x-a)}{b-a} y'(x) + \frac{b-x}{b-a} \int_a^x y'(\xi) d\xi \\
 &\quad + \frac{(x-a)(b-x)}{b-a} y'(x) - \frac{x-a}{b-a} \int_x^b y'(\xi) d\xi \\
 &= \frac{b-x}{b-a} (y(x) - \underbrace{y(a)}_{=0}) + \frac{x-a}{b-a} (y(x) - \underbrace{y(b)}_{=0}) \\
 &= y(x)
 \end{aligned}$$

für alle $x \in [a, b]$. Also genügt y der Integralgleichung (7.13).

Sei umgekehrt y eine zumindest stetige Lösung der Integralgleichung (7.13). Wegen

$$y(a) = \int_a^b \underbrace{G(a, \xi)}_{=0} f(\xi, y(\xi)) d\xi = 0 \quad \text{und, analog,} \quad y(b) = 0$$

genügt y zumindest den Randbedingungen aus (7.12). Aufgrund der Definition der Greenschen Funktion lässt sich y außerdem schreiben als

$$y(x) = \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (\xi-a) f(\xi, y(\xi)) d\xi + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-\xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist y daher stetig differenzierbar, und unter Verwendung der Produktregel ergibt sich nach kurzer Rechnung die Darstellung

$$y'(x) = -\frac{1}{b-a} \int_a^x (\xi-a) f(\xi, y(\xi)) d\xi + \frac{1}{b-a} \int_x^b (b-\xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi.$$

Wiederum aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich hieraus die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von y , wobei man durch Differentiation aus der obigen Gleichung

$$y''(x) = -\frac{1}{b-a} (x-a) f(x, y(x)) - \frac{1}{b-a} (b-x) f(x, y(x)) = -f(x, y(x))$$

erhält, d.h., y genügt der Differentialgleichung aus (7.12). □

Mittels des vorigen Resultats und dem Banachschen Fixpunktsatz beweisen wir jetzt einen Existenzsatz für das nichtlineare Randwertproblem aus (7.12).

Satz 7.12 (*Existenz- und Eindeutigkeitsatz*)

Sei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

für eine Lipschitz-Konstante $L > 0$. Gilt hierbei

$$L < \frac{8}{(b-a)^2}, \quad (7.14)$$

so besitzt das nichtlineare Randwertproblem aus (7.12) genau eine Lösung.

Beweis: Wegen Lemma 7.11 genügt es zu zeigen, dass die Integralgleichung (7.13) genau eine (stetige) Lösung besitzt. Für ein $v \in C[a, b]$ definieren wir hierzu den Operator

$$(Tv)(x) := \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, v(\xi)) d\xi.$$

Dann haben wir zu zeigen, dass die Fixpunktgleichung $Tv = v$ genau eine Lösung $v \in C[a, b]$ besitzt. Dies geschieht durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, so dass wir nur dessen Voraussetzungen zu überprüfen haben.

Zunächst ist Tv für jedes $v \in C[a, b]$ wieder eine stetige Funktion (aus dem Beweis des Lemmas 7.11 folgt sogar die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von Tv), also T eine Selbstabbildung von $C[a, b]$ in den Raum $C[a, b]$. Versehen wir den Raum $C[a, b]$ mit der üblichen Maximumnorm $\|v\|_{C[a, b]} := \|v\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |v(x)|$, so ist dieser bekanntlich vollständig und somit insbesondere abgeschlossen. Ferner gilt für beliebige $v, w \in C[a, b]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|Tv - Tw\|_\infty &= \max_{x \in [a, b]} \left| \int_a^b G(x, \xi) [f(\xi, v(\xi)) - f(\xi, w(\xi))] d\xi \right| \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} \int_a^b G(x, \xi) |f(\xi, v(\xi)) - f(\xi, w(\xi))| d\xi \\ &\leq L \max_{x \in [a, b]} \int_a^b G(x, \xi) |v(\xi) - w(\xi)| d\xi \\ &\leq L \max_{x \in [a, b]} \int_a^b G(x, \xi) d\xi \|v - w\|_\infty \\ &= \frac{L(b-a)^2}{8} \|v - w\|_\infty \\ &=: \kappa \|v - w\|_\infty, \end{aligned}$$

