

# Differentialgleichung I — Vorlesungs-Skript

(Stand 21. April 2009)

Prof. Dr. Petra Wittbold  
(Skript von Yannick Okonek)

Wintersemester 2006/2007

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundbegriffe und elementare Lösungsmethoden</b>	<b>7</b>
2.1	Methode der Reduktion der Ordnung . . . . .	8
2.2	Einige elementare Lösungstechniken . . . . .	8
2.3	Partielle Differentialgleichungs-Probleme: Erste Schritte . . . . .	15
2.4	Das Charakteristikenverfahren für quasilineare, partielle DGL 1. Ordnung . . . . .	15
2.5	Die drei Grundtypen linearer partieller DGL 2. Ordnung . . . . .	17
2.6	elementare Lösungstechniken . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Existenz- und Eindeutigkeitssätze</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Stetige Abhängigkeiten der Lösungen von AWPen von der rechten Seite etc.</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>Lineare DGL</b>	<b>46</b>
5.1	Lineare <u>skalare</u> DGL höherer Ordnung . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Asymptotisches Verhalten und Stabilität</b>	<b>61</b>
6.1	Autonome DGL . . . . .	64
6.2	Nichtlineare autonome DGL $y' = f(y)$ . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Bifurkation: Verzweigung von Ruhelagen</b>	<b>86</b>
7.1	Transkritische Verzweigung . . . . .	91
7.2	Heugabelverzweigung . . . . .	93
<b>8</b>	<b>Randwertprobleme</b>	<b>96</b>
8.1	Randwertprobleme für lineare DGL 2. Ordnung . . . . .	96
8.1.1	Bedeutung der Green'schen Funktion für semilineare Probleme . . . . .	106
8.2	Maximums- und Vergleichsprinzipien für lineare RWP . . . . .	111

# Kapitel 1

## Einführung

16.10.'06

Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen Differentiale, d.h. Ableitungen von Funktionen, auftreten.

$$y'(x) = f(x, y)$$

Gesucht ist eine Funktion, die genügend oft differenzierbar ist und die Gleichung und eventuelle Nebenbedingungen erfüllt. Manchmal muss man die Forderung der Differenzierbarkeit etwas einschränken, weil es sonst keine Lösung gäbe.

### Beispiele:

1. EIKONALGLEICHUNG der geometrischen Optik:

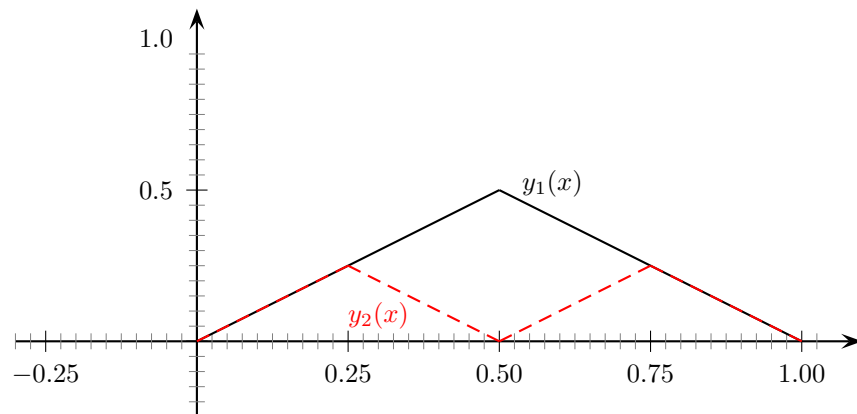
$$\begin{aligned} |y'(x)| &= 1 & \forall x \in ]0, 1[ \\ y(0) &= y(1) = 0 & \text{(Randbedingung)} \end{aligned}$$

Wie man sieht, kommt für eine stetig differenzierbare Lösung der DGL nur  $\pm x$  in Frage. Diese Funktion erfüllt alle Bedingungen bis auf  $y(1) = 0$ . Wir können jetzt eine der Bedingungen fallen lassen, um eine Lösung zu erhalten. Da die Randbedingungen vom Problem her gegeben sind, kann man daran nichts mehr ändern. Wir schwächen deswegen die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit ab.

Dann erhalten wir unter anderem die Lösungen:

$$y_1(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in ]0, 0.5] \\ -x + 1, & \text{falls } x \in ]0.5, 1[ \end{cases}, \quad y_2(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in ]0, 0.25] \\ -x + 0.5, & \text{falls } x \in ]0.25, 0.5] \\ x - 0.5, & \text{falls } x \in ]0.75, 1[ \\ -x + 1, & \text{falls } x \in ]0.75, 1[ \end{cases}$$

Zum besseren Verständnis zeichnen wir uns die Funktion einmal auf:



Man kann natürlich auch noch das Negative der Funktionen nehmen, um eine weitere Lösung zu erhalten. Es gibt in diesem Fall unendlich viele Lösungen. Wir wissen jedoch aus dem physikalischen Zusammenhang, dass es eine eindeutige Lösung geben muss.

Wir sehen also, dass das Problem der Eindeutigkeit schon bei scheinbar simplen Problemen auftreten kann.

## 2. Populationsmodelle aus der Biologie und Soziologie: RÄUBER-BEUTE-MODELL

$$\begin{cases} y' = (\alpha - \beta z)y \\ z' = (\delta y - \gamma)z \end{cases} \quad \alpha, \beta, \delta, \gamma > 0, \quad \text{konst.} \quad (1.1)$$

Dabei bezeichnet  $y(t)$  die Anzahl der Individuen zur Zeit  $t$  in der Beutepopulation und  $z(t)$  entsprechend die Anzahl der Räuber.

Die absolute Zunahme (der Beute) im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  ist gegeben durch  $y(t + \Delta t) - y(t)$ . Diese ist aber meist nicht so interessant. Interessanter ist die **relative** Zunahme:

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t \cdot y(t)}$$

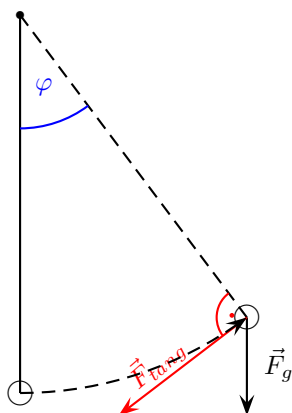
Das ' $y(t)$ ' im Nenner ist notwendig, da die Vermehrungsrate auch von der derzeitigen Anzahl der Individuen abhängt. Die relative Zunahme ist in der Problemstellung in (1.1) durch  $\approx \alpha - \beta \cdot z(t)$  gegeben. Hierbei kann  $\alpha$  als Differenz aus Geburtenrate und Sterberate der Beutepopulation interpretiert werden. Der Term  $-\beta \cdot z(t)$  modelliert die Tatsache, dass die Räuber die Beute fressen und so die Beutepopulation sich proportional zur Räuberpopulation verringert.

Analog gilt:

$$\frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t \cdot z(t)} \approx \delta \cdot y(t) - \gamma, \quad (\text{wobei } \gamma \text{ die Anzahl der Beute ist.})$$

Das Wachstum der Räuber ist proportional zur Anzahl der Beute. Falls keine Beute vorhanden ist, ist das Wachstum der Räuber negativ, sie verhungern : (

## 3. Mechanik: Pendel



Mit dem Newtonschen Kraftgesetz folgt für die Tangentialkomponente  $\vec{F}_{tang}$ :

$$\varphi'' + \overbrace{\frac{g}{L} \sin(\varphi)}^{\vec{F}_{tang}} = 0$$

Berücksichtigt man auch noch die Reibungskräfte, so muss man die Gleichung noch modifizieren. Sie sieht dann folgendermaßen aus:

$$\varphi'' + r(\varphi') + \frac{g}{L} \sin(\varphi) = 0,$$

wobei  $r(\varphi')$  die Reibungskraft und  $g$  die Erdbeschleunigung bezeichnet.

#### 4. Fluiddynamik: NAVIER-STOKES-GLEICHUNG

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad u = u(t, x) = \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \\ u_3(t, x) \end{pmatrix} \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$$

Re ist die Reynold-Zahl und  $\Delta$  der LAPLACE-OPERATOR der als  $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  definiert ist.

$p = p(t, x)$ : Druck des Fluids zur Zeit  $t$  im Ort  $x$ .

#### 5. Finanzmathematik: BLACK-SCHOLES-GLEICHUNG

$$V_t + rsV_s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 V_{ss} = rV \quad s$$

zur Bewertung von Finanzderivaten (Optionen).

$V = V(t, s)$ : Wert/Preis der Option zum Zeitpunkt  $t$  bei dem Wert  $s$  des der Option zugrunde liegenden Finanztitels (z.B. Aktie/Fremdwährung).

$r$ : Zinsrate

$\sigma$ : Volatilität (Parameter für den Einfluss der zufälligen Brown'schen Bewegung im zugrunde liegenden stochastischen Modell.)

Durch eine komplizierte Transformation kann man diese Gleichung auf die Wärmeleitungsgleichung zurückführen.

#### 6. Chemie: REAKTIONS-DIFFUSIONS-GLEICHUNG

$$\begin{cases} u_{1,t} = d_1 \Delta u_1 + f_1(u_1, u_2) \\ u_{2,t} = d_2 \Delta u_2 + f_2(u_1, u_2) \end{cases} \quad d_1, d_2 > 0$$

Eine häufige Form von  $f_1$  ist:  $u_1 \cdot u_2^2$  mit  $f_2 = -f_1$ .  $u_1(t, x)$  bzw.  $u_2(t, x)$  geben die Konzentration eines Stoffes in einer Flüssigkeit zur Zeit  $t$  im Ort  $x$  an.

#### 23.10.'06 Fragen der Analysis von DGL

- Existenz von Lösungen einer DGL.  
Was ist ein geeigneter Lösungsbegriff?
- Eindeutigkeit einer Lösung einer DGL?

- Existenz einer expliziten Lösungsformel?

Im Allgemeinen gibt es das leider nicht. Deswegen beschäftigt man sich mit dem nächsten Punkt:

- Stabilität der Lösung einer DGL:

Hängt die Lösung stetig von den Parametern in der DGL (der rechten Seite), und den Anfangswerten ab?

- Regularität einer Lösung (Differenzierbarkeitsaussagen)

- Asymptotik von Lösungen einer DGL?

Konvergiert die Lösung für  $t \uparrow \infty$  gegen einen Gleichgewichtszustand, ist sie periodisch?

**Beispiel:**

$$y' = -y, \quad t \geq 0, \quad y(0) = y_0.$$

Die eindeutige Lösung ist  $y(t) = y_0 \cdot e^{-t}$ . Es gilt:

$$y_0 \cdot e^{-t} \xrightarrow{t \uparrow \infty} 0.$$

$$y'' + y = 0 \text{ besitzt die allgemeine Lösung } y(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Diese Lösungen sind periodisch.

- Berechnung von Näherungslösungen einer DGL?

# Kapitel 2

## Grundbegriffe und elementare Lösungsmethoden

### Gewöhnliche DGL

DGL in der die gesuchte Funktion von einer unabhängigen Variable abhängt. z.B.:

$$u''(x) = f(x)$$

### Partielle DGL

DGL, in der die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt und partielle Ableitungen der gesuchten Funktion enthält. Z.B.: Wärmeleitungsgleichung:  $u_t - u_{xx} = 0$  (Die Indizes bezeichnen die Ordnung und die Richtung der Ableitung.)

### Ordnung einer DGL

Das ist der Grad der höchsten, in der DGL vorkommenden, Ableitung.

#### **Beispiel:**

$u_t - u_{xx} = 0$  hat die Ordnung 2.  
explizit gegebene DGL

DGL ist nach der Ableitung höchster Ordnung aufgelöst (bzw. lässt sich sofort (trivial) danach auflösen).

#### **Beispiel:**

$u'(x) = f(x)$  explizit gegeben.  
skalare DGL (DGL der Dimension 1)

$y' = f(t, y)$  mit  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $y = y(t)$ , skalare Funktion.

#### **Beispiel:**

$|u'(x)| = 1$  hat die Ordnung 1  
implizit gegebene DGL

Falls eine DGL nicht explizit gegeben ist, so ist sie implizit gegeben.

#### **Beispiel:**

$|u'(x)| = 1$  implizit gegeben

System von DGL (DGL der Dimension  $N > 1$ )

$y' = f(t, y)$  mit  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  und gesuchter vektorwertiger Funktion

$$y = y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{pmatrix}$$

### autonome DGL

Eine DGL heißt **autonom**, falls sie nicht von der Zeit  $t$  abhängt.

**Beispiel:**  $y' = f(y)$  ist autonom, da die rechte Seite nicht explizit von der unabhängigen Variablen abhängt.

### nicht autonome DGL

$y' = f(t, y)$  ist **nicht autonom**, da die rechte Seite explizit von der unabhängigen Variablen  $t$  abhängt.

**Beispiel:**  $y' = f(t, y)$  hängt explizit von  $t$  ab.

## 2.1 Methode der Reduktion der Ordnung

Sei im Folgenden  $I \subset \mathbb{R}$  ein echtes Intervall. Eine explizit gegebene DGL  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.1)$$

mit vorgegebener rechter Seite  $f : F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \cdot N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  für eine gesuchte Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist äquivalent zu einer expliziten DGL 1. Ordnung, aber höherer **Dimension**:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(t, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases} \quad (2.2)$$

Die Äquivalenz gilt im folgenden Sinne:

Ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Lösung der DGL (2.1), d.h.  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist  $n$ -mal stetig differenzierbar und es ist

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle  $t \in I$  ('klassischer Lösungsbegriff'), dann ist

$$\begin{aligned} (y_1, \dots, y_n) : I &\rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot N} \\ t &\mapsto (y_1(t), \dots, y_n(t)) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \end{aligned}$$

Lösung der DGL (2.2). Umgekehrt gilt:

Ist  $y = (y_1, \dots, y_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot N}$  Lösung von (2.2), dann ist  $\tilde{y} = y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (2.1).

Folgerung:

Es genügt explizite, gewöhnliche DGL 1. Ordnung auf Existenz, Eindeutigkeit, Asymptotik etc. zu untersuchen.

### Bemerkung:

Die nicht autonome explizite DGL 1. Ordnung  $y' = f(t, y)$  mit  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \cdot N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist äquivalent zu der autonomen expliziten DGL

$$\begin{cases} t' = 1 \\ y' = f(t, y) \end{cases} \quad z(t) = (t, y(t)) \quad z' = \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ f(z) \end{pmatrix}$$

Anfangswertproblem (AWP) für eine explizite Gewöhnliche DGL 1. Ordnung

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{mit } f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \cdot N} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (t_0, y_0) \in D$$

Gesucht ist die Lösung des AWP, d.h. eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  der DGL, die zusätzlich die Anfangsbedingung  $y(t_0) = y_0$  erfüllt.

## 2.2 Einige elementare Lösungstechniken

1. Lineare, skalare explizite DGL 1. Ordnung : Diese DGL hat die allgemeine Form:

$$\boxed{y'(t) = a(t)y(t) + b(t)}, \quad (2.3)$$

wobei  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen sind.



Homogener Fall: ( $b = 0$ ):

$$\boxed{y'(t) = a(t)y(t)}$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL -d.h. die Menge aller existierenden 'klassischen' Lösungen- ist von der Form:

$$\boxed{y_h(t) = c_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right), \quad t \in I} \quad (2.4)$$

wobei  $t_0 \in I$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$  sind.

**Beweis:**  $y_h$  ist Lösung: Nachrechnen.

Ist  $w$  eine weitere Lösung auf  $I$ , dann betrachten wir eine Hilfsfunktion  $\phi(t)$ :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= w(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right), \quad t \in I \text{ dann} \\ \phi'(t) &= \underbrace{w'(t)}_{a(t)w(t)} \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) - w(t)a(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) = 0 \end{aligned}$$

q.e.d.

nicht homogener Fall: Superpositions-Prinzip

Sei  $y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine spezielle (partikuläre) Lösung der nicht homogenen DGL (2.3). Dann ist die Menge aller Lösungen von (2.4) gegeben durch:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t), \quad t \in I, \\ \text{d.h.} \quad y(t) &= c_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) + y_p(t). \end{aligned}$$

**Beweis:** Sei  $y_h(t) = c_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$  eine Lösung von (2.4),  $y_p$  Lösung von (2.3) auf  $I$ , dann ist

$$y(t) := y_h(t) + y_p(t)$$

$t \in I$  differenzierbar auf  $I_\infty$  mit:

$$\begin{aligned} y'(t) &= y_h'(t) + y_p'(t) \\ &= a(t)y_h(t) + a(t)y_p(t) + b(t) \\ &= a(t)(y_h(t) + y_p(t)) + b(t) = a(t)y(t) + b(t) \end{aligned}$$

Umgekehrt : Ist  $y$  eine beliebige Lösung von (2.3) auf  $I$ , dann ist die Funktion  $\phi(t) := y(t) - y_p(t)$  ( $t \in I$ ) Lösung von (2.4):

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= y'(t) - y_p'(t) \\ &= (a(t)y(t) - b(t)) - (a(t)y_p(t) - b(t)) \\ &= a(t)(y(t) - y_p(t)) = a(t)\phi(t) \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

$$\text{und somit} \quad \phi = y(t) - y_p(t) = c_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \quad t \in I$$

für  $c_0 \in \mathbb{R}$ , d.h.  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ ,  $t \in I$

q.e.d.

Also genügt es eine spezielle Lösung von (2.3) zu berechnen. Dafür gibt es die Möglichkeit der

## 2. Variation der Konstanten :

Suche spezielle Lösung von der Form:

$$y_p(t) = c(t)y_h(t),$$

mit geeigneter Funktion  $c(t)$ . Einsetzen in die DGL:  $y_p(t)$  ist Lösung von (2.3)  $\iff$

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= c'(t)y_h(t) + c(t) \underbrace{y_h'(t)}_{a(t)y_h(t)} \\ &\stackrel{!}{=} a(t) \underbrace{y_p(t)}_{=c(t)y_p(t)} + b(t) \\ &= a(t) \\ \iff c'(t)y_h(t) &= b(t) \\ \iff c'(t) &= b(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \quad t \in I \\ \iff c(t) &= \int \left(b(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right)\right) \quad t \in I \end{aligned}$$

25.10.'06 Betrachte nun das Anfangswertproblem

$$(AWP) \quad \begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \text{ wobei } t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R} \quad \text{vorgegeben}$$

Nach den Vorüberlegungen ist eine Lösung des AWP's notwendiger Weise von der Form:

$$y(t) = \underbrace{c_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)}_{y_h(t)} + \underbrace{\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)}_{y_p(t)} \cdot \underbrace{\int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma\right) \cdot b(s)ds}_{c(t)}$$

und es genügt die Konstante  $c_0$  geeignet zu wählen.

Das AWP besitzt somit die eindeutige globale (d.h. auf ganz  $I$  definierte) Lösung

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) + \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \cdot \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma\right) \cdot b(s)ds$$

## 3. DGL mit getrennten Veränderlichen : d.h. von der Form

$$\left. \begin{aligned} y' &= g(t) \cdot h(y) \\ g &: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h &: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \text{ stetig} \quad (2.5)$$

- wenn  $z_0 \in J$  Nullstelle von  $h$  ist, dann ist die konstante Funktion  $y(t) \equiv z_0, \forall t \in I$  eine Lösung der DGL ('Ruhelage').

**Beispiel:**  $y' = ty^2$

• konstante Lösung  $y(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$

- wenn  $y : I_0 \subset I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der DGL mit  $h(y(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I_0$   
 $(\iff y(t) \in J_0 \subset J, \text{ wobei } J_0 \text{ ein Intervall mit } h(z) \neq 0 \quad \forall z \in J_0 \text{ ist.})$   
dann:

$$\begin{aligned} y' = g(t) \cdot h(y(t)) &\iff \frac{1}{h(y(t))} \cdot y'(t) = g(t) \\ &\iff H(y(t))' = g(t), \end{aligned}$$

wobei  $H$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{h}$  auf  $J_0$  ist. Sei  $G$  eine Stammfunktion von  $g$ , dann folgt:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} y'(t) = g(t)h(y(t)) &\iff H(y(t)) = G(t) + c_0 \\ \forall t \in I_0 &\quad t \in I_0, \quad c_0 \in \mathbb{R} \quad \text{beliebig} \end{aligned}$$

Da  $H$  strikt monoton auf  $J_0$  ist (da  $H' = \frac{1}{h} \neq 0$  auf  $J_0$ ), ist  $H$  umkehrbar und

$$\boxed{y(t) = H^{-1}(G(t) + c_0)}, \quad t_0 \in I, c_0 \in \mathbb{R}, \text{ wobei } G(t) + c_0 \in H(J_0). \quad (2.6)$$

Umgekehrt ist jede Funktion der Gestalt (2.6) eine Lösung der DGL  $y' = g(t)h(y)$ .

Betrachte nun wieder das zugehörige Anfangswertproblem

$$(AWP) \quad \begin{cases} y' = g(t)h(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad t_0 \in I, y_0 \in J$$

- Falls  $y_0$  Nullstelle von  $h$  ist, dann ist die konstante Funktion  $y(t) \equiv y_0, \quad t \in I$  eine Lösung des AWP. Im Allgemeinen kann es noch weitere Lösungen geben! (siehe Beispiel unten)
- Falls  $y_0$  keine Nullstelle von  $h$ , dann besitzt das AWP eine lokal eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} y(t) = H^{-1}(G(t)) \quad \text{mit} \quad H(y) &= \int_{y_0}^y \frac{1}{h(s)} ds \\ G(t) &= \int_{t_0}^t g(s) ds \end{aligned}$$

### Beispiele:

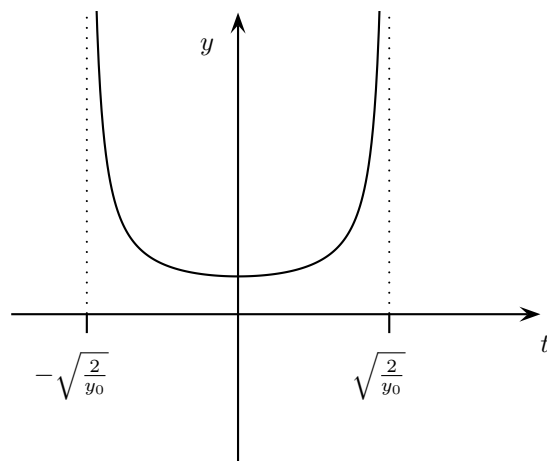
(a)

$$\begin{cases} y' = ty^2 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Falls  $y_0 = 0$ , dann ist  $y(t) \equiv 0$  eine Lösung des AWP auf  $\mathbb{R}$ .
- Falls  $y$  Lösung auf  $I \subset \mathbb{R}$  und  $y > 0$  auf  $I$ , dann:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2} = t &\iff \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} = t \\ &\iff \int_{y_0}^y \frac{1}{z^2} dz = \int_0^t s ds \\ &\iff -\frac{1}{z} \Big|_{y_0}^y = \frac{s^2}{2} \Big|_0^t \\ &\iff -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = \frac{1}{2} t^2 \\ &\iff \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{2} t^2 \\ &\iff y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - \frac{1}{2} t^2}, \quad -\sqrt{\frac{2}{y_0}} < t < \sqrt{\frac{2}{y_0}} \end{aligned}$$

- $\left] -\sqrt{\frac{2}{y_0}}, \sqrt{\frac{2}{y_0}} \right[$  ist das maximale Existenzintervall der Lösung des AWP.

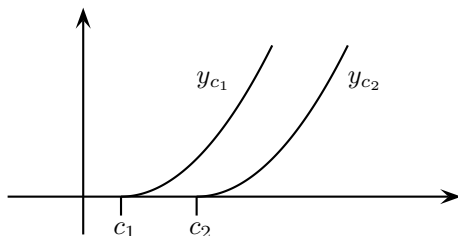


- Falls  $y < 0$  : analog.

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{DGL mit getrennten Variablen})$$

- besitzt die konstante Lösung  $y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$ .
- besitzt weitere unendlich viele verschiedene Lösungen:  
z.B:

$$\begin{cases} (t-c)^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad c > 0 \text{ beliebig}$$



4. Transformations-/ Substitutionstechniken : Um komplizierte DGL in eine einfachere äquivalente Form zu bringen, benutzt man oft die Substitutionstechnik.

#### Beispiel:

- (a)  $y' = g(\alpha t + \beta y + \gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0, \quad g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$

Substitution: zunächst:  $z := \alpha t + \beta y + \gamma$

$$\implies z' = \alpha + \beta y' \iff y' = \frac{z' - \alpha}{\beta}.$$

$$\implies z' = \beta g(z) + \alpha \quad (\text{DGL mit getrennten Variablen})$$

- (b) Bernoulli DGL:  $y' = \alpha(t)y + \beta(t)y^\delta, \quad \alpha, \beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}, \quad \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$

gesucht: positive Lösung  $y$ .

Substitution: Zunächst:  $z = y^{1-\delta} \iff y = z^{\frac{1}{1-\delta}}$  mit  $y' = \frac{1}{1-\delta} \cdot z^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot z'$ . Die Bernoulli-DGL ist somit äquivalent zu

$$\begin{aligned} z' &= (1-\delta)z^{\frac{-\delta}{1-\delta}} (\alpha(t)z^{\frac{-\delta}{1-\delta}} + \beta(t)z^{\frac{-\delta}{1-\delta}}) \\ \iff z' &= (1-\delta)\alpha(t)z + (1-\delta)\beta(t) \end{aligned} \quad (2.7) \quad (\text{nicht homogene lineare DGL 1. Ordnung.})$$

5. Potenzreihenansatz: Für die DGL  $y' = f(t, y)$ .

Idee: Suche eine Lösung der Form:  $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

**Beispiel:**  $y'' + \omega y = 0$ .

Ansatz:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

einsetzen in DGL:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \omega \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 2a_2 + \omega a_0 &= 0 \\ 3 \cdot 2a_3 + \omega a_1 &= 0 & \longrightarrow a_0, a_1 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar} \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 + \omega a_2 &= 0 \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 + \omega a_3 &= 0 \dots \\ \Rightarrow y(t) &= a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(\sqrt{\omega}t)^{2n}}{(2n+1)!} + \frac{a_1}{\sqrt{\omega}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(\sqrt{\omega}t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \alpha_0 \cos(\sqrt{\omega}t) + \beta_0 \sin(\sqrt{\omega}t) \\ &\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \end{aligned}$$

6. lineare skalare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten: d.h. von der Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f(t) \quad (2.8)$$

mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$  für  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

- Superpositionsprinzip für lineare DGL anwendbar.

Betrachte wie im Fall  $n = 1$  zunächst die homogene Gleichung:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0 \quad (2.9)$$

Ansatz:

- suche Lösung der Form  $y(t) = e^{\lambda \cdot t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$
- einsetzen in DGL:  $\lambda^n e^{\lambda \cdot t} \cdot a_n + \dots + e^{\lambda \cdot t} \cdot a_0 = 0$   
 $\Rightarrow (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)e^{\lambda \cdot t} = 0$   
 $\Leftrightarrow \lambda$  ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$  der DGL
- Einfache komplexe Nullstellen ( $\lambda = \mu + i\omega$ ), dann ist auch  $\bar{\lambda} = \mu - i\omega$  eine Nullstelle und es ergeben sich die zwei komplexwertigen, linear unabhängigen Lösungen:

$$\begin{cases} e^{\mu t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \\ e^{\mu t} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \end{cases}$$

die ersetzt werden können durch die reellwertigen linear unabhängigen Lösungen:

$$\longrightarrow e^{\mu t} \cos(\omega t), \quad e^{\mu t} \sin(\omega t)$$

- Einfache reelle Nullstellen:  $\lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{\lambda t}$
- k-fache reelle Nullstelle:  $\tilde{\lambda} \longrightarrow \text{Lösung } e^{\tilde{\lambda} t}, t e^{\tilde{\lambda} t}, \dots, t^{k-1} e^{\tilde{\lambda} t}$

- k-fache komplexe Nullstelle:  $\tilde{\lambda} = \tilde{\mu} + i\tilde{\omega} \longrightarrow$  Kombination aus beidem.
- $\longrightarrow$  ergibt insgesamt  $n$  verschiedene linear unabhängige Lösungen.
- $\longrightarrow$  allgemeine Lösung von (2.9):

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

30.10.'06 Wir betrachten die DGL:

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = f(x) \quad (= e^{3x})$$

Wir wollen anhand dieses Beispiels erst einmal einige Begriffe klären.

Die DGL ist:

- **linear**, weil  $y$  nur linear eingeht. (keine  $y^i$  oder sonst wie 'in eine Funktion eingepackt')
- **inhomogen**, weil es eine rechte Seite gibt ( $f(x)$  bzw  $e^{3x}$ )
- von **2. Ordnung**, weil die höchste vorkommende Ableitung von 2. Ordnung ist.
- mit **konstanten Koeffizienten** (vor den  $y$ 's)
- **homogen**, falls  $f(x) \equiv 0$

Nachdem die Begriffe nun klar sind, wollen wir uns darum kümmern, wie wir diese DGL lösen können.

1. Ansatz:  $y(x) = e^{\lambda x}$  (für den homogenen Fall.) Die Gleichung schreibt sich dann folgendermaßen:

$$e^{\lambda x} \overbrace{(\lambda^2 - 3\lambda + 2)}^{\text{char. Polynom}} \stackrel{!}{=} 0$$

Wir bestimmen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\implies \left. \begin{array}{l} x \mapsto e^x \\ x \mapsto e^{2x} \end{array} \right\} \text{ Fundamentalsystem}$$

(Wir erhalten zwei Funktionen, weil wir eine DGL 2. Ordnung haben.) Also erhalten wir die homogene Lösung

$$\boxed{y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}}$$

2. Typ der rechten Seite: Wir müssen noch eine partikuläre Lösung des Problems finden, um alle Lösungen konstruieren zu können. Dafür verwenden wir den **Ansatz vom Typ der rechten Seite**. Wir setzen

$$y_p(x) = c \cdot e^{3x}$$

Wenn wir diese Funktion für  $y$  in die DGL einsetzen erhalten wir:

$$9ce^{3x} - 3 \cdot 3ce^{3x} + 2ce^{3x} = e^{3x} \implies c = \frac{1}{2} \longrightarrow y_p(x) = \frac{1}{2}e^{3x}$$

3. allg. Lösung: Die allgemeine Lösung erhalten wir nun durch  $y_h(x) + y_p(x)$ . Also:

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$

4. Probe: Zu guter letzt machen wir noch eine Probe, um zu sehen, ob wir uns auch nicht verrechnet haben.

$$\begin{aligned}y(x) &= Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} \\y'(x) &= Ae^x + 2Be^{2x} + \frac{3}{2}e^{3x} \\y''(x) &= Ae^x + 4Be^{2x} + \frac{9}{2}e^{3x} \\y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) &= 0 + 0 + e^{3x}\end{aligned}$$

Dies ist also die Lösung unserer DGL. Dieser Ansatz würde in unserem Beispiel schief gehen, wenn die rechte Seite 'e<sup>2x</sup>' anstelle von 'e<sup>3x</sup>' wäre. In diesem Fall würde unser Ansatz für die inhomogene Gleichung gleich dem Ansatz für die homogene Gleichung sein, und würde dann wegfallen.

Sei jetzt die rechte Seite (also  $f(x)$ ) gleich  $e^x$ . In diesem Fall modifizieren wir unseren Ansatz zu  $xe^x$ .

1. Ansatz:  $y_p(x) = c \cdot xe^x$

$$\begin{aligned}y'(x) &= (2ce^x + cxe^x) - 3(ce^x + cxe^x) + 2ce^x = -ce^x \implies c = -1 \\y_p(x) &= -xe^x \\ \implies y(x) &= Ae^x + Be^{2x} - xe^x \quad \text{ist die allg. Lsg. der DGL } y'' - 3y' + 2y = e^x\end{aligned}$$

2. Regeln:

- 1.)  $f(x) = p(x)e^{\mu x}$  mit  $p \in \Pi_k$  Polynom vom Grad  $k$ . und  $\mu$  nicht Wurzel des charakteristischen Polynoms.  $\implies y_p(x) = r(x)e^{\mu x}$  mit  $r \in \Pi_k$
- 2.)  $f(x) = p(x)e^{\mu x}$  mit  $p \in \Pi_k$  Polynom vom Grad  $k$  und  $\mu$  einfache bzw. doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms.  $\implies y_p(x) = xr(x)e^{\mu x}$  bzw.  $x^2r(x)e^{\mu x}$
- 3.)  $f(x) = p(x)e^{\mu x} \cdot \sin(\omega x)$  oder  $p(x)e^{\mu x} \cdot \cos(\omega x)$ .  $\implies y_p(x) = x^q e^{\mu x} (r(x) \sin(\omega x) + s(x) \cos(\omega x))$ , wobei  $q = 0, 1, 2$  wenn  $\mu + i\omega$  keine, einfache bzw. doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

## 2.3 Partielle Differentialgleichungs-Probleme: Erste Schritte

$u = \vec{u}(\vec{x}, t), \quad p = p(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n$  (NAVIER-STOKES-GLEICHUNGEN.)

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{Re} \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{cases} \quad u_t := \frac{d}{dt}u \quad (\text{Dabei ist Re die Reynolds-Zahl})$$

Laplace-Operator:  $\Delta \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

Nabla-Operator:  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

## 2.4 Das Charakteristikenverfahren für quasilineare, partielle DGL 1. Ordnung

$u = u(x, t)$

$$u_t(x, t) + \overbrace{a(x, t, u(x, t))}^{\text{quasilinear}} u_x(x, t) = \underbrace{g(x, t, u(x, t))}_{\text{semilinear}} \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \longleftarrow \text{Anfangsbedingung}$$

Sei  $x \in \mathbb{R}$  ( $\rightarrow$  CAUCHY-PROBLEM)

einfachstes Beispiel:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{Advektionsgleichung})$$

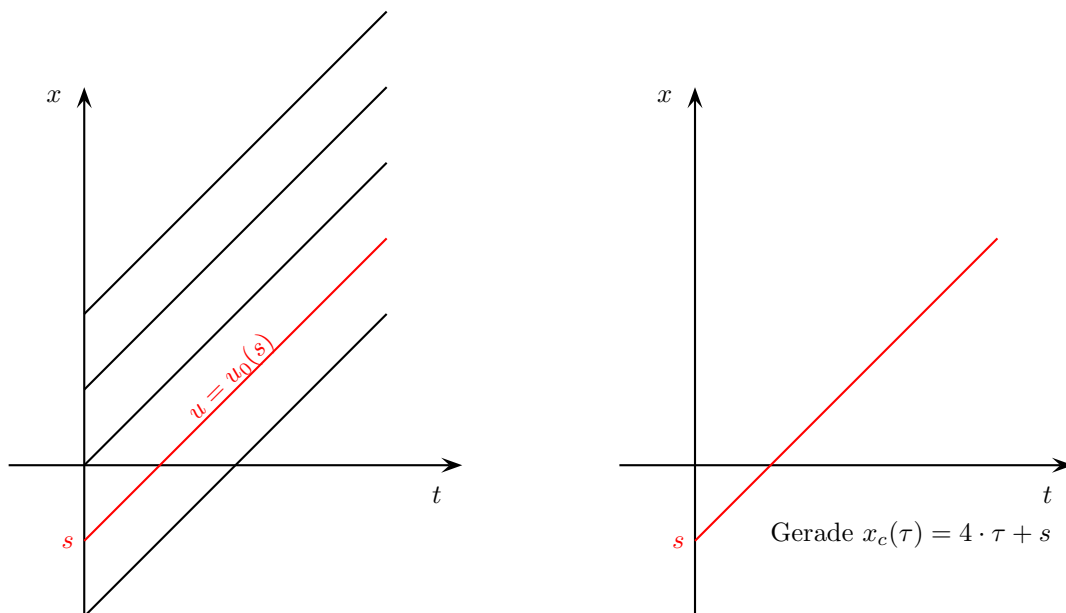
- betrachte eine Kurve  $x_c = x_c(t)$
- betrachte die Funktion

$$U = U(t) := u(x_c(t), t)$$

$$U'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_c(t), t) \cdot x'_c(t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_c(t), t)$$

Wähle  $x_c$  so, dass  $x'_c(t) = 4$  dann nämlich folgt  $U'(t) = 0$ , d.h.  $U(t) = \text{const.} = U(0)$ , also

$$U(t) = u(x_c(t), t) = U_0 = u(x_c(0), 0) = u_0(x_c(0))$$



mit  $s = ?$  ( $x = 4t + s, s = x - 4t$ ), also  $x_c(\tau) = 4\tau + x - 4\tau$

Probe: kommt noch

allgemeines Vorgehen:

- betrachte Kurve  $x_c(t)$  in der  $x$ - $t$ -Ebene
- betrachte  $U(t) = u(x_c(t), t)$
- es gilt:  $U'(t) = u_t(x_c(t), t) + x'_c(t)u_x(x_c(t), t)$
- bestimme  $x$  so, dass  $\boxed{x'_c(t)} = a\left(x_c(t), t, \underbrace{u(x_c(t), t)}_{U(t)}\right)$
- es folgt:  $U'(t) = g\left(x_c(t), t, \underbrace{u(x_c(t), t)}_{U(t)}\right)$
- $f(\bar{x}, \bar{t})$  gegeben, bestimme  $x_c(t)$  so, dass  $\bar{x} = x_c(\bar{t})$   
 $\longrightarrow \boxed{u(\bar{x}, \bar{t}) = U(\bar{t})}$



01.11.'06 Beispiele: (Charakteristikenverfahren)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \\ u(., 0) = u_0 \end{cases}$$

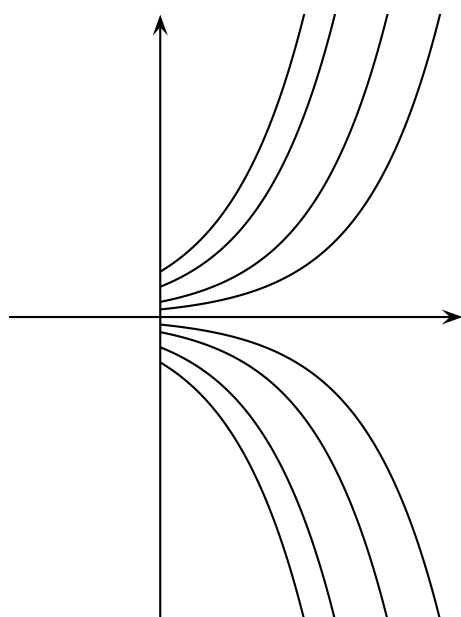
$$x_c = x_c(t), \quad U(t) := u(x_c(t), t)$$

$$u'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_c(t), t)$$

$$\boxed{x'_c(t) = x_c(t)} \implies x_c(t) = e^t \cdot x_c(0)$$

$$u(t) = \text{const.} = U(0)$$

$$u(x_c(t), t) = U(t) = U(0) = U(x_c(0), 0) = u_0(x_c(0))$$



Die Kurven sind abhängig von  $x_c(0)$ . Die gesamte rechte Halbebene wird durch Kurven abgedeckt, wobei jeder Punkt von genau einer Kurve erreicht wird. Gesucht ist die Kurve, die durch den Punkt  $u(\bar{x}, \bar{t})$  geht. Wir formen um:

$$\bar{x} = e^{\bar{t}} \cdot x_c(0)$$

$$x_c(0) = \bar{x} \cdot e^{-\bar{t}}$$

$$\implies u(\bar{x}, \bar{t}) = u_0(\bar{x} \cdot e^{-\bar{t}})$$

Probe:

$$1.) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = u'(xe^{-t}) - e^{-t}x + xu'_0(xe^{-t}) \cdot e^{-t} = 0$$

$$2.) \quad u(x, 0) = u_0(x \cdot e^{-0}) = u_0(x)$$

## 2.5 Die drei Grundtypen linearer partieller DGL 2. Ordnung

$$u = u(x, y), \quad \underbrace{au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \dots}_{\text{Entscheidend für die Klassifizierung}}$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - ac$$

$D > 0$  hyperbolisch. Beispiel:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= f & \text{Wellengleichung} & \quad u = u(\vec{x}, t) \\ u_{tt} - c^2 u_{xx} &\implies D = c^2 \cdot 1 > 0 \end{aligned}$$

$D = 0$  parabolisch. Beispiel:

$$\begin{aligned} u_t - \mu \Delta u &= f & \text{Wärmeleitungsgleichung} & \quad I = \frac{\partial^2}{x_1^2} + \dots \\ u_t - \mu u_{xx} &\implies D = 0 \end{aligned}$$

$D < 0$  elliptisch. Beispiel:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{Poisson-Gleichung} \\ -\Delta u + ku &= f && \text{Helmholtz-Gleichung} \\ -\Delta u &= -u_{xx} - u_{yy} \implies D = -1 < 0 \end{aligned}$$

**Schwingende Saite**  $u = u(x, t)$

Sei  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  für  $0 < x < L$ ,  $t > 0$  und  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Das Ganze nennt man DIRICHLET'SCHE RANDBEDINGUNG, oder auch Randbedingung 1. Art.

Gegeben seine weitere Anfangsbedingungen von der Gestalt:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) && \text{anfängliche Auslenkung} \\ u_t(x, 0) &= v_0(x) && \text{anfänglicher Impuls (Geschwindigkeit)} \end{aligned}$$

Das nennt man ein Anfangsrandwertproblem.

## 2.6 elementare Lösungstechniken

Idee:

i)  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$  Produktansatz, Separation

ii) Superpositionsprinzip

i)

$$\begin{aligned} X(x) \cdot T''(t) - c^2 X''(x) \cdot T(t) &= 0 = \text{const} =: \lambda \\ \frac{T''(t)}{T(t)} &= c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \\ \begin{cases} X''(x) - \frac{\lambda}{c^2} X(x) &= 0 \\ X(0) = X(L) &= 0 \end{cases} &\implies X(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad \text{sofern } \lambda = -c^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T''(t) &= \lambda T(t) \\ T(t) &= A \cdot \sin\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) + B \cos\left(\frac{dk\pi t}{L}\right) \end{aligned}$$

ii) Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} \longrightarrow u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (a_k) \sin\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) + b_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ u_0(x) &\stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot 0 + b_k \cdot 1) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ v_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \frac{k\pi}{L} \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

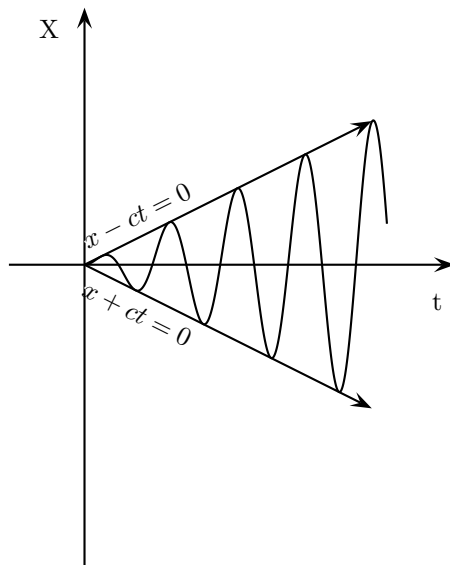
$$\begin{aligned}
\int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^L \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\
\int_0^L \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx &= \left[ -\frac{L}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \int_0^L -\frac{L}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cdot \frac{j\pi}{c} \cdot \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{j}{k} \int_0^L \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } j \neq k \\ \frac{L}{2}, & \text{falls } j = k \end{cases} \\
j = k \quad \int_0^L \sin^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \cos^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L 1 - \sin^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = c - \int_0^L \sin^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx
\end{aligned}$$

**Cauchy-Problem für die Wellengleichung (d'Alembert-Lösung)**

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 \\ u_t(\cdot, 0) = v_0 \end{cases}$$

Phasengeschwindigkeit

Ebene Wellen hängen nur von  $\langle \vec{k}, \vec{x} \rangle = \overbrace{ct}^{\text{Phasengeschwindigkeit}}$ ,  $|\vec{k}| = 1$ . Wir betrachten den eindimensionalen Fall. Gesucht ist dann eine Lösung der Form:  $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$ :



$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= c^2 F''(x - ct) + c^2 G''(x + ct) \\ &\quad - c^2 F''(x - ct) - c^2 G''(x + ct) = 0 \end{aligned}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = F(x) + G(x)$$

$$u_t(x, 0) = \boxed{v_0(x) = -cF'(x) + cG'(x)}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{c \cdot u'_0(x) - v_0(x)}{2c}$$

$$G'(x) = \frac{c \cdot u'_0(x) + v_0(x)}{2c}$$

$$\int_{x-ct}^{x+ct} G'(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u'_0(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi$$

$$F(x - ct) = u_0(x - ct) - G(x - ct)$$

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) = u_0(x - ct) - \underbrace{G(x - ct) + G(x + ct)}_{\int_{x-ct}^{x+ct} G'(\xi) d\xi}$$

$$= u_0(x - ct) + \frac{1}{2} (u_0(x - ct) - u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{2} (u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi \quad \text{d'Alembert Lösung}$$

# Kapitel 3

## Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Im Folgenden sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

### SATZ 3.1 (VON PEANO)

Sei  $D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ ,  $N \geq 1$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig,  $(x_0, y_0) \in D$ . Dann ist das AWP

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{lokal lösbar,}$$

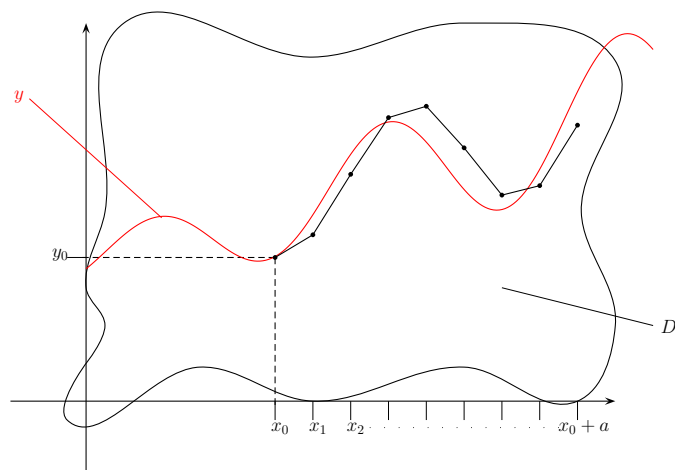
d.h. es existiert (mindestens) ein Intervall  $\mathcal{I}$  mit  $x_0 \in \mathring{\mathcal{I}}$  und eine Funktion  $y : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{K}^N$ , für die gilt:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x) &= f(x, y(x)), \quad \forall x \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Beweisidee: Konstruktion von Näherungslösungen.

