

Kapitel 18

Die Greensche Funktion der zeitabhängigen Diffusionsgleichung in freien Raum

In diesem und dem nächsten Kapitel werden Greensche Funktionen für zeitabhängige Differentialgleichungen und die zugehörigen quellenmäßigen Darstellungen der Lösungen abgeleitet. Der wesentlich neue Gesichtspunkt ist die Einbeziehung der Kausalität. Die Darstellung hier folgt sehr weitgehend der von E. Kraut.

Die zeitabhängige Diffusionsgleichung ist:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = \frac{\nu(\vec{r}, t)}{a\mu c} := g(\vec{r}, t). \quad (18.1)$$

a ist die Diffusionskonstante; $g(\vec{r}, t)$ ist proportional zur Quelldichte, vgl. §1.4. Die Quellen sollen nur im Endlichen liegen. Im freien Raum haben wir als Randbedingung:

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} T(\vec{r}, t) = 0. \quad (18.2)$$

Ebenso benötigen wir noch Anfangsbedingungen. Die Quellen sollen erst zur Zeit $t = 0$ in Aktion treten. Zu dieser Zeit ist eine Temperaturverteilung $T_0(\vec{r})$ im Raum vorgegeben.

$$\lim_{t \rightarrow 0+} T(\vec{r}, t) = T_0(\vec{r}). \quad (18.3)$$

18.1 Definition der Greenschen Funktion

Im dreidimensionalen Raum muss die Greensche Funktion der folgenden Gleichung genügen:

$$\left(\Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = - \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'). \quad (18.4)$$

Im freien Raum lautet dann die Greensche Funktion:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{a \theta(t - t')}{[4\pi a(t - t')]^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{4a(t - t')}}. \quad (18.5)$$

Diese Greensche Funktion genügt neben Gl.(18.4) den folgenden Bedingungen:

1. Sie ist kausal, es gibt keine Wirkung vor der auslösenden Ursache:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 0 \quad \text{für} \quad t < t'; \quad (18.6)$$

Genauer ist dies:

$$\lim_{t-t' \rightarrow 0+} G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = a \delta(\vec{r} - \vec{r}'); \quad (18.7)$$

$$\lim_{t-t' \rightarrow 0-} G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 0. \quad (18.8)$$

2. Sie genügt der Randbedingung des freien Raumes, Gl.(18.9)

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 0. \quad (18.9)$$

3. Die Greensche Funktion erfüllt folgende Reziprozitätsrelation:

$$G_+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = G(\vec{r}', -t'; \vec{r}, t) = G_-(\vec{r}', -t'; \vec{r}, t) \quad (18.10)$$

da ihr immer eine homogene Randbedingung wie Gl.(18.9) oder eine ähnliche Gleichung vorgeschrieben wird.

Die Zeitspiegelung der homogenen Diffusionsgleichung gibt:

$$\Delta T(\vec{r}, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (18.11)$$

$$\Delta T(\vec{r}, -t) = -\frac{1}{a} \frac{\partial T(\vec{r}, -t)}{\partial t}; \quad (18.12)$$

und in der Gleichung für die Greensche Funktion:

$$\left(\Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'); \quad (18.13)$$

$$\left(\Delta + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) G(\vec{r}, -t; \vec{r}'', -t'') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'') \delta(t - t''). \quad (18.14)$$

