

PROCURA HEURÍSTICA

CAP 3 (3.5 E 3.6)

Parcialmente adaptado de
<http://aima.eecs.berkeley.edu>

Resumo

- Procura pelo melhor primeiro
- Procura sôfrega
- Procura A^*
- Heurísticas e suas propriedades
- Procura informada com memória limitada

Algoritmos de procura cegos

Os algoritmos de procura **cegos** (ou não informados) recorrem apenas à informação disponibilizada no problema

- Procura em largura primeiro (breadth-first)
- Procura de custo uniforme (uniform-cost)
- Procura bidireccional
- Procura em profundidade primeiro (depth-first)
- Procura em profundidade limitada (depth-limited)
- Procura por aprofundamento progressivo (iterative deepening)

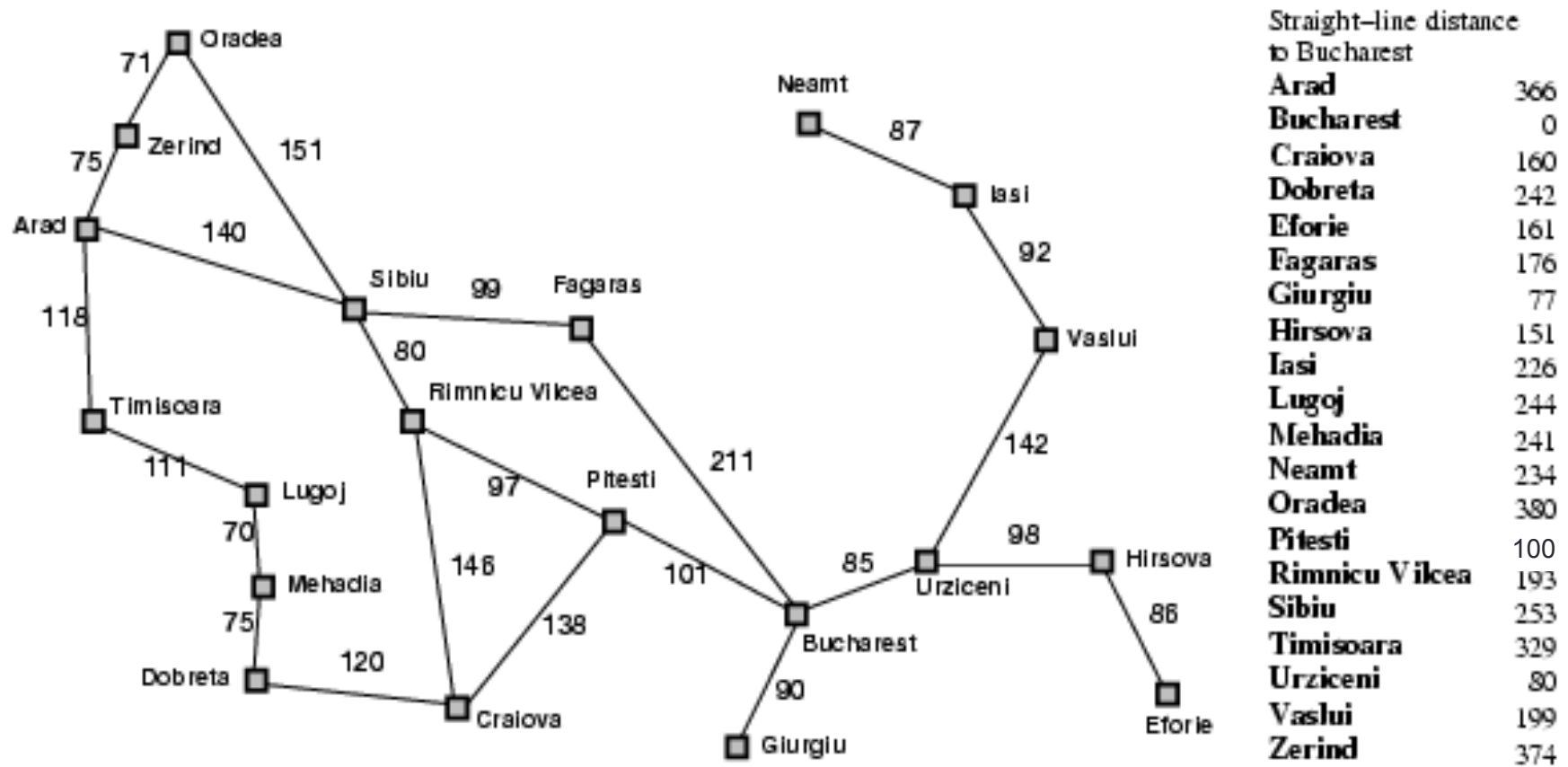
Procura pelo melhor primeiro

- Ideia: aplicar uma **função de avaliação $f(n)$** a cada nó
 - Indica-nos se o nó é promissor ou não
 - expandir o nó que aparenta ser mais promissor
- Implementação:
Ordenar os nós na fronteira por ordem crescente (minimizar) ou decrescente (maximizar) da função de avaliação
- Casos especiais:
 - Procura sôfrega
 - Procura A^*
- A maior parte dos algoritmos inclui como componente de $f(n)$ uma **função heurística**, denotada por **$h(n)$**
- $h(n)$ = estimativa do custo do menor caminho para ir do estado do nó n até a um estado objectivo

Procura sôfrega

- Função de avaliação $f(n) = h(n)$
- Procura sôfrega expande o nó que *aparenta* estar mais próximo do objectivo
 - $h_{SLD}(n)$ = distância em linha recta de n até Bucareste

