Green'sche Funktionen

1 Die Grundidee

In der Elektrostatik gelangen wir auf Wegen, die wir hier nicht wiederholen wollen zu drei Grundaussagen:

(i) Eine Punktladung Q am Ort \mathbf{x}' erzeugt das das Coulomb-Potential

$$\phi_C(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \,. \tag{1.1}$$

(ii) Für das Potential einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ gilt

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} . \tag{1.2}$$

Diese Formel wird üblicherweise aus derjenigen für eine Punktladung so hergeleitet, daß man den Raum aufteilt in Volumenelemente $\Delta V'$ und damit die Ladungsverteilung in Punktladungen der Größe $\Delta Q' = \Delta V' \rho(\mathbf{x}')$ am Ort \mathbf{x}' ; damit wird dann das Potential als Summe bzw. Integral von Coulomb-Potentialen berechnet. Dabei wird offensichtlich das Superpositionsprinzip benutzt.

(iii) Das Potential einer Ladungsverteilung erfüllt die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}) \ . \tag{1.3}$$

Diese Zusammenhänge sollen im folgenden in einer Form dargestellt werden, die man leicht verallgemeinern kann. Zunächst stellen wir fest: eine Punktladung ist eine Ladungsverteilung, die überall verschwindet, außer an einem Punkt \mathbf{x}' , wobei das Integral über die Ladungsverteilung den Wert der Gesamtladung Q hat. Das sind genau die Eigenschaften einer Delta-Funktion; die Ladungsverteilung einer Punktladung ist also

$$\rho(\mathbf{x}) = Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \tag{1.4}$$

Wir können damit die Differentialgleichung für das Coulomb-Potential schreiben als

$$\Delta \phi_C(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \tag{1.5}$$

Die Lösung ϕ_C dieser Differentialgleichung kennen wir bereits. Setzen wir sie ein und dividieren wir beide Seiten durch Q/ϵ_0 , so gilt offensichtlich die Gleichung

$$\Delta \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \tag{1.6}$$

Integrieren wir beide Seiten mit $d^3x'\rho(\mathbf{x}')/\epsilon_0$, so erhalten wir links

$$\Delta \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \Delta \phi(\mathbf{x})$$
 (1.7)

und rechts

$$-\int d^3x' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{rho(\mathbf{x}')}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}) . \tag{1.8}$$

Die Gleichungen (1.3) und (1.5) sind also äquivalent. Die Lösung einer Gleichung mit einer Punktquelle, also vom Typ (1.5) nennen wir die *Green-Funktion* oder *Greensche Funktion* des entsprechenden Differentialoperators, hier also des Laplace-Operators. Wir bezeichnen

$$G_C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$
(1.9)

als die Greensche Funktion des Laplace-Operators.

Dies ist offensichtlich ein nützliches Konzept, das es lohnt zu verallgemeinern. Man muß die Poissongleichung nicht für jede beliebige Ladungsverteilung erneut lösen. Es genügt, das Coulomb-Potential, bzw. die Green-Funktion des Laplace-Operators zu kennen. Wesentlich ist offensichtlich, daß es sich bei der Poisson-Gleichung um eine lineare Differentialgleichung handelt, so daß man das Superpositionprinzip benutzen kann. Wir schreiben die homogene Differentialgleichung symbolisch als

$$\mathcal{D}_x \phi(x) = 0 , \qquad (1.10)$$

wobei das Argument x eine symbolische Darstellung aller Variablen des betrachteten physikalischen Problems ist, also z.B. $x \to \{x,y,z\}$ für den Laplaceoperator in kartesischen Koordinaten, $x \to \{r,\theta,\phi\}$ für den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten, $x \to t$ für den harmonischen Oszillator oder $x \to \{t,x,y\}$ für die Wellengleichung in 2 Raumdimensionen.

Das Superpositionsprinzip für die homogene Differentialgleichung besagt:

Sind $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ Lösungen, so ist auch die allgemeine Linearkombination $\alpha\phi_1(x) + \beta\phi_2(x)$ eine Lösung. Ist das Superpositionsprinzip erfüllt, so nennt man \mathcal{D}_x einen linearen Differentialoperator.

