Kapitel II
Lineare Differentialgleichungen

Basti dire che in lui orgoglio e analisi matematica si erano a tal punto associati da dargli l'illusione che gli astri obbedissero ai suoi calcoli (come, di fatto, sembravano fare).
Tomasi

In der Differentialrechnung begegnen uns lineare Abbildungen als Differentiale, als lineare Approximationen differenzierbarer Abbildungen lokal um einen Punkt. Ebenso wird hier in der Theorie der Differentialgleichungen das Verhalten der Lösungsschar einer differenzierbaren Differentialgleichung lokal um eine bestimmte Lösung durch eine lineare Differentialgleichung approximativ beschrieben: die Variationsgleichung. Das zeigt die grundlegende Bedeutung dieser Gleichungen. Und sie empfehlen sich auch, weil man über ihre Lösungen viel sagen kann. Insbesondere die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist eigentlich reine Algebra, das werden wir deutlich hervortreten lassen. Die Gleichungen zweiter Ordnung stellen wir im einzelnen vor, weil sich an ihnen schon manches in höchster Allgemeinheit zeigt, und weil sie als Schwingungsgleichungen wichtige Anwendungen haben. Schließlich behandeln wir die Eulerschen Differentialgleichungen.

§ 1. Allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen

Es handelt sich um die Gleichungen

$$\dot{x} = A(t) \cdot x.$$

Wir haben sie schon für $x \in \mathbb{R}^n$ betrachtet; als Variationsgleichung tritt eine solche Gleichung auf. Jetzt wollen wir allgemeiner — oder spezieller, wie man's nimmt — auch komplexe Koeffizienten zulassen. Die Vektoren x, $\dot{x}$ sind hier also komplexe Spalten-n-tupel.

Sei $U \cong \mathbb{C}^n$ ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum, und $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine **homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung** ist durch eine stetige Abbildung

$$A : D \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U) \cong \mathbb{C}^{n \cdot n}$$

gegeben, nämlich auf $U \times D$ als Gleichung

$$\dot{x} = A(t) \cdot x.$$

Ist $b : D \to U$ eine weitere stetige Abbildung, so ist die zugehörige **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\dot{x} = A(t) \cdot x + b(t).$$

Weil auf kanonische Weise $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (\mathrm{Re}\, z,\ \mathrm{Im}\, z)$, und daher $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ ist, und weil $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$, eine komplex-lineare Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist eine spezielle reell-lineare Abbildung $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, so ist in der Tat die lineare Differentialgleichung mit komplexen Koeffizienten auch ein Spezialfall derer mit reellen Koeffizienten, wie man auch das Umgekehrte behaupten kann. Das t bleibt hier stets reell, D ein Intervall, obwohl das nicht so wesentlich ist. Eine Abbildung $f : D \to U$ ist entsprechend aus $C^k(D, U)$, wenn sie als Abbildung $D \to \mathbb{R}^{2n}$ aus $C^k(D, \mathbb{R}^{2n})$ ist.

Im allgemeinen ist über die Lösungen der linearen Differentialgleichungen zunächst folgendes zu sagen:

(1.1) Hauptsatz über lineare Differentialgleichungen.

(i) Die Lösungen der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ sind auf ganz D definiert und bilden einen n-dimensionalen komplexen Untervektorraum L von $C^1(D, U)$. Ist $\tau \in D$, so wird ein Isomorphismus $L \to U$ durch $\alpha \to \alpha(\tau)$ hergestellt.

(ii) Die Lösungen der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t) \cdot x + b(t)$ bilden einen affinen Unterraum von $C^1(D, U)$ zum Vektorraum L.

Beweis: (i) Wir haben schon in (I, 1.6) als Anwendung der Picard-Lindelöf Iteration gesehen, daß es zu jedem Anfangswert $u \in U$ genau eine Lösung $\alpha_u : D \to U$ mit $\alpha_u(\tau) = u$ gibt. Also ist die Abbildung $U \to L$, $u \mapsto \alpha_u$ eine Bijektion, mit der Umkehrung

$$L \to U, \quad \alpha \mapsto \alpha(\tau).$$

Nun ist L auch ein Untervektorraum von $C^1(D, U)$, nämlich der Kern der linearen Abbildung

$$C^1(D, U) \to C^0(D, U), \quad \alpha \mapsto \dot{\alpha} - A\alpha.$$

Auch ist die Abbildung $\alpha \mapsto \alpha(\tau)$ linear, daher die erste Behauptung.
(ii) Man könnte zweifeln, ob die Lösungen der inhomogenen Gleichung stets auf ganz D definiert sind. Das wird sich nun in (1.3) von selbst ergeben. Dann ist aber die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung das Urbild von $b \in C^0(D, U)$ bei der linearen

Abbildung $C^1(D,U) \to C^0(D,U)$, $\alpha \mapsto \dot{\alpha} - A\alpha$, also ein affiner Raum zum Vektorraum L, dem Urbild von $\{0\}$. □

Betrachten wir zunächst weiter die homogene Gleichung für $U = \mathbb{C}^n$. Eine Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von L, also ein System n linear unabhängiger Lösungen, heißt **Fundamentalsystem**, und die Matrix Φ mit den Spalten $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ heißt **Fundamentalmatrix** der gegebenen Differentialgleichung. Sie löst die Differentialgleichung

$$\dot{z} = A(t) \cdot z \quad \text{für} \quad z \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$$

zu einem regulären Anfang $\Phi(\tau)$. Ein beliebiger Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ schreibt sich als Linearkombination der φ_j mit Koeffizienten h_j, also $v = \Phi(\tau) \cdot h$, und die Lösung zum Anfang v ist $\alpha_v = \Phi \cdot h$. Wählt man Φ so, daß $\Phi(\tau) = \mathrm{id}$, so erhält man den Isomorphismus

$$\mathbb{C}^n \to L, \quad v \mapsto \Phi \cdot v,$$

invers zu dem des Satzes.

Die Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sind nach dem Satz genau dann linear unabhängig, wenn für ein $\tau \in D$ die Vektoren $\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau)$ linear unabhängig sind. Mit anderen Worten:

(1.2) Bemerkung. *Ist $\Phi : D \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ eine Lösungsmatrix der homogenen Gleichung auf $U = \mathbb{C}^n$, so ist $\det \Phi = 0$ genau dann, wenn $\det \Phi(\tau) = 0$ für ein $\tau \in D$.*

Mit $\det \Phi$ ist hier eigentlich die Funktion $\det \circ \Phi : t \mapsto \det(\Phi(t))$ gemeint. Wir werden aber auch künftig dafür meist $\det \Phi$ schreiben, weil es in Rechnungen bequemer ist.

Gesetzt, man hat die homogene Gleichung vollständig gelöst, also eine Fundamentalmatrix $\Phi : D \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ gefunden, so gelingt die vollständige Lösung des inhomogenen Systems nach Satz (1.1), wenn man nur eine "spezielle" Lösung findet; alle anderen entstehen daraus durch Addition von Lösungen der homogenen Gleichung. Wie findet man diese spezielle Lösung? Natürlich durch Transformieren, mit der Transformation, welche die Lösungen der homogenen Gleichung in konstante Funktionen überführt. Mit anderen Worten, man schreibt die gesuchte Lösungskurve an jeder Stelle t nicht in ihren Komponenten als Linearkombination der Standardbasis von $\mathbb{C}^n$, sondern vielmehr als Linearkombination der Spalten φ_j der Fundamentalmatrix Φ des zugehörigen homogenen Systems.

(1.3) Variation der Konstanten. *Sei Φ eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung*

$$\dot{x} = Ax.$$

Zur Lösung einer zugehörigen inhomogenen Gleichung

$$\dot{x} = Ax + b$$

setze man $y = \Phi^{-1}x$, *also* $x = \Phi y$. *Die transformierte Gleichung ist* $\dot{y} = \Phi^{-1}b$ *und hat die Lösung*

$$\beta(t) = u + \int_\tau^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

zum Anfang $\beta(\tau) = u$. *Also hat die inhomogene Gleichung die Lösung*

$$\alpha(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)v + \Phi(t) \cdot \int_\tau^t \Phi^{-1}(s) \cdot b(s)ds$$

zum Anfang $\alpha(\tau) = v$.

Beweis: Die transformierte Gleichung rechnet man leicht aus:

$$\begin{array}{lll} & \dot{x} = (\Phi y)^\cdot & = \dot{\Phi}y + \Phi\dot{y} = A\Phi y + \Phi\dot{y}, \\ \text{und andererseits gilt} & \dot{x} = Ax + b & = A\Phi y + b, \end{array}$$

also $\dot{y} = \Phi^{-1}b$. Das übrige ist klar. □

Überhaupt folgt aus der Gleichung $\Phi \cdot \Phi^{-1} = \mathrm{id}$ für eine differenzierbare Abbildung $\Phi : D \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ durch Differenzieren

$$\dot{\Phi}\Phi^{-1} + \Phi(\Phi^{-1})^\cdot = 0, \quad \text{also}$$

$$(\Phi^{-1})^\cdot = -\Phi^{-1}\dot{\Phi}\Phi^{-1}. \tag{1.4}$$

Daraus erhält man die transformierte Gleichung durch direktes Einsetzen in die Definition. Merke: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, und die skalare Formel

$$(1/\varphi)^\cdot = -\dot{\varphi}/\varphi^2$$

überträgt man auf den nicht kommutativen Fall, indem man den quadratischen Faktor im Nenner gerecht auf beide Seiten des Zählers verteilt.