Roménia com distâncias em linha recta km



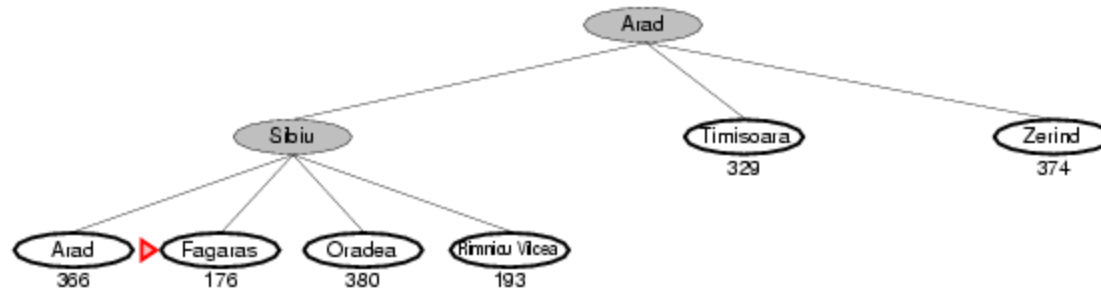
Exemplo de procura sôfrega



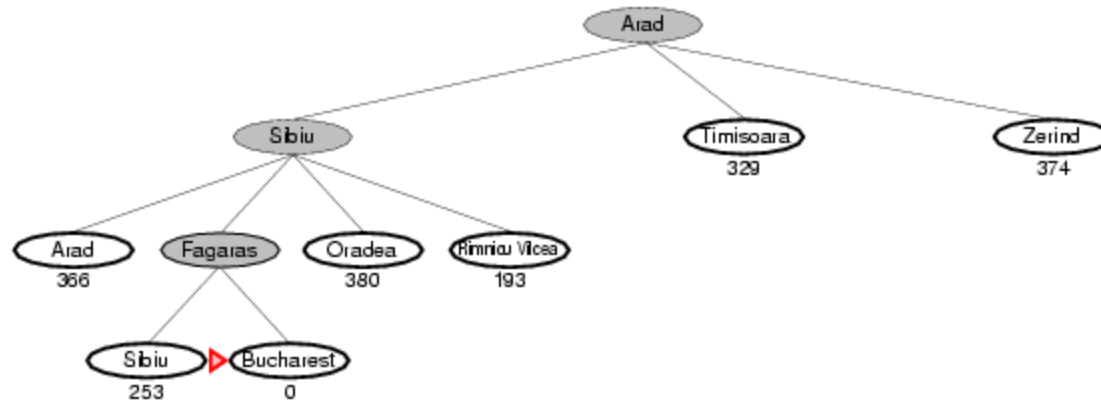
Exemplo de procura sôfrega



Exemplo de procura sôfrega



Exemplo de procura sôfrega



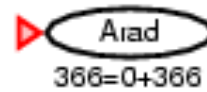
Propriedades da procura sôfrega

- Completa? Não – pode ficar presa em ciclos, e.g., Ir de Iasi para Oradea, temos Iasi → Neamt → Iasi → Neamt
Completa em espaços finitos com verificação de estados repetidos (versão para grafos)
- Tempo? $O(b^m)$, mas uma boa heurística pode ter melhorias espetaculares
- Espaço? $O(b^m)$ – mantém todos os nós em memória
- Óptima? Não. E.g. o caminho através de Rimnicu → Vilcea → Pitesti é mais curto.

Procura A*

- Ideia: evitar expandir caminhos que já têm elevado custo
- Função de avaliação $f(n) = g(n) + h(n)$
 - $g(n)$ = custo atual para atingir n
 - $h(n)$ = custo estimado para atingir o objectivo a partir de n
 - $f(n)$ = custo total estimado do caminho até ao objectivo passando por n

