

2 Einschrittverfahren

2.1 Einführung

Im folgenden werden wir uns bei der Beschreibung und Analyse von numerischen Verfahren für Anfangswertprobleme auf den Fall $n = 1$ beschränken. Dies wird nur gemacht, um die Notation einfacher zu gestalten. Die vorgestellten Verfahren lassen sich in natürlicher Weise auf Probleme für $n > 1$ übertragen. Auch die Konvergenztheorie kann einfach auf diese Fälle erweitert werden.

I.a. kann ein Anfangswertproblem der Form (1.2) nicht exakt gelöst werden. Man muß deshalb numerische Verfahren entwickeln, um eine approximative Lösung zu erhalten. Ziel unseres numerischen Verfahrens ist, die gesuchte Funktion y auf einem gegebenen Intervall $[t_0, T]$ zu bestimmen. Hierzu unterteilen wir das Intervall $[t_0, T]$ in N Teilintervalle mit Knoten

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

und sucht Approximationen y_i an die exakte Lösung $y(t_i)$, $i = 0, \dots, N$. Wir fassen die Punkte t_i , $i = 0, \dots, N$, zu einem *Gitter* $\Delta := \{t_i \mid i = 0, \dots, N\}$ zusammen und definieren die i -te *Schrittweite*

$$h_i := t_{i+1} - t_i, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Wir schreiben weiterhin $h_\Delta := \max_{i=0, \dots, N-1} h_i$.

Da $y(t_0) = y_0$ vorgeschrieben ist, ist y_0 bekannt. Bei Einschrittverfahren wird nun mithilfe von y_0 eine Approximation $y_1 \approx y(t_1)$ bestimmt, anschließend eine Approximation $y_2 \approx y(t_2)$, etc. bis man bei $t_N = T$ angelangt ist. Das allereinfachste Einschrittverfahren ist das sog. *explizite Eulerverfahren*¹, welches auch als “Euler vorwärts” oder als Eulersches Polygonzugverfahren bekannt ist:

Beispiel 2.1 (explizites Eulerverfahren) Die Lösung y ist für $t = t_0$ durch $y(t_0) = y_0$ bereits vorgegeben. Die Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ legt damit auch die Steigung der Kurve $t \mapsto y(t)$ an der Stelle t fest. Aus dem Taylorschen Satz erhalten wir damit eine Approximation für $y(t_1)$ durch

$$y(t_1) \approx y_1 := y_0 + (t_1 - t_0)y'(t_0) = y_0 + (t_1 - t_0)f(t_0, y_0) = y_0 + h_0f(t_0, y_0).$$

Offensichtlich kann man für die Approximation $y_2 \approx y(t_2)$ ähnlich vorgehen: Zwar ist nun die exakte Steigung der Funktion $t \mapsto y(t)$ im Punkte $t = t_1$ nicht bekannt, aber die Differentialgleichung $y'(t_1) = f(t_1, y(t_1)) \approx f(t_1, y_1)$ liefert eine gute Approximation an $y'(t_1)$, falls y_1 eine gute Approximation an $y(t_1)$ ist. Wir setzen also $y_2 := y_1 + h_1f(t_1, y_1)$. Ganz allgemein erhalten wir damit die Vorschrift

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i), \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (2.1)$$

■

Die “Herleitung” des expliziten Eulerverfahrens in Beispiel 2.1 legt ein weiteres Verfahren nahe, das sog. *implizite Eulerverfahren*:

¹Euler, Leonhard, 1707–1783

Beispiel 2.2 (implizites Eulerverfahren) Beim expliziten Eulerverfahren wird die Approximation y_{i+1} durch Taylorentwicklung um die Stelle t_i motiviert. Man kann die gesuchte Approximation y_{i+1} auch dadurch motivieren, daß man um die Stelle t_{i+1} eine Taylorentwicklung macht und mithilfe des bereits bekannten Wertes y_i eine Gleichung herleitet: Nach dem Taylorschen Satz erwartet man

$$y_i \approx y_{i+1} + (t_i - t_{i+1})y'(t_{i+1}) = y_{i+1} + (t_i - t_{i+1})f(t_{i+1}, y_{i+1}).$$

Ersetzt man nun \approx durch $=$, so erhält man eine Gleichung für das zu bestimmende y_{i+1} :

$$\text{Finde } y_{i+1} \text{ so, daß } y_{i+1} = y_i + h_i f(t_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N. \quad (2.2)$$

■

Bemerkung 2.3 Im Unterschied zum expliziten Eulerverfahren aus Bsp. 2.1 ist beim impliziten Eulerverfahren in Beispiel 2.2 die Approximation y_{i+1} nicht mehr explizit gegeben, sondern es muß eine Gleichung gelöst werden (y_{i+1} ist implizit bestimmt). Da i.a. die Funktion f nicht linear im zweiten Argument ist, ist ihre Lösung aufwendiger als bei expliziten Verfahren. Man wird deshalb die Verwendung von impliziten Verfahren vermeiden, wenn man kann. Wie wir im Kapitel 3 sehen werden, sind implizite Verfahren bei *steifen* Differentialgleichungen dennoch von Vorteil.

