Vergleich zwischen impliziten und expliziten Verfahren zur numerischen Lösung eines Anfangswert-Problems.

Deniz Atug
Matrikelnummer: 0318418
Proseminar Numerische Mathe 2

21. Oktober 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Projekt behandelt vier Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen. Es wird das explizite Euler-Verfahren, das explizite Runge-Verfahren mit dem impliziten Euler-Verfahren und impliziten Runge-Verfahren verglichen. Ziel ist, den Unterschied dieser Verfahren theoretisch sowie anhand von Beispielen zu beschreiben.

2 Theorie

Zunächst wird das Newton Verfahren beschrieben, da bei impliziten Verfahren ein nichtlineares Gleichungsystem gelöst werden muss.

2.1 Newton Verfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Zu gegebenen stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lassen sich Näherungswerte zu den Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ bzw. die Nullstellen der Funktion durch das Newton Verfahren bestimmen. Das Verfahren beruht darauf, die Tangente der Funktion in einem Ausgangspunkt zu bestimmen und die Nullstelle dieser Tangente als verbesserte Näherung der Nullstelle der Funktion zu verwenden. Diese neue Näherung wird als Ausgangspunkt für einen weiteren Schritt verwendet. Die Iteration wird so oft wiederholt, bis die Änderung in der Näherungslösung eine festgesetzte Schranke unterschreitet. Das unendlich oft fortgesetzte Iterations-Verfahren konvergiert im günstigsten Fall mit quadratischer Konvergenzordnung, das bedeutet, die Zahl der korrekten Dezimalstellen verdoppelt sich in jedem Schritt. Formal sieht dies folgendermaßen aus: Man bestimmt zu einem Ausgangspunkt x_n eine neue Näherungslösung x_{n+1}, indem die Funktion f an dem Punkt x_n linearisiert wird. Das bedeutet, man bildet die Tangente im Punkt x_n. Durch die Berechnung der Nullstelle der Tangente : $t_{x_{n+1}} = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$ erhält man den neuen Ausgangspunkt und die Newton-Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Zum Konvergenzverhalten ist zu erwähnen, dass das Newton-Verfahren nur dann sicher zur Nullstelle führt wenn der Ausgangspunkt nahe an der Nullstelle liegt.

2.2 Explizites Euler Verfahren (Ordnung 1)

Jede Differentialgleichung höherer Ordnung kann auf ein System Differentialgleichung erster Ordnung umgeschrieben werden. Aus diesem Grund reicht es aus, sich auf Differentialgleichungen erster Ordnung zu beschränken. Zu lösen ist demnach die Differentialgleichung $y' = f(x, y(x))$ mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$. Die grundlegende Idee des Euler Verfahrens ist, die Funktion $y(x)$ durch ihre Tangenten zu approximieren. Das Problem wird ausgehend vom Punkt x_i betrachtet und besteht darin, mit dem Anfangswert y_i eine Näherung bei $x_{i+1} = x_i + h$ für y_{i+1} zu finden. Die naheliegende Methode ist, die Differentialgleichung formal zu integrieren und

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x, y(x))dx$$

zu bestimmen. Da y(x) im Intervall $[x_i, x_i + h]$ nicht bekannt ist, lässt sich das Integral nur numerisch lösen. Eine mögliche Methode zur Näherung des Integrals besteht darin, dieses durch die Untersumme zu approximieren. Die sich darauf ergebende Approximation

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x, y(x))dx \;\approx\; h \cdot f(x_i, y(x_i)) = h \cdot f(x_i, y_i)$$

führt zu folgender Iteration

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i).$$

Der Fehler ε der Approximation des Integrals durch die Untersumme ist proportional zu h^2 mit $\varepsilon = h^2 \frac{df}{dx}(\xi, y(\xi))$ mit $\xi \in [x_i, x_i + h]$.

2.3 Implizites Euler Verfahren (Ordnung 1)

Der Unterschied zwischen dem impliziten Verfahren und expliziten Verfahren liegt in der Approximation. Wird beim expliziten Verfahren das Integral mit der Untersumme approximiertit so wird beim impliziten Verfahren hingegen das Integral mit der Obersumme approximiert. Das heißt:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x, y(x))dx \;\approx\; h \cdot f(x_i + h, y(x_{i+1})) = h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Der Fehler ϵ ist der Gleiche wie beim expliziten Euler-Verfahren. Jedoch muss in jedem Schritt noch ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden, damit y_{i+1} bestimmt wird. Dieses ist z.B. mit dem oben erwähnten Newton-Verfahren zu lösen.

2.4 Explizites Runge-Verfahren(Ordnung 2)

Die Idee beim explizite Runge-Verfahren ist, dass man statt der Untersumme die Mittelpunktsregel verwendet. Daraus folgt dann:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right)$$

Das Unbekannte $y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$ wird durch das Euler-Verfahren approximiert. Somit ist das Runge-Verfahren:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)$$

und besitzt Ordnung 2.