Wir wissen aus der Anfangsbedingung:

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$$



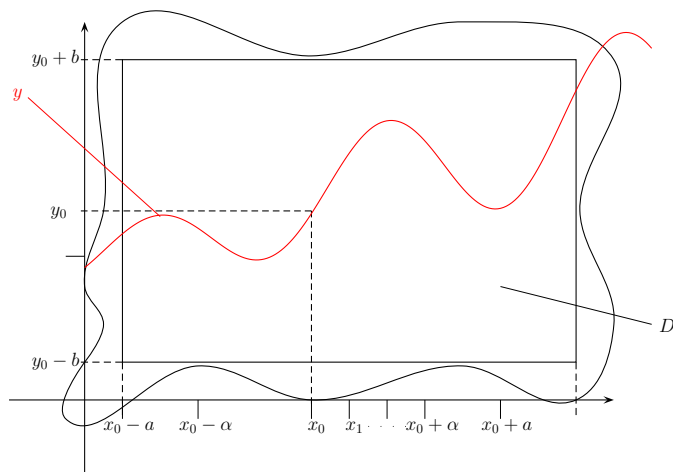
Beweis: konstruktive Methode mittels EULER'SCHER POLYGONZÜGE. (Konstruktion von Näherungslösungen.)

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0) \approx y(x_1) \\ y_2 &= y_1 + (x_2 - x_1)f(x_1, y_1) \approx y(x_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

gesuchte Lösung. Da  $D$  offen ist, existieren  $a, b > 0$  so, dass

$$R_{[a,b]} = [x_0 - a, x_0 + a] \times \{y \in \mathbb{K}^N; \|y - y_0\| \leq b\} \subset D$$

(hier und im Folgenden bezeichnet  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm im  $\mathbb{K}^N$ . Da  $R_{[a,b]}$  kompakt ist, ist  $f$  auf  $R_{[a,b]}$  beschränkt und gleichmäßig stetig.



$$* \mathcal{M} := \sup_{(x,y) \in R_{[a,b]}} \|f(x,y)\| < \infty$$

$$* \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \delta = \delta(k) > 0 \text{ so, dass } \|f(x,y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})\| < \frac{1}{k}, \forall (x,y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in R_{[a,b]}, \text{ mit } |x - \tilde{x}| < \delta(k) \text{ und } \|y - \tilde{y}\| < \delta(k). \text{ Sei } \alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{\mathcal{M}} \right\}.$$

Betrachte im Folgenden nur  $[x_0, x_0 + \alpha]$ . (Der Beweis der Existenz einer Lösung auf  $[x_0 - \alpha, x_0]$  erfolgt analog.)

Für  $k \in \mathbb{N}$  existiert  $n = n(k) \in \mathbb{N}$  so, dass

$$\frac{\alpha}{n(k)} < \min \left\{ \delta(k), \frac{\delta(k)}{\mathcal{M}} \right\}$$

Betrachte nun die Zerlegung

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 \\ x_1 &= x_0 + \frac{\alpha}{n(k)} \\ x_2 &= x_0 + \frac{2\alpha}{n(k)} \\ &\vdots \\ x_{n(k)} &= x_0 + \frac{n(k)\alpha}{n(k)} = x_0 + \alpha \end{aligned}$$

von  $[x_0, x_0 + \alpha]$ . Definiere dann die so genannten EULER'SCHEN POLYGONZÜGE  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  durch:

$$\begin{aligned} p_k(x_0) &= y_0 \\ p_k(x) &= p_k(x_i) + (x - x_i) \cdot \underbrace{f(x_i, p_k(x_i))}_{\approx y(x_i)}, \quad x \in ]x_i, x_{i+1}] \quad \forall i = 0, \dots, n(k) - 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

\*  $p_k$  ist wohldefiniert, d.h.  $(x_i, p_k(x_i)) \in D \quad \forall i = 0, \dots, n(k) - 1$

Wir werden zeigen, dass  $(x_i, p_k(x_i)) \in R_{[a,b]} \quad \forall i = 0, \dots, n(k) - 1$

Induktion:

- $i = 0$  :  $(x_0, y_0) \in R_{[a,b]}$  (klar)
- $i - 1 \rightarrow i$  :

$$\begin{aligned} \|p_k(x_i) - y_0\| &= \left\| \sum_{j=0}^{i-1} (p_k(x_{j+1}) - p_k(x_j)) \right\| && \leq \sum_{j=0}^{i-1} \|p_k(x_{j+1}) - p_k(x_j)\| \\ &\stackrel{(3.1)}{\leq} \sum_{j=0}^{i-1} \underbrace{(x_{j+1} - x_j)}_{=\frac{\alpha}{n(k)}} \left\| \underbrace{f(x_j, p_k(x_j))}_{\in R_{[a,b]}} \right\| && \leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\alpha}{n(k)} \cdot \mathcal{M} \\ &= \frac{\alpha}{n(k)} \cdot \mathcal{M} \cdot \underbrace{i}_{\leq n(k)} && \leq \underbrace{\alpha}_{\leq \frac{b}{\mathcal{M}}} \cdot \mathcal{M} \leq b \end{aligned} \quad (3.2)$$

\*  $p_k$  ist stetig auf  $[x_0, x_0 + \alpha]$  und stückweise differenzierbar mit

$$p'_k(x) = f(x_i, p_k(x_i)) \quad \forall x \in ]x_i, x_{i+1}[ \quad i = 0, \dots, n(k) - 1$$

\*  $p_k$  ist Näherungslösung der DGL: Für  $x \in ]x_j, x_{j+1}[$ ,  $j \in \{0, \dots, n(k) - 1\}$  beliebig, ist

$$\|p'_k(x) - f(x, p_k(x))\| = \|f(x_j, p_k(x_j)) - f(x, p_k(x))\| \quad (*)$$

Da  $(x - x_j) < \frac{\alpha}{n(k)} < \delta(k)$  und außerdem

$$\|p_k(x_j) - \underbrace{p_k(x)}_{(3.1)}\| = (x - x_j) \|f(x_j, p_k(x_j))\| \leq \frac{\alpha}{n(k)} \cdot \mathcal{M} < \delta(k)$$

folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  :  $\|f(x_j, p_k(x_j)) - f(x, p_k(x))\| \leq \frac{1}{k}$ , d.h.

$$\|p'_k(x) - f(x, p_k(x))\| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha], \quad x \neq x_j, \quad j = 0, \dots, n(k) - 1$$

\*  $y$  ist Lösung des AWP's auf  $[x_0, x_0 + \alpha]$   $\iff$   $y$  ist Lösung der Integralgleichung:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad x \in [x_0, x_0 + \alpha] \quad (3.3)$$

\*  $p_k$  ist Näherungslösung der Integralgleichung:

Sei  $x \in ]x_0, x_0 + \alpha]$ ; dann  $\exists j \in \{0, \dots, n(k) - 1\} : x \in ]x_j, x_{j+1}]$ , und es ist

$$\begin{aligned} \left\| p_k(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f(s, p_k(s)) \, ds \right\| &= \quad (\text{mittels Teleskopsumme}) \\ &= \left\| \underbrace{p_k(x) - p_k(x_j)}_{= \int_{x_j}^{x_{j+1}} p'_k(s) \, ds} + \sum_{i=0}^{j-1} \left( \underbrace{p_k(x_{i+1}) - p_k(x_i)}_{= \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_k(s) \, ds} \right) - \sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, p_k(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \int_{x_j}^x \underbrace{\|p'_k(s) - f(s, p_k(s))\|}_{< \frac{1}{k}} \, ds + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{\|p'_k(s) - f(s, p_k(s))\|}_{< \frac{1}{k}} \, ds \\ &\leq \frac{(x - x_0)}{k} \leq \frac{\alpha}{k} \end{aligned}$$

\* Es reicht nun zu Zeigen, dass  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine auf  $[x_0, x_0 + \alpha]$  gleichmäßig konvergente Teilfolge  $\{p_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$  enthält. Da  $f$  gleichmäßig stetig auf  $R_{[a,b]}$  ist, ist dann auch die Komposition  $f(\cdot, p_{k_l}(\cdot))_l$  gleichmäßig auf  $[x_0, x_0 + \alpha]$  gegen  $f(\cdot, p_\infty(\cdot))$  konvergent, wobei  $p_\infty$  der gleichmäßige Limes der Folge  $\{p_{k_l}\}_{k,l \in \mathbb{N}}$  ist.

Damit kann die Limesbildung mit der Integration vertauscht werden:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, p_{k_l}(s)) \, ds = \int_{x_0}^x f(s, p_\infty(s)) \, ds \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha]$$

Übergang  $l \rightarrow \infty$  in der Gleichung:

$$\left\| p_{k_l}(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f(s, p_{k_l}(s)) \, ds \right\| < \frac{\alpha}{k_l} \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha]$$

liefert:  $p_\infty$  ist Lösung der Integralgleichung (3.3) und damit eine Lösung des AWP's auf  $[x_0, x_0 + \alpha]$ .

\* Um zu Zeigen, dass  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt, benutzen wir den

**SATZ 3.2 (VON ARZELA-ASCOLI)**

Sei  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K}^N)$  ausgestattet mit der Supremums-Norm  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $a, b \in \mathbb{K}$ ,  $a < b$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .

Dann ist  $\mathcal{F}$  relativ kompakt

(d.h. jede Folge  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  besitzt eine auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergente Teilfolge; der Grenzwert muss nicht in  $\mathcal{F}$  liegen.)

$\Longleftrightarrow$ :

1.) Die Funktionen-Familie  $\mathcal{F}$  ist punktweise beschränkt, d.h.

$$\forall x \in [a, b] \quad \exists M = M(x) \geq 0 : \|f(x)\| \leq M(x) \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

2.)  $\mathcal{F}$  ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ so dass } \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \quad \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

Wir müssen also zeigen:

\*  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist punktweise beschränkt:

Folgt sofort aus unserer Abschätzung (3.2)  $\|p_k(x_i) - y_0\| \leq b$ , da

$$\begin{aligned}
 \|p_k(x)\| &\stackrel{(3.1)}{=} \left\| p_k(x_i) + (x - x_i) \underbrace{f(x_i, p_k(x_i))}_{\in R_{[a,b]}} \right\| \\
 &\leq \|p_k(x_i)\| + (x - x_i) \|f(x_i, p_k(x_i))\| \\
 &\leq b + \|y_0\| + \underbrace{(x - x_i)}_{< \alpha} \cdot \mathcal{M} \\
 &\leq b + \|y_0\| + \alpha \cdot \mathcal{M} \quad (\text{ist sogar von } x \text{ unabhängig!})
 \end{aligned}$$

\*  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist gleichgradig stetig:

Seien  $x, y \in [x_0, x_0 + \alpha]$

- 1. Fall:  $i \in \{0, \dots, n(k) - 1\}$  so, dass  $x, y \in ]x_i, x_{i+1}]$

Dann:

$$\begin{aligned}
 \|p_k(x) - p_k(y)\| &\stackrel{(3.1)}{=} \|(x - y)f(x_i, p_k(x_i))\| \\
 &\leq \|x - y\| \cdot \mathcal{M}
 \end{aligned}$$

Somit ist für  $\varepsilon > 0$  mit  $\delta = \delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{\mathcal{M}}$

$$\|p_k(x) - p_k(y)\| \leq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall |x - y| < \delta(\varepsilon)$$

- 2. Fall:  $x \in ]x_i, x_{i+1}]$ ,  $y \in ]x_j, x_{j+1}]$   $i \neq j$ , (o.B.d.A. sei dann  $i < j$ ), dann

$$\begin{aligned}
 \|p_k(x) - p_k(y)\| &= \left\| p_k(x) - p_k(x_{i+1}) + \sum_{l=i+1}^{j-1} (p_k(x_{l+1}) - p_k(x_l)) + p_k(x_j) - p_k(y) \right\| \\
 &\leq \|p_k(x) - p_k(x_{i+1})\| + \sum_{l=i+1}^{j-1} \|p_k(x_{l+1}) - p_k(x_l)\| + \|p_k(x_j) - p_k(y)\| \\
 &\leq \mathcal{M}(x_{i+1} - x) + \sum_{l=i+1}^{j-1} \mathcal{M}(x_{l+1} - x_l) + \mathcal{M}(y - x_j) \quad \text{mit dem 1. Fall:} \\
 &= \mathcal{M}(y - x)
 \end{aligned}$$

nun weiter wie im 1. Fall.

q.e.d.

(3.1)

08.11.'06

### Beweis: (Satz von Arzela-Ascoli)

(nur ' $\Leftarrow$ '): Sei  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ . Zu zeigen:  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt eine auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Wir bemerken zunächst, dass  $[a, b] \cap \mathbb{Q}$  abzählbar ist, etwa

$$[a, b] \cap \mathbb{Q} = \{x_n, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

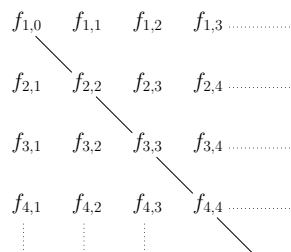
Da  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise beschränkt ist, ist die Folge  $\{f_n(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{K}^n$  also folgt mit dem SATZ VON BOLZANO-WEIERSTRASS, dass  $\{f_n(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $\{f_{1,n}(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt, so dass  $\{f_{1,n}(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  für  $n \uparrow \infty$  in  $\mathbb{K}^n$  konvergiert.

Weiter mit  $x_2$ . Wieder ist  $\{f_{1,n}(x_2)\}_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt in  $\mathbb{K}^n$ , somit erhalten wir wieder mit dem SATZ VON BOLZANO-WEIERSTRASS eine weitere konvergente Teilfolge  $\{f_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  von , so dass  $\{f_{2,n}(x_2)\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{K}^n$  konvergiert.



Wir führen den Beweis mit Induktion über  $x_k$ ,  $k = 3, 4, 5, \dots$

Wir verwenden das Diagonalfolgenargument: Betrachte nun die Diagonalfolge  $\{f_{n,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ .



Für diese gilt, dass  $\{f_{n,n}(x_k)\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert für  $n \uparrow \infty$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  (denn  $\{f_{n,n}\}_{n \geq k}$  ist Teilfolge von  $\{f_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , und diese konvergiert im Punkt  $x_k$ ).

Mit Hilfe der gleichgradigen Stetigkeit zeigen wir nun, dass  $\{f_{n,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergiert.

Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert wegen der gleichgradigen Stetigkeit der  $\{f_{n,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  ein  $\delta > 0$  so, dass

$$\|f_{n,n}(x) - f_{n,n}(y)\| < \varepsilon \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| < \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

Zerlege nun  $[a, b]$  in Teilintervalle  $I_1, \dots, I_R$  der Länge  $< \delta$ . Da  $\mathbb{Q} \cap [a, b]$  dicht in  $[a, b]$ , kann in jedem Intervall ein  $x_i \in I_i \cap \mathbb{Q}$  gewählt werden. Da  $\{f_{m,n}(x_i)\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent für

$\forall i = 1, \dots, R$ , existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|f_{m,n}(x_i) - f_{n,n}(x_i)\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \forall i = 1, \dots, R. \quad (3.5)$$

Sei nun  $x \in [a, b]$  beliebig. Dann existiert ein  $i \in \{1, \dots, R\}$  so, dass  $x \in I_i$ . Somit folgt für alle  $m, n \geq n_0$ :

$$\|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)\| \leq \underbrace{\|f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_i)\|}_{< \varepsilon, \text{ wegen (3.4)}} + \underbrace{\|f_{n,n}(x_i) - f_{m,m}(x_i)\|}_{< \varepsilon, \text{ wegen (3.5)}} + \underbrace{\|f_{m,m}(x_i) - f_{m,m}(x)\|}_{< \varepsilon, \text{ wegen (3.4)}} < 3\varepsilon$$

Da  $x$  beliebig gewählt war, folgt:

$$\sup_{x \in [a, b]} \|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)\| < 3\varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Damit ist  $\{f_{n,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine CAUCHY-FOLGE im Banachraum  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}^N, \|\cdot\|)$  und besitzt daher eine in der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm konvergente, d.h. gleichmäßig konvergente Teilfolge.

q.e.d.

#### Zweite Beweisvariante des SATZES VON PEANO: (funktionalanalytischer Zugang)

Mit der selben Notation wie im Beweis, stellen wir fest, dass das Problem der Existenz einer Lösung und des AWP's auf dem Intervall  $[x_0, x_0 + \alpha]$  sich als Fixpunktproblem für eine Abbildung  $\varphi : K \subset \mathcal{C}([x_0, x_0 + \alpha]; \mathbb{K}^N) \rightarrow ([x_0, x_0 + \alpha]; \mathbb{K}^N)$  formulieren lässt. In der Tat ist eine Funktion  $u : [x_0, x_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{K}^N$  eine Lösung des AWP's genau dann, wenn  $u \in \mathcal{C}([x_0, x_0 + \alpha]; \mathbb{K}^N) \rightarrow \mathbb{K}^N$  und eine Lösung der Integralgleichung:

$$u(x) = y_0 + \underbrace{\int_{x_0}^x f(s, u(s)) \, ds}_{=: \varphi(u)(x)}, \quad x \in [x_0, x_0 + \alpha]$$

ist.

Die Existenz des Fixpunktes von  $\varphi$  kann mit Hilfe des folgenden Satzes gezeigt werden:

**SATZ 3.3 (FIXPUNKTSATZ VON SCHAUDER (1930))**

Sei  $K$  eine nicht leere, abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge eines Banachraumes  $X$ ,  $\varphi : K \rightarrow K$  eine stetige, kompakte Abbildung.  
Dann besitzt  $\varphi$  mindestens einen Fixpunkt.

**Definition 3.1: kompakte Abbildung**

Eine Abbildung  $\varphi : M \subset X \rightarrow Y$ ,  $X, Y$  normierte Vektorräume, heißt kompakt, falls  $\varphi$  beschränkte Mengen von  $M$  auf relativ kompakte Mengen in  $Y$  abbildet, d.h. für jede beschränkte Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$   $\varphi(\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}})$  eine konvergente Teilfolge besitzt.

Für  $K := \left\{ u \in \mathcal{C}([x_0, x_0 + \alpha]; \mathbb{K}^N) \mid \|u(x) - y_0\| \leq b \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha] \right\}$

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([x_0, x_0 + \alpha]; \mathbb{K}^N) \\ \text{und } \varphi : K \rightarrow K \text{ definiert durch:} \\ \varphi(u)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(s, u(s)) \, ds \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha], \, u \in \mathbb{K}, \end{cases}$$

sind die Voraussetzungen für den SATZ VON SCHAUDER erfüllt, wobei zum Nachweis der Kompaktheit der Abbildung  $\varphi$  wieder der SATZ VON ARZELA-ASCOLI benutzt wird.

**Definition 3.2** Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ . Sei weiter

$$y : I \longrightarrow \mathbb{K}^N \text{ eine Lösung des AWP's } \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

i) Eine Lösung des AWP's  $u : J \longrightarrow \mathbb{K}^N$  heißt Fortsetzung (bzw. echte Fortsetzung) der Lösung, falls gilt:

$$I \subseteq J \quad (\text{bzw. } I \subsetneq J) \text{ und } u|_I = y$$

ii) Eine Lösung  $y : I \longrightarrow \mathbb{K}^N$  heißt maximale Lösung, falls keine echte Fortsetzung von  $y$  existiert.

**Satz 3.4** Voraussetzung wie im Satz davor. Jede Lösung des AWP's

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

kann zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden.

**Beweis: Mit Hilfe des Zorn'schen Lemma:** Ist  $(\mathcal{M}, \leq)$  eine nicht leere, teilgeordnete Menge, in der jede geordnete Teilmenge eine obere Schranke in  $\mathcal{M}$  besitzt, dann besitzt  $\mathcal{M}$  ein maximales Element.

Wende dies auf

$$\mathcal{M} := \left\{ \Gamma; \quad \Gamma = \left\{ (x, y(x)), \quad x \in I \right\}, \text{ wobei } \begin{cases} y : I \longrightarrow \mathbb{K}^N \text{ lokale Lösung des AWP's } \begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \end{cases} \right\}$$

mit der Ordnungsrelation:  $\Gamma_1 \leq \Gamma_2 \iff \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \quad \forall \Gamma_i \in \mathcal{M} \text{ an.} \quad \text{q.e.d.}$

**Bemerke dazu:**

- \*  $\mathcal{M} \neq \emptyset$  (nach SATZ VON PEANO)
- \* Wenn  $K$  eine total geordnete Teilmenge von  $\mathcal{M}$  ist, dann ist  $\bigcup_{\Gamma \in K} \Gamma$  eine obere Schranke von  $K$  in  $\mathcal{M}$ .

Frage: Wie verhalten sich maximale Lösungen am Rande des maximalen Existenzintervalls?

**Beispiel:**

1.

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y^2 =: f(x, y), & f : D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig.} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{Löse mit Trennung der Variablen}$$

$$\int_1^y \frac{1}{1+s^2} ds = \int_0^x 1 dt$$

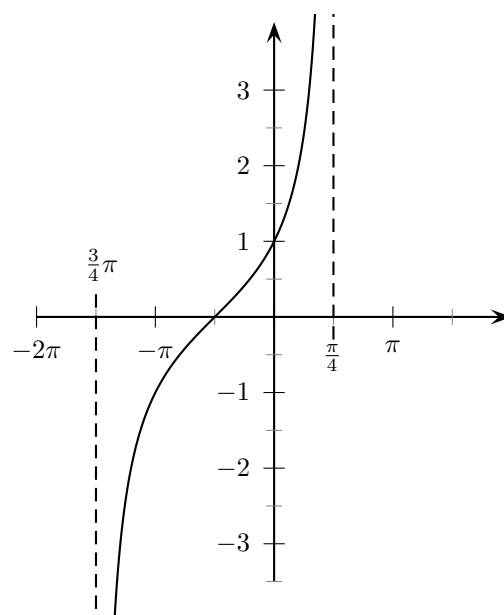
$$\Rightarrow \arctan(y) - \arctan(1) = x$$

$$\Rightarrow y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Der maximale Definitionsbereich für  $x$  ist:

$$-\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \left] -\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \right[$$

Offensichtlich gilt:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} |y(x)| = \pm\infty$



2.

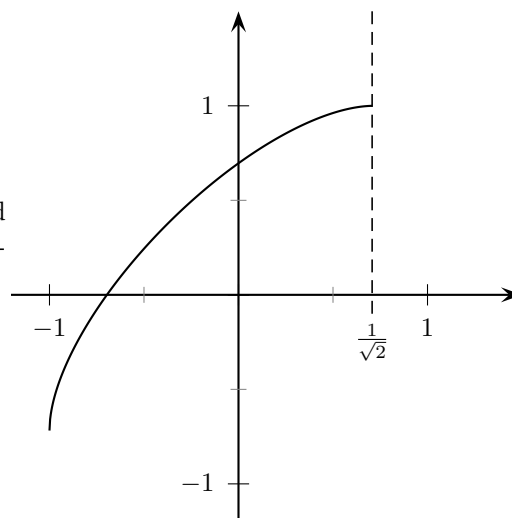
$$\begin{cases} y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} =: f(x, y), & f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad D = ]-1, +1[ \times ]-1, +1[ \text{ stetig} \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Die Lösung erfolgt wieder mit der Trennung der Variablen.

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^y \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\arcsin(y) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{=\frac{\pi}{4}} = \arcsin(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = \sin\left(\arcsin(x) + \frac{\pi}{4}\right), \quad x \in ?$$

Es muss gelten:  $x \in ]-1, 1[$  und  
 $|\sin(\arcsin(x) + \frac{\pi}{4})| < 1$ . Daraus ergibt sich das ma-  
 ximale Existenzintervall:  $] -1, \frac{1}{\sqrt{2}}[$



13.11.'06

**Satz 3.5** Voraussetzungen wie in Satz 3.1Sei  $I$  ein Intervall,  $v : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^N$  eine maximale Lösung des AWP

$$\begin{cases} y(x)' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Dann gilt:  $I$  ist offen, d.h., von der Form  $I = ]a, b[$ , mit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$   $a < b$ 

Weiter gilt:

Falls  $b < \infty$ , dann folgt:

$$\cdot \text{ entweder: } \limsup_{x \rightarrow b^-} \|v(x)\| = +\infty$$

$$\cdot \text{ oder: } \liminf_{x \rightarrow b^-} \text{dist}((x, v(x)), \partial D) = 0$$

Falls  $a > -\infty$ , folgt analog:

$$\cdot \text{ entweder: } \limsup_{x \rightarrow a^+} \|v(x)\| = +\infty$$

$$\cdot \text{ oder: } \liminf_{x \rightarrow a^+} \text{dist}((x, v(x)), \partial D) = 0$$

**Beweis:** Zeige zunächst:  $I$  offen.

Angenommen,  $I$  sei rechtsseitig abgeschlossen, d.h. von der Form  $I = ]a, b]$  oder  $I = [a, b]$  mit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Insbesondere ist dann  $(b, v(b)) \in D$ . Deshalb besitzt das AWP

$$\begin{cases} y(x)' = f(x, y) \\ y(b) = v(b) \end{cases}$$

nach dem SATZ VON PEANO mindestens eine lokale Lösung

$$w : [b - \alpha, b + \alpha] \rightarrow \mathbb{K}^N \quad \text{für ein } \alpha > 0.$$

Betrachte nun die Funktion:

$$u(x) = \begin{cases} v(x), & x \in I \\ w(x), & x \in [b, b + \alpha] \end{cases}$$

Da  $v(b) = w(b)$ , ist klar, dass  $u$  stetig ist. Da  $v, w$ , Lösungen der DGL auf ihrem Definitionsbereich sind, löst die Funktion  $U$  in  $I \cup [b, b + \alpha] \setminus \{b\}$  die DGL. Weiter gilt:

$$\frac{d^-}{dx} v(b) = f(b, v(b)) \quad (d^- \text{ bezeichnet die linksseitige Ableitung.})$$

und

$$w'(b) = f(b, w(b)) = f(b, v(b)), \quad \text{da } v(b) = w(b).$$

Somit ist  $u$  auch differenzierbar in  $x < b$  mit

$$u'(b) = f(b, u(b))$$

und ist somit eine echte Fortsetzung der Lösung  $v$ . Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $v$   $\nabla$

Analog führt man die Annahme  $I$  sei linksseitig abgeschlossen zum Widerspruch.

Angenommen  $b < \infty$  und  $\limsup_{x \rightarrow b^-} \|v(x)\| < +\infty$ . Dann:

$$\exists \varepsilon > 0, \mathcal{M} \geq 0 : \quad \|v(x)\| \leq \mathcal{M} \quad \forall x \in [b - \varepsilon, b[ \quad (*)$$

Sei  $\Gamma = \left\{ (x, v(x)); \quad x \in [b - \varepsilon, b[ \right\}$ . Angenommen  $\bar{\Gamma} \subseteq D$ .

Wegen (\*) ist  $\Gamma$  und somit auch  $\bar{\Gamma}$  beschränkt. Als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des endlichdimensionalen Raumes  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$  ist  $\bar{\Gamma}$  somit kompakt. Da  $f$  stetig auf  $D$  ist, ist  $f$  auf  $\bar{\Gamma} (\subseteq D)$  beschränkt. Da  $v'(x) = f(x, v(x)) \quad \forall x \in [b - \varepsilon, b[$ , ist  $v'$  somit beschränkt auf  $[b - \varepsilon, b[$ . Deshalb ist  $v$  gleichmäßig stetig auf  $[b - \varepsilon, b[$  (sogar Lipschitz-stetig), und somit existiert

$$\lim_{x \rightarrow b^-} v(x) =: z$$

Betrachte nun

$$u(x) = \begin{cases} v(x), & x \in I \\ z, & x = b \end{cases}.$$

Klar:  $u$  ist stetig auf  $I \cup \{b\}$ , außerdem erfüllt  $u$  als Lösung des AWP's auf  $I$  die äquivalente Integralgleichung

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, u(s)) \, ds \quad \forall x \in I$$

Durch Übergang zum  $\lim_{x \rightarrow b}$  sieht man, dass die Integralgleichung auch noch im Punkt  $x = b$  gilt, da  $u$  stetig auf  $I \cup \{b\}$ . Somit erfüllt  $u$  auch die DGL

$$y' = f(x, y) \quad \text{auf } I \cup \{b\}.$$

D.h. aber  $u$  ist eine echte Fortsetzung von  $v$ . Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $v$ . Folglich ist  $\bar{\Gamma} \cap \partial D \neq \emptyset$ , d.h. es existieren  $(b, z) \in \bar{\Gamma} \cap \partial D$  und eine Folge  $\{x_n, v(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$  mit

$$(x_n, v(x_n)) \xrightarrow{n \uparrow \infty} (b, z).$$

Somit gilt:

$$\liminf_{x \rightarrow b^-} \text{dist}((x, v(x)), \partial D) = 0$$

(Fall  $a > -\infty$  analog)

q.e.d.

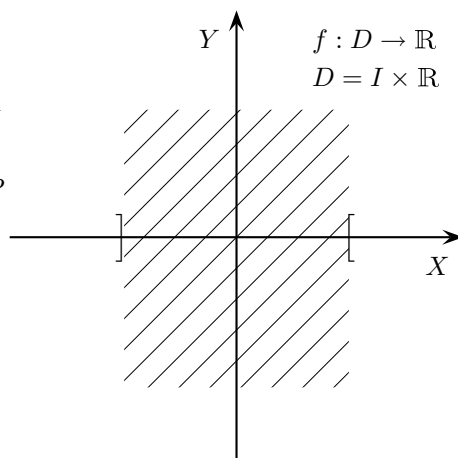
### Korollar 3.1

Sei  $I = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$ ,  $D = I \times \mathbb{K}^N$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{K}^N$   
 stetig,  $(x_0, y_0) \in D$ .

Wenn  $f$  beschränkt auf  $D$  ist, dann besitzt das AWP

$$\begin{cases} y(x)' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

mindestens eine auf ganz  $I$  definierte Lösung.



**Beweis:** Nach dem (SATZ VON PEANO) und Satz 3.4 besitzt das AWP mindestens eine maximale Lösung  $v : ]c, d[ \rightarrow \mathbb{K}^N$  mit einem, nach Satz 3.5, offenem Existenzintervall  $]c, d[ \subset I = ]a, b[$ .

Angenommen  $d < b$ . Nach Satz 3.5 muss dann gelten:

$$\limsup_{x \rightarrow d^-} \|v(x)\| = +\infty. \quad (*)$$

Andererseits gilt aber:  $v'(x) = f(x, v(x)) \quad \forall x \in [x_0, d[$  und da  $f$  beschränkt auf  $D$  ist, folgt:

$$\|v'(x)\| \leq \mathcal{M} \quad \forall x \in [x_0, d[ \quad \text{für ein } \mathcal{M} \geq 0.$$

Nach dem Mittelwertsatz folgt dann:

$$\begin{aligned} \|v(x) - v(x_0)\| &\leq \mathcal{M} |x - x_0| & \forall x \in [x_0, d[ \\ \text{d.h.: } \|v(x)\| &\leq \|v(x_0)\| + \|v(x) - v(x_0)\| \leq \|v(x_0)\| + \mathcal{M} \cdot (d - x_0) & \forall x \in [x_0, d[. \end{aligned}$$

Widerspruch zu  $(*)$  ⚡

Analog zeigt man:  $a = c$  q.e.d.

**Beispiel:**

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{\sin(y)}{1+x^2} =: f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig und beschränkt}$$

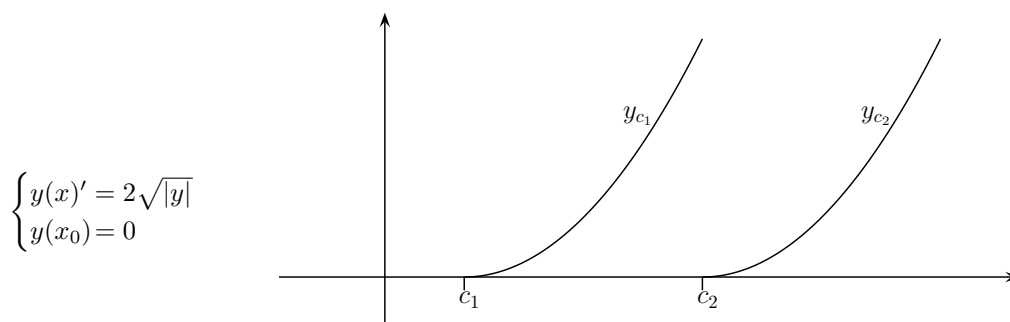
$\Rightarrow$  das AWP besitzt für jedes Anfangspaar  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mindestens eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung.

Erinnerung: Bei nur stetiger rechter Seite ist eine Lösung des AWP

$$\begin{cases} y(x)' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

i.A. nicht eindeutig.

**Beispiel:**



besitzt unendlich viele Lösungen neben der konstanten Nulllösung, etwa Lösungen von der Form:

$$y_c(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ (x - c)^2, & x \geq c \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}^+$$

Erfüllt die rechte Seite zusätzlich eine Lipschitz-Bedingung bzgl.  $y$ , dann kann man auch Eindeutigkeitsresultate zeigen.

### Definition 3.3: Lipschitzstetigkeit

Sei  $f : D \subset \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^P$ ,  $M, N, P \in \mathbb{N}$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  global Lipschitz-stetig bzgl.  $y \in \mathbb{K}^N$  auf  $D$  falls ein  $L \geq 0$  existiert, so dass gilt:

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L \cdot \|y - z\| \quad \forall (x, y), (x, z) \in D.$$

$f$  heißt lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y \in \mathbb{K}^N$  auf  $D$  falls gilt, dass für jeden Punkt  $(x, y) \in D$  eine Umgebung  $U_{(x,y)} \in D$  existiert, so dass  $f$  auf  $U_{(x,y)}$  (global) Lipschitz-stetig ist.

### Bemerkung:

$f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, stetig partiell differenzierbar bzgl.  $y$ .  
 $(x,y) \mapsto f(x,y)$

dann:  $f$  ist lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $D$ .

Wenn  $(x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$  zusätzlich beschränkt auf  $D$  ist, dann ist  $f$  sogar global Lipschitz-stetig auf  $D$ . (Beweis mit dem Mittelwertsatz)

### Beispiel:

$f : \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig partiell differenzierbar bzgl.  $y$  auf  $D$  mit  
 $(x,y) \mapsto x\sqrt{y}$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{y}} \quad (\text{unbeschränkt auf } D!)$$

Somit ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $D$ , aber da

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, z)| &= |x| \cdot |\sqrt{y} - \sqrt{z}| & \forall x \in \mathbb{R}, \quad y, z > 0 \\ &= |x| \cdot \frac{|y - z|}{|\sqrt{y} + \sqrt{z}|} \end{aligned}$$

$$\text{und somit} \quad \frac{|f(x, y) - f(x, z)|}{|y - z|} = \frac{|x|}{|\sqrt{y} + \sqrt{z}|} \xrightarrow[y \neq 0]{y, z \rightarrow 0} +\infty,$$

ist  $f$  nicht global Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $\mathbb{R} \times ]0, \infty[$ .

## SATZ 3.6 (PICARD-LINDELÖF, (LOKALE VERSION))

Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig,  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $R_{[a,b]} = [x_0 - a, x_0 + a] \times \{y \in \mathbb{K}^N; \|y - y_0\| \leq b\} \subset D$ ,  $(a, b > 0)$ . Weiter sei  $f$  Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $R_{[a,b]}$ . Dann besitzt das AWP

$$\begin{cases} y(x)' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung  $v$  auf dem Intervall  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ , wobei  $\alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{\mathcal{M}} \right\}$ ,  $\mathcal{M} = \max_{R_{[a,b]}} \|f\|$ .

**Beweis:** 1. Methode: (basiert auf dem SATZ VON PEANO)

Nach dem SATZ VON PEANO existiert mindestens eine Lösung  $v$  des AWP's auf  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ .

Sei nun  $w$  eine weitere Lösung des AWP's auf  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ . Dann gilt:

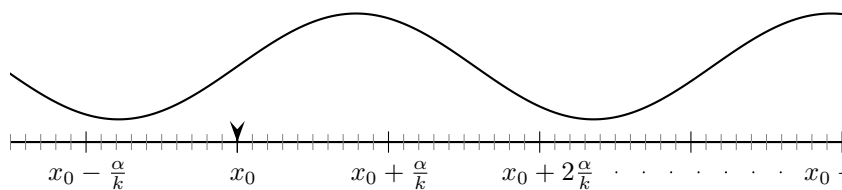
$$v(x) - w(x) = \int_{x_0}^x f(s, v(s)) - f(s, w(s)) \, ds \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],$$

da  $v, w$  als Lösungen des AWP's die entsprechende äquivalente Integralgleichung erfüllen müssen. Somit ist

$$\begin{aligned} \|v(x) - w(x)\| &\leq \left| \int_{x_0}^x \|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\| \, ds \right| \\ &\leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|v(s) - w(s)\| \, ds \right| \quad \text{wobei } L \text{ die Lipschitz-Konstante von } f \text{ auf } R_{[a,b]} \text{ ist} \\ &\leq L \cdot |x - x_0| \cdot \|v - w\|_{\infty} \\ &\leq L \cdot \alpha \cdot \|v - w\|_{\infty}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|v - w\|_{\infty} \leq L \cdot \alpha \|v - w\|_{\infty}$$

$\Rightarrow$  Falls  $\alpha \cdot L < 1$ , folgt sofort:  $v = w$ . Falls  $\alpha \cdot L > 1$ , wähle  $k \in \mathbb{N}$  so, dass  $\frac{\alpha}{k} \cdot L < 1$  und gehe iterativ vor.



q.e.d.



**Beweis: 2. Beweisvariante (Picard-Lindelöf)**

Im Folgenden sei  $\mathcal{I}_\alpha : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ .

Formuliere das Problem wieder als Fixpunktproblem der Form:

$$u = \phi(u)$$

für den so genannten Picard-Operator

$$\begin{aligned} \Phi : K &\rightarrow K \\ u &\mapsto \left\{ x \in \mathcal{I}_\alpha \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(s, u(s)) \, ds \right\} \end{aligned}$$

mit

$$K = \left\{ u \in \mathcal{C}(\mathcal{I}_\alpha; \mathbb{K}^N) : \|u(x) - y_0\| \leq b \right\}$$

Bereits gesehen:  $\Phi$  ist wohldefiniert und stetig.

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u, v \in K, x \in \mathcal{I}_\alpha : \quad \|\Phi^n(u)(x) - \Phi^n(v)(x)\| \leq \|x - x_0\|^n L^n \cdot \|u - v\|_\infty,$$

wobei  $L$  die Lipschitz-Konstante von  $f$  bzgl.  $y$  auf  $R_{[a,b]}$  ist.

Beweis:  $n = 1$

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(x) - \Phi(v)(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \, ds \right\| \\ &= \left| \int_{x_0}^x \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| \, ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L \cdot \|u(s) - v(s)\| \, ds \right| \\ &\leq |x - x_0| \cdot L \cdot \|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

$\dots \leq \alpha L \cdot \|u - v\|_\infty \implies \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_\infty \leq \alpha L \cdot \|u - v\|_\infty$ , falls  $\alpha L < 1$ , dann besitzt  $\Phi$  einen eindeutigen Fixpunkt  $u \in K$ ,  $u = \Phi(u)$  nach dem BANACH'SCHEN FIXPUNKTSATZ.

$n \rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned} \|\Phi^{n+1}(u)(x) - \Phi^{n+1}(v)(x)\| &= \left\| \Phi\left(\Phi^n(u)(x)\right) - \Phi\left(\Phi^n(v)(x)\right) \right\| = \left| \int_{x_0}^x \|\Phi^n(u)(s) - \Phi^n(v)(s)\| \, ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L \cdot \frac{|s - x_0|^n}{n!} L^n \|u - v\|_\infty \, ds \right| \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= \frac{L^{n+1}}{n!} \|u - v\|_\infty \underbrace{\left| \int_{x_0}^x (s - x_0)^n \, ds \right|}_{\frac{(s - x_0)^{n+1}}{n+1} \Big|_{x_0}^x} \\ &= \frac{L^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Es folgt somit:

$$\begin{aligned}\|\Phi^n(u)(x) - \Phi^n(v)(x)\| &\leq \frac{(\alpha L)^n}{n!} \|u - v\|_\infty \quad \forall n, \forall x \in \mathcal{I}_\alpha \\ \implies \|\Phi^n(u) - \Phi^n(v)\|_\infty &\leq \frac{(\alpha L)^n}{n!} \|u - v\|_\infty\end{aligned}$$

$$\text{Da gilt: } \frac{(\alpha L)^n}{n!} \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{(\alpha L)^{n_0}}{n_0!} < 1.$$

Somit folgt aus dem BANACH'SCHEN FIXPUNKTSATZ, dass  $\Phi^{n_0}$  einen eindeutigen Fixpunkt  $u \in K$  besitzt:  $u = \Phi^{n_0}(u)$ . Dann ist aber  $\Phi(u) = \Phi^{n_0+1}(u) = \Phi^{n_0}(\Phi(u))$ , d.h. aber gerade, dass auch  $\Phi(u) \in K$  Fixpunkt von  $\Phi^{n_0}$  ist. Aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes folgt:  $\Phi(u) = u$ , d.h.  $u$  ist Fixpunkt von  $\Phi$ .

**Problem:** Diese Argumentation liefert nicht die Konvergenz einer Iterationsfolge  $\{\Phi^k(u_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$  gegen den Fixpunkt  $u$  (bei beliebigem Startwert  $u_0 \in K$ ), sondern nach dem BANACH'SCHEN FIXPUNKTSATZ nur die Konvergenz der Iterationsfolge  $\Phi^{n_0 \cdot k}(u_0) = (\Phi^{n_0})^k(u_0)$  bei beliebigen  $u_0 \in K$

Ausweg: Wende folgenden verallgemeinerten Fixpunktsatz an:

**SATZ 3.7 (FIXPUNKTSATZ VON WEISSINGER)**

Sei  $K \neq \emptyset$  eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\Phi : K \rightarrow K$  eine stetige Selbstabbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\|\Phi^n(u) - \Phi^n(v)\|_X \leq \alpha_n \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K \quad \text{mit } \alpha_n \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty. (*)$$

Dann besitzt  $\Phi$  einen eindeutigen Fixpunkt  $u \in K : \Phi(u) = u$ . Dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Iterationsfolge:  $\{\Phi^n(u_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  bei beliebigen Startwert  $u_0 \in K$  und es gilt die Fehlerabschätzung:

$$\|u - \Phi^n(u_0)\|_X \leq \left( \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \right) \|u_1 - u_0\|_X.$$

**Beweis: (Satz von Weissinger)**

Eindeutigkeit: Seien  $u, v$  Fixpunkte von  $\Phi$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= u \rightarrow \Phi^2(u) = \Phi(u) = u \rightarrow \dots \Phi^n(u) = u \\ \Phi(v) &= v \rightarrow \Phi^2(v) = \Phi(v) = v \rightarrow \dots \Phi^n(v) = v\end{aligned} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wegen  $(*)$  gilt:

$$\|u - v\| = \|\Phi^n(u) - \Phi^n(v)\| \stackrel{(*)}{\leq} \alpha_n \|u - v\| \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0 \quad \left( \alpha_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0 \text{ da } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty \right)$$

Existenz: Sei  $u_0 \in K$  beliebig,  $u_{n+1} = \Phi(u_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist

$$\|u_{n+1} - u_n\|_X = \|\Phi^n(u_1) - \Phi^n(u_0)\|_X \stackrel{(*)}{\leq} \alpha_n \|u_1 - u_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Somit

$$\begin{aligned}\|u_{n+k} - u_n\|_X &= \left\| \sum_{l=0}^{k-1} u_{n+l+1} - u_{n+l} \right\|_X \\ &\leq \sum_{l=0}^{k-1} \|u_{n+l+1} - u_{n+l}\|_X \quad (**) \\ &\leq \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{n+l} \cdot \|u_1 - u_0\|_X \\ &= \left( \sum_{l=n}^{n+k-1} \alpha_l \right) \cdot \|u_1 - u_0\|_X \quad \forall n, k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Aus der Konvergenz der Reihe  $\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l$  folgt sofort, dass  $(u_n)$  eine CAUCHY-FOLGE in  $X$  ist.  $X$  ist vollständig, also konvergiert  $u_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} u \in X$ .