denn für die Greensche Funktion gilt offenbar

$$\int_a^b G(x, \xi) d\xi = \frac{(b-x)(x-a)}{2},$$

und das Maximum der Abbildung auf der rechten Seite wird offenbar an der Stelle $x_* := (a+b)/2$ angenommen und liefert dort den Funktionswert $(b-a)^2/8$. Wegen der Voraussetzung (7.14) ist aber

$$\kappa = \frac{L(b-a)^2}{8} < 1,$$

also T kontrahierend auf ganz $C[a, b]$. Die Behauptung folgt daher aus dem Banachschen Fixpunktsatz. \square

Man kann die Voraussetzung (7.14) noch leicht abschwächen zu

$$L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}, \quad (7.15)$$

so dass etwas größere Lipschitz-Konstanten erlaubt sind. Diese Abschätzung hingegen ist scharf, vergleiche [9, 18].

Beispiel 7.13 Betrachte das inhomogene Randwertproblem

$$-y''(x) = 2x|y(x)|, \quad x \in (-1, +1), \quad y(-1) = y(+1) = 1.$$

Mittels der Substitution $\tilde{y}(x) := y(x) - 1$ können wir die inhomogenen Randwerte in die rechte Seite transformieren und gelangen so zu dem Randwertproblem

$$-\tilde{y}''(x) = 2x|\tilde{y}(x) + 1|, \quad x \in (-1, +1), \quad \tilde{y}(-1) = \tilde{y}(+1) = 0.$$

Die rechte Seite $\tilde{f}(x, \tilde{y}) := 2x|\tilde{y} + 1|$ genügt auf dem Intervall $[-1, +1]$ wegen

$$|\tilde{f}(x, \tilde{y}_1) - \tilde{f}(x, \tilde{y}_2)| = |2x(\tilde{y}_1 + 1 - \tilde{y}_2 - 1)| \leq 2|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| \quad \forall x \in [-1, +1], \quad \forall \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in \mathbb{R}$$

einer Lipschitz-Bedingung mit $L = 2$. Wegen $2 < \pi^2/4$ gibt es nach dem Satz 7.12 unter Berücksichtigung des Zusatzes aus (7.15) daher genau eine Lösung für das gegebene Randwertproblem. \diamond

7.4 Sturm–Liouville–Probleme

Gegeben seien Funktionen $q, f \in C[a, b]$ und $p \in C^1[a, b]$ mit $p(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Das Randwertproblem

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)), \quad y(a) = y(b) = 0 \quad (7.16)$$

wird dann als *Sturm–Liouville–Problem* bezeichnet. Differenzieren wir den Term $(p(x)y'(x))'$ aus und dividieren wir die erhaltene Gleichung durch $p(x) > 0$, so erhalten wir offenbar eine Randwertaufgabe der Gestalt (7.5). Umgekehrt kann man wie im Abschnitt 6.1 einsehen, dass sich jedes Randwertproblem der Form (7.5) auf die Gestalt (7.16) transformieren lässt.

Insofern lassen sich alle bisher für die Randwertaufgabe (7.5) erzielten Resultate unmittelbar auf das Sturm–Liouville–Problem übertragen. Die spezielle Gestalt von (7.16) erlaubt jedoch etwas weitergehende Aussagen. In diesem Zusammenhang halten wir zunächst das folgende Resultat fest.