Es gibt keine immer anwendbare allgemeine Formel für die Lösung der homogenen Gleichung, aber man kennt Lösungsansätze für viele spezielle Typen. Besonders einfach sieht es aus für Gleichungen in der Dimension eins, für Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, oder allgemeiner für die Gleichung $\dot{x} = A(t) \cdot x$, wobei die Matrix A dergestalt von t abhängt, daß für alle $t, s \in D$ gilt

$$A(t) \cdot A(s) = A(s) \cdot A(t).$$

In diesem Fall ist die Fundamentallösung Φ zum Anfang $\Phi(\tau) = \mathrm{id}$ durch

$$\Phi(t) = e^{B(t)}, \quad B(t) = \int_\tau^t A(s)ds$$

gegeben. In diesem Fall ist nämlich

$$\frac{d}{dt} e^{B(t)} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot k \cdot \dot{B} \cdot B^{k-1} = \dot{B} e^B .$$

Die entscheidende Gleichung $(B^k)^\cdot = k \cdot \dot{B}\, B^{k-1}$ ist *nicht immer richtig* und folgt hier, weil auch $B\dot{B} = \dot{B}B$. Letzteres heißt ja

$$A(t) \cdot \int_\tau^t A(s)ds = \int_\tau^t A(t)A(s)ds = \int_\tau^t A(s)ds \cdot A(t).$$

Im allgemeinen, wie gesagt, bleibt die Suche nach Lösungen ein Problem. Angenommen jedoch man hat von der Gleichung

$$\dot{x} = A(t) \cdot x$$

auf $D \times \mathbb{C}^n$ schon k linear unabhängige Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ gefunden, so kann man die Aufgabe, die fehlenden Lösungen zu finden, lokal auf das Problem reduzieren, eine Differentialgleichung der Ordnung $n - k$ zu lösen:

(1.5) Reduktion der Ordnung. *Sind zu der Differentialgleichung auf* $D \times \mathbb{C}^n$

$$\dot{x} = A(t) \cdot x$$

schon die unabhängigen Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ *gegeben, so ist (nach geeigneter Umnumerierung der Koordinaten) oBdA die Matrix* $\Phi(t)$ *mit den Spalten* $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, $e_{k+1}, \dots, e_n$ *in* $t = \tau$ *regulär. Wir benutzen* Φ^{-1} *zur Transformation der Gleichung und führen also die Lösungen* $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ *anstelle der ersten Einheitsvektoren als Basis in* $\mathbb{C}^n \times \{t\}$ *ein. Die durch* $y = \Phi^{-1}x$ *transformierte Gleichung ist*

$$\dot{y} = -\Phi^{-1}\dot{\Phi}\Phi^{-1}x + \Phi^{-1}\dot{x} = \Phi^{-1}A\Phi y - \Phi^{-1}\dot{\Phi}y = \Phi^{-1}(A\Phi - \dot{\Phi})y.$$

Also hat die transformierte Gleichung die Gestalt

$$(*) \qquad \dot{y} = B(t)y,$$

und die ersten k *Spalten von* $B = \Phi^{-1}(A\Phi - \dot{\Phi})$ *verschwinden, weil die ersten* k *Spalten von* $A\Phi$ *und* $\dot{\Phi}$ *übereinstimmen. Wir zerlegen entsprechend* $y = (y_1, y_2)$ *in die ersten* k *und die letzten* $(n-k)$ *Komponenten, dann hat die Gleichung* $(*)$ *die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{array}{c} \\ k\{ \end{array} \begin{array}{c} k \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_1 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right) \end{array} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

also $\dot{y}_2 = B_2 y_2$, *eine lineare Differentialgleichung der Ordnung* $n-k$, *und* $\dot{y}_1 = B_1 y_2$, *was nach Lösung der ersten Gleichung durch Integration zu lösen ist.* □

Das Verfahren funktioniert nur lokal um $\tau \in D$, weil Φ nur lokal regulär sein muß . Ist allerdings die Differentialgleichung analytisch, wie alles zu sein pflegt, was man in Formeln hinschreibt, so sind auch die Lösungen analytisch, und eine lokale Lösung ist auch global eine Lösung.

Schließlich ein Wort über das Verhältnis des Reellen zum Komplexen. Angenommen

$$A : D \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$$

definiert die reell-lineare Differentialgleichung $\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n$. Dann können wir A als spezielle komplexe Matrix auffassen, und die zugehörige komplexe Gleichung

$$\dot{z} = Az, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

betrachten. Ist α eine komplexe Lösung, also $\dot{\alpha} = A\alpha$, so ist die konjugierte Funktion $\bar{\alpha}$ auch eine Lösung, weil A reell ist:

$$\dot{\bar{\alpha}} = \overline{A\alpha} = \bar{A}\bar{\alpha} = A\bar{\alpha}.$$

Also sind die beiden Funktionen

$$\mathrm{Re}\,\alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\,\alpha = \tfrac{1}{2i}(\alpha - \bar{\alpha})$$

reelle Lösungen. Eine reelle Basis reeller Lösungen ist auch komplex linear unabhängig, also eine komplexe Basis, denn ist $\sum_j \lambda_j \varphi_j = 0$, so $\sum_j (\mathrm{Re}\,\lambda_j)\varphi_j = \sum_j (\mathrm{Im}\,\lambda_j)\varphi_j = 0$, also $\lambda_j = 0$ für alle j, falls die φ_j reell und über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind. Hat man umgekehrt eine komplexe Basis, so bilden die Real- und Imaginärteile ein reelles Erzeugendensystem. Ist $\alpha(\tau) \in \mathbb{R}^n$, so ist $\alpha(\tau) = \bar{\alpha}(\tau)$, also $\alpha = \bar{\alpha}$ reell. Die Sätze dieses Abschnitts gelten mit gleichem Beweis auch für reelle Gleichungen $\dot{x} = A(t)\dot{x} + b(t)$, und $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ statt $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$.

§ 2. Die Entwicklung der Determinante

Wir kehren noch einmal zurück zur linear-homogenen Gleichung

$$\dot{x} = A(t) \cdot x.$$

Es ist zunächst überraschend, wenn auch leicht zu sehen, daß eine Lösungsmatrix genau dann für alle t regulär ist, wenn sie für ein t regulär ist. Genaueres lehrt der folgende

(2.1) Satz von Liouville. Sei $\Psi : D \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ eine $(n \times n)$-Lösungsmatrix der homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$, dann gilt:

$$(\det \Psi)^{\cdot} = \mathrm{Sp}(A) \cdot \det \Psi, \quad \mathrm{Sp} = \mathrm{Spur}.$$

Folgerung. Für $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ ist $\det e^A = e^{\mathrm{Sp}\, A}$.

Beweis (Folgerung): e^{At} löst $\dot{x} = Ax$ mit Anfang id. Nach dem Satz löst also $\det e^{At}$ die Gleichung $\dot{y} = \mathrm{Sp}(A) \cdot y$ zum Anfang $\det(\mathrm{id}) = 1$. Dasselbe tut auch $e^{\mathrm{Sp}(A)t}$, also sind beide Funktionen gleich. □

Beweis (Satz): Hat $\Psi(t) = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ die Spalten ψ_ν, so gilt

$$(\det \Psi)^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \det(\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}, \dot{\psi}_i, \psi_{i+1}, \ldots, \psi_n), \tag{2.2}$$

denn $\det(\Psi)$ ist das Dachprodukt der Spalten von Ψ:

$$\det(\Psi) = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n,$$

und weil das Dachprodukt bilinear ist, gilt für die Ableitung die Produktregel, was (2.2) nur besagt.

Betrachten wir nun zu einem $\tau \in D$ zunächst eine Fundamentalmatrix Φ mit $\Phi(\tau) = \mathrm{id}$, so folgt

$$(\det \Phi)^{\cdot}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \det(e_1, \ldots, e_{i-1}, Ae_i, e_{i+1}, \ldots e_n) = \mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, A \cdot \det \Phi(\tau).$$

Allgemein ist nun für eine Lösungsmatrix $\Psi(t) = \Phi(t) \cdot C$ mit einer konstanten Matrix C, also

$$(\det \Psi)^{\cdot}(\tau) = (\det \Phi \cdot \det C)^{\cdot}(\tau) = \mathrm{Sp}\, A \cdot \det(\Phi(\tau) \cdot C) = \mathrm{Sp}\, A \cdot \det \Psi(\tau).$$

□

Der Satz von Liouville beschreibt, wie sich das Volumen etwa eines Einheitswürfels unter der Transformation $\Psi(t)$ ändert. Für eine Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ ist

$$(\det \Phi)^{\cdot} / \det \Phi = d/dt \log(\det \Phi) = \mathrm{Sp}(A),$$

und $\mathrm{Sp}(A)$ ist damit die **Zuwachsrate des Volumens** unter $\Phi(t)$. Ist zum Beispiel stets $\mathrm{Sp}(A) = 0$, so bleibt das Volumen konstant. Die Gleichung für $\det \Psi(t)$ kann man natürlich leicht lösen, es ergibt sich

$$\det \Psi(t) = \det \Psi(\tau) \cdot \exp \int_{\tau}^{t} \mathrm{Sp}(A(s)) ds. \tag{2.3}$$

Wie immer soll man das Lineare eigentlich als lineare Approximation deuten: Allgemein gehört zu einem C^1-Vektorfeld v auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ein lokaler Fluß, für den lokal, etwa in der Umgebung U_1 von $p \in U$, die Zeittransformation $\Phi_t : U_1 \to U$ definiert ist, und die Variationsgleichung sagt (mit $D = D_x$)

$$(D\Phi_t(p))^\cdot = Dv(\Phi_t(p)) \cdot D\Phi_t(p),$$

also nach (2.1), angewendet auf $D\Phi_t$ für $\Psi(t)$, folgt

$$(\det D\Phi_t(p))^\cdot = \operatorname{Sp} Dv(\Phi_t(p)) \cdot \det D\Phi_t(p).$$

Die Größe

$$\operatorname{Sp}(Dv(x)) = (\partial v_1/\partial x_1 + \cdots + \partial v_n/\partial x_n)(x) =: \operatorname{div}_x v \tag{2.4}$$

heißt **Divergenz** von v. Wir haben also die

(2.5) Formel von Liouville.

$$(\det D\Phi_t)^\cdot = \operatorname{div}(v) \circ \Phi_t \cdot \det D\Phi_t.$$