Da  $u_n \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , und  $K$  abgeschlossen ist, folgt:  $u \in K$ .

Übergang zum Limes in  $u_{n+1} = \Phi(u_n)$  führt zu  $u = \Phi(u)$ , da  $\Phi$  stetig, d.h.  $u$  ist Fixpunkt von  $\Phi$ .

Übergang zum Limes in  $(**)$  mit  $k \uparrow \infty$  liefert die gesuchte Fehlerabschätzung.

q.e.d.

zurück zum Beweis vom SATZ VON PICARD-LINDELÖF (2. Variante).

Wende den Fixpunktsatz von Weissinger auf den Picardoperator  $\Phi$  und der zu Beginn des Beweises definierten Teilmenge  $K$  des Banachraumes  $\mathcal{C}(\mathcal{I}_\alpha; \mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$  an. q.e.d.

### Bemerkung:

1. Der FIXPUNKTSATZ VON WEISSINGER liefert automatisch die Konvergenz der Iterationsfolge

$$\begin{aligned}u_0(x) &= y_0, & \forall x \in \mathcal{I}_\alpha \\ u_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, u_n(s)) \, ds & \forall x \in \mathcal{I}_\alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0\end{aligned}$$

gegen die eindeutige Lösung des AWP

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf dem Intervall  $\mathcal{I}_\alpha$ . Diese Iterationsfolge wird auch als Folge der Picard-Iterierten bezeichnet.

2. Die Folge der Picard-Iterierten kann auch definiert werden, wenn die rechte Seite  $f$  nur stetig ist, aber keiner Lipschitz-Bedingung genügt.

I.A. ist diese Folge dann aber nicht konvergent bzw. besitzt nicht einmal eine Teilfolge, die gegen eine Lösung des AWP konvergiert. (siehe Übung).

3. Eine weitere Möglichkeit den SATZ VON PICARD-LINDELÖF zu beweisen, besteht darin, das Problem als Fixpunktproblem für den Picard-Operator auf der Menge  $K$  im Banachraum  $(\mathcal{C}(\mathcal{I}_\alpha; \mathbb{K}^N), \|\cdot\|_{w,\infty})$  mit einer gewichteten Supremumsnorm  $\|u\|_{w,\infty} = \sup_{x \in \mathcal{I}_\alpha} e^{-2Lx}$  zu formulieren. In diesem Raum erweist sich  $\Phi$  als Kontraktion und mit dem BANACH'SCHEN FIXPUNKTSATZ ergibt sich die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes.

Aus dem Satz 3.7 ergibt sich nun leicht:

**Satz 3.8** Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $D$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ .

Dann besitzt das AWP

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung, d.h. es existiert ein  $\alpha = \alpha(x_0, y_0) > 0$  so, dass das AWP auf  $\mathcal{I}_\alpha$  eine eindeutige Lösung besitzt.

**Beweis:** Da  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $f$  lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $D$  und  $D$  offen ist, existieren  $a, b > 0$ , so dass

$$R_{[a,b]} = [x_0 - a, x_0 + a] \times \{y \in \mathbb{K}^N; \|y - y_0\| \leq b\} \subset D$$

und so, dass  $f$  auf  $R_{[a,b]}$  Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  mit einer Konstanten  $L > 0$  ist:

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L \cdot \|y - z\| \quad \forall (x, y), (x, z) \in R_{[a,b]}.$$

Dann folgt aus SATZ VON PICARD-LINDELÖF: Das AWP besitzt genau eine Lösung in  $R_{[a,b]}$  auf dem Intervall  $\mathcal{I}_\alpha$ , wobei

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{\mathcal{M}} \right\}, \quad \mathcal{M} := \sup_{R_{[a,b]}} \|f\|.$$

Zu zeigen ist:  $z : \mathcal{I}_\alpha \rightarrow \mathbb{K}^N$  eine beliebige Lösung des AWP, dann gilt: Der Graph von  $z$  liegt in  $R_{[a,b]}$ .

Sei also  $z$  eine solche Lösung. Angenommen, es existiert ein  $x_1 \in \mathcal{I}_\alpha$  mit  $(x_1, z(x_1)) \notin R_{[a,b]}$ , d.h.  $\|z(x_1) - y_0\| > b$ .

O.B.d.A.:  $x_1 > x_0$ . (Fall  $x_1 < x_0$  analog)

Sei dann

$$\tilde{x} := \sup \{x \in [x_0, x_1] : \|z(s) - y_0\| \leq b \quad \forall s \in [x_0, x_1]\}$$

Da  $z'$  stetig ist, gilt

$$\|z(\tilde{x}) - y_0\| = b \quad (*)$$

Da  $z = f(x, z) \quad \forall x \in \mathcal{I}_\alpha$ ,  $f$  auf  $R_{[a,b]}$  beschränkt durch  $\mathcal{M}$  folgt aus dem Mittelwertsatz

$$\|z(x) - z(x_0)\| \leq \mathcal{M} \cdot \|x - x_0\| \quad \forall x \in [x_0, \tilde{x}]$$

Insbesondere:

$$\|z(\tilde{x}) - y_0\| \leq \mathcal{M} \cdot \|\tilde{x} - x_0\| \underset{(*)}{\neq} \underset{< \frac{b}{\mathcal{M}}}{\mathcal{M} \cdot \alpha \leq b} \quad \nleftrightarrow \quad \text{zu } (*)$$

q.e.d.

20.11.'06

### SATZ 3.9 (VON PICARD-LINDELÖF, (GLOBALE VERSION))

Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $D$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Intervall  $\mathcal{I} := ]I_-, I_+[ \subset \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

(i) Das AWP

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

besitzt genau eine Lösung  $y$  auf  $\mathcal{I}$ .

(ii) Ist  $z : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^N$ ,  $J$  ein echtes Intervall, eine beliebige Lösung des AWP, so gilt:

$$J \subset \mathcal{I}$$

$$y|_J \equiv z$$

Mit anderen Worten:  $y$  ist die eindeutige, auf  $\mathcal{I}$  (maximales Existenzintervall) definierte, maximale Lösung

**Beweis:** Nach Satz dem SATZ VON PICARD-LINDELÖF ist das AWP lokal eindeutig lösbar, d.h. es existiert  $\alpha > 0$ , so dass das AWP auf  $\mathcal{I}_\alpha$  eine eindeutige Lösung besitzt.

Diese ist nach dem SATZ VON PICARD-LINDELÖF zu einer maximalen Lösung - im Folgenden mit  $y$  bezeichnet - auf einem nach Satz 3.5, offenen maximalen Existenzintervall  $\mathcal{I}$  fortsetzbar.

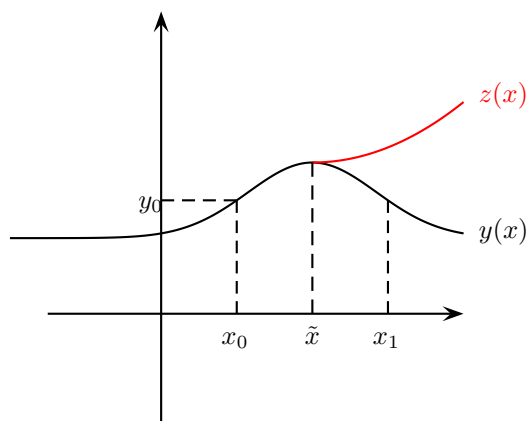
Sei  $z : J \rightarrow \mathbb{K}^N$  eine beliebige Lösung des AWP.

- Wir zeigen zunächst, dass  $y = z$  auf  $\mathcal{I} \cap J$ .

Beweis durch Widerspruch:

Dann existiert ein  $x_1 \in \mathcal{I} \cap J$  mit  $y(x_1) \neq z(x_1)$ . O.B.d.A. sei  $x_1 > x_0$ . (Im Fall  $x_1 < x_0$  verläuft die Argumentation analog.) Sei dann

$$\tilde{x} := \sup \underbrace{\{x \in [x_0, x_1]; \quad y(s) = z(s) \quad \forall x_0 \leq s \leq x\}}_{\neq \emptyset \text{ da } x_0 \in \dots}$$



Dann gilt insbesondere:

$$y(\tilde{x}) = z(\tilde{x}).$$

Betrachte nun das AWP

$$\begin{cases} w'(x) = f(x, w) \\ w(\tilde{x}) = y(\tilde{x}) = z(\tilde{x}) \end{cases}$$

Nach dem lokalen SATZ VON PICARD-LINDELÖF, ist dieses AWP lokal eindeutig lösbar, d.h. es existiert  $\beta > 0$ , so dass das AWP auf dem Intervall  $\mathcal{I}_\beta := [\tilde{x} - \beta, \tilde{x} + \beta]$  eine eindeutige Lösung besitzt. (o.B.d.A. ist  $\beta > 0$  so klein, dass  $\mathcal{I}_\beta \subset \mathcal{I} \cap J$ )

Aber  $y, z$  sind offensichtlich zwei verschiedene Lösungen des AWP auf  $\mathcal{I}_\beta$ .  $\nexists$

- Es bleibt zu zeigen, dass  $J \subset \mathcal{I}$ .

Wir argumentieren wieder mit Widerspruch und nehmen dazu an, dass  $I_+ \in J$ . Betrachte dann

$$w(x) := \begin{cases} y(x) & x \in \mathcal{I} \\ z(I_+) & x = I_+ \end{cases}.$$

Dann ist  $w$  eine Lösung des AWP und echte Fortsetzung von  $y$ .  $\nexists$ Widerspruch zur Maximalität von  $y$ .

Somit gilt:  $I_+ \notin J$ .

Analog zeigt man, dass  $I_- \notin J$ .

Folglich ist  $J \subset \mathcal{I}$ . Damit ist (ii) gezeigt. Es gilt aber: (ii)  $\longrightarrow$  (i)

Die Eindeutigkeit des maximalen Existenzintervalls folgt ebenfalls aus (ii).

q.e.d.

**Bemerkung:**

1. Der SATZ VON PICARD-LINDELÖF (sowohl die lokale also auch die globale Version) gilt auch für AWP's in unendlich dimensionalen Banachräumen  $(X, \|\cdot\|_X)$  (anstelle von  $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|)$ ). Nur die zweite Beweisvariante der lokalen Version geht schief, weil der SATZ VON PEANO nicht im unendlichdimensionalen gilt.)

Der Beweis mit Hilfe der PICARD-ITERIERTEN überträgt sich leicht auf den  $\infty$ -dim. Fall, indem man  $\mathbb{K}^N$  durch  $X$  und die entsprechende Norm  $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^N}$  durch  $\|\cdot\|_X$  ersetzt.

2. Der SATZ VON PEANO dagegen gilt i.A. nicht, wenn  $\mathbb{K}^N$  durch einen  $\infty$ -dim. Banachraum  $(X, \|\cdot\|_X)$  ersetzt wird. (siehe Beispiel Übung)

Das Problem ist hierbei, dass der SATZ VON ARZELA-ASCOLI nur für stetige Funktionenräume  $\mathcal{C}([a, b]; X)$  mit endlich dimensionalen Banachräumen  $X$  gilt.

Frage: Wann sind maximale Lösungen globale Lösungen?

D.h. wenn  $f : I^{\text{offen}} \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$ , stetig lokal Lipschitz-stetig auf  $I \times \mathbb{K}^N$ :

Wann ist das maximale Existenzintervall einer (maximalen) Lösung des AWP's

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) & x_0 \in I \\ y(x_0) = y_0 & y_0 \in \mathbb{K}^N \end{cases}$$

ganz  $I$ ?

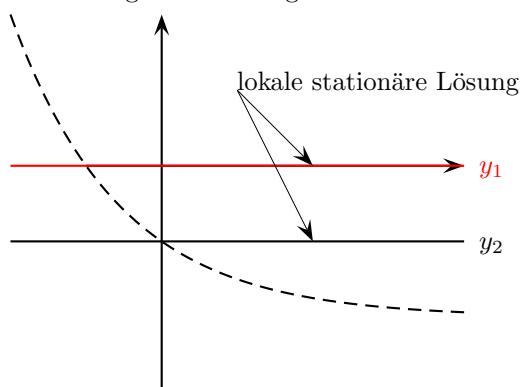
I.A. hängt die Größe des maximalen Existenzintervalls vom Anfangswertepaar  $(x_0, y_0)$  ab!

**Beispiel:**

$$\begin{cases} y' = y^2 + y = y(y+1) =: f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lokal Lipschitz-stetig bzgl. } y.$$

Die DGL  $y' = y(y+1)$  besitzt die konstanten Lösungen  $y_1 \equiv 0$ ,  $y_2 \equiv -1$  auf  $\mathbb{R}$ .

Dies sind globale Lösungen des AWP's für Anfangswerte  $y_0 = 0$  bzw.  $y_0 = -1$ .



Falls eine Eindeutigkeitsaussage für das AWP vorhanden ist, gilt, dass sich zwei Lösungen (zu unterschiedlichen Anfangswerten) nicht schneiden können. (lokaler Picard-Lindelöf)  
D.h. die gestrichelte Funktion kann keine Lösung des AWP's sein.

Fall:  $-1 < y_0 < 0$

Dann hat das AWP eine eindeutige maximale Lösung  $y$  auf einem maximalen Existenzintervall  $\mathcal{I}$ .

- Es gilt:  $-1 < y(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{I} \quad (*)$

**Beweis: (durch Widerspruch)**

Angenommen etwa, es existiert

$$\tilde{x} \in \mathcal{I} \text{ mit } y(\tilde{x}) = -1.$$

Dann sind  $y$  und die konstante Lösung  $y_2$  zwei verschiedene Lösungen des AWP's

$$\begin{cases} w'(x) = f(x, w) = w^2 + w \\ w(\tilde{x}) = -1 \end{cases}$$

Nach dem SATZ VON PICARD-LINDELÖF besitzt dieses AWP aber eine eindeutige (lokale und maximale) Lösung.

Widerspruch.  $\nexists$  q.e.d.

- Aus (\*) folgt nun  $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ .

**Beweis: (durch Widerspruch)** Angenommen etwa  $I_+ < \infty$ . Dann folgt aus Satz 3.5:

$$\limsup_{x \rightarrow I_+} |y(x)| = +\infty$$

Widerspruch zu (\*).  $\nexists$  q.e.d.

Fall:  $y_0 > 0$

Wieder besitzt das AWP nach dem SATZ VON PICARD-LINDELÖF eine eindeutige maximale Lösung  $y$ .

Außerdem gilt (analoge Argumentation wie oben):

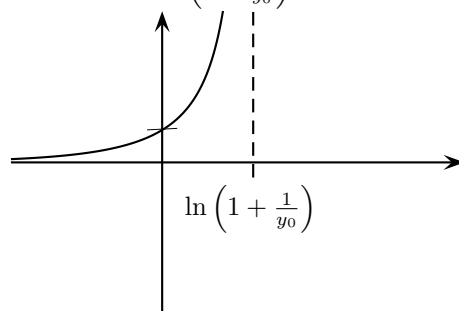
$$y(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{I} = \max \text{ Existenzintervall von } y.$$

Es ist aber keine a-priori-obere Schranke von  $y$  bekannt.

$\rightsquigarrow$  Berechnung von  $y$  (explizit) mittels Trennung der Variablen liefert:

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{y(y+1)} dy = \int_0^x 1 ds \dots \text{Partialbruchzerlegung} \dots y(x) = \frac{1}{1 - e^x \underbrace{\frac{y_0}{y_0+1}}_{<1}} - 1$$

Die Lösung ist nur für  $x < \ln\left(1 + \frac{1}{y_0}\right)$  wohldefiniert.  $\implies$  Die maximale Lösung ist keine



globale Lösung!

Fall:  $y_0 < -1$  analog.  $\rightsquigarrow$  keine globale Existenz

Frage: Unter welchen Voraussetzungen auf  $I^{\text{offen}} \times \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^N$  ist jede maximale Lösung des AWP's

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine globale, d.h. auf ganz  $I$  definierte Lösung?

Eine Antwort liefert:

## SATZ 3.10 (GLOBALE EXISTENZ VON LÖSUNGEN)

Sei  $f : I^{\text{offen}} \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $I \times \mathbb{K}^N$ .

Wenn  $f$  auf  $I \times \mathbb{K}^N$  linear beschränktes Wachstum hat, d.h. es existieren stetige Funktionen

$$\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ mit. } \|f(x)\| \leq \alpha(x) \|y\| + \beta(x) \quad \forall x \in I, \quad \forall y \in \mathbb{K}^N$$

dann besitzt das AWP

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine eindeutige globale Lösung auf ganz  $I$ , für ein beliebiges Anfangspaar  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$ .

**Bemerkung:**

Ist  $f : I \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$  global Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $I \times \mathbb{K}^N$ , dann hat  $f$  linear beschränktes Wachstum.

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\| &\leq \|f(x, y) - f(x, y_0)\| + \|f(x, y_0)\| \\ &\leq L \cdot \|y - y_0\| + \|f(x, y_0)\| \\ &\leq \underbrace{L \cdot \|y\|}_{=: \alpha(x)} + \underbrace{L \cdot \|y_0\| + \|f(x, y_0)\|}_{=: \beta(x)} \end{aligned}$$

22.11.'06

**Beweis: (vom Satz 3.10)** Sei  $I = ]a, b[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ . Nach Satz 3.9 (PICARD-LINDELÖF (globale Version)) besitzt das AWP eine eindeutige, maximale Lösung  $y$  auf dem maximalen Existenzintervall  $I_{\max} = ]I_-, I_+[ \subset ]a, b[$ . Angenommen  $I_+ < b$ . Sei  $x_1 \in ]I_+, b[$ . Seien

$$\mathcal{A} := \max_{x \in [x_0, x_1]} \alpha(x) \quad \mathcal{B} := \max_{x \in [x_0, x_1]} \beta(x)$$

Aus dem Satz 3.5 folgt, unter der Annahme  $I_+ < b$ , dass

$$\limsup_{x \uparrow I_+} \|y(x)\| = +\infty$$

(\*)

Auf der anderen Seite gilt  $\forall x \in [x_0, I_+[$ :

$$\begin{aligned} &\|y(x) - y_0\| \\ &= \left\| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \int_{x_0}^x \|f(s, y(s))\| \, ds \\ &\leq \int_{x_0}^x \alpha(s) \|y(s)\| + \beta(s) \, ds \quad , \text{da das Wachstum von } f \text{ linear beschränkt ist} \\ &\leq \mathcal{A} \int_{x_0}^x \|y(s)\| \, ds + \mathcal{B}(x_1 - x_0) \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \|y(x)\| \leq \mathcal{A} \int_{x_0}^x \|y(s)\| ds + \mathcal{B}(x_1 - x_0) + \|y_0\| \quad \forall x \in [x_0, I_+[$$

Wende nun an:

LEMMA 3.1 (VON GRONWALL)

Sei  $w : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  ein echtes Intervall) stetig,  $t_0 \in I, \delta, \gamma \geq 0$ . Wenn gilt:

$$0 \leq w(t) \leq \gamma + \delta \left| \int_{t_0}^t w(s) ds \right| \quad \forall t \in I,$$

dann folgt:

$$w(t) \leq \gamma \cdot e^{\delta|t-t_0|} \quad \forall t \in I.$$

Mit

$$w(x) = \|y(x)\| \quad x \in I = [x_0, I_+[\quad \gamma = B(x_1 - x_0) + \|y_0\|, \quad \delta = A$$

folgt:

$$\|y(x)\| \leq (B(x_1 - x_0) + \|y_0\|) e^{A(x-x_0)} \quad \forall x \in [x_0, I_+[.$$

Somit ist  $\limsup_{x \uparrow I^+} \|y(x)\| < \infty$   $\not\rightarrow$  zu (\*)

Genau so führt man die Annahme  $I_- \rightarrow a$  zum Widerspruch.

q.e.d.

**Beweis: (Lemma von Gronwall)** Betrachte nur  $t > t_0$ . ( $t < t_0$  geht analog) und definiere

$$\psi(t) := \delta e^{-\delta(t-t_0)} \int_{t_0}^t w(s) ds, \quad t \in I, \quad t > t_0.$$

Offensichtlich gilt:  $\psi(t_0) = 0$ .  $\psi$  ist differenzierbar mit

$$\psi'(t) = -\delta\psi(t) + \delta e^{-\delta(t-t_0)} w(t) \quad \forall t \in I, \quad t \geq t_0$$

$$\text{nach Voraussetzung an } w \leq -\delta\psi(t) + \delta e^{-\delta(t-t_0)} \gamma + \underbrace{\delta e^{-\delta(t-t_0)} \delta \int_{t_0}^t w(s) ds}_{=\delta\psi(t)} = \delta e^{-\delta(t-t_0)} \gamma$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\int_{t_0}^t \psi'(s) ds}_{\psi(t)} &\leq \delta \gamma \underbrace{\int_{t_0}^t e^{-\delta(s-t_0)} ds}_{=\gamma \cdot (1 - e^{-\delta(t-t_0)})} \\ \Rightarrow \underbrace{\psi(t) e^{-\delta(t-t_0)}}_{=\delta \int_{t_0}^t w(s) ds} &\leq \gamma (e^{-\delta(t-t_0)} - 1) \\ \Rightarrow \underbrace{\gamma + \delta \int_{t_0}^t w(s) ds}_{\geq w(t) \text{ nach Vor.}} &\leq \gamma e^{-\delta(s-t_0)} \quad \forall t \in I, \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Behauptung.

q.e.d.

## Kapitel 4

# Stetige Abhängigkeit von Lösungen von AWPen von der rechten Seite, Parametern und Anfangswerten

**Satz 4.1** Seien  $f : \mathcal{D}^{offen} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ ,

$$R_{[a,b]} := [x_0 - a, x_0 + a] \times \left\{ y \in \mathbb{K}^N, \quad \|y - y_0\| \leq b \right\}, \quad \mathcal{M} := \max_{R_{[a,b]}} \|f(x, y)\|, \quad \alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{\mathcal{M}} \right\}$$

Des weiteren seien  $\tilde{f} : R_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{K}^N$  stetig,  $y$  die eindeutige Lösung des AWP

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) & \text{auf } [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{und } \tilde{y} : J \subset [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{K}^N \text{ sei} \quad (4.1)$$

eine beliebige Lösung des AWP

$$\begin{cases} y'(x) = \tilde{f}(x, y) \\ y(x_0) = \tilde{y}_0 \in \mathbb{K}^N \end{cases} \quad \text{die ganz in } R_{[a,b]} \text{ verläuft.} \quad (4.2)$$

Dann gilt

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| e^{L|x-x_0|} + \frac{\omega}{L} (e^{L|x-x_0|} - 1) \quad \forall x \in J,$$

wobei  $L$  die Lipschitzkonstante von  $f$  bzgl.  $y$  auf  $R_{[a,b]}$  bezeichnet und

$$w := \max_{R_{[a,b]}} \|f(x, y) - \tilde{f}(x, y)\|$$

**Beweis:** Setze zunächst  $\tilde{y}$  zu einer stetigen Funktion (weiter mit  $\tilde{y}$  bezeichnet) auf  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  fort, die noch ganz in  $R_{[a,b]}$  verläuft. Nach Satz 3.6 von PICARD-LINDELÖF (lokale Version) wissen wir, dass die Folge der PICARD-ITERIERTEN

$$u_0(x) := \tilde{y}(x), \quad u_{n+1}(x) = \phi(u_n(x)) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, u_n(s)) \, ds, \quad x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \quad n \in \mathbb{N}$$

auf  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  gegen die eindeutige Lösung  $y$  von (4.1) konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned} \|u_0(x) - u_1(x)\| &= \left\| \tilde{y}(x) - \left( y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \tilde{y}(s)) \, ds \right) \right\| \\ &\stackrel[\text{von (4.2)}]{\tilde{y} \text{ ist Lsg.}} \left\| \tilde{y}_0 + \int_{x_0}^x \tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) \, ds - \left( y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \tilde{y}(s)) \, ds \right) \right\| \quad \forall x \in J \\ &\leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| + \left| \int_{x_0}^x \underbrace{\|\tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) - f(s, \tilde{y}(s))\|}_{\leq w, \text{ da } \tilde{y} \text{ in } R_{[a,b]} \text{ verl\"auft}} \, ds \right| \\ &\leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| + w |x - x_0| \end{aligned}$$

Behauptung:  $\|u_{n+1}(x) - u_n(x)\| \leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| \cdot \frac{L^n |x - x_0|^n}{n!} + \frac{w}{L} \frac{L^{n+1} |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in J$

BW durch Induktion:

$n = 0$  schon gezeigt

$n \rightsquigarrow n+1$

$$\begin{aligned} \|u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(s, u_{n+1}(s)) - f(s, u_n(s)) \, ds \right\| \\ &\leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|u_{n+1}(s) - u_n(s)\| \, ds \right| \\ &\stackrel{I.V.}{\leq} L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|y_0 - \tilde{y}_0\| \frac{L^n |s - x_0|^n}{n!} + \frac{w}{L} \frac{L^{n+1} |s - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \, ds \right| \\ &= \|y_0 - \tilde{y}_0\| \cdot L^{n+1} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \longrightarrow \text{Ergebnis} \end{aligned}$$

Folglich ist  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in J$

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(x) - \tilde{y}(x)\| &= \|u_{n+1}(x) - u_0(x)\| \leq \sum_{k=0}^n \|u_{k+1}(x) - u_k(x)\| \\ &\leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| \sum_{k=0}^n \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!} + \frac{w}{L} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!} \end{aligned}$$

Mit  $n \uparrow \infty$  folgt:

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \|y_0 - \tilde{y}_0\| e^{L|x-x_0|} + \frac{w}{L} \left( e^{L|x-x_0|} - 1 \right) \quad \forall x \in J$$

q.e.d.

## SATZ 4.2 (STETIGE ABHÄNGIGKEIT VOM ANFANGSWERT)

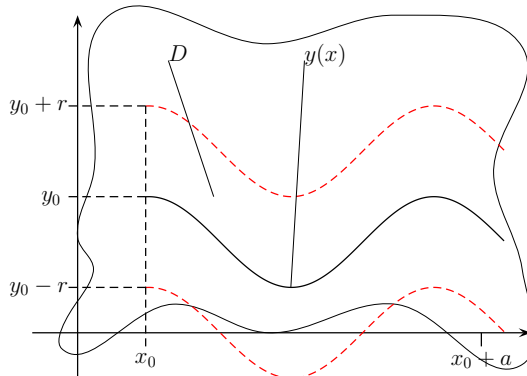
Seien  $f : \mathcal{D}^{\text{offen}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $\mathcal{D}$ . Das AWP

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (*)$$

besitze eine (eindeutige) Lösung  $y$  auf  $[x_0, x_0 + a]$  ( $a > 0$ ).

Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $y_0$ , so dass für alle  $z \in U$  das AWP ( $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = z$ ) eine (eindeutige) Lösung auf  $[x_0, x_0 + a]$  besitzt. Bezeichne diese Lösung mit  $y_z$ .

Falls  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$  mit  $z_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} y_0$ , dann konvergiert die zugehörige Lösung  $y_{z_n}$  des AWP gleichmäßig auf  $[x_0, x_0 + a]$  gegen  $y = Y_{y_0}$  (die Lösung von  $(*)$ ).



**Beweis:** Der Graph  $\Gamma = \{(x, y); \quad x \in [x_0, x_0 + a]\}$  ist eine kompakte Teilmenge von  $\mathcal{D}$ , und  $\mathcal{D}$  ist offen. Also existiert ein  $R > 0$ , so dass

$$S := \left\{ (x, y) \in [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{K}^N; \quad \|y - y(x)\| \leq R \quad \forall x \in [x_0, x_0 + a] \right\} \subset \mathcal{D}$$

$S$  ist ebenfalls eine kompakte Teilmenge von  $\mathcal{D}$ .

Sei  $0 < r < R$ . Für  $z \in B_r(y_0) = \{z \in \mathbb{K}^N; \quad \|y_0 - z\| \leq r\}$ , sei  $y_z : I \rightarrow \mathbb{K}^N$  die maximale Lösung des AWP

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = z \end{cases} \quad (x, y) \in S.$$

Wir bemerken, dass  $I$  abgeschlossen ist, also von der Form:  $[x_0, x_0 + \beta]$  mit  $0 < \beta \leq a$ .

Begründung: Wäre  $I = [x_0, x_0 + \beta[$ , dann wäre  $y_z$  in  $x_0 + \beta$  durch  $\lim_{x \uparrow x_0 + \beta} y_z(x)$  fortsetzbar in  $S$ ; dieser Grenzwert existiert, da  $y'_z = f(x, y(x))$  beschränkt auf  $S$  ist, somit ist  $y_z$  gleichmäßig stetig (vergleiche Beweis von Satz 3.2).

27.11.'06

Ziel: Zeige, dass gilt:  $\beta = a$ .

Sei  $L$  die Lipschitz-Konstante von  $f$  bzgl.  $y$  auf der kompakten Menge  $S$  und sei

$$\mathcal{M}_y := \max_{s \in [x_0, x_0 + \beta]} \left\{ e^{-2Ls} \|y(s) - y_z(s)\| \right\}.$$

Dann ist für  $x \in I$ :

$$\begin{aligned} \|y(x) - y_z(x)\| &= \left\| y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) \, ds - \left( z + \int_{x_0}^x f(s, y_z(s)) \, ds \right) \right\| \\ &\leq \|y_0 - z\| + \int_{x_0}^x \|f(s, y(s)) - f(s, y_z(s))\| \, ds \quad (*) \\ &\leq r + L \cdot \int_{x_0}^x \|y(s) - y_z(s)\| \, ds \end{aligned}$$

füge  $1 = e^{-2Ls} \cdot e^{2Ls}$  ein:

$$\begin{aligned}
& \leq r + L \cdot \mathcal{M}_y \cdot \int_{x_0}^x e^{2Ls} ds \\
& \leq r + \mathcal{M}_y \cdot \frac{e^{2Lx}}{2L} \left( \frac{e^{2Ls}}{2L} \Big|_{x_0}^x = \frac{e^{2Lx} - e^{2Lx_0}}{2L} \right) \quad \Big| \cdot e^{-2Lx} \\
\Rightarrow \quad e^{-2Lx} \|y(x) - y_z(x)\| & \leq r e^{-2Lx} + \frac{1}{2} \mathcal{M}_y \\
& \leq r \cdot e^{-2Lx_0} + \frac{1}{2} \mathcal{M}_y \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \beta] \\
\Rightarrow \quad \mathcal{M}_y & \leq r \cdot e^{-2Lx_0} + \frac{1}{2} \mathcal{M}_y \\
\Rightarrow \quad \mathcal{M}_y & \leq 2r \cdot e^{-2Lx_0} \\
\Rightarrow \quad \|y(x) - y_z(x)\| & \leq 2r e^{2L(x-x_0)} \leq 2r e^{2La} \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \beta] \quad (**)
\end{aligned}$$

Für  $r > 0$  so, dass  $2r e^{2La} < \frac{R}{2}$  ( $\Leftrightarrow r < \frac{R e^{-2La}}{4}$ ) gilt somit:

$$\|y(x) - y_z(x)\| \leq \frac{R}{2} \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \beta].$$

Daraus folgt aber,  $\beta = a$ .

Die gleichmäßige Konvergenz der Lösungen  $y_z$  gegen  $y_0$  auf  $[x_0, x_0 + a]$  für  $z \rightarrow y_0$ , folgt sofort aus (\*\*), wenn in (\*)  $\|y_0 - z\|$  nicht durch  $r$  ersetzt wird. q.e.d.

#### Parameterabhängigkeit:

Aus Satz 4.2 und nachfolgendem Satz 4.3, ergibt sich leicht die stetige Abhängigkeit von Lösungen des AWP von Parameter der rechten Seite:

**Satz 4.3** Sei  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^M \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig,  $(x_0, y_0) \in D$ . Dann ist das parameterabhängige AWP

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y, \alpha) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y, z) \\ z'(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = \alpha \end{cases}$$

# Kapitel 5

## Lineare DGL

Wir betrachten in diesem Abschnitt DGL von der Form

$$\boxed{y' = A(x)y + f(x)},$$

wobei im gesamten Kapitel gelten soll:

$$\left. \begin{array}{l} A : I \rightarrow \mathbb{K}^{N \times N} \\ f : I \rightarrow \mathbb{K}^N \end{array} \right\} \text{ stetig,}$$

wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist.

- \*  $f$  bezeichnet man als **Inhomogenität** der DGL.
- \* falls  $f \equiv 0$  ist, dann heißt die DGL **homogen**, ansonsten **inhomogen**.
- \* falls  $f \not\equiv 0$  ist, so heißt die DGL  $y' = A(x)y$  die zugehörige **homogene** DGL.

Es gilt das bekannte Superpositionsprinzip für lineare DGLen:

1. Sind Lösungen der homogenen DGL  $y' = A(x)y$ , so ist  $v = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$  für beliebige  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$  wieder eine Lösung der homogenen DGL  $y' = A(x)y$ .
2. Sind  $y_1$  bzw.  $y_2$  Lösungen der nicht homogenen DGL  $y' = A(x)y + f_1(x)$  bzw.  $y' = A(x)y + f_2(x)$ ,  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig, dann ist  $v = y_1 + y_2$  eine Lösung von  $y' = A(x)y + (f_1 + f_2)(x)$

**Satz 5.1** *Unter den obigen Voraussetzungen besitzt das AWP*

$$\begin{cases} y'(x) = A(x)y + f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{für alle } (x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$$

*eine eindeutige Lösung auf  $I$ .*

$$F(x, y) := A(x)y + f(x) \quad x \in I, y \in \mathbb{K}^N$$

Klar:  $F : I \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$  ist stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $I \times \mathbb{K}^N$ , da  $F$  stetig partiell differenzierbar bzgl.  $y$  ist mit

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \begin{pmatrix} a_{1,i}(x) \\ \vdots \\ a_{N,i}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I, y \in \mathbb{K}^N, \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{wobei } A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j} = 1, \dots, N$$

Aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt somit unmittelbar, dass

$$\implies \quad (\text{AWP}) \quad \begin{cases} y'(x) = F(x, y) = A(x)y + f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

besitzt  $\forall y_0 \in \mathbb{K}^N$ ,  $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{K}^N)$  eine eindeutige, maximale Lösung –

$$\begin{aligned} \text{Da} \quad \|F(x, y)\| &\leq \|A(x)y\| + \|f(x)\| \\ &\leq \underbrace{\|A(x)\|}_{=:\alpha(x)} \cdot \|y\| + \underbrace{\|f(x)\|}_{=:\beta(x)} \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

(hierbei bezeichnet  $\|\cdot\|$  die Operator-Norm der linearen Abbildung  $A(x) : (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|)$ , d.h.  $\|A(x)\| := \sup_{\substack{y \in \mathbb{K}^N \\ \|y\| \leq 1}} \|A(x)y\|$ ,  $x \in I$ .) und  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  wie oben definiert stetig sind, hat  $F$  offensichtlich linear beschränktes Wachstum.  $\Rightarrow$  die maximale Lösung ist eine globale Lösung, existiert also auf ganz  $I$ .

Sei

$$\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^N) = \{u : I \rightarrow \mathbb{K}^N, \quad u \text{ stetig differenzierbar}\}.$$

Klar:  $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^N)$  ist ein Vektorraum.

**Satz 5.2** Sei  $\mathcal{U} :=$  die Menge aller globalen Lösungen der homogenen, linearen DGL  $y' = A(x)y$  und  $\mathcal{A} :=$  die Menge aller Lösungen der inhomogenen, linearen DGL  $y' = A(x)y + f(x)$ .

Dann gelten unter den oben genannten Voraussetzungen folgende Punkte:

1.  $\mathcal{U}$  ist ein  $N$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^N)$
2. Für Funktionen  $y_1, \dots, y_m \in \mathcal{U}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  - (a)  $y_1, \dots, y_m$  sind linear unabhängig im Vektorraum  $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^N)$ .
  - (b)  $\exists \tilde{x} \in I$ , so dass  $y_1(\tilde{x}), \dots, y_m(\tilde{x})$  linear unabhängig in  $\mathbb{K}^N$  sind.
  - (c)  $\forall x \in I$  gilt:  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{K}^N$ .
3. (i)  $\mathcal{A} \neq \emptyset$   
(ii)  $\mathcal{A} = y_p + \mathcal{U}$ , wobei  $y_p$  eine beliebige, globale, partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ist, d.h.  $\mathcal{A}$  ist ein affiner Unterraum von  $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^N)$ .

(Man mache sich klar, dass die Bedingungen (a),(b),(c) für beliebige Funktionen aus  $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^N)$  i.A. nicht äquivalent sind.)

**Beweis:**

\* Superpositionsprinzip:  $\Rightarrow \mathcal{U}$  ist ein  $N$ -dimensionaler Untervektorraum von  $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^N)$ .

\* Satz 5.1 + Superpositionsprinzip  $\Rightarrow$  3..

zu 2.: (c)  $\Rightarrow$  (b) trivial.

(b)  $\Rightarrow$  (a): Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$  mit  $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m = 0$ . Dann gilt insbesondere:

$$\lambda_1 y_1(\tilde{x}) + \dots + \lambda_m y_m(\tilde{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

**(Bemerkung:** In dem Beweis von (b) $\Rightarrow$ (a) haben wir nicht benutzt, dass  $y_1, \dots, y_m$  Lösungen der DGL sind. Die Implikation (c)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (a) gilt also für beliebige Funktionen.)

(a)  $\Rightarrow$  (c) Durch Widerspruch: Angenommen  $\exists x^* \in I$ , so dass

$$y_1(x^*), \dots, y_m(x^*) \quad \text{linear abhängig in } \mathbb{K}^N,$$

d.h. es existieren  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m \in \mathbb{K}^N \setminus \{0, \dots, 0\}$ , so dass

$$\lambda_1 y_1(x^*), \dots, \lambda_m y_m(x^*) = 0.$$

Da  $y_1, \dots, y_m$  Lösung der homogenen DGL  $y' = A(x)y$  sind, folgt mit dem Superpositionsprinzip, dass

$$v := \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m$$

eine globale Lösung des AWP

$$\begin{cases} y'(x) = A(x)y \\ y(x^*) = 0 \end{cases}$$

Dieses AWP besitzt aber nur die 0-Funktion als eindeutige Lösung. Damit folgt:

$$v = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m \equiv 0 \quad \text{auf } I \stackrel{!}{\neq}$$

Widerspruch zu linearen Unabhängigkeit der Funktionen  $y_1, \dots, y_m$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $\dim(\mathcal{U}) = n$ . Nach Satz 5.1 besitzt jedes AWP

$$\begin{cases} y'(x) = A(x)y \\ y(x_0) = e_i \end{cases} \quad \text{wobei } e_i \text{ der } i\text{-te Einheitsvektor, } i = 1, \dots, N,$$

$x_0 \in I$  beliebig gewählt, eine eindeutige Lösung  $y_i$ . Da  $e_1, \dots, e_N$  linear unabhängig sind, folgt aus 2. die lineare Unabhängigkeit der Lösungen  $y_1, \dots, y_N$ .

$\Rightarrow \dim(\mathcal{U}) \geq N$ .

Sei nun  $v \in \mathcal{U}$  beliebig. Da  $\{e_1, \dots, e_N\}$  eine Basis des  $\mathbb{K}^N$  ist, existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ , so dass  $v(x_0) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_N e_N$ . Aus dem Superpositionsprinzip folgt, dass  $w = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_N y_N$  eine Lösung des AWP

$$\begin{aligned} y(x_0) &= v(x_0) \\ y'(x) &= A(x)y \end{aligned}$$

Die eindeutige globale Lösung des AWP ist aber  $v$ ; folglich  $v \equiv w \equiv \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_N y_N$

q.e.d.

29.11.'06 Wir betrachten weiter lineare DGL 1. Ordnung vom Typ

$$\boxed{y' = A(x)y + f(x)}, \quad \text{wobei } A : I \rightarrow \mathbb{K}^{N \times N} \text{ stetig, } I^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}, \quad f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.1)$$

und die zugehörige homogene DGL:

$$\boxed{y' = A(x)y} \quad (5.2)$$

Wir benutzen weiter die Bezeichnung

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{\text{globale Lösungen von (5.1)}\} \\ \mathcal{A} &= \{\text{globale Lösungen von (5.2)}\} \end{aligned}$$

Wir haben gesehen:  $\dim(\mathcal{U}) = N$ ,  $\mathcal{A} = y_p + \mathcal{U}$ , wobei  $y_p$  eine partikuläre Lösung von (5.1) ist.

**Definition 5.1** Seien  $y_1, \dots, y_N \in \mathcal{U}$ . Dann heißt

$$W(x) := \det \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} | \\ y_1(x) \\ | \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} | \\ y_2(x) \\ | \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} | \\ y_N(x) \\ | \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

die WRONSKI-DETERMINANTE von  $y_1, \dots, y_N$ .



**Bemerkung:**

Gemäß Satz 5.2 gilt:

- entweder  $W(x) = 0$  oder  $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$
- $y_1, \dots, y_N$  sind linear unabhängig  $\iff W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \iff \exists x \in I : W(x) \neq 0$

**Definition 5.2** Eine Basis von  $\mathcal{U}$  heißt FUNDAMENTALSYSTEM (FS). Die matrixwertige Abbildung

$$x \in I \mapsto \phi(x) := [y_1(x) \cdots y_N(x)] \quad (\text{die Matrix mit Spaltenvektoren } \{y_1, \dots, y_N\} \text{ FS}),$$

heißt FUNDAMENTALMATRIX von (5.2).

Wenn  $\phi(x_0) = E_N = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$  für ein  $x_0 \in I$ , dann heißt  $\phi$  auch HAUPTFUNDAMENTALMATRIX zum Zeitpunkt  $x_0$ .

**Beispiel:**

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x} \end{bmatrix}}_{=: A(x)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad x \in I = ]0, \infty[$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$v_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix} \quad x > 0$$

Lösungen der DGL sind. Außerdem gilt:

$$W(1) = \det[v_1(1), v_2(1)] = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

$\implies v_1, v_2$  sind linear unabhängig, bilden also ein FS. Die Abbildung  $x \in ]0, \infty[ \mapsto \begin{bmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}$  ist eine Fundamentalmatrix.

**Bemerkung:**

- Jede Fundamentalmatrix ist stetig differenzierbar auf  $I$  mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \phi(x) &= \frac{d}{dx} [y_1(x) \cdots y_N(x)] = [y_1'(x) \cdots y_N'(x)] \\ &= [Ay_1(x) \cdots Ay_N(x)] = A[y_1(x) \cdots y_N(x)] = A\phi(x) \end{aligned}$$

- Die globale eindeutige Lösung von  $\boxed{y' = Ay, \quad y(0) = y_0, \quad x \in I, \quad y_0 \in \mathbb{K}^N}$  ist

$$y(x) = \phi(x)\phi(x_0)^{-1} \quad y_0, x \in I.$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \phi(x_0)\phi^{-1}(x_0)y_0 = y_0 && \text{und} \\ \frac{d}{dx} y(x) &= \underbrace{A\phi(x)}_{\frac{d}{dx} \phi(x)} \phi^{-1}(x_0)y_0 = Ay(x) \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

q.e.d.

## SATZ 5.3 (VON DER VARIATION DER KONSTANTEN/DUHAMEL-FORMEL)

Sei  $\phi(x)$  eine Fundamentalmatrix von  $y' = A(x)y$ . Dann ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$y' = A(x)y + f(x) \quad \text{auf } I$$

gegeben durch

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x \phi(x)\phi(s)^{-1}f(s) \, ds, \quad x \in I,$$

wobei  $x_0 \in I$  beliebig. Somit folgt:

$$\mathcal{A} = \left\{ \phi(x)c + \int_{x_0}^x \phi(x)\phi(s)^{-1}f(s) \, ds, \quad x \in I; \quad c \in \mathbb{K}^N \right\}$$

Die globale eindeutige Lösung des AWP:  $y' = A(x)y + f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$  ist gegeben durch

$$y(x) = \phi(x)\phi(x_0)^{-1}y_0 + \int_{x_0}^x \phi(x)\phi(s)^{-1}f(s) \, ds \quad x \in I$$

**Beweis:** Es ist nur noch zu zeigen, dass  $y_p$  wie im Satz angegeben eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ist. Da  $\phi$  stetig differenzierbar ist, ist  $\phi_p$  offensichtlich stetig differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y_p(x) &= \phi(x)\phi(x)^{-1}f(x) + \int_{x_0}^x \underbrace{\phi'(x)}_{=A(x)\phi(x)} \phi(s)^{-1}f(s) \, ds \\ &= f(x) + A(x) \underbrace{\int_{x_0}^x \phi(x)\phi(s)^{-1}f(s) \, ds}_{y_p(x)} \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

q.e.d.