Lemma 7.14 *Seien $q, f \in C[a, b]$ und $p \in C^1[a, b]$ mit $p(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gegeben. Dann ist jede Lösung y von (7.16) aus $C^2[a, b]$.*

Beweis: Als Lösung von (7.16) liegt y per Definition in dem Raum $C^2(a, b) \cap C[a, b]$. Da aber $p, p', q, f \in C[a, b]$, folgt auch $-(py')' = f - qy \in C[a, b]$. Also ist $r := py' \in C^1[a, b]$ und daher $y' = r/p \in C^1[a, b]$ wegen $p(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Folglich ist $y \in C^2[a, b]$. \square

Wir formulieren als Nächstes ein Existenz– und Eindeigkeitsresultat für Sturm–Liouville–Probleme.

Satz 7.15 (*Existenz– und Eindeigkeitsatz*)

Seien $q, f \in C[a, b]$, $p \in C^1[a, b]$ positiv auf $[a, b]$ und überdies q nichtnegativ auf $[a, b]$. Dann gelten:

(a) *Die homogene Randwertaufgabe*

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0 \quad (x \in (a, b)), \quad y(a) = y(b) = 0$$

besitzt nur die triviale Lösung $y \equiv 0$.

(b) *Die inhomogene Randwertaufgabe (7.16) hat genau eine Lösung.*

Beweis: (a) Offenbar ist $y \equiv 0$ eine Lösung des homogenen Randwertproblems. Sei jetzt eine beliebige Lösung y gegeben. Dann ist

$$0 = \int_a^b \left(-(p(x)y'(x))' y(x) + q(x)y(x)^2 \right) dx = \int_a^b (p(x)y'(x)^2 + q(x)y(x)^2) dx, \quad (7.17)$$

wobei die erste Identität aus der mit y multiplizierten Differentialgleichung folgt, während sich die zweite Gleichheit mittels partieller Integration des ersten Terms im Integranden ergibt, wenn man hierbei noch die Randwerte $y(a) = 0, y(b) = 0$ berücksichtigt. Nach Voraussetzung gilt nun $p(x) > 0$ und $q(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Also erhalten wir $y'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ aus (7.17). Folglich ist y auf dem Intervall $[a, b]$ eine konstante Funktion. Wegen der Randwerte $y(a) = y(b) = 0$ ergibt sich somit $y \equiv 0$. Die triviale Lösung ist daher bereits die einzige Lösung der homogenen Randwertaufgabe.

(b) Wegen Teil (a) folgt dies unmittelbar aus dem Satz 7.3. \square

Wir untersuchen als Nächstes die Frage, wie es mit der Lösbarkeit der inhomogenen Sturm–Liouville–Randwertaufgabe aussieht, wenn die zugehörige homogene Aufgabe eine nicht-triviale Lösung besitzt. Im Hinblick auf den Satz 7.15 wollen wir also die Voraussetzung $q(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ fallen lassen.

Satz 7.16 Seien $q, f \in C[a, b]$, $p \in C^1[a, b]$ positiv auf $[a, b]$ und y_* eine nichttriviale Lösung des homogenen Randwertproblems

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0 \quad (x \in (a, b)), \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Das inhomogene Sturm-Liouville-Problem (7.16) besitzt mindestens eine Lösung.
- (b) Die so genannte **Kompatibilitätsbedingung**

$$\int_a^b y_*(x)f(x)dx = 0$$

ist erfüllt.

Beweis: (a) \implies (b): Sei y eine Lösung des inhomogenen Problems (7.16). Für die (letztlich beliebig gegebene) nichttriviale Lösung y_* des zugehörigen homogenen Problems folgt durch zweimalige partielle Integration dann

$$\begin{aligned} \int_a^b y_*(x)f(x)dx &= \int_a^b y_*(x) \left[-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \right] dx \\ &= \int_a^b \left(p(x)y'_*(x)y'(x) + q(x)y_*(x)y(x) \right) dx \\ &= \int_a^b \underbrace{\left[-(p(x)y'_*(x))' + q(x)y_*(x) \right]}_{=0} y(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Kompatibilitätsbedingung gilt daher für jede Lösung des homogenen Problems.