Für die inhomogene Differentialgleichung

$$\mathcal{D}_x \phi(x) = f(x) \tag{1.11}$$

gilt dann entsprechend

Ist $\phi_1(x)$ eine Lösung zur "Kraft" $f_1(x)$ $\phi_2(x)$ eine Lösung zur Kraft $f_2(x)$, dann ist die allgemeine Überlagerung $\alpha\phi_1(x) + \beta\phi_2(x)$ eine Lösung zur Kraft $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$.

Allerdings ist die Lösung nicht eindeutig, wir können noch beliebigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung hinzufügen. Diesen Mangel an Eindeutigkeit kann man z.B. dadurch beheben, daß man Randbedingungen stellt. Für

den oben betrachteten Laplace-Operator ist die Lösung eindeutig. Stellt man Randbedingungen, so müssen auch diese mit dem Superpositionsprinzip verträglich sein. So darf man fordern daß die Lösung oder ihre Ableitung in einem Punkt, auf einer Linie oder eine Fläche verschwindet, nicht aber daß sie z.B. dort den Wert 7 annimmt.

Wir bezeichnen nun wieder die Lösung für eine "Delta-Kraft" $f(x - x') = \delta(x - x')$ als Green-Funktion des Differentialoperators \mathcal{D}_x , sie wird also definiert als Lösung der Differentialgleichung

$$\mathcal{D}_x \mathcal{G}(x, x') = -\delta(x - x) . \tag{1.12}$$

Damit wird die Differentialgleichung

$$\mathcal{D}_x \phi(x) = f(x) \tag{1.13}$$

gelöst durch

$$\phi(x) = -\int dV' \mathcal{G}(x, x') f(x') . \qquad (1.14)$$

Hier ist dV' das zu dem Satz von Variablen x gehörige Volumenelement, für die Deltafunktion muß gelten

$$\int dV'h(x')\delta(x-x') = h(x) . \qquad (1.15)$$

Die Green-Funktion hängt im allgemeinen nicht nur von der Koordinaten differenz x-x' ab, Randbedingungen brechen unter Umständen die Translation invarianz.

Allgemein definieren wir die Green-Funktion eines linearen Systems als die Reaktion des Systems auf eine räumlich punktförmige und/oder zeitlich instantane Anregung.

Auch der harmonische Oszillator, oder Wellen in ein oder mehreren Raumdimensionen werden durch lineare Differentialoperatoren beschrieben. Wir werden im folgenden ihre Green'schen Funktionen berechnen.

2 Die Green-Funktion des harmonischen Oszillators

Die Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator lautet

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi(t) + \beta \frac{d}{dt}\phi(t) + \omega_0^2 \phi(t) = 0.$$
 (2.1)

Wir betrachten im folgenden den Fall schwacher Dämpfung, oder "Schwingfall" $\omega_0 > \beta/2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist bekannt:

$$\phi(t) = Ae^{-\gamma/2}\sin(\omega_1 t) + Be^{-\gamma/2}\cos(\omega_1 t)$$
(2.2)

mit $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2/4}$. Wir versuchen jetzt die inhomogene Differentialgleichung mit einer instantanen Anregung ("Kraftstoß") $f(t) = -\delta(t - t')$ zu berechnen, also die Lösung der Gleichung ¹

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t-t') + \beta \frac{d}{dt}G(t-t') + \omega_0^2 G(t-t') = \delta(t-t'). \tag{2.3}$$

Da in unserem System keine explizite Zeitabhängigkeit besitzt, kann die Reaktion nur von t-t' abhängen, daher ist die Green-Funktion nur eine Funktion von t-t'.

Das Verhalten dieser Greenschen Funktion kann man sich leicht klarmachen: stößt man ein Pendel kurzzeitig an (d.h. so, daß die Zeit der Anregung viel kleiner ist als die Schwingungsdauer), dann beginnt das Pendel, sich aus der Ruhelage zu bewegen, erreicht ein Maximum und schwingt dann gedmpft aus. Dieses Zeitverhalten ist im wesentlichen die Green-Funktion.

