Lösen einer DGL 1. Ordnung

Die DGL ist wie folgt:

$$
\begin{aligned}
a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y &= g(x) \\
y' + f(x) \cdot y &= g(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L \cdot i' + R \cdot i &= u_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \\
i' + \frac{R}{L} \cdot i &= \frac{u_0}{L} \cdot \sin(\omega \cdot t)
\end{aligned}
$$

Homogene Lösung: Trennung der Variablen

Finde ein y, welches die homogene Differentialgleichung (DGL) löst.

$$
\begin{aligned}
i' + \frac{R}{L} \cdot i &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{R}{L} \cdot i \\
\int \frac{1}{i} \cdot \mathrm{d}i &= -\frac{R}{L} \int 1 \cdot \mathrm{d}t \\
\ln(|i|) &= -\frac{R}{L} \cdot t + K \\
|i| &= \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t + K} \\
i &= \pm \mathrm{e}^{K} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\
i_h(t) &= C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}
\end{aligned}
$$

Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

Durch *Trennen der Variablen*. Die *allgemeine Lösung* ist

$$y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Inhomogene Lösung: Variante der Konstanten

Eine *inhomogene DGL 1. Ordnung* lässt sich durch die *Variante der Konstanten* lösen. Dazu benutzt man die *allgemeine Lösung* der *homogenen DGL* und ersetzt die Integrationskonstante C durch eine (noch unbekannte) Funktion $C(x)$ und berechnet mit dem Lösungsansatz $y_h(x)$ die Ableitung $y_h{}'(x)$ unter Verwendung der *Produkt- und Kettenregel*.

$$
\begin{aligned}
y &= C(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} \\
y' &= \boxed{C'(x)} \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x) \cdot \boxed{f(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i(t) &= C(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\
i'(t) &= \boxed{C'(t)} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} + C(t) \cdot \boxed{\left(-\frac{R}{L}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}}
\end{aligned}
$$

Produktregel	$y\,(x) = u\,(x) \cdot v\,(x)$ $y'\,(x) = u'\,(x) \cdot v\,(x) + u\,(x) \cdot v'\,(x)$
Kettenregel	$y\,(x) = f\,(x)$ $y'\,(x) = f'\,(x) = F'\,(u) \cdot u'\,(x)$

Einsetzen der gefundenen Funktion und deren Ableitung in die DGL.

$$\begin{aligned}
\boxed{y'} + f\,(x) \cdot \boxed{y} &= g\,(x) \\
\boxed{C'\,(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C\,(x) \cdot f\,(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}} + f\,(x) \cdot \boxed{C\,(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}} &= g\,(x) \\
C'\,(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} \underbrace{-C\,(x) \cdot f\,(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f\,(x) \cdot C\,(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}}_{=0} &= g\,(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{i'} + \frac{R}{L} \cdot \boxed{i} &= \frac{u_0}{L} \cdot \sin\,(\omega \cdot t) \\
\boxed{C'\,(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} + C\,(t) \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}} + \frac{R}{L} \cdot \boxed{C\,(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}} &= \frac{u_0}{L} \cdot \sin\,(\omega \cdot t) \\
C'\,(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} \underbrace{-\frac{R}{L} \cdot C\,(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{R}{L} \cdot C\,(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}}_{=0} &= \frac{u_0}{L} \cdot \sin\,(\omega \cdot t)
\end{aligned}$$

Durch Kürzen bekommt man wieder eine einfachere Form.

$$\begin{aligned}
C'\,(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} &= g\,(x) \\
C'\,(x) &= g\,(x) \cdot \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} \\
C\,(x) &= \int g\,(x) \cdot \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C'\,(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} &= \frac{u_0}{L} \cdot \sin\,(\omega \cdot t) \\
C'\,(t) &= \frac{u_0}{L} \cdot \sin\,(\omega \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L} \cdot t} \\
C\,(t) &= \frac{u_0}{L} \cdot \int \sin\,(\omega \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L} \cdot t}\,\mathrm{d}t + K
\end{aligned}$$

Das Integral ausrechnen geht so.

