Lösungen von partiellen Differentialgleichungen: Beispiele

2b) Jede Funktion $u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \varphi(y)$, wobei $\varphi(y)$ eine beliebige, nur von y abhängige Funktion ist, ist Lösung der Gleichung $\dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y$
(vgl. auch Bsp. 2a) aus der Vorlesung)

Begründung: $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}x^2 + xy + \varphi(y)) = x + y$, da φ nur von y abhängt und somit $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ gilt.

2c) Die Funktion $u(x,y) = x^2y - \frac{1}{2}xy^2$ ist Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y.$$

Begründung: Es gilt $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y - \frac{1}{2}xy^2) = 2xy - \frac{1}{2}y^2$ sowie

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x^2y - \tfrac{1}{2}xy^2) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - \tfrac{1}{2}y^2) = 2x - y.$$

2d) Jede Funktion $u(x,y) = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \varphi(x) + \psi(y)$, wobei $\varphi(x)$ eine beliebige, nur von x abhängige Funktion und $\psi(y)$ eine beliebige, nur von y abhängige Funktion ist, ist Lösung der Gleichung aus Beispiel 2c).

Begründung: Im Vergleich zu Beispiel 2c) sind die Summanden $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ hinzugekommen. Für diese gilt jedoch: $\frac{\partial}{\partial x}(\varphi(x) + \psi(y)) = \varphi'(x)$ sowie $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\varphi(x) + \psi(y)) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi'(x) = 0 \Rightarrow$ Gleichung aus Bsp. 2c) ist erfüllt.

Für die Praxis wichtige partielle Differentialgleichungen

Teil 1: Gleichungen vom elliptischen Typ

Laplace-Gleichung: $\Delta u = 0$

Poisson-Gleichung: $\Delta u = -f$

(Die Funktionen f und u sind ortsabhängig, aber zeitunabhängig.)

Physikalische Bedeutung:

- Wenn $f = f(x, y, z)$ eine Massendichte im Raum ist, so stellt die Lösung $u = u(x, y, z)$ das *Gravitationspotential* des zugehörigen Gravitationsfeldes dar.
- Analog dazu ist u das *elektrische Potential*, falls $f = f(x, y, z)$ eine Ladungsdichte im Raum bezeichnet.
- In der Theorie der Wärmeleitung ist u die *stationäre*, d.h. zeitunabhängige *Temperatur*, die sich nach einer längeren Zeit einstellt. Der Fall $f = 0$ (Laplace-Gleichung) entspricht der Situation, dass keine inneren Wärmequellen vorhanden sind.

Für die Praxis wichtige partielle Differentialgleichungen

Teil 2: Gleichungen vom parabolischen Typ

Wärmeleitungsgleichung: $$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$$

Diffusionsgleichung: $$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u + bu = f$$

(u und f sind Funktionen der Zeit t und des Ortes, a und b sind konstant)

Physikalische Bedeutung:

- Wenn $f = f(t, x, y, z)$ die Intensität der in einem (homogenen, isotropen) Medium befindlichen Wärmequelle zur Zeit t an der Stelle (x, y, z) bezeichnet, so ist $u = u(t, x, y, z)$ die *Temperatur* zur Zeit t an dieser Stelle.

- Bei Diffusionsproblemen ist u die *Teilchendichte* zum Zeitpunkt t an der Stelle (x, y, z), f bezeichnet die Intensität der inneren Stoffquellen.

Für die Praxis wichtige partielle Differentialgleichungen
Teil 3: Gleichungen vom hyperbolischen Typ

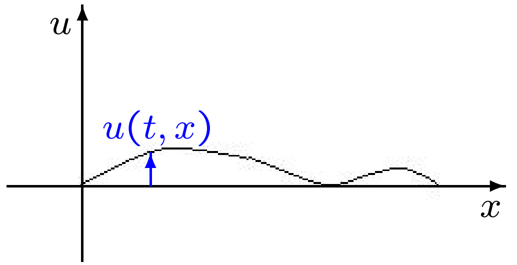
Saitenschwingungsleichung:
(ohne äussere Kräfte)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Wellengleichung:
(zwei- oder dreidimensional; f: äussere Kraft)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f$$

(u, f: Funktionen der Zeit t und des Ortes; a: konstant)



Physikalische Bedeutung:

Saitenschwingungsleichung:

Querschwingungen einer eingespannten, biegsamen Saite

$u(t,x)$: Auslenkung eines beliebigen Punktes x der Saite zur Zeit t

Wellengleichung:
Schwingungen von räumlichen oder flächenhaften Körpern (Membranen) bzw. Ausbreitung von Wellen in flüssigen oder gasförmigen Medien

Herleitung der Saitenschwingungsgleichung

Saitenschwingungsgleichung: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ bzw. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mit: $a^2 = \frac{\tau}{\mu}$

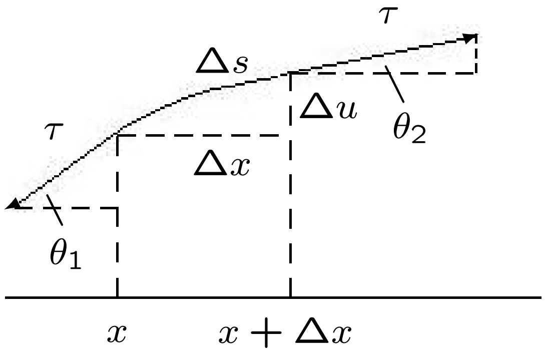
(τ: Spannung (konstant), μ: Masse pro Längeneinheit der Saite (konstant))

Δs: ein Bogenelement der Saite
Spannung wird als konstant angenommen
$\Rightarrow$ senkrecht nach unten an Δs angreifende Kraft:

$$\tau \sin\theta_2 - \tau \sin\theta_1$$

Da für kleine Winkel: $\tan\theta \approx \theta$ gilt, ist diese Kraft:

$$\tau \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \tau \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \qquad (1)$$



wobei genutzt wurde: $\tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$ (Neigung)
Newtonsches Gesetz:

Kraft = Masse von Δs multipliziert mit der Beschleunigung von Δs,
wobei die Beschleunigung gegeben ist durch: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon$ (mit $\varepsilon \to 0$ für $\Delta s \to 0$)

Gleichsetzung mit (1): $\Rightarrow \tau \left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \right] = (\mu \Delta s)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\right)$ (2)

Wenn Schwingungen klein sind: $\Delta s \approx \Delta x$, dann folgt aus (2) nach Division durch $\mu \Delta x$ und Grenzwertbildung $\Delta x \to 0$ (dann auch $\varepsilon \to 0$):

$$\frac{\tau}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{mit: } a^2 = \frac{\tau}{\mu}$$