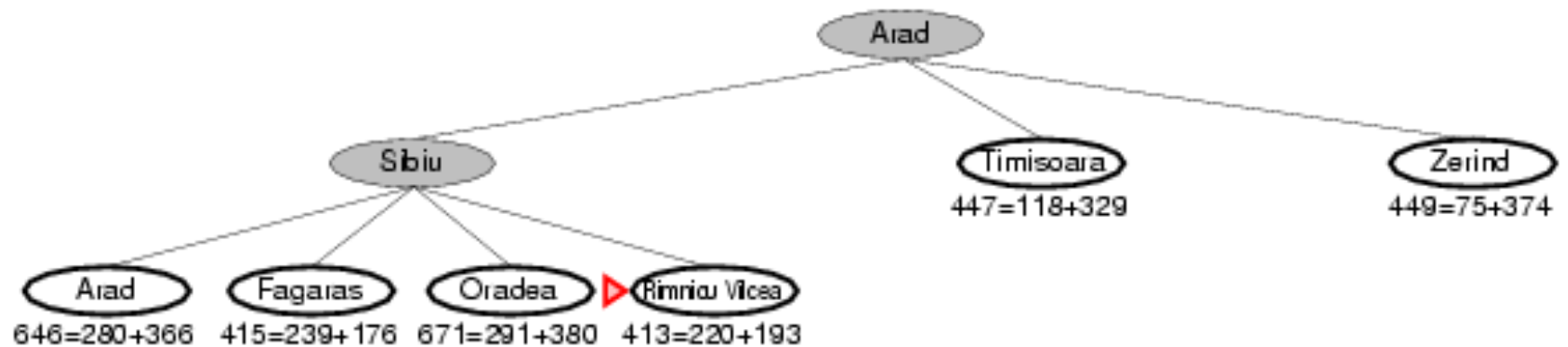
Exemplo de Procura A*



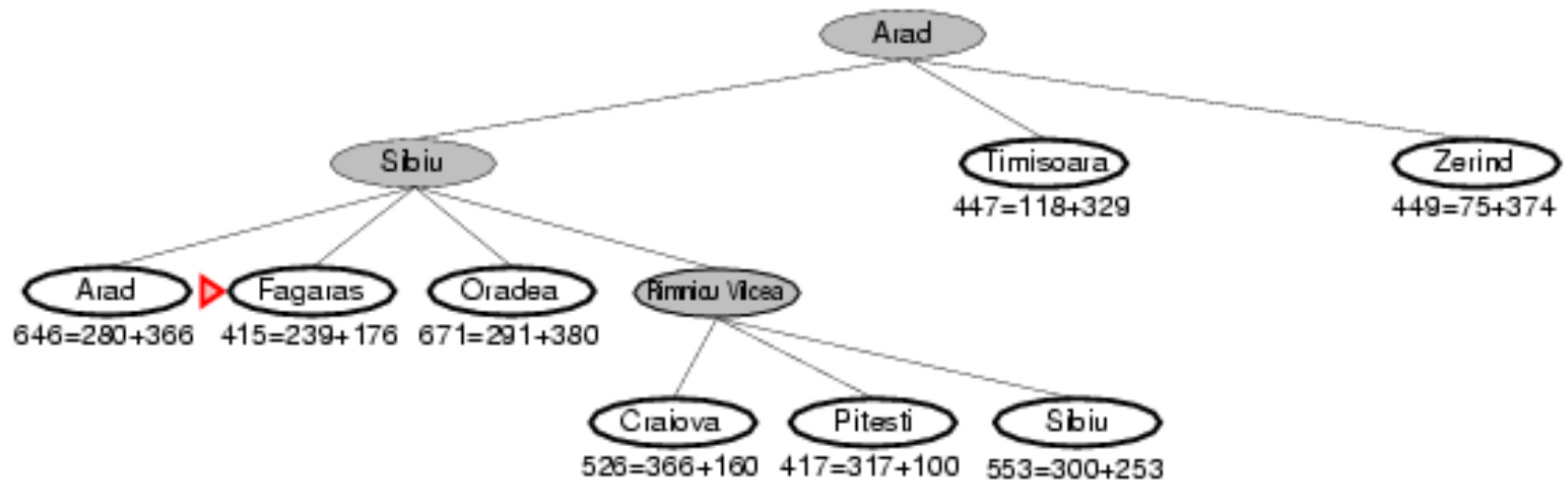
Exemplo de Procura A*



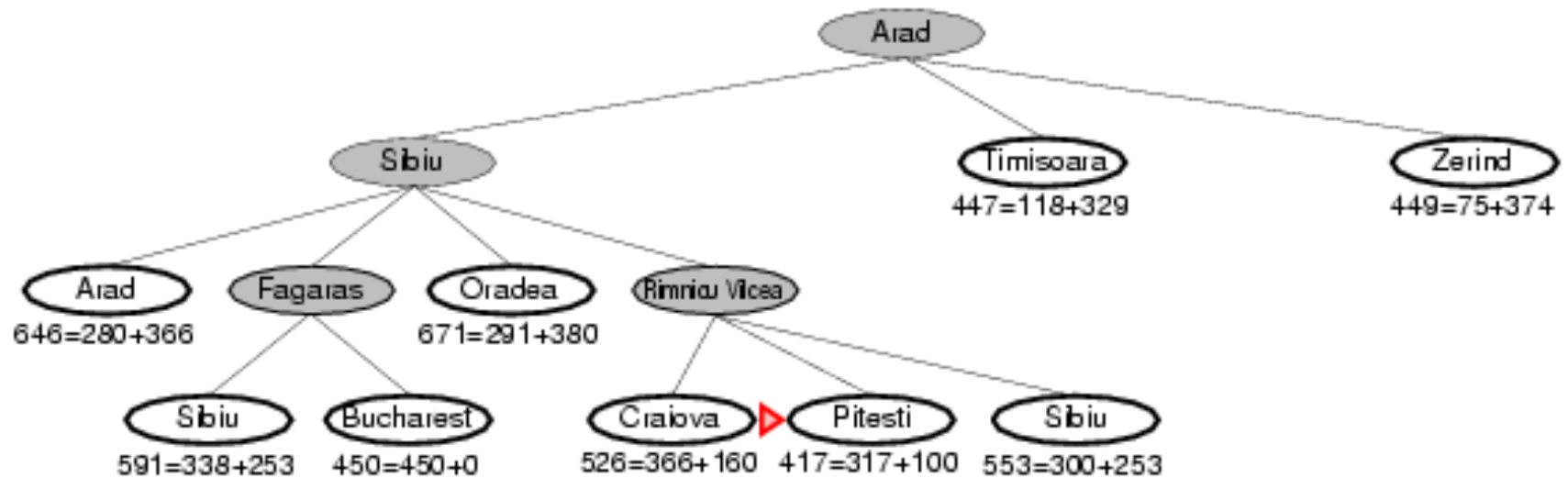
Exemplo de Procura A*



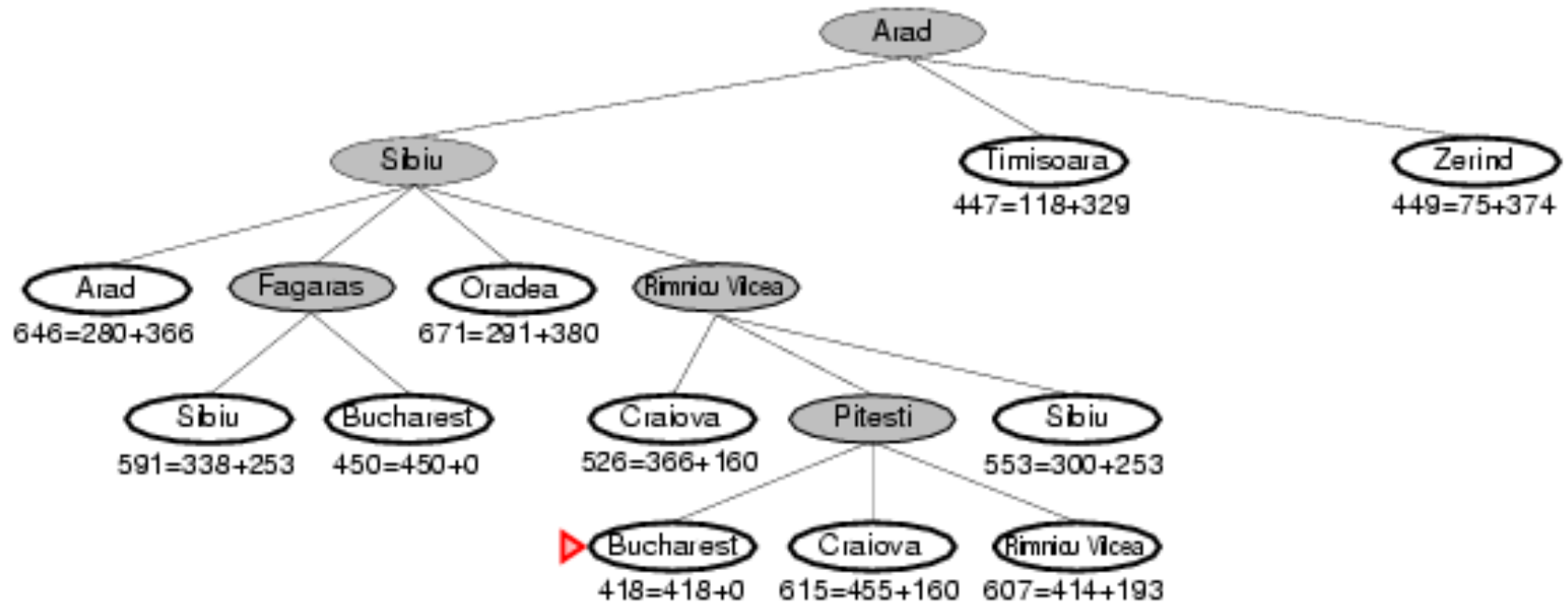
Exemplo de Procura A*



Exemplo de Procura A*



Exemplo de Procura A*

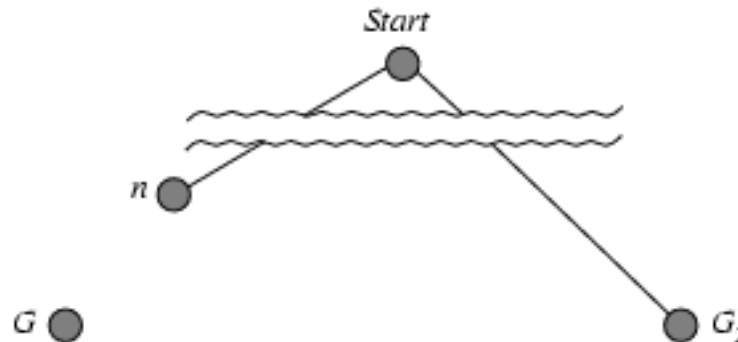


Heurísticas admissíveis

- Uma heurística $h(n)$ é **admissível** se para todo o nó n , $h(n) \leq h^*(n)$, em que $h^*(n)$ é o custo **real** de atingir o objectivo a partir de n .
- Uma heurística admissível **nunca sobrestima** o custo de alcançar o objectivo, i.e., é **optimista**.
- Exemplo: $h_{SLD}(n)$ (nunca sobrestima a distância por estrada)