$$\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L} \cdot t}\ \mathrm{d}t = \overbrace{\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}\ \mathrm{d}t}^{I} = [...]$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = \sin\left(\omega \cdot t\right) & v\,' = \mathrm{e}^{\tau\, t} \\ \downarrow_{\frac{u}{\mathrm{d}t}} & \downarrow_{\int \mathrm{d}t} \\ u\,' = \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) & v = \dfrac{1}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t} \end{array}}$$

$$[...] = \underbrace{\sin\left(\omega \cdot t\right)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}}_{v} - \int \underbrace{\omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right)}_{u\,'} \cdot \underbrace{\frac{1}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}}_{v}\ \mathrm{d}t$$

$$[...] = \frac{1}{\tau} \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t} - \frac{\omega}{\tau} \int \cos\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}\ \mathrm{d}t$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = \cos\left(\omega \cdot t\right) & v\,' = \mathrm{e}^{\tau\, t} \\ \downarrow_{\frac{u}{\mathrm{d}t}} & \downarrow_{\int \mathrm{d}t} \\ u\,' = -\omega \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) & v = \dfrac{1}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t} \end{array}}$$

$$[...] = \frac{1}{\tau} \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t} - \frac{\omega}{\tau} \left[\underbrace{\cos\left(\omega \cdot t\right)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}}_{v} - \int \underbrace{-\omega \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right)}_{u\,'} \cdot \underbrace{\frac{1}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}}_{v}\ \mathrm{d}t \right]$$

$$[...] = \frac{1}{\tau} \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t} - \frac{\omega}{\tau} \left[\cos\left(\omega \cdot t\right) \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t} + \frac{\omega}{\tau} \cdot \int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}\ \mathrm{d}t \right]$$

$$\underbrace{\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}\ \mathrm{d}t}_{I} = \frac{1}{\tau} \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t} - \frac{\omega}{\tau^2} \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t} - \frac{\omega^2}{\tau^2} \cdot \underbrace{\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}\ \mathrm{d}t}_{I}$$

$$\underbrace{\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}\ \mathrm{d}t}_{I} + \frac{\omega^2}{\tau^2} \cdot \underbrace{\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}\ \mathrm{d}t}_{I} = \frac{1}{\tau} \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t} - \frac{\omega}{\tau^2} \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}$$

$$\left[\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}\ \mathrm{d}t \right] \left(1 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right) = \frac{1}{\tau} \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t} - \frac{\omega}{\tau^2} \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}$$

$$\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \left(\frac{1}{\tau} \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) - \frac{\omega}{\tau^2} \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) \right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}$$

$$\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\tau^2 + \omega^2} \left(\tau \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) - \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) \right) \cdot \mathrm{e}^{\tau\, t}$$

$$\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L}\, t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) - \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) \right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L}\, t}$$

$$\int \sin\left(\omega \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L}\, t}\ \mathrm{d}t = \frac{L}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \left(R \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) - L\omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) \right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L}\, t}$$

Partielle Integration

$$\int u\left(x\right) \cdot v\,'\left(x\right)\ \mathrm{d}t = u\left(x\right) \cdot v\left(x\right) - \int u\,'\left(x\right) \cdot v\left(x\right)$$

Einsetzen des gelösten Integrals.

$$
\begin{aligned}
C(t) &= \frac{u_0}{L} \cdot \int \sin(\omega \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L} \cdot t} \, \mathrm{d}t + K \\
C(t) &= \frac{u_0}{L} \cdot \frac{L}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \left(R \cdot \sin(\omega \cdot t) - L\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L} t} + K \\
C(t) &= \frac{u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \left(R \cdot \sin(\omega \cdot t) - L\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L} t} + K
\end{aligned}
$$

...die dann in den Lösungsansatz eingefügt wird und erhält nun die *allgemeine Lösung der inhomogenen DGL*.

$$
\begin{aligned}
y &= \boxed{C(x)} \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x) \, \mathrm{d}x} \\
y &= \boxed{\left(\int g(x) \cdot \mathrm{e}^{\int f(x) \, \mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x + K\right)} \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x) \, \mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \underbrace{\boxed{C(t)} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}}_{i_h} \\
i(t) &= \boxed{\left(\tfrac{u_0}{R^2+L^2\cdot\omega^2} \left(R \cdot \sin(\omega \cdot t) - L\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{R}{L} t} + K\right)} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\
i(t) &= K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{R \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t)
\end{aligned}
$$

Eine *spezielle Lösung* wird berechnet mit dem Anfangswert $i(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
i(0) = K \cdot \underbrace{\boxed{\mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}}}_{=1} + \frac{R \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \underbrace{\boxed{\sin(\omega \cdot t)}}_{=0} - \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \underbrace{\boxed{\cos(\omega \cdot t)}}_{=1} &= 0 \\
i(0) = K + 0 - \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} &= 0 \\
K &= \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{R \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \frac{L\omega \cdot u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\
i(t) &= \frac{u_0}{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(L\omega \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} + R \cdot \sin(\omega \cdot t) - L\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\right)
\end{aligned}
$$