Eingebettete RK-Verfahren: RK 5(4) von Dormand & Prince

Idee von eingebetteten RK-Verfahren:

Die Stufen k_i, $i = 1, \ldots, s$, können zu 2 verschiedenen Inkrementfunktionen

$$\Phi^1 := \sum_{i=1}^{s} b_i^1 k_i, \qquad \Phi^2 := \sum_{i=1}^{s} b_i^2 k_i,$$

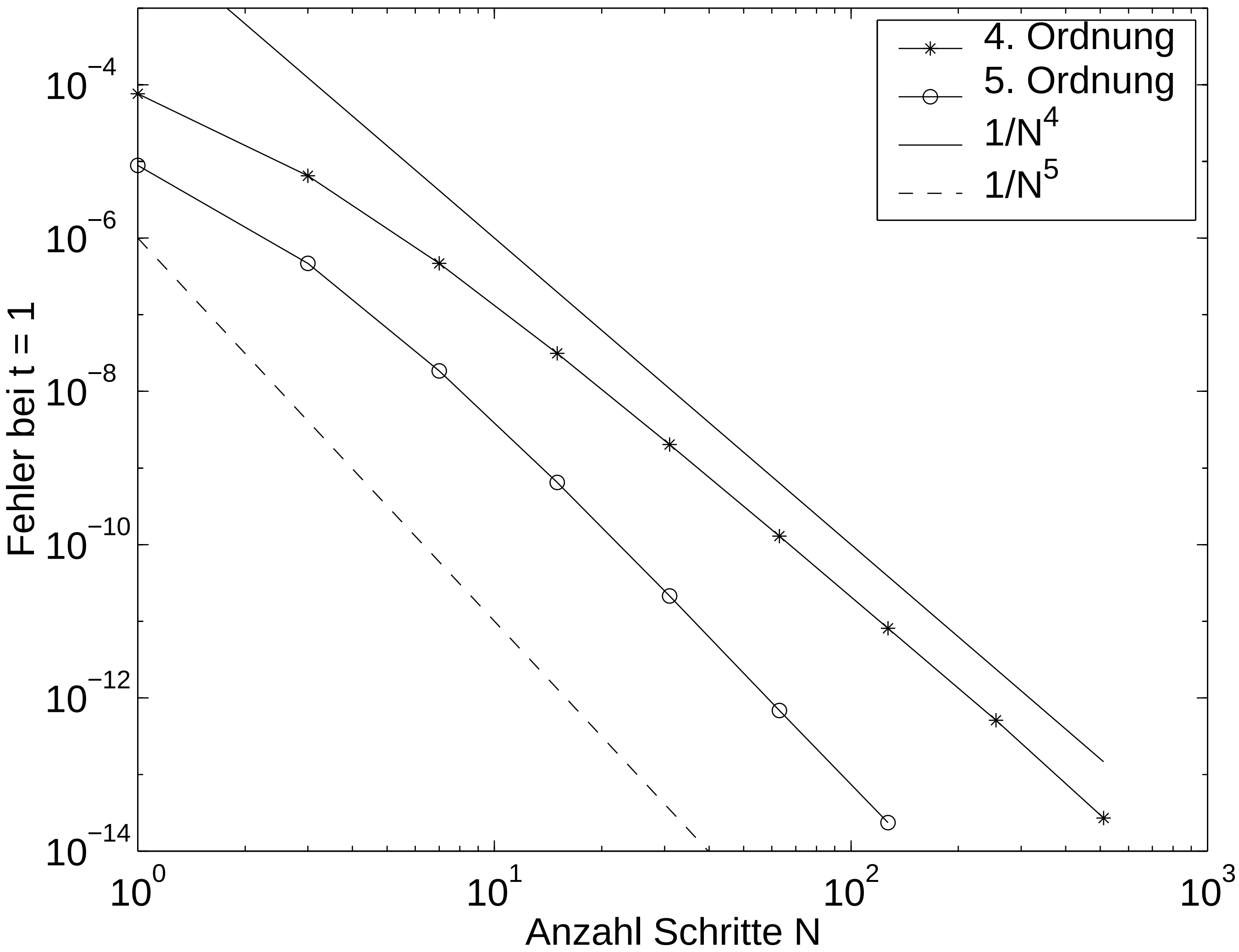
kombiniert werden. Dabei entsteht zwei Verfahren unterschiedlicher Ordnung.

