Mathematik für Biologen
Vorlesungsskript

Sommer 2005

Achim Klenke
Mathematisches Institut
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Staudingerweg 9
55099 Mainz

korrigierte Fassung vom 09.05.2011
erweiterte Tabellen: 21.07.2011

Inhalt der Vorlesung

- halbes Semester: Grundlagen (Auflösen von Gleichungen, Exponential- und Logarithmusfunktion, Winkelfunktionen, Ableiten/Integrieren, Folgen/Reihen, Differenzialgleichungen)
- halbes Semester: Statistik

Literatur

- Bohl: Mathematik in der Biologie, Springer 2001
- Steland: Mathematische Grundlagen der empirischen Forschung, Springer 2004
- Timischl, Biomathematik, Springer 1995
- Vogt: Grundkurs Mathematik für Biologen, Teubner

Dringend abzuraten ist von dem Buch A. Cann: Mathe für Biologen (Wiley 2004). Dieses Buch ist weitgehend und substanziell fehlerhaft.

Korrigierte Fassung des Skripts vom 24.02.2006.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Wir wollen zunächst die Frage klären, was Mathematik (für Naturwissenschaftler) ist, und wie sie eingesetzt wird.

Die kurze Antwort ist: Mathematik ist *Sprache* und *Kalkül*.

In der Tat stellt die Mathematik einen Begriffsapparat zur Verfügung, der es erlaubt, manche Probleme überhaupt erst zu formulieren. Andererseits gibt die Mathematik Methoden an die Hand, um die so formulierten Probleme auch konkret zu lösen. Die typische Arbeitsweise eines praktisch arbeitenden Naturwissenschaftlers besteht (vereinfacht gesagt) aus drei Schritten:

(1) konkretes Problem formalisieren

(2) formales Problem lösen

(3) formale Lösung im Kontext interpretieren.

Beispiel 1.1 (Ansetzen einer chemischen Lösung) Problem: Es sollen 20ml einer 2% igen wässrigen Lösung angesetzt werden. Im Regal finden Sie:

- 15% ige Lösung
- reines Wasser

(1) **Formalisieren:** Wir definieren Symbole x und y durch

$$x = \text{Volumen der 15\% igen Lösung, die verwendet wird}$$
$$y = \text{Volumen des Wassers, das verwendet wird}$$

Es ergeben sich zwei Gleichungen

$$\frac{15\% \cdot x}{20\,\mathrm{ml}} = 2\%, \qquad x + y = 20\,\mathrm{ml}.$$

(2) **Formale Lösung:**

$$\begin{aligned} \frac{15\% \cdot x}{20\,\mathrm{ml}} = 2\% \qquad &\Longrightarrow \qquad 15\% \cdot x = 2\% \cdot 20\,\mathrm{ml} \\ &\Longrightarrow \qquad x = \frac{2\%}{15\%} \cdot 20\,\mathrm{ml} = \frac{8}{3}\,\mathrm{ml} \approx 2.67\,\mathrm{ml}. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung ($x + y = 20\,\mathrm{ml}$) folgt $y = 20\,\mathrm{ml} - x = \frac{52}{3}\,\mathrm{ml} \approx 17.33\,\mathrm{ml}$.

(3) **Interpretation**
Es müssen 2.67 ml der 15% igen Lösung in 17.33 ml Wasser pipettiert werden. ◇

Der etwas theoretischer arbeitende Wissenschaftler möchte Mathematik auch benutzen, um Modelle aufzustellen und zu analysieren. Die Arbeitsweise umfasst typischerweise fünf Schritte:

(1) Modell bilden,

(2) Modell formalisieren,

(3) formales Modell mathematisch analysieren,

(4) formale Ergebnisse interpretieren,

(5) Vergleich mit der Natur bzw. Schätzen von Modellparametern (hier kommt Statistik ins Spiel).

Beispiel 1.2 (Fibonacci Zahlen) Wir wollen an Hand eines einfaches Modells für das Wachstum einer Kaninchenpopulation die obigen fünf Schritte illustrieren.

(1) **Modell bilden.**
Wir machen die folgenden Vereinfachungen:

- die Tiere vermehren sich asexuell,
- die Altersstruktur ist simpel: es gibt nur Jungtiere und adulte Tiere,
- die Zeit vergeht in diskreten Schritten (etwa halbjahresweise).

Die Dynamik der Entwicklung sieht in jedem Schritt zwei Dinge vor:

- jedes adulte Tier wirft ein neues Kaninchen,
- Jungtiere werden nach einem Schritt adult.

Wir wollen für dieses Modell zwei Fragen untersuchen:
1. Wie schnell wächst die Population?
2. Wie groß ist der *Anteil* der Jungtiere?

Wir wählen als Anfangsbedingung: ein Jungtier. Dann ergeben in den ersten Generationen folgende Zahlen:

Zeit	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Jungtiere	j_n	1	0	1	1	2	3	5	8	13
adulte Tiere	a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21
Gesamt	b_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

(2) **Modell formalisieren.**
Wir benennen

- die Zeitpunkte $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$,
- die Anzahl der Jungtiere zur Zeit n: j_n,

– die Anzahl der adulten Tiere zur Zeit n: a_n,

– die Gesamtanzahl der Tiere zur Zeit n: b_n.

Die Anfangsbedingung lautet dann: $a_1 = 0$ und $j_1 = 1$. Die Dynamik gliedert sich in die zwei Aspekte

– Werfen: $j_{n+1} = a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$,

– Reifen: $a_{n+1} = a_n + j_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Gleichungen von diesem Typ nennt man **Rekursionsgleichung**, weil der Wert zur Zeit $n+1$ erst berechnet werden kann, wenn man den zur Zeit n schon kennt, man also auf ihn *rekurrieren* kann. Die Gesamtanzahl der Tiere erfüllt die besonders einfache Gleichung

$$b_n = a_n + j_n \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

(3) **Modell analysieren.**
Wir berechnen die ersten paar Zahlen explizit.

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 + j_1 = 0 + 1 = 1 \\
b_2 &= a_2 + j_2 = a_1 + j_1 + a_1 = 0 + 1 + 0 = 1 \\
b_3 &= a_3 + j_3 \\
&= (a_2 + j_2) + a_2 \\
&= b_2 + (j_1 + a_1) \\
&= b_2 + b_1 = 1 + 1 = 2 \\
&\vdots \\
b_{n+1} &= a_{n+1} + j_{n+1} \\
&= (a_n + j_n) + a_n \\
&= b_n + (j_{n-1} + a_{n-1}) \\
&= b_n + b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Wir haben also eine Rekursionsgleichung hergeleitet für die Zahlen $(b_n)_{n=1,2,3,4,\dots}$, nämlich

$$b_1 = b_2 = 1 \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = b_n + b_{n-1}, \text{ für } n = 2, 3, 4, \dots . \tag{1.1}$$

Wir können b_{n+1} berechnen, wenn wir $b_1, \dots, b_n$ schon berechnet haben. Nacheinander können wir die Werte der folgenden Tabelle ausrechnen:

n	b_n
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89

n	b_n	
20	6 765	
30	832 040	$\approx 8.3 \cdot 10^5$
40	102 334 155	$\approx 1.02 \cdot 10^8$
50	12 586 269 025	$\approx 1.26 \cdot 10^{10}$
60		$\approx 1.55 \cdot 10^{12}$
70		$\approx 1.90392 \cdot 10^{14}$

Die Zahl b_n heißt n-te **Fibonacci Zahl**.

Wie schnell wächst nun b_n, wenn n groß wird? Mit Hilfe der Tabelle kann man schätzen: Wenn n um 10 größer wird, wird b_n um dem *Faktor* circa 120 größer. Die Idee ist nun, dass, zumindest für große n, in etwa die folgende Gleichheit gelten könnte

$$b_n \approx c \cdot w^n.$$

Dabei ist $w > 1$ der Wachstumsfaktor, um den b_n in etwa wächst, wenn wir zu $n+1$ übergehen, also $w \approx b_{n+1}/b_n$, jedenfalls für große n. Die Zahl c ist hingegen eine Proportionalitätskonstante, die von der Anfangsbedingung abhängt.

Wie berechnen wir nun w? Einsetzen in die Rekursionsgleichung (1.1) liefert

$$c\, w^{n+1} = c\, w^n + c\, w^{n-1}.$$

Wir teilen durch $c\, w^{n-1}$ und erhalten

$$w^2 = w + 1.$$

Diese Gleichung lösen wir mit quadratischer Ergänzung auf und erhalten

$$w = \frac{1}{2}\Big(1 \pm \sqrt{5}\Big).$$

Da wir $w > 1$ haben wollten, müssen wir die nichtnegative Lösung wählen, also

$$w = \frac{1}{2}\Big(1 + \sqrt{5}\Big) \approx 1.61803\ldots \tag{1.2}$$

Diese Zahl wird in der klassischen Architektur **goldener Schnitt** genannt. Das Leipziger Rathaus (erbaut 1556-1567) besteht aus zwei ungleich langen Flügeln, deren Längen im Verhältnis des goldenen Schnittes stehen. Tatsächlich hat der linke Flügel 8 Bögen und der rechte Flügel 13 Bögen. Dies sind aber gerade die Fibonacci Zahlen b_6 und b_7.

Abbildung 1.1: Leipziger Rathaus mit 8 Torbögen links und 13 rechts.

Nachdem wir w exakt bestimmt haben, wollen wir für c wenigstens einen Schätzwert bestimmen. Wir wählen $n = 10$ und machen den Ansatz

$$c \cdot w^{10} \stackrel{!}{=} b_{10}.$$

Hieraus folgt

$$c = \frac{b_{10}}{w^{10}} = \frac{55}{122.991\ldots} = 0.447187\ldots$$

Als Ergebnis halten wir fest

$$b_n \approx 0.447187 \cdot \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n.$$

Wir machen die Probe für ein paar große Werte von n:

n	Schätzwert	exakter Wert
20	6764.6	6765
40	$1.0238 \cdot 10^8$	$1.0233 \cdot 10^8$
70	$1.9038 \cdot 10^{14}$	$1.9039 \cdot 10^{14}$

Randbemerkung Tatsächlich kann man eine exakte Formel für b_n angeben. Hierzu müssen wir beide Lösungen aus der quadratischen Formel $w^2 = w + 1$ ernst nehmen, nämlich

$$w_+ = \frac{1}{2}\Big(1+\sqrt{5}\Big) \quad \text{und} \quad w_- = \frac{1}{2}\Big(1-\sqrt{5}\Big).$$

Der Ansatz liefert

$$b_n = c_- w_-^n + c_+ w_+^n,$$

für gewisse c_- und c_+. Einsetzen in $n = 0$ liefert

$$0 = b_0 = c_+ w_+^0 + c_- w_-^0 = c_+ + c_-,$$

also $c_- = -c_+$. Einsetzen in $n = 1$ liefert

$$1 = b_1 = c_+ w_+ - c_+ w_- = c_+ \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \right) = c_+ \sqrt{5}.$$

Es folgt $c_+ = 1/\sqrt{5}$ und $c_- = -1/\sqrt{5}$ und damit

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n . \tag{1.3}$$

Nachdem wir die Wachstumsgeschwindigkeit geklärt haben, wollen wir den Anteil der Jungtiere in der Gesamtpopulation bestimmen. Wir rechnen formal

$$\begin{aligned} j_n &= 2j_n + a_n - \underbrace{(a_n + j_n)}_{=a_{n+1}} \\ &= 2j_n + a_n - a_{n+1} \\ &= 2j_n + 2a_n - (a_{n+1} + a_n) \\ &= 2j_n + 2a_n - (a_{n+1} + j_{n+1}) \\ &= 2b_n - b_{n+1}. \end{aligned}$$

Es folgt: Der Anteil der Jungtiere ist

$$\frac{j_n}{b_n} = \frac{2b_n - b_{n+1}}{b_n} \approx \frac{2w^n - w^{n+1}}{w^n} = 2 - w = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = 0.38197\ldots$$

(4) **Ergebnisse interpretieren.**

(a) Die Anzahl der Tiere wächst nach einiger Zeit von Zeitpunkt zu Zeitpunkt etwa um den Faktor $w = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.61$.

(b) Der Anteil der Jungtiere beträgt etwa 38.2%, und zwar unabhängig von der Generation (jedenfalls für späte Zeitpunkte).

(5) **Ergebnisse empirisch prüfen.**

(a) Kaninchen: naja.

(b) Bakterien: sehr gut (mit anderem w) bis die Nahrung knapp wird. $\diamond$

Beispiel 1.3 (Lambert-Beer'sches Gesetz) Mit Hilfe von *Photometrie* können Konzentrationen, beispielsweise von wässrigen Lösungen, durch Messung von Lichtabsorbtion bestimmt werden. Hierzu wird etwa eine wässrige Lösung eines Stoffes mit Konzentration c in eine Küvette der Breite L gegeben. Im Photometer wird die Küvette von einer Seite mit Licht (der Helligkeit h_0) bestrahlt, auf der anderen Seite wird die Helligkeit $h(c, L)$ des durchgelassenen Lichtes gemessen.

Der Einfachheit halber nehmen wir für den Moment an, dass die Küvette selber und auch klares Wasser kein Licht absorbieren, sodass bei 0%iger Lösung $h(0, L) = h_0$ gilt. Wir bezeichnen dann mit

$f(c,L) = \frac{h(c,L)}{h_0}$ den *Anteil* des durchgelassenen Lichtes. Ziel dieses Beispiels ist es, den funktionalen Zusammenhang von c, L und $f(c,L)$ zu bestimmen.

Abhängigkeit von L. Stellen wir zwei Küvetten der selben Art hintereinander, so wird in der zweiten Küvette wieder der selbe Anteil des Lichts durchgelassen wie in der ersten, allerdings bemisst sich der Anteil an dem Licht, das die erste Küvette durchgelassen hat, das heißt, der Anteil des Lichtes, der durch beide Küvetten geht, ist $f(c,L) \cdot f(c,L)$. Nach unserer Idealisierung entsprechen zwei Küvetten der Breite L einer Küvette der Breite $2L$. Es gilt also

$$f(c,2L) = f(c,L)^2.$$

Wir können dies Verfahren nun auf drei Küvetten anwenden und erhalten

$$f(c,3L) = f(c,L)^3.$$

Allgemein können wir n Küvetten nehmen ($n = 1,2,3,4,\ldots$) und erhalten

$$f(c,n\,L) = f(c,L)^n.$$

Da diese Gleichung für alle $L > 0$ gilt, können wir L ersetzen durch L/n und erhalten

$$f(c,L) = f(c,L/n)^n.$$

Wählen wir $n = L$, so bekommen wir

$$f(c,L) = f(c,1)^L.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung, können wir ausrechnen, wenn wir $f(c,1)$ kennen, da sie in einfacher Weise von L abhängt.

Abhängigkeit von c. Wie viel Licht absorbiert wird, hängt davon ab, wie viele Teilchen des gelösten Stoffes ein Lichtstrahl auf seinem Weg durch die Küvette trifft. Halbieren wir die Konzentration, so trifft der Lichtstrahl nur halb so viele Moleküle. Verdoppeln wir die Breite der Küvette, so trifft der Lichtstrahl auf seinem doppelt so langen Weg auch doppelt so viele Moleküle. Wenn wir gleichzeitig die Konzentration halbieren und die Breite verdoppeln, dann trifft der Lichtstrahl gleich viele Moleküle, und auch die gemessene Helligkeit bleibt gleich. Es gilt also

$$f(c/2,2L) = f(c,L).$$

Wie oben können wir nun als Konzentration $c/3$ bei der Breite $3L$ wählen oder allgemeiner c/n bei der Breite nL und erhalten

$$f(c/n,nL) = f(c,L).$$

Wenn wir $n = c$ wählen, bekommen wir $f(c,L) = f(1,cL)$ und nach dem oben Gezeigten

$$f(c,L) = f(1,cL) = f(1,1)^{cL}.$$

Diese Gleichung beschreibt den Zusammenhang von Konzentration, Breite der Küvette und Anteil des durchgelassenen Lichtes komplett. Dabei ist zu beachten, dass die Zahl $f(1,1)$ von dem verwendeten Stoff (und der Wellenlänge des Lichtes) abhängt. Diese Materialkonstanten sind vielfach tabelliert. Meistens wird aber nicht $f(1,1)$ angegeben, sondern die Zahl $\varepsilon := -\log(f(1,1))/\log(10)$, die dekadischer **Extinktionskoeffizient**[1] heißt. Wenn wir diese Zahl in die obige Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$f(c,L) = 10^{-\varepsilon\, cL}$$

[1] mit $\log(x)$ bezeichnen wir stets den *natürlichen* Logarithmus, für den oft auch das Symbol $\ln(x)$ geläufig ist. Der *dekadische* Logarithmus ist $\lg(x) = \log_{10}(x) = \log(x)/\log(10)$. Es gilt also $\varepsilon = -\log_{10}(f(1,1))$.

und somit das Lambert-Beer'sche Gesetz[2]

$$h(c, L) = h_0 \cdot 10^{-\varepsilon \cdot cL}. \tag{1.4}$$

Der Exponent $E := \varepsilon \cdot cL$ wird dabei manchmal auch die (dekadische) Extinktion genannt. $\diamond$

[2]In der *physikalischen* Literatur wird das Lambert-Beer'sche Gesetz meist formuliert als $h(c, L) = h_0 \cdot e^{-\lambda\, cL}$, wobei $e = 2.71828\ldots$ die Euler'sche Zahl ist. Die Zahl λ errechnet sich aus ε durch $\lambda = \log(10) \cdot \varepsilon \approx 2.303 \cdot \varepsilon$.

Kapitel 2

Mathematische Grundbegriffe

2.1 Zahlen

Die Relevanz der Zahlen in den Naturwissenschaften muss an dieser Stelle nicht erläutert werden. Dieses Kapitel stellt die grundlegenden Zahlbegriffe der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen gestrafft dar.

Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{2.1}$$

bezeichnet. Die heute übliche „positionelle Dezimalschreibweise" entstand zwischen 300 v.Chr. und 600 n.Chr. in Indien. Die arabischen Rechentechniken gelangten im späten Mittelalter zum Beispiel über die Rechenbücher Adam Rieses nach Europa.

Die Null wird als eigenständige, nützliche Größe erstmals 600 n.Chr. in Indien beschrieben. Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null wird mit

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{2.2}$$

bezeichnet.

Ganze Zahlen

Mit

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\} \tag{2.3}$$

wird die Menge der ganzen Zahlen bezeichnet.

Die ganzen Zahlen wurden seit dem späten Mittelalter in Europa als nützliche Größen anerkannt. Obwohl negative Zahlen keinen direkten Bezug zum Zählen realer Objekte haben, sind sie aus konzeptionellen Gründen hilfreich. So möchte man beispielsweise in dem Ausdruck

$$(3 + 5) - 7 = 3 + (5 - 7) = 1$$

auch den Ausdruck $(5-7)$ sinnvoll erklären und benötigt – zumindest als Zwischenergebnis der Rechnung – den Begriff $5-7=-2$.

Die Mathematik stellt nicht die Frage danach, ob es die negativen Zahlen „wirklich gibt“, sondern nur,

(1) ob man einen **konsistenten** Kalkül aufbauen kann,

(2) ob dieser Kalkül **nützlich** ist.

Auf die Nützlichkeit muss der Leser zunächst vertrauen. Die Konsistenz wird in den Sätzen gezeigt und in den Übungen der praktische Umgang mit dem Kalkül gelernt.

Rationale Zahlen (Brüche)

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \right\} \tag{2.4}$$

bezeichnet.

Die (positiven) rationalen Zahlen sind schon im klassischen Griechenland geläufig – vor allem als Verhältnisgrößen in der Geometrie. Sie drücken Verhältnisse ganzer Zahlen aus, wie sie zum Beispiel auch in der Stöchiometrie auftreten.

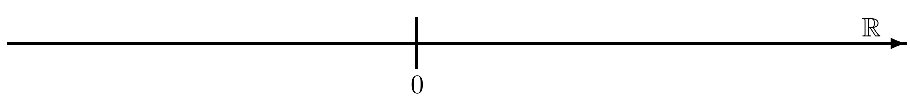
Beispiele sind $\frac{9}{4}$, $\frac{17}{30}$, $\frac{2}{7}$, $-\frac{11}{8}$. Diese Brüche lassen sich auch als Dezimalzahlen darstellen: 2.25, $0.5\overline{6}$, $0.\overline{285714}$, -1.375 usw. Dabei benutzen wir die Schreibweise $0.5\overline{6} = 0.56666666\ldots$ beziehungsweise $0.\overline{285714} = 0.285714\,285714\,285714\ldots$ Man kann zeigen, dass die Dezimalentwicklung jeder rationalen Zahl schließlich periodisch wird.

Reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen ist die Menge der Zahlen mit unendlicher Dezimalentwicklung

$$\mathbb{R} = \left\{ k + r : k \in \mathbb{Z},\, r = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots, \text{ mit } a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\} \right\} \tag{2.5}$$

Anschaulich ist $\mathbb{R}$ die Menge der Punkte auf der Zahlengeraden



Beispiele: 0,3,$-\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$, π, e.

Dabei bezeichnet $\pi = 3.1415\ldots$ die Kreiszahl (Erinnerung: ein Kreis mit Radius r hat die Fläche πr^2 und den Umfang $2\pi r$; eine Kugel mit Radius r hat das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ und die Oberfläche $4\pi r^2$.) und $e = 2.71828\ldots$ die Euler'sche Zahl.[1] Die Euler'sche Zahl lässt sich auf verschiedene Weisen rechnerisch bestimmen. Wir geben nur zwei Darstellungen an:

[1] nach Leonhard Euler, Schweizer Mathematiker (1707–1783)

(1) Der Ausdruck $(1+\frac{1}{n})^n$ nähert sich für große n immer mehr e an. Wir prüfen dies für ein paar Werte von n mit dem Taschenrechner:

$$\begin{array}{lll} n = 10: & \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} & = 2.5937\ldots \\ n = 50: & \left(1+\frac{1}{50}\right)^{50} & = 2.6915\ldots \\ n = 100: & \left(1+\frac{1}{100}\right)^{10} & = 2.7048\ldots \\ n = 500: & \left(1+\frac{1}{500}\right)^{500} & = 2.7155\ldots \end{array}$$

(2) Die folgende (nicht abbrechende) Summe nähert sich immer besser an e an:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

Übung: Man prüfe dies mit dem Taschenrechner für fünf und für acht Summanden!

Reelle Zahlen drücken kontinuierliche Größen aus. Das Konzept soll hier nicht mathematisch fundiert werden. Stattdessen wird an die Anschauung und an das Schulwissen appelliert.

Satz 2.1 *Brüche sind genau diejenigen reellen Zahlen, deren Dezimalentwicklung schließlich periodisch wird.*

Beispiel: $5.37614\,614\,614\ldots = \dfrac{537}{100} + \dfrac{614}{99\,900} = \dfrac{537\,077}{99\,900}$.

Die Zahlen, die reell sind, aber nicht rational, heißen **irrational**.

Beispiele: $\sqrt{2}$, π, $0.10\,110\,1110\,11110\ldots$ sind irrational.[2]

Für die bisher eingeführten Zahlen gilt die Inklusionskette

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Darstellung von Zahlen

Zahlen lassen sich ausdrücken in der Dezimalschreibweise, etwa 25, 1.3, $-2.\overline{8}$ usw., als Brüche $\frac{1}{3}$, $-\frac{11}{4}$ usw., oder beispielsweise durch Wurzelausdrücke $1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{3/7}$. In vielen naturwissenschaftlichen Bereichen treten sehr große und/oder sehr kleine Zahlen auf, die auf diese Weise nur unübersichtlich dargestellt werden können. Daher verwendet man die Schreibweise mit Zehnerpotenzen

$$1.67 \cdot \underbrace{10^5}_{=100\,000} = 167\,000.$$

oder

$$2.3 \cdot \underbrace{10^{-4}}_{=0.0001} = 0.00023.$$

[2] Für e und π ist das etwas schwieriger nachzuweisen. Für $\sqrt{2}$ ist der Beweis nicht so schwer: Wir nehmen das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch. Wir nehmen also an, dass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ist für teilerfremde $p, q \in \mathbb{N}$. Die Teilerfremdheit heißt gerade, dass der Bruch gekürzt ist. Dann sind aber auch p^2 und q^2 teilerfremd, also ist $2 = \frac{p^2}{q^2}$ ein gekürzter Bruch und damit $q = 1$ und $p^2 = 2$. Nun ist aber $1^2 = 1$ und $n^2 \geq 4$ für alle $n = 2, 3, 4, \ldots$ Damit ist die Annahme ad absurdum geführt und die Aussage bewiesen.

$$-7.6 \cdot \underbrace{10^{-8}}_{=0.00000001} = -0.000000076.$$

Viele technische Messinstrumente können keine hochgestellten Zahlen anzeigen. Daher sind hier auch folgende Angaben gebräuchlich

$$1.67\,E5 = 1.67 \cdot 10^5 \qquad \text{und} \qquad 2.3\,E-4 = 2.3 \cdot 10^{-4}.$$

In vielen Zusammenhängen werden nur durch drei teilbare Zehnerexponenten angegeben: 10^3, 10^6, 10^{-3}, 10^{-9} etc. Wir geben eine Tabelle der gebräuchlichsten Zehnerpotenzen mit Zahlwörtern, griechischen Vorsilben und Formelzeichen an.

10^1	Zehn	deka	da
10^2	Hundert	hekto	h
10^3	Tausend	kilo	k
10^6	Million	mega	M
10^9	Milliarde	giga	G
10^{12}	Billion	tera	T
10^{15}	Billiarde	peta	P

10^{-1}	dezi	d
10^{-2}	zenti	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

Beispiel: Gelbes Licht hat etwa die Wellenlänge 440 nm (Nanometer), also $440 \cdot 10^{-9}\,m = 4.4 \cdot 10^{-7}\,m$.

Intervalle

Auf den reellen Zahlen ist eine Ordnung erklärt: $x < y$ heißt, dass x kleiner als y ist, also weiter links auf dem Zahlenstrahl liegt. Wir schreiben $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$.

Der Absolutbetrag einer reellen Zahl x ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen heißen **Intervalle**. Für Intervalle sind die folgenden Schreibweisen gebräuchlich:

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall,} \\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x < b\} && \text{rechtsoffenes Intervall,} \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \; a < x \leq b\} && \text{linksoffenes Intervall,} \\ (a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \end{aligned}$$

Ebenfalls gebräuchlich ist die Schreibweise

$$\begin{aligned} [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x\}, \\ (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq b\}, \\ \mathbb{R}^+ &= [0,\infty), \end{aligned}$$

und analog (a,∞) und $(-\infty,b)$. Manche Autoren, insbesondere in der deutschsprachigen Literatur, benutzen die Schreibweise mit umgedrehten eckigen Klammern, statt der runden, für offene Intervalle: $]a,b[= (a,b)$ u.s.w.

2.2 Rechenregeln

Im Folgenden sind $a, b, c \ldots$ reelle Zahlen. Es gelten die folgenden Regeln:

(1) Assoziativgesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{und} \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

(2) Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

(3) Kommutativgesetz

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \text{und} \qquad a + b = b + a.$$

(4) Vollständigkeit $a - b$ ist lösbar, und $\frac{a}{b}$ ist stets lösbar, falls $b \neq 0$.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a \\ &\vdots \\ a^n &= \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} \end{aligned}$$

Beispiel 2.2 (i) $5^2 = 25$,

(ii) $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$,

(iii) $3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2187$,

(iv) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$,

(v) $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$. ◇

Mit den obigen Rechenregeln können wir leicht die folgenden Ausdrücke ausrechnen.

Beispiel 2.3 (i) (Erste binomische Formel)

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b \quad \text{(Distributivgesetz)} \\ &= a^2 + ba + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{(Kommutativgesetz).} \end{aligned}$$

(ii) Offenbar ist $0 = (a - a) = (a - a)^2$, also ist

$$\begin{aligned} 0 &= (a - a)^2 \\ &= (a + (-a)) \cdot (a + (-a)) \\ &= a^2 - a^2 - a^2 + (-a)^2 \\ &= -a^2 + (-a)^2. \end{aligned}$$

Es folgt: $(-a)^2 = a^2$, also „Minus mal Minus ergibt Plus“. Dieser Merksatz ist keine zusätzliche Rechenregel, sondern ergibt sich zwingend aus den oben beschriebenen Regeln.

(iii) (Zweite binomische Formel)

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+(-b))^2\\ &= a + 2a\cdot(-b) + (-b)^2\\ &= a - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

(iv) (Dritte binomische Formel)

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= (a+b)(a+(-b))\\ &= (a+b)\cdot a - (a+b)\cdot b\\ &= a^2 + ba - ab - b^2\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$ ◇

Rechenregeln für Potenzen

Für $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

denn

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a\cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a\cdots a}_{n \text{ mal}} = \underbrace{a\cdots a}_{(m+n) \text{ mal}} = a^{m+n}.$$

Es gilt

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n},$$

denn

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a\cdots a}_{m \text{ mal}} \cdots \underbrace{a\cdots a}_{m \text{ mal}}}_{n \text{ mal}} = a^{m\cdot n}.$$

Beispiel: $(2^5)^3 = (32)^3 = 32\,768$. Andererseits ist $(2^5)^3 = 2^{15} = 32\,768$.

Vorsicht: Die Ausdrücke $(a^m)^n$ und $a^{(m^n)}$ sind nicht gleich! Deshalb schreibt man nicht ohne Klammer a^{mn}, denn es ist nicht ersichtlich, ob $(a^m)^n$ oder $a^{(m^n)}$ gemeint ist. Beispiel: $4^{(3^2)} = 4^9 = 262144$, aber $(4^3)^2 = 64^2 = 4096$.

Wir setzen formal

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = (a^{-1})^n.$$

Beispiel: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$. $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0.0001$.

Es ist dann $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$. Speziell ist $a^0 = 1$. Diese Festsetzung für negative Exponenten ist die einzige, mit der die obigen Rechenregeln weiter gelten.

Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$, denn

$$(ab)^n = \underbrace{a\cdot b\cdot a\cdot b\cdots a\cdot b}_{n \text{ Paare}} = \underbrace{a\cdots a}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{b\cdots b}_{n \text{ mal}} = a^n \cdot b^n.$$

Wir fassen die Regeln zusammen:

Satz 2.4 *Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ (beziehungsweise $a, b \neq 0$, falls $m, n < 0$) gilt:*

(i) $a^0 = 1$,

(ii) $a^{-1} = \frac{1}{a}$,

(iii) $a^m\, a^n = a^{m+n}$,

(iv) $(a^m)^n = a^{mn}$,

(v) $a^n\, b^n = (ab)^n$.

Diese Rechenregeln, die bislang formal nur für ganzzahlige m, n gelten, können wir für nicht-ganzzahlige m, n *fordern* und dadurch rationale Potenzen *definieren*: Wir definieren $a^{1/2}$, indem wir fordern, dass die Rechenregel (iv) gilt (mit $m = \frac{1}{2}$ und $n = 2$), also $a^1 = (a^{1/2})^2$. Also ist $a^{1/2} = \sqrt{a}$, falls $a \geq 0$ ist (und sonst nicht definiert).

Analog definieren wir $a^{1/3}$ durch $(a^{1/3})^3 = a$, also $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$, falls $a \geq 0$. Allgemein setzen wir

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad \text{falls } a \geq 0.$$

Die Rechenregeln aus dem Satz gelten weiter, denn so haben wir die Definition ja angelegt. Es gelten also (i)-(v) auch für $m, n \in \mathbb{Q}$. Tatsächlich kann man die Ausdrücke a^m sogar für $m \in \mathbb{R}$ so definieren, dass (i)-(v) gelten.

Beispiel: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = 3^{1/2} \cdot 7^{1/2} = 21^{1/2} = \sqrt{21}$.

Bruchrechnung

Zur Übersicht stellen wir hier die Regeln zur Bruchrechnung zusammen. Seien also a, b, c, d reelle Zahlen, die jeweils nicht Null sind. Dann gelten

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a\,c}{b}$$
$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$$
$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b\,c}$$
$$\frac{\;\frac{a}{b}\;}{\frac{c}{d}} = \frac{a\,d}{b\,c}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{b\,d}.$$

Oftmals kann man Brüche kürzen, indem man Zähler (oben) und Nenner (unten) durch die selbe Zahl teilt. Geschicktes Kürzen erfordert etwas Übung. Ansonsten sind die Regeln für die Bruchrechnung banal.

2.3 Vektoren und Matrizen

Oft möchte man Daten/Zahlen zu einem *Objekt* zusammenfassen. In vielen Fällen bietet sich die Schreibweise eines **Vektors** an. Beispiele für Vektoren sind

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,x \\ -2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Speziell schreiben wir (für festes $d \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{R}^d = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R} \right\}$$

und nennen $\mathbb{R}^d$ den d-dimensionalen Raum. Ganz formal handelt es sich bei einem Vektor also bislang um eine Liste von Zahlen, die untereinander geschrieben sind. Von Bedeutung sind Vektoren beispielsweise, um die Lage von Punkten im Raum zu beschreiben. Man misst etwa die x-Koordinate 2.1, die y-Koordinate -1.9 und die z-Koordinate 10.2. Die Lage des Punkts wird nun zu dem Vektor $\begin{pmatrix} 2.1 \\ -1.9 \\ 10.2 \end{pmatrix}$ zusammengefasst.

Einträge eines Vektors können aber auch ganz unterschiedliche Größen sein, etwa bei der Untersuchung eines Tiers: 1. Gewicht, 2. Herzfrequenz, 3. Energieumsatz, also etwa

$$\begin{pmatrix} 60 \text{ kg} \\ 1.5 \text{ Hertz} \\ 6000 \text{ kJ/Tag} \end{pmatrix}.$$

Vektoren gleicher Größe kann man addieren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_d + y_d \end{pmatrix}.$$

Außerdem kann man Vektoren mit Zahlen multiplizieren:

$$a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise können wir den Mittelwert von drei Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ bilden:

$$\frac{1}{3}(x + y + z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_1 + y_1 + z_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{3}(x_d + y_d + z_d) \end{pmatrix}.$$

Hier steckt bislang keine Mathematik drin, sondern nur eine ökonomische Schreibweise.

Manchmal ist es nötig (oder sinnvoll), Daten zweidimensional zu ordnen, statt sie einfach nur untereinander zu schreiben. Das sind dann Ausdrücke wie

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Im ersten Fall haben wir 3×2 **Matrix** (sprich „drei Kreuz zwei"), die aus drei Zeilen und zwei Spalten besteht. Die zweite Matrix besteht aus drei Zeilen und drei Spalten.

Die allgemeine Form einer $m \times n$ Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}.$$

Formal können wir einen Vektor $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ als $m \times 1$–Matrix auffassen.

2.4 Zahlenfolgen

Folgen von Zahlen beschreiben etwa zeitliche Abläufe, Generationenfolgen oder einfach nur nach einander erhobene Daten. Obwohl man gelegentlich auch von endlichen Folgen spricht, sind meist unendliche Folgen gemeint.

Eine (unendliche) Zahlenfolge kann geschrieben werden als $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ (kurz: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$), dabei heißt x_n das n-te Folgenglied. (Manchmal wird die Nummerierung auch bei Null begonnen, also $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ (kurz: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$).)

Beispiel 2.5 (i) $(3, 3, 3, 3, \dots)$

(ii) $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$

(iii) $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$

(iv) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

(v) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$

(vi) $(1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots)$

(vii) $(1,\ -0.8,\ 0.64,\ -0.512,\ 0.4096,\ -0.32768, \dots)$ ◇

Manche Folgen genügen einem mehr oder weniger leicht erkennbaren *Bildungsgesetz*, also einer leicht berechenbaren Formel, die zu jedem $n \in \mathbb{N}$ den Wert x_n liefert. Im vorangehenden Beispiel sind das:

(i) $x_n = 3$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n = 2n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_k = 2^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$

(iv) $x_m = (-1)^{m-1}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$

(v) $x_n = \frac{1}{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

(vi) $x_n = (2/3)^{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

(vii) $x_n = (-0.8)^{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Obwohl hier alles so schön aufgeht, sollte man gewarnt sein:

(i) Bildungsgesetze brauchen nicht offensichtlich zu sein oder überhaupt zu existieren, etwa bei der Folge der Lottozahlen.

(ii) Ein Bildungsgesetz kann auch rekursiv gegeben sein durch Angabe eines Startwertes, etwa $x_1 = 3$, und einer Rekursionsgleichung, die angibt, wie x_{n+1} aus den vorangehenden Folgengliedern berechnet wird, z.B. $x_{n+1} = x_n + 2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit diesem Startwert und diesem Bildungsgesetz erhalten wir die Folge $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (3, 5, 7, 9, \ldots)$.

Aus manchen Rekursiongleichungen kann man leicht ein Bildungsgesetz ableiten, hier z.B. $x_n = 2n + 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Eine Rekursionsgleichung kann auch komplizierter sein und etwa zwei Startwerte benötigen. Wir haben so etwas bei der Folge der Fibonacci Zahlen gesehen. Dort war $b_1 = 1$, $b_2 = 1$ und die Rekursionsgleichung: $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$ Das Bildungsgesetz der Fibonacci Zahlen war aus dieser Rekursionsgleichung nur schwer abzuleiten.

(iv) Obwohl die Folge im Prinzip bekannt ist, kann es unter Umständen kein einfaches Bildungsgesetz geben. Dies ist beispielsweise bei der Folge $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$ der Primzahlen der Fall.

Verhalten für große n

Oftmals ist es von Interesse, das Verhalten einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für große n grob qualitativ abzuschätzen, etwa um das „Langzeitverhalten" eines Versuchs zu beurteilen. Im obigen Beispiel gilt:

(i)	x_n ist konstant.
(ii), (iii)	x_n strebt gegen ∞, wenn n gegen ∞ strebt.
(iv)	x_n *oszilliert* zwischen -1 und $+1$.
(v), (vi), (vii)	x_n strebt (oder *konvergiert*) gegen 0, wenn n gegen ∞ geht. Wir schreiben kurz $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ oder auch $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Eine Folge vom Typ $x_n = a^n$, wo $a \in \mathbb{R}$ ist, heißt **geometrische Folge**.

Für geometrische Folgen gilt:

(i) $a^n \to 0$ für $n \to \infty$, falls $-1 < a < +1$,

(ii) $a^n \to \infty$ für $n \to \infty$, falls $a > 1$,

(iii) $|a^n| \to \infty$ für $n \to \infty$, falls $a < -1$, jedoch mit stets wechselndem Vorzeichen,

(iv) $(-1)^n$ oszilliert zwischen -1 und $+1$,

(v) 1^n ist konstant.

Grenzwerte

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Wir schreiben

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

wenn a_n für große n gegen a strebt. Die Zahl a heißt dann **Limes** oder **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge heißt in diesem Fall **konvergent**. [3]

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, so heißt die Folge **divergent**. Divergente Folgen können beispielsweise oszillieren, oder auch nach $+\infty$ oder $-\infty$ streben.

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls a_n gegen ∞ strebt und $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls a_n für große n gegen $-\infty$ strebt. [4]

Satz 2.6 *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.*

Beispiele 2.7 (i) $a_n = 2^{-n} = (1/2)^n$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) $a_n = n + 1$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(iii) $a_n = (-1)^n$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht, sondern oszilliert.

(iv) $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. ◇

Wir fassen die wichtigsten Rechenregeln für Grenzwerte von Zahlenfolgen zusammen.

Satz 2.8 *(i) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\lambda + a_n) &= \lambda + a, \\
\lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) &= \lambda \cdot a, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= a + b, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= a - b, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

[3] Formal gesprochen heißt a Limes der Folge (a_n), falls für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ (die von ε abhängen kann) existiert mit der Eigenschaft, dass $|a_n - a| < \varepsilon$, wenn $n \geq N$ ist.

[4] Formal gesprochen gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls für jedes (noch so große) $K > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ (die von K abhängen kann) existiert mit der Eigenschaft, dass $a_n > K$, wenn $n \geq N$ ist.

(ii) Ist zudem $b \neq 0$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}. \tag{2.9}$$

(iii) Ist zusätzlich zu (i) (wobei wir jetzt auch $a = \pm\infty$ und $b = \pm\infty$ erlauben wollen) noch $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \leq b$.

(iv) Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $|b_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Speziell ist dann $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$.

(v) Ist $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, und $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

Beispiele 2.9 (i) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})(5-n^{-2}) = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(5-n^{-2}) = 5$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+(1/n)} = (\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}))^{-1} = 1$.

(iii) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, weil $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

(iv)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n^2}} = \frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

(v) Sei $a_n = -\frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_n < b_n$ für jedes n, aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(vi) Um $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2}$ auszurechnen, betrachte $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ und $b_n = n$ und wende (iv) an:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n} = 0. \qquad \diamond$$

Wir wollen nun $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ausrechnen. Hier ist keine der obigen Rechenregeln direkt anwendbar.

Faustregel 2.10 Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, falls der Term, der am schnellsten nach ∞ geht, oben steht. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, falls der Term, der am schnellsten nach ∞ geht, unten steht.

Um zu bestimmen welcher Term am schnellsten nach ∞ geht, stellen wir die folgende Rangordnung auf (von langsam nach schnell):

$$1, \quad \log(n), \quad \sqrt{n}, \quad n, \quad ,n^2, \quad n^3, \quad n^4, \ldots \quad c^n \text{ (für } c > 1), \quad c^{(n^2)}, \quad c^{(n^3)}, \ldots$$

Beispiel 2.11 (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sqrt{n}}{n^4} = 0$, denn n^4 geht schneller nach ∞ als n^2 und $\sqrt{n}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n^2}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(3/2)^n} = 0$, denn n^2 geht langsamer nach ∞ als $(3/2)^n$. $\diamond$

2.5 Summenzeichen und Produktzeichen

Seien $a_1, a_2, a_3, \ldots$ reelle Zahlen. Wir schreiben abkürzend

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

für die Summe der ersten n der a_i.

Beispiel 2.12 (i)

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55.$$

(ii)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} i &= 1+2+3+\ldots+99+100 \\ &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51) \\ &= 101 \cdot 50 = 5050.\end{aligned}$$

(iii) Allgemein ist

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(iv)

$$\sum_{i=1}^{6} i^2 = 1+4+9+16+25+36 = 91.$$

Allgemein ist

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n. \qquad \diamond$$

Ist $m \le n$, so schreiben wir

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Beispiel 2.13

$$\begin{array}{rlllllll}\sum_{i=0}^{10} 2^i & = 1 & +2 & +4 & +8 & +16 & +32 & +\ldots & +1024 \\ & = & 3 & +4 & +8 & +16 & +32 & +\ldots & +1024 \\ & = & & 7 & +8 & +16 & +32 & +\ldots & +1024 \\ & = & & & 15 & +16 & +32 & +\ldots & +1024 \\ & \vdots & & & & & & & \\ & = & & & & & & 1023 & +1024 = 2047 = 2^{11}-1.\end{array}$$

Allgemein gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1. \qquad \diamond$$

Für $a \neq 1$ lässt sich mit einer kleinen Rechnung zeigen, dass

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}. \tag{2.10}$$

Beispiel 2.14 (i) $\sum_{i=0}^{5} 3^i = 1+3+9+27+81+243 = 364$. Probe für die Formel: $\frac{3^6-1}{3-1} = \frac{729-1}{2} = 364$.

(ii) $\sum_{i=0}^{100} \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{(1/8)^{101}-1}{\frac{1}{8}-1} = \frac{1-(1/8)^{101}}{7/8} \approx \frac{1}{7/8} = \frac{8}{7}$, denn $(1/8)^{101} \approx 6.14 \cdot 10^{-92}$ ist fast gleich Null. ◇

Wie durch das vorangehende Beispiel nahe gelegt, ist für $-1 < a < +1$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a}.$$

Wir können also die Summe von *allen* a^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ definieren durch

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1}{1-a}. \tag{2.11}$$

Beispiel 2.15 (i) $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$.

(ii) $\sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1-(-1/4)} = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$. ◇

Wir können Summen mit unendlich vielen Summanden auch für andere Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als die geometrische Folge definieren. Wir nennen

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

die **unendliche Reihe** der $a_1, a_2, a_3, \ldots$, falls der Limes existiert. Falls der Limes endlich ist, sagen wir, dass die Reihe konvergiert, andernfalls (auch wenn der Grenzwert nicht existiert) sagen wir, dass die Reihe divergiert.

Beispiel 2.16 (i) $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} - 2 = \infty.$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty}(-2)^i = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^{n+1}-2}{-3}$. Dieser Grenzwert existiert nicht, also divergiert die Reihe.

(iii) (Harmonische Reihe)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{=1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{=1/2} \\
&\qquad + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)}_{=1/2} + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Die so genannte harmonische Reihe divergiert also. Man kann zeigen, dass $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \log(n)$ für große n.

(iv) Man kann zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} < \infty \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^4 = \frac{\pi^4}{90} < \infty.$$

Erstaunlicherweise ist für ungerade Exponenten k der exakte Wert $\sum_{i=1}^{\infty}(1/i)^k$ unbekannt. $\diamond$

Fazit Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert nur, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt. Dies reicht aber nicht, sondern a_n muss *schnell genug* nach 0 gehen. Wir halten hier nur die wichtigsten Aussagen fest:

Satz 2.17 *Für die geometrische Reihe gilt:*

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} a^i = \frac{a}{1-a}$ *konvergiert genau dann wenn* $|a| < 1$.

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} a^i = \infty$, *falls* $a \geq 1$.

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} a^i$ *existiert nicht, falls* $a \leq -1$.

Ferner gilt

(iv) $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-x} \begin{cases} < \infty, & \text{falls } x > 1, \\ = \infty, & \text{falls } x \leq 1. \end{cases}$

Wenn wir bei der harmonischen Reihe die Vorzeichen wechseln lassen, so konvergiert die Reihe, und man kann den genauen Wert angeben:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} = -\log(2) \approx -0.69\ldots$$

Wir wollen hier keine genauen Kriterien angeben, wann Reihen konvergieren. Manchmal ist jedoch das Dominanzprinzip nützlich: Gilt $a_n \geq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ sowie $|b_n| \leq a_n$ für jedes n, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Produkte

Ähnlich wie für Summen definieren wir Produkte mehrerer Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ durch

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Beispiel 2.18 (i) $\prod_{i=1}^{5} (2+i) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2520.$

(ii) $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (sprich: „n Fakultät“). ◇

Analog wie für unendliche Reihen definiert man auch unendliche Produkte

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i,$$

falls der Limes existiert.

Kapitel 3

Varia

3.1 Dreisatz

Der so genannte Dreisatz ist keine mathematische Regel. Streng genommen handelt es sich beim Dreisatz gar nicht um Mathematik, sondern um ein *Gesetz konstanter Proportionen*, das aus der jeweiligen Anwendung heraus begründet wird. Der Dreisatz steht damit an der Stelle, wo ein Problem einer Anwendung formalisiert wird. Das formale Problem ist eine geradezu simple lineare Gleichung, die nach der einen Unbekannten aufgelöst wird.

Wir bringen zwei Beispiele, die dies verdeutlichen sollen.[1]

(a) (Direkter Dreisatz) 6 kg Kartoffeln kosten DM 5. Wie viel kosten 3 kg Kartoffeln?

Als Ansatz wird ein Gesetz konstanter Proportionen aufgestellt, es wird nämlich angenommen, dass der Quotient $\frac{\text{Preis}}{\text{Gewicht}}$ konstant ist. Es gilt also

$$\frac{P_1}{G_1} = \frac{P_2}{G_2},$$

wenn P_1 den Preis von Kartoffeln des Gewichts G_1 und P_2 den Preis von Kartoffeln des Gewichts G_2 bezeichnet. Im Beispiel sind $P_1 = \text{DM } 5$, $G_1 = 6\,kg$ und $G_2 = 3\,kg$ vorgegeben. Die unbekannte Größe ist mithin P_2. Der mathematische Anteil des Problems besteht darin, die Gleichung nach P_2 aufzulösen:

$$P_2 = G_2\,\frac{P_1}{G_1}.$$

Das war einfach. Jetzt setzen wir die Zahlenwerte ein und erhalten

$$P_2 = 3\,kg\,\frac{\text{DM } 5}{6\,kg} = \text{ DM } 2.5.$$

(b) (Indirekter Dreisatz) Ein Trinkwasserspeicher reicht bei 20 Personen für 15 Tage. Wie lange reicht der Trinkwasserspeicher bei 30 Personen?

Auch hier wird zunächst wieder ein Gesetz konstanter Proportionen aufgestellt:

$$P_1 \cdot T_1 = P_2 \cdot T_2,$$

[1] Brockhaus, Enzyklopädie in 24 Bänden.

wobei T_i die Anzahl der Tage bezeichnet, die der Trinkwasserspeicher reicht, falls P_i Personen trinken ($i = 1, 2$). Dieses Gesetz lässt sich nicht mathematisch begründen. Tatsächlich ist es eine vereinfachende Annahme an die Realität, beispielsweise, dass der Trinkwasserspeicher keinen Zulauf und keine Verluste hat, dass die Personen gleich viel trinken, egal wie viel Personen da sind (dabei werden knappe Ressourcen oft viel gieriger verbraucht) und so fort. Im konkreten Problem ist $P_1 = 15$, $T_1 = 20$ und $P_2 = 30$. Die unbekannte Größe T_2 ist gesucht. Das Auflösen der Gleichung nach T_2 ist einfach:

$$T_2 = \frac{P_1 T_1}{P_2}.$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$T_2 = \frac{15 \cdot 20}{30} = 10.$$

Die Antwort lautet also: Der Trinkwasserspeicher reicht bei 30 Personen für 10 Tage.

Beiden Problemen (a) und (b) ist gemein, dass man zunächst ein Gesetz konstanter Proportionen aufstellt und dann nach einer Größe auflöst. Im Falle (a) ist der Quotient der Größen konstant, während im Falle (b) das Produkt konstant ist. Daher (warum eigentlich genau?) wird (a) manchmal direkter Dreisatz genannt und (b) indirekter Dreisatz.

3.2 Lineare Gleichungen / Gauß Algorithmus

Lineare Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Unbekannte(n) nur linear auftauchen, also nicht etwa als Potenz, Wurzel, Produkt mehrerer Unbekannter oder als noch kompliziertere Ausdrücke.

Beispiel 3.1 Wir betrachten die lineare Gleichung mit einer Unbekannten x:

$$5x + 3 = 7x + 4.$$

Um diese Gleichung zu lösen, bringen wir zunächst alle Ausdrücke, die x enthalten, nach links und die anderen nach rechts:

$$5x - 7x = 4 - 3.$$

Dies können wir ausrechnen zu

$$-2x = 1.$$

Indem wir beide Seiten mit $-\frac{1}{2}$ multiplizieren, erhalten wir die Lösung

$$x = -\frac{1}{2}. \qquad \diamond$$

Beispiel 3.2 Wir betrachten nun zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y

$$\begin{aligned} 5x + 3 &= 4y \\ y + 3x &= 7. \end{aligned}$$

Als ersten Schritt stellen wir die Gleichungen so um, dass sie in **Normalform** erscheinen

$$\begin{aligned} 5x - 4y &= -3 \\ 3x + y &= 7\,. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} x - \frac{4}{5}\,y &= -\frac{3}{5} \\ 3x + \quad y &= \quad 7\ . \end{aligned}$$

Jetzt ziehen wir die erste Gleichung dreimal von der zweiten ab

$$\begin{aligned} x - \frac{4}{5}\,y &= -\frac{3}{5} \\ \frac{17}{5}\,y &= \frac{44}{5}\ . \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung wird mit $\frac{5}{17}$ multipliziert

$$\begin{aligned} x - \frac{4}{5}\,y &= -\frac{3}{5} \\ y &= \frac{44}{17}\ . \end{aligned}$$

Schließlich wird die zweite Gleichung $\frac{4}{5}$-mal zu der ersten addiert

$$\begin{aligned} x \qquad &= \frac{25}{17} \\ y &= \frac{44}{17}. \end{aligned}$$

Dies ist die Lösung der beiden ursprünglichen Gleichungen. ◇

Beispiel 3.3 Wir betrachten wieder zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x + 6y &= 10. \end{aligned}$$

Die Gleichungen haben schon Normalform. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\frac{1}{2}$ und die zweite mit $\frac{1}{4}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}\,y &= \frac{5}{2} \\ x + \frac{3}{2}\,y &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Indem wir die erste Gleichung von der zweiten abziehen, bekommen wir

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}\,y &= \frac{5}{2} \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Zu **jeder** reellen Zahl x erhalten wir also eine Lösung unserer Gleichung, indem wir $y = -\frac{2}{3}\,x + \frac{5}{3}$ setzen. Mit anderen Worten: Es gibt nicht nur eine Lösung der Gleichungen, sondern gleich mehrere, nämlich eine ganze Menge L von Lösungen

$$L = \left\{ (x, y) :\ x \in \mathbb{R} \text{ und } y = -\frac{2}{3}\,x + \frac{5}{3} \right\}$$

Die Menge L heißt **Lösungsmenge** des Problems. ◇

In Beispiel 3.2 war $L = \{(25/17, 44/17)\}$. Wenn die Menge L nur aus einem Punkt besteht (eben wie in Beispiel 3.2), so sagen wir, dass das Problem eindeutig lösbar ist. Ist L eine größere Menge, so sagen wir, dass die Lösung des Problems nicht eindeutig ist. Es kann der dritte Fall eintreten, dass es gar keine Lösung gibt, also $L = \emptyset$. Dies wird im nächsten Beispiel erläutert:

Beispiel 3.4 Wir betrachten wieder zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x + 6y &= 11. \end{aligned}$$

Die Gleichung haben schon Normalform. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\frac{1}{2}$ und die zweite mit $\frac{1}{4}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}\,y &= \frac{5}{2} \\ x + \frac{3}{2}\,y &= \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Indem wir die erste Gleichung von der zweiten abziehen bekommen wir

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}\,y &= \frac{5}{2} \\ 0 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dies stimmt offenbar nicht. Also besitzen die beiden Gleichung keine Lösung, es ist also $L = \emptyset$. $\diamond$

Beispiel 3.5 Als letztes Beispiel wollen wir drei Gleichungen mit drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3 betrachten

$$\begin{array}{ccccccc} & & 9x_2 & + & 6x_3 & = 18 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 90 \\ 2x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = 12 \end{array}$$

1.Schritt Wir vertauschen die erste und die zweite Zeile, damit in der ersten Zeile keine 0 am x_1 steht.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 90 \\ & & 9x_2 & + & 6x_3 & = 18 \\ 2x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = 12 \end{array}$$

2.Schritt Wir ziehen die erste Zeile von der dritten zweimal ab (sodass in der dritten x_1 nicht mehr auftaucht)

$$\begin{array}{cccccccr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 90 \\ & & 9x_2 & + & 6x_3 & = & 18 \\ & - & 9x_2 & + & 4x_3 & = & -168 \end{array}$$

3.Schritt Wir multiplizieren die zweite Zeile mit $\frac{1}{9}$ (sodass vor dem x_2 eine Eins steht)

$$\begin{array}{cccccccr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 90 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = & 2 \\ & - & 9x_2 & + & 4x_3 & = & -168 \end{array}$$

4.Schritt Die zweite Zeile wird neun mal zur dritten addiert (sodass x_2 in der dritten Zeile nicht mehr auftaucht)

$$\begin{array}{cccccccr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 90 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}\,x_3 & = & 2 \\ & & & + & 10x_3 & = & -150 \end{array}$$

5.Schritt Die dritte Zeile wird mit $\frac{1}{10}$ multipliziert

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 90 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}\,x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & -15 \end{array}$$

6.Schritt Der Wert $x_3 = -15$ wird in die zweite Zeile eingesetzt

$$x_2 + \frac{2}{3} \cdot (-15) = 2.$$

Es folgt $x_2 = 12$.

7.Schritt Die Werte $x_3 = -15$ und $x_2 = 12$ werden in die erste Zeile eingesetzt

$$x_1 + 12 - 2 \cdot (-15) = 90.$$

Es folgt $x_1 = 63$. Wir erhalten also als eindeutige Lösung des Problems

$$x_1 = 63, \qquad x_2 = 12, \qquad x_3 = -15.$$

Wir können dies auch so schreiben, dass die Lösungsmenge L nur aus einem Punkt besteht:

$$L = \{(63, 12, -15)\}.$$

◇

Gauß Algorithmus

Ein *Algorithmus*[2] ist ein mechanisiertes Vorgehen, das es erlaubt, ein bestimmtes Problem nach einem festen Schema zu lösen. Dieses Schema wird so exakt beschrieben, dass es durch (stumpfsinniges) Abarbeiten immer zu dem gewünschten Ergebnis führt.

Das Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, das wir in den vorangehenden Beispielen kennen gelernt haben, folgt dem so genannten Gauß Algorithmus.[3]

Das Vorgehen aus dem letzten Beispiel lässt sich folgendermaßen abstrakt formulieren: Zu lösen ist ein System von linearen Gleichungen für die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$.

1. Schritt Steht in der ersten Zeile vor dem x_1 ein Null (taucht also x_1 dort nicht auf), so vertauschen wir die erste Zeile mit einer Zeile, in der x_1 auftaucht.

2. Schritt Die erste Zeile wird so multipliziert, dass x_1 den Faktor 1 hat.

3. Schritt Die erste Zeile wir so oft von den anderen Zeilen abgezogen, dass dort x_1 nicht mehr auftaucht.

4. Schritt Wiederhole die Schritte 1 - 3 für jede Zeile, wobei in 1. nur mit weiter unten stehenden Zeilen vertauscht wird und in 3. nur von weiter unten stehenden Zeilen abgezogen wird.

Es gibt prinzipiell (d.h. bis auf Umsortierung der $x_1, \ldots, x_n$) drei Typen von Ergebnissen, die diese Prozedur liefert:

1. Möglichkeit

$$\begin{array}{llllll} x_1 & +\ldots & \ldots & \ldots & = b_1 \\ & x_2 & +\ldots & \ldots & = b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & x_n & = b_n \end{array}$$

[2]Nach dem arabischen Mathematiker Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi (ca. 783–850)
[3]Nach Carl Friedrich Gauß, Mathematiker, Geodät und Astronom in Göttingen, 1777–1855

(Hierbei bezeichnen $b_1, \dots, b_n$ die Zahlen, die rechts stehen, nachdem wir die Schritte 1-4 ausgeführt haben.) In diesem Fall gibt es eine eindeutige Lösung, die wir bekommen, indem wir $x_n = b_n$ in die $(n-1)$te Zeile einsetzen und damit x_{n-1} ausrechnen. Dann werden x_{n-1} und x_n in die $(n-2)$te Zeile eingesetzt und so weiter, bis wir alle Werte $x_1, \dots, x_n$ ausgerechnet haben.

2. Möglichkeit

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + \dots & \dots & \dots & = b_1 \\ & \ddots & & & = \vdots \\ & & x_k & + \dots & = b_k \\ & & & 0 & = 0 \\ & & & \vdots & = \vdots \\ & & & 0 & = 0 \end{array}$$

(Hierbei ist $k < n$ die Nummer der letzten Zeile, die noch Einträge besitzt, die ungleich Null sind.) Jetzt gibt es mehrere Lösungen. Zunächst können wir $x_{k+1}, \dots, x_n$ frei wählen. Für jede solche Wahl liefert die k-te Zeile genau einen Wert für x_k. Jetzt setzen wir die Werte $x_k, \dots, x_n$ nacheinander in die Zeilen darüber ein und erhalten so eine Lösung. Die Menge aller Lösungen hat in diesem Fall $n-k$ freie Parameter (nämlich $x_{k+1}, \dots, x_n$).

3. Möglichkeit

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + \dots & \dots & \dots & = b_1 \\ & \ddots & & & = \vdots \\ & & x_k & + \dots & = b_k \\ & & & 0 & = b_{k+1} \\ & & & \vdots & = \vdots \\ & & & 0 & = b_m \end{array}$$

wobei wenigstens eine der Zahlen $b_{k+1}, \dots, b_m$ ungleich Null ist. In diesem Fall gibt es keine Lösung.

3.3 Quadratische Gleichungen

Seien a, b, c reelle Zahlen, $a \neq 0$. Wir wollen die Lösungen der Gleichung

$$0 = ax^2 + bx + c$$

bestimmen. Sei die **Diskriminante** Δ definiert durch $\Delta = b^2 - 4ac$. Durch quadratische Ergänzung können wir die beiden Lösungen angeben

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{3.1}$$

Satz 3.6 *Es tritt stets genau einer der drei Fälle auf:*

(i) $\Delta = 0$*:* x_1 *und* x_2 *sind reell und* $x_1 = x_2$*.*

(ii) $\Delta > 0$*:* x_1 *und* x_2 *sind reell und* $x_1 \neq x_2$*.*

(iii) $\Delta < 0$*: Dann sind* x_1 *und* x_2 *keine reellen Zahlen.*

Im ersten Fall heißt x_1 *eine doppelte Nullstelle. Im zweiten Fall heißen die Nullstellen einfach.*

Beweis (i) Ist $\Delta = 0$, so ist $x_1 = x_2 = -\frac{a}{2} \in \mathbb{R}$.

(ii) Ist $\Delta > 0$, so ist $\sqrt{\Delta} > 0$ reell.

(iii) Ist $\Delta < 0$, so ist $\sqrt{\Delta}$ keine reelle Zahl. $\square$

Beispiele 3.7 (i) $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$, $\Delta = 0$.

(ii) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, $\Delta = 1$.

(iii) $x^2 + 2x + 2$: $\Delta = -4$, also gibt es keine reelle Lösung von $0 = x^2 + 2x + 2$. $\diamond$

Kapitel 4

Abbildungen

Aus der Schule sind Funktionen bekannt, deren Definitions- und Wertebereich die reellen Zahlen sind. Das Konzept der Abbildungen (oder Funktionen) ist jedoch auch in solchen Fällen nützlich, wo diese beiden Bereiche von allgemeinerer Natur ist. Die Sprache, die zur Beschreibung von Abbildungen benutzt wird, ist so mächtig, dass sie über reelle Funktionen in weiten Teilen mit dem Vokabular reden kann, das für einfache Tabellen verwendet wird. Wir stellen in diesem Abschnitt die elementarsten Begriffe zusammen und gehen dann im Detail auf reelle Funktionen einer Veränderlichen ein.

4.1 Allgemeines

Seien M und N Mengen. Wir nehmen, um triviale Fälle auszuschließen, an, dass weder M noch N leer ist.

Definition 4.1 (Abbildungen) *Eine Vorschrift $f : M \to N$, $x \mapsto f(x)$, die jedem $x \in M$ genau ein $f(x) \in N$ zuordnet, heißt **Abbildung** von M nach N.*

*M heißt **Definitionsbereich**, und N heißt **Wertebereich** von f,*
Die Menge der tatsächlich *angenommenen Werte $f(M) := \{f(x) : \ x \in M\} \subset N$ heißt **Bild** von f.*

*Die Angabe $x \mapsto f(x)$ heißt **Abbildungsvorschrift**.*

Eine Abbildung ist also vollständig bestimmt durch Angabe der folgenden drei Zutaten:

- Definitionsbereich,
- Wertebereich,
- Abbildungsvorschrift.

Beispiele 4.2 (i) $M, N = \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$.

(ii) $M = [0, \infty)$, $N = [0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

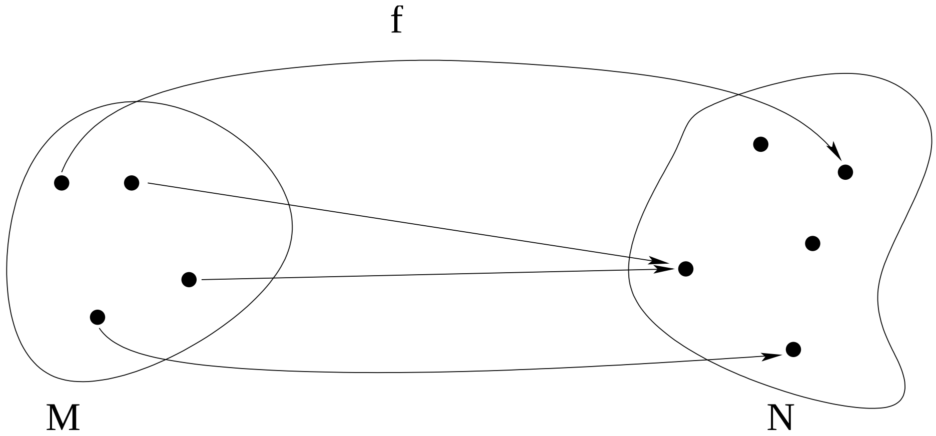


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung einer Abbildung $f : M \to N$

(iii) Sei $B \in \mathbb{N}$ durch drei teilbar und $M = \{1, 2, \ldots, B\}$ sowie $N = \{C, G, A, U\}$ die Menge der Nukleotide Adenin (A), Uracil (T), Guanin (G) und Cytosin (C). Die Abfolge der Nukleotide auf einem mRNA-Strang lässt sich durch eine Funktion $f : M \to N$ beschreiben. Dabei ist $f(m)$ das Nukleotid an der m-ten Stelle des Strangs.

(iv) Je drei aufeinander folgende Nukleotide bilden einen so genannten *Kodon*. Die Menge aller Kodons ist also $N^3 := \{(a, b, c) : a \in N, b \in N, c \in N\}$. Sei $M' = \{1, \ldots, B/3\}$. Die Abbildung $g : M' \to N^3$, $n \mapsto (f(3n-2), f(3n-1), f(3n))$ ordnet jeder dritten Position ihren Kodon zu.

(v) Es gibt zwanzig Aminosäuren, die typischerweise mit dreibuchstabigen Kürzeln (Ala für Alanin, Arg für Arginin, ..., Val für Valin) abgekürzt werden. Jeder Kodon kodiert eine Aminosäure. Beispielsweise kodiert UUU für Phe(nylalanin), UCA für Ser(in), GCA für Ala(nin). Die Kodierung ist nicht ein-eindeutig, denn (beispielsweise) sowohl CGU wie auch auch AGG kodieren für Arg(ginin). Zusätzlich gibt gibt es Kodons, die keine Aminosäure kodieren, sondern so genannte *Stoppkodons* sind (UAA, UAG und UGA). Wir schreiben $S := \{\text{Ala,Arg,}\ldots\text{,Tyr,Val,STOPP}\}$ für die Menge der Aminosäuren plus dem Stopp-Code. Dann können wir eine Abbildung $h : N^3 \to S$ definieren, die jedem Kodon den Code zuordnet. Diese Abbildung h wird sinnvollerweise als Tabelle angegeben.

Wie bekommen wir zu einer gegebenen Position $3n$ in der mRNA die kodierte Aminosäure (bzw. Stopp-Code)? Wir müssen zunächst mit $g(n)$ den Kodon bestimmen und diesen dann in der Tabelle nachschauen, also $h(g(n))$ ausrechnen. Dieses Verfahren bezeichnet man als *Verknüpfung* von Abbildungen. $\diamond$

Definition 4.3 *Sind $f : L \to M$ und $g : M \to N$ Abbildungen, so heißt die Abbildung*

$$\begin{aligned} h : L &\to N \\ x &\mapsto h(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

die ***Verknüpfung*** *von g mit f. Symbolisch schreiben wir $g \circ f = h$.*

Beispiel 4.4 $L = M = N$, $f(x) = x^2$, $g(y) = \sin(y)$. Dann ist $g \circ f(x) = \sin(x^2)$.

Warnung: Im Allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$! In diesem Fall wäre z.B. $f \circ g(x) = (\sin(x))^2$. $\diamond$

Aminosäuren		**mRNA - Kodons**					
Alanin	Ala	GCA	GCC	GCG	GCU		
Argenin	Arg	AGA	AGG	CGA	CGC	CGG	CGU
Asparagin	Asn	AAC	AAU				
Asparaginsäure	Asp	GAC	GAU				
Cystein	Cys	UGC	UGU				
Glutamin	Gln	CAA	CAG				
Glutaminsäure	Glu	GAA	GAG				
Glycin	Gly	GGA	GGC	GGG	GGU		
Histidin	His	CAC	CAU				
Isoleucin	Ile	AUA	AUC	AUU			
Leucin	Leu	CUA	CUA	CUG	CUU	UUA	UUG
Lysin	Lys	AAA	AAG				
Methionin	Met	AUG					
Phenylalanin	Phe	UUC	UUU				
Prolin	Pro	CCA	CCC	CCG	CCU		
Serin	Ser	AGC	AGU	UCA	UCC	UCG	UCU
Threonin	Thr	ACA	ACC	ACG	ACU		
Tryptophan	Trp	UGG					
Tyrosin	Tyr	UAC	UAU				
Valin	Val	GUA	GUC	GUG	GUU		
STOPP		UAG	UGA	UAA			

(Die Kodons „AUG“ und „GUG“ kodieren zudem noch „START“.)

Abbildung 4.2: Zuordnung der mRNA Kodons zu den Aminosäuren

4.2 Umkehrabbildung

Wenn man in der Tabelle mit den Elementen nach der Ordnungszahl eines Elementes sucht, muss man in der rechten Spalte der Tabelle das Element suchen und dann die links stehende Zahl ablesen. Natürlich ist diese Suche mühsam, weil die Tabelle (so nehmen wir mal an) nach der linken Spalte geordnet ist und nicht nach der rechten. Es wäre also praktisch, wenn wir eine weitere Tabelle besäßen, die uns diesen Vorgang erleichterte. In der Sprache der Abbildungen heißt das gewünschte Objekt (denn bisher haben wir es uns ja nur gewünscht und noch nicht hergestellt, oder überhaupt erstmal sichergestellt, dass eine solche Tabelle existiert) eine **Umkehrabbildung**.

Definition 4.5 (Umkehrabbildung) *Sind $f : M \to N$ und $g : N \to M$ Abbildungen mit der Eigenschaft, dass*

$$g(f(x)) = x \quad \text{für jedes } x \in M,$$
$$f(g(y)) = y \quad \text{für jedes } y \in N,$$

so heißen f und g Umkehrabbildungen zueinander. Symbolisch schreiben wir $f = g^{-1}$ und $g = f^{-1}$.

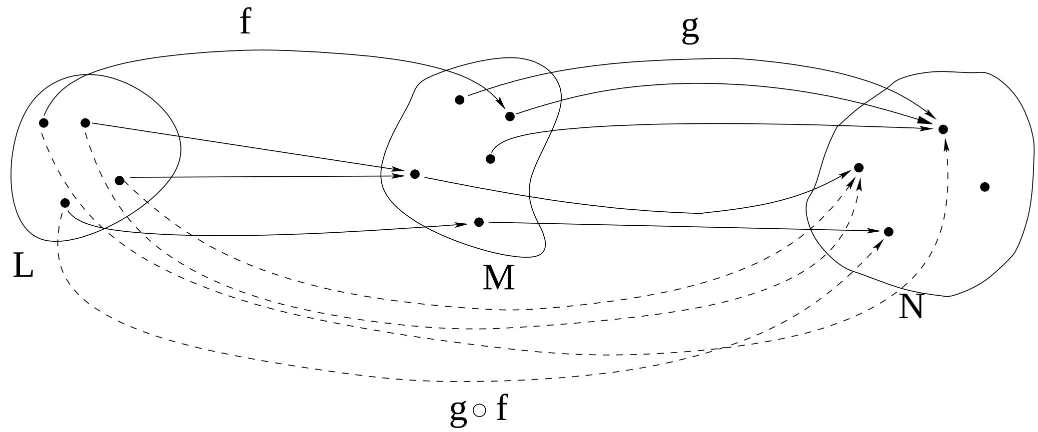


Abbildung 4.3: Verknüpfung der Abbildungen $f : L \to M$ und $g : M \to N$ zu $g \circ f : L \to N$

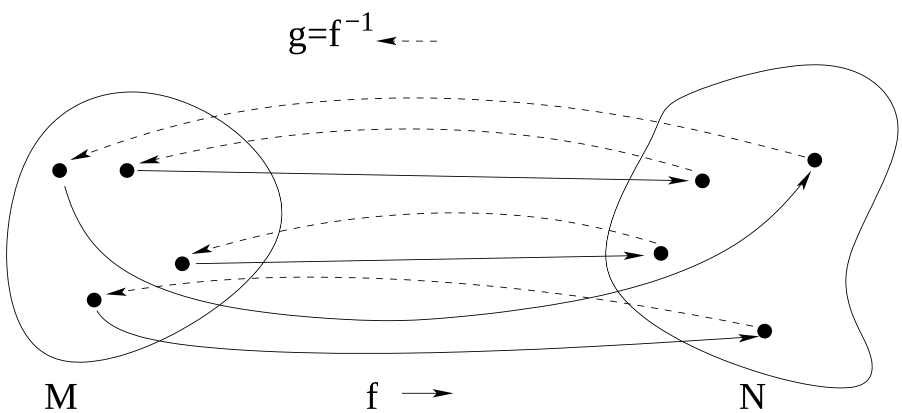


Abbildung 4.4: Umkehrabbildung $g : N \to M$ der Abbildung $f : M \to N$.

Beispiel 4.6 (i) $M = [0, \infty)$, $N = [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(y) = \sqrt{y-1}$. Dann ist

$$f(g(y)) = \left(\sqrt{y-1}\right)^2 + 1 = y - 1 + 1 = y$$

und

$$g(f(x)) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = x, \quad \text{weil } x \geq 0.$$

(ii) Sei $M = \{UUU, UUC, \ldots, GGA, GGG\}$ die Menge aller Kodons sowie $N = \{$Ala,Arg,...,Tyr,Val,STOP$\}$ die Menge der Aminosäuren plus Stopp-Code. Ferner sei $h : M \to N$ die Abbildung, die jedem Kodon seinen Code zuordnet. Dann ist beispielsweise $h(CGU) = h(AGG) = Arg$. Also kann man zu h keine Umkehrabbildung finden. ◇

Das letzte Beispiel zeigt schon ganz klar, worauf es ankommt, wenn man nach Umkehrabbildungen sucht: verschiedene Argumente müssen unterschiedliche Funktionswerte liefern.

Definition 4.7 (Ein-eindeutigkeit) *Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **ein-eindeutig** (oder 1–1, oder injektiv), falls*

$$f(x) \neq f(y), \quad \text{wann immer} \quad x \neq y.$$

Die Ein-eindeutigkeit ist schon fast alles, was man braucht, damit es eine Umkehrabbildung gibt. Als zweites ist noch eine kleine technische Spitzfindigkeit zu beachten: Wenn f und g Umkehrfunktionen zueinander sind, so kehren sich die Rollen von Werte– und Definitionsbereich um. Damit das richtig klappt, muss $f : M \to N$ auch wirklich jeden Wert in N annehmen, oder in Formeln ausgedrückt: es muss $f(M) = N$ gelten. Praktisch ist das nie ein Problem. Man hat ja meist schon eine Vorstellung davon, welches Bild eine Funktion hat, die Sinusfunktion beispielsweise das Intervall $[-1, 1]$, und wählt dann N so, dass es mit diesem Bereich übereinstimmt. Wir werden in den Beispielen sehen, wie das geht.

Satz 4.8 *Die Abbildung $f : M \to N$ besitzt eine Umkehrabbildung f^{-1} genau dann, wenn f ein-eindeutig ist und $f(M) = N$ gilt.*

Beispiel 4.9 $M = [0, \infty)$, $N = [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$. Offenbar ist f ein-eindeutig. Außerdem wird jeder Wert in N tatsächlich angenommen. Wir können, weil das Problem so einfach ist, die Umkehrfunktion sogar explizit angeben: $g : N \to M$, $g(y) = \sqrt{y-1}$.

Wenn wir, unvorsichtigerweise, $N = \mathbb{R}$ gewählt hätten, so hätten wir keine Umkehrabbildung angeben können. Das liegt daran, dass in diesem Fall die Gleichheit $y = f(g(y))$ für $y < 1$ nicht gelten kann, weil f den Wert y nicht annimmt. Ganz so spitzfindig war die Voraussetzung $f(M) = N$ also nicht, wie sich hier zeigt. Natürlich könnten wir uns auf den Standpunkt stellen, dass wir sowieso nur an der Gleichung $f(g(x)) = x$ interessiert sind. In diesem Fall wäre die Bedingung an den Bildbereich hinfällig. $\diamond$

Beispiel 4.10 Es sei ein Zusammenhang zwischen zwei reellen Größen x und y gegeben durch $x^2 + y^2 = 1$. Unser Ziel ist es, y als Funktion von x zu schreiben.

Schritt 1: Wir trennen die Variablen

$$y^2 = 1 - x^2.$$

Schritt 2: Die Umkehrfunktion von $y \mapsto y^2$ ist $y \mapsto \sqrt{y}$, jedenfalls, wenn wir uns auf $y \geq 0$ einschränken. Der Definitionsbereich der Umkehrabbildung ist $[0, \infty)$, also müssen wir $|x| \leq 1$ fordern.

Insgesamt folgt, dass wir $y = f(x)$ schreiben können, wo $f : [-1, 1] \to [0, 1]$,

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ist allgemeiner $g(y) = h(x)$ als Zusammenhang gegeben, so können wir $y = f(x)$ schreiben, wo $f(x) = g^{-1}(h(x))$ für einen Bereich $I \subset \mathbb{R}$, sodass (wenn $J = h(I)$ den Wertebereich von h bezeichnet) $g : J \to \mathbb{R}$ ein-eindeutig ist. $\diamond$

Wie gehen wir vor, wenn wir die Umkehrabbildung einer zusammen gesetzten Abbildung bestimmen wollen? Dazu zunächst ein Beispiel.

Beispiel 4.11 Sei $L = M = N = \mathbb{R}$ und $f : L \to M$ sowie $g : M \to N$ gegeben durch $f(x) = x^3 + 1$ und $g(y) = 5x$. Die jeweiligen Umkehrabbildungen sind $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ und $g^{-1}(x) = \frac{x}{5}$. Die verknüpfte Abbildung $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $g \circ f(x) = 5(x^3 + 1)$. Die Umkehrabbildung ist $(g \circ f)^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y}{5} - 1}$, denn

$$(g \circ f)\left(\sqrt[3]{\frac{y}{5} - 1}\right) = 5\left(\left(\sqrt[3]{\frac{y}{5} - 1}\right)^3 + 1\right) = 5\left(\frac{y}{5} - 1 + 1\right) = y$$

und

$$\sqrt[3]{\frac{g \circ f(x)}{5} - 1} = \sqrt[3]{\frac{5(x^3 + 1)}{5} - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Es gilt also $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. In Worten, man erhält die Umkehrabbildung einer verknüpften Abbildung, indem man die jeweiligen Umkehrabbildungen in umgekehrter Reihenfolge verknüpft. ◇

Dies gilt auch allgemeiner als nur für die oben betrachteten Abbildungen.

Satz 4.12 *Sind $f : L \to M$ und $g : M \to N$ umkehrbare Abbildungen mit Umkehrabbildungen f^{-1} und g^{-1}, so ist die zusammengesetzte Abbildung $g \circ f : L \to N$ umkehrbar und hat die Umkehrabbildung*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

4.3 Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens können als (eventuell negativ gemessene) Längen in einem Dreieck im Einheitskreis mit gegebenem Winkel definiert werden. Dabei messen wir stets den Winkel im Bogenmaß, der Bereich der Winkel erstreckt sich also über $[0, 2\pi)$ und nicht über $[0°, 360°)$. Ein rechter Winkel, beispielsweise, hat im Bogenmaß die Größe $\frac{\pi}{2}$. Wir stellen hier nur knapp ein paar der wichtigsten Eigenschaften der Winkelfunktionen zusammen. Sei im Folgenden $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Periodizität

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(x + 2\pi k) \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{Z}, \\ \cos(x) &= \cos(x + 2\pi k) \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Symmetrie

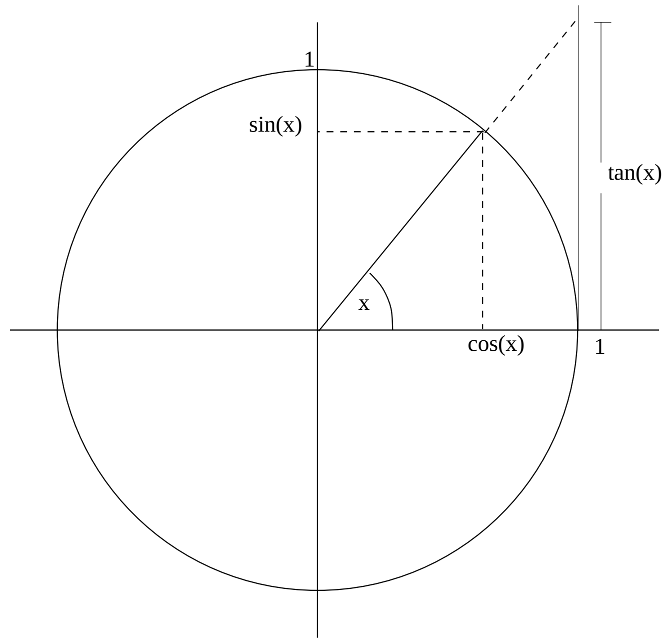
$$\begin{aligned} \sin(x) &= -\sin(-x) \qquad \text{„ungerade Funktion“}, \\ \cos(x) &= \cos(-x) \qquad \text{„gerade Funktion“}, \\ \cos(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

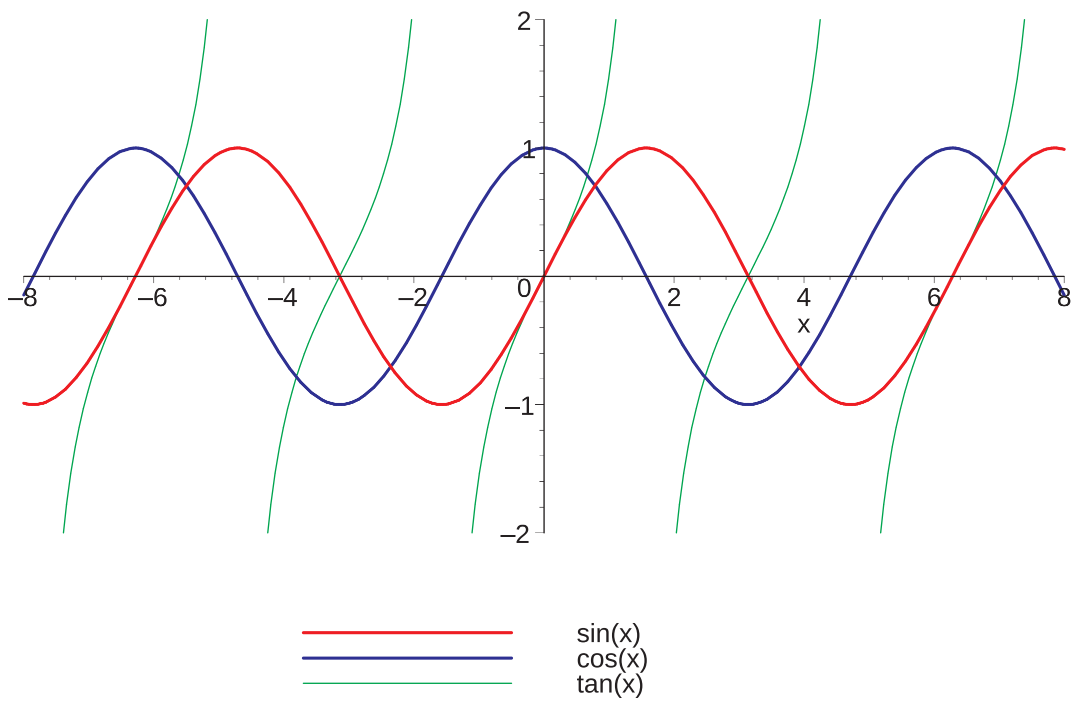
Satz von Pythagoras

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

Unter Addition der Argumente verhalten sich die Winkelfunktion nicht so einfach wie die Wurzelfunktion oder Potenzen. Es gelten statt dessen die **Additionstheoreme**: Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x), \\ \cos(x + y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned} \tag{4.2}$$


1
sin(x)
tan(x)
x
cos(x)
1


2
1
0
–1
–2
–8
–6
–4
–2
2
4
6
8
x
sin(x)
cos(x)
tan(x)

Man erhält durch einfache geometrische Überlegungen die folgende Tabelle mit einigen Werten der Sinus- und Kosinusfunktion.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$x \cdot \frac{360°}{2\pi}$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1

4.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

Sei $e = 2.71828\ldots$ die Euler'sche Zahl. Dann können wir eine Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ definieren durch $\exp(x) = e^x$. Diese Abbildung heißt *Exponentialfunktion*. Aus den Rechengesetzen für Potenzen erhalten wir sofort die Eigenschaften:

(i) $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$.