- **Teorema**: Se $h(n)$ é admissível, então o algoritmo A^* usando TREE-SEARCH é óptimo.

Optimalidade de A^* (demonstração)

- Suponha-se que um estado final subóptimo G_2 foi gerado e encontra-se na fronteira. Seja n um nó por expandir na fronteira num caminho mais curto para o objectivo óptimo G .

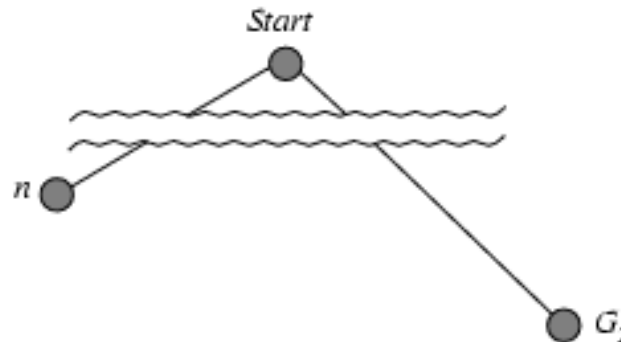


- $g(G) < g(G_2)$
- $f(G_2) = g(G_2)$
- $f(G) = g(G)$
- Logo $f(G) < f(G_2)$

porque G_2 é subóptimo
pois $h(G_2) = 0$
pois $h(G) = 0$

Optimalidade de A^* (redução ao absurdo)

- Suponha-se que um estado final subóptimo G_2 foi gerado e encontra-se na fronteira. Seja n um nó por expandir na fronteira num caminho mais curto para o objectivo óptimo G .