2.1 Herleitung der Green-Funktion

Da die Green-Funktion für t < t' offensichtlich verschwindet (Kausalität), können wir ansetzen

$$G(t - t') = \Theta(t - t')g(t - t'). \qquad (2.4)$$

Da für t > t' die Anregung verschwindet, muß g(t-t') eine Lösung der homogenen Differentialgleichung sein. Wir berechnen zunächst

$$\frac{d}{dt}G(t-t') = \delta(t-t')g(t-t') + \Theta(t-t')\frac{d}{dt}g(t-t')$$

$$\frac{d^{2}}{dt^{2}}G(t-t') = \frac{d}{dt}\delta(t-t')g(t-t') + 2\delta(t-t')\frac{d}{dt}g(t-t')$$

$$+\Theta(t-t')\frac{d^{2}}{dt^{2}}g(t-t') .$$
(2.5)

Setzen wir das in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$g(t-t')\frac{d}{d}\delta(t-t') + \delta(t-t')\left(2\frac{d}{dt}g(t-t') + \beta g(t-t')\right)$$

$$+\Theta(t-t')\left[\frac{d^{2}}{dt^{2}}g(t-t') + \beta \frac{d}{dt}g(t-t') + \omega_{0}^{2}g(t-t')\right] = \delta(t-t').$$
(2.7)

Der Ausdruck in der eckigen Klammer, der die Θ -Funktion multipliziert, verschwindet, da wir bereits geschlossen hatten, daß g(t-t') die homogene Differentialgleichung erfüllen muß. Mit dem verbleibenden Ausdruck muß man etwas vorsichtig umgehen und daran denken, daß wir es hier mit Distributionen zu tun

¹Die Konventionen für das Vorzeichen der Deltafunktion sind in der Literatur nicht eindeutig, wir wählen hier das positive Vorzeichen.

haben. Diese sind nur unter dem Integralzeichen definiert, sie sind "uneigentliche Funktionen". Integrieren wir die verbleibende Gleichung mit einer beliebigen, einmal stetig differenzierbaren Funktion f(t) so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[f(t')g(t-t') \frac{d}{dt} \delta(t-t') + \delta(t-t') \left(2f(t') \frac{d}{dt} g(t-t') + \beta f(t')g(t-t') \right) \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t-t') f(t') = f(t)$$
(2.8)

Für die Zeitableitung der Deltafunktion gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') \frac{d}{dt} \delta(t - t') = -\frac{d}{dt} h(t) , \qquad (2.9)$$

was man leicht durch partielle Integration herleitet. Damit erhalten wir

$$-\frac{d}{dt}f(t)g(t-t')\Big|_{t=t'} + 2f(t)\frac{d}{dt}g(0) + \beta f(t)g(0) = f(t)$$
 (2.10)

oder

$$-g(0)\frac{d}{dt}f(t) + f(t)\frac{d}{dt}g(0) + \beta g(0)f(t) = f(t).$$
 (2.11)

Da auf der rechten Seite df(t)/dt nicht auftritt, muß g(0) = 0 sein. Damit wird

$$\frac{d}{dt}g(0) = 1\tag{2.12}$$

Wir benötigen also eine Lösung der homogenen Differentialgleichung, die für t=t' verschwindet und deren Ableitung an dieser Stelle 1 ist. In der allgemeinen Lösung

$$g(t - t') = Ae^{-\frac{\beta}{2}(t - t')}\sin(\omega_1(t - t')) + Be^{-\frac{\beta}{2}(t - t')}\cos(\omega_1(t - t'))$$
 (2.13)

muß dann B verschwinden, und A ergibt sich zu $A=1/\omega_1$. Damit wird die Green-Funktion

$$G(t - t') = e^{-\frac{\beta}{2}(t - t')} \frac{\sin(\omega_1(t - t'))}{\omega_1} \Theta(t - t') . \tag{2.14}$$

2.2 Herleitung über die Fourier-Transformation

Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung wurde insbesondere hergeleitet für periodische Kräfte. Da man jeden Kraftverlauf Fourier-analysieren kann, sollte es auch möglich sein, wiederum unter Ausnutzung des Superpositionsprinzips, daraus die Green-Funktion herzuleiten. Dies ist in der Tat die allgemeinere Methode.