Durch Auswerten an der Stelle 0 ergibt sich daraus die Beschreibung der Divergenz:

$$\operatorname{div}_p v = d/dt \,\Big|_{t=0} \det D\Phi_t. \tag{2.6}$$

Die lineare Transformation $D\Phi_t$ ist die lineare Approximation von Φ_t um p, und man kann daher auch die Größe $\operatorname{div}_p v$ als Rate der Änderung des infinitesimalen Volumens um p unter Φ_t deuten. Ist $\operatorname{div} v = 0$ auf dem Phasenraum, so ist $\det D\Phi_t$ konstant, also $\det D\Phi_t = 1$, die Jacobische der Zeittransformation Φ_t ist volumenerhaltend. Betrachten wir etwa eine kompakte Menge $K \subset U$, wo die Transformation Φ_t definiert ist, und integrieren (2.6) über $x \in K$, so ist

$$\int_K \det D\Phi_t dx = \int_{\Phi_t K} dx = \lambda(\Phi_t K)$$

das Volumen von $\Phi_t K$, nach der Transformationsformel der Integralrechnung (Bd. 2, IV, 2.3). Also haben wir

$$d/dt \,\Big|_{t=0} \lambda(\Phi_t K) = \int_K \operatorname{div}_x v \, dx. \tag{2.7}$$

Beachte, daß $\det D\Phi_t$ positiv ist, weil diese Determinante stetig von t abhängt, nie verschwindet, und weil $\det D\Phi_0 = 1$ ist. Ist ∂K der topologische Rand von K und $v|\partial K = 0$, so kann keine Integralkurve K verlassen oder von außen betreten, denn auf ∂K sind alle Integralkurven konstant. Daher leben alle Integralkurven, die in K beginnen ewig, und $\Phi_t K = K$. In diesem Fall verschwindet die linke Seite von (2.7), also auch die rechte, $\int_K \operatorname{div}_x(v)dx = 0$. Daraus ergibt sich allgemein:

(2.8) Bemerkung. *Ist $K \subset U$ kompakt, so ist $\int_K \operatorname{div}_x(v)dx$ durch $v|\partial K$ bestimmt.* □

In guten Fällen sagt die Gaußsche Integralformel, wie es bestimmt ist:

$$\int\limits_K \operatorname{div}(v) = \int\limits_{\partial K} \langle v, \mathfrak{n} \rangle.$$

Die Änderungsrate des Volumens von $\Phi_t K$ ist gleich dem Integral über ∂K des Normalanteils $\mathfrak{n}$ des Geschwindigkeitsfeldes. Das werden wir nach und nach genauer erklären (Kap. VI, § 5).

Ich schließe mit einem physikalischen Beispiel.

(2.9) Hamiltonsche Gleichungen. Ein mechanisches System mit n Teilchen habe die vom jeweiligen Ort der Teilchen abhängige potentielle Energie $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_{3n})$, drei Raumkoordinaten für jedes Teilchen, und die kinetische Energie $T(\dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$. Die Impulse sind $y_i = m_i \dot{x}_i$, und wir schreiben die Gesamtenergie als Funktion von Ort und Impuls

$$H(x, y) = u(x) + \tfrac{1}{2} \sum_i m_i^{-1} y_i^2.$$

Diese Funktion H von Ort und Impuls, die hier als unabhängige Variable x, y in $\mathbb{R}^{6n}$ zu lesen sind, heißt **Hamiltonfunktion** des Systems. Wir denken uns die Hamiltonfunktion H für alle möglichen Werte der Koordinaten x, y gegeben. Die Entwicklung des Systems von gegebenem Anfang in der Zeit wird dann durch eine Kurve $t \mapsto (x(t), y(t))$ beschrieben. Für sie gilt nach den Vorstellungen der Newtonschen Mechanik

$$\begin{aligned} &\dot{y}_i = m_i \ddot{x}_i = i\text{-te Kraftkomponente } = -\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ &\dot{x}_i = y_i / m_i = \partial H / \partial y_i. \end{aligned}$$

Das Vektorfeld auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^{6n}$

$$\dot{x}_i = \partial H / \partial y_i, \quad \dot{y}_i = -\partial H / \partial x_i$$

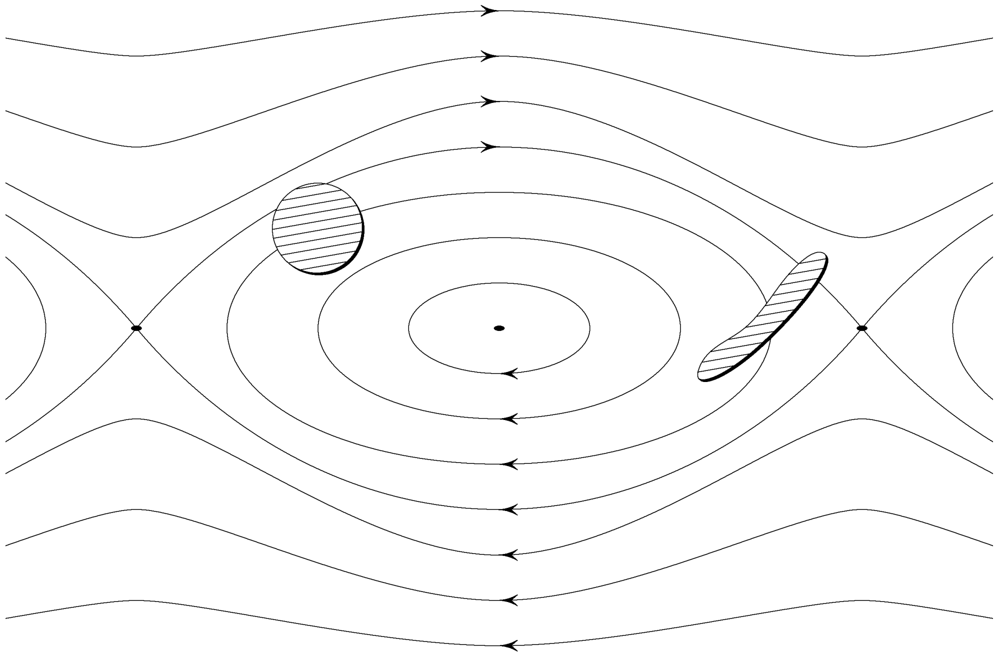
heißt **Hamiltonsches Vektorfeld** (Hamiltonsche Gleichungen).

Die Entwicklung des Systems in der Zeit wird durch den Hamiltonschen Fluß, den Fluß zu dem Vektorfeld, beschrieben. Unter viel allgemeineren Bedingungen genügt die Entwicklung eines physikalischen Systems Hamiltonschen Gleichungen für eine geeignete Funktion H; das zu erklären ist hier nicht der Ort. Wir bemerken aber: Der Hamiltonsche Fluß ist volumentreu; die Divergenz des Hamiltonschen Vektorfeldes verschwindet.

Die Divergenz ist nämlich

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\partial H/\partial y_i) + \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i}(-\partial H/\partial x_i) = 0.$$

Diese Aussage spielt eine wichtige Rolle in der statistischen Mechanik: Der Hamiltonsche Fluß fließt wie eine inkompressible Flüssigkeit.



Die Hamiltonfunktion H selbst ist eine Erhaltungsgröße des Hamiltonschen Flusses, sie ist auf Orbits konstant (Energieerhaltung). Die Ableitung von H in Flußrichtung ist nämlich

$$d/dt(H \circ \Phi_t) = \langle dH, \dot{\Phi}_t \rangle = \langle dH, v \rangle = \sum_i \partial H/\partial x_i \cdot \partial H/\partial y_i + \sum_i \partial H/\partial y_i(-\partial H/\partial x_i) = 0.$$

Auch von Erhaltungsgrößen soll noch systematisch die Rede sein (Kap. III, § 2).

§ 3. Autonome lineare Differentialgleichungen

Es handelt sich um die Gleichung

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$$

auf einem komplexen Vektorraum U mit einer konstanten Matrix A. Der Vektorraum U ist ein spezieller reeller Vektorraum, und A insbesondere $\mathbb{R}$-linear, wir wissen also aus dem Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf, daß man ein Fundamentalsystem durch die Exponentialreihe erhält:

$$\Phi_t = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k / k!$$

Das bestätigt man auch direkt, wenn man einige einfache Rechenregeln für die Exponentialfunktion für Matrizen annimmt:

$$(e^{At})^{\cdot} = (\sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k/k!)^{\cdot} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k k t^{k-1}/k! = A \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} t^{k-1}/(k-1)! = Ae^{At}.$$

Es bleibt ein bißchen zu verifizieren — nicht ohne weiteres darf man eine Reihe gliedweise differenzieren, aber hier handelt es sich (ausgeschrieben in Koordinaten) um ein System von Potenzreihen. Wir haben jedoch allgemein die

(3.1) Rechenregeln für die Exponentialfunktion.

(i) Ist $AB = BA$, so ist $Be^A = e^A B$ und $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$; insbesondere $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = \mathrm{id}$, also e^A ist stets regulär.

(ii) Ist B regulär, so ist $Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$.

Beweis: Beides folgt leicht direkt aus der Definition, aber man kann auch so argumentieren:
(i) Die Funktionen $t \mapsto Be^{At}$ und $t \mapsto e^{At}B$ haben gleichen Wert B für $t = 0$, und erfüllen dieselbe Differentialgleichung $\dot{z} = Az$. Die erste: $(Be^{At})^{\cdot} = BAe^{At} = ABe^{At}$, die zweite offenbar auch. Also sind beide Funktionen gleich, insbesondere für $t = 1$.

