

Test MND 1

Simon Stingelin

6. Dezember 2016

Dauer: 2 Lektionen (90 Minuten)

Hilfsmittel: Alle Unterlagen inkl. mathematische Software auf eigenem Notebook.

WICHTIG: Selbständige Arbeit OHNE fremde Hilfe!

Auf dem Notebook darf nur lokal mit `matlab`, `Mathematica`, `Maple`, `C`, `python`, etc. gearbeitet werden. Online Hilfefunktionen sind untersagt. Fremdhilfe und Austausch unter Studienkollegen führt zur Note 1.

Lösungsweg: Dokumentieren Sie Ihre Lösung so, dass Ihre Arbeit auch ohne Aufgabenstellung nachvollzogen werden kann. **Ohne** Lösungsweg gibt es nicht die maximale Punktzahl.

`matlab` „\“-Befehl und ebenso `LinearSolve` von `Mathematica` sind nicht gestattet.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

4 P

Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^3 - e^{1-x \sin(x)}$$

im Intervall $[0, 2]$ auf 4 Nachkommastellen.

Aufgabe 2

4 P

Gesucht ist eine Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2y - e^{-xy} &= 0 \\ \ln(1+y) - 4x &= 0. \end{aligned}$$

- Leiten Sie eine Fixpunktiteration her und berechnen Sie ausgehend von $(x^{(0)}, y^{(0)})^T = (0, 0)^T$ eine Näherungslösung auf 3 Dezimalstellen genau.
- Wieviele Iterationsschritte sind höchstens notwendig, um in der Maximumnorm eine Genauigkeit von 10^{-3} zu erreichen? Annahme: es gilt $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Aufgabe 3

8 P

Gesucht ist die Lösung von $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der QR-Zerlegung basierend auf der Householder-Transformation (ohne Permutation der Gleichungen!):

- Bestimmen Sie die orthogonale Matrix Q_1 und die Matrix A_1 mit Hilfe der Householder-Transformation so, dass $Q_1 \cdot A = A_1$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die orthogonale Matrix Q_2 und die Matrix A_2 mit Hilfe der Householder-Transformation so, dass $Q_2 \cdot A_1 = A_2$ mit

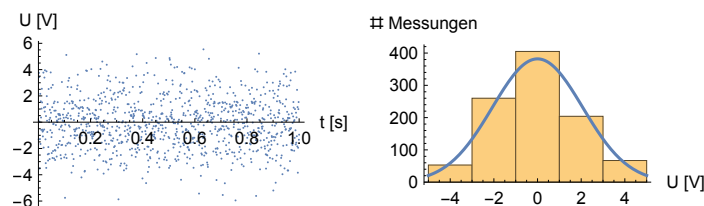
$$A_2 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

- Wie lautet Q so, dass $A_2 = R = Q^T \cdot A$?
- Notieren Sie das resultierende Gleichungssystem und berechnen Sie mit Rückwärts einsetzen die Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 4

4 P

Es wurde eine Messung durchgeführt und analysiert.



Nun stehen leider nur noch die Daten des Histogramms zur Verfügung:

x_i	-4	-2	0	2	4
n_i	53	260	405	204	67

Bestimmen Sie die Standardabweichung σ , in dem Sie das Modell

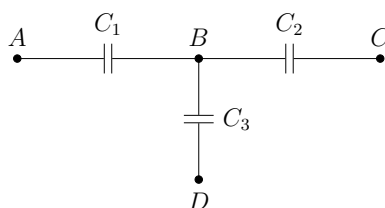
$$f(x) = a \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

in die Daten des Histogramms fitten. (Es wird angenommen, dass die Daten normal verteilt sind.) Lösen Sie das Problem mit Hilfe der QR-Zerlegung.

Aufgabe 5

4 P

Gegeben sei das folgenden Netzwerk:



Gemessen werden folgende Kapazitäten zwischen den Knoten:

Knoten	$AD - B$	$AC - B$	$B - D$	$A - B$	$CD - B$
Kapazität	$297\mu\text{F}$	$253\mu\text{F}$	$99\mu\text{F}$	$201\mu\text{F}$	$149\mu\text{F}$

Die Bezeichnung $AD - B$ ist so zu lesen, dass die Knoten A, D kurzgeschlossen werden ($\Rightarrow AD$) und somit zwischen AD und B die Kapazität gemessen wird.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalengleichung und der Cholesky Zerlegung die Kapazitäten im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

Aufgabe 6

4 P

Bestimmen Sie numerisch sämtliche Lösungen auf mind. 5 Nachkommastellen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 &= 2 \\ y &= \cos(x). \end{aligned}$$

Substituieren Sie nicht eine Gleichung in die andere, sondern lösen Sie die Aufgabe als System. Erstellen Sie einen Graph des Systems (2 Kurven in der x-y-Ebene).