(b) \implies (a): Die Kompatibilitätsbedingung sei nun erfüllt. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es eine partikuläre Lösung $y_p \in C^2[a, b]$ des Anfangswertproblems

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), \quad y(a) = 0, \quad y'(a) \text{ beliebig vorgegeben.}$$

Ferner lässt sich die Lösung y_* darstellen in der Gestalt

$$y_*(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

wobei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung bezeichnet und $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ gilt wegen $y_* \not\equiv 0$. Unter Verwendung der Kompatibilitätsbedingung folgt mittels partieller Integration nun

$$0 = \int_a^b y_*(x)f(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b y_*(x) \left[-(p(x)y'_p(x))' + q(x)y_p(x) \right] dx \\
&= \int_a^b \left[p(x)y'_*(x)y'_p(x) + q(x)y_*(x)y_p(x) \right] dx \\
&= \int_a^b \left[-(p(x)y'_*(x))' y_p(x) + q(x)y_*(x)y_p(x) \right] dx + p(b)y'_*(b)y_p(b) \\
&= \int_a^b \underbrace{\left[-(p(x)y'_*(x))' + q(x)y_*(x) \right]}_{=0} y_p(x) dx + p(b)y'_*(b)y_p(b) \\
&= p(b)y'_*(b)y_p(b).
\end{aligned}$$

Wegen $p(b) > 0$ ist somit $y'_*(b) = 0$ oder $y_p(b) = 0$. Im letztgenannten Fall ist y_p dann bereits eine Lösung der inhomogenen Randwertaufgabe. Es genügt daher zu zeigen, dass der Fall $y'_*(b) = 0$ nicht eintreten kann. Wäre $y'_*(b) = 0$, so würde mit $y_*(b) = 0$ folgen, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
0 &= y_*(b) = c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b), \\
0 &= y'_*(b) = c_1 y'_1(b) + c_2 y'_2(b)
\end{aligned}$$

eine nichttriviale Lösung $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ hätte. Dann müsste aber die zugehörige Wronski-Determinante im Punkt b verschwinden im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von y_1, y_2 . \square

Wir wollen als Nächstes noch zeigen, wie sich die Lösung des inhomogenen Sturm–Liouville–Problems mittels einer Greenschen Funktion darstellen lässt. Dazu betrachten wir ohne Einschränkung das halbhomogene Sturm–Liouville–Problem

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), \quad (x \in (a, b)), \quad y(a) = y(b) = 0$$

unter den üblichen Voraussetzungen $q, f \in C[a, b]$ und $p \in C^1[a, b]$ positiv auf $[a, b]$. Ferner verlangen wir, dass das zugehörige homogene Problem

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0, \quad (x \in (a, b)), \quad y(a) = y(b) = 0$$

nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ besitze (was wegen Satz 7.15 beispielsweise unter der Bedingung $q(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ der Fall ist). Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung, wobei wir durch geeignete Linearkombination dieser Lösungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen können, dass bereits

$$y_1(a) = 0 \quad \text{und} \quad y_2(b) = 0 \tag{7.18}$$

gelten, jede der beiden Funktionen y_1, y_2 also eine der beiden Randbedingungen erfüllt. Dies lässt sich wie folgt einsehen: Sei u_1, u_2 zunächst ein beliebiges Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung

$$Lu = 0 \quad \text{mit} \quad Lu := -(pu')' + qu. \tag{7.19}$$

Dabei gelte

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2 \quad \text{ sowie } \quad u_1(b) = \beta_1, u_2(b) = \beta_2$$

für gewisse Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Ist hierbei $\alpha_1 = 0$, so setzen wir einfach $y_1 := u_1$. Anderenfalls bestimmen wir zunächst ein Paar $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 0)$ mit $\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 = 0$ und setzen anschließend