Ein populäres Beispiel ist das RK 5(4)-Verfahren von Dormand & Prince: hier können die Stufen zu einem Verfahren der Ordnung 4 und einem Verfahren der Ordnung 5 kombiniert werden.

Beispiel: RK 5(4) von Dormand & Prince

$$
\begin{array}{c|ccccccc l}
0 & & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & & & \\
\frac{3}{10} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & & & & & & \\
\frac{4}{5} & \frac{44}{45} & -\frac{56}{15} & \frac{32}{9} & & & & & \\
\frac{8}{9} & \frac{19372}{6561} & -\frac{25360}{2187} & \frac{64448}{6561} & -\frac{212}{729} & & & & \\
1 & \frac{9017}{3168} & -\frac{355}{33} & \frac{46732}{5247} & \frac{49}{176} & -\frac{5103}{18656} & & & \\
1 & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & -\frac{2187}{6784} & \frac{11}{84} & & \\
\hline\hline
 & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & -\frac{2187}{6784} & \frac{11}{84} & 0 & (5.\ Ordnung) \\
\hline
 & \frac{5179}{57600} & 0 & \frac{7571}{16695} & \frac{393}{640} & -\frac{92097}{339200} & \frac{187}{2100} & \frac{1}{40} & (4.\ Ordnung)
\end{array}
$$

Beispiel: $y' = y$ auf $[0, 1]$ mit $y(0) = 1$



Schrittweitensteuerung bei eingebetteten RK-Verfahren

```
% input:  Toleranz τ_0; minimale Schrittweite h_min; Anfangsschrittweite h;
% input:  Sicherheitsfaktor ρ ∈ (0,1]; Vergrößerungsschranke η ≥ 1
% Voraussetzung:  Φ ist Inkrementfunktion eines eingebetteten RK Verfahrens
%                    mit Ordnungen p+1, p
```

$t := t_0$; $y := y_0$

`while` $(t < T)$ `do {`

  `bestimme Approximationen` $\tilde{y}_{p+1}$, $\tilde{y}_p$ `mit einem eingebetteten RK Verfahren`

  $\mathrm{EST} := |\tilde{y}_{p+1} - \tilde{y}_p|$ % schätze Fehler

  `if` $\Big((\mathrm{EST}/h) \le \tau_0$ `or` $h \le h_{min}\Big)\{$ % Genauigkeit oder minimale Schrittweite erreicht

    $y := \tilde{y}_{p+1}$ % akzeptiere beste Approximation $\tilde{y}_{p+1}$; $y_{i+1} := \tilde{y}_p$

    $t := t + h$ % nächster Knoten: $t_{i+1} = t_i + h$

    $h := \max\left\{h_{min}, \min\left\{\eta h, \rho\left(\frac{\tau_0}{\mathrm{EST}} h^{p+1}\right)^{1/p}\right\}\right\}$ % neuer Schrittweitenvorschlag

  $\}$

  `else` $h := h/2$ % andernfalls: verwerfe Probeschritt und probiere $h/2$

$\}$

Beispiel: $y' = -200ty^2$ **auf** $[0,1]$ **mit** $y(0) = 1$

Toleranz τ_0	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
# Schritte RK4	33	55	93	163	286	506
# Funktionsauswertungen RK4	363	605	1023	1793	3146	5566
Fehler	0.20_{-6}	0.27_{-7}	0.10_{-7}	0.45_{-9}	0.85_{-10}	0.48_{-11}
# Schritte RK 5(4)	19	33	58	97	170	298
# Funktionsauswertungen RK 5(4)	133	231	406	679	1190	2086
Fehler	7.12_{-6}	8.77_{-6}	2.19_{-8}	2.14_{-9}	5.11_{-11}	1.10_{-11}

Bemerkungen:

- eingebettetes Verfahren schätzt den Fehler des “schlechteren” Verfahrens und akzeptiert den Wert des “besseren” Verfahrens. Schrittweitenvorschlag ist eigentlich angepaßt an das “schlechtere” Verfahren
- DOPRI5 benötigt 7 f-Auswertungen pro Schritt, adaptives Verfahren basierend auf RK4 benötigt 11 f-Auswertungen

Beispiel: $y' = -200ty^2$ **auf** $[0,1]$ **mit** $y(0) = 1$ **als Graphik**