Die Fourier-darstellung der Delta-Kraft lautet

$$\delta(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t - t')} . \tag{2.15}$$

Für die Green-Funktion machen wir einen entsprechenden Ansatz

$$G(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t - t')} \tilde{G}(\omega) . \qquad (2.16)$$

Wir setzen diese beiden Fourierzerlegungen in die Differentialgleichung (2.3) ein. Die Differentiationen nach der Zeit sind leicht auszuführen, da sie nur auf die Exponentialfunktion wirken. Es ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \left[-\omega^2 - i\beta\omega + \omega_0^2 \right] \tilde{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} . \tag{2.17}$$

Das ist offenbar erfüllt für

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 - i\beta\omega + \omega_0^2} \tag{2.18}$$

und wir haben unmittelbar einen Ausdruck für G(t-t'):

$$G(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t - t')} \frac{1}{-\omega^2 - i\beta\omega + \omega_0^2}.$$
 (2.19)

Es verbleibt die Aufgabe, das Integral auszuführen. Hierzu verwendet man den Cauchy'schen Integralsatz bzw. den Residuensatz der Funktionentheorie. Allerdings sieht man zunächst gar keine geschlossenen Kontur, für die man den Integralsatz anwenden könnte.

Betrachten wir zunächst den Fall t < t'. In der komplexen ω -Ebene enthält der Integrand einen Faktor

$$e^{-i(iIm\omega)(t-t')} = e^{-Im\omega(t'-t)}, \qquad (2.20)$$

der für $\omega \to \infty$ gegen 0 geht. Man kann also die Intergrationskontur entlang der reellen Achse ergänzen um einen Halbkreis im Unendlichen um die obere Halbebene herum, da dieser Halbkreis nichts beiträgt. Wir haben also eine im Gegenuhrzeigersinne durchlaufenen geschlossene Kontur: von $-\infty$ nach $+\infty$ entlang der reellen Achse und zurück auf dem Halbkreis im Unendlichen.

Für t>t' kann man entsprechend das Integral über die reelle Achse ergänzen um einen Halbkreis um die untere Halbebene, ohne dabei seinen Wert zu ändern. Diese Kontur wird im Uhrzeigersinn, also im mathematisch negativen Sinne durchlaufen.

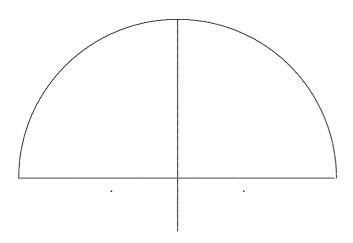
Wir können jetzt in beiden Fällen den Cauchy' schen Integralsatz bzw. den Residuensatz anwenden. Dazu müssen wir noch die Analytizitätseigenschaften des Integranden betrachten. Die Exponentialfunktion ist analytisch in der gesamten endlichen komplexen Ebene. Der Bruch $1/(-\omega^2 - i\beta\omega + \omega_0^2)$ wird singulär für

$$\omega^2 + i\beta\omega - \omega_0^2 = 0 \tag{2.21}$$

oder

$$\omega = \frac{-i\beta}{2} \pm \sqrt{-\frac{\beta^2}{4} + \omega_0^2} = \frac{-i\beta}{2} \pm \omega_1 . \tag{2.22}$$

Diese beiden Polstellen liegen in der unteren Halbebene.