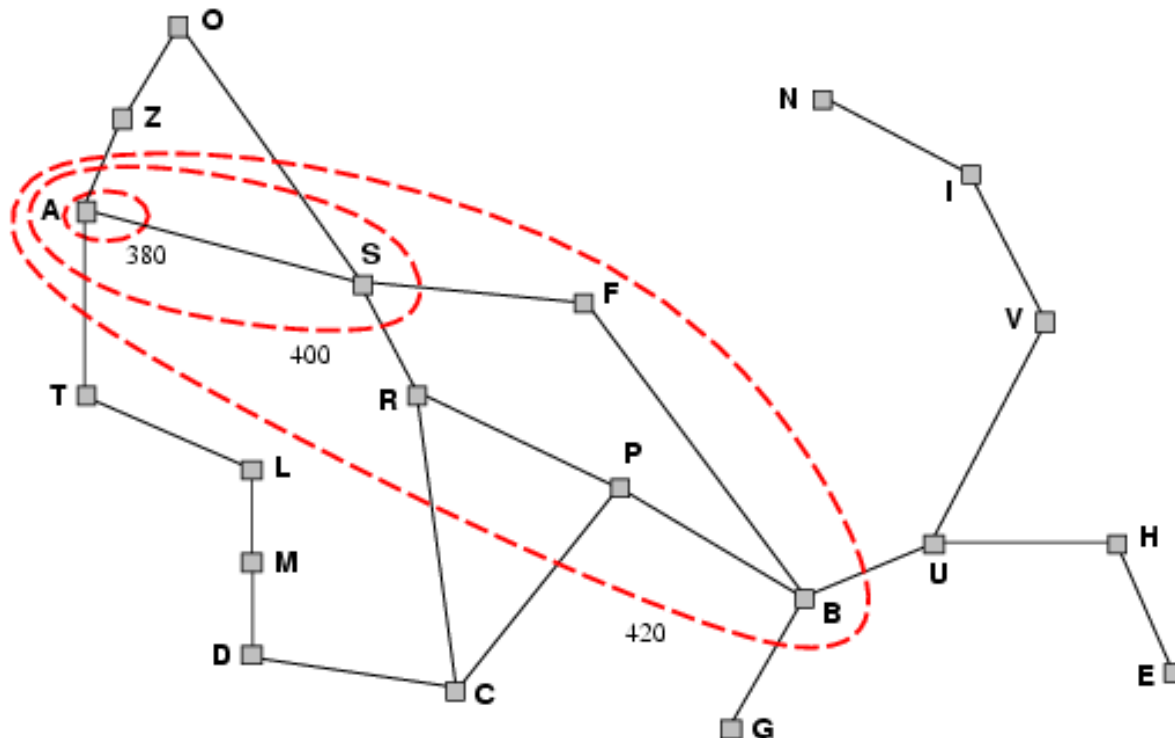


- $f(G) < f(G_2)$
 - $h(n) \leq h^*(n)$
 - $g(n) + h(n) \leq g(n) + h^*(n)$
 - $f(n) \leq f(G)$
- como se viu anteriormente
porque h é admissível (h^* é o custo real)

Portanto, $f(n) < f(G_2)$, e o A^* nunca seleccionará G_2 para expansão

Optimalidade de A^* (mais útil)

- A^* expande nós por ordem crescente de valores da função de avaliação
- Adiciona gradualmente contornos aos nós (c.f. procura em largura adiciona níveis)
- Contorno i tem todos os nós $f=f_i$, em que $f_i < f_{i+1}$



Propriedades do A*

- O A* expande todos os nós com $f(n) < C^*$
- O A* expande alguns nós com $f(n) = C^*$
- O A* nunca expande nós com $f(n) > C^*$

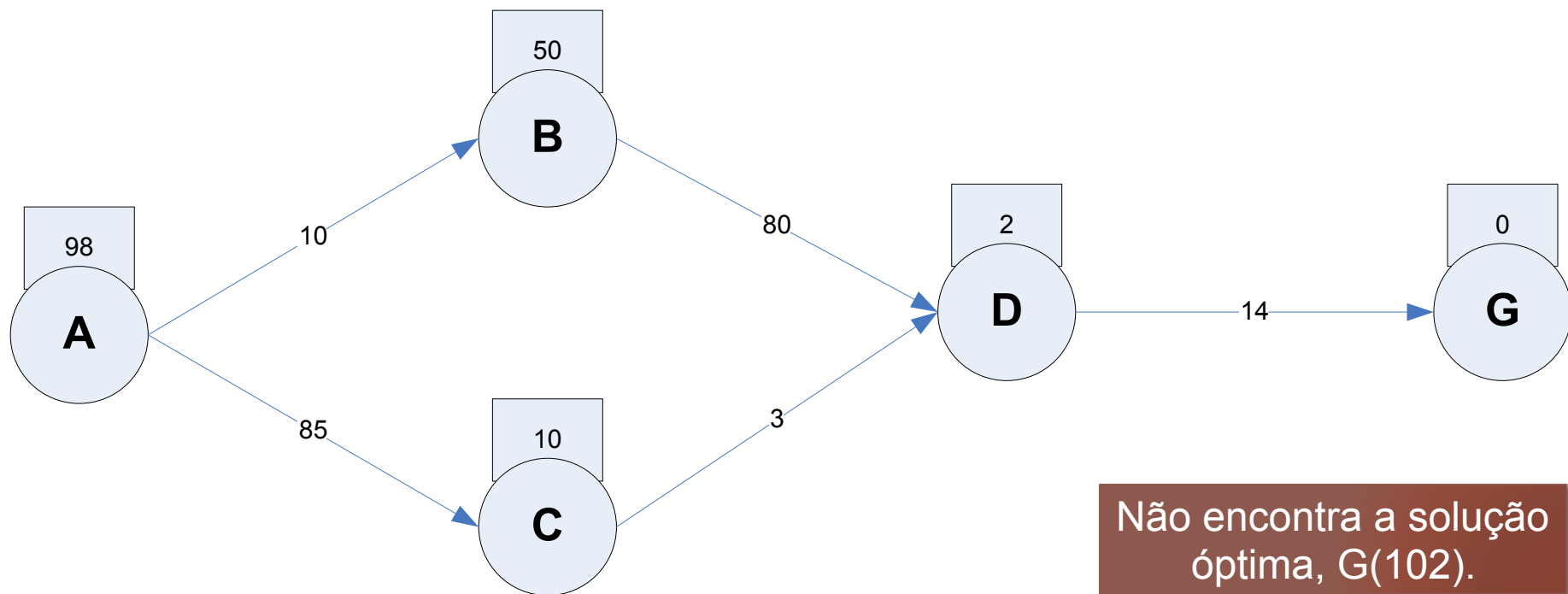
O algoritmo A* é optimalmente eficiente para qualquer heurística dada:

- Não há outro algoritmo **óptimo** que garantidamente expanda um menor número de nós!