Wir schließen ebenso, daß die Funktionen $t \mapsto e^{(A+B)t}$ und $t \mapsto e^{At}e^{Bt}$ gleich sind, sie lösen $\dot{z} = (A+B)z$. Die erste offenbar, die zweite:

$$(e^{At}e^{Bt})^{\cdot} = e^{At}Be^{Bt} + Ae^{At}e^{Bt} = Be^{At}e^{Bt} + Ae^{At}e^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt}.$$

(ii) Die Funktionen $t \mapsto Be^{At}B^{-1}$ und $t \mapsto e^{BAB^{-1}t}$ lösen zum gleichen Anfang die Differentialgleichung $\dot{z} = BAB^{-1}z$. Die zweite offenbar, die erste:

$$(Be^{At}B^{-1})^{\cdot} = BAe^{At}B^{-1} = (BAB^{-1})Be^{At}B^{-1}.$$

□

Die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ geht durch die Transformation $y = Bx$ in die Differentialgleichung $\dot{y} = B\dot{x} = BAx = BAB^{-1}y$, also

$$\dot{y} = BAB^{-1}y \quad \text{mit Fundamentalmatrix} \quad e^{BAB^{-1}t}$$

über. Um also die Fundamentalmatrix durch klassische Funktionen (Exponentialfunktion und Polynome) zu berechnen, werden wir die Matrix A auf geeignete Gestalt transformieren; so nämlich, daß die transformierte Matrix BAB^{-1} **Jordansche Normalform** hat.

Hier ist vielleicht eine kleine algebraische Erinnerung am Platze. Wir betrachten Polynome und Vektorräume über einem fest gegebenen Körper, meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sind p, q teilerfremde Polynome, so findet man mit dem Euklidischen Algorithmus Polynome h, k, so daß

$$1 = h(X)p(X) + k(X)q(X). \tag{3.2}$$

Ist nun $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums, so kann man A für X einsetzen.

(3.3) Erster Zerlegungssatz. *Ist f ein Polynom und $f = p \cdot q$ eine Zerlegung in teilerfremde Faktoren, so ist*

$$\ker(f(A)) = \ker(p(A)) \oplus \ker(q(A)).$$

Beweis: Sei $W = \ker(f(A))$. Aus der Gleichung (3.2) folgt

$$W = kq(A) \cdot W + hp(A) \cdot W.$$

Der erste Summand wird von $p(A)$, der zweite von $q(A)$ annulliert, also $W = \ker p(A) + \ker q(A)$. Die Summe ist direkt, denn der Durchschnitt liegt in

$$\ker(h(A)p(A) + k(A)q(A)) = \ker(\mathrm{id}) = 0.$$

□

Ist nun V endlichdimensional, so gibt es immer Polynome f mit $f(A) = 0$, und der Einfachheit halber erinnern wir an den

(3.4) Satz von Hamilton-Cayley. *Ist $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes und*

$$\chi_A(X) = \det(X\,\mathrm{id} - A)$$

sein charakteristisches Polynom, so ist

$$\chi_A(A) = 0.$$

Demnach ist $V = \ker \chi_A(A)$, und wenn wir χ_A in teilerfremde Polynome zerlegen:

$$\chi_A = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r,$$

so zerfällt V entsprechend in unter A-Operation invariante Summanden

$$V = \ker(p_1(A)) \oplus \cdots \oplus \ker(p_r(A)).$$

Im Falle eines komplex linearen Endomorphismus $A : U \to U$ eines komplexen Vektorraumes U hat man eine Zerlegung

$$\chi_A(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{n_j}$$

des charakteristischen Polynoms, und den Eigenwerten $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ entsprechen so bei der Zerlegung des Raumes die verallgemeinerten Eigenräume

$$U(\lambda) = \ker(A - \lambda \mathrm{id})^n.$$

Beachte, daß der Kern sich nicht mehr ändert, wenn man die Potenz erhöht, man kann immer n nehmen. Diese Zerlegung

$$U = U(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus U(\lambda_r)$$

ist schon ein wesentlicher Teil der Jordanzerlegung. Sie liefert die **Jordan-Chevalley Zerlegung** von A in den **halbeinfachen Teil** D, der auf $U(\lambda)$ durch Multiplikation mit λ gegeben ist, und den **nilpotenten Teil** N, der auf $U(\lambda)$ durch $(A - \lambda\,\mathrm{id})$ gegeben ist:

$$A = D + N, \quad DN = ND, \quad N^n = 0. \tag{3.5}$$

Zur Bildung der Jordanschen Normalform zerlegt man die $U(\lambda)$ weiter in zyklische Summanden U_j und landet bei einer Zerlegung

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k, \quad AU_j \subset U_j.$$

Jedes U_j hat eine Basis $u_1, \ldots, u_\ell$ mit

$$(A - \lambda\,\mathrm{id})u_{s+1} = u_s, \quad (A - \lambda\,\mathrm{id})u_1 = 0,$$

wenn U_j ein zyklischer Summand von $U(\lambda)$ ist. Bezüglich so einer Basis wird der Endomorphismus $A : U_j \to U_j$ durch eine **Jordanmatrix**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{(weiße Stellen sind } 0\text{)}$$

dargestellt.

Nun also wieder zur linearen Differentialgleichung

$$\dot{x} = A \cdot x$$

zunächst über $\mathbb{C}$. Der Fluß zerfällt wie der Raum U, und man muß nur die Abbildungen

$$e^{A_j t} : U_j \to U_j, \quad A_j := A|U_j : U_j \to U_j,$$

berechnen.

Ist also A eine Jordanmatrix wie oben, so ist

$$e^{At} = e^{\lambda t} \cdot e^{Nt}, \quad e^{Nt} u_s = \sum_{\nu=0}^{s-1} \frac{t^\nu}{\nu!}\, u_{s-\nu}, \tag{3.6}$$

so daß also e^{Nt} als Matrix die folgende Gestalt hat

$$(3.7) \qquad e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{\ell-1}/(\ell-1)! \\ & 1 & t & \cdots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & \\ & & & \ddots & t^2/2 \\ & & & & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Nullen unter der Diagonale)}$$

Die einfachste Darstellung findet man, wenn keine nilpotenten Anteile auftreten. In diesem Fall kann man A auf Diagonalgestalt transformieren, und für eine Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k t} \end{pmatrix}.$$

Das Komplexe freilich ist, zumal in den Anwendungen, nur eine geschickte Weise, das Reelle darzustellen, und so wollen wir auch eine reelle Normalform einer reellen Matrix A beschreiben. Sei also $V = \mathbb{R}^n$ und $A : V \to V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, gegeben durch eine reelle Matrix. Das charakteristische Polynom χ_A von A ist dann auch reell. Zerlegen wir es im Komplexen in Linearfaktoren, so erhalten wir

$$\chi_A(X) = \prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)^{n_j} \cdot \prod_{j=k+1}^{r} ((X - \lambda_j) \cdot (X - \bar{\lambda}_j))^{n_j},$$

$$\lambda_j \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow j \leq k \quad \text{und} \quad \lambda_i \neq \lambda_j,\ \lambda_i \neq \bar{\lambda}_j \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Entsprechend zerlegt sich der reelle Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$, auf dem A operiert, in die A-invarianten Unterräume

$$V(\lambda) = \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^n, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$
$$V(\lambda) = \ker((A - \lambda\,\mathrm{id})(A - \bar{\lambda}\,\mathrm{id}))^n, \quad \lambda \notin \mathbb{R}.$$

Die ersten für $j \leq k$ sind nun weiter in zyklische Summanden zu zerlegen und mit einer Jordanbasis zu versehen, wie im komplexen Fall. So kommt man wieder auf Lösungen für die Komponente in einem zyklischen Summanden von $V(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, wie in (3.6), (3.7) beschrieben.

Jetzt wenden wir uns den Summanden $V(\lambda)$ mit $\lambda \notin \mathbb{R}$ zu. In $\mathbb{C}^n$ hat man für λ und $\bar{\lambda}$ die A-invarianten Unterräume

$$U(\lambda) = \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^n, \quad U(\bar{\lambda}) = \ker(A - \bar{\lambda}\,\mathrm{id})^n,$$

und es ist

$$V(\lambda) = (U(\lambda) \oplus U(\bar{\lambda})) \cap \mathbb{R}^n.$$

Es zeigt sich nun, daß die Operation von A auf $V(\lambda)$ bei geeigneter Basiswahl so aussieht, wie die Operation von A auf $U(\lambda)$, wenn man bei letzterer nur die reelle Struktur beachtet.

(3.8) Lemma. *Es gibt einen reell-linearen Isomorphismus* $V(\lambda) \cong U(\lambda)$*, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccc} V(\lambda) & \xrightarrow[A]{} & V(\lambda) \\ \big\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \big\downarrow{\scriptstyle\cong} \\ U(\lambda) & \xrightarrow[A]{} & U(\lambda) \end{array}$$

Zusammen haben wir dann eine reelle Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r),$$

und jedes $V(\lambda)$, $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ gestattet eine weitere Zerlegung

$$V(\lambda) = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{\ell(\lambda)}$$

in invariante Teilräume, so daß für jedes W_j einer der beiden Fälle eintritt:

(i) λ ist reell und $A|W_j$ wird für eine geeignete Basis durch eine Jordanmatrix zum Eigenwert λ gegeben.

(ii) λ ist nicht reell, W_j läßt sich mit der Struktur eines komplexen Vektorraumes versehen, sowie mit einer komplexen Basis, so daß A bezüglich dieser Basis durch eine Jordanmatrix zum Eigenwert λ gegeben ist.

In beiden Fällen ist $e^{At}|W_j$ wie oben durch eine Jordanmatrix zu beschreiben, und es ist leicht möglich, wenn auch selten nützlich, die komplexe Schreibweise durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil in eine reelle Schreibweise zu verwandeln.