■

Die Form (2.1) des expliziten Eulerverfahrens und die Form (2.2) des impliziten Eulerverfahrens legen es nahe, das allgemeine Einschrittverfahren in der folgenden Form zu schreiben:

Definition 2.4 (Einschrittverfahren) *Ein numerisches Verfahren, bei dem zu gegebenem y_0 die Werte y_i , $i = 1, \dots, N$, durch eine Rekursion*

$$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(t_i, y_i, y_{i+1}, h_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (2.3)$$

bestimmt werden, heißt Einschrittverfahren. Die Funktion Φ heißt Inkrementfunktion. Hängt die Funktion Φ nicht explizit von y_{i+1} , so spricht man von einem expliziten Einschrittverfahren; andernfalls spricht man von einem impliziten Einschrittverfahren.

Explizites und implizites Eulerverfahren sind gegeben durch die Wahl

$$\Phi(t_i, y_i, y_{i+1}, h_i) = f(t_i, y_i), \quad \Phi(t_i, y_i, y_{i+1}, h_i) = f(t_i + h_i, y_{i+1}).$$

Bemerkung 2.5 Bei impliziten Verfahren muß die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, y_{i+1}, h)$$

für hinreichend kleine h sichergestellt werden. Falls Φ eine glatte Funktion ist, folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz und dem Satz über implizite Funktionen, daß es eine Funktion $\tilde{\Phi}$ gibt, so daß

$$y_{i+1} = y_i + h\tilde{\Phi}(t_i, y_i, h)$$

gilt (vgl. den Beweis von Satz 3.7). Für theoretische Zwecke wie z.B. die Konvergenzanalyse im folgenden Abschnitt kann damit ein implizites Verfahren auch als explizites Verfahren aufgefaßt werden.

■

2.2 Konvergenzanalyse von expliziten Verfahren

Ein explizites Verfahren wie (2.3) liefert Approximationen y_i an die gesuchte Lösung $y(t)$ in den Knoten t_i . Für ein Einschrittverfahren der Form (2.3) sprechen wir deshalb von Konvergenz, falls für die Approximationen y_i und die gesuchte Lösung $y(t)$ gilt:

$$\max_{i=0,\dots,N} |y(t_i) - y_i| \rightarrow 0 \quad \text{falls} \quad h_\Delta = \max_{i=0,\dots,N} h_i \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

2.2.1 Konsistenz

Offensichtlich muß die Funktion Φ in (2.3), die das Einschrittverfahren definiert, gewisse Eigenschaften haben, damit man Konvergenz erwarten kann. Da die Inkrementfunktion Φ die einzige Verbindung zur Differentialgleichung darstellt, die von der gesuchten Lösung erfüllt wird, muß sie eng mit Lösungen der gesuchten Differentialgleichung zusammenhängen. Dieser Zusammenhang wird im Begriff der *Konsistenz* in Definition 2.6 genauer erfaßt.

Wir betrachten explizite Einschrittverfahren der Form

$$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(t_i, y_i, h_i). \quad (2.5)$$

Offensichtlich ist eine Mindestvoraussetzung für Konvergenz, daß der Fehler, der in jedem Schritt gemacht wird, "klein" ist. Ein Maß für diesen *lokalen* Fehler ist der sog. *Konsistenzfehler*, den wir wie folgt definieren:

Definition 2.6 (Konsistenzfehler) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f \in C(G)$ lokal lipschitzstetig im zweiten Argument. Sei die Inkrementfunktion Φ für ein $\underline{h} > 0$ auf der Menge $\mathcal{G} := G \times [0, \underline{h}] \subset \mathbb{R}^3$ definiert. Für $(t_0, y_0, h) \in \mathcal{G}$ ist der Konsistenzfehler $\tau(t_0, y_0, h)$ definiert als

$$\tau(t_0, y_0, h) = y_{t_0, y_0}(t_0 + h) - (y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h))$$

wobei die Funktion $t \mapsto y_{t_0, y_0}(t)$ die Lösung von

$$y'_{t_0, y_0}(t) = f(t, y_{t_0, y_0}(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

ist. Gilt für jedes $(t_0, y_0) \in G$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\tau(t_0, y_0, h)}{h} = 0,$$

so heißt das Einschrittverfahren (2.5) konsistent auf G . Das Verfahren heißt konsistent von der Ordnung $p > 0$, falls es für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ eine Konstante $C > 0$ und ein $h' > 0$ gibt, so daß

$$|\tau(t_0, y_0, h)| \leq Ch^{p+1} \quad \forall (t_0, y_0) \in K \quad \text{und alle } h \in [0, h'].$$

Der Konsistenzfehler τ mißt den Fehler, den das numerische Verfahren in *einem* Schritt der Länge h macht, d.h. die exakte Lösung y_{t_0, y_0} zum Zeitpunkt $t_0 + h$ wird verglichen mit der numerischen Approximation $y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h)$. Der Konsistenzfehler τ , wie in Definition 2.6 eingeführt, ist damit für $h > 0$

$$\begin{aligned} \tau(t_0, y_0, h) &= y_{t_0, y_0}(t_0 + h) - (y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h)) \\ &= h \frac{y_{t_0, y_0}(t_0 + h) - y_{t_0, y_0}(t_0)}{h} - h\Phi(t_0, y_{t_0, y_0}(t_0), h), \end{aligned} \quad (2.6)$$

was eine Darstellung des Konsistenzfehlers ist, die oft in der Literatur als Definition des Konsistenzfehlers verwendet wird.

Das folgende Lemma erlaubt eine schnelle Überprüfung der Konsistenz eines Einschrittverfahrens:

Lemma 2.7 *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f \in C(G)$ sei lokal lipschitzstetig im zweiten Argument. Sei die Inkrementfunktion Φ für ein $\underline{h} > 0$ auf $\mathcal{G} = G \times [0, \underline{h}]$ definiert und sei $\Phi \in C(\mathcal{G})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Das Einschrittverfahren (2.5) ist konsistent im Sinne von Definition 2.6.*

(ii) $\Phi(t, y, 0) = f(t, y) \quad \forall (t, y) \in G$.

Beweis:

Aus der Konsistenz folgt $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\tau(t_0, y_0, h)}{h} = 0$. Die Gleichung (2.6) impliziert damit

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\tau(t_0, y_0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{y_{t_0, y_0}(t_0 + h) - y_{t_0, y_0}(t_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0+} \Phi(t_0, y_0, h) \quad (2.7a)$$

$$= y'_{t_0, y_0}(t_0) - \Phi(t_0, y_0, h) = f(t_0, y_0) - \Phi(t_0, y_0, 0). \quad (2.7b)$$

Damit ergibt sich die Behauptung (i) \implies (ii). Umgekehrt folgern wir (ii) \implies (i) aus der Voraussetzung $\Phi(t_0, y_0, 0) = f(t_0, y_0)$, indem wir die Schritte in (2.7) rückwärts durchführen.

□

Bemerkung 2.8 (Konsistenz von Verfahren) Man kann die Funktion f als zusätzlichen Parameter in die Inkrementfunktion Φ aufnehmen. Man spricht dann von Konsistenz eines Verfahrens, wenn für jede Funktion f , die die Voraussetzungen der Definition 2.6 erfüllt, das zugehörige Verfahren konsistent ist. Analog spricht man von einem Verfahren der Ordnung p , wenn für jedes $f \in C^p(G)$ das Verfahren Konsistenzordnung p hat. Im folgenden werden wir diese Sprechweise übernehmen. ■

Der Grund für die Forderung $f \in C^p(G)$ für Verfahren der Konsistenzordnung p liegt darin begründet, daß die Konsistenzordnung typischerweise mit Hilfe der Taylorentwicklung der Lösung y_{t_0, y_0} ausgerechnet wird; die Forderung $f \in C^p(G)$ garantiert dann nach Satz 1.12, daß $y_{t_0, y_0} \in C^{p+1}$ auf einer Umgebung von t_0 . Wir führen dies exemplarisch für das Eulerverfahren vor:

Beispiel 2.9 (Konsistenzordnung beim expliziten Eulerverfahren) Das explizite Eulerverfahren hat die Konsistenzordnung 1. Um dies einzusehen betrachten wir $f \in C^1(G)$.