2.5 Implizites Verfahren (Ordnung 2)

Beim impliziten Verfahren der Ordnung 2 wird eine bessere Näherung des Integrals $\int_{x_i}^{x_i+h} f(x,y)dx$ verwendet, welche lautet:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x,y)dx \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_{i+1})]$$

Hier muss wieder ein nichtlineares Gleichungssystem

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

gelöst werden.

2.6 Unterschied zwischen dem impliziten und expliziten Verfahren

Der Unterschied zwischen den betrachteten Verfahren liegt nicht in der Genauigkeit der y_i sondern in der Stabilität. Ein gutes Beispiel sieht man an der Differentialgleichung $y'(x) = -\alpha y(x)$ mit der exakten Lösung $y(x) = y(0)e^{(-\alpha x)}$. Beim expliziten Euler Verfahren erhält man die Iteration $y_{i+1} = y_i - h \cdot y_i$ mit der Lösung

$$y_i = (1 - \alpha h)^i \cdot y_0.$$

Von der exakten Lösung ist bekannt, dass sie für alle reellen $\alpha > 0$ für $x \to \infty$ gegen Null geht. Das ist für die numerische Approximation nur dann der Fall, wenn

$$|1 - \alpha h| < 1$$

gilt. Nur dann stimmt die numerische Lösung mit der exakten Lösung überein. Das heißt, die Stabiliät des expliziten Euler Verfahrens ist nur dann gegeben, wenn die Bedingung

$$|1 - \alpha h| < 1$$

erfüllt ist. Beim impliziten Euler Verfahren hingegen ist die Iteration

$$y_{i+1} = y_i - \alpha h y_{i+1} \;\Leftrightarrow\; y_i = (1 + h\alpha)^i y_{i+1}$$

mit der Lösung

$$y_i = (1 + \alpha h)^{-i} y_0.$$

Deutlich wird, dass die numerische Lösung für alle h gegen Null geht. Das implizite Verfahren ist somit immer stabil und man kann die Schrittweite h auf der Basis der gewünschten Genauigkeit wählen.

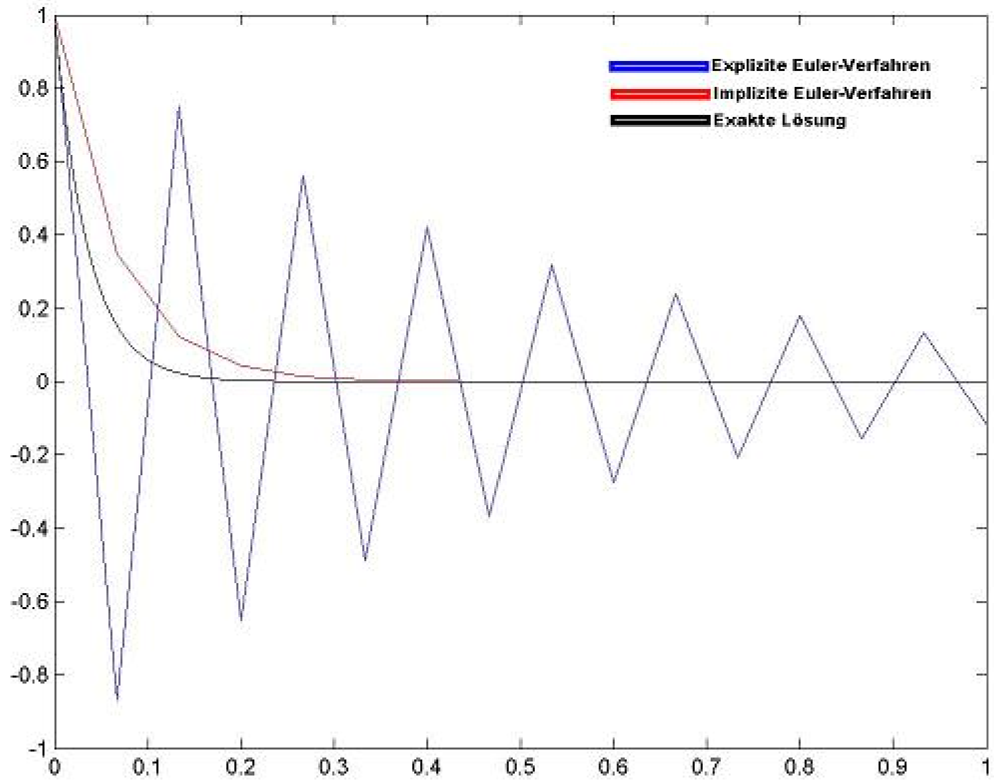
3 Beispiele

3.1

$y(x)' = -28 \cdot y(x)$ mit $y(0) = 1$
Die exakte Lösung ist dann:

$$y(x) = e^{-28x}$$

Graphische Lösung:
Schrittweite $h = \frac{1}{15}$



3.2

$y(x)'' = -y(x)$ mit $y(0) = 0$ und $y(0)' = 1$
Exakte Lösung:

$$y(x) = sin(x)$$

Graphische Lösung(Phasendiagramm):
Schrittweite $h = \frac{1}{15}$
ROT = Runge implizit
BLAU = Runge explizit
SCHWARZ = Exakt