

## Lösen einer DGL 1. Ordnung

Die DGL ist wie folgt:

$$\begin{aligned}a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y &= g(x) \\ y' + f(x) \cdot y &= g(x)\end{aligned}$$

---

$$L \cdot i' + R \cdot i = u_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$i' + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{u_0}{L} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

### Homogene Lösung: Trennung der Variablen

Finde ein  $y$ , welches die homogene Differentialgleichung (DGL) löst.

$$\begin{aligned}i' + \frac{R}{L} \cdot i &= 0 \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L} \cdot i \\ \int \frac{1}{i} \cdot di &= -\frac{R}{L} \int 1 \cdot dt \\ \ln(|i|) &= -\frac{R}{L} \cdot t + K \\ |i| &= e^{-\frac{R}{L} \cdot t + K} \\ i &= \pm e^K \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\ i_h(t) &= C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\end{aligned}$$

#### Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

Durch *Trennen der Variablen*. Die *allgemeine Lösung* ist

$$y = C \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

### Inhomogene Lösung: Variante der Konstanten

Eine *inhomogene DGL 1. Ordnung* lässt sich durch die *Variante der Konstanten* lösen. Dazu benutzt man die *allgemeine Lösung* der *homogenen DGL* und ersetzt die Integrationskonstante  $C$  durch eine (noch unbekannte) Funktion  $C(x)$  und berechnet mit dem Lösungsansatz  $y_h(x)$  die Ableitung  $y_h'(x)$  unter Verwendung der *Produkt- und Kettenregel*.

$$\begin{aligned}y &= C(x) \cdot e^{-\int f(x) dx} \\ y' &= \left[ C'(x) \right] \cdot e^{-\int f(x) dx} - C(x) \cdot \left[ f(x) \cdot e^{-\int f(x) dx} \right] \\ i(t) &= C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\ i'(t) &= \left[ C'(t) \right] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + C(t) \cdot \left[ \left( -\frac{R}{L} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right]\end{aligned}$$

<b>Produktregel</b>	$y(x) = u(x) \cdot v(x)$ $y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
<b>Kettenregel</b>	$y(x) = f(x)$ $y'(x) = f'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$

Einsetzen der gefundenen Funktion und deren Ableitung in die DGL.

$$\begin{array}{rcl}
 & [y'] + f(x) \cdot [y] & = g(x) \\
 [C'(x) \cdot e^{-\int f(x) dx} - C(x) \cdot f(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}] + f(x) \cdot [C(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}] & = g(x) \\
 C'(x) \cdot e^{-\int f(x) dx} \underbrace{- C(x) \cdot f(x) \cdot e^{-\int f(x) dx} + f(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}}_{=0} & = g(x) \\
 \hline
 & [i'] + \frac{R}{L} \cdot [i] & = \frac{u_0}{L} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\
 [C'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + C(t) \cdot (-\frac{R}{L}) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}] + \frac{R}{L} \cdot [C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}] & = \frac{u_0}{L} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\
 C'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \underbrace{- \frac{R}{L} \cdot C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{R}{L} \cdot C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}_{=0} & = \frac{u_0}{L} \cdot \sin(\omega \cdot t)
 \end{array}$$

Durch Kürzen bekommt man wieder eine einfachere Form.

$$\begin{array}{l}
 C'(x) \cdot e^{-\int f(x) dx} = g(x) \\
 C'(x) = g(x) \cdot e^{\int f(x) dx} \\
 C(x) = \int g(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx + K \\
 \hline
 C'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{u_0}{L} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\
 C'(t) = \frac{u_0}{L} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} \\
 C(t) = \frac{u_0}{L} \cdot \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} dt + K
 \end{array}$$

Das Integral ausrechnen geht so.