Propriedades do A^*

- Completo? Sim (a não ser que haja um número infinito de nós com $f \leq f(G)$)
- Tempo? Exponencial no [erro relativo de h x o tamanho da solução]
Se $|h(n) - h^*(n)| \leq O(\log h^*(n))$ o algoritmo A^* tem um comportamento subexponencial.
- Espaço? Mantém todos os nós em memória
- Ótimo? Sim, se a heurística for admissível

Problemas da versão naïve do A* com procura em grafos



fronteira

| | | | | | |
|-------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------|
| A(98) | B(60) C(95) | D(92) C(95) | C(95) G(104) | D(90) G(104) | G(104) |
| | A | AB | ABD | ABCD | ABCD |

explorados

Heurísticas consistentes

A demonstração de optimalidade do A* não se generaliza para o algoritmo de procura em grafos (eliminação de estados já explorados)

- Uma heurística é **consistente** se para todo o nó n e todo o seu sucessor n' , gerado pela ação a ,

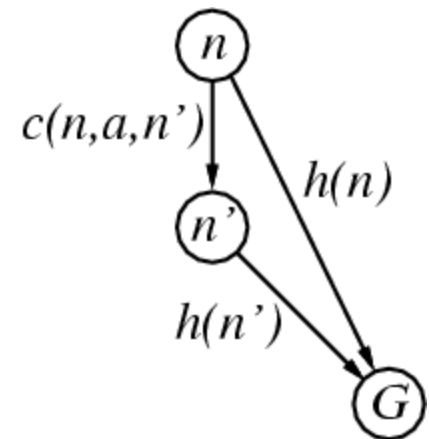
$$h(n) \leq c(n,a,n') + h(n')$$

- Se h é consistente, temos

$$\begin{aligned} f(n') &= g(n') + h(n') \\ &= g(n) + c(n,a,n') + h(n') \\ &\geq g(n) + h(n) \\ &= f(n) \end{aligned}$$

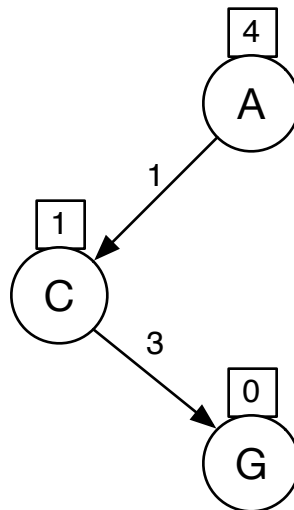
- ou seja, $f(n)$ é não decrescente ao longo de qualquer caminho (é **monótona**).

• **Teorema:** Se $h(n)$ for consistente, então o A* recorrendo à procura GRAPH-SEARCH é ótimo.



Consistência e Admissibilidade

- Toda a heurística consistente é admissível.
- Nem toda a heurística admissível é consistente.
 - Exemplo:



- É admissível pois $h(A) \leq 4$, $h(C) \leq 3$ e $h(G) \leq 0$.
- Não é consistente pois $h(A) > 1 + h(C)$ (onde 1 é o custo de $A \rightarrow C$)

A* (versão otimizada em grafos)

```
function A*( problem ) returns a solution, or failure
  node ← a node with STATE=problem.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
  frontier ← a priority queue ordered by f-value with node as the only element
  explored ← a singleton set with node.STATE
  loop do
    if EMPTY?( frontier ) then return failure
    node ← POP( frontier ) /* chooses the node with lowest f-value in frontier */
    if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)
      add node.STATE to explored
    for each action in problem.ACTIONS(node.STATE) do
      child ← CHILD-NODE( problem , node , action )
      if child.STATE is not in explored or frontier then do
        frontier ← INSERT(child , frontier )
      else if child.STATE is in frontier with higher f-value then
        replace that frontier node with child
```

Ótimo só para
heurísticas
consistentes!!!

O que fazer com heurísticas inconsistentes?


Solução simples: o conjunto de explorados mantém nós em vez de estados.

- Seja n um novo nó gerado pelo algoritmo. Se existir um nó m no conjunto de explorados para o mesmo estado de n tal que $f(n) < f(m)$ então retira-se o nó m do conjunto de explorados e coloca-se o novo nó n na fronteira.
- Com esta alteração, a utilização de heurísticas admissíveis garantem novamente a optimalidade da primeira solução encontrada pelo algoritmo de procura em grafos A^* .