(ii) $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(iv) $\exp(x) > 1$ für $x > 0$ und $\exp(x) < 1$ für $x < 0$.

(v) Ist $y > x$, so ist $\exp(y) = \exp(x) \cdot \exp(y-x) > \exp(x)$. Wir sagen, dass exp (streng) monoton wachsend ist.

(vi) Strebt $x \to \infty$, so strebt $\exp(x)$ gegen ∞.

(vii) Strebt $x \to -\infty$, so strebt $\exp(x)$ gegen 0.

Da exp streng monoton wächst, wird kein Wert zweimal angenommen, und wir können die Umkehrabbildung von exp definieren: Die Logarithmusfunktion $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Für die Logarithmusfunktion gelten die folgenden Rechenregeln:

(i) $\log(1) = 0$ und $\log(e) = 1$.

(ii) $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ für alle $x, y > 0$.

(iii) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$ für alle $x, y > 0$.

(iv) $\log(x) > 0$ für $x > 1$ und $\log(x) < 0$ für jedes $x \in (0,1)$.

(v) Ist $y > x > 0$, so ist $\log(y) = \log(x) + \left(\frac{y}{x}\right) > \log(x)$. Also ist log (streng) monoton wachsend.

(vi) Strebt $x \to \infty$, so strebt $\log(x)$ gegen ∞.

(vii) Strebt $x \to 0$ (von rechts), so strebt $\log(x)$ gegen $-\infty$.

Sei $a > 0$ und $a = e^x$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $x = \log(a)$. Dies ist gerade die Definition der Umkehrfunktion. Ist also $y \in \mathbb{R}$, dann ist

$$a^y = (e^x)^y = e^{xy} = e^{y\,\log(a)}.$$

Ist $z > 0$ und $a^y = z$, so folgt $z = e^{y\,\log(a)}$, also $\log(z) = y\,\log(a)$ und damit $y = \frac{\log(z)}{\log(a)}$. Wir nennen

$$\log_a(z) := \frac{\log(z)}{\log(a)}, \qquad a > 0,\ z > 0$$

den Logarithmus von z zur Basis a. Offenbar ist $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion der Abbildung $\mathbb{R} \to (0,\infty)$, $x \mapsto a^x$. Für $\log_a$ gelten die Rechenregeln (i), (ii), (iii) (mit der Ausnahme $\log_a(e) = 1/\log(a)$) wie für log. Ist $a > 1$, so gelten auch (iv)-(vii).

Zur Unterscheidung wird log manchmal auch *natürlicher Logarithmus* genannt. Manche (oder besser: viele) Autoren, besonders aus den technischen Bereichen, schreiben statt „$\log(x)$“ lieber „$\ln(x)$“ für *logarithmus naturalis* und bezeichnen mit $\log(x)$ oder $\lg(x) = \log_{10}(x)$ den so genannten *dekadischen* Logarithmus, oder Logarithmus zur Basis 10. Wir folgen hier aber der in der Mathematik gebräuchlichen Notation.

4.5 Reelle Funktionen einer Veränderlichen

Ist $M \subset \mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) :\ x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$, und $N \subset \mathbb{R}$ so heißt jede Abbildung $f : M \to N$ eine reelle Funktion von n (reellen) Veränderlichen.

Wir wollen hier nur den Fall $n = 1$ betrachten, also reelle Funktionen einer Veränderlichen. Außerdem wollen wir annehmen, dass $I := M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Dies kann offen oder abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt sein.

In welcher Weise kann man Abbildungsvorschriften von Abbildungen $I \to \mathbb{R}$ angeben?

(i) **Elementar**, durch algebraische Ausdrücke wie $x \mapsto x^2$.

(ii) Durch **geometrische Konstruktion**, z.B. $x \mapsto \sin(x)$.

(iii) Durch Definition „von Hand“: Vorzeichenfunktion

$$\text{sign} : x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ +1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

(iv) **Implizit**, durch Angabe von Eigenschaften. Beispielsweise kann man eine Funktion f als Umkehrfunktion einer anderen Funktion g definieren, wenn man weiß, dass g umkehrbar ist. Praktisch liefert einem das natürlich keine Hilfe, wenn man ganz konkret Funktionswerte berechnen möchte.

Ein anderes Beispiel sind etwa die Rechenregeln (i) und (ii) bei der Exponentialfunktion. Bei impliziten Definitionen beschreibt man eine Funktion durch Angabe einer „Wunschliste“ von Eigenschaften. Danach muss man prüfen, ob eine solche Funktion überhaupt *existiert*, und ob sie durch Angabe der Eigenschaften *eindeutig* beschrieben ist. Schließlich muss man sich irgendwann noch darum kümmern, konkrete Werte wirklich auszurechnen.

(v) Durch Darstellung als (konvergente) Reihe: Beispielsweise kann man zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

und

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

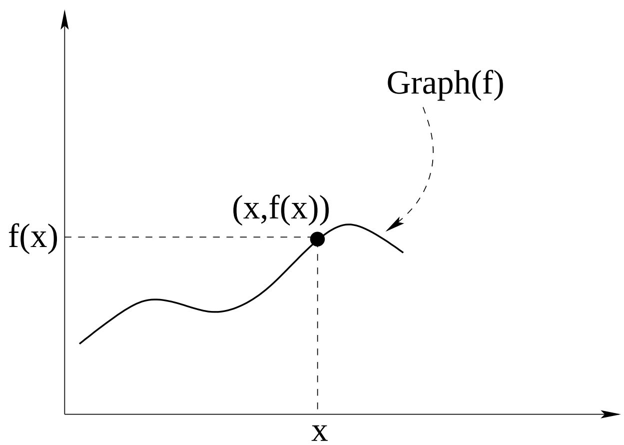
Funktionen dieser Bauart heißen **transzendente Funktionen** (von lat. *trans scandere*, weil sie über den Rahmen der algebraischen Funktionen *hinaus führen*).

Man muss aber aufpassen: Nicht jede Funktion besitzt eine solche Darstellung als so genannte **Taylorreihe** oder **Potenzreihe**.

Zahlenbeispiel: Mit dem Taschenrechner berechnen wir die Zahlenwerte von $\exp(2) = 7.389\ldots$ und der Näherung $\sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} 2^n = 1 + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720} = 7.3\overline{5}$.

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ wird oft dadurch veranschaulicht, dass man ihren **Graphen** zeichnet. Formal handelt es sich dabei um die Menge von Punkten in der Ebene

$$\text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}. \tag{4.4}$$



Durch die Angabe des Graphen (und genau genommen: des Wertebereichs) ist eine Funktion natürlich eindeutig bestimmt. Wenn man nur genau genug zeichnen könnte, wäre es also möglich, Funktionen alleine durch Zeichnung zu definieren. Im Allgemeinen geht das nicht, aber der Graph ist dennoch hilfreich, wenn man wesentliche qualitative Aussagen verstehen oder mitteilen möchte.

Wir kommen jetzt zu dem wichtigen Begriff der Monotonie.

Definition 4.13 *Die Funktion f heißt*

$$\begin{aligned} &\textit{monoton wachsend,} && \textit{falls } f(y) \geq f(x) && \textit{wann immer } y > x, \\ &\textit{streng monoton wachsend,} && \textit{falls } f(y) > f(x) && \textit{wann immer } y > x, \\ &\textit{monoton fallend,} && \textit{falls } f(y) \leq f(x) && \textit{wann immer } y > x, \\ &\textit{streng monoton fallend,} && \textit{falls } f(y) < f(x) && \textit{wann immer } y > x. \end{aligned}$$

Satz 4.14 *Ist $f : I \to N \subset \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend), so ist f ein-eindeutig.*

Ist zusätzlich $f(I) = N$, so ist f umkehrbar. Die Umkehrabbildung ist dann ebenfalls streng monoton wachsend (beziehungsweise fallend). Der Graph der Umkehrfunktion ergibt sich durch Spiegelung des ursprünglichen Graphen an der Diagonalen $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

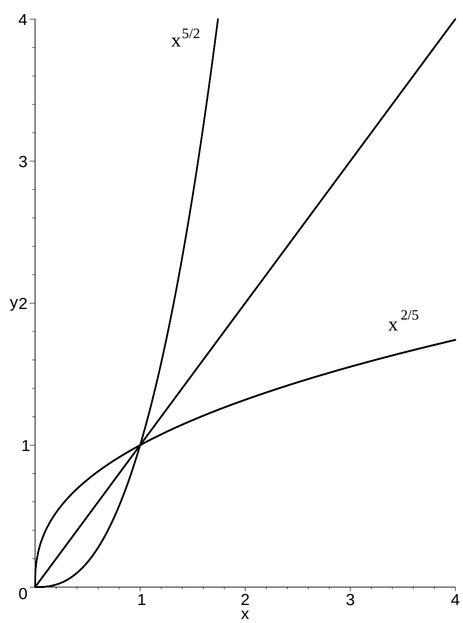
Beispiele 4.15 (i) Die Vorzeichenfunktion sign (siehe (4.3)) ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend. Sie ist nicht umkehrbar.

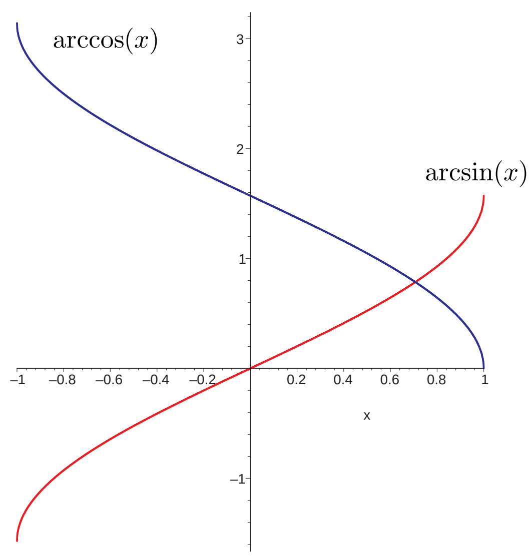
(ii) Die Abbildung $[0, 1] \to [-1, 0]$, $x \mapsto -x^2$ ist streng monoton fallend. Die Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion lautet $y \mapsto \sqrt{-y}$.

(iii) Ist $r > 0$, so ist die Abbildung $[0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^r$ streng monoton wachsend. Die Umkehrabbildung lautet $[0, \infty) \to [0, \infty)$, $y \mapsto y^{\frac{1}{r}}$.

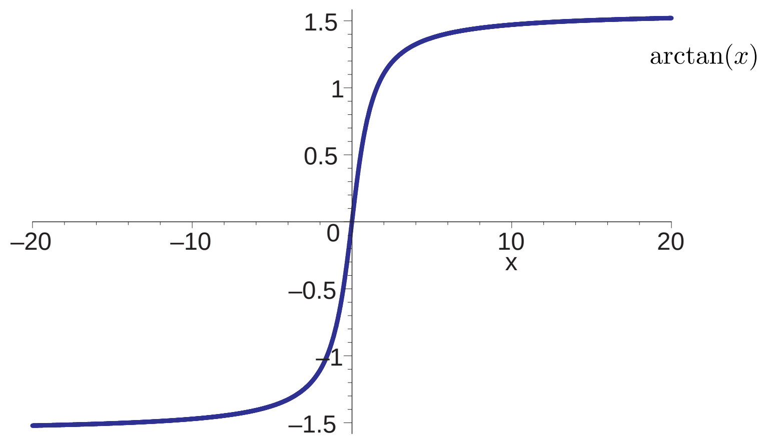
(iv) Die Abbildung $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$ ist streng monoton wachsend. Die Umkehrabbildung, die wir nicht explizit kennen, aber die nach dem vorangehenden Satz existiert, heißt **Arcus-Sinusfunktion**. Symbolisch $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(v) Die Abbildung $[0, \pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos(x)$ ist wieder streng monoton fallend. Die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ heißt **Arcus-Kosinusfunktion**.





(vi) Die Abbildung $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x)$ ist streng monoton wachsend. Die Umkehrabbildung $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ heißt **Arcus-Tangensfunktion**.



(vii) Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist streng monoton wachsend. Die Umkehrabbildung ist die (natürliche) Logarithmusfunktion $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

(viii) Die Abbildung $f : [0, \infty) \to (0, 1]$, $x \mapsto f(x) = \exp(-x^2)$ (siehe Zehnmarkschein) ist streng monoton fallend. Die Umkehrfunktion lautet $f^{-1} : (0, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{-\log(y)}$.

(ix) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist weder monoton wachsend noch monoton fallend. Man kann keine Umkehrfunktion angeben. $\diamond$

Beispiel 4.16 Wollen wir die Umkehrfunktion einer komplizierten, zusammen gesetzten Funktion bestimmen, so wenden wir Satz 4.12 mehrfach an und suchen nach geeigneten Monotoniebereichen für die einzelnen Funktionen. Betrachten wir beispielsweise f gegeben durch

$$f(x) = \sqrt[3]{1 - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}.$$

Dann können wir schreiben

$$f(x) = f_1(f_2(f_3(f_4(x)))),$$

wobei $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_2(x) = 1-x$, $f_3(x) = \sin(x)$, $f_4(x) = \frac{\pi}{3} - x$. Damit wir die einzelnen Funktionen umkehren können, müssen wir ihre Definitionsbereiche so wählen, dass sie ein-eindeutig sind. Eine mögliche Wahl ist

$$\begin{array}{llll} f_1 & : [0, \infty) \to [0, \infty), & & f_1^{-1}(y) = y^3, \\ f_2 & : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & & f_2^{-1}(y) = 1 - y, \\ f_3 & : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1], & & f_3^{-1}(y) = \arcsin(y), \\ f_4 & : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & & f_4^{-1}(y) = \frac{\pi}{3} - y. \end{array}$$

Offenbar müssen wir für f_4 zusätzlich annehmen, dass die Werte $f_4(x)$ im Definitionsbereich von f_3 liegen, also $f_4(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Damit wird der Definitionsbereich von f_4 festgelegt als $[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$. Offenbar ist der Wertebereich $f([-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]) = [0, \sqrt[3]{2}]$. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist jetzt durch umgedrehte Anwendung der einzelnen Umkehrabbildungen gegeben

$$f^{-1}(y) = f_4^{-1}(f_3^{-1}(f_2^{-1}(f_1^{-1}(y)))).$$

Insgesamt folgt:

$$f : \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right] \to [0, \sqrt[3]{2}]$$

ist umkehrbar, und die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \frac{\pi}{3} - \arcsin\left(1 - y^3\right). \qquad \diamond$$

4.6 Reelle Funktionen mehrerer Veränderlicher

Sei $n = 2, 3, 4, \ldots$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ der Definitionsbereich der reellen Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ von n Veränderlichen.

Beispiel 4.17 Das Gesetz des idealen Gases lautet

$$pV = NkT, \tag{4.5}$$

wobei p der Druck, V das Volumen, N die Anzahl der Moleküle, T die absolute Temperatur und k die Boltzmann Konstante ist. Ist im Experiment das Volumen und die Temperatur einstellbar, sowie der Druck zu messen, so wollen wir p als Funktion von V und T schreiben:

$$p = f(V, T).$$

Dabei ist $M = (0, \infty) \times (0, \infty)$ und

$$f : M \to (0, \infty), \qquad (V, T) \mapsto Nk\frac{T}{V}. \qquad \diamond$$

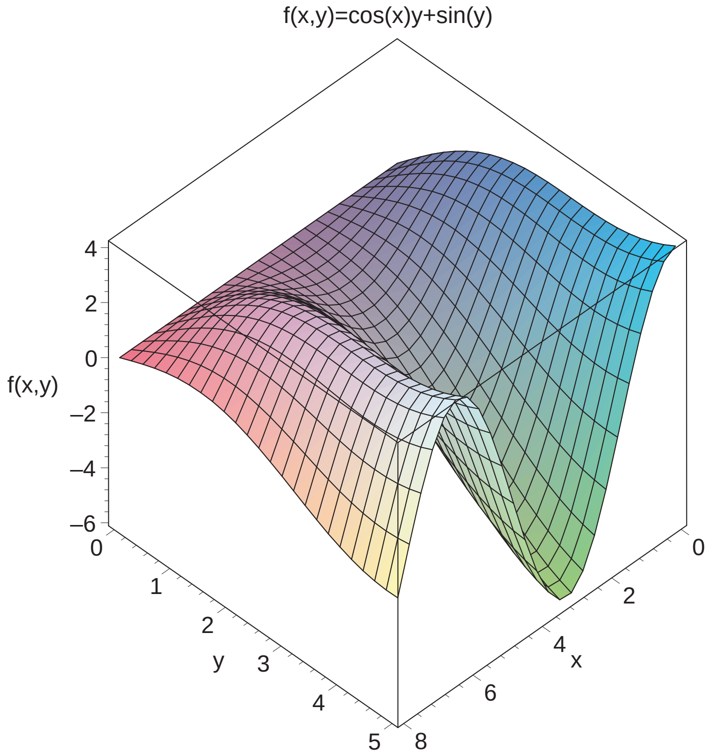
Der Graph einer reellen Funktionen mehrerer Veränderlicher ist genauso wie oben definiert als

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in M\}.$$

Die Darstellung des Graphen ist allerdings schwieriger als bei Funktionen von nur einer Veränderlichen. Für Funktionen von zwei Veränderlichen bieten sich immerhin noch zwei Möglichkeiten an:

1. Perspektivische Darstellung

In einer perspektivischen Darstellung wird der Parameterbereich (die Veränderlichen) als Fläche und der Funktionswert nach oben dargestellt. Oft wird der Graph mit einem Gitter belegt, damit die Werte optisch besser erkennbar sind. Das ist von Hand sehr aufwändig, allerdings mit Computern heutzutage kein Problem mehr.



2. Niveaulinien

Definition 4.18 *Die Niveaulinie der Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ zur Höhe h ist die Menge*

$$N_f(h) = \big\{(x_1, x_2) \in M : \; f(x_1, x_2) = h\big\}.$$

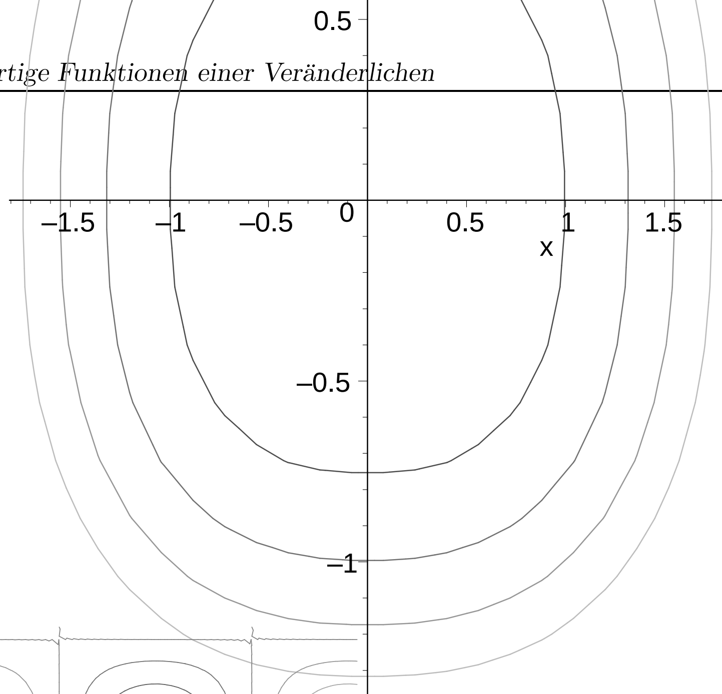
Beispiel 4.19 Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to [0, \infty) \\ (x_1, x_2) &\mapsto |x_1|^{5/2} + 2\,|x_2|^{5/2}. \end{aligned}$$

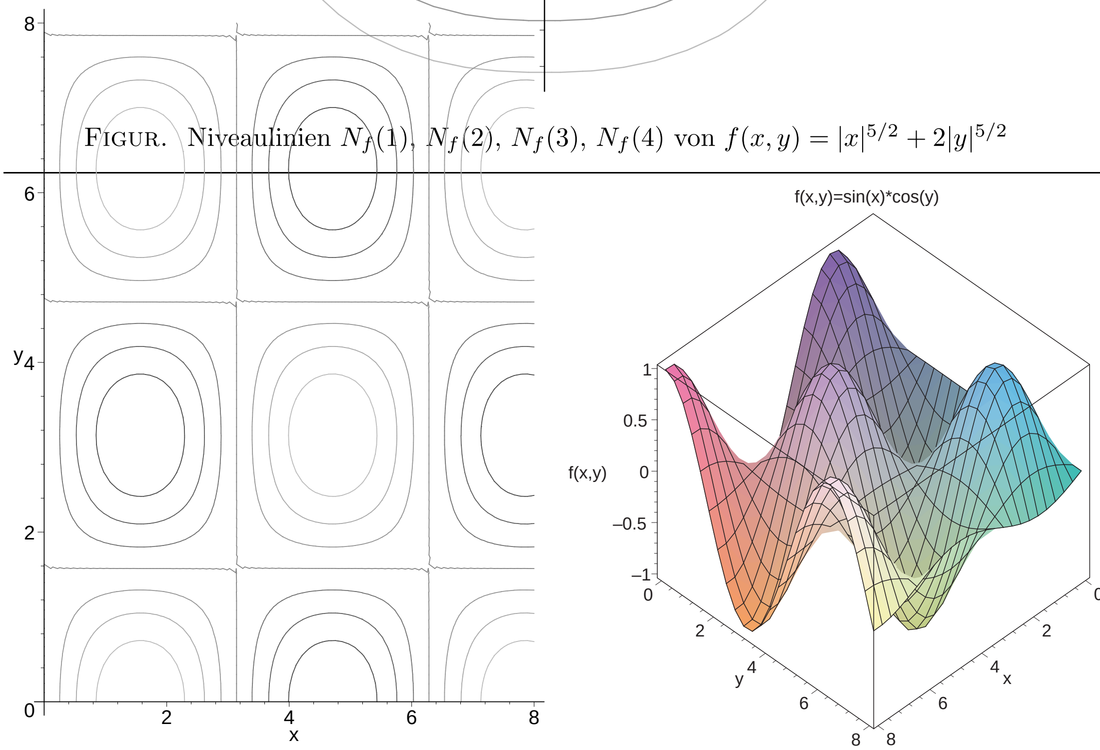
Für $h \geq 0$ ist

$$N_f(h) = \Big\{(x_1, x_2) : \; |x_1|^{5/2} + 2\,|x_2|^{5/2} = h\Big\}. \qquad \diamond$$

Bemerkung 4.20 Offenbar ist f nicht ein-eindeutig. Das ist die typische Situation für reelle Funktionen mehrerer Veränderlicher. Für die Naturwissenschaften relevante reelle Funktionen mehrerer Veränderlicher sind *nie* ein-eindeutig (und damit auch nie umkehrbar).



FIGUR. Niveaulinien $N_f(1)$, $N_f(2)$, $N_f(3)$, $N_f(4)$ von $f(x,y) = |x|^{5/2} + 2|y|^{5/2}$



FIGUR. Niveaulinien und perspektivische Darstellung von $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$

4.7 Vektorwertige Funktionen einer Veränderlichen

Definition 4.21 *Sei $n = 2, 3, 4, \ldots$ und $M \subset \mathbb{R}$ sowie $N \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt* ***vektorwertige Funktion*** *von einer Veränderlichen. Wir schreiben auch*

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

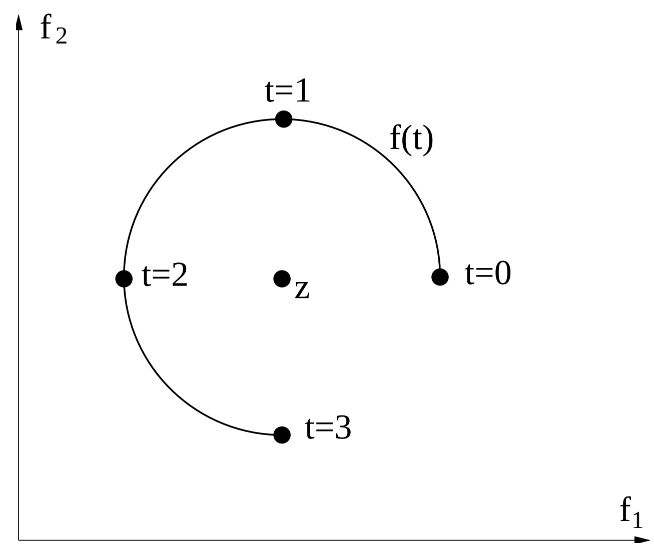
Vektorwertige Funktionen benutzt man, um mehrere Messgrößen $f_1, \ldots, f_n$ als Funktion, beispielsweise, der Zeit t, oder auch einer anderen, frei einstellbaren Größe, zu beschreiben.

Darstellung: Für $n = 2$ kann man die Kurve $\{f(x) : x \in M\}$ in der (y, z)–Ebene zeichnen und mit den x–Werten beschriften. Für $n = 3$ bietet sich eine perspektivische Darstellung mit Beschriftung an.

4.22 Beispiel Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Sei $\omega \in \mathbb{R}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(t) = \begin{pmatrix} z_1 + \cos(\omega t) \\ z_2 + \sin(\omega t) \end{pmatrix} \qquad \text{für} \;\; t \geq 0. \tag{4.6}$$

Dann beschreibt f eine Drehung um die Achse z.



FIGUR. Darstellung von f aus (4.6) mit $\omega = \frac{\pi}{2}$

Beispiel 4.23 Zerfall von Stickstoffdioxid. $2\,\mathrm{NO_2} \longrightarrow 2\,\mathrm{NO} + \mathrm{O_2}$.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \text{Konzentration } c(\mathrm{NO_2}) \text{ zur Zeit } t. \\ f_2(t) &= \text{Konzentration } c(\mathrm{NO}) \text{ zur Zeit } t. \\ f_3(t) &= \text{Konzentration } c(\mathrm{O_2}) \text{ zur Zeit } t. \end{aligned}$$

Annahme $f_2(0) = f_3(0) = 0$ und $f_1(0) = c_0 > 0$. Der Zerfall ist eine Reaktion zweiter Ordnung, das heißt, es sind zwei Reaktionspartner (die zwei NO_2 Moleküle) an der Reaktion beteiligt. Die Menge des pro Zeiteinheit umgesetzten Stoffes ist nach dem Massenwirkungsgesetz proportional zum Quadrat der Konzentration an NO_2. Insgesamt ergibt sich folgende Gleichung, die hier nicht hergeleitet werden soll,

$$f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{c_0}{c_0\, kt + 1} \\ \dfrac{c_0^2\, kt}{c_0\, kt + 1} \\ \dfrac{1}{2}\, \dfrac{c_0^2\, kt}{c_0\, kt + 1} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

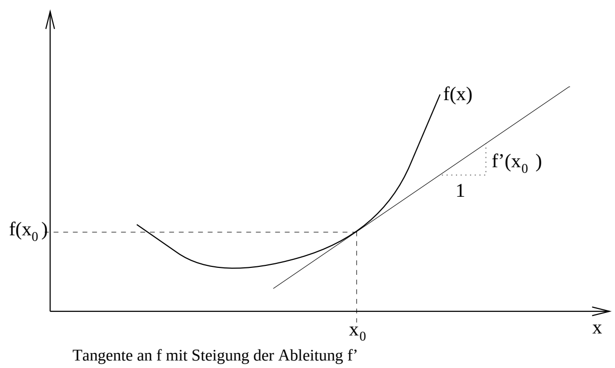
Dabei ist k die Reaktionskonstante, z.B. $k = 0.755$ l/(mol s) bei einer Temperatur von 603K. ◇

Kapitel 5

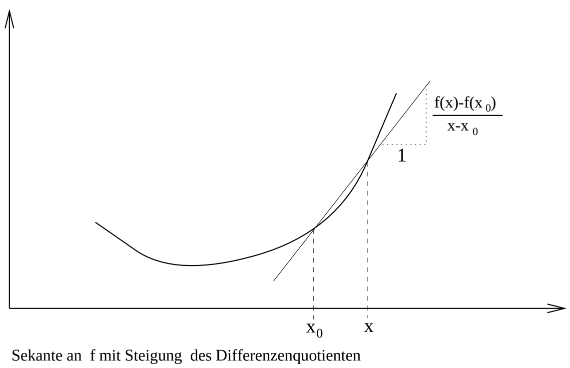
Differenziation von Funktionen

5.1 Einführung

Sei im Folgenden stets $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $x_0 \in I$. Wir wollen die *Steigung* der Funktion f an der Stelle x_0 bestimmen. Dazu müssen wir diesen Begriff erst einmal genau fassen. Eine Möglichkeit ist, die Steigung der (eindeutig festgelegten) **Tangente** an den Graphen von f an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ zu definieren. Dies stößt allerdings in der praktischen Berechnung dieser Größe auf Schwierigkeiten. Etwas einfacher zu handhaben ist die Idee, dass man die **Sekante** durch $(x_0, f(x_0))$ sowie einen weiteren Punkt $(x, f(x))$ betrachtet. Wenn man x gegen x_0 schiebt (von rechts oder links), so sollte die Steigung der Sekante immer näher an die Steigung der obigen Tangente geraten.



Figur.



Figur.

Definition 5.1 *Die Funktion f heißt* **differenzierbar** *in x_0, falls der Grenzwert $x \to x_0$ der* **Differenzenquotienten** $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existiert und endlich ist. Wir schreiben dann*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

und nennen $f'(x_0)$ die **Ableitung** *von f an der Stelle x_0.*

Ist f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar schlechthin.

Weitere Schreibweisen für die Ableitung sind

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0} = \dot{f}(x_0) = Df(x_0). \tag{5.1}$$

Dies ist eine sehr formale Definition, und für unsere Zwecke ist es hinreichend, dass wir unter Differenzierbarkeit im Punkt x verstehen, dass die Funktion f in x ein Steigung besitzt. Hilfreicher als die formale Definition mag sein, die wichtigsten Fälle zu betrachten, wo f in x_0 *keine* Steigung hat:

(i) falls f in x_0 eine Sprungstelle hat (unstetig ist) [1],

(ii) falls f in x_0 einen „Knick“ macht,

(iii) falls f in x_0 gegen $-\infty$, gegen $+\infty$ oder beides geht (wie etwa $f(x) = 1/x$ in $x_0 = 0$).

In den meisten anderen Fällen von Belang ist f differenzierbar. Um Ableitungen auszurechnen, geht man praktisch so vor: Für viele wichtige Funktionen sind die Ableitungen tabelliert. Für Funktionen, die aus den tabellierten Funktionen zusammengesetzt sind, rechnet man die Ableitungen mit Hilfe von Rechenregeln aus, die wir gleich kennen lernen.

[1] Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist jede Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, deren Graphen man in einem Stück zeichnen kann, stetig. Besteht der Graph aus zwei, oder mehreren Stücken, die nicht miteinander verbunden sind, so ist f unstetig. Die Stellen, an denen der Graph getrennt ist, sind die Unstetigkeitsstellen.

$f(x)$	$f'(x)$	I
c (konstant)	0	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^k, k \in \mathbb{Z}$	$k\,x^{k-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^r,\ r \in \mathbb{R}$	$r\,x^{r-1}$	$(0, \infty)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$	$(0, \infty)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

5.2 Rechenregeln für Ableitungen

Satz 5.2 (Summen-, Produkt,- und Quotientenregel) *Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so lassen sich auch die folgenden Ableitungen bilden, und es gilt*

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (f-g)' &= f' - g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'g - fg'}{g^2}(x), \quad \textit{falls } g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Beispiele 5.3 (i) $f(x) = x^7 + 3\,x^4 + 1,\ f'(x) = 7\,x^6 + 12\,x^3.$

(ii) $f(x) = x^9 \sin(x),\ f'(x) = 9\,x^8 \sin(x) + x^9\ \cos(x).$

(iii) $f(x) = x^3(x^2 + \cos(x)),\ f'(x) = 3\,x^2(x^2 + \cos(x)) + x^3(2\,x - \sin(x)).$

(iv) $f(x) = x^7 \tan(x)\, \log(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7x^6 \tan(x)\log(x) + x^7\Big(\tan(x)\log(x)\Big)' \\ &= 7x^6\tan(x)\log(x) + x^7\frac{1}{\cos(x)^2}\log(x) + x^7\tan(x)\frac{1}{x} \\ &= x^6\tan(x)\,(7\log(x)+1) + \frac{x^7\log(x)}{\cos(x)^2} \end{aligned}$$

(v) $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $f'(x) = \dfrac{\cos(x)^2 - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$. ◇

Satz 5.4 (Kettenregel) *(i) Sind $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to J$ und $g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist auch $h = g \circ f$ in I differenzierbar mit Ableitung*

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Die Sprechweise für diese Regel lautet oft: „Innere Ableitung mal äußere Ableitung“.

Ist f nur in x_0 und g nur in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist h in x_0 differenzierbar.

(ii) Ist speziell $h(x) = g(\lambda x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $h'(x) = \lambda g'(\lambda x)$.

Beispiele 5.5 (i) $h(x) = \sin(x^2)$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$. Dann ist

$$h'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = 2x\cos(x^2).$$

(ii) $h(x) = 2^x = \exp(x \cdot \log(2))$. Dann ist

$$h'(x) = \log(2)\exp(x\log(2)) = \log(2) \cdot 2^x.$$

(iii) $h(x) = \sqrt{\tan\left(e^{-x^2}\right)} = f_1(f_2(f_3(f_4(x))))$, wobei

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{x}, & f_1'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f_2(x) &= \tan(x), & f_2'(x) &= 1+\tan(x)^2 \\ f_3(x) &= e^x, & f_3'(x) &= e^x \\ f_4(x) &= -x^2, & f_4'(x) &= -2x. \end{aligned}$$

Sukzessive Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} h'(x) &= f_4'(x) \cdot f_3'(f_4(x)) \cdot f_2'(f_3(f_4(x))) \cdot f_1'(f_2(f_3(f_4(x)))) \\ &= -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \left(1 + \tan\left(e^{-x^2}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\tan(e^{-x^2})}}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist zwar etwas länglich, lässt sich aber durch stures Anwenden der Rechenregeln ohne Sinn und Verstand ausrechnen. Das kann im Prinzip eine Maschine erledigen, und in der Tat gibt es Computerprogramme, die genau das tun. ◇

Noch allgemeiner als im Beispiel (iii) kann man Verknüpfungen von n Funktionen ableiten. Die genaue Regel gibt das folgende Korollar (=Schlussfolgerung des letzten Satzes) der Kettenregel an.

Korollar 5.6 *Ist $n \in \mathbb{N}$ und $h(x) = f_1(f_2(\cdots f_n(x))\cdots)$, wobei $f_1, \ldots, f_n$ differenzierbar sind, so ist h differenzierbar mit Ableitung*

$$h'(x) = f_n'(x) \cdot f_{n-1}'(f_n(x)) \cdot f_{n-2}'(f_{n-1}(f_n(x))) \cdots f_1'(f_2(f_3(\cdots f_n(x))\cdots)).$$

Ein weiteres wichtiges Korollar zur Kettenregel gibt an, wie die Ableitungen von Umkehrfunktionen aussehen.

Korollar 5.7 *Ist $f : I \to J$ umkehrbar und differenzierbar, so ist $g := f^{-1}$ ebenfalls differenzierbar in allen Punkten $x \in J$ mit $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, und es ist dort*

$$(f^{-1})'(x) = g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Beweis Wir zeigen hier nicht die Differenzierbarkeit von f^{-1}, sondern lediglich, wie man die Ableitung von f^{-1} ausrechnet. Sei $h(x) = f(f^{-1}(x))$. Dann ist nach der Kettenregel $h'(x) = (f^{-1})'(x) \cdot f'(f^{-1}(x))$. Andererseits ist $h(x) = x$, also $h'(x) = 1$, also $1 = (f^{-1})'(x) \cdot f'(f^{-1}(x))$. Teilt man jetzt durch $f'(f^{-1}(x))$, so folgt die Aussage des Korollars. □

Beispiele 5.8 (i) Die Logarithmusfunktion log ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion exp . Also ist

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

Das erklärt die Formel aus der Tabelle in Abschnitt 5.1.

(ii) Wir benutzen die Identität $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, um zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

◇

5.3 Höhere Ableitungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir haben bisher die Ableitung f' von f kennen gelernt. Ist f' selber jedoch wieder differenzierbar, so kann uns nichts daran hindern, diese Funktion auch abzuleiten.

Definition 5.9 (Höhere Ableitungen) *Ist die Ableitung f' von f differenzierbar, so heißt die Ableitung f'' von f' die zweite Ableitung von f oder die Ableitung zweiter Ordnung von f.*

Wir können dies Verfahren fortführen, solange die jeweilige Ableitung differenzierbar ist und nennen die Funktionen f''', f'''' usw. die dritte, vierte usw. Ableitung von f, oder die Ableitung dritter, vierter usw. Ordnung.

Die Ableitung n-ter Ordnung wird auch bezeichnet mit

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = D^n f(x).$$

Die Funktion f heißt n-mal differenzierbar, wenn wir die n-te Ableitung bilden können. Ist $f^{(n)}$ stetig, so heißt f n-mal stetig differenzierbar.

Beispiel 5.10 Bezeichnet $f(t)$ die Position eines Fahrzeugs auf einer Straße zur Zeit t, so ist $f'(t)$ die Geschwindigkeit des Fahrzeugs und $f''(t)$ seine Beschleunigung. $\diamond$

Kapitel 6

Kurvendiskussion

Eine der wichtigsten Anwendungen der Differentialrechnung ist es zu bestimmen, wo eine Funktion minimal beziehungsweise maximal wird. Wir definieren im ersten Abschnitt die Begriffe, bringen sie im nächsten Abschnitt in Zusammenhang mit den Monotonieeigenschaften der Funktion und stellen in einem dritten und vierten Abschnitt zusammen, wo die Verbindung zu den Ableitungen der Funktion liegt. Schließlich wird die Diskussion in einem fünften Abschnitt zusammengefasst und eine Art Checkliste angegeben für die Fragen, die durch die Kurvendiskussion beantwortet werden sollen.

6.1 Extremalstellen

Definition 6.1 (Extremalstellen) *Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Zahl $m^* \in \mathbb{R}$ heißt* ***Maximum*** *von f, symbolisch $m^* = \max(f)$, falls*

$$f(x) \le m^* \quad \text{für alle } \ x \in M \tag{6.1}$$

und

$$f(x^*) = m^* \quad \text{für (wenigstens) ein } x^* \in M. \tag{6.2}$$

Die (im Allgemeinen nicht eindeutige) Zahl x^* heißt ***Maximalstelle*** *von f, symbolisch $x^* = \arg\max(f)$. Man sagt, dass f in x^* das Maximum annimmt, oder dass f in x^* das Maximum hat.*

Analog wird das ***Minimum*** *$m_* = \min(f)$ von f definiert und die Minimalstelle $x_* = \arg\min(f)$ (mit dem „$\geq$“–Zeichen in (6.1)).*

Beide Punkte x_* und x^* werden ***Extremalstellen*** *genannt.*

Beispiele 6.2 (i) $M = [0, 2\pi]$, $f(x) = \sin(x)$. Dann ist

$$m^* = 1, \quad x^* = \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad m_* = -1, \quad x_* = \frac{3\pi}{2}.$$

Bei dem hier gewählten Intervall $[0, 2\pi]$ sind die Punkte x_* und x^* eindeutig bestimmt.

(ii) $M = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$. Dann ist

$$m^* = 1, \quad x^* \in \{2k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \text{Menge der Maximalstellen}$$

und

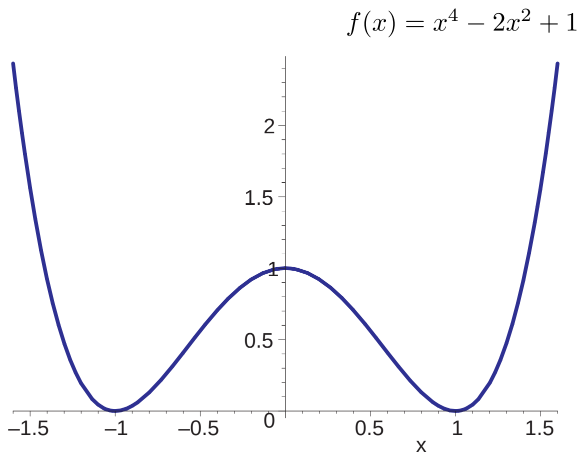
$$m_* = -1, \quad x_* \in \{(2k+1)\cdot\pi,\, k \in \mathbb{Z}\} = \text{Menge der Minimalstellen.}$$

(iii) $M = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$. Dann ist $m_* = -1$ und $x_* = 1$, jedoch gibt es keine Maximalstelle.

(iv) $M = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \tan(x)$. Es gibt keine Extremalstellen.

(v) $M = \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-x^2)$. Dann ist $m^* = 1$, $x^* = 0$, jedoch gibt es keine Minimalstelle. In der Tat ist $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(-x^2) = 0$. Andererseits ist $\exp(-x^2) > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Somit käme für das Minimum nur 0 als Wert in Frage, dieser Wert wird jedoch nicht angenommen. $\diamond$

Es tritt öfter der Fall ein, dass eine Funktion lokal, also in einer kleinen Umgebung betrachtet, ein Maximum (oder Minimum) annimmt, das jedoch global betrachtet (also im gesamten Definitionsbereich gesehen) keines ist.



FIGUR. f nimmt in 0 ein lokales Maximum an, das jedoch global kein Maximum ist.

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 6.3 (lokale Extremalstellen) *Ist $M \subset \mathbb{R}$, so heißt $x_* \in M$ eine **lokale Minimalstelle** von $f : M \to \mathbb{R}$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$f(x) \geq f(x_*) \quad \text{für alle } x \in (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) \cap M. \tag{6.3}$$

*$f(x_*)$ heißt dann **lokales Minimum** von f. Ein lokales Minimum heißt **isoliert**, falls in (6.3) die strikte Ungleichung gilt (für $x \neq x_*$).*

Analog definieren wir lokale Maximalstelle, lokales Maximum, isoliertes lokales Maximum, sowie lokale Extremalstelle usf.

Manchmal spricht man zur Unterscheidung von lokalen Extrema zu Extrema in letzterem Fall auch von **globalen** Extrema.

Beispiel 6.4 $M = \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Die Funktion nimmt in 0 ein lokales Maximum an, denn $f(x) < f(0) = 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x| < 1$, also für jedes $x \in (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) \setminus \{0\}$, wobei $x_* = 0$ und $\varepsilon = 1$. Die lokale Maximalstelle $x_* = 0$ ist also auch isoliert.

Dieses lokale Maximum ist kein globales Maximum, weil beispielsweise $f(2) = 9 > 1 = f(0)$. ◇

Zumindest auf abgeschlossenen Intervallen und bei stetigen Funktionen brauchen wir uns keine Sorgen um die Existenz von Extremalstellen zu machen. Auskunft gibt der folgende Satz, der hier nicht bewiesen werden kann.

Satz 6.5 *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f Minimum und Maximum an.*

Um Extremalstellen nachzuweisen, sind die ersten und zweiten Ableitungen einer Funktion (falls existent) hilfreich. Ein erster Schritt ist der folgende Satz.

Satz 6.6 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $c \in I$ ein innerer Punkt und $f : I \to \mathbb{R}$ eine in c differenzierbare Funktion. Hat f in c eine lokale Extremalstelle, so ist $f'(c) = 0$.*

Beweis Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei hier nur der Fall betrachtet, wo c eine lokale Maximalstelle ist. Dann ist für x hinreichend nahe an c: $f(x) - f(c) \leq 0$, also

$$0 \leq \lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = \lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Also ist $f'(c) = 0$. □

Beispiele 6.7 (i) Sei $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = x^2 - 2x$. Dann ist $x_* = 1$ Minimalstelle. Es gilt $f'(x) = 2x - 2$, also $f'(x_*) = 2x_* - 2 = 0$.

(ii) Sei $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = \exp(-x^2)$. Dann ist $x_* = 0$ Maximalstelle. Es gilt $f'(x) = -2x\exp(-x^2)$, also $f'(x_*) = 0$.

(iii) Sei $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = \arctan(x)$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$. Da die erste Ableitung keine Nullstelle hat, hat f keine (lokalen oder globalen) Extremalstellen.

(iv) Hat f in einem Randpunkt des Intervalls ein lokales Extremum, so muss dort die (einseitige) Ableitung nicht notwendigerweise verschwinden. Seien nämlich $I = [0, 1]$ und $f(x) = x$. Dann hat f in $x^* = 1$ eine Maximalstelle, aber $f'(x) = 1$ verschwindet nirgends.

(v) Die Umkehrung des Satzes gilt nicht: Sei $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$ und $f'(x) = 0$. Jedoch hat f in 0 kein lokales Extremum, weil $f(x) < 0$ für $x < 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$. ◇

6.2 Monotonie

Wir wollen hier die Monotonieeigenschaften einer differenzierbaren Funktion näher betrachten. Zunächst brauchen wir ein paar vorbereitende Sätze.

Satz 6.8 (Satz von Rolle) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar sowie $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis Da f stetig ist, nimmt f das Minimum m_* sowie das Maximum m^* in $[a, b]$ an (Satz 6.5). Ist $m_* = m^*$, so ist wegen $m_* \leq f(x) \leq m^*$ für jedes $x \in [a, b]$ auch $f(x) = f(a) = f(b) = m_* = m^*$. Damit ist f konstant, also $f'(x) = 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Ist andererseits $m_* < m^*$, so ist entweder $m_* < f(a)$ oder $m^* > f(a)$, oder beides. Betrachten wir den Fall $m_* < f(a)$. Dann gibt es ein $x_* \in (a, b)$ mit $f(x_*) = m_*$. Weil x_* eine Minimalstelle von f und ein innerer Punkt von $[a, b]$ ist, ist $f'(x_*) = 0$ nach Satz 6.6. Der Fall $m^* > f(a)$ funktioniert genauso. □

Beispiel 6.9 $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$. Dann ist $f(-1) = f(1) = -1$. Weiter ist $f'(x) = 4x^3 - 4x$ und damit $f'(0) = 0$. ◇

Korollar 6.10 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar, so existiert ein $c \in (a, b)$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis *Setze*

$$h(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dann ist $h(a) = f(a)$, $h(b) = f(b) - (b - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f(a) = h(a)$. Also existiert ein $c \in (a, b)$ mit $h'(c) = 0$. Es ist aber

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

also

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Korollar 6.11 *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant: $f(x) = f(a) = f(b)$ für alle $x \in [a, b]$.*

Eine weitere wichtige Schlussfolgerung aus dem Mittelwertsatz gibt uns an, wie der Zusammenhang zwischen der Monotonie einer Abbildung und dem Vorzeichen ihrer Ableitung ist. Aufgrund der Wichtigkeit der Aussage formulieren wir sie hier als Satz.

Satz 6.12 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und (im Inneren von I) differenzierbar. Dann gilt*

(i)

$$f'(x) \geq 0 \text{ für alle inneren Punkte } x \in I \iff f \text{ ist monoton wachsend}$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ für alle inneren Punkte } x \in I \iff f \text{ ist monoton fallend}$$

(ii)

$$f'(x) > 0 \text{ für alle inneren Punkte } x \in I \implies f \text{ ist streng monoton wachsend}$$

$$f'(x) < 0 \text{ für alle inneren Punkte } x \in I \implies f \text{ ist streng monoton fallend}$$

Beispiele 6.13 (i) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$. Also ist die Funktion arctan streng monoton wachsend.

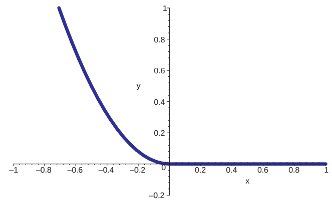
(ii) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$. Dann ist $f'(x) = \exp(x) > 0$, also exp streng monoton wachsend.

(iii) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x) = 2x$. Die Ableitung ist strikt negativ für $x < 0$ und strikt positiv für $x > 0$. Wir wenden also den Satz für $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$ und erhalten, dass f streng monoton fallend ist in $(-\infty, 0]$ und streng monoton wachsend in $[0, \infty)$.

(iv) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - \operatorname{sign}(x))x^2$. Dann ist

$$f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{falls } x \leq 0, \\ 0, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Also ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit f monoton fallend. Allerdings ist f nicht streng monoton fallend, da $f(x) = 0$ für alle $x \geq 0$.



FIGUR. $f(x) = (1 - \operatorname{sign}(x))x^2$

(v) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. Also ist f monoton wachsend. Man kann sogar zeigen, dass f streng monoton wachsend ist, aber dies liefert unser Satz nicht, denn $f'(0) = 0$, also haben wir nicht die strikte Ungleichung, die in Teil (ii) des Satzes benötigt wurde. $\diamond$

6.3 Bestimmung der Extremalstellen

Wir haben in Abschnitt 6.1 gesehen, dass lokale Extremalstellen einer differenzierbaren Funktion nur dort vorliegen, wo die Ableitung verschwindet. Wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt, wo $f'(0) = 0$ ist, jedoch kein lokales Extremum in 0 vorliegt, müssen wir zusätzliche Informationen über f haben, um eine Extremalstelle zu detektieren. Ist c eine Stelle, sodass f links von c monoton wachsend ist und rechts von c monoton fallend, so liegt in c offenbar ein lokales Maximum vor. Nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts geht dies mit einem Vorzeichenwechsel von f' einher. Wir wollen zunächst den Begriff des Vorzeichenwechsels präzise fassen und dann das hier anschaulich gewonnene Ergebnis in einem Satz formulieren.

Definition 6.14 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$ ein innerer Punkt. Wir sagen, dass das Vorzeichen einer Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ im Punkt a von $-$ nach $+$ wechselt, falls $g(a) = 0$ und*

$$\lim_{x \uparrow a} \operatorname{sign}(g(x)) = -1, \qquad \lim_{x \downarrow a} \operatorname{sign}(g(x)) = +1,$$

falls also:

für alle $x < a$ hinreichend nahe an a gilt $g(x) < 0$

und

für alle $x > a$ hinreichend nahe an a gilt $g(x) > 0$.

Analog führen wir die Sprechweise ein, dass das Vorzeichen von $+$ nach $-$ wechselt.

Lemma 6.15 *Ist g differenzierbar und $g(a) = 0$, $g'(a) > 0$ (beziehungsweise $g'(a) < 0$), so wechselt das Vorzeichen von g in a von $-$ nach $+$ (beziehungsweise von $+$ nach $-$).*

Beispiele 6.16 (i) $I = \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 1$, $a = -1$. Dann ist $g'(x) = 2x$ und $g(-1) = 0$, $g'(-1) = -2 < 0$. Das Vorzeichen wechselt also in -1 von $+$ nach $-$.

(ii) $I = \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$, $a = 0$. Das Vorzeichen wechselt in 0 von $-$ nach $+$, jedoch ist $g'(0) = 0$. Das Kriterium in dem Lemma ist also nur hinreichend und nicht notwendig. ◇

Satz 6.17 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a \in I$ ein innerer Punkt mit $f'(a) = 0$.*

(i) Ist f sogar zweimal differenzierbar und $f''(a) < 0$ (beziehungsweise $f''(a) > 0$), so hat f in a ein isoliertes lokales Maximum (beziehungsweise Minimum).

(ii) Wechselt das Vorzeichen von f' in a von $+$ nach $-$ (beziehungsweise von $-$ nach $+$), so hat f in a ein isoliertes lokales Maximum (beziehungsweise Minimum).

(iii) Hat die Funktion f' in a ein isoliertes lokales Extremum, so hat f in a ***kein*** *lokales Extremum.*

Offenbar folgt aus (i) schon (ii) (Lemma 6.15). Fall (ii) tritt also häufiger auf. In der Praxis ist jedoch (i) oftmals einfacher zu prüfen. Man wird also so vorgehen (um bei hinreichend oft differenzierbaren Funktionen ein lokales Extremum im Inneren des Definitionsbereichs zu detektieren):

6.18 Rezept (zur lokalen Extremalstellenanalyse im Inneren des Definitionsbereichs)

(1) Sei $a \in I$ ein innerer Punkt mit $f'(a) = 0$. Man prüft, ob f in a zweimal differenzierbar ist. Ist dies der Fall und die Ableitung ohne größere Umstände zu berechnen, so prüft man, ob $f''(a) < 0$ (beziehungsweise $f''(a) > 0$). Ist dies richtig, so hat f in a ein isoliertes lokales Maximum (beziehungsweise Minimum).

(2) Führt (1) nicht zum Erfolg, so prüft man, ob f' in a das Vorzeichen wechselt. Ist dies der Fall, so hat f in a ein isoliertes lokales Extremum und man ist fertig.

(3) Führen weder (1) noch (2) zu einem Ergebnis, so hat f vermutlich (aber nicht sicher) in a kein isoliertes lokales Extremum. Um dies nachzuweisen, muss man testen, ob f' in a ein isoliertes lokales Extremum hat. Dazu geht man wie oben vor, nur eben für f' statt für f. Hat jetzt f' in a ein isoliertes lokales Extremum, so hat f in a kein ein isoliertes lokales Extremum, und man ist fertig.

(4) Bringen weder (1), (2) noch (3) ein Ergebnis, dann wird die Sache wirklich schwierig. Hier gibt es dann keine Patentrezepte mehr, und man muss sich neue Methoden überlegen.

(5) Ein paar der „üblichen verdächtigen“ Stellen, die man zudem prüfen sollte, sind

   (a) die Intervallenden,
   (b) die Nicht-Differenzierbarkeitsstellen,
   (c) die Nullstellen der Ableitungen an den Differenzierbarkeitsstellen.

   Diese Stellen muss man, bei (c) eventuell mit (1)–(4), individuell untersuchen.

(6) Interessiert man sich nur für globale Extremalstellen einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall und gibt es nur wenige Kandidaten der Typen (a), (b), (c) (es reicht auch, wenn einzelne Punkte nur im Verdacht stehen, zu einem der drei Typen zu gehören, solange man nur alle tatsächlich dazu gehörigen erfasst), dann braucht man nur die Funktionswerte dieser Kandidaten zu vergleichen und die mit dem Kleinsten bzw. dem Größten heraus zu picken. Ist das Definitionsintervall nicht abgeschlossen, so muss man zusätzlich noch das Grenzverhalten an den offenen Intervallenden untersuchen.

Beispiele 6.19 (i) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$, $a = 0$. Die erste und zweite Ableitung sind $f'(x) = -\sin(x)$ und $f''(x) = -\cos(x)$. Also ist $f'(0) = 0$ und $f''(0) = -1 < 0$. Nach Punkt (1) unseres Rezeptes haben wir also ein isoliertes lokales Maximum von f bei $a = 0$ festgestellt.

(ii) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $a = 0$. Die erste und zweite Ableitung sind $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$. Also ist $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2 > 0$. Nach Punkt (1) unseres Rezeptes haben wir also ein isoliertes lokales Minimum von f bei $a = 0$ festgestellt.

(iii) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, $a = 0$. Dann ist $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$. Also ist $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$. Punkt (1) unseres Rezeptes bringt kein Ergebnis, wir machen also bei Punkt (2) weiter. Für $x < 0$ ist $f'(x) < 0$ und für $x > 0$ ist $f'(x) > 0$. Also wechselt f' in 0 das Vorzeichen von $-$ nach $+$. Ergebnis: f hat in 0 ein isoliertes lokales Minimum.

(iv) $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \tan(x) - x$, $a = 0$. Die ersten beiden Ableitungen sind $f'(x) = 1 + (\tan(x))^2 - 1 = (\tan(x))^2$ und (nach der Kettenregel) $f''(x) = 2\tan(x)((\tan(x))^2 + 1)$. Wegen $\tan(0) = 0$ ist $f'(0) = \tan(0)^2 = 0$ und $f''(0) = 0$. Also führt Punkt (1) zu keinem Ergebnis. Weiter geht es mit Punkt (2): Für $x \neq 0$ ist $\tan(x) \neq 0$, also $f'(x) > 0$. Mithin wechselt f' in 0 nicht das Vorzeichen. Punkt (2) schlägt also auch fehl. Bei Punkt (3) stellen wir fest, dass $f'(x)$ das globale Minimum 0 genau in dem einen Punkt $x = 0$ annimmt (klar, denn $f'(x) > 0$ für alle anderen x). Also hat f in 0 kein isoliertes lokales Extremum.

(v) Sei $I = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{|x|} + x$. Für $x \in I \setminus \{0\}$ hat man $f'(x) = \operatorname{sign}(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{|x|}} + 1$, für $x = 0$ ist f nicht differenzierbar. Einzige Nullstelle von f' auf $I \setminus \{0\}$ ist $x = -\frac{1}{4}$. Damit ergeben sich als Kandidaten für globale Extremalstellen: 0, $-\frac{1}{4}$ sowie die Intervallenden $-\frac{1}{2}$, und 1. Die zugehörigen Funktionswerte sind 0, $\frac{1}{4}$, $\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \approx 0.2071$ und 2. Damit ist 0 mit $f(0) = 0$ globale Minimalstelle und 1 mit $f(1) = 2$ globale Maximalstelle.

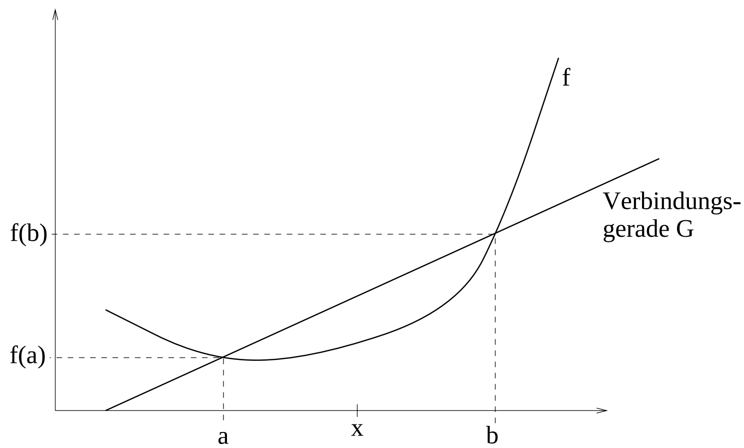
Weitere Untersuchungen würden ergeben, dass $-\frac{1}{2}$ lokale Minimalstelle und $-\frac{1}{4}$ lokale Maximalstelle ist. $\diamond$

Bemerkung 6.20 Kann man eine Extremalstelle nicht explizit ausrechnen, so muss man sich anders behelfen, beispielsweise mit einem Intervallschachtelungsverfahren. Hat man so, beispielsweise, die lokale Minimalstelle x_* von f im Intervall $[a, b]$ nachgewiesen (also mit einem Fehler von höchstens $b - a$), so ist $\left|m_* - \frac{f(b)+f(a)}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2} \max\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$. Als Näherungswert bietet sich also $\frac{1}{2}(f(a) - f(b))$, mit Fehler $\leq \frac{b-a}{2} \max\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$ an.

6.4 Krümmung

Ist der Graph einer Funktion f nach links gekrümmt, wie beispielsweise bei $f(x) = x^2$, so wollen wir f **konvex** nennen. Ist andererseits der Graph nach rechts gekrümmt, so wollen wir f **konkav** nennen. Diese Begriffe sind etwas willkürlich, und man muss sie an dieser Stelle schlicht auswendig lernen.

Wir müssen jetzt mathematisch präziser fassen, was wir mit der Redeweise „nach links gekrümmt“ beziehungsweise „nach rechts gekrümmt“ meinen.



Konvexe Funktion f

Definition 6.21 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. und $a, b \in I$, $a < b$. Wir nennen die Funktion f*

- ***konvex**, falls für jedes Teilintervall $[a, b] \subset I$ und jedes $x \in [a, b]$ der Punkt $(x, f(x))$ **unter** der Verbindungsgeraden G von $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ liegt, falls also*

$$f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big) \quad \textit{für alle } \ x \in [a, b]. \tag{6.4}$$

- ***konkav**, falls für jedes Teilintervall $[a, b] \subset I$ und jedes $x \in [a, b]$ der Punkt $(x, f(x))$ **über** der Verbindungsgeraden G von $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ liegt, falls also*

$$f(x) \geq f(a) + \frac{x-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big) \quad \textit{für alle } \ x \in [a, b]. \tag{6.5}$$

Ist $J \subset I$ ein Teilintervall und gelten die obigen Aussagen nur für Teilintervalle $[a, b] \subset J$, so heißt f konvex (beziehungsweise konkav) über J.

*Wir sprechen von **strikter** Konvexität (beziehungsweise Konkavität), falls in (6.4) (beziehungsweise (6.5)) die strikte Ungleichung gilt (für $x \in (a, b)$).*

Der Begriff der Striktheit der Konvexität beziehungsweise Konkavität steht für uns nicht im Mittelpunkt und wird gleichsam nur am Rande erwähnt.

Obacht !! In einer in Bayern gebräuchlichen mathematischen Formelsammlung für das Gymnasium sind die Definitionen der Begriffe „konvex“ und „konkav“ genau umgekehrt.

Den Zusammenhang zwischen den gerade eingeführten Begriffen und der zweiten Ableitung einer Funktion stellt der folgende Satz her.

Satz 6.22 *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so ist f*

- *konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle inneren Punkte $x \in I$.*

- *konkav genau dann, wenn $f''(x) \leq 0$ für alle inneren Punkte $x \in I$.*

Beispiele 6.23 (i) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $f''(x) = 2 > 0$. Also ist f konvex (tatsächlich sogar strikt konvex).

(ii) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. $f''(x) = -\sin(x)$. In $[0, \pi]$ ist $-\sin(x) \leq 0$, also sin konkav (tatsächlich sogar strikt konkav). In $[\pi, 2\pi]$ ist $-\sin(x) \geq 0$, also sin konvex (tatsächlich sogar strikt konvex).

(iii) $I = (0, \infty)$, $f(x) = \log(x)$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Also ist log strikt konkav.

(iv) $I = \mathbb{R}$. $f(x) = |x|$ ist konvex, aber in 0 nicht differenzierbar. Außerdem ist f nicht strikt konvex. ◇

Definition 6.24 *Ist $c \in I$ ein innerer Punkt und f konvex (beziehungsweise konkav) auf einem Teilintervall $[a, c]$ sowie konkav (beziehungsweise konvex) auf einem Teilintervall $[c, b]$, so heißt c ein **Wendepunkt** von f.*

Satz 6.25 *Ist f zweimal differenzierbar und wechselt f'' in c das Vorzeichen, so ist c ein Wendepunkt von f.*

Beispiel 6.26 $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (siehe Figur auf Seite 58). Die erste und zweite Ableitung sind $f'(x) = 4x^3 - 4x$ und $f''(x) = 12x^2 - 4 = 12\big(x^2 - \frac{1}{3}\big)$. Also ist genau dann $f''(x) < 0$, wenn $|x| < \sqrt{\frac{1}{3}}$ und genau dann $f''(x) > 0$, wenn $|x| > \sqrt{\frac{1}{3}}$. Es folgt, dass f über $\Big(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\Big)$ und $\Big(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\Big)$ konvex ist, über $\Big(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\Big)$ aber konkav. Also besitzt f zwei Wendepunkte: bei $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ mit $f\Big(-\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) = \frac{4}{9}$ und bei $\sqrt{\frac{1}{3}}$ mit $f\Big(\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) = \frac{4}{9}$. ◇

6.5 Programm: Kurvendiskussion

Das Zusammentragen sämtlicher relevanter Daten einer Funktion f bezeichnet man als **Kurvendiskussion**. Was relevant ist (und was nicht), hängt natürlich vom Einzelfall sowie der Interessenlage des Betrachters, also von der jeweiligen Anwendung, die man im Blick hat, ab. Typischerweise umfasst die Kurvendiskussion wenigstens die Angabe der folgenden Informationen.

(1) Falls nur die Vorschrift $x \mapsto f(x)$ vorgegeben ist, muss ein sinnvoller maximaler Definitionsbereich angegeben werden.

(2) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereiches. Also beispielsweise $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

(3) Nullstellen.

(4) Stetigkeit/Unstetigkeit (Sprungstellen) von f.

(5) Differenzierbarkeit, gegebenenfalls Ausnahmestellen.

(6) Monotonieverhalten.

(7) Lage und Art der Extremalstellen (mit Angabe der Funktionswerte).

(8) Der Wertebereich von f.

(9) Krümmungsverhalten von f (Konkavitäts- und Konvexitätsbereiche, Wendepunkte).

(10) Skizze des Graphen an Hand dieser Informationen

- Manchmal kommt die Angabe besonderer Eigenschaften hinzu, wie beispielsweise „f **ungerade**“ (d.h. $f(-x) = -f(x)$ wie bei $f(x) = \sin(x)$), „f **gerade**“ (d.h. $f(-x) = f(x)$ wie bei $f(x) = \cos(x)$), Periodizität oder Ähnliches.

Wir führen das Programm der Kurvendiskussion im Folgenden an drei Beispielen durch.

Beispiel 6.27 Sei $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

(1) f ist ein Polynom, also auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, weil x^4 schneller wächst als x^2. Ebenso $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

(3) $f(x) = (x^2-1)^2$. Also ist $f(x) = 0$ genau für $x = -1$ und $x = 1$.

(4),(5) Polynome sind stetig und beliebig oft differenzierbar.

(6) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$. Für

$$\begin{array}{ll} x < -1 & \text{ist } 4x < 0 \text{ und } x^2-1 > 0, \text{ also } f'(x) < 0, \\ x \in (-1,0) & \text{ist } 4x < 0 \text{ und } x^2-1 < 0, \text{ also } f'(x) > 0, \\ x \in (0,1) & \text{ist } 4x > 0 \text{ und } x^2-1 < 0, \text{ also } f'(x) < 0, \\ x > 1 & \text{ist } 4x > 0 \text{ und } x^2-1 > 0, \text{ also } f'(x) > 0. \end{array}$$

Also ist f streng monoton wachsend in den Bereichen $[-1,0]$ und $[1,\infty)$, sowie streng monoton fallend in Bereichen $(-\infty,-1]$ und $[0,1]$.

(7) Nach (6) ist klar, dass $-1, 0, 1$ die kritischen Stellen sind. Es ist $f''(x) = 12x^2 - 4$, also $f''(-1) = f''(1) = 8$ und $f''(0) = -4$. f hat also isolierte lokale Minimalstellen in -1 und 1 mit $f(-1) = f(1) = 0$, sowie ein isoliertes lokales Maximum in 0 mit $f(0) = 1$.

Zusammen mit (6) folgt, dass -1 und 1 sogar globale Minimalstellen sind, während nach (3) kein globales Maximum existiert.

(8) Der Wertebereich (genauer: das Bild) von f ist $[0,\infty)$.

(9) Krümmung: Siehe Beispiel 6.26 auf Seite 65.

(10) Skizze: Siehe Figur auf Seite 58. $\diamond$

Beispiel 6.28 Sei $f(x) = x + 2\sin(x)$.

(1) Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

(2) Wegen $|\sin(x)| \le 1$ für alle x, ist

$$f(x) \ge x - 2 \qquad \text{und} \qquad f(x) \le x + 2 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \tag{6.6}$$

Also ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(4),(5) $x \mapsto x$ und $x \mapsto \sin(x)$ sind stetig und beliebig oft differenzierbar und damit auch f.

(6) $f'(x) = 1 + 2\cos(x)$. Also ist

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \cos(x) > -\frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left(2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{für ein } \ k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

und analog

$$f'(x) < 0 \iff x \in \Big(2k\pi + \frac{2\pi}{3},\, 2k\pi + \frac{4\pi}{3}\Big) \quad \text{für ein} \;\; k \in \mathbb{Z},$$

sowie

$$f'(x) = 0 \iff x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad \text{für ein} \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt: f ist streng monoton wachsend in den Intervallen

$$\Big(2k\pi - \frac{2\pi}{3},\, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}\Big), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

und streng monoton fallend in den Intervallen

$$\Big(2k\pi + \frac{2\pi}{3},\, 2k\pi + \frac{4\pi}{3}\Big), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

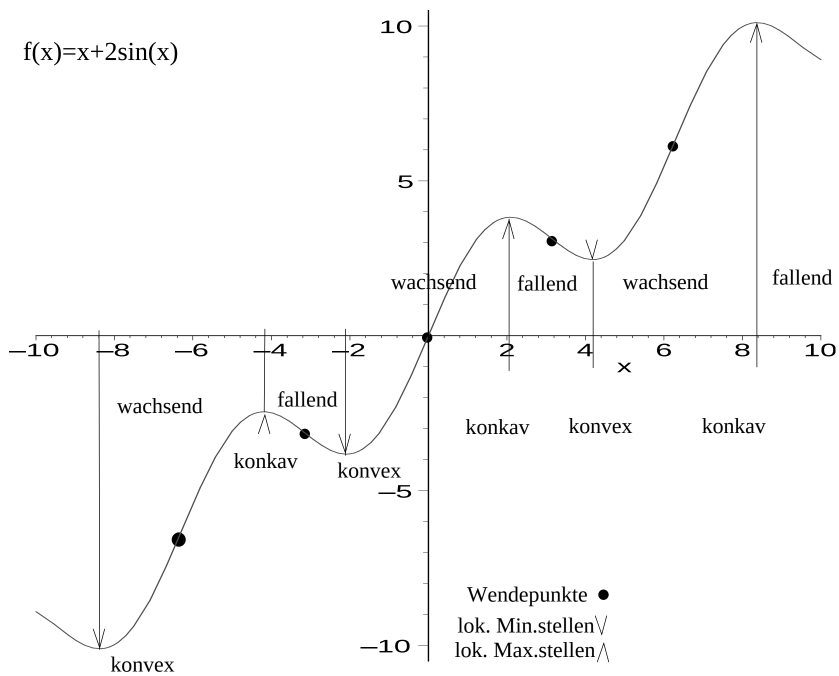
(7) Aus (2) folgt, dass es keine globalen Extremalstellen gibt. Nach (6) ist klar, dass f isolierte lokale Minimalstellen hat bei $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ mit $f(2k\pi - \frac{2\pi}{3}) = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$, sowie isolierte lokale Maximalstellen bei $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ mit $f(2k\pi + \frac{2\pi}{3}) = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$.

(3) Offenbar ist $f(0) = 0$. f wächst streng monoton zwischen $-\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$ und nimmt dort die Werte $\pm(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}) \approx \pm 3.8$ an. Also hat f in $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \approx [-2.1, 2.1]$ keine weiteren Nullstellen. Wegen (6.6) kann es aber auch keine Nullstellen für $|x| > 2$ geben. Insgesamt haben wir also: f hat genau eine Nullstelle bei $x = 0$.

(8) Nach (2) und (4) ist der Wertebereich ganz $\mathbb{R}$.

(9) Die zweite Ableitung ist $f''(x) = -2\sin(x)$. Mithin ist $f''(x) < 0$ für $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, also f dort strikt konkav, und $f''(x) > 0$ für $x \in \big((2k-1)\pi, 2k\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$, also f dort strikt konvex. Die Wendepunkte sind die Punkte $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(10) Skizze:



◇

Beispiel 6.29 (Lenard-Jones Potential) Ein Modell für das Potential von Teilchen im kernnahen Bereich ist das **Lenard-Jones Potential**.Eine extrem kurzreichweitige Abstoßung $c_1\, x^{-12}$ (dabei ist x der Abstand des Teilchens von dem Kern und $c_1 > 0$ eine Konstante) wird von einer langreichweitigen Anziehung $-c_2\, x^{-6}$ überlagert ($c_2 > 0$). Also ist

$$f(x) = c_1\, x^{-12} - c_2\, x^{-6}.$$

(1) Da x einen Abstand darstellt, ist nur $x \geq 0$ sinnvoll. Da $f(0)$ nicht definiert ist, setzen wir als Definitionsbereich $I = (0, \infty)$ an.

(2)
$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} x^{-6} \left(c_1\, x^{-6} - c_2 \right) = \infty.$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c_1 \lim_{x \to \infty} x^{-12} \; - \; c_2 \lim_{x \to \infty} x^{-6} = 0.$$

(3) $f(x) = 0$ gilt genau dann, wenn $x^6 = \frac{c_1}{c_2}$. Da $x > 0$ sein muss, ist $x = \sqrt[6]{\frac{c_1}{c_2}}$ die einzige Nullstelle von f.

(4) $x \mapsto x^{-6}$ und $x \mapsto x^{-12}$ sind in I stetig, also ist auch f stetig.

(5) Ebenso ist f beliebig oft differenzierbar.

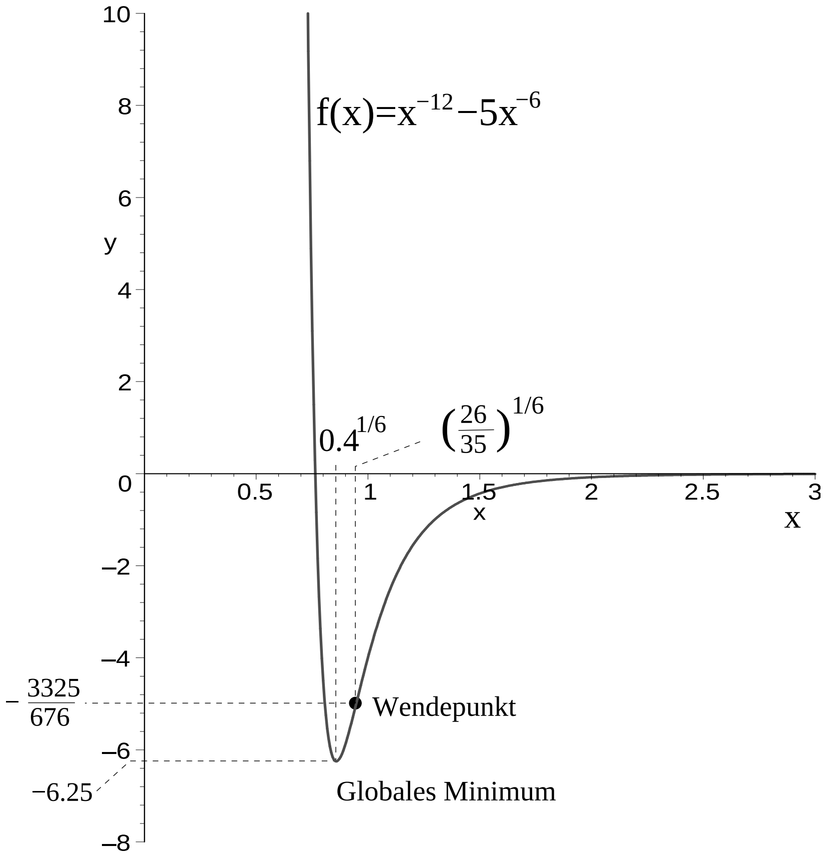
(6) Die erste Ableitung ist
$$f'(x) = -12\, c_1\, x^{-13} + 6\, c_2\, x^{-7} = 6\, c_2\, \frac{x^6 - 2\frac{c_1}{c_2}}{x^{13}}.$$
Also ist
$$f'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^6 < 2\, \frac{c_1}{c_2} \quad \Longleftrightarrow \quad x < \sqrt[6]{2 \frac{c_1}{c_2}} \quad ,$$
$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^6 > 2\, \frac{c_1}{c_2} \quad \Longleftrightarrow \quad x > \sqrt[6]{2 \frac{c_1}{c_2}}.$$
Es folgt, dass f streng monoton fallend ist in $\left(0, \sqrt[6]{2c_1/c_2}\,\right)$ und streng monoton wachsend in $\left(\sqrt[6]{2c_1/c_2}\,, \infty\right)$.

(7) Aus (6) folgt sofort, dass f in $\sqrt[6]{2c_1/c_2}$ die eindeutige globale Minimalstelle hat mit dem Wert $f\left(\sqrt[6]{2c_1/c_2}\right) = -\dfrac{c_2^2}{4c_1}$, und dass es keine weiteren Extremalstellen gibt.

(8) Aus (2) und (7) folgt, dass der Wertebereich $\left[-\frac{c_2^2}{4c_1}, \infty\right)$ ist.

(9) Die zweite Ableitung ist
$$f''(x) = 156\, c_1\, x^{-14} - 42\, c_2\, x^{-8} = 42\, c_2\, \frac{x^6 - \frac{26 c_1}{7 c_2}}{x^{10}}.$$
Also ist $f''(x) > 0$ genau dann, wenn $x < \sqrt[6]{\dfrac{26}{7} \dfrac{c_1}{c_2}}$ und $f''(x) < 0$, falls $x > \sqrt[6]{\dfrac{26}{7} \dfrac{c_1}{c_2}}$. Mithin ist f strikt konvex in $\left(0, \sqrt[6]{\dfrac{26}{7} \dfrac{c_1}{c_2}}\right)$, strikt konkav in $\left(\sqrt[6]{\dfrac{26}{7} \dfrac{c_1}{c_2}}\,, \infty\right)$ und hat einen Wendepunkt in $\sqrt[6]{\dfrac{26}{7} \dfrac{c_1}{c_2}}$ mit $f\left(\sqrt[6]{\dfrac{26}{5} \dfrac{c_1}{c_2}}\right) = -\dfrac{133}{676} \dfrac{c_2^2}{c_1}$.

(10) Skizze für $c_1 = 1$ und $c_2 = 5$.



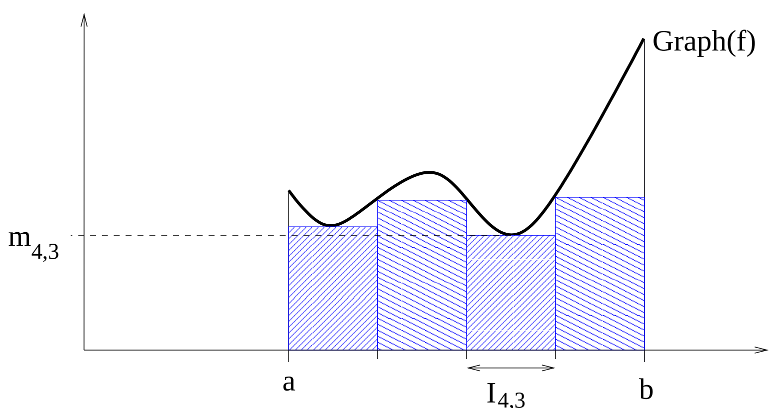
◇

Kapitel 7

Integration von Funktionen

7.1 Definition des Integrals

Wir nehmen an, dass $a < b$ reelle Zahlen sind und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung ist. Für den Moment wollen wir auch annehmen, dass $f \geq 0$ ist. Das Ziel ist es, den Inhalt F der Fläche zu bestimmen, der von dem Graphen von f und der Koordinatenachse eingeschlossen wird.



FIGUR. Die Fläche F unter dem Graphen von f wird hier durch $n = 4$ Rechtecke angenähert.

Zu diesem Zweck zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n (in der Abbildung: $n = 4$) gleich große Teilintervalle $I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots, I_{n,n}$ der Länge $\frac{b-a}{n}$. Also ist

$$I_{n,k} = \left[a + (k-1)\frac{b-a}{n},\, a + k\frac{b-a}{n}\right], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

In jedem Teilintervall wollen wir nun das größte Rechteck bestimmen, das noch unterhalb des Graphen von f liegt. Die Höhe dieses Rechtecks im k-ten Teilintervall ist (zumindest bei stetigem

f) der kleinste Funktionswert, der dort von f angenommen wird

$$m_{n,k} = \min(f(x),\, x \in I_{n,k}), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Der Flächeninhalt des k-ten Rechtecks beträgt also (Breite × Höhe) $\frac{b-a}{n} m_{n,k}$. Alle n Rechtecke zusammen genommen haben den Flächeninhalt

$$U_n(f) := \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} m_{n,k}. \tag{7.1}$$

Die Größe $U_n(f)$ wird als die n-te **Untersumme** von f bezeichnet. Offenbar ist $F \geq U_n(f)$ für jedes n.

Das Gleiche können wir auch mit Rechtecken machen, die den Graphen von oben einschließen. Diese Rechtecke haben die Höhen

$$M_{n,k} = \max(f(x),\, x \in I_{n,k}), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wir bezeichnen mit

$$O_n(f) := \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} M_{n,k} \tag{7.2}$$

die $n$te **Obersumme** von f. Offenbar ist jetzt

$$U_n(f) \leq F \leq O_n(f).$$

Die Idee ist nun, dass mit wachsendem n sich die Werte von Unter- und Obersumme immer mehr annähern sollten. Der gemeinsame Grenzwert muss dann die gesuchte Fläche F sein.

Definition 7.1 *Konvergieren die Folgen der Untersummen $(U_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ und der Obersummen $(O_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert, so bezeichnen wir den gemeinsamen Grenzwert als das* **Integral** *von f im Intervall $[a, b]$ (oder von a bis b) und schreiben*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} U_n(f) = \lim_{n\to\infty} O_n(f).$$

Die Funktion f heißt dann ***integrierbar*** *(in $[a, b]$).*

Zur Unterscheidung von anderen Integralbegriffen, die in der Mathematik gebräuchlich sind, wird dieses Integral auch **Riemann–Integral**[1] genannt.

Wir wollen später auch die folgende Notation benutzen:

$$\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx. \tag{7.3}$$

Die Bedingung an die Ober- und Untersummen ist natürlich in der Praxis nicht sehr handlich nachzuprüfen. Daher wollen wir hier ohne Beweis festhalten, dass wir uns beispielsweise bei stetigen oder bei monotonen (wachsend oder fallend) Funktionen keine Sorgen zu machen brauchen.

Satz 7.2 *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig oder monoton, so ist f integrierbar.*

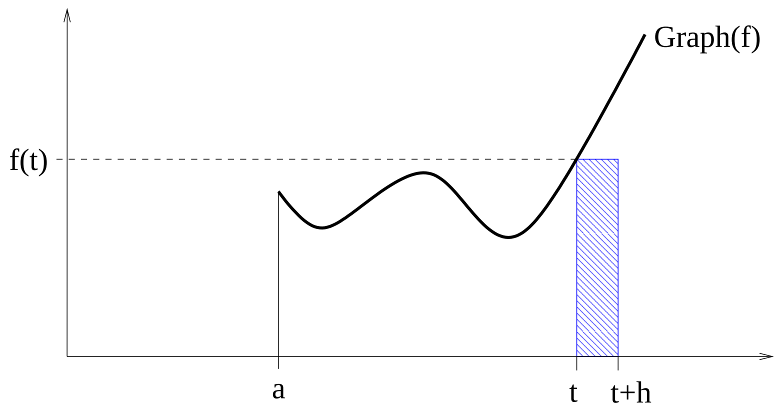
[1] nach Bernhard Riemann, Mathematiker in Göttingen (1826–1866)

7.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \quad \text{für} \;\; t \in [a, b].$$

Das ist die Fläche, die zwischen den Punkten a und t unter der Kurve von f liegt.



FIGUR. Lässt man t auf $t+h$ wachsen, so vergrößert sich die Fläche unter dem Graphen um etwa $h \cdot f(t)$.

Um wie viel wächst $F(t)$, wenn wir t um eine kleine Zahl $h > 0$ vergrößern?

Es kommt bei der Fläche ein Stück dazu, das ungefähr gleich dem Rechteck mit Breite h und Höhe $f(t)$ ist. Also ist

$$F(t + h) \approx F(t) + h \cdot f(t).$$

Das können wir umformen zu

$$\frac{F(t + h) - F(t)}{h} \approx f(t), \tag{7.4}$$

wobei Gleichheit gelten sollte, falls h gegen 0 strebt. Das heißt, wir erwarten:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{F(t + h) - F(t)}{h} = f(t). \tag{7.5}$$

Damit haben wir den folgenden Satz hergeleitet (naja: plausibel gemacht).