$$\begin{aligned}
 \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} dt &= \overbrace{\int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} dt}^I = [\dots] \\
 &\boxed{\begin{array}{ll} u = \sin(\omega \cdot t) & v' = e^{\tau t} \\ \downarrow \frac{u}{dt} & \downarrow \int dt \\ u' = \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) & v = \frac{1}{\tau} \cdot e^{\tau t} \end{array}} \\
 [\dots] &= \underbrace{\sin(\omega \cdot t)}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{\tau} \cdot e^{\tau t}}_v - \int \underbrace{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{\tau} \cdot e^{\tau t}}_v dt \\
 [\dots] &= \frac{1}{\tau} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} - \frac{\omega}{\tau} \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} dt \\
 &\boxed{\begin{array}{ll} u = \cos(\omega \cdot t) & v' = e^{\tau t} \\ \downarrow \frac{u}{dt} & \downarrow \int dt \\ u' = -\omega \cdot \sin(\omega \cdot t) & v = \frac{1}{\tau} \cdot e^{\tau t} \end{array}} \\
 [\dots] &= \frac{1}{\tau} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} - \frac{\omega}{\tau} \left[ \underbrace{\cos(\omega \cdot t)}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{\tau} \cdot e^{\tau t}}_v - \int \underbrace{-\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{\tau} \cdot e^{\tau t}}_v dt \right] \\
 [\dots] &= \frac{1}{\tau} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} - \frac{\omega}{\tau} \left[ \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{\tau t} + \frac{\omega}{\tau} \cdot \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} dt \right] \\
 \underbrace{\int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} dt}_I &= \frac{1}{\tau} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} - \frac{\omega}{\tau^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} - \frac{\omega^2}{\tau^2} \cdot \underbrace{\int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} dt}_I \\
 \underbrace{\int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} dt}_I + \frac{\omega^2}{\tau^2} \cdot \underbrace{\int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} dt}_I &= \frac{1}{\tau} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} - \frac{\omega}{\tau^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} \\
 \left[ \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} dt \right] \left( 1 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right) &= \frac{1}{\tau} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} - \frac{\omega}{\tau^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} \\
 \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} dt &= \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \left( \frac{1}{\tau} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \frac{\omega}{\tau^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \right) \cdot e^{\tau t} \\
 \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\tau t} dt &= \frac{1}{\tau^2 + \omega^2} (\tau \cdot \sin(\omega \cdot t) - \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot e^{\tau t} \\
 \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\frac{R}{L} t} dt &= \frac{1}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \left( \frac{R}{L} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \right) \cdot e^{\frac{R}{L} t} \\
 \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\frac{R}{L} t} dt &= \frac{L}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} (R \cdot \sin(\omega \cdot t) - L\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot e^{\frac{R}{L} t}
 \end{aligned}$$

### Partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x) dt = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)$$

Einsetzen des gelösten Integrals.

$$C(t) = \frac{u_0}{L} \cdot \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} dt + K$$

$$C(t) = \frac{u_0}{L} \cdot \frac{L}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} (R \cdot \sin(\omega \cdot t) - L\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot e^{\frac{R}{L} t} + K$$

$$C(t) = \frac{u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} (R \cdot \sin(\omega \cdot t) - L\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot e^{\frac{R}{L} t} + K$$

...die dann in den Lösungsansatz eingefügt wird und erhält nun die *allgemeine Lösung der inhomogenen DGL*.

$$y = \boxed{C(x)} \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

$$y = \boxed{\left( \int g(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx + K \right)} \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

---


$$i(t) = \underbrace{\boxed{C(t)}}_{i_h} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$i(t) = \boxed{\left( \frac{u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} (R \cdot \sin(\omega \cdot t) - L\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot e^{\frac{R}{L} t} + K \right)} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$i(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{R \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Eine *spezielle Lösung* wird berechnet mit dem Anfangswert  $i(0) = 0$

$$i(0) = K \cdot \underbrace{\boxed{e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}}_{=1} + \frac{R \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \underbrace{\boxed{\sin(\omega \cdot t)}}_{=0} - \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \underbrace{\boxed{\cos(\omega \cdot t)}}_{=1} = 0$$

$$i(0) = K + 0 - \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} = 0$$

$$K = \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2}$$

$$i(t) = \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{R \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$i(t) = \frac{u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \left( L\omega \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + R \cdot \sin(\omega \cdot t) - L\omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \right)$$