Problem: Wie berechnet man eine Fundamentalmatrix?

Betrachten wir den Fall:  $A(x) = A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  (konstante Koeffizienten)

**Satz 5.4** Sei  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ . Die Reihe

$$e^{xA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!}$$

konvergiert  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Die Funktion  $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{xA}$  ist Hauptfundamentalmatrix von  $y' = Ay$  zum Zeitpunkt  $x = 0$ .

**Beweis:** Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm in  $\mathbb{K}^N$ ,  $\|\cdot\|$  die zugehörige Abbildungsnorm in  $\mathbb{K}^{N \times N}$ . Für  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ , ist dann

$$\left\| \sum_{k=m}^n \frac{x^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m}^n \frac{|x|^k \cdot \|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=m}^n \frac{(|x| \cdot \|A\|)^k}{k!}. \quad (5.3)$$

Da die skalare Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k \cdot \|A^k\|}{k!}$  gegen  $e^{|x| \cdot \|A\|}$  konvergiert ( $\forall x \in \mathbb{K}$ ), ist  $\left\{ \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k \cdot \|A^k\|}{k!} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine CAUCHY-FOLGE in  $\mathbb{R}$ . Aus (5.3) folgt dann, dass  $\left\{ \sum_{k=0}^n \frac{x^k \cdot A^k}{k!} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine CAUCHY-

FOLGE in  $(\mathbb{K}^{N \times N}, \|\cdot\|)$  bildet. Da  $(\mathbb{K}^{N \times N}, \|\cdot\|)$  vollständig ist, konvergiert  $\sum_{k=0}^n \frac{x^k \cdot A^k}{k!}$  in  $\mathbb{K}^{N \times N}$ .

Aus der Konvergenz in  $\mathbb{K}^{N \times N}$  folgt die absolute Konvergenz sämtlicher Komponentenfunktionen  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k a_{ij}^{(k)}}{k!}$  in  $\mathbb{K}$  (hierbei bezeichnet  $(a_{ij}^{(k)})$  die Komponenten der Matrix  $A^k$ ).

Diese stellen damit eine Potenzreihe auf  $\mathbb{R}$  mit Konvergenzradius  $\infty$  dar, sind somit beliebig oft stetig differenzierbar und können gliedweise differenziert werden. Es folgt:  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow e^{xA}$  stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1} A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^{k+1}}{k!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = A e^{xA} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Außerdem:  $e^{0A} = E_N \Rightarrow e^{xA}$  ist eine Hauptfundamentalmatrix.

q.e.d.

**Problem:** explizites Berechnen von  $e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!}$ .

Betrachte zunächst den Fall, dass  $A$  diagonalisierbar ist. Es gibt dann eine Basis  $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_N\} \subset \mathbb{K}^N$  bestehend aus Eigenvektoren (EV) von  $A$  zu Eigenwerten (EW)  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  (gezählt nach ihrer Vielfachheit). Dann gilt mit:  $S = \begin{bmatrix} | & & | \\ s_1 & \dots & s_N \\ | & & | \end{bmatrix}$ :

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix} =: D.$$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } S^{-1}e^{xA}S &= S^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!} \right) S = \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (S^{-1}AS)^n}{n!} = e^{xS^{-1}AS} \\ &= e^{xD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n D^n}{n!} = \begin{bmatrix} e^{x\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{x\lambda_N} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Folglich ist  $e^{xA} = S \begin{bmatrix} e^{x\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{x\lambda_N} \end{bmatrix} S^{-1}$  eine explizite Darstellung der Hauptfundamentalmatrix. Eine weitere Fundamentalmatrix von  $y' = Ay$  ist  $e^{xA}S = Se^{xD}$  (dies ist eine Fundamentalmatrix mit besonders einfacher Darstellung)

**Beispiel:**

$$y' = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_A y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenwerte: } \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}, \quad \text{zugehörige Eigenvektoren: } v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{xA} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 - 2e^{2x} & 8 - 8e^{2x} \\ -1 + e^{2x} & -2 + 4e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung des AWP's ist: } y(x) = e^{xA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5e^{2x} \\ -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}e^{2x} \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:**

Ist  $A$  eine reelle Matrix, die zwar diagonalisierbar ist, aber komplexe EWe und komplexwertige EVen besitzt, ist es stets möglich, das erhaltene komplexe Fundamentalsystem (bzw. die komplexwertige Fundamentalmatrix) durch ein(e) reellwertige(s) zu ersetzen.

Ist  $\lambda + i\mu$  EW mit EV  $v \in \mathbb{K}^N$ , so ist auch  $\lambda - i\mu$  komplexer EW mit zugehörigem EV  $\bar{v}$ . Die zugehörige Lösung im komplexen Fundamentalsystem  $e^{(\lambda+i\mu)x}v$ ,  $e^{(\lambda-i\mu)x}\bar{v}$  kann durch  $\text{Re}(e^{(\lambda+i\mu)x}v)$ ,  $\text{Im}(e^{(\lambda+i\mu)x}v)$  ersetzt werden.

**Beispiel:**

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} y.$$

Dann besitzt  $A$  die EWe  $\pm i$  mit den EVen  $\begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i-1 \end{pmatrix}$ .

$\rightsquigarrow$  komplexes Fundamentalsystem:

$$\left\{ e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix}, \quad e^{-ix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i-1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightsquigarrow$  reelles Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned} e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix} &= (\cos(x) + i \sin(x)) \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \underbrace{\cos(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{Re}(e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix})} + i \underbrace{\left( \cos(x) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}_{\operatorname{Im}(e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{reelles Fundamentalsystem: } \left\{ \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \cos(x) - \sin(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) - \sin(x) \end{pmatrix} \right\}$$

04.12.'06

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall einer nicht notwendigerweise diagonalisierbaren Matrix  $A$ . Das charakteristische Polynom zerfällt über  $\mathbb{C}$  stets in Linearfaktoren.

$$P_A(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{r_k},$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweise verschiedenen EWe von  $A$  und  $r_1, \dots, r_k$  die zugehörigen algebraischen Vielfachheiten sind.

**Bemerkung:**

Falls  $\dim(\operatorname{Eig}(\lambda_j)) = \dim(\operatorname{Kern}(A - \lambda_j E_N)) = r_j \quad \forall j = 1, \dots, k$ , dann ist  $A$  diagonalisierbar (bereits letztes Mal behandelt.).

Im allgemeinen Fall (wenn  $\dim(\operatorname{Eig}(A, \lambda_j)) < r_j$  für mindestens ein  $j$ ) gilt:

$$* \quad \dim \operatorname{Eig}(A, \lambda_j) = \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda_j E_N) \leq \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda_j E_N)^2 \leq \dots \leq \underbrace{\dim \operatorname{Kern}(A - \lambda_j E_N)^{r_j}}_{=\operatorname{Hau}(A, \lambda_j)}$$

$$* \quad \mathbb{K}^N = \bigoplus_{j=1}^k \operatorname{Hau}(A, \lambda_j)$$

und es gilt mit  $S = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ s_1 & s_2 & \dots & s_N \\ | & | & & | \end{array} \right]$ ,  $\{s_1, \dots, s_N\}$  geeignet gewählte Basis des  $\mathbb{K}^N$  bestehend aus Hauptvektoren von  $A_i$ :

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \boxed{B_1} & & & 0 \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{B_k} \end{bmatrix}$$

hat Blockdiagonalgestalt, wobei der Block  $B_j$  zum EW  $\lambda_j$  außer Nullen nur Jordanmatrizen entlang der Diagonalen besitzt, d.h. Matrizen von der Form:

$$B_j = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_j \end{smallmatrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_j \end{smallmatrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_j \end{smallmatrix}} \end{pmatrix} = J_m(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} \quad m \times m\text{-Matrix} \quad (5.4)$$

Die Exponentialfunktion einer Matrix von der Form (5.4) lässt sich leicht berechnen, mit Hilfe von

**Lemma 5.1** Hat  $A$  Blockdiagonalgestalt, d.h.

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n) := \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_n} \end{pmatrix},$$

dann gilt:

$$e^{xA} = \underbrace{\text{diag}(e^{xA_1}, \dots, e^{xA_n})}_{=: \psi(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Beweis:** Die matrixwertige Funktion  $x \in \mathbb{R} \mapsto \psi(x) = \text{diag}(e^{xA_1}, \dots, e^{xA_n})$  ist stetig differenzierbar mit:

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{d}{dx} \text{diag}(e^{xA_1}, \dots, e^{xA_n}) = \text{diag}(A_1, \dots, A_n) \cdot \text{diag}(e^{xA_1}, \dots, e^{xA_n}),$$

d.h.  $\frac{d}{dx} \psi(x) = A\psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Außerdem ist  $\psi(0) = \text{diag}(e^{0A_1}, \dots, e^{0A_n}) = E_N$ . Somit ist  $\psi(x) = e^{xA}$  die Hauptfundamentalmatrix. q.e.d.

**Lemma 5.2**  $\forall m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{K} :$

$$e^{xJ_m(\lambda)} = e^{\lambda x} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \dots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

**Beweis:** Es ist  $J_m(\lambda) = \lambda E_m + P_m$ , wobei  $P_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$  und  $\lambda E_m$  und  $P_m$  kommutieren miteinander. Für kommutierende Matrizen  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gilt aber:

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} = e^B \cdot e^A \quad (\text{Übungsaufgabe}).$$

Somit  $e^{xJ_m(\lambda)} = \underbrace{e^{x\lambda E_m}}_{=e^{x\lambda} E_m} \cdot e^{xP_m}$  und da

$$P_m^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} & k \leq m-1 \\ \text{0-Matrix} & k \geq m \end{cases}$$

gilt:

$$e^{xP_m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n P_m^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n P_m^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \dots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ & & & \ddots & x \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

und die Behauptung folgt.

q.e.d.

### Beispiel:

$$y' = Ay \text{ mit } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann  $P_a(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$ , d.h.  $A$  besitzt den EW 2 mit der algebraischen Vielfachheit 3. Es ist

$$A - 2E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{Rang} = 2 \rightsquigarrow \dim(\text{Eig}(A, 2)) = 1 \text{ und } \text{Eig}(A, 2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Folglich ist  $A$  nicht diagonalisierbar! Berechne also Hauptvektoren:

Es ist

$$(A - 2E_3)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{Rang} = 1 \rightsquigarrow \dim(\text{Kern}(A - 2E_3)^2) = 2.$$

Ergänze  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  beispielsweise durch den Vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  zu einer Basis von  $\text{Kern}(A - 2E_3)^2$ .

Schließlich ist  $(A - 2E_3)^3 = 0$  d.h.  $\text{Kern}((A - 2E_3)^3) = \text{Hau}(A, 2) = \mathbb{R}^3$ . Wir ergänzen  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  zu einer Basis des  $\mathbb{R}^3$  etwa:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Die Konstruktion der Basis bzgl. der  $A$  Jordannormalgestalt besitzt, geht wie folgt vor sich:

- Starte mit  $s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- bilde  $s_2 := (A - 2E_3)s_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $s_1 := (A - 2E_3)s_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dann gilt mit  $S = \begin{pmatrix} | & | & | \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ , dass  $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  und  $S^{-1}e^{xA}S = e^{x(S^{-1}AS)} = e^{2x} \cdot$

$\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , d.h.

$$e^{xA}S = e^{2x}S \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left( e^{2x}s_1 \left| e^{2x}(xs_1 + s_2) \right| e^{2x} \left( \frac{x^2}{2}s_1 + s_2x + s_3 \right) \right)}_{\text{Fundamentalsystem}}$$

Problem: Existiert eine solche Fundamentalmatrix, wenn  $A(x)$  nicht konstant ist?

$$\boxed{y' = A(x)y}, \quad A: I \rightarrow \mathbb{K}^{N \times N} \text{ stetig} \quad I \subset \mathbb{R} \text{ offenes Intervall.}$$

Betrachten wir zunächst den Fall  $N = 1$ :  $y' = A(x)y$  Dann gilt: die allgemeine Lösung ist von der Form:

$$y(x) = c \cdot \exp \left( \int_{x_0}^x A(s) ds \right), \quad x \in I \quad \text{für beliebige } x_0 \in I, \quad c \in \mathbb{K}.$$

Betrachte den Fall:  $A(x) = A$ ,  $N \geq 1$  beliebig. Wie bereits gesehen ist dann die allgemeine Lösung durch

$$y(x) = e^{xA} y_0 = \exp \left( \int_{x_0}^x A(s) ds \right) y_0, \quad y_0 \in \mathbb{K}^N \text{ beliebig,}$$

gegeben.

Vermutung: Im allgemeinen Fall  $y' = A(x)y$ ,  $N \geq 1$ , ist  $\phi(x) = \exp \left( \int_{x_0}^x A(s) ds \right)$ ,  $x \in I$  (wobei  $x_0 \in I$  beliebig) eine Fundamentalmatrix.

Wir überprüfen die Vermutung: Konvergenz der Exponential Reihe:

$$\exp \left( \int_{x_0}^x A(s) ds \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \int_{x_0}^x A(s) ds \right)^n}{n!}, \quad x \in [a, b] \subset I$$

ist in jedem Intervall  $[a, b] \subset I$  gleichmäßig konvergent (Beweis wie im Fall  $A(x) = A$ ). Die Funktion  $x \mapsto \phi(x)$  ist also wohldefiniert.

Aber i.A. gilt nicht:  $\frac{d}{dx} \phi(x) = A(x)\phi(x)$ , denn es ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \phi(x) &= \frac{d}{dx} \left( E_N + \int_{x_0}^x A(s) ds + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \cdot \int_{x_0}^x A(s) ds + \dots \right) \\ &= \underbrace{\frac{d}{dx} E_N}_{=0} + \underbrace{\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x A(s) ds}_{=A(x)} + \underbrace{\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \cdot \int_{x_0}^x A(s) ds \right)}_{\frac{1}{2} A(x) \cdot \int_{x_0}^x A(s) ds + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \cdot A(x)} + \dots \\ &\quad A(x) \frac{1}{2} A(x) \cdot \int_{x_0}^x A(s) ds + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \cdot A(x) + \dots \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist aber:

$$A(x)\phi(x) = A(x) + A(x) \cdot \int_{x_0}^x A(s) ds + A(x) \left( \int_{x_0}^x A(s) ds \right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \dots$$

Problem: I.A. kommutieren  $A(x)$  und  $\int_{x_0}^x A(s) ds$  nicht und deshalb ist i.A.

$$\frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \cdot A(x) \neq \frac{1}{2} A(x) \int_{x_0}^x A(s) ds \quad \text{und deshalb} \quad \frac{d}{dx} \phi(x) \neq A\phi(x)$$

**Beispiel:**

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 2x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B(x) &= \int_0^x A(s) ds = \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \implies A(x)B(x) \neq B(x)A(x).$$

Wir stellen also die zusätzliche Bedingung, dass  $A(x)$  und  $B(x)$  kommutieren.

**Satz 5.5** *Kommutieren die Matrizen  $A(\cdot)$  miteinander, d.h.*

$$A(x)A(y) = A(y)A(x) \quad \forall x, y \in I,$$

dann ist

$$\phi(x) = \exp \left( \int_{x_0}^x A(s) ds \right), \quad x \in I$$

Hauptfundamentalmatrix zum Zeitpunkt  $x_0 \in I$ .

**Beweis:** Es genügt zu bemerken, dass

$$\int_{x_0}^x A(s) ds = \underbrace{\text{Riemann-Integral}}_{\text{der stetigen Fkt. } x \in I \mapsto A(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\sum_i A(\xi_i) \Delta x}_{\text{Riemann'sche Zwischensumme}},$$

denn daraus folgt:

$$\begin{aligned} A(x) \int_{x_0}^x A(s) ds &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A(x) \sum_i A(\xi_i) \Delta x \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i A(\xi_i) \Delta x A(x) \\ &= \int_{x_0}^x A(s) ds \cdot A(x). \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\frac{d}{dx} \exp \left( \int_{x_0}^x A(s) ds \right) = A(x) \exp \left( \int_{x_0}^x A(s) ds \right)$$

q.e.d.

## 5.1 Lineare skalare DGL höherer Ordnung

Wir betrachten nun DGL  $n$ -ter Ordnung von der Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_0(x)y = f(x) \quad (5.5)$$

mit  $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{K}$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig,  $I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall.

Bekannt: (5.5) ist äquivalent zu einem linearen DGL-System 1. Ordnung, mit der Substitution:  $(y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)})$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

d.h. die Ergebnisse des letzten Abschnittes sind auf (5.6) anwendbar.

06.12.'06

Wir betrachten lineare DGL  $n$ -ter Ordnung von der Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = f(x) \quad x \in I \quad (5.7)$$

mit  $f, a_i : I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig,  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall.

Bekanntlich:

$$(5.7) \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0(y) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I \quad (5.8)$$



(5.7)  $\Leftrightarrow$  (5.8) in dem Sinne: wenn  $y$  eine Lösung von (5.7) auf  $J \subset I \Rightarrow (y_1, \dots, y_n) := (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , Lösung von (5.8) auf  $J$  und umgekehrt: wenn  $(y_1, \dots, y_n)$  Lösung von (5.8) auf  $J \Rightarrow y = y_1$  ist Lösung von (5.7) auf  $J$ .

Aus den vorhergehenden Ergebnissen für ein DGL-System 1. Ordnung ergibt sich somit:

- $\forall x_0 \in I, \quad \forall \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{K}^n$  besitzt das AWP

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y &= f(x) \\ y(x_0) = \eta_1, \quad y'(x_0) = \eta_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) &= \eta_n \end{aligned}$$

eine eindeutige globale Lösung auf  $I$ . Weiter ergibt sich leicht der zu Satz 5.2 analoge Satz für (5.7)

**Satz 5.6** Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{ \text{Menge aller globalen Lösungen der homogenen DGL (5.7) } (f \equiv 0) \} \\ \mathcal{A} &:= \{ \text{Menge aller globalen Lösungen von (5.7)} \} \end{aligned}$$

Dann:

i)  $\mathcal{U}$  ist ein  $n$ -dimensionaler Untervektorraum von  $C^n(I, \mathbb{K})$

ii) Sind  $y_1, \dots, y_m \in \mathcal{U}$  dann gilt:

$$\begin{aligned} &y_1, \dots, y_m \text{ sind linear unabhängig in } C^n(I, \mathbb{K}) \\ \Leftrightarrow &(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \dots, (y_m, y_m', \dots, y_m^{(n-1)}) \text{ sind linear unabhängig in } C^1(I, \mathbb{K}^n) \\ \Leftrightarrow &\exists x^* \text{ so, dass } [y_1(x^*) \dots y_1^{(n-1)}(x^*)], \dots, [y_m(x^*) \dots y_m^{(n-1)}(x^*)] \text{ linear unabhängig in } \mathbb{K}^n \\ \Leftrightarrow &\forall x \in I \text{ sind } [y_1(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x)], \dots, [y_m(x), \dots, y_m^{(n-1)}(x)] \text{ linear unabhängig in } \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir als Fundamentalsystem von (5.7) (homogen) eine Menge von  $n$  linear unabhängigen globalen Lösungen, dann gilt:

iii) Wenn  $[y_1, \dots, y_n]$  ein Fundamentalsystem von (5.7) (homogen), dann ist:

$$\mathcal{U} = \{ c_1 y_1 + \dots + c_n y_n; \quad c_i \in \mathbb{K}, \quad i = 1, \dots, n \}$$

iv) Gilt:  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  und ist  $y_p \in \mathcal{A}$  eine partikuläre Lösung von (5.7), dann ist  $\mathcal{A} = y_p + \mathcal{U}$ , d.h.  $\mathcal{A}$  ist ein affiner Unterraum von  $C^n(I, \mathbb{K})$ .

**Beweis:** Klar nach vorhergehenden Ergebnissen für (5.8) und der Tatsache, dass  $\psi : \mathcal{U}_s \rightarrow \mathcal{U}$   
 $(y_1, \dots, y_n) \mapsto y_1$   
ein Vektorraumisomorphismus

$$\text{mit } \psi^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_s \quad y \rightarrow (y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

ist. Hierbei haben wir die Bezeichnung  $\mathcal{U}_s$  für die Menge aller globalen Lösungen des Systems (5.7) benutzt q.e.d.

Berechnung einer Lösung von (5.7):

1. Methode: Berechne Lösung des zugehörigen DGL-Systems (5.8) mittels Variation der Konstanten-Formel:

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \phi(x)\phi(x_0)^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} + \int_{x_0}^x \phi(x)\phi(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds,$$

wobei  $\phi(x)$  eine Fundamentalmatrix von (5.8) ist, und  $x_0 \in I, \quad (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{K}^n$  beliebig. Die 1. Komponente  $y_1$  von  $y$  ist dann Lösung von (5.7).

2. Methode: Im Fall konstanter Koeffizienten und elementar ansatzfähiger rechter Seite:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = f(x) \quad a_i \in \mathbb{K}$$

In diesem Fall ist die Koeffizientenmatrix in (5.8) von der Form:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Zur Konstruktion eines Fundamentalsystems von (5.8) müssen die EW von  $A$  berechnet werden. Dazu berechnen wir

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$$

Das Polynom  $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$  bezeichnet man als charakteristisches Polynom der DGL (5.7). Offensichtlich haben  $P_A(\lambda)$  und  $p(\lambda)$  die gleichen Nullstellen. Die Nullstellen von  $p$  sind also gerade die EWte von  $A$ . Über  $\mathbb{C}$  zerfällt  $p$  in Linearfaktoren:

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{r_j}$$

Wenn  $p$   $n$  paarweise verschiedene Nullstellen besitzt, dann ergeben sich somit sofort  $n$  linear unabhängige Lösungen  $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$  von (5.7) und somit ein Fundamentalsystem von (5.7).

Im allgemeinen Fall wissen wir, dass eine Nullstelle  $\lambda_j$  mit algebraischer Vielfachheit  $a(\lambda_j) = r_j$  zu  $r_j$  linear unabhängigen Lösungen von (5.7) (homogen) der Form:

$$e^{\lambda_j x} v_1, \dots, e^{\lambda_j x} v_m \quad \text{mit } v_1, \dots, v_m \text{ Basis von } \text{Eig}(A, \lambda_j) \quad (1 \leq m \leq r_j)$$

sowie der Form:

$$\left. \begin{array}{l} e^{\lambda_j x} (xv_i + v_{i,2}) \\ \vdots \\ e^{\lambda_j x} \left( \frac{x^l}{l!} v_i + \frac{x^{l-1}}{(l-1)!} v_{i,2} + \dots + v_{i,l} \right) \end{array} \right\} \quad \text{mit } 0 \leq l \leq r_j - 1 \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{Hauptvektor-Kette})$$

führt.

oö

(Hierbei ist  $v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,l}$  eine Kette von Hauptvektoren von  $A$  zum EW  $\lambda_j$ .)

Die ersten Komponenten dieser vektorwertigen Funktionen liefern  $r_j$  linear unabhängige Lösungen von (5.7) (homogen). Somit ergibt sich notwendigerweise, dass  $\dim(\text{Eig}(A, \lambda_j)) = 1$ , d.h.  $m = 1$ . (Wäre nämlich  $m > 1$ , dann müßten die 1. Komponenten der  $m$  linear unabhängigen Lösungen  $e^{\lambda_j x} v_1, \dots, e^{\lambda_j x} v_m$  des Systems  $m$  linear unabhängige Lösungen von (5.7) bilden. Die skalaren Funktionen  $e^{\lambda_j x} v_{1,1}, \dots, e^{\lambda_j x} v_{m,1}$  mit  $v_{1,1}, v_{i,2}, \dots, v_{m,1} \in \mathbb{K}$  (1. Komponenten der Vektoren  $v_1, \dots, v_m$ ) sind aber offensichtlich linear unabhängig  $\nearrow$ )

Folglich existiert genau eine Hauptvektorkette der Länge  $r_j$ , d.h. es ergeben sich die linear unabhängigen Lösungen von (5.7):

$$e^{\lambda_j x} c_1, e^{\lambda_j x} (xc_1 + c_2), e^{\lambda_j x} \left( \frac{x^2}{2} c_1 + xc_2 + c_3 \right), \dots, e^{\lambda_j x} \left( \frac{x^{r_j-1}}{(r_j-1)!} c_1 + \dots + c_{r_j} \right) \quad c_i \in \mathbb{K}$$

Diese  $r_j$  linear unabhängigen Lösungen können ersetzt werden durch:

$$e^{\lambda_j x}, e^{\lambda_j x} x, e^{\lambda_j x} x^2, \dots, e^{\lambda_j x} x^{r_j-1}$$

die den selben Untervektorraum aufspannen.

Folglich ist:

$\{e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{r_1-1} e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{r_2-1} e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_k x}, \dots, x^{r_k-1} e^{\lambda_k x}\}$  ein Fundamentalsystem von (5.7)

### Bemerkung:

Zur Berechnung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL (5.7) kann nun wieder die Variation-der-Konstanten-Formel mit der Fundamentalmatrix

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

benutzt werden.

Falls die rechte Seite  $f$  elementar ansatzfähig ist, d.h. von der Form:

$$f(x) = p(x)e^{\mu x} \cos(\omega x) + q(x)e^{\mu x} \sin(\omega x) \quad p, q \in \text{Polynome}, \quad \mu, \omega \in \mathbb{R}$$

ist, dann besitzt (5.7) eine partikuläre Lösung  $y$  der Form:

$$y_p(x) = x^\nu [(A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m) e^{\mu x} \cos(\omega x) + (B_0 + B_1 x + \dots + B_m x^m) e^{\mu x} \sin(\omega x)],$$

wobei

$$r = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu + \omega i \text{ keine Nullstelle vom charakteristischen Polynom ist.} \\ k, & \text{falls } \mu + \omega i \text{ } k\text{-fache Nullstelle vom charakteristischen Polynom ist.} \end{cases} \quad \text{und } m = \max \{ \deg(p), \deg(q) \}$$

und die Koeffizienten  $A_i, B_i \in \mathbb{K}$  bestimmt werden durch Einsetzen von  $y_p$  in (5.7) und mittels Koeffizientenvergleich.

### Beispiel:

Betrachte folgende lineare Schwingungsgleichung:

$$\begin{array}{c} \text{Rückstellkraft} \\ \downarrow \\ y'' + ay' + by = f(x) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Reibungskraft} \quad \text{äußere Kraft} \end{array}$$

Spezialfall:

$$U'' + \beta^2 U = \cos(\omega x) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \beta, \text{ wobei } \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ beliebige Konstanten sind.}$$

Homogene Gleichung:  $U'' + \beta^2 = 0 \rightsquigarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \beta = 0 \iff \lambda = \pm i\beta$  Eigenwerte

$\rightsquigarrow$  komplexes Fundamentalsystem  $\{e^{i\beta x}, e^{-i\beta x}\}$

$\rightsquigarrow$  reelles Fundamentalsystem  $\{\cos(\beta x), \sin(\beta x)\}$ .

Das allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung ist also von der Form  $y_h(x) = c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  beliebig.

Betrachte nun die inhomogene Gleichung:  $f(x) = \cos(\omega x)$  elementaransatzfähig.

Ansatz für die partikuläre Lösung:  $y_p(x) = x^\nu [A_0 \cos(\omega x) + B_0 \sin(\omega x)]$ , wobei

$$\begin{cases} \nu = 0, & \text{falls } \omega \neq \beta \\ 1, & \text{falls } \omega = \beta \end{cases}$$

Fall  $\omega \neq \beta$ : Einsetzen in die DGL liefert:  $-A_0\omega^2 \cos(\omega x) - B_0\omega^2 \sin(\omega x) + A_0\beta^2 \cos(\omega x) - B_0\beta^2 \sin(\omega x) = \cos(\omega x)$ .

$$\implies B_0(\beta^2 - \omega^2) = 0 \text{ und } A_0(\beta^2 - \omega^2) = 1$$

$$\implies B_0 = 0 \quad \text{da } \beta \neq \omega \text{ sowie}$$

$$A_0 = \frac{1}{\beta^2 - \omega^2} \quad \rightsquigarrow y_p(x) = \frac{1}{\beta^2 - \omega^2} \cos(\omega x)$$

Fall  $\omega = \beta$ : analog berechnet man durch Einsetzen des Ansatzes in DGL, dass  $y_p(x) = \frac{1}{2\beta} x \sin(\omega x)$  eine partikuläre Lösung der DGL ist.

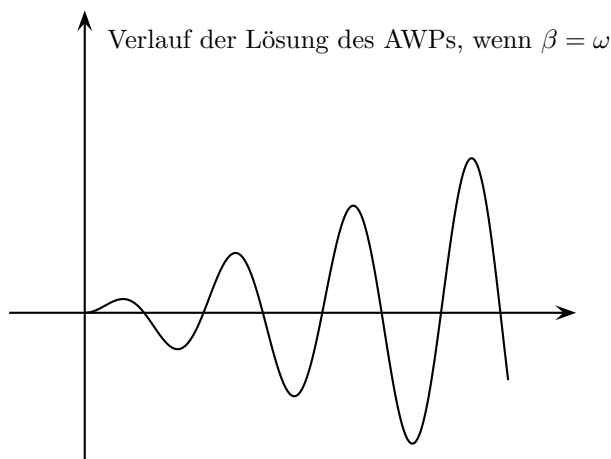
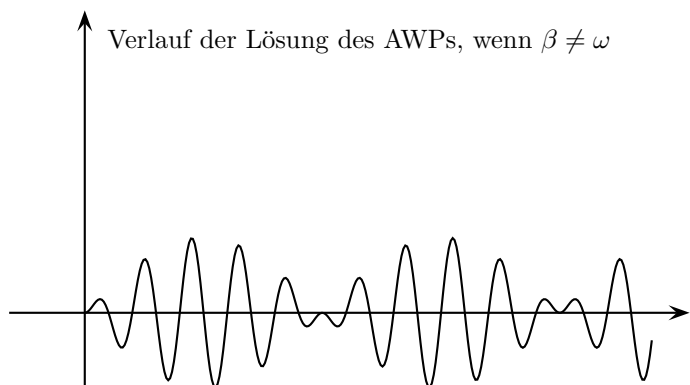
Betrachte nun das zugehörige AWP:

$$\boxed{U'' + \beta^2 U = \cos(\omega x), \quad U(0) = 0 \quad U'(0) = 0}$$

Im Resonanzfall:  $y(x) = \frac{1}{2\beta} x \sin(\omega x)$  ist die eindeutige Lösung des AWP

(„Die Erregerfrequenz überlagert sich mit der Eigenfrequenz  $\beta$  des freien Systems.“)

Im Fall  $\beta \neq \omega$  ergibt sich als Lösung:  $U(x) = \frac{1}{\omega^2 - \beta^2} [\cos(\beta x) - \cos(\omega x)]$



## Kapitel 6

# Asymptotisches Verhalten und Stabilität

Wir wollen in diesem Kapitel das asymptotische Verhalten (Langzeitverhalten) von Lösungen für  $x \rightarrow \infty$  und die Stabilität von Lösungen (stetige Abhängigkeit vom Anfangswert) auf unbeschränkten Intervallen  $[x_0, +\infty[$  untersuchen.

Dafür betrachten wir das AWP:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad f : D^{\text{offen}} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. } y$$

Des weiteren arbeiten wir in diesem Kapitel in  $\mathbb{R}$  (nicht in  $\mathbb{C}$ , wobei die meisten Ergebnisse auch in  $\mathbb{C}$  gelten.)

**Definition 6.1** Seien  $f : D^{\text{offen}} \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $D$ ,  $y$  eine Lösung der DGL  $y' = f(x, y)$  auf einem Intervall  $[x_0, +\infty[$  für ein  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 := y(x_0)$ .

Die Lösung heißt:

i) **stabil** : (auf  $[x_0, +\infty[$ ), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \text{so dass } \forall z_0 \in \mathbb{R}^N \text{ mit } \|y_0 - z_0\| < \delta$$

das AWP

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

eine Lösung  $z$  auf  $[x_0, +\infty[$  besitzt und

$$\|y(x) - z(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \geq x_0.$$

ii) **attraktiv** : falls gilt:

$$\exists \delta > 0, \text{ so dass } \forall z_0 \in \mathbb{R}^N \text{ mit } \|y_0 - z_0\| < \delta$$

das AWP

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

eine Lösung  $Z$  auf  $[x_0, +\infty[$  besitzt und

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \|y(x) - z(x)\| = 0$$

iii) **asymptotisch stabil** : , falls  $y$  stabil ist und attraktiv ist.

iv) exponentiell stabil : falls  $\delta, L, \omega > 0$  existieren, so dass für

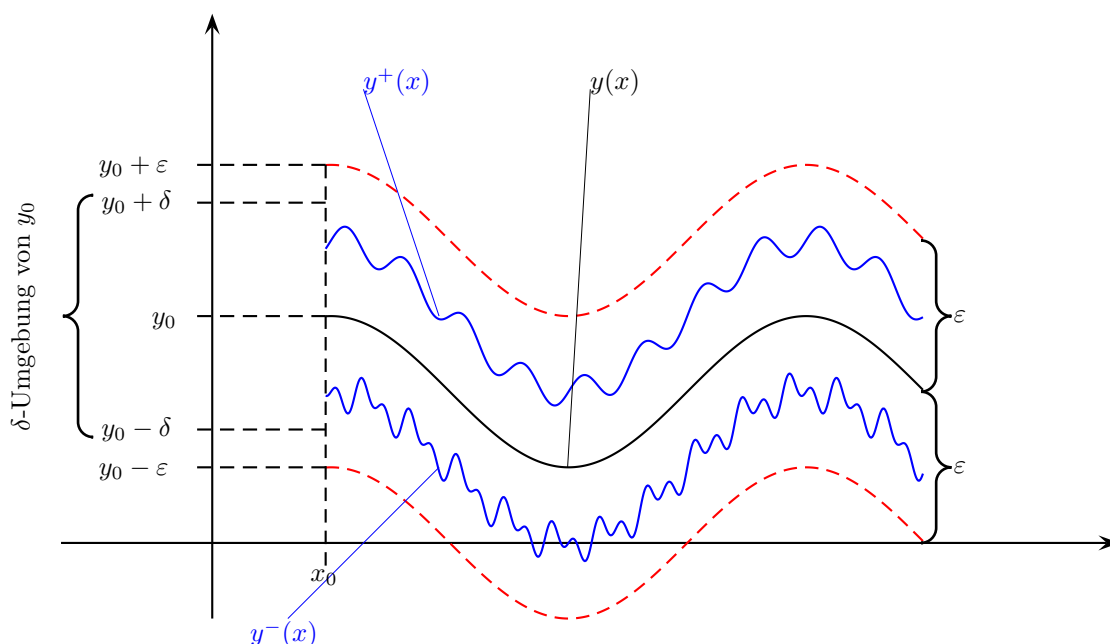
$$\forall z_0 \in \mathbb{R}^N : \|y_0 - z_0\| < \delta$$

das AWP

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

eine Lösung  $z$  auf  $[x_0, +\infty[$  besitzt und

$$\|y(x) - z(x)\| \leq L \|y_0 - z_0\| e^{-\omega(x-x_0)} \quad \forall x \geq x_0.$$



Die Skizze ist wie folgt zu interpretieren: Die Funktion in der Mitte ist die Lösung  $y$ . Sie ist umgeben von zwei gestrichelten Funktionen der selben Art. Alle Lösungen, die einen Abstand  $< \delta$  an der Stelle  $x_0$  von  $y$  haben, bleiben in einem  $\varepsilon$ -Schlauch. Dabei sind  $y^+$  und  $y^-$  zwei Beispiele für solche Funktionen. Sie bewegen sich immer innerhalb des  $\varepsilon$ -Schlauches.

### Bemerkung:

1. exponentiell stabil  $\implies$  asymptotisch stabil  $\implies$  stabil.
2. Die Stabilitätsbegriffe hängen nicht von der Wahl von  $x_0$  ab, d.h. wenn  $y$  eine Lösung auf  $]a, +\infty[$  ist, dann gilt  $y$  ist (exponentiell-/asymptotisch/-) stabil auf  $[x_2, +\infty[$ .  
 $\iff y$  ist (exponentiell-/asymptotisch/-) stabil auf  $[x_1, +\infty[$ , für beliebige  $x_1, x_2 > a$ .  
 (Beweis mit Satz 4.2, Satz über die gleichmäßig stetige Abhängigkeit der Lösung des AWP vom Anfangswert auf kompakten Intervallen.)
3. Im Falle  $N = 1$  gilt: Attraktivität  $\Rightarrow$  Stabilität.

**Beweis:** Sei  $y$  eine attraktive Lösung und sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\delta > 0$  gemäß der Definition der Attraktivität. Betrachte  $z^+$  respektive  $z^-$ , die Lösung des AWP

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z) \\ z(x_0) = y_0 + \frac{\delta}{2} \end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases} z'(x) = f(x, z) \\ z(x_0) = y_0 - \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

Diese existieren für alle  $x \geq x_0$  und es gilt:

$$\lim_{x \uparrow \infty} |y(x) - z^\pm(x)| = 0.$$

Also existiert ein  $T > x_0$ , so dass

$$|y(x) - z^\pm(x)| < \varepsilon \quad \forall x > T. \quad (6.1)$$

Nach Satz 4.2 existiert  $\tilde{\delta} < \frac{\delta}{2}$ , so dass  $\forall z_0 \in \mathbb{R}$  mit  $|y_0 - z_0| < \tilde{\delta}$  die Lösung  $z$  des AWP

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

gilt:

$$|y(x) - z(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [x_0, T].$$

Somit folgt,  $\forall z_0 \in \mathbb{R}$  mit  $|z_0 - y_0| < \tilde{\delta}$ , dass  $|y(x) - z(x)| < \varepsilon \quad \forall x \geq x_0$ , da gemäß Eindeutigkeitssatz gilt:  $z^- < z(x) < z^+ \quad \forall x \geq x_0$  und deshalb aus (6.1) die entsprechende Ungleichung auch für  $z$  folgt. q.e.d.

4. Im Fall  $N > 1$  folgt i.A. die Stabilität nicht aus der Attraktivität (siehe z.B. Aulbach „Gewöhnliche DGL“). Der Unterschied zwischen Stabilität und Attraktivität in der Definition besteht darin, dass bei der Stabilität ein  $x_0$  existiert, ab dem **alle** Lösungen einen Abstand  $< \varepsilon$  zur Lösung haben, wenn ihr Anfangswert an der Stelle  $x_0$  um weniger als  $\delta$  abweicht.

In der Definition von der Attraktivität findet man für jede Lösung ein  $x_0$ , ab dem dies gilt, aber es kann für jede Lösung ein anderes sein. Somit ist es möglich, dass man nie ein festes  $x_0$  finden kann, so dass **alle** Lösungen ab diesem Punkt in einem  $\varepsilon$ -Schlauch liegen, falls ihre Anfangswerte um weniger als  $\delta$  von unserer Lösung abweichen sind.

### Beispiele:

- (a) lineares AWP :

$$\begin{cases} y'(x) = \alpha y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \quad x \in \mathbb{R} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Betrachte AWP zu anderem Anfangswert:

$$\begin{cases} \tilde{y}'(x) = \alpha \cdot \tilde{y} & w := y - \tilde{y} & w'(x) = \alpha w \\ \tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0 & & w(x_0) = y_0 - \tilde{y}_0 \end{cases} \quad w(x) = e^{\alpha x} \cdot (y_0 - \tilde{y}_0)$$

$$\implies |y(x) - \tilde{y}(x)| = |y_0 - \tilde{y}_0| e^{\alpha x}$$

Dann gilt:

- $\alpha < 0$  :  $y$  ist exponentiell stabil.
  - $\alpha = 0$  :  $y$  ist stabil.
  - $\alpha > 0$  :  $y$  ist instabil.
- (b) Betrachten wir das AWP  $y' = Ay$ ,  $y(0) = y_0$ , wo  $A$  eine schiefsymmetrische  $N \times N$ -Matrix (d.h.  $A = -A^T$ ) ist und  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Dann ist die Lösung  $y$  durch  $y(x) = e^{Ax} \cdot y_0$  gegeben, wobei  $e^{Ax}$  die Fundamentalmatrix ist. Wir rechnen nun nach, dass  $y(x) = y_0$ , d.h. dass  $y$  konstant ist. Betrachte das Skalarprodukt:

$$(y', y) = (Ay, y) = (y, A^T y) \stackrel{A=-A^T}{=} -(y, Ay) \stackrel{(\cdot, \cdot)^{\text{sym.}}}{=} -(Ay, y)$$

Also muss gelten  $(y', y) = 0$ . Nun ist aber

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{2} \|y(x)\|^2 = (y, y') = y_1 y'_1 + \dots + y_N y'_N = 0 \quad \text{mit } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass aufgrund der Linearität der DGL (wie in Beispiel 1) die (exponentiell-/ asymptotisch-/ -) Stabilität einer Lösung  $y$  des AWP für  $(y_{01}, y_{02}) \in \mathbb{R}^2$  äquivalent zur (exponentiellen/ asymptotischen/ -) Stabilität der konstanten Nulllösung des AWP ist.

Betrachte nun die DGL

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

Eigenwerte von  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  :  $\lambda_1 = +i$ ,  $\lambda_2 = -i$ ; zugehörige Eigenvektoren von  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  :  $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \overline{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Komplexes Fundamentalsystem:  $e^{ix}v_1, e^{-ix}v_2$  und als reelles Fundamentalsystem erhalten wir:  $\begin{pmatrix} -\cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$ . Somit ergibt sich als Lösung des AWP

$$y(x) = y_{01} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} + y_{02} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) \right\|_2 &= \sqrt{(y_{02} \sin(x) + y_{01} \cos(x))^2 + (y_{02} \cos(x) - y_{01} \sin(x))^2} \\ &= \sqrt{y_{01}^2 + y_{02}^2} = \left\| \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix} \right\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Folglich: Die Nulllösung (und damit jede beliebige Lösung des AWP) ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

## 6.1 Autonome DGL

Wir Betrachte nun im Folgenden autonome DGL von der Form  $y'(x) = f(y)$  mit  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal Lipschitz-stetig auf  $D$ .

Wir bemerken, dass autonome DGLen **translationsinvariant** sind, d.h. es gilt:

Ist  $y$  Lösung von  $y' = f(y)$  auf dem Intervall  $[x_0, +\infty[$ , dann ist  $z(x) = y(x - x_0)$  eine Lösung von  $y'(x) = f(y)$  auf  $[0, +\infty[$  und es gilt:  $y$  ist (exponentiell-/ asymptotisch-/ -) stabil genau dann wenn  $z$  (exponentiell-/ asymptotisch-/ -) stabil ist.

Daher könne wir im Folgenden o.B.d.A. annehmen, dass  $x_0 = 0$  ist.

**Definition 6.2** Eine Lösung  $y$  von  $y'(x) = f(y)$  heißt stationäre Lösung, falls  $y$  eine konstante Funktion ist, die die DGL  $y'(x) = f(y)$  löst, d.h.  $y(x) \equiv z \quad \forall x \in \mathbb{R}$  und  $z$  eine Nullstelle von  $f$  ist. Jede solche Nullstelle  $z$  von  $f$  heißt Ruhelage/(Gleichgewichtspunkt/kritischer Punkt).

Wir betrachten zunächst den Spezialfall einer linearen autonomen DGL:

$$\begin{cases} y'(x) = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (6.2)$$

In diesem Fall gilt:

**Satz 6.1** Alle Lösungen von (6.2) sind:

- i) stabil : wenn für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$  gilt:  $\text{Re}(\lambda) \leq 0$  und außerdem die Eigenwerte mit  $\text{Re}(\lambda) = 0$  halbeinfach sind.

In diesem Fall gilt:

$$\|e^{Ax}y_0\| \leq M \|y_0\| \quad \forall x \geq 0, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^N$$

für ein  $M \geq 1$ .

**Erinnerung:** Ein Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$  heißt halbeinfach, falls die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit dieses Eigenwertes ist.

- ii) asymptotisch stabil : falls für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$  gilt:  $\text{Re}(\lambda) < 0$

In diesem Fall gilt:

$$\forall \omega > 0 \text{ mit } s := \max_{\lambda \text{ EW von } A} \text{Re}(\lambda) < -\omega < 0$$

so dass

$$\|e^{Ax}y_0\| \leq M_\omega \|y_0\| e^{-\omega x} \quad \forall x \geq 0, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^N,$$



mit  $M_\omega \geq 1$  geeignet, d.h. alle Lösungen sind sogar exponentiell stabil.