Damit gehen wir in den Greenschen Satz:

$$\int \int \int dV (G_+ \Delta G_- - G_- \Delta G_+) = \int \int dF \left(G_+ \frac{\partial G_-}{\partial n} - G_- \frac{\partial G_+}{\partial n} \right) = 0;$$

das Oberflächenintegral ist Null wegen der homogenen Randbedingungen für G, Gl.(18.9). Damit ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int \int dV \left(G_+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \left[-\frac{1}{a} \frac{\partial G_-}{\partial t} - \delta(\vec{r} - \vec{r}'') \delta(t - t'') \right] - \right. \\ &\quad \left. - G_-(\vec{r}, -t; \vec{r}'', -t'') \left[\frac{1}{a} \frac{\partial G_+}{\partial t} - \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \right] \right) = \\ 0 &= -G_+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \delta(t - t'') + G_-(\vec{r}, -t; \vec{r}'', -t'') \delta(t - t') - \\ &\quad - \frac{1}{a} \int \int \int dV \underbrace{\left(G_+ \frac{\partial G_-}{\partial t} + \frac{\partial G_+}{\partial t} G_- \right)}_{\frac{\partial}{\partial t} (G_+ G_-)} \end{aligned}$$

This is integrated over time from $-\infty$ to $t > \max(t', t'')$:

$$G_-(\vec{r}', t'; \vec{r}'', -t'') - G_+(\vec{r}'', t''; \vec{r}', t') = \frac{1}{a} \int \int \int dV \left[G_+ G_- \right]_{t=-\infty}^{t=t} = 0.$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist Null, weil gemäß Gl.(18.6) sowohl

$$G_+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 0 \quad \text{für} \quad t = -\infty \quad \text{weil dann} \quad t < t';$$

als auch

$$G_-(\vec{r}, -t; \vec{r}', t'') = 0 \quad \text{für} \quad t = t > \max(t', t''), \quad \text{woraus folgt} \quad t > t'' \Rightarrow -t < -t''.$$

18.2 Quellenmäßige Darstellung der Lösung

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\Delta' - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t'} \right) T(\vec{r}', t') &= -g(\vec{r}', t') \\ \left(\Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) G_-(\vec{r}', -t'; \vec{r}, -t) &= -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'). \end{aligned}$$

werden in den Greenschen Satz eingesetzt und dieser über die Zeit integriert:

$$\int_0^{t+\varepsilon} dt' \int \int \int dV' (G_- \Delta' T - T \Delta' G_-) = \int_0^{t+\varepsilon} dt' \int \int dF' \left(G_- \frac{\partial T}{\partial n'} - T \frac{\partial G_-}{\partial n'} \right) = 0.$$

Das Oberflächenintegral auf der rechten Seite erstreckt sich über die unendlich ferne Kugel und ist Null wegen der homogenen Randbedingungen, die für T und G vorgeschrieben sind. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^{t+\varepsilon} dt' \int \int \int dV' &\left(G_-(\vec{r}', -t'; \vec{r}, -t) \left[\frac{1}{a} \frac{\partial T(\vec{r}', t')}{\partial t'} - g(\vec{r}', t') \right] - \right. \\ &\left. - T(\vec{r}', t') \left[-\frac{1}{a} \frac{\partial G_-}{\partial t'} - \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \right] \right). \end{aligned}$$

Das Integral über die Deltadistributionen wird ausgeführt:

$$\begin{aligned} T(\vec{r}, t) = \int_0^{t+\varepsilon} dt' \int \int \int dV' &\left[g(\vec{r}', t') \underbrace{G_-(\vec{r}', -t'; \vec{r}, t)}_{= G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t'} \left(T(\vec{r}', t') \underbrace{G_-(\vec{r}', -t'; \vec{r}, t)}_{= G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')} \right) \right] - \\ &- \frac{1}{a} \int \int \int dV' \int_0^{t+\varepsilon} dt' \frac{\partial}{\partial t'} \left[T(\vec{r}', t') G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \right]. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile kann das Integral über die Zeit ausgeführt werden:

$$-\frac{1}{a} \int \int \int dV' \left[T(\vec{r}', t') G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \right]_{t'=0}^{t'=t+\varepsilon} = \frac{1}{a} \int \int \int dV' T(\vec{r}', 0) G(\vec{r}, t; \vec{r}', 0) + 0.$$

Der letzte Term ist Null, weil wegen Gl.(18.6)