Beweis des Lemmas (3.8): Sei also A eine reelle Matrix mit Eigenwerten $\lambda, \bar{\lambda}$, und sei $U = U(\lambda) \oplus U(\bar{\lambda})$ der zugehörige Summand von $\mathbb{C}^n$ wie oben. Die Konjugation definiert einen $\mathbb{R}$-linearen Isomorphismus

$$c : U \to U, \quad (u, v) \mapsto (\bar{v}, \bar{u}) \in U(\lambda) \oplus U(\bar{\lambda}),$$

der mit A vertauschbar ist, denn A ist reell. Die Komponentenschreibweise entspricht der direkten Zerlegung $U = U(\lambda) \oplus U(\bar{\lambda})$, nicht den Komponenten in $\mathbb{C}^n$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow[A]{} & U \\ {\scriptstyle c}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle c} \\ U & \xrightarrow[A]{} & U \end{array}$$

Der Raum der reellen Vektoren $V = U \cap \mathbb{R}^n$ ist gerade der Raum der Vektoren die unter c festbleiben, und das sind offenbar die Vektoren $\{(u, \bar{u}) \mid u \in U(\lambda)\}$. Der gesuchte $\mathbb{R}$-Isomorphismus ist also durch

$$U(\lambda) \to V, \quad u \mapsto (u, \bar{u}),$$

gegeben. □

Beispiel. Um die Differentialgleichung $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\omega^2 x$ zu lösen, wählt man den reell-linearen Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x - \frac{i}{\omega} y$, und der Differentialgleichung entspricht auf $\mathbb{C}$ die Gleichung

$$\dot{z} = i\omega z, \quad \text{also} \quad \dot{x} - \tfrac{i}{\omega}\dot{y} = i\omega(x - \tfrac{i}{\omega} y) = y + i\omega x, \quad \text{d.h.} \quad \dot{x} = y,\ \dot{y} = -\omega^2 x.$$

Die Lösungen sind $e^{i\omega t} \cdot a$, und das ist die Schreibweise, die man als Physiker immer benutzt.

Wie man zu einer gegebenen Gleichung, also zu einer Matrix, die Transformation in die Jordansche Normalform praktisch ausrechnet, lehrt die Lineare Algebra. Das Wichtigste, wie wir noch sehen werden, ist jedoch die Zerlegung in die verallgemeinerten Eigenräume und die Berechnung der Eigenwerte. Sie allein bestimmen im allgemeinen das Limesverhalten der Lösungen für große t.

Die inhomogene Gleichung

$$\dot{x} = Ax + b(t)$$

wird durch Variation der Konstanten gelöst. Es ergibt sich

$$x(t) = e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} b(s)\,ds.$$

§ 4. Die linearen Differentialgleichungen der Ebene

Wir wollen in diesem Abschnitt betrachten, was die allgemeinen Lösungsformeln des letzten Abschnitts in der Dimension zwei geometrisch bedeuten.

Gegeben sei also die reelle Differentialgleichung

$$\dot{x} = A \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2).$$

Die Matrix A habe die komplexen Eigenwerte λ_1, λ_2, und wir nehmen an, daß beide nicht verschwinden. Andernfalls hätte man nach Transformation die Gleichungen $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = \lambda x_2$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, oder $\dot{x}_2 = x_1$, deren Lösungen leicht zu beschreiben sind.

Wir unterscheiden folgende Fälle:

(I) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell, und $\begin{cases} \text{(a)} & \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0, \\ \text{(b)} & \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0. \end{cases}$

(II) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (folglich reell), und der Eigenraum von λ hat die Dimension $\begin{cases} \text{(a)} & 2, \\ \text{(b)} & 1. \end{cases}$

(III) $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \neq \lambda_2$, und $\begin{cases} \text{(a)} & \mathrm{Re}\,\lambda_1 \neq 0, \\ \text{(b)} & \mathrm{Re}\,\lambda_1 = 0. \end{cases}$

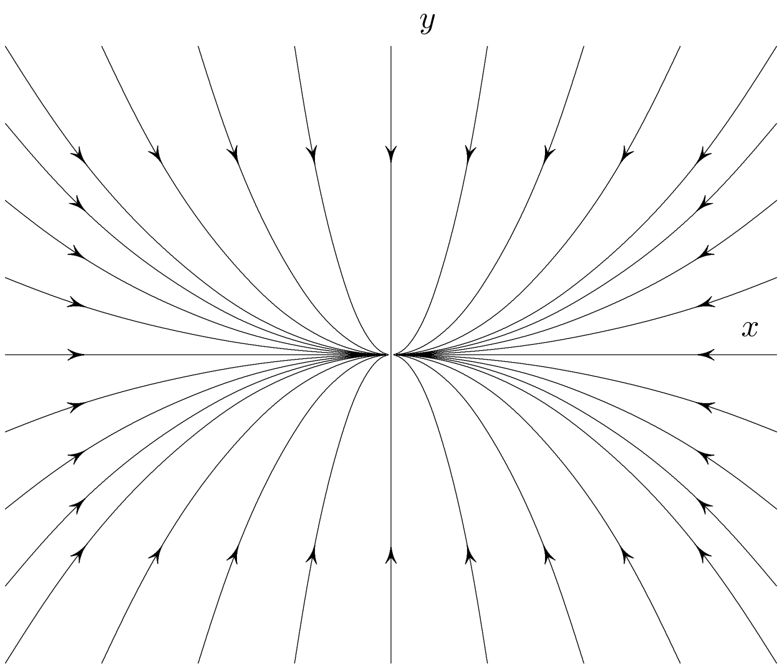
(I a) Der Knoten. Die Normalform ist $\dot{x} = \lambda_1 x$, $\dot{y} = \lambda_2 y$, die zugehörige Lösungsschar ist

$$(x(t), y(t)) = (ae^{\lambda_1 t}, be^{\lambda_2 t})$$

und λ_1, λ_2 haben gleiches Vorzeichen, wir wollen annehmen negatives, denn sonst wird nur die Orientierung aller Kurven umgekehrt. Sei etwa $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Ist $a = 0$, so läuft die Lösung auf der y-Achse gegen 0, ist $b = 0$, so läuft sie auf der x-Achse gegen 0; sind $a, b \neq 0$, so konvergieren alle Lösungen gegen 0 für $t \to \infty$, und wir können y als Funktion von x schreiben. Dann gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \to 0$$

für $t \to \infty$.

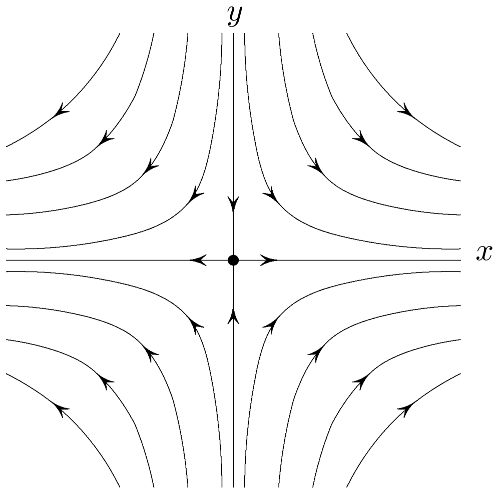


(I b) Der Sattel. Die Normalform und die Lösungsschar sind dieselben, wie in (I a), aber hier sind die Vorzeichen der λ_1, λ_2 verschieden, und wir dürfen annehmen $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Für $t \to \infty$ geht

$$x(t) \to \pm\infty, \quad y(t) \to 0, \quad \frac{dy}{dx} \to 0.$$

Für $t \to -\infty$ geht

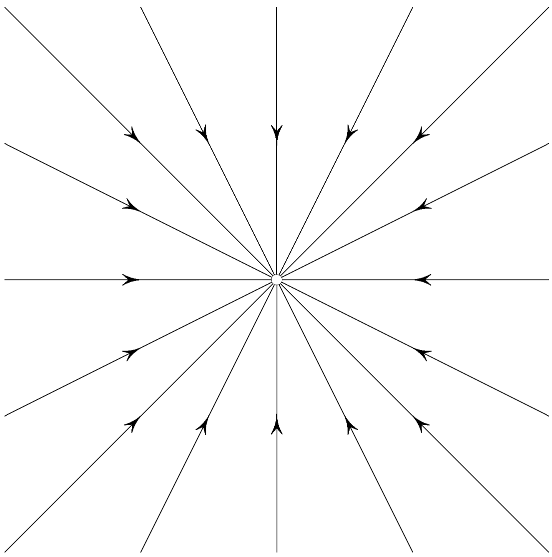
$$x(t) \to 0, \quad y(t) \to \pm\infty, \quad \frac{dx}{dy} \to 0.$$



(II a) Degenerierter Knoten. Hier ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, oBdA $\lambda < 0$, und die Lösungen sind

$$(x(t), y(t)) = e^{\lambda t}(a, b).$$

Sie laufen auf Geraden nach 0.



(II b) Degenerierter Knoten. Hier ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, oBdA $\lambda < 0$, und der Eigenraum von λ hat die Dimension 1. Die Normalform der Gleichung ist

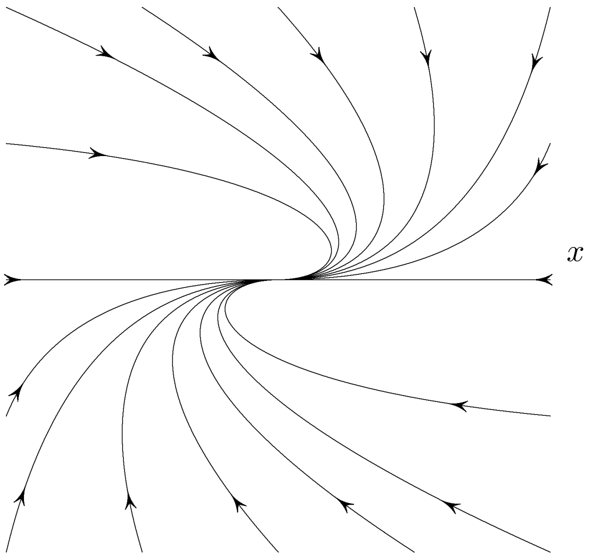
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die zugehörige Lösungsschar

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = ae^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + be^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jedenfalls ist $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = 0$. Ist $b = 0$, so laufen die Lösungen auf der x-Achse nach 0, und allgemeiner gilt

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{b}{a + b/\lambda + bt} \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \pm\infty.$$