1. *Schritt:* Wir betrachten zuerst einen festen Punkt $(t_0, y_0) \in G$. Nach Satz 1.12 ist dann die Lösung $y_{t_0, y_0} \in C^2(U)$ für eine Umgebung $U = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ des Punktes t_0 . Nach dem Taylorschen Satz erhalten wir damit für $h \in (-\alpha/2, \alpha/2)$

$$y_{t_0, y_0}(t_0 + h) = y_0 + h y'_{t_0, y_0}(t_0) + r(t_0, h)$$

wobei das Restglied r gegeben ist durch

$$|r(t_0, h)| = \left| \int_{x=t_0}^{t_0+h} (t_0 + h - x) y''_{t_0, y_0}(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} h^2 \|y''_{t_0, y_0}\|_{C([t_0-\alpha/2, t_0+\alpha/2])}.$$

Somit ergibt sich für den Konsistenzfehler

$$\begin{aligned}\tau(t_0, y_0, h) &= y_{t_0, y_0}(t_0 + h) - (y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h)) = y_0 + hy'_{t_0, y_0}(t_0) + r(t_0, h) - (y_0 + hf(t_0, y_0)) \\ &= r(t_0, h),\end{aligned}$$

weil wegen der Differentialgleichung $y'_{t_0, y_0}(t_0) = f(t_0, y_0)$ gilt. Damit erhalten wir damit

$$|\tau(t_0, y_0, h)| \leq \frac{1}{2} \|y''_{t_0, y_0}\|_{C([t_0 - \alpha/2, t_0 + \alpha/2])} h^{1+1},$$

d.h. wir erwarten, daß das explizite Eulerverfahren ein Verfahren der Ordnung 1 ist.

2. *Schritt*: Um den Beweis, daß das explizite Eulerverfahren ein Verfahren erster Ordnung ist, formal abzuschließen, benötigen wir noch ein Kompaktheitsargument. Das generelle Vorgehen, das wir hier vorstellen, ist das typische Vorgehen.

Sei $K \subset G$ kompakt. Wir führen für Punkte $(t, y) \in K$ die Rechtecksumgebungen $R_{2\delta}(t, y) := (t - 2\delta, t + 2\delta) \times (y - 2\delta, y + 2\delta)$ ein. Wegen der Kompaktheit von K existiert dann ein $\delta > 0$, so daß

$$K \subset \cup_{(t, y) \in K} R_{2\delta}(t, y) \subset G \quad (2.8)$$

gilt. Weiter gilt

$$K \subset \tilde{K} := \overline{\cup_{(t, y) \in K} R_{\delta}(t, y)} \subset \cup_{(t, y) \in K} R_{2\delta}(t, y) \subset G.$$

Da K kompakt ist, ist es beschränkt; somit ist auch \tilde{K} beschränkt. Als abgeschlossene Menge ist somit \tilde{K} kompakt. Weil $f \in C^1(G)$, ist somit

$$M := \|f\|_{C(\tilde{K})} + \|f_t\|_{C(\tilde{K})} + \|f_y\|_{C(\tilde{K})} \quad (2.9)$$

endlich. Insbesondere sind damit für jedes $(t_0, y_0) \in K$ die Funktionen f , f_t , f_y auf dem Rechteck $R := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset \tilde{K}$ definiert und durch M beschränkt. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf (Satz 1.3) existiert damit ein $\alpha > 0$, so daß die Lösung $y_{t_0, y_0} \in C^1(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ für ein α , welches nur von M und δ abhängt, und der Graph von y_{t_0, y_0} ist in $R \subset \tilde{K}$ enthalten. Mit der Kettenregel und $y' = f(t, y)$ ergibt sich damit als Abschätzung für y''_{t_0, y_0}

$$\|y''_{t_0, y_0}\|_{C([t_0 - \alpha/2, t_0 + \alpha/2])} \leq \|f_t\|_{C(R)} + \|f_y f\|_{C(R)} \leq M + M^2.$$

Somit schließen wir aus dem ersten Schritt, daß für $h \leq \alpha/2$ gilt:

$$|\tau(t_0, y_0, h)| \leq \frac{1}{2} (M + M^2) h^2,$$

wobei α und M lediglich von der kompakten Menge K und f abhängen. ■

2.2.2 Konvergenzanalyse

Der Begriff der Konsistenzordnung in Definition 2.6 quantifiziert den *lokalen* Fehler, der durch das Verfahren in jedem Schritt eingeführt wird. Wir wenden uns nun dem Problem zu, den *globalen* Fehler

$$\max_{i=0, \dots, N} |y(t_i) - y_i|$$

abzuschätzen. Wir werden sehen, daß die Konsistenzordnung so eingeführt wurde, daß unter vernünftigen Annahmen das Einschrittverfahren mit der Ordnung p konvergiert, d.h.