Falls zusätzlich alle Eigenwerte halbeinfach sind, dann gilt sogar

$$\|e^{Ax}y_0\| \leq M \|y_0\| e^{sx} \quad \text{für ein } M \geq 1 \text{ und mit } s = \max_{\lambda \in \text{EW von } A} \operatorname{Re}(\lambda) \quad \lambda \text{ Eigenwert von } A.$$

iii) instabil: falls mindestens ein Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  existiert, oder falls ein Eigenwert von  $A$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  existiert, der nicht halbeinfach ist.

**Beweis:** Erinnerung: Ein Fundamentalsystem von  $y' = Ay$  besteht aus Lösungen der Form:

$$(e^{\lambda x} \vec{p}(x), \quad e^{\alpha x} \cos(\beta x) \vec{r}(x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x) \vec{q}(x))$$

Mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\alpha + i\beta) \in \mathbb{C}$  (EW)  $0 \neq p, q, r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  Polynome, und  $\deg(p) > 0$  (respektive  $\deg(r), \deg(q) > 0$ ), genau dann, wenn  $\lambda$  (respektive  $\alpha + i\beta$ ) nicht halbeinfach sind. Die Pfeile über  $p, q, r$  sind Vektorpfeile und deuten an, dass es sich um Spaltenvektoren handelt.

Somit gilt:

- (i)  $\iff$  alle Lösungen in einem Fundamentalsystem von  $y'(x) = Ay$  sind beschränkt auf  $[0, +\infty[$ .  
 $\iff$  alle Spalten der Fundamentalmatrix  $e^{Ax}$  sind beschränkt auf  $[0, +\infty[$ .  
 $\iff \exists M \geq 1$ , so dass  $\|e^{Ax}\| \leq M \quad \forall x \geq 0$  ( $\|\cdot\|$  zu  $\|\cdot\|$  gehörige Matrixabbildungsnorm.)  
 $\iff \exists M \geq 1 : \|e^{Ax}y_0\| \leq M \|y_0\| \quad \forall x \geq 0, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^N$   
 $\iff$  die Nulllösung ist stabil  
 $\iff$  jede Lösung ist stabil.
  - (ii) Eigenwertbedingung:  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  für alle EWe  $\lambda$  von  $A$ .  
 $\iff$  alle Lösungen eines Fundamentalsystems der DGL  $y' = Ay$  konvergieren für  $x \rightarrow \infty$  gegen 0.  
 $\iff$  alle Lösungen von  $y' = Ay$  sind asymptotisch stabil.  
 $\iff$  die Lösung  $y \equiv 0$  ist asymptotisch stabil.
- Sei  $\omega > 0$  mit  $s < -\omega < 0$ . Dann gilt für jede Lösung  $y_i$  eines Fundamentalsystems:

$$\begin{aligned} \|y_i(x)\| &= \|e^{\lambda_i x} p_i(x)\| \\ &\leq e^{sx} \|p_i(x)\| \\ &= \underbrace{\exp((s + \omega)x)}_{\text{beschränkt auf } \mathbb{R}^+} e^{-\omega x} \|p_i(x)\| \\ &\leq M_i \cdot e^{-\omega x} \quad \text{für ein } M_i \geq 1 \end{aligned}$$

Mit  $M_\omega = \max_{i=1, \dots, N} M_i$  folgt die Behauptung.

Es ist auch klar, dass, wenn alle EWe halbeinfach sind, und somit alle Polynome  $p_i$  Grad 0 haben, die Ungleichung

$$\|y_i(x)\| \leq \|p_i\| \cdot e^{sx} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

gilt und somit (\*) auch mit  $-\omega = s$  gilt.

q.e.d.

## 6.2 Nichtlineare autonome DGL $y' = f(y)$

Im Folgenden sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitz-stetig.

Problem: (asymptotische) Stabilität von Lösungen der DGL  $y' = f(y)$  speziell von stationären Lösungen (Ruhelagen).

### Bemerkung:

Ist  $y$  eine Lösung der DGL  $y' = f(y)$  auf  $[0, \infty[$  und  $y_\infty := \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$  existiert in  $\mathbb{R}^N$ , so ist  $y_\infty$  eine Ruhelage.

**Beweis:** komponentenweise gilt:

$$0 \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{y_i(n+1) - y_i(n)}_{\rightarrow y_{\infty,i}} \stackrel{\text{MWS}}{=} y'_i(n + \Theta_n) \stackrel{\text{mit}}{\underset{\Theta_n \in ]0,1[}{=}} f_i(y(n + \Theta_n)) \xrightarrow[\text{stetig}]{f_i} f_i(y_\infty)$$

$$\implies f(y_\infty) = 0, \quad \text{d.h. } y_\infty \text{ ist Ruhelage.}$$

q.e.d.

Mit Hilfe der obigen Bemerkung lässt sich das asymptotische Verhalten von Lösungen von skalaren DGL nun leicht bestimmen.

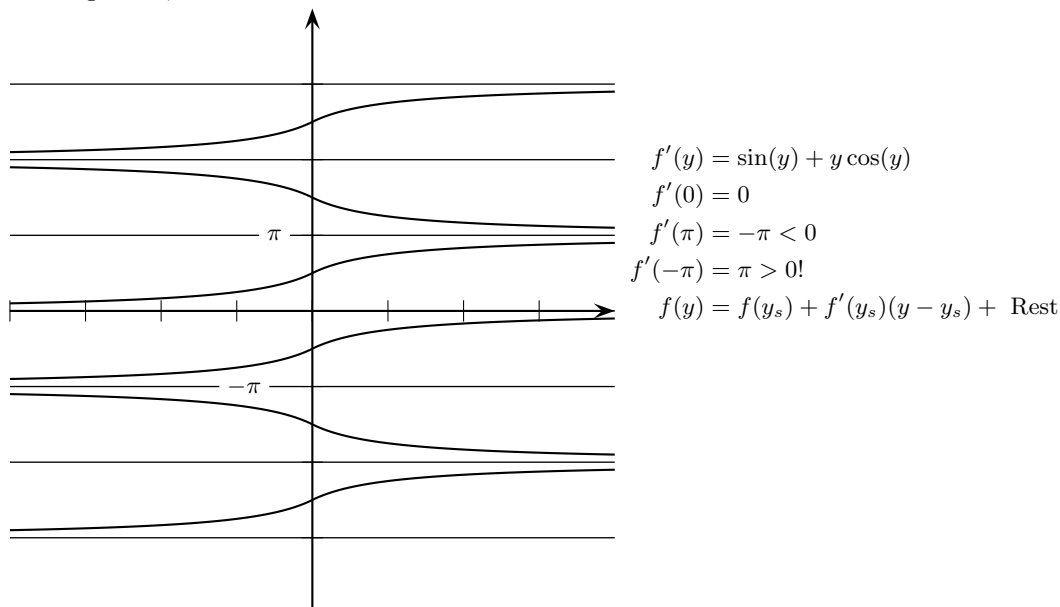
Da zu ein

### Beispiel:

$$\begin{cases} y'(x) = y \sin(y) =: f(y) \text{ lokal Lipschitz-stetig auf } \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$f$  ist linear beschränkt (bzw. global Lipschitzstetig), also gibt es zu jedem  $y_0 \in \mathbb{R}$  genau eine globale Lösung des AWP.

Ruhelagen:  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$



Für  $y_0 \in ]0, \pi[$  gilt dann  $y(x) \in ]0, \pi[ \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow y'(x) = y(x) \sin(y(x)) > 0 \quad \forall x \geq 0 \implies y$  ist streng monoton wachsend. Da  $y$  beschränkt ist, existiert

$$y_\infty := \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \in ]0, \pi[.$$

Da nach obiger Bemerkung  $y_\infty$  Ruhelage ist, folgt  $y_\infty = \pi$ .

Analoge Argumentation für beliebige Anfangswerte  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Man stellt dabei u.a. fest:

- Die Ruhelage  $\pi$  ist asymptotisch stabil mit dem so genannten Einzugsbereich  $]0, 2\pi[$ , d.h. für jeden Anfangswert  $y_0 \in ]0, 2\pi[$  konvergiert die zugehörige Lösung für  $x \rightarrow \infty$  gegen  $\pi$ .
- Die Ruhelage 0 ist semistabil, d.h. für  $y_0 \in ]0, \pi[$  konvergiert die Lösung gegen  $\pi$  für  $x \rightarrow +\infty$ , für  $y_0 \in ]-\pi, 0[$  konvergiert die Lösung aber gegen 0 für  $x \rightarrow +\infty$ .



Diese Argumentation lässt sich NICHT auf Systeme übertragen! Dort gilt aber der folgende

#### SATZ 6.2 (LINEARISIERTE STABILITÄT)

Seien  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig differenzierbar,  $y_s$  eine Ruhelage und  $\bar{y}_s$  die zugehörige stationäre Lösung. Weiter sei  $J_f[y_s] = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, N\}}(y_s)$  die Jacobimatrix von  $f$  in  $y_s$ .

Dann gilt:

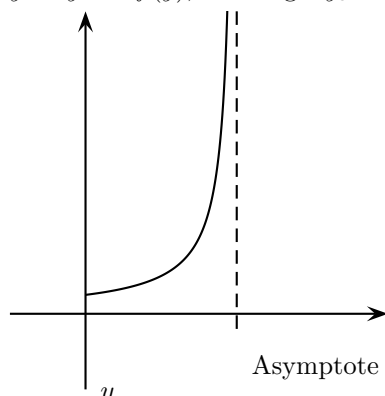
- Wenn jeder Eigenwert von  $J_f[y_s]$  strikt negativen Realteil besitzt, ist die zugehörige Lösung  $\bar{y}_s$  exponentiell stabil.
- Besitzt mindestens ein Eigenwert von  $J_f[y_s]$  strikt positiven Realteil, so ist  $\bar{y}_s$  instabil.

#### Bemerkung:

Wenn alle Eigenwerte von  $J_f[y_s]$  Realteil  $\leq 0$  besitzen und mindestens ein Eigenwert Realteil  $= 0$  hat, dann ist keine Aussage über die Stabilität der nicht-linearen DGL möglich.

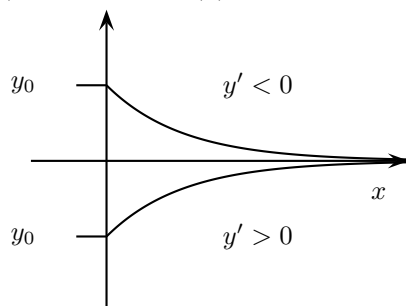
#### Beispiel:

- $y' = y^2 =: f(y)$ , Ruhelage:  $y_s = 0$ .  $J_f[0] = f'(0) = 0 \rightsquigarrow$  Eigenwert  $= 0$



$y_0 < 0 \rightsquigarrow$  Lösung:  $y(x) = \frac{1}{y_0^{-1} - x} \cdot x = y_0^{-1}$  Durch elementares Nachrechnen (Separation der Variablen) zeigt: Das maximale Existenzintervall einer jeden positiven Lösung ist endlich  $\implies \bar{y}_s = 0$  ist instabil.

- $y' = 0$ ,  $y_s = 0$ . Alle Lösungen sind konstant. Damit ist die Nulllösung stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Es ist  $J_f[0] = f'(0) = 0$  wie oben.
- $y' = -y^3 =: f(y) \rightsquigarrow y_s = 0$ ,  $J_f[0] = f'(0) = 0 \rightsquigarrow$  Eigenwert 0.



Also ist  $\bar{y}_s = 0$  asymptotisch stabil.

#### Beweis: Beweis von Satz 6.2

- i) O.B.d.A. darf angenommen werden, dass  $y_s = 0$  (sonst gehe über zur DGL  $z' = g(z)$ ,  $g(z) := f(z + y_s)$ ; die Ruhelage 0 von  $z' = g(z)$  ist asymptotisch stabil genau dann wenn  $y_s$  asymptotisch stabile Lösung von  $y' = f(y)$  ist und  $J_f[y_s] = J_g[0]$ .)

Da  $f$  stetig differenzierbar ist, ist

$$f(y) = \underbrace{J_f[0]}_{=:A} \cdot y + \underbrace{r(y)}_{=:g(x)}$$

mit einem stetig differenzierbaren  $r$  mit  $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{r(y)}{\|y\|} = 0$ .

Die DGL  $y' = f(y)$  kann also in der Form

$$y' = Ay + r(y) \quad (6.3)$$

mit  $A = J_f[0]$  geschrieben werden. Sei nun  $y$  eine maximale Lösung von (6.3) mit  $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^N$ .

Zu zeigen:  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ , so dass für alle  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  mit  $\|y_0\| < \delta$  die zugehörige Lösung  $y$  von (6.3) auf ganz  $[0, +\infty[$  existiert und

$$\|y(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \geq 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$$

Nach der Duhamel-Formel gilt mit  $g(x) := r(y(x))$ .

$$y(x) = e^{Ax} y_0 + \int_0^x e^{A(x-s)} g(s) ds,$$

$$\text{d.h.} \quad y(x) = e^{Ax} y_0 + \int_0^x e^{A(x-s)} r(y(s)) ds \quad \forall x \in I_{\max}, \text{ maximales Existenzintervall.}$$

Nach Satz 6.1 existieren  $M \geq 1$ ,  $\omega > 0$  mit

$$\|e^{Ax}\| \leq M e^{-\omega x} \quad \forall x \geq 0.$$

Wähle nun  $k > 0$  genügend klein, so dass  $M \cdot k - \omega < 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle dazu  $0 < \rho < \varepsilon$ , so dass

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^N : \|y\| < \rho \right\} \subset D \quad \text{und außerdem} \quad \|r(y)\| \leq k \|y\| \quad \forall \|y\| < \rho, \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

Sei nun  $0 < \delta < \rho$  (zunächst beliebig),  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  mit  $\|y_0\| < \delta$ .

Sei nun  $T^* := \sup \left\{ T \in I_{\max} : \|y(x)\| \leq \rho \quad \forall x \in [0, T[ \right\}$ , wobei  $y$  Lösung des AWP's

$$\begin{cases} y'(x) = Ay + r(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Es folgt dann für alle  $x \in [0, T^*[$  :

$$\begin{aligned} \|y(x)\| &\leq \|e^{Ax}\| \cdot \|y_0\| + \int_0^x \|e^{A(x-s)}\| k \|y(s)\| ds \\ &\leq M \cdot e^{-\omega x} \|y_0\| + M \cdot k e^{-\omega x} \int_0^x e^{\omega s} \|y(s)\| ds \quad | \cdot e^{\omega x} \\ \Rightarrow \underbrace{e^{\omega x} \|y(x)\|}_{=: z(x)} &\leq M \|y_0\| + M \cdot k \cdot \int_0^x \underbrace{e^{\omega s} \|y(s)\|}_{=: z(s)} ds \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt:

$$\begin{aligned} z(x) = e^{\omega x} \|y(x)\| &\leq M \|y_0\| e^{Mkx} \quad \forall x \in [0, T^*[ \\ \text{d.h. } \|y(x)\| &\leq M \cdot \|y_0\| e^{\overbrace{Mk}^{<0} - \omega} x \quad \forall x \in [0, T^*[ \quad (6.4) \\ &\leq M \cdot \|y_0\| \leq \frac{\rho}{2}, \quad \text{wenn } \delta \leq \frac{\rho}{2M} \text{ gewählt} \quad (6.5) \end{aligned}$$

Wäre  $T^* < \infty$ , würde wegen der Stetigkeit der Lösung  $y$  gelten:  $\|y(T^*)\| = \rho$ . Andererseits gilt aber wegen (6.5)  $\|y(T^*)\| \leq \frac{\rho}{2}$   $\nrightarrow$  Widerspruch. Also ist  $T^* = +\infty$  und damit existiert  $y$  auf  $[0, +\infty[$ . Da  $\rho < \varepsilon$ , folgt aus (6.5) ebenfalls, dass  $\|y(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \geq 0$ .

Aus (6.4) folgt schließlich, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|y(x)\| = 0.$$

ii) siehe W.Walter: „Gewöhnliche DGL“.

q.e.d.

18.12.'06

### Bemerkung:

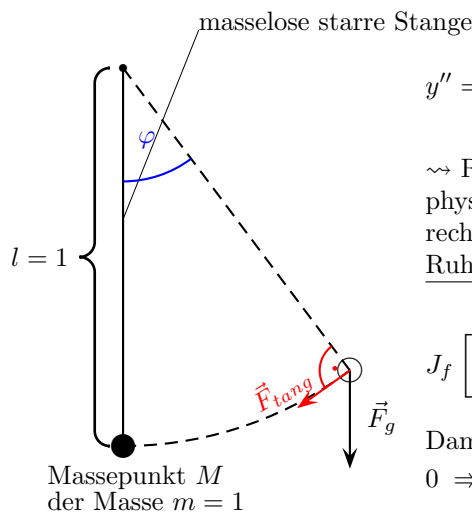
Der Beweis von Satz 6.2 i) zeigt, dass unter den Voraussetzungen von i) die Ruhelage  $y_s$  sogar exponentiell stabil ist.

Problem: Was, wenn die EWe von  $J_f[y_s]$  alle  $\text{Re} \leq 0$  haben, aber mindestens ein Ew einen  $\text{Re} = 0$  besitzt?  
→ Neue Methode zur Stabilitätsuntersuchung nötig!

### Beispiel:

Mathematisches Pendel ohne Reibung: Nach Newton gilt: Kraft =  $\underbrace{\text{Masse} \times \text{Beschleunigung}}_{m \cdot \varphi''}$ .

In der Skizze ist die Tangentialkomponente der Schwerkraft  $\vec{F}_g$  gegeben durch:  $\vec{F}_{\text{tang}} = -mg \cdot \sin(\varphi)$



$$y'' = -g \sin(y) \xrightarrow{\text{System}} \begin{cases} y' = z \\ z' = -g \sin(y) \end{cases} \longrightarrow f(y, z) = \begin{pmatrix} z \\ -g \sin(y) \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$  Ruhelage  $\begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

physikalisch sinnvolle Ruhelage:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (Pendel hängt senkrecht nach unten),  $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$  (Pendel zeigt senkrecht nach oben)

Ruhelage:  $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$J_f \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g \cos(y) & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad J_f \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{bmatrix}$$

Damit erhalten wir als charakteristisches Polynom:  $\lambda^2 - g = 0 \Rightarrow$  Eigenwertepaar:  $\lambda = \pm\sqrt{g}$ .  $\xrightarrow{\text{Satz 6.2}} \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$  ist instabil.

Ruhelage:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$  Eigenwertepaar:  $\lambda = \pm i\sqrt{g} \implies \text{Re(EW)} = 0 \implies$  Prinzip der linearisierten Stabilität ist nicht anwendbar. Aber es gibt physikalisch motivierte Erhaltungsgrößen.

$$E(y, z) = \frac{z^2}{2} + g \int \sin(y) = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

z.B.  $E(y, z) = \frac{z^2}{2} - g \cos(y)$ . Es gilt:

$$\frac{d}{dt} E(y(t), z(t)) = \nabla E(y(t), z(t)) \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \sin(y(t)) & z(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z(t) \\ -g \sin(y(t)) \end{pmatrix} = 0$$

für jede Lösung der DGL  $\boxed{y' = z, \quad z' = -g \sin(y)}$ , d.h.  $E$  ist konstant entlang der Lösungskurve.

Wir werden sehen, dass solche Erhaltungsgrößen zur Untersuchung der Stabilität benutzt werden können. Zunächst aber noch eine

**Definition 6.3** Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitz-stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion  $E : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt erstes Integral der DGL  $y' = f(y)$ , wenn gilt:

$$\nabla E(y) \cdot f(y) = 0 \quad \forall y \in D$$

**Beispiel:**

$E(y, z) = \frac{z^2}{2} - g \cos(y)$  ist ein erstes Integral von

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -g \cdot \sin(y). \end{cases}$$

**Bemerkungen:**

- (1) Alle konstanten Funktionen sind erste Integrale für jede DGL. Diese trivialen Integrale bringen keine zusätzliche Information.
- (2) Nicht jede DGL besitzt nicht-triviale erste Integrale.

**Beispiel:**

$$\begin{cases} y' = -y \\ z' = -z \end{cases} \rightsquigarrow \text{Lösung: } \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}, \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Angenommen,  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein erstes Integral dieser; dann gilt:

$$E(y_0, z_0) = E\left(\underbrace{y_0 e^{-t}}_{\xrightarrow{t \uparrow +\infty} 0}, \underbrace{z_0 e^{-t}}_{\xrightarrow{t \uparrow +\infty} 0}\right) \xrightarrow[\text{da } E \text{ stetig}]{t \uparrow \infty} E(0, 0) \quad \forall \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

d.h.

$$E(y_0, z_0) = E(0, 0) \quad \forall (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2,$$

also ist  $E$  konstant.

(3) Für zweidimensionale Systeme der Gestalt:

$$\begin{cases} y' = \frac{\partial}{\partial z} H(y, z) \\ z' = -\frac{\partial}{\partial y} H(y, z) \end{cases}$$

(ein sog. Hamilton'sches System,  $H(y, z)$  heißt Hamilton-Funktion) ist die Hamilton-Funktion  $H$  ein erstes Integral.

**Beispiel:**

Mathematisches Pendel:

die Funktion  $E(y, z) = \frac{z^2}{2} + g \cdot \cos(y)$  ist offensichtlich Hamilton-Funktion des Systems:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -g \cdot \sin(y) \end{cases}$$

(4) Auch nicht-Hamilton'sche Systeme können erste Integrale besitzen.

**Beispiel:**

Räuber-Beute-Modell:

$$\begin{cases} y' = y(\alpha - \beta z) \\ z' = z(\delta y - \gamma) \end{cases} \quad \alpha, \beta, \delta, \gamma > 0 \quad (6.6)$$

Testen, ob DGL Hamilton'sches System ist, d.h. ob  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit  $\frac{\partial}{\partial z} H(y, z) = y(\alpha - \beta z)$  und  $\frac{\partial}{\partial y} H(y, z) = -z(\delta y - \gamma)$ .

Ist dies der Fall, dann ist  $H$  sogar eine  $\mathcal{C}^2$ -Funktion und es muss gelten:

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} H(y, z) \stackrel{!}{=} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} H(y, z)$$

Wir berechnen also  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial z} H(y, z) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y(\alpha - \beta z)) = \alpha - \beta z \quad (6.7)$

$$\text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial y} H(y, z) \right) = -\frac{\partial}{\partial z} (z(\delta y - \gamma)) = \delta y - \gamma \quad (6.8)$$

Da (6.7)  $\neq$  (6.8), ist (6.6) kein Hamilton'sches System.

Aber

$$E(y, z) = \alpha \ln(|z|) - \beta z + \gamma \ln(|y|) - \delta y$$

ist ein erstes Integral auf jedem der 4 offenen Quadranten (nachrechnen!)

**Bemerkung:**

Allgemein gilt für ein 2-dimensionales autonomes System:

$$\begin{cases} y' = f(y, z) \\ z' = g(y, z) \end{cases} \quad \text{mit } f, g : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^1\text{-Funktionen:}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} f(y, z) = -\frac{\partial}{\partial z} g(y, z) \quad \text{in } D} \quad (*)$$

ist notwendige Bedingung dafür, dass das System ein Hamilton-System ist. Ist  $D$  einfach zusammenhängend, dann ist (\*) auch hinreichende Bedingung dafür, dass das System hamiltonsch ist.

**Fragen:**

- (1) Welche Information liefert ein (nicht-triviales) erstes Integral?  
 (2) Wie findet man nicht-triviale erste Integrale?

Zunächst zu (1) ((2) → später, vergleiche auch 10. Übung)

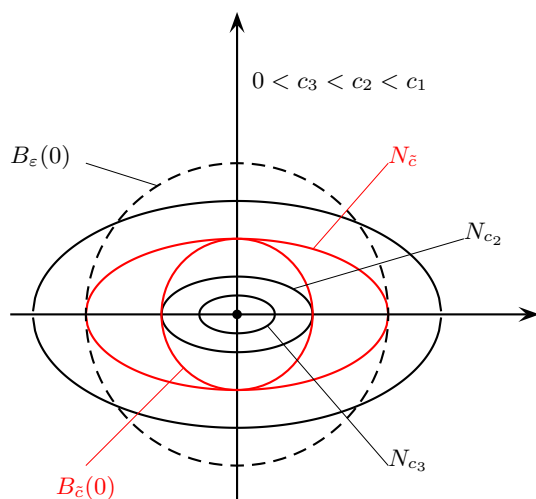
Betrachte wieder das Mathematische Pendel im sog. Phasenraum, der  $y$ - $z$ -Ebene.

In diesem kann man die sog. Trajektorien, d.h. die Bildmenge

$$\{(y(t), z(t)), t \in I\},$$

wobei  $(y, z) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  Lösung der 2-dim. DGL, darstellen. Besitzt eine DGL ein erste Integral  $E$ , so liegen sämtliche Trajektorien in einer Niveaumenge  $E$ :

$$N_c = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{z^2}{2} - g \underbrace{\cos(y)}_{\approx 1 - \frac{y^2}{2}} = c, \quad c \in \mathbb{R} \right\} \approx (y, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{z^2}{2} + \frac{gy^2}{2} = \underbrace{c + g}_{\tilde{c}}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R} \Big\}$$



d.h. die Niveaumengen sind annähernd ellipsenförmig:

Schlussfolgerung: Für beliebig vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  sei  $\tilde{c} > 0$  die größte Konstante, so dass  $N_{\tilde{c}}$  noch ganz in  $B_\varepsilon(0)$  liegt. Dann gilt mit  $\delta = \tilde{c} > 0$ , dass  $\forall (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|(y_0, z_0)\|_2 < \delta$  die Lösung des zugehörigen AWP ganz in  $B_\varepsilon(0)$  verläuft.

Es sieht so aus, dass die Existenz von ersten Integralen Stabilität der Ruhelage garantieren, aber asymptotische Stabilität ausschließen.

Jetzt: mathematisch rigoros und allgemeiner:

**Definition 6.4** Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitz-stetig,  $y_s$  Ruhelage,  $\bar{y}_s$  zugehörige stationäre Lösung.

Eine stetig differenzierbare Funktion

$$V : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad U^{\text{offen}} \subset D \quad \text{Umgebung von } y_s$$

heißt:

- (i) **schwache Lyapunov-Funktion** der DGL in  $y_s$ , wenn gilt:

$$\nabla V(y) \cdot f(y) \leq 0 \quad \forall y \in U$$

- (ii) **starke Lyapunov-Funktion** der DGL in  $y_s$ , wenn gilt:

$$\nabla V(y) \cdot f(y) < 0 \quad \forall y \in U \setminus \{y_s\}$$

**Bemerkung:**

<sup>1</sup>für  $|y|$  klein (Taylor)



- (1)  $V$  ist schwache (starke) Lyapunov-Funktion auf  $U \iff V$  fällt entlang Lösungskurven, die ganz in  $U$  verlaufen, (strikt) monoton, d.h.

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) = \nabla V(y(t)) \cdot y'(t) = \nabla V(y(t)) \cdot f(t) \underset{(<)}{\leq} 0$$

für jede Lösung  $y$ , die in  $U$  verläuft.

- (2) Erste Integrale sind schwache Lyapunov-Funktionen.

**Satz 6.3** Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitz-stetig,  $y_s$  Ruhelage,  $\bar{y}_s$  zugehörige stationäre Lösung.

Sei  $V : U^{\text{offen}} \rightarrow \mathbb{R}$  schwache Lyapunov-Funktion der DGL  $y' = f(y)$  für die Ruhelage  $y_s$ ,  $y_s \in U$ .

Es gelte weiterhin:

$$V(y_s) < V(y) \quad \forall y \in U \setminus \{y_s\}.$$

Dann ist  $\bar{y}_s$  stabil.

**Beweis:** O.B.d.A.  $y_s = 0$  und  $V(0) = 0$ .

(denn:  $\bar{y}_s$  stabile Lösung von  $y' = f(y) \iff 0$  stabile Lösung von  $y' = \tilde{f}(y)$ ,  $\tilde{f}(y) = f(y + y_s)$  und  $\tilde{V}(y) = V(y + y_s) - V(y_s)$  ist schwache Lyapunov-Funktion von  $y' = \tilde{f}(y)$  für die Ruhelage 0 und  $\tilde{V}$  besitzt ein striktes Minimum 0 in 0)

Sei  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $B_\varepsilon(0) \subseteq U$ .

Definiere  $m = m(\varepsilon) = \min \{V(y); \|y\| = \varepsilon\} > 0$  nach Voraussetzung. Da  $V$  stetig,  $V(0) = 0$ , existiert  $0 < \delta < \varepsilon$  mit

$$0 \leq V(y) \leq \frac{m}{2} \quad \forall y \in \overline{B_\delta(0)}.$$

Sei nun  $y_0 \in \overline{B_\delta(0)}$  und  $y$  zugehörige maximale Lösung des rechtsseitigen AWP's

$$\begin{cases} y'(x) = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad x \geq 0.$$

Sei  $T^* := \sup \{T > 0, \|y(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, T[ \}$

Angenommen  $T^* < \infty$ .

Dann folgt aus der Stetigkeit der Lösung:  $\|y(T^*)\| = \varepsilon$ . Da  $t \mapsto V(y(t))$  monoton fallend auf  $[0, T^*]$  ist, folgt

$$m \leq V(y(T^*)) \leq V(y_0) \leq \frac{m}{2}. \quad \nmid \text{ da } m > 0.$$

Folglich  $T^* = \infty$  und 0 ist stabil.

q.e.d.

20.12.'06

### Beispiel:

Noch einmal das Mathematische Pendel:

$$y'' = -g \cdot \sin(y)$$

Stabilität der Ruhelage  $(0, 0)$  des zugehörigen DGL-Systems

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -g \cdot \sin(y) \end{cases} \quad (*)$$

Erstes Integral:  $E(y, z) = \frac{z^2}{2} - g \cdot \cos(y)$ ,  $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ , ist also schwache Lyapunov-Funktion von  $(*)$ . Außerdem gilt:

$$E(0, 0) = -g < E(y, z), \quad \forall (y, z) \in ]-2\pi, 2\pi[ \times \mathbb{R}$$

Es folgt mit dem Satz 6.3:  $(0, 0)$  ist stabil (aber nicht asymptotisch stabil, da keine Energie, z.B. durch Reibung verloren geht.)

**Satz 6.4** Voraussetzungen wie in Satz 6.3, allerdings sei nun  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine starke Lyapunov-Funktion der DGL für die Ruhelage  $y_s$ . Weiter gelte:

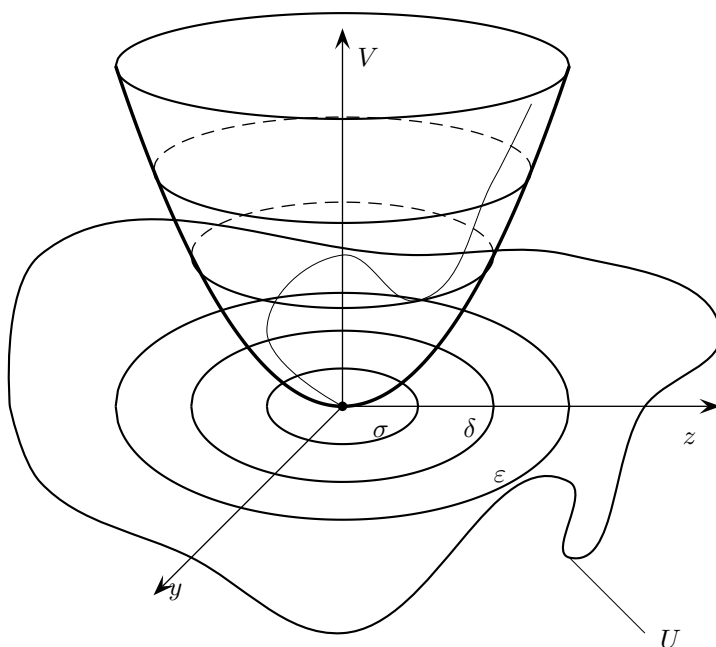
$$V(y_s) < V(y) \quad \forall y \in U \setminus \{y_s\}.$$

Dann ist  $\bar{y}_s$  asymptotisch stabil.

**Beweis:** O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $y_s = 0$ ,  $V(0) = 0$ . Nach Satz 6.3 gilt, dass 0 unter der Voraussetzung von 6.2 stabil ist.

Sei  $\varepsilon > 0$  mit  $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset U$ , und sei  $0 < \delta < \varepsilon$  gemäß der Stabilität von 0 gewählt, d.h.:

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^N \text{ mit } \|y_0\| < \delta \text{ gilt: } \begin{cases} \text{die Lösung des AWP's } \begin{cases} y'(x) = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \text{ existiert } \forall x \geq 0 \\ \text{und } \|y(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \geq 0 \end{cases}$$



Sei nun  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  mit  $\|y_0\| < \delta$  und  $y$  zugehörige Lösung des AWP's.

Nach Voraussetzung ist die Funktion

$$x \in [0, +\infty[ \mapsto V(y(x))$$

strikt monoton fallend. Außerdem ist  $V(y) \geq 0$ ,  $\forall y \in U$ . Somit existiert

$$V_\infty := \lim_{x \rightarrow \infty} V(y(x)).$$

Angenommen  $V_\infty > 0$ . Da  $V(0) = 0$  und  $V$  stetig, existiert  $0 < \sigma < \delta$  so, dass

$$0 < V(y) < V_\infty \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \text{ mit } \|y\| < \sigma.$$

Also folgt  $\sigma \leq \|y(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \geq 0$ . Da  $K_{\sigma, \varepsilon} := \{y \in \mathbb{R}^N; \sigma \leq \|y\| \leq \varepsilon\}$  kompakt und  $y \in U \mapsto \nabla V(y) \cdot f(y)$  stetig ist, nimmt  $\nabla V(\cdot) \cdot f(\cdot)$  Maximum und Minimum auf  $K_{\sigma, \varepsilon}$  an und es gilt:

$$m := \max_{y \in K_{\sigma, \varepsilon}} \nabla V(y) \cdot f(y) < 0.$$

Dann ist aber

$$V(y(x)) - V(y_0) = \int_0^x \frac{d}{ds} V(y(s)) ds = \int_0^x \overbrace{\nabla V(y(s)) \cdot f(s)}^{\leq m} ds \leq m \cdot x \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{V(y(x))}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} V_\infty (>0)} \leq \underbrace{V(y_0) + m \cdot x}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty, \text{ da } m < 0} \quad \nexists$$

Folglich ist  $V_\infty = 0$ .

Da  $\overline{B_\varepsilon(0)}$  kompakt ist (denn  $\dim(X) < \infty$ !) und  $\{y(x), x \geq 0\} \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$ , besitzt jede Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ ,  $x_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} +\infty$  eine Teilfolge  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_{n_k} \rightarrow \infty$  so, dass  $\{y(x_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  für  $k \rightarrow \infty$  konvergent gegen ein Element  $y_\infty \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ . Es folgt

$$0 = V_\infty = \lim_{x \uparrow \infty} V(y(x)) = \lim_{x_{n_k} \uparrow \infty} V(y(x_{n_k})) \stackrel{V \text{ ist stetig}}{=} V(y_\infty).$$

Da  $y_\infty \in \overline{B_\varepsilon(0)}$  und  $V(y) > V(0) = 0 \quad \forall y \in \overline{B_\varepsilon(0)} \setminus \{0\}$ , folgt  $y_\infty = 0$ . Da die Teilfolge beliebig ist, folgt für die gesamte Folge  $y(x_n) \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0$ , und somit  $\lim_{x \uparrow \infty} y(x) = 0$ , d.h. 0 ist asymptotisch stabil. q.e.d.

### Beispiele:

1)

$$y' = -z - y^3$$

$$z' = y - z^3.$$

Offensichtlich gilt:  $(0, 0) = y_s$  ist Ruhelage.

$$f(y, z) = \begin{pmatrix} -z - y^3 \\ y - z^3 \end{pmatrix}, \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2, \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$$

$$J_f[(y, z)] = \begin{pmatrix} -3y^2 & -1 \\ 1 & -3z^2 \end{pmatrix}, \quad J_f[(0, 0)] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{EWe } \pm i$$

$\Rightarrow$  keine Aussage mit dem Prinzip der linearisierten Stabilität möglich.

Suche nun Lyapunov-Funktion. Versuche

$$V(y, z) = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

$$V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2), \quad V(0, 0) \leq V(y, z) \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad (*)$$

und  $\nabla V(y, z) \cdot f(y, z) = (y, z) \cdot \begin{pmatrix} -z - y^3 \\ y - z^3 \end{pmatrix} = -yz - y^4 + yz - z^4 < 0 \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$

$\Rightarrow V$  ist starke Lyapunov-Funktion und erfüllt (\*).  $\xRightarrow{\text{Satz 6.4}} (0, 0)$  ist asymptotisch stabil.

2) **mathematisches Pendel mit Reibung** Klassisches Modell (lineare Reibungskraft)

$$y'' = - \underbrace{ky'}_{\text{Reibungskraft}} - g \sin(y), \quad k > 0$$

Dabei ist die Reibung proportional zur Geschwindigkeit und ihr entgegengesetzt.

Allgemein ist eine Reibungskraft von der Form:

$$h(y') \text{ mit } h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad h(0) = 0 \quad h(r) \cdot r > 0 \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Betrachten wir hier einmal die kubische Reibungskraft:  $h(r) = kr^3$ . Das zugehörige DGL-System 1. Ordnung ist dann:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -kz^3 - g \sin(y) \end{cases}$$

Ruhelage:  $(0, 0)$ .

Suche Lyapunov-Funktion: guter Kandidat: Energiefunktional

$$E(y, z) = \frac{z^2}{2} - g \cos(y), \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} & - \text{ist } \mathcal{C}^1\text{-Funktion auf } \mathbb{R}^2 \\ & - \underbrace{\nabla E(y, z)}_{=g \sin(y), z} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} z \\ -kz^3 - g \sin(y) \end{pmatrix}}_{=f(y, z)} = -kz^4 \leq 0 \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Es folgt:  $E$  ist eine schwache Lyapunov-Funktion, aber da  $\nabla E(y, z) \cdot f(y, z) = 0$  auf  $\mathbb{R} \times \{0\}$  ist  $E$  keine starke Lyapunov-Funktion. Da  $E$  in  $(0, 0)$  ein lokales, striktes Minimum besitzt, ist die Ruhelage  $(0, 0)$  stabil.

Über die asymptotische Stabilität der Ruhelage  $(0, 0)$  kann zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch keine Aussage getroffen werden, gleichwohl wir aus physikalischen Gründen natürlich erwarten, dass im Modell mit Reibung die Ruhelage  $(0, 0)$  asymptotisch stabil ist.

**Definition 6.5** Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitz-stetig. Eine Teilmenge  $T \subset D$  heißt Trajektorie (oder Orbit/Bahn) von  $y' = f(y)$ , falls es eine maximale Lösung  $y : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^N$  der DGL  $y' = f(y)$  gibt, mit  $T = \{y(x); x \in I_{\max}\}$ .

Falls  $y_0 \in D$  und  $y$  maximale Lösung des AWP's

$$\begin{cases} y'(x) = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

dann heißt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(y_0) &= \{y(x); x \in I_{\max}\} && \text{die Trajektorie durch } y_0 \\ \mathcal{O}^+(y_0) &= \{y(x); x \in I_{\max}, x \geq 0\} && \text{die positive Halbtrajektorie durch } y_0 \\ \mathcal{O}^-(y_0) &= \{y(x); x \in I_{\max}, x \leq 0\} && \text{die negative Halbtrajektorie durch } y_0 \end{aligned}$$

### Bemerkung:

Die Trajektorien einer skalaren, autonomen DGL  $y' = f(y)$  sind entweder einelementige Mengen d.h.  $\{y_s\}$  mit  $y_s$  Nullstelle von  $f$ , oder aber offene, beschränkte oder unbeschränkte Intervalle.

Allgemeiner gilt:

**Satz 6.5** Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitz-stetig,  $y_0 \in D$ ,  $y$  zugehörige maximale Lösung des AWP's

$$\begin{cases} y'(x) = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

dann gibt es eine der 3 folgenden Möglichkeiten:

$$1. I_{\max} = \mathbb{R}, y(x) \equiv y_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0 \text{ Ruhelage von } f \text{ und}$$

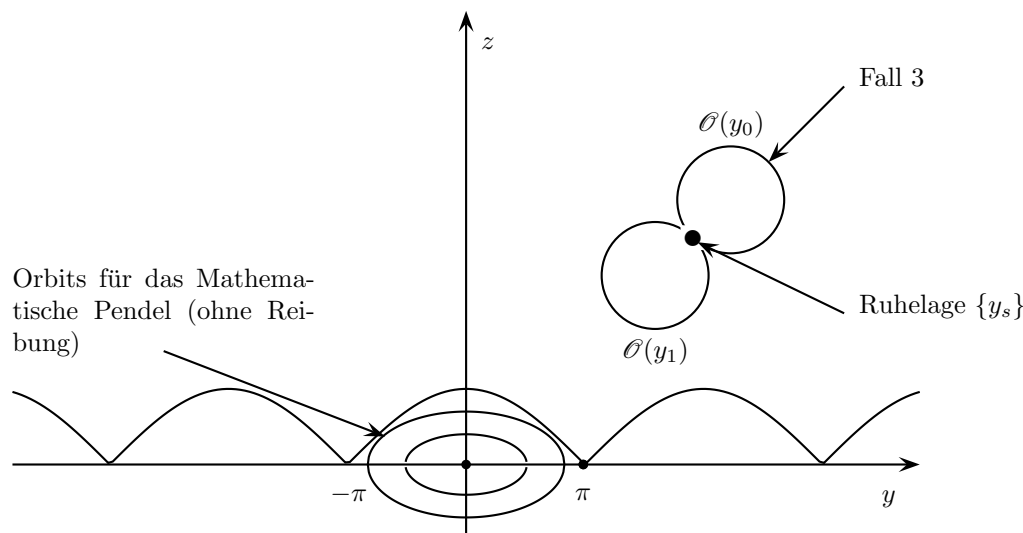
$$\mathcal{O}(y_0) = \mathcal{O}^+(y_0) = \mathcal{O}^-(y_0) = \{y_0\}$$

2.  $I_{\max} = \mathbb{R}$  und  $y$  ist nicht konstant, aber periodisch und

$$\mathcal{O}(y_0) = \mathcal{O}^+(y_0) = \mathcal{O}^-(y_0) \quad \text{ist eine geschlossene Kurve im } \mathbb{R}^N$$

3. Die maximale Lösung  $y : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist injektiv, also ist  $\mathcal{O}(y_0)$  eine doppeltpunktfreie Kurve im  $\mathbb{R}^N$  ohne ihre Endpunkte.

**Beispiel:**



Man kann den ganzen Raum durch (sich nicht überschneidende) Trajektorien abdecken (das liegt an der Eindeutigkeit der Lösung des AWP und daran, dass für jeden Punkt  $y_0 \in D$  eine Lösung des zugehörigen AWP existiert.).

**Bemerkung:**

Im Fall  $N = 1$  (skalare DGL 1. Ordnung) kann der Fall 2. nicht auftreten: es existieren keine periodischen Lösungen. Eine Lösung der skalaren DGL  $y' = f(y)$  ist entweder konstant ( $\equiv$  eine Nullstelle von  $f$ ), oder aber streng monoton wachsend oder fallend auf dem gesamten maximalen Existenzintervall.

08.01.'07

**Satz 6.6** Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitz-stetig,  $y_0, y_1 \in D$ . Dann gilt:

$$\mathcal{O}(y_0) = \mathcal{O}(y_1) \quad \text{oder} \quad \mathcal{O}(y_0) \cap \mathcal{O}(y_1) = \emptyset.$$

**Beweis:** Angenommen, es existiert ein  $w \in \mathcal{O}(y_0) \cap \mathcal{O}(y_1)$ . D.h. es existiert  $x_1 \geq 0$  und  $x_2 \geq 0$ , so dass

$$y(x_1; y_0) = w = y(x_2; y_1),$$

wobei für  $z \in D$ ,  $y(\cdot; z)$  die maximale Lösung des AWP

$$\begin{cases} y'(x) = f(y) \\ y(0) = z \end{cases}$$

bezeichnet.