(III a) Die Spirale. Hier ist $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, und wir nehmen oBdA an $\alpha < 0$, und dürfen $\beta > 0$ annehmen, weil auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert ist. Die Normalform in komplexer Schreibweise ist

$$\dot{z} = \lambda z.$$

Die zugehörige Lösungsschar ist

$$z(t) = e^{\lambda t} z_0 = e^{\alpha t} e^{i\beta t} z_0.$$

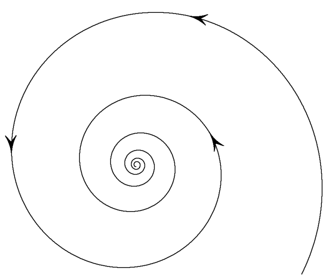
Für $t \to \infty$ geht

$$|z(t)| = e^{\alpha t} \to 0$$

monoton, und

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z_0 \mapsto e^{i\beta t} z_0$$

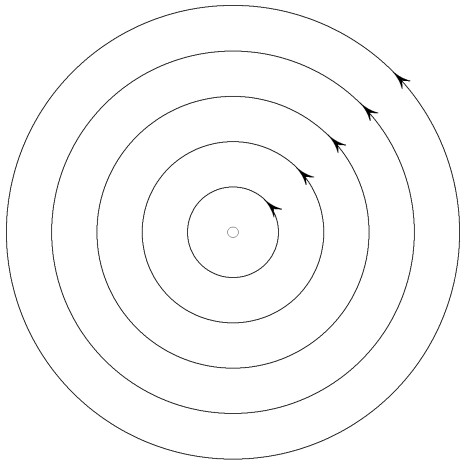
ist eine Drehung um den Winkel βt; man erhält folgendes Bild:



(III b) Der Wirbel. Hier ist $\lambda = i\beta$, die Lösungsschar in komplexer Schreibweise also

$$z(t) = e^{i\beta t} z_0.$$

Die Lösungskurven sind Kreise um 0 — nach einer linearen Transformation, vorher also Ellipsen.



§ 5. Differentialgleichungen höherer Ordnung

Es handelt sich um Gleichungen, in denen auch die höheren Ableitungen von x auftreten. Zum Beispiel wird die Bewegung eines Massenpunktes bei kleiner Auslenkung aus einer Ruhelage, unter dem Einfluß eines Potentials u durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} u$$

beschrieben. Ist etwa 0 ein Gleichgewichtspunkt, also $\operatorname{grad} u(0) = 0$ und u zweimal stetig differenzierbar, so gilt in der Nähe von 0 näherungsweise $u(x) = \frac{1}{2}\, {}^t\!xHx$, wobei H die Hessematrix von u am Ursprung ist. Also wird man auf die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad}(\tfrac{1}{2}\, {}^t\!xHx) = -Hx$$

geführt. Sie ist leicht durch lineare Transformation zu lösen. Weil nämlich H symmetrisch ist, können wir ein orthonormales Koordinatensystem, also eine Transformation $B \in O(n)$ wählen, so daß $BHB^{-1} = D$ eine Diagonalmatrix ist. Setzen wir $y = Bx$, so gilt

$$\ddot{y} = B\ddot{x} = -BHB^{-1}Bx = -Dy$$

also $\ddot{y}_\nu = -\lambda_\nu y_\nu$, wenn λ_ν der ν-te Eigenwert ist, und damit für $\lambda_\nu > 0$

$$y_\nu(t) = ae^{i\omega_\nu t} + be^{-i\omega_\nu t}, \quad \omega_\nu = \sqrt{\lambda_\nu}.$$

Die ω_ν heißen **Eigenfrequenzen**, und die Achsen des y-Systems, die Eigenräume von H, heißen die **Hauptachsen** des Elastizitätstensors H.

Wie ordnen sich solche Gleichungen in das vorher Gesagte ein? Gegeben sei ein **Zeitintervall** $D \subset \mathbb{R}$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, der **Phasenraum**, dann ist eine

Differentialgleichung n-**ter Ordnung** durch eine stetige Funktion $f : U \times D \to \mathbb{R}$ gegeben, nämlich als Gleichung

$$y^{[n]} = f(y, \dot{y}, \ldots, y^{[n-1]}, t), \quad y^{[k]} := \frac{d^k}{dt^k} y. \tag{5.1}$$

Eine **Lösung** der Differentialgleichung f ist also eine C^n-Funktion $\alpha : D_1 \to \mathbb{R}$, $D_1 \subset D$, so daß

$$\alpha^{[n]} = f(\alpha, \dot{\alpha}, \ldots, \alpha^{[n-1]}, t).$$

Man führt eine solche Gleichung auf ein System von Gleichungen erster Ordnung zurück, indem man die $y^{[k]}$, $k = 0, \ldots, n-1$ als neue Variable x_k einführt, mit den zusätzlichen Gleichungen $\dot{x}_{k-1} = x_k$. Also man ordnet der Differentialgleichung f die Gleichung erster Ordnung

$$\dot{x} = F(x,t), \quad x = (x_0, \ldots, x_{n-1}), \quad F(x,t) := (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x,t))$$

zu, was in sinnfälligerer Schreibweise als Gleichung besagt

$$\begin{array}{rcc} \dot{x}_0 & = & x_1 \\ \dot{x}_1 & = & x_2 \\ & \vdots & \\ \dot{x}_{n-2} & = & x_{n-1} \\ \dot{x}_{n-1} & = & f(x_0, \ldots, x_{n-1}, t). \end{array} \tag{5.2}$$

Ist $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{n-1})$ eine Lösung von (5.2), so ist $\alpha := \beta_0$ eine Lösung von f, und ist α eine Lösung von f, so ist

$$\beta := (\alpha, \dot{\alpha}, \ldots, \alpha^{[n-1]})$$

eine Lösung von (5.2). Daher lassen sich alle Sätze, die wir über Differentialgleichungen bewiesen haben, auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung umformulieren. Den Anfangswerten $x(\tau)$ entsprechen dabei die **Anfangswerte**

$$(y(\tau), \dot{y}(\tau), \ldots, y^{[n-1]}(\tau))$$

für die Gleichung n-ter Ordnung. Man muß sich also nicht nur den Wert der Lösungen, sondern auch die Werte der Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ vorgeben, dann existiert — unter den Voraussetzungen die wir früher angeführt haben — lokal oder global genau eine Lösung zu diesem Anfang. Wie früher hat man also lokale Lösungen

$$\begin{gathered} \alpha(x_0, \ldots, x_{n-1}, t), \quad \alpha^{[n]} = f(\alpha, \ldots, \alpha^{[n-1]}, t) \\ \alpha^{[k]}(x_0, \ldots, x_{n-1}, \tau) = x_k \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, n-1. \end{gathered}$$

Natürlich kann man nach demselben Schema aus einem System von Gleichungen höherer Ordnung ein System von noch mehr Gleichungen erster Ordnung machen.

Wir wollen betrachten, was hier aus den linearen Gleichungen wird.

Eine **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung** ist durch stetige Funktionen

$$\alpha_\nu, b : D \to \mathbb{C}\,, \quad \nu = 0, \dots, n-1,$$

als Gleichung

$$y^{[n]} = a_0(t)y + a_1(t)\dot{y} + \cdots + a_{n-1}(t)y^{[n-1]} + b(t) \tag{5.3}$$

gegeben. Sie heißt **homogen**, falls $b = 0$.

Die Definition besagt gerade, daß die zugehörige Gleichung (5.2) linear ist; auch ist die Zuordnung $\alpha \mapsto (\alpha, \dot{\alpha}, \dots, \alpha^{[n-1]})$ linear. Daher folgt aus dem, was wir in § 1 über lineare Differentialgleichungen bewiesen haben:

(5.4) Satz. *Die Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung (5.3) bilden einen n-dimensionalen komplexen Untervektorraum $L \subset C^n(D, \mathbb{C})$. Ist $\tau \in D$, so ist ein Isomorphismus $L \to \mathbb{C}^n$ durch*

$$\alpha \mapsto (\alpha(\tau), \dot{\alpha}(\tau), \dots, \alpha^{[n-1]}(\tau))$$

gegeben. Die Lösungen der inhomogenen Gleichung (5.3) bilden einen affinen Raum zum Vektorraum L.

Eine Basis von Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ der homogenen linearen Gleichung heißt ein **Fundamentalsystem**. *Sind die φ_k Lösungen der homogenen Gleichung, so heißt die Matrix*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \dot{\varphi}_1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{[n-1]} & \cdots & \varphi_n^{[n-1]} \end{pmatrix}$$

eine **Wronskimatrix** *und $W(t) = \det \Phi(t)$ heißt die* **Wronskideterminante** *der linear-homogenen Differentialgleichung. Genau dann ist konstant $W(t) = 0$, wenn $W(\tau) = 0$ für ein $\tau \in D$, und $W(t)$ genügt der Differentialgleichung*

$$\dot{W}(t) = a_{n-1}(t)W(t).$$

Beweis: Das sind nur Umformulierungen der bewiesenen Sätze über lineare Differentialgleichungen. Ordnet man der Gleichung

$$y^{[n]} = a_0 y + a_1 \dot{y} + \cdots + a_{n-1} y^{[n-1]}$$

das zugehörige System (5.2) zu, so erhält man die lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ a_0 & & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Sp}\, A = a_{n-1}. \tag{5.5}$$

Daher die letzte Behauptung des Satzes. □

Wir wollen diese Gleichung näher untersuchen, für den Fall, daß die a_ν konstant sind. Sie ist dann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Wir wollen sie in der Form

$$y^{[n]} + a_{n-1}y^{[n-1]} + \cdots + a_0 y = 0 \tag{5.6}$$

schreiben. Das zugehörige System $\dot{x} = Ax$ nach (5.5) hat auch konstante Koeffizienten und ist also ein autonomes lineares System, wie in § 3. (Jetzt muß die letzte Zeile von A negatives Vorzeichen erhalten, weil wir das Vorzeichen von $y^{[n]}$ geändert haben). Es wäre jedoch ungeschickt, die Lösungen auf diesem Wege zu suchen, man kommt besser direkt zum Ziel. Das **charakteristische Polynom** der Gleichung (5.6) ist das charakteristische Polynom von A, und dieses ist (bei passend gewähltem Vorzeichen)

$$\det(X \cdot \mathrm{id} - A) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0. \tag{5.7}$$