$$y_1 := \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2.$$

Dann ist sicherlich $Ly_1 = 0$ und in jedem Fall auch $y_1(a) = 0$. Entsprechend verfahren wir bei der Konstruktion von y_2 : Ist bereits $\beta_2 = 0$, so setzen wir $y_2 := u_2$. Anderenfalls bestimmen wir wieder ein Tupel $(\delta_1, \delta_2) \neq (0, 0)$ mit $\delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 = 0$ und setzen dann

$$y_2 := \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2.$$

Dann ist auch $Ly_2 = 0$ und $y_2(b) = 0$. Also können wir in der Tat davon ausgehen, dass wir ein Fundamentalsystem y_1, y_2 der homogenen Differentialgleichung $Ly = 0$ vorliegen haben, das die zusätzliche Eigenschaft (7.19) besitzt.

Sei dann

$$w(x) := y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0, \quad x \in [a, b],$$

die zugehörige Wronski-Determinante dieses Fundamentalsystems, vergleiche (4.23). Aus der durch elementare Rechnung leicht verifizierbaren Gültigkeit der **Lagrange-Identität**

$$vLu - uLv = (p(x)[u'v - v'u])'$$

für je zwei Funktionen $u, v \in C^2[a, b]$ (vergleiche (6.8)) ergibt sich speziell für $u = y_2, v = y_1$ dann

$$0 = (p(x)[y_1y_2' - y_1'y_2])' = (p(x)w(x))' \quad \forall x \in [a, b].$$

Also ist

$$c := p(x)w(x) \quad \forall x \in [a, b] \tag{7.20}$$

eine Konstante. Hiermit definieren wir auf $[a, b] \times [a, b]$ die **Greensche Funktion**

$$G(x, \xi) := \frac{1}{c} \begin{cases} y_1(x)y_2(\xi) & \text{für } a \leq x \leq \xi \leq b, \\ y_1(\xi)y_2(x) & \text{für } a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

des halbhomogenen Sturm-Liouville-Problems. Offenbar ist G stetig und in jedem Punkt $x \neq \xi$ sogar zweimal stetig differenzierbar. Für $x = \xi$ existieren immerhin noch die einseitigen Ableitungen

$$\begin{aligned} G_x(x+, x) &= \frac{1}{c} y_1(x)y_2'(x) \quad \text{für } a \leq x < b, \\ G_x(x-, x) &= \frac{1}{c} y_1'(x)y_2(x) \quad \text{für } a < x \leq b, \end{aligned}$$

aus der sich zusammen mit (7.20) die **Sprungrelation**

$$G_x(x+, x) - G_x(x-, x) = \frac{1}{p(x)} \quad \text{für } a < x < b \quad (7.21)$$

ergibt. Mittels dieser Greenschen Funktion gelingt uns nun die explizite Angabe der Lösung des halbhomogenen Sturm–Liouville–Problems.

Satz 7.17 *Seien $q, f \in C[a, b]$, $p \in C^1[a, b]$ positiv auf $[a, b]$ und $y \equiv 0$ die einzige Lösung des homogenen Sturm–Liouville–Problems. Dann ist*

$$y(x) := \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (x \in [a, b])$$

die eindeutig bestimmte Lösung des halbhomogenen Sturm–Liouville–Problems, wobei G die zuvor konstruierte Greensche Funktion bezeichnet.

Beweis: Per Definition von y gilt

$$y(a) = \int_a^b G(a, \xi) f(\xi) d\xi = 0 \quad \text{wegen} \quad G(a, \xi) = \frac{1}{c} \underbrace{y_1(a)}_{=0} y_2(\xi) = 0$$

und

$$y(b) = \int_a^b G(b, \xi) f(\xi) d\xi = 0 \quad \text{wegen} \quad G(b, \xi) = \frac{1}{c} y_1(\xi) \underbrace{y_2(b)}_{=0} = 0,$$