Satz 7.3 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F(t) := \int_a^t f(x)\,dx$.*
Dann ist F differenzierbar mit der Ableitung $F'(t) = f(t)$.

Definition 7.4 *Eine Funktion F heißt* **Stammfunktion***von f, falls F differenzierbar ist mit Ableitung $F' = f$.*

Beispiele 7.5 (i) Ist $f(x) = x^2$, so ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von f.

(ii) Ist $f(x) = \sin(x)$, so ist $F(x) = -\cos(x)$ eine Stammfunktion von f. $\diamond$

Bemerkung 7.6 (i) Ist F eine Stammfunktion von f und $c \in \mathbb{R}$, so ist auch $c + F$ eine Stammfunktion von f.

(ii) Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f und $G := F_1 - F_2$, so ist $G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ für alle x. Also ist G konstant.

(iii) Zusammengefasst ist die Stammfunktion von f bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Wir können jetzt den zentralen Satz formulieren, der den Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation angibt.

Satz 7.7 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis *Nach Satz 7.3 ist auch die Funktion $G : t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$ eine Stammfunktion von f. Nach Bemerkung 7.6 gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F - G = c$. Auswertung an der Stelle a ergibt $c = F(a) - G(a) = F(a) - \int_a^a f(x)\,dx = F(a)$. Auswertung an der Stelle b liefert damit $F(a) = c = F(b) - G(b)$, also*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) = F(b) - F(a).$$ $\square$

Manchmal wird für die auftretende Differenz von Werten der Stammfunktion die folgende Schreibweise verwendet.

Definition 7.8

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Mit dieser Schreibweise ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Beispiele 7.9 (i) Wir wollen $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$ bestimmen. Eine Stammfunktion von sin ist $-\cos$, also ist

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2.$$

(ii) Wir wollen $\int_0^2 x^2\,dx$ bestimmen. Eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$ ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Also ist

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{8}{3}.$$

(iii) Wir wollen $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ bestimmen. Eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $F(x) = \log(x)$. Also ist

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \log(x)\Big|_1^2 = \log(2) - \log(1) = \log(2) \approx 0.693.$$ $\diamond$

7.3 Berechnung von Integralen

Die Berechnung von Integralen läuft meist auf das Bestimmen von Stammfunktionen hinaus. Man sucht also eine Funktion F, die abgeleitet die gewünschte Funktion f liefert. Für das Ableiten hatten wir einen ganz komfortablen Kalkül zusammengestellt. Für ein paar Grundfunktionen konnte man die Ableitung aus einer Tabelle entnehmen. Alle daraus zusammengesetzten Funktionen konnte man mit Hilfe von einfachen Regeln systematisch ausrechnen. Für das Auffinden von Stammfunktionen funktioniert dies eben nicht. Während man schon eine Tabelle mit Grundfunktionen aufstellen kann und auch Addition und Multiplikation mit Zahlen keine Probleme bereiten, kann man für Produkte, Quotienten und Verknüpfungen von Funktionen keine allgemein gültigen nützlichen Regeln aufstellen. Hier ist man auf einen guten Instinkt und eventuell eine sehr große Formelsammlung angewiesen.

In diesem Abschnitt stellen wir nun die Rechenregeln bereit, die es zum Glück doch noch gibt.

Ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

ein Polynom, so ist

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

eine Stammfunktion von f. Zum Nachweis muss man einfach nur F ableiten. Allgemeiner ist für eine konvergente Potenzreihe um den Punkt $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

die Reihe

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x-a)^{k+1} \tag{7.6}$$

mit selbem Konvergenzradius eine Stammfunktion und zwar mit $F(a) = 0$. Auch hier muss man zum Nachweis einfach F ableiten und die Regeln aus Kapitel 5.2 beachten. Für viele andere Funktionen kann man einfach die Tabelle der Ableitung aus Abschnitt 5.1 von rechts nach links lesen. Beispielsweise erhalten wir:

Beispiele 7.10 (i) $f(x) = \exp(x)$, dann ist $F(x) = \exp(x)$ eine Stammfunktion.

(ii) $f(x) = x^{-2}$, dann ist $F(x) = -x^{-1}$ eine Stammfunktion.

(iii) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, dann ist $F(x) = \arctan(x)$ eine Stammfunktion.

(iv) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$, dann ist $F(x) = \arcsin(x)$ eine Stammfunktion. ◇

Für Funktionen, die sich als Summe oder Vielfache von Funktionen aus der Tabelle ergeben, kann man leicht Regeln angeben, die sich direkt aus den entsprechenden Regeln für die Differentiation ergeben.

Satz 7.11 (Linearität des Integrals) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie $c \in (a, b)$. Dann ist*

$$\int_a^b (\lambda f(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx \tag{i}$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \tag{ii}$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \tag{iii}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{iv}$$

Beweis *(Nur für stetiges f und $a \le c \le b$.) Nur Punkt (iv) ist neu. Hierzu bemerken wir, dass nach dem Hauptsatz gilt (mit F eine Stammfunktion von f)*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= F(b) - F(a)\\ &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c))\\ &= \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.\end{aligned}$$

□

Beispiele 7.12 (i) Sei $f(x) = 5\sin(x)$. Dann ist $F(x) = -5\cos(x)$ eine Stammfunktion von f.

(ii)

$$\begin{aligned}\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx &= \int_2^4 x\, dx + \int_2^4 \frac{1}{x}\, dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\Big|_2^4 + \log(x)\Big|_2^4 = 8 - 2 + \log(4) - \log(2) = 6 + \log(2).\end{aligned}$$

(iii) Wir wollen die Vorzeichenfunktion sign im Bereich -2 bis 5 integrieren. Das Problem dabei ist natürlich die Unstetigkeitsstelle in der Null. An der Stelle können wir uns aber mit Regel (iv) (aus Satz 7.11) behelfen:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^5 \operatorname{sign}(x)\, dx &= \int_{-2}^0 \operatorname{sign}(x)\, dx + \int_0^5 \operatorname{sign}(x)\, dx\\ &= \int_{-2}^0 (-1)\, dx + \int_0^5 (+1)\, dx\\ &= -2 + 5 = 3.\end{aligned}$$

Allgemeiner kann man sogar zeigen, dass die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ eine Stammfunktion von sign ist. ◇

Die Produktregel und die Kettenregel (siehe Abschnitt 5.2) übertragen sich leider nicht so einfach von der Differentiation auf die Integration. Man kann nur Folgendes angeben.

Satz 7.13 (Substitutionsregel) *Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Ist $g : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar und $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

Mit anderen Worten: Ist F eine Stammfunktion von f, so ist $x \mapsto F(g(x))$ eine Stammfunktion von $x \mapsto f(g(x))g'(x)$.

Beweis *Zum Beweis sei F eine Stammfunktion von f. Wir setzen $H(x) = F(g(x))$. Dann ist nach der Kettenregel für Ableitungen*

$$H'(x) = g'(x)F'(g(x)) = g'(x) \cdot f(g(x)).$$

Dabei haben wir in der zweiten Gleichung ausgenutzt, dass $F' = f$ ist. Also ist H eine Stammfunktion von $x \mapsto g'(x) \cdot f(g(x))$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist also

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = H(x)\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy. \qquad \square$$

Bemerkung 7.14 Nimmt man die Schreibweise $\frac{dg(x)}{dx} = g'(x)$ als Bruch ernst, so kann man ihn umformen zu $dg(x) = g'(x)\,dx$. Setzen wir jetzt noch $y = g(x)$, so sagen wir, dass wir x durch die neue Integrationsvariable y substituiert haben mit $dy = g'(x)dx$.

Beispiele 7.15 (i) Mit $f(x) = \sin(x)$ und $y = g(x) = x^2$ ist

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x\sin(x^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi 2x\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2} \sin(y)\,dy \\ &= -\frac{1}{2}\cos(y)\Big|_0^{\pi^2} = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi^2)). \end{aligned}$$

(ii) Mit $f(x) = x^2$ und $y = g(x) = \tan(x)$ (sowie: $g'(x) = 1 + (\tan(x))^2$) ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^2 + (\tan(x))^4\,dx &= \int_0^{\pi/4} \left(1 + (\tan(x))^2\right) \cdot (\tan(x))^2\,dx \\ &= \int_{\tan(0)}^{\tan(\pi/4)} y^2\,dy \\ &= \frac{1}{3}y^3\Big|_{\tan(0)}^{\tan(\pi/4)} = \frac{1}{3}\tan(\pi/4)^3 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(iii) Sei $c \in \mathbb{R}$. Mit $g(x) = x + c$ ist

$$\int_a^b f(x + c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,dy.$$

(iv) Sei $c \neq 0$. Mit $g(x) = cx$ ist

$$\int_a^b f(cx)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(y)\,dy.$$

(v) Wir wollen eine Stammfunktion von tan bestimmen. Dazu setzen wir $f(x) = -\frac{1}{x}$ und $g(x) = \cos(x)$. Dann ist $g'(x) = -\sin(x)$ und $F(x) = -\log(x)$ ist eine Stammfunktion von f. Nach der Substitutionsregel ist von

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = g'(x)f(g(x))$$

eine Stammfunktion

$$x \mapsto F(g(x)) = -\log(\cos(x)).$$ ◇

Mit der Substitutionsregel haben wir die Kettenregel rückwärts angewandt. Als nächstes wollen wir die Produktregel rückwärts anwenden. Die resultierende Integrationsregel nennt man dann **partielle Integration**.

Satz 7.16 (Partielle Integration) *Seien f und g stetige Abbildungen $[a,b] \to \mathbb{R}$ mit stetigen Ableitungen f' und g'. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Mit anderen Worten: $x \mapsto H(x) := f(x)g(x) - \int_a^x f'(t)g(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von $x \mapsto h(x) := f(x)g'(x)$.

Beweis *Es reicht zu zeigen, dass $H'(x) = h(x)$ ist. Nach der Produktregel für Ableitungen (Satz 5.2) ist aber*

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist andererseits

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f'(t)g(t)\,dt = f'(x)g(x).$$

Also ist (nach Satz 7.3)

$$H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x) = h(x).$$ □

Natürlich ist partielle Integration nur dann nützlich, wenn das Integral, das man auf der rechten Seite abziehen muss, leichter zu berechnen ist als das Integral, für das man sich ursprünglich interessiert hat. Das ist manchmal, aber durchaus nicht immer, der Fall. Wir wollen hier ein paar Beispiele angeben, bei denen es funktioniert.

Beispiele 7.17 (i) Wir wollen $\int_0^y x\sin(x)\,dx$ bestimmen. Dazu setzen wir $f(x) = x$ und $g(x) = -\cos(x)$. Also $g'(x) = \sin(x)$, $f'(x) = 1$ und $f'(x)g(x) = -\cos(x)$. Mit Hilfe der partiellen Integration bekommen wir

$$\int_0^y x\sin(x)\,dx = -x\cos(x)\Big|_0^y - \int_0^y (-\cos(x))\,dx$$
$$= -y\cos(y) + \sin(x)\Big|_0^y = \sin(y) - y\cos(y).$$

(ii) Wir wollen $\displaystyle\int_1^y \log(x)\,dx$ berechnen. Dazu setzen wir $f(x) = \log(x)$ und $g(x) = x$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = 1$. Also ist mit partieller Integration

$$\int_1^y \log(x)\,dx = x\log(x)\Big|_1^y - \int_1^y \frac{1}{x}\cdot x\,dx = y\log(y) - y + 1.$$

Also ist $x \mapsto x(\log(x) - 1)$ eine Stammfunktion von log.

(iii) Wir wollen $\int_0^\pi x^2\cos(x)\,dx$ bestimmen. Dazu setzen wir $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin(x)$. Damit ist $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = \cos(x)$, also

$$\int_0^\pi x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin(x)\,dx = -\int_0^\pi 2x\sin(x)\,dx,$$

weil $\sin(\pi) = \sin(0) = 0$.

Um das verbleibende Integral auszurechnen, wenden wir Beispiel (i) an:

$$\int_0^\pi 2x\sin(x)\,dx = 2(\sin(\pi) - \pi\cos(\pi)) = 2\pi.$$

Insgesamt haben wir also

$$\int_0^\pi x^2\cos(x)\,dx = -2\pi.$$

(iv) **(Fläche des Einheitskreises)** Als letzte und schwierigste Anwendung wollen nun noch die Fläche eines Kreises mit Radius 1 ausrechnen. Hierzu reicht es sicher aus, die Fläche des halben Kreises auszurechnen, der oberhalb der x–Achse liegt und im Ursprung zentriert ist. Nach dem Satz von Pythagoras ist für jeden Punkt (x, y) auf dem Kreisrand $x^2 + y^2 = 1$, also $y = \sqrt{1 - x^2}$. Wir müssen also das folgende Integral ausrechnen:

$$I := \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2}\,dy.$$

Wir gehen dazu in zwei Schritten vor.

Schritt 1. (Verwendung der Substitutionsregel)
Man substituiere $y = g(x) := \sin(x)$ (also $x = \arcsin(y) = g^{-1}(y)$). Dann muss man dy ersetzen durch $g'(x)\,dx = \cos(x)\,dx$ und die Intervallgrenzen $-1, 1$ durch $g^{-1}(-1), g^{-1}(1)$. Damit erhält man

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - (\sin(x))^2}\cdot\cos(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(x))^2\,dx.$$

Schritt 2. (partielle Integration)
Wir wenden partielle Integration an mit $f(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = \cos(x)$, also $f'(x) = -\sin(x)$ und $g(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \cdot \cos(x)\, dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin(x))^2\, dx \\ &= 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - (\cos(x))^2\right) dx = \pi - I. \end{aligned}$$

Damit ist $I = \pi/2$. ◇

7.4 Uneigentliche Integrale

Wir betrachten die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wir würden gerne den Flächeninhalt unter dem Graphen von f im Intervall $(0,1]$ als Integral $\int_0^1 f(x)\, dx$ angeben. Im Rahmen dessen, wie das Integral in Abschnitt 7.1 eingeführt wurde, funktioniert dies aus zwei Gründen nicht:

(1) Wir hatten bisher für die Integration vorausgesetzt, dass f im gesamten abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ definiert ist.

(2) Schlimmer noch: $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$. Deshalb ist jede Obersumme $O_n(f) = \infty$.

Da wir aber zu f die Stammfunktion $F(x) = 2\sqrt{x}$ angeben können, lassen wir uns durch die obigen Bedenken nicht abschrecken, sondern suchen nach einem etwas allgemeineren Integralbegriff. In diesem Fall bietet sich Folgendes an: Für jedes $h > 0$ ist

$$\int_h^1 f(x)\, dx = F(1) - F(h) = 2(1 - \sqrt{h}).$$

Die rechte Seite ist für alle $h \geq 0$ definiert und stetig in h. Also definieren wir

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{h \downarrow 0} \int_h^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = 2.$$

Wir nennen $\int_0^1 f(x)\, dx$ ein uneigentliches Integral – eine der schönsten Wortschöpfungen in der Mathematik! Ähnlich wollen wir verfahren, um Integrationsgrenzen ins Unendliche auszudehnen.

Definition 7.18 (Uneigentliches Integral) *(i) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b > a$ oder $b = \infty$ sowie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Für jedes $R \in [a,b)$ sei f auf $[a,R]$ integrierbar. Wir definieren das* **uneigentliche Integral**

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{R \uparrow b} \int_a^R f(x)\, dx,$$

falls der Limes existiert (wobei wir $-\infty$ und $+\infty$ als Grenzwerte zulassen wollen). In diesem Fall heißt das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ auch konvergent (bzw. uneigentlich konvergent, falls der Grenzwert nicht endlich ist). Andernfalls heißt $\int_a^b f(x)\, dx$ divergent.

(ii) Analog gehen wir vor, falls $b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ oder $a = -\infty$ sowie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ ist. Hier ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R \downarrow a} \int_R^b f(x)\,dx.$$

(iii) Seien $a < b$, wobei wir $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$ zulassen, und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Wir wählen ein $c \in (a, b)$ und setzen (vergleiche Satz 7.11(iv))

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

falls wenigstens einer der Summanden endlich ist, oder beide das gleiche Vorzeichen haben.

Bemerkung 7.19 In (iii) hängt der Wert der Summe nicht von der Wahl von c ab. Im übrigen verwenden wir die Konvention $x + \infty = \infty$, $x - \infty = -\infty$, falls $x \in \mathbb{R}$ und $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$. Der Ausdruck $\infty - \infty$ kann nicht sinnvoll definiert werden.

Beispiele 7.20 (i) $a = 0$, $b = 1$, $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x)$. Aus Beispiel 7.17(ii) wissen wir, dass $F(x) = x(\log(x) - 1)$ eine Stammfunktion von f ist. Die de l'Hospital'sche Regel liefert $\lim\limits_{x \downarrow 0} F(x) = 0$ Also konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \log(x)\,dx = \lim_{R \downarrow 0} \int_R^1 \log(x)\,dx = F(1) - \lim_{R \downarrow 0} F(R) = F(1) = -1.$$

(ii) $a = 0$, $b = \infty$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-x)$. Offenbar ist

$$\int_0^R e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^R = 1 - e^{-R}.$$

Also konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{R \to \infty} 1 - e^{-R} = 1.$$

(iii) $a = -\infty$, $b = \infty$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{K + x^2}$, wobei $K > 0$ eine Konstante ist. Dann ist $F(x) = \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan(\frac{x}{\sqrt{K}})$ eine Stammfunktion, denn

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan'\left(\frac{x}{\sqrt{K}}\right) = \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{1 + x^2/K} = \frac{1}{K + x^2}.$$

Wegen $\lim\limits_{R \to \infty} \arctan(R) = -\lim\limits_{R \to -\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}$ ist für $c \in \mathbb{R}$

$$\int_c^\infty f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{K}}\right)\Big|_c^R = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{K}}\right).$$

und

$$\int_{-\infty}^c f(x)\,dx = \lim_{R \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{K}}\right)\Big|_R^c = \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{K}}\right) + \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Also existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{K + x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{K}}.$$

(iv) $a = 1$, $b = \infty$, $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $F(x) = \log(x)$ eine Stammfunktion. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$ konvergiert das uneigentliche Integral nur uneigentlich

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \log(x)\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \log(R) = \infty.$$

(v) $a = 0$, $b = \infty$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Dann ist $F(x) = -\cos(x)$ eine Stammfunktion. Jedoch existiert der Grenzwert von $F(x)$ für $x \to \infty$ nicht. Also existiert auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \sin(x)\,dx$ nicht.

An diesem Beispiel sieht man auch, dass für die Existenz von $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ nicht ausreichend ist, dass $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)\,dx$ existiert. In dem hier betrachteten Fall ist nämlich

$$\int_{-R}^R \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{-R}^R = -\cos(R) + \cos(-R) = 0.$$

Also ist auch

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R \sin(x)\,dx = 0.$$

Aber $\int_{-\infty}^\infty \sin(x)\,dx$ existiert nicht, wie wir gesehen haben. ◇

Oft ist man in der Situation, dass man den Wert eines bestimmten (uneigentlichen) Integrals ausrechnen möchte, obwohl man eine Stammfunktion nicht, oder nur schwer, ausrechnen kann. Oft ist es so verzwickt, diese Integrale auszurechnen, dass man auf Tabellen angewiesen ist, in denen solche Integrale aufgelistet sind.

Beispiel 7.21 Wir wollen $I_n := \displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ ausrechnen (für $n \in \mathbb{N}$). Im Prinzip könnte man schon eine Stammfunktion angeben, aber es geht hier einfacher. Mit partieller Integration ($f(x) = x^n$, $g(x) = -e^{-x}$) erhalten wir

$$\int_0^R x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x}\Big|_0^R + \int_0^R n x^{n-1} e^{-x}\,dx.$$

Wegen $\lim\limits_{R\to\infty} R^n e^{-R} = 0$ verschwindet der erste Summand, wenn R nach ∞ geht, also ist

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \int_0^\infty n x^{n-1} e^{-x}\,dx.$$

Also ist $I_n = nI_{n-1}$. Wir haben aber I_0 schon ausgerechnet:

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Also ist $I_1 = 1 \cdot I_0 = 1$, $I_2 = 2 \cdot I_1 = 2 \cdot 1 = 2$, $I_3 = 3 \cdot I_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6, \ldots, I_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$. Insgesamt haben wir also

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n! \tag{7.7}$$

◇

Beispiel 7.22 Für die Gauß'sche Fehlerfunktion $f(x) = e^{-x^2}$ kann man keine Stammfunktion explizit angeben. Aber man kann (wenn auch mit viel Mühe) ausrechnen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{7.8}$$

◇

Beispiel 7.23 Man kann berechnen, dass

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

◇

Kapitel 8

Ergänzungen zur Differentialrechnung

8.1 Partielle Ableitungen und Gradient

Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x, y) = 2x^2 \sin(y) + 3y^2.$$

Für festes y können wir $g(x) = f(x, y)$ nach x ableiten und erhalten

$$\frac{d}{dx} f(x, y) := g'(x) = 4x \sin(x).$$

Andererseits können wir für festes x die Funktion $h(y) = f(x, y)$ nach y ableiten und bekommen

$$\frac{d}{dy} f(x, y) := h'(y) = 2x^2 \cos(y) + 6y.$$

Man nennt $\frac{d}{dx} f(x, y)$ und $\frac{d}{dy} f(x, y)$ die partiellen Ableitungen von f nach x und y. Übliche Schreibweisen sind:

$$f_1(x, y) = f_x(x, y) = D_1 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{d}{dx} f(x, y)$$

und

$$f_2(x, y) = f_y(x, y) = D_2 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{d}{dy} f(x, y).$$

Dabei deutet die 1 in D_1 an, dass nach der ersten Koordinate abgeleitet wird (also nach x), die 2 in D_2, dass nach der zweiten abgeleitet wird (nach y).

Was wir hier für eine Funktion von zwei Variablen gemacht haben, geht natürlich auch für Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Definition 8.1 *Für hinreichend glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und jedes $k = 1, \dots, n$ definieren wir die partielle Ableitung nach der k-ten Koordinate als*

$$f_k(x_1, \dots, x_n) := D_k\, f(x_1, \dots, x_n) := \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, \dots, x_n) := \frac{d}{dx_k} f(x_1, \dots, x_n).$$

Wir können die partiellen Ableitungen in einen Vektor mit n Einträgen zusammen fassen

$$\nabla f(x_1,\dots,x_n) := \begin{pmatrix} D_1 f(x_1,\dots,x_n) \\ D_2 f(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ D_2 f(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}.$$

*Der Vektor $\nabla f(x_1,\dots,x_n)$ heißt **Gradient** von f an der Stelle $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$.*

Der Gradient gibt die Richtung des stärksten Wachstums der Funktion f an, sowie deren Stärke. Er steht immer senkrecht auf den Niveaulinien und ist größer, je enger die Niveaulinien beieinander liegen. Von Wanderkarten her ist dies bekannt: Der Steilste Anstieg ist senkrecht zu den Höhenlinien und umso steiler, je enger die Linien zusammen liegen.

Ist f hinreichend glatt und hat f an der Stelle $\vec{x}$ eine Minimalstelle oder Maximalstelle, so ist notwendigerweise $\nabla f(\vec{x}) = 0$. Ein Punkt $\vec{x}$ mit $\nabla f(\vec{x}) = 0$ heißt daher **kritische Stelle**. Ähnlich wie bei Funktionen, die nur von einer Variablen abhängen, muss an einer kritischen Stelle nicht notwendigerweise auch ein lokale Extremalstelle vorliegen. Allerdings kann man in vielen Fällen durch Untersuchung der zweiten Ableitungen ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum detektieren.

Definition 8.2 *Wir nennen für $k, l = 1, \dots, n$*

$$D_k D_l f(x_1,\dots,x_n) := \frac{d}{dx_k}\left(\frac{d}{dx_l} f(x_1,\dots,x_n)\right)$$

die zweite partielle Ableitung von f nach den Koordinaten l und k.

Satz 8.3 *Ist f hinreichend glatt*[1]*, so kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen:*

$$D_k D_l f(x_1,\dots,x_n) = D_l D_k f(x_1,\dots,x_n) \quad \text{für alle } k, l = 1,\dots,n.$$

Beispiel 8.4 Wir betrachten das Beispiel vom Eingang dieses Abschnitts:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 \sin(x_2) + 3x_2^2.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} D_1 f(x_1,x_2) &= 4x_1 \sin(x_2) \\ D_2 f(x_1,x_2) &= 2x_1^2 \cos(x_2) + 6x_2 \\ D_1 D_1 f(x_1,x_2) &= 4 \sin(x_2) \\ D_2 D_1 f(x_1,x_2) &= D_2\big(4x_1 \sin(x_2)\big) = 4x_1 \cos(x_2) \\ D_1 D_2 f(x_1,x_2) &= D_1\big(2x_1^2 \cos(x_2) + 6x_2\big) = 4x_1 \cos(x_2) \\ D_2 D_2 f(x_1,x_2) &= -2x_1^2 \sin(x_2) + 6. \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt also $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$. ◇

Wir betrachten nun speziell die Situation von zwei Veränderlichen.

[1] es reicht, dass die zweiten partiellen Ableitungen $D_k D_l f(x_1,\dots,x_n)$ stetige Funktionen von $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ sind

Satz 8.5 *Sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *glatt und* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *mit* $\nabla f(x, y) = 0$.

(i) Gelten die drei Bedingungen

- $D_1D_1\, f(x, y) > 0$
- $D_2D_2\, f(x, y) > 0$
- $D_1D_1f(x, y)\; D_2D_2f(x, y) - \big(D_1D_2f(x, y)\big)^2 > 0,$

so hat f *in* (x, y) *eine isolierte lokale Minimalstelle.*

(ii) Gelten die drei Bedingungen

- $D_1D_1\, f(x, y) < 0$
- $D_2D_2\, f(x, y) < 0$
- $D_1D_1f(x, y)\; D_2D_2f(x, y) - \big(D_1D_2f(x, y)\big)^2 > 0,$

so hat f *in* (x, y) *eine isolierte lokale Maximalstelle.*

Wie bei Funktionen einer Veränderlichen, muss also die zweite Ableitung positiv sein für ein Minimum und negativ für ein Maximum. Dies erklärt jeweils die ersten beiden Bedingungen. Die dritte Bedingung ergibt sich, weil es nicht ausreicht, nur entlang der x-Achse und der y-Achse positive Krümmung für ein Minimum zu fordern, sondern entlang jeder Richtung muss die Krümmung positiv sein. Die fehlende Bedingung ist gerade die jeweils dritte Bedingung. (Dies genau einzusehen, ist allerdings etwas kniffliger.) Ein ähnliche Argumentation kann man auch für drei oder auch mehr Veränderliche führen. Hier werden die Bedingungen jedoch immer unübersichtlicher (für drei Variable sind es schon sieben Bedingungen), deshalb lassen wir das an dieser Stelle weg.

Beispiel 8.6 Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \exp\big(-(x_1^2 + x_2^2)\big)$. Wir bilden die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
D_1f(x_1, x_2) &= -2x_1 \exp\big(-(x_1^2 + x_2^2)\big)\\
D_2f(x_1, x_2) &= -2x_2 \exp\big(-(x_1^2 + x_2^2)\big)\\
D_1D_1f(x_1, x_2) &= (-2 + 4x_1^2) \exp\big(-(x_1^2 + x_2^2)\big)\\
D_2D_1f(x_1, x_2) &= -4x_1x_2 \exp\big(-(x_1^2 + x_2^2)\big)\\
D_2D_2f(x_1, x_2) &= (-2 + 4x_2^2) \exp\big(-(x_1^2 + x_2^2)\big).
\end{aligned}$$

Wir suchen zunächst nach kritischen Stellen und müssen daher die Gleichung

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0$$

nach x_1 und x_2 auflösen. Es folgt, dass die einzige kritische Stelle bei $(x_1, x_2) = (0, 0)$ liegt. Nun untersuchen wir die zweiten Ableitungen:

$$D_1D_1f(0, 0) = -2 < 0, \qquad D_2D_2f(0, 0) = -2 < 0.$$

Schließlich ist

$$D_1D_1f(0, 0)\, D_2D_2f(0, 0) - \big(D_1D_2f(0, 0)\big)^2 = (-2)\,(-2) - 0 = 4 > 0.$$

Es sind also alle Bedingungen aus Satz 8.5(ii) erfüllt, daher hat f in $(0, 0)$ eine isolierte lokale Maximalstelle.

Tatsächlich ist es nicht schwer zu sehen, dass dies sogar eine globale Maximalstelle ist. ◇

8.2 Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten eine Situation, bei der wir in einem wissenschaftlichen Experiment einen Parameter x frei einstellen können (bzw. wo x die Zeit ist) und $y = y(x)$ ist eine Messgröße, die von x abhängt. Die Naturwissenschaft formuliert als Naturgesetz einen Zusammenhang zwischen x und $y(x)$. Der Zusammenhang kann allerdings derart formuliert sein, dass nicht unmittelbar klar wird, wie man $y(x)$ bei gegebenem x auch wirklich berechnet. Die Aufgabe der Mathematik ist es, Formeln für die Abbildungsvorschrift $x \mapsto y(x)$ zu finden.

Beispiel 8.7 (Reaktion zweiter Ordnung) Wir betrachten die chemische Reaktion

$$2NO_2 \longrightarrow 2NO + O_2.$$

Wir interessieren uns hier für die Reaktionskinetik. Mit x bezeichnen wir die verstrichene Zeit, mit $y(x)$ die Konzentration von Stickstoffdioxid zur Zeit x. Aus elementaren chemischen Überlegungen heraus wird ein Gesetz formuliert, dass der Stoffumsatz pro Zeiteinheit proportional zu $y^2(x)$ sein muss. Das entsprechende Naturgesetz lautet also

$$y'(x) = \frac{d}{dx}y(x) = -ky^2(x). \tag{8.1}$$

Hierbei ist $k \geq 0$ die Reaktionskonstante. Wir nehmen an, dass die Messung zur Zeit $x = 0$ beginnt und die Anfangskonzentration $y(0) = y_0 \geq 0$ ist.

Wir werden später sehen, wie man diese Gleichung systematisch so löst, dass man die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto y(x)$ erhält. An dieser Stelle geben wir die Lösung nur an:

$$y(x) = y_0 \frac{1}{1 + kxy_0}. \tag{8.2}$$

Hat man die Formel für y erst einmal an der Hand, so kann man leicht prüfen, dass y die Gleichung (8.2) löst. Probe:

$$y'(x) = y_0 \frac{-ky_0}{(1 + kxy_0)^2} = -k\,y^2(x) \quad \checkmark.$$

Der schwierige Teil besteht stets darin, eine Lösung zu raten oder sich systematisch zu verschaffen. Das Nachprüfen ist stets einfach. In diesem Sinne haben wir eine ähnliche Situation wie bei der Integration: Auch dort war es schwierig, eine Stammfunktion zu raten. Das Nachprüfen, ob eine Funktion tatsächlich eine Stammfunktion ist, ist stets einfach. ◇

Eine Differentialgleichung (DGL) gibt einen Zusammenhang zwischen einer (gesuchten) Funktion y und ihren Ableitungen an. Taucht nur die erste Ableitung y' auf, so sagen wir, dass die Differentialgleichung von erster Ordnung ist. Taucht auch y'' so heißt die DGL von zweiter Ordnung usw. Wir betrachten im Rest dieses Abschnitts eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = F(x, y(x)). \tag{8.3}$$

Die Abbildungsvorschriften $x \mapsto y(x)$ sowie $x \mapsto y'(x)$ kennen wir nicht. Die Abbildung $(x, y) \mapsto F(x, y)$ ist vorgegeben. Im Allgemeinen kann man noch einen Startwert frei wählen

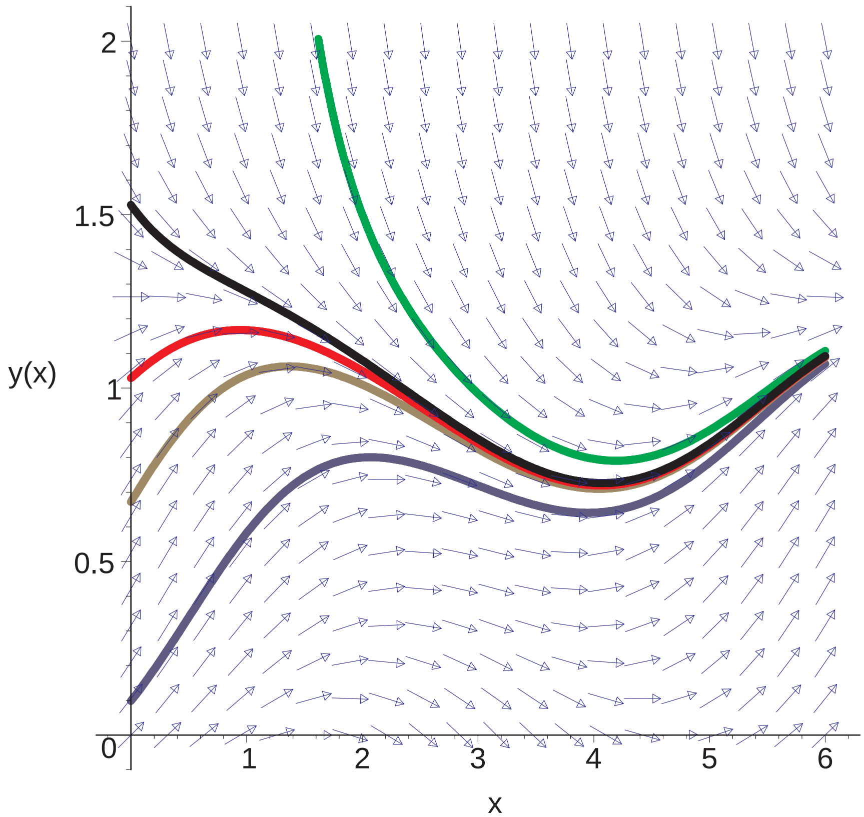
$$y(x_0) = y_0. \tag{8.4}$$

Definition 8.8 (Lösung einer DGL) *Eine differenzierbare Funktion y, die* (8.3) *erfüllt, heißt Lösung der DGL* (8.3). *Gilt zusätzlich noch* (8.4), *so heißt y eine Lösung des Anfangswertproblems (AWP) [*(8.3), (8.4)*].*

Zunächst wollen wir zunächst eine geometrische Interpretation der DGL angeben. Danach behandeln wir die Frage, ob es stets eine Lösung der DGL gibt, und wenn ja, ob diese eindeutig ist, oder ob es eventuell mehrere Lösungen (mit selben Anfangswerten) geben kann. Danach wenden wir uns einer konkreten Methoden zu, mit ein gewisser Typ von Differentialgleichungen erster Ordnung gelöst werden kann.

Geometrische Interpretation

Zu jedem Wert der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y können wir die Ableitung $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ einer Lösungskurve ausrechnen. Wir tragen in einem Diagramm Pfeile auf, die in (x, y) fußen und die Steigung $F(x, y)$ haben. Die Lösungen der DGL sind dann die Integralkurven des Richtungsfeldes, d.h. sie haben in jedem Punkt (x, y) die vorgegebene Richtung als Tangente.



FIGUR. Richtungsfeld der DGL $y'(x) = y - y^2(x) + \frac{1}{3}\cos(x)$ mit Lösungskurven zu den Anfangsbedingungen $(x_0, y_0) = (2,\ 1.5),\ (2,\ 1.08),\ (2,\ 1.05),\ (2,\ 1.01),\ (2,\ 0.8)$

Lösbarkeit und Eindeutigkeit

Um die Lösbarkeit der DGL sowie die Eindeutigkeit der Lösung zu garantieren, braucht man gewisse Regularitätsannahmen an die Funktion F.

Satz 8.9 (Existenz und Eindeutigkeit) *Sei $(x, y) \mapsto F(x, y)$ stetig und differenzierbar in den Variablen x und y und seien die partiellen Ableitungen $\frac{d}{dx}F(x, y)$ und $\frac{d}{dy}F(x, y)$ stetig in x und y.*

Dann existiert zu (x_0, y_0) *genau eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = F(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Der Satz kann in diesem Rahmen nicht bewiesen werden.

Beispiel 8.10 Sei $F(x,y) = -2xy$. Dann ist $\frac{d}{dx}F(x,y) = -2y$ und $\frac{d}{dy}F(x,y) = -2x$. Also sind die partiellen Ableitungen stetig und damit die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Wir haben damit zwar noch keine Lösung an der Hand, aber wir wissen, dass es eine gibt. Außerdem wissen wir, wenn wir eine Lösung geraten haben, dass es die einzige Lösung ist. In diesem Fall müssen wir also nicht weiter suchen.

In diesem Beispiel kann man eine Lösung angeben (wir werden später noch sehen, wie man darauf kommt): Für $x_0 = 0$ und $y(0) = 1$ ist $y(x) = e^{-x^2}$ eine Lösung des AWP (Nachrechnen!). Der Satz sagt uns nun, dass dieses y die einzige Lösung ist. ◇

8.2.1 DGL 1. Ordnung mit getrennten Variablen

Wir nehmen jetzt an, dass F die besondere Gestalt hat:

$$F(x,y) = -\frac{g(x)}{h(y)} \tag{8.5}$$

für gewisse stetige Funktionen g und h. Wir sagen dann, dass die Variablen x und y getrennt sind, denn wir können, zumindest formal, schreiben

$$h(y)dy = -g(x)dx.$$

Die Strategie ist nun, beide Seiten zu integrieren und dann nach y aufzulösen. Wir setzen

$$H(y) = \int_{y_0}^{y} h(t)\,dt, \qquad G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

Dann ist (nach der Kettenregel)

$$\frac{d}{dx}H(y(x)) = y'(x)H'(y(x)).$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist dies gleich bedeutend mit

$$\frac{d}{dx}H(y(x)) = y'(x)h(y(x)).$$

Etwas einfacher erhält man

$$\frac{d}{dx}G(x) = g(x).$$

Addieren wir die beiden Gleichungen, so bekommen wir

$$\frac{d}{dx}\Big(H(y(x)) + G(x)\Big) = y'(x)h(y(x)) + g(x) = 0,$$

wobei wir in der zweiten Gleichung die DGL eingesetzt haben. Eine Funktion mit verschwindender Ableitung ist konstant, also gilt

$$H(y(x)) + G(x) = H(y(x_0)) + G(x_0) = 0. \tag{8.6}$$

Um das AWP zu lösen, müssen wir jetzt (8.6) nach y auflösen.

Beispiel 8.11 Wir betrachten die DGL

$$y'(x) = -\frac{x-a}{y-b},$$

wobei a und b reelle Zahlen sind. Dann ist $g(x) = x - a$ und $h(y) = y - b$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} H(y) &= \int_{y_0}^{y} (t-b)\,dt = \frac{1}{2}(y-b)^2 - \frac{1}{2}(y_0-b)^2, \\ G(x) &= \int_{x_0}^{x} (t-a)\,dt = \frac{1}{2}(x-a)^2 - \frac{1}{2}(x_0-a)^2. \end{aligned}$$

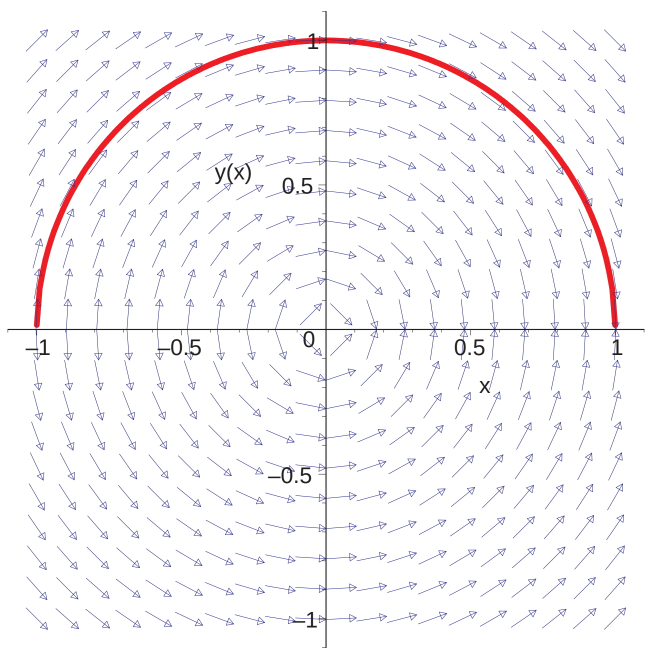
Es folgt, dass

$$(x-a)^2 + (y(x)-b)^2 = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 =: R^2.$$

Auflösen nach y ergibt

$$y(x) = b \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2}, \qquad x \in (a - |R|, a + |R|),$$

wobei das Vorzeichen, das Vorzeichen von $y_0 - b$ ist. Die Lösungskurve ist also ein Halbkreis um den Punkt (a, b) in der Ebene, der durch den Punkt (x_0, y_0) geht.



FIGUR. Richtungsfeld der DGL $y'(x) = -x/y(x)$ mit Lösungskurve für $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Die Lösung ist nicht für alle x definiert und $y_0 = b$ ist offenbar als Startwert nicht zugelassen. Das liegt daran, dass die Funktion $F(x, y) = -\frac{x-a}{y-b}$ hier unstetig ist. (Im Diagramm wechseln die Pfeile in der x–Achse die Richtung schlagartig.) $\diamond$

Beispiel 8.12 (Malthus'sches Wachstumsgesetz) Wir betrachten ein einfaches Wachstumsgesetz für Populationen, das auf Malthus zurück geht. Hier ist x die Zeit und $y(x)$ die Größe der Population zur Zeit x. Wir nehmen an, dass die Vermehrung der Population proportional zur Anzahl der lebenden Individuen ist

$$y'(x) = \lambda y(x),$$

dabei ist $\lambda > 0$ ein Parameter. Als Anfangswert nehmen wir x_0 und $y_0 > 0$ an. In der Notation von (8.5) ist also etwa (man hat natürlich immer Wahlmöglichkeiten indem man g und h mit der selben Funktion multipliziert)

$$g(x) = -\lambda, \qquad h(y) = \frac{1}{y}.$$

Wir berechnen für $y > 0$

$$H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{t}\, dt = \log(y) - \log(y_0) = \log(y/y_0),$$

$$G(x) = -\lambda(x - x_0).$$

Also ist

$$\log\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) = \lambda(x - x_0).$$

Auflösen nach $y(x)$ ergibt

$$y(x) = y_0 \exp(\lambda(x - x_0)).$$

◇

Tatsächlich haben wir im vorangehenden Beispiel gar nicht benötigt, dass $\lambda > 0$ ist. Wir können also ganz allgemein das Anfangswertproblem lösen:

$$y'(x) = \lambda\, y(x), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Differentialgleichungen von diesem Typ heißen lineare Differentialgleichung (mit konstanten Koeffizienten) von erster Ordnung. Die eindeutige Lösung (im Fall $\lambda \neq 0$) ist

$$y(x) = y_0\, e^{\lambda(x - x_0)}.$$

(Im Fall $\lambda = 0$ ist die Lösung offenbar $y(x) = y_0$ für alle x.)

Beispiel 8.13 (Reaktion erster Ordnung) Bei einer Reaktion erster Ordnung ist der Stoffumsatz proportional zur vorhandenen Stoffmenge. Sei also x die Zeit und $y(x)$ die Stoffmenge, die zur Zeit x noch vorhanden ist. Das Gesetz der Reaktionskinetik lässt sich als die homogene lineare Differentialgleichung fassen

$$y'(x) = -ky(x).$$

Dabei ist $k > 0$ die Reaktionskonstante. Sei y_0 die zum Startzeitpunkt $x_0 = 0$ vorhandene Stoffmenge. Dann ist

$$y(x) = y_0\, e^{-kx}.$$

◇

Bemerkung 8.14 In vielen Fällen muss man die Differentialgleichung erst durch eine geeignete Transformation in die Form (8.5) bringen, damit man die Methode der Trennung der Variablen anwenden kann.

Wir wollen uns dies in einem einfachen Fall anschauen. Wir betrachten die DGL

$$y'(x) = f(ax + by(x) + c),$$

wobei f eine stetig differenzierbare Funktion ist und $a, b, c \in \mathbb{R}$. Interessant ist hier nur der Fall $b \neq 0$. Wir ersetzen jetzt die abhängige Variable y durch

$$z(x) = ax + by(x) + c.$$

Dann ist

$$z'(x) = a + by'(x) = a + bf(z(x)).$$

Wie oben erhalten wir nun eine Lösung für z indem wir

$$x - x_0 = \int_{z_0}^{z(x)} \frac{1}{a + bf(t)}\, dt$$

nach $z(x)$ auflösen. Daraus können wir sofort $y(x)$ berechnen.

Beispiel 8.15

$$y'(x) = (x + y)^2.$$

Dann erfüllt $z(x) = x + y(x)$ die DGL

$$z'(x) = z^2(x) + 1.$$

Die explizite Lösung ist

$$z(x) = \tan(x + C),$$

wobei die Zahl C noch von den Anfangswerten abhängt. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = \tan(x + C) - x. \qquad \diamond$$

8.3 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Eine Differentialgleichung von der Form

$$y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0 \tag{8.7}$$

(wobei $b, c \in \mathbb{R}$ sind) heißt (homogene) lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten). In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie die allgemeinen Lösungen dieser Gleichung aussehen, abhängig davon, welche Werte b und c haben.

Betrachte die quadratische Gleichung für λ

$$\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0. \tag{8.8}$$

Die Lösung ist bekanntlich, mit $\Delta = b^2 - 4c$:

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \qquad \lambda_2 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}. \tag{8.9}$$

Wir unterscheiden die drei Fälle $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ und $\Delta = 0$, da hier entweder zwei, keine, oder eine reelle Lösung vorliegt.

Fall 1 ($\Delta > 0$). Die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination

$$y(x) = C_1\, e^{\lambda_1 x} + C_2\, e^{\lambda_2 x} = C_1\, e^{x(-b-\sqrt{\Delta})/2} + C_2\, e^{x(-b+\sqrt{\Delta})/2}. \tag{8.10}$$

Dabei werden $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass das AWP gelöst wird. Den Nachweis, dass sich *alle Lösungen* so schreiben lassen, bleiben wir an dieser Stelle schuldig. Dass aber jede Funktion aus (8.10) eine Lösung ist, kann jeder schnell nachrechnen:

$$y'(x) = \lambda_1\, C_1\, e^{\lambda_1 x} + \lambda_2\, C_2\, e^{\lambda_2 x} = \lambda$$

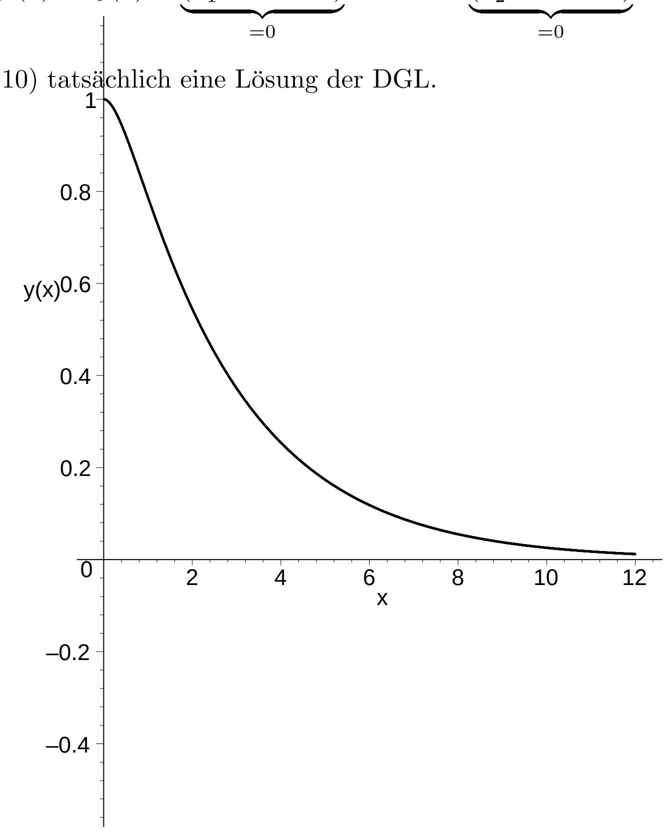
und

$$y''(x) = \lambda_1^2\, C_1\, e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2\, C_2\, e^{\lambda_2 x}.$$

Es folgt

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = \underbrace{(\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)}_{=0}\, C_1\, e^{\lambda_1 x} + \underbrace{(\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c)}_{=0}\, C_2\, e^{\lambda_2 x} = 0.$$

Also ist $y(x)$ aus (8.10) tatsächlich eine Lösung der DGL.



FIGUR. Lösungskurve für $b = 3$, $c = 1$, $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$

Fall 2 ($\Delta < 0$). Hier hat die Gleichung (8.8) keine reelle Lösung. Wir schreiben $\omega = \sqrt{-\Delta}/2$. Die allgemeine Lösung hat die Form

$$y(x) = A \cdot e^{-(b/2)x} \sin\big(\omega x + \varphi\big). \tag{8.11}$$

Dabei werden die **Amplitude** A und die **Phasenverschiebung** φ so gewählt, dass das Anfangswertproblem gelöst wird. Man sagt auch, dass hier der Fall einer **gedämpften Schwingung** vorliegt. Dass $y(x)$ aus (8.11) tatsächlich eine Lösung ist, lässt sich wieder einfach durch Ausrechnen bestätigen:

$$y'(x) = -\frac{b}{2} y(x) + A \cdot e^{-(b/2)x} \omega\, \cos\big(\omega x + \varphi\big)$$

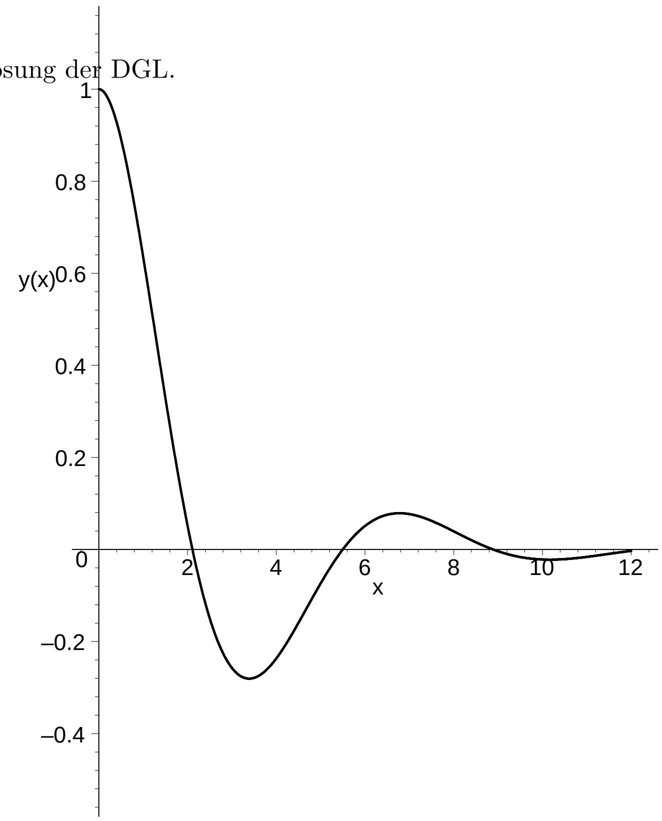
und

$$y''(x) = \frac{b^2}{4} y(x) - bA \cdot e^{-(b/2)x} \omega \cos\big(\omega x + \varphi\big) - \omega^2 y(x).$$

Es folgt

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = \Big(\frac{b^2}{4} - \omega^2 - \frac{b^2}{2} + c\Big)\, y(x) = \Big(\frac{\Delta}{4} - \frac{b^2}{4} + c\Big) y(x) = 0.$$

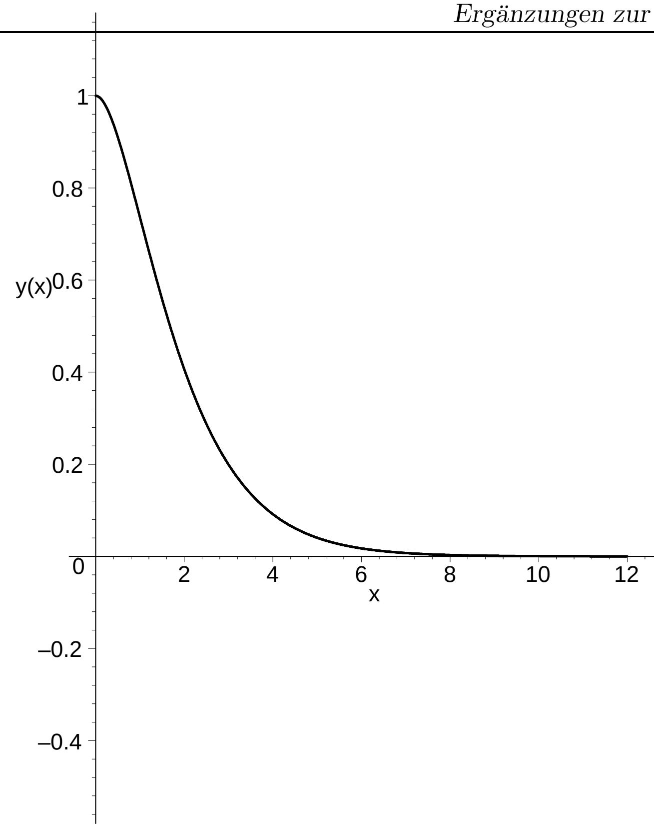
Also ist $y(x)$ eine Lösung der DGL.



FIGUR. Lösungskurve für $b = 3$, $c = 1$, $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$

Fall 3 ($\Delta = 0$). In diesem Fall hat die quadratische Gleichung nur die eine Lösung $\lambda = -\frac{b}{2}$. Wir haben in diesem Fall als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-(b/2)x}. \tag{8.12}$$



FIGUR. Lösungskurve für $b = 2$, $c = 1$, $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$

Kapitel 9

Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie

9.1 Grundbegriffe

9.1.1 Zufallsvariablen

Eine **Zufallsvariable** X mit Wertebereich $\mathbb{W}$ beschreibt die Werte eines Zufallsexperiments. Beispiele:

- Werfen eines Würfels. $X =$ Augenzahl. Wertebereich $\mathbb{W} = \{1, \ldots, 6\}$.
- Temperatur um 12^{00} Uhr. $X =$ Temperatur in Kelvin. $\mathbb{W} = [0, \infty)$.
- Position einer Flaschenpost im Atlantik. $X =$ ebene Koordinaten, $\mathbb{W} = \mathbb{R}^2$.
- Waldsterben: X = Gesundheitszustand eines zufällig gewählten Baumes, $\mathbb{W} = \{$ gesund, krank, tot $\}$,
- Bakterienwachstum, $X =$ Anzahl der Bakterien nach einem Tag, $\mathbb{W} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Der Wertebereich kann jede beliebige Menge sein, die zur Beschreibung des Experiments geeignet ist. Die Zufallsvariable heißt **diskret**, falls $\mathbb{W}$ endlich oder abzählbar ist (etwa $\mathbb{W} = \mathbb{N}$, oder $\mathbb{W} = \mathbb{Z}$), und reell, falls $\mathbb{W} = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. X heißt d-dimensional, falls $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^d$ ist.

Zwei Zufallsvariablen X und Y können verschiedene Aspekte eines Experiments beschreiben:

Beispiel 9.1 (i) $X=$ Temperatur um 12^{00} Uhr
$Y=$ Niederschlagsmenge (in mm) am selben Tag.

(ii) Eine zufällige Person wird nach der Meinung zum Ausbau des Frankfurter Flughafens befragt (X, Wertebereich $\mathbb{W}_X = \{$für, gegen$\}$) und zur Präferenz von politischen Parteien (Y mit Wertebereich $\mathbb{W}_Y = \{$CDU, SPD, Grüne, FDP, … $\}$). $\diamond$

Die Zufallsvariablen X und Y werden in den beiden genannten Beispielen jeweils nicht unabhängig sein. Wir sprechen daher auch von abhängigen Zufallsvariablen.

Werfen wir jedoch einen Würfel zweimal und nennen

$$\begin{aligned} X &= \text{Ergebnis des ersten Wurfs} \\ Y &= \text{Ergebnis des zweiten Wurfs,} \end{aligned}$$

so haben wir unabhängige Zufallsvariablen vorliegen. Werfen wir einen Würfel beliebig oft hintereinander und nennen X_n die Augenzahl des n-ten Wurfs, so sind

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

unabhängige Zufallsvariablen. Eine mathematisch präzise Definition des Begriffs der Unabhängigkeit, werden wir später noch kennen lernen.

9.1.2 Ereignisse

Jede Aussage, deren Wahrheitsgehalt durch die Werte einer oder mehrerer Zufallsvariablen bestimmt werden kann, heißt **Ereignis**. Wir sagen, dass ein Ereignis eintritt, wenn die entsprechende Aussage bei den tatsächlich beobachteten Werten der Zufallsvariablen wahr ist.

Beispiel 9.2 (i) Würfelwurf: X =Augenzahl. $A =$ „Augenzahl höchstens drei“. Wir schreiben dieses Ereignis formal auch als

$$A = \{X \leq 3\}.$$

(ii) Dreifacher Würfelwurf: X_1, X_2, X_3 Ergebnisse der drei Würfe.

$$\begin{aligned} A &:= \text{„Augensumme ist höchstens zehn“}, \\ B &:= \text{„Augensumme ist gerade“}, \\ C &:= \text{„Augenzahl des zweiten Wurfs ist vier“}, \\ D &:= \text{„Augenzahl des zweiten Wurfs ist gerade“}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &A = \{X_1 + X_2 + X_3 \leq 10\} \\ &B = \{X_1 + X_2 + X_3 \text{ durch 2 teilbar}\} = \big\{X_1 + X_2 + X_3 \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}\big\} \\ &C = \{X_2 = 4\} \\ &D = \{X_2 \in \{2, 4, 6\}\}. \end{aligned}$$

(iii) $X =$ Mittagstemperatur, $A =$ „Temperatur ist zwischen 290K und 295K“. Dann ist

$$A = \{290 \leq X \leq 295\} = \{X \in [290, 295]\}. \qquad \diamond$$

Für die logischen Verknüpfungen von Ereignissen führen wir die folgenden Schreibweisen ein:

$\emptyset$	Ereignis, das nie eintritt,
Ω	Ereignis, das immer eintritt,
$A \cap B$	A *und* B treten ein,
$A \cup B$	A *oder* B tritt ein (oder beide) [1]
$A \setminus B$	A tritt ein, aber nicht B
$A^c = \Omega \setminus A$	A tritt nicht ein (*Gegenereignis* zu A)
$A \subset B$	heißt, dass aus A stets B folgt.

Im obigen Beispiel (ii) bekommen wir etwa:

- $A \cap B = \{X_1 + X_2 + X_3 \in \{4, 6, 8, 10\}\}$,
- $A \cup B = \{X_1 + X_2 + X_3 \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18\}\}$,
- $A \cap C = \{X_2 = 4 \text{ und } (X_1 + X_2) \leq 6\}$,
- $B^c = \big\{X_1 + X_2 + X_3 \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}\big\}$,
- $C \setminus B = \big\{X_2 = 4 \text{ und } X_1 + X_3 \in \{3, 5, 7, 9, 11\}\big\}$,
- Es gilt $C \subset D$.

Das logische „und“ sowie das logische „oder“ lassen sich auch auf beliebig viele Mengen ausdehnen: Sind $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Ereignisse, so ist

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\
&= \text{ wenigstens eines der } A_1, \ldots, A_n \text{ tritt ein} \\
\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \\
&= \text{ wenigstens eines der } A_1, A_2, \ldots \text{ tritt ein} \\
\bigcap_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \\
&= \text{ jedes der } A_1, \ldots, A_n \text{ tritt ein} \\
\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \\
&= \text{ jedes der } A_1, A_2, \ldots \text{ tritt ein}
\end{aligned}$$

Das Gegenereignis zu $A \cup B$ ist das Ereignis, wo weder A noch B eintritt. Anders gesagt: A^c und B^c treten beide ein, oder formal

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Analog erhalten wir

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Dies ist der Spezialfall einer allgemeineren Regel:

[1] Mathematisch schließt der Begriff „oder“ stets die Möglichkeit ein, dass beide Aussagen wahr sind. Das ausschließende „oder“ wird stets gesondert benannt.

Satz 9.3 (De Morgan'sche Regeln) *Seien $A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c \qquad \textit{und} \qquad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)^c$$

sowie

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i)^c \qquad \textit{und} \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i)^c$$

Beispiel 9.4 Seien $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ die Ergebnisse von Würfelwürfen und

$$A_i = \{X_i = 6\} \quad \text{für } i = 1, \ldots, 10.$$

Dann ist $A_i^c = \{X_i \leq 5\}$ und

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{10} A_i &= \text{wenigstens eine Sechs in den zehn Würfen} \\ \left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right)^c &= \text{keine Sechs in den zehn Würfen} \\ &= \text{jeder der zehn Würfe ergibt höchstens „Fünf"} = \bigcap_{i=1}^{10} A_i^c. \end{aligned}$$ ◇

Gilt $A \cap B = \emptyset$, so ist das gemeinsame Eintreten von A und B unmöglich, beispielsweise, wenn $A = \{X = 6\}$ und $B = \{X = 5\}$ ist.

Gilt $A \cup B = \Omega$, so tritt immer wenigstens A oder B ein. Beispiel: beim Würfelwurf $A = \{X \leq 3\}$ und $B = \{X \geq 2\}$.

Gilt $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \Omega$, so tritt immer genau eines der Ereignisse A und B ein. Wir nennen A und B dann auch **Alternativen**. Wir nennen n Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ Alternativen, wenn $A_i \cap A_j = \emptyset$ für jede Wahl $i \neq j$, und falls $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

9.1.3 Wahrscheinlichkeit

Jedem Ereignis A wird eine Zahl $\mathbf{P}[A] \in [0,1]$ zugeordnet, die misst, wie „wahrscheinlich" das Eintreten von A ist. Wir sagen: $\mathbf{P}[A]$ ist die **Wahrscheinlichkeit** (dafür), dass A eintritt.

Beispiel 9.5 Seien $X_1, X_2, \ldots$ die Ergebnisse von (unabhängigen) Würfelwürfen und $A = \{X_1 = 6\}$. Aus Symmetriegründen ist $\mathbf{P}[A] = \frac{1}{6}$. Wie interpretieren wir aber „Wahrscheinlichkeit"? Sei hierzu

$$H_n = \text{Anzahl der Würfe } X_i \text{ mit } i \leq n \text{ und } X_i = 6$$

die Anzahl der Sechsen bis zum n-ten Wurf und

$$h_n = \frac{H_n}{n}$$

die *relative Häufigkeit* der Sechsen unter den ersten n Würfen. Bei einem fairen Würfel erwarten wir, dass jede Zahl etwa gleich häufig kommt, also

$$h_n \approx \frac{1}{6} = \mathbf{P}[A] \text{ für großes } n.$$

Hierdurch sind Wahrscheinlichkeiten in wiederholbaren Experimenten gut zu interpretieren. ◇

Definition 9.6 (Verteilung einer Zufallsvariable) *Ist X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{W}$, so heißt die Familie $\mathbf{P}_X := (\mathbf{P}[X \in A],\ A \subset \mathbb{W})$ aller*[2] *Wahrscheinlichkeiten für Werte, die X annehmen kann, die* ***Verteilung*** *von X.*

Nimmt X Werte in einer endlichen Menge $\mathbb{W}$ an, so ist in vielen (aber nicht in allen) Fällen aus Symmetriegründen jeder Wert $w \in \mathbb{W}$ gleich wahrscheinlich, nämlich $\mathbf{P}[X = w] = \frac{1}{\#\mathbb{W}}$. Es folgt dann für beliebiges $A \subset \mathbb{W}$

$$\mathbf{P}[X \in A] = \frac{\#A}{\#\mathbb{W}}.$$

Wir sagen dann, dass X **uniform verteilt** (oder **gleichverteilt**) ist auf $\mathbb{W}$. $\mathbf{P}_X$ heißt dann die Gleichverteilung (oder uniforme Verteilung) auf $\mathbb{W}$.

Beispiel 9.7 Wir betrachten ein Kartendeck mit 52 Karten.

$$\mathbb{W} = \{\heartsuit 2,\ \heartsuit 3, \ldots, \heartsuit A, \diamondsuit 2, \ldots, \clubsuit A\}.$$

$X =$ oberste Karte eines gemischten Stapels.

$$\mathbf{P}[X = w] = \frac{1}{52} \qquad \text{für jedes } w \in \mathbb{W}. \qquad \diamondsuit$$

Beispiel 9.8 Zweifacher Würfelwurf mit Ergebnissen X_1 und X_2. Setze $X = (X_1, X_2)$ als gemeinsames Ergebnis beider Würfe (unter Beachtung der Reihenfolge). Dann ist der Wertebereich

$$\mathbb{W} = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (6,6)\}.$$

Offenbar ist $\#\mathbb{W} = 36$ und X uniform auf $\mathbb{W}$ verteilt.

Sei $A =$ „Augensumme ist fünf“, also $A = \{X \in B\}$, wo

$$B = \big\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\big\}.$$

Dann ist

$$\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[X \in B] = \frac{\#B}{\#\mathbb{W}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Die Zufallsvariable $Y = X_1 + X_2$ ist allerdings nicht gleichverteilt auf dem Wertebereich $\mathbb{W}_Y =$

[2]Mathematisch ganz korrekt muss man hier solche Mengen A betrachten, für die $\mathbf{P}[X \in A]$ sinnvoll ist. Die Mengen, für die dies nicht zutrifft, sind jedoch pathologische Beispiele, die uns hier nicht interessieren. Praktisch ist für jede Menge $A \subset \mathbb{W}$, die man angeben kann, der Ausdruck $\mathbf{P}[X \in A]$ wohldefiniert.

$\{2, \ldots, 12\}$. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[Y=2] &= \mathbf{P}[X=(1,1)] = \frac{1}{36}\\
\mathbf{P}[Y=3] &= \mathbf{P}[X \in \{(1,2),(2,1)\}] = \frac{2}{36}\\
\mathbf{P}[Y=4] &= \mathbf{P}[X \in \{(1,3),(2,2),(3,1)\}] = \frac{3}{36}\\
&\vdots\\
\mathbf{P}[Y=7] &= \frac{6}{36}\\
\mathbf{P}[Y=8] &= \frac{5}{36}\\
&\vdots\\
\mathbf{P}[Y=12] &= \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

◇

Wir halten die folgenden Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten als Satz fest:

Satz 9.9 (Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten) *Es gelten:*

(i) $\mathbf{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbf{P}[\Omega] = 1$,

(ii) $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B]$, *falls* $A \cap B = \emptyset$,

(iii) $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B] - \mathbf{P}[A \cap B]$ *im allgemeinen Fall,*

(iv) $\mathbf{P}[A^c] = 1 - \mathbf{P}[A]$.

9.1.4 Wichtige Verteilungen

(i) Sei $\mathbb{W}$ endlich oder abzählbar (z.B. $\mathbb{W} = \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{W} = \mathbb{Z}$). Dann nennen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X den Wert w annimmt,

$$p_w = \mathbf{P}[X = w],$$

auch das Gewicht von w. Offenbar gelten $p_w \in [0,1]$, $\sum_{w \in \mathbb{W}} p_w = 1$ und

$$\mathbf{P}[X \in A] = \sum_{w \in A} p_w \qquad \text{für jedes } A \subset \mathbb{W}.$$

Beispiel: X = Summe zweier Würfelwürfe. $\mathbb{W} = \{2, \ldots, 12\}$, $p_2 = \frac{1}{36}$, $p_3 = \frac{2}{36}, \ldots, p_7 = \frac{6}{36}$, $p_8 = \frac{5}{36}, \ldots, p_{12} = \frac{1}{36}$.

(ii) Sei $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ z.B. ein Intervall). Wir nehmen an, dass für je zwei Zahlen $a < b$ gilt

$$\mathbf{P}[a \le X \le b] = \int_a^b f(x)\, dx,$$

wobei $f \geq 0$ integrierbar ist mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Wir sagen dann, dass die Verteilung von X stetig ist und die **Dichte** f hat. Man prüft leicht nach, dass in diesem Fall gilt

$$\mathbf{P}[a < X < b] = \mathbf{P}[a < X \leq b] = \mathbf{P}[a \leq X < b] = \mathbf{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

für alle $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

Die Verteilung heißt (Standard-)**Normalverteilung** und wird mit $\mathcal{N}_{0,1}$ bezeichnet. Wir schreiben oft kurz $X \sim \mathcal{N}_{0,1}$, wenn X die Verteilung $\mathcal{N}_{0,1}$ hat.

(iii) $\mathbb{W} = \mathbb{R}$. Wenn wir nicht annehmen, dass die Verteilung eine Dichte hat, so können wir immer noch die Funktion

$$F(x) := \mathbf{P}[X \leq x], \qquad x \in \mathbb{R}$$

definieren. F heißt **Verteilungsfunktion** von X. F hat folgende Eigenschaften:

- F legt die Verteilung von X eindeutig fest,
- F ist monoton wachsend,
- $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
- Für jedes X gilt: F ist genau dann unstetig in x, wenn $\mathbf{P}[X = x] > 0$ ist. In diesem Fall ist $\mathbf{P}[X = x]$ die Höhe des Sprunges von F in x.
- Hat $\mathbf{P}_X$ die Dichte f, so ist F differenzierbar mit Ableitung $F'(x) = f(x)$, und es gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 9.10 Eine der wichtigsten diskreten Verteilungen auf $\mathbb{N}_0$ ist die **Binomialverteilung**, die wir mit $b_{n,p}$ bezeichnen. Dabei sind $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ Parameter. Es ist für $k = 0, \ldots, n$

$$\mathbf{P}[X = k] = b_{n,p}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

wobei (siehe Beispiel 2.18(ii) auf Seite 24)

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}$$

der Binomialkoeffizient von n und k ist (sprich: „n über k“).

Interpretation: In einer Population der Größe N hat ein gewisses Merkmal, sagen wir A, einen Anteil von p. Ziehen wir n Individuen nacheinander (und mit Zurücklegen) und nennen X die Gesamtzahl der gezogenen Individuen mit Merkmal A, so ist $X \sim b_{n,p}$. ◇

Beispiel 9.11 Im vorangehenden Beispiel sei $K = pN$ die Gesamtzahl der Individuen mit dem Merkmal. Wir wollen das gleiche Experiment durchführen, jedoch die Individuen nach der Entnahme nicht wieder zurücklegen (um Doppelzählungen zu vermeiden). Wir nennen wieder X die Zahl der registrierten Individuen mit dem Merkmal. Diesmal erhalten wir die Formel

$$\mathbf{P}[X = k] = \mathrm{Hyp}_{K,N-K,n}(k) := \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Wir nennen $\mathrm{Hyp}_{K,N-K,n}$ die **hypergeometrische Verteilung** mit Parametern K, $N-K$ und n.

Anwendung. Wie groß ist beim Skat die Wahrscheinlichkeit, dass der Geber genau drei Asse erhält? $N = 32$, $K = 4$, $n = 10$, also ist die Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{Hyp}_{4,28,10}(3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{7}}{\binom{32}{10}} = \ldots = \frac{66}{899}.$$

Für große N (aber konstanten Anteil $p = K/N$) gilt

$$\mathrm{Hyp}_{K,N-K,n}(k) \overset{N\to\infty (K/N\to p)}{\longrightarrow} b_{n,p}(k).$$

Intuitiv ist das klar: Wenn die Population groß genug ist, sollte es keine Rolle spielen, ob wir die Individuen zurücklegen oder nicht. Die Chance, eines zweimal zu zählen ist sehr gering.

Zahlenbeispiel: $N = 10\,000$, $K = 3\,000$, $p = 0.3$, $n = 50$, $k = 14$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Hyp}_{3000,7000,50}(14) &\approx 0.119207 \\ b_{50,0.3}(14) &\approx 0.118948 \end{aligned} \qquad \diamond$$

Beispiel 9.12 (Seltenes Merkmal) Wenn p *sehr* klein ist, muss n groß gewählt werden, damit wir in der Stichprobe überhaupt Individuen mit dem Merkmal A finden. Die Idee ist, n von der Größenordnung $1/p$ zu wählen. Genauer wollen wir ein $\lambda > 0$ wählen und annehmen, dass $n \approx \lambda/p$. Dann sollten im Mittel $n \cdot p = \lambda$ Individuen mit Merkmal in der Stichprobe sein. Tatsächlich kann man zeigen, dass für $p_n = \lambda/n$ und großes n gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,p_n}(k) = \mathrm{Poi}_\lambda(k) := e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{9.1}$$

Die Verteilung Poi_λ heißt **Poisson Verteilung**[3] mit Parameter λ.

In den Jahren von 1982 bis 1992 gab es in Deutschland (West) im Mittel 7,7 Tote durch Blitzschlag. Man kann die Anzahl der Toten in einem Jahr als Zufallsexperiment auffassen, wo in einer sehr großen Population $N = 60\,000\,000$ mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit $p = \frac{7.7}{60\,000\,000}$ ein einzelnes Individuum den Tod durch Blitzschlag erleidet. In der obigen Terminologie ist $n = N$, da wir annehmen, dass alle Blitztoten gemeldet werden. Für die Anzahl der Blitztoten in kommenden Jahr ergibt sich also die Poisson-Verteilung $\mathrm{Poi}_{7.7}$ mit Parameter $\lambda = 7.7$. In den Jahren 1998 und 1999 wurden Vier bzw. Zehn Blitztote registriert. Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit für solche Ereignisse?

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X = 4] &= \mathrm{Poi}_{7.7}(4) = e^{-7.7}\frac{7.7^4}{4!} = 0.06633 = 6.633\% \\ \mathbf{P}[X = 10] &= \mathrm{Poi}_{7.7}(10) = e^{-7.7}\frac{7.7^{10}}{10!} = 0.09142 = 9.142\%. \end{aligned} \qquad \diamond$$

9.1.5 Urnenmodelle

Zur Berechnung der Gleichverteilung auf einer endlichen Menge $\mathbb{W}$ ist es nötig, dass wir $\#\mathbb{W}$ kennen. Wenn $\mathbb{W}$ die Gestalt $\{1, \ldots, n\}$ oder $\{1, \ldots, n\}^k$ hat, ist dies simpel (n, bzw. n^k). Bei

[3] Nach Siméon Poisson, französischer Mathematiker, 1781–1840

komplizierterem $\mathbb{W}$ muss man etwas arbeiten, um $\#\mathbb{W}$ zu bestimmen. Wir werden hier vier wichtige Situationen betrachten, die immer wieder auftreten: Aus einer Urne mit N Kugeln (von 1 bis N nummeriert) werden n Kugeln zufällig gezogen.

(i) mit Zurücklegen / mit Beachtung der Reihenfolge
Hier ist

$$\mathbb{W} = \{1, \ldots, N\}^n = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{1, \ldots, N\} \text{ für jedes } i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Tatsächlich ist jeder Vektor $(x_1, \ldots, x_n)$ ein mögliches Ergebnis des sukzessiven Ziehens, und jede Kombination sollte aus Symmetriegründen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Man sieht leicht ein, dass es für x_1 genau N Möglichkeiten gibt, für x_2 genau N Möglichkeiten usw., also ist $\#\mathbb{W} = N^n$.

(ii) ohne Zurücklegen / mit Beachtung der Reihenfolge
Jetzt ziehen wir die Kugeln wie in (i), jedoch werden einmal gezogene Kugeln nicht wieder in die Urne zurückgelegt. Damit ist klar $x_2 \neq x_1$, und allgemeiner $x_i \neq x_j$ für jede Wahl $i \neq j$. Wir erhalten

$$\mathbb{W} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \{1, \ldots, N\} \text{ und } x_i \neq x_j \text{ für alle } i \neq j\big\}.$$

In diesem Fall ist $\#\mathbb{W} = \dfrac{N!}{(N-n)!}$.

(iii) ohne Zurücklegen / ohne Beachtung der Reihenfolge
Wie in (ii), jedoch wollen wir diesmal die Reihenfolge der gezogenen Kugeln unbeachtet lassen. Eine Möglichkeit, die tatsächliche Reihenfolge zu vergessen, ist, die Kugeln, wie bei der Bekanntgabe der Lottozahlen, der Größe nach zu sortieren. Wir erhalten also

$$\mathbb{W} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : 1 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq N\big\}.$$

Es ist hier $\#\mathbb{W} = \dbinom{N}{n}$. Beim Lotto „6 aus 49“ ist etwa die Anzahl der Möglichkeiten $\dbinom{49}{6} = 13\,983\,816$, und damit die Chance auf Sechs Richtige $\dfrac{1}{13\,983\,816}$.

(iv) mit Zurücklegen / ohne Beachtung der Reihenfolge
Wie in (iii), jedoch werden die Kugeln jeweils nach dem Ziehen wieder in die Urne gelegt. Daher sind mehrfache Nennungen möglich, und wir erhalten

$$\mathbb{W} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : 1 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq N\big\}.$$

In diesem Fall muss man ein bisschen kniffeln, um $\#\mathbb{W}$ zu bestimmen. Das Ergebnis ist

$$\#\mathbb{W} = \binom{N+n-1}{n}.$$

9.2 Unabhängigkeit

Sind $X_1, X_2, \ldots$ die Ergebnisse von unabhängigen Zufallsexperimenten (also solchen, deren Ausgänge die anderen Zufallsexperimente nicht beeinflussen), so gilt

- Für zwei Zufallsvariablen: $\mathbf{P}[X_1 \in A_1 \text{ und } X_2 \in A_2] = \mathbf{P}[X_1 \in A_1] \cdot \mathbf{P}[X_2 \in A_2]$ für je zwei mögliche Wertemengen A_1 und A_2.

- Für drei Zufallsvariablen: $\mathbf{P}[X_1 \in A_1 \text{ und } X_2 \in A_2 \text{ und } X_3 \in A_3] = \mathbf{P}[X_1 \in A_1] \cdot \mathbf{P}[X_2 \in A_2] \cdot \mathbf{P}[X_3 \in A_3]$ für je drei mögliche Wertemengen A_1, A_2 und A_3.

- Für n Zufallsvariablen:

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \in A_i\}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}[X_i \in A_i].$$

Für jede endliche Auswahl $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ von Zufallsvariablen $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ und jede Auswahl von Wertemengen $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ gilt

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{l=1}^{k}\{X_{i_l} \in A_{i_l}\}\right] = \prod_{l=1}^{k} \mathbf{P}[X_{i_l} \in A_{i_l}].$$

Wir nehmen dies als mathematische Definition von Unabhängigkeit.

Definition 9.13 (Unabhängigkeit) *(i) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen **unabhängig**, wenn für jedes $k \leq n$ und jede Wahl $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ und jede Wahl von $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ die* Produktformel *gilt:*

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{l=1}^{k}\{X_{i_l} \in A_{i_l}\}\right] = \prod_{l=1}^{k} \mathbf{P}[X_{i_l} \in A_{i_l}]. \tag{9.2}$$

*(ii) Die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n$ heißen unabhängig, wenn für jedes $k \leq n$ und jede Wahl $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ die **Produktformel** gilt:*

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{l=1}^{k} B_{i_l}\right] = \prod_{l=1}^{k} \mathbf{P}[B_{i_l}]. \tag{9.3}$$

Speziell sind zwei Ereignisse A und B genau dann unabhängig, wenn $\mathbf{P}[A \cap B] = \mathbf{P}[A] \cdot \mathbf{P}[B]$.

Beispiel 9.14 (Warten auf den ersten Erfolg) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen, die uniform auf $\mathbb{W} = \{1, \ldots, 6\}$ verteilt sind. Dann modellieren diese Zufallsvariablen die Ergebnisse von beliebig oft wiederholten Würfen eines (fairen) Würfels. Wie lange muss man warten, bis die erste „Sechs" fällt?

Sei T = Wartezeit auf die erste „Sechs". Wir zählen den ersten Wurf noch nicht als Warten und setzen

$$\begin{array}{ll} T = 0, & \text{falls } X_1 = 6, \\ T = 1, & \text{falls } X_1 \neq 6 \text{ und } X_2 = 6, \\ T = 2, & \text{falls } X_1 \neq 6,\ X_2 \neq 6 \text{ und } X_3 = 6, \\ T = 3, & \text{falls } X_1 \neq 6,\ X_2 \neq 6,\ X_3 \neq 6 \text{ und } X_4 = 6, \\ \vdots & \end{array}$$

Wir erhalten in den einzelnen Fällen die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[T=0] &= \mathbf{P}[X_1=6] = \frac{1}{6},\\
\mathbf{P}[T=1] &= \mathbf{P}[X_1\neq 6 \text{ und } X_2=6]\\
&= \mathbf{P}[\{X_1\neq 6\}\cap\{X_2=6\}]\\
&= \mathbf{P}[X_1\neq 6]\cdot\mathbf{P}[X_2=6] = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36},\\
\mathbf{P}[T=2] &= \mathbf{P}[\{X_1\neq 6\}\cap\{X_2\neq 6\}\cap\{X_3=6\}]\\
&= \mathbf{P}[X_1\neq 6]\cdot\mathbf{P}[X_2\neq 6]\cdot\mathbf{P}[X_3=6] = \left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6} = \frac{25}{216},\\
\mathbf{P}[T=3] &= \mathbf{P}[\{X_1\neq 6\}\cap\{X_2\neq 6\}\cap\{X_3\neq 6\}\cap\{X_4=6\}]\\
&= \mathbf{P}[X_1\neq 6]\cdot\mathbf{P}[X_2\neq 6]\cdot\mathbf{P}[X_3\neq 6]\cdot\mathbf{P}[X_4=6] = \left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6} = \frac{125}{1296},\\
&\vdots\\
\mathbf{P}[T=n] &= \mathbf{P}[X_i\neq 6 \text{ für alle } i\leq n \text{ und } X_{n+1}=6]\\
&= \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{P}[X_i\neq 6]\right)\cdot\mathbf{P}[X_{n+1}=6] = \left(\frac{5}{6}\right)^n\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Etwas allgemeiner können wir auf den ersten Erfolg bei unabhängigen Zufallsexperimenten warten, wo die Erfolgswahrscheinlichkeit $p\in(0,1)$ ist (statt hier $p=\frac{1}{6}$ für die „Sechs"). Seien hierzu $Y_1,Y_2,\ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{W}=\{0,1\}$ mit $\mathbf{P}[Y_i=1]=p$ und $\mathbf{P}[Y_i=0]=1-p$ für jedes $i=1,2\ldots$ Wir interpretieren das Auftreten einer 1 als „Erfolg" und nennen p daher auch die Erfolgswahrscheinlichkeit. Wie lange müssen wir warten, bis die erste 1 (der erste Erfolg) auftritt?

Sei T diese Wartezeit, also

$$T=n \text{ genau dann, wenn } Y_1=Y_2=\ldots=Y_{n-1}=0 \text{ und } Y_n=1.$$

Wie oben gezeigt, ist

$$\mathbf{P}[T=n] = \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{P}[Y_i=0]\right)\cdot\mathbf{P}[Y_{n+1}=p] = (1-p)^n\,p.$$

Wir nennen die entsprechende Verteilung γ_p auf $\mathbb{W}=\mathbb{N}_0$ mit

$$\gamma_p(k) = (1-p)^k\,p, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

die **geometrische Verteilung** mit (Erfolgs-)parameter p.

Obacht: Manche Autoren nennen die um Eins nach rechts verschobene Verteilung auf N, also die Verteilung von $T+1$, die geometrische Verteilung. ◇

Bemerkung 9.15 Seien A und B unabhängige Ereignisse. Dann ist

$$\mathbf{P}[A^c\cap B]+\mathbf{P}[A\cap B] = \mathbf{P}[(A\cup A^c)\cap B] = \mathbf{P}[B], \text{ weil } (A^c\cap B)\cap(A\cap B)=\emptyset.$$

Es folgt

$$\mathbf{P}[A^c\cap B] = \mathbf{P}[B]-\mathbf{P}[A\cap B] = \mathbf{P}[B]-\mathbf{P}[A]\,\mathbf{P}[B] = \mathbf{P}[B](1-\mathbf{P}[A]) = \mathbf{P}[B]\,\mathbf{P}[A^c].$$

Also sind A und B genau dann unabhängig, wenn A^c und B unabhängig sind.