Berechnen wir, für t < t', das Integral um die geschlossene Kontur um die obere Halbebene, so ergibt sich 0, da die Funktion im Inneren der Kontur frei von Singularitäten ist. Also

$$G(t - t') = 0$$
 f. $t < t'$. (2.23)

Berechnen wir dagegen für t > t' das Integral um die untere Halbebene, so umschließen wir die zwei Pole bei $\omega = \pm \omega_1 - i\beta/2$. Es empfiehlt sich, den gebrochen rationalen Tiel des Integranden zu schreiben als

$$\frac{1}{-\omega^2 - i\beta\omega + \omega_0^2} = \frac{-1}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_1 + i\beta/2} - \frac{1}{\omega + \omega_1 + i\beta/2} \right\}$$
(2.24)

Die Residuen des Integranden auf den beiden Polen sind dann

$$R_{\pm} = \mp \frac{e^{\mp i\omega_1 t - \frac{\beta}{2}t}}{2\pi 2\omega_1} \tag{2.25}$$

und der Residuensatz ergibt

$$G(t - t') = -\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t - t')} \frac{1}{-\omega^2 - i\beta\omega + \omega_0^2}$$

$$= 2\pi i (R_+ + R_-) = \frac{e^{-\frac{\beta}{2}t}}{\omega_1} \frac{e^{-i\omega_1 t} - e^{i\omega_1 t}}{2i} = e^{-\frac{\beta}{2}t} \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}.$$
(2.26)

Das Minuszeichen vor dem Integral wird dabei durch das Minuszeichen kompensiert, das sich aus der mathematisch negativen Orientierung der Kontur ergibt. Das Ergebnis ist derselbe Ausdruck, den wir auch zuvor für t > t' erhalten hatten.

3 Green-Funktion der eindim. Wellengleichung

Wir betrachten ein unendlich ausgedehntes eindimensionales Medium ("Saite"). Die Wellengleichung mit äußerer Anregung f(x,t) lautet

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \psi(x, t) = f(x, t) . \tag{3.1}$$

Wir suchen wieder die Lösung für eine räumlich und zeitlich lokale Anregung $f(x,t) = -\delta(x-x')\delta(t-t')$, d.h. die Green-Funktion, die die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(x - x', t - t') = \delta(x - x') \delta(t - t')$$
(3.2)

löst. Wenn wir die Randbedingung stellen, daß die Lösung vor der Zeit t' und im räumlich Unendlichen verschwindet, dann ist das Problem translationsinvariant in Raum und Zeit, G hängt dann nur von x-x' und t-t' ab, wie bereits impliziert.

Wenn wir die Green-Funktion kennen, dann wird die inhomogene Differentialgleichung (3.1) gelöst durch

$$\psi(x,t) = -\int_{-infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x', t - t') f(x', t') . \tag{3.3}$$

Die obere Grenze der t'-Integration wird aufgrund der Randbedingung gleich t, die Randbedingung impliziert, daßG(x-x',t-t') für t-t'<0 verschwindet.

Wir verwenden zur Herleitung der Green-Funktion die im letzten Abschnitt als zweite Methode dargelegte Fourieranalyse. Wir machen den Ansatz einer räumlichen und zeitlichen Fouriertransformation

$$G(x - x', t - t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x - x') - i\omega(t - t')} \tilde{G}(k, \omega) , \qquad (3.4)$$

wir benutzen daneben auch

$$\delta(x - x', t - t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x - x') - i\omega(t - t')} . \tag{3.5}$$

Wir setzen diese beiden Ausdrücke in die Differentialgleichung für die Green-Funktion ein und benutzen wieder, daß der Differentialoperator, angewandt auf die Exponentialfunktionen einfach

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) e^{ik(x-x') - i\omega(t-t')} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) e^{ik(x-x') - i\omega(t-t')} \tag{3.6}$$

ergibt. Damit erhalten wir

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')-i\omega(t-t')} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) \tilde{G}(k,\omega) = -\int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')-i\omega(t-t')} . \tag{3.7}$$

Da das für alle x und t gelten muß, folgt

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right)\tilde{G}(k,\omega) = -1\tag{3.8}$$

oder

$$\tilde{G}(k,\omega) = \frac{c^2}{\omega^2 - c^2 k^2} \,.$$
 (3.9)

Damit kennen wir die Green-Funktion:

$$G(x - x', t - t') = c^2 \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x - x')} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t - t')}}{\omega^2 - c^2 k^2},$$
 (3.10)

wir müssen nur noch die Integrationen ausführen.