Beweis: Entwickle die Determinante nach der ersten Spalte:

$$\det(X \cdot \mathrm{id} - A) = \det \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & X & -1 \\ a_0 & \cdots & & & X + a_{n-1} \end{pmatrix} = X \cdot d_{n-1} + a_0,$$

wobei d_{n-1} eine Determinante der gleichen Gestalt mit letzter Zeile $(a_1, \ldots, a_{n-1} + X)$ ist, also $d_{n-1} = X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + a_1$ nach Induktion. □

Wichtig ist, daß der Gleichung (5.6) auf ganz formale Weise das Polynom (5.7) zugeordnet ist. Umgekehrt ist jedem Polynom

$$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

eine Differentialgleichung

$$y^{[n]} + a_{n-1}y^{[n-1]} + \cdots + a_0 y = 0$$

zugeordnet. Diese umgekehrte Zuordnung kann man durch folgenden rein algebraischen Prozeßbeschreiben:

Sei V ein Vektorraum, etwa über $\mathbb{C}$, und $D : V \to V$ ein linearer Endomorphismus, dann ordnen wir jedem Polynom

$$f(X) = \sum a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$$

den Endomorphismus $f(D) = \sum a_k D^k \in \mathrm{End}(V)$ zu, und definieren so einen Homomorphismus

$$\mathbb{C}[X] \to \mathrm{End}(V), \quad f \mapsto f(D).$$

Man rechnet ja mit dem X wie mit einer Unbestimmten, die man insbesondere durch $X = D$ bestimmen kann. Davon haben wir früher schon Gebrauch gemacht.

In unserem Fall ist V der Vektorraum der C^∞-Funktionen $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und $D = \frac{d}{dt}$ die Ableitung nach der Zeit. Wir wissen ja schon, daß alle Lösungen C^∞-Funktionen und auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Dem Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ ordnen wir die lineare Differentialgleichung

$$f(\frac{d}{dt})y := \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} y = 0, \quad a_n = 1,$$

mit dem charakteristischen Polynom f zu.

Wir suchen also die Funktionen $\alpha \in \ker(f(D))$, denn $\ker(f(D))$ ist der Lösungsraum der Differentialgleichung. Wo das gesagt ist, bleibt nur ein bißchen Algebra, worüber wir schon gesprochen haben.

(5.8) Satz. *Sei $f(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{n_k}$ ein Polynom mit den verschiedenen Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Dann hat die lineare Differentialgleichung $f(d/dt)y = 0$ das Fundamentalsystem der Lösungen*

$$t^s \cdot e^{\lambda_j t}, \quad s = 0, 1, \ldots, n_j - 1.$$

Beweis: Nach dem Ersten Zerlegungssatz der Linearen Algebra (3.3) ist

$$\ker(f(D)) = \bigoplus_{j=1}^{k} \ker(D - \lambda_j)^{n_j}.$$

Wir müssen also zeigen, daß die Funktionen

$$t^s e^{\lambda t}, \quad s \leq m - 1,$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$(D - \lambda)^m y = 0, \quad D = d/dt,$$

bilden. Eine kleine Rechnung zeigt

$$(D - \lambda)(e^{\lambda t}\varphi(t)) = e^{\lambda t}\dot{\varphi}(t).$$

In einem kleinen Diagramm, dessen senkrechte Pfeile durch Multiplikation mit der Funktion $t \mapsto e^{\lambda t}$ gegeben sind:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "d/dt"] \arrow[d, "e^{\lambda t}"', "\cong"] & V \arrow[d, "\cong"', "e^{\lambda t}"] \\ V \arrow[r, "D-\lambda"'] & V \end{tikzcd} \qquad V = C^\infty(\mathbb{R}).$$

Das sagt: Die Transformation $\varphi \mapsto e^{\lambda t} \cdot \varphi$ führt das Problem, die Gleichung $(D-\lambda)^m y = 0$ zu lösen, auf das Problem zurück, die Gleichung $(d/dt)^m y = 0$ zu lösen. Dies wird genau von den Polynomen vom Grad höchstens $m-1$ gelöst, und die Polynome t^s, $s \leq m-1$ bilden eine Basis dieses Polynomraumes. Folglich durch Rücktransformation: Die $t^s \cdot e^{\lambda t}$, $s \leq m-1$, bilden eine Basis des Lösungsraumes von $(D-\lambda)^m y = 0$. □

Alles hätte man natürlich auch aus den expliziten Lösungen linearer Systeme herausmelken können, aber hier war der direkte Weg kürzer, und er führt zum rein algebraischen Grund für das Ergebnis. Wenn man übrigens erst einmal eine Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ einer linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ hat, so folgt der Eindeutigkeitssatz für diese Gleichung auch durch Variation der Konstanten mit Φ. Die vorhergehende Theorie der Differentialgleichungen haben wir also hier gar nicht gebraucht.

(5.9) Bemerkung über reelle Lösungen. *Hat das Polynom f reelle Koeffizienten, so sind die Realteile und Imaginärteile komplexer Lösungen reelle Lösungen von $f(D)y = 0$. Man erhält also das reelle Fundamenalsystem der Funktionen*

$$t^s e^{\lambda_j t}, \qquad \text{für} \quad \lambda_j \in \mathbb{R},$$

$$\left.\begin{matrix} t^s e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t \\ t^s e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t \end{matrix}\right. \quad \text{falls } \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R},\ \beta_j > 0,$$

mit $0 \leq s \leq n_j - 1.$

□

Als Anwendung betrachten wir die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega_0^2 y = 0. \tag{5.10}$$

Der Dämpfungsfaktor 2μ kann zum Beispiel in mechanischen Schwingungsvorgängen durch Reibung entstehen. Ist $\mu = 0$, so ist ein Fundamentalsystem durch

$$\cos \omega_0 t, \quad \sin \omega_0 t$$

gegeben, also ω_0 ist die Frequenz der ungedämpften Schwingung. Das charakteristische Polynom ist

$$f(X) = X^2 + 2\mu X + \omega_0^2$$

mit den Nullstellen

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}.$$

Wir setzen $\mu > 0$ voraus, und unterscheiden die Fälle

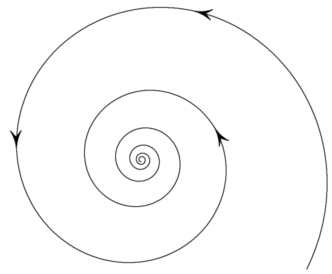
(i) **Gedämpft periodische Schwingung** $0 < \mu < \omega_0$. Dann hat man die konjugiert komplexen Wurzeln

$$\lambda = -\mu \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} = -\mu \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2},$$

und ein Fundamentalsystem ist durch Real- und Imaginärteil der Funktion

$$e^{-\mu t} \cdot e^{i\omega t}$$

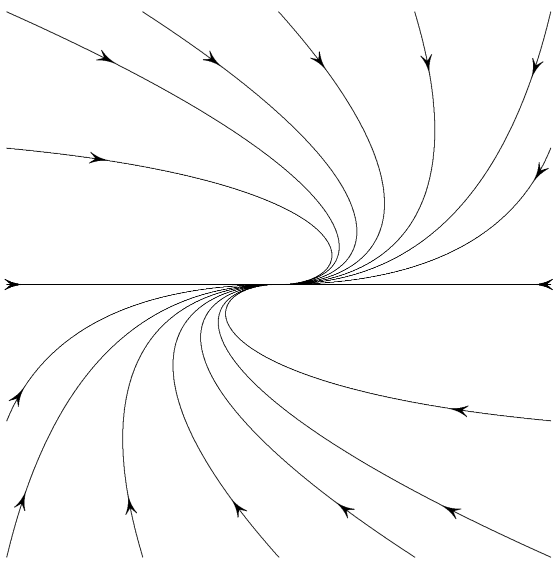
gegeben. Der zweite Faktor beschreibt eine harmonische Schwingung mit gegenüber dem ungedämpften Fall verkleinerter Frequenz ω. Der erste Faktor beschreibt eine Abnahme der Amplitude mit konstanter Rate μ.



(ii) **Aperiodischer Grenzfall** $\mu = \omega_0$. Dann ist $f(X) = (X + \mu)^2$ und ein Fundamentalsystem ist durch die Funktionen

$$e^{-\mu t}, \quad te^{-\mu t}$$

gegeben, die wir auch in dem vertrauten zweidimensionalen Bild zusammenfassen. Es lehrt jedenfalls auch, daß jede Lösung gegen Null läuft — und zwar allenfalls einmal ausschlagend.



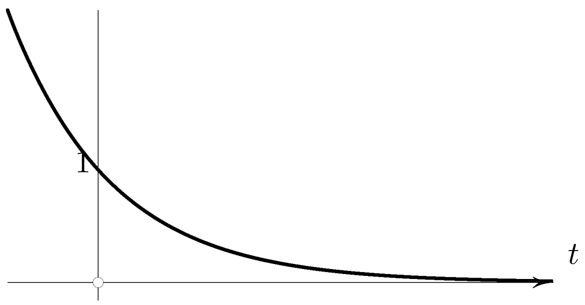
(iii) **Vollständig gedämpfte Schwingung** $\mu > \omega_0$. Dann hat das charakteristische Polynom zwei reelle Nullstellen

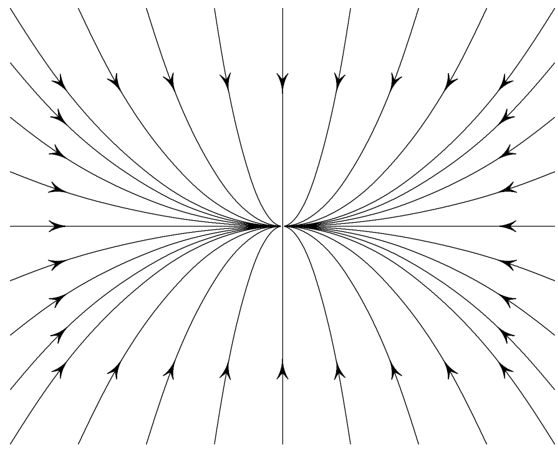
$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Ein Fundamentalsystem bilden die beiden Funktionen

$$e^{\lambda_1 t}, \quad e^{\lambda_2 t}.$$

Beide Lösungen gehen exponentiell gegen Null, und beide zusammen zeigen das Bild





Eine Linearkombination der beiden Fundamentallösungen kann immer noch einmal ausschlagen, aber nicht öfter.