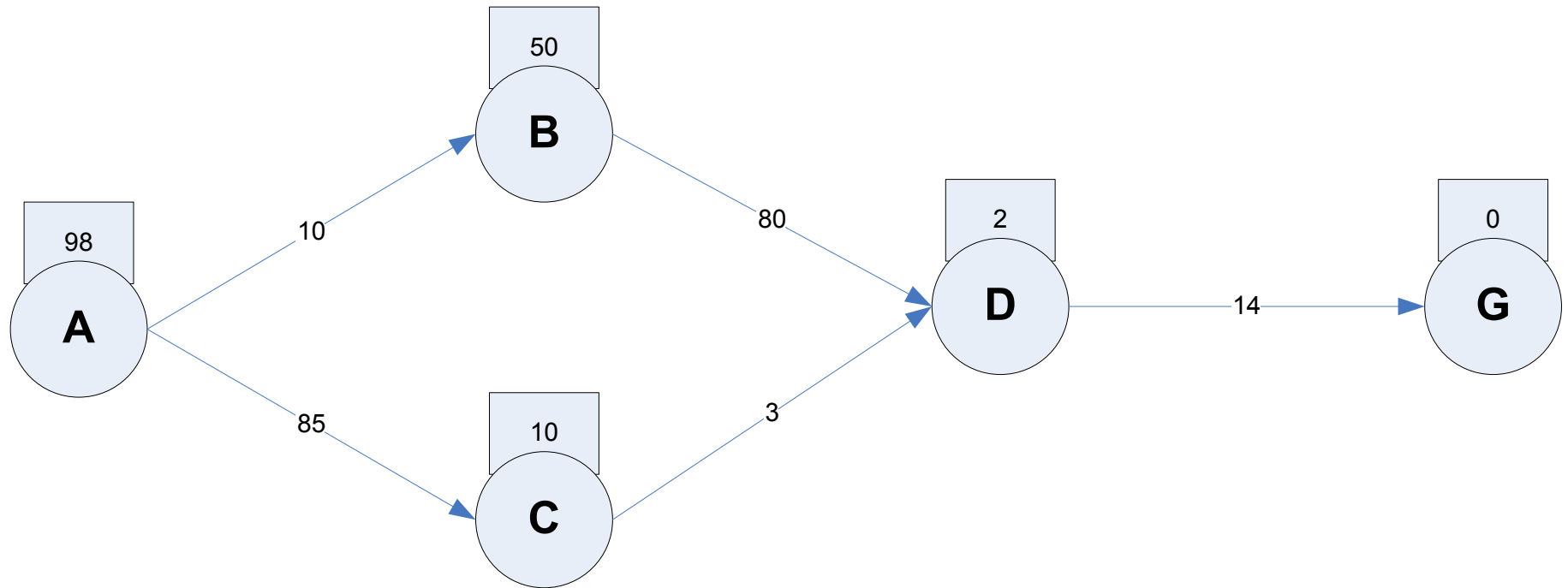
Procura A* em grafos corrigida

```
function GRAPH-SEARCH( problem, frontier ) returns a solution, or failure
  explored ← an empty set of nodes
  node ← node with STATE = problem.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
  frontier ← INSERT(node, frontier) /* priority queue ordered by f-value */
  loop do
    if EMPTY?(frontier) return failure
    node ← POP( frontier ) /* chooses the node with lowest f-value in frontier */
    if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)
    if node.STATE is not in explored then
      add node to explored
      frontier ← INSERT-ALL(EXPAND(node,problem),frontier)
    else if node.STATE = oldnode.STATE such that oldnode in explored
      has higher f-value than node then
        replace oldnode by node in explored
        frontier ← INSERT-ALL(EXPAND(node,problem),frontier)
    endif
```

Garante óptimo
para heurísticas
admissíveis!!!



A* com procura em grafos (corrigido)



fronteira

| | | | |
|-----|-------------------|-------------------------|-------------------------|
| ... | C(95) G(104) | D(90) G(104) | G(102) G(104) |
| ... | A(98) B(60) D(92) | A(98) B(60) C(95) D(92) | A(98) B(60) C(95) D(90) |

explorados

Estimativa PathMax

Existe uma otimização que tenta manter a heurística consistente (estimativa PathMax) mas mais complexa.

- A ideia consiste em utilizar como valor da função heurística

$$h^*(m) = \max \{(h(n) - c(n, a, m)) ; h(m)\}$$

- em que m é sucessor de n . O valor de $h^*(m)$ é obtido em tempo de execução e depende do caminho seguido para atingir m .
- Poderá ser necessário remover na mesma nós do conjunto de explorados.

Implementação dos algoritmos

Obviamente, deve-se ter algum cuidado na seleção das estruturas de dados para implementar a fronteira e o conjunto de estados explorados. Habitualmente o conjunto de **estados explorados é implementado com uma tabela de dispersão (hash table)**.

Quanto à **fronteira**, normalmente opta-se por:

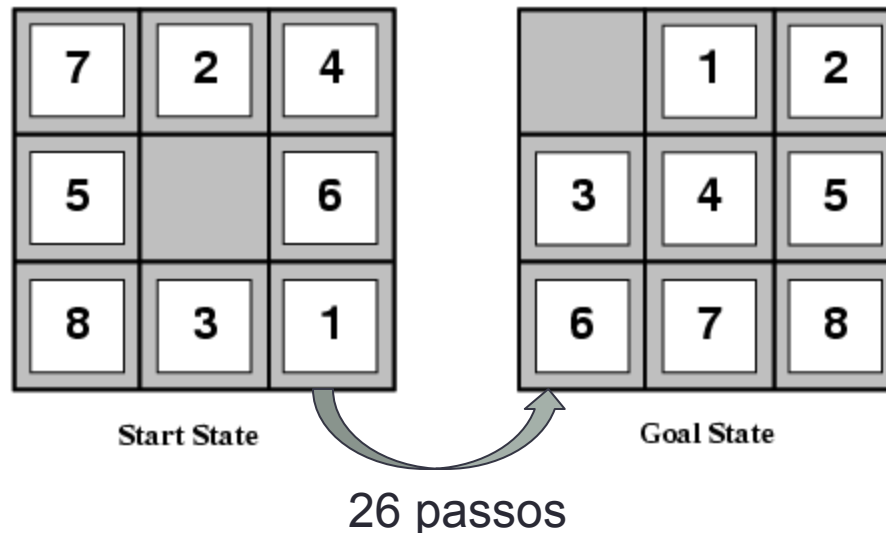
- **Fila de prioridade (priority queue) quando o grafo de estados é esparso:** número reduzido de nós sucessores limitados por uma constante pequena. Complexidade temporal $O(N * \log_2 N + L * \log_2 N)$, em que N o número de estados e L o número de arcos. Esta é a situação habitual:
 - No pior caso têm de se retirar N nós da fila de prioridade, cada uma destas operações da ordem de $\log_2 N$
 - São necessárias no pior caso L inserções na fila de prioridade, cada uma com custo $\log_2 N$.
- **Quando o grafo é denso, então deve-se utilizar uma lista ou tabela de dispersão.** Complexidade temporal da ordem de $O(N^2 + L)$
 - Retirar o nó com menor custo é operação $O(N)$, no máximo N vezes.
 - A inserção de um nó sucessor na fronteira pode ser feita com uma operação de $O(1)$