Dabei entsteht zunächst ein ernsthaftes Problem: der Integrand hat Pole auf der reellen ω -Achse! Der Ausdruck, den wir erhalten haben, ist also mathematisch nicht definiert! Das Problem konzentriert sich offensichtlich auf den Bereich $\omega^2 \simeq c^2 k^2$, das ist aber gerade die Dispersionrelation für die freien Wellenlösungen. In der Tat ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung nur bestimmt bis auf Lösungen der homogenen Differentialgleichung, wir müssen "physikalisch" festlegen, welche dieser Lösungen wir suchen. Im Falle des harmonischen Oszillators sorgt die Dämpfung dafür, daß solche zusätzlichen Lösungen abklingen. Ist der Oszillator also bereits "zur Zeit $t=-\infty$ " angeregt, so ist eine solche Lösung in der Gegenwart bereits abgeklungen. Unsere Wellengleichung enthält aber keine Dämpfung, was natürlich eine recht unphysikalische Annahme ist. Wir orientieren uns am Fall des harmonischen Oszillators und führen eine kleine Dämpfung ein, indem wir den Nenner modifizieren zu $\omega^2 - c^2 k^2 + 2i\epsilon\omega$, wobei ϵ infinitesimal klein sein soll, d.h., wir vernachlässigen Terme der Ordnung ϵ^2 . Damit rücken die störenden Pole in die untere Hälfte der komplexen Ebene.

Jetzt können wir die Rechnung für den harmonischen Oszillator einfach übernehmen, wir setzen $\beta=2\epsilon<<1$ und $\omega_0=ck$, unter Vernachlässigung Termen der Ordnung $\beta^2=4\epsilon^2$ gilt dann $\omega_1=\sqrt{omega_0^2-\beta^2/4}\simeq\omega_0=ck$. Daher wird

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - c^2k^2 + 2i\epsilon\omega} = -\Theta(t-t')e^{-\epsilon(t-t')} \frac{\sin ck(t-t')}{ck} . \tag{3.11}$$

Obwohl die Pole nur infinitesimal nach unten verschoben sind, also noch "gefährlich nahe" an der reellen Achse liegen, ist der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ offensichtlich nicht singulär, wir können die abklingende Exponentialfunktion einfach durch 1 ersetzen.

Damit sind wir noch nicht ganz fertig, immerhin haben wir die ω -Integration ausgeführt und erhalten

$$G(x - x', t - t') = -c^2 \Theta(t - t') \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x - x')} \frac{\sin ck(t - t')}{ck}$$
(3.12)

Wir schreiben den Sinus wieder als Differenz von Exponentialfunktionen; die k-Integration führt allerdings leider nicht direkt auf δ -Funktionen wegen des Faktors 1/k im Integranden. Wir bilden daher zunächst

$$\frac{d}{dx}G(x-x',t-t') = -ic\Theta(t-t')\int \frac{dk}{2\pi}e^{ik(x-x')}\frac{e^{ick(t-t')} - e^{-ick(t-t')}}{2i}.$$
 (3.13)

Benutzen wir

$$\int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')\pm ck(t-t')} = \delta(x - x' \pm c(t - t')), \qquad (3.14)$$

so ergibt sich

$$\frac{d}{dx}G(x-x',t-t') = -c\Theta(t-t')\frac{1}{2}\left[\delta(x-x'+c(t-t')) - \delta(x-x'-c(t-t'))\right]$$
(3.15)

und schließlich

$$G(x - x', t - t') = \Theta(t - t') \frac{c}{2} \left[\Theta(x - x' - c(t - t')) - \Theta(x - x' - c(t - t')) \right].$$
(3.16)