9.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten / Bayes'sche Formel

Beispiel 9.16 Wir werfen einen fairen sechsseitigen Würfel, nennen das Ergebnis X und betrachten die Ereignisse

$$A := \{X \leq 3\} = \text{„Augenzahl drei oder kleiner"},$$
$$B := \{X \in \{2,4,6\}\} = \text{„Augenzahl gerade"}.$$

Offenbar ist $\mathbf{P}[A] = \frac{1}{2}$ und $\mathbf{P}[B] = \frac{1}{2}$. Wie groß ist aber die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn wir schon wissen, dass A eintritt?

Wenn A eintritt, nimmt X einen der Werte $1, 2, 3$ an. Jeder der Werte hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Wenn wir also schon wissen, dass A eintritt, haben wir ein Zufallsexperiment mit Gleichverteilung auf den drei noch möglichen Ergebnissen. Nur einer der Werte (nämlich die 2) liefert B, also ist die gesucht Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. ◇

Durch das Beispiel motiviert treffen wir die folgende Definition.

Definition 9.17 (Bedingte Wahrscheinlichkeit) *Seien A und B Ereignisse. Wir definieren die* ***bedingte Wahrscheinlichkeit*** *für das Eintreten von B gegeben, dass A eintritt durch*

$$\mathbf{P}[B\,|\,A] = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{P}[A \cap B]}{\mathbf{P}[A]}, & \text{falls } \mathbf{P}[A] > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{9.4}$$

Im Beispiel 9.16 ist $A \cap B = \{X = 2\}$, also $\mathbf{P}[A \cap B] = \frac{1}{6}$, und $\mathbf{P}[A] = \frac{1}{2}$.. Wir erhalten also

$$\mathbf{P}[B\,|\,A] = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Bemerkung 9.18 Die Festsetzung in (9.4) für den Fall $\mathbf{P}[A] = 0$ ist völlig willkürlich. In der Literatur findet man gelegentlich auch andere Festsetzungen.

Beispiel 9.19 In Deutschland gibt es etwa 80 000 000 Einwohner. Pro Jahr treten 40 000 Lungekrebserkrankungen neu auf. Von der Erkrankten sind 36 000 Raucher. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die nächste in einem Krankenhaus eingelieferte Person mit Lungenkrebs Raucher ist?

Wir wählen zufällig eine Person in Deutschland aus und setzen

$$A := \text{„in diesem Jahr erstmals an Lungenkrebs erkrankt"},$$
$$B := \text{„Raucher"}$$

Wir erhalten $\mathbf{P}[A] = \frac{40\,000}{80\,000\,000} = 0.0005$ und $\mathbf{P}[A \cap B] = \frac{36\,000}{80\,000\,000} = 0.00045$. Es ist also

$$p = \mathbf{P}[B\,|\,A] = \frac{0.00045}{0.0005} = 0.9 = 90\%.$$ ◇

Problem: Wie kann man $\mathbf{P}[B]$ berechnen, wenn nur $\mathbf{P}[B\,|\,A]$, $\mathbf{P}[B\,|\,A^c]$ und $\mathbf{P}[A]$ bekannt sind? Offenbar ist

$$\mathbf{P}[B] = \mathbf{P}[B \cap A] + \mathbf{P}[B \cap A^c] = \mathbf{P}[B\,|\,A] \cdot \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B\,|\,A^c] \cdot \mathbf{P}[A^c].$$

Etwas allgemeiner können wir den Fall betrachten, wo wir statt *zwei* Alternativen (nämlich A oder A^c) n Alternativen $A_1, \ldots, A_n$ vorliegen haben, also Ereignisse mit den Eigenschaften: $A_i \cap A_j = \emptyset$, falls $i \neq j$, und $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$. In dieser Situation gilt der folgende Satz:

Satz 9.20 (Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit)

$$\mathbf{P}[B] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}[B \,|\, A_i]\, \mathbf{P}[A_i]. \tag{9.5}$$

Wir nutzen die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit, um aus den Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}[B \,|\, A_i]$ und $\mathbf{P}[A_i]$, $i = 1, \ldots, n$ nun die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}[A_k \,|\, B]$ auszurechnen (für gegebenes $k = 1, \ldots, n$).

Satz 9.21 (Bayes'sche Formel) *Seien $A_1, \ldots, A_n$ Alternativen und B ein Ereignis. Dann gilt*

$$\mathbf{P}[A_k \,|\, B] = \frac{\mathbf{P}[B \,|\, A_k]\, \mathbf{P}[A_k]}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}[B \,|\, A_i]\, \mathbf{P}[A_i]}. \tag{9.6}$$

Speziell ist $\mathbf{P}[A \,|\, B] = \dfrac{\mathbf{P}[B \,|\, A]\, \mathbf{P}[A]}{\mathbf{P}[B \,|\, A]\, \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B \,|\, A^c]\, \mathbf{P}[A^c]}.$

Beweis Es gilt

$$\mathbf{P}[A_k \,|\, B] = \frac{\mathbf{P}[A_k \cap B]}{\mathbf{P}[B]} = \frac{\mathbf{P}[B \,|\, A_k]\, \mathbf{P}[A_k]}{\mathbf{P}[B]}.$$

Setze jetzt (9.5) für $\mathbf{P}[B]$ ein. □

Beispiel 9.22 Bei der Produktion gewisser elektronischer Bauteile sind 2% der Ware defekt. Ein schnelles Testverfahren erkennt ein defektes Bauteil mit Wahrscheinlichkeit 95%, meldet aber bei 10% der intakten Bauteile falschen Alarm.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein als defekt erkanntes Bauteil wirklich defekt?

Wir machen die folgende Modellierung. Seien

$$A := \{\text{Bauteil ist defekt}\}$$
$$B := \{\text{Bauteil wird als defekt deklariert}\}$$

sowie

$$\mathbf{P}[A] = 0.02, \qquad \mathbf{P}[A^c] = 0.98,$$
$$\mathbf{P}[B|A] = 0.95, \qquad \mathbf{P}[B|A^c] = 0.1.$$

Die Bayes'sche Formel liefert

$$\mathbf{P}[A \,|\, B] = \frac{\mathbf{P}[B \,|\, A]\, \mathbf{P}[A]}{\mathbf{P}[B \,|\, A]\, \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B \,|\, A^c]\, \mathbf{P}[A^c]}$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.02}{0.95 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98} = \frac{19}{117} \approx 0.162.$$

Andererseits ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein nicht erkanntes Bauteil dennoch defekt ist

$$\mathbf{P}[A \,|\, B^c] = \frac{0.05 \cdot 0.02}{0.05 \cdot 0.02 + 0.9 \cdot 0.98} = \frac{1}{883} \approx 0.00113.$$ ◇

9.4 Kenngrößen von Verteilungen

Wir wollen wesentliche Eigenschaften von Verteilungen reeller Zufallsvariablen durch Angabe einiger weniger Zahlen angeben. Dabei unterscheiden wir zwei Kategorien von Kenngrößen:

- **Lagemaße** geben an, wo die Verteilung konzentriert ist,
- **Streumaße** geben an, wie groß die Variabilität der Werte ist.

Im Folgenden ist X stets eine reelle Zufallsvariable mit Verteilung $\mathbf{P}_X$.

9.4.1 Lagemaße

Der **Median** m ist das einfachste Lagemaß. Es ist diejenige Zahl, sodass X mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Werte kleiner als m annimmt und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Werte größer als m. In gewisser Weise ist der Median also die Mitte der Verteilung von X. Ganz genau lässt sich dies aber nicht in allen Fällen einrichten:

(i) Sei X gleichverteilt auf $\mathbb{W} = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann hat jede Zahl zwischen 2 und 3 die Eigenschaft, die wir oben für den Median gefordert haben. Der Median muss also nicht eindeutig sein.

(ii) Sei X gleichverteilt auf $\mathbb{W} = \{1, 2, 3\}$. Dann ist klar 2 die Mitte der Verteilung. Allerdings ist $\mathbf{P}[X \leq 2] = \frac{2}{3}$ und nicht $\frac{1}{2}$. Genauso ist $\mathbf{P}[X \geq 2] = \frac{2}{3}$ und nicht $\frac{1}{2}$.

Das Problem (ii) können wir beheben, wenn wir die Definition des Median etwas vorsichtiger fassen. Das Problem (i) bleibt hingegen. Im Allgemeinen gibt es ein ganzes Intervall von Zahlen (hier $[2, 3]$), die als Median in Frage kommen. Für Verteilungen mit Dichte f, die überall echt positiv ist, ist der Median jedoch eindeutig.

Definition 9.23 (Median) *Wir nennen jede Zahl $m \in \mathbb{R}$ mit*

$$\mathbf{P}[X \leq m] \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[X \geq m] \geq \frac{1}{2}$$

*einen **Median** von $\mathbf{P}_X$.*

Etwas allgemeiner können wir diejenige Stelle m_α (für $\alpha \in (0, 1)$ betrachten, für die der Anteil α der Verteilung links von m_α liegt und der Anteil $1 - \alpha$ rechts von m_α.

Definition 9.24 (Quantile) *Sei $\alpha \in (0, 1)$. Jede Zahl $m_\alpha \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft*

$$\mathbf{P}[X \leq m_\alpha] \geq \alpha \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[X \geq m_\alpha] \geq 1 - \alpha$$

*heißt ein α–**Quantil** von $\mathbf{P}_X$. Speziell ist $m_{1/2}$ ein Median.*

*Manchmal wird ein $(1 - \alpha)$–Quantil auch α–**Fraktil** genannt.*

Beispiel 9.25 Betrachte die Binomialverteilung $b_{20,0.6}$. Wir suchen die α-Quantile für $\alpha = 0.05$, $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 0.9$. Dazu berechnen wir die Tabelle der Verteilungsfunktion

$$F(k) := \sum_{i=0}^{k} b_{20,0.6}(i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{20}{i} 0.6^i \cdot 0.4^{20-i}$$

mit dem Taschenrechner (oder Computer):

k	$F(k)$	k	$F(k)$
0	$1.096 \cdot 10^{-8}$		
1	$3.408 \cdot 10^{-7}$	11	0.4044
2	$5.041 \cdot 10^{-6}$	12	0.5841
3	$4.734 \cdot 10^{-5}$	13	0.75
4	$3.170 \cdot 10^{-4}$	14	0.8744
5	$1.612 \cdot 10^{-3}$	15	0.949
6	0.0064	16	0.984
7	0.0210	17	0.9964
8	0.0565	18	0.9995
9	0.1275	19	0.99996
10	0.2447	20	1

Wir lesen ab: $m_{0.05} = 8$, $m_{1/2} = 12$ und $m_{0.9} = 15$. ◇

Beispiel 9.26 Wir betrachten die Normalverteilung $\mathcal{N}_{0,1}$ mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Um die Quantile zu berechnen, brauchen wir zunächst eine Tabelle der Werte für die Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt. \tag{9.7}$$

Siehe hierzu die Tabelle in Anhang A.1. Mit Hilfe der Tabelle bestimmen wir:

α	m_α
0.001	-3.090
0.005	-2.576
0.01	-2.326
0.025	-1.960
0.05	-1.645
0.1	-1.282
0.5	0.000
0.9	1.282
0.95	1.645
0.975	1.960
0.99	2.326
0.995	2.576
0.999	3.090

Es gilt also z.B. $\mathbf{P}[X \geq 1.96] = 1 - 0.975 = 0.025 = 2.5\%$. Andererseits ist aus Symmetriegründen $\mathbf{P}[X \leq -1.96] = \mathbf{P}[X \geq 1.96]$. Wir erhalten also

$$\mathbf{P}[|X| \geq 1.96] = \mathbf{P}[X \leq -1.96] + \mathbf{P}[X \geq 1.96] = 2\,\mathbf{P}[X \leq -1.96] = 5\%.$$

Analog erhalten wir etwa

$$\mathbf{P}[|X| \geq 2.576] = 1\%.$$

◇

Änderung von Dichte und Quantilen unter Verschiebung und Streckung

Sei X eine reelle Zufallsvariable mit Dichte f und Verteilungsfunktion F. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$. Wir definieren eine neue Zufallsvariable Y, indem wir die Werte von X um den Faktor b strecken und dann um a verschieben:

$$Y := a + bX.$$

Wie können wir die Verteilungsfunktion G und die Dichte g von Y bestimmen?

Es ist

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbf{P}[Y \leq y] = \mathbf{P}[a + bX \leq y] \\ &= \mathbf{P}[bX \leq y - a] \\ &= \mathbf{P}[X \leq (y-a)/b] = F\left(\frac{y-a}{b}\right). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$F(x) = G(a + bx).$$

Die Dichte erhalten wir durch Ableiten von G mit der Kettenregel

$$g(y) \;=\; G'(y) \;=\; \frac{1}{b}\,F'\left(\frac{y-a}{b}\right) \;=\; \frac{1}{b}\,f\left(\frac{y-a}{b}\right). \tag{9.8}$$

Es folgt für das α-Quantil m_α^Y von Y:

$$m_\alpha^Y = a + b\,m_\alpha^X.$$

Beispiel 9.27 Es sei X standard-normalverteilt, also $X \sim \mathcal{N}_{0,1}$ mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$. Dann hat $Y = a + bX$ die Dichte

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,b^2}}\,\exp\left(-\frac{(y-a)^2}{2b^2}\right).$$

Wir nennen die Verteilung mit dieser Dichte die **Normalverteilung** mit Parametern a und b^2 und schreiben $\mathcal{N}_{a,b^2}$.

Ist $Y \sim \mathcal{N}_{20,3}$ (das heißt, $a = 20$ und $b = \sqrt{3}$), so ist etwa der Median $m_{1/2} = 20$ und das 10%-Quantil $m_{0.1} = 20 + \sqrt{3} \cdot (-1.282) = 17.78$ (vergleiche Tabelle in Beispiel 9.26). ◇

Erwartungswert

Das zweite wichtige Lagemaß ist der **Erwartungswert** einer Zufallsvariablen.

Definition 9.28 (Erwartungswert) *Sei X eine Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$.*

(i) Ist $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ diskret, so definieren wir den Erwartungswert von X durch

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{w \in \mathbb{W}} w\, \mathbf{P}[X = w].$$

(ii) Ist $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (möglicherweise ganz $\mathbb{R}$), und hat X die Dichte f, so setzen wir

$$\mathbf{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx.$$

Wir nehmen dabei jeweils an, dass die Summe (mit evtl. unendlich vielen Summanden) endlich ist, bzw. dass das Integral existiert (und endlich ist). In diesem Fall sagen wir, dass der Erwartungswert von X existiert.

Beispiel 9.29 (i) Binomialverteilung: $X \sim b_{n,p}$. Dann ist (mit der Substitution $l = k - 1$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \, p^{k-1} \, (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!((n-1)-l)!} \, p^l \, (1-p)^{(n-1)-l} \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} b_{n-1,p}(l) = np,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass sich die Gewichte der Wahrscheinlichkeitsverteilung $b_{n-1,p}$ zu 1 summieren.

(ii) Poisson-Verteilung: $X \sim \mathrm{Poi}_\lambda$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot k \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} \\
&= \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{Poi}_\lambda(l) = \lambda,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass sich die Gewichte der Wahrscheinlichkeitsverteilung Poi_λ zu 1 summieren.

(iii) Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}_{0,1}$, Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} x\, e^{-x^2/2}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x\, e^{-x^2/2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-e^{-x^2/2})\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-e^{-x^2/2})\Big|_{0}^{+\infty} = -1+1=0.\end{aligned}$$

(iv) Exponentialverteilung. Dichte $f(x) = \vartheta\, e^{-\vartheta x}$ für $x \geq 0$, wo $\vartheta > 0$ ein Parameter ist. Dann ist (siehe (7.7) in Beispiel 7.21)

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x\vartheta\, e^{-\vartheta x}\, dx = \frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty y\, e^{-y}\, dy = \frac{1}{\vartheta}.$$

(v) Cauchy-Verteilung. X mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Eine Stammfunktion von $\frac{x}{1+x^2}$ ist $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$. Also ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}\, dx + \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\log(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\log(1+x^2)\Big|_{0}^{\infty} = -\infty+\infty.\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Der Erwartungswert ist für die Cauchyverteilung nicht definiert. ◇

Satz 9.30 (Linearität des Erwartungswertes) *Es seien X und Y reelle Zufallsvariablen mit Erwartungswert sowie $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

(i) $\mathbf{E}[a + bX] = a + b\,\mathbf{E}[X]$,

(ii) $\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$.

Die Formel in (i) gilt ähnlich für den Median und die anderen Quantile. Eine vergleichbare Aussage zu (ii) gibt es aber für den Median nicht. Allein schon durch diese Additivitätseigenschaft ist der Erwartungswert in vielen Situationen nützlicher als der Median. Wir werden später noch sehen, dass der Erwartungswert das *typische* Verhalten von Summen von Zufallsvariablen besser beschreibt als der Median.

Beispiel 9.31 Sei $Y \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ für gewisse Zahlen $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Dann ist $Y = \mu + \sigma X$, wo $X \sim \mathcal{N}_{0,1}$ ist. Also ist

$$\mathbf{E}[Y] = \mu + \sigma\,\mathbf{E}[X] = \mu.$$

Übung: Man zeige diese Aussage direkt mit Hilfe der Dichteformel für $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$. ◇

Beispiel 9.32 Die Binomialverteilung $b_{n,p}$ erhalten wir als Verteilung einer Zufallsvariable X, wenn X die Anzahl von Erfolgen n unabhängiger Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit p ist, also

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

wo $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig sind und $\mathbf{P}[Y_i = 1] = p$, $\mathbf{P}[Y_i = 0] = 1 - p$. Offenbar ist $\mathbf{E}[Y_i] = p$. Aus dem Satz folgt nun

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[Y_i] = np.$$

Diese Aussage hatten wir in Beispiel 9.29(i) noch viel mühsamer gezeigt. ◇

9.4.2 Streuung

Ein einfaches Maß dafür, wie weit die Werte einer Zufallsvariablen streuen, ist die Varianz, die wir als mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert definieren.

Definition 9.33 *Sei X eine reelle Zufallsvariable (mit Wertebereich $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$) mit endlichem Erwartungswert. Dann definieren wir die* ***Varianz*** *von X durch*

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Konkret ist dies für $\mathbb{W}$ diskret:

$$\mathrm{Var}[X] = \left(\sum_{w \in \mathbb{W}} w^2\, \mathbf{P}[X = w]\right) - \left(\sum_{w \in \mathbb{W}} w\, \mathbf{P}[X = w]\right)^2.$$

Für $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und X mit Dichte f:

$$\mathrm{Var}[X] = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx\right) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx\right)^2.$$

Wir nennen $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ die ***Streuung*** *oder Standardabweichung von X.*

Beispiel 9.34 (i) **Binomialverteilung.** $X \sim b_{n,p}$. Dann ist

$$\mathbf{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \ldots = np(1-p) + (np)^2.$$

Die Rechnung verläuft dabei ähnlich wie für den Erwartungswert. Wir wissen schon, dass $\mathbf{E}[X] = np$ ist, also ist

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = np(1-p) \qquad \text{und} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}\,.$$

(ii) **Poisson-Verteilung.** Sei $X \sim \mathrm{Poi}_\lambda$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}_{=\mathbf{E}[X]=\lambda} \\
&= \lambda + \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\
&= \lambda + \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} \\
&= \lambda + \lambda^2.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

und
$$\sigma = \sqrt{\lambda}\,.$$

(iii) **Normalverteilung.** $X \sim \mathcal{N}_{0,1}$, Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Dann ist mit partieller Integration
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X^2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(x\, e^{-x^2/2} \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-x^2/2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx}_{=1}.
\end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} = 0$, weil x langsamer nach ∞ geht als $e^{x^2}/2$ (siehe Faustregel 2.10 auf Seite 20). Analog ist $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} = 0$. Daher ist $\left(-xe^{-x^2/2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$, und wir erhalten $\mathbf{E}[X^2] = 1$. Wegen $\mathbf{E}[X] = 0$ folgt
$$\operatorname{Var}[X] = 1.$$

(iv) **Exponentialverteilung.** $X \sim \exp_\vartheta$ mit Dichte $f(x) = \vartheta\, e^{-\vartheta x}$. Dann ist (mit der Substitution $y = \vartheta x$ und unter Benutzung von (7.7) in Beispiel 7.21)
$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2\, \vartheta\, e^{-\vartheta x}\, dx = \frac{1}{\vartheta^2} \int_0^{\infty} y^2\, e^{-y}\, dy = \frac{2}{\vartheta^2}.$$

Wegen $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\vartheta}$ folgt
$$\operatorname{Var}[X] = \frac{2}{\vartheta^2} - \frac{1}{\vartheta^2} = \frac{1}{\vartheta^2}.$$
◇

Wenn die Varianz von X gleich Null ist, streut X gar nicht, nimmt also nur einen einzigen Wert an. Dieser ist dann automatisch der Erwartungswert. Wir haben also den folgenden Satz.

Satz 9.35 *Es gilt* $\operatorname{Var}[X] = 0$ *genau dann, wenn* $X = \mathbf{E}[X]$ *mit Wahrscheinlichkeit 1.*

Satz 9.36 *Es seien X und Y unabhängig und mit endlicher Varianz. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

(i) $\operatorname{Var}[a + bX] = b^2 \operatorname{Var}[X]$,

(ii) $\operatorname{Var}[X + Y] = \operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[Y]$.

Beispiel 9.37 Sei $Y = \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$. Dann ist $Y = \mu + \sigma X$, wo $X \sim \mathcal{N}_{0,1}$ ist. Es folgt
$$\operatorname{Var}[Y] = \operatorname{Var}[\sigma X] = \sigma^2 \operatorname{Var}[X] = \sigma^2.$$

Wegen $\mathbf{E}[Y] = \mu$ wird jetzt klar, welche Bedeutung die Parameter in der Bezeichnung $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ haben!
◇

Folgerung: Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und mit der selben Verteilung (mit Varianz $\operatorname{Var}[X_i] < \infty$), wir sagen auch, dass $X_1, X_2, \ldots$ **unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.)** sind, und ist $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, so gilt
$$\operatorname{Var}\Big[\frac{1}{n} S_n\Big] = \frac{1}{n^2} \operatorname{Var}[S_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}[X_i] = \frac{1}{n} \operatorname{Var}[X_1] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dies legt nahe, dass $\frac{1}{n}S_n$ für große n nahe bei $\mathbf{E}\big[\frac{1}{n}S_n\big] = \mathbf{E}[X_1]$ liegt. In der Tat:

Satz 9.38 (Gesetz der großen Zahl) *Unter den obigen Bedingungen gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}S_n = \mathbf{E}[X_1] \quad \textit{mit Wahrscheinlichkeit 1.}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbf{P}\left[\left|\frac{1}{n}S_n - \mathbf{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wie schnell geht die Konvergenz in diesem Satz? Auskunft gibt der Zentrale Grenzwertsatz. Sei

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}_{0,1}$ mit der Festsetzung $\Phi(-\infty) = 0$ und $\Phi(\infty) = 1$.

Satz 9.39 (Zentraler Grenzwertsatz) *Seien $X_1, X_2, \ldots$ wie oben und $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X_1]}$ sowie $\mu = \mathbf{E}[X_1]$. Setze*

$$S_n^* := \frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für $-\infty \le a < b \le \infty$

$$\mathbf{P}\big[a \le S_n^* \le b\big] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(b) - \Phi(a). \tag{9.9}$$

Hat X eine Dichte f, so hat S_n^* eine Dichte, die wir f_n nennen, und es gilt

$$f_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} \quad \textit{für jedes} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ist speziell $Y_n \sim b_{n,p}$ für gewisses $p \in (0,1)$, so gilt die Formel von der ***Normalapproximation***

$$\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx \mathcal{N}_{0,1} \quad \textit{für großes } n \in \mathbb{N}, \tag{9.10}$$

also

$$\mathbf{P}[Y_n \le x] \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad \textit{für jedes } x \in \mathbb{R}. \tag{9.11}$$

Fazit: Wenn man viele unabhängige Summanden betrachtet, sind die wichtigen Kenngrößen: Erwartungswert und Varianz.

Faustregel 9.40 (i) Bei sehr vielen (n groß) Versuchen, die jeweils mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit $p \approx \lambda/n$ erfolgreich sind, ist die Gesamtzahl der Erfolge in etwa Poisson-verteilt mit Parameter λ. Der Parameter muss dann oft empirisch bestimmt werden. (Siehe Beispiel mit den Blitztoten.)

(ii) Bei sehr vielen zufälligen Einflüssen, die jeweils einen kleinen Beitrag liefern, ist der Gesamteffekt in etwa normalverteilt mit gewissen Parametern μ und σ^2. Auch hier müssen die Parameter oft empirisch bestimmt werden.

Für die Binomialverteilung $b_{n,p}$ etwa liefert die Normalapproximation brauchbare Ergebnisse, falls $np(1-p) > 9$.

Beispiel 9.41 Bei einer bestimmten Bohnensorte sind 25% der Bohnen schwarz und die anderen weiß. Wie groß ist bei einer Probe von $n = 10\,000$ Bohnen die Wahrscheinlichkeit, mehr als 2600 schwarze Bohnen zu haben?

Sei X = Anzahl der schwarzen Bohnen in der Stichprobe. Dann ist $X \sim b_{n,p}$ mit $p = 0.25$ und $n = 10\,000$. Es ist $np(1-p) = 1875 \gg 9$, also wird die Normalapproximation verwendet.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[X > 2600] = 1 - \mathbf{P}[X \leq 2600] &\approx 1 - \Phi\left(\frac{2600 - 10\,000 \cdot 0.25}{\sqrt{10\,000 \cdot 0.25 \cdot 0.75}}\right)\\ &= 1 - \Phi(2.31) = 1 - 0.9896 = 0.0104,\end{aligned}$$

wobei wir den Wert $\Phi(2.31)$ in der Tabelle der Normalverteilung abgelesen haben.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, mehr als 2600 schwarze Bohnen in der Stichprobe zu haben ist also etwa 1.04%.

Zum Vergleich: Der exakte Wert (ohne Normalapproximation) ist

$$\sum_{k=2601}^{10\,000} \binom{10\,000}{k} 0.25^k\, 0.75^{10\,000-k} = 0.0103697\ldots \qquad \diamond$$

Beispiel 9.42 (Polygene Vererbung) Wir nehmen an, dass ein phänotypisches Merkmal polygen vererbt wird, also als Summe vieler beteiligter Geneinflüsse. In vielen Fällen kann dann die Ausprägung des Merkmals mit brauchbarer Genauigkeit durch eine Normalverteilung beschrieben werden.

Solange man nicht besseres weiß, wird daher in vielen Fällen die Normalverteilung angenommen und dann probiert, die Parameter μ und σ^2 empirisch zu schätzen. $\diamond$

Beispiel 9.43 (Bakterienkultur) Wir nehmen an, dass ein gewisser Bakterientyp sich im Mittel alle 20 Minuten teilt. Dabei kann die tatsächliche Teilungszeit aber erheblichen Schwankungen unterworfen sein. Wenn wir mit einem Bakterium beginnen, wie groß ist dann die Population X nach fünf Stunden? Wir erwarten größenordnungsmäßig 15 Teilungen, also $2^{15} = 32\,768$ Bakterien. Dies ist als Zahl groß genug, um die Normalverteilung anzusetzen, aber in diesem Fall funktioniert das nicht: Wenn die erste Zelle sich sehr schnell teilt, haben wir doppelt so viele Zellen, wenn sich die erste Zelle erst nach 40 Minuten teilt, haben wir nur halb so viele Zellen. Der Effekt, den die erste Zelle hat, ist also so groß, dass X nicht die Summe vieler kleiner Effekte ist. Daher ist die Normalverteilung hier kein gutes Modell. $\diamond$

Beispiel 9.44 Wir nehmen an, dass eine Messgröße, etwa elektrische Spannung, einen wahren Wert u hat, jedoch wird die fehlerbehaftete Größe

$$U = u + X$$

gemessen. Dabei ist X ein zufälliger kleiner Fehler. Es ist nicht rigoros zu rechtfertigen, kann aber als Arbeitshypothese angenommen werden, dass X die Summe vieler kleiner Einflüsse darstellt, etwa Messgerätefehler, atmosphärische Störungen, Rauschen jedweder Art,... Daher wird oft $X \sim \mathcal{N}_{0,\sigma_X^2}$ als normalverteilt mit Erwartungswert 0 und kleiner Streuung σ_X angenommen.

Wenn wir statt u eine abgeleitete Größe $f(u)$ betrachten, etwa die elektrische Leistung $f(u) = \frac{u^2}{R}$ (wo R ein Ohm'scher Widerstand ist), wie sieht dann der Fehler von $f(U)$ aus? Präzise gefragt: welche Verteilung hat der Fehler $Y := f(U) - f(u)$? Wenn f differenzierbar ist, ist für kleine Werte x

$$f(u + x) \approx f(u) + f'(u) \cdot x.$$

Da wir X als klein angenommen haben, können wir Y annähern durch

$$Y = f(U) - f(u) = f(u + X) - f(u) \approx f'(u) \cdot X.$$

Da $X \sim \mathcal{N}_{0,\sigma_X^2}$ ist, ist also Y ungefähr wie $\mathcal{N}_{0,\sigma_Y^2}$ verteilt mit $\sigma_Y = |f'(u)| \cdot \sigma_X$. Die Aussage wird auch **Fehlerfortpflanzungsgesetz** genannt. $\diamond$

9.4.3 Kovarianz

Wir betrachten (abhängige) Zufallsvariablen X und Y. Gesucht ist ein Maß für die Abhängigkeit.

Die gemeinsame Verteilung von X und Y lässt sich vollständig beschreiben durch die Verteilungsfunktion

$$F(x, y) = \mathbf{P}[X \leq x \text{ und } Y \leq y].$$

Besonders wichtig ist der Fall, wo F nach x und y (stetig) differenzierbar ist. Wir nennen dann

$$f(x, y) := \frac{d}{dx}\frac{d}{dy}F(x, y)$$

die **gemeinsame Dichte** von X und Y. Es gilt für kleine Δx und Δy

$$\mathbf{P}\big[X \in [x, x + \Delta x],\, Y \in [y, y + \Delta y]\big] \approx f(x, y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y.$$

Genauer gilt für $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $-\infty \leq c < d \leq \infty$

$$\mathbf{P}[a \leq X \leq b,\, c \leq Y \leq d] = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy \tag{9.12}$$

Die Zufallsvariablen X und Y sind in diesem Falle genau dann unabhängig, wenn es Funktionen g und h gibt mit $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, und g und h sind dann die Dichten von X und Y. In der Tat: ist $f(x, y) = g(x)h(y)$, so ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[a \leq X \leq b,\, c \leq Y \leq d] &= \int_c^d \left(\int_a^b g(x)h(y)\, dx \right) dy \\
&= \int_c^d h(y) \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) dy \\
&= \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) \left(\int_c^d h(y)\, dy \right) \\
&= \mathbf{P}[a \leq X \leq b] \cdot \mathbf{P}[c \leq Y \leq d].
\end{aligned}$$

Also sind X und Y dann unabhängig.

Sind X und Y diskret (nehmen also nur abzählbar viele Werte an, etwa ganzzahlige), so ist

$$F(x, y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} \mathbf{P}[X = u,\, Y = v].$$

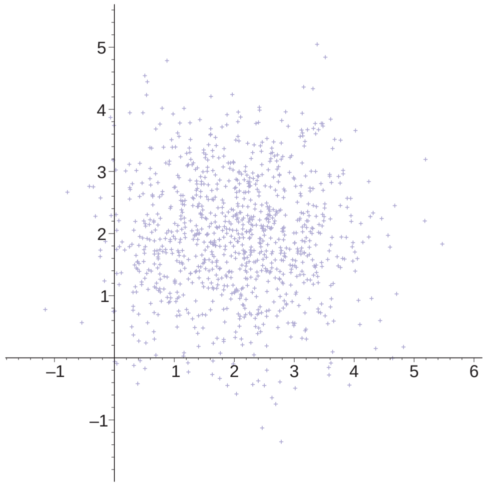


Abbildung 9.1: Realisierungen von 1000 normalverteilten Zufallsvariablen, unkorreliert

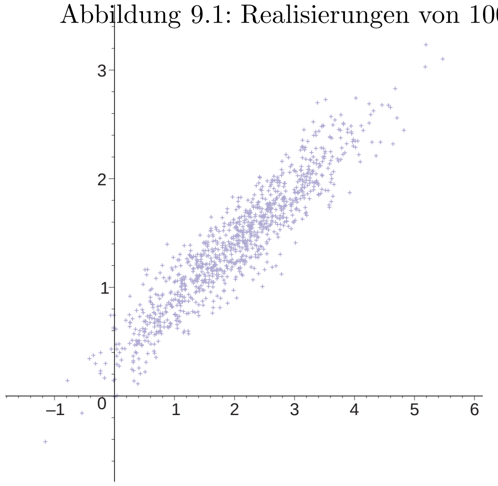


Abbildung 9.2: Realisierungen von 1000 normalverteilten Zufallsvariablen, positiv korreliert

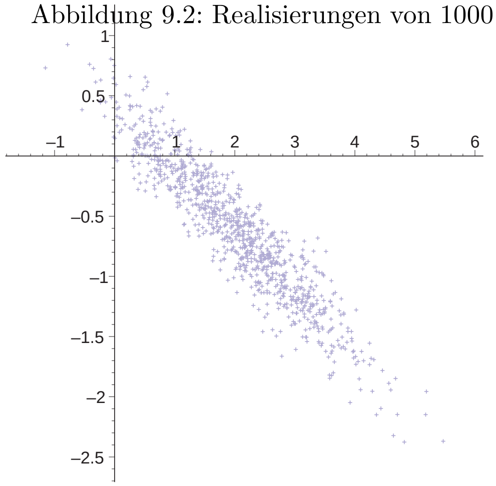


Abbildung 9.3: Realisierungen von 1000 normalverteilten Zufallsvariablen, negativ korreliert

X und Y sind genau dann unabhängig, wenn $\mathbf{P}[X = u,\, Y = v] = \mathbf{P}[X = u] \cdot \mathbf{P}[Y = v]$ für alle u, v ist.

Wie bekommen wir ein rechnerisches Maß für die Korrelation?

Definition 9.45 (Kovarianz) *Sind X und Y Zufallsvariablen mit* $\mathrm{Var}[X], \mathrm{Var}[Y] < \infty$*, so nennen wir*

$$\mathrm{Cov}[X, Y] := \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y]$$

die ***Kovarianz*** *von X und Y.*

Haben speziell X und Y die gemeinsame Dichte f, so ist

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dy \right) dx \right) - \mathbf{E}[X]\, \mathbf{E}[Y].$$

Sind X und Y diskret, so ist

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \left(\sum_{x,y} xy\, \mathbf{P}[X = x,\, Y = y] \right) - \mathbf{E}[X]\, \mathbf{E}[Y].$$

Ist $\mathrm{Var}[X] > 0$ *und* $\mathrm{Var}[Y] > 0$*, so nennen wir*

$$\varrho_{X,Y} := \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\, \mathrm{Var}[Y]}}$$

den ***Korrelationskoeffizienten*** *von X und Y. Es ist stets $\varrho \in [-1, 1]$.*

Interpretation:

- Figur 9.1: $\varrho = 0$, unkorrelierte Zufallsvariablen
- Figur 9.2: $\varrho > 0$, positiv korrelierte Zufallsvariablen
- Figur 9.3: $\varrho < 0$, negativ korrelierte Zufallsvariablen.

Je näher ϱ an 1 oder -1 liegt, desto mehr liegt die Verteilung von X und Y auf der Diagonalen konzentriert.

Definition 9.46 *Die Zufallsvariablen X und Y heißen*

- ***unkorreliert****, falls $\varrho_{X,Y} = 0$,*
- ***perfekt korreliert****, falls $\varrho_{X,Y} = 1$ oder $= -1$,*
- *positiv korreliert, falls $\varrho_{X,Y} > 0$,*
- *negativ korreliert, falls $\varrho_{X,Y} < 0$.*

Satz 9.47 (Rechenregeln) *Seien X, Y, Z Zufallsvariablen mit endlicher Varianz und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $\operatorname{Cov}[X, X] = \operatorname{Var}[X]$,

(ii) $\operatorname{Cov}[X, Y] = \operatorname{Cov}[Y, X]$,

(iii) $\operatorname{Cov}[aX + Y + b, Z] = a \operatorname{Cov}[X, Z] + \operatorname{Cov}[Y, Z]$.

(iv) Sind X und Y unabhängig, so gilt $\operatorname{Cov}[X, Y] = 0$.

Beispiel 9.48 Wir nutzen die Rechenregeln aus dem vorigen Satz, um die Korrelation von Zufallsvariablen in einem Beispiel auszurechnen. Seien U, V unabhängig mit $\mathbf{E}[U] = \mathbf{E}[V] = 0$ und $\operatorname{Var}[U] = \operatorname{Var}[V] = 1$ (etwa $U, V \sim \mathcal{N}_{0,1}$) und $a, b, c \in \mathbb{R}$, wobei a und b nicht beide gleich Null sind.

Wir setzen
$$X := U \qquad \text{und} \qquad Y := aU + bV + c.$$
Intuitiv ist klar: $a = 0 \iff X$ und Y unkorreliert. Und: je größer $\frac{a}{b}$ ist, desto besser sind X und Y korreliert, weil der gemeinsame Teil aU in Y gegenüber dem unabhängigen Teil bV dann dominiert.

Wir berechnen nun
$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}[X, Y] &= \operatorname{Cov}[U, aU + bV + c] \\ &= a \operatorname{Cov}[U, U] + b \operatorname{Cov}[U, V] \\ &= a \operatorname{Var}[U] = a.\end{aligned}$$
Die Varianz von X ist $\operatorname{Var}[X] = \operatorname{Var}[U] = 1$, und die von Y ist
$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[Y] = \operatorname{Cov}[Y, Y] &= \operatorname{Cov}[aU + bV, aU + bV] \\ &= a \operatorname{Cov}[U, aU + bV] + b \operatorname{Cov}[V, aU + bV] \\ &= a^2 \operatorname{Var}[U] + b^2 \operatorname{Var}[V] = a^2 + b^2.\end{aligned}$$
Wir erhalten so
$$\varrho_{X,Y} = \frac{\operatorname{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\operatorname{Var}[X] \operatorname{Var}[Y]}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
Tatsächlich liegt dies nahe bei 1, falls $a > 0$ und b betragsmäßig viel kleiner als a ist, und nahe bei -1, falls $a < 0$ und b betragsmäßig viel kleiner als a ist.

Ist speziell $b = 0$, also $Y = aX + c$ (mit $a \neq 0$), so ist
$$\varrho_{X,Y} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a > 0, \\ -1, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$
◇

Kapitel 10

Deskriptive Statistik

10.1 Empirische Verteilungsfunktion

Eine Datenerhebung liefert die Daten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Die Reihenfolge spiele bei der Erhebung keine Rolle. Dann sind die Daten vollständig beschrieben, wenn wir die Häufigkeit jeder einzelnen Zahl $x \in \mathbb{R}$ angeben:

$$H_n(x) := \#\{i = 1, \dots, n : x_i = x\} = \text{ Anzahl der } i \leq n \text{ mit } x_i = x$$

oder die *relative Häufigkeit*

$$h_n(x) := \frac{1}{n} H_n(x).$$

Gleichwertig damit ist die Angabe, welcher Anteil der Daten einen Wert von x *oder kleiner* liefert:

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \#\{i \leq n : x_i \leq x\} = \sum_{y \leq x} h_n(x).$$

Wir nennen die Abbildung $x \mapsto F_n(x)$ die **empirische Verteilungsfunktion** der Beobachtungen $x_1, \dots, x_n$.

Eine Standardannahme der Statistik ist, dass die erhobenen Daten unabhängige Realisierungen eines Zufallsexperiments sind und jeweils die gleiche Verteilung haben. Unter dieser Annahme nähert sich die empirische Verteilungsfunktion für große n der Verteilungsfunktion des Zufallsgesetzes an.

Satz 10.1 (Glivenko-Cantelli) *Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Dann gilt*

$$\frac{1}{n} \#\{i \leq n : X_i \leq x\} \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} F(x) \quad \textit{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Grafisch kann man erhobene Daten auf viele unterschiedliche Arten darstellen. Die Geläufigste ist das **Histogramm**. Hierbei werden die Häufigkeiten $H_n(x)$ oder die relativen Häufigkeiten als vertikale Balken in ein Koordinatensystem eingetragen. Wenn alle Zahlen unterschiedlich sind, etwa weil die Genauigkeit bei der Messung eines Merkmals so groß ist, dass keine zwei Werte übereinstimmen, werden Histogramme verwendet, bei denen die Daten zuvor zu Kategorien zusammen gefasst werden.

10.2 Kenngrößen

Ziel einer jeder empirischen Wissenschaft ist es, Zusammenhänge zwischen Wahrnehmungsdaten zu entdecken. Dies ist äquivalent damit, dass die Komplexität der Daten durch eine einfache Beschreibung reduziert wird. Wir geben hier die gebräuchlichsten Kenngrößen an, die einen Datensatz grob beschreiben. Diese Kenngrößen sind an diejenigen aus dem letzten Kapitel angelehnt: Erwartungswert, Quantile und Median, sowie Streuung.

Wir nehmen im Folgenden stets an, dass n Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gegeben sind.

Definition 10.2 *Wir definieren das* ***arithmetische Mittel*** *oder* ***Stichprobenmittel*** *durch*

$$\overline{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Offenbar ist $\overline{x}$ ein Maß für die *Lage* der Stichprobe. Es beschreibt die Lage in dem Sinne optimal, dass es unter allen Zahlen a die folgende Fehlerfunktion minimiert

$$Q(a) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2.$$

Also gilt $Q(a) > Q(\overline{x})$ für jedes $a \neq \overline{x}$. Wir nennen Q die Summe der Fehlerquadrate. Das Verfahren, eine Größe zu wählen, die eine quadratische Fehlerfunktion minimiert, heißt **Methode der kleinsten Quadrate**[1]. Um zu prüfen, dass $\overline{x}$ tatsächlich Q minimiert, müssen wir Q ableiten und erhalten

$$0 \overset{!}{=} Q'(a) = -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - a) = 2n(a - \overline{x}).$$

Die einzige kritische Stelle von Q liegt also bei $a = \overline{x}$, und die zweite Ableitung ist $Q''(a) = 2n > 0$, also liegt ein (globales) Minimum bei $a = \overline{x}$ vor.

Der **Stichprobenmedian** m ist diejenige Zahl, sodass die Hälfte der beobachteten Werte kleiner ist, die andere Hälfte größer. Genauer gesagt:

$$\#\{i \leq n : x_i \leq m\} \geq \frac{n}{2} \quad \text{und} \quad \#\{i \leq n : x_i \geq m\} \geq \frac{n}{2}.$$

Mit anderen Worten: m ist der Median, der zu der empirischen Verteilungsfunktion F_n gehört. Eine bequeme Methode, den Median zu beschreiben liefert die so genannte **Ordnungsstatistik**: Hier werden die Werte $x_1, \ldots, x_n$ der Größe nach sortiert aufgeschrieben:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}.$$

Die Zahlen $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ sind also die selben wie $x_1, \ldots, x_n$, auch mit der jeweils gleichen Häufigkeit des Auftretens, jedoch eben der Größe nach sortiert.

Beispiel 10.3 Sind $(x_1, \ldots, x_6) = (2, 3, 5, 1, 3, -1)$ gegeben, so ist die Ordnungsstatistik

$$(x_{(1)}, \ldots, x_{(6)}) = (-1, 1, 2, 3, 3, 5).$$

◇

[1] nach Carl Friedrich Gauß

Für die Definition des Median müssen wir zwischen geraden und ungeraden n unterscheiden.

Definition 10.4 (Median) *Der empirische Median m einer Stichprobe wird definiert als*

$$m := \begin{cases} x_{((n+1)/2)}, & \textit{falls } n \textit{ ungerade,} \\ \dfrac{x_{(n/2)} + x_{((n/2)+1)}}{2}, & \textit{falls } n \textit{ gerade.} \end{cases}$$

Analog zum empirischen Median kann man für jedes $\alpha \in (0,1)$ ein **empirisches α-Quantil** definieren

$$m_\alpha := x_{\lceil \alpha n \rceil},$$

wobei die eckigen Klammern andeuten, dass wir auf ganze Zahlen aufrunden. Bis auf Rundungsungenauigkeiten ist also der Median $m = m_{1/2}$.

Bemerkung 10.5 Man kann zeigen, dass der empirische Median die lineare Fehlerfunktion

$$G(a) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - a|$$

minimiert. Die Funktion G ist sehr viel weniger empfindlich für das Auftreten von exzeptionell großen oder kleinen Werten (so genannten *Ausreißern*), als es der Quadratische Fehler Q ist. Liegen m und $\overline{x}$ weit auseinander, so deutet dies darauf hin, dass es Ausreißer gibt, die eventuell gesondert untersucht werden müssen, weil sie

- interessante Informationen wiedergeben,
- oder schlicht auf Ablesefehlern, Übermittlungsfehlern oder Ähnlichem beruhen.

Als **Stichprobenvarianz** (oder empirische Varianz) bezeichnen wir die Größe

$$s_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2, \qquad \text{wobei} \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2;$$

als empirische Streuung oder empirische Standardabweichung die Größe $s_n := \sqrt{s_n^2}$.

Oftmals wird statt der empirischen Varianz die so genannte **erwartungstreue Varianzschätzung**[2] verwendet:

$$s_{n-1}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{n}{n-1} \big(\overline{x^2} - \overline{x}^2\big). \tag{10.1}$$

Wir setzen zudem $s_{n-1} = \sqrt{s_{n-1}^2}$.

Beispiel 10.6 Wir messen eine Größe, die einen wahren, aber unbekannten Wert μ hat, mehrmals, jeweils mit einem gewissen Fehler behaftet. Wie können wir den wahren Wert ermitteln, wie den Fehler unserer Schätzung?

[2] die Begriffsbildung wird später noch klar werden

Dazu folgende Überlegung: Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt, so ist s_{n-1}^2 ein Schätzwert für die Varianz $\mathrm{Var}[X_1]$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt für großes n approximativ

$$\overline{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2/n}.$$

Die Streuung von $\overline{X}$ ist also $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Es gilt also (approximativ),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left[\left|\overline{X} - \mu\right| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] &\approx 1 - \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 31.74\% \\ \mathbf{P}\left[\left|\overline{X} - \mu\right| \geq 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] &\approx 1 - \Phi(2) - \Phi(-2) \approx 4.54\%. \end{aligned}$$

Der Fehler bewegt sich also in der *Größenordnung* von $\sigma/\sqrt{n}$. Den Wert von σ kennt man im Allgemeinen nicht, er wird daher durch s_{n-1} geschätzt. Daher wird in den Experimentalwissenschaften ein fehlerbehaftetes Messergebnis oft der Form

$$\overline{x} \pm (s_{n-1}/\sqrt{n}\,)$$

angegeben. Oft werden von $\overline{x}$ nur die Dezimalstellen bis zur ersten Stelle angegeben, die sich durch den Fehler ändern würde, der Fehler wird dann oft aufgerundet. Beispielsweise würde man 1.7561092 ± 0.0231 angeben als $1.76(3)$. Manchmal werden zwei Stellen angegeben $1.756(23)$.

Wir wollen beispielsweise den Radius einer Kreisscheibe messen und erhalten als Messwerte

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i in m	2.05	2.01	1.98	1.97	1.92	2.03	2.02	2.02	2.00	1.95

Es ist also $n = 10$ und

$$\begin{aligned} \overline{x} &= 1.995\,m \\ s_{n-1}^2 &= 0.00158\overline{3}\,m^2 \\ s_{n-1} &= 0.0397911\,m \\ s_{n-1}/\sqrt{n} &= 0.01258\,m \end{aligned}$$

Das Messergebnis ist also $1.995\,m \pm 0.01258\,m$. Sinnvoll anzugeben ist dann (gerundet): $2.00(2)\,m$ (entsprechend $2.00\,m \pm 0.02\,m$) oder $1.995(13)\,m$ (entsprechend $1.995\,m \pm 0.013\,m$). ◇

Wie verändert sich der Schätzwert, wenn wir nicht an x direkt interessiert sind, sondern an einer abgeleiteten Größe, etwa $f(x)$?

Wir geben dann als Schätzwert $f(\overline{x})$ an und berechnen den Fehler nach dem **Fehlerfortpflanzungsgesetz** als

$$\left|f'(\overline{x})\right| \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}. \tag{10.2}$$

Beispiel 10.7 Wir setzen das obige Beispiel fort und schätzen die Fläche $f(x) = \pi x^2$ des Kreises. Es ist $f'(x) = 2\pi x$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{Schätzwert:} \quad & f(\overline{x}) = \pi \cdot (1.995\,m)^2 = 12.504\,m^2 \\ \text{Fehler:} \quad & |f'(\overline{x})| \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = 2\pi \cdot 1.995\,m \cdot 0.01258\,m = 0.1577\,m^2. \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird angegeben als: Fläche ist $(12.5 \pm 0.16)\,m^2$ oder $12.5(2)\,m^2$ (aufgerundet). ◇

10.3 Lineare Regression

In einem Experiment sei ein Parameter x frei einstellbar, eine Größe $y = f(x)$ wird, allerdings Fehler behaftet, gemessen. Es wird ein linearer Zusammenhang unterstellt

$$y = f(x) = ax + b,$$

wobei a und b unbekannt sind und aus dem Experiment heraus bestimmt werden sollen.

Angenommen wir haben n Messwerte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Wie lassen sich a und b am besten an die Daten anpassen? Dazu müssen wir zunächst einmal klären, was wir mit „am besten“ meinen. Eine plausible Möglichkeit ist es, ein Maß für den Fehler einzuführen, etwa die Summe der Abweichungsquadrate

$$Q(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Wir suchen nun diejenigen Werte a und b, die Q minimieren. Dieses Vorgehen wird **Methode der kleinsten Quadrate** genannt.

Um die Minimalstelle zu bestimmen, bilden wir die partiellen Ableitungen $\frac{dQ(a,b)}{da}$ und $\frac{dQ(a,b)}{db}$ und setzen sie gleich Null.

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{db} Q(a,b) = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 2n(b + a\overline{x} - \overline{y}).$$

Es folgt

$$b + \overline{x}a - \overline{y} = 0. \tag{10.3}$$

Die zweite Gleichung ist

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{da} Q(a,b) = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - ax_i - b) = -2n(\overline{xy} - a\overline{x^2} - b\overline{x}),$$

wobei

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Es folgt

$$\overline{x}\, b + \overline{x^2}\, a - \overline{xy} = 0. \tag{10.4}$$

Das lineare Gleichungssystem (10.3) und (10.4) lässt sich eindeutig lösen, und es ist

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \qquad b = \frac{\overline{x^2} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \tag{10.5}$$

Man prüft relativ leicht nach, dass Q in (a,b) tatsächlich ein globales Minimum hat.

Satz 10.8 (Lineare Regression) *Durch a und b aus (10.5) wird der quadratische Fehler Q minimiert. Ein Maß für die Güte der linearen Approximation $f(x) = ax + b$ an die Messdaten ist der empirische Korrelationskoeffizient*

$$\varrho := \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\,\sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2}}.$$

Ist $|\varrho|$ nahe bei 1, so ist die Anpassung gut.

Beispiel 10.9 Wir führen sechs Messungen durch (mit nicht notwendigerweise unterschiedlichen x_i) und erhalten

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1.0	2.2	2.7	2.7	3.5	5.0
y_i	4.9	7.5	8.6	8.4	9.8	13.2

Aus diesen Daten berechnen wir

$$\begin{aligned}\overline{x} &= 2.85\\ \overline{y} &= 8.7\overline{3}\\ \overline{x^2} &= 9.611\overline{6}\\ \overline{y^2} &= 82.51\\ \overline{xy} &= 27.9\overline{3}.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}a &= \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = 2.0436\\ b &= \frac{\overline{x^2}\cdot\overline{y} - \overline{x}\cdot\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = 2.9089\\ \varrho &= \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\,\sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2}} = 0.9984\end{aligned}$$ ◇

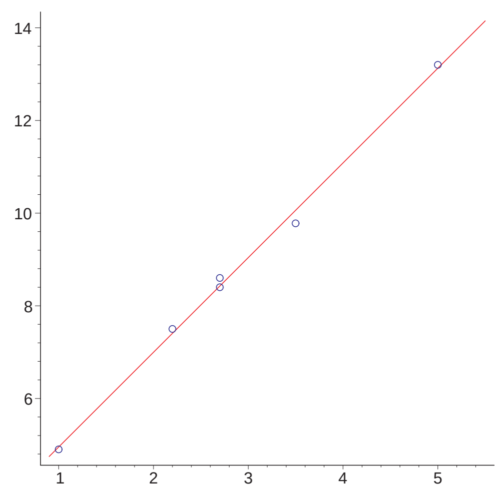


Abbildung 10.1: Grafik der Daten aus Beispiel 10.9. Die Ausgleichsgerade genügt der Gleichung $f(x) = 2.0436\,x + 2.9089$

Nichtlineare Zusammenhänge

In vielen Situationen sind die Naturgesetze nicht linear, etwa im Lambert-Beer'schen Gesetz

$$h(c) = h_0\,10^{-\varepsilon L c},$$

wo c die Konzentration eines Stoffes in der Küvette ist (in mol/liter), h_0 die Helligkeit am Empfänger des Photometers bei Konzentration $c = 0$, l die Breite der Küvette (in cm) und ε der dekadische Extinktionskoeffizient (molar und pro cm Breite). Um ε zu bestimmen, wird bei verschiedenen bekannten Konzentrationen $c_1, \ldots, c_n$ die Helligkeiten $h_1, \ldots, h_n$ gemessen. Dabei wird die Breite L als bekannt vorausgesetzt. Wir betrachten nun statt $h(c)$ den dekadischen Logarithmus des Helligkeit

$$H(c) := \log_{10}(h(c)) = \log_{10}(h_0) - \varepsilon L c.$$

Ferner berechnen wir aus den Messwerten die Zahlen $H_i = \log_{10}(h_i)$. Es gilt also

$$H(c) = a \cdot c + b,$$

wo $b = \log_{10}(h_0)$ ist und $a = -L\,\varepsilon$. Wir können nun mit Hilfe der linearen Regression für die Daten $(c_1, H_1), \ldots, (c_n, H_n)$ die Werte a und b schätzen und hieraus h_0 und ε berechnen

$$h_0 = 10^{\,b}, \qquad \varepsilon = -\frac{a}{L}.$$

Allgemeiner versucht man, das nichtlineare Gesetz zu einem linearen Gesetz umzuformen und hierauf lineare Regression anzuwenden. Ein offensichtliches Problem, was hierbei entsteht, ist, dass der quadratische Fehler nun bezüglich einer anderen Größe berechnet wird. Dabei werden unter Umständen manche Messwerte zu stark gewichtet.

Schätzen mehrerer Parameter

Oftmals sollen nicht nur zwei Parameter geschätzt werden, sondern gleich mehrere. Ein Naturgesetz habe etwa die Gestalt

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_m\,x^m.$$

Die Zahlen $a_0, \ldots, a_m$ seien unbekannt. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate können auch hier wieder die Zahlen $a_0, \ldots, a_m$ and die Messwerte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ angepasst werden. Hierfür müssen mindestens $n \geq m + 1$ Messwerte vorliegen. Die Formeln hierfür werden etwas unübersichtlich, sind aber in den üblichen Statistik Paketen auf Computern eingebaut.

Kapitel 11

Schätzen von Parametern

11.1 Das Likelihood-Prinzip

Wir nehmen an, dass in einem Restaurant zwei Köche arbeiten. Koch A versalzt die Suppe mit Wahrscheinlichkeit 10%, Koch B mit Wahrscheinlichkeit 40%. Sie sitzen im Restaurant, die Suppe ist versalzen. Wer war der Koch?

Die Idee ist, aus einer möglichen Menge von Hypothesen $\Theta = \{A, B\}$ diejenige auszuwählen, unter der die Beobachtung am wahrscheinlichsten ist. Von den möglichen Beobachtungen $\mathfrak{X} = \{\text{versalzen, nicht versalzen}\}$ haben wir die Beobachtung $x = \text{versalzen}$ gemacht. Wir wissen, dass $p_A(\text{versalzen}) = 0.1$, $p_A(\text{nicht versalzen}) = 0.9$, $p_B(\text{versalzen}) = 0.4$, $p_B(\text{nicht versalzen}) = 0.6$. Jetzt suchen wir diejenige Hypothese $\vartheta \in \Theta$, für die $p_\vartheta(x)$ maximal wird. In diesem Beispiel mit $x = \text{versalzen}$ ist dies offenbar $\vartheta = B$. Die Antwort auf die obige Frage lautet also: Man kann vermuten, dass B der Koch war.

Dieses intuitive Vorgehen, das wir gerade etwas formalisiert haben, nennt man das **Maximum-Likelihood Prinzip** (ML Prinzip). Eine Stärke ist die universelle Anwendbarkeit und Plausibilität. Eine Schwäche ist, dass es Vorkenntnisse (etwa: Koch A hat an 80% aller Tage Dienst, Koch B nur an 20%) außer Acht lässt. Auf diesen letzten Punkt gehen wir in diesem Rahmen aber nicht ein.

Im Folgenden formalisieren wir das Vorgehen des ML-Prinzips und berechnen dann in speziellen Situationen ML-Schätzer für Modellparameter.

Formaler Rahmen des Schätzproblems

- Es sei $\mathfrak{X}$ die Menge möglicher Beobachtungswerte der *gesamten* Stichprobe. Besteht die Stichprobe aus n einzelnen Stichproben, die Werte in einer Menge $\mathbb{W}$ annehmen, so hat $\mathfrak{X}$ die Gestalt
$$\mathfrak{X} = \mathbb{W}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{W}\}.$$
- Mit Θ bezeichnen wir eine Parametermenge für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, (=Hypothesen), die für die Verteilung der Beobachtungen auf $\mathfrak{X}$ in Frage kommen.
- Ist $\mathfrak{X}$ diskret, so ist $p_\vartheta(y)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung $y \in \mathfrak{X}$ gemacht

wird, falls die Hypothese $\vartheta \in \Theta$ richtig ist. In diesem Falle nennen wir

$$\vartheta \mapsto L_x(\vartheta) = p_\vartheta(x)$$

die **Likelihoodfunktion**.

Ist hingegen $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n$ und hat die zu ϑ gehörige Verteilung eine Dichte f_ϑ auf $\mathfrak{X}$, so definieren wir die Likelihoodfunktion durch

$$L_x(\vartheta) = f_\vartheta(x).$$

Definition 11.1 *Derjenige Wert $\hat{\vartheta} \in \Theta$, für den die Likelihoodfunktion $L_x(\hat{\vartheta})$ maximal wird (also $L_x(\vartheta) \leq L_x(\hat{\vartheta})$ für jedes $\vartheta \in \Theta$), heißt **Maximum-Likelihood Schätzer** (ML Schätzer) für den Parameter ϑ bei der Beobachtung $x \in \mathfrak{X}$.*

Die wohl wichtigste Situation ist diejenige mit n unabhängigen Stichproben $x_1, \ldots, x_n$ mit Werten in $\mathbb{W}$, die jeweils unter den Hypothesen ϑ die gleiche Verteilung auf $\mathbb{W}$ haben. In diesem Fall ist $\mathfrak{X} = \mathbb{W}^n$, und es gilt der folgende Satz.

Satz 11.2 *Seien die Beobachtungen unabhängig.*

(i) Ist $\mathbb{W}$ diskret und $p_\vartheta(y_i)$ das Gewicht der Beobachtung $y_i \in \mathbb{W}$ unter der Hypothese ϑ, so ist die Likelihoodfunktion für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{X}$

$$L_x(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} p_\vartheta(x_i).$$

(ii) Ist $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (oder ganz $\mathbb{R}$) und hat die Verteilung der einzelnen Beobachtung unter der Hypothese ϑ eine Dichte f_ϑ, so ist die Likelihoodfunktion für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{X}$

$$L_x(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f_\vartheta(x_i).$$

Bemerkung 11.3 Gerade bei unabhängigen Beobachtungen ist es oft vorteilhaft, statt der Likelihoodfunktion L_x die logarithmierte Likelihoodfunktion $\mathcal{L}_x(\vartheta) = \log(L_x(\vartheta))$ zu betrachten. Da die Abbildung $t \mapsto \log(t)$ streng monoton wachsend ist, ist $\mathcal{L}_x(\vartheta)$ genau für diejenigen Werte ϑ maximal, für die auch $L_x(\vartheta)$ maximal ist. Da uns nur das ϑ interessiert (und nicht der Werte von L_x an der Stelle), reicht es aus, Maximalstellen von $\mathcal{L}_x$ zu suchen. Dies geht für $\mathcal{L}_x$ etwas leichter, weil es eine einfache additive Struktur hat:

$$\mathcal{L}_x(\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \log(p_\vartheta(x)), \qquad \text{beziehungsweise} \quad \mathcal{L}_x(\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \log(f_\vartheta(x)).$$

Beispiel 11.4 Es soll geschätzt werden, welcher Anteil ϑ einer gewissen Bohnensorte schwarz ist (der Rest sei weiß). Dazu wird eine Stichprobe der Größe n gezogen. Es sei nur bekannt, dass von diesen n genau x schwarz waren. Wie groß ist ϑ?

Wir bilden das formale Modell: Als Anteil kommt zunächst jede Zahl $\vartheta \in [0, 1]$ in Betracht, also ist $\Theta = [0, 1]$. Die möglichen Beobachtungen sind die Werte von 0 bis n, also ist $\mathfrak{X} = \{0, \ldots, n\}$ (es ist nur die Gesamtzahl notiert worden, nicht die Reihenfolge). $\mathfrak{X}$ ist diskret (da endlich) und unter der Annahme ϑ hat die Stichprobe eine Binomialverteilung mit Parametern n und ϑ, es gilt also

$$p_\vartheta(x) = b_{n,\vartheta}(x) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}.$$

Wir erhalten als Likelihoodfunktion

$$L_x(\vartheta) = p_\vartheta(x) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}.$$

Die Aufgabe ist nun, die globale Maximalstelle von $L_x(\vartheta)$ zu bestimmen. Wie in Bemerkung 11.3 angedeutet, reicht es, die globale Maximalstelle von

$$\mathcal{L}_x(\vartheta) = \log\left(\tbinom{n}{x}\right) + \log\left(\vartheta^x\right) + \log\left((1-\vartheta)^{n-x}\right) = \log\left(\tbinom{n}{x}\right) + x\,\log(\vartheta) + (n-x)\log(1-\vartheta)$$

zu bestimmen. Hierzu leiten wir $\mathcal{L}_x(\vartheta)$ ab (nach ϑ) und setzen die Ableitung gleich Null

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\vartheta}\mathcal{L}_x(\vartheta) &= \frac{d}{d\vartheta}\Big(x\,\log(\vartheta) + (n-x)\log(1-\vartheta)\Big) \\ &= \frac{x}{\vartheta} - \frac{n-x}{1-\vartheta}. \end{aligned}$$

Auflösen nach ϑ ergibt $\vartheta = \frac{x}{n}$. Die zweite Ableitung an der Stelle $\vartheta = \frac{x}{n}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\vartheta^2}\mathcal{L}_x(\vartheta) &= -\frac{x}{\vartheta^2} + \frac{n-x}{(1-\vartheta)^2} \\ &= -\frac{n^2}{x} + \frac{n-x}{(1-(x/n))^2} = -\frac{n^3}{(n-x)\,x} < 0. \end{aligned}$$

Also liegt tatsächlich eine lokale Maximalstelle vor. Da es nur eine kritische Stelle gibt, ist dies eine globale Maximalstelle. Wir erhalten also als ML-Schätzer

$$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(x) = \frac{x}{n}.$$

Dieses ist natürlich der intuitive Schätzwert, den wir auch ohne Theorie angegeben hätten. ◇

Beispiel 11.5 Die Wartezeit bis zur Teilung einer Zelle sei gleichverteilt auf dem Intervall $[0,\vartheta]$, wo ϑ unbekannt sei. Es werden von n Zellen die Zeiten $x_1,\ldots,x_n$ bis zur Zellteilung gemessen.

Formal besteht unser Modell also aus folgenden Zutaten: Hypothesenraum $\Theta = (0,\infty)$ und Ergebnisraum

$$\mathfrak{X} = [0,\infty)^n = \{(t_1,\ldots,t_n) : t_1,\ldots,t_n \geq 0\}.$$

Die einzelne Beobachtung ist unter der Hypothese ϑ gleichverteilt auf $[0,\vartheta]$, hat also die Dichte

$$f_\vartheta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta}, & \text{falls } 0 \leq t \leq \vartheta, \\ 0, & \text{falls } t > \vartheta. \end{cases}$$

Nach Satz 11.2 ist die Likelihoodfunktion für $x = (x_1,\ldots,x_n)$

$$L_x(\vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta^n}, & \text{falls } x_1,\ldots,x_n \leq \vartheta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies wird maximal wenn $\vartheta = \max\{x_1,\ldots,x_n\}$ ist. Der ML-Schätzer für ϑ ist also

$$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(x) = \max\{x_1,\ldots,x_n\}.$$ ◇

Beispiel 11.6 (Normalverteilung) Der minütliche Energieumsatz einer Zellenart sei normalverteilt mit bekannter Varianz σ^2 und unbekanntem Erwartungswert μ. Nach Untersuchung von n Zellen mit Energieumsätzen $x_1, \ldots, x_n$ soll μ geschätzt werden. Der Stichprobenraum ist $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, der Parameterraum $\Theta = (0, \infty)$. Die Likelihoodfunktion ist das Produkt der Dichten der Normalverteilungen, also

$$L_x(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-(x_i-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Die log-Likelihoodfunktion ist hier nützlich:

$$\mathcal{L}_x(\mu) = \log(L_x(\mu)) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

Wir maximieren $\mathcal{L}_x$ durch Ableiten (nach μ) und Nullsetzen der Ableitung

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\mu}\mathcal{L}_x(\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu).$$

Hieraus erhalten wir den ML-Schätzer

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; \overline{x}.$$

(Tatsächlich ist die zweite Ableitung von $\mathcal{L}_x(\mu)$ gerade $-n/\sigma^2 < 0$, also liegt ein globales Maximum bei $\hat{\mu}$ vor.) $\diamond$

Beispiel 11.7 Ist in Beispiel 11.6 auch die Varianz unbekannt, so ist immer noch

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

der ML-Schätzer für μ, weil der Wert von $\hat{\mu}$ gar nicht von σ^2 abhängt. $\diamond$

11.2 Güte von Schätzern

11.2.1 Erwartungstreue und Bias

Wir betrachten im Folgenden einen Schätzer $\hat{\vartheta}_n$, der auf n Beobachtungen beruht, also ist $\mathfrak{X} = \mathbb{W}^n$, und mit Parametermenge $\Theta \subset \mathbb{R}$. Eine tatsächlich gemachte Gesamtbeobachtung bezeichnen wir mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, eine zufällige, nach p_ϑ verteilte Beobachtung mit $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

Definition 11.8 *Der Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ heißt **erwartungstreu**, falls*

$$\mathbf{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}_n(X)] = \vartheta \quad \text{für alle } \vartheta \in \Theta.$$

Gilt lediglich

$$\mathbf{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}_n(X)] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vartheta \quad \text{für alle } \vartheta \in \Theta,$$

*so heißt $\hat{\vartheta}_n$ **asymptotisch erwartungstreu**. Die Differenz zum Erwartungswert heißt **Bias**:*

$$\mathrm{Bias}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) := \mathbf{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}_n] - \vartheta.$$

Falls der Bias ungleich Null ist, so enthält der Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ eine systematische Verzerrung (in Richtung des Bias'), wir nennen den Schätzer dann auch **verzerrt** (englisch *biased*). Ein erwartungstreuer Schätzer wird auch als **unverzerrt** (englisch *unbiased*) bezeichnet.

Beispiel 11.9 Für $\mu \in \Theta = \mathbb{R}$ seien $X_1, \ldots, X_n$ identisch verteilt mit $\mathbf{E}_\mu[X_i] = \mu$ für jedes $i = 1, \ldots, n$. Die genaue Verteilung steckt natürlich im Modell, soll hier aber nicht spezifiziert werden.

Unter diesen Annahmen ist das arithmetische Mittel $\hat{\mu}_n(x) = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für μ, denn

$$\mathbf{E}_\mu\big[\hat{\mu}(X)\big] = \mathbf{E}_\mu\big[\,\overline{X}\,\big] = \frac{1}{n}\Big(\mathbf{E}_\mu[X_1] + \ldots + \mathbf{E}_\mu[X_n]\Big) = \frac{1}{n}\big(\mu + \ldots + \mu\big) = \mu. \qquad \diamond$$

In vielen Situationen ist ϑ eine zusammengesetzte Größe, etwa $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$, von der nur eine der beiden Komponenten geschätzt werden soll. Wir betrachten daher jetzt etwas allgemeiner als in der vorangehenden Definition Abbildungen $\tau : \Theta \to \mathbb{R}$, die geschätzt werden sollen, etwa: $\tau(\mu, \sigma^2) = \mu$ oder $\tau(\mu, \sigma^2) = \sigma^2$, aber auch $\tau(\mu, \sigma^2) = \mu^2$.

Definition 11.10 *Ein Schätzer $\hat{\tau}_n$ für τ heißt **erwartungstreu**, falls*

$$\mathbf{E}_\vartheta[\hat{\tau}_n(X)] = \tau(\vartheta) \quad \text{für alle } \vartheta \in \Theta.$$

Gilt lediglich

$$\mathbf{E}_\vartheta[\hat{\tau}_n(X)] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau(\vartheta) \quad \text{für alle } \vartheta \in \Theta,$$

*so heißt $\hat{\tau}_n$ **asymptotisch erwartungstreu**. Die Differenz zum Erwartungswert heißt **Bias**:*

$$\mathrm{Bias}_\vartheta(\hat{\tau}_n;\, \tau) := \mathbf{E}_\vartheta[\hat{\tau}_n(X)] - \tau(\vartheta).$$

Beispiel 11.11 Sei $\Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Für $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$ seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}[X_i] = \mu$ und $\mathrm{Var}_{(\mu,\sigma^2)}[X_i] = \sigma^2$. Die genaue Verteilung steckt natürlich im Modell, soll hier aber nicht genau spezifiziert werden.

Ist nun auch $\overline{x}^2$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\mu, \sigma^2) = \mu^2$?

Wir berechnen dazu

$$\frac{\sigma^2}{n} = \mathrm{Var}_{(\mu,\sigma^2)}\big[\,\overline{X}\,\big] = \mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\big[(\overline{X})^2\big] - \mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\big[\,\overline{X}\,\big]^2 = \mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\big[(\overline{X})^2\big] - \mu^2.$$

Also ist

$$\mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\big[(\overline{X})^2\big] = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

und damit

$$\mathrm{Bias}_{(\mu,\sigma^2)}\Big(\overline{X}^2;\, \mu^2\Big) = \frac{\sigma^2}{n}. \qquad \diamond$$

Beispiel 11.12 Seien $X_1, \ldots, X_n$ wie in Beispiel 11.11. Wir suchen einen Schätzer für $\tau(\mu, \sigma^2) = \sigma^2$.

Wir betrachten zunächst

$$s_n^2(x) := \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2.$$

Dann ist

$$\mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\left[s_n^2(X)\right] = \mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\left[\overline{X^2}\right] - \underbrace{\mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\left[\overline{X}^2\right]}_{=\mu^2+\sigma^2/n}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\left[\overline{X^2}\right] &= \mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\left[X_i^2\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\mathrm{Var}_{(\mu,\sigma^2)}[X_i] + \mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}[X_i]^2\Big) = \sigma^2 + \mu^2.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\left[s_n^2(X)\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Damit ist s_n^2 nicht erwartungstreu, aber asymptotisch erwartungstreu. Allerdings können wir aus s_n^2 einen erwartungstreuen Schätzer für σ^2 herstellen, indem wir einfach mit $\frac{n}{n-1}$ multiplizieren:

$$s_{n-1}^2(x) := \frac{n}{n-1}\, s_n^2(x) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 = \frac{n}{n-1}\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right) \tag{11.1}$$

ist ein erwartungstreuer Varianzschätzer. ◇

Beispiel 11.13 (Zellteilungsproblem) Wir betrachten die Situation von Beispiel 11.5: $\Theta = (0,\infty)$, $\mathfrak{X} = [0,\infty)^n$, die Dichte für die einzelne Beobachtung ist

$$f_\vartheta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta}, & \text{falls } t \le \vartheta, \\ 0, & \text{falls } t > \vartheta. \end{cases}$$

Als Maximum-Likelihood Schätzer für ϑ hatten wir den Schätzer

$$\hat\vartheta_n(x) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

gefunden. Ist dies ein erwartungstreuer Schätzer? Wir berechnen die Verteilungsfunktion G_ϑ von $\hat\vartheta_n$ bei wahrem Parameter ϑ:

$$\begin{aligned}G_\vartheta(t) &= \mathbf{P}_\vartheta[\hat\vartheta_n(X) \le t] = \mathbf{P}_\vartheta[X_1 \le t, \dots, X_n \le t] \\ &= \mathbf{P}_\vartheta[X_1 \le t] \cdots \mathbf{P}_\vartheta[X_n \le t] = \left(\frac{t}{\vartheta}\right)^n.\end{aligned}$$

Die Dichte erhalten wir durch Ableiten (nach t)

$$g_\vartheta(t) = G_\vartheta'(t) = n\frac{t^{n-1}}{\vartheta^n}.$$

Hiermit berechnen wir den Erwartungswert

$$\mathbf{E}_\vartheta\left[\hat\vartheta_n(X)\right] = \int_0^\infty t\, g_\vartheta(t)\, dt = \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^\vartheta t^n\, dt = \frac{n}{n+1}\,\vartheta.$$

Analog können wir die Varianz berechnen (was wir später noch benutzen wollen):

$$\mathbf{E}_\vartheta\left[\left(\hat\vartheta_n(X)\right)^2\right] = \int_0^\infty t^2\, g_\vartheta(t)\, dt = \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^\vartheta t^{n+1}\, dt = \frac{n}{n+2}\,\vartheta^2.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}_\vartheta\left[\hat{\vartheta}_n(X)\right] &= \mathbf{E}_\vartheta\left[\left(\hat{\vartheta}_n(X)\right)^2\right] - \mathbf{E}_\vartheta\left[\hat{\vartheta}_n(X)\right]^2 \\ &= \frac{n}{n+2}\,\vartheta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\vartheta^2 \qquad (11.2)\\ &= \frac{n}{(n+1)^2\,(n+2)}\,\vartheta^2.\end{aligned}$$

Diese Formel werden wir bei der Berechnung des mittleren quadratischen Fehlers benötigen. ◇

11.2.2 Mittlerer quadratischer Fehler

Die Erwartungstreue eines Schätzers sagt noch nichts darüber aus, wie weit der Schätzer streut. Ein Schätzer, der sehr wenig streut aber einen kleinen Bias hat, kann unter Umständen besser sein, als ein Schätzer, der zwar erwartungstreu ist, aber sehr weit streut. Wir brauchen ein Qualtitätsmaß, das beide Aspekte berücksichtigt.

Definition 11.14 *Wir nennen*

$$\operatorname{mqF}_\vartheta(\hat{\tau};\,\tau) = \mathbf{E}_\vartheta\left[(\hat{\tau}(X) - \tau(\vartheta))^2\right]$$

den ***mittleren quadratischen Fehler*** *des Schätzers $\hat{\tau}$ für die Größe τ unter der Hypothese ϑ. Ist speziell $\tau(\vartheta) = \vartheta$ und $\hat{\tau} = \hat{\vartheta}$, so schreiben wir auch kurz $\operatorname{mqF}_\vartheta(\hat{\vartheta}) = \operatorname{mqF}_\vartheta\big(\hat{\vartheta};\,\vartheta\big)$.*

Die der englischsprachigen Literatur entlehnte Bezeichnung **MSE** für *mean squared error* ist ebenfalls sehr gebräuchlich.

Der mittlere quadratische Fehler ist das wichtigste Maß für die Qualität eines Schätzers.

Satz 11.15 *Es gilt*

$$\operatorname{mqF}_\vartheta(\hat{\tau};\,\tau) = \operatorname{Var}_\vartheta[\hat{\tau}(X)] + \operatorname{Bias}_\vartheta(\hat{\tau};\,\tau)^2. \qquad (11.3)$$

Beispiel 11.16 (Schätzung des Anteils schwarzer Bohnen) Wir betrachten die Situation von Beispiel 11.4. Dort ist X reell und $b_{n,\vartheta}$-verteilt unter der Hypothese $\vartheta \in \Theta = [0,1]$. Als Maximum-Likelihood Schätzer für ϑ hatten wir

$$\hat{\vartheta}(x) = \frac{x}{n}$$

hergeleitet. Es gilt

$$\mathbf{E}_\vartheta\left[\hat{\vartheta}(X)\right] = \frac{n\vartheta}{n} = \vartheta,$$

also ist $\operatorname{Bias}_\vartheta(\hat{\vartheta}) = 0$. Weiter gilt

$$\operatorname{Var}_\vartheta[\hat{\vartheta}(X)] = \frac{n\,\vartheta(1-\vartheta)}{n^2} = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n},$$

also ist

$$\operatorname{mqF}_\vartheta\big(\hat{\vartheta}\big) = \vartheta(1-\vartheta)\cdot\frac{1}{n}.$$

Der mqF wird also mit wachsendem Stichprobenumfang kleiner (und damit die Schätzung genauer), wie man dies ja auch erwarten würde. ◇

Beispiel 11.17 (Zellteilung) Wir setzen Beispiel 11.13 (und damit Beispiel 11.5) fort. Dort hatten wir für $\hat{\vartheta}(x) = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ berechnet:

$$\mathrm{Bias}_\vartheta\big(\hat{\vartheta}\big) = -\frac{1}{n+1}\,\vartheta, \qquad \text{und} \quad \mathrm{Var}_\vartheta\big[\hat{\vartheta}(X)\big] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\,\vartheta^2.$$

Wir berechnen den mqF mit der Formel (11.3)

$$\mathrm{mqF}_\vartheta(\hat{\vartheta}) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\,\vartheta^2 + \frac{1}{(n+1)^2}\,\vartheta^2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\,\vartheta^2.$$

Eine möglicherweise plausible Alternative für diesen Schätzer bekommen wir durch

$$\overline{\vartheta}(x) := 2\,\overline{x} = \frac{2(x_1 + \ldots + x_n)}{n}.$$

Wir berechnen

$$\mathbf{E}_\vartheta[X_1] = \int_0^\vartheta \frac{1}{\vartheta}\,t\,dt = \frac{1}{2}\vartheta$$

und

$$\mathbf{E}_\vartheta[X_1^2] = \int_0^\vartheta \frac{1}{\vartheta}\,t^2\,dt = \frac{1}{3}\vartheta^2.$$

Es folgt

$$\mathbf{E}_\vartheta\big[\,\overline{\vartheta}\,\big] = 2\,\mathbf{E}_\vartheta[X_1] = \vartheta$$

und

$$\mathrm{Var}_\vartheta\big[\,\overline{\vartheta}\,\big] = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}_\vartheta[X_i] = \frac{4}{n}\,\mathrm{Var}_\vartheta[X_1] = \frac{4}{n}\Big(\mathbf{E}_\vartheta[X_1^2] - \mathbf{E}_\vartheta[X_1]^2\Big) = \frac{\vartheta^2}{3}\cdot\frac{1}{n}.$$

Der Schätzer $\overline{\vartheta}$ ist also erwartungstreu und hat den mqF

$$\mathrm{mqF}_\vartheta\big(\overline{\vartheta}\big) = \frac{\vartheta^2}{3}\cdot\frac{1}{n}.$$

Anders als $\hat{\vartheta}$ ist $\overline{\vartheta}$ erwartungstreu. Jedoch ist der mqF von $\hat{\vartheta}$ kleiner als der von $\overline{\vartheta}$, falls $n \geq 5$ ist. Mehr noch: für große n wird der mqF von $\hat{\vartheta}$ wie $\frac{1}{n^2}$ kleiner, der von $\overline{\vartheta}$ jedoch nur wie $\frac{1}{n}$. ◇

11.3 Konfidenzbereiche

Oftmals ist es sinnvoll, nicht nur eine Punktschätzung $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(x)$ für einen unbekannten Parameter $\vartheta \in \Theta$ anzugeben (wie in Abschnitt 11.1 und 11.2), sondern ein ganzes Intervall $C(x) \subset \Theta$, das für möglichst viele der zufälligen Beobachtungen X den wahren Wert enthält.

Wir geben eine Definition an, die in (i) bei einer eindimensionalen Parametermenge Θ den (einzigen) Parameter schätzt, und in (ii) bei einer k-dimensionalen Parametermenge $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ einen der Parameter $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$. Die typische Situation für (ii) ist die, wo $k = 2$ ist und

$$\Theta = \big\{(\mu, \sigma^2) :\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0\big\},$$

wo also Erwartungswert μ und Varianz σ^2 unbekannt sind und meist μ geschätzt werden soll.

Definition 11.18 *Sei $\alpha \in (0, 1)$.*

(i) *Sei $\Theta \subset \mathbb{R}$. Eine Vorschrift $x \mapsto C(x)$, die jedem $x \in \mathfrak{X}$ ein Intervall $C(x) \subset \Theta$ zuordnet mit*

$$\mathbf{P}_\vartheta[C(X) \ni \vartheta] \geq 1 - \alpha \quad \textit{für alle } \vartheta \in \Theta,$$

*heißt **Konfidenzintervall** zum Niveau α.*

(ii) *Sei $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ und $i = 1, \ldots, k$ fest gewählt. Eine Vorschrift $x \mapsto C(x)$, die jedem $x \in \mathfrak{X}$ ein Intervall $C(x)$ zuordnet mit*

$$\mathbf{P}_\vartheta[C(X) \ni \vartheta_i] \geq 1 - \alpha \quad \textit{für alle } \vartheta \in \Theta,$$

heißt Konfidenzintervall für ϑ_i zum Niveau α.

Beispiel 11.19 (Normalverteilung mit bekannter Varianz) Sei $\Theta = \mathbb{R}$, $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, und seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$-verteilt unter der Hypothese, dass $\mu \in \Theta$ der wahre Wert sei. Dabei ist $\sigma^2 > 0$ ein fester (bekannter) Wert.

Sei

$$T_\mu(x) = T_\mu\big((x_1, \ldots, x_n)\big) = \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\,(\overline{x} - \mu).$$

Da der Mittelwert $\overline{X}$ $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2/n}$–verteilt ist (falls μ wahr ist), ist $T_\mu(X) \sim \mathcal{N}_{0,1}$, falls μ wahr ist. Die Verteilung hängt also nicht von μ ab, aber wir müssen μ kennen, um T_μ auszurechnen.

Die Idee ist nun, dass wir das Konfidenzintervall $C(x)$ symmetrisch um den natürlichen Schätzwert $\overline{x}$ für μ wählen, also

$$C(x) = [\overline{x} - r, \overline{x} + r],$$

wobei wir allerdings r noch so wählen müssen, dass das Niveau α eingehalten wird.