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t' + \varepsilon) = 0.$$

Das gibt die endgültige Form der quellenmäßigen Darstellung der Lösung:

$$T(\vec{r}, t) = \int_0^{t+\varepsilon} dt' \int \int \int dV' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') g(\vec{r}', t') + \frac{1}{a} \int \int \int dV' G(\vec{r}, t; \vec{r}', 0) T_0(\vec{r}'). \quad (18.15)$$

Der erste Term gibt den Beitrag der Quellen zu der Temperaturverteilung; der zweite beschreibt die Evolution der Anfangsverteilung. Insbesondere ergibt sich für den Grenzwert $t \rightarrow \varepsilon +$:

$$T(\vec{r}, 0+) = 0 + \frac{1}{a} \int \int \int dV' a \delta(\vec{r} - \vec{r}') T_0(\vec{r}').$$

Das erste Integral ist Null, weil die obere Grenze $\varepsilon \rightarrow 0$, die untere der Wert Null ist.

18.3 Berechnung der Greensche Funktion der zeitabhängigen Diffusionsgleichung im freien Raum

18.3.1 Eindimensionaler Fall

Die Fourierdarstellungen der Deltadistribution

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}, \quad \delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')}$$

und der entsprechende Ansatz für die Greensche Funktion

$$G(x, t; x', t') := \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i\omega(t-t')} e^{ik(x-x')} b(\omega, k)$$

werden in die Differentialgleichung für die Greensche Funktion

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x, t; x', t') = -\delta(x - x') \delta(t - t').$$

eingesetzt. Daraus ergibt sich folgender Ausdruck für die Amplitude b :

$$b = \frac{a}{i} \frac{1}{\omega - iak^2}.$$

und als Integraldarstellung der Greenschen Funktion:

$$G(x, t; x', t') = \frac{a}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{\omega - iak^2} e^{ik(x-x')} e^{i\omega(t-t')}. \quad (18.16)$$

Der Integrand bezüglich ω hat einen Pol erster Ordnung an der Stelle $\omega = iak^2$, also in der oberen Halbebene. Das Integral kann mittels des Cauchyschen Integralsatzes ausgewertet werden. Dazu wird der Integrationsweg längs der reellen ω -Achse mittels eines Halbkreises C_- (C_+) in der unteren (oberen) Halbebene für $t - t' < 0$, also $t < t'$ (für $t - t' > 0$, also $t > t'$ zu einem geschlossenen Weg ergänzt. Das Integral kann mittels des Cauchyschen Residuensatzes ausgewertet werden und lautet:

$$t - t' < 0, t < t' : \quad G = 0, \quad \text{auch für } t - t' \rightarrow 0+.$$

$$t - t' < 0, t < t' : \quad G(x, t; x', t') = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} e^{-ak^2(t-t')};$$

$$t - t' = 0+, t = t' + 0 : \quad G(x, t; x', t') = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} = a \delta(x - x').$$

Diese Resultate werden mittels der Heavisideschen Sprungfunktion durch eine einzige Formel ausgedrückt:

$$G(x, t; x', t') = \frac{a \theta(t - t')}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} e^{-ak^2(t-t')}. \quad (18.17)$$

Die Heavisideschen Sprungfunktion $\theta(\tau)$ hat den Wert Null für negative Argumente; den Wert 1 für positive τ . Das Integral über k kann ebenfalls ausgewertet werden, wie am Ende des Paragraphen gezeigt wird. Mit den Abkürzungen $\xi := x - x'$ und $\tau := a(t - t')$ findet man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik\xi} e^{-ak^2\tau} = e^{-\xi^2/4\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{(-k-i\xi/2\tau)^2} = e^{-\xi^2/4\tau} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}.$$

Der resultierende Ausdruck für die Greenschen Funktion der zeitabhängigen Diffusionsgleichung:

$$G(x, t; x', t') = \frac{a \theta(t - t')}{\sqrt{4\pi a(t - t')}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}} \quad (18.18)$$

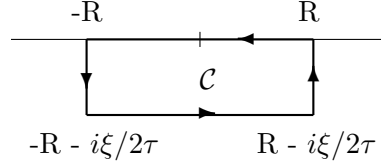
zeigt, dass die Lösung dieser Differentialgleichung vom parabolischen Typ für alle Zeiten $t > t'$ analytisch ist, selbst wenn die Anfangsverteilung singulär war.