so dass die homogenen Randbedingungen zumindest erfüllt sind. Die Funktion y genügt aber auch der inhomogenen Differentialgleichung. Dazu schreiben wir

$$y(x) = \int_a^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist y daher stetig differenzierbar mit (man beachte hier die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration)

$$\begin{aligned} y'(x) &= G(x, x) f(x) + \int_a^x G_x(x, \xi) f(\xi) d\xi - G(x, x) f(x) + \int_x^b G_x(x, \xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_a^b G_x(x, \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Analog folgt hieraus mittels der Sprungrelation (7.21)

$$\begin{aligned} &(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \\ &= p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) \\ &= f(x) + \int_a^b G_{xx}(x, \xi) f(\xi) d\xi + p'(x) \int_a^b G_x(x, \xi) f(\xi) d\xi + q(x) \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(x) + \int_a^b \left[G_{xx}(x, \xi) + p'(x)G_x(x, \xi) + q(x)G(x, \xi) \right] f(\xi) d\xi \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in (a, b)$, denn aus der Definition der Greenschen Funktion folgt (nach einiger Rechnung)

$$G_{xx}(x, \xi) + p'(x)G_x(x, \xi) + q(x)G(x, \xi) = 0$$

für alle $x \neq \xi$. □

Die vor dem Satz 7.17 definierte Greensche Funktion stimmt übrigens mit der aus dem vorigen Abschnitt bereits bekannten Greenschen Funktion überein. Dazu beachte man nämlich, dass $y_1(x) := x - a$, $y_2(x) := b - x$ offenbar ein Fundamentalsystem von $-y'' = 0$ bilden, das obendrein die zusätzlich gewünschte Eigenschaft (7.18) besitzt.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts noch einmal in Worten zusammen: Besitzt das homogene Sturm–Liouville–Problem nur die triviale Lösung (etwa im Falle der Nichtnegativität von q), so hat das inhomogene (bzw. halbhomogene) Problem genau eine Lösung, die mit Hilfe der Greenschen Funktion darstellbar ist. Gibt es dagegen eine nicht-triviale Lösung des homogenen Problems, so besitzt das inhomogene Problem genau dann mindestens eine Lösung, wenn die Kompatibilitätsbedingung erfüllt ist. Hat das inhomogene Problem genau eine Lösung, so kann das homogene Problem nur die triviale Lösung besitzen.

Literaturverzeichnis

- [1] H. AMANN: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. De Gruyter, 1983.
- [2] V.I. ARNOL'D: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1991.
- [3] B. AULBACH: *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*. Spektrum Akademischer Verlag, 2. Auflage 2004.
- [4] M. BOLLHÖFER UND V. MEHRMANN: *Numerische Mathematik*. Vieweg-Verlag, 2004.
- [5] W.E. BOYCE UND R.C. DIPRIMA: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Spektrum Akademischer Verlag, 1995.
- [6] M. BRAUN: *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*. Springer-Verlag, 1991.
- [7] L. COLLATZ: *Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, 1990.
- [8] G. DOETSCH: *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Birkhäuser-Verlag, 1976.
- [9] E. EMMRICH: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg-Verlag, 2004.
- [10] W. FORST UND D. HOFFMANN: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, 2005.
- [11] M. HERMANN: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Oldenbourg-Verlag, 2004.
- [12] H. HEUSER: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teuber-Verlag, 13. Auflage 2004.
- [13] H. HEUSER: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, 4. Auflage, 2004.
- [14] R.A. HORN UND C.R. JOHNSON: *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.

- [15] C. KANZOW: *Numerische Mathematik II*. Vorlesungsskript, Universität Würzburg, Sommersemester 2005.
- [16] H.W. KNOBLOCH UND F. KAPPEL: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, 1974.
- [17] K. STREHMEL UND R. WEINER: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, 1995.
- [18] W. WALTER: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, 7. Auflage 2000.
- [19] G.J. WIRSCHING: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, 2006.