§ 6. Periodische Inhomogenitäten

Wir betrachten wie im vorigen Abschnitt einen konstanten linearen Differentialoperator, also mit anderen Worten ein normiertes Polynom $f(X)$, so wie auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $\varphi : I \to \mathbb{C}$. Dies gibt uns die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$f(D)y = \varphi, \quad D = d/dt,$$

auf dem Intervall I.

Natürlich kann man wie früher die lineare Gleichung n-ter Ordnung in ein System verwandeln, in dem nur erste Ableitungen auftreten, und dann die inhomogene Gleichung durch Variation der Konstanten lösen. Jedoch wollen wir einen Fall studieren, wo man eine spezielle Lösung leichter direkt findet. Zunächst eine einfache Bemerkung der linearen Algebra:

(6.1) Bemerkung. *Gegeben seien zwei Funktionen α, β auf I, mit*

$$f(D)\alpha = \varphi, \quad f(D)\beta = \psi,$$

und es seien $a, b \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$f(D)(a\alpha + b\beta) = a\varphi + b\psi.$$

□

So kann man die Inhomogenität φ als Linearkombination zusammensetzen. Wir wollen die Gleichung

$$f(D)y = \varphi \quad \text{für} \quad \varphi(t) = \sum_{k,s} a_{ks} t^s e^{\gamma_k t}$$

lösen, und können uns mithin darauf beschränken, die Gleichung

$$f(D)y = t^s e^{\gamma t}$$

zu betrachten.

(6.2) Satz. *Die Gleichung $f(D)y = t^s e^{\gamma t}$ hat eine Lösung der Gestalt*

$$h(t) \cdot e^{\gamma t}, \quad h(t) = \sum_{\nu=0}^{s} a_\nu t^{k+\nu},$$

wobei k die Vielfachheit von γ als Nullstelle von f ist.

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$f(X) = (X - \gamma)^k \cdot g(X), \quad g(\gamma) \neq 0.$$

Es ist $k = 0$ zugelassen. Ist nun α eine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung, also

$$f(D)\alpha = t^s e^{\gamma t},$$

so ist

$$(D - \gamma)^{s+1} f(D)\alpha = 0,$$

weil ja $(D - \gamma)^{s+1}(t^s e^{\gamma t}) = 0$. Daher ist α, wie wir wissen, eine Linearkombination der Funktionen $t^\nu e^{\lambda t}$, wobei λ eine Wurzel des zugehörigen charakteristischen Polynoms, also $(\lambda - \gamma)^{s+1} f(\lambda) = 0$ ist. Ist nun schon $f(D)t^\nu e^{\lambda t} = 0$, so können wir den betreffenden Summanden $at^\nu e^{\lambda t}$ aus der Linearkombination α weglassen. Wir behalten eine Linearkombination der Funktionen $t^\nu e^{\lambda t}$, die zum Fundamentalsystem (5.8) der Gleichung $(D - \gamma)^{s+1} f(D)y = 0$, aber nicht der Gleichung $f(D)y = 0$ gehören. Das sind gerade die Funktionen $t^{k+\nu} e^{\gamma t}$, $0 \leq \nu \leq s$. □

Nachdem man den Satz einmal weiß, kann man das Polynom $h(t)$ mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen, und erhält durch Einsetzen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem für diese Koeffizienten, das notwendig lösbar sein muß . Besonders einfach läßt sich die Gleichung

$$f(D)y = e^{\gamma t}$$

lösen, wenn $f(\gamma) \neq 0$. Wir wissen schon, daß eine spezielle Lösung $ae^{\gamma t}$ für eine Konstante a ist, und in der Tat ist

$$f(D)e^{\gamma t} = f(\gamma)e^{\gamma t}, \tag{6.3}$$

denn $De^{\gamma t} := d/dte^{\gamma t} = \gamma e^{\gamma t}$. Daher ist $a = 1/f(\gamma)$, also

$$f(D)(e^{\gamma t}/f(\gamma)) = e^{\gamma t}. \tag{6.4}$$

(6.5) Die Schwingungsgleichung. Wir betrachten den Fall, wo noch eine Schwingung auftritt, und schreiben das Polynom f gleich in der Form

$$f(X) = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\lambda \cdot X + |\lambda|^2, \quad \mathrm{Re}\lambda = -\mu, \quad |\lambda| = \omega_0.$$

Die inhomogene Gleichung

$$f(D)y = ae^{\gamma t}, \quad a \neq 0,$$

beschreibt das Verhalten unter einer periodisch wirkenden Kraft, die (bis auf einen konstanten Faktor 1/Masse) durch die Inhomogenität gegeben ist. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden.

i. Fall: $f(\gamma) \neq 0$

Dann hat man eine spezielle Lösung

$$\frac{a}{f(\gamma)} e^{\gamma t},$$

der sich die früher beschriebenen Lösungen von $f(D)y = 0$ überlagern. Ist $\gamma = i\omega$, so ist $f(\gamma) = -\omega^2 + 2\mu i\omega + \omega_0^2$, und $|f(\gamma)| = [\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2\,]^{1/2}$ wird minimal, die Amplitude also maximal (Resonanzpunkt), wenn μ genügend klein ist, bei

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\mu^2.$$

ii. Fall: $f(\gamma) = 0$, also etwa $\gamma = \lambda$

Wir wissen, daß es eine Lösung der Gestalt $b \cdot te^{\lambda t}$ gibt, und setzt man dies in die Gleichung ein, so erhält man die spezielle Lösung

$$-\frac{ai}{2\,\mathrm{Im}\,\lambda} te^{\lambda t}.$$

Ist $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, die ungezwungene Schwingung, ungedämpft, so hat man hier eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit unbegrenzt wachsender Amplitude. Ein kleiner Dämpfungsfaktor bringt dieses Phänomen allerdings zum Verschwinden, aber die Amplitude ist dann doch eine Zeit lang sehr groß, größer vielleicht als dem schwingenden Gegenstand zuträglich ist.

Reelle Lösungen reeller Gleichungen mit Inhomogenität $t^s \sin \omega t$ oder $t^s \cos \omega t$ erhält man wie immer aus dem Komplexen als Real- oder Imaginärteil.

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$f(D)y = \varphi(t)$$

für Exponentialfunktionen $\varphi(t) = e^{i\omega t}$ ist ein wesentlicher Beitrag zum Studium solcher Differentialgleichungen mit periodischen Inhomogenitäten φ, weil man letztere durch Fourierpolynome approximieren kann.

§ 7. Die Eulersche Differentialgleichung

Unter den linearen Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten erfreut sich die

(7.1) Eulersche Differentialgleichung

$$t^n y^{[n]} + a_{n-1} t^{n-1} y^{[n-1]} + \cdots + a_0 y = 0$$

besonderer Zuneigung, weil man ihre Lösung einfach auf die einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zurückführt. Wir bilden die linearen Endomorphismen

$$D = d/dt \quad \text{und} \quad \delta = t \cdot d/dt$$

des Raumes der C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}_+$. Man rechnet leicht nach:

$$(\delta - j) t^j D^j = t^{j+1} D^{j+1},$$

und daraus durch Induktion

$$t^j D^j = \delta(\delta - 1) \cdots (\delta - j + 1). \tag{7.2}$$

Setzt man dies in der Differentialgleichung (7.1) ein, so erhält man eine Differentialgleichung

$$\delta^n y + b_{n-1} \delta^{n-1} y + \cdots + b_0 y = 0 \tag{7.3}$$

Hier steht nun der Operator δ statt D in einem Polynom. Mit der Transformation $t = e^s$ erhält man

$$Dy(t(s)) = d/ds(y(e^s)) = t \cdot d/dty = \delta y(t),$$

oder in einem Diagramm:

$$
\begin{array}{ccc}
C^\infty(\mathbb{R}_+) & \xrightarrow{\delta} & C^\infty(\mathbb{R}_+) \\
\big\downarrow \cong & & \big\downarrow \cong \\
C^\infty(\mathbb{R}) & \xrightarrow[D]{} & C^\infty(\mathbb{R})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} y \\ \downarrow \\ y \circ \exp \end{array}
\tag{7.4}
$$

Das führt die Lösung der Eulerschen Differentialgleichung auf die der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zurück. Man nennt

$$\chi(X) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0$$

das **charakteristische Polynom** der Eulerschen Differentialgleichung (7.3). Ist

$$\chi(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{n_k}$$

seine Faktorisierung mit verschiedenen Wurzeln λ_j, so hat die Eulersche Differentialgleichung also ein Fundamentalsystem von Lösungen $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$:

$$(\log(t))^r t^{\lambda_j}, \quad r = 0, 1, \ldots, n_j - 1; \quad j = 1, \ldots, k. \tag{7.5}$$

□

Die Exponentialfunktionen $s \mapsto e^{\lambda s}$ sind die Eigenfunktionen des Operators $D = d/ds$. Sie gehen bei der Transformation $t = e^s$ in (7.4) in die Potenzen $t \mapsto t^\lambda$ über, und dieses sind folglich die Eigenfunktionen des Eulerschen Differentialoperators

$$\delta = t \cdot d/dt : C^\infty(\mathbb{R}_+) \to C^\infty(\mathbb{R}_+).$$

§ 8. und § 9. im Anhang auf S. 197!