Wegen der Translationsinvarianz der autonomen DGL  $y' = f(y)$  ist dann:

$$y(\cdot + x_1; y_0) = y(\cdot; w) = y(\cdot + x_2; y_1)$$

die maximale Lösung des AWP's zum Anfangswert  $w$ ,  $I_{\max}(w) = -x_1 + I_{\max}(y_0) = -x_2 + I_{\max}(y_1)$ . Somit:

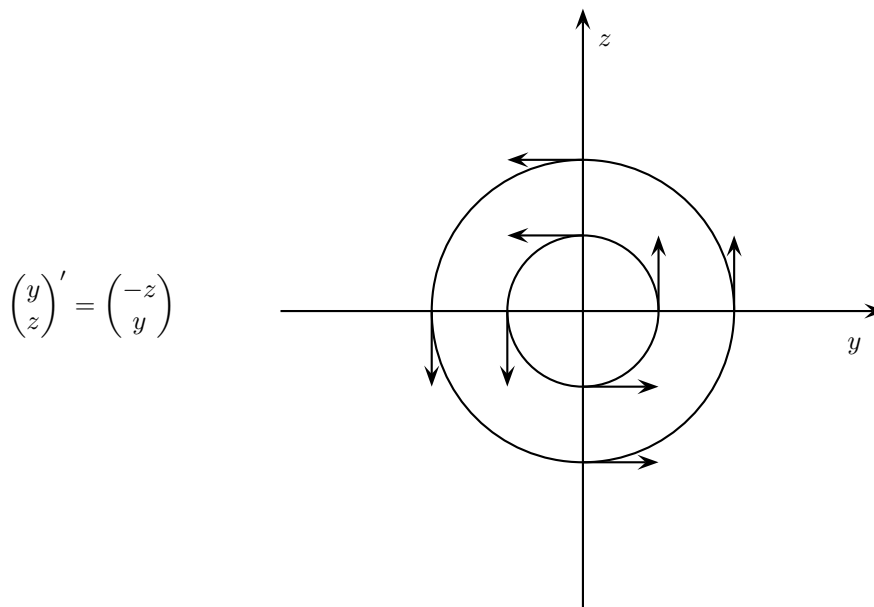
$$\begin{aligned}\mathcal{O}(y_0) &= \{y(x; y_0); \quad x \in I_{\max}(y_0)\} \\ &= \{y(x + x_1; y_0); \quad x \in -x_1 + I_{\max}(y_0)\} \\ &= \{y(x; w); \quad x \in I_{\max}(w)\} \\ &= \mathcal{O}(w)\end{aligned}$$

Analog:  $\mathcal{O}(y_1) = \mathcal{O}(w)$ , also  $\mathcal{O}(y_0) = \mathcal{O}(y_1)$ . q.e.d.

### Bemerkung:

Der Phasenraum ist demnach eine disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen von Trajektorien. Die Trajektorien besitzen eine natürliche Orientierung, die wachsender  $x$ -Werte ( $x$ : unabhängige Variable). Der Tangentialvektor an die durch einen Punkt  $y \in D$  verlaufende Trajektorie ist  $f(y)$ . Dies erlaubt die Konstruktion von Richtungsfeldern im Phasenraum.

### Beispiel:



**Bemerkung:** Diese DGL ist ein Hamiltonsches System und die Funktion  $E(y, z) = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$  ist ein erstes Integral. Da die Trajektorien in den Niveaumengen von  $E$  liegen, verlaufen die Trajektorien, wie das Richtungsfeld vermuten lässt, kreisförmig um den Nullpunkt.

Allgemeiner: Bestimmung von Trajektorien nicht-stationärer Lösungen einer 2-dimensionalen DGL:

$$\begin{aligned}y' &= f(y, z) \\ z' &= g(y, z)\end{aligned} \quad f, g : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{lokal Lipschitz-stetig.}$$

Sei also  $(y, z) : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine maximale nicht-stationäre Lösung der DGL. Dann gilt für jedes  $x \in I_{\max}$ :

$$\text{entweder } f(y(x), z(x)) \neq 0 \quad \text{oder } g(y(x), z(x)) \neq 0.$$

(Achtung! es kann verschiedene Punkte  $x_1, x_2 \in I_{\max}$  geben, so dass  $f(y(x_1), z(x_1)) = 0$  und  $f(y(x_2), z(x_2)) = 0$ . So auch in Beispiel 1.)

Sei  $I \subset I_{\max}$  ein Teilintervall, so dass  $f(y(x), z(x)) \neq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow y : I \rightarrow y(I)$  ist dann eine Bijektion und der (Teil)Orbit kann umparametrisiert werden:

$$\{(y(x), z(x)); \quad x \in I\} = \{(s, z \circ y^{-1}(s)); \quad s \in y(I)\}$$

und  $\varphi = z \circ y^{-1}$  ist Lösung der skalaren DGL:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} z \circ y^{-1}(s) = \frac{z'(y^{-1}(s))}{y'(y^{-1}(s))} = \frac{g\left(\overbrace{y(y^{-1}(s))}^s, \overbrace{z(y^{-1}(s))}^{\varphi(s)}\right)}{f\left(y(y^{-1}(s)), z(y^{-1}(s))\right)}$$

d.h.

$$\varphi' = \frac{g(s, \varphi(s))}{f(s, \varphi(s))}.$$

Wenn diese skalare DGL explizit lösbar ist, dann ergibt sich der Verlauf des entsprechenden (Teil-)Orbits. Analog argumentiert dann, wenn  $g(y, z)(x) \neq 0$  auf  $I$  (vertausche die Rollen von  $y$  und  $z$ .)

Obige Methode im konkreten Beispiel: 
$$\begin{cases} y' = z(1 - y^2 - z^2) \\ z' = y(1 - y^2 - z^2) \end{cases}$$

Ruhelagen:  $\{(0, 0)\} \cup \underbrace{S_1(0)}_{\text{Einheitssphäre}}$

Berechnung nicht-stationärer Lösungen

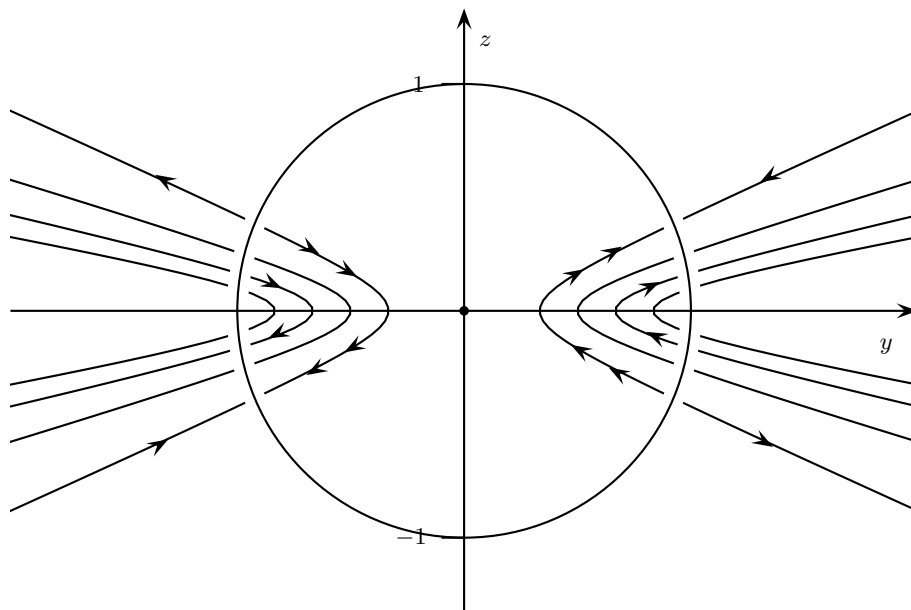
Angenommen  $(y, z)$  maximale Lösung und  $y' = z(1 - y^2 - z^2) \neq 0$  auf einem Teilintervall  $I$ . Dann erhalten wir als DGL:

$$\begin{aligned} \varphi'(s) = \frac{s}{\varphi(s)} &\implies \varphi' \varphi = s \implies \frac{\varphi^2}{2} = \frac{s^2}{2} + C, & C \in \mathbb{R} & (*) \\ &\implies \varphi = \pm \sqrt{s^2 + C} \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Parametrisiert man die Identität  $(*) \quad \frac{\varphi^2}{2} = \frac{s^2}{2} + C \quad (\varphi = z \circ y^{-1})$  wieder um, dann ergibt sich in den alten Variablen:  $\frac{z^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C$ , d.h. es ergibt sich auf diesem Weg ein erstes Integral für unsere DGL  $E(y, z) = \frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{2}$

Der Verlauf der Trajektorien ist im folgenden Bild angedeutet:



(vergleiche auch die 10. Übung: Berechnung eines ersten Integrales für das Räuber-Beute-Modell.)

**Definition 6.6** Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitz-stetig.

- i) Sei  $y_0 \in D$ . Dann heißt  $z \in D$   $\omega$ -Grenzwert von  $y_0$ , wenn es eine gegen  $+\infty$  strebende Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  gibt, mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n; y_0) = z$ . Die Menge aller  $\omega$ -Grenzwerte heißt  $\omega$ -Grenzmenge/ $\omega$ -Limesmenge von  $y_0$  und wird mit  $\omega(y_0)$  bezeichnet.
- ii) Sei  $y_0 \in D$ . Dann heißt  $z \in D$   $\alpha$ -Grenzwert von  $y_0$ , wenn es eine gegen  $-\infty$  strebende Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  gibt, mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n; y_0) = z$ . Die Menge aller  $\alpha$ -Grenzwerte heißt  $\alpha$ -Grenzmenge/ $\alpha$ -Limesmenge von  $y_0$  und wird mit  $\alpha(y_0)$  bezeichnet.
- iii) Eine Teilmenge  $\mathcal{M} \subseteq D$  heißt invariant (respektive positiv-/negativ invariant), wenn  $\forall y_0 \in \mathcal{M}$  gilt:  $\mathcal{O}(y_0) \subseteq \mathcal{M}$  (respektive  $\mathcal{O}^+(y_0) \subseteq \mathcal{M} / \mathcal{O}^-(y_0) \subseteq \mathcal{M}$ ).

**Bemerkung:**

1. Jede (positive-/negative Halb-) Trajektorie ist (positiv-/negativ-) invariant. (Dies folgt aus der Translationsinvarianz von Lösungen)
2. Wenn  $A, B \subseteq D$  zwei (positiv-/negativ-) invariante Teilmengen sind, dann ist auch  $A \cup B$  (positiv-/negativ-) invariant.  
Insbesondere besitzt jede Teilmenge  $\mathcal{M} \subseteq D$  eine größte (positiv-/negativ-) invariante Teilmenge.
3. Ist  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lyapunov-Funktion für  $y' = f(y)$ , dann ist jede der Subniveaumengen

$$N_c = \{y \in D; \quad V(y) \leq c\}$$

positiv invariant.

**Beweis:**  $y_0 \in N_c, \quad V(y_0) \leq c$ . Zu zeigen:  $\mathcal{O}(y_0) \subset N_c$ , d.h. zu zeigen ist:  $y(\cdot; y_0) \in N_c \quad \forall x \in I_{\max}$ . Dies ist aber klar, da  $V$  entlang  $y$  fällt und somit

$$V(y(x; y_0)) \leq V(y_0) \leq c \quad \forall x \in I_{\max} \quad x \geq 0,$$

somit  $y(x; y_0) \in N_c \quad \forall x \in I_{\max}, \quad x \geq 0$ .

q.e.d.



SATZ 6.7 EIGENSCHAFTEN VON  $\omega$ -GRENZMENGE  $N$ 

Übliche Voraussetzungen.

Wenn  $\mathcal{O}^+(y_0)$  beschränkt und  $\overline{\mathcal{O}^+(y_0)} \subset D$ , dann gilt:

$\omega(y_0) \neq \emptyset$ ,  $\omega(y_0)$  ist kompakt und invariant. Ferner gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -\infty}} \text{dist}(y(x; y_0), \omega(y_0)) = 0 \quad (*)$$

**Beweis:**

\* Betrachte  $\{y(n; y_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Da  $\{y(n; y_0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{O}^+(y_0)}$  und  $\overline{\mathcal{O}^+(y_0)}$  kompakt, besitzt  $\{y(n; y_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge

$$y(n_k; y_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_\infty, \quad \text{dann ist aber } y_\infty \in \omega(y_0) \text{ und somit } \omega(y_0) \neq \emptyset.$$

**Bemerkung:**

Das maximale Existenzintervall der Lösung  $y(\cdot; y_0) \supset [0, \infty[$ , denn wäre  $I_{\max} = [0, I^+[$ ,  $I^+ < \infty$ , dann müsste entweder gelten:

$$\limsup_{x \uparrow I^+} \|y(x; y_0)\| = +\infty,$$

was nicht der Fall ist, da  $\mathcal{O}^+(y_0)$  beschränkt ist, oder aber es müsste gelten, dass

$$\liminf_{x \uparrow I^+} \text{dist}(y(x; y_0); \partial D) = 0,$$

was ebenfalls ausgeschlossen ist, da  $\overline{\mathcal{O}^+(y_0)} \subset D^{\text{offen}}$ . Somit können wir also tatsächlich die Folge  $\{y(n; y_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  betrachten.

\* Da  $\omega(y_0) \subseteq \overline{\mathcal{O}^+(y_0)}$ , folgt sofort  $\omega(y_0)$  ist beschränkt.

q.e.d.

10.01.'07

\*  $\omega(y_0)$  ist abgeschlossen : Dazu zeigen wir, dass gilt:

$$\omega(y_0) = \bigcap_{x \geq 0} \{y(s; y_0); s \geq x\} = \bigcap_{x \geq 0} \overline{\mathcal{O}^+(y(x; y_0))}$$

**Beweis:**

„ $\subseteq$ “: Sei  $\eta \in \omega(y_0)$ ; dann existiert  $x_n \rightarrow \infty$  so, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n; y_0) = \eta.$$

Sei  $x \geq 0$  beliebig. Dann existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, dass  $x_n \geq x \quad \forall n \geq n_0$ . Dann gilt aber:

$$y(x_n; y_0) \in \mathcal{O}^+(y(x; y_0)) \quad \forall n \geq n_0.$$

Da  $y(x_n; y_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta$ , folgt:  $\eta \in \overline{\mathcal{O}^+(y(x; y_0))}$ . Da  $x \geq 0$  beliebig  $\implies \eta \in \bigcap_{x \geq 0} \overline{\mathcal{O}^+(y(x; y_0))}$ .

„ $\supseteq$ “: Sei  $\eta \in \bigcap_{x \geq 0} \overline{\mathcal{O}^+(y(x; y_0))} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{O}^+(y(n; y_0))}$ . Dann gilt also:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \geq n$  mit

$$\|\eta - y(x_n; y_0)\| < \frac{1}{n}.$$

Es folgt:  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  und  $y(x_n; y_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta$ , d.h.  $\eta \in \omega(y_0)$ .

q.e.d.

\*  $\omega(y_0)$  ist invariant : Sei  $\eta \in \omega(y_0)$ ; es ist zu zeigen, dass  $\mathcal{O}(\eta) \subseteq \omega(y_0)$ , d.h. dass gilt:

$$y(x; \eta) \in \omega(y_0) \quad \forall x \in I_{\max}(\eta).$$

Sei also  $x_0 \in I_{\max}(\eta)$ . Da  $\eta \in \omega(y_0)$ , existiert  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ ,  $x_n \rightarrow \infty$ , mit  $y(x_n; y_0) \rightarrow \eta$ .

Betrachte nun die Folge  $\tilde{x}_n := x_0 + x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $\tilde{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  und

$$\begin{aligned} y(\tilde{x}_n; y_0) &= y(x_0 + x_n; y_0) \\ &= y\left(x_0; \underbrace{y(x_n; y_0)}_{\rightarrow \eta}\right) \quad (\text{wegen der Translationsinvarianz}) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(x_0, \eta) \end{aligned}$$

da die Lösung des AWP's stetig vom Anfangswert abhängt. Es folgt:  $y(x_0, \eta) \in \omega(y_0)$ , was zu zeigen war.

Es bleibt (\*) zu zeigen. Angenommen (\*) gilt nicht. Dann existiert  $\varepsilon > 0$  und eine Folge  $x_n \rightarrow \infty$ , so dass

$$\text{dist}(y(x_n, y_0), \omega(y_0)) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (6.9)$$

Die Folge  $\{y(x_n; y_0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{O}^+(y_0)}$  und  $\overline{\mathcal{O}^+(y_0)}$  ist kompakt, also existiert eine Teilfolge  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$  so, dass  $y(x_{n_k}; y_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_\infty$  für ein gewisses  $y_\infty$ . Aber dann gilt:  $y_\infty \in \omega(y_0)$ .

Wegen (6.9) und der Stetigkeit der Distanz-Funktion gilt aber auch  $\text{dist}(y_\infty, \omega(y_0)) \geq \varepsilon$ . Widerspruch!   
 q.e.d.

#### SATZ 6.8 (INVARIANZPRINZIP VON LA SALLE)

Sei  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitz-stetig,  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lyapunov-Funktion der DGL  $y' = f(y)$ . Dann gilt für alle  $y_0 \in D$ :

$$\omega(y_0) \subseteq \{y \in D; \nabla V(y) \cdot f(y) = 0\}.$$

**Beweis:** Sei  $y_0 \in D$ . Wenn  $\omega(y_0) = \emptyset$ , ist nichts zu zeigen. Sei also  $\eta \in \omega(y_0)$ . Angenommen es gilt:

$$\nabla V(\eta) \cdot f(\eta) < 0. \quad (*)$$

Wie üblich bezeichne  $y(\cdot; \eta)$  die maximale Lösung des AWP's

$$\begin{cases} y'(x) = f(y) \\ y(0) = \eta \end{cases}$$

Betrachte nun die Funktion  $v(x) := V(y(x; \eta))$ ,  $x \in I_{\max}(\eta)$ . Nach (\*) gilt:

$$v'(0) = \nabla V(\eta) \cdot f(\eta) < 0.$$

Da  $x \mapsto v'(x) = \nabla V(y(x; \eta)) \cdot f(y(x; \eta))$  stetig, existiert eine Umgebung  $[0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , so dass  $v'(x) < 0 \quad \forall x \in [0, \varepsilon]$ . Insbesondere existiert also  $x_0 \in [0, \varepsilon]$  mit:

$$v(x_0) = \boxed{V(y(x_0; \eta)) \underset{\neq}{<} V(\eta)} = v(0).$$

Andererseits gilt:  $V$  ist fallend entlang der Lösung  $y(\cdot; y_0)$ . Da  $\eta \in \omega(y_0)$ , existiert  $x_n \rightarrow \infty$  mit  $y(x_n; y_0) \rightarrow \eta$ .

Sei nun  $x \geq 0$  beliebig. Dann existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \geq x$  und somit  $V(y(x, y_0)) \geq V(y(x_n, y_0))$ . Mit  $n \rightarrow \infty$  folgt wegen der Stetigkeit von  $V$ :

$$V(y(x, y_0)) \geq V(\eta) \quad \forall x \geq 0 \quad (6.10)$$

Da  $y(x + x_n; y_0) = \underbrace{y(x; y(x_n, y_0))}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(x; \eta)}^{\rightarrow \eta}$  (Translationsinvarianz + stetige Abhängigkeit vom Anfangswert) folgt aus (6.10) angewendet mit  $x = x_0 + x_n$ , da  $V$  stetig mit  $n \rightarrow \infty$ :

$$V(y(x_0, \eta)) \geq V(\eta).$$

Da auch  $V(y(x_0, \eta)) < V(\eta)$ , folgt der Widerspruch. q.e.d.

**Korollar 6.1**  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitz-stetig,  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  Lyapunov-Funktion von  $y' = f(y)$ ,  $y_s \in D$  eine Ruhelage,

$$V(y_s) < V(y) \quad \forall y \neq y_s \quad \text{in einer Umgebung von } y_s.$$

Dann gilt: Wenn  $\{y_s\}$  die größte positiv invariante Teilmenge von  $\{y \in D; \nabla V(y) \cdot f(y) = 0\}$ , dann ist  $y_s$  asymptotisch stabil.

**Beweis:** Wenn  $V$  eine starke Lyapunov-Funktion ist, dann folgt sofort  $y_s$  ist asymptotisch stabil.

Interessant ist die Aussage also nur, wenn  $V$  eine schwache Lyapunov-Funktion ist. Dann folgt aus der Voraussetzung, dass  $y_s$  stabil ist. Für  $\varepsilon > 0$  beliebig existiert also  $\delta > 0$ , so dass  $\forall y_0 \in D : \|y_0 - y_s\| < \delta$  gilt:

$$\text{das AWP } \begin{cases} y'(x) = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{besitzt eine (eindeutige) Lösung } y(x; y_0) \text{ auf } [0, +\infty[, \\ \text{und } \|y(x; y_0) - y_s\| < \varepsilon \quad \forall x \geq 0. \quad (6.11)$$

Sei  $\varepsilon > 0$  so klein gewählt, dass  $\{y \in D; \|y - y_s\| \leq \varepsilon\} \subset D$  und eine zugehöriges  $\delta > 0$  gewählt, so dass (6.11) gilt. Betrachte dann:  $y_0 \in D$ ,  $\|y_0 - y_s\| < \delta$ .

Dann folgt sofort aus (6.11):  $\mathcal{O}^+(y_0)$  ist beschränkt und  $\overline{\mathcal{O}^+(y_0)} \subset D$ .

Nach Satz 6.7 gilt dann:  $\omega(y_0) \neq \emptyset$  und  $\omega(y_0)$  invariant, insbesondere positiv invariant. Nach Satz 6.8 gilt auch:

$$\omega(y_0) \subset \{y \in D; \nabla V(y) \cdot f(y) = 0\} =: \mathcal{N}.$$

Nach Voraussetzung ist  $\{y_s\}$  die größte positiv invariante Teilmenge von  $\mathcal{N}$ . Also folgt dass  $\omega(y_0) = \{y_s\}$ , denn sonst wäre  $\omega(y_0) \cup \{y_s\}$  eine echt größere positiv invariante Teilmenge von  $\mathcal{N}$ . Dann folgt aber

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x; y_0) = y_s,$$

und somit ist  $y_s$  asymptotisch stabil. q.e.d.

### Anwendung auf mathematisches Pendel mit Reibung:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -kz^3 - g \sin(y) \end{cases} \quad \left( \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right)' = f(y, z) = \begin{pmatrix} z \\ -kz^3 - g \sin(y) \end{pmatrix}, \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Bereits gezeigt:

\*  $(0, 0)$  ist Ruhelage

\*  $V(y, z) = \frac{z^2}{2} - g \cos(y)$  ist schwache Lyapunov-Funktion.

\*  $V(0,0) < V(y,z) \quad \forall (y,z) \neq (0,0)$  in einer Umgebung von  $(0,0)$ .

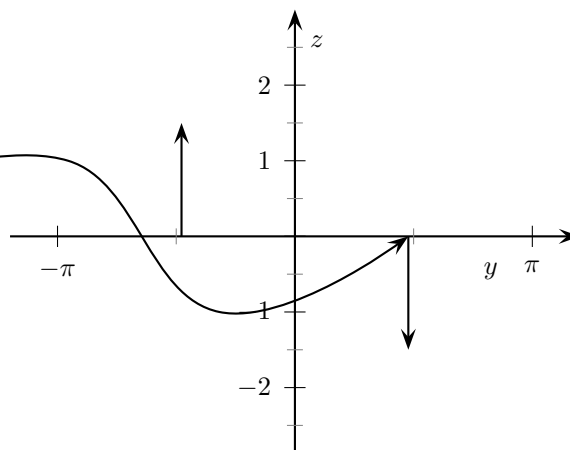
Wir zeigen nun: Es gilt auch:  $\{(0,0)\}$  ist die größte positiv invariante Teilmenge von

$$\begin{aligned} & \{(y,z) \in ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R}; \quad V(y,z) \cdot f(y,z) = 0\} \\ &= \{(y,z) \in ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R}; \quad -kz^3 = 0\} \\ &= ]-\pi, \pi[ \times \{0\} \end{aligned}$$

Sei nämlich  $y \in ]-\pi, \pi[ \quad y \neq 0$ , dann ist:

$$f(y,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \sin(y) \neq 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung läuft aus dem Punkt  $(y,0)$  heraus  $\Rightarrow \{(y,0)\}$  ist nicht invariant.



Also:  $\{(0,0)\}$  ist die größte positiv invariante Teilmenge von

$$\left\{ (y,z) \in \underbrace{]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R}}_{=: \mathcal{U}}; \quad \nabla V(y,z) \cdot f(y,z) = 0 \right\}$$

$\stackrel{1}{\Rightarrow} \quad (0,0)$  ist eine asymptotisch stabile Ruhelage.

### Bemerkung:

Meist wendet man in den Anwendungen wie im obigen Beispiel eine geeignete lokalisierte Fassung von Korollar 6.1 an.

15.01.'07

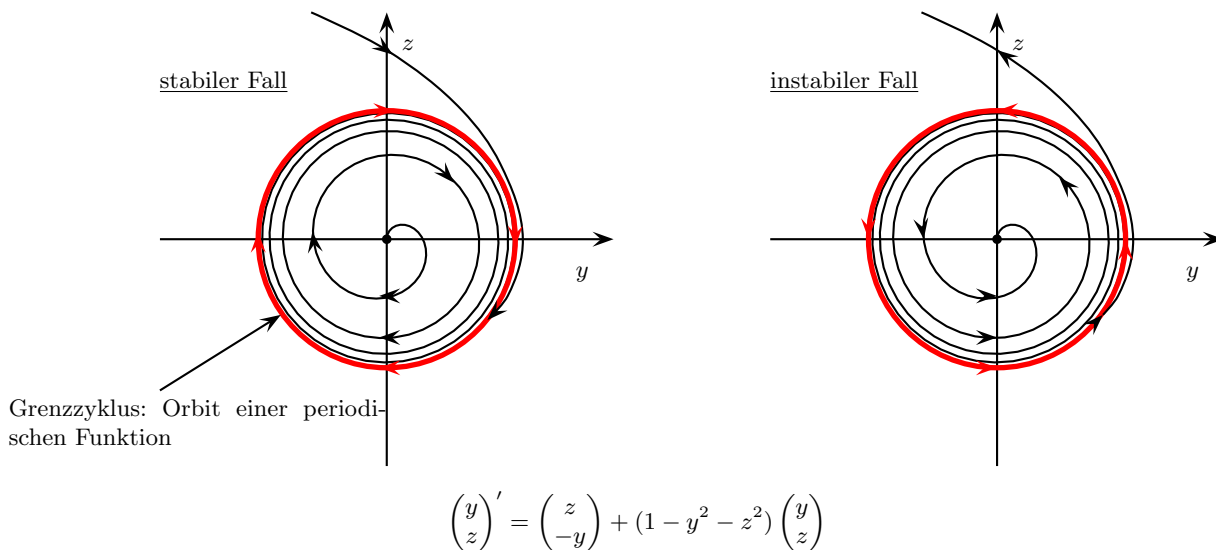
### Abschließende Bemerkung:

Wir haben in diesem Abschnitt nur das einfachste Verhalten von Lösungen, die Konvergenz gegen eine Ruhelage, untersucht.

Lösungen können aber auch gegen **Grenzzyklen** konvergieren, d.h. sich den Orbits von periodischen Lösungen annähern.

### Beispiel:

<sup>1</sup>Folgt mit Korollar 6.1 angewandt mit  $\mathcal{U}$  anstelle von  $D$ .



Allerdings ist die Lokalisierung und die Untersuchung der Stabilität solcher Grenzyklen wesentlich schwieriger als im Falle von Ruhelagen.

Zum Lokalisierungsproblem folgendes partielles Resultat:

**SATZ 6.9 SATZ VON POINCARÉ-BENDIXSON**

$f, g : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lokal Lipschitz-stetig,  $(y_0, z_0) \in D$ , maximale Lösung von

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(y, z) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Wenn  $\overline{\mathcal{O}^+((y_0, z_0))} \subset D$  beschränkt und  $\omega((y_0, z_0))$  keine Ruhelage enthält, dann ist  $\omega((y_0, z_0))$  ein Grenzyklus.

Ein analoges Resultat ist für größere DGL-System ( $N \geq 3$ ) nicht richtig.

Allgemeiner geht man für  $N \geq 3$  zum Studium von so genannten Attraktoren, d.h. invarianten Teilmengen  $A \subset \mathbb{R}^N$  über, die die Eigenschaft haben, dass eine Umgebung  $U$  von  $A$  existiert, so dass  $A$  die Lösung zu Anfangswerten in  $U$  anzieht.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{dist}(y(x; u_0); A) = 0 \quad \forall u_0 \in U.$$

Falls ein solcher Attraktor alle Lösungen zu beliebigen Anfangswerten anzieht, heißt dieser auch globaler Attraktor.

Interessante Fragen:

- Wann existiert ein nicht-trivialer Attraktor/globaler Attraktor?
- Was ist der Anziehungsbereich eines Attraktors?
- Welche Dimension hat der Attraktor?

## Kapitel 7

# Bifurkation: Verzweigung von Ruhelagen

Wir untersuchen parameterabhängige DGL vom Typ:

$$y' = f(y, \alpha) \quad (1) \quad \text{oder} \quad \begin{cases} y' = f(y, z, \alpha) \\ z' = g(y, z, \alpha) \end{cases} \quad (2)$$

wobei  $\alpha \in J^{\text{Intervall}} \subset \mathbb{R}$  ein Parameter ist, und  $f, g$  den Standardvoraussetzungen genügen.

Frage: Wie ändert sich das Phasenportrait in Abhängigkeit vom Parameter  $\alpha$ ?

Klar ist: Eine Variation des Parameters  $\alpha$  führt zu einer quantitativen Veränderung der Lösung und somit des Phasenportraits.

Aber gibt es einen kritischen Punkt, an dem eine abrupte qualitative Veränderung stattfindet, etwa

- \* eine stabile Ruhelage  $y_0(\alpha_0)$  wird zu einer instabilen Ruhelage (oder umgekehrt).
- \* eine Ruhelage geht in mehrere Ruhelagen über
- \* aus einer Ruhelage entsteht ein Grenzzyklus (nur im Falle 2 dimensionaler Systeme).

Ein solcher kritischer Punkt wird dann Verzweigungspunkt/Bifurkationspunkt genannt und die abrupte Veränderung im Phasenportrait Verzweigung/Bifurkation.

### Bemerkung:

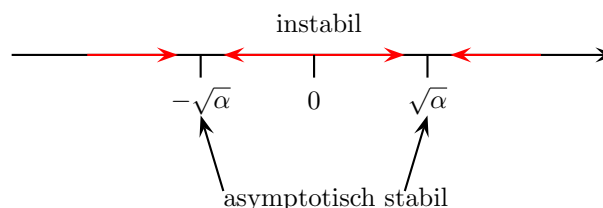
Natürlich ist die Fragestellung auch für DGL-Systeme höherer Dimension interessant. Allerdings ist für  $N \leq 3$  die Anzahl der möglichen Klassifikationen der möglichen Verzweigungen, die auftreten können, nicht bekannt.

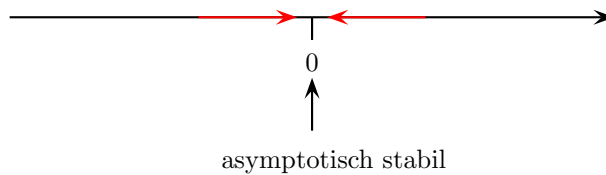
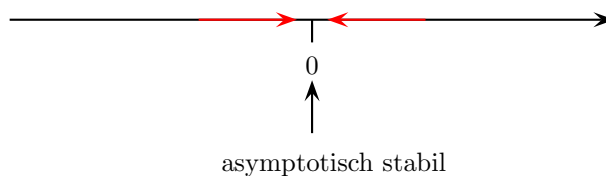
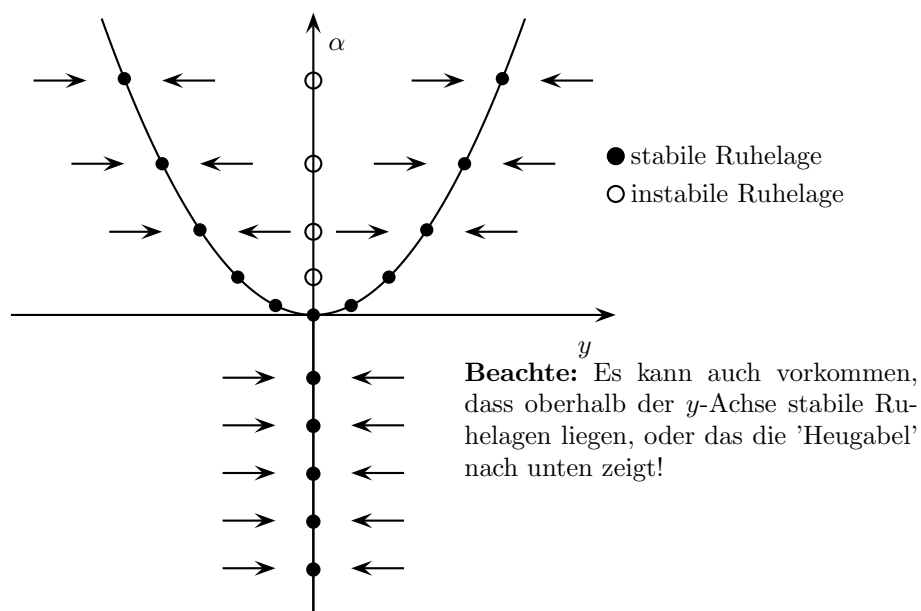
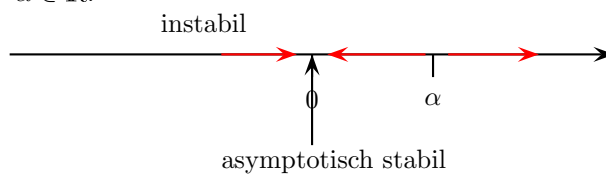
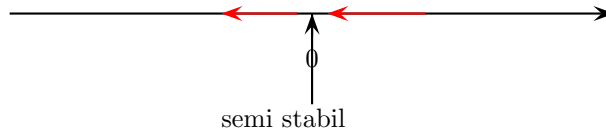
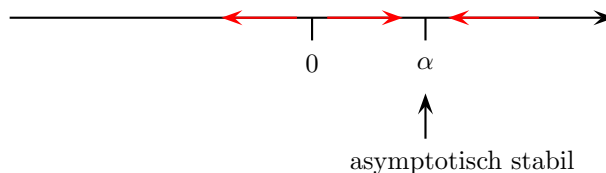
### Beispiel: Verzweigung für skalare DGL vom Typ (1).

1.  $y' = f(y, \alpha) = \alpha y - y^3 = y(\alpha - y^2)$

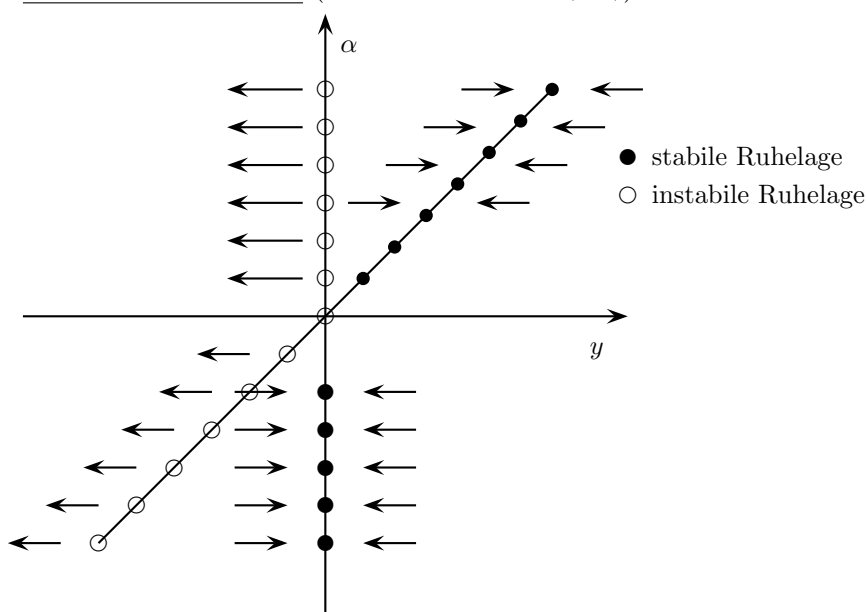
Ruhelage: für

(a)  $\alpha \geq 0$ :  $-\sqrt{\alpha}, 0, \sqrt{\alpha}$



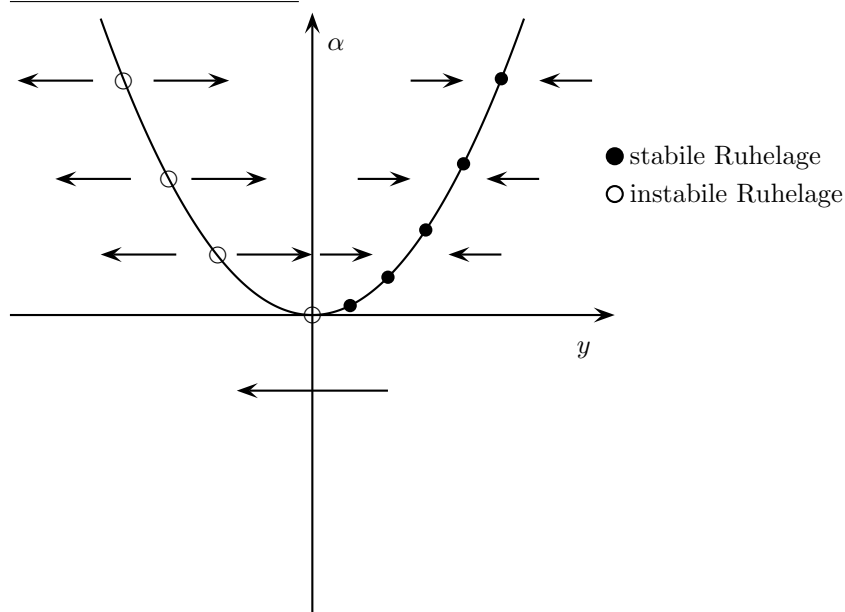
(b)  $\underline{\alpha = 0}$  : einzige Ruhelage: 0(c)  $\underline{\alpha < 0}$  : einzige Ruhelage: 0Also:  $(\alpha, y) = (0, 0)$  ist ein Verzweigungspunkt.Verzweigungsdiagramm in der  $(y, \alpha)$ -Ebene: (Heugabelverzweigung)2.  $y' = f(y, \alpha) = \alpha y - y^2 = y(\alpha - y)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .•  $\underline{\alpha < 0}$  : Ruhelagen: 0,  $\alpha$ •  $\underline{\alpha = 0}$  : einzige Ruhelage: 0•  $\underline{\alpha > 0}$  : Ruhelagen: 0,  $\alpha$ 

Verzweigungsdiagramm: (Verzweigungspunkt:  $(0,0)$ )



3.  $y' = f(y, \alpha) = \alpha - y^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Verzweigungsdiagramm:  $\alpha > 0$ : Ruhelagen:  $\pm\sqrt{\alpha}$  Sattelnodenverzweigung



17.01.'07 Wann ist ein Punkt  $(y_0, \alpha_0)$  kein Verzweigungspunkt?

**Satz 7.1** Gegeben:  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{C}^k(D)$  für  $k \geq 1, (y_0, \alpha_0) \in D$  mit  $f(y_0, \alpha_0) = 0$ . Gilt  $f_y(y_0, \alpha_0) \neq 0$ , so gibt es eine Umgebung  $U \times V$  von  $(y_0, \alpha_0)$  und eine  $\mathcal{C}^k$ -Funktion  $g : V \rightarrow U$  mit  $g(\alpha_0) = y_0$  und  $f(g(\alpha), \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in V$ .

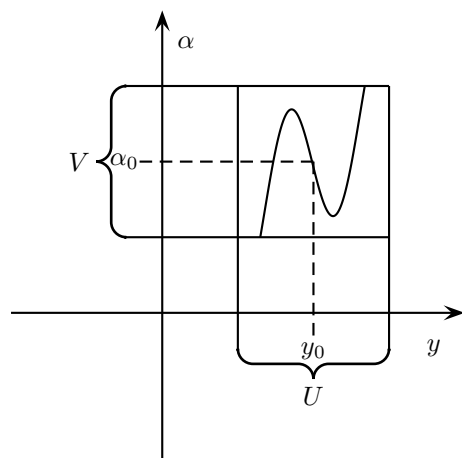
Außer den Ruhelagen  $(g(\alpha), \alpha), \quad \alpha \in V$ , besitzt  $y' = f(y, \alpha)$  keine weiteren Ruhelagen in  $U \times V$ <sup>1</sup>

**Beweis:** Satz über implizite Funktionen.

q.e.d.

<sup>1</sup>Das bedeutet, dass das autonome, nicht parameterabhängige System  $\begin{cases} y' = f(y, z) \\ z' = 0 \end{cases}$  in  $U \times V$  keine weiteren Ruhelagen besitzt.





Wenn  $f_y(y_0, \alpha_0) \neq 0$  dann ist nach Satz 7.1  $(y_0, \alpha_0)$  kein Verzweigungspunkt.

Punkte  $(y_0, \alpha_0)$  mit  $f_y(y_0, \alpha_0) \neq 0$  heißen hyperbolisch.

Entsprechend bezeichnet man Punkte  $(y_0, \alpha_0)$  mit  $f_y(y_0, \alpha_0) = 0$  als nicht-hyperbolisch.

### Bemerkung:

Die Bedingung, dass  $f_y(y_0, \alpha_0) \neq 0$  ist hinreichend dafür, dass in  $(y_0, \alpha_0)$  keine Verzweigung stattfindet, aber nicht notwendig (siehe Übung).

Anders ausgedrückt: Die Bedingung  $f_y(y_0, \alpha_0) = 0$  ist notwendig, aber nicht hinreichend dafür, dass  $(y_0, \alpha_0)$  ein Verzweigungspunkt ist.

O.B.d.A. betrachten wir im Folgenden nur die Ruhelage  $(y_0, \alpha_0) = (0, 0)$ . (Der allgemeine Fall lässt sich durch die Transformation  $y \rightarrow y - y_0$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha - \alpha_0$  darauf zurückführen.)

Wann liegt in einem Verzweigungspunkt eine Sattelverzweigung vor?

Es gelte im Folgenden  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ ,  $D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^2$ , der Punkt  $(0, 0)$  sei nicht-hyperbolische Ruhelage, d.h.

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f_y(0, 0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

**Satz 7.2** Wenn zusätzlich zu  $(*)$  gilt:

$$\begin{aligned} f_\alpha(0, 0) &\neq 0 \\ f_{yy}(0, 0) &\neq 0, \end{aligned}$$

dann gibt es eine Umgebung  $U \times V$  von  $(0, 0)$  und eine  $\mathcal{C}^2$ -Funktion  $h : U \rightarrow V$  mit  $h(0) = 0$  und  $f(y, h(y)) = 0 \quad \forall y \in U$ . Weiter gilt:

(i) Die DGL  $y' = f(y, \alpha)$  besitzt in  $U \times V$  keine weiteren Ruhelagen außer  $\{(y, h(y)); \quad y \in U\}$

(ii)  $h$  besitzt in 0 ein strenges, auf  $U$  globales Extremum,

$$h'(0) = 0, \quad h''(0) = -\frac{f_{yy}(0, 0)}{f_\alpha(0, 0)} \neq 0$$

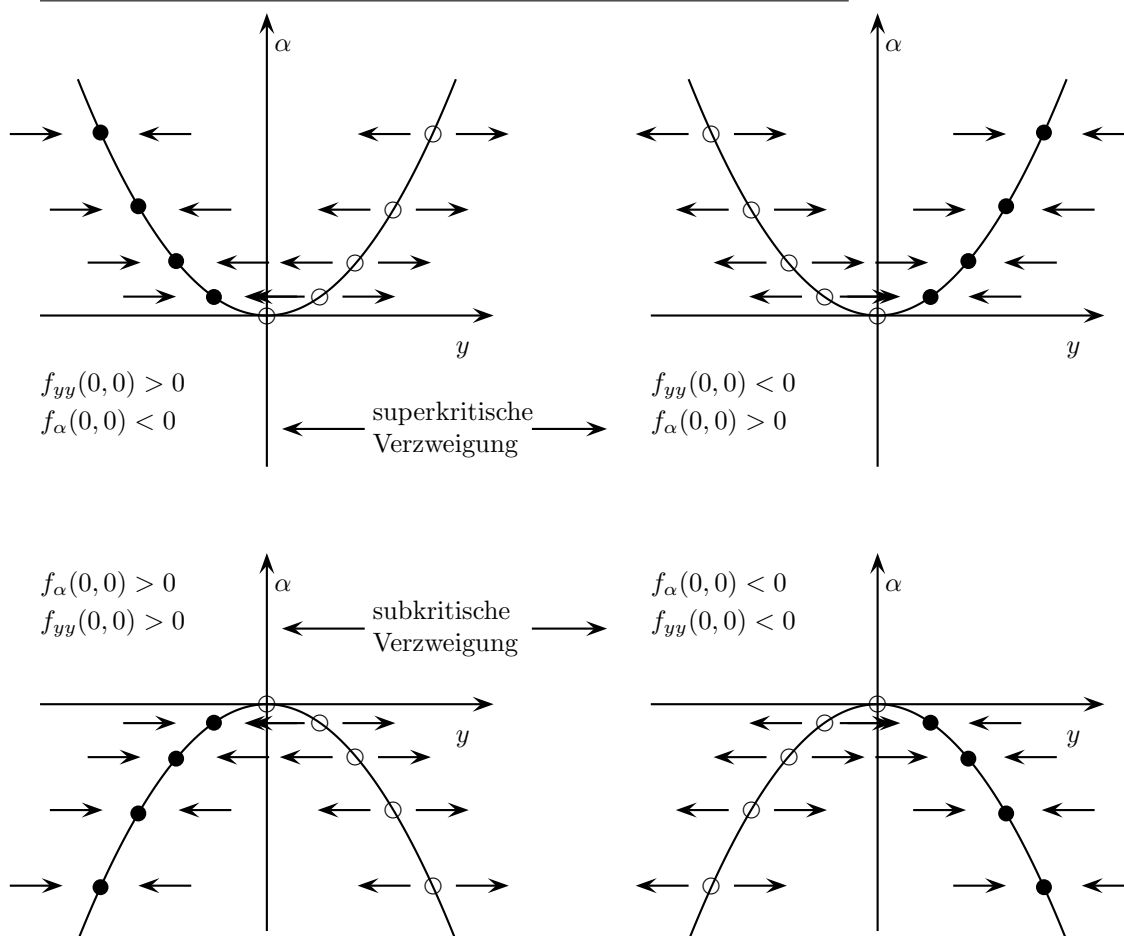
(iii) für  $\alpha = 0$  ist die triviale Ruhelage  $y = 0$  semistabil.