Auswertung des oben benutzten Integrals

Den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik\xi} e^{-ak^2\tau} = e^{-\xi^2/4\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{(-k-i\xi/2\tau)^2} = e^{-\xi^2/4\tau} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}.$$

bekommt man, indem die Funktion e^{-z^2} in der komplexen z -Ebene längs des Weges C , der unten gezeigt ist, integriert. Da der Integrand innerhalb und auf C regulär ist, hat das Integral



über den geschlossenen Weg den Wert Null.

$$0 = \int_C e^{-\tau z^2} dz = \left\{ \int_R^{-R} + \int_{-R-i\xi/2\tau}^{R-i\xi/2\tau} + \underbrace{\int_{-R}^{-R-i\xi/2\tau} + \int_{R-i\xi/2\tau}^R}_{\rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty} \right\} dz e^{-\tau z^2}.$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R-i\xi/2\tau}^{R-i\xi/2\tau} dz e^{-\tau z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\tau z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}; \quad \text{mit } z := k - i\xi/2\tau, \quad dz = dk.$$

$$\int_{R-i\xi/2\tau}^R dz e^{-\tau z^2} = i \int_{-\xi/2\tau}^0 dy e^{-\tau(R+iy)^2} = i e^{-\tau(R)^2} \int_{-\xi/2\tau}^0 dy e^{-2i\tau Ry} e^{\tau y^2} \xrightarrow[R \rightarrow 0]{} 0$$

In der letzten Zeile wurde die Substitutions $z = R + iy$, $dz = idy$ verwendet. Das allerletzte Integral erfolgt über eine Funktion vom Betrage Eins und ist daher sicher einen endlichen Wert. Deswegen geht der letzte Term gegen Null, wenn R gegen Unendlich geht. Ebenso schätzt man das Integral über den zweiten vertikalen Weg ab.

18.3.2 n -dimensionaler Fall

Das Resultat für den n -dimensionalen Fall kann sofort angeschrieben werden, da sich das obige Verfahren für eine Variable für jede Variable unabhängig durchziehen läßt.

$$G(x, t; x', t') = \frac{a \theta(t - t')}{[4\pi a(t - t')]^{n/2}} e^{-\frac{1}{4a(t-t')} \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2} \quad (18.19)$$

18.4 Diffusionswellen

Die funktionale Abhängigkeit der Orrsvariablen und der Zeit in den obigen Ausdrücken (18.18) und (18.19) für die Greenschen Funktionen machen die Auswertung von quellenmäßigen Darstellungen der Lösungen sehr schwierig. Deshalb ist es oft zweckmäßiger mit Reihendarstellungen zu arbeiten. Die eindimensionale quellenfreie Diffusionsgleichung wird mittels eines Ansatzes gelöst:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & T(x, t) &= T_0 e^{i\omega t + \beta x}, \\ i\omega &= a \beta^2, & \beta &= \pm \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2a}} (1 + i). \\ T(x, t) &= \operatorname{Re} \left[T_0 e^{i\omega t} e^{\pm \beta (1+i) x \sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \right]; \\ T(x, t) &= T_0 e^{\pm x \sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos \left(\omega t \pm x \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \right); & + \Leftrightarrow \longleftarrow, \quad - \Leftrightarrow \longrightarrow.\end{aligned}$$