$$\max_{i=0,\dots,N} |y(t_i) - y_i| \leq Ch^p, \quad h = \max_{i=0,\dots,N-1} h_i = \max_{i=0,\dots,N-1} t_{i+1} - t_i.$$

Da wir nur an der numerischen Approximation der exakten Lösung y_{ex} interessiert sind, verlangen wir Bedingungen an die Inkrementfunktion Φ nur in einer Umgebung der gesuchten Lösung y_{ex} . Insbesondere reicht es, die Konsistenz des Verfahrens für die gesuchte Lösung zu überprüfen (vgl. (iii) in Satz 2.10). Wir erhalten das folgende Konvergenzresultat:

Satz 2.10 (Konvergenz von Einschrittverfahren)

Voraussetzungen: Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $y_{ex} \in C^1(J)$. Sei $[t_0, T] \subset J$ ein Intervall. Erfülle die Inkrementfunktion Φ für ein $\delta > 0$ und ein $\underline{h} > 0$ folgende Bedingungen:

(i) Φ ist definiert und stetig auf $\mathcal{G} := S_\delta \times [0, \underline{h}]$, wobei (vgl. Fig. 2.1)

$$S_\delta = \bigcup_{t \in [t_0, T]} \{t\} \times [y_{ex}(t) - \delta, y_{ex}(t) + \delta]$$

(ii) Φ ist lipschitzstetig bzgl. des zweiten Arguments, d.h. es existiert $L_\Phi > 0$ derart, daß

$$|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, \hat{y}, h)| \leq L_\Phi |y - \hat{y}| \quad \forall (t, y, h), (t, \hat{y}, h) \in \mathcal{G}.$$

(iii) Es existiert $C_\tau > 0$, $p \in \mathbb{N}$, so daß für alle $t \in [t_0, T]$ und $h > 0$ mit $t + h \leq T$ gilt:

$$|y_{ex}(t + h) - (y_{ex}(t) + h\Phi(t, y_{ex}(t), h))| \leq C_\tau h^{p+1}.$$

Behauptung: Es gibt ein $\bar{h} \in (0, \underline{h})$, so daß für jedes Gitter $\Delta = \{t_i \mid i = 0, \dots, N\}$ mit $h_\Delta \leq \bar{h}$ das folgende gilt:

1. die durch (2.5) gegebenen Approximationen y_i , $i = 0, \dots, N$, existieren, und
2. sie erfüllen die Abschätzung

$$|y_{ex}(t_i) - y_i| \leq C_\tau (t_i - t_0) e^{L_\Phi(t_i - t_0)} h_\Delta^p,$$

Insbesondere gilt damit

$$\max_{i=0,\dots,N} |y_{ex}(t_i) - y_i| \leq C_\tau (T - t_0) e^{L_\Phi(T - t_0)} h_\Delta^p.$$

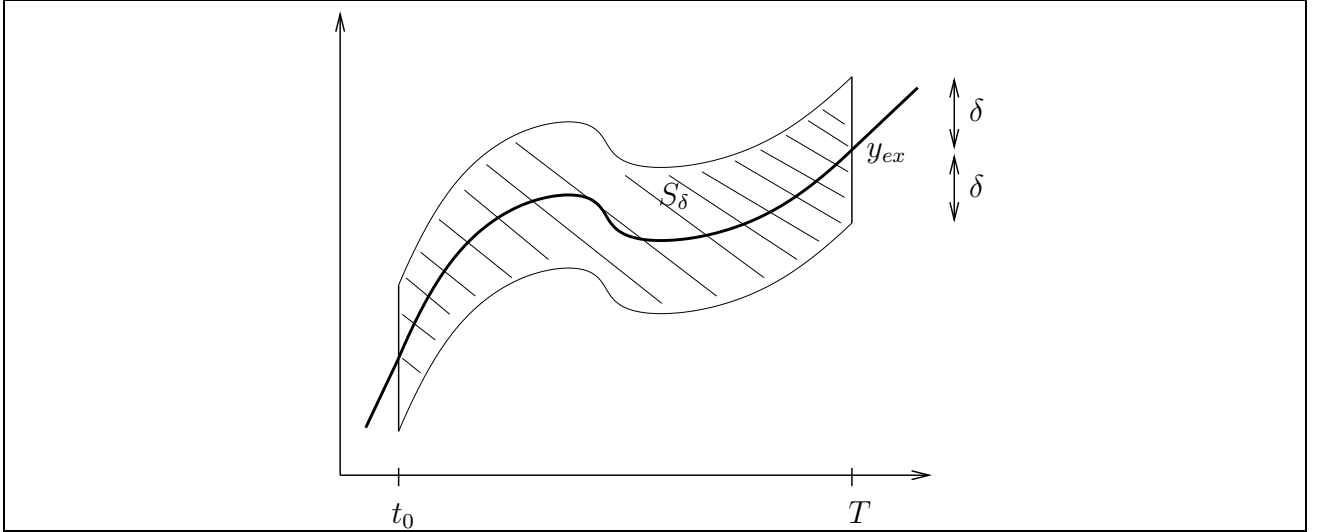
Bevor wir diesen Satz beweisen, formulieren wir ein Lemma, das wir im weiteren benötigen. Es stellt eine Variante des Gronwall-Lemmas dar, welches wir bereits in Lemma 1.4 kennengelernt haben.