(iv) Für jedes  $\alpha \in h(U) \setminus \{0\}$  besitzt die DGL zwei Ruhelagen  $y_-(\alpha) < 0 < y_+(\alpha)$  und es gilt:

\* Falls  $f_{yy}(0, 0) > 0$  dann ist  $y_-(\alpha)$  asymptotisch stabil,  $y_+(\alpha)$  instabil.

\* Falls  $f_{yy}(0, 0) < 0$  dann ist  $y_+(\alpha)$  asymptotisch stabil,  $y_-(\alpha)$  instabil.

Mögliche Verzweigungsdiagramme bei einer Sattelknotenverzweigung:



**Bemerkung:**

Falls für einen Verzweigungspunkt  $(y_0, \alpha_0)$  gilt, dass für  $\alpha \geq \alpha_0$  mehrere Ruhelagen auftauchen, dann heißt die Verzweigung superkritisch (subkritisch). Falls sowohl für  $\alpha \geq \alpha_0$  als auch für  $\alpha \leq \alpha_0$  mehrere Ruhelagen entstehen, dann heißt die Verzweigung transkritisch.

**Beweis:** Die Existenz der Funktion  $h$  und die Eindeutigkeit der Ruhelagen  $(y, h(y))$  in einer Umgebung  $U \times V$  von  $(0, 0)$  folgt wieder mit dem Satz über implizite Funktionen.

(ii) Es gilt also:  $f(y, h(y)) = 0 \quad \forall y \in U$ . Differentiation der Gleichung liefert:

$$f_y(y, h(y)) + f_\alpha(y, h(y)) \cdot h'(y) = 0 \quad \forall y \in U.$$

Da  $f_\alpha(0, 0) \neq 0$ ,  $f_\alpha$  stetig, sowie  $h(0) = 0$  und  $h$  stetig, kann nach eventueller Verkleinerung der Umgebung  $U$  angenommen werden, dass  $f_\alpha(y, h(y)) \neq 0 \quad \forall y \in U$ .

Somit ist

$$h'(y) = -\frac{f_y(y, h(y))}{f_\alpha(y, h(y))} \quad \forall y \in U.$$

$\stackrel{(*)}{\implies} h'(0) = 0$  und durch Differenzieren ergibt sich die Behauptung für  $h''(0)$ .

(iii)

$$\left. \begin{array}{l} f(0, 0) = 0 \\ f_y(0, 0) = 0 \\ f_{yy}(0, 0) \neq 0 \end{array} \right\} \implies f(\cdot, 0) \text{ hat im Nullpunkt ein Maximum oder Minimum, d.h. ist in einer ganzen Umgebung von 0 entweder } < 0 \text{ oder aber } > 0 \implies 0 \text{ ist semistabil.}$$

- (iv)  $h(0) = 0, h'(0) = 0, h''(0) \neq 0 \Rightarrow$  es existiert eine Umgebung  $[a, b] \subset U$  von 0,  $a < 0 < b$ , so dass  $h$  auf  $[a, 0]$  sowie auf  $[0, b]$  streng monoton, und o.B.d.A. können  $a$  und  $b$  so gewählt werden, dass  $h(a) = h(b)$ . Dann hat  $h$  für alle  $\alpha \in h([a, b])$  genau zwei Urbilder:

$$y_-(\alpha) < 0 < y_+(\alpha).$$

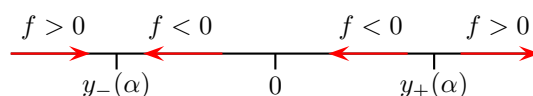
Untersuche nun noch die Stabilität dieser beiden Ruhelagen: Betrachte dazu die Funktion:

$$\tilde{f}(y) = f_y(y, h(y)), \quad y \in U.$$

Da  $\tilde{f}(0) = f_y(0, 0) = 0$ ,  $\tilde{f}'(0) = f_{yy}(0, 0) + f_{y\alpha}(0, 0) \cdot \underbrace{h'(0)}_{=0} \Rightarrow \tilde{f}'(0) = f_{yy}(0, 0) \neq 0$ ,

wechselt  $\tilde{f}$  das Vorzeichen in 0. Ist etwa  $f_{yy}(0, 0) > 0$ , dann gilt also  $\tilde{f}'(0) > 0$  und  $\tilde{f}(y_-(\alpha), \alpha) = f_y(y_-(\alpha), \alpha) < 0 < f_y(y_+(\alpha), \alpha) = \tilde{f}(y_+(\alpha), \alpha)$ , somit in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(y_-(\alpha), \alpha) = 0 \\ f_y(y_-(\alpha), \alpha) < 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f(y, \alpha) > 0 & \text{für } y < y_-(\alpha) \\ f(y, \alpha) < 0 & \text{für } y > y_-(\alpha) \end{cases} \Rightarrow y_-(\alpha) \text{ asymptotisch stabil} \\ \begin{cases} f(y_+(\alpha), \alpha) = 0 \\ f_y(y_+(\alpha), \alpha) > 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f(y, \alpha) > 0 & \text{für } y > y_+(\alpha) \\ f(y, \alpha) < 0 & \text{für } y < y_+(\alpha) \end{cases} \end{aligned}$$



$\Rightarrow y_-(\alpha)$  ist asymptotisch stabil und  $y_+(\alpha)$  ist instabil. Fall:  $f_{yy}(0, 0) < 0$  analog.

q.e.d.

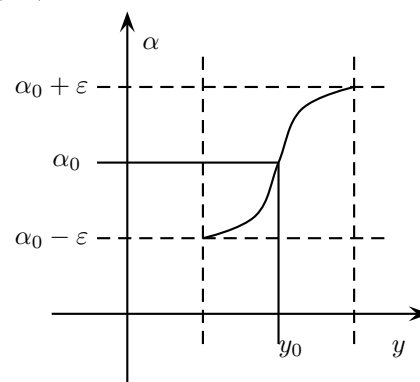
22.01.'07

## 7.1 Transkritische Verzweigung

Betrachte die DGL  $y' = f(y, \alpha)$  mit  $f : D^{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ .

Wir nehmen an, dass  $(y_0, \alpha_0)$  eine Ruhelage der DGL ist, die zudem eingebettet ist in eine Schar von Ruhelagen  $(g(\alpha), \alpha)$ ,  $\alpha \in ]\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon[$  ( $\varepsilon > 0$ ).

O.B.d.A. nehmen wir im Folgenden an, dass  $\alpha_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  und  $g(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . (Durch Transformation  $y \rightarrow y - g(\alpha)$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha - \alpha_0$  ist es immer möglich, auf diesen Fall zu reduzieren.)



Weiter nehmen wir an, dass in  $\alpha = 0$  ein Stabilitätswechsel der trivialen Ruhelage stattfindet, und zwar genauer, dass folgende so genannte Transversalitätsbedingung gilt:

$$\alpha \mapsto f_y(0, \alpha) \text{ wechselt in } \alpha = 0 \text{ das Vorzeichen, d.h. } f_{y\alpha}(0, 0) \neq 0 \quad (7.1)$$

**Satz 7.3** *Unter den obigen Voraussetzungen gelte zudem*

$$f_{yy}(0, 0) \neq 0. \quad (7.2)$$

Dann gibt es eine Umgebung  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$  von  $(0, 0)$  in  $\mathbb{R}^2$  und eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  mit  $h(0) = 0$  und

$$f(y, h(y)) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{U}.$$

Weiter gilt:

(i) Die DGL  $y' = f(y, \alpha)$  enthält in  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$  keine weiteren Ruhelagen außer den trivialen  $(0, \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathcal{V}$  und denen auf dem Graphen  $(y, h(y))$ ,  $y \in \mathcal{U}$ .

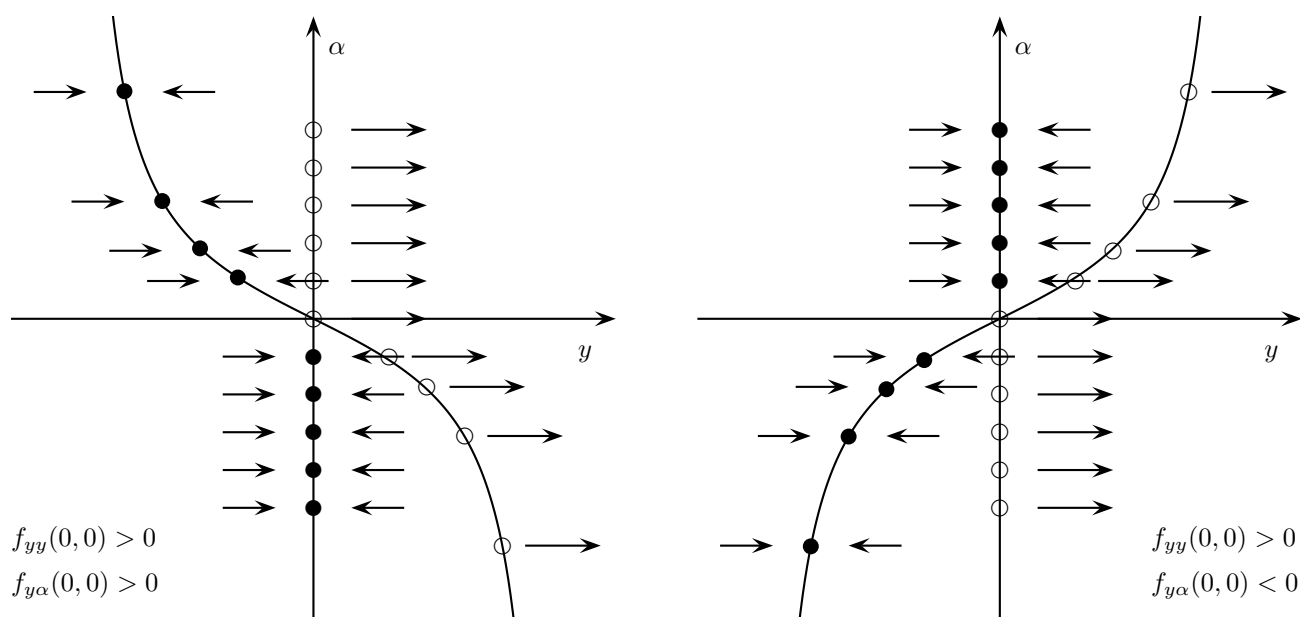
(ii)  $h$  ist streng monoton,  $h'(0) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f_{yy}(0, 0)}{f_{y\alpha}(0, 0)} \neq 0$

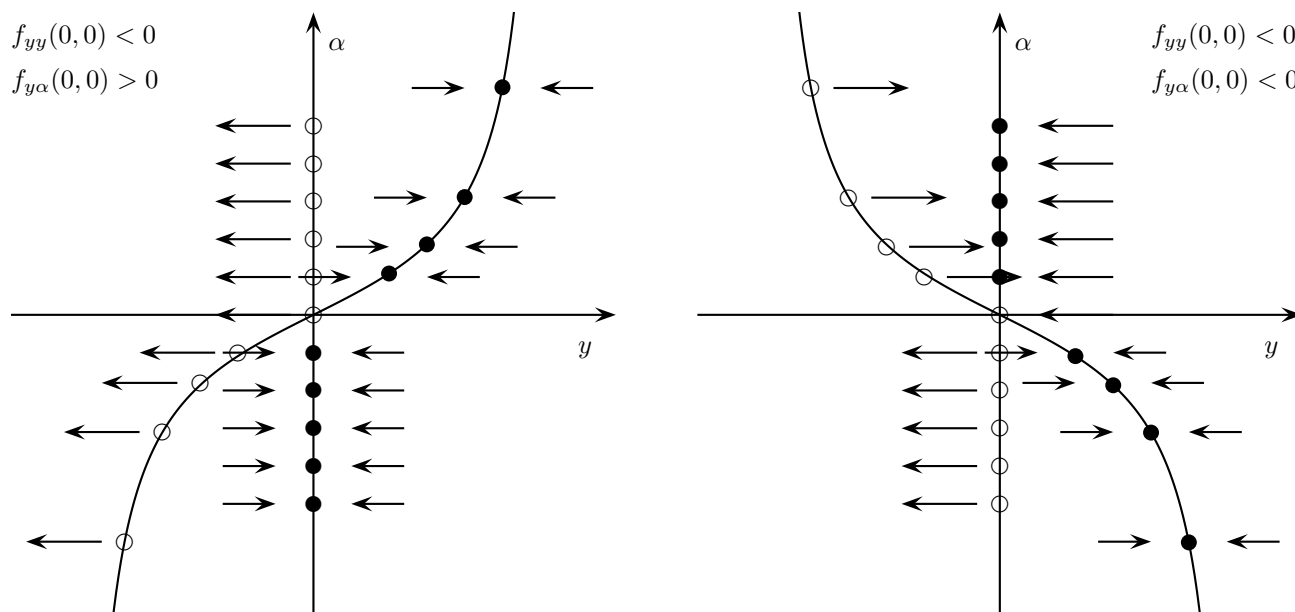
(iii) Für  $\alpha = 0$  ist die triviale Ruhelage semistabil.

(iv)  $\forall \alpha \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  besitzt die DGL  $y' = f(y, \alpha)$  genau eine nicht triviale Ruhelage in  $\mathcal{U}$ . Ist  $f_{y\alpha}(0, 0) > 0$ , dann gilt: für  $\alpha < 0$  ist 0 instabil und die weiteren Ruhelagen asymptotisch stabil.

Ist  $f_{y\alpha}(0, 0) < 0$ , gelten die umgekehrten Eigenschaften.

**mögliche Verzweigungen einer Transkritischen Verzweigung:**





**Beweis: Beweisidee:** Wir wissen, dass gilt:  $f(0,0) = f_y(0,0) = f(0,\alpha) = f_\alpha(0,\alpha) = f_{\alpha\alpha}(0,\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Wir können daher  $f$  schreiben als

$$f(y, \alpha) = y \cdot g(y, \alpha) \quad (*)$$

mit einer Funktion  $g \in \mathcal{C}^1(D)$ , so dass

$$g(0,0) = 0, \quad g_\alpha(0,0) \neq 0.$$

Folglich kann der Satz über implizite Funktionen auf  $g$  angewandt werden. Dieser liefert dann eine Umgebung  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$  von  $(0,0)$ , in der die DGL  $w' = g(w, \alpha)$  nur die Ruhelagen  $(y, h(y))$ ,  $y \in \mathcal{U}$ , sowie die triviale Ruhelage  $(0, \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathcal{V}$ , besitzt.

Da  $g$  in  $(*)$  gegeben ist durch:  $g(y, \alpha) = \int_0^1 f_y(\Theta y, \alpha) d\Theta$  ergibt sich durch Differenzieren der Gleichung  $g(y, h(y)) = 0$

$$\begin{aligned} g_y(0,0) + g_\alpha(0, h(0))h'(0) &= 0 \\ \leadsto h'(0) &= -\frac{g_y(0,0)}{g_\alpha(0,0)} = -\frac{\int_0^1 \Theta f_{yy}(0,0) d\Theta}{\int_0^1 \Theta f_{y\alpha}(0,0) d\Theta} \end{aligned}$$

direkt  $h'(0) = -\frac{1}{2} \frac{f_{yy}(0,0)}{f_{y\alpha}(0,0)}$  (vergleiche (ii)).

Weiteres Studium von  $h$  und analoge Betrachtungen wie im Beweis zum Satz 7.2 liefern die weiteren Behauptungen. q.e.d.

## 7.2 Heugabelverzweigung

Voraussetzungen wie oben. Insbesondere gelte also:  $f(0,\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $\varepsilon > 0$ , in  $\alpha_0 = 0$  finde ein Stabilitätswechsel der trivialen Ruhelage statt und die Transversalitätsbedingung  $f_{y\alpha}(0,0) \neq 0$  gilt. ( $\Rightarrow f_y(0,0) = 0$ ).

**Satz 7.4** Wenn außerdem gilt  $f \in \mathcal{C}^3(D)$  und  $f_{yy}(0,0) = 0$ ,  $f_{yyy}(0,0) \neq 0$ , dann gibt es eine Umgebung  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$  von  $(0,0)$  und eine  $\mathcal{C}^2$ -Funktion  $h: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  mit  $h(0) = 0$  und  $f(y, h(y)) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{U}$ .

Weiter gilt:

- (i) Die DGL  $y' = f(y, \alpha)$  besitzt in  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$  keine weiteren Ruhelagen als die triviale Ruhelage  $(0, \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathcal{V}$  sowie  $(y, h(y))$ ,  $y \in \mathcal{U}$ .

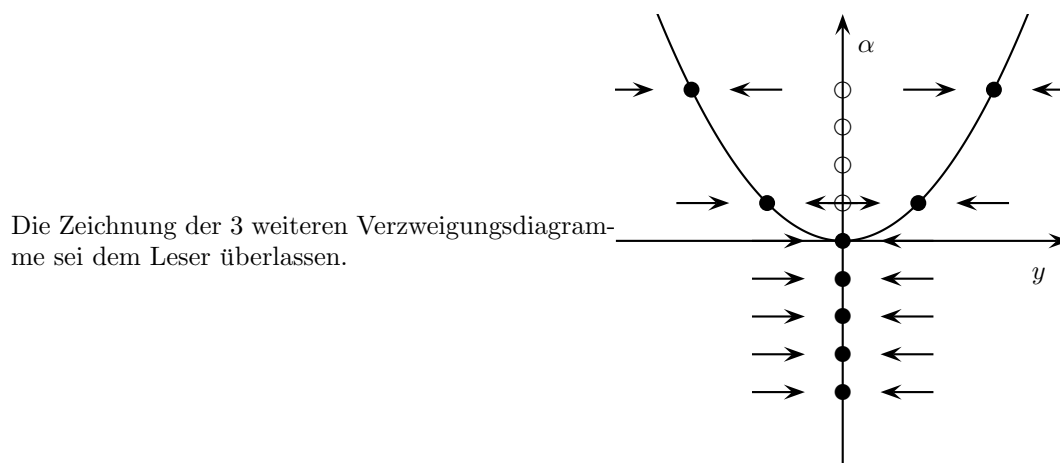
(ii)  $h$  besitzt in 0 ein strenges lokales Extremum,  $h'(0) = 0$ ,  $h''(0) = -\frac{1}{3} \frac{f_{yyy}(0,0)}{f_{y,\alpha}(0,0)} \neq 0$

(iii) Für  $\alpha = 0$  ist 0 asymptotisch stabil, wenn  $f_{yyy}(0,0) < 0$ , sonst instabil.

(iv)  $\forall \alpha \in h(\mathcal{U}) \setminus \{0\}$  gibt es neben der trivialen Ruhelage genau zwei weitere Ruhelagen:  $y_-(\alpha) < 0 < y_+(\alpha)$ . Falls die triviale Ruhelage instabil ist, sind  $y_-(\alpha), y_+(\alpha)$  asymptotisch stabil; falls 0 asymptotisch stabil ist, dann sind  $y_-(\alpha), y_+(\alpha)$  instabil. Die triviale Ruhelage 0 ist für  $\alpha < 0$  asymptotisch stabil und für  $\alpha > 0$  instabil, falls  $f_{y\alpha}(0,0) > 0$  ist, ansonsten ist die Situation umgekehrt.

**Beweis: Beweisidee:** Wie in Satz 7.3 schreibe  $f(y, \alpha) = y \cdot g(y, \alpha)$  und wende den Satz über implizite Funktionen auf  $g$  an. q.e.d.

**Verzweigungsdiagramm im Fall  $f_{y\alpha}(0,0) > 0, f_{yyy}(0,0) < 0$**



Die Zeichnung der 3 weiteren Verzweigungsdiagramme sei dem Leser überlassen.

Bei 2-dimensionalen Systemen der Form

$$\begin{cases} y' = f(y, \alpha) \\ z' = g(z, \alpha) \end{cases}$$

können ebenfalls Verzweigungen von Ruhelagen der oben beschriebenen Art untersucht werden (eine Ruhelage  $\rightarrow$  mehrere Ruhelagen, Stabilitätswechsel), aber es können auch andere Formen von Verzweigungen auftreten, etwa an einem kritischen Punkt Parameterwert  $\alpha_0$  eine Ruhelage in einen Grenzyklus übergehen (so genannte Hopf-Bifurkation).

24.01.'07

### Beispiel einer Hopf-Bifurkation

$$\begin{aligned} y' &= -z + y(\alpha - y^2 - z^2) \\ z' &= y + z(\alpha - y^2 - z^2) \end{aligned}$$

Dann gilt:

- \*  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  ist  $(0,0)$  die einzige Ruhelage.
- \*  $\forall \alpha \leq 0$  ist  $(0,0)$  asymptotisch stabil. (Für  $\alpha < 0$  folgt dies sofort mit dem Prinzip der linearisierten Stabilität für  $\alpha = 0$  mit Hilfe der Lyapunov-Funktion  $V(y, z) = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$ )
- \*  $\forall \alpha > 0$  ist  $(0,0)$  instabil (folgt mit dem Prinzip der linearisierten Stabilität.)

Aber es gilt auch:

\*  $\forall \alpha > 0$  besitzt die DGL eine periodische Lösung

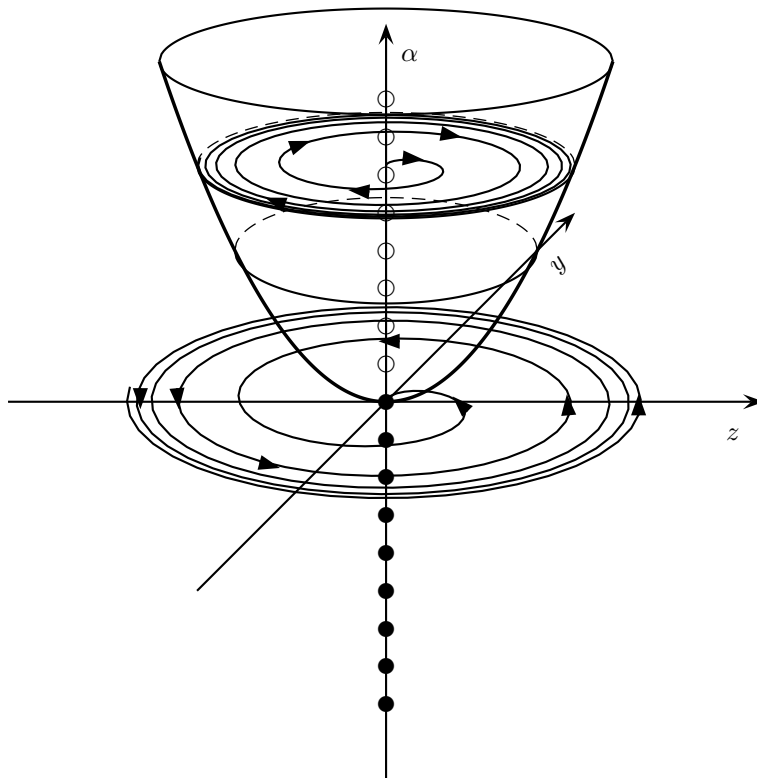
$$(y_\alpha(x), z_\alpha(x)) = (\sqrt{\alpha} \cos(x), \sqrt{\alpha} \sin(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:  $S_{\sqrt{\alpha}} = \mathcal{O}^+((\sqrt{\alpha}, 0)) = \omega((\sqrt{\alpha}, 0))$  ( $S_{\sqrt{\alpha}}$  Sphäre um  $(0, 0)$  mit Radius  $\alpha$ ) und man kann zeigen, dass

$$\text{dist} \left( (y(x), z(x)), S_{\sqrt{\alpha}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

für alle Lösungen der DGL (zum Parameter  $\alpha$ ) die nicht gleich der trivialen Nulllösung sind (d.h.  $S_{\sqrt{\alpha}}$  ist ein Attraktor).

Verzweigungsdiagramm:



# Kapitel 8

## Randwertprobleme

### Anwendungsbeispiel:

Die Temperaturverteilung in einem dünnen Stab der Länge  $L > 0$  mit isolierter Oberfläche kann durch die DGL

$$(k(x)U'(x))' = f(x), \quad x \in [0, L]$$

modelliert werden.

- $k(x)$  ist der Wärmeleitkoeffizient
- $U(x)$  ist die Temperatur im Stab am Ort  $x \quad x \in [0, L]$
- $f(x)$  ist die äußere Wärmequelle/-senke

In diesem Modell ist es nicht natürlich, eine Anfangsbedingung vorzuschreiben vom Typ

$$\begin{cases} U(0) = \eta_1 \\ U'(0) = \eta_2 \end{cases}$$

sondern eine so genannte Randbedingung an beiden Rändern des Intervalls  $[0, L]$ . Etwa:

1.  $\boxed{U(0) = U(L) = 0}$ , d.h. die Temperatur wird an den Stabenden konstant 0 gehalten:  
Dies ist die so genannte homogene Dirichlet-Randbedingung.  
Allgemeiner:  $\boxed{U(0) = a, U(L) = b}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  'nicht homogene Dirichlet-Randbedingung'
  2.  $\boxed{U'(0) = U'(L) = 0}$  homogene Neumann-Randbedingung, d.h. die Enden des Stabes sind isoliert, so dass kein Wärmefluss stattfindet.  
Allgemeiner:  $\boxed{U'(0) = a, U'(L) = b}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  'nicht-homogene Neumann-Randbedingung', d.h. der Wärmefluß wird an den Enden konstant gehalten.
  3.  $\boxed{U(0) = a, U'(L) = b}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  'gemischte Randbedingung', d.h. an einem Ende wird die Temperatur konstant gehalten, am anderen Ende der Wärmefluß.
- ⋮

### 8.1 Randwertprobleme für lineare DGL 2. Ordnung

Betrachte den Differentialoperator

$$(Lu)(x) := a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x), \quad x \in [a, b] \quad (a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b)$$



und den Randdifferentialoperator

$$Ru := C \begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u(b) \\ u'(b) \end{pmatrix}$$

mit

\*  $C, D$   $2 \times 2$ -Matrizen

\*  $a_2, a_1, a_0 \in \mathcal{C}([a, b])$

Wir wollen das RWP

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = \eta \end{cases} \quad \text{auf } [a, b]$$

mit  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^2$  auf Existenz, Eindeutigkeit und Eigenschaften einer etwaigen Lösung untersuchen (z.B. auf Positivität).

Dabei verstehen wir unter einer Lösung  $u$  stets eine klassische Lösung, d.h. eine Funktion  $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$ , die die DGL  $(Lu)(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$  und zusätzlich die Randbedingung  $Ru = \eta$  erfüllt.

**Bemerkung:**

Wählt man

\*  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D = 0$ , dann ist die Bedingung  $Ru = \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$  von der Gestalt  $\begin{cases} u(a) = \eta_1 \\ u'(a) = \eta_2 \end{cases}$ , d.h. eine Anfangsbedingung.

\*  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , dann lautet  $Ru = \eta$ :

$$\begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \text{Dirichlet-Randbedingung}$$

\*  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , dann reduziert sich  $Ru = \eta$  auf die Neumann-Randbedingung

$$\begin{pmatrix} u'(a) \\ u'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \text{Neumann-Randbedingung}$$

Bei entsprechender Wahl von  $C$  und  $D$  können ebenso gemischte Randbedingungen und auch die so genannten Robin'schen Randbedingungen

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta_1 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \eta_1 \end{cases}$$

formuliert werden.

Im Folgenden gelte stets:  $a_2(x) \neq 0$  auf  $[a, b]$ .

**SATZ 8.1 FREDHOLM-ALTERNATIVE**

Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

- Entweder : besitzt das RWP

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = \eta \end{cases} \quad \text{auf } [a, b]$$

für alle  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  und alle  $\eta \in \mathbb{R}^2$  eine eindeutige Lösung

- oder : das zugehörige homogene RWP

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Ru = 0 \end{cases}$$

besitzt eine nicht-triviale Lösung.

**Beweis:** Sei  $\{u_1, u_2\}$  ein Fundamentalsystem der homogenen DGL  $Lu = 0$ . Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL  $Lu = f$ ,  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ , von der Form

$$u(x) = u_p(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \quad x \in [a, b] \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

wobei  $u_p$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL  $Lu = f$  ist. Eine Lösung des RWP

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = \eta \end{cases}$$

erhält man, wenn dies möglich ist, durch geeignetes Anpassen der Koeffizienten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \eta = Ru &= Ru_p + C \begin{pmatrix} c_1 u_1(a) + c_2 u_2(a) \\ c_1 u_1'(a) + c_2 u_2'(a) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) \\ c_1 u_1'(b) + c_2 u_2'(b) \end{pmatrix} \\ &= Ru_p + \underbrace{\left[ C \begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u_1(b) & u_2(b) \\ u_1'(b) & u_2'(b) \end{pmatrix} \right]}_{:=M} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Angenommen nun, dass homogene RWP

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Ru = 0 \end{cases}$$

besitzt nur die triviale Nulllösung.

Aus unseren Vorüberlegungen folgt dann aber (mit  $u_p \equiv 0$ ), dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= \eta = R0 + M \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ \iff 0 &= M \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  besitzt.

D.h. aber gerade, dass  $\det(M) \neq 0$ , d.h. invertierbar ist, und dann folgt sofort, dass für beliebige  $\eta \in \mathbb{R}^2$  und beliebige partikuläre Lösungen  $u_p$  das Gleichungssystem

$$\eta = Ru_p + M \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$  besitzt. Somit folgt die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des inhomogenen RWP

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = \eta \end{cases}$$

für beliebige  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  und beliebige  $\eta \in \mathbb{R}^2$ . q.e.d.

Die allgemeine Situation für ein inhomogenes RWP

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = \eta \end{cases}$$

stellt sich wie folgt dar:

- entweder : Das RWP ist eindeutig lösbar  $\iff$  das homogene RWP ist nur trivial lösbar

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$  Fundamentalsystem der DGL:  $\cos(x), \sin(x)$ . Allgemeine Lösung der DGL:  $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ .

Randbedingungen:

$$1 = y(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1$$

$$1 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2$$

$\rightsquigarrow$  Das RWP besitzt die eindeutige Lösung  $y(x) = \cos(x) + \sin(x)$

- oder : Das RWP besitzt keine Lösung

**Beispiel:**

$$y'' + y = 0 \quad \text{auf } [0, \pi]$$

$$y(0) = 1, y(\pi) = 1$$

Die allgemeine Lösung ist von der Form:  $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$

Anpassen der Koeffizienten:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = y(0) = c_1 \\ 1 = y(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = -c_1 \end{array} \right\} \quad \nexists$$

$\implies$  unlösbar.

- oder : Das RWP besitzt  $\infty$ -viele Lösungen

**Beispiel:**

$$y'' + y = 0 \quad \text{auf } [0, \pi]$$

$$y(0) = 1, y(\pi) = -1$$

mit analoger Rechnung finden wir:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = c_1 \\ -1 = -c_1 \end{array} \right\} \implies c_1 = 1, \quad c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$\implies$  Das RWP besitzt die  $\infty$ -vielen Lösungen  $y(x) = \cos(x) + c_2 \sin(x) \quad c_2 \in \mathbb{R}$ .

29.01.'07

**Satz 8.2** Gegeben sei das RWP

$$\begin{cases} y'' + cy' + d = 0 & \text{auf } [a, b] \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a < b$$

Dann gilt:

(i) Falls  $\frac{c^2}{4} - d \geq 0$ , dann besitzt das RWP nur die triviale Lösung  $y \equiv 0$ .

(ii) Falls  $\frac{c^2}{4} - d < 0$ , dann besitzt das RWP nur die triviale Lösung  $y \equiv 0$ , falls  $\sqrt{\frac{c^2}{4} - d} \cdot (b - a)$  kein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist, andernfalls besitzt das RWP  $\infty$ -viele Lösungen.

**Beweis:** Charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - d}$

1. Fall:  $\frac{c^2}{4} - d > 0$ ; dann ergibt sich als Fundamentalsystem der DGL:  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Die allgemeine Lösung der DGL ist also von der Form:  $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Randbedingungen  $\Rightarrow$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 a} & e^{\lambda_2 a} \\ e^{\lambda_1 b} & e^{\lambda_2 b} \end{bmatrix}}_{=:J} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = e^{\lambda_1 a + \lambda_2 b} - e^{\lambda_1 b + \lambda_2 a} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 a + \lambda_2 b = \lambda_1 b + \lambda_2 a$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cancel{(a-b)} = \lambda_2 \cancel{(a-b)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Aber  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Somit ist  $\det(J) \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d.h. das RWP besitzt nur die triviale Lösung  $y \equiv 0$ .

2. Fall:  $\frac{c^2}{4} - d = 0$ ; dann ergibt sich als Fundamentalsystem:  $e^{-\frac{c}{2}x}, xe^{-\frac{c}{2}x}$  und als allgemeine Lösung der DGL:  $y(x) = c_1 e^{-\frac{c}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{c}{2}x}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Randbedingungen  $\Rightarrow$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\frac{c}{2}a} & a e^{-\frac{c}{2}a} \\ e^{-\frac{c}{2}b} & b e^{-\frac{c}{2}b} \end{bmatrix}}_{=:J} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da  $\det(J) = b e^{-\frac{c}{2}(a+b)} - a e^{-\frac{c}{2}(a+b)} = \underbrace{(b-a)}_{\neq 0} e^{-\frac{c}{2}(a+b)} \neq 0$  folgt  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und wieder

ist das RWP nur trivial lösbar.

3. Fall:  $\frac{c^2}{4} - d < 0$ ; dann ergibt sich als Fundamentalsystem:  $e^{-\frac{c}{2}x} \cos\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}x\right), e^{-\frac{c}{2}x} \sin\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}x\right)$  wir erhalten als allgemeine Lösung der DGL:

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{c}{2}x} \cos\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}x\right) + c_2 e^{-\frac{c}{2}x} \sin\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Randbedingungen  $\Rightarrow$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\frac{c}{2}a} \cos\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}a\right) & e^{-\frac{c}{2}a} \sin\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}a\right) \\ e^{-\frac{c}{2}b} \cos\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}b\right) & e^{-\frac{c}{2}b} \sin\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}b\right) \end{bmatrix}}_{=:J} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \det(J) = e^{-\frac{c}{2}(a+b)} \left\{ \cos\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}a\right) \cdot \sin\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}b\right) - \sin\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}a\right) \cos\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}b\right) \right\} \stackrel{1}{=} \\ \underbrace{e^{-\frac{c}{2}(a+b)}}_{\neq 0} \sin\left(\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}(b-a)\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{d - \frac{c^2}{4}}(b-a) = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{R} \text{ und in die-}$$

sem Fall besitzt das Gleichungssystem und damit auch das RWP  $\infty$ -viele nicht-triviale Lösungen.

Falls  $\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}(b-a)$  kein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist, ergibt sich wieder nur die triviale Lösung  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und das RWP ist dann nur trivial lösbar.

q.e.d.

<sup>1</sup>Die Gleichheit folgt mit dem Additionstheorem:  $\cos(y) \sin(x) - \cos(x) \sin(y) = \sin(x-y)$

Zurück zum inhomogenen RWP

$$\begin{cases} Ly = y'' + c(x)y' + d(x)y \\ Ry = \eta \end{cases} \quad x \in [a, b]$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Randbedingung von der Form

$$Ry = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:C} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}}_{=:D} \begin{pmatrix} y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

ist (d.h. 'Robin'sche Randbedingung'), so dass die Randbedingung getrennt in den Randpunkten formuliert werden kann:

$$\begin{aligned} R_1y &:= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \eta_1 \\ R_2y &:= \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta_2 \end{aligned}$$

Weiter sei das homogene RWP

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ R_1y = 0 \\ R_2y = 0 \end{cases}$$

nur trivial lösbar, d.h. es gilt:

$$\det \left( C \begin{bmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u'_1(a) & u'_2(a) \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_1(b) & u_2(b) \\ u'_1(b) & u'_2(b) \end{bmatrix} \right) \neq 0,$$

wobei  $u_1, u_2$  ein beliebiges Fundamentalsystem von  $Ly = 0$  bilden  
(siehe Beweis vom Satz zur FREDHOM-ALTERNATIVE).

Dies ist äquivalent zu

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u'_1(a) & \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u'_2(a) \\ \alpha_1 u_1(b) + \alpha_2 u'_1(b) & \alpha_1 u_2(b) + \alpha_2 u'_2(b) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

(Insbesondere muss also gelten:  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$  und  $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ )

Vereinfachungen des RWPs sind möglich:

1. O.B.d.A. werden wir im Folgenden stets annehmen, dass  $[a, b] = [0, 1]$ , denn es gilt: ist  $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$  Lösung des RWPs

$$\begin{cases} Lu = f & \text{auf } [a, b] \\ R_1 u = \eta_1 \\ R_2 u = \eta_2 \end{cases}$$

dann ist  $v(x) := u((b-a)x + a)$  eine klassische Lösung des folgenden RWPs auf  $[0, 1]$ :

$$\begin{cases} v'' + \tilde{c}(x)v' + \tilde{d}(x)v = \tilde{f} & \text{auf } [0, 1] \\ \tilde{\alpha}v(0) + \tilde{\alpha}_2 v'(0) = \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\beta}_1 v(0) + \tilde{\beta}_2 v'(0) = \tilde{\eta}_2 \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= (b-a)^2 f((b-a)x + a) \\ \tilde{c}(x) &= (b-a)c((b-a)x + a) \\ \tilde{d}(x) &= (b-a)^2 d((b-a)x + a) \\ \tilde{\alpha}_1 &= \alpha_1, \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_1, \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{b-a}, \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{b-a}, \quad \tilde{\eta}_1 = \eta_1, \quad \tilde{\eta}_2 = \eta_2. \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt: Ist  $v$  klassische Lösung des RWP's auf  $[0, 1]$ , dann ist  $u(x) = v\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ ,  $x \in [a, b]$  Lösung des RWP's auf  $[a, b]$ .

Insbesondere gilt auch: das homogene RWP auf  $[a, b]$  ist nun trivial lösbar, genau dann wenn das homogene RWP auf  $[0, 1]$  nur trivial lösbar ist.

2. Man kann sich stets auf den 'halb homogenen' Fall mit  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ,  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$  zurückziehen.

Sei  $w$  eine  $\mathcal{C}^2$ -Funktion mit  $R_1 w = \eta_1$ ,  $R_2 w = \eta_2$  (eine solche ist leicht zu finden; Ansatz:  $w(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in (0, 1, 2, 3)$ )

Wenn dann  $v$  eine klassische Lösung des halbhomogenen RWP's

$$\begin{cases} Lv = f - Lw & \text{auf } [0, 1] \\ R_1 v = 0 \\ R_2 v = 0 \end{cases}$$

dann ist  $u = v + w$  die eindeutige Lösung des inhomogenen RWP's

$$\begin{cases} Lu = f \\ R_1 u = \eta_1 \\ R_2 u = \eta_2 \end{cases}$$

3. Mit Hilfe einer geeigneten Transformation kann auch der Term 1. Ordnung  $c(x)y'$  der DGL 'wegtransformiert' werden. Dies werden wir in der Übung betrachten.

Betrachte von nun an deshalb nur noch das RWP

$$\begin{cases} \overbrace{u'' + c(x)u' + d(x)u}^{=: Lu} = f \\ R_1 u = 0 \\ R_2 u = 0 \end{cases}$$

Es gelte weiter: das homogene RWP sei nur trivial lösbar, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (*)$$

wobei  $u_1, u_2$  ein beliebiges Fundamentalsystem von  $Lu = 0$  bilden.

Bekanntlich können wir nun das RWP lösen. in dem wir zunächst eine beliebige partikuläre Lösung der DGL  $Lu = f$  bestimmen, den Ansatz  $y(x) = y_p(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$  wählen und dann die freien Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  gemäß den Randbedingungen anpassen. Wir werden im Folgenden eine andere Lösungsmethode kennenlernen. Dazu gehen wir zunächst von einem beliebigen Fundamentalsystem zu einem dem RWP 'angepassten' Fundamentalsystem über.

**Lemma 8.1** Sei  $\{u_1, u_2\}$  ein beliebiges Fundamentalsystem von  $Lu = 0$  und es gelte  $(*)$ .

Dann ist  $\{v_1, v_2\}$  definiert durch:

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2 & \text{mit} & & c_{11} &= R_1 u_2 & c_{12} &= -R_1 u_1 \\ v_2 &= c_{21}u_1 + c_{22}u_2 & & & c_{21} &= R_2 u_2 & c_{22} &= -R_2 u_1 \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von  $Lu = 0$  und es gilt:  $R_1 v_1 = 0$  und  $R_2 v_2 = 0$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} * \quad R_1 v_1 &= R_1 u_2 \cdot R_1 u_1 + (-R_1 u_1) \cdot R_1 u_2 = 0 \\ \text{Analog} \quad R_2 v_2 &= 0 \end{aligned}$$

\*

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{nachrechnen}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{pmatrix}}_{\text{regulär}^1} \begin{bmatrix} R_1 u_2 & R_2 u_2 \\ -R_1 u_1 & -R_2 u_1 \end{bmatrix} := J, \quad \det(J) \neq 0 \text{ wegen } (*)$$

also ist  $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{pmatrix}$  regulär, d.h.  $\{v_1|v_2\}$  ist ein Fundamentalsystem.

q.e.d.