Es ist genau dann $\mu \in C(x)$, wenn $\overline{x} - r \leq \mu \leq \overline{x} + r$, also genau dann, wenn $\mu - r \leq \overline{x} \leq \mu + r$, und dies gilt wiederum genau dann, wenn $|T_\mu(x)| \leq \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\, r$. Wir bekommen also (mit Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung) als Bedingung für r

$$\begin{aligned} 1 - \alpha \stackrel{!}{=} \mathbf{P}_\mu\big[C(X) \ni \mu\big] &= \mathbf{P}_\mu\left[|T_\mu| \leq \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\, r\right] \\ &= \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\, r\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\, r\right) = 2\,\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\, r\right) - 1, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie von Φ ausgenutzt haben:

$$\Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1 \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{R}.$$

Wir erhalten also $r = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, z_{1-\alpha/2}$, wobei z_β das β-Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Das Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Normalverteilung bei *bekannter* Varianz σ^2 ist also:

$$C(x) = \left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, z_{1-\alpha/2},\ \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, z_{1-\alpha/2}\right]. \tag{11.4}$$

◇

Tabelle der wichtigsten Werte der Quantile z_β der Normalverteilung

β	z_β
0.8	0.84162
0.9	1.28155
0.95	1.64485
0.975	1.95996
0.98	2.05375
0.99	2.32635
0.995	2.57583
0.9975	2.80703
0.998	2.87816
0.999	3.09023
0.9995	3.29053

Beispiel 11.20 (Binomialverteilung) Wir wollen den Erfolgsparameter einer Binomialverteilung des Stichprobenumfangs n schätzen. Es sei also $\mathfrak{X} = \{0, \ldots, n\}$ und $\mathbf{P}_\vartheta = b_{n,\vartheta}$ für $\vartheta \in \Theta = [0, 1]$.

Wir nehmen an, dass n so groß ist, dass wir die Normalapproximation für die Binomialverteilung verwenden dürfen. Dann ist unter der Annahme ϑ die Größe

$$\tilde{T}_\vartheta(X) := \frac{X - \vartheta\, n}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}$$

ungefähr $\mathcal{N}_{0,1}$–verteilt. Den Wert von ϑ im Nenner schätzen wir durch X/n und erhalten so für jeden Wert von ϑ, dass

$$T_\vartheta(X) := \frac{X - \vartheta\, n}{\sqrt{X(1 - X/n)}} \sim_{\text{approx}} \mathcal{N}_{0,1}.$$

Hieraus leiten wir (ähnlich wie oben für die Normalverteilung) als Konfidenzintervall für ϑ zum Niveau α ab:

$$C(x) = [L(x), R(x)],$$

mit

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{x}{n} - \frac{1}{n}\sqrt{x\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)}\; z_{1-\alpha/2} \\ R(x) &= \frac{x}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{x\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)}\; z_{1-\alpha/2}. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Dieses Konfidenzintervall ist nur für große n eine gute Wahl, weil sonst die Normalapproximation versagt!

Für kleine Werte von n können wir die exakten Formeln benutzen:

$$L(x) = 1 - \beta_{n-x+1,x;\,1-\alpha/2}, \qquad R(x) = \beta_{x+1,n-x;\,1-\alpha/2}, \tag{11.6}$$

wo $\beta_{m,n;\,\gamma}$ das γ-Quantil der Beta-Verteilung $\beta_{m,n}$ mit Parametern m und n ist. Wir wollen hier nicht genauer auf die Beta-Verteilung eingehen, sondern nur anmerken, dass die Quantile der Beta-Verteilung für kleine Parameterwerte tabelliert sind (in Anhang A.7).

Ist etwa $n = 20$, $x = 12$ und $\alpha = 0.05$, so lesen wir in der Tabelle ab: $1 - \beta_{9,12;\,0.975} = 1 - 0.639 = 0.361$ und $\beta_{13,8;\,0.975} = 0.809$. Wir erhalten so als Konfidenzintervall zum Niveau 5%: $C(12) = [0.361,\ 0.809]$. $\diamond$

Bemerkung 11.21 In den beiden vorangehenden Beispielen wurde jeweils eine Abbildung $T_\vartheta : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ konstruiert, die unter $\mathbf{P}_\vartheta$ eine Verteilung hat, die unabhängig vom Parameter ϑ ist (in den beiden Beispielen die Standardnormalverteilung). Eine solche Abbildung T_ϑ wird **Statistik** genannt. Aus den Quantilen dieser Verteilung wurde das Konfidenzintervall berechnet: Ist $B_\alpha \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\mathbf{P}_\vartheta[T_\vartheta \in B_\alpha] \geq 1-\alpha$ (man beachte, dass die Wahrscheinlichkeit nicht von ϑ abhängt), so ist

$$C(x) = \{\vartheta : T_\vartheta(x) \in B_\alpha\}$$

ein Konfidenzintervall zum Niveau α.

Beispiel 11.22 (Normalverteilung mit unbekannter Varianz) In den meisten Fällen, bei denen eine Normalverteilung angenommen wird, ist die Varianz der Verteilung unbekannt und muss erst noch aus den Daten geschätzt werden.

Wir haben etwa das Gewicht zehn australischer Straußeneier gemessen (in Gramm):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	106	110	100	103	109	101	97	103	111	99

Unter der Annahme, dass das Gewicht der Eier $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$–verteilt ist (mit μ *und* σ^2 unbekannt), wollen wir nun ein Konfidenzintervall C für μ zum Niveau $\alpha = 5\%$ bestimmen.

Wir betrachten zunächst die allgemeine Situation und kommen dann auf die konkreten Zahlen zurück. Bei einem Stichprobenumfang von n ist $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, und $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig und $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$–verteilt, falls $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ der wahre Parameter ist.

Die Idee ist, wie in Beispiel 11.19 vorzugehen, jedoch σ^2 durch s_{n-1}^2 zu schätzen. Wir setzen also für $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$T_\mu(x) := \sqrt{\frac{n}{s_{n-1}^2}}\,\big(\overline{x} - \mu\big). \tag{11.7}$$

Man kann zeigen, dass für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ unter $\mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)}$ gilt

$$T_\mu(X) \sim t_{n-1}, \tag{11.8}$$

wobei t_n die so genannte **t-Verteilung** mit n Freiheitsgraden ist. Die Quantile dieser Verteilung sind für viele Werte von n tabelliert (siehe Anhänge A.3 und A.4). Für große n gilt $t_n \sim_{\text{approx.}} \mathcal{N}_{0,1}$. Die t_n–Verteilung hat eine Dichte, die symmetrisch um 0 ist. Es gilt also für das γ–Quantil $t_{n;\gamma}$

$$t_{n;\,1-\gamma} = -t_{n;\,\gamma}. \tag{11.9}$$

Sei nun $t_{n-1;\,1-\alpha/2}$ das $(1-\alpha/2)$-Quantil von t_{n-1}. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)}\big[|T_\mu(X)| \leq t_{n-1;\,1-\alpha/2}\big] &= \mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)}\big[T_\mu(X) \leq t_{n-1;\,1-\alpha/2}\big] - \mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)}\big[T_\mu(X) \leq -t_{n-1;\,1-\alpha/2}\big] \\
&= \mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)}\big[T_\mu(X) \leq t_{n-1;\,1-\alpha/2}\big] - \mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)}\big[T_\mu(X) \leq t_{n-1;\,\alpha/2}\big] \\
&= (1-\alpha/2) - \alpha/2 \\
&= 1-\alpha.
\end{aligned}$$

Nach dem Schema von Bemerkung 11.21 erhalten wir hieraus als Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Normalverteilung bei unbekannter Varianz

$$C(x) = \left[\overline{x} - \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\, t_{n-1;\,1-\alpha/2},\ \overline{x} + \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\, t_{n-1;\,1-\alpha/2}\right]. \tag{11.10}$$

Im Beispiel mit den Straußeneiern ist: $n = 10$, $\overline{x} = 103.9$, $s_{n-1} = 4.886$, $1 - \alpha/2 = 0.975$ und (Tabelle in Anhang A.3) $t_{9;\,0.975} = 2.2622$. Wir erhalten also als Konfidenzintervall zum Niveau 5%: $C = [100.4, 107.4]$. Da die Normalverteilungsannahme meistens nicht genau erfüllt ist, und die t-Verteilung sehr empfindlich auf solche Abweichungen reagiert, empfiehlt es sich, großzügig zu runden, in diesem Fall geben wir daher als Konfidenzintervall [100, 108] an. $\diamond$

Kapitel 12

Tests

12.1 Einführung

Beispiel 12.1 (Bohnen) Ein Lieferant für Bohnen behauptet (H_0), dass ein Anteil von $\vartheta = \frac{1}{4}$ der gelieferten Bohnen schwarz sei (die anderen weiß). Wir haben jedoch den Verdacht (H_1), dass der Anteil schwarzer Bohnen geringer als $\frac{1}{4}$ ist. Eine Stichprobe im gelieferten Sack Bohnen soll die Angelegenheit klären.

Die Idee ist: Es werden n Bohnen entnommen und gezählt, wie viele (sagen wir x) davon schwarz sind. Ist x kleiner als eine kritische Zahl K (die *vorher* festgelegt werden muss), so wird die Behauptung des Lieferanten als falsch verworfen. $\diamond$

Es treten drei Probleme auf:

- H_0 könnte wahr sein und dennoch verworfen werden, weil der Anteil schwarzer Bohnen in der Stichprobe zufälligerweise besonders klein ist (Fehler 1. Art).
- H_0 könnte falsch sein und dennoch nicht verworfen werden, weil der Anteil schwarzer Bohnen in der Stichprobe zufälligerweise besonders groß ist (Fehler 2. Art).
- Wie müssen n und K gewählt werden, damit Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. Art und 2. Art möglichst klein werden?

Das Vorgehen in einer solchen Situation folgt einem festem Fahrplan:

(i) Es wird eine Schranke $\alpha \in (0, 1)$ für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art festgelegt (das so genannte **Niveau**). Oftmals ist $\alpha = 0.05$ oder $\alpha = 0.01$.

(ii) n wird möglichst groß gewählt (dabei sind Kosten und Zeit für die Stichprobe die wesentlichen Randbedingungen).

(iii) K wird gerade so groß gewählt, dass unter der Hypothese, dass H_0 wahr ist, die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung $\{X \leq K\}$ höchstens α ist.

Die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2. Art hängt bei diesem Aufbau maßgeblich von der Wahl von n ab (wenn K optimal gewählt ist). Eine Variante im Vorgehen kann darin bestehen, dass

α und β vorab festgelegt werden und dann das minimale n berechnet wird, dass hierfür nötig ist (**Fallzahlplanung**).

Formal haben wir es mit der folgenden statistischen Situation zu tun:

- $\alpha \in (0,1)$ ist das Niveau (vor allem anderen festgelegt)
- $\mathfrak{X}$ = Beobachtungsraum
- Θ = Parametermenge
- $\mathbf{P}_\vartheta$ Wahrscheinlichkeitsverteilung der zufälligen Beobachtung X (mit Werten in $\mathfrak{X}$), falls $\vartheta \in \Theta$ der wahre Parameter ist.
- $H_0 \subset \Theta$: „konservative Hypothese“ oder Nullhypothese.
- $H_1 = \Theta \setminus H_0$: „Gegenhypothese“ oder Alternative.

Die Hypothese H_0 (bzw. H_1) heißt **einfach**, falls $\#H_0 = 1$, falls also $H_0 = \{\vartheta_0\}$ für ein $\vartheta_0 \in \Theta$, und andernfalls **zusammengesetzt**.

Definition 12.2 *(i) Eine Abbildung $\varphi : \mathfrak{X} \to \{0,1\}$ heißt* ***Test*** *(für H_0 gegen H_1). $\varphi(x) = 1$ wird als Ablehnung von H_0 interpretiert, $\varphi(x) = 0$ als Beibehaltung von H_0 (falls x beobachtet wird).*

(ii) Ist $\mathbf{P}_\vartheta[\varphi(X) = 1] \le \alpha$ für jedes $\vartheta \in H_0$ (das ist die Wahrscheinlichkeit für fälschliches Ablehnen von H_0), so sagen wir, dass der Test das ***Niveau*** *α einhält.*

(iii) Die Abbildung $\vartheta \mapsto G_\varphi(\vartheta) = \mathbf{P}_\vartheta[\varphi(X) = 1]$ heißt ***Gütefunktion*** *von φ. Für $\varphi \in H_1$ heißt $G_\varphi(\vartheta)$* ***Macht*** *oder* ***Schärfe*** *des Tests φ.*

(iv) Gibt es eine Abbildung $T : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ und eine Menge $R \subset \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T(x) \in R,$$

so heißt T ***Teststatistik*** *für φ mit Verwerfungsbereich R.*

12.2 Binomialtest

Im Beispiel 12.1 mit den Bohnen ist:

- $\mathfrak{X} = \{0, \dots, n\}$,
- $\Theta = [0, \frac{1}{4}]$,
- $\mathbf{P}_\vartheta[X = k] = b_{n,\vartheta}(k) = \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k}$,
- $H_0 = \{\frac{1}{4}\}$,
- $H_1 = [0, \frac{1}{4})$,

- $T(x) = x$ und $R = \{0, \ldots, K\}$, also $\varphi(x) = 1 \iff x \leq K$. Also ist

$$G_\varphi(\vartheta) = \mathbf{P}_\vartheta[\varphi(X) = 1] = \sum_{l=0}^{K} b_{n,\vartheta}(l).$$

  Es muss K so gewählt werden, dass

$$\alpha \geq \mathbf{P}_{1/4}[\varphi(X) = 1] = \sum_{l=0}^{K} b_{n,1/4}(l) \approx \Phi\left(\frac{K - \frac{n}{4}}{\sqrt{n\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}}\right),$$

  wobei wir im letzten Schritt die Normalapproximation für die Binomialverteilung verwendet haben, die aber nur für große Werte von n eine gute Näherung ist (vergleiche (9.7) und (9.10)).

Bezeichnen wir mit z_β das β–Quantil der Standardnormalverteilung, so folgt

$$\begin{aligned} K &= \frac{n}{4} + \sqrt{\frac{3}{16}n}\ \ z_\alpha \\ &= \frac{n}{4} - \sqrt{\frac{3}{16}n}\ \ z_{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Diesen Test φ bezeichnen wir auch als **Binomialtest**.

Wählen wir ganz konkret $n = 500$ Bohnen als Stichprobenumfang und als Niveau $\alpha = 0.05 = 5\%$, so ist $z_{0.95} = 1.644485$ und $K = 125 - 15.928 \approx 109$ (wobei wir abgerundet haben).

Konklusion: Auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ lehnt der Test φ die Hypothese $H_0 = \{\frac{1}{4}\}$ ab, wenn $T(x) = x \leq 109$ Bohnen in der Stichprobe schwarz sind. $\diamond$

Wie groß ist die Schärfe des Tests? Klarerweise gilt: $\vartheta \mapsto G_\varphi(\vartheta) = \mathbf{P}_\vartheta[\varphi(X) = 1] = \mathbf{P}_\vartheta[X \leq K]$ ist monoton fallend und stetig. Für $\vartheta \to \vartheta_0 = \frac{1}{4}$ geht also $G_\varphi(\vartheta) \to G_\varphi(\vartheta_0) \leq \alpha$. Mit anderen Worten: Die minimale Schärfe $G_\varphi(\vartheta)$, wenn ϑ alle Werte in $H_1 = [0, \frac{1}{4})$ durchläuft, ist gerade das Niveau α des Tests. Und zwar unabhängig davon, wie groß n gewählt wird.

Dies ist natürlich unbefriedigend, denn α soll ja klein sein, die Schärfe hingegen groß. Der Grund für dieses nicht auflösbare Dilemma liegt darin, dass $H_1 = [0, \frac{1}{4})$ und $H_0 = \{\frac{1}{4}\}$ direkt aneinander grenzen. Wenn wir eine „Lücke" lassen, so können wir die Schärfe $1 - \beta$ auf jeden beliebigen Wert erhöhen, wenn wir n groß genug wählen:

Wir wählen etwa $H_1 =$„ϑ ist höchstens $\frac{1}{5}$", also $H_1 = [0, \frac{1}{5}]$. Da $G_\varphi(\vartheta)$ monoton fallend ist, gilt

$$\min_{\vartheta \in H_1} G_\varphi(\vartheta) = G_\varphi(1/5),$$

der kleinste Wert auf H_1 wird also in $\vartheta = \frac{1}{5}$ angenommen. Wir verlieren mithin keine Allgemeinheit, wenn wir die einfache Gegenhypothese $H_1 = \{\frac{1}{5}\}$ betrachten.

Normalapproximation liefert (für großes n)

$$\mathbf{P}_{1/5}[\varphi(X) = 1] = \mathbf{P}_{1/5}[X \leq K] \approx \Phi\left(\frac{K - \frac{1}{5}n}{\sqrt{n\,\frac{1}{5}\,\frac{4}{5}}}\right).$$

Dabei ist K der Wert von oben, also $K = \frac{n}{4} - \sqrt{\frac{3}{16}}\, z_{1-\alpha}$ und damit

$$\Phi\left(\frac{\frac{1}{20}n + \sqrt{\frac{3}{16}\,n}\, z_{1-\alpha}}{\frac{2}{5}\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\, z_{1-\alpha}\right) \stackrel{!}{=} 1-\beta.$$

Es folgt

$$z_{1-\beta} = \frac{\sqrt{n}}{8} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\, z_{1-\alpha}.$$

Auflösen nach n ergibt

$$n = 64\left(z_{1-\beta} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\, z_{1-\alpha}\right)^2.$$

Wählen wir (wie oben) $\alpha = 0.05$ und $\beta = 0.2$, so ist $z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.644485$, $z_{0.8} = 0.84162$ und damit $n \approx 900$. ◇

Wir führen die selbe Rechnung wie für das Beispiel durch, nur jetzt mit allgemeinen Platzhaltern ϑ_0 (statt $\frac{1}{4}$) und $\vartheta_1 < \vartheta_0$ (statt $\frac{1}{5}$): Die Bedingung, dass das Niveau höchstens α ist, ergibt

$$\mathbf{P}_{\vartheta_0}[\varphi(X) = 1] = \Phi\left(\frac{K - \vartheta_0\, n}{\sqrt{n\,\vartheta_0(1-\vartheta_0)}}\right) \stackrel{!}{=} \alpha,$$

und damit

$$\frac{K - \vartheta_0\, n}{\sqrt{n\,\vartheta_0(1-\vartheta_0)}} = z_\alpha,$$

also

$$\begin{aligned} K &= \vartheta_0 n + \sqrt{n\,\vartheta_0(1-\vartheta_0)}\, z_\alpha \\ &= \vartheta_0 n - \sqrt{n\,\vartheta_0(1-\vartheta_0)}\, z_{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Die Bedingung an die Schärfe des Tests liefert (wie oben, nur mit ϑ_1 statt ϑ_0)

$$K = \vartheta_1 n + \sqrt{n\,\vartheta_1(1-\vartheta_1)}\, z_{1-\beta}. \tag{12.2}$$

Auflösen von (12.1) und (12.2) nach n liefert für die Fallzahlplanung des **Binomialtests** zum Niveau α und mit Schärfe $1-\beta$

$$n = \left(\frac{\sqrt{\vartheta_1(1-\vartheta_1)}\, z_{1-\beta} + \sqrt{\vartheta_0(1-\vartheta_0)}\, z_{1-\alpha}}{\vartheta_0 - \vartheta_1}\right)^2. \tag{12.3}$$

12.3 Gaußtest

Wir betrachten ein Merkmal, das $\mathcal{N}_{\mu,\sigma}$-verteilt ist, wobei $\sigma^2 > 0$ bekannt ist (das ist allerdings meist sehr unrealistisch) und $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt ist. Die Nullhypothese $H_0 = \{\mu_0\}$ soll gegen einseitige oder zweiseitige Alternativen getestet werden.

Dazu wird eine Stichprobe von n unabhängigen Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ erhoben.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

12.3.1 1. Fall: zweiseitige Alternative

Hier ist $H_0 = \{\mu_0\}$ und $H_1 = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0\} = \{\mu \in \mathbb{R} : \mu \neq \mu_0\}$ oder $H_1 \subset \mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}$, aber auf beiden Seiten von μ_0 gelegen.

Die einfachste Herleitung eines Tests φ für H_0 gegen H_1 beginnt damit, ein Konfidenzintervall $C(x)$ zum Niveau α herzunehmen (vergleiche Kapitel 11.4):

$$C(x) = \left(\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, z_{1-\alpha/2}, \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, z_{1-\alpha/2}\right).$$

Hierbei ist z_β (mit $\beta = 1 - \alpha/2$) das β-Quantil der Standardnormalverteilung und $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ das arithmetische Mittel der Beobachtungen. Wir definieren die Regel für φ durch

$$\varphi(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad C(x) \not\ni \mu_0.$$

Offenbar gilt dann $\mathbf{P}_{\mu_0}[\varphi(X) = 1] = \mathbf{P}_{\mu_0}[C(x) \not\ni \mu_0] \leq \alpha$, da das Konfidenzintervall $C(x)$ das Niveau α einhält. Konkret ist also

$$\varphi(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{x} \notin \left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, z_{1-\alpha/2},\ \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, z_{1-\alpha/2}\right). \tag{12.4}$$

Auf das selbe Ergebnis kommen wir, wenn wir den etwas standardisierteren Ansatz über die Teststatistik T machen, wobei

$$T(x) := \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Nach Konstruktion ist $T(X) \sim \mathcal{N}_{0,1}$, wenn H_0 wahr ist. Als Ablehnungsbereich R für diese Teststatistik müssen wir also $R = \mathbb{R} \setminus (-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2})$ wählen, denn $\mathbf{P}_{\mu_0}[T(X) \in R] = \mathbf{P}_{\mu_0}[|T(X)| \geq z_{1-\alpha/2}] = \alpha$. Wir erhalten auch mit diesem Ansatz als Verwerfungsregel

$$\varphi(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |T(x)| \geq z_{1-\alpha/2}. \tag{12.5}$$

Man prüft leicht nach, dass (12.4) und (12.5) die selbe Regel beschreiben.

Fallzahlplanung
Ist $H_1 = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}$, so ist, wie beim Binomialtest, die minimale Schärfe $G_\varphi(\mu)$ höchstens $G_\varphi(\mu_0) \leq \alpha$. Wir können also auch hier keine Schärfe erwarten, die besser als das Niveau ist, wenn wir die Alternative so unspezifisch formulieren. Besser sieht es aus, wenn wir uns auf einen gewissen Mindestabstand $d > 0$ der Alternative zur Nullhypothese festlegen können. In diesem Fall ist

$$H_1 = \big\{\mu : |\mu - \mu_0| \geq d\big\}.$$

Jetzt können wir zu vorgegebener Schärfe $1 - \beta$ ein n berechnen, sodass der oben beschriebene zweiseitige Gaußtest die Schärfe $1 - \beta$ und das Niveau α hat.

Tatsächlich ist $G_\varphi(\mu)$ minimal in $\mu_0 - d$ und $\mu_0 + d$. Wir erhalten also als Bedingung für die Schärfe

$$\begin{aligned}
1 - \beta &\overset{!}{=} G_\varphi(\mu_0 - d) \\
&= \mathbf{P}_{\mu_0 - d}\big[|T(X)| \geq z_{1-\alpha/2}\big] \\
&= \mathbf{P}_{\mu_0 - d}\big[T(X) \leq -z_{1-\alpha/2}\big] + \mathbf{P}_{\mu_0 - d}\big[T(X) \geq z_{1-\alpha/2}\big] \\
&\approx \mathbf{P}_{\mu_0 - d}\big[T(X) \leq -z_{1-\alpha/2}\big] \quad \text{(der zweite Summand ist viel kleiner als der erste)} \\
&= \mathbf{P}_{\mu_0}\Big[T(X) \leq d\sqrt{n/\sigma^2} - z_{1-\alpha/2}\Big] \\
&= \Phi\big(d\sqrt{n/\sigma^2} - z_{1-\alpha/2}\big).
\end{aligned}$$

Also ist

$$z_{1-\beta} = d\sqrt{n/\sigma^2} - z_{1-\alpha/2}.$$

Auflösen nach n ergibt als minimale Fallzahl des zweiseitigen Gaußtests mit Schärfe $1-\beta$ und Niveau α

$$n = \sigma^2 \left(\frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha/2}}{d} \right)^2. \tag{12.6}$$

Abbildung 12.1: Steinlaus Weibchen (*Petrophaga lorioti*)

Beispiel 12.3 Das Gewicht der (sehr seltenen) Steinläuse (in Mikrogramm) ist bekanntermaßen zufällig und normalverteilt mit Varianz $\sigma^2 = 25$. Die Lehrmeinung ist, dass $\mu_0 = 80$ ist. Allerdings ist in letzter Zeit der Verdacht aufgekommen, dass bei den Weibchen dieser Gattung dieser Wert falsch sein könnte, ohne dass man wüsste, in welcher Richtung der tatsächliche Wert hiervon abweichen sollte. Um dies zu prüfen, sollen Daten erhoben und ein Test durchgeführt werden.

Die Nullhypothese ist $H_0 = \{80\}$, die Gegenhypothese $H_1 = \{\mu \in \mathbb{R} : \mu \neq 80\}$. Es soll (sehr konservativ) H_0 gegen H_1 auf dem Niveau von $\alpha = 1\%$ getestet werden. Dazu werden $n = 10$ Daten erhoben. Um den Verwerfungsbereich zu bestimmen, schauen wir $z_{0.995} = 2.57583$ in der Tabelle nach und erhalten als Verwerfungsbereich für den Test

$$\varphi(x) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{|\overline{x} - 80|}{5/\sqrt{10}} \geq z_{1-\alpha/2} \approx 2.57583.$$

Nun werden die Daten bei zehn Weibchen der *Petrophaga lorioti* erhoben:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	80	70	82	71	73	75	95	76	68	72

Wir erhalten: $\overline{x} = 76.2$, also $|\overline{x} - 80|/(5/\sqrt{10}) = 2.403 < 2.57583$. Damit kann der Test die Nullhypothese zum Niveau 0.01 nicht verwerfen.

Wie groß müsste die Stichprobe sein, um die modifizierte Gegenhypothese $H_1 = \{\mu \in \mathbb{R} : |\mu - 80| > 3\}$ zum Niveau $\alpha = 0.01$ und mit Mindestschärfe $1 - \beta = 0.95$ zu testen?

Nach Gleichung (12.6) ist (mit $z_{0.95} = 1.64485$) der erforderliche Stichprobenumfang

$$n = 25 \left(\frac{1.64485 + 2.57583}{3} \right)^2 = 49.484.$$

Es müssen also $n = 50$ Steinläuse gewogen werden. ◇

12.3.2 2. Fall: einseitige Alternative

Hier ist $H_0 = \{\mu_0\}$ und $H_1 \subset (-\infty, \mu_0)$ (linksseitige Alternative) oder $H_1 \subset (\mu_0, \infty)$ (rechtsseitige Alternative). Aufgrund der Symmetrie des Problems reicht es, die linksseitige Alternative zu betrachten. Sei also $H_0 = \{\mu_0\}$ und $H_1 \subset (-\infty, \mu_0)$.

Wir definieren die Teststatistik T wie im zweiseitigen Fall. Offenbar deuten besonders kleine Werte von $T(X)$ an, dass die Nullhypothese zugunsten der Alternative verworfen werden kann. Wir wählen daher als Ablehnungsbereich

$$\varphi(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad T(x) \leq -z_{1-\alpha}.$$

Dabei ist die kritische Zahl $-z_{1-\alpha} = z_\alpha$ so gewählt, dass das Niveau α eingehalten wird. Es ist nämlich

$$\mathbf{P}_{\mu_0}[\varphi(X) = 1] = \mathbf{P}_{\mu_0}[T(X) \leq -z_{1-\alpha}] = \Phi(-z_{1-\alpha}) = \Phi(z_\alpha) = \alpha.$$

Ausgeschrieben heißt dies: der linksseitige Gaußtest hat den Verwerfungsbereich

$$\varphi(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad T(x) = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_{1-\alpha}. \tag{12.7}$$

Analog hat der rechtsseitige Gaußtest ($H_1 \subset (\mu_0, \infty)$) zum Niveau α den Verwerfungsbereich

$$\varphi(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad T(x) = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{1-\alpha}. \tag{12.8}$$

Fallzahlplanung
Um eine vorgegebene Mindestschärfe $1-\beta$ für die linksseitige Alternative $H_1 = (-\infty, \mu_1]$ (mit $\mu_1 < \mu_0$), beziehungsweise für die rechtsseitige Alternative $H_1 = [\mu_1, \infty)$ (mit $\mu_1 > \mu_0$), zu erhalten, müssen wir n hinreichend groß wählen. Eine ähnliche Rechnung wie bei der zweiseitigen Alternative ergibt als Mindestgröße

$$n = \sigma^2 \left(\frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha}}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2. \tag{12.9}$$

Beispiel 12.4 Nachdem die Erhebung der Daten bei den Steinlaus-Weibchen ein im Mittel geringeres Gewicht als das der Männchen ergeben hat, könnte man nun die einseitige Hypothese $H_1 = \{\mu : \mu < 77\}$ gegen $H_0 = \{80\}$ testen wollen. Wie groß muss eine Stichprobe gewählt werden, um den Test auf dem Niveau $\alpha = 0.01$ und mit Schärfe $1 - \beta = 0.95$ durchzuführen? Mit Gleichung (12.9) (und $z_{0.95} = 1.64485$, $z_{0.99} = 2.32635$) erhalten wir

$$n = n = 25 \left(\frac{1.64485 + 2.32635}{3} \right)^2 = 43.807.$$

Anders als beim zweiseitigen (und damit unspezifischeren Test) kommen wir hier mit einer Stichprobengröße von $n = 44$ Steinläusen aus. ◇

12.4 t-Test

Wir betrachten genau die gleiche Situation wie beim Gauß-Test, jedoch soll nun die Varianz σ^2 der Verteilung $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ unbekannt sein.

Als Nullhypothese wird $H_0 = \{\mu_0\}$ formuliert (für ein $\mu_0 \in \mathbb{R}$) und als Alternative H_1 beidseitig, linksseitig oder rechtsseitig (wie beim Gaußtest). Der Test soll zum Niveau α durchgeführt werden.

Wir müssen nun aus den Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$, ähnlich wie beim Konfidenzintervall bei unbekannter Varianz, die Varianz durch den erwartungstreuen Varianzschätzer

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2\right) = \frac{n}{n-1}\Big(\overline{x^2} - \overline{x}^2\Big) \tag{12.10}$$

schätzen. Wir verwenden also die t-Statistik

$$T(x) = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s_{n-1}/\sqrt{n}}.$$

Unter der Nullhypothese ist $T(X) \sim t_{n-1}$, wo t_k die t-Verteilung mit k Freiheitsgraden ist. Wie üblich bezeichnet $t_{n-1;\,\alpha}$ das α-Quantil der t_{n-1}-Verteilung. Ähnlich wie beim Gaußtest erhalten wir die folgenden Verwerfungsregeln:

Beidseitiger t-Test zum Niveau α
Es ist $H_1 = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}$ (oder etwas schwächer: $H_1 \subset \mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}$ (auf beiden Seiten gelegen)). Bei Beobachtung $x = (x_1, \ldots, x_n)$ verwirft der Test H_0, falls

$$|T(x)| \geq t_{n-1;\,1-\alpha/2}.$$

Linksseitiger t-Test zum Niveau α
Es ist $H_1 \subset (-\infty, \mu_0)$. Besonders kleine Werte von $T(x)$ stützen die Gegenhypothese. Bei Beobachtung $x = (x_1, \ldots, x_n)$ verwirft der Test H_0 also, falls

$$T(x) \leq -t_{n-1;\,1-\alpha}.$$

Rechtsseitiger t-Test zum Niveau α
Es ist $H_1 \subset (\mu_0, \infty)$. Besonders große Werte von $T(x)$ stützen die Gegenhypothese. Bei Beobachtung $x = (x_1, \ldots, x_n)$ verwirft der Test H_0 also, falls

$$T(x) \geq t_{n-1;\,1-\alpha}.$$

Beispiel 12.5 Das Gewicht australischer Straußeneier (in Gramm) ist normalverteilt mit unbekanntem μ und unbekannter Varianz. Ein alter Häuptling verrät uns die Weisheit, dass $\mu = \mu_0 = 110$ der wahre Parameter ist. σ^2 kennt auch der weise Mann nicht.

Wir haben unsere Zweifel an den Kenntnissen des Mannes, allerdings keine Ahnung, ob wir μ kleiner oder größer als $\mu_0 = 110$ vermuten sollen. Wir formulieren also die Gegenhypothese: $H_1 =$ „$\mu \neq 110$“ $= \mathbb{R} \setminus \{110\}$. Ein Test soll auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ die Angelegenheit klären. Dazu sollen $n = 10$ Eier gewogen werden und die Messergebnisse mit $x_1, \ldots, x_{10}$ bezeichnet werden. Der zweiseitige t-Test verwirft H_0 zugunsten von H_1, falls

$$|T(x)| = \left|\frac{\overline{x} - 110}{s_{n-1}/\sqrt{10}}\right| \geq t_{9;\,0.975} = 2.2622.$$

Nachdem dieses Kriterium festgelegt worden ist, werden die Eier gesammelt und gewogen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	106	110	100	103	109	101	97	103	111	99

Aus diesen Daten erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1039 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 108167.$$

Wir berechnen

$$\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 103.9$$

und

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{1}{10}\Big(\sum_{i=1}^{10} x_i\Big)^2\right) = \frac{1}{9}(108167 - 107952.1) = 23.8\overline{7},$$

also

$$s_{n-1} = \sqrt{s_{n-1}^2} = \sqrt{23.8\overline{7}} = 4.886.$$

Wir erhalten den Wert $T(x) = \frac{103.9-110}{4.886/\sqrt{10}} = -3.948$, also ist $|T(x)| = 3.948 > 2.2622$, und der Test verwirft die H_0 zugunsten von H_1 auf dem Niveau 5%. $\diamond$

Beispiel 12.6 Das Gewicht (in kg) in den Bohnensäcken eines Lieferanten sei $\mathcal{N}_{\mu,\sigma}$-verteilt mit μ und σ^2 beide unbekannt. Der Lieferant behauptet, dass im Mittel mindestens 100kg in den Säcken ist, also:

$$H_0 := \{\mu : \mu \geq \mu_0 := 100\}.$$

Wir haben den Verdacht, dass μ kleiner als 100 sein könnte, also

$$H_1 = (-\infty, 100).$$

Es soll mit einem (linksseitigen) t-Test H_0 gegen H_1 auf dem Niveau $\alpha = 0.01$ getestet werden. Wir verwerfen also H_0 genau dann, wenn

$$T(x) = \frac{\overline{x} - 100}{s_{n-1}/\sqrt{n}} \leq -t_{n-1;\,0.99}.$$

Jetzt werden acht Säcke geprüft:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	98.3	98.6	99.2	99.1	99.3	98.8	98.9	99

Aus diesem Werten berechnen wir

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 791.2 \qquad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 78250.44.$$

Hieraus berechnen wir

$$\overline{x} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} x_i = 98.9$$

und

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{7} \left(\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \frac{1}{8} \Big(\sum_{i=1}^{8} x_i \Big)^2 \right) = \frac{1}{7} \Big(78225.44 - \frac{625997.44}{8} \Big) = 0.108571429,$$

also

$$s_{n-1} = \sqrt{s_{n-1}^2} = 0.3295.$$

Schließlich schauen wir in der Tabelle nach: $t_{7;\,0.99} = 2.998$.

Wir erhalten den Wert $T(x) = -9.44 < -2.998$, also verwirft der Test H_0 zugunsten von H_1 auf dem Niveau 1%. ◇

Fallzahlplanung für den t-Test
Wie beim Gaußtest benötigt man eine „Lücke“ d zwischen H_0 und H_1. Es muss also $H_1 = (-\infty, \mu_0 - d]$ (linksseitiger Fall), $H_1 = [\mu_0 + d, \infty)$ (rechtsseitiger Fall) oder $H_1 = \{\mu : |\mu - \mu_0| \geq d\}$ (beidseitiger Fall) sein. Da σ^2 unbekannt ist, kann man keine *a priori* Abschätzung für die kleinste Fallzahl n angeben, die ein Mindestschärfe $1 - \beta$ sichert.

Ein mögliches Vorgehen sieht so aus: Zunächst wird eine (kleine) Stichprobe $x_1, \ldots, x_m$ erhoben, aus der heraus mit s_{m-1}^2 die Varianz σ^2 geschätzt wird. Die Fallzahl für die eigentliche Stichprobe wird dann fest gesetzt als

$$n \geq s_{m-1}^2 \left(\frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha/2}}{d} \right)^2 \qquad \text{im zweiseitigen Fall}$$

und

$$n \geq s_{m-1}^2 \left(\frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha}}{d} \right)^2 \qquad \text{im einseitigen Fall.}$$

Jetzt wird eine Stichprobe der Größe n erhoben, wobei die Daten $x_1, \ldots, x_m$ **nicht noch einmal** verwendet werden dürfen.

12.5 p-Werte

Die meisten Statistik-Programme erwarten für die Auswertung eines Tests nicht die Eingabe eines Niveaus, sondern geben stattdessen einen so genannten **p-Wert** aus. Die Bedeutung diese: Ist der p-Wert kleiner als das gewählte Niveau α, so verwirft der Test zum Niveau α. Ist hingegen $p > \alpha$, so verwirft der Test nicht zum Niveau α. Etwas vereinfachend (und auch leicht fehlerhaft) ausgedrückt: Der p-Wert ist das kleinste Niveau, zu dem der Test noch verwerfen würde.

Diese Interpretation ist deshalb fehlerhaft, weil eine statistische Auswertung vorsieht, dass wir das Niveau **vor** der Auswertung festlegen und nicht erst **nachdem** wir den p-Wert kennen. Sie ist vereinfachend, weil sie einen Aspekt unberücksichtigt lässt: wir haben bei den Formulierungen implizit angenommen, dass wir für jedes Niveau α einen Test φ_α haben, der genau das Niveau α hat und so, dass für jede feste Beobachtung x gilt: $\varphi_\alpha(x) \leq \varphi_{\alpha'}(x)$, falls $\alpha \leq \alpha'$. Nur dann ist die Formulierung „ist das kleinste Niveau, zu dem der Test noch verwerfen würde“ sinnvoll.

Bevor wir die allgemeine Situation betrachten, betrachten wir ein Beispiel.

12.5.1 Gaußtest

Wir betrachten zunächst die Situation des linksseitigen Gaußtests.

Die Messgrößen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$–verteilt mit bekanntem $\sigma^2 > 0$ und unbekanntem $\mu \in \mathbb{R}$. Wir wollen mit einem linksseitigen Gaußtest die Hypothese $H_0 =$„$\mu = \mu_0$“ gegen die Alternative $H_1 =$ „$\mu < \mu_0$“ testen. Dabei ist $\mu_0 \in \mathbb{R}$ ein vorgegebener Wert.

Die Teststatistik ist (mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$)

$$T(x) = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Für $\alpha \in (0,1)$ ist der linksseitige Gaußtest φ_α zum Niveau α gegeben durch

$$\varphi(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad T(x) \leq -z_{1-\alpha}.$$

Hierbei ist z_β das β-Quantil der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}_{0,1}$. Offenbar gilt $z_\beta \leq z_{\beta'}$, falls $\beta \leq \beta'$ ist. Also gilt $-z_{1-\alpha} \leq -z_{1-\alpha'}$, falls $\alpha \leq \alpha'$ ist. Es folgt, dass für jede Beobachtung $x \in \mathfrak{X}$ und für $\alpha \leq \alpha'$ gilt:

$$\varphi_\alpha(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad T(x) \leq -z_{1-\alpha} \quad \Longrightarrow \quad T(x) \leq -z_{1-\alpha'} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_{\alpha'}(x) = 1.$$

Mit anderen Worten:

$$(0,1) \to \{0,1\}, \quad \alpha \mapsto \varphi_\alpha(x) \quad \text{ist monoton wachsend (für jedes } x \in \mathfrak{X}). \tag{12.11}$$

Es gibt also eine Zahl $p = p(x) \in [0,1]$ mit der Eigenschaft:

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha > p(x), \\ 0, & \text{falls } \alpha < p(x). \end{cases} \tag{12.12}$$

Dieses $p(x)$ wird **p-Wert** des linksseitigen Gaußtests bei Beobachtung x genannt.

Wichtig ist festzuhalten, dass der p-Wert einer Beobachtung sich danach bemisst, welcher Test verwendet wird. Würden wir den zweiseitigen Gaußtest verwenden, so erhielten wir einen anderen p-Wert für unsere Beobachtung. Daher ist es wichtig, zunächst einen Test festzulegen und dann die Auswertung durchzuführen. Das umgekehrte Verfahren, erst die Daten zu erheben und dann im Statistik-Programm alle Tests anzuklicken, bis einer einen kleinen p-Wert ausgibt, führt zu unbrauchbaren, weil unwissenschaftlichen Ergebnissen.

Wie können wir nun das $p(x)$ von oben explizit berechnen? Für $\alpha < p(x)$ ist $T(x) > -z_{1-\alpha}$, für $\alpha > p(x)$ hingegen $T(x) < -z_{1-\alpha}$. Aus Stetigkeitsgründen gilt Gleichheit für $\alpha = p(x)$, also $T(x) = -z_{1-p(x)}$. Nach der Definition des Quantils folgt (mit Φ die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}_{0,1}$) $(1 - p(x)) = \Phi(-T(x))$, also

$$p(x) = 1 - \Phi(-T(x)) = \Phi(T(x)). \tag{12.13}$$

Beispiel 12.7 Im Beispiel mit den Steinläusen (Beispiel 12.3) hatten wir $\mu_0 = 80$, $\sigma^2 = 25$ und die folgenden zehn Messwerte erhoben:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	80	70	82	71	73	75	95	76	68	72

Wir erhalten: $\overline{x} = 76.2$, also

$$T(x) = \frac{\overline{x} - 80}{5/\sqrt{10}} = -2.403,$$

und damit den p-Wert

$$p(x) = \Phi(T(x)) = \Phi(-2.403) = 0.0081232.$$

Der linksseitige Gaußtest verwirft also $H_0 =$ „$\mu = 80$“ zu Gunsten von $H_1 =$ „$\mu < \mu_0$“, falls das Niveau **größer** als 0.81232% gewählt wurde.

Zum Vergleich: Der in Beispiel 12.3 verwendete **zweiseitige** Gaußtest hatte zum Niveau 1% die Nullhypothese nicht verworfen. Wenn wir (vor Erhebung der Daten!) die linksseitige Alternative formulieren, so können wir gegen diese Alternative die Nullhypothese zum Niveau 1% verwerfen, da $p(x) < 1\%$ ist. $\diamond$

Für den rechtsseitigen und beidseitigen Gaußtest erhalten wir mit einer ähnlichen Argumentation die p-Werte. Wir lassen die Rechnungen aus und stellen lediglich die Ergebnisse in einem Satz zusammen.

Satz 12.8 (p-Werte des Gaußtests) *Für den Gaußtest (mit Teststatistik $T(x) = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$) erhalten wir folgende p-Werte:*

$$\begin{aligned} &\textit{linksseitiger Gaußtest } (H_1 = \text{„}\mu < \mu_0\text{“}): && p(x) = \Phi(T(x)) = 1 - \Phi(-T(x)). \\ &\textit{rechtsseitiger Gaußtest } (H_1 = \text{„}\mu > \mu_0\text{“}): && p(x) = \Phi(-T(x)) = 1 - \Phi(T(x)). \\ &\textit{beidseitiger Gaußtest } (H_1 = \text{„}\mu \neq \mu_0\text{“}): && p(x) = 2\big(1 - \Phi(|T(x)|)\big). \end{aligned}$$

Beispiel 12.9 Im Beispiel mit den Steinläusen hatten wir ursprünglich einen beidseitigen Gaußtest benutzt. Für diesen bekommen wir bei der obigen Beobachtung den p-Wert

$$p(x) = 2(1 - \Phi(2.403)) = 1.6247\%.$$

Der zweiseitige Gaußtest zum Niveau α verwirft also H_0, falls $\alpha > 1.6247\%$ gewählt wurde, sonst nicht. Im ursprünglichen Beispiel war $\alpha = 1\%$, also konnte nicht verworfen werden. $\diamond$

12.5.2 t-Test

Wir betrachten nun die Situation wie oben, jedoch mit unbekanntem σ^2. Wir müssen also als Teststatistik

$$T(x) = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s_{n-1}/\sqrt{n}}$$

wählen, wo

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2\right)$$

der erwartungstreue Varianzschätzer ist. Wir bezeichnen mit t_{n-1} die Verteilungsfunktion der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden. Es gilt also für jedes $y \in \mathbb{R}$ unter H_0

$$\mathbf{P}[T(X) \leq y] = t_{n-1}(y).$$

Die Werte von t_{n-1} sind tabelliert (Anhang A.4). Ähnlich wie für den Gaußtest können wir den p-Wert explizit berechnen:

Satz 12.10 (p-Werte des t-Tests) *Für den t-Test erhalten wir folgende p-Werte:*

$$\text{linksseitiger } t\text{-Test } (H_1 = „\mu < \mu_0“): \quad p(x) = t_{n-1}(T(x)) = 1 - t_{n-1}(-T(x)).$$

$$\text{rechtsseitiger } t\text{-Test } (H_1 = „\mu > \mu_0“): \quad p(x) = t_{n-1}(-T(x)) = 1 - t_{n-1}(T(x)).$$

$$\text{beidseitiger } t\text{-Test } (H_1 = „\mu \neq \mu_0“): \quad p(x) = 2\big(1 - t_{n-1}(|T(x)|)\big).$$

Beispiel 12.11 (Straußeneier) Wir betrachten das Beispiel 11.22 mit Straußeneiern noch einmal. Dort war $H_0 = „\mu = 110“$ und $H_1 = „\mu \neq 110“$. Es wurden $n = 10$ Eier gewogen mit den Ergebnissen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	106	110	100	103	109	101	97	103	111	99

Hieraus folgt: $T(x) = \frac{103.9-110}{4.886/\sqrt{10}} = -3.9476$ Wir schauen in der Tabelle den Wert (Abrunden zur Sicherheit!) $t_9(3.9) = 0.99819$ nach. Als p-Wert erhalten wir

$$p(x) = 2(1 - t_9(|T(x)|)) = 2(1 - t_9(3.90)) = 0.00362 = 0.362\%.$$

Der beidseitige t-Test verwirft also zum Niveau α, falls $\alpha > 0.362\%$ gewählt wurde. Tatsächlich hatten wir als Niveau $\alpha = 5\%$ festgelegt und der Test hatte H_0 verworfen. ◇

12.5.3 Formale Definition des p-Werts

Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir noch die formale Definition des p-Werts bringen, die unabhängig von dem gewählten Testverfahren ist.

Definition 12.12 (p-Wert) *Sei $(\varphi_\alpha)_\alpha$ eine Familie von Tests mit der Eigenschaft: φ_α hat Niveau α für jedes α.*

Für eine Beobachtung $x \in \mathfrak{X}$ heißt $p(x)$ der p-Wert, falls

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } \alpha > p(x), \\ 0, & \textit{falls } \alpha < p(x). \end{cases}$$

12.6 Lagetests bei unbekannten Verteilungen

Ein Bauer düngt seine Felder mit dem klassischen „Düngefix 2000“. Ein Vertreter der Firma „Guanoforte“ behauptet, der Ertrag wäre bei Verwendung seines Düngers größer. Dies soll getestet werden.

Das erste Problem, das sich stellt, ist: was **genau** heißt *besser*? Wäre der Ertrag einfach eine (deterministische) Zahl, so wäre die größere Zahl besser. Wir nehmen aber an, dass der Ertrag (in Doppelzentnern/Hektar) auf einzelnen (gleich großen) Feldern zufällig ist mit einer Verteilung gemäß der Verteilungsfunktion F_1 bei dem konventionellen Mittel und F_2 bei dem neuen Mittel. Außerdem nehmen wir an, dass die Erträge auf unterschiedlichen Feldern unabhängig sind. Es bieten sich zwei einfache Kriterien an, um F_1 und F_2 zu vergleichen:

(i) Ist $F_1(x) \geq F_2(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, so ist F_2 *besser* als F_1 in dem Sinne, dass jedes Quantil von F_2 rechts vom entsprechenden Quantil von F_1 liegt. Bei jeder Bewertung der Erträge, die *mehr* als *besser* einstuft, wird F_2 gegen F_1 zu bevorzugen sein.

(ii) In vielen Fällen ist die Überlegenheit eines Mittels nicht so eindeutig wie in (i). Stattdessen werden von F_2 nur gewisse Eigenschaften besser sein als bei F_1. Etwa der Erwartungswert oder der Median. Aber auch viele andere Bewertungsmaßstäbe sind möglich und werden verwendet.

Wir werden in diesem Abschnitt zwei Testverfahren untersuchen, die sich durch ihre Einfachheit auszeichnen: den Mediantest (als einen Test zur Kategorie (ii)) und den Wilcoxon Rangtest (als Test für die Kategorie (i)).

12.6.1 Mediantest (ein 1-Stichprobentest)

Bei diesem Test wird angenommen, dass vom konventionellen Mittel der Median bekannt ist und gleich m_0 ist. Dagegen soll getestet werden, ob das neue Mittel einen anderen Median hat. Es werden also nur Stichproben mit dem neuen Mittel erhoben und ein Test für dessen Median durchgeführt. Da in diesem Zusammenhang F_1 gar nicht auftaucht, werden wir kurz $F = F_2$ schreiben.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass F stetig ist.

Wir formulieren als Testproblem: Der Beobachtungsraum ist $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$. Falls F die wahre Verteilungsfunktion ist, sind die einzelnen (reellwertigen) Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und verteilt mit Verteilungsfunktion $F(t) = \mathbf{P}_F[X_i \leq t]$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Die Nullhypothese ist: der Median m_F von F ist m_0, also $F(m_0) = \frac{1}{2}$.

Die rechtsseitige Gegenhypothese lautet: $H_1 =$ „ $m_F > m_0$ “. Als Teststatistik ermitteln wir einfach die Anzahl der Beobachtungen von den $x_1, \ldots, x_n$, die größer als m_0 sind. Sind dies erheblich mehr als die Hälfte der Beobachtungen, so scheint H_1 zu stimmen. Formal definieren wir also

$$T(x) = \#\{i = 1, \ldots, n : \, x_i > m_0\} = \text{Anzahl der } i \text{ mit } x_i > m_0.$$

Unter H_0 ist $\mathbf{P}_F[X_i > m_0] = \frac{1}{2}$, also ist $T(X)$ binomialverteilt mit Parametern n und $\frac{1}{2}$:

$$T(x) \sim b_{n,1/2}, \qquad \text{unter } H_0.$$

Der Mediantest φ zum Niveau α verwirft H_0 zu Gunsten von H_1, falls $T(x) \geq K_\alpha$ ist, wobei K_α so zu wählen ist, dass $\mathbf{P}_F[T(X) \geq K_\alpha] \leq \alpha$ gilt, falls F den Median m_0 hat. Es folgt als Bedingung an das K_α

$$\sum_{l=K_\alpha}^{n} b_{n,1/2}(l) = \sum_{l=K_\alpha}^{n} \binom{n}{l} 2^{-n} \overset{!}{\leq} \alpha. \tag{12.14}$$

Als p-Wert für die Beobachtung x bekommen wir

$$p(x) = 2^{-n} \sum_{l=T(x)}^{n} \binom{n}{l}. \tag{12.15}$$

Ist n groß, so können wir K_α und $p(x)$ durch Normalapproximation annähern:

$$K_\alpha \approx \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z_{1-\alpha} \tag{12.16}$$

und

$$p(x) \approx 1 - \Phi\left(\frac{2T(x) - n}{\sqrt{n}}\right), \tag{12.17}$$

wobei z_β das β-Quantil der Normalverteilung bezeichnet und Φ deren Verteilungsfunktion.

Analog erhalten wir für die linksseitige Alternative $H_1 =$ „$m_F < m_0$" den Verwerfungsbereich $T(x) \leq n - K_\alpha$, wobei K_α wie oben gewählt wird, und den p-Wert

$$p(x) = 2^{-n} \sum_{l=0}^{T(x)} \binom{n}{l}. \tag{12.18}$$

Speziell gilt für die Normalapproximation

$$\varphi(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad T(x) \leq \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z_{1-\alpha} \tag{12.19}$$

und

$$p(x) \approx 1 - \Phi\left(\frac{n - 2T(x)}{\sqrt{n}}\right). \tag{12.20}$$

Beispiel 12.13 Mit den klassischen Autoreifen einer Firma beträgt der Bremsweg im Mittel (Median) $m_0 = 100$ Meter. Ein neuer Reifen soll getestet werden. Die Nullhypothese ist, dass der Median m mit den neuen Reifen ebenfalls 100 ist (oder größer), die Gegenhypothese ist $m < 100$. Als Niveau legen wir $\alpha = 0.05$ fest.

Nun wird festgelegt, dass $n = 8$ Bremsversuche gemacht werden. Es ist

$$\sum_{l=6}^{8} \binom{8}{l} 2^{-8} = \frac{1}{256}\left[\binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}\right] = \frac{28+8+1}{256} \approx 0.145 = 14.5\% > 5\%$$

und

$$\sum_{l=7}^{8} \binom{8}{l} 2^{-8} = \frac{1}{256}\left[\binom{8}{7} + \binom{8}{8}\right] = \frac{8+1}{256} \approx 0.0352 = 3.52\% < 5\%.$$

Also ist $K_{0.05} = 7$, und der Test verwirft H_0, falls $T(x) \leq 8 - 7 = 1$. Jetzt werden die Daten erhoben:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	98.3	98.1	100.7	98.5	98.2	98.6	99.6	100.2

Zwei Werte sind größer als 100. Es ist also $T(x) = 2$. Damit kann der Test H_0 zum Niveau 5% nicht verwerfen. Als p-Wert berechnen wir

$$p(x) = \frac{1}{256} \sum_{l=0}^{2} \binom{8}{l} \approx 14.5\%.$$

Dieser p-Wert liefert keine besondere Signifikanz des Ergebnisses.

Was wäre herausgekommen, wenn wir statt des Mediantests den linksseitigen t-Test verwendet hätten? Aus den Daten berechnen wir $\overline{x} = 99.025$ und $s_{n-1} = 1.002496883$, also als Wert der t-Statistik $\frac{\overline{x}-100}{s_{n-1}/\sqrt{8}} = -2.750847901$. In der Tabelle schauen wir $t_7(2.75) = 0.98575$ nach und erhalten als p-Wert unserer Beobachtung

$$p(x) = 1 - t_{n-1}(-2.75) = 1 - t_7(2.75) = 0.01425 \approx 1.4\%.$$

Wieso kommt hier ein so viel besserer Wert heraus als bei dem Mediantest? Der t-Test macht die Annahme, dass die zugrunde liegenden Verteilungen Normalverteilungen sind. Nur in diesem Fall ist die t-Statistik auch wirklich t_{n-1}-verteilt. Ist diese Annahme erfüllt, so ist der t-Test besser als alle anderen Tests. Ist die Annahme jedoch nicht erfüllt, so kann man den t-Test schlichtweg nicht anwenden, weil das Niveau nicht eingehalten wird, bzw. die Berechnung des p-Wertes in diesem Fall nicht korrekt ist.

Kurz: ist die Verteilung nicht normal, so kann der t-Test nicht verwendet werden. Ist die Verteilung normal, so ist der t-Test sehr gut. $\diamond$

12.6.2 Wilcoxon Test (ein 2-Stichprobentest)

Es soll hier getestet werden, ob die unbekannte Verteilungsfunktion F_2 besser ist als die ebenfalls unbekannte Verteilungsfunktion F_1, und zwar besser in dem Sinne, dass $F_2 \leq F_1$ ist. Wir stellen hier knapp das wichtigste Testverfahren vor, das auf so genannten Rangsummen basiert.

Als Nullhypothese formulieren wir
$$H_0 = „F_1 = F_2“$$
und als Gegenhypothese
$$H_1 = „F_2 \leq F_1,\ F_2 \neq F_1“.$$

Wir wollen, um technische Probleme zu vermeiden und den Blick auf des Wesentlich zu lenken, annehmen, dass F_1 und F_2 stetig sind. Diese Annahme stellt sicher, dass keine zwei Beobachtungen den selben Wert haben. Wir sehen gleich, wozu das nützlich ist.

Um H_0 gegen H_1 zu testen, müssen zwei Stichproben erhoben werden:

- eine, bei der die Beobachtungen $X_1, \dots, X_m$ unabhängig sind und nach F_1 verteilt,
- und eine, bei der die Beobachtungen $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig sind und nach F_2 verteilt.

Zusätzlich nehmen wir an, dass die Stichproben unabhängig voneinander erhoben werden (also an unterschiedlichen Patienten, auf unterschiedlichen Feldern usw.).

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Als **Rang** der Beobachtung y_i bezeichnen wir die Anzahl der Beobachtung von $x_1, \dots, x_m$ und $y_1, \dots, y_n$, die kleiner oder gleich y_i sind. Also
$$\text{Rang}_i^y := \#\{k : x_k \leq y_i\} + \#\{l : y_l \leq y_i\}.$$
Analog setzen wir
$$\text{Rang}_j^x := \#\{k : x_k \leq x_j\} + \#\{l : y_l \leq x_j\}.$$
Ist also $\text{Rang}_i^y = 1$, so ist y_i die kleinste *aller* Beobachtungen. Ist $\text{Rang}_i^y = 2$, so ist y_i die zweitkleinste aller Beobachtungen und so weiter.

Beispiel 12.14 Seien $m = 3$ und $n = 4$ und $x_1 = 8$, $x_2 = 4.2$, $x_3 = 3.5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 19$, $y_3 = -4$, $y_4 = 4.6$. Wir ordnen *alle* Beobachtungen der Reihe nach:

Rang	1	2	3	4	5	6	7
Wert	-4	1	3.5	4.2	4.6	8	19
Herkunft	y_3	y_1	x_3	x_2	x_1	y_4	y_2

Dann ist beispielsweise $\text{Rang}_2^x = 4$ und $\text{Rang}_1^y = 2$. $\diamond$

Unter der Gegenhypothese sind die Werte von $Y_1, \ldots, Y_n$ tendenziell größer als die der $X_1, \ldots, X_m$, das heißt, die Ränge dieser Beobachtungen sind groß. Um aus den vielen Rängen *eine* Maßzahl zu erzeugen, summieren wir alle Ränge der Y-Beobachtungen auf und nennen

$$W(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rang}_i^y$$

die **Rangsumme** der Beobachtungen $y_1, \ldots, y_n$. Die Rangsumme wird oft auch **Wilcoxon Statistik** genannt. In Beispiel 12.14 ist

$$W(x,y) = 1 + 2 + 6 + 7 = 16.$$

Die Verteilung der Wilcoxon Statistik $W(X,y)$ (bei zufälliger Beobachtung X und fester Beobachtung y) hängt unter der Hypothese H_0 nicht von der konkreten Verteilungsfunktion F_1 ab. Daher können wir mit ihrer Hilfe einen Test konstruieren, der immer das gewünschte Niveau einhält, egal, welches die zugrunde liegende Verteilung ist. Solche Tests nennen wir verteilungsfrei.

Die Verteilung von $W(X,Y)$ unter H_0 heißt **Wilcoxon Verteilung** mit Parametern m und n, kurz $\mathrm{Wil}_{m,n}$.

Für kleine Werte von m und n sind die Quantile $c_{m,n;\,\beta}$ von $\mathrm{Wil}_{m,n}$ tabelliert. Meist findet man jedoch nicht $c_{m,n,\ \beta}$ selber, sondern die Größe

$$u_{m,n;\,\beta} = c_{m,n;\,\beta} - \frac{m(m+1)}{2}. \qquad (12.21)$$

Diese Quantile der so genannten **U-Statistik** sind in Anhang A.8 tabelliert bis $m = 45$ und $n = 50$.

Für große Werte von m und n gilt eine Normalapproximation:

Satz 12.15 *(i) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathbf{E}_{H_0}[W(X,Y)] = \frac{1}{2}mn + \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{Var}_{H_0}[W(X,Y)] = \frac{mn(m+n+1)}{12}.$$

(ii) Für große m, n gilt unter H_0

$$\widetilde{W}(X,Y) := \frac{W - \frac{n(m+n+1)}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}} \sim_{approx.} \mathcal{N}_{0,1}. \qquad (12.22)$$

Das heißt,

$$c_{m,n;1-\alpha} \approx \frac{n(m+n+1)}{2} + \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}\, z_{1-\alpha}.$$

Der rechtsseitige Wilcoxon-Test für $H_0 =$ „$F_2 = F_1$“ gegen $H_1 =$ „$F_2 \leq F_1$“

- verwirft H_0 gegen H_1 auf dem Niveau α, falls

$$W(x,y) > c_{m,n;\,1-\alpha} = u_{m,n;\,1-\alpha} + \frac{m(m+1)}{2}$$

- hat p-Wert

$$p(x,y) = 1 - \mathrm{Wil}_{m,n}\big(W(x,y)\big) \approx 1 - \Phi\big(\widetilde{W}(x,y)\big),$$

  wobei die Approximation für große m, n gilt.

Der linksseitige Wilcoxon-Test für $H_0 = „F_2 = F_1“$ gegen $H_1 = „F_2 \geq F_1“$

- verwirft H_0 gegen H_1 auf dem Niveau α, falls
$$\begin{aligned} W(x,y) > c_{m,n;\,\alpha} &= (m+n+1)n - c_{m,n;\,1-\alpha} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + u_{m,n;\,\alpha} = \frac{(2m+n+1)n}{2} - u_{m,n;\,1-\alpha} \end{aligned}$$
- hat p-Wert
$$p(x,y) = 1 - \mathrm{Wil}_{m,n}\big(W(x,y)\big) \approx 1 - \Phi\big(-\widetilde{W}(x,y)\big),$$
wobei die Approximation für große m, n gilt.

Beispiel 12.16 Wir kommen zu unserem Bauern und seinem Düngeproblem zurück. Um die Behauptung des Vertreters zu testen, wird eine Stichprobe von $m = 8$ Beobachtungen $X_1, \ldots, X_8$ mit dem bisherigen Dünger und eine Stichprobe von $n = 10$ Beobachtungen $Y_1, \ldots, Y_{10}$ mit dem neuen Dünger geplant. Mit dem rechtsseitigen Wilcoxon-Test zum Niveau $\alpha = 5\%$ soll $H_0 = „F_1 = F_2“$ gegen $H_1 = „F_1 \geq F_2“$ getestet werden.

In der Tabelle schauen wir den Wert $u_{m,n;\,1-\alpha} = u_{8,10;\,0.95} = 59$ nach und berechnen
$$c_{8,10;\,0.95} = 59 + \frac{10(10+1)}{2} = 59 + 55 = 114.$$

Zum Vergleich der Wert, den die Normalapproximation liefert: Aus der Tabelle nehmen wir den Wert $z_{0.95} = 1.64485$ und bestimmen
$$c_{8,10;\,0.95} \approx 1.64485\sqrt{\frac{8 \cdot 10 \cdot (8+10+1)}{12}} + \frac{10(10+8+1)}{2} = 18.51 + 95 = 113.51.$$

Auch die Normalapproximation liefert also $c_{8,10;\,0.95} = 114$.

Jetzt werden die Daten erhoben:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	105.7	95.3	85.4	102.6	98.1	97.1	104	102.4

und

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	96.2	99.1	116	112	114.9	108.9	107	82	99.4	105.3

Um die Rangsumme der y_i zu bestimmen, sortieren wir die Daten der Größe nach und unterstreichen die Zahlen, die Werte von einem der y_i waren:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wert	<u>82</u>	85.4	95.3	<u>96.2</u>	97.1	98.1	<u>99.1</u>	<u>99.4</u>	102.4

Rang	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Wert	102.6	104	<u>105.3</u>	105.7	<u>107</u>	<u>108.9</u>	<u>112</u>	<u>114.9</u>	<u>116</u>

Wir erhalten als Rangsumme der $y_1, \ldots, y_{10}$
$$W(x,y) = 1 + 4 + 7 + 8 + 12 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 112 < 114 = c_{8,10;\,0.95}.$$

Also verwirft der Wilcoxon-Test zum Niveau 5% die Nullhypothese nicht.

Mit Hilfe der Normalapproximation können wir einen Näherungswert für den p-Wert der Beobachtung angeben:

$$p(x,y) = 1 - \Phi(\widetilde{W}(x,y)) = 1 - \Phi((112-95)/11.2546) \approx 1 - \Phi(1.51) = 1 - 0.9332 = 6.68\%.$$

Dies deutet an, dass die Gegenhypothese nicht ganz abwegig ist, aber mehr Daten erhoben werden müssten, um ein klareres Ergebnis zu erhalten. $\diamond$

A.1 Tabelle der Normalverteilung

Tabelle des Integrals $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt$. Beispiel: $\Phi(1.23) = 0.89065$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.10	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.20	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.30	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.40	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.50	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.60	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.70	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.80	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.90	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.00	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.10	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.20	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.30	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.40	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.50	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.60	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.70	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.80	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.90	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.00	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.10	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.20	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.30	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.40	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.50	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.60	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.70	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.80	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.90	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.00	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.10	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.20	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.30	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.40	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.50	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.60	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.70	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.80	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.90	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

A.2 Quantile der Normalverteilung

Tabelliert ist das β-Quantil z_β der Normalverteilung $\mathcal{N}_{0,1}$.

β	z_β
0.8	0.84162
0.9	1.28155
0.95	1.64485
0.975	1.95996
0.98	2.05375
0.99	2.32635
0.995	2.57583
0.9975	2.80703
0.998	2.87816
0.999	3.09023
0.9995	3.29053

A.3 Quantile der t-Verteilung

Tabelliert ist das α-Quantil $t_{n;\,\alpha}$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

n	$t_{n;\,0.9}$	$t_{n;\,0.95}$	$t_{n;\,0.975}$	$t_{n;\,0.99}$	$t_{n;\,0.995}$
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3026	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7470	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8596	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	1.3164	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	1.3070	1.6909	2.0322	2.4412	2.7284
35	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	1.3048	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	1.3031	1.6838	2.0211	2.4233	2.7045
41	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	1.3016	1.6811	2.0167	2.4162	2.6951
44	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896

n	$t_{n;\,0.9}$	$t_{n;\,0.95}$	$t_{n;\,0.975}$	$t_{n;\,0.99}$	$t_{n;\,0.995}$
46	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	1.2998	1.6779	2.0117	2.4084	2.6846
48	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
54	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
59	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
64	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6548
69	1.2939	1.6672	1.9950	2.3816	2.6490
74	1.2931	1.6657	1.9925	2.3778	2.6439
79	1.2924	1.6644	1.9904	2.3745	2.6395
84	1.2917	1.6632	1.9886	2.3716	2.6356
89	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
94	1.2906	1.6612	1.9855	2.3667	2.6292
99	1.2902	1.6604	1.9842	2.3646	2.6264
104	1.2897	1.6596	1.9830	2.3627	2.6239
109	1.2894	1.6590	1.9820	2.3610	2.6217
114	1.2890	1.6583	1.9810	2.3595	2.6196
119	1.2887	1.6578	1.9801	2.3581	2.6178
124	1.2884	1.6572	1.9793	2.3568	2.6161
129	1.2882	1.6568	1.9785	2.3556	2.6145
134	1.2879	1.6563	1.9778	2.3545	2.6130
139	1.2877	1.6559	1.9772	2.3535	2.6117
144	1.2875	1.6555	1.9766	2.3525	2.6104
149	1.2873	1.6551	1.9760	2.3516	2.6092
154	1.2871	1.6548	1.9755	2.3508	2.6081
159	1.2869	1.6545	1.9750	2.3500	2.6071
164	1.2867	1.6542	1.9745	2.3493	2.6061
169	1.2866	1.6539	1.9741	2.3486	2.6052
174	1.2864	1.6537	1.9737	2.3480	2.6044
179	1.2863	1.6534	1.9733	2.3474	2.6036
184	1.2862	1.6532	1.9729	2.3468	2.6028
189	1.2860	1.6530	1.9726	2.3462	2.6021
194	1.2859	1.6528	1.9723	2.3457	2.6014
199	1.2858	1.6526	1.9720	2.3452	2.6008
219	1.2854	1.6518	1.9709	2.3435	2.5985
239	1.2851	1.6512	1.9699	2.3420	2.5966
259	1.2848	1.6508	1.9692	2.3408	2.5949
279	1.2846	1.6503	1.9685	2.3398	2.5936
299	1.2844	1.6500	1.9679	2.3389	2.5924
349	1.2840	1.6492	1.9668	2.3371	2.5900
399	1.2837	1.6487	1.9659	2.3357	2.5882
499	1.2832	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857
999	1.2824	1.6464	1.9623	2.3301	2.5808
∞	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5758

A.4 Tabelle der t-Verteilung

Tabelliert ist die Verteilungsfunktion $t_n(x)$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

$x \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	14	19
1.00	.75000	.78868	.80450	.81305	.81839	.82204	.82469	.82670	.82828	.83286	.83506
1.05	.75776	.79806	.81458	.82352	.82910	.83292	.83569	.83780	.83945	.84425	.84655
1.10	.76515	.80698	.82416	.83346	.83927	.84325	.84614	.84834	.85006	.85506	.85746
1.15	.77217	.81545	.83325	.84289	.84892	.85305	.85604	.85832	.86011	.86530	.86779
1.20	.77886	.82350	.84187	.85182	.85805	.86232	.86541	.86777	.86961	.87497	.87756
1.25	.78522	.83113	.85004	.86028	.86669	.87108	.87427	.87669	.87859	.88410	.88676
1.30	.79129	.83838	.85777	.86827	.87485	.87935	.88262	.88510	.88705	.89270	.89542
1.35	.79706	.84525	.86508	.87582	.88255	.88714	.89048	.89302	.89501	.90078	.90356
1.40	.80257	.85176	.87200	.88295	.88980	.89448	.89788	.90046	.90249	.90836	.91118
1.45	.80782	.85794	.87853	.88967	.89663	.90138	.90483	.90745	.90950	.91545	.91832
1.50	.81283	.86380	.88471	.89600	.90305	.90786	.91135	.91400	.91607	.92209	.92498
1.55	.81762	.86936	.89054	.90196	.90908	.91394	.91746	.92013	.92222	.92828	.93118
1.60	.82219	.87463	.89605	.90758	.91475	.91964	.92318	.92587	.92797	.93404	.93695
1.65	.82656	.87964	.90125	.91286	.92007	.92498	.92854	.93122	.93333	.93940	.94231
1.70	.83075	.88438	.90615	.91782	.92506	.92998	.93354	.93622	.93833	.94439	.94728
1.75	.83475	.88889	.91079	.92249	.92974	.93465	.93820	.94088	.94298	.94900	.95187
1.80	.83859	.89317	.91516	.92688	.93412	.93902	.94256	.94522	.94730	.95328	.95612
1.85	.84226	.89723	.91929	.93101	.93823	.94310	.94662	.94926	.95132	.95723	.96004
1.90	.84579	.90109	.92318	.93488	.94207	.94692	.95040	.95302	.95506	.96089	.96364
1.95	.84917	.90476	.92686	.93852	.94566	.95047	.95392	.95650	.95852	.96425	.96696
2.00	.85242	.90825	.93034	.94194	.94903	.95379	.95719	.95974	.96172	.96736	.97000
2.05	.85554	.91157	.93362	.94515	.95218	.95688	.96023	.96275	.96469	.97021	.97279
2.10	.85854	.91472	.93672	.94817	.95512	.95976	.96306	.96553	.96744	.97283	.97534
2.15	.86142	.91773	.93965	.95101	.95788	.96245	.96569	.96811	.96998	.97524	.97768
2.20	.86420	.92060	.94241	.95367	.96045	.96495	.96813	.97050	.97233	.97745	.97981
2.25	.86688	.92332	.94503	.95618	.96286	.96728	.97040	.97272	.97450	.97947	.98175
2.30	.86945	.92593	.94751	.95853	.96511	.96945	.97250	.97476	.97650	.98132	.98352
2.35	.87194	.92841	.94985	.96074	.96722	.97147	.97446	.97666	.97835	.98302	.98513
2.40	.87433	.93077	.95206	.96282	.96919	.97335	.97627	.97841	.98005	.98457	.98660
2.45	.87665	.93304	.95416	.96478	.97103	.97510	.97795	.98003	.98162	.98598	.98793
2.50	.87888	.93519	.95615	.96662	.97275	.97674	.97950	.98153	.98307	.98727	.98913
2.55	.88104	.93726	.95803	.96835	.97437	.97825	.98095	.98291	.98440	.98844	.99022
2.60	.88312	.93923	.95981	.96998	.97588	.97967	.98229	.98419	.98563	.98951	.99121
2.65	.88514	.94112	.96150	.97151	.97729	.98099	.98353	.98537	.98676	.99049	.99210
2.70	.88709	.94292	.96311	.97295	.97861	.98221	.98468	.98646	.98780	.99137	.99291
2.75	.88898	.94465	.96463	.97431	.97984	.98335	.98575	.98747	.98876	.99218	.99363
2.80	.89081	.94630	.96607	.97559	.98100	.98442	.98674	.98840	.98964	.99291	.99429
2.85	.89258	.94789	.96745	.97680	.98209	.98541	.98766	.98926	.99046	.99358	.99488
2.90	.89430	.94941	.96875	.97794	.98310	.98633	.98851	.99005	.99120	.99418	.99541
2.95	.89597	.95087	.96999	.97902	.98406	.98719	.98930	.99079	.99189	.99473	.99589

Tabelle der t-Verteilung

Tabelliert ist die Verteilungsfunktion $t_n(x)$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

$x \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	14	19
3.00	.89758	.95227	.97117	.98003	.98495	.98800	.99003	.99146	.99252	.99522	.99632
3.05	.89915	.95361	.97229	.98099	.98579	.98874	.99071	.99209	.99310	.99568	.99671
3.10	.90067	.95490	.97335	.98189	.98657	.98944	.99134	.99267	.99364	.99608	.99705
3.15	.90215	.95614	.97437	.98274	.98731	.99009	.99192	.99320	.99413	.99645	.99736
3.20	.90359	.95733	.97533	.98355	.98800	.99070	.99247	.99369	.99458	.99679	.99764
3.25	.90498	.95847	.97626	.98431	.98865	.99127	.99297	.99415	.99500	.99709	.99789
3.30	.90634	.95958	.97713	.98503	.98926	.99180	.99344	.99457	.99538	.99737	.99812
3.35	.90766	.96064	.97797	.98572	.98984	.99229	.99387	.99496	.99574	.99762	.99832
3.40	.90895	.96166	.97877	.98636	.99037	.99275	.99428	.99532	.99606	.99784	.99850
3.45	.91020	.96264	.97953	.98697	.99088	.99318	.99465	.99565	.99636	.99805	.99866
3.50	.91141	.96359	.98026	.98755	.99136	.99359	.99500	.99596	.99664	.99823	.99880
3.55	.91260	.96450	.98095	.98810	.99181	.99396	.99533	.99625	.99689	.99840	.99893
3.60	.91375	.96538	.98162	.98862	.99223	.99432	.99563	.99651	.99713	.99855	.99905
3.65	.91488	.96623	.98225	.98911	.99263	.99465	.99591	.99675	.99734	.99869	.99915
3.70	.91598	.96705	.98286	.98958	.99300	.99496	.99617	.99698	.99754	.99881	.99924
3.75	.91705	.96784	.98344	.99003	.99335	.99525	.99642	.99719	.99772	.99892	.99932
3.80	.91809	.96860	.98400	.99045	.99369	.99552	.99664	.99738	.99789	.99902	.99940
3.85	.91911	.96934	.98453	.99085	.99400	.99577	.99685	.99756	.99805	.99912	.99946
3.90	.92010	.97005	.98504	.99123	.99430	.99601	.99705	.99773	.99819	.99920	.99952
3.95	.92107	.97074	.98553	.99159	.99457	.99623	.99723	.99788	.99832	.99927	.99957
4.00	.92202	.97140	.98600	.99193	.99484	.99644	.99740	.99803	.99844	.99934	.99962
4.05	.92295	.97205	.98644	.99226	.99509	.99664	.99756	.99816	.99856	.99940	.99966
4.10	.92385	.97267	.98687	.99257	.99532	.99682	.99771	.99828	.99866	.99946	.99970
4.15	.92473	.97327	.98729	.99287	.99554	.99699	.99785	.99840	.99876	.99951	.99973
4.20	.92560	.97386	.98768	.99315	.99576	.99716	.99798	.99850	.99885	.99955	.99976
4.25	.92644	.97442	.98806	.99342	.99595	.99731	.99810	.99860	.99893	.99960	.99978
4.30	.92727	.97497	.98843	.99368	.99614	.99745	.99822	.99869	.99900	.99963	.99981
4.35	.92807	.97550	.98878	.99392	.99632	.99759	.99832	.99878	.99907	.99967	.99983
4.40	.92887	.97602	.98912	.99415	.99649	.99772	.99842	.99886	.99914	.99970	.99985
4.45	.92964	.97652	.98944	.99438	.99665	.99784	.99851	.99893	.99920	.99973	.99986
4.50	.93040	.97700	.98975	.99459	.99680	.99795	.99860	.99900	.99926	.99975	.99988
4.55	.93114	.97747	.99005	.99479	.99694	.99805	.99868	.99906	.99931	.99977	.99989
4.60	.93186	.97792	.99034	.99498	.99708	.99815	.99876	.99912	.99935	.99979	.99990
4.65	.93257	.97837	.99062	.99517	.99721	.99825	.99883	.99918	.99940	.99981	.99991
4.70	.93327	.97879	.99089	.99535	.99733	.99834	.99890	.99923	.99944	.99983	.99992
4.75	.93395	.97921	.99115	.99551	.99745	.99842	.99896	.99928	.99948	.99984	.99993
4.80	.93462	.97962	.99140	.99568	.99756	.99850	.99902	.99932	.99951	.99986	.99994
4.85	.93528	.98001	.99164	.99583	.99766	.99857	.99907	.99936	.99955	.99987	.99994
4.90	.93592	.98039	.99187	.99598	.99776	.99864	.99912	.99940	.99958	.99988	.99995
4.95	.93655	.98076	.99209	.99612	.99786	.99871	.99917	.99944	.99960	.99989	.99996

Tabelle der t-Verteilung

Tabelliert ist die Verteilungsfunktion $t_n(x)$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

$x \setminus n$	24	29	39	49	59	69	79	89	99	149	199
1.00	.83636	.83721	.83826	.83889	.83930	.83960	.83982	.83999	.84013	.84053	.84074
1.05	.84791	.84880	.84991	.85057	.85100	.85131	.85154	.85172	.85186	.85229	.85250
1.10	.85888	.85981	.86096	.86165	.86210	.86242	.86266	.86285	.86300	.86345	.86367
1.15	.86926	.87023	.87143	.87214	.87261	.87294	.87319	.87339	.87354	.87401	.87424
1.20	.87907	.88007	.88131	.88205	.88253	.88288	.88314	.88334	.88350	.88398	.88422
1.25	.88832	.88935	.89063	.89138	.89188	.89224	.89250	.89271	.89288	.89337	.89362
1.30	.89703	.89808	.89938	.90016	.90067	.90104	.90131	.90152	.90169	.90220	.90245
1.35	.90519	.90627	.90760	.90839	.90891	.90929	.90956	.90978	.90995	.91047	.91073
1.40	.91285	.91394	.91529	.91609	.91662	.91700	.91729	.91751	.91768	.91820	.91846
1.45	.92000	.92111	.92247	.92329	.92382	.92421	.92449	.92471	.92489	.92542	.92568
1.50	.92667	.92779	.92917	.92998	.93053	.93091	.93120	.93142	.93160	.93213	.93240
1.55	.93289	.93401	.93539	.93621	.93676	.93714	.93743	.93765	.93783	.93837	.93863
1.60	.93866	.93978	.94117	.94199	.94253	.94292	.94320	.94343	.94361	.94414	.94441
1.65	.94401	.94513	.94651	.94733	.94787	.94826	.94854	.94877	.94894	.94948	.94974
1.70	.94897	.95008	.95145	.95226	.95280	.95318	.95347	.95369	.95386	.95439	.95465
1.75	.95355	.95465	.95601	.95681	.95734	.95772	.95800	.95822	.95839	.95891	.95917
1.80	.95778	.95886	.96020	.96099	.96151	.96188	.96216	.96238	.96255	.96306	.96331
1.85	.96167	.96274	.96405	.96483	.96534	.96570	.96597	.96618	.96635	.96685	.96710
1.90	.96524	.96629	.96758	.96834	.96884	.96919	.96946	.96966	.96983	.97032	.97056
1.95	.96852	.96955	.97080	.97155	.97203	.97238	.97264	.97284	.97300	.97347	.97371
2.00	.97153	.97253	.97375	.97447	.97494	.97528	.97553	.97573	.97588	.97634	.97657
2.05	.97428	.97525	.97643	.97713	.97759	.97792	.97816	.97835	.97850	.97894	.97916
2.10	.97679	.97773	.97888	.97955	.97999	.98031	.98054	.98072	.98086	.98129	.98151
2.15	.97908	.97999	.98109	.98174	.98217	.98247	.98269	.98287	.98300	.98342	.98362
2.20	.98116	.98204	.98310	.98372	.98413	.98442	.98464	.98480	.98493	.98533	.98552
2.25	.98306	.98390	.98492	.98551	.98590	.98618	.98638	.98654	.98667	.98704	.98723
2.30	.98478	.98558	.98656	.98713	.98750	.98776	.98796	.98811	.98823	.98858	.98876
2.35	.98633	.98710	.98804	.98858	.98893	.98918	.98936	.98951	.98962	.98996	.99012
2.40	.98774	.98848	.98937	.98988	.99022	.99045	.99063	.99076	.99087	.99119	.99134
2.45	.98902	.98972	.99056	.99105	.99136	.99159	.99175	.99188	.99198	.99228	.99242
2.50	.99017	.99084	.99163	.99209	.99239	.99260	.99275	.99287	.99297	.99325	.99339
2.55	.99121	.99184	.99259	.99302	.99331	.99350	.99365	.99376	.99385	.99411	.99424
2.60	.99215	.99274	.99345	.99386	.99412	.99430	.99444	.99454	.99463	.99487	.99499
2.65	.99299	.99355	.99422	.99460	.99484	.99501	.99514	.99524	.99531	.99554	.99565
2.70	.99375	.99427	.99490	.99525	.99548	.99564	.99576	.99585	.99592	.99613	.99623
2.75	.99443	.99492	.99551	.99584	.99605	.99620	.99631	.99639	.99646	.99665	.99675
2.80	.99504	.99550	.99605	.99635	.99655	.99669	.99679	.99687	.99693	.99711	.99719
2.85	.99558	.99602	.99652	.99681	.99699	.99712	.99721	.99728	.99734	.99750	.99758
2.90	.99607	.99648	.99695	.99721	.99738	.99750	.99758	.99765	.99770	.99785	.99792
2.95	.99651	.99689	.99732	.99757	.99772	.99783	.99791	.99797	.99802	.99815	.99822

Tabelle der t-Verteilung

Tabelliert ist die Verteilungsfunktion $t_n(x)$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

