§39 Lösung der Diffusionsgleichung (Schluss)

Die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\nabla^2 \rho$$

für die zeitliche Entwicklung der Dichte $\rho(\vec{r}, t)$ einer erhaltenen Größe wird in d Dimensionen gelöst durch die Greenfunktion

$$G_0(\vec{r}, t) = \frac{1}{(4\pi D t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{\vec{r}^2}{4Dt}\right]$$

- Am Anfang war die Punktquelle: $G_0(\vec{r}, t = 0) = \delta(\vec{r})$
- Gauß-Kurve mit zeitlich anwachsender Breite: $\sqrt{\langle \vec{r}^2 \rangle} \sim t$
- Der Index 0 deutet die Randbedingungen an: $\lim_{r\to\infty} \rho(\vec{r}, t) = 0$

Die Greenfunktion ermöglicht, wie gehabt, die Lösung der Diffusionsgleichung für beliebige räumliche und zeitliche Inhomogenitäten (*Quellen*) der diffundierenden Substanz; z.B. beschreibt man das Entstehen eines konstanten Lecks der „Stärke“ a in einer Pipeline am Ort $\vec{r}_0$ zur Zeit t_0 durch die „Quellfunktion“

$$Q(\vec{r}, t) = a\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\theta(t - t_0) \tag{15}$$

und die Lösung der Diffusionsgleichung ist dann

$$\rho(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' Q(\vec{r}', t') G_0(\vec{r} - \vec{r}', t - t'). \tag{16}$$

Zahlenbeispiele für Diffusionskoeffizienten (bei Raumtemperatur)

- Benzol (C_6H_6) in Luft: D=8.8 $\cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$; damit ist $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 1$m nach 16 Stunden.

- NaCl in Wasser: D=1.3 $\cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$; damit ist $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 1$m nach 12.2 Jahren. Das erklärt z.B. die Stabilität scharfer Grenzflächen zwischen Süß- und Salzwasser in wasserführenden Höhlensystemen, die Verbindung zum Meer haben. (Beispielsweise in Yucatan)

Anwendungsbeispiele für Diffusionsprozesse finden sich z.B. in Boeker und van Grondelle: *Physik und Umwelt*.

Bisher: keine Begrenzungen des Mediums, in dem die Diffusion stattfindet. Mit Begrenzungen ist die Behandlung schwierig, außer bei einfacher Geometrie, z.B. eine ebene undurchdringliche „Wand“ bei $x = 0$ (man denke an Diffusion im Erdboden). An einer solchen Wand ist

$$\jmath_x(x = 0, t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial}{\partial x}\rho\right|_{x=0} = 0.$$

Wie bekommt man eine Funktion dazu, an einer Ebene „flach“ zu sein? — Man addiert sie zu ihrem Spiegelbild:

$$G_1(x, y, z, t) = G_0(x, y, z, t) + G_0(-x, y, z, t) \tag{17}$$

Man sieht, dass G_1 eine symmetrische Funktion von x ist und damit flach bei $x = 0$.

Diffusion in einer Schicht zwischen zwei parallelen undurchdringlichen Wänden führt wegen der „Spiegelung der Spiegelbilder“ auf Summen unendlich vieler Gaußfunktionen für die Greensche Funktion („Jacobische elliptische Funktionen, ϑ-Funktionen“), die theoretisch gut untersucht und numerisch beliebig friedfertig sind, da die Gaußfunktion für wachsende Argumente so rasant abfällt.

Vermutlich alle lösbaren Fälle diskutiert ausführlich Crank, *The Mathematics of Diffusion*.