Lemma 2.11 (Gronwall) Seien $(\delta_i)_{i=0}^N$, $(e_i)_{i=0}^N$, $(\eta_i)_{i=0}^N$ gegeben mit $\delta_i \geq 0$, $e_i \geq 0$, $\eta_i \geq 0$ für $i = 0, \dots, N$. Es gelte

$$e_{i+1} \leq (1 + \delta_i) e_i + \eta_i, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Dann ist

$$|e_i| \leq \left(e_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \eta_j \right) e^{\sum_{j=0}^{i-1} \delta_j} \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (\text{Konvention: leere Summe} = 0)$$



Figur 2.1: Skizze zum Beweis des Konvergenzsatzes für Einschrittverfahren

Beweis: Siehe Übung. □

Beweis von Satz 2.10: Die Inkrementfunktion Φ ist nur in der Nähe der exakten Lösung $(t, y_{ex}(t))$ definiert. Es ist also nicht von vorneherein klar, daß wir die Werte y_i in (2.5) tatsächlich bilden können. Um dieses Problem zu meistern, gehen wir in dem Beweis in zwei Schritten vor: Im ersten Schritt konstruieren wir eine Inkrementfunktion $\tilde{\Phi}$, die auf $[t_0, T] \times \mathbb{R} \times [0, \underline{h}]$ definiert ist. Damit ist das Verfahren

$$\tilde{y}_{i+1} := \tilde{y}_i + h_i \tilde{\Phi}(t_i, \tilde{y}_i, h), \quad \tilde{y}_0 := y_0 \quad (2.10)$$

wohldefiniert. Wir zeigen, daß dieses Hilfsverfahren konvergiert. Im zweiten Schritt werden wir dann zeigen, daß für hinreichend kleine h die Approximationen \tilde{y}_i mit den y_i übereinstimmen. Daraus folgt dann die Konvergenz des Verfahrens.

1. *Schritt:* Wir definieren $\tilde{\Phi}$ auf $[t_0, T] \times \mathbb{R} \times [0, \underline{h}]$ durch

$$\tilde{\Phi}(t, y, h) := \begin{cases} \Phi(t, y, h) & \text{falls } y \in [y_{ex}(t) - \delta, y_{ex}(t) + \delta] \\ \Phi(t, y_{ex}(t) + \delta, h) & \text{falls } y > y_{ex}(t) + \delta \\ \Phi(t, y_{ex}(t) - \delta, h) & \text{falls } y < y_{ex}(t) - \delta \end{cases}$$

Die Voraussetzung (ii) impliziert zudem die Lipschitzstetigkeit von $\tilde{\Phi}$ bzgl. des zweiten Argumentes:

$$\left| \tilde{\Phi}(t, y, h) - \tilde{\Phi}(t, \hat{y}, h) \right| \leq L_{\Phi} |y - \hat{y}| \quad \forall t \in [t_0, T], \quad h \in [0, \underline{h}], \quad y, \hat{y} \in \mathbb{R}.$$

Ferner stimmen auf $S_{\delta} \times [0, \underline{h}]$ die Funktionen $\tilde{\Phi}$ mit Φ auf $S_{\delta} \times [0, \underline{h}]$ überein. Also folgt für den Konsistenzfehler des Verfahrens mit Inkrementfunktion $\tilde{\Phi}$ für $t \in [t_0, T]$ und $h > 0$ mit $t + h \leq T$:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(t, y_{ex}(t), h) &= y_{ex}(t + h) - \left(y_{ex}(t) + h \tilde{\Phi}(t, y_{ex}(t), h) \right) \\ &= y_{ex}(t + h) - (y_{ex}(t) + h \Phi(t, y_{ex}(t), h)) \end{aligned}$$

und damit aus der Voraussetzung (iii):

$$|\tilde{\tau}(t, y_{ex}(t), h)| \leq C_\tau h^{p+1} \quad \forall t \in [t_0, T], h > 0 \quad \text{mit } t + h \leq T. \quad (2.11)$$