$x \setminus n$	24	29	39	49	59	69	79	89	99	149	199
3.00	.99690	.99725	.99766	.99788	.99802	.99812	.99819	.99825	.99829	.99842	.99848
3.05	.99725	.99757	.99795	.99816	.99829	.99838	.99844	.99849	.99853	.99865	.99870
3.10	.99756	.99786	.99821	.99840	.99852	.99860	.99866	.99870	.99874	.99884	.99889
3.15	.99783	.99812	.99843	.99861	.99872	.99879	.99885	.99889	.99892	.99901	.99906
3.20	.99808	.99834	.99863	.99879	.99889	.99896	.99901	.99905	.99908	.99916	.99920
3.25	.99830	.99854	.99881	.99896	.99905	.99911	.99915	.99919	.99921	.99929	.99932
3.30	.99849	.99872	.99896	.99910	.99918	.99923	.99927	.99930	.99933	.99940	.99943
3.35	.99867	.99887	.99910	.99922	.99929	.99934	.99938	.99941	.99943	.99949	.99952
3.40	.99882	.99901	.99922	.99933	.99939	.99944	.99947	.99949	.99951	.99957	.99959
3.45	.99896	.99913	.99932	.99942	.99948	.99952	.99955	.99957	.99959	.99964	.99966
3.50	.99908	.99924	.99941	.99950	.99955	.99959	.99962	.99964	.99965	.99969	.99971
3.55	.99919	.99933	.99949	.99957	.99962	.99965	.99967	.99969	.99970	.99974	.99976
3.60	.99928	.99941	.99956	.99963	.99967	.99970	.99972	.99974	.99975	.99978	.99980
3.65	.99937	.99949	.99962	.99968	.99972	.99975	.99977	.99978	.99979	.99982	.99983
3.70	.99944	.99955	.99967	.99973	.99976	.99979	.99980	.99981	.99982	.99985	.99986
3.75	.99951	.99961	.99971	.99977	.99980	.99982	.99983	.99984	.99985	.99987	.99988
3.80	.99956	.99966	.99975	.99980	.99983	.99985	.99986	.99987	.99987	.99989	.99990
3.85	.99962	.99970	.99979	.99983	.99985	.99987	.99988	.99989	.99990	.99991	.99992
3.90	.99966	.99974	.99982	.99985	.99988	.99989	.99990	.99991	.99991	.99993	.99993
3.95	.99970	.99977	.99984	.99987	.99989	.99991	.99992	.99992	.99993	.99994	.99995
4.00	.99974	.99980	.99986	.99989	.99991	.99992	.99993	.99993	.99994	.99995	.99996
4.05	.99977	.99983	.99988	.99991	.99992	.99993	.99994	.99995	.99995	.99996	.99996
4.10	.99980	.99985	.99990	.99992	.99994	.99994	.99995	.99995	.99996	.99997	.99997
4.15	.99982	.99987	.99991	.99993	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99997	.99998
4.20	.99984	.99988	.99992	.99994	.99995	.99996	.99997	.99997	.99997	.99998	.99998
4.25	.99986	.99990	.99994	.99995	.99996	.99997	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998
4.30	.99988	.99991	.99994	.99996	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998	.99999
4.35	.99989	.99992	.99995	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998	.99999	.99999
4.40	.99990	.99993	.99996	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998	.99999	.99999	.99999
4.45	.99992	.99994	.99997	.99998	.99998	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999
4.50	.99993	.99995	.99997	.99998	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999
4.55	.99993	.99996	.99997	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	1
4.60	.99994	.99996	.99998	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	1	1
4.65	.99995	.99997	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	1	1
4.70	.99996	.99997	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	1	1	1	1
4.75	.99996	.99997	.99999	.99999	.99999	.99999	1	1	1	1	1
4.80	.99997	.99998	.99999	.99999	.99999	1	1	1	1	1	1
4.85	.99997	.99998	.99999	.99999	1	1	1	1	1	1	1
4.90	.99997	.99998	.99999	.99999	1	1	1	1	1	1	1
4.95	.99998	.99999	.99999	1	1	1	1	1	1	1	1

A.5 Quantile der χ^2-Verteilung

Tabelliert ist das α-Quantil $\chi^2_{n;\,\alpha}$ der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

$n \setminus \alpha$	0.01	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	.0002	.0010	.0039	.0158	.1015	.4549	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0201	.0507	.1026	.2107	.5754	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	.1148	.2158	.3518	.5844	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	.2971	.4844	.7107	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	.5543	.8312	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.8721	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
150	112.7	118.0	122.7	128.3	138.0	149.3	161.3	172.6	179.6	185.8	193.2	198.4
200	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	199.3	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3
250	200.9	208.1	214.4	221.8	234.6	249.3	264.7	279.1	287.9	295.7	304.9	311.3
300	246.0	253.9	260.9	269.1	283.1	299.3	316.1	331.8	341.4	349.9	359.9	366.8
400	337.2	346.5	354.6	364.2	380.6	399.3	418.7	436.6	447.6	457.3	468.7	476.6
500	429.4	439.9	449.1	459.9	478.3	499.3	521.0	540.9	553.1	563.9	576.5	585.2
600	522.4	534.0	544.2	556.1	576.3	599.3	623.0	644.8	658.1	669.8	683.5	693.0
700	615.9	628.6	639.6	652.5	674.4	699.3	724.9	748.4	762.7	775.2	790.0	800.1
800	709.9	723.5	735.4	749.2	772.7	799.3	826.6	851.7	866.9	880.3	896.0	906.8
900	804.3	818.8	831.4	846.1	871.0	899.3	928.2	954.8	970.9	985.0	1002	1013
1000	898.9	914.3	927.6	943.1	969.5	999.3	1030	1058	1075	1090	1107	1119

A.6 Quantile der Fisher'schen $F_{m,n}$-Verteilung: 90%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.90}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39.863	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.439	59.858	60.195
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.404	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248
12	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188
13	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138
14	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095
15	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059
16	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028
17	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001
18	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977
19	2.990	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.058	2.017	1.984	1.956
20	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937
21	2.961	2.575	2.365	2.233	2.142	2.075	2.023	1.982	1.948	1.920
22	2.949	2.561	2.351	2.219	2.128	2.060	2.008	1.967	1.933	1.904
23	2.937	2.549	2.339	2.207	2.115	2.047	1.995	1.953	1.919	1.890
24	2.927	2.538	2.327	2.195	2.103	2.035	1.983	1.941	1.906	1.877
25	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.971	1.929	1.895	1.866
26	2.909	2.519	2.307	2.174	2.082	2.014	1.961	1.919	1.884	1.855
27	2.901	2.511	2.299	2.165	2.073	2.005	1.952	1.909	1.874	1.845
28	2.894	2.503	2.291	2.157	2.064	1.996	1.943	1.900	1.865	1.836
29	2.887	2.495	2.283	2.149	2.057	1.988	1.935	1.892	1.857	1.827
30	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.980	1.927	1.884	1.849	1.819
35	2.855	2.461	2.247	2.113	2.019	1.950	1.896	1.852	1.817	1.787
40	2.835	2.440	2.226	2.091	1.997	1.927	1.873	1.829	1.793	1.763
45	2.820	2.425	2.210	2.074	1.980	1.909	1.855	1.811	1.774	1.744
50	2.809	2.412	2.197	2.061	1.966	1.895	1.840	1.796	1.760	1.729
55	2.799	2.402	2.186	2.050	1.955	1.884	1.829	1.785	1.748	1.717
60	2.791	2.393	2.177	2.041	1.946	1.875	1.819	1.775	1.738	1.707
65	2.784	2.386	2.170	2.033	1.938	1.867	1.811	1.767	1.730	1.699
70	2.779	2.380	2.164	2.027	1.931	1.860	1.804	1.760	1.723	1.691
75	2.774	2.375	2.158	2.021	1.926	1.854	1.798	1.754	1.716	1.685
80	2.769	2.370	2.154	2.016	1.921	1.849	1.793	1.748	1.711	1.680
85	2.765	2.366	2.149	2.012	1.916	1.845	1.789	1.744	1.706	1.675
90	2.762	2.363	2.146	2.008	1.912	1.841	1.785	1.739	1.702	1.670
95	2.759	2.359	2.142	2.005	1.909	1.837	1.781	1.736	1.698	1.667
100	2.756	2.356	2.139	2.002	1.906	1.834	1.778	1.732	1.695	1.663
150	2.739	2.338	2.121	1.983	1.886	1.814	1.757	1.712	1.674	1.642
200	2.731	2.329	2.111	1.973	1.876	1.804	1.747	1.701	1.663	1.631
300	2.722	2.320	2.102	1.964	1.867	1.794	1.737	1.691	1.652	1.620
400	2.718	2.316	2.098	1.959	1.862	1.789	1.732	1.686	1.647	1.615
500	2.716	2.313	2.095	1.956	1.859	1.786	1.729	1.683	1.644	1.612
∞	2.706	2.303	2.084	1.945	1.847	1.774	1.717	1.670	1.632	1.599

Fisher'sche $F_{m,n}$-Verteilung: 95%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.95}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.396	2.342	2.297
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.485	2.372	2.285	2.217	2.161	2.114
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
45	4.057	3.204	2.812	2.579	2.422	2.308	2.221	2.152	2.096	2.049
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026
55	4.016	3.165	2.773	2.540	2.383	2.269	2.181	2.112	2.055	2.008
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
65	3.989	3.138	2.746	2.513	2.356	2.242	2.154	2.084	2.027	1.980
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969
75	3.968	3.119	2.727	2.494	2.337	2.222	2.134	2.064	2.007	1.959
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951
85	3.953	3.104	2.712	2.479	2.322	2.207	2.119	2.049	1.992	1.944
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938
95	3.941	3.092	2.700	2.467	2.310	2.196	2.108	2.037	1.980	1.932
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927
150	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.160	2.071	2.001	1.943	1.894
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878
300	3.873	3.026	2.635	2.402	2.244	2.129	2.040	1.969	1.911	1.862
400	3.865	3.018	2.627	2.394	2.237	2.121	2.032	1.962	1.903	1.854
500	3.860	3.014	2.623	2.390	2.232	2.117	2.028	1.957	1.899	1.850
∞	3.842	2.996	2.605	2.372	2.215	2.099	2.010	1.939	1.880	1.831

Fisher'sche $F_{m,n}$-Verteilung: 97.5%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.975}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	647.789	799.500	864.163	899.583	921.848	937.111	948.217	956.656	963.285	968.627
2	38.506	39.000	39.165	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419
4	12.218	10.649	9.979	9.605	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717
11	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526
12	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374
13	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.250
14	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.380	3.285	3.209	3.147
15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060
16	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986
17	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922
18	5.978	4.560	3.954	3.608	3.382	3.221	3.100	3.005	2.929	2.866
19	5.922	4.508	3.903	3.559	3.333	3.172	3.051	2.956	2.880	2.817
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774
21	5.827	4.420	3.819	3.475	3.250	3.090	2.969	2.874	2.798	2.735
22	5.786	4.383	3.783	3.440	3.215	3.055	2.934	2.839	2.763	2.700
23	5.750	4.349	3.750	3.408	3.183	3.023	2.902	2.808	2.731	2.668
24	5.717	4.319	3.721	3.379	3.155	2.995	2.874	2.779	2.703	2.640
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613
26	5.659	4.265	3.670	3.329	3.105	2.945	2.824	2.729	2.653	2.590
27	5.633	4.242	3.647	3.307	3.083	2.923	2.802	2.707	2.631	2.568
28	5.610	4.221	3.626	3.286	3.063	2.903	2.782	2.687	2.611	2.547
29	5.588	4.201	3.607	3.267	3.044	2.884	2.763	2.669	2.592	2.529
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511
35	5.485	4.106	3.517	3.178	2.956	2.796	2.676	2.581	2.504	2.440
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388
45	5.377	4.008	3.422	3.086	2.864	2.705	2.584	2.489	2.412	2.348
50	5.340	3.975	3.390	3.054	2.833	2.674	2.553	2.458	2.381	2.317
55	5.310	3.948	3.364	3.029	2.807	2.648	2.528	2.433	2.355	2.291
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270
65	5.265	3.906	3.324	2.990	2.769	2.610	2.489	2.394	2.317	2.252
70	5.247	3.890	3.309	2.975	2.754	2.595	2.474	2.379	2.302	2.237
75	5.232	3.876	3.296	2.962	2.741	2.582	2.461	2.366	2.289	2.224
80	5.218	3.864	3.284	2.950	2.730	2.571	2.450	2.355	2.277	2.213
85	5.207	3.854	3.274	2.940	2.720	2.561	2.440	2.345	2.268	2.203
90	5.196	3.844	3.265	2.932	2.711	2.552	2.432	2.336	2.259	2.194
95	5.187	3.836	3.257	2.924	2.703	2.544	2.424	2.328	2.251	2.186
100	5.179	3.828	3.250	2.917	2.696	2.537	2.417	2.321	2.244	2.179
150	5.126	3.781	3.204	2.872	2.652	2.494	2.373	2.278	2.200	2.135
200	5.100	3.758	3.182	2.850	2.630	2.472	2.351	2.256	2.178	2.113
300	5.075	3.735	3.160	2.829	2.609	2.451	2.330	2.234	2.156	2.091
400	5.062	3.723	3.149	2.818	2.598	2.440	2.319	2.224	2.146	2.080
500	5.054	3.716	3.142	2.811	2.592	2.434	2.313	2.217	2.139	2.074
∞	5.024	3.689	3.116	2.786	2.566	2.408	2.288	2.192	2.114	2.048

Fisher'sche $F_{m,n}$-Verteilung: 99%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.99}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.522	3.434
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979
35	7.419	5.268	4.396	3.908	3.592	3.368	3.200	3.069	2.963	2.876
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801
45	7.234	5.110	4.249	3.767	3.454	3.232	3.066	2.935	2.830	2.743
50	7.171	5.057	4.199	3.720	3.408	3.186	3.020	2.890	2.785	2.698
55	7.119	5.013	4.159	3.681	3.370	3.149	2.983	2.853	2.748	2.662
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632
65	7.042	4.947	4.098	3.622	3.313	3.093	2.928	2.798	2.693	2.607
70	7.011	4.922	4.074	3.600	3.291	3.071	2.906	2.777	2.672	2.585
75	6.985	4.900	4.054	3.580	3.272	3.052	2.887	2.758	2.653	2.567
80	6.963	4.881	4.036	3.563	3.255	3.036	2.871	2.742	2.637	2.551
85	6.943	4.864	4.021	3.548	3.240	3.022	2.857	2.728	2.623	2.537
90	6.925	4.849	4.007	3.535	3.228	3.009	2.845	2.715	2.611	2.524
95	6.909	4.836	3.995	3.523	3.216	2.998	2.833	2.704	2.600	2.513
100	6.895	4.824	3.984	3.513	3.206	2.988	2.823	2.694	2.590	2.503
150	6.807	4.749	3.915	3.447	3.142	2.924	2.761	2.632	2.528	2.441
200	6.763	4.713	3.881	3.414	3.110	2.893	2.730	2.601	2.497	2.411
300	6.720	4.677	3.848	3.382	3.079	2.862	2.699	2.571	2.467	2.380
	2.571	2.467	2.380							
400	6.699	4.659	3.831	3.366	3.063	2.847	2.684	2.556	2.452	2.365
500	6.686	4.648	3.821	3.357	3.054	2.838	2.675	2.547	2.443	2.356
∞	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.640	2.511	2.408	2.321

Fisher'sche $F_{m,n}$-Verteilung: 99.5%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.995}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	55.552	49.799	47.467	46.195	45.392	44.838	44.434	44.126	43.882	43.686
4	31.333	26.284	24.259	23.154	22.456	21.975	21.622	21.352	21.139	20.967
5	22.785	18.314	16.530	15.556	14.940	14.513	14.200	13.961	13.772	13.618
6	18.635	14.544	12.917	12.028	11.464	11.073	10.786	10.566	10.391	10.250
7	16.236	12.404	10.882	10.050	9.522	9.155	8.885	8.678	8.514	8.380
8	14.688	11.042	9.596	8.805	8.302	7.952	7.694	7.496	7.339	7.211
9	13.614	10.107	8.717	7.956	7.471	7.134	6.885	6.693	6.541	6.417
10	12.826	9.427	8.081	7.343	6.872	6.545	6.302	6.116	5.968	5.847
11	12.226	8.912	7.600	6.881	6.422	6.102	5.865	5.682	5.537	5.418
12	11.754	8.510	7.226	6.521	6.071	5.757	5.525	5.345	5.202	5.085
13	11.374	8.186	6.926	6.233	5.791	5.482	5.253	5.076	4.935	4.820
14	11.060	7.922	6.680	5.998	5.562	5.257	5.031	4.857	4.717	4.603
15	10.798	7.701	6.476	5.803	5.372	5.071	4.847	4.674	4.536	4.424
16	10.575	7.514	6.303	5.638	5.212	4.913	4.692	4.521	4.384	4.272
17	10.384	7.354	6.156	5.497	5.075	4.779	4.559	4.389	4.254	4.142
18	10.218	7.215	6.028	5.375	4.956	4.663	4.445	4.276	4.141	4.030
19	10.073	7.093	5.916	5.268	4.853	4.561	4.345	4.177	4.043	3.933
20	9.944	6.986	5.818	5.174	4.762	4.472	4.257	4.090	3.956	3.847
21	9.830	6.891	5.730	5.091	4.681	4.393	4.179	4.013	3.880	3.771
22	9.727	6.806	5.652	5.017	4.609	4.322	4.109	3.944	3.812	3.703
23	9.635	6.730	5.582	4.950	4.544	4.259	4.047	3.882	3.750	3.642
24	9.551	6.661	5.519	4.890	4.486	4.202	3.991	3.826	3.695	3.587
25	9.475	6.598	5.462	4.835	4.433	4.150	3.939	3.776	3.645	3.537
26	9.406	6.541	5.409	4.785	4.384	4.103	3.893	3.730	3.599	3.492
27	9.342	6.489	5.361	4.740	4.340	4.059	3.850	3.687	3.557	3.450
28	9.284	6.440	5.317	4.698	4.300	4.020	3.811	3.649	3.519	3.412
29	9.230	6.396	5.276	4.659	4.262	3.983	3.775	3.613	3.483	3.377
30	9.180	6.355	5.239	4.623	4.228	3.949	3.742	3.580	3.450	3.344
35	8.976	6.188	5.086	4.479	4.088	3.812	3.607	3.447	3.318	3.212
40	8.828	6.066	4.976	4.374	3.986	3.713	3.509	3.350	3.222	3.117
45	8.715	5.974	4.892	4.294	3.909	3.638	3.435	3.276	3.149	3.044
50	8.626	5.902	4.826	4.232	3.849	3.578	3.376	3.219	3.092	2.988
55	8.554	5.843	4.773	4.181	3.800	3.531	3.330	3.173	3.046	2.942
60	8.495	5.795	4.729	4.140	3.760	3.492	3.291	3.134	3.008	2.904
65	8.445	5.755	4.692	4.105	3.726	3.459	3.259	3.103	2.977	2.873
70	8.403	5.720	4.661	4.076	3.698	3.431	3.232	3.076	2.950	2.846
75	8.366	5.691	4.635	4.050	3.674	3.407	3.208	3.052	2.927	2.823
80	8.335	5.665	4.611	4.028	3.652	3.387	3.188	3.032	2.907	2.803
85	8.307	5.643	4.591	4.009	3.634	3.368	3.170	3.014	2.889	2.786
90	8.282	5.623	4.573	3.992	3.617	3.352	3.154	2.999	2.873	2.770
95	8.260	5.605	4.557	3.977	3.603	3.338	3.140	2.985	2.860	2.756
100	8.241	5.589	4.542	3.963	3.589	3.325	3.127	2.972	2.847	2.744
150	8.118	5.490	4.453	3.878	3.508	3.245	3.048	2.894	2.770	2.667
200	8.057	5.441	4.408	3.837	3.467	3.206	3.010	2.856	2.732	2.629
300	7.997	5.393	4.365	3.796	3.428	3.167	2.972	2.818	2.694	2.592
400	7.968	5.369	4.343	3.775	3.408	3.148	2.953	2.800	2.676	2.573
500	7.950	5.355	4.330	3.763	3.396	3.137	2.941	2.788	2.665	2.562
∞	7.879	5.298	4.279	3.715	3.350	3.091	2.897	2.744	2.621	2.519

Fisher'sche $F_{m,n}$-Verteilung: 99.9%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.999}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	35.507	27.000	23.703	21.924	20.803	20.030	19.463	19.030	18.688	18.411
7	29.245	21.689	18.772	17.198	16.206	15.521	15.019	14.634	14.330	14.083
8	25.415	18.494	15.829	14.392	13.485	12.858	12.398	12.046	11.767	11.540
9	22.857	16.387	13.902	12.560	11.714	11.128	10.698	10.368	10.107	9.894
10	21.040	14.905	12.553	11.283	10.481	9.926	9.517	9.204	8.956	8.754
11	19.687	13.812	11.561	10.346	9.578	9.047	8.655	8.355	8.116	7.922
12	18.643	12.974	10.804	9.633	8.892	8.379	8.001	7.710	7.480	7.292
13	17.815	12.313	10.209	9.073	8.354	7.856	7.489	7.206	6.982	6.799
14	17.143	11.779	9.729	8.622	7.922	7.436	7.077	6.802	6.583	6.404
15	16.587	11.339	9.335	8.253	7.567	7.092	6.741	6.471	6.256	6.081
16	16.120	10.971	9.006	7.944	7.272	6.805	6.460	6.195	5.984	5.812
17	15.722	10.658	8.727	7.683	7.022	6.562	6.223	5.962	5.754	5.584
18	15.379	10.390	8.487	7.459	6.808	6.355	6.021	5.763	5.558	5.390
19	15.081	10.157	8.280	7.265	6.622	6.175	5.845	5.590	5.388	5.222
20	14.819	9.953	8.098	7.096	6.461	6.019	5.692	5.440	5.239	5.075
21	14.587	9.772	7.938	6.947	6.318	5.881	5.557	5.308	5.109	4.946
22	14.380	9.612	7.796	6.814	6.191	5.758	5.438	5.190	4.993	4.832
23	14.195	9.468	7.669	6.696	6.078	5.649	5.331	5.085	4.890	4.730
24	14.028	9.339	7.554	6.589	5.977	5.550	5.235	4.991	4.797	4.638
25	13.877	9.223	7.451	6.493	5.885	5.462	5.148	4.906	4.713	4.555
26	13.739	9.116	7.357	6.406	5.802	5.381	5.070	4.829	4.637	4.480
27	13.613	9.019	7.272	6.326	5.726	5.308	4.998	4.759	4.568	4.412
28	13.498	8.931	7.193	6.253	5.656	5.241	4.933	4.695	4.505	4.349
29	13.391	8.849	7.121	6.186	5.593	5.179	4.873	4.636	4.447	4.292
30	13.293	8.773	7.054	6.125	5.534	5.122	4.817	4.581	4.393	4.239
35	12.896	8.470	6.787	5.876	5.298	4.894	4.595	4.363	4.178	4.027
40	12.609	8.251	6.595	5.698	5.128	4.731	4.436	4.207	4.024	3.874
45	12.392	8.086	6.450	5.564	5.001	4.608	4.316	4.090	3.909	3.760
50	12.222	7.956	6.336	5.459	4.901	4.512	4.222	3.998	3.818	3.671
55	12.085	7.853	6.246	5.375	4.822	4.435	4.148	3.925	3.746	3.600
60	11.973	7.768	6.171	5.307	4.757	4.372	4.086	3.865	3.687	3.541
65	11.879	7.697	6.109	5.249	4.702	4.320	4.035	3.815	3.638	3.493
70	11.799	7.637	6.057	5.201	4.656	4.275	3.992	3.773	3.596	3.452
75	11.731	7.585	6.011	5.159	4.617	4.237	3.955	3.736	3.561	3.416
80	11.671	7.540	5.972	5.123	4.582	4.204	3.923	3.705	3.530	3.386
85	11.619	7.501	5.938	5.092	4.552	4.175	3.895	3.677	3.503	3.359
90	11.573	7.466	5.908	5.064	4.526	4.150	3.870	3.653	3.479	3.336
95	11.532	7.435	5.881	5.039	4.503	4.127	3.848	3.632	3.458	3.315
100	11.495	7.408	5.857	5.017	4.482	4.107	3.829	3.612	3.439	3.296
120	11.380	7.321	5.781	4.947	4.416	4.044	3.767	3.552	3.379	3.237
150	11.267	7.236	5.707	4.879	4.351	3.981	3.706	3.493	3.321	3.179
200	11.154	7.152	5.634	4.812	4.287	3.920	3.647	3.434	3.264	3.123
300	11.044	7.069	5.562	4.746	4.225	3.860	3.588	3.377	3.207	3.067
400	10.989	7.028	5.527	4.713	4.194	3.830	3.560	3.349	3.179	3.040
500	10.957	7.004	5.506	4.693	4.176	3.813	3.542	3.332	3.163	3.023
∞	10.828	6.908	5.422	4.617	4.103	3.743	3.475	3.266	3.097	2.959

A.7 Quantile der Beta-Verteilung: 90%-Quantil $\beta_{m,n;\,0.9}$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.900	.684	.536	.438	.369	.319	.280	.250	.226	.206	.189	.175	.162	.152	.142
2	.949	.804	.680	.584	.510	.453	.406	.368	.337	.310	.287	.268	.251	.236	.222
3	.965	.857	.753	.667	.596	.538	.490	.450	.415	.386	.360	.337	.317	.300	.284
4	.974	.888	.799	.721	.655	.599	.552	.511	.475	.444	.417	.393	.371	.352	.334
5	.979	.907	.830	.760	.699	.646	.599	.559	.523	.492	.464	.439	.416	.396	.378
6	.983	.921	.853	.790	.733	.682	.638	.598	.563	.532	.504	.478	.455	.434	.415
7	.985	.931	.871	.812	.759	.712	.669	.631	.596	.565	.537	.512	.489	.467	.448
8	.987	.939	.884	.831	.781	.736	.695	.658	.625	.594	.567	.541	.518	.497	.477
9	.988	.945	.895	.846	.799	.757	.718	.682	.650	.620	.592	.567	.544	.523	.503
10	.990	.951	.904	.858	.815	.774	.737	.703	.671	.642	.615	.590	.568	.546	.526
11	.990	.955	.912	.869	.828	.790	.754	.721	.690	.662	.636	.611	.589	.567	.548
12	.991	.958	.919	.878	.839	.803	.769	.737	.707	.679	.654	.630	.608	.587	.567
13	.992	.961	.924	.886	.849	.815	.782	.751	.722	.695	.670	.647	.625	.604	.585
14	.993	.964	.929	.893	.858	.825	.793	.764	.736	.710	.685	.662	.641	.620	.601
15	.993	.966	.933	.899	.866	.834	.804	.775	.748	.723	.699	.676	.655	.635	.616
16	.993	.968	.937	.905	.873	.842	.813	.786	.759	.735	.711	.689	.669	.649	.630
17	.994	.970	.941	.910	.879	.850	.822	.795	.770	.746	.723	.701	.681	.662	.643
18	.994	.972	.944	.914	.885	.857	.830	.804	.779	.756	.733	.712	.692	.673	.655
19	.994	.973	.946	.918	.890	.863	.837	.812	.788	.765	.743	.723	.703	.684	.667
20	.995	.974	.949	.922	.895	.869	.843	.819	.796	.774	.752	.732	.713	.695	.677
21	.995	.976	.951	.925	.899	.874	.849	.826	.803	.782	.761	.741	.722	.704	.687
22	.995	.977	.953	.928	.903	.879	.855	.832	.810	.789	.769	.749	.731	.713	.696
23	.995	.978	.955	.931	.907	.883	.860	.838	.817	.796	.776	.757	.739	.722	.705
24	.996	.979	.957	.934	.911	.888	.865	.843	.823	.802	.783	.765	.747	.730	.713
25	.996	.979	.958	.936	.914	.891	.870	.849	.828	.809	.790	.772	.754	.737	.721
26	.996	.980	.960	.938	.917	.895	.874	.853	.833	.814	.796	.778	.761	.744	.729
27	.996	.981	.961	.941	.919	.898	.878	.858	.838	.820	.802	.784	.767	.751	.736
28	.996	.982	.963	.943	.922	.902	.882	.862	.843	.825	.807	.790	.773	.758	.742
29	.996	.982	.964	.944	.924	.905	.885	.866	.848	.830	.812	.795	.779	.764	.749
30	.996	.983	.965	.946	.927	.907	.888	.870	.852	.834	.817	.801	.785	.769	.755
31	.997	.983	.966	.948	.929	.910	.892	.873	.856	.838	.822	.806	.790	.775	.760
32	.997	.984	.967	.949	.931	.913	.894	.877	.859	.843	.826	.810	.795	.780	.766
33	.997	.984	.968	.951	.933	.915	.897	.880	.863	.846	.830	.815	.800	.785	.771
34	.997	.985	.969	.952	.935	.917	.900	.883	.866	.850	.834	.819	.804	.790	.776
35	.997	.985	.970	.953	.936	.919	.902	.886	.870	.854	.838	.823	.809	.795	.781
36	.997	.986	.971	.955	.938	.921	.905	.889	.873	.857	.842	.827	.813	.799	.785
37	.997	.986	.971	.956	.939	.923	.907	.891	.876	.860	.845	.831	.817	.803	.790
38	.997	.986	.972	.957	.941	.925	.909	.894	.878	.863	.849	.835	.821	.807	.794
39	.997	.987	.973	.958	.942	.927	.911	.896	.881	.866	.852	.838	.824	.811	.798
40	.997	.987	.973	.959	.944	.928	.913	.898	.884	.869	.855	.841	.828	.815	.802
41	.997	.987	.974	.960	.945	.930	.915	.900	.886	.872	.858	.844	.831	.818	.806
42	.997	.988	.975	.961	.946	.932	.917	.903	.888	.874	.861	.847	.834	.822	.809
43	.998	.988	.975	.962	.947	.933	.919	.905	.891	.877	.863	.850	.838	.825	.813
44	.998	.988	.976	.962	.948	.934	.920	.906	.893	.879	.866	.853	.841	.828	.816
45	.998	.988	.976	.963	.950	.936	.922	.908	.895	.882	.869	.856	.843	.831	.819
46	.998	.989	.977	.964	.951	.937	.924	.910	.897	.884	.871	.858	.846	.834	.823
47	.998	.989	.977	.965	.952	.938	.925	.912	.899	.886	.873	.861	.849	.837	.826
48	.998	.989	.978	.965	.952	.939	.926	.913	.901	.888	.876	.863	.852	.840	.828
49	.998	.989	.978	.966	.953	.941	.928	.915	.902	.890	.878	.866	.854	.843	.831
50	.998	.990	.979	.967	.954	.942	.929	.917	.904	.892	.880	.868	.856	.845	.834

Quantile der Beta-Verteilung: 90%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.9}$

$m \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	.134	.127	.120	.114	.109	.104	.099	.095	.091	.088	.085	.082	.079	.076	.074
2	.210	.199	.190	.181	.173	.166	.159	.153	.147	.142	.137	.132	.128	.124	.120
3	.269	.257	.245	.234	.224	.215	.207	.199	.192	.185	.179	.173	.168	.163	.158
4	.319	.304	.291	.279	.268	.258	.248	.239	.231	.223	.216	.209	.203	.197	.191
5	.361	.345	.331	.318	.306	.295	.284	.275	.265	.257	.249	.241	.234	.228	.221
6	.397	.381	.366	.352	.340	.328	.317	.306	.297	.287	.279	.271	.263	.256	.249
7	.430	.413	.398	.383	.370	.358	.346	.335	.325	.315	.306	.297	.289	.282	.274
8	.459	.442	.426	.411	.397	.385	.372	.361	.350	.340	.331	.322	.313	.305	.298
9	.484	.467	.451	.436	.422	.409	.397	.385	.374	.364	.354	.345	.336	.327	.319
10	.508	.491	.475	.459	.445	.432	.419	.407	.396	.385	.375	.366	.357	.348	.340
11	.529	.512	.496	.481	.466	.453	.440	.428	.416	.406	.395	.385	.376	.367	.359
12	.549	.532	.515	.500	.486	.472	.459	.447	.435	.424	.414	.404	.394	.385	.377
13	.567	.550	.533	.518	.504	.490	.477	.465	.453	.442	.431	.421	.412	.402	.394
14	.583	.566	.550	.535	.521	.507	.494	.481	.470	.458	.448	.438	.428	.418	.409
15	.599	.582	.566	.551	.536	.522	.509	.497	.485	.474	.463	.453	.443	.434	.425
16	.613	.596	.580	.565	.551	.537	.524	.512	.500	.489	.478	.467	.457	.448	.439
17	.626	.609	.594	.579	.564	.551	.538	.526	.514	.502	.492	.481	.471	.462	.452
18	.638	.622	.606	.591	.577	.564	.551	.539	.527	.515	.505	.494	.484	.475	.465
19	.650	.634	.618	.603	.589	.576	.563	.551	.539	.528	.517	.507	.497	.487	.478
20	.660	.645	.629	.615	.601	.588	.575	.563	.551	.540	.529	.518	.508	.499	.489
21	.671	.655	.640	.625	.612	.598	.586	.574	.562	.551	.540	.530	.519	.510	.501
22	.680	.665	.650	.636	.622	.609	.596	.584	.573	.561	.551	.540	.530	.521	.511
23	.689	.674	.659	.645	.632	.619	.606	.594	.583	.571	.561	.550	.540	.531	.521
24	.698	.683	.668	.654	.641	.628	.616	.604	.592	.581	.570	.560	.550	.541	.531
25	.706	.691	.677	.663	.650	.637	.625	.613	.601	.590	.580	.569	.560	.550	.541
26	.713	.699	.685	.671	.658	.645	.633	.621	.610	.599	.589	.578	.569	.559	.550
27	.721	.706	.692	.679	.666	.653	.641	.630	.618	.608	.597	.587	.577	.568	.558
28	.727	.713	.699	.686	.673	.661	.649	.638	.626	.616	.605	.595	.585	.576	.567
29	.734	.720	.706	.693	.681	.668	.657	.645	.634	.623	.613	.603	.593	.584	.575
30	.740	.726	.713	.700	.688	.675	.664	.652	.641	.631	.621	.611	.601	.592	.582
31	.746	.733	.719	.707	.694	.682	.671	.659	.649	.638	.628	.618	.608	.599	.590
32	.752	.738	.725	.713	.701	.689	.677	.666	.655	.645	.635	.625	.615	.606	.597
33	.757	.744	.731	.719	.707	.695	.684	.673	.662	.652	.641	.632	.622	.613	.604
34	.763	.749	.737	.724	.712	.701	.690	.679	.668	.658	.648	.638	.629	.620	.611
35	.768	.755	.742	.730	.718	.707	.696	.685	.674	.664	.654	.645	.635	.626	.617
36	.772	.760	.747	.735	.723	.712	.701	.690	.680	.670	.660	.651	.641	.632	.624
37	.777	.764	.752	.740	.729	.717	.707	.696	.686	.676	.666	.656	.647	.638	.630
38	.781	.769	.757	.745	.734	.723	.712	.701	.691	.681	.672	.662	.653	.644	.635
39	.785	.773	.761	.750	.738	.728	.717	.706	.696	.687	.677	.668	.659	.650	.641
40	.790	.777	.766	.754	.743	.732	.722	.711	.701	.692	.682	.673	.664	.655	.647
41	.793	.782	.770	.759	.748	.737	.726	.716	.706	.697	.687	.678	.669	.660	.652
42	.797	.785	.774	.763	.752	.741	.731	.721	.711	.702	.692	.683	.674	.666	.657
43	.801	.789	.778	.767	.756	.746	.735	.725	.716	.706	.697	.688	.679	.671	.662
44	.804	.793	.782	.771	.760	.750	.740	.730	.720	.711	.702	.693	.684	.675	.667
45	.808	.796	.785	.775	.764	.754	.744	.734	.724	.715	.706	.697	.688	.680	.672
46	.811	.800	.789	.778	.768	.758	.748	.738	.729	.719	.710	.702	.693	.685	.676
47	.814	.803	.792	.782	.772	.761	.752	.742	.733	.724	.715	.706	.697	.689	.681
48	.817	.806	.796	.785	.775	.765	.755	.746	.737	.728	.719	.710	.702	.693	.685
49	.820	.809	.799	.789	.779	.769	.759	.750	.740	.731	.723	.714	.706	.697	.689
50	.823	.812	.802	.792	.782	.772	.763	.753	.744	.735	.727	.718	.710	.701	.694

Quantile der Beta-Verteilung: 90%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.9}$

$m \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	.072	.069	.067	.065	.064	.062	.060	.059	.057	.056	.055	.053	.052	.051	.050
2	.116	.113	.110	.107	.104	.101	.099	.096	.094	.092	.089	.087	.086	.084	.082
3	.153	.149	.145	.141	.138	.134	.131	.128	.125	.122	.119	.116	.114	.112	.109
4	.186	.181	.176	.172	.167	.163	.159	.156	.152	.149	.146	.142	.139	.137	.134
5	.216	.210	.205	.199	.195	.190	.186	.181	.177	.174	.170	.166	.163	.160	.157
6	.242	.236	.230	.225	.220	.215	.210	.205	.201	.196	.192	.188	.185	.181	.178
7	.267	.261	.254	.248	.243	.237	.232	.227	.222	.218	.213	.209	.205	.201	.197
8	.290	.283	.277	.270	.264	.259	.253	.248	.243	.238	.233	.229	.224	.220	.216
9	.312	.304	.298	.291	.285	.279	.273	.267	.262	.257	.252	.247	.242	.238	.234
10	.332	.324	.317	.310	.304	.297	.291	.285	.280	.274	.269	.264	.259	.255	.250
11	.351	.343	.335	.328	.322	.315	.309	.303	.297	.291	.286	.281	.276	.271	.266
12	.368	.360	.353	.346	.339	.332	.325	.319	.313	.307	.302	.296	.291	.286	.281
13	.385	.377	.369	.362	.355	.348	.341	.335	.329	.323	.317	.311	.306	.301	.296
14	.401	.393	.385	.377	.370	.363	.356	.350	.343	.337	.331	.326	.320	.315	.310
15	.416	.408	.399	.392	.384	.377	.370	.364	.357	.351	.345	.339	.334	.328	.323
16	.430	.422	.414	.406	.398	.391	.384	.377	.371	.364	.358	.352	.347	.341	.336
17	.444	.435	.427	.419	.411	.404	.397	.390	.383	.377	.371	.365	.359	.353	.348
18	.456	.448	.440	.432	.424	.417	.409	.402	.396	.389	.383	.377	.371	.365	.360
19	.469	.460	.452	.444	.436	.429	.421	.414	.408	.401	.395	.388	.383	.377	.371
20	.480	.472	.463	.455	.448	.440	.433	.426	.419	.412	.406	.400	.394	.388	.382
21	.492	.483	.475	.466	.459	.451	.444	.437	.430	.423	.417	.410	.404	.398	.393
22	.502	.494	.485	.477	.469	.462	.454	.447	.440	.433	.427	.421	.414	.409	.403
23	.512	.504	.495	.487	.479	.472	.464	.457	.450	.443	.437	.431	.424	.418	.413
24	.522	.514	.505	.497	.489	.482	.474	.467	.460	.453	.447	.440	.434	.428	.422
25	.532	.523	.515	.506	.499	.491	.484	.476	.469	.462	.456	.449	.443	.437	.431
26	.541	.532	.524	.516	.508	.500	.493	.485	.478	.471	.465	.458	.452	.446	.440
27	.549	.541	.532	.524	.516	.509	.501	.494	.487	.480	.474	.467	.461	.455	.449
28	.558	.549	.541	.533	.525	.517	.510	.502	.495	.489	.482	.475	.469	.463	.457
29	.566	.557	.549	.541	.533	.525	.518	.511	.504	.497	.490	.484	.477	.471	.465
30	.574	.565	.557	.549	.541	.533	.526	.519	.511	.505	.498	.491	.485	.479	.473
31	.581	.573	.564	.556	.548	.541	.533	.526	.519	.512	.506	.499	.493	.487	.480
32	.588	.580	.572	.564	.556	.548	.541	.534	.527	.520	.513	.506	.500	.494	.488
33	.595	.587	.579	.571	.563	.555	.548	.541	.534	.527	.520	.514	.507	.501	.495
34	.602	.594	.585	.578	.570	.562	.555	.548	.541	.534	.527	.521	.514	.508	.502
35	.609	.600	.592	.584	.576	.569	.562	.554	.547	.541	.534	.527	.521	.515	.509
36	.615	.607	.598	.591	.583	.575	.568	.561	.554	.547	.540	.534	.528	.521	.515
37	.621	.613	.605	.597	.589	.582	.574	.567	.560	.553	.547	.540	.534	.528	.522
38	.627	.619	.611	.603	.595	.588	.580	.573	.566	.560	.553	.547	.540	.534	.528
39	.633	.624	.616	.609	.601	.594	.586	.579	.572	.566	.559	.553	.546	.540	.534
40	.638	.630	.622	.614	.607	.599	.592	.585	.578	.571	.565	.558	.552	.546	.540
41	.644	.636	.628	.620	.612	.605	.598	.591	.584	.577	.571	.564	.558	.552	.546
42	.649	.641	.633	.625	.618	.610	.603	.596	.589	.583	.576	.570	.564	.557	.551
43	.654	.646	.638	.630	.623	.616	.609	.602	.595	.588	.582	.575	.569	.563	.557
44	.659	.651	.643	.636	.628	.621	.614	.607	.600	.593	.587	.581	.574	.568	.562
45	.664	.656	.648	.640	.633	.626	.619	.612	.605	.599	.592	.586	.579	.573	.567
46	.668	.660	.653	.645	.638	.631	.624	.617	.610	.604	.597	.591	.585	.578	.573
47	.673	.665	.657	.650	.643	.635	.628	.622	.615	.608	.602	.596	.589	.583	.577
48	.677	.669	.662	.654	.647	.640	.633	.626	.620	.613	.607	.600	.594	.588	.582
49	.682	.674	.666	.659	.652	.645	.638	.631	.624	.618	.611	.605	.599	.593	.587
50	.686	.678	.671	.663	.656	.649	.642	.635	.629	.622	.616	.610	.604	.598	.592

Quantile der Beta-Verteilung: 90%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.9}$

$m \setminus n$	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	.049	.048	.047	.046	.045	.044	.043	.043	.042	.041	.040	.040	.039	.038	.038
2	.080	.079	.077	.076	.074	.073	.071	.070	.069	.068	.067	.065	.064	.063	.062
3	.107	.105	.103	.101	.099	.097	.096	.094	.092	.091	.089	.088	.086	.085	.084
4	.131	.129	.126	.124	.122	.120	.117	.115	.113	.112	.110	.108	.106	.105	.103
5	.154	.151	.148	.145	.143	.140	.138	.135	.133	.131	.129	.127	.125	.123	.121
6	.174	.171	.168	.165	.162	.159	.157	.154	.152	.149	.147	.144	.142	.140	.138
7	.194	.190	.187	.184	.180	.177	.175	.172	.169	.166	.164	.161	.159	.156	.154
8	.212	.208	.205	.201	.198	.195	.191	.188	.185	.183	.180	.177	.174	.172	.169
9	.229	.226	.222	.218	.214	.211	.208	.204	.201	.198	.195	.192	.189	.187	.184
10	.246	.242	.238	.234	.230	.226	.223	.219	.216	.213	.210	.207	.204	.201	.198
11	.262	.257	.253	.249	.245	.241	.238	.234	.230	.227	.224	.221	.217	.214	.212
12	.277	.272	.268	.264	.259	.255	.252	.248	.244	.241	.237	.234	.231	.228	.224
13	.291	.286	.282	.277	.273	.269	.265	.261	.257	.254	.250	.247	.243	.240	.237
14	.305	.300	.295	.291	.286	.282	.278	.274	.270	.266	.263	.259	.256	.252	.249
15	.318	.313	.308	.304	.299	.295	.291	.286	.282	.279	.275	.271	.267	.264	.261
16	.331	.326	.321	.316	.311	.307	.303	.298	.294	.290	.286	.283	.279	.275	.272
17	.343	.338	.333	.328	.323	.319	.314	.310	.306	.302	.298	.294	.290	.286	.283
18	.354	.349	.344	.339	.334	.330	.325	.321	.317	.312	.308	.304	.301	.297	.293
19	.366	.360	.355	.350	.345	.341	.336	.332	.327	.323	.319	.315	.311	.307	.303
20	.377	.371	.366	.361	.356	.351	.346	.342	.337	.333	.329	.325	.321	.317	.313
21	.387	.382	.376	.371	.366	.361	.357	.352	.347	.343	.339	.335	.331	.327	.323
22	.397	.392	.386	.381	.376	.371	.366	.362	.357	.353	.348	.344	.340	.336	.332
23	.407	.401	.396	.391	.386	.381	.376	.371	.366	.362	.358	.353	.349	.345	.341
24	.416	.411	.405	.400	.395	.390	.385	.380	.376	.371	.367	.362	.358	.354	.350
25	.425	.420	.414	.409	.404	.399	.394	.389	.384	.380	.375	.371	.367	.362	.358
26	.434	.429	.423	.418	.413	.407	.402	.398	.393	.388	.384	.379	.375	.371	.367
27	.443	.437	.432	.426	.421	.416	.411	.406	.401	.396	.392	.387	.383	.379	.375
28	.451	.445	.440	.434	.429	.424	.419	.414	.409	.405	.400	.395	.391	.387	.383
29	.459	.453	.448	.442	.437	.432	.427	.422	.417	.412	.408	.403	.399	.394	.390
30	.467	.461	.456	.450	.445	.440	.435	.430	.425	.420	.415	.411	.406	.402	.398
31	.475	.469	.463	.458	.452	.447	.442	.437	.432	.427	.423	.418	.414	.409	.405
32	.482	.476	.471	.465	.460	.454	.449	.444	.439	.435	.430	.425	.421	.416	.412
33	.489	.483	.478	.472	.467	.462	.456	.451	.446	.442	.437	.432	.428	.423	.419
34	.496	.490	.485	.479	.474	.468	.463	.458	.453	.448	.444	.439	.435	.430	.426
35	.503	.497	.491	.486	.480	.475	.470	.465	.460	.455	.450	.446	.441	.437	.432
36	.509	.504	.498	.492	.487	.482	.477	.471	.467	.462	.457	.452	.448	.443	.439
37	.516	.510	.504	.499	.493	.488	.483	.478	.473	.468	.463	.459	.454	.449	.445
38	.522	.516	.511	.505	.500	.494	.489	.484	.479	.474	.469	.465	.460	.456	.451
39	.528	.522	.517	.511	.506	.500	.495	.490	.485	.480	.475	.471	.466	.462	.457
40	.534	.528	.523	.517	.512	.506	.501	.496	.491	.486	.481	.477	.472	.468	.463
41	.540	.534	.528	.523	.518	.512	.507	.502	.497	.492	.487	.482	.478	.473	.469
42	.545	.540	.534	.529	.523	.518	.513	.508	.503	.498	.493	.488	.483	.479	.474
43	.551	.545	.540	.534	.529	.523	.518	.513	.508	.503	.498	.494	.489	.484	.480
44	.556	.551	.545	.539	.534	.529	.524	.518	.513	.509	.504	.499	.494	.490	.485
45	.562	.556	.550	.545	.539	.534	.529	.524	.519	.514	.509	.504	.500	.495	.491
46	.567	.561	.555	.550	.544	.539	.534	.529	.524	.519	.514	.510	.505	.500	.496
47	.572	.566	.560	.555	.550	.544	.539	.534	.529	.524	.519	.515	.510	.505	.501
48	.577	.571	.565	.560	.554	.549	.544	.539	.534	.529	.524	.520	.515	.510	.506
49	.581	.576	.570	.565	.559	.554	.549	.544	.539	.534	.529	.524	.520	.515	.511
50	.586	.580	.575	.569	.564	.559	.554	.549	.544	.539	.534	.529	.525	.520	.515

Quantile der Beta-Verteilung: 95%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.95}$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.950	.776	.632	.527	.451	.393	.348	.312	.283	.259	.238	.221	.206	.193	.181
2	.975	.865	.751	.657	.582	.521	.471	.429	.394	.364	.339	.316	.297	.279	.264
3	.983	.902	.811	.729	.659	.600	.550	.507	.470	.438	.410	.385	.363	.344	.326
4	.987	.924	.847	.775	.711	.655	.607	.564	.527	.495	.466	.440	.417	.396	.377
5	.990	.937	.871	.807	.749	.696	.650	.609	.573	.540	.511	.484	.461	.439	.419
6	.991	.947	.889	.831	.778	.729	.685	.645	.610	.577	.548	.522	.498	.476	.456
7	.993	.954	.902	.850	.800	.755	.713	.675	.640	.609	.580	.554	.530	.508	.487
8	.994	.959	.913	.865	.819	.776	.736	.700	.667	.636	.608	.582	.558	.536	.515
9	.994	.963	.921	.877	.834	.794	.756	.721	.689	.659	.632	.606	.583	.561	.540
10	.995	.967	.928	.887	.847	.809	.773	.740	.709	.680	.653	.628	.605	.583	.563
11	.995	.970	.934	.896	.858	.822	.788	.756	.726	.698	.672	.647	.625	.603	.583
12	.996	.972	.939	.903	.868	.834	.801	.770	.741	.714	.689	.665	.642	.621	.602
13	.996	.974	.943	.910	.876	.844	.812	.783	.755	.729	.704	.681	.659	.638	.618
14	.996	.976	.947	.915	.884	.853	.823	.794	.767	.742	.718	.695	.673	.653	.634
15	.997	.977	.950	.920	.890	.860	.832	.804	.778	.754	.730	.708	.687	.667	.648
16	.997	.979	.953	.925	.896	.868	.840	.814	.788	.764	.742	.720	.699	.680	.661
17	.997	.980	.956	.929	.901	.874	.848	.822	.798	.774	.752	.731	.711	.692	.673
18	.997	.981	.958	.932	.906	.880	.854	.830	.806	.783	.762	.741	.721	.703	.685
19	.997	.982	.960	.935	.910	.885	.861	.837	.814	.792	.771	.750	.731	.713	.695
20	.997	.983	.962	.938	.914	.890	.866	.843	.821	.800	.779	.759	.740	.722	.705
21	.998	.984	.963	.941	.918	.894	.871	.849	.828	.807	.787	.767	.749	.731	.714
22	.998	.984	.965	.943	.921	.899	.876	.855	.834	.813	.794	.775	.757	.740	.723
23	.998	.985	.966	.946	.924	.902	.881	.860	.839	.820	.801	.782	.764	.747	.731
24	.998	.986	.968	.948	.927	.906	.885	.865	.845	.825	.807	.789	.771	.755	.739
25	.998	.986	.969	.950	.930	.909	.889	.869	.850	.831	.813	.795	.778	.762	.746
26	.998	.987	.970	.951	.932	.912	.893	.873	.854	.836	.818	.801	.784	.768	.753
27	.998	.987	.971	.953	.934	.915	.896	.877	.859	.841	.823	.807	.790	.774	.759
28	.998	.988	.972	.955	.936	.918	.899	.881	.863	.845	.828	.812	.796	.780	.765
29	.998	.988	.973	.956	.938	.920	.902	.884	.867	.850	.833	.817	.801	.786	.771
30	.998	.988	.974	.958	.940	.923	.905	.888	.871	.854	.837	.822	.806	.791	.777
31	.998	.989	.975	.959	.942	.925	.908	.891	.874	.858	.842	.826	.811	.796	.782
32	.998	.989	.976	.960	.944	.927	.910	.894	.877	.861	.846	.830	.816	.801	.787
33	.998	.989	.976	.961	.945	.929	.913	.896	.880	.865	.849	.834	.820	.806	.792
34	.998	.990	.977	.962	.947	.931	.915	.899	.883	.868	.853	.838	.824	.810	.796
35	.999	.990	.978	.963	.948	.933	.917	.902	.886	.871	.856	.842	.828	.814	.801
36	.999	.990	.978	.964	.949	.934	.919	.904	.889	.874	.860	.846	.832	.818	.805
37	.999	.991	.979	.965	.951	.936	.921	.906	.891	.877	.863	.849	.835	.822	.809
38	.999	.991	.979	.966	.952	.937	.923	.908	.894	.880	.866	.852	.839	.826	.813
39	.999	.991	.980	.967	.953	.939	.925	.910	.896	.882	.869	.855	.842	.829	.817
40	.999	.991	.980	.968	.954	.940	.926	.912	.899	.885	.871	.858	.845	.833	.820
41	.999	.991	.981	.968	.955	.942	.928	.914	.901	.887	.874	.861	.848	.836	.824
42	.999	.992	.981	.969	.956	.943	.929	.916	.903	.890	.877	.864	.851	.839	.827
43	.999	.992	.982	.970	.957	.944	.931	.918	.905	.892	.879	.866	.854	.842	.830
44	.999	.992	.982	.970	.958	.945	.932	.919	.907	.894	.881	.869	.857	.845	.833
45	.999	.992	.982	.971	.959	.946	.934	.921	.908	.896	.884	.871	.859	.848	.836
46	.999	.992	.983	.972	.960	.948	.935	.923	.910	.898	.886	.874	.862	.850	.839
47	.999	.993	.983	.972	.961	.949	.936	.924	.912	.900	.888	.876	.864	.853	.842
48	.999	.993	.983	.973	.961	.950	.938	.926	.914	.902	.890	.878	.867	.856	.845
49	.999	.993	.984	.973	.962	.950	.939	.927	.915	.903	.892	.880	.869	.858	.847
50	.999	.993	.984	.974	.963	.951	.940	.928	.917	.905	.894	.882	.871	.860	.850

Quantile der Beta-Verteilung: 95%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.95}$

$m \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	.171	.162	.153	.146	.139	.133	.127	.122	.117	.113	.109	.105	.101	.098	.095
2	.250	.238	.226	.216	.207	.198	.190	.183	.176	.170	.164	.159	.153	.149	.144
3	.310	.296	.283	.271	.259	.249	.240	.231	.223	.215	.208	.202	.195	.189	.184
4	.359	.344	.329	.316	.304	.292	.282	.272	.263	.254	.246	.239	.232	.225	.219
5	.401	.384	.369	.355	.342	.330	.318	.308	.298	.288	.280	.271	.264	.256	.249
6	.437	.420	.404	.389	.375	.363	.351	.339	.329	.319	.310	.301	.293	.285	.277
7	.468	.451	.435	.420	.405	.392	.380	.368	.357	.347	.337	.328	.319	.311	.303
8	.496	.479	.462	.447	.432	.419	.406	.394	.383	.372	.362	.352	.343	.334	.326
9	.521	.504	.487	.471	.457	.443	.430	.418	.406	.395	.385	.375	.365	.356	.348
10	.544	.526	.509	.494	.479	.465	.452	.439	.428	.416	.406	.396	.386	.377	.368
11	.564	.547	.530	.514	.499	.485	.472	.460	.448	.436	.425	.415	.405	.396	.387
12	.583	.565	.549	.533	.518	.504	.491	.478	.466	.455	.444	.433	.423	.414	.405
13	.600	.583	.566	.550	.536	.522	.508	.496	.483	.472	.461	.450	.440	.431	.421
14	.616	.598	.582	.567	.552	.538	.524	.512	.500	.488	.477	.466	.456	.446	.437
15	.630	.613	.597	.581	.567	.553	.540	.527	.515	.503	.492	.481	.471	.461	.452
16	.643	.627	.611	.595	.581	.567	.554	.541	.529	.517	.506	.495	.485	.475	.466
17	.656	.639	.623	.608	.594	.580	.567	.554	.542	.531	.520	.509	.499	.489	.479
18	.667	.651	.635	.620	.606	.593	.579	.567	.555	.543	.532	.521	.511	.501	.492
19	.678	.662	.647	.632	.618	.604	.591	.579	.567	.555	.544	.533	.523	.513	.504
20	.688	.672	.657	.643	.629	.615	.602	.590	.578	.567	.555	.545	.535	.525	.515
21	.698	.682	.667	.653	.639	.626	.613	.601	.589	.577	.566	.556	.545	.536	.526
22	.707	.691	.677	.662	.649	.635	.623	.611	.599	.587	.577	.566	.556	.546	.537
23	.715	.700	.685	.671	.658	.645	.632	.620	.608	.597	.586	.576	.566	.556	.546
24	.723	.708	.694	.680	.667	.654	.641	.629	.618	.606	.596	.585	.575	.565	.556
25	.731	.716	.702	.688	.675	.662	.650	.638	.626	.615	.605	.594	.584	.574	.565
26	.738	.723	.709	.696	.683	.670	.658	.646	.635	.624	.613	.603	.593	.583	.574
27	.744	.730	.716	.703	.690	.678	.666	.654	.643	.632	.621	.611	.601	.591	.582
28	.751	.737	.723	.710	.697	.685	.673	.662	.650	.640	.629	.619	.609	.600	.590
29	.757	.743	.730	.717	.704	.692	.680	.669	.658	.647	.637	.626	.617	.607	.598
30	.763	.749	.736	.723	.711	.699	.687	.676	.665	.654	.644	.634	.624	.615	.605
31	.768	.755	.742	.729	.717	.705	.693	.682	.671	.661	.651	.641	.631	.622	.613
32	.773	.760	.747	.735	.723	.711	.700	.689	.678	.667	.657	.647	.638	.629	.620
33	.778	.765	.753	.740	.729	.717	.706	.695	.684	.674	.664	.654	.644	.635	.626
34	.783	.770	.758	.746	.734	.723	.711	.701	.690	.680	.670	.660	.651	.642	.633
35	.788	.775	.763	.751	.739	.728	.717	.706	.696	.686	.676	.666	.657	.648	.639
36	.792	.780	.768	.756	.744	.733	.722	.712	.701	.691	.682	.672	.663	.654	.645
37	.797	.784	.772	.761	.749	.738	.727	.717	.707	.697	.687	.678	.668	.659	.651
38	.801	.788	.777	.765	.754	.743	.732	.722	.712	.702	.692	.683	.674	.665	.656
39	.804	.793	.781	.770	.758	.748	.737	.727	.717	.707	.697	.688	.679	.670	.662
40	.808	.796	.785	.774	.763	.752	.742	.732	.722	.712	.702	.693	.684	.676	.667
41	.812	.800	.789	.778	.767	.756	.746	.736	.726	.717	.707	.698	.689	.681	.672
42	.815	.804	.793	.782	.771	.761	.750	.740	.731	.721	.712	.703	.694	.685	.677
43	.819	.807	.796	.785	.775	.765	.755	.745	.735	.726	.716	.707	.699	.690	.682
44	.822	.811	.800	.789	.779	.768	.759	.749	.739	.730	.721	.712	.703	.695	.686
45	.825	.814	.803	.793	.782	.772	.762	.753	.743	.734	.725	.716	.708	.699	.691
46	.828	.817	.806	.796	.786	.776	.766	.757	.747	.738	.729	.720	.712	.704	.695
47	.831	.820	.810	.799	.789	.779	.770	.760	.751	.742	.733	.725	.716	.708	.700
48	.834	.823	.813	.803	.793	.783	.773	.764	.755	.746	.737	.728	.720	.712	.704
49	.836	.826	.816	.806	.796	.786	.777	.767	.758	.749	.741	.732	.724	.716	.708
50	.839	.829	.819	.809	.799	.789	.780	.771	.762	.753	.744	.736	.728	.720	.712

Quantile der Beta-Verteilung: 95%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.95}$

$m \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	.092	.089	.087	.084	.082	.080	.078	.076	.074	.072	.070	.069	.067	.066	.064
2	.140	.136	.132	.129	.125	.122	.119	.116	.113	.111	.108	.106	.103	.101	.099
3	.179	.174	.169	.165	.161	.157	.153	.149	.146	.142	.139	.136	.133	.131	.128
4	.213	.207	.202	.196	.192	.187	.183	.178	.174	.171	.167	.163	.160	.157	.154
5	.243	.236	.231	.225	.220	.214	.210	.205	.200	.196	.192	.188	.184	.181	.177
6	.270	.263	.257	.251	.245	.239	.234	.229	.224	.220	.215	.211	.207	.203	.199
7	.295	.288	.281	.275	.269	.263	.257	.252	.246	.241	.236	.232	.227	.223	.219
8	.318	.311	.304	.297	.290	.284	.278	.272	.267	.262	.257	.252	.247	.242	.238
9	.340	.332	.325	.318	.311	.304	.298	.292	.286	.281	.275	.270	.265	.261	.256
10	.360	.352	.344	.337	.330	.323	.317	.310	.304	.299	.293	.288	.283	.278	.273
11	.379	.370	.362	.355	.348	.341	.334	.328	.322	.316	.310	.304	.299	.294	.289
12	.396	.388	.380	.372	.365	.358	.351	.344	.338	.332	.326	.320	.315	.309	.304
13	.413	.404	.396	.388	.381	.373	.366	.360	.353	.347	.341	.335	.329	.324	.319
14	.428	.420	.411	.403	.396	.388	.381	.374	.368	.361	.355	.349	.344	.338	.333
15	.443	.434	.426	.418	.410	.403	.395	.388	.382	.375	.369	.363	.357	.351	.346
16	.457	.448	.440	.432	.424	.416	.409	.402	.395	.388	.382	.376	.370	.364	.359
17	.470	.461	.453	.445	.437	.429	.422	.415	.408	.401	.395	.388	.382	.376	.371
18	.483	.474	.465	.457	.449	.441	.434	.427	.420	.413	.407	.400	.394	.388	.382
19	.495	.486	.477	.469	.461	.453	.446	.439	.432	.425	.418	.412	.406	.400	.394
20	.506	.497	.489	.480	.472	.465	.457	.450	.443	.436	.429	.423	.416	.410	.405
21	.517	.508	.499	.491	.483	.475	.468	.460	.453	.446	.440	.433	.427	.421	.415
22	.527	.518	.510	.502	.493	.486	.478	.471	.464	.457	.450	.443	.437	.431	.425
23	.537	.528	.520	.511	.503	.496	.488	.481	.474	.467	.460	.453	.447	.441	.435
24	.547	.538	.529	.521	.513	.505	.498	.490	.483	.476	.469	.463	.456	.450	.444
25	.556	.547	.539	.530	.522	.514	.507	.499	.492	.485	.478	.472	.465	.459	.453
26	.565	.556	.547	.539	.531	.523	.516	.508	.501	.494	.487	.481	.474	.468	.462
27	.573	.564	.556	.548	.540	.532	.524	.517	.510	.503	.496	.489	.483	.476	.470
28	.581	.572	.564	.556	.548	.540	.532	.525	.518	.511	.504	.497	.491	.485	.478
29	.589	.580	.572	.564	.556	.548	.540	.533	.526	.519	.512	.505	.499	.492	.486
30	.597	.588	.579	.571	.563	.555	.548	.541	.533	.526	.520	.513	.506	.500	.494
31	.604	.595	.587	.579	.571	.563	.555	.548	.541	.534	.527	.520	.514	.508	.501
32	.611	.602	.594	.586	.578	.570	.563	.555	.548	.541	.534	.528	.521	.515	.509
33	.617	.609	.601	.592	.585	.577	.569	.562	.555	.548	.541	.535	.528	.522	.516
34	.624	.615	.607	.599	.591	.584	.576	.569	.562	.555	.548	.541	.535	.529	.523
35	.630	.622	.614	.606	.598	.590	.583	.575	.568	.561	.555	.548	.542	.535	.529
36	.636	.628	.620	.612	.604	.596	.589	.582	.575	.568	.561	.554	.548	.542	.536
37	.642	.634	.626	.618	.610	.602	.595	.588	.581	.574	.567	.561	.554	.548	.542
38	.648	.639	.631	.624	.616	.608	.601	.594	.587	.580	.573	.567	.560	.554	.548
39	.653	.645	.637	.629	.622	.614	.607	.600	.593	.586	.579	.573	.566	.560	.554
40	.659	.650	.642	.635	.627	.620	.612	.605	.598	.591	.585	.578	.572	.566	.560
41	.664	.656	.648	.640	.632	.625	.618	.611	.604	.597	.590	.584	.578	.571	.565
42	.669	.661	.653	.645	.638	.630	.623	.616	.609	.602	.596	.589	.583	.577	.571
43	.674	.666	.658	.650	.643	.635	.628	.621	.614	.608	.601	.595	.588	.582	.576
44	.678	.670	.663	.655	.648	.640	.633	.626	.619	.613	.606	.600	.593	.587	.581
45	.683	.675	.667	.660	.652	.645	.638	.631	.624	.618	.611	.605	.598	.592	.586
46	.687	.680	.672	.664	.657	.650	.643	.636	.629	.622	.616	.610	.603	.597	.591
47	.692	.684	.676	.669	.662	.654	.647	.640	.634	.627	.621	.614	.608	.602	.596
48	.696	.688	.681	.673	.666	.659	.652	.645	.638	.632	.625	.619	.613	.607	.601
49	.700	.692	.685	.677	.670	.663	.656	.649	.643	.636	.630	.624	.617	.611	.605
50	.704	.696	.689	.682	.674	.667	.660	.654	.647	.641	.634	.628	.622	.616	.610

Quantile der Beta-Verteilung: 95%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.95}$

$m \setminus n$	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	.063	.062	.061	.059	.058	.057	.056	.055	.054	.053	.052	.051	.050	.050	.049
2	.097	.095	.093	.091	.090	.088	.086	.085	.083	.082	.081	.079	.078	.077	.075
3	.125	.123	.121	.118	.116	.114	.112	.110	.108	.106	.105	.103	.101	.100	.098
4	.151	.148	.145	.142	.140	.137	.135	.133	.130	.128	.126	.124	.122	.120	.118
5	.174	.171	.167	.164	.162	.159	.156	.153	.151	.148	.146	.144	.142	.139	.137
6	.195	.192	.188	.185	.182	.179	.176	.173	.170	.167	.165	.162	.160	.157	.155
7	.215	.211	.208	.204	.201	.197	.194	.191	.188	.185	.182	.179	.177	.174	.172
8	.234	.230	.226	.222	.218	.215	.211	.208	.205	.202	.199	.196	.193	.190	.187
9	.251	.247	.243	.239	.235	.231	.228	.224	.221	.217	.214	.211	.208	.205	.202
10	.268	.264	.259	.255	.251	.247	.243	.240	.236	.233	.229	.226	.223	.220	.217
11	.284	.279	.275	.271	.266	.262	.258	.254	.251	.247	.243	.240	.237	.233	.230
12	.299	.294	.290	.285	.281	.277	.272	.268	.265	.261	.257	.254	.250	.247	.243
13	.314	.309	.304	.299	.295	.290	.286	.282	.278	.274	.270	.266	.263	.259	.256
14	.327	.322	.317	.313	.308	.303	.299	.295	.291	.287	.283	.279	.275	.272	.268
15	.340	.335	.330	.325	.321	.316	.312	.307	.303	.299	.295	.291	.287	.283	.280
16	.353	.348	.343	.338	.333	.328	.324	.319	.315	.311	.307	.303	.299	.295	.291
17	.365	.360	.355	.350	.345	.340	.335	.331	.326	.322	.318	.314	.310	.306	.302
18	.377	.371	.366	.361	.356	.351	.346	.342	.337	.333	.329	.324	.320	.316	.313
19	.388	.382	.377	.372	.367	.362	.357	.352	.348	.343	.339	.335	.331	.327	.323
20	.399	.393	.388	.382	.377	.372	.367	.363	.358	.354	.349	.345	.341	.337	.333
21	.409	.404	.398	.393	.388	.382	.378	.373	.368	.363	.359	.355	.350	.346	.342
22	.419	.413	.408	.403	.397	.392	.387	.382	.378	.373	.368	.364	.360	.356	.351
23	.429	.423	.417	.412	.407	.402	.397	.392	.387	.382	.378	.373	.369	.365	.360
24	.438	.432	.427	.421	.416	.411	.406	.401	.396	.391	.387	.382	.378	.373	.369
25	.447	.441	.436	.430	.425	.420	.414	.410	.405	.400	.395	.391	.386	.382	.378
26	.456	.450	.444	.439	.433	.428	.423	.418	.413	.408	.404	.399	.395	.390	.386
27	.464	.458	.453	.447	.442	.436	.431	.426	.421	.417	.412	.407	.403	.398	.394
28	.472	.467	.461	.455	.450	.445	.439	.434	.429	.424	.420	.415	.411	.406	.402
29	.480	.474	.469	.463	.458	.452	.447	.442	.437	.432	.427	.423	.418	.414	.409
30	.488	.482	.476	.471	.465	.460	.455	.450	.445	.440	.435	.430	.426	.421	.417
31	.495	.490	.484	.478	.473	.467	.462	.457	.452	.447	.442	.437	.433	.428	.424
32	.503	.497	.491	.485	.480	.475	.469	.464	.459	.454	.449	.445	.440	.435	.431
33	.510	.504	.498	.492	.487	.481	.476	.471	.466	.461	.456	.451	.447	.442	.438
34	.516	.511	.505	.499	.494	.488	.483	.478	.473	.468	.463	.458	.454	.449	.444
35	.523	.517	.511	.506	.500	.495	.490	.484	.479	.474	.470	.465	.460	.456	.451
36	.530	.524	.518	.512	.507	.501	.496	.491	.486	.481	.476	.471	.466	.462	.457
37	.536	.530	.524	.519	.513	.508	.502	.497	.492	.487	.482	.477	.473	.468	.464
38	.542	.536	.530	.525	.519	.514	.508	.503	.498	.493	.488	.483	.479	.474	.470
39	.548	.542	.536	.531	.525	.520	.514	.509	.504	.499	.494	.489	.485	.480	.476
40	.554	.548	.542	.536	.531	.525	.520	.515	.510	.505	.500	.495	.491	.486	.481
41	.559	.553	.548	.542	.537	.531	.526	.521	.516	.511	.506	.501	.496	.492	.487
42	.565	.559	.553	.548	.542	.537	.531	.526	.521	.516	.511	.506	.502	.497	.493
43	.570	.564	.559	.553	.547	.542	.537	.532	.527	.522	.517	.512	.507	.503	.498
44	.575	.569	.564	.558	.553	.547	.542	.537	.532	.527	.522	.517	.512	.508	.503
45	.580	.575	.569	.563	.558	.553	.547	.542	.537	.532	.527	.522	.518	.513	.508
46	.585	.580	.574	.568	.563	.558	.552	.547	.542	.537	.532	.527	.523	.518	.514
47	.590	.584	.579	.573	.568	.562	.557	.552	.547	.542	.537	.532	.528	.523	.518
48	.595	.589	.584	.578	.573	.567	.562	.557	.552	.547	.542	.537	.533	.528	.523
49	.600	.594	.588	.583	.577	.572	.567	.562	.557	.552	.547	.542	.537	.533	.528
50	.604	.598	.593	.587	.582	.577	.571	.566	.561	.556	.551	.547	.542	.537	.533

Quantile der Beta-Verteilung: 97.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.975}$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.975	.842	.708	.602	.522	.459	.410	.369	.336	.308	.285	.265	.247	.232	.218
2	.987	.906	.806	.716	.641	.579	.527	.482	.445	.413	.385	.360	.339	.319	.302
3	.992	.932	.853	.777	.710	.651	.600	.556	.518	.484	.454	.428	.405	.383	.364
4	.994	.947	.882	.816	.755	.701	.652	.610	.572	.538	.508	.481	.456	.434	.414
5	.995	.957	.901	.843	.788	.738	.692	.651	.614	.581	.551	.524	.499	.476	.456
6	.996	.963	.915	.863	.813	.766	.723	.684	.649	.616	.587	.560	.535	.512	.491
7	.996	.968	.925	.878	.833	.789	.749	.711	.677	.646	.617	.590	.566	.543	.522
8	.997	.972	.933	.891	.848	.808	.770	.734	.701	.671	.643	.616	.592	.570	.549
9	.997	.975	.940	.901	.861	.823	.787	.753	.722	.692	.665	.639	.616	.593	.573
10	.997	.977	.945	.909	.872	.837	.802	.770	.740	.711	.685	.660	.636	.615	.594
11	.998	.979	.950	.916	.882	.848	.816	.785	.756	.728	.702	.678	.655	.634	.613
12	.998	.981	.953	.922	.890	.858	.827	.797	.769	.743	.718	.694	.672	.651	.631
13	.998	.982	.957	.927	.897	.867	.837	.809	.782	.756	.732	.709	.687	.666	.647
14	.998	.983	.960	.932	.903	.874	.846	.819	.793	.768	.744	.722	.701	.681	.661
15	.998	.984	.962	.936	.909	.881	.854	.828	.803	.779	.756	.734	.713	.694	.675
16	.998	.985	.964	.939	.913	.887	.861	.836	.812	.789	.766	.745	.725	.706	.687
17	.999	.986	.966	.943	.918	.893	.868	.844	.820	.798	.776	.755	.736	.717	.698
18	.999	.987	.968	.946	.922	.898	.874	.851	.828	.806	.785	.765	.745	.727	.709
19	.999	.988	.970	.948	.925	.902	.879	.857	.835	.814	.793	.773	.755	.736	.719
20	.999	.988	.971	.950	.929	.906	.884	.862	.841	.821	.801	.782	.763	.745	.728
21	.999	.989	.972	.953	.932	.910	.889	.868	.847	.827	.808	.789	.771	.754	.737
22	.999	.989	.973	.955	.934	.914	.893	.873	.853	.833	.814	.796	.778	.761	.745
23	.999	.990	.975	.956	.937	.917	.897	.877	.858	.839	.820	.803	.785	.769	.752
24	.999	.990	.976	.958	.939	.920	.901	.881	.863	.844	.826	.809	.792	.775	.760
25	.999	.991	.976	.960	.942	.923	.904	.885	.867	.849	.831	.814	.798	.782	.766
26	.999	.991	.977	.961	.944	.925	.907	.889	.871	.854	.837	.820	.804	.788	.773
27	.999	.991	.978	.962	.945	.928	.910	.893	.875	.858	.841	.825	.809	.794	.779
28	.999	.992	.979	.964	.947	.930	.913	.896	.879	.862	.846	.830	.814	.799	.784
29	.999	.992	.980	.965	.949	.932	.916	.899	.882	.866	.850	.834	.819	.804	.790
30	.999	.992	.980	.966	.950	.934	.918	.902	.886	.870	.854	.839	.824	.809	.795
31	.999	.992	.981	.967	.952	.936	.920	.904	.889	.873	.858	.843	.828	.814	.800
32	.999	.993	.981	.968	.953	.938	.923	.907	.892	.876	.861	.847	.832	.818	.805
33	.999	.993	.982	.969	.955	.940	.925	.909	.894	.879	.865	.850	.836	.823	.809
34	.999	.993	.982	.970	.956	.941	.927	.912	.897	.882	.868	.854	.840	.827	.813
35	.999	.993	.983	.971	.957	.943	.928	.914	.900	.885	.871	.857	.844	.830	.817
36	.999	.993	.983	.971	.958	.944	.930	.916	.902	.888	.874	.861	.847	.834	.821
37	.999	.994	.984	.972	.959	.946	.932	.918	.904	.891	.877	.864	.851	.838	.825
38	.999	.994	.984	.973	.960	.947	.934	.920	.906	.893	.880	.867	.854	.841	.829
39	.999	.994	.985	.973	.961	.948	.935	.922	.909	.895	.882	.869	.857	.844	.832
40	.999	.994	.985	.974	.962	.949	.937	.924	.911	.898	.885	.872	.860	.847	.835
41	.999	.994	.985	.975	.963	.951	.938	.925	.912	.900	.887	.875	.862	.850	.839
42	.999	.994	.986	.975	.964	.952	.939	.927	.914	.902	.889	.877	.865	.853	.842
43	.999	.994	.986	.976	.965	.953	.941	.928	.916	.904	.892	.880	.868	.856	.845
44	.999	.995	.986	.976	.965	.954	.942	.930	.918	.906	.894	.882	.870	.859	.847
45	.999	.995	.987	.977	.966	.955	.943	.931	.919	.907	.896	.884	.873	.861	.850
46	.999	.995	.987	.977	.967	.956	.944	.933	.921	.909	.898	.886	.875	.864	.853
47	.999	.995	.987	.978	.967	.956	.945	.934	.922	.911	.900	.888	.877	.866	.855
48	.999	.995	.987	.978	.968	.957	.946	.935	.924	.913	.901	.890	.879	.868	.858
49	.999	.995	.988	.979	.969	.958	.947	.936	.925	.914	.903	.892	.881	.871	.860
50	.999	.995	.988	.979	.969	.959	.948	.937	.927	.916	.905	.894	.883	.873	.862

Quantile der Beta-Verteilung: 97.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.975}$

$m \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	.206	.195	.185	.176	.168	.161	.154	.148	.142	.137	.132	.128	.123	.119	.116
2	.287	.273	.260	.249	.238	.228	.219	.211	.204	.196	.190	.183	.178	.172	.167
3	.347	.331	.317	.304	.292	.280	.270	.260	.251	.243	.235	.228	.221	.214	.208
4	.396	.379	.363	.349	.336	.324	.312	.302	.292	.282	.274	.265	.258	.250	.243
5	.437	.419	.403	.388	.374	.361	.349	.337	.327	.317	.307	.298	.290	.282	.275
6	.472	.454	.437	.422	.407	.394	.381	.369	.358	.347	.337	.328	.319	.311	.303
7	.502	.484	.467	.451	.436	.423	.410	.397	.386	.375	.364	.355	.345	.336	.328
8	.529	.511	.494	.478	.463	.449	.435	.423	.411	.400	.389	.379	.369	.360	.352
9	.553	.535	.518	.502	.487	.472	.459	.446	.434	.423	.412	.401	.392	.382	.373
10	.575	.557	.540	.524	.508	.494	.480	.467	.455	.444	.433	.422	.412	.402	.393
11	.594	.576	.559	.543	.528	.514	.500	.487	.475	.463	.452	.441	.431	.421	.412
12	.612	.594	.577	.561	.546	.532	.518	.505	.493	.481	.470	.459	.449	.439	.429
13	.628	.611	.594	.578	.563	.549	.535	.522	.510	.498	.487	.476	.465	.455	.446
14	.643	.626	.609	.594	.579	.564	.551	.538	.525	.514	.502	.491	.481	.471	.461
15	.657	.640	.623	.608	.593	.579	.565	.552	.540	.528	.517	.506	.495	.485	.476
16	.669	.653	.636	.621	.606	.592	.579	.566	.554	.542	.531	.520	.509	.499	.490
17	.681	.665	.649	.634	.619	.605	.592	.579	.567	.555	.544	.533	.522	.512	.502
18	.692	.676	.660	.645	.631	.617	.604	.591	.579	.567	.556	.545	.535	.525	.515
19	.702	.686	.671	.656	.642	.628	.615	.603	.590	.579	.568	.557	.546	.536	.526
20	.712	.696	.681	.666	.652	.639	.626	.613	.601	.590	.578	.568	.557	.547	.538
21	.721	.705	.690	.676	.662	.649	.636	.623	.612	.600	.589	.578	.568	.558	.548
22	.729	.714	.699	.685	.671	.658	.645	.633	.621	.610	.599	.588	.578	.568	.558
23	.737	.722	.707	.693	.680	.667	.654	.642	.631	.619	.608	.598	.587	.578	.568
24	.744	.730	.715	.702	.688	.675	.663	.651	.639	.628	.617	.607	.597	.587	.577
25	.751	.737	.723	.709	.696	.683	.671	.659	.648	.637	.626	.615	.605	.596	.586
26	.758	.744	.730	.717	.704	.691	.679	.667	.656	.645	.634	.624	.614	.604	.594
27	.764	.750	.737	.723	.711	.698	.686	.675	.663	.652	.642	.632	.622	.612	.603
28	.770	.756	.743	.730	.717	.705	.693	.682	.671	.660	.649	.639	.629	.620	.610
29	.776	.762	.749	.736	.724	.712	.700	.689	.678	.667	.657	.646	.637	.627	.618
30	.781	.768	.755	.742	.730	.718	.707	.695	.684	.674	.663	.653	.644	.634	.625
31	.786	.773	.760	.748	.736	.724	.713	.702	.691	.680	.670	.660	.650	.641	.632
32	.791	.778	.766	.753	.742	.730	.719	.708	.697	.687	.676	.667	.657	.648	.639
33	.796	.783	.771	.759	.747	.735	.724	.713	.703	.693	.683	.673	.663	.654	.645
34	.801	.788	.776	.764	.752	.741	.730	.719	.709	.698	.688	.679	.669	.660	.651
35	.805	.792	.780	.769	.757	.746	.735	.724	.714	.704	.694	.685	.675	.666	.657
36	.809	.797	.785	.773	.762	.751	.740	.730	.719	.709	.700	.690	.681	.672	.663
37	.813	.801	.789	.778	.766	.756	.745	.735	.724	.714	.705	.695	.686	.677	.669
38	.817	.805	.793	.782	.771	.760	.750	.739	.729	.719	.710	.701	.692	.683	.674
39	.820	.809	.797	.786	.775	.764	.754	.744	.734	.724	.715	.706	.697	.688	.679
40	.824	.812	.801	.790	.779	.769	.758	.748	.739	.729	.720	.710	.702	.693	.684
41	.827	.816	.805	.794	.783	.773	.763	.753	.743	.733	.724	.715	.706	.698	.689
42	.830	.819	.808	.797	.787	.777	.767	.757	.747	.738	.729	.720	.711	.702	.694
43	.833	.822	.812	.801	.791	.780	.771	.761	.751	.742	.733	.724	.715	.707	.698
44	.836	.825	.815	.804	.794	.784	.774	.765	.755	.746	.737	.728	.720	.711	.703
45	.839	.829	.818	.808	.798	.788	.778	.768	.759	.750	.741	.732	.724	.715	.707
46	.842	.831	.821	.811	.801	.791	.782	.772	.763	.754	.745	.736	.728	.720	.711
47	.845	.834	.824	.814	.804	.794	.785	.776	.767	.758	.749	.740	.732	.724	.716
48	.847	.837	.827	.817	.807	.798	.788	.779	.770	.761	.753	.744	.736	.728	.720
49	.850	.840	.830	.820	.810	.801	.791	.782	.773	.765	.756	.748	.739	.731	.723
50	.852	.842	.832	.823	.813	.804	.795	.786	.777	.768	.760	.751	.743	.735	.727

Quantile der Beta-Verteilung: 97.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.975}$

$m \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	.112	.109	.106	.103	.100	.097	.095	.093	.090	.088	.086	.084	.082	.080	.079
2	.162	.158	.153	.149	.145	.142	.138	.135	.132	.129	.126	.123	.120	.118	.115
3	.202	.197	.192	.187	.182	.177	.173	.169	.165	.162	.158	.155	.151	.148	.145
4	.237	.231	.225	.219	.214	.209	.204	.199	.195	.191	.187	.183	.179	.175	.172
5	.267	.261	.254	.248	.242	.237	.231	.226	.221	.217	.212	.208	.204	.200	.196
6	.295	.288	.281	.274	.268	.262	.256	.251	.246	.241	.236	.231	.227	.222	.218
7	.320	.313	.305	.298	.292	.285	.279	.274	.268	.263	.257	.252	.248	.243	.239
8	.343	.335	.328	.321	.314	.307	.301	.295	.289	.283	.278	.272	.267	.263	.258
9	.365	.356	.349	.341	.334	.327	.321	.314	.308	.302	.297	.291	.286	.281	.276
10	.385	.376	.368	.360	.353	.346	.339	.333	.326	.320	.314	.309	.303	.298	.293
11	.403	.395	.386	.378	.371	.364	.357	.350	.343	.337	.331	.325	.320	.314	.309
12	.420	.412	.403	.395	.388	.380	.373	.366	.360	.353	.347	.341	.335	.330	.324
13	.437	.428	.419	.411	.403	.396	.389	.382	.375	.368	.362	.356	.350	.344	.339
14	.452	.443	.435	.426	.418	.411	.403	.396	.389	.383	.376	.370	.364	.358	.353
15	.466	.458	.449	.441	.433	.425	.417	.410	.403	.397	.390	.384	.378	.372	.366
16	.480	.471	.463	.454	.446	.438	.431	.423	.416	.410	.403	.397	.390	.384	.379
17	.493	.484	.475	.467	.459	.451	.443	.436	.429	.422	.415	.409	.403	.397	.391
18	.505	.496	.488	.479	.471	.463	.456	.448	.441	.434	.427	.421	.414	.408	.402
19	.517	.508	.499	.491	.483	.475	.467	.460	.452	.445	.439	.432	.426	.419	.413
20	.528	.519	.510	.502	.494	.486	.478	.471	.463	.456	.450	.443	.437	.430	.424
21	.539	.530	.521	.513	.504	.496	.489	.481	.474	.467	.460	.453	.447	.441	.434
22	.549	.540	.531	.523	.515	.507	.499	.491	.484	.477	.470	.463	.457	.451	.444
23	.559	.550	.541	.532	.524	.516	.509	.501	.494	.487	.480	.473	.466	.460	.454
24	.568	.559	.550	.542	.534	.526	.518	.510	.503	.496	.489	.482	.476	.469	.463
25	.577	.568	.559	.551	.543	.535	.527	.519	.512	.505	.498	.491	.485	.478	.472
26	.585	.576	.568	.559	.551	.543	.536	.528	.521	.514	.507	.500	.493	.487	.481
27	.593	.585	.576	.568	.559	.552	.544	.536	.529	.522	.515	.508	.502	.495	.489
28	.601	.592	.584	.576	.567	.560	.552	.544	.537	.530	.523	.516	.510	.503	.497
29	.609	.600	.592	.583	.575	.567	.560	.552	.545	.538	.531	.524	.517	.511	.505
30	.616	.607	.599	.591	.583	.575	.567	.560	.552	.545	.538	.532	.525	.519	.512
31	.623	.614	.606	.598	.590	.582	.574	.567	.560	.553	.546	.539	.532	.526	.520
32	.630	.621	.613	.605	.597	.589	.581	.574	.567	.560	.553	.546	.539	.533	.527
33	.636	.628	.619	.611	.603	.596	.588	.581	.573	.566	.559	.553	.546	.540	.534
34	.642	.634	.626	.618	.610	.602	.594	.587	.580	.573	.566	.559	.553	.546	.540
35	.649	.640	.632	.624	.616	.608	.601	.593	.586	.579	.573	.566	.559	.553	.547
36	.654	.646	.638	.630	.622	.614	.607	.600	.593	.586	.579	.572	.566	.559	.553
37	.660	.652	.644	.636	.628	.620	.613	.606	.598	.592	.585	.578	.572	.565	.559
38	.665	.657	.649	.641	.633	.626	.619	.611	.604	.597	.591	.584	.578	.571	.565
39	.671	.663	.655	.647	.639	.631	.624	.617	.610	.603	.596	.590	.583	.577	.571
40	.676	.668	.660	.652	.644	.637	.630	.622	.615	.609	.602	.595	.589	.583	.576
41	.681	.673	.665	.657	.649	.642	.635	.628	.621	.614	.607	.601	.594	.588	.582
42	.686	.678	.670	.662	.655	.647	.640	.633	.626	.619	.613	.606	.600	.593	.587
43	.690	.682	.675	.667	.659	.652	.645	.638	.631	.624	.618	.611	.605	.599	.592
44	.695	.687	.679	.672	.664	.657	.650	.643	.636	.629	.623	.616	.610	.604	.598
45	.699	.691	.684	.676	.669	.662	.654	.647	.641	.634	.627	.621	.615	.609	.602
46	.704	.696	.688	.681	.673	.666	.659	.652	.645	.639	.632	.626	.619	.613	.607
47	.708	.700	.692	.685	.678	.670	.663	.657	.650	.643	.637	.630	.624	.618	.612
48	.712	.704	.696	.689	.682	.675	.668	.661	.654	.648	.641	.635	.629	.623	.617
49	.716	.708	.701	.693	.686	.679	.672	.665	.659	.652	.646	.639	.633	.627	.621
50	.719	.712	.704	.697	.690	.683	.676	.669	.663	.656	.650	.644	.637	.631	.625