**Bemerkung:**

Wenn (\*):  $\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0$  nicht erfüllt ist, dann existiert im Allgemeinen kein Fundamentalsystem  $\{v_1|v_2\}$  mit  $R_1 v_1 = 0$  und  $R_2 v_2 = 0$

**Beispiel:**

$$\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$  Fundamentalsystem  $\cos(x), \sin(x)$ . Aber es existiert kein Fundamentalsystem  $\{v_1|v_2\}$  mit  $v_1(0) = 0, v_2(\pi) = 0$  (nachrechnen)

Nun erinnern wir uns daran, dass eine partikuläre Lösung von  $Lu = u'' + c(x)u' + d(x)u = f$  gegeben ist durch die 1. Komponente der Funktion

$$\begin{aligned} y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= \int_0^x \underbrace{\phi(x)}_2 \phi(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^x \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v'_1(x) & v'_2(x) \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{v_1(s)v'_2(s) - v_2(s)v'_1(s)}}_{= \frac{1}{W(s)} \leftarrow \text{Wronskideterminante}} \begin{bmatrix} v'_2(s) & -v_2(s) \\ -v'_1(s) & v_1(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \\ &\Rightarrow \boxed{y_1(x) = \int_0^x \frac{v_2(x)v_1(s) - v_1(x)v_2(s)}{W(s)} f(s) ds} \end{aligned}$$

(Variation der Konstanten-Formel)

31.01.'07

$$\Rightarrow y_1(x) = \int_0^x \frac{v_2(x)v_1(s)}{W(s)} f(s) ds - \int_0^x \frac{v_1(x)v_2(s)}{W(s)} f(s) ds$$

Da  $\tilde{y}(x) = \int_0^1 \frac{v_2(s)}{W(s)} f(s) ds \cdot v_1(x)$  eine Lösung von  $Lu = 0$ , folgt dass auch  $y_p(x) = y_1(x) + \tilde{y}(x)$  eine Lösung von  $Lu = f$  auf  $[0, 1]$  ist. Diese partikuläre Lösung ist also von der Form:

$$y_p = \int_0^x \frac{v_2(x)v_2(s)}{W(s)} f(s) ds + \int_x^1 \frac{v_1(x)v_2(s)}{W(s)} f(s) ds$$

Definieren wir die Funktion  $G : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$G(x, s) := \begin{cases} \frac{v_2(x)v_1(s)}{W(s)} f(s), & s \leq x \\ \frac{v_1(x)v_2(s)}{W(s)} f(s), & s \geq x \end{cases} \quad (x, s) \in [0, 1]^2$$

<sup>1</sup>Das liegt daran, dass  $\{u_1|u_2\}$  ein Fundamentalsystem ist

<sup>2</sup>Fundamentalmatrix von  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$

so können wir die partikuläre Lösung von  $Lu = f$  schreiben als:

$$y_p = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds, \quad x \in [0, 1].$$

Diese partikuläre Lösung  $y_p$  erfüllt auch die Randbedingung des RWP.

$$\begin{aligned} R_1 y_p &= \alpha_1 y_p(0) + \alpha_2 y_p'(0) \\ &= \alpha_1 \int_0^1 \underbrace{\frac{v_1(0)v_2(s)}{W(s)}}_{=G(0,s)} f(s) ds + \alpha_2 \left( \frac{v_2(0)v_1(0)}{W(0)} f(0) - \frac{v_1(0)v_2(0)}{W(0)} f(0) + \int_0^1 \frac{v_1'(0)v_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right) \\ &= \underbrace{(\alpha_1 v_1(0) + \alpha_2 v_1'(0))}_{=R_1 v_1=0} \cdot \int_0^1 \frac{v_2(s)}{W(s)} f(s) ds \end{aligned}$$

Analog rechnet man die 2. Randbedingung  $R_2 y_p = 0$  nach. Somit ist  $y_p$  die gesuchte eindeutige Lösung des RWPs.

$$\begin{cases} Lu = f \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

**Die Eigenschaften der Funktion  $G$  sind:**

1.  $G$  ist eine stetige Funktion auf  $[0, 1]^2$ ;  $G$  ist auf  $D_1 = \{(x, s) \in [0, 1]^2; \quad s \leq x\}$ , sowie auf  $D_2 = \{(x, s) \in [0, 1]^2; \quad s \geq x\}$ , zweimal stetig partiell nach  $x$  differenzierbar.
2.  $G_x$  'macht beim Durchlauf der Diagonalen einen Sprung der Höhe 1'.

$$\begin{aligned} &G_x(x+0, x) - G_x(x-0, x) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{G(x+h, x) - G(x, x)}{h} - \lim_{h \downarrow 0} \frac{G(x-h, x) - G(x, x)}{-h} = 1 \\ \text{denn} \quad G_x(x+0, x) &= \frac{v_2'(x)v_1(x)}{W(x)}, \quad G_x(x-0, x) = \frac{v_1'(x)v_2(x)}{W(x)} \\ \implies G_x(x+0, x) - G_x(x-0, x) &= \frac{v_2'(x)v_1(x) - v_1'(x)v_2(x)}{W(x)} \\ &= \frac{W(x)}{W(x)} = 1 \end{aligned}$$

3.  $\forall (x, s) \in [0, 1]^2 : \quad LG(., s) = 0 \quad (s \neq x)$

$$\begin{aligned} \text{denn:} \quad LG(x, s) &= \begin{cases} L \left( \frac{v_2(x)v_1(s)}{W(s)} \right), & (x, s) \in D_1 \\ L \left( \frac{v_1(x)v_2(s)}{W(s)} \right), & (x, s) \in D_2 \end{cases} \quad x \neq s \\ &= \begin{cases} \frac{v_1(s)}{W(s)} \underbrace{Lv_2(x)}_{=0}, & (x, s) \in D_1 \\ \frac{v_2(s)}{W(s)} \underbrace{Lv_1(x)}_{=0}, & (x, s) \in D_2 \end{cases} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 G(., s) &= 0 & \forall s \in ]0, 1[ \\ R_2 G(., s) &= 0 & \forall s \in ]0, 1[ \end{aligned}$$



4.

$$\text{denn: } R_1 G(., s) = R_1 \left( \frac{v_1(.)v_2(s)}{W(s)} \right) = \frac{v_2(s)}{W(s)} \cdot \underbrace{R_1 v_1}_{=0} = 0$$

analog folgt  $R_2 G(., s) = 0$

**Satz 8.3** Falls eine Funktion  $\gamma : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die obigen Eigenschaften 1-4 erfüllt, dann gilt:

$$\forall f \in \mathcal{C}([0, 1]) \quad \text{ist } y(x) = \int_0^1 \gamma(x, s) f(s) ds, \quad x \in [0, 1]$$

die eindeutige Lösung des RWP

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{auf } [0, 1] \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

und  $\gamma$  ist die einzige Funktion mit diesen Eigenschaften.

**Beweis:** Eindeutigkeit: Seien  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen mit den Eigenschaften 1-4. Dann:  $\forall f \in \mathcal{C}([0, 1])$  ist

$$\int_0^1 \gamma_1(x, s) f(s) ds = \int_0^1 \gamma_2(x, s) f(s) ds \quad \forall x \in [0, 1],$$

denn dies ist die eindeutige Lösung des RWP

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

Sei  $x_0 \in [0, 1]$ ; wähle dann

$$f(s) := \underbrace{\gamma_1(x_0, s) - \gamma_2(x_0, s)}_{\in \mathcal{C}([0, 1])}, \quad s \in [0, 1].$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\gamma_1(x, s) - \gamma_2(x, s)) (\gamma_1(x_0, s) - \gamma_2(x_0, s)) ds = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\xRightarrow[\text{für } x_0]{\text{insbesondere}} \int_0^1 (\gamma_1(x_0, s) - \gamma_2(x_0, s))^2 ds = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_1(x_0, s) = \gamma_2(x_0, s) \quad \forall s \in [0, 1]$$

Da  $x_0 \in [0, 1]$  beliebig gewählt war folgt:  $\gamma_1 \equiv \gamma_2$  auf  $[0, 1]^2$ . Da  $G$  wie oben konstruiert die Eigenschaften 1-4 hat, folgt somit, dass die Funktion  $G$  durch die Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Da wie oben gesehen  $y(x) := \int_0^1 G(x, s) f(s) ds$ ,  $x \in [0, 1]$ , Lösung des RWP ist, folgt die Behauptung. q.e.d.

**Definition 8.1** Die eindeutig durch 1-4 bestimmte Funktion heißt GREEN'SCHE FUNKTION des RWP

$$\begin{cases} Lu = f \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

**Beispiel:**

RWP

$$\begin{cases} y'' = f(x) & \text{auf } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 = 0 \rightsquigarrow$  Fundamentalsystem:  $1, x$  von der DGL  $y'' = 0$ .Überprüfe:

$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0 \iff \det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Gehe über zu einem neuen Fundamentalsystem  $\{v_1, v_2\} = \{x, x-1\}$ . Dies erfüllt offenbar:  $R_1 v_1 = R_2 v_2 = 0$ . Das homogene RWP

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

ist demnach nur trivial lösbar. Somit besitzt das RWP eine GREEN'SCHE FUNKTION.

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{s(x-1)}{1}, & s \leq x \\ \frac{x(s-1)}{1}, & s \geq x \end{cases} = \begin{cases} s(x-1), & s \leq x \\ x(s-1), & s \geq x \end{cases}, \quad (x, s) \in [0, 1]^2$$

Das inhomogene RWP

$$\begin{cases} y'' = 1 & \text{auf RWP} \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

besitzt demnach die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^1 G(x, s) \cdot 1 \, ds = (x-1) \int_0^x s \, ds + x \int_x^1 s-1 \, ds \\ &= \dots \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

**8.1.1 Bedeutung der Green'schen Funktion für semilineare Probleme**

Betrachte ein RWP für folgende semi-lineare DGL:

$$\begin{cases} Ly = f(x, y, y') & \text{auf } [0, 1] \quad \text{mit } Ly = y'' + c(x)y' + d(x)y \\ R_1 y = R_2 y = 0 \end{cases}$$

Wieder nehmen wir an, dass das homogene RWP

$$\begin{cases} Ly = 0 & \text{auf } [0, 1] \\ R_1 y = R_2 y = 0 \end{cases}$$

nur trivial lösbar ist. Somit besitzt das RWP eine Green'sche Funktion  $G(x, s)$ ,  $(x, s) \in [0, 1]^2$ .

Sei im Weiteren  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Wenn  $u \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  eine klassische Lösung des semi-linearen RWPs ist, dann ist  $u$  insbesondere eine klassische Lösung des inhomogenen linearen RWPs

$$\begin{cases} Lu = \tilde{f} & \text{auf } [0, 1] \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

mit  $\tilde{f}(x) = f(x, u(x), u'(x))$ ,  $x \in [0, 1]$ , und  $\tilde{f} \in \mathcal{C}([0, 1])$ .

Somit ist aber dann  $u$  von der Form:

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) \tilde{f}(s) ds, \quad x \in [0, 1],$$

d.h.  $u$  ist Lösung der Integralgleichung.

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s, u(s), u'(s)) ds, \quad x \in [0, 1]. \quad (*)$$

Umgekehrt gilt: Ist  $u \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  eine Lösung der Integralgleichung (\*), dann ist  $u \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  und  $u$  löst das semi-lineare RWP

$$\begin{cases} Lu = f(x, u, u') \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$$

Somit ist die Existenz einer Lösung des semi-linearen RWPs auf die Existenz eines Fixpunktes der Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{C}^1([0, 1]) &\rightarrow \mathcal{C}^1([0, 1]) \\ u &\mapsto \int_0^1 G(x, s) f(s, u(s), u'(s)) ds \end{aligned}$$

zurückgeführt.

#### Bemerkung:

Wenn die Nichtlinearität nicht explizit von  $u'$  abhängt, kann das Fixpunktproblem auch in  $\mathcal{C}([0, 1])$  formuliert werden.

05.02.'07 Betrachte folgendes semi-lineares RWP

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) & \text{auf } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Dann gilt:

**Satz 8.4** Sei  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, global Lipschitz-stetig bzgl.  $y$ , d.h. es existiert

$$L > 0 : \quad |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L |y - \tilde{y}|, \quad \forall y.$$

Gilt  $L < 8$ , dann gibt es genau eine klassische Lösung  $u \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ , vom semi-linearen RWP (\*)

**Beweis:** Eine Funktion  $u$  ist eindeutige klassische Lösung von (\*) genau dann, wenn  $u \in \mathcal{C}([0, 1])$  und  $u$  ist eindeutiger Fixpunkt der Integralgleichung:

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s, u(s)) ds, \quad x \in [0, 1],$$

wobei  $G(x, s)$  die eindeutige GREEN'SCHE FUNKTION des RWPs

$$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

ist (siehe letzte Vorlesung).

Betrachte die Abbildung:

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{C}([0, 1]) &\rightarrow \mathcal{C}([0, 1]) \\ u &\mapsto \int_0^1 G(x, s) f(s, u(s)) \, ds\end{aligned}$$

Diese ist, da  $G$  auf  $[0, 1]^2$  stetig und  $f$  stetig, wohldefiniert.  $\mathcal{C}([0, 1])$  ausgestattet mit der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm ist ein Banachraum. Weiter gilt für  $u, \tilde{u} \in \mathcal{C}([0, 1])$ ,

$$\begin{aligned}|\phi(u)(x) - \phi(\tilde{u})(x)| &\leq \int_0^1 |G(x, s)| |f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))| \, ds \\ &\leq L \cdot \int_0^1 |G(x, s)| \, ds \cdot \|u - \tilde{u}\|_\infty \quad \forall x \in [0, 1]\end{aligned}$$

**Erinnerung (siehe letzte VL):**

$$\begin{aligned}G(x, s) &= \begin{cases} s(x-1), & 0 \leq s \leq x \leq 1 \\ x(s-1), & 0 \leq x \leq s \leq 1 \end{cases} \\ \text{Also } |G(x, s)| &= \begin{cases} s(1-x), & 0 \leq s \leq x \leq 1 \\ x(1-s), & 0 \leq x \leq s \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_0^1 |G(x, s)| \, ds &= (1-x) \int_0^x s \, ds + x \int_x^1 (1-s) \, ds \\ &= (1-x) \frac{x^2}{2} + x \left(1-x - \frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = \dots = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

**Nebenrechnung:**

Bestimme das Maximum von  $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}$  auf  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right)' &= \frac{1}{2} - x \leq 0 \iff x \geq \frac{1}{2} \\ \implies \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} &\text{ nimmt max in } x = \frac{1}{2} \text{ an.} \implies \max_{x \in [0, 1]} \left\{ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

und es folgt:

$$\int_0^1 |G(x, s)| \, ds \leq \frac{1}{8} \quad \forall x \in [0, 1]$$

somit:

$$\begin{aligned}|\phi(u)(x) - \phi(\tilde{u})(x)| &\leq \frac{L}{8} \|u - \tilde{u}\|_\infty \quad \forall x \in [0, 1], \text{ d.h.} \\ \|\phi(u) - \phi(\tilde{u})\|_\infty &\leq \frac{L}{8} \|u - \tilde{u}\|_\infty\end{aligned}$$

falls  $L < 8$  folgt:  $\phi$  ist strikte Kontraktion  $\xRightarrow{1}$   $\phi$  besitzt einen eindeutigen Fixpunkt  $u$ .  
Nach unserer Vorüberlegung ist  $u$  die eindeutige klassische Lösung von  $(*)$  q.e.d.

---

<sup>1</sup>Mit dem Banach'schem Fixpunktsatz

Anwendungsbeispiel:

$$\begin{cases} y'' = \sin(y)e^x =: f(x, y) & \text{auf } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

besitzt eine eindeutige klassische Lösung, denn  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, global Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  mit Lipschitzkonstante  $e < 8$ .

(da  $f_y(x, y) = \cos(y)e^x$  und  $\max_{\substack{x \in [0, 1] \\ y \in \mathbb{R}}} \{|\cos(y)e^x|\} = e$ ).

Frage: Ist die Verallgemeinerung der Ergebnisse auf nicht separierte Randbedingungen und lineare DGL höherer Ordnung möglich?

Etwa für DGL mit periodischen Randbedingungen der Form:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{auf } [0, 1] \\ y(0) = y(1) \\ y'(0) = y'(1) \end{cases}$$

oder für DGL  $n$ -ter Ordnung:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = f(x) \\ + \text{Randbedingung} \end{cases}$$

Antwort: Im Prinzip ja. Schreibe DGL als System 1. Ordnung.

$$y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & \dots & \dots & -a_{n-1}(x) \end{bmatrix}}_{A(x)} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

und Randbedingungen der Form:  $Ry = Cy(0) + Dy(1) = 0$

mit  $n \times n$ -Matrizen  $C$  und  $D$ .

Wenn  $\phi(x)$  eine Fundamentalmatrix der DGL  $y' = A(x)y$  ist, dann wissen wir:

$$y_p(x) = \phi(x) \int_0^x \phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds, \quad x \in [0, 1],$$

ist eine partikuläre Lösung von  $y' = A(x)y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$  und die allgemeine Lösung dieser DGL ist von der Form:

$$y(x) = y_p(x) + \phi(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Aus der Randbedingung folgt:

$$Dy_p(1) + \underbrace{(C\phi(0) + D\phi(1))}_{=:M} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

Offensichtlich gilt wieder die FREDHOLM-ALTERNATIVE:

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ Ry = 0 \end{cases}$$

ist genau dann nur trivial lösbar, wenn das inhomogene RWP für jede rechte Seite  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$  eine eindeutige Lösung besitzt und dies ist genau dann der Fall, wenn  $M$  regulär ist. In diesem Fall ergibt sich :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = -M^{-1}D\phi(1) \int_0^1 \phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} ds.$$

Somit ist die eindeutige Lösung des halbhomogenen RWPs

$$\begin{cases} y' = A(x)y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \\ Ry = 0 \end{cases}$$

gegeben durch:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \phi(x)\phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} ds - \int_0^1 \phi(x)M^{-1}D\phi(1)\phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^1 \tilde{G}(x, s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} ds, \text{ wobei} \\ \tilde{G}(x, s) &:= \begin{cases} \phi(x)(E_n - M^{-1}D\phi(1))\phi^{-1}(s), & 0 \leq s \leq x \leq 1 \\ -\phi(x)M^{-1}D\phi(1)\phi^{-1}(s), & 0 \leq x \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &\stackrel{1}{=} \begin{cases} \phi(x)M^{-1}C\phi(0)\phi^{-1}(s), & 0 \leq s \leq x \leq 1 \\ -\phi(x)M^{-1}D\phi(1)\phi^{-1}(s), & 0 \leq x \leq s \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Da die Lösung des RWPs für die skalare DGL  $n$ -ter Ordnung durch die 1. Komponente von  $y$  gegeben ist, ergibt sich wegen der speziellen Form der Inhomogenität des Systems 1. Ordnung als Lösung des RWPs für die skalare DGL  $n$ -ter Ordnung

$$\boxed{y(x) = \int_0^1 g(x, s)f(s) ds, \quad x \in [0, 1], \quad \text{mit } g(x, s) = (\tilde{G}(x, s))_{1n}. \quad (**)}$$

der rechte obere Eintrag der matrixwertigen Funktion  $\tilde{G}$ .

### Bemerkung:

(\*\*) ist die gesuchte Integraldarstellung der eindeutigen Lösung des RWPs für die DGL  $n$ -ter Ordnung.

Man kann zeigen: Die Funktion  $g$  ist eindeutig charakterisiert durch die folgenden Eigenschaften:

1.  $g$  ist stetig auf  $[0, 1]^2$  und für jedes  $s \in [0, 1]$  ist  $g$   $(n-2)$ -mal stetig partiell differenzierbar bzgl.  $x$  auf  $[0, 1]^2$ .

---

<sup>1</sup> $E_n - M^{-1}D\phi(1) = M^{-1}C\phi(1)$

2. Außerhalb der Diagonalen ist  $g$   $n$ -mal stetig differenzierbar bzgl.  $x$ . und

$$\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}} g(x+0, x) - \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}} g(x-0, x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1].$$

3.  $\forall s \in [0, 1]$ :

$$Lg(\cdot, s) = g(x, s) + a_{n-1}(x)g^{(n-1)}(x, s) + \cdots + a_0(x)g(x, s) = 0 \quad \forall x \neq s.$$

4.  $\forall s \in ]0, 1[$  erfüllt  $g(\cdot, s)$  die Randbedingung. Diese Funktion  $g$  heißt GREEN'SCHE FUNKTION des RWP's für die DGL  $n$ -ter Ordnung, und wie gesehen ist

$$y(x) = \int_0^1 g(x, s)f(s) ds, \quad x \in [0, 1], \quad \forall f \in \mathcal{C}([0, 1])$$

die eindeutige Lösung des RWP's

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f & \text{auf } [0, 1] \\ C \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} (0) + D \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} (1) = 0 \end{cases}$$

Somit sind wir auch, jedenfalls theoretisch, in der Lage Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen von semi-linearen RWP's höherer Ordnung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

+Randbedingung

zu treffen. Die explizite Berechnung der Green'schen Funktion ist i.A. allerdings schwierig.

## 8.2 Maximums- und Vergleichsprinzipien für lineare RWP

Betrachte jetzt wieder RWPe für DGL 2. Ordnung mit separierten Randbedingungen:

$$\begin{cases} Lu = \boxed{u'' + c(x)u' + d(x)u = f} & \text{auf } [a, b] \\ \begin{cases} R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta_1 \\ R_2 u = \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \eta_2 \end{cases} \end{cases}$$

mit  $c, d \in \mathcal{C}([a, b])$ ,  $a, b, \alpha_i, \beta_i, \eta_i \in \mathbb{R}$   $i = 1, 2$   $a < b$

07.02.'07

$$Lu := u'' + c(x)u' + d(x)u \quad c, d \in \mathcal{C}([a, b])$$

**Lemma 8.2** Sei  $u \in \mathcal{C}^2(I)$ ,  $I$  offenes Intervall  $\subset [a, b]$ .  $u$  sei nicht konstant auf  $I$  und besitze in  $x_0 \in I$  ein Maximum. Dann existiert  $x^* \in I$  mit:

$$u''(x^*) + c(x^*)u'(x^*) < 0.$$

**Bemerkung:**

Im Punkt  $x_0$  wissen wir nur, dass

$$\underbrace{u''(x_0)}_{\leq 0} + c(x_0) \cdot \underbrace{u'(x_0)}_{=0} \leq 0$$

**Beweis: (des Lemmas)** Setze  $a(x) := \exp\left(\int c(x) dx\right)$ ,  $x \in I$ . Es reicht zu zeigen, dass ein  $x^* \in I$  existiert mit  $(a \cdot u)'(x^*) < 0$ , denn

$$\begin{aligned} (a \cdot u)'(x^*) &= a'u'(x^*) + au''(x^*) \\ &= a(x^*)c(x^*)u'(x^*) + a(x^*)u''(x^*) \\ &= \underbrace{a(x^*)}_{>0} (u''(x^*) + c(x^*)u'(x^*)) \\ \text{d.h.} \quad (a \cdot u)'(x^*) < 0 &\iff u''(x^*) + c(x^*)u'(x^*) < 0 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung existiert ein  $x_1 \in I$  mit  $u(x_1) < u(x_0)$

1. Fall:  $x_1 > x_0$

Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein  $x_2 \in ]x_0, x_1[$  mit

$$\begin{aligned} \underbrace{u(x_1) - u(x_0)}_{<0} &= u'(x_2) \underbrace{(x_1 - x_0)}_{>0} \\ \implies u'(x_2) < 0 &\stackrel{a(x)>0}{\implies} a(x_2)u'(x_2) < 0. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite wissen wir, dass  $u'(x_0) = 0$ , also auch  $a(x_0)u'(x_0) = 0$ . Nach dem Mittelwertsatz folgt, dass ein  $x^* \in ]x_0, x_1[$  existiert, so dass

$$\begin{aligned} \underbrace{a(x_2)u'(x_2) - a(x_0)u'(x_0)}_{<0} &= (a \cdot u)'(x^*) \underbrace{(x_2 - x_0)}_{>0} \\ \implies (a \cdot u)'(x^*) &< 0 \end{aligned}$$

2. Fall:  $x_1 < x_0$

analog

q.e.d.

#### SATZ 8.5 (SCHWACHES MAXIMUMPRINZIP)

Sei  $u \in \mathcal{C}^2(]a, b[) \cap \mathcal{C}^2([a, b])$ . Dann gilt:

(i) Wenn  $d(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$  und  $Lu(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$ , dann:

$$u(x) \leq \max\{u(a), u(b)\} \quad \forall x \in [a, b]$$

(ii) Wenn  $d(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$  und  $Lu(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$ , dann:

$$u(x) \leq \max\{0, u(a), u(b)\} \quad \forall x \in [a, b]$$

**Beweis:**

(i) Angenommen, es existiert  $x_0 \in ]a, b[$  mit

$$u(x_0) = \max_{[a, b]} u > \max\{u(a), u(b)\}$$

Dann erfüllt  $u$  die Voraussetzung des Lemmas:

$u$  ist nicht konstant auf  $]a, b[$  und besitzt in  $]a, b[$  ein Maximum. Folglich existiert  $x^* \in ]a, b[$  so, dass

$$\begin{aligned} \underbrace{u''(x^*) + c(x^*)u'(x^*)}_{=(Lu)(x^*)} &< 0. \end{aligned}$$



Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung:

$$(Lu)(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a, b[.$$

Es folgt also:

$$u(x) \leq \max \{u(a), u(b)\} \quad \forall x \in [a, b]$$

- (ii) Wir argumentieren wieder durch Widerspruch. Angenommen, die Behauptung aus (ii) gilt nicht. Dann existiert  $x_0 \in ]a, b[$  mit

$$u(x_0) = \max_{[a, b]} u > \max \{0, u(a), u(b)\} \geq 0.$$

Insbesondere gilt also  $u(x_0) > 0$ ,  $u$ . Da stetig, existiert eine Umgebung  $I = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  für ein  $\delta > 0$ , so dass  $u > 0$  auf ganz  $I$ . O.B.d.A. kann  $I$  so groß gewählt werden, dass  $u$  nicht konstant auf  $I$ . Das Lemma kann nun auf  $u$  und  $I$  angewendet werden. Folglich existiert ein  $x^* \in I$  mit

$$u''(x^*) + c(x^*)u'(x^*) < 0.$$

Da  $d \leq 0$  auf  $[a, b]$ ,  $u > 0$  auf  $I$ , ist  $d(x^*)u(x^*) \leq 0$ , deshalb folgt:

$$(Lu)(x^*) < 0.$$

Widerspruch zur Voraussetzung  $(Lu)(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$

q.e.d.

### Bemerkung:

Ganz analog gilt ein schwaches Minimumsprinzip:

- (i)  $d \equiv 0$  auf  $[a, b]$ ,  $Lu \leq 0$ , dann  $u(x) \geq \min \{u(a), u(b)\}$   
(ii)  $d \leq 0$  auf  $[a, b]$ ,  $Lu \leq 0$ , dann  $u(x) \geq \min \{0, u(a), u(b)\}$

Dies folgt aus dem Maximumprinzip angewendet auf  $v = -u$ .

**Korollar 8.1 (Vergleichsprinzip)** Es sei wieder  $d(x) \leq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Wenn dann  $v, w \in \mathcal{C}^2(]a, b[) \cap \mathcal{C}^2([a, b])$  und gilt:

$$\begin{aligned} v(a) &\leq w(a), & v(b) &\leq w(b) \\ \text{und} & & (Lv)(x) &\geq (Lw)(x) \\ \text{dann ist} & & v(x) &\leq w(x) \end{aligned} \quad \begin{aligned} & & & \forall x \in ]a, b[ \\ & & & \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

**Beweis:** Sei  $u(x) := v(x) - w(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= (Lv)(x) - (Lw)(x) \geq 0 & \forall x \in ]a, b[ \\ u(a) &\leq 0, \quad u(b) \leq 0 \end{aligned}$$

Aus dem schwachen Maximumsprinzip folgt:

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \max_{\substack{\leq 0 \\ \leq 0}} \{0, u(a), u(b)\} = 0 & \forall x \in [a, b] \\ \Rightarrow & & v(x) &\leq w(x) & \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

q.e.d.

## SATZ 8.6 STABILITÄT

Es gelte wieder  $d(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ .

Wenn  $u$  eine klassische Lösung des RWP

$$\begin{cases} Lu = f & \text{auf } [a, b] \\ u(a) = \eta_1, & u(b) = \eta_2 \end{cases}$$

wobei  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  und  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt:

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |u(x)| \leq K \cdot \|f\|_\infty + \max \{ |\eta_1|, |\eta_2| \} \quad (*)$$

mit einer Konstanten  $K$ , die unabhängig von  $f, \eta_1, \eta_2$  ist.

**Bemerkung:**

Aus (\*) folgt sofort die Stabilität bzw. stetige Abhängigkeit der Lösung des RWP von den Daten  $f, \eta_1, \eta_2$ . Ist nämlich  $u$  Lösung des RWP  $Lu = f \quad u(a) = \eta_1 \quad u(b) = \eta_2$  und  $\tilde{u}$  Lösung von  $L\tilde{u} = \tilde{f}, \tilde{u}(a) = \tilde{\eta}_1 \quad \tilde{u}(b) = \tilde{\eta}_2$  so folgt  $v = u - \tilde{u}$  ist Lösung von  $Lv = f - \tilde{f} \quad v(a) = \eta_1 - \tilde{\eta}_1 \quad v(b) = \eta_2 - \tilde{\eta}_2$ .

Insbesondere folgt aus (\*) sofort die Eindeutigkeit der Lösung des RWP.

$$\stackrel{(*)}{\implies} \|u - \tilde{u}\|_\infty \leq K \|f - \tilde{f}\|_\infty + \max \{ |\eta_1 - \tilde{\eta}_1|, |\eta_2 - \tilde{\eta}_2| \}$$

**Beweis: (vom Satz 8.6)** Für erst später zu bestimmendes  $\lambda > 0$  betrachte

$$w(x) = \|f\|_\infty e^{\lambda(x-a)} - c \quad x \in [a, b],$$

wobei  $c := e^{\lambda(b-a)} \|f\|_\infty + \max \{ |\eta_1|, |\eta_2| \} \geq 0$ .

Klar:

$$w \in \mathcal{C}^2([a, b]) \text{ und } (Lw)(x) = (\lambda^2 + c(x)\lambda + d(x)) \|f\|_\infty \underbrace{e^{\lambda(x-a)}}_{\geq 1} \underbrace{-c}_{\leq 0} \underbrace{d(x)}_{\leq 0} \geq (\lambda^2 + c(x)\lambda + d(x)) \|f\|_\infty$$

**Nebenrechnung:**

$$\text{Für } \lambda > 0 \text{ ist } \lambda^2 + c(x)\lambda + d(x) + 1 \geq 0 \iff \lambda > \lambda_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

die positive Nullstelle der einen Seite, d.h.

$$\lambda_2(x) = -\frac{c(x)}{2} + \sqrt{\frac{c^2(x)}{4} - d(x) + 1} \quad \forall x \in [a, b]$$

wähle also:  $\lambda \geq \max_{x \in [a, b]} \left\{ -\frac{c(x)}{2} + \sqrt{\frac{c^2(x)}{4} - d(x) + 1} \right\}$

$$\geq 1 \cdot \|f\|_\infty \implies \|Lw(x)\| \geq \|f\|_\infty \quad \forall x \in [a, b] \text{ wenn } \lambda \text{ wie in der Nebenrechnung gewählt ist.}$$

$$\implies L(w+u)(x) = L(w)(x) \pm \underbrace{L(u)(x)}_{=f(x)} \geq \|f\|_\infty \pm f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow[\text{Prinzip}]{\text{schw. Max}} w(x) \pm u(x) \leq \max \{0, w(a) \pm u(a), w(b) \pm u(b)\} \\
 & = \max \{0, \|f\|_\infty - c \pm \eta_1, \|f\|_\infty e^{\lambda(b-a)} - c \pm \eta_2\} \\
 \text{und } & w(x) \pm u(x) \geq w(a) \pm u(a) = \|f\|_\infty - c \pm u(x) \\
 \Rightarrow & |u(x)| \leq \max \{0, \|f\|_\infty - c + |\eta_1|, \|f\|_\infty e^{\lambda(b-a)} - c + |\eta_2|\} + c - \|f\|_\infty \\
 & = \max \left\{ \underbrace{c - \|f\|_\infty}_{\leq c}, \underbrace{|\eta_1|}_{\leq c}, \underbrace{\left( e^{\lambda(b-a)} - 1 \right) \|f\|_\infty + |\eta_2|}_{\leq c} \right\} \leq c
 \end{aligned}$$

Es folgt:  $|u(x)| \leq c \quad \forall x \in [a, b]$ . mit  $c = e^{\lambda(b-a)} \|f\|_\infty + \max \{ |\eta_1|, |\eta_2| \}$ . Damit gilt (\*) mit der Konstanten  $K = e^{\lambda(b-a)}$ , die wie oben gesehen nur von  $c(\cdot), d(\cdot), a$  und  $b$  abhängt.

q.e.d.

**SATZ 8.7 (STARKES MAXIMUMPRINZIP)**

Sei  $d(x) \leq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ ,  $u \in \mathcal{C}^2([a, b]) \cap \mathcal{C}([a, b])$  mit  $Lu(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$ . Wenn  $u$  in einem Punkt  $x_0 \in ]a, b[$  ein nicht-negatives Maximum annimmt, dann ist  $u$  konstant auf  $[a, b]$ .

14.02.'07

**Beweis:** Angenommen  $u$  ist nicht konstant auf  $[a, b]$ .

- Fall 1: Angenommen  $u(x_0) = \max_{[a, b]} u > 0$ . Dann existiert eine Umgebung  $I$  von  $x_0 \in ]a, b[$ , so dass  $u > 0$  auf ganz  $I$  und  $u$  ist nicht konstant auf  $I$ . Das Lemma 8.1 angewendet mit  $u$  auf  $I$  liefert die Existenz eines  $x^* \in I$  mit  $u''(x^*) + c(x^*)u'(x^*) < 0$ . Da  $d \leq 0$  und  $u > 0$  auf  $I$ , ist  $d(x^*)u(x^*) \leq 0$ ; somit folgt  $Lu(x^*) < 0$  zur Voraussetzung  $Lu \geq 0$  auf  $[a, b]$ .

- Fall 2:  $u(x_0) = \max_{[a, b]} u = 0$

Dann existiert  $x_1 \in ]a, b[$  mit  $u(x_1) < u(x_0) = 0$ .

Angenommen:  $x_1 > x_0$  (Fall  $x_1 < x_0$  geht analog). Für noch später bestimmendes  $\lambda, \delta > 0$ , betrachte die Funktion  $w(x) = \delta(e^{\lambda(x-x_0)} - 1)$ ,  $x \in [a, b]$ . Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
 & * \quad w \in \mathcal{C}^2([a, b]) \\
 & * \quad w(x_0) = 0, \quad w(x) < 0, \quad \begin{cases} w(x) < 0, & x < x_0 \\ w(x) > 0, & x > x_0 \end{cases} \implies \boxed{u(x_0) + w(x_0) = 0} \\
 & * \quad w'(x_0) = \delta\lambda > 0 \implies \boxed{\underbrace{u'(x_0) + w'(x_0)}_{=0} = \delta\lambda > 0}
 \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$(Lw)(x) = \underbrace{\lambda^2 + c(x)\lambda + d(x)}_{*} \underbrace{\delta e^{\lambda(x-x_0)}}_{\geq 0} - \underbrace{\delta \cdot d(x)}_{\substack{>0 \\ \leq 0}}$$

Für  $\lambda \geq \max_{[a, b]} \left\{ -\frac{c(x)}{2} + \sqrt{\frac{c^2(x)}{4} - d(x)} \right\}$  ist  $* \leq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Folglich ist für entsprechend groß gewähltes  $\lambda$   $Lw \geq 0$  auf  $[a, b]$ .

Wähle nun für dieses feste  $\lambda$  noch  $\delta > 0$  genügend klein, so dass

$$\underbrace{u(x_1) + w(x_1)}_{\leq 0!} < 0.$$

Für die Funktion  $v := u + w$  auf  $[x_0, x_1]$  gilt dann:

- \*  $v \in \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$
- \*  $v(x_0) = 0, \quad v(x_1) \leq 0$
- \*  $Lv = Lu + Lw \geq 0 \quad \text{auf } [x_0, x_1].$   
 $\quad \quad \quad \geq 0 \quad \quad \geq 0$

$\xRightarrow{d \leq 0}$  Aus dem schwachen Maximumprinzip folgt:

$$v(x) \leq \max \left\{ 0, v(x_0), v(x_1) \right\} \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

$$\text{d.h. } v(x) \leq 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

Andererseits gilt aber:  $v(x_0) = 0, \quad v'(x_0) = \delta A > 0$ , d.h. aber es existiert  $x^* \in ]x_0, x_1[$  mit  $v(x) > 0 \quad \nexists$  q.e.d.

### Ergänzung: Sturm-Liouville-Problem

$$\begin{cases} Lu := (p(x)u') + q(x)u = f, & x \in [a, b] \\ R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a)u'(a) = \eta_1 \\ R_2 u = \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b)u'(b) = \eta_2 \end{cases}$$

auch Sturm'sches RWP, wobei

- \*  $p \in \mathcal{C}^1([a, b]), \quad p > 0 \text{ auf } [a, b].$
- \*  $q \in \mathcal{C}([a, b])$
- \*  $f \in \mathcal{C}([a, b]), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$

Erinnerung (13. Übung): Falls  $q \leq 0$  auf  $[a, b]$ ,  $R_1 u = a \quad R_2 u = b$ , dann ist das homogene Sturm'sche RWP nur trivial lösbar. Falls  $q < 0$  auf  $[a, b]$ ,  $R_1 u = u'(a) \quad R_2 u = u'(b)$ , dann ist das zugehörige Sturm'sche RWP nur trivial lösbar. Ist  $q \leq 0$ , dann ist dies i.A. nicht richtig.

### Beispiel:

$$\begin{cases} u'' = 0 \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

wird von jeder konstanten Funktion gelöst.

### Bemerkung:

Sturm'sches RWP:  $Lu = (pu')' + qu = f$ .

$$\Rightarrow p(x)u'' + p'(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow u'' + \underbrace{\frac{p'(x)}{p(x)}}_{=:c(x)} u' + \underbrace{\frac{q(x)}{p(x)}}_{=:d(x)} u = \underbrace{\frac{1}{p(x)} f(x)}_{\tilde{f}(x)}, \quad x \in [a, b]$$

d.h. das Sturm'sche RWP lässt sich schreiben in der uns wohl bekannten Form:

$$u'' + c(x)u' + d(x)u = \tilde{f}.$$

Umgekehrt lässt sich jedes RWP für eine DGL der Form  $u'' + c(x)u' + d(x)u = f$  mit  $c, d \in \mathcal{C}([a, b])$  überführen in die Sturm'sche Form:

multipliziere DGL dazu mit

$$\begin{aligned} p(x) &:= e^{\int c(x) dx} \quad c \in \mathcal{C}^1([a, b]), \quad c > 0 \quad \text{auf } [a, b] \\ \Rightarrow p(x)u'' + \underbrace{p(x)c(x)}_{p'(x)} u' + \underbrace{p(x)d(x)}_{q(x)} u &= \underbrace{p(x)f}_{\tilde{f}}. \end{aligned}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(p(x)u')'}$$

Damit ist klar, dass sämtliche bislang gezeigten Ergebnisse (Fredholm-Alternative, Existenz von Green'schen Funktion, Maximumprinzipien) sich auch für Sturm'sche RWPe formulieren lassen.

Für manche Zwecke ist die Sturm'sche Schreibweise besser geeignet als die bislang übliche Form

$$Lu = u''c(x)u' + d(x)u = f.$$

Für den Sturm'schen Differentialoperator

$$Lu = (pu')' + qu$$

gilt die so genannte Lagrange-Identität:

$$\forall u, v \in \mathcal{C}^2([a, b]), \quad vLu - uLv = v(pu')' - u(pv')' = \dots = (p(u'v - v'u))'.$$

Mit Hilfe dieser Identität folgt dann  $\forall u, v \in \mathcal{C}^2([a, b])$  mit  $R_1u = R_2u = R_1v = R_2v = 0$

$$\int_a^b vLu - uLv = 0 \quad (*)$$

denn es gilt:

$$(u'v - v'u)(b) = (u'v - v'u)(a) = 0 \quad (\text{nachrechnen!})$$

(In der 13. Übung bereits im Spezialfall gesehen.) Stattet man  $\mathcal{C}([a, b])$  mit dem  $\mathcal{L}^2$ -Skalarprodukt aus:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in \mathcal{C}([a, b])$$

$\Rightarrow (\mathcal{C}([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist Prä-Hilbertraum, so lässt sich (\*) formulieren als

$$(u, Lv) = (Lv, u) \quad \forall u, v \in \mathcal{C}^2([a, b]).$$

Der Operator  $L : D(L) := \mathcal{C}^2([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$  wird als symmetrisch bezeichnet.  
 $u \mapsto Lu = (pu')' + qu$

## Ergänzung zur Fredholm-Alternative

**Satz 8.8** *Besitzt das homogene Sturm'sche RWP*

$$\begin{cases} Lu = (pu')' + qu = 0 \\ R_1u = \alpha_1u(a) + \alpha_2u'(a) = 0 \\ R_2u = \beta_1u(b) + \beta_2u'(b) = 0 \end{cases}$$

eine nicht-triviale Lösung  $u_*$ , dann besitzt das halbhomogene Sturm'sche RWP mit rechter Seite  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  genau dann mindestens eine Lösung, wenn die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_a^b u_*(x) f(x) dx = 0$$

gilt.

**Beweis:**

„ $\Rightarrow$ “ Angenommen es existiert eine Lösung  $u$  des halbhomogenen Sturm'schen RWPs mit rechter Seite  $f$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b u_*(x) f(x) dx &= \int_a^b u_*(x) (Lu)(x) dx \\ &= \int_a^b u_*(x) \underbrace{(Lu_*)(x)}_{=0} u(x) dx = 0 \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “ Betrachte zunächst den Fall  $\beta_1 \neq 0$ . Es gibt eine partikuläre Lösung  $u$  des linearen AWP's

$$\begin{cases} Lu = f & \text{auf } [a, b] \\ u(a) = u'(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{vgl. § 5})$$

Außerdem wissen wir, dass  $U_* = c_1 u_1 + c_2 u_2$ , wobei  $\{u_1, u_2\}$  ein Fundamentalsystem der DGL  $LU = 0$ ,  $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  bilden.

Da

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b u_*(x) f(x) dx = 0 = \int_a^b u_*(x) \left[ (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) \right] dx \\ &= u_*(b)p(b)u'(b) - u_*(a)p(a)\underbrace{u'(a)}_{=0} - \int_a^b (p(x)u'_*(x))u'(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)u_*(x) dx \\ &= u_*(b)p(b)u'(b) - p(b)u'_*(b)u(b) + p(a)u'_*(a)\underbrace{u(a)}_{=0} \int_a^b \underbrace{(Lu_*)(x)}_{=0} u(x) dx \\ &= \begin{cases} -u'_*(b)p(b)u(b), & \text{falls } \beta_2 = 0 \\ U_*(b)(p(b)u'(b) + \frac{\beta_1}{\beta_2}u(b)), & \text{falls } \beta_2 \neq 0 \end{cases} \implies u'_*(b) = -\frac{\beta_1}{\beta_2 p(b)} u_*(b) \end{aligned}$$

$\implies$  Falls  $\beta_2 = 0$ , dann ist entweder  $u(b) = 0$  und dann ist  $u$  schon die gesuchte Lösung des halbhomogenen RWPs, oder aber  $u'_*(b) = 0$ .

Falls  $\beta_2 \neq 0$ , gilt entweder  $p(b)u'(b) + \frac{\beta_1}{\beta_2}u(b) = 0$  und dann ist wieder  $u$  die gesuchte Lösung des halbhomogenen RWPs, oder aber  $u_*(b) = 0$ .

Nehmen wir also an  $u'_*(b) = 0$ . Dann folgt aus  $R_2 u_* = 0$  sofort  $u_*(b) = 0$ .

$$\implies \begin{cases} 0 = u_*(b) = c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) \\ 0 = u'_*(b) = c_1 u'_1(b) + c_2 u'_2(b) \end{cases} \implies \begin{bmatrix} u_1(b) & u_2(b) \\ u'_1(b) & u'_2(b) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ist eine nicht triviale Lösung. Die Fundamentalmatrix ist dabei regulär.

q.e.d.

# Index

## Symbols

$\alpha$ -Grenzmenge	84
$\alpha$ -Grenzwert	84
$\alpha$ -Limesmenge	84
$\omega$ -Grenzmenge	84, 85
$\omega$ -Grenzwert	84
$\omega$ -Limesmenge	84

## A

Arzela-Ascoli	
Satz von	24
attraktiv	65
Attraktor	89
globaler	89

## B

Bahn	80
Bifurkation	90
Bifurkationspunkt	90

## C

Charakteristikenverfahren	18
---------------------------	----

## D

Diagonalfolgenargument	26
Duhamel-Formel	53

## E

erstes Integral	74
Euler'sches Polygonzugverfahren	22

## F

Fixpunktsatz von Schauder	27
Fixpunktsatz von Weissinger	36
Fortsetzung	27
echte	27
Fredholm-Alternative	102, 122, 123
Fundamentalmatrix	52
Haupt	52
Fundamentalsystem	52

## G

Gleichgewichtspunkt	68
Green'sche Funktion	111
Green'schen Funktion	122
Gronwall	
Lemma von	43

## H

halbeinfach	68
Halbtrajektorie	
negative	80
positive	80
Hamilton'sches System	75
Hamilton-Funktion	75
Heugabelverzweigung	91, 98
Hopf-Bifurkation	99
hyperbolisch	
Punkt	93
hyperbolisch (nicht)	
Punkt	93

## I

invariante Menge	84
negativ	84
positiv	84
Invarianzprinzip von La Salle	86

## K

kompakte	
Abbildung	27
kritischer Punkt	68

## L

Lösung	
klassische	102
Lagrange-Identität	122
Lipschitzstetigkeit	32
Lyapunov-Funktion	
schwache	77
starke	77

## M

maximale Lösung	27
Maximumprinzip	122
starkes	120
schwaches	117

## O

Orbit	80
-------	----

## P

Peano	
Satz von	21
Picard-Lindelöf	
Satz von	39
lokale Version	33
Picard-Operator	35

Poincaré-Bendixson	
Satz von .....	89

## R

Randbedingung	
Dirichlet	
homogene .....	101
inhomogene .....	101, 102
gemischte .....	101
Neumann	
homogene .....	101
inhomogene .....	101, 102
Robin'sche .....	102, 106
Ruhelage .....	68

## S

Satz von	
der globale Existenz von Lösungen .....	42
Satz von	
der stetige Abhängigkeit vom Anfangswert .....	47
stabil .....	65
asymptotisch .....	65
exponentiell .....	66
Stabilität .....	119
Linearisierte .....	71
stationäre Lösung .....	68
Stum'sches RWP .....	121
Stum-Liouville-Problem .....	121

## T

Trajektorie .....	80
Transversalitätsbedingung .....	96, 98

## V

Variation der Konstanten	
Satz von .....	53
Vergleichsprinzip .....	118
Verzweigung .....	90
subkritische .....	94
superkritische .....	94
transkritische .....	94
Verzweigungspunkt .....	90

## W

Wronski-Determinante .....	52
----------------------------	----