Wir leiten nun eine Gleichung für den Fehler $\tilde{e}_i := y_{ex}(t_i) - \tilde{y}_i$ her. Durch Subtraktion der Gleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i+1} &= \tilde{y}_i + h_i \tilde{\Phi}(t_i, \tilde{y}_i, h_i) \\ y_{ex}(t_{i+1}) &= y_{ex}(t_i) + h_i \tilde{\Phi}(t_i, y_{ex}(t_i), h_i) + \tilde{\tau}(t_i, h_i, y_{ex}(t_i)) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\tilde{e}_{i+1} = \tilde{e}_i + h_i \left[\tilde{\Phi}(t_i, y_{ex}(t_i), h_i) - \tilde{\Phi}(t_i, \tilde{y}_i, h_i) \right] + \tilde{\tau}(t_i, y_{ex}(t_i), h_i).$$

Unter Ausnutzung der Lipschitzstetigkeit von $\tilde{\Phi}$ und der Abschätzung (2.11) für $\tilde{\tau}$ erhalten wir

$$|\tilde{e}_{i+1}| \leq |\tilde{e}_i| + h_i L_\Phi |\tilde{e}_i| + C_\tau h_i^{p+1}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Aus $h_i \leq h_\Delta$ und dem Gronwall-Lemma 2.11 erhalten wir damit für $i \in \{0, \dots, N\}$ wegen $\tilde{e}_0 = 0$ und $\sum_{j=0}^{i-1} h_j = t_i - t_0$

$$|\tilde{e}_i| \leq \left(\sum_{j=0}^{i-1} C_\tau h_j^{p+1} \right) e^{\sum_{j=0}^{i-1} L_\Phi h_j} \leq C_\tau h_\Delta^p \sum_{j=0}^{i-1} h_j e^{L_\Phi(t_i - t_0)} \leq C_\tau (t_i - t_0) e^{L_\Phi(t_i - t_0)} h_\Delta^p.$$

Insbesondere gilt damit

$$\max_{i=0, \dots, N} |y_{ex}(t_i) - \tilde{y}_i| \leq C_\tau (T - t_0) e^{L_\Phi(T - t_0)} h_\Delta^p. \quad (2.12)$$

2. Schritt: Die Konvergenzaussage (2.12) impliziert die Existenz eines $\bar{h} > 0$, so daß für $h_\Delta \in (0, \bar{h}]$ gilt

$$\tilde{y}_i \in [y_{ex}(t_i) - \delta, y_{ex}(t_i) + \delta], \quad \forall i \in \{0, \dots, N\},$$

d.h. für $h_\delta \leq \bar{h}$ gilt $(t_i, \tilde{y}_i) \in S_\delta$ für alle $i \in \{0, \dots, N\}$. Da auf $S_\delta \times [0, \underline{h}]$ die Funktionen $\tilde{\Phi}$ und Φ übereinstimmen, gilt also $y_i = \tilde{y}_i$. Dies schließt den Beweis ab. \square

Satz 2.10 besagt, daß die Konsistenz des Verfahrens bereits die Konvergenz impliziert. Dies ist bemerkenswert, wenn man bedenkt, daß Konsistenz nur den lokalen, in jedem Schritt gemachten Fehler mißt und nicht die Fortpflanzung der lokalen Fehler berücksichtigt. Wir werden später bei Mehrschrittverfahren sehen, daß dort über die Konsistenz hinaus auch noch eine sog. Stabilität des Verfahrens verlangt werden muß.

2.3 Explizite Einzschrittverfahren höherer Ordnung

Einschrittverfahren höherer Ordnung werden typischerweise auf eine von zwei Arten erzeugt: Es gibt die Runge-Kutta-Verfahren, die wir in Abschnitt 2.3.1 behandeln und die Extrapolationsverfahren, die wir in ansprechen. Diesen Konstruktionen von Verfahren höherer Ordnung schicken wir zwei wichtige Gründe für ihren Einsatz voraus:

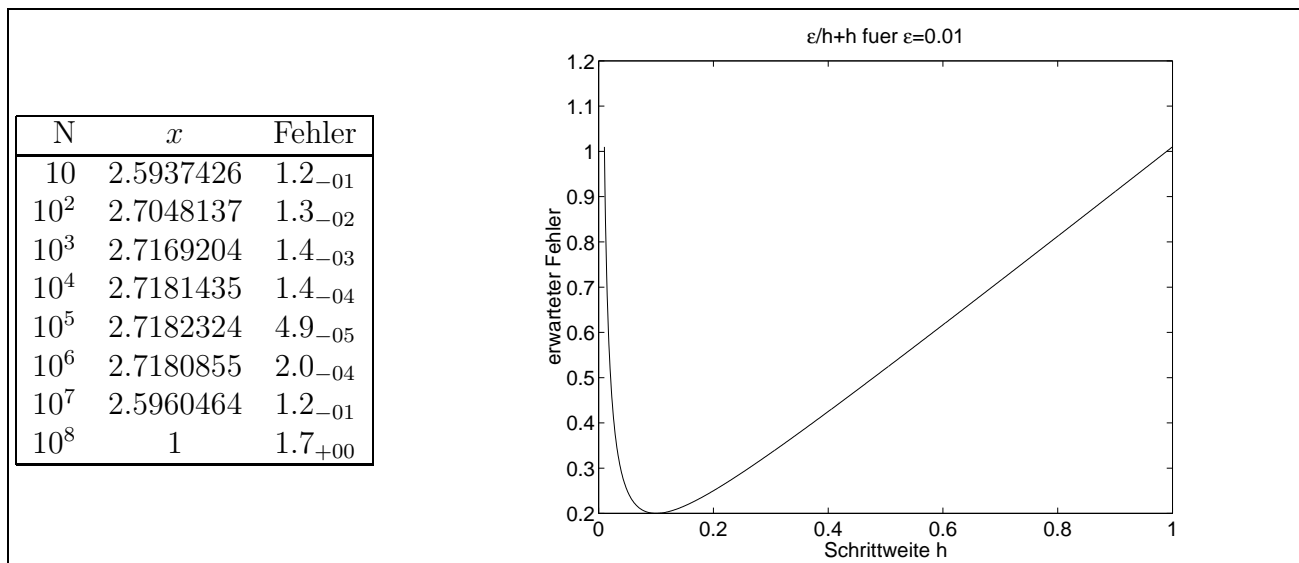


Tabelle 2.1: Links: Explizites Eulerverfahren für $y' = y$, $y(0) = 1$ bei Rechnung mit einfacher Genauigkeit (ca. 8 Ziffern). Rechts: erwartetes qualitatives Fehlerverhalten unter Berücksichtigung von Rundungsfehlern.

1. Es stellt sich heraus (siehe z.B. Tabelle 2.2), daß bei Verfahren höherer Ordnung die Relation “Fehler gegen Anzahl Funktionsauswertungen” günstiger ist. Dies ist vor allem in Anwendungen von Interesse, bei denen jede Funktionsauswertung teuer bis sehr teuer ist (weil z.B. die Auswertung der Funktion selbst die Lösung eines aufwendigen Problems beinhaltet).
2. Ein weiteres Argument für den Einsatz von Verfahren höherer Ordnung ist deren geringere Anfälligkeit für Rundungsfehler. Rundungsfehler sind bei der endlichen Rechengenauigkeit von Computern unvermeidbar und limitieren deshalb die erreichbare Genauigkeit. Diesen Punkt beleuchten wir in den Übungen und dem numerischen Beispiel in Tabelle 2.1.

Wir illustrieren nun im folgenden Beispiel, daß es prinzipiell möglich ist, Verfahren beliebig hoher Ordnung zu konstruieren:

Beispiel 2.12 (Taylorverfahren) Satz 2.10 zeigt, daß wir Konvergenzordnung p erhalten, wenn das Verfahren konsistent von der Ordnung p ist (vgl. Definition 2.6). Es bietet sich deshalb an, die Funktion Φ durch Taylorentwicklung der Lösung $t \mapsto y(t)$ des Anfangswertproblems (1.2) zu definieren. Unter Ausnutzung der Differentialgleichung können dabei Ausdrücke hergeleitet werden, in denen zwar Ableitungen von f , nicht aber die unbekannte Lösung y auftreten. Wir führen dies für die Konstruktion eines Verfahrens zweiter Ordnung vor: Sei $t \mapsto y(t)$ Lösung von $y'(t) = f(t, y(t))$ und $y(t_0) = t_0$. Durch Taylorentwicklung gilt dann

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + O(h^3).$$

Durch Differentiation der Differentialgleichung erhalten wir

$$y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))y'(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))f(t, y(t)).$$