Quantile der Beta-Verteilung: 97.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.975}$

$m \setminus n$	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	.077	.075	.074	.073	.071	.070	.068	.067	.066	.065	.064	.063	.062	.061	.060
2	.113	.111	.109	.106	.104	.103	.101	.099	.097	.096	.094	.092	.091	.089	.088
3	.143	.140	.137	.135	.132	.130	.127	.125	.123	.121	.119	.117	.115	.113	.112
4	.169	.165	.162	.159	.157	.154	.151	.149	.146	.144	.141	.139	.137	.135	.133
5	.192	.189	.185	.182	.179	.176	.173	.170	.167	.165	.162	.159	.157	.155	.152
6	.214	.210	.207	.203	.200	.196	.193	.190	.187	.184	.181	.178	.176	.173	.170
7	.234	.230	.226	.222	.219	.215	.212	.208	.205	.202	.199	.196	.193	.190	.187
8	.253	.249	.245	.241	.237	.233	.229	.226	.222	.219	.216	.212	.209	.206	.203
9	.271	.267	.262	.258	.254	.250	.246	.242	.239	.235	.232	.228	.225	.222	.219
10	.288	.283	.279	.274	.270	.266	.262	.258	.254	.250	.247	.243	.240	.236	.233
11	.304	.299	.294	.290	.285	.281	.277	.273	.269	.265	.261	.257	.254	.250	.247
12	.319	.314	.309	.304	.300	.295	.291	.287	.283	.279	.275	.271	.267	.264	.260
13	.334	.328	.323	.318	.314	.309	.305	.300	.296	.292	.288	.284	.280	.277	.273
14	.347	.342	.337	.332	.327	.322	.318	.313	.309	.305	.301	.297	.293	.289	.285
15	.360	.355	.350	.345	.340	.335	.330	.326	.321	.317	.313	.309	.305	.301	.297
16	.373	.367	.362	.357	.352	.347	.342	.338	.333	.329	.324	.320	.316	.312	.308
17	.385	.379	.374	.369	.364	.359	.354	.349	.344	.340	.336	.331	.327	.323	.319
18	.397	.391	.385	.380	.375	.370	.365	.360	.355	.351	.346	.342	.338	.334	.330
19	.408	.402	.396	.391	.386	.381	.376	.371	.366	.361	.357	.353	.348	.344	.340
20	.418	.413	.407	.401	.396	.391	.386	.381	.376	.372	.367	.363	.358	.354	.350
21	.429	.423	.417	.412	.406	.401	.396	.391	.386	.381	.377	.372	.368	.364	.359
22	.438	.433	.427	.421	.416	.411	.406	.401	.396	.391	.386	.382	.377	.373	.369
23	.448	.442	.436	.431	.425	.420	.415	.410	.405	.400	.395	.391	.386	.382	.378
24	.457	.451	.445	.440	.434	.429	.424	.419	.414	.409	.404	.400	.395	.391	.386
25	.466	.460	.454	.449	.443	.438	.433	.427	.422	.418	.413	.408	.404	.399	.395
26	.475	.469	.463	.457	.452	.446	.441	.436	.431	.426	.421	.416	.412	.407	.403
27	.483	.477	.471	.465	.460	.454	.449	.444	.439	.434	.429	.424	.420	.415	.411
28	.491	.485	.479	.473	.468	.462	.457	.452	.447	.442	.437	.432	.428	.423	.419
29	.499	.493	.487	.481	.476	.470	.465	.460	.454	.449	.445	.440	.435	.431	.426
30	.506	.500	.494	.489	.483	.478	.472	.467	.462	.457	.452	.447	.443	.438	.433
31	.514	.508	.502	.496	.490	.485	.480	.474	.469	.464	.459	.454	.450	.445	.441
32	.521	.515	.509	.503	.497	.492	.487	.481	.476	.471	.466	.461	.457	.452	.447
33	.527	.521	.516	.510	.504	.499	.493	.488	.483	.478	.473	.468	.463	.459	.454
34	.534	.528	.522	.517	.511	.505	.500	.495	.490	.485	.480	.475	.470	.465	.461
35	.541	.535	.529	.523	.517	.512	.507	.501	.496	.491	.486	.481	.477	.472	.467
36	.547	.541	.535	.529	.524	.518	.513	.508	.503	.497	.492	.488	.483	.478	.474
37	.553	.547	.541	.536	.530	.524	.519	.514	.509	.504	.499	.494	.489	.484	.480
38	.559	.553	.547	.542	.536	.530	.525	.520	.515	.510	.505	.500	.495	.490	.486
39	.565	.559	.553	.547	.542	.536	.531	.526	.521	.515	.510	.506	.501	.496	.492
40	.570	.565	.559	.553	.547	.542	.537	.531	.526	.521	.516	.511	.507	.502	.497
41	.576	.570	.564	.559	.553	.548	.542	.537	.532	.527	.522	.517	.512	.507	.503
42	.581	.575	.570	.564	.558	.553	.548	.542	.537	.532	.527	.522	.518	.513	.508
43	.586	.581	.575	.569	.564	.558	.553	.548	.543	.537	.533	.528	.523	.518	.514
44	.592	.586	.580	.574	.569	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.533	.528	.523	.519
45	.597	.591	.585	.579	.574	.568	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.533	.528	.524
46	.601	.596	.590	.584	.579	.573	.568	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.533	.529
47	.606	.600	.595	.589	.584	.578	.573	.568	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.534
48	.611	.605	.599	.594	.588	.583	.578	.572	.567	.562	.557	.553	.548	.543	.539
49	.615	.609	.604	.598	.593	.587	.582	.577	.572	.567	.562	.557	.552	.548	.543
50	.620	.614	.608	.603	.597	.592	.587	.582	.576	.572	.567	.562	.557	.552	.548

Quantile der Beta-Verteilung: 99%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.99}$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.990	.900	.785	.684	.602	.536	.482	.438	.401	.369	.342	.319	.298	.280	.264
2	.995	.941	.859	.778	.706	.643	.590	.544	.504	.470	.440	.413	.389	.368	.349
3	.997	.958	.894	.827	.764	.707	.656	.612	.572	.537	.506	.478	.453	.430	.410
4	.997	.967	.915	.858	.802	.750	.703	.660	.622	.588	.557	.529	.503	.480	.458
5	.998	.973	.929	.879	.829	.782	.738	.698	.661	.627	.597	.569	.543	.520	.498
6	.998	.977	.939	.895	.850	.806	.765	.727	.692	.660	.630	.603	.577	.554	.532
7	.999	.980	.947	.907	.866	.825	.787	.751	.718	.687	.658	.631	.606	.583	.561
8	.999	.983	.952	.916	.879	.841	.805	.771	.739	.709	.681	.655	.631	.608	.587
9	.999	.984	.957	.924	.889	.854	.821	.788	.758	.729	.702	.677	.653	.630	.609
10	.999	.986	.961	.931	.898	.865	.834	.803	.774	.746	.720	.695	.672	.650	.630
11	.999	.987	.964	.936	.906	.875	.845	.816	.788	.761	.736	.712	.689	.668	.648
12	.999	.988	.967	.941	.912	.883	.855	.827	.800	.774	.750	.727	.705	.684	.664
13	.999	.989	.969	.945	.918	.890	.863	.837	.811	.786	.763	.740	.719	.698	.679
14	.999	.990	.971	.948	.923	.897	.871	.845	.821	.797	.774	.752	.731	.711	.692
15	.999	.990	.973	.951	.927	.902	.878	.853	.829	.806	.784	.763	.743	.723	.705
16	.999	.991	.975	.954	.931	.908	.884	.860	.837	.815	.794	.773	.753	.734	.716
17	.999	.992	.976	.956	.935	.912	.889	.867	.845	.823	.802	.782	.763	.744	.727
18	.999	.992	.977	.959	.938	.916	.894	.873	.851	.831	.810	.791	.772	.754	.736
19	.999	.992	.978	.961	.941	.920	.899	.878	.857	.837	.818	.799	.780	.763	.746
20	.999	.993	.979	.962	.943	.923	.903	.883	.863	.843	.824	.806	.788	.771	.754
21	1.00	.993	.980	.964	.946	.927	.907	.888	.868	.849	.831	.813	.795	.778	.762
22	1.00	.993	.981	.966	.948	.930	.911	.892	.873	.855	.837	.819	.802	.785	.769
23	1.00	.994	.982	.967	.950	.932	.914	.896	.877	.860	.842	.825	.808	.792	.776
24	1.00	.994	.983	.968	.952	.935	.917	.899	.882	.864	.847	.830	.814	.798	.783
25	1.00	.994	.983	.969	.954	.937	.920	.903	.886	.869	.852	.836	.820	.804	.789
26	1.00	.994	.984	.970	.955	.939	.923	.906	.889	.873	.856	.840	.825	.810	.795
27	1.00	.995	.985	.972	.957	.941	.925	.909	.893	.876	.861	.845	.830	.815	.800
28	1.00	.995	.985	.972	.958	.943	.927	.912	.896	.880	.865	.849	.834	.820	.806
29	1.00	.995	.986	.973	.960	.945	.930	.914	.899	.883	.868	.853	.839	.825	.811
30	1.00	.995	.986	.974	.961	.946	.932	.917	.902	.887	.872	.857	.843	.829	.815
31	1.00	.995	.986	.975	.962	.948	.934	.919	.904	.890	.875	.861	.847	.833	.820
32	1.00	.995	.987	.976	.963	.949	.935	.921	.907	.893	.878	.864	.851	.837	.824
33	1.00	.996	.987	.976	.964	.951	.937	.923	.909	.895	.881	.868	.854	.841	.828
34	1.00	.996	.988	.977	.965	.952	.939	.925	.912	.898	.884	.871	.858	.845	.832
35	1.00	.996	.988	.978	.966	.953	.940	.927	.914	.900	.887	.874	.861	.848	.836
36	1.00	.996	.988	.978	.967	.955	.942	.929	.916	.903	.890	.877	.864	.852	.839
37	1.00	.996	.989	.979	.968	.956	.943	.931	.918	.905	.892	.880	.867	.855	.843
38	1.00	.996	.989	.979	.969	.957	.945	.932	.920	.907	.895	.882	.870	.858	.846
39	1.00	.996	.989	.980	.969	.958	.946	.934	.921	.909	.897	.885	.873	.861	.849
40	1.00	.996	.989	.980	.970	.959	.947	.935	.923	.911	.899	.887	.875	.864	.852
41	1.00	.996	.990	.981	.971	.960	.948	.937	.925	.913	.901	.889	.878	.866	.855
42	1.00	.997	.990	.981	.971	.961	.949	.938	.926	.915	.903	.892	.880	.869	.858
43	1.00	.997	.990	.982	.972	.961	.951	.939	.928	.917	.905	.894	.883	.871	.860
44	1.00	.997	.990	.982	.973	.962	.952	.941	.929	.918	.907	.896	.885	.874	.863
45	1.00	.997	.991	.982	.973	.963	.953	.942	.931	.920	.909	.898	.887	.876	.865
46	1.00	.997	.991	.983	.974	.964	.954	.943	.932	.921	.910	.900	.889	.878	.868
47	1.00	.997	.991	.983	.974	.965	.954	.944	.933	.923	.912	.901	.891	.880	.870
48	1.00	.997	.991	.984	.975	.965	.955	.945	.935	.924	.914	.903	.893	.883	.872
49	1.00	.997	.991	.984	.975	.966	.956	.946	.936	.926	.915	.905	.895	.885	.875
50	1.00	.997	.991	.984	.976	.967	.957	.947	.937	.927	.917	.907	.896	.886	.877

Quantile der Beta-Verteilung: 99%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.99}$

$m \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	.250	.237	.226	.215	.206	.197	.189	.181	.175	.168	.162	.157	.152	.147	.142
2	.332	.316	.302	.289	.277	.266	.256	.246	.237	.229	.222	.215	.208	.202	.196
3	.391	.374	.358	.344	.330	.318	.307	.296	.286	.277	.268	.260	.252	.245	.238
4	.439	.421	.404	.389	.374	.361	.349	.337	.326	.316	.307	.298	.289	.281	.273
5	.478	.460	.443	.427	.412	.398	.385	.373	.361	.350	.340	.331	.322	.313	.305
6	.512	.493	.476	.460	.444	.430	.417	.404	.392	.381	.370	.360	.351	.342	.333
7	.541	.522	.505	.488	.473	.458	.445	.432	.420	.408	.397	.387	.377	.367	.358
8	.567	.548	.531	.514	.498	.484	.470	.457	.444	.432	.421	.411	.401	.391	.382
9	.590	.571	.554	.537	.521	.507	.493	.479	.467	.455	.443	.433	.422	.412	.403
10	.610	.592	.574	.558	.542	.527	.513	.500	.487	.475	.464	.453	.442	.432	.423
11	.628	.610	.593	.577	.561	.546	.532	.519	.506	.494	.483	.472	.461	.451	.441
12	.645	.627	.610	.594	.579	.564	.550	.537	.524	.512	.500	.489	.478	.468	.458
13	.660	.643	.626	.610	.595	.580	.566	.553	.540	.528	.516	.505	.494	.484	.474
14	.674	.657	.640	.624	.609	.595	.581	.568	.555	.543	.531	.520	.510	.499	.489
15	.687	.670	.654	.638	.623	.609	.595	.582	.569	.557	.546	.534	.524	.513	.504
16	.699	.682	.666	.650	.636	.622	.608	.595	.583	.570	.559	.548	.537	.527	.517
17	.710	.693	.677	.662	.648	.634	.620	.607	.595	.583	.571	.560	.550	.539	.529
18	.720	.704	.688	.673	.659	.645	.632	.619	.607	.595	.583	.572	.562	.551	.541
19	.729	.713	.698	.683	.669	.655	.642	.630	.617	.606	.594	.583	.573	.563	.553
20	.738	.722	.707	.693	.679	.665	.652	.640	.628	.616	.605	.594	.583	.573	.563
21	.746	.731	.716	.702	.688	.675	.662	.650	.638	.626	.615	.604	.594	.583	.574
22	.754	.739	.724	.710	.697	.684	.671	.659	.647	.635	.624	.614	.603	.593	.583
23	.761	.746	.732	.718	.705	.692	.680	.667	.656	.644	.633	.623	.612	.602	.593
24	.768	.754	.739	.726	.713	.700	.688	.676	.664	.653	.642	.631	.621	.611	.602
25	.774	.760	.746	.733	.720	.708	.695	.683	.672	.661	.650	.640	.629	.620	.610
26	.781	.767	.753	.740	.727	.715	.703	.691	.680	.669	.658	.648	.637	.628	.618
27	.786	.773	.759	.746	.734	.721	.710	.698	.687	.676	.665	.655	.645	.635	.626
28	.792	.778	.765	.752	.740	.728	.716	.705	.694	.683	.672	.662	.652	.643	.633
29	.797	.784	.771	.758	.746	.734	.723	.711	.700	.690	.679	.669	.659	.650	.641
30	.802	.789	.776	.764	.752	.740	.729	.718	.707	.696	.686	.676	.666	.657	.647
31	.807	.794	.781	.769	.757	.746	.734	.723	.713	.702	.692	.682	.673	.663	.654
32	.811	.799	.786	.774	.763	.751	.740	.729	.719	.708	.698	.688	.679	.669	.660
33	.815	.803	.791	.779	.768	.756	.745	.735	.724	.714	.704	.694	.685	.676	.667
34	.820	.807	.795	.784	.772	.761	.750	.740	.729	.719	.710	.700	.691	.681	.672
35	.823	.811	.800	.788	.777	.766	.755	.745	.735	.725	.715	.705	.696	.687	.678
36	.827	.815	.804	.793	.781	.771	.760	.750	.740	.730	.720	.711	.701	.692	.684
37	.831	.819	.808	.797	.786	.775	.765	.754	.744	.735	.725	.716	.707	.698	.689
38	.834	.823	.812	.801	.790	.779	.769	.759	.749	.739	.730	.721	.712	.703	.694
39	.838	.826	.815	.804	.794	.783	.773	.763	.753	.744	.734	.725	.716	.708	.699
40	.841	.830	.819	.808	.798	.787	.777	.767	.758	.748	.739	.730	.721	.712	.704
41	.844	.833	.822	.812	.801	.791	.781	.771	.762	.752	.743	.734	.726	.717	.709
42	.847	.836	.825	.815	.805	.795	.785	.775	.766	.757	.747	.739	.730	.721	.713
43	.850	.839	.828	.818	.808	.798	.788	.779	.770	.760	.752	.743	.734	.726	.717
44	.852	.842	.831	.821	.811	.802	.792	.783	.773	.764	.755	.747	.738	.730	.722
45	.855	.845	.834	.824	.815	.805	.795	.786	.777	.768	.759	.751	.742	.734	.726
46	.857	.847	.837	.827	.818	.808	.799	.790	.780	.772	.763	.754	.746	.738	.730
47	.860	.850	.840	.830	.821	.811	.802	.793	.784	.775	.766	.758	.750	.742	.734
48	.862	.852	.843	.833	.823	.814	.805	.796	.787	.778	.770	.762	.753	.745	.737
49	.865	.855	.845	.836	.826	.817	.808	.799	.790	.782	.773	.765	.757	.749	.741
50	.867	.857	.848	.838	.829	.820	.811	.802	.793	.785	.777	.768	.760	.752	.745

Quantile der Beta-Verteilung: 99%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.99}$

$m \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	.138	.134	.130	.127	.123	.120	.117	.114	.111	.109	.106	.104	.102	.099	.097
2	.190	.185	.180	.175	.171	.166	.162	.158	.155	.151	.148	.145	.142	.139	.136
3	.231	.225	.219	.214	.208	.203	.199	.194	.190	.185	.181	.178	.174	.170	.167
4	.266	.259	.253	.247	.241	.235	.230	.225	.220	.215	.211	.206	.202	.198	.194
5	.297	.290	.283	.276	.270	.264	.258	.252	.247	.242	.237	.232	.228	.223	.219
6	.325	.317	.310	.303	.296	.289	.283	.277	.271	.266	.261	.256	.251	.246	.242
7	.350	.342	.334	.327	.320	.313	.306	.300	.294	.288	.283	.277	.272	.267	.262
8	.373	.364	.356	.349	.341	.334	.328	.321	.315	.309	.303	.297	.292	.287	.282
9	.394	.385	.377	.369	.362	.354	.347	.341	.334	.328	.322	.316	.311	.305	.300
10	.414	.405	.396	.388	.381	.373	.366	.359	.352	.346	.340	.334	.328	.322	.317
11	.432	.423	.414	.406	.398	.391	.383	.376	.369	.363	.356	.350	.344	.339	.333
12	.449	.440	.431	.423	.415	.407	.400	.392	.385	.379	.372	.366	.360	.354	.348
13	.465	.456	.447	.439	.430	.423	.415	.408	.401	.394	.387	.381	.375	.369	.363
14	.480	.471	.462	.453	.445	.437	.430	.422	.415	.408	.401	.395	.389	.382	.377
15	.494	.485	.476	.467	.459	.451	.443	.436	.429	.422	.415	.408	.402	.396	.390
16	.507	.498	.489	.481	.472	.464	.456	.449	.442	.434	.428	.421	.415	.408	.402
17	.520	.511	.502	.493	.485	.477	.469	.461	.454	.447	.440	.433	.427	.420	.414
18	.532	.523	.514	.505	.497	.488	.481	.473	.466	.458	.452	.445	.438	.432	.426
19	.543	.534	.525	.516	.508	.500	.492	.484	.477	.470	.463	.456	.449	.443	.437
20	.554	.545	.536	.527	.519	.511	.503	.495	.488	.480	.473	.467	.460	.453	.447
21	.564	.555	.546	.537	.529	.521	.513	.505	.498	.491	.484	.477	.470	.464	.457
22	.574	.565	.556	.547	.539	.531	.523	.515	.508	.500	.493	.487	.480	.473	.467
23	.583	.574	.565	.557	.548	.540	.532	.525	.517	.510	.503	.496	.489	.483	.476
24	.592	.583	.574	.566	.557	.549	.541	.534	.526	.519	.512	.505	.498	.492	.485
25	.601	.592	.583	.574	.566	.558	.550	.542	.535	.528	.521	.514	.507	.501	.494
26	.609	.600	.591	.583	.574	.566	.559	.551	.543	.536	.529	.522	.516	.509	.503
27	.617	.608	.599	.591	.582	.574	.567	.559	.552	.544	.537	.530	.524	.517	.511
28	.624	.615	.607	.598	.590	.582	.574	.567	.559	.552	.545	.538	.532	.525	.519
29	.631	.623	.614	.606	.598	.590	.582	.574	.567	.560	.553	.546	.539	.533	.526
30	.638	.630	.621	.613	.605	.597	.589	.582	.574	.567	.560	.553	.546	.540	.534
31	.645	.636	.628	.620	.612	.604	.596	.589	.581	.574	.567	.560	.554	.547	.541
32	.652	.643	.634	.626	.618	.610	.603	.595	.588	.581	.574	.567	.560	.554	.548
33	.658	.649	.641	.633	.625	.617	.609	.602	.595	.587	.581	.574	.567	.561	.554
34	.664	.655	.647	.639	.631	.623	.616	.608	.601	.594	.587	.580	.574	.567	.561
35	.670	.661	.653	.645	.637	.629	.622	.614	.607	.600	.593	.586	.580	.573	.567
36	.675	.667	.658	.650	.643	.635	.628	.620	.613	.606	.599	.592	.586	.579	.573
37	.680	.672	.664	.656	.648	.641	.633	.626	.619	.612	.605	.598	.592	.585	.579
38	.686	.677	.669	.661	.654	.646	.639	.631	.624	.617	.611	.604	.597	.591	.585
39	.691	.683	.674	.667	.659	.651	.644	.637	.630	.623	.616	.610	.603	.597	.590
40	.696	.687	.679	.672	.664	.657	.649	.642	.635	.628	.622	.615	.608	.602	.596
41	.700	.692	.684	.677	.669	.662	.654	.647	.640	.633	.627	.620	.614	.607	.601
42	.705	.697	.689	.681	.674	.666	.659	.652	.645	.638	.632	.625	.619	.613	.606
43	.709	.701	.694	.686	.679	.671	.664	.657	.650	.643	.637	.630	.624	.618	.611
44	.714	.706	.698	.690	.683	.676	.669	.662	.655	.648	.641	.635	.629	.622	.616
45	.718	.710	.702	.695	.687	.680	.673	.666	.659	.653	.646	.640	.633	.627	.621
46	.722	.714	.707	.699	.692	.685	.678	.671	.664	.657	.651	.644	.638	.632	.626
47	.726	.718	.711	.703	.696	.689	.682	.675	.668	.662	.655	.649	.642	.636	.630
48	.730	.722	.715	.707	.700	.693	.686	.679	.672	.666	.659	.653	.647	.641	.635
49	.733	.726	.718	.711	.704	.697	.690	.683	.677	.670	.664	.657	.651	.645	.639
50	.737	.729	.722	.715	.708	.701	.694	.687	.681	.674	.668	.661	.655	.649	.643

Quantile der Beta-Verteilung: 99%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.99}$

$m \setminus n$	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	.095	.093	.091	.090	.088	.086	.085	.083	.082	.080	.079	.078	.076	.075	.074
2	.133	.130	.128	.126	.123	.121	.119	.117	.115	.113	.111	.109	.107	.106	.104
3	.164	.161	.158	.155	.152	.149	.147	.144	.142	.139	.137	.135	.133	.131	.129
4	.191	.187	.184	.180	.177	.174	.171	.168	.166	.163	.160	.158	.155	.153	.151
5	.215	.211	.207	.204	.200	.197	.194	.190	.187	.184	.181	.179	.176	.173	.171
6	.237	.233	.229	.225	.221	.218	.214	.211	.207	.204	.201	.198	.195	.192	.189
7	.258	.253	.249	.245	.241	.237	.233	.229	.226	.222	.219	.216	.213	.210	.207
8	.277	.272	.268	.263	.259	.255	.251	.247	.243	.240	.236	.233	.229	.226	.223
9	.295	.290	.285	.281	.276	.272	.268	.264	.260	.256	.252	.249	.245	.242	.239
10	.312	.307	.302	.297	.292	.288	.284	.279	.275	.271	.268	.264	.260	.257	.253
11	.328	.322	.317	.313	.308	.303	.299	.294	.290	.286	.282	.278	.274	.271	.267
12	.343	.337	.332	.327	.322	.318	.313	.309	.304	.300	.296	.292	.288	.284	.281
13	.357	.352	.346	.341	.336	.331	.327	.322	.318	.313	.309	.305	.301	.297	.293
14	.371	.365	.360	.355	.350	.345	.340	.335	.331	.326	.322	.318	.314	.310	.306
15	.384	.378	.373	.367	.362	.357	.352	.348	.343	.338	.334	.330	.325	.321	.317
16	.396	.391	.385	.380	.374	.369	.364	.359	.355	.350	.346	.341	.337	.333	.329
17	.408	.402	.397	.391	.386	.381	.376	.371	.366	.361	.357	.352	.348	.344	.340
18	.420	.414	.408	.403	.397	.392	.387	.382	.377	.372	.368	.363	.359	.354	.350
19	.431	.425	.419	.413	.408	.403	.397	.392	.387	.383	.378	.373	.369	.365	.360
20	.441	.435	.429	.424	.418	.413	.408	.403	.398	.393	.388	.383	.379	.374	.370
21	.451	.445	.439	.434	.428	.423	.418	.412	.407	.402	.398	.393	.388	.384	.380
22	.461	.455	.449	.443	.438	.432	.427	.422	.417	.412	.407	.402	.398	.393	.389
23	.470	.464	.458	.453	.447	.442	.436	.431	.426	.421	.416	.411	.407	.402	.398
24	.479	.473	.467	.462	.456	.450	.445	.440	.435	.430	.425	.420	.415	.411	.406
25	.488	.482	.476	.470	.465	.459	.454	.448	.443	.438	.433	.428	.424	.419	.415
26	.496	.490	.484	.479	.473	.467	.462	.457	.452	.446	.441	.437	.432	.427	.423
27	.505	.498	.492	.487	.481	.475	.470	.465	.460	.454	.449	.445	.440	.435	.431
28	.512	.506	.500	.495	.489	.483	.478	.472	.467	.462	.457	.452	.448	.443	.438
29	.520	.514	.508	.502	.496	.491	.485	.480	.475	.470	.465	.460	.455	.450	.446
30	.527	.521	.515	.509	.504	.498	.493	.487	.482	.477	.472	.467	.462	.458	.453
31	.534	.528	.522	.517	.511	.505	.500	.494	.489	.484	.479	.474	.469	.465	.460
32	.541	.535	.529	.523	.518	.512	.507	.501	.496	.491	.486	.481	.476	.471	.467
33	.548	.542	.536	.530	.525	.519	.513	.508	.503	.498	.493	.488	.483	.478	.473
34	.555	.548	.543	.537	.531	.525	.520	.515	.509	.504	.499	.494	.489	.485	.480
35	.561	.555	.549	.543	.537	.532	.526	.521	.516	.511	.506	.501	.496	.491	.486
36	.567	.561	.555	.549	.544	.538	.533	.527	.522	.517	.512	.507	.502	.497	.492
37	.573	.567	.561	.555	.550	.544	.539	.533	.528	.523	.518	.513	.508	.503	.498
38	.579	.573	.567	.561	.555	.550	.544	.539	.534	.529	.524	.519	.514	.509	.504
39	.584	.578	.572	.567	.561	.556	.550	.545	.540	.534	.529	.524	.520	.515	.510
40	.590	.584	.578	.572	.567	.561	.556	.550	.545	.540	.535	.530	.525	.520	.516
41	.595	.589	.583	.578	.572	.566	.561	.556	.551	.545	.540	.535	.531	.526	.521
42	.600	.594	.589	.583	.577	.572	.566	.561	.556	.551	.546	.541	.536	.531	.526
43	.605	.599	.594	.588	.582	.577	.572	.566	.561	.556	.551	.546	.541	.536	.532
44	.610	.604	.599	.593	.587	.582	.577	.571	.566	.561	.556	.551	.546	.541	.537
45	.615	.609	.604	.598	.592	.587	.581	.576	.571	.566	.561	.556	.551	.546	.542
46	.620	.614	.608	.603	.597	.592	.586	.581	.576	.571	.566	.561	.556	.551	.547
47	.624	.619	.613	.607	.602	.596	.591	.586	.581	.575	.571	.566	.561	.556	.551
48	.629	.623	.617	.612	.606	.601	.596	.590	.585	.580	.575	.570	.565	.561	.556
49	.633	.627	.622	.616	.611	.605	.600	.595	.590	.585	.580	.575	.570	.565	.561
50	.637	.632	.626	.621	.615	.610	.604	.599	.594	.589	.584	.579	.574	.570	.565

Quantile der Beta-Verteilung: 99.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.995}$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.995	.929	.829	.734	.653	.586	.531	.484	.445	.411	.382	.357	.335	.315	.298
2	.997	.959	.889	.815	.746	.685	.632	.585	.544	.509	.477	.449	.424	.402	.381
3	.998	.971	.917	.856	.797	.742	.693	.648	.608	.573	.541	.512	.486	.463	.441
4	.999	.977	.934	.882	.830	.781	.735	.693	.655	.621	.589	.561	.534	.510	.488
5	.999	.981	.945	.900	.854	.809	.767	.728	.691	.658	.627	.599	.573	.549	.527
6	.999	.984	.953	.913	.872	.831	.791	.755	.720	.688	.658	.631	.605	.582	.560
7	.999	.986	.958	.923	.886	.848	.811	.777	.744	.713	.685	.658	.633	.610	.588
8	.999	.988	.963	.931	.897	.862	.828	.795	.764	.734	.707	.681	.657	.634	.612
9	.999	.989	.967	.938	.906	.873	.841	.810	.781	.753	.726	.701	.677	.655	.634
10	.999	.990	.970	.943	.913	.883	.853	.824	.795	.768	.743	.718	.695	.674	.653
11	1.00	.991	.972	.947	.920	.891	.863	.835	.808	.782	.758	.734	.712	.690	.670
12	1.00	.992	.974	.951	.925	.899	.872	.845	.819	.795	.771	.748	.726	.705	.686
13	1.00	.992	.976	.955	.930	.905	.879	.854	.829	.805	.782	.760	.739	.719	.700
14	1.00	.993	.978	.957	.935	.910	.886	.862	.838	.815	.793	.772	.751	.731	.713
15	1.00	.993	.979	.960	.938	.915	.892	.869	.846	.824	.803	.782	.762	.743	.724
16	1.00	.994	.980	.962	.942	.920	.898	.875	.854	.832	.811	.791	.772	.753	.735
17	1.00	.994	.981	.964	.945	.924	.903	.881	.860	.839	.819	.800	.781	.763	.745
18	1.00	.994	.982	.966	.947	.927	.907	.887	.866	.846	.827	.808	.789	.772	.754
19	1.00	.995	.983	.968	.950	.931	.911	.891	.872	.852	.833	.815	.797	.780	.763
20	1.00	.995	.984	.969	.952	.934	.915	.896	.877	.858	.840	.822	.804	.787	.771
21	1.00	.995	.985	.971	.954	.936	.918	.900	.881	.863	.845	.828	.811	.794	.778
22	1.00	.995	.985	.972	.956	.939	.921	.904	.886	.868	.851	.834	.817	.801	.785
23	1.00	.996	.986	.973	.958	.941	.924	.907	.890	.873	.856	.839	.823	.807	.792
24	1.00	.996	.987	.974	.959	.944	.927	.910	.894	.877	.861	.844	.829	.813	.798
25	1.00	.996	.987	.975	.961	.946	.930	.913	.897	.881	.865	.849	.834	.819	.804
26	1.00	.996	.988	.976	.962	.947	.932	.916	.900	.885	.869	.854	.839	.824	.809
27	1.00	.996	.988	.977	.963	.949	.934	.919	.903	.888	.873	.858	.843	.829	.815
28	1.00	.996	.988	.977	.965	.951	.936	.921	.906	.891	.877	.862	.847	.833	.819
29	1.00	.996	.989	.978	.966	.952	.938	.924	.909	.894	.880	.866	.852	.838	.824
30	1.00	.997	.989	.979	.967	.954	.940	.926	.912	.897	.883	.869	.855	.842	.828
31	1.00	.997	.989	.980	.968	.955	.942	.928	.914	.900	.886	.873	.859	.846	.833
32	1.00	.997	.990	.980	.969	.956	.943	.930	.916	.903	.889	.876	.863	.849	.837
33	1.00	.997	.990	.981	.970	.958	.945	.932	.919	.905	.892	.879	.866	.853	.840
34	1.00	.997	.990	.981	.970	.959	.946	.934	.921	.908	.895	.882	.869	.856	.844
35	1.00	.997	.991	.982	.971	.960	.948	.935	.923	.910	.897	.885	.872	.860	.848
36	1.00	.997	.991	.982	.972	.961	.949	.937	.924	.912	.900	.887	.875	.863	.851
37	1.00	.997	.991	.983	.973	.962	.950	.938	.926	.914	.902	.890	.878	.866	.854
38	1.00	.997	.991	.983	.973	.963	.951	.940	.928	.916	.904	.892	.880	.869	.857
39	1.00	.997	.992	.984	.974	.964	.953	.941	.930	.918	.906	.894	.883	.871	.860
40	1.00	.997	.992	.984	.975	.964	.954	.943	.931	.920	.908	.897	.885	.874	.863
41	1.00	.998	.992	.984	.975	.965	.955	.944	.933	.921	.910	.899	.888	.876	.865
42	1.00	.998	.992	.985	.976	.966	.956	.945	.934	.923	.912	.901	.890	.879	.868
43	1.00	.998	.992	.985	.976	.967	.957	.946	.935	.925	.914	.903	.892	.881	.871
44	1.00	.998	.993	.985	.977	.967	.958	.947	.937	.926	.915	.905	.894	.883	.873
45	1.00	.998	.993	.986	.977	.968	.958	.948	.938	.928	.917	.906	.896	.886	.875
46	1.00	.998	.993	.986	.978	.969	.959	.949	.939	.929	.919	.908	.898	.888	.877
47	1.00	.998	.993	.986	.978	.969	.960	.950	.940	.930	.920	.910	.900	.890	.880
48	1.00	.998	.993	.987	.979	.970	.961	.951	.941	.932	.922	.912	.902	.892	.882
49	1.00	.998	.993	.987	.979	.971	.962	.952	.943	.933	.923	.913	.903	.893	.884
50	1.00	.998	.993	.987	.979	.971	.962	.953	.944	.934	.924	.915	.905	.895	.886

Quantile der Beta-Verteilung: 99.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.995}$

$m \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	.282	.268	.255	.243	.233	.223	.214	.206	.198	.191	.184	.178	.172	.167	.162
2	.363	.346	.331	.317	.304	.292	.281	.271	.262	.253	.245	.237	.230	.223	.216
3	.422	.404	.387	.372	.358	.345	.332	.321	.310	.300	.291	.282	.274	.266	.259
4	.468	.449	.432	.416	.401	.387	.374	.362	.351	.340	.330	.320	.311	.303	.295
5	.507	.488	.470	.453	.438	.424	.410	.397	.385	.374	.363	.353	.344	.335	.326
6	.539	.520	.502	.485	.470	.455	.441	.428	.416	.404	.393	.383	.373	.363	.354
7	.567	.548	.530	.514	.498	.483	.469	.455	.443	.431	.419	.409	.398	.389	.379
8	.592	.573	.555	.538	.523	.508	.493	.480	.467	.455	.443	.432	.422	.412	.402
9	.614	.595	.578	.561	.545	.530	.516	.502	.489	.477	.465	.454	.443	.433	.424
10	.633	.615	.597	.581	.565	.550	.536	.522	.509	.497	.485	.474	.463	.453	.443
11	.651	.633	.616	.599	.583	.569	.554	.541	.528	.515	.504	.492	.482	.471	.461
12	.667	.649	.632	.616	.600	.585	.571	.558	.545	.533	.521	.509	.498	.488	.478
13	.681	.664	.647	.631	.616	.601	.587	.574	.561	.548	.537	.525	.514	.504	.494
14	.695	.677	.661	.645	.630	.615	.601	.588	.575	.563	.551	.540	.529	.519	.509
15	.707	.690	.674	.658	.643	.629	.615	.602	.589	.577	.565	.554	.543	.532	.522
16	.718	.701	.685	.670	.655	.641	.627	.614	.602	.590	.578	.567	.556	.545	.535
17	.728	.712	.696	.681	.667	.653	.639	.626	.614	.602	.590	.579	.568	.558	.548
18	.738	.722	.706	.692	.677	.663	.650	.637	.625	.613	.602	.590	.580	.569	.559
19	.747	.731	.716	.701	.687	.674	.661	.648	.636	.624	.612	.601	.591	.580	.570
20	.755	.740	.725	.710	.697	.683	.670	.658	.646	.634	.623	.612	.601	.591	.581
21	.763	.748	.733	.719	.705	.692	.679	.667	.655	.643	.632	.621	.611	.601	.591
22	.770	.755	.741	.727	.714	.701	.688	.676	.664	.653	.641	.631	.620	.610	.600
23	.777	.762	.748	.735	.722	.709	.696	.684	.672	.661	.650	.639	.629	.619	.609
24	.783	.769	.755	.742	.729	.716	.704	.692	.681	.669	.658	.648	.638	.628	.618
25	.790	.776	.762	.749	.736	.723	.711	.700	.688	.677	.666	.656	.646	.636	.626
26	.795	.782	.768	.755	.743	.730	.718	.707	.695	.684	.674	.663	.653	.644	.634
27	.801	.787	.774	.761	.749	.737	.725	.714	.702	.692	.681	.671	.661	.651	.642
28	.806	.793	.780	.767	.755	.743	.731	.720	.709	.698	.688	.678	.668	.658	.649
29	.811	.798	.785	.773	.761	.749	.737	.726	.715	.705	.694	.684	.675	.665	.656
30	.815	.803	.790	.778	.766	.755	.743	.732	.721	.711	.701	.691	.681	.672	.662
31	.820	.807	.795	.783	.771	.760	.749	.738	.727	.717	.707	.697	.687	.678	.669
32	.824	.812	.800	.788	.776	.765	.754	.743	.733	.723	.713	.703	.693	.684	.675
33	.828	.816	.804	.792	.781	.770	.759	.749	.738	.728	.718	.709	.699	.690	.681
34	.832	.820	.808	.797	.786	.775	.764	.754	.743	.733	.724	.714	.705	.696	.687
35	.836	.824	.812	.801	.790	.779	.769	.758	.748	.738	.729	.719	.710	.701	.692
36	.839	.828	.816	.805	.794	.784	.773	.763	.753	.743	.734	.724	.715	.706	.697
37	.842	.831	.820	.809	.798	.788	.777	.767	.758	.748	.738	.729	.720	.711	.703
38	.846	.835	.824	.813	.802	.792	.782	.772	.762	.752	.743	.734	.725	.716	.708
39	.849	.838	.827	.816	.806	.796	.786	.776	.766	.757	.747	.738	.730	.721	.712
40	.852	.841	.830	.820	.810	.799	.790	.780	.770	.761	.752	.743	.734	.725	.717
41	.855	.844	.833	.823	.813	.803	.793	.784	.774	.765	.756	.747	.738	.730	.721
42	.857	.847	.837	.826	.816	.806	.797	.787	.778	.769	.760	.751	.743	.734	.726
43	.860	.850	.839	.829	.820	.810	.800	.791	.782	.773	.764	.755	.747	.738	.730
44	.863	.852	.842	.832	.823	.813	.804	.794	.785	.776	.768	.759	.751	.742	.734
45	.865	.855	.845	.835	.826	.816	.807	.798	.789	.780	.771	.763	.754	.746	.738
46	.867	.858	.848	.838	.829	.819	.810	.801	.792	.783	.775	.766	.758	.750	.742
47	.870	.860	.850	.841	.831	.822	.813	.804	.795	.787	.778	.770	.762	.754	.746
48	.872	.862	.853	.843	.834	.825	.816	.807	.798	.790	.781	.773	.765	.757	.749
49	.874	.865	.855	.846	.837	.828	.819	.810	.801	.793	.785	.776	.768	.761	.753
50	.876	.867	.857	.848	.839	.830	.822	.813	.804	.796	.788	.780	.772	.764	.756

Quantile der Beta-Verteilung: 99.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.995}$

$m \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	.157	.153	.148	.144	.140	.137	.133	.130	.127	.124	.121	.119	.116	.113	.111
2	.210	.204	.199	.194	.189	.184	.180	.176	.172	.168	.164	.160	.157	.154	.151
3	.252	.245	.239	.233	.227	.222	.217	.212	.207	.203	.198	.194	.190	.186	.183
4	.287	.280	.273	.266	.260	.254	.248	.243	.238	.233	.228	.223	.219	.215	.210
5	.318	.310	.303	.296	.289	.283	.276	.271	.265	.259	.254	.249	.244	.240	.235
6	.346	.337	.330	.322	.315	.308	.302	.296	.290	.284	.278	.273	.268	.263	.258
7	.371	.362	.354	.346	.339	.332	.325	.318	.312	.306	.300	.295	.289	.284	.279
8	.393	.385	.376	.368	.361	.353	.346	.339	.333	.327	.321	.315	.309	.304	.298
9	.414	.405	.397	.389	.381	.373	.366	.359	.352	.346	.340	.333	.328	.322	.317
10	.434	.425	.416	.408	.400	.392	.384	.377	.370	.364	.357	.351	.345	.339	.334
11	.452	.443	.434	.425	.417	.409	.402	.394	.387	.380	.374	.368	.361	.355	.350
12	.468	.459	.450	.442	.433	.425	.418	.410	.403	.396	.390	.383	.377	.371	.365
13	.484	.475	.466	.457	.449	.441	.433	.425	.418	.411	.404	.398	.391	.385	.379
14	.499	.489	.480	.472	.463	.455	.447	.440	.432	.425	.418	.412	.405	.399	.393
15	.513	.503	.494	.485	.477	.469	.461	.453	.446	.439	.432	.425	.419	.412	.406
16	.526	.516	.507	.498	.490	.482	.474	.466	.459	.451	.444	.438	.431	.425	.418
17	.538	.529	.520	.511	.502	.494	.486	.478	.471	.464	.457	.450	.443	.437	.430
18	.550	.540	.531	.522	.514	.506	.498	.490	.482	.475	.468	.461	.454	.448	.442
19	.561	.551	.542	.534	.525	.517	.509	.501	.493	.486	.479	.472	.465	.459	.453
20	.571	.562	.553	.544	.536	.527	.519	.512	.504	.497	.490	.483	.476	.469	.463
21	.581	.572	.563	.554	.546	.538	.530	.522	.514	.507	.500	.493	.486	.479	.473
22	.591	.582	.573	.564	.555	.547	.539	.531	.524	.517	.509	.502	.496	.489	.483
23	.600	.591	.582	.573	.565	.556	.548	.541	.533	.526	.519	.512	.505	.498	.492
24	.609	.599	.591	.582	.573	.565	.557	.550	.542	.535	.528	.521	.514	.507	.501
25	.617	.608	.599	.590	.582	.574	.566	.558	.551	.543	.536	.529	.522	.516	.509
26	.625	.616	.607	.598	.590	.582	.574	.566	.559	.552	.544	.537	.531	.524	.518
27	.632	.623	.615	.606	.598	.590	.582	.574	.567	.559	.552	.545	.539	.532	.526
28	.640	.631	.622	.614	.605	.597	.590	.582	.574	.567	.560	.553	.546	.540	.533
29	.647	.638	.629	.621	.613	.605	.597	.589	.582	.575	.567	.561	.554	.547	.541
30	.653	.645	.636	.628	.620	.612	.604	.596	.589	.582	.575	.568	.561	.554	.548
31	.660	.651	.643	.634	.626	.618	.611	.603	.596	.589	.582	.575	.568	.561	.555
32	.666	.657	.649	.641	.633	.625	.617	.610	.602	.595	.588	.581	.575	.568	.562
33	.672	.664	.655	.647	.639	.631	.624	.616	.609	.602	.595	.588	.581	.575	.568
34	.678	.669	.661	.653	.645	.637	.630	.622	.615	.608	.601	.594	.587	.581	.575
35	.683	.675	.667	.659	.651	.643	.636	.628	.621	.614	.607	.600	.594	.587	.581
36	.689	.681	.672	.664	.657	.649	.641	.634	.627	.620	.613	.606	.600	.593	.587
37	.694	.686	.678	.670	.662	.654	.647	.640	.632	.625	.619	.612	.605	.599	.593
38	.699	.691	.683	.675	.667	.660	.652	.645	.638	.631	.624	.617	.611	.605	.598
39	.704	.696	.688	.680	.672	.665	.657	.650	.643	.636	.630	.623	.616	.610	.604
40	.709	.701	.693	.685	.677	.670	.663	.655	.648	.641	.635	.628	.622	.615	.609
41	.713	.705	.697	.690	.682	.675	.667	.660	.653	.647	.640	.633	.627	.620	.614
42	.718	.710	.702	.694	.687	.679	.672	.665	.658	.651	.645	.638	.632	.625	.619
43	.722	.714	.706	.699	.691	.684	.677	.670	.663	.656	.650	.643	.637	.630	.624
44	.726	.718	.711	.703	.696	.688	.681	.674	.668	.661	.654	.648	.641	.635	.629
45	.730	.722	.715	.707	.700	.693	.686	.679	.672	.665	.659	.652	.646	.640	.634
46	.734	.726	.719	.711	.704	.697	.690	.683	.676	.670	.663	.657	.650	.644	.638
47	.738	.730	.723	.715	.708	.701	.694	.687	.681	.674	.667	.661	.655	.649	.643
48	.742	.734	.727	.719	.712	.705	.698	.691	.685	.678	.672	.665	.659	.653	.647
49	.745	.738	.730	.723	.716	.709	.702	.695	.689	.682	.676	.669	.663	.657	.651
50	.749	.741	.734	.727	.720	.713	.706	.699	.693	.686	.680	.673	.667	.661	.655

Quantile der Beta-Verteilung: 99.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.995}$

$m \setminus n$	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	.109	.107	.105	.102	.101	.099	.097	.095	.093	.092	.090	.089	.087	.086	.085
2	.148	.145	.142	.139	.137	.134	.132	.130	.127	.125	.123	.121	.119	.117	.116
3	.179	.176	.173	.169	.166	.163	.161	.158	.155	.153	.150	.148	.145	.143	.141
4	.207	.203	.199	.196	.192	.189	.186	.183	.180	.177	.174	.171	.169	.166	.164
5	.231	.227	.223	.219	.215	.212	.208	.205	.202	.198	.195	.192	.189	.187	.184
6	.253	.249	.245	.241	.237	.233	.229	.225	.222	.218	.215	.212	.209	.206	.203
7	.274	.269	.265	.261	.256	.252	.248	.244	.241	.237	.233	.230	.227	.224	.220
8	.293	.288	.284	.279	.275	.270	.266	.262	.258	.254	.251	.247	.244	.240	.237
9	.311	.306	.301	.297	.292	.287	.283	.279	.275	.271	.267	.263	.259	.256	.252
10	.328	.323	.318	.313	.308	.304	.299	.295	.290	.286	.282	.278	.275	.271	.267
11	.344	.339	.334	.328	.324	.319	.314	.310	.305	.301	.297	.293	.289	.285	.281
12	.359	.354	.348	.343	.338	.333	.328	.324	.319	.315	.311	.307	.302	.299	.295
13	.374	.368	.362	.357	.352	.347	.342	.337	.333	.328	.324	.320	.315	.311	.307
14	.387	.381	.376	.370	.365	.360	.355	.350	.346	.341	.337	.332	.328	.324	.320
15	.400	.394	.389	.383	.378	.373	.368	.363	.358	.353	.349	.344	.340	.336	.332
16	.412	.407	.401	.395	.390	.385	.379	.374	.370	.365	.360	.356	.351	.347	.343
17	.424	.418	.412	.407	.401	.396	.391	.386	.381	.376	.371	.367	.362	.358	.354
18	.435	.430	.424	.418	.412	.407	.402	.397	.392	.387	.382	.377	.373	.369	.364
19	.446	.440	.434	.429	.423	.418	.412	.407	.402	.397	.392	.388	.383	.379	.374
20	.457	.451	.445	.439	.433	.428	.423	.417	.412	.407	.402	.398	.393	.389	.384
21	.467	.461	.455	.449	.443	.438	.432	.427	.422	.417	.412	.407	.403	.398	.394
22	.476	.470	.464	.458	.453	.447	.442	.436	.431	.426	.421	.416	.412	.407	.403
23	.486	.479	.473	.468	.462	.456	.451	.446	.440	.435	.430	.425	.421	.416	.411
24	.494	.488	.482	.476	.471	.465	.460	.454	.449	.444	.439	.434	.429	.425	.420
25	.503	.497	.491	.485	.479	.474	.468	.463	.457	.452	.447	.442	.438	.433	.428
26	.511	.505	.499	.493	.487	.482	.476	.471	.466	.460	.455	.451	.446	.441	.436
27	.519	.513	.507	.501	.495	.490	.484	.479	.474	.468	.463	.458	.454	.449	.444
28	.527	.521	.515	.509	.503	.497	.492	.487	.481	.476	.471	.466	.461	.456	.452
29	.534	.528	.522	.516	.511	.505	.499	.494	.489	.483	.478	.473	.469	.464	.459
30	.542	.535	.529	.524	.518	.512	.507	.501	.496	.491	.486	.481	.476	.471	.466
31	.549	.542	.536	.531	.525	.519	.514	.508	.503	.498	.493	.488	.483	.478	.473
32	.555	.549	.543	.537	.532	.526	.520	.515	.510	.504	.499	.494	.489	.485	.480
33	.562	.556	.550	.544	.538	.533	.527	.522	.516	.511	.506	.501	.496	.491	.487
34	.568	.562	.556	.550	.545	.539	.533	.528	.523	.518	.512	.507	.502	.498	.493
35	.575	.568	.562	.557	.551	.545	.540	.534	.529	.524	.519	.514	.509	.504	.499
36	.581	.574	.568	.563	.557	.551	.546	.540	.535	.530	.525	.520	.515	.510	.505
37	.586	.580	.574	.569	.563	.557	.552	.546	.541	.536	.531	.526	.521	.516	.511
38	.592	.586	.580	.574	.569	.563	.557	.552	.547	.542	.536	.531	.527	.522	.517
39	.598	.592	.586	.580	.574	.569	.563	.558	.552	.547	.542	.537	.532	.527	.523
40	.603	.597	.591	.585	.580	.574	.569	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.533	.528
41	.608	.602	.596	.591	.585	.579	.574	.568	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.534
42	.613	.607	.601	.596	.590	.584	.579	.574	.568	.563	.558	.553	.548	.544	.539
43	.618	.612	.606	.601	.595	.590	.584	.579	.574	.568	.563	.558	.553	.549	.544
44	.623	.617	.611	.606	.600	.594	.589	.584	.578	.573	.568	.563	.558	.554	.549
45	.628	.622	.616	.610	.605	.599	.594	.589	.583	.578	.573	.568	.563	.559	.554
46	.632	.626	.621	.615	.609	.604	.599	.593	.588	.583	.578	.573	.568	.563	.559
47	.637	.631	.625	.619	.614	.609	.603	.598	.593	.588	.583	.578	.573	.568	.563
48	.641	.635	.630	.624	.618	.613	.608	.602	.597	.592	.587	.582	.577	.573	.568
49	.645	.640	.634	.628	.623	.617	.612	.607	.602	.597	.592	.587	.582	.577	.572
50	.649	.644	.638	.632	.627	.622	.616	.611	.606	.601	.596	.591	.586	.581	.577

A.8 Quantile der Wilcoxon $U_{m,n}$-Verteilung: 0.1%-Quantil

Tabelliert ist das 0.1%-Quantil $U_{m,n;\,0.001}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	11	11
6	0	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	13	14	15	16	17
7	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	19	20	21	22	23
8	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24	25	27	28	30
9	2	3	4	6	8	9	11	13	15	16	18	20	22	24	26	27	29	31	33	35	37
10	2	4	6	7	9	11	13	15	18	20	22	24	26	28	30	33	35	37	39	41	44
11	3	5	7	9	11	13	16	18	21	23	25	28	30	33	35	38	41	43	46	48	51
12	3	5	8	10	13	15	18	21	24	26	29	32	35	38	41	43	46	49	52	55	58
13	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	43	46	49	52	55	59	62	65
14	4	7	10	13	16	20	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62	65	69	73
15	5	8	11	15	18	22	25	29	33	37	41	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
16	6	9	12	16	20	24	28	32	36	40	44	49	53	57	61	66	70	74	79	83	87
17	6	10	14	18	22	26	30	35	39	44	48	53	58	62	67	71	76	81	86	90	95
18	7	11	15	19	24	28	33	38	43	47	52	57	62	67	72	77	82	87	92	97	103
19	8	12	16	21	26	30	35	41	46	51	56	61	67	72	78	83	88	94	99	105	110
20	8	13	17	22	27	33	38	43	49	55	60	66	71	77	83	89	95	100	106	112	118
21	9	13	19	24	29	35	41	46	52	58	64	70	76	82	88	95	101	107	113	119	126
22	9	14	20	25	31	37	43	49	55	62	68	74	81	87	94	100	107	113	120	127	133
23	10	15	21	27	33	39	46	52	59	65	72	79	86	92	99	106	113	120	127	134	141
24	11	16	22	28	35	41	48	55	62	69	76	83	90	97	105	112	119	127	134	141	149
25	11	17	23	30	37	44	51	58	65	73	80	87	95	103	110	118	126	133	141	149	156
26	12	18	25	32	39	46	53	61	69	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164
27	13	19	26	33	41	48	56	64	72	80	88	96	105	113	121	130	138	147	155	164	172
28	13	20	27	35	42	50	58	67	75	84	92	101	109	118	127	136	144	153	162	171	180
29	14	21	28	36	44	53	61	70	78	87	96	105	114	123	132	141	151	160	169	178	188
30	15	22	30	38	46	55	64	73	82	91	100	109	119	128	138	147	157	167	176	186	196
31	15	23	31	39	48	57	66	76	85	95	104	114	124	133	143	153	163	173	183	193	203
32	16	24	32	41	50	59	69	78	88	98	108	118	128	139	149	159	170	180	190	201	211
33	16	25	33	42	52	62	71	81	92	102	112	123	133	144	154	165	176	187	197	208	219
34	17	26	35	44	54	64	74	84	95	106	116	127	138	149	160	171	182	193	205	216	227
35	18	26	36	46	56	66	77	87	98	109	120	132	143	154	166	177	189	200	212	223	235
36	18	27	37	47	58	68	79	90	102	113	124	136	148	159	171	183	195	207	219	231	243
37	19	28	38	49	59	71	82	93	105	117	128	140	152	165	177	189	201	214	226	238	251
38	20	29	40	50	61	73	84	96	108	120	132	145	157	170	182	195	208	220	233	246	259
39	20	30	41	52	63	75	87	99	111	124	137	149	162	175	188	201	214	227	240	253	267
40	21	31	42	53	65	77	90	102	115	128	141	154	167	180	193	207	220	234	247	261	275
41	22	32	43	55	67	80	92	105	118	131	145	158	172	185	199	213	227	241	255	269	283
42	22	33	45	57	69	82	95	108	121	135	149	163	177	191	205	219	233	247	262	276	291
43	23	34	46	58	71	84	97	111	125	139	153	167	181	196	210	225	239	254	269	284	299
44	24	35	47	60	73	86	100	114	128	142	157	171	186	201	216	231	246	261	276	291	306
45	24	36	48	61	75	89	103	117	131	146	161	176	191	206	221	237	252	268	283	299	314
46	25	37	50	63	77	91	105	120	135	150	165	180	196	211	227	243	259	274	290	306	322
47	25	38	51	64	79	93	108	123	138	154	169	185	201	217	233	249	265	281	298	314	330
48	26	39	52	66	80	95	110	126	141	157	173	189	206	222	238	255	271	288	305	322	338
49	27	40	53	68	82	98	113	129	145	161	177	194	210	227	244	261	278	295	312	329	346
50	27	41	55	69	84	100	116	132	148	165	181	198	215	232	249	267	284	302	319	337	354

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 0.1%-Quantil

Tabelliert ist das 0.1%-Quantil $U_{m,n;\,0.001}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18	19	20	20	21	22	22	23	24	24
6	18	19	20	21	22	23	24	25	26	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
7	25	26	27	28	30	31	32	33	35	36	37	38	40	41	42	43	45	46	47	48
8	32	33	35	36	38	39	41	42	44	46	47	49	50	52	53	55	57	58	60	61
9	39	41	42	44	46	48	50	52	54	56	58	59	61	63	65	67	69	71	73	75
10	46	48	50	53	55	57	59	62	64	66	68	71	73	75	77	80	82	84	86	89
11	53	56	58	61	64	66	69	71	74	77	79	82	84	87	90	92	95	97	100	103
12	61	64	67	70	73	76	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105	108	111	114	117
13	69	72	75	78	82	85	88	92	95	98	102	105	108	111	115	118	121	125	128	131
14	76	80	84	87	91	95	98	102	106	109	113	117	120	124	128	131	135	139	142	146
5	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	137	141	145	149	153	157	161
16	92	96	101	105	109	114	118	123	127	132	136	140	145	149	154	158	163	167	171	176
17	100	105	109	114	119	124	128	133	138	143	148	152	157	162	167	172	177	181	186	191
18	108	113	118	123	128	133	139	144	149	154	159	165	170	175	180	185	191	196	201	206
19	116	121	127	132	138	143	149	154	160	166	171	177	182	188	193	199	205	210	216	221
20	124	130	136	141	147	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207	213	219	225	231	237
21	132	138	144	151	157	163	170	176	182	189	195	201	208	214	220	227	233	239	246	252
22	140	147	153	160	167	173	180	187	193	200	207	214	220	227	234	241	247	254	261	268
23	148	155	162	169	176	183	190	197	205	212	219	226	233	240	247	255	262	269	276	283
24	156	164	171	178	186	193	201	208	216	223	231	238	246	253	261	269	276	284	291	299
25	164	172	180	188	196	203	211	219	227	235	243	251	259	267	275	283	291	299	306	314
26	172	181	189	197	205	214	222	230	238	247	255	263	272	280	288	297	305	313	322	330
27	181	189	198	206	215	224	232	241	250	258	267	276	285	293	302	311	320	328	337	346
28	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	279	288	298	307	316	325	334	343	352	362
29	197	206	216	225	235	244	254	263	273	282	292	301	311	320	330	339	349	358	368	377
30	205	215	225	235	245	254	264	274	284	294	304	314	324	334	343	353	363	373	383	393
31	214	224	234	244	254	265	275	285	295	306	316	326	337	347	357	368	378	388	399	409
32	222	232	243	254	264	275	285	296	307	318	328	339	350	360	371	382	393	404	414	425
33	230	241	252	263	274	285	296	307	318	329	341	352	363	374	385	396	407	419	430	441
34	238	250	261	273	284	295	307	318	330	341	353	364	376	387	399	411	422	434	445	457
35	247	258	270	282	294	306	318	329	341	353	365	377	389	401	413	425	437	449	461	473
36	255	267	279	292	304	316	328	341	353	365	377	390	402	415	427	439	452	464	477	489
37	263	276	288	301	314	326	339	352	364	377	390	403	415	428	441	454	466	479	492	505
38	272	285	298	311	324	337	350	363	376	389	402	415	428	442	455	468	481	495	508	521
39	280	293	307	320	334	347	360	374	387	401	415	428	442	455	469	482	496	510	523	537
40	288	302	316	330	343	357	371	385	399	413	427	441	455	469	483	497	511	525	539	553
41	297	311	325	339	353	368	382	396	411	425	439	454	468	482	497	511	526	540	555	569
42	305	320	334	349	363	378	393	407	422	437	452	466	481	496	511	526	541	556	570	585
43	313	328	343	358	373	388	404	419	434	449	464	479	495	510	525	540	556	571	586	602
44	322	337	352	368	383	399	414	430	445	461	477	492	508	523	539	555	570	586	602	618
45	330	346	362	377	393	409	425	441	457	473	489	505	521	537	553	569	585	602	618	634
46	339	355	371	387	403	420	436	452	469	485	501	518	534	551	567	584	600	617	633	650
47	347	363	380	397	413	430	447	463	480	497	514	531	548	564	581	598	615	632	649	666
48	355	372	389	406	423	440	458	475	492	509	526	544	561	578	595	613	630	648	665	682
49	364	381	398	416	433	451	468	486	504	521	539	556	574	592	610	627	645	663	681	699
50	372	390	408	425	443	461	479	497	515	533	551	569	587	606	624	642	660	678	697	715

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 0.25%-Quantil

Tabelliert ist das 0.25%-Quantil $U_{m,n;\,0.0025}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	0	1	1	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12	13	13	14	15
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
7	1	3	4	5	6	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	26	27	28
8	2	4	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	23	25	27	29	30	32	34	36
9	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	35	37	39	41	43
10	4	6	8	10	12	14	17	19	21	24	26	28	31	33	36	38	41	43	45	48	50
11	4	7	9	12	14	17	19	22	25	27	30	33	36	38	41	44	47	50	52	55	58
12	5	8	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	44	47	50	53	56	59	62	66
13	6	9	12	15	18	21	25	28	31	35	38	42	45	49	52	56	59	63	66	70	73
14	7	10	13	17	20	24	27	31	35	39	42	46	50	54	58	62	66	69	73	77	81
15	7	11	14	18	22	26	30	34	38	42	47	51	55	59	63	68	72	76	81	85	89
16	8	12	16	20	24	28	33	37	42	46	51	55	60	65	69	74	78	83	88	92	97
17	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
18	10	14	19	23	28	33	38	44	49	54	59	65	70	75	81	86	91	97	102	108	113
19	10	15	20	25	30	36	41	47	52	58	63	69	75	81	86	92	98	104	109	115	121
20	11	16	21	27	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	111	117	123	129
21	12	17	23	29	35	41	47	53	59	66	72	78	85	91	98	104	111	118	124	131	137
22	13	18	24	30	37	43	50	56	63	69	76	83	90	97	104	111	118	124	131	138	145
23	13	19	26	32	39	45	52	59	66	73	81	88	95	102	109	117	124	131	139	146	154
24	14	20	27	34	41	48	55	62	70	77	85	92	100	108	115	123	131	138	146	154	162
25	15	21	28	36	43	50	58	66	73	81	89	97	105	113	121	129	137	145	154	162	170
26	16	23	30	37	45	53	61	69	77	85	93	102	110	119	127	135	144	153	161	170	178
27	16	24	31	39	47	55	64	72	81	89	98	106	115	124	133	142	151	160	169	177	186
28	17	25	33	41	49	58	66	75	84	93	102	111	120	129	139	148	157	167	176	185	195
29	18	26	34	43	51	60	69	78	88	97	106	116	125	135	145	154	164	174	183	193	203
30	19	27	35	44	53	63	72	82	91	101	111	121	131	140	150	161	171	181	191	201	211
31	20	28	37	46	56	65	75	85	95	105	115	125	136	146	156	167	177	188	198	209	220
32	20	29	38	48	58	68	78	88	98	109	119	130	141	151	162	173	184	195	206	217	228
33	21	30	40	50	60	70	81	91	102	113	124	135	146	157	168	179	191	202	213	225	236
34	22	31	41	51	62	73	83	94	106	117	128	139	151	162	174	186	197	209	221	233	244
35	23	32	43	53	64	75	86	98	109	121	132	144	156	168	180	192	204	216	228	241	253
36	23	33	44	55	66	77	89	101	113	125	137	149	161	174	186	198	211	223	236	248	261
37	24	35	45	57	68	80	92	104	116	129	141	154	166	179	192	205	218	230	243	256	269
38	25	36	47	58	70	82	95	107	120	133	146	158	171	185	198	211	224	238	251	264	278
39	26	37	48	60	72	85	98	110	123	137	150	163	177	190	204	217	231	245	258	272	286
40	27	38	50	62	75	87	100	114	127	141	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294
41	27	39	51	64	77	90	103	117	131	145	159	173	187	201	216	230	244	259	274	288	303
42	28	40	53	65	79	92	106	120	134	149	163	177	192	207	221	236	251	266	281	296	311
43	29	41	54	67	81	95	109	123	138	153	167	182	197	212	227	243	258	273	289	304	319
44	30	42	55	69	83	97	112	127	141	157	172	187	202	218	233	249	265	280	296	312	328
45	30	43	57	71	85	100	115	130	145	161	176	192	208	223	239	255	271	288	304	320	336
46	31	44	58	73	87	102	118	133	149	165	180	197	213	229	245	262	278	295	311	328	345
47	32	46	60	74	89	105	120	136	152	169	185	201	218	234	251	268	285	302	319	336	353
48	33	47	61	76	92	107	123	140	156	172	189	206	223	240	257	274	292	309	326	344	361
49	34	48	63	78	94	110	126	143	160	176	194	211	228	246	263	281	298	316	334	352	370
50	34	49	64	80	96	112	129	146	163	180	198	216	233	251	269	287	305	323	342	360	378

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 0.25%-Quantil

Tabelliert ist das 0.25%-Quantil $U_{m,n;\,0.0025}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	16	16	17	18	19	20	20	21	22	23	23	24	25	26	27	27	28	29	30	30
6	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	35	36	37	38	39	40	41	42	43
7	30	31	33	34	35	37	38	40	41	43	44	45	47	48	50	51	53	54	55	57
8	37	39	41	43	44	46	48	50	51	53	55	57	58	60	62	64	65	67	69	71
9	45	47	49	51	53	56	58	60	62	64	66	68	70	72	75	77	79	81	83	85
10	53	55	58	60	63	65	68	70	73	75	77	80	82	85	87	90	92	95	97	100
11	61	64	66	69	72	75	78	81	83	86	89	92	95	98	100	103	106	109	112	115
12	69	72	75	78	82	85	88	91	94	98	101	104	107	110	114	117	120	123	127	130
13	77	81	84	88	91	95	98	102	106	109	113	116	120	123	127	131	134	138	141	145
14	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	133	137	141	145	149	153	157	161
15	93	98	102	106	111	115	119	124	128	132	137	141	146	150	154	159	163	167	172	176
16	102	106	111	116	121	125	130	135	139	144	149	154	158	163	168	173	177	182	187	192
17	110	115	120	125	131	136	141	146	151	156	161	166	171	177	182	187	192	197	202	208
18	119	124	129	135	140	146	151	157	162	168	174	179	185	190	196	201	207	212	218	223
19	127	133	139	145	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	216	221	227	233	239
20	135	142	148	154	161	167	173	179	186	192	198	205	211	217	224	230	236	243	249	255
21	144	151	157	164	171	177	184	191	197	204	211	218	224	231	238	244	251	258	265	271
22	153	160	167	174	181	188	195	202	209	216	223	230	238	245	252	259	266	273	280	288
23	161	169	176	183	191	198	206	213	221	228	236	243	251	258	266	274	281	289	296	304
24	170	177	185	193	201	209	217	225	233	241	248	256	264	272	280	288	296	304	312	320
25	178	186	195	203	211	220	228	236	244	253	261	269	278	286	294	303	311	319	328	336
26	187	195	204	213	221	230	239	248	256	265	274	282	291	300	309	317	326	335	344	353
27	195	205	214	223	232	241	250	259	268	277	286	296	305	314	323	332	341	351	360	369
28	204	214	223	232	242	251	261	270	280	290	299	309	318	328	337	347	357	366	376	385
29	213	223	232	242	252	262	272	282	292	302	312	322	332	342	352	362	372	382	392	402
30	221	232	242	252	263	273	283	293	304	314	325	335	345	356	366	376	387	397	408	418
31	230	241	251	262	273	284	294	305	316	327	337	348	359	370	380	391	402	413	424	435
32	239	250	261	272	283	294	305	317	328	339	350	361	372	384	395	406	417	429	440	451
33	248	259	270	282	293	305	317	328	340	351	363	374	386	398	409	421	433	444	456	468
34	256	268	280	292	304	316	328	340	352	364	376	388	400	412	424	436	448	460	472	484
35	265	277	290	302	314	327	339	351	364	376	389	401	413	426	438	451	463	476	488	501
36	274	286	299	312	325	337	350	363	376	389	401	414	427	440	453	466	479	492	504	517
37	282	296	309	322	335	348	361	374	388	401	414	427	441	454	467	481	494	507	521	534
38	291	305	318	332	345	359	372	386	400	413	427	441	454	468	482	496	509	523	537	551
39	300	314	328	342	356	370	384	398	412	426	440	454	468	482	496	511	525	539	553	567
40	309	323	337	352	366	380	395	409	424	438	453	467	482	496	511	526	540	555	569	584
41	317	332	347	362	376	391	406	421	436	451	466	481	496	511	526	541	556	571	586	601
42	326	341	357	372	387	402	417	433	448	463	479	494	509	525	540	556	571	586	602	617
43	335	351	366	382	397	413	429	444	460	476	492	507	523	539	555	571	586	602	618	634
44	344	360	376	392	408	424	440	456	472	488	504	521	537	553	569	586	602	618	634	651
45	353	369	385	402	418	435	451	468	484	501	517	534	551	567	584	601	617	634	651	668
46	361	378	395	412	429	446	462	479	496	513	530	547	564	582	599	616	633	650	667	684
47	370	387	405	422	439	456	474	491	508	526	543	561	578	596	613	631	648	666	683	701
48	379	397	414	432	450	467	485	503	521	538	556	574	592	610	628	646	664	682	700	718
49	388	406	424	442	460	478	496	514	533	551	569	588	606	624	643	661	679	698	716	735
50	397	415	433	452	470	489	508	526	545	564	582	601	620	638	657	676	695	714	733	751

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 0.5%-Quantil

Tabelliert ist das 0.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.005}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	1	2	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	15	16	17	18
6	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	20	22	23	24	25
7	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25	26	28	30	31	33
8	3	5	7	8	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	29	31	33	35	36	38	40
9	4	6	8	10	12	14	17	19	21	23	25	28	30	32	34	37	39	41	44	46	48
10	5	7	10	12	14	17	19	22	25	27	30	32	35	38	40	43	45	48	51	53	56
11	6	8	11	14	17	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64
12	7	10	13	16	19	22	25	28	32	35	38	42	45	48	52	55	59	62	65	69	72
13	8	11	14	18	21	25	28	32	35	39	43	46	50	54	58	61	65	69	73	76	80
14	8	12	16	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	64	68	72	76	80	84	88
15	9	13	17	21	25	30	34	38	43	47	52	56	61	65	70	74	79	83	88	92	97
16	10	14	19	23	28	32	37	42	46	51	56	61	66	71	75	80	85	90	95	100	105
17	11	16	20	25	30	35	40	45	50	55	61	66	71	76	82	87	92	97	103	108	113
18	12	17	22	27	32	38	43	48	54	59	65	71	76	82	88	93	99	105	110	116	122
19	13	18	23	29	34	40	46	52	58	64	70	75	82	88	94	100	106	112	118	124	130
20	14	19	25	31	37	43	49	55	61	68	74	80	87	93	100	106	113	119	126	132	139
21	15	20	26	33	39	45	52	59	65	72	79	85	92	99	106	113	119	126	133	140	147
22	15	22	28	35	41	48	55	62	69	76	83	90	97	105	112	119	126	134	141	148	156
23	16	23	30	36	44	51	58	65	73	80	88	95	103	110	118	126	133	141	149	156	164
24	17	24	31	38	46	53	61	69	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	165	173
25	18	25	33	40	48	56	64	72	80	88	97	105	113	122	130	139	147	156	164	173	181
26	19	26	34	42	50	59	67	75	84	93	101	110	119	128	136	145	154	163	172	181	190
27	20	28	36	44	53	61	70	79	88	97	106	115	124	133	143	152	161	170	180	189	198
28	21	29	37	46	55	64	73	82	92	101	110	120	129	139	149	158	168	178	187	197	207
29	22	30	39	48	57	67	76	86	95	105	115	125	135	145	155	165	175	185	195	205	216
30	23	31	41	50	59	69	79	89	99	109	120	130	140	151	161	171	182	192	203	214	224
31	23	33	42	52	62	72	82	93	103	114	124	135	146	156	167	178	189	200	211	222	233
32	24	34	44	54	64	75	85	96	107	118	129	140	151	162	173	185	196	207	219	230	241
33	25	35	45	56	66	77	88	99	111	122	133	145	156	168	180	191	203	215	226	238	250
34	26	36	47	58	69	80	91	103	114	126	138	150	162	174	186	198	210	222	234	246	259
35	27	38	48	60	71	83	94	106	118	130	143	155	167	180	192	204	217	230	242	255	267
36	28	39	50	61	73	85	97	110	122	135	147	160	173	185	198	211	224	237	250	263	276
37	29	40	52	63	76	88	100	113	126	139	152	165	178	191	204	218	231	244	258	271	285
38	30	41	53	65	78	91	103	117	130	143	156	170	183	197	211	224	238	252	266	279	293
39	31	42	55	67	80	93	107	120	134	147	161	175	189	203	217	231	245	259	273	288	302
40	32	44	56	69	82	96	110	123	137	151	166	180	194	209	223	238	252	267	281	296	311
41	32	45	58	71	85	99	113	127	141	156	170	185	200	214	229	244	259	274	289	304	319
42	33	46	59	73	87	101	116	130	145	160	175	190	205	220	235	251	266	282	297	313	328
43	34	47	61	75	89	104	119	134	149	164	179	195	210	226	242	257	273	289	305	321	337
44	35	49	63	77	92	107	122	137	153	168	184	200	216	232	248	264	280	297	313	329	346
45	36	50	64	79	94	109	125	141	156	173	189	205	221	238	254	271	287	304	321	337	354
46	37	51	66	81	96	112	128	144	160	177	193	210	227	243	260	277	294	311	329	346	363
47	38	52	67	83	99	115	131	147	164	181	198	215	232	249	267	284	301	319	336	354	372
48	39	54	69	85	101	117	134	151	168	185	203	220	238	255	273	291	308	326	344	362	380
49	40	55	70	87	103	120	137	154	172	189	207	225	243	261	279	297	316	334	352	371	389
50	41	56	72	89	105	123	140	158	176	194	212	230	248	267	285	304	323	341	360	379	398

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 0.5%-Quantil

Tabelliert ist das 0.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.005}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	19	20	21	22	23	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	32	33	34	35	36
6	26	28	29	30	31	33	34	35	36	38	39	40	41	42	44	45	46	47	49	50
7	34	36	37	39	41	42	44	45	47	48	50	52	53	55	56	58	59	61	63	64
8	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
9	50	53	55	57	59	62	64	66	69	71	73	76	78	80	82	85	87	89	92	94
10	59	61	64	67	69	72	75	77	80	83	85	88	91	93	96	99	101	104	107	109
11	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	107	110	113	116	119	122	125
12	75	79	82	86	89	93	96	99	103	106	110	113	117	120	123	127	130	134	137	141
13	84	88	92	95	99	103	107	111	114	118	122	126	130	134	137	141	145	149	153	156
14	93	97	101	105	109	114	118	122	126	130	135	139	143	147	151	156	160	164	168	173
15	101	106	110	115	120	124	129	133	138	143	147	152	156	161	166	170	175	179	184	189
16	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205
17	119	124	129	135	140	146	151	156	162	167	173	178	183	189	194	200	205	210	216	221
18	128	133	139	145	151	156	162	168	174	180	185	191	197	203	209	214	220	226	232	238
19	136	143	149	155	161	167	173	180	186	192	198	204	211	217	223	229	235	242	248	254
20	145	152	158	165	171	178	185	191	198	204	211	218	224	231	238	244	251	257	264	271
21	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217	224	231	238	245	252	259	266	273	280	287
22	163	170	178	185	192	200	207	215	222	230	237	244	252	259	267	274	282	289	297	304
23	172	180	187	195	203	211	219	226	234	242	250	258	266	273	281	289	297	305	313	321
24	181	189	197	205	214	222	230	238	246	255	263	271	279	288	296	304	313	321	329	337
25	190	198	207	216	224	233	241	250	259	267	276	285	293	302	311	319	328	337	346	354
26	199	208	217	226	235	244	253	262	271	280	289	298	307	316	325	335	344	353	362	371
27	208	217	227	236	245	255	264	274	283	293	302	312	321	331	340	350	359	369	378	388
28	217	227	236	246	256	266	276	286	296	305	315	325	335	345	355	365	375	385	395	405
29	226	236	246	256	267	277	287	298	308	318	329	339	349	360	370	380	391	401	411	422
30	235	245	256	267	277	288	299	309	320	331	342	352	363	374	385	396	406	417	428	439
31	244	255	266	277	288	299	310	321	333	344	355	366	377	388	400	411	422	433	444	456
32	253	264	276	287	299	310	322	333	345	357	368	380	391	403	414	426	438	449	461	473
33	262	274	286	298	309	321	333	345	357	369	381	393	405	417	429	441	453	466	478	490
34	271	283	296	308	320	333	345	357	370	382	395	407	419	432	444	457	469	482	494	507
35	280	293	305	318	331	344	357	369	382	395	408	421	434	446	459	472	485	498	511	524
36	289	302	315	329	342	355	368	381	395	408	421	434	448	461	474	488	501	514	528	541
37	298	312	325	339	352	366	380	393	407	421	434	448	462	475	489	503	517	530	544	558
38	307	321	335	349	363	377	391	405	419	434	448	462	476	490	504	518	533	547	561	575
39	316	331	345	360	374	388	403	417	432	446	461	475	490	505	519	534	548	563	578	592
40	325	340	355	370	385	400	414	429	444	459	474	489	504	519	534	549	564	579	594	609
41	335	350	365	380	396	411	426	441	457	472	488	503	518	534	549	565	580	596	611	627
42	344	359	375	391	406	422	438	453	469	485	501	517	533	548	564	580	596	612	628	644
43	353	369	385	401	417	433	449	466	482	498	514	530	547	563	579	596	612	628	645	661
44	362	378	395	411	428	444	461	478	494	511	528	544	561	578	594	611	628	645	661	678
45	371	388	405	422	439	456	473	490	507	524	541	558	575	592	609	627	644	661	678	695
46	380	397	415	432	450	467	484	502	519	537	554	572	589	607	624	642	660	677	695	712
47	389	407	425	443	460	478	496	514	532	550	568	586	604	622	640	658	676	694	712	730
48	398	417	435	453	471	489	508	526	544	563	581	599	618	636	655	673	691	710	728	747
49	408	426	445	463	482	501	519	538	557	576	594	613	632	651	670	689	707	726	745	764
50	417	436	455	474	493	512	531	550	569	589	608	627	646	665	685	704	723	743	762	781

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 1%-Quantil

Tabelliert ist das 1%-Quantil $U_{m,n;\,0.01}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
6	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	25	27	28	30
7	4	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	24	25	27	29	31	32	34	36	37
8	5	7	8	10	12	14	16	18	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	46
9	6	8	10	12	15	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	41	44	46	49	51	54
10	7	9	12	14	17	20	23	25	28	31	34	37	39	42	45	48	51	54	56	59	62
11	8	10	13	16	19	23	26	29	32	35	38	42	45	48	51	54	58	61	64	67	71
12	9	12	15	18	22	25	29	32	36	39	43	47	50	54	57	61	65	68	72	76	79
13	10	13	17	21	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
14	11	14	18	23	27	31	35	39	44	48	52	57	61	66	70	74	79	83	88	92	96
15	12	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	67	71	76	81	86	91	95	100	105
16	13	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	83	88	93	98	103	109	114
17	14	19	24	29	34	39	45	50	56	61	67	72	78	83	89	94	100	106	111	117	123
18	15	20	25	31	37	42	48	54	60	66	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125	131
19	16	21	27	33	39	45	51	57	64	70	76	83	89	95	102	108	114	121	127	134	140
20	17	23	29	35	41	48	54	61	68	74	81	88	94	101	108	115	122	128	135	142	149
21	18	24	31	37	44	51	58	65	72	79	86	93	100	107	114	122	129	136	143	151	158
22	19	25	32	39	46	54	61	68	76	83	91	98	106	113	121	128	136	144	151	159	167
23	20	27	34	41	49	56	64	72	80	88	95	103	111	119	127	135	143	151	159	168	176
24	21	28	36	43	51	59	67	76	84	92	100	109	117	125	134	142	151	159	168	176	185
25	22	30	37	46	54	62	71	79	88	96	105	114	123	131	140	149	158	167	176	185	193
26	23	31	39	48	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	147	156	165	174	184	193	202
27	24	32	41	50	59	68	77	86	96	105	115	124	134	143	153	163	172	182	192	202	211
28	25	34	43	52	61	71	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
29	26	35	44	54	64	74	84	94	104	114	124	135	145	156	166	177	187	198	208	219	229
30	27	36	46	56	66	77	87	97	108	119	129	140	151	162	173	183	194	205	216	227	238
31	28	38	48	58	69	79	90	101	112	123	134	145	157	168	179	190	202	213	224	236	247
32	29	39	50	60	71	82	93	105	116	128	139	151	162	174	186	197	209	221	233	244	256
33	30	41	51	62	74	85	97	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	229	241	253	265
34	31	42	53	65	76	88	100	112	124	136	149	161	174	186	199	211	224	236	249	262	274
35	32	43	55	67	79	91	103	116	128	141	154	166	179	192	205	218	231	244	257	270	283
36	33	45	57	69	81	94	107	119	132	145	159	172	185	198	212	225	238	252	265	279	292
37	34	46	58	71	84	97	110	123	136	150	163	177	191	204	218	232	246	260	274	287	301
38	35	47	60	73	86	100	113	127	140	154	168	182	196	210	225	239	253	267	282	296	310
39	36	49	62	75	89	102	116	130	145	159	173	188	202	217	231	246	260	275	290	305	319
40	37	50	64	77	91	105	120	134	149	163	178	193	208	223	238	253	268	283	298	313	329
41	38	52	65	79	94	108	123	138	153	168	183	198	213	229	244	260	275	291	306	322	338
42	39	53	67	82	96	111	126	141	157	172	188	203	219	235	251	267	283	299	315	331	347
43	40	54	69	84	99	114	129	145	161	177	193	209	225	241	257	274	290	306	323	339	356
44	41	56	71	86	101	117	133	149	165	181	198	214	231	247	264	281	297	314	331	348	365
45	42	57	72	88	104	120	136	152	169	186	202	219	236	253	270	287	305	322	339	356	374
46	43	59	74	90	106	123	139	156	173	190	207	225	242	259	277	294	312	330	347	365	383
47	45	60	76	92	109	126	143	160	177	195	212	230	248	266	283	301	319	337	356	374	392
48	46	61	78	94	111	128	146	163	181	199	217	235	253	272	290	308	327	345	364	382	401
49	47	63	79	96	114	131	149	167	185	204	222	241	259	278	297	315	334	353	372	391	410
50	48	64	81	99	116	134	152	171	189	208	227	246	265	284	303	322	342	361	380	400	419