Nach rechts laufende und im Unendlichen verschwindende Wellen werden also so dargestellt:

$$T(x, t) = T_0 e^{-x \sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos \left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} x \right], \quad (18.20)$$

$$T(x, t) = T_0 e^{-x \sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]. \quad (18.21)$$

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{2\pi}{\omega} && \text{Periode} \\ \lambda &= \sqrt{4\pi a \tau} \\ \ell &= \frac{\lambda}{2\pi} = \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}} && \text{Abklinglänge (Eindringtiefe) für Abfall um } 1/e.\end{aligned}$$

Perioden der Wärmeeinstrahlung auf den ebenen Erdboden: $\tau_d = 1$ Tag, $\tau_a = 1$ Jahr:

$$\frac{\ell_a}{\ell_d} = \sqrt{\frac{\tau_a}{\tau_d}} = \sqrt{365} \approx 19. \quad (18.22)$$

Also: Je größer die Periodendauer, desto weiter dringt das oszillierende Signal in den Boden (oder an der Oberfläche periodisch aufgeheizten) Halbraum ein.

18.4.1 Ausbreitung längs eines Stabs. Die Neumannsche Lösung des eindimensionalen Falls

Zeitabhängige Anregung $f(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ eines isolierten halbinendlichen Stabes am linken Ende, der Stelle $x = 0$:

$$T(0, t) = T_0 \left[e^{-x \sqrt{\omega/2a}} \cos \left(\omega t + \alpha - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} x \right) \right]_{x=0} = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (18.23)$$

$$T(x, t) = A \left[e^{-x \sqrt{\omega/2a}} \cos \left(\omega t + \alpha - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} x \right) \right]. \quad (18.24)$$

Wird das Stabende periodisch aufgeheizt und wieder abgekühlt, dann hat die Anregung folgende Form:

$$\begin{aligned}f(t) &= A \left\{ \begin{array}{cc} -1 & 0 < t < \tau/2 \\ 1 & \tau/2 < t < \tau \end{array} \right\} \text{periodisch} = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\omega t)}{2n+1} \\ \left[A \rightarrow A_n := \frac{4A}{\pi(2n+1)}, \quad \omega \rightarrow \omega_{(2n+1)} = (2n+1)\omega \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega_{(2n+1)} t) \quad (18.25)\end{aligned}$$

Dementsprechend wird dann mit $\alpha = -\pi/2$ aus Gl.(18.24):

$$T(x, t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-x\sqrt{\omega(2n+1)/2a}} \sin \left[(2n+1)\omega t - \sqrt{\frac{\omega(2n+1)}{2a}} x \right] \quad (18.26)$$

$$\text{für große } x \approx \frac{4A}{\pi} e^{-x\sqrt{\omega/2a}} \sin \left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \right). \quad (18.27)$$

In höherem Abstand von der Wärmequelle sind die höheren Harmonischen bereits abgeklungen, s. Abb.18.2.

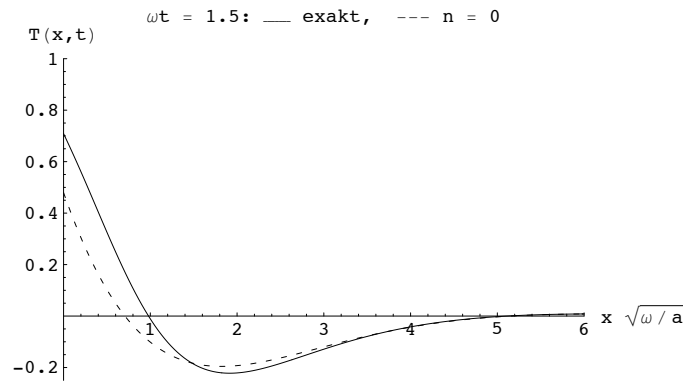


Abbildung 18.2: Die Temperaturverteilung längs eines Drahtes. Vergleich zwischen exakter Lösung und der niedrigsten Näherung