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 1%-Quantil

Tabelliert ist das 1%-Quantil $U_{m,n;\,0.01}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
6	31	32	34	35	36	38	39	41	42	43	45	46	47	49	50	52	53	54	56	57
7	39	41	43	44	46	48	50	51	53	55	57	58	60	62	64	65	67	69	71	72
8	48	50	52	54	56	58	60	62	65	67	69	71	73	75	77	79	82	84	86	88
9	56	59	61	64	66	69	71	74	76	79	81	84	86	89	91	94	96	99	101	104
10	65	68	71	74	77	79	82	85	88	91	94	97	100	102	105	108	111	114	117	120
11	74	77	80	84	87	90	93	97	100	103	107	110	113	116	120	123	126	129	133	136
12	83	86	90	94	97	101	105	108	112	116	119	123	127	130	134	138	141	145	149	152
13	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140	145	149	153	157	161	165	169
14	101	105	110	114	119	123	128	132	136	141	145	150	154	159	163	168	172	177	181	186
15	110	115	120	124	129	134	139	144	149	154	159	163	168	173	178	183	188	193	198	202
16	119	124	130	135	140	145	151	156	161	166	172	177	182	188	193	198	203	209	214	219
17	128	134	140	145	151	157	162	168	174	179	185	191	196	202	208	213	219	225	231	236
18	137	143	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	217	223	229	235	241	247	253
19	147	153	160	166	173	179	186	192	199	205	212	218	225	231	238	244	251	257	264	270
20	156	163	170	177	183	190	197	204	211	218	225	232	239	246	253	260	267	274	281	287
21	165	172	180	187	194	202	209	216	224	231	238	246	253	260	268	275	283	290	297	305
22	174	182	190	198	205	213	221	229	236	244	252	260	267	275	283	291	299	306	314	322
23	184	192	200	208	216	224	233	241	249	257	265	274	282	290	298	306	315	323	331	339
24	193	202	210	219	227	236	244	253	262	270	279	287	296	305	313	322	331	339	348	356
25	202	211	220	229	238	247	256	265	274	283	292	301	310	319	329	338	347	356	365	374
26	212	221	231	240	249	259	268	278	287	296	306	315	325	334	344	353	363	372	382	391
27	221	231	241	251	260	270	280	290	300	310	320	329	339	349	359	369	379	389	399	409
28	231	241	251	261	271	282	292	302	313	323	333	343	354	364	374	385	395	405	416	426
29	240	251	261	272	283	293	304	315	325	336	347	357	368	379	390	400	411	422	433	444
30	249	260	271	283	294	305	316	327	338	349	360	372	383	394	405	416	427	439	450	461
31	259	270	282	293	305	316	328	339	351	362	374	386	397	409	420	432	444	455	467	479
32	268	280	292	304	316	328	340	352	364	376	388	400	412	424	436	448	460	472	484	496
33	278	290	302	315	327	339	352	364	377	389	401	414	426	439	451	464	476	489	501	514
34	287	300	313	325	338	351	364	377	389	402	415	428	441	454	467	480	492	505	518	531
35	296	310	323	336	349	362	376	389	402	415	429	442	455	469	482	495	509	522	535	549
36	306	320	333	347	360	374	388	401	415	429	442	456	470	484	497	511	525	539	553	566
37	315	329	343	357	372	386	400	414	428	442	456	470	485	499	513	527	541	556	570	584
38	325	339	354	368	383	397	412	426	441	455	470	485	499	514	528	543	558	572	587	602
39	334	349	364	379	394	409	424	439	454	469	484	499	514	529	544	559	574	589	604	619
40	344	359	374	390	405	420	436	451	467	482	497	513	528	544	559	575	590	606	621	637
41	353	369	385	400	416	432	448	464	480	495	511	527	543	559	575	591	607	623	639	655
42	363	379	395	411	427	444	460	476	492	509	525	541	558	574	590	607	623	639	656	672
43	372	389	405	422	439	455	472	489	505	522	539	556	572	589	606	623	639	656	673	690
44	382	399	416	433	450	467	484	501	518	535	553	570	587	604	621	639	656	673	690	708
45	391	409	426	444	461	479	496	514	531	549	566	584	602	619	637	655	672	690	708	725
46	401	419	436	454	472	490	508	526	544	562	580	598	616	634	652	671	689	707	725	743
47	410	428	447	465	483	502	520	539	557	576	594	612	631	649	668	687	705	724	742	761
48	420	438	457	476	495	513	532	551	570	589	608	627	646	665	684	703	722	741	760	779
49	429	448	467	487	506	525	544	564	583	602	622	641	660	680	699	719	738	757	777	796
50	439	458	478	497	517	537	556	576	596	616	635	655	675	695	715	735	754	774	794	814

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 2.5%-Quantil

Tabelliert ist das 2.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.025}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	3	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21	23	24	25	26	28
6	4	6	7	9	11	12	14	15	17	18	20	22	23	25	26	28	30	31	33	34	36
7	6	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
8	7	9	11	14	16	18	20	23	25	27	30	32	35	37	39	42	44	46	49	51	54
9	8	11	13	16	18	21	24	27	29	32	35	38	40	43	46	49	51	54	57	60	63
10	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37	40	43	46	49	53	56	59	62	65	68	72
11	10	14	17	20	24	27	31	34	38	41	45	48	52	56	59	63	66	70	74	77	81
12	12	15	19	23	27	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90
13	13	17	21	25	29	34	38	42	46	51	55	60	64	68	73	77	81	86	90	95	99
14	14	18	23	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	75	79	84	89	94	99	103	108
15	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	71	76	81	86	91	97	102	107	112	118
16	16	22	27	32	38	43	48	54	60	65	71	76	82	87	93	99	104	110	116	121	127
17	18	23	29	35	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	124	130	136
18	19	25	31	37	43	49	56	62	68	75	81	87	94	100	107	113	120	126	133	139	146
19	20	26	33	39	46	53	59	66	73	79	86	93	100	107	114	120	127	134	141	148	155
20	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	99	106	113	120	128	135	142	150	157	164
21	23	30	37	44	51	59	66	74	81	89	97	104	112	120	127	135	143	151	158	166	174
22	24	31	39	46	54	62	70	78	86	94	102	110	118	126	134	142	151	159	167	175	183
23	25	33	41	49	57	65	74	82	90	99	107	116	124	133	141	150	158	167	176	184	193
24	26	34	43	51	60	68	77	86	95	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202
25	28	36	45	54	63	72	81	90	99	108	118	127	136	146	155	164	174	183	193	202	212
26	29	38	47	56	65	75	84	94	103	113	123	133	142	152	162	172	182	192	201	211	221
27	30	39	49	58	68	78	88	98	108	118	128	138	148	159	169	179	189	200	210	220	231
28	31	41	51	61	71	81	91	102	112	123	133	144	155	165	176	187	197	208	219	229	240
29	33	43	53	63	74	84	95	106	117	128	139	150	161	172	183	194	205	216	227	239	250
30	34	44	55	66	77	88	99	110	121	132	144	155	167	178	190	201	213	224	236	248	259
31	35	46	57	68	79	91	102	114	126	137	149	161	173	185	197	209	221	233	245	257	269
32	36	47	59	70	82	94	106	118	130	142	154	167	179	191	204	216	228	241	253	266	278
33	38	49	61	73	85	97	109	122	134	147	160	172	185	198	211	223	236	249	262	275	288
34	39	51	63	75	88	100	113	126	139	152	165	178	191	204	218	231	244	257	271	284	298
35	40	52	65	78	90	104	117	130	143	157	170	184	197	211	225	238	252	266	279	293	307
36	41	54	67	80	93	107	120	134	148	162	175	189	203	217	232	246	260	274	288	302	317
37	42	56	69	82	96	110	124	138	152	166	181	195	210	224	239	253	268	282	297	312	326
38	44	57	71	85	99	113	128	142	157	171	186	201	216	231	246	260	276	291	306	321	336
39	45	59	73	87	102	116	131	146	161	176	191	207	222	237	253	268	283	299	314	330	345
40	46	60	75	90	104	120	135	150	166	181	197	212	228	244	259	275	291	307	323	339	355
41	47	62	77	92	107	123	138	154	170	186	202	218	234	250	266	283	299	315	332	348	365
42	49	64	79	94	110	126	142	158	174	191	207	224	240	257	273	290	307	324	340	357	374
43	50	65	81	97	113	129	146	162	179	196	212	229	246	263	280	298	315	332	349	366	384
44	51	67	83	99	116	132	149	166	183	200	218	235	252	270	287	305	323	340	358	376	393
45	52	68	85	102	118	136	153	170	188	205	223	241	259	277	294	312	330	349	367	385	403
46	54	70	87	104	121	139	156	174	192	210	228	247	265	283	301	320	338	357	375	394	413
47	55	72	89	106	124	142	160	178	197	215	234	252	271	290	308	327	346	365	384	403	422
48	56	73	91	109	127	145	164	182	201	220	239	258	277	296	315	335	354	373	393	412	432
49	57	75	93	111	130	148	167	186	206	225	244	264	283	303	322	342	362	382	402	421	441
50	59	77	95	114	132	152	171	190	210	230	250	269	289	309	329	350	370	390	410	431	451

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 2.5%-Quantil

Tabelliert ist das 2.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.025}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	29	30	31	33	34	35	36	38	39	40	41	42	44	45	46	47	49	50	51	52
6	38	39	41	43	44	46	47	49	51	52	54	56	57	59	60	62	64	65	67	68
7	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85
8	56	58	61	63	66	68	70	73	75	78	80	82	85	87	90	92	94	97	99	102
9	65	68	71	74	77	79	82	85	88	90	93	96	99	102	104	107	110	113	116	118
10	75	78	81	84	88	91	94	97	100	104	107	110	113	116	120	123	126	129	132	136
11	84	88	91	95	99	102	106	109	113	117	120	124	128	131	135	138	142	146	149	153
12	94	98	102	106	110	114	118	122	126	130	134	138	142	146	150	154	158	162	166	170
13	103	108	112	117	121	126	130	134	139	143	148	152	157	161	166	170	174	179	183	188
14	113	118	123	128	132	137	142	147	152	157	162	166	171	176	181	186	191	196	200	205
15	123	128	133	139	144	149	154	160	165	170	175	181	186	191	197	202	207	212	218	223
16	133	138	144	150	155	161	167	172	178	184	189	195	201	207	212	218	224	229	235	241
17	142	148	155	161	167	173	179	185	191	197	203	210	216	222	228	234	240	246	252	259
18	152	159	165	172	178	185	191	198	204	211	217	224	231	237	244	250	257	263	270	277
19	162	169	176	183	190	197	204	211	218	225	232	239	246	253	259	266	273	280	287	294
20	172	179	187	194	201	209	216	223	231	238	246	253	260	268	275	283	290	298	305	312
21	182	189	197	205	213	221	228	236	244	252	260	268	276	283	291	299	307	315	323	330
22	192	200	208	216	224	233	241	249	257	266	274	282	291	299	307	315	324	332	340	349
23	201	210	219	227	236	245	253	262	271	279	288	297	306	314	323	332	340	349	358	367
24	211	220	229	239	248	257	266	275	284	293	302	312	321	330	339	348	357	366	376	385
25	221	231	240	250	259	269	278	288	298	307	317	326	336	345	355	365	374	384	393	403
26	231	241	251	261	271	281	291	301	311	321	331	341	351	361	371	381	391	401	411	421
27	241	251	262	272	283	293	303	314	324	335	345	356	366	377	387	397	408	418	429	439
28	251	262	273	283	294	305	316	327	338	349	359	370	381	392	403	414	425	436	447	458
29	261	272	283	295	306	317	329	340	351	362	374	385	396	408	419	430	442	453	464	476
30	271	283	294	306	318	329	341	353	365	376	388	400	412	423	435	447	459	471	482	494
31	281	293	305	317	329	342	354	366	378	390	402	415	427	439	451	463	476	488	500	512
32	291	303	316	329	341	354	366	379	392	404	417	429	442	455	467	480	493	505	518	531
33	301	314	327	340	353	366	379	392	405	418	431	444	457	470	483	497	510	523	536	549
34	311	324	338	351	365	378	392	405	419	432	446	459	473	486	500	513	527	540	554	567
35	321	335	349	362	376	390	404	418	432	446	460	474	488	502	516	530	544	558	572	586
36	331	345	359	374	388	402	417	431	446	460	474	489	503	517	532	546	561	575	590	604
37	341	356	370	385	400	415	429	444	459	474	489	504	518	533	548	563	578	593	608	623
38	351	366	381	396	412	427	442	457	473	488	503	518	534	549	564	580	595	610	626	641
39	361	377	392	408	423	439	455	470	486	502	517	533	549	565	580	596	612	628	644	659
40	371	387	403	419	435	451	467	483	500	516	532	548	564	580	597	613	629	645	661	678
41	381	397	414	430	447	463	480	497	513	530	546	563	580	596	613	629	646	663	679	696
42	391	408	425	442	459	476	493	510	527	544	561	578	595	612	629	646	663	680	697	715
43	401	418	436	453	471	488	505	523	540	558	575	593	610	628	645	663	680	698	715	733
44	411	429	447	464	482	500	518	536	554	572	590	608	626	644	661	679	697	715	733	752
45	421	439	458	476	494	512	531	549	567	586	604	623	641	659	678	696	715	733	752	770
46	431	450	468	487	506	525	543	562	581	600	619	637	656	675	694	713	732	751	770	788
47	441	460	479	499	518	537	556	575	595	614	633	652	672	691	710	730	749	768	788	807
48	451	471	490	510	530	549	569	588	608	628	648	667	687	707	726	746	766	786	806	825
49	461	481	501	521	541	561	581	602	622	642	662	682	702	723	743	763	783	803	824	844
50	471	492	512	533	553	574	594	615	635	656	676	697	718	738	759	780	800	821	842	862

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 5%-Quantil

Tabelliert ist das 5%-Quantil $U_{m,n;\,0.05}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	5	6	7	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	26	27	29	30	31	33
6	6	8	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	27	29	31	33	35	37	38	40	42
7	7	9	12	14	16	18	20	22	25	27	29	31	34	36	38	40	42	45	47	49	51
8	9	11	14	16	19	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	48	50	53	55	58	61
9	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67	70
10	12	15	18	21	25	28	32	35	38	42	45	49	52	56	59	63	66	69	73	76	80
11	13	17	20	24	28	32	35	39	43	47	51	55	58	62	66	70	74	78	82	86	90
12	14	18	22	27	31	35	39	43	48	52	56	61	65	69	73	78	82	86	91	95	99
13	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	66	71	76	81	85	90	95	99	104	109
14	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	78	83	88	93	98	103	108	114	119
15	19	24	29	34	40	45	51	56	62	67	73	78	84	89	95	101	106	112	117	123	129
16	20	26	31	37	43	49	55	61	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138
17	21	27	34	40	46	52	58	65	71	78	84	90	97	103	110	116	122	129	135	142	148
18	23	29	36	42	49	56	62	69	76	83	89	96	103	110	117	124	131	137	144	151	158
19	24	31	38	45	52	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131	139	146	153	161	168
20	26	33	40	48	55	63	70	78	85	93	101	108	116	124	131	139	147	155	162	170	178
21	27	35	42	50	58	66	74	82	90	98	106	114	122	131	139	147	155	163	171	180	188
22	29	37	45	53	61	69	78	86	95	103	112	120	129	137	146	155	163	172	180	189	198
23	30	38	47	55	64	73	82	91	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	190	199	208
24	31	40	49	58	67	76	86	95	104	114	123	132	142	151	161	170	180	189	199	208	218
25	33	42	51	61	70	80	90	99	109	119	129	138	148	158	168	178	188	198	208	218	228
26	34	44	54	63	73	83	93	104	114	124	134	144	155	165	175	186	196	206	217	227	238
27	36	46	56	66	76	87	97	108	118	129	140	150	161	172	183	193	204	215	226	237	248
28	37	47	58	69	79	90	101	112	123	134	145	157	168	179	190	201	213	224	235	246	258
29	39	49	60	71	83	94	105	117	128	139	151	163	174	186	197	209	221	232	244	256	268
30	40	51	62	74	86	97	109	121	133	145	157	169	181	193	205	217	229	241	253	265	278
31	41	53	65	77	89	101	113	125	137	150	162	175	187	200	212	225	237	250	262	275	288
32	43	55	67	79	92	104	117	129	142	155	168	181	194	207	219	232	245	258	272	285	298
33	44	57	69	82	95	108	121	134	147	160	173	187	200	213	227	240	254	267	281	294	308
34	46	58	71	85	98	111	125	138	152	165	179	193	207	220	234	248	262	276	290	304	318
35	47	60	74	87	101	115	129	142	157	171	185	199	213	227	242	256	270	285	299	313	328
36	49	62	76	90	104	118	132	147	161	176	190	205	220	234	249	264	278	293	308	323	338
37	50	64	78	92	107	122	136	151	166	181	196	211	226	241	256	272	287	302	317	332	348
38	51	66	80	95	110	125	140	155	171	186	202	217	233	248	264	279	295	311	326	342	358
39	53	68	83	98	113	129	144	160	176	191	207	223	239	255	271	287	303	319	336	352	368
40	54	69	85	100	116	132	148	164	180	197	213	229	246	262	279	295	312	328	345	361	378
41	56	71	87	103	119	136	152	168	185	202	218	235	252	269	286	303	320	337	354	371	388
42	57	73	89	106	122	139	156	173	190	207	224	241	259	276	293	311	328	346	363	381	398
43	59	75	92	108	125	143	160	177	195	212	230	247	265	283	301	319	336	354	372	390	408
44	60	77	94	111	128	146	164	182	199	217	235	253	272	290	308	326	345	363	381	400	418
45	61	79	96	114	132	150	168	186	204	223	241	260	278	297	315	334	353	372	391	409	428
46	63	80	98	116	135	153	172	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	400	419	438
47	64	82	100	119	138	156	175	195	214	233	252	272	291	311	330	350	369	389	409	429	448
48	66	84	103	122	141	160	179	199	218	238	258	278	298	318	338	358	378	398	418	438	458
49	67	86	105	124	144	163	183	203	223	243	264	284	304	325	345	366	386	407	427	448	468
50	69	88	107	127	147	167	187	208	228	249	269	290	311	332	352	373	394	415	436	457	479

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 5%-Quantil

Tabelliert ist das 5%-Quantil $U_{m,n;\,0.05}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	34	36	37	39	40	41	43	44	46	47	49	50	51	53	54	56	57	59	60	61
6	44	46	47	49	51	53	55	57	58	60	62	64	66	68	69	71	73	75	77	79
7	54	56	58	60	62	65	67	69	71	74	76	78	80	83	85	87	89	92	94	96
8	63	66	69	71	74	77	79	82	85	87	90	92	95	98	100	103	106	108	111	114
9	73	76	79	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128	132
10	83	87	90	94	97	101	104	108	111	115	118	122	125	129	132	136	139	143	146	150
11	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168
12	104	108	112	117	121	125	129	134	138	142	147	151	155	160	164	168	173	177	182	186
13	114	118	123	128	133	137	142	147	152	157	161	166	171	176	180	185	190	195	199	204
14	124	129	134	139	145	150	155	160	165	171	176	181	186	191	197	202	207	212	217	223
15	134	140	145	151	157	162	168	173	179	185	190	196	202	207	213	218	224	230	235	241
16	144	150	157	163	169	175	181	187	193	199	205	211	217	223	229	235	241	247	253	260
17	155	161	168	174	181	187	194	200	207	213	220	226	233	239	246	252	259	265	272	278
18	165	172	179	186	193	200	207	213	220	227	234	241	248	255	262	269	276	283	290	297
19	175	183	190	197	205	212	219	227	234	242	249	256	264	271	279	286	293	301	308	315
20	186	193	201	209	217	225	232	240	248	256	264	272	279	287	295	303	311	319	326	334
21	196	204	213	221	229	237	245	254	262	270	278	287	295	303	312	320	328	336	345	353
22	206	215	224	232	241	250	258	267	276	285	293	302	311	319	328	337	346	354	363	372
23	217	226	235	244	253	262	272	281	290	299	308	317	326	336	345	354	363	372	381	391
24	227	237	246	256	265	275	285	294	304	313	323	332	342	352	361	371	381	390	400	409
25	238	248	258	268	278	288	298	308	318	328	338	348	358	368	378	388	398	408	418	428
26	248	258	269	279	290	300	311	321	332	342	353	363	374	384	395	405	416	426	437	447
27	258	269	280	291	302	313	324	335	346	357	367	378	389	400	411	422	433	444	455	466
28	269	280	292	303	314	326	337	348	360	371	382	394	405	417	428	439	451	462	474	485
29	279	291	303	315	326	338	350	362	374	385	397	409	421	433	445	456	468	480	492	504
30	290	302	314	326	339	351	363	375	388	400	412	424	437	449	461	474	486	498	511	523
31	300	313	326	338	351	364	376	389	402	414	427	440	453	465	478	491	504	516	529	542
32	311	324	337	350	363	376	389	403	416	429	442	455	468	482	495	508	521	534	548	561
33	321	335	348	362	375	389	403	416	430	443	457	471	484	498	512	525	539	552	566	580
34	332	346	360	374	388	402	416	430	444	458	472	486	500	514	528	542	556	571	585	599
35	342	357	371	385	400	414	429	443	458	472	487	501	516	530	545	560	574	589	603	618
36	353	367	382	397	412	427	442	457	472	487	502	517	532	547	562	577	592	607	622	637
37	363	378	394	409	424	440	455	471	486	501	517	532	548	563	579	594	609	625	640	656
38	374	389	405	421	437	453	468	484	500	516	532	548	564	579	595	611	627	643	659	675
39	384	400	417	433	449	465	482	498	514	530	547	563	579	596	612	629	645	661	678	694
40	395	411	428	445	461	478	495	512	528	545	562	579	595	612	629	646	663	679	696	713
41	405	422	439	456	474	491	508	525	542	560	577	594	611	629	646	663	680	698	715	732
42	416	433	451	468	486	504	521	539	556	574	592	609	627	645	663	680	698	716	734	751
43	426	444	462	480	498	516	534	552	571	589	607	625	643	661	679	698	716	734	752	770
44	437	455	474	492	511	529	548	566	585	603	622	640	659	678	696	715	734	752	771	789
45	447	466	485	504	523	542	561	580	599	618	637	656	675	694	713	732	751	770	789	809
46	458	477	496	516	535	555	574	593	613	632	652	671	691	710	730	749	769	789	808	828
47	468	488	508	528	547	567	587	607	627	647	667	687	707	727	747	767	787	807	827	847
48	479	499	519	539	560	580	600	621	641	662	682	702	723	743	764	784	805	825	845	866
49	489	510	531	551	572	593	614	634	655	676	697	718	739	760	780	801	822	843	864	885
50	500	521	542	563	584	606	627	648	669	691	712	733	755	776	797	819	840	861	883	904

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 95%-Quantil

Tabelliert ist das 95%-Quantil $U_{m,n;\,0.95}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	20	24	28	31	35	38	42	46	49	53	56	60	64	67	71	74	78	81	85	89	92
6	24	28	33	37	41	45	49	54	58	62	66	70	75	79	83	87	91	95	100	104	108
7	28	33	37	42	47	52	57	62	66	71	76	81	85	90	95	100	105	109	114	119	124
8	31	37	42	48	53	59	64	69	75	80	86	91	96	102	107	112	118	123	129	134	139
9	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	143	149	155
10	38	45	52	59	65	72	78	85	92	98	105	111	118	124	131	137	144	151	157	164	170
11	42	49	57	64	71	78	86	93	100	107	114	121	129	136	143	150	157	164	171	178	185
12	46	54	62	69	77	85	93	101	108	116	124	131	139	147	155	162	170	178	185	193	201
13	49	58	66	75	83	92	100	108	117	125	133	142	150	158	166	175	183	191	200	208	216
14	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	160	169	178	187	196	205	214	222	231
15	56	66	76	86	95	105	114	124	133	143	152	162	171	181	190	199	209	218	228	237	246
16	60	70	81	91	101	111	121	131	142	152	162	172	182	192	202	212	222	232	242	252	262
17	64	75	85	96	107	118	129	139	150	160	171	182	192	203	213	224	235	245	256	266	277
18	67	79	90	102	113	124	136	147	158	169	181	192	203	214	225	236	247	259	270	281	292
19	71	83	95	107	119	131	143	155	166	178	190	202	213	225	237	249	260	272	284	295	307
20	74	87	100	112	125	137	150	162	175	187	199	212	224	236	249	261	273	285	298	310	322
21	78	91	105	118	131	144	157	170	183	196	209	222	235	247	260	273	286	299	312	324	337
22	81	95	109	123	137	151	164	178	191	205	218	232	245	259	272	285	299	312	326	339	352
23	85	100	114	129	143	157	171	185	200	214	228	242	256	270	284	298	312	326	339	353	367
24	89	104	119	134	149	164	178	193	208	222	237	252	266	281	295	310	324	339	353	368	382
25	92	108	124	139	155	170	185	201	216	231	246	262	277	292	307	322	337	352	367	382	397
26	96	112	128	145	161	177	193	208	224	240	256	272	287	303	319	334	350	366	381	397	412
27	99	116	133	150	167	183	200	216	233	249	265	282	298	314	330	347	363	379	395	411	427
28	103	121	138	155	173	190	207	224	241	258	275	291	308	325	342	359	375	392	409	426	442
29	106	125	143	161	178	196	214	231	249	267	284	301	319	336	354	371	388	406	423	440	457
30	110	129	148	166	184	203	221	239	257	275	293	311	329	347	365	383	401	419	437	455	472
31	114	133	152	171	190	209	228	247	266	284	303	321	340	358	377	395	414	432	451	469	487
32	117	137	157	177	196	216	235	255	274	293	312	331	350	369	389	408	427	446	464	483	502
33	121	141	162	182	202	222	242	262	282	302	322	341	361	381	400	420	439	459	478	498	517
34	124	146	167	187	208	229	249	270	290	311	331	351	371	392	412	432	452	472	492	512	532
35	128	150	171	193	214	235	256	278	298	319	340	361	382	403	423	444	465	485	506	527	547
36	131	154	176	198	220	242	264	285	307	328	350	371	392	414	435	456	478	499	520	541	562
37	135	158	181	204	226	248	271	293	315	337	359	381	403	425	447	468	490	512	534	556	577
38	139	162	186	209	232	255	278	301	323	346	368	391	413	436	458	481	503	525	548	570	592
39	142	166	190	214	238	261	285	308	331	355	378	401	424	447	470	493	516	539	561	584	607
40	146	171	195	220	244	268	292	316	340	363	387	411	434	458	481	505	528	552	575	599	622
41	149	175	200	225	250	274	299	324	348	372	397	421	445	469	493	517	541	565	589	613	637
42	153	179	205	230	256	281	306	331	356	381	406	431	455	480	505	529	554	578	603	627	652
43	156	183	209	236	262	287	313	339	364	390	415	441	466	491	516	541	567	592	617	642	667
44	160	187	214	241	268	294	320	346	373	399	425	451	476	502	528	554	579	605	631	656	682
45	164	191	219	246	273	300	327	354	381	407	434	460	487	513	540	566	592	618	644	671	697
46	167	196	224	252	279	307	334	362	389	416	443	470	497	524	551	578	605	632	658	685	712
47	171	200	229	257	285	314	342	369	397	425	453	480	508	535	563	590	618	645	672	699	727
48	174	204	233	262	291	320	349	377	406	434	462	490	518	546	574	602	630	658	686	714	742
49	178	208	238	268	297	327	356	385	414	443	471	500	529	557	586	614	643	671	700	728	757
50	181	212	243	273	303	333	363	392	422	451	481	510	539	568	598	627	656	685	714	743	771

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 95%-Quantil

Tabelliert ist das 95%-Quantil $U_{m,n;\,0.95}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	96	99	103	106	110	114	117	121	124	128	131	135	139	142	146	149	153	156	160	164
6	112	116	121	125	129	133	137	141	146	150	154	158	162	166	171	175	179	183	187	191
7	128	133	138	143	148	152	157	162	167	171	176	181	186	190	195	200	205	209	214	219
8	145	150	155	161	166	171	177	182	187	193	198	204	209	214	220	225	230	236	241	246
9	161	167	173	178	184	190	196	202	208	214	220	226	232	238	244	250	256	262	268	273
10	177	183	190	196	203	209	216	222	229	235	242	248	255	261	268	274	281	287	294	300
11	193	200	207	214	221	228	235	242	249	256	264	271	278	285	292	299	306	313	320	327
12	208	216	224	231	239	247	255	262	270	278	285	293	301	308	316	324	331	339	346	354
13	224	233	241	249	257	266	274	282	290	298	307	315	323	331	340	348	356	364	373	381
14	240	249	258	267	275	284	293	302	311	319	328	337	346	355	363	372	381	390	399	407
15	256	265	275	284	293	303	312	322	331	340	350	359	368	378	387	397	406	415	425	434
16	272	282	291	301	311	321	331	341	351	361	371	381	391	401	411	421	431	441	451	460
17	287	298	308	319	329	340	350	361	371	382	392	403	413	424	434	445	455	466	476	487
18	303	314	325	336	347	358	369	381	392	403	414	425	436	447	458	469	480	491	502	513
19	319	330	342	354	365	377	389	400	412	423	435	447	458	470	481	493	505	516	528	540
20	334	347	359	371	383	395	408	420	432	444	456	468	481	493	505	517	529	541	554	566
21	350	363	375	388	401	414	427	439	452	465	478	490	503	516	528	541	554	567	579	592
22	366	379	392	406	419	432	446	459	472	485	499	512	525	539	552	565	578	592	605	618
23	381	395	409	423	437	451	464	478	492	506	520	534	548	561	575	589	603	617	631	644
24	397	411	426	440	455	469	483	498	512	527	541	556	570	584	599	613	627	642	656	671
25	412	427	442	457	472	487	502	517	532	547	562	577	592	607	622	637	652	667	682	697
26	428	444	459	475	490	506	521	537	552	568	583	599	614	630	645	661	676	692	707	723
27	444	460	476	492	508	524	540	556	572	588	605	621	637	653	669	685	701	717	733	749
28	459	476	492	509	526	542	559	576	592	609	626	642	659	675	692	709	725	742	758	775
29	475	492	509	526	544	561	578	595	612	630	647	664	681	698	715	733	750	767	784	801
30	490	508	526	544	561	579	597	615	632	650	668	686	703	721	739	756	774	792	809	827
31	506	524	542	561	579	597	616	634	652	671	689	707	725	744	762	780	798	817	835	853
32	521	540	559	578	597	616	635	653	672	691	710	729	748	766	785	804	823	842	860	879
33	537	556	576	595	615	634	653	673	692	712	731	750	770	789	808	828	847	867	886	905
34	552	572	592	612	632	652	672	692	712	732	752	772	792	812	832	852	872	891	911	931
35	568	588	609	630	650	671	691	712	732	753	773	794	814	835	855	875	896	916	937	957
36	583	605	626	647	668	689	710	731	752	773	794	815	836	857	878	899	920	941	962	983
37	599	621	642	664	686	707	729	750	772	794	815	837	858	880	901	923	945	966	988	1009
38	614	637	659	681	703	725	748	770	792	814	836	858	880	903	925	947	969	991	1013	1035
39	630	653	675	698	721	744	766	789	812	835	857	880	903	925	948	970	993	1016	1038	1061
40	645	669	692	715	739	762	785	808	832	855	878	901	925	948	971	994	1017	1041	1064	1087
41	661	685	709	733	756	780	804	828	852	875	899	923	947	970	994	1018	1042	1065	1089	1113
42	676	701	725	750	774	798	823	847	872	896	920	945	969	993	1017	1042	1066	1090	1114	1139
43	692	717	742	767	792	817	842	867	891	916	941	966	991	1016	1041	1065	1090	1115	1140	1165
44	707	733	758	784	809	835	860	886	911	937	962	988	1013	1038	1064	1089	1114	1140	1165	1191
45	723	749	775	801	827	853	879	905	931	957	983	1009	1035	1061	1087	1113	1139	1165	1191	1216
46	738	765	792	818	845	871	898	925	951	978	1004	1031	1057	1084	1110	1137	1163	1189	1216	1242
47	754	781	808	835	863	890	917	944	971	998	1025	1052	1079	1106	1133	1160	1187	1214	1241	1268
48	769	797	825	853	880	908	936	963	991	1018	1046	1074	1101	1129	1156	1184	1211	1239	1267	1294
49	785	813	841	870	898	926	954	983	1011	1039	1067	1095	1123	1151	1180	1208	1236	1264	1292	1320
50	800	829	858	887	916	944	973	1002	1031	1059	1088	1117	1145	1174	1203	1231	1260	1289	1317	1346

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 97.5%-Quantil

Tabelliert ist das 97.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.975}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	22	26	29	33	37	41	45	48	52	56	60	64	67	71	75	79	82	86	90	94	97
6	26	30	35	39	43	48	52	57	61	66	70	74	79	83	88	92	96	101	105	110	114
7	29	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130
8	33	39	45	50	56	62	68	73	79	85	90	96	101	107	113	118	124	130	135	141	146
9	37	43	50	56	63	69	75	81	88	94	100	106	113	119	125	131	138	144	150	156	162
10	41	48	55	62	69	76	83	90	96	103	110	117	124	131	137	144	151	158	165	172	178
11	45	52	60	68	75	83	90	98	105	113	120	128	135	142	150	157	165	172	179	187	194
12	48	57	65	73	81	90	98	106	114	122	130	138	146	154	162	170	178	186	194	202	210
13	52	61	70	79	88	96	105	114	123	131	140	148	157	166	174	183	192	200	209	217	226
14	56	66	75	85	94	103	113	122	131	140	150	159	168	177	187	196	205	214	223	233	242
15	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	169	179	189	199	209	218	228	238	248	257
16	64	74	85	96	106	117	128	138	148	159	169	180	190	201	211	221	232	242	252	263	273
17	67	79	90	101	113	124	135	146	157	168	179	190	201	212	223	234	245	256	267	278	289
18	71	83	95	107	119	131	142	154	166	177	189	201	212	224	235	247	258	270	281	293	304
19	75	88	100	113	125	137	150	162	174	187	199	211	223	235	247	260	272	284	296	308	320
20	79	92	105	118	131	144	157	170	183	196	209	221	234	247	260	272	285	298	310	323	336
21	82	96	110	124	138	151	165	178	192	205	218	232	245	258	272	285	298	311	325	338	351
22	86	101	115	130	144	158	172	186	200	214	228	242	256	270	284	298	311	325	339	353	367
23	90	105	120	135	150	165	179	194	209	223	238	252	267	281	296	310	325	339	353	368	382
24	94	110	125	141	156	172	187	202	217	233	248	263	278	293	308	323	338	353	368	383	398
25	97	114	130	146	162	178	194	210	226	242	257	273	289	304	320	336	351	367	382	398	413
26	101	118	135	152	169	185	202	218	235	251	267	283	300	316	332	348	364	380	397	413	429
27	105	123	140	158	175	192	209	226	243	260	277	294	311	327	344	361	378	394	411	428	444
28	109	127	145	163	181	199	217	234	252	269	287	304	321	339	356	373	391	408	425	443	460
29	112	131	150	169	187	206	224	242	260	278	296	314	332	350	368	386	404	422	440	457	475
30	116	136	155	174	193	212	231	250	269	288	306	325	343	362	380	399	417	436	454	472	491
31	120	140	160	180	200	219	239	258	277	297	316	335	354	373	392	411	430	449	468	487	506
32	124	145	165	186	206	226	246	266	286	306	326	345	365	385	404	424	444	463	483	502	522
33	127	149	170	191	212	233	254	274	295	315	335	356	376	396	416	437	457	477	497	517	537
34	131	153	175	197	218	240	261	282	303	324	345	366	387	408	428	449	470	491	511	532	552
35	135	158	180	202	225	246	268	290	312	333	355	376	398	419	440	462	483	504	526	547	568
36	139	162	185	208	231	253	276	298	320	342	365	387	409	431	452	474	496	518	540	562	583
37	143	166	190	214	237	260	283	306	329	352	374	397	419	442	464	487	509	532	554	576	599
38	146	171	195	219	243	267	290	314	337	361	384	407	430	453	476	500	522	545	568	591	614
39	150	175	200	225	249	274	298	322	346	370	394	417	441	465	488	512	536	559	583	606	630
40	154	180	205	230	256	280	305	330	354	379	403	428	452	476	501	525	549	573	597	621	645
41	158	184	210	236	262	287	313	338	363	388	413	438	463	488	513	537	562	587	611	636	660
42	161	188	215	242	268	294	320	346	372	397	423	448	474	499	525	550	575	600	626	651	676
43	165	193	220	247	274	301	327	354	380	406	433	459	485	511	537	562	588	614	640	666	691
44	169	197	225	253	280	308	335	362	389	416	442	469	496	522	549	575	601	628	654	680	707
45	173	202	230	258	287	314	342	370	397	425	452	479	506	533	561	588	615	641	668	695	722
46	176	206	235	264	293	321	350	378	406	434	462	489	517	545	573	600	628	655	683	710	737
47	180	210	240	270	299	328	357	386	414	443	471	500	528	556	585	613	641	669	697	725	753
48	184	215	245	275	305	335	364	394	423	452	481	510	539	568	597	625	654	683	711	740	768
49	188	219	250	281	311	342	372	402	431	461	491	520	550	579	609	638	667	696	725	755	784
50	191	223	255	286	318	348	379	410	440	470	500	531	561	591	621	650	680	710	740	769	799

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 97.5%-Quantil

Tabelliert ist das 97.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.975}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	101	105	109	112	116	120	124	127	131	135	139	143	146	150	154	158	161	165	169	173
6	118	123	127	131	136	140	145	149	153	158	162	166	171	175	180	184	188	193	197	202
7	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230
8	152	158	163	169	174	180	186	191	197	202	208	214	219	225	230	236	242	247	253	258
9	169	175	181	187	193	200	206	212	218	225	231	237	243	249	256	262	268	274	280	287
10	185	192	199	206	212	219	226	233	240	246	253	260	267	274	280	287	294	301	308	314
11	202	209	217	224	231	239	246	254	261	268	276	283	290	298	305	313	320	327	335	342
12	218	226	234	242	250	258	266	274	282	290	298	306	314	322	330	338	346	354	362	370
13	235	243	252	260	269	277	286	295	303	312	320	329	337	346	354	363	372	380	389	397
14	251	260	269	278	288	297	306	315	324	333	342	352	361	370	379	388	397	406	416	425
15	267	277	287	296	306	316	326	335	345	355	365	374	384	394	403	413	423	433	442	452
16	283	294	304	314	325	335	345	356	366	376	387	397	407	417	428	438	448	459	469	479
17	300	311	321	332	343	354	365	376	387	398	409	419	430	441	452	463	474	485	496	506
18	316	327	339	350	362	373	385	396	408	419	431	442	453	465	476	488	499	511	522	533
19	332	344	356	368	380	392	404	416	428	440	452	464	476	488	501	513	525	537	549	561
20	348	361	373	386	399	411	424	437	449	462	474	487	500	512	525	537	550	562	575	588
21	364	378	391	404	417	430	444	457	470	483	496	509	522	536	549	562	575	588	601	615
22	380	394	408	422	436	449	463	477	491	504	518	532	545	559	573	587	600	614	628	641
23	397	411	425	440	454	468	483	497	511	526	540	554	568	583	597	611	626	640	654	668
24	413	428	443	457	472	487	502	517	532	547	562	576	591	606	621	636	651	666	680	695
25	429	444	460	475	491	506	522	537	552	568	583	599	614	630	645	660	676	691	707	722
26	445	461	477	493	509	525	541	557	573	589	605	621	637	653	669	685	701	717	733	749
27	461	478	494	511	527	544	561	577	594	610	627	643	660	676	693	710	726	743	759	776
28	477	494	511	529	546	563	580	597	614	631	649	666	683	700	717	734	751	768	785	802
29	493	511	529	546	564	582	599	617	635	653	670	688	706	723	741	759	776	794	812	829
30	509	527	546	564	582	601	619	637	655	674	692	710	728	747	765	783	801	819	838	856
31	525	544	563	582	601	619	638	657	676	695	714	732	751	770	789	808	826	845	864	883
32	541	561	580	599	619	638	658	677	696	716	735	755	774	793	813	832	851	871	890	909
33	557	577	597	617	637	657	677	697	717	737	757	777	797	817	837	856	876	896	916	936
34	573	594	614	635	655	676	696	717	737	758	778	799	819	840	860	881	901	922	942	963
35	589	610	631	653	674	695	716	737	758	779	800	821	842	863	884	905	926	947	968	989
36	605	627	649	670	692	714	735	757	778	800	822	843	865	887	908	930	951	973	994	1016
37	621	643	666	688	710	732	755	777	799	821	843	865	888	910	932	954	976	998	1020	1042
38	637	660	683	706	728	751	774	797	819	842	865	888	910	933	956	978	1001	1024	1046	1069
39	653	676	700	723	747	770	793	817	840	863	887	910	933	956	980	1003	1026	1049	1072	1096
40	669	693	717	741	765	789	813	837	860	884	908	932	956	980	1003	1027	1051	1075	1099	1122
41	685	710	734	759	783	808	832	856	881	905	930	954	978	1003	1027	1052	1076	1100	1125	1149
42	701	726	751	776	801	826	851	876	901	926	951	976	1001	1026	1051	1076	1101	1126	1151	1175
43	717	743	768	794	819	845	871	896	922	947	973	998	1024	1049	1075	1100	1126	1151	1177	1202
44	733	759	785	812	838	864	890	916	942	968	994	1020	1046	1072	1099	1125	1151	1177	1203	1228
45	749	776	802	829	856	883	909	936	963	989	1016	1042	1069	1096	1122	1149	1175	1202	1228	1255
46	765	792	820	847	874	901	929	956	983	1010	1037	1065	1092	1119	1146	1173	1200	1227	1254	1282
47	781	809	837	864	892	920	948	976	1003	1031	1059	1087	1114	1142	1170	1197	1225	1253	1280	1308
48	797	825	854	882	910	939	967	996	1024	1052	1080	1109	1137	1165	1194	1222	1250	1278	1306	1335
49	813	842	871	900	929	958	987	1015	1044	1073	1102	1131	1160	1188	1217	1246	1275	1304	1332	1361
50	829	858	888	917	947	976	1006	1035	1065	1094	1124	1153	1182	1212	1241	1270	1300	1329	1358	1388

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99%-Quantil

Tabelliert ist das 99%-Quantil $U_{m,n;\,0.99}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103
6	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	74	79	83	88	93	97	102	107	111	116	120
7	31	37	42	48	53	58	64	69	74	80	85	90	95	101	106	111	116	122	127	132	138
8	35	41	48	54	60	66	72	78	83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	143	149	154
9	39	46	53	60	66	73	80	86	93	99	106	112	119	125	132	139	145	152	158	165	171
10	43	51	58	66	73	80	87	95	102	109	116	123	131	138	145	152	159	166	174	181	188
11	47	56	64	72	80	87	95	103	111	119	127	134	142	150	158	166	173	181	189	197	204
12	51	60	69	78	86	95	103	112	120	129	137	145	154	162	171	179	187	196	204	212	221
13	55	65	74	83	93	102	111	120	129	138	147	156	165	174	183	192	201	210	219	228	237
14	59	70	80	89	99	109	119	129	138	148	158	167	177	186	196	206	215	225	234	244	254
15	63	74	85	95	106	116	127	137	147	158	168	178	188	199	209	219	229	239	250	260	270
16	67	79	90	101	112	123	134	145	156	167	178	189	200	211	221	232	243	254	265	275	286
17	71	83	95	107	119	131	142	154	165	177	188	200	211	223	234	246	257	268	280	291	302
18	75	88	101	113	125	138	150	162	174	186	199	211	223	235	247	259	271	283	295	307	319
19	79	93	106	119	132	145	158	171	183	196	209	221	234	247	259	272	285	297	310	322	335
20	83	97	111	125	139	152	166	179	192	206	219	232	246	259	272	285	298	312	325	338	351
21	87	102	116	131	145	159	173	187	201	215	229	243	257	271	285	298	312	326	340	353	367
22	91	107	122	137	152	166	181	196	210	225	239	254	268	283	297	312	326	340	355	369	383
23	95	111	127	143	158	174	189	204	219	234	250	265	280	295	310	325	340	355	370	384	399
24	99	116	132	149	165	181	197	212	228	244	260	275	291	307	322	338	353	369	384	400	415
25	103	120	138	154	171	188	204	221	237	254	270	286	302	319	335	351	367	383	399	415	432
26	107	125	143	160	178	195	212	229	246	263	280	297	314	331	347	364	381	398	414	431	448
27	111	130	148	166	184	202	220	238	255	273	290	308	325	343	360	377	395	412	429	446	464
28	115	134	153	172	191	209	228	246	264	282	300	318	336	354	372	390	408	426	444	462	480
29	119	139	159	178	197	216	235	254	273	292	311	329	348	366	385	403	422	440	459	477	496
30	123	144	164	184	204	223	243	263	282	301	321	340	359	378	397	417	436	455	474	493	512
31	127	148	169	190	210	231	251	271	291	311	331	351	370	390	410	430	449	469	489	508	528
32	131	153	174	196	217	238	259	279	300	320	341	361	382	402	422	443	463	483	503	524	544
33	135	157	180	202	223	245	266	288	309	330	351	372	393	414	435	456	477	497	518	539	560
34	139	162	185	207	230	252	274	296	318	340	361	383	404	426	447	469	490	512	533	554	576
35	143	167	190	213	236	259	282	304	327	349	371	394	416	438	460	482	504	526	548	570	592
36	147	171	195	219	243	266	289	313	336	359	381	404	427	450	472	495	518	540	563	585	608
37	151	176	201	225	249	273	297	321	345	368	392	415	438	462	485	508	531	554	577	601	624
38	155	181	206	231	256	280	305	329	354	378	402	426	450	474	497	521	545	569	592	616	640
39	159	185	211	237	262	288	313	338	362	387	412	436	461	485	510	534	559	583	607	631	656
40	163	190	216	243	269	295	320	346	371	397	422	447	472	497	522	547	572	597	622	647	671
41	167	194	222	249	275	302	328	354	380	406	432	458	484	509	535	560	586	611	637	662	687
42	171	199	227	254	282	309	336	363	389	416	442	469	495	521	547	573	599	625	651	677	703
43	175	204	232	260	288	316	344	371	398	425	452	479	506	533	560	586	613	640	666	693	719
44	179	208	237	266	295	323	351	379	407	435	462	490	517	545	572	599	627	654	681	708	735
45	183	213	243	272	301	330	359	388	416	444	473	501	529	557	585	613	640	668	696	724	751
46	187	217	248	278	308	337	367	396	425	454	483	511	540	569	597	626	654	682	711	739	767
47	190	222	253	284	314	344	374	404	434	463	493	522	551	580	610	639	668	697	725	754	783
48	194	227	258	290	321	352	382	413	443	473	503	533	563	592	622	652	681	711	740	770	799
49	198	231	264	296	327	359	390	421	452	482	513	543	574	604	634	665	695	725	755	785	815
50	202	236	269	301	334	366	398	429	461	492	523	554	585	616	647	678	708	739	770	800	831

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99%-Quantil

Tabelliert ist das 99%-Quantil $U_{m,n;\,0.99}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	107	111	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155	159	163	167	171	175	179	183
6	125	130	134	139	144	148	153	157	162	167	171	176	181	185	190	194	199	204	208	213
7	143	148	153	159	164	169	174	180	185	190	195	201	206	211	216	222	227	232	237	243
8	160	166	172	178	184	190	196	202	207	213	219	225	231	237	243	249	254	260	266	272
9	178	184	191	197	204	210	217	223	230	236	243	249	256	262	269	275	282	288	295	301
10	195	202	209	216	223	231	238	245	252	259	266	273	280	288	295	302	309	316	323	330
11	212	220	228	235	243	251	259	266	274	282	289	297	305	313	320	328	336	344	351	359
12	229	238	246	254	263	271	279	288	296	304	313	321	329	338	346	354	363	371	379	388
13	246	255	264	273	282	291	300	309	318	327	336	345	354	362	371	380	389	398	407	416
14	263	273	282	292	301	311	320	330	340	349	359	368	378	387	397	406	416	425	435	444
15	280	290	300	311	321	331	341	351	361	371	381	392	402	412	422	432	442	452	462	473
16	297	308	318	329	340	351	361	372	383	394	404	415	426	436	447	458	469	479	490	501
17	314	325	336	348	359	370	382	393	404	416	427	438	450	461	472	484	495	506	517	529
18	331	343	354	366	378	390	402	414	426	438	450	462	474	485	497	509	521	533	545	557
19	347	360	372	385	397	410	422	435	447	460	472	485	497	510	522	535	547	560	572	585
20	364	377	390	403	417	430	443	456	469	482	495	508	521	534	547	560	573	586	599	613
21	381	395	408	422	436	449	463	477	490	504	518	531	545	559	572	586	599	613	627	640
22	398	412	426	440	455	469	483	497	512	526	540	554	569	583	597	611	625	640	654	668
23	414	429	444	459	474	489	503	518	533	548	563	577	592	607	622	637	651	666	681	696
24	431	446	462	477	493	508	524	539	554	570	585	601	616	631	647	662	677	693	708	724
25	448	464	480	496	512	528	544	560	576	592	608	624	640	656	671	687	703	719	735	751
26	464	481	497	514	531	547	564	580	597	614	630	647	663	680	696	713	729	746	762	779
27	481	498	515	532	550	567	584	601	618	635	652	670	687	704	721	738	755	772	789	806
28	497	515	533	551	569	586	604	622	639	657	675	693	710	728	746	763	781	799	816	834
29	514	532	551	569	587	606	624	642	661	679	697	716	734	752	770	789	807	825	843	861
30	531	550	569	587	606	625	644	663	682	701	720	738	757	776	795	814	833	851	870	889
31	547	567	586	606	625	645	664	684	703	723	742	761	781	800	820	839	858	878	897	916
32	564	584	604	624	644	664	684	704	724	744	764	784	804	824	844	864	884	904	924	944
33	580	601	622	642	663	684	704	725	745	766	787	807	828	848	869	889	910	930	951	971
34	597	618	639	661	682	703	724	745	767	788	809	830	851	872	893	914	936	957	978	999
35	614	635	657	679	701	723	744	766	788	810	831	853	875	896	918	940	961	983	1005	1026
36	630	652	675	697	720	742	764	787	809	831	854	876	898	920	943	965	987	1009	1031	1054
37	647	670	693	716	738	761	784	807	830	853	876	899	921	944	967	990	1013	1035	1058	1081
38	663	687	710	734	757	781	804	828	851	875	898	921	945	968	992	1015	1038	1062	1085	1108
39	680	704	728	752	776	800	824	848	872	896	920	944	968	992	1016	1040	1064	1088	1112	1136
40	696	721	746	770	795	820	844	869	893	918	943	967	992	1016	1041	1065	1090	1114	1139	1163
41	713	738	763	789	814	839	864	889	914	940	965	990	1015	1040	1065	1090	1115	1140	1165	1190
42	729	755	781	807	833	858	884	910	936	961	987	1013	1038	1064	1090	1115	1141	1167	1192	1218
43	746	772	799	825	851	878	904	930	957	983	1009	1035	1062	1088	1114	1140	1167	1193	1219	1245
44	762	789	816	843	870	897	924	951	978	1005	1031	1058	1085	1112	1139	1165	1192	1219	1246	1272
45	779	806	834	861	889	916	944	971	999	1026	1054	1081	1108	1136	1163	1190	1218	1245	1272	1300
46	795	823	852	880	908	936	964	992	1020	1048	1076	1104	1132	1160	1188	1215	1243	1271	1299	1327
47	812	841	869	898	927	955	984	1012	1041	1069	1098	1127	1155	1184	1212	1240	1269	1297	1326	1354
48	828	858	887	916	945	975	1004	1033	1062	1091	1120	1149	1178	1207	1236	1265	1294	1323	1352	1381
49	845	875	905	934	964	994	1024	1053	1083	1113	1142	1172	1202	1231	1261	1290	1320	1350	1379	1409
50	861	892	922	953	983	1013	1044	1074	1104	1134	1165	1195	1225	1255	1285	1315	1346	1376	1406	1436

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.5%-Quantil

Tabelliert ist das 99.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.995}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	24	28	33	37	41	45	49	53	57	62	66	70	74	78	82	86	90	95	99	103	107
6	28	33	38	43	48	53	58	62	67	72	77	82	86	91	96	101	106	110	115	120	125
7	33	38	44	49	55	60	66	71	77	82	88	93	99	104	110	115	121	126	131	137	142
8	37	43	49	56	62	68	74	80	86	93	99	105	111	117	123	129	135	141	148	154	160
9	41	48	55	62	69	76	82	89	96	103	110	116	123	130	137	143	150	157	163	170	177
10	45	53	60	68	76	83	91	98	105	113	120	128	135	142	150	157	165	172	179	187	194
11	49	58	66	74	82	91	99	107	115	123	131	139	147	155	163	171	179	187	195	203	211
12	53	62	71	80	89	98	107	116	124	133	142	150	159	168	176	185	193	202	211	219	228
13	57	67	77	86	96	105	115	124	134	143	152	162	171	180	189	199	208	217	226	236	245
14	62	72	82	93	103	113	123	133	143	153	163	173	183	193	202	212	222	232	242	252	262
15	66	77	88	99	110	120	131	142	152	163	173	184	194	205	215	226	236	247	257	268	278
16	70	82	93	105	116	128	139	150	162	173	184	195	206	217	229	240	251	262	273	284	295
17	74	86	99	111	123	135	147	159	171	183	194	206	218	230	241	253	265	277	288	300	312
18	78	91	104	117	130	142	155	168	180	193	205	217	230	242	254	267	279	291	304	316	328
19	82	96	110	123	137	150	163	176	189	202	215	229	241	254	267	280	293	306	319	332	345
20	86	101	115	129	143	157	171	185	199	212	226	240	253	267	280	294	307	321	334	348	361
21	90	106	121	135	150	165	179	193	208	222	236	251	265	279	293	307	322	336	350	364	378
22	95	110	126	141	157	172	187	202	217	232	247	262	277	291	306	321	336	350	365	380	394
23	99	115	131	148	163	179	195	211	226	242	257	273	288	304	319	334	350	365	380	396	411
24	103	120	137	154	170	187	203	219	236	252	268	284	300	316	332	348	364	380	396	411	427
25	107	125	142	160	177	194	211	228	245	262	278	295	312	328	345	361	378	394	411	427	444
26	111	130	148	166	184	201	219	237	254	271	289	306	323	340	358	375	392	409	426	443	460
27	115	134	153	172	190	209	227	245	263	281	299	317	335	353	370	388	406	424	441	459	477
28	119	139	159	178	197	216	235	254	272	291	310	328	347	365	383	402	420	438	457	475	493
29	123	144	164	184	204	223	243	262	282	301	320	339	358	377	396	415	434	453	472	491	509
30	127	149	169	190	211	231	251	271	291	311	330	350	370	389	409	429	448	468	487	506	526
31	132	153	175	196	217	238	259	279	300	320	341	361	381	402	422	442	462	482	502	522	542
32	136	158	180	202	224	245	267	288	309	330	351	372	393	414	435	455	476	497	517	538	559
33	140	163	186	208	231	253	275	297	318	340	362	383	405	426	447	469	490	511	533	554	575
34	144	168	191	214	237	260	283	305	328	350	372	394	416	438	460	482	504	526	548	570	591
35	148	172	197	220	244	267	291	314	337	360	382	405	428	450	473	496	518	540	563	585	608
36	152	177	202	227	251	275	299	322	346	369	393	416	439	463	486	509	532	555	578	601	624
37	156	182	207	233	257	282	307	331	355	379	403	427	451	475	499	522	546	570	593	617	640
38	160	187	213	239	264	289	315	339	364	389	414	438	463	487	511	536	560	584	608	633	657
39	164	192	218	245	271	297	322	348	373	399	424	449	474	499	524	549	574	599	624	648	673
40	168	196	224	251	278	304	330	357	383	409	434	460	486	511	537	562	588	613	639	664	689
41	173	201	229	257	284	311	338	365	392	418	445	471	497	524	550	576	602	628	654	680	706
42	177	206	235	263	291	319	346	374	401	428	455	482	509	536	563	589	616	642	669	695	722
43	181	211	240	269	298	326	354	382	410	438	466	493	521	548	575	603	630	657	684	711	738
44	185	215	245	275	304	333	362	391	419	448	476	504	532	560	588	616	644	671	699	727	754
45	189	220	251	281	311	341	370	399	429	457	486	515	544	572	601	629	658	686	714	743	771
46	193	225	256	287	318	348	378	408	438	467	497	526	555	585	614	643	672	701	729	758	787
47	197	230	262	293	324	355	386	417	447	477	507	537	567	597	626	656	686	715	745	774	803
48	201	234	267	299	331	363	394	425	456	487	517	548	578	609	639	669	700	730	760	790	820
49	205	239	273	305	338	370	402	434	465	497	528	559	590	621	652	683	713	744	775	805	836
50	209	244	278	311	345	377	410	442	474	506	538	570	602	633	665	696	727	759	790	821	852

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.5%-Quantil

Tabelliert ist das 99.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.995}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	111	115	119	123	127	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168	173	177	181	185	189
6	130	134	139	144	149	153	158	163	168	172	177	182	187	192	196	201	206	211	215	220
7	148	153	159	164	169	175	180	186	191	197	202	207	213	218	224	229	235	240	245	251
8	166	172	178	184	190	196	202	208	214	220	227	233	239	245	251	257	263	269	275	281
9	184	190	197	204	211	217	224	231	237	244	251	257	264	271	278	284	291	298	304	311
10	201	209	216	223	231	238	245	253	260	267	275	282	289	297	304	311	319	326	333	341
11	219	227	235	243	251	259	267	275	283	291	299	307	315	322	330	338	346	354	362	370
12	237	245	254	262	271	279	288	297	305	314	322	331	339	348	357	365	374	382	391	399
13	254	263	272	282	291	300	309	318	328	337	346	355	364	373	383	392	401	410	419	429
14	271	281	291	301	311	320	330	340	350	360	369	379	389	399	409	418	428	438	448	457
15	289	299	310	320	330	341	351	362	372	382	393	403	414	424	434	445	455	466	476	486
16	306	317	328	339	350	361	372	383	394	405	416	427	438	449	460	471	482	493	504	515
17	323	335	347	358	370	381	393	405	416	428	439	451	463	474	486	497	509	521	532	544
18	340	353	365	377	389	402	414	426	438	450	463	475	487	499	511	524	536	548	560	572
19	358	370	383	396	409	422	435	447	460	473	486	499	511	524	537	550	563	575	588	601
20	375	388	402	415	429	442	455	469	482	496	509	522	536	549	562	576	589	603	616	629
21	392	406	420	434	448	462	476	490	504	518	532	546	560	574	588	602	616	630	644	658
22	409	424	438	453	468	482	497	511	526	540	555	570	584	599	613	628	642	657	671	686
23	426	441	457	472	487	502	517	533	548	563	578	593	608	624	639	654	669	684	699	714
24	443	459	475	491	506	522	538	554	570	585	601	617	633	648	664	680	695	711	727	743
25	460	477	493	509	526	542	559	575	591	608	624	640	657	673	689	706	722	738	754	771
26	477	494	511	528	545	562	579	596	613	630	647	664	681	698	715	731	748	765	782	799
27	494	512	529	547	565	582	600	617	635	652	670	687	705	722	740	757	775	792	810	827
28	511	529	548	566	584	602	620	638	656	675	693	711	729	747	765	783	801	819	837	855
29	528	547	566	585	603	622	641	659	678	697	715	734	753	771	790	809	827	846	865	883
30	545	565	584	603	623	642	661	681	700	719	738	758	777	796	815	834	854	873	892	911
31	562	582	602	622	642	662	682	702	721	741	761	781	801	821	840	860	880	900	920	939
32	579	600	620	641	661	682	702	723	743	763	784	804	825	845	866	886	906	927	947	967
33	596	617	638	659	681	702	723	744	765	786	807	828	849	870	891	912	933	953	974	995
34	613	635	656	678	700	721	743	765	786	808	829	851	873	894	916	937	959	980	1002	1023
35	630	652	675	697	719	741	763	786	808	830	852	874	896	919	941	963	985	1007	1029	1051
36	647	670	693	715	738	761	784	807	829	852	875	898	920	943	966	988	1011	1034	1056	1079
37	664	687	711	734	758	781	804	828	851	874	898	921	944	968	991	1014	1037	1061	1084	1107
38	681	705	729	753	777	801	825	849	873	896	920	944	968	992	1016	1040	1063	1087	1111	1135
39	698	722	747	771	796	821	845	870	894	919	943	968	992	1016	1041	1065	1090	1114	1138	1163
40	715	740	765	790	815	840	866	891	916	941	966	991	1016	1041	1066	1091	1116	1141	1166	1191
41	731	757	783	809	834	860	886	912	937	963	988	1014	1040	1065	1091	1116	1142	1167	1193	1218
42	748	775	801	827	854	880	906	933	959	985	1011	1037	1063	1090	1116	1142	1168	1194	1220	1246
43	765	792	819	846	873	900	927	953	980	1007	1034	1061	1087	1114	1141	1167	1194	1221	1247	1274
44	782	810	837	865	892	920	947	974	1002	1029	1056	1084	1111	1138	1166	1193	1220	1247	1275	1302
45	799	827	855	883	911	939	967	995	1023	1051	1079	1107	1135	1163	1191	1218	1246	1274	1302	1330
46	816	845	873	902	930	959	988	1016	1045	1073	1102	1130	1159	1187	1216	1244	1272	1301	1329	1358
47	833	862	891	920	950	979	1008	1037	1066	1095	1124	1153	1182	1211	1240	1269	1298	1327	1356	1385
48	850	879	909	939	969	999	1028	1058	1088	1117	1147	1177	1206	1236	1265	1295	1325	1354	1384	1413
49	866	897	927	958	988	1018	1049	1079	1109	1139	1170	1200	1230	1260	1290	1320	1351	1381	1411	1441
50	883	914	945	976	1007	1038	1069	1100	1131	1161	1192	1223	1254	1285	1315	1346	1377	1407	1438	1469

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.75%-Quantil

Tabelliert ist das 99.75%-Quantil $U_{m,n;\,0.9975}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	25	29	34	38	42	46	51	55	59	63	68	72	76	80	85	89	93	97	102	106	110
6	29	34	39	44	49	54	59	64	69	74	79	84	89	94	99	104	109	114	119	124	129
7	34	39	45	51	57	62	68	74	79	85	91	96	102	107	113	119	124	130	135	141	147
8	38	44	51	57	64	70	76	83	89	95	102	108	114	121	127	133	139	146	152	158	164
9	42	49	57	64	71	78	85	92	99	106	113	120	127	134	141	148	154	161	168	175	182
10	46	54	62	70	78	86	93	101	109	116	124	132	139	147	154	162	169	177	185	192	200
11	51	59	68	76	85	93	102	110	118	127	135	143	151	160	168	176	184	192	201	209	217
12	55	64	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	172	181	190	199	208	217	226	234
13	59	69	79	89	99	109	118	128	138	147	157	166	176	185	195	204	214	223	233	242	252
14	63	74	85	95	106	116	127	137	147	157	168	178	188	198	208	218	228	239	249	259	269
15	68	79	91	102	113	124	135	146	157	168	178	189	200	211	222	232	243	254	264	275	286
16	72	84	96	108	120	132	143	155	166	178	189	201	212	223	235	246	258	269	280	292	303
17	76	89	102	114	127	139	151	164	176	188	200	212	224	236	248	260	272	284	296	308	320
18	80	94	107	121	134	147	160	172	185	198	211	223	236	249	261	274	287	299	312	324	337
19	85	99	113	127	141	154	168	181	195	208	222	235	248	261	275	288	301	314	328	341	354
20	89	104	119	133	148	162	176	190	204	218	232	246	260	274	288	302	316	329	343	357	371
21	93	109	124	139	154	169	184	199	214	228	243	258	272	287	301	316	330	344	359	373	388
22	97	114	130	146	161	177	192	208	223	239	254	269	284	299	314	329	344	360	375	390	405
23	102	119	135	152	168	185	201	217	233	249	264	280	296	312	328	343	359	375	390	406	421
24	106	124	141	158	175	192	209	226	242	259	275	292	308	324	341	357	373	390	406	422	438
25	110	129	147	164	182	200	217	234	252	269	286	303	320	337	354	371	388	405	421	438	455
26	114	133	152	171	189	207	225	243	261	279	297	314	332	349	367	385	402	419	437	454	472
27	119	138	158	177	196	215	233	252	270	289	307	326	344	362	380	398	416	434	452	471	489
28	123	143	163	183	203	222	242	261	280	299	318	337	356	375	393	412	431	449	468	487	505
29	127	148	169	189	210	230	250	270	289	309	329	348	368	387	406	426	445	464	484	503	522
30	131	153	175	196	217	237	258	278	299	319	339	359	379	400	420	439	459	479	499	519	539
31	135	158	180	202	223	245	266	287	308	329	350	371	391	412	433	453	474	494	515	535	555
32	140	163	186	208	230	252	274	296	318	339	361	382	403	425	446	467	488	509	530	551	572
33	144	168	191	214	237	260	282	305	327	349	371	393	415	437	459	481	502	524	546	567	589
34	148	173	197	221	244	267	291	314	336	359	382	405	427	450	472	494	517	539	561	583	606
35	152	178	202	227	251	275	299	322	346	369	393	416	439	462	485	508	531	554	577	599	622
36	157	183	208	233	258	283	307	331	355	379	403	427	451	474	498	522	545	569	592	616	639
37	161	187	214	239	265	290	315	340	365	389	414	438	463	487	511	535	559	584	608	632	656
38	165	192	219	246	272	298	323	349	374	399	424	450	475	499	524	549	574	598	623	648	672
39	169	197	225	252	279	305	331	358	384	409	435	461	486	512	537	563	588	613	639	664	689
40	173	202	230	258	285	313	340	366	393	419	446	472	498	524	550	576	602	628	654	680	706
41	178	207	236	264	292	320	348	375	402	429	456	483	510	537	563	590	617	643	669	696	722
42	182	212	241	271	299	328	356	384	412	439	467	495	522	549	577	604	631	658	685	712	739
43	186	217	247	277	306	335	364	393	421	449	478	506	534	562	590	617	645	673	700	728	756
44	190	222	253	283	313	343	372	401	431	459	488	517	546	574	603	631	659	688	716	744	772
45	195	227	258	289	320	350	380	410	440	469	499	528	557	587	616	645	674	702	731	760	789
46	199	232	264	295	327	358	388	419	449	479	510	539	569	599	629	658	688	717	747	776	805
47	203	236	269	302	334	365	397	428	459	489	520	551	581	612	642	672	702	732	762	792	822
48	207	241	275	308	340	373	405	436	468	500	531	562	593	624	655	686	716	747	778	808	839
49	211	246	280	314	347	380	413	445	477	510	541	573	605	636	668	699	731	762	793	824	855
50	216	251	286	320	354	388	421	454	487	520	552	584	617	649	681	713	745	777	808	840	872

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.75%-Quantil

Tabelliert ist das 99.75%-Quantil $U_{m,n;\,0.9975}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	114	119	123	127	131	135	140	144	148	152	157	161	165	169	173	178	182	186	190	195
6	133	138	143	148	153	158	163	168	173	178	183	187	192	197	202	207	212	217	222	227
7	152	158	163	169	175	180	186	191	197	202	208	214	219	225	230	236	241	247	253	258
8	171	177	183	189	196	202	208	214	221	227	233	239	246	252	258	264	271	277	283	289
9	189	196	203	210	217	223	230	237	244	251	258	265	272	279	285	292	299	306	313	320
10	207	215	222	230	237	245	252	260	267	275	283	290	298	305	313	320	328	335	343	350
11	225	233	242	250	258	266	274	282	291	299	307	315	323	331	340	348	356	364	372	380
12	243	252	261	270	278	287	296	305	314	322	331	340	349	358	366	375	384	393	401	410
13	261	270	280	289	299	308	318	327	336	346	355	365	374	384	393	402	412	421	431	440
14	279	289	299	309	319	329	339	349	359	369	379	389	399	409	419	429	439	449	459	469
15	297	307	318	329	339	350	361	371	382	393	403	414	424	435	446	456	467	478	488	499
16	314	326	337	348	359	371	382	393	405	416	427	438	450	461	472	483	495	506	517	528
17	332	344	356	368	379	391	403	415	427	439	451	463	475	486	498	510	522	534	546	557
18	349	362	375	387	400	412	425	437	450	462	474	487	499	512	524	537	549	562	574	587
19	367	380	393	406	420	433	446	459	472	485	498	511	524	537	550	563	577	590	603	616
20	385	398	412	426	439	453	467	481	494	508	522	535	549	563	576	590	604	617	631	645
21	402	416	431	445	459	474	488	502	517	531	545	559	574	588	602	617	631	645	659	674
22	419	434	449	464	479	494	509	524	539	554	569	584	598	613	628	643	658	673	688	702
23	437	452	468	484	499	515	530	546	561	577	592	608	623	639	654	669	685	700	716	731
24	454	471	487	503	519	535	551	567	583	599	616	632	648	664	680	696	712	728	744	760
25	472	489	505	522	539	555	572	589	606	622	639	656	672	689	706	722	739	756	772	789
26	489	507	524	541	559	576	593	610	628	645	662	680	697	714	731	749	766	783	800	817
27	507	524	542	560	578	596	614	632	650	668	686	703	721	739	757	775	793	810	828	846
28	524	542	561	580	598	617	635	654	672	690	709	727	746	764	783	801	819	838	856	875
29	541	560	580	599	618	637	656	675	694	713	732	751	770	789	808	827	846	865	884	903
30	559	578	598	618	637	657	677	697	716	736	755	775	795	814	834	854	873	893	912	932
31	576	596	617	637	657	677	698	718	738	758	779	799	819	839	860	880	900	920	940	960
32	593	614	635	656	677	698	719	739	760	781	802	823	844	864	885	906	927	947	968	989
33	610	632	654	675	697	718	739	761	782	804	825	847	868	889	911	932	953	975	996	1017
34	628	650	672	694	716	738	760	782	804	826	848	870	892	914	936	958	980	1002	1024	1046
35	645	668	690	713	736	758	781	804	826	849	871	894	917	939	962	984	1007	1029	1052	1074
36	662	686	709	732	755	779	802	825	848	871	895	918	941	964	987	1010	1033	1056	1080	1103
37	680	703	727	751	775	799	823	847	870	894	918	942	965	989	1013	1036	1060	1084	1107	1131
38	697	721	746	770	795	819	844	868	892	917	941	965	990	1014	1038	1062	1087	1111	1135	1159
39	714	739	764	789	814	839	864	889	914	939	964	989	1014	1039	1064	1088	1113	1138	1163	1188
40	731	757	783	808	834	860	885	911	936	962	987	1013	1038	1064	1089	1114	1140	1165	1191	1216
41	749	775	801	827	854	880	906	932	958	984	1010	1036	1062	1088	1114	1140	1166	1192	1218	1244
42	766	793	819	846	873	900	927	953	980	1007	1033	1060	1087	1113	1140	1166	1193	1220	1246	1273
43	783	810	838	865	893	920	947	975	1002	1029	1056	1084	1111	1138	1165	1192	1220	1247	1274	1301
44	800	828	856	884	912	940	968	996	1024	1052	1080	1107	1135	1163	1191	1218	1246	1274	1302	1329
45	817	846	875	903	932	960	989	1017	1046	1074	1103	1131	1159	1188	1216	1244	1273	1301	1329	1357
46	835	864	893	922	951	980	1010	1039	1068	1097	1126	1155	1184	1212	1241	1270	1299	1328	1357	1386
47	852	882	911	941	971	1001	1030	1060	1090	1119	1149	1178	1208	1237	1267	1296	1326	1355	1385	1414
48	869	899	930	960	990	1021	1051	1081	1111	1142	1172	1202	1232	1262	1292	1322	1352	1382	1412	1442
49	886	917	948	979	1010	1041	1072	1103	1133	1164	1195	1225	1256	1287	1317	1348	1379	1409	1440	1470
50	903	935	967	998	1030	1061	1092	1124	1155	1186	1218	1249	1280	1312	1343	1374	1405	1436	1467	1499

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.9%-Quantil

Tabelliert ist das 99.9%-Quantil $U_{m,n;\,0.999}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	25	30	35	39	43	48	52	57	61	66	70	74	79	83	87	92	96	101	105	109	114
6	30	36	41	46	51	56	61	67	72	77	82	87	92	97	102	107	113	118	123	128	133
7	35	41	47	53	59	64	70	76	82	88	94	100	105	111	117	123	128	134	140	146	152
8	39	46	53	59	66	73	79	86	92	99	105	112	118	125	131	138	144	151	157	164	170
9	43	51	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131	138	145	153	160	167	174	181	188
10	48	56	64	73	81	89	97	105	112	120	128	136	144	152	160	167	175	183	191	199	206
11	52	61	70	79	88	97	105	114	122	131	140	148	157	165	174	182	190	199	207	216	224
12	57	67	76	86	95	105	114	123	132	142	151	160	169	178	187	197	206	215	224	233	242
13	61	72	82	92	102	112	122	132	142	152	162	172	182	191	201	211	221	231	240	250	260
14	66	77	88	99	110	120	131	142	152	163	173	184	194	205	215	225	236	246	257	267	277
15	70	82	94	105	117	128	140	151	162	173	184	196	207	218	229	240	251	262	273	284	295
16	74	87	100	112	124	136	148	160	172	184	196	207	219	231	243	254	266	278	289	301	313
17	79	92	105	118	131	144	157	169	182	194	207	219	231	244	256	269	281	293	305	318	330
18	83	97	111	125	138	152	165	178	191	205	218	231	244	257	270	283	296	309	322	335	347
19	87	102	117	131	145	160	174	187	201	215	229	243	256	270	283	297	311	324	338	351	365
20	92	107	123	138	153	167	182	197	211	225	240	254	269	283	297	311	325	340	354	368	382
21	96	113	128	144	160	175	190	206	221	236	251	266	281	296	311	325	340	355	370	385	399
22	101	118	134	151	167	183	199	215	231	246	262	278	293	309	324	340	355	371	386	401	417
23	105	123	140	157	174	191	207	224	240	257	273	289	305	322	338	354	370	386	402	418	434
24	109	128	146	164	181	199	216	233	250	267	284	301	318	335	351	368	385	401	418	435	451
25	114	133	152	170	188	206	224	242	260	277	295	313	330	347	365	382	399	417	434	451	469
26	118	138	157	176	195	214	233	251	269	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450	468	486
27	122	143	163	183	202	222	241	260	279	298	317	336	354	373	392	410	429	447	466	484	503
28	127	148	169	189	210	230	250	269	289	308	328	347	367	386	405	424	444	463	482	501	520
29	131	153	175	196	217	237	258	278	299	319	339	359	379	399	419	439	458	478	498	518	537
30	135	158	180	202	224	245	266	287	308	329	350	371	391	412	432	453	473	493	514	534	554
31	140	163	186	209	231	253	275	296	318	339	361	382	403	425	446	467	488	509	530	551	572
32	144	168	192	215	238	261	283	306	328	350	372	394	416	437	459	481	502	524	546	567	589
33	149	173	198	222	245	268	292	315	337	360	383	405	428	450	473	495	517	539	562	584	606
34	153	178	203	228	252	276	300	324	347	370	394	417	440	463	486	509	532	555	577	600	623
35	157	184	209	234	259	284	308	333	357	381	405	428	452	476	499	523	546	570	593	617	640
36	162	189	215	241	266	292	317	342	366	391	416	440	464	489	513	537	561	585	609	633	657
37	166	194	221	247	274	299	325	351	376	401	427	452	477	501	526	551	576	600	625	650	674
38	170	199	226	254	281	307	334	360	386	412	438	463	489	514	540	565	590	616	641	666	691
39	175	204	232	260	288	315	342	369	396	422	448	475	501	527	553	579	605	631	657	683	708
40	179	209	238	267	295	323	350	378	405	432	459	486	513	540	567	593	620	646	673	699	725
41	183	214	244	273	302	330	359	387	415	443	470	498	525	553	580	607	634	661	688	715	742
42	188	219	249	279	309	338	367	396	425	453	481	509	537	565	593	621	649	677	704	732	759
43	192	224	255	286	316	346	376	405	434	463	492	521	550	578	607	635	664	692	720	748	776
44	196	229	261	292	323	354	384	414	444	474	503	533	562	591	620	649	678	707	736	765	794
45	201	234	267	299	330	361	392	423	454	484	514	544	574	604	634	663	693	722	752	781	811
46	205	239	272	305	337	369	401	432	463	494	525	556	586	617	647	677	707	738	768	798	828
47	210	244	278	312	344	377	409	441	473	504	536	567	598	629	660	691	722	753	783	814	845
48	214	249	284	318	352	385	418	450	483	515	547	579	610	642	674	705	737	768	799	830	862
49	218	254	290	324	359	392	426	459	492	525	558	590	623	655	687	719	751	783	815	847	879
50	223	259	295	331	366	400	434	468	502	535	569	602	635	668	701	733	766	798	831	863	896

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.9%-Quantil

Tabelliert ist das 99.9%-Quantil $U_{m,n;\,0.999}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	118	122	127	131	135	140	144	149	153	157	162	166	170	175	179	183	188	192	196	201
6	138	143	148	153	158	163	168	173	178	184	189	194	199	204	209	214	219	224	229	234
7	157	163	169	175	180	186	192	198	203	209	215	221	226	232	238	244	249	255	261	267
8	176	183	189	196	202	209	215	222	228	234	241	247	254	260	267	273	279	286	292	299
9	195	202	210	217	224	231	238	245	252	259	266	274	281	288	295	302	309	316	323	330
10	214	222	230	237	245	253	261	268	276	284	292	299	307	315	323	330	338	346	354	361
11	233	241	250	258	266	275	283	292	300	308	317	325	334	342	350	359	367	376	384	392
12	251	260	269	278	287	296	306	315	324	333	342	351	360	369	378	387	396	405	414	423
13	269	279	289	299	308	318	328	337	347	357	366	376	386	396	405	415	425	434	444	454
14	288	298	308	319	329	339	350	360	370	381	391	401	412	422	432	443	453	463	474	484
15	306	317	328	339	350	361	372	383	394	405	416	427	438	448	459	470	481	492	503	514
16	324	336	347	359	371	382	394	405	417	428	440	452	463	475	486	498	509	521	533	544
17	342	354	367	379	391	403	416	428	440	452	464	477	489	501	513	525	537	550	562	574
18	360	373	386	399	412	425	437	450	463	476	489	501	514	527	540	553	565	578	591	604
19	378	392	405	419	432	446	459	473	486	499	513	526	540	553	567	580	593	607	620	634
20	396	410	424	439	453	467	481	495	509	523	537	551	565	579	593	607	621	635	649	663
21	414	429	444	458	473	488	502	517	532	546	561	576	590	605	620	634	649	664	678	693
22	432	447	463	478	493	509	524	539	555	570	585	600	616	631	646	661	677	692	707	722
23	450	466	482	498	514	530	546	562	577	593	609	625	641	657	673	688	704	720	736	752
24	468	484	501	518	534	551	567	584	600	617	633	650	666	683	699	715	732	748	765	781
25	486	503	520	537	554	572	589	606	623	640	657	674	691	708	725	742	759	776	794	811
26	504	521	539	557	575	592	610	628	646	663	681	699	716	734	752	769	787	805	822	840
27	521	540	558	577	595	613	632	650	668	687	705	723	741	760	778	796	814	833	851	869
28	539	558	577	596	615	634	653	672	691	710	729	748	766	785	804	823	842	861	880	898
29	557	577	596	616	635	655	674	694	713	733	752	772	791	811	830	850	869	889	908	928
30	575	595	615	635	655	676	696	716	736	756	776	796	816	836	857	877	897	917	937	957
31	592	613	634	655	676	696	717	738	759	779	800	821	841	862	883	903	924	945	965	986
32	610	632	653	674	696	717	739	760	781	802	824	845	866	888	909	930	951	972	994	1015
33	628	650	672	694	716	738	760	782	804	826	847	869	891	913	935	957	979	1000	1022	1044
34	646	668	691	713	736	759	781	804	826	849	871	894	916	939	961	983	1006	1028	1051	1073
35	663	687	710	733	756	779	802	826	849	872	895	918	941	964	987	1010	1033	1056	1079	1102
36	681	705	729	752	776	800	824	847	871	895	919	942	966	989	1013	1037	1060	1084	1107	1131
37	699	723	748	772	796	821	845	869	894	918	942	966	991	1015	1039	1063	1088	1112	1136	1160
38	716	741	766	791	816	841	866	891	916	941	966	991	1016	1040	1065	1090	1115	1139	1164	1189
39	734	760	785	811	836	862	888	913	939	964	989	1015	1040	1066	1091	1117	1142	1167	1193	1218
40	752	778	804	830	857	883	909	935	961	987	1013	1039	1065	1091	1117	1143	1169	1195	1221	1247
41	769	796	823	850	877	903	930	957	983	1010	1037	1063	1090	1117	1143	1170	1196	1223	1249	1276
42	787	814	842	869	897	924	951	979	1006	1033	1060	1088	1115	1142	1169	1196	1223	1250	1278	1305
43	805	833	861	889	917	945	972	1000	1028	1056	1084	1112	1139	1167	1195	1223	1250	1278	1306	1333
44	822	851	880	908	937	965	994	1022	1051	1079	1107	1136	1164	1193	1221	1249	1278	1306	1334	1362
45	840	869	898	928	957	986	1015	1044	1073	1102	1131	1160	1189	1218	1247	1276	1305	1333	1362	1391
46	857	887	917	947	977	1006	1036	1066	1095	1125	1155	1184	1214	1243	1273	1302	1332	1361	1391	1420
47	875	906	936	966	997	1027	1057	1088	1118	1148	1178	1208	1238	1269	1299	1329	1359	1389	1419	1449
48	893	924	955	986	1017	1048	1078	1109	1140	1171	1202	1232	1263	1294	1325	1355	1386	1416	1447	1478
49	910	942	974	1005	1037	1068	1100	1131	1162	1194	1225	1257	1288	1319	1350	1382	1413	1444	1475	1506
50	928	960	992	1025	1057	1089	1121	1153	1185	1217	1249	1281	1313	1344	1376	1408	1440	1472	1503	1535

Index