Comparação implementações

| N | Densidade | L | $N \cdot \log N + L \cdot \log N$ | $N \cdot N + L$ | Rácio |
|--------|-----------|-------------|-----------------------------------|-----------------|-------|
| 10 | 1% | 1 | 37 | 101 | 0,36 |
| 10 | 10% | 10 | 66 | 110 | 0,60 |
| 10 | 50% | 50 | 199 | 150 | 1,33 |
| 10 | 90% | 90 | 332 | 190 | 1,75 |
| 10 | 100% | 100 | 365 | 200 | 1,83 |
| 100 | 1% | 100 | 1329 | 10100 | 0,13 |
| 100 | 10% | 1000 | 7308 | 11000 | 0,66 |
| 100 | 50% | 5000 | 33884 | 15000 | 2,26 |
| 100 | 90% | 9000 | 60459 | 19000 | 3,18 |
| 100 | 100% | 10000 | 67103 | 20000 | 3,36 |
| 1000 | 1% | 10000 | 109624 | 1010000 | 0,11 |
| 1000 | 10% | 100000 | 1006544 | 1100000 | 0,92 |
| 1000 | 50% | 500000 | 4992858 | 1500000 | 3,33 |
| 1000 | 90% | 900000 | 8979172 | 1900000 | 4,73 |
| 1000 | 100% | 1000000 | 9975750 | 2000000 | 4,99 |
| 10000 | 1% | 1000000 | 13420590 | 101000000 | 0,13 |
| 10000 | 10% | 10000000 | 133010001 | 110000000 | 1,21 |
| 10000 | 50% | 50000000 | 664518496 | 150000000 | 4,43 |
| 10000 | 90% | 90000000 | 1196026991 | 190000000 | 6,29 |
| 10000 | 100% | 100000000 | 1328904115 | 200000000 | 6,64 |
| 100000 | 1% | 100000000 | 1662625011 | 10100000000 | 0,16 |
| 100000 | 10% | 1000000000 | 16611301438 | 11000000000 | 1,51 |
| 100000 | 50% | 5000000000 | 83049863336 | 15000000000 | 5,54 |
| 100000 | 90% | 9000000000 | 149488425234 | 19000000000 | 7,87 |
| 100000 | 100% | 10000000000 | 166098065708 | 20000000000 | 8,30 |

Heurísticas admissíveis

Para a charada-8 uma procura exhaustiva explora em média $3,1 \times 10^{10}$ nós. Mas existem apenas 181440 estados (charada-15 são 10^{13}). É fundamental a utilização de heurísticas



- $h_1(n)$ = número de peças colocadas erradamente
 - $h_1(S) = 8$
- $h_2(n)$ = soma das distâncias de Manhattan
 - $h_2(S) = 3+1+2+2+3+2+2+3=18$

Dominância

- Se $h_2(n) \geq h_1(n)$ para todo o n (ambas admissíveis) então h_2 **domina** h_1 , sendo h_2 melhor na procura
- Custos típicos de procura para charada-8 (número médio de nós expandidos):
 - $d=12$

| | |
|----------------------|----------------|
| IDS = 3.644.035 nós | $(b^* = 2,78)$ |
| $A^*(h_1) = 227$ nós | $(b^* = 1,42)$ |
| $A^*(h_2) = 73$ nós | $(b^* = 1,24)$ |
 - $d=24$

| | |
|----------------------------------|----------------|
| IDS \approx 54.000.000.000 nós | |
| $A^*(h_1) = 39.135$ nós | $(b^* = 1,48)$ |
| $A^*(h_2) = 1.641$ nós | $(b^* = 1,26)$ |
- Caso $h_2(n)$ não domine $h_1(n)$, e vice-versa, pode-se sempre combinar as heurísticas com a expressão $\max \{h_1(n), h_2(n)\}$
- O factor de ramificação efetivo b^* caracteriza a qualidade da heurística utilizada. O valor b^* é obtido resolvendo a equação $N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \dots + (b^*)^d$, em que N é o número de nós gerados pelo A^* e d a profundidade da solução obtida.

Problemas relaxados

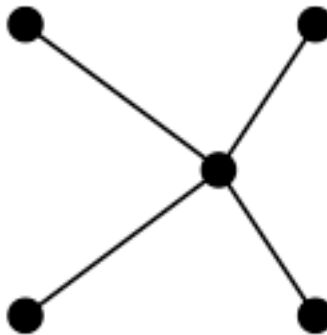
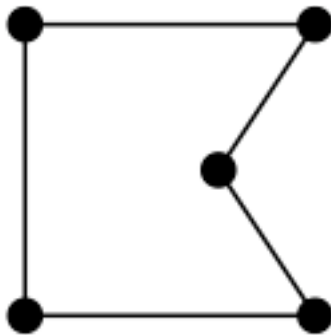
- Um problema com menos restrições nas acções é designado por **problema relaxado**.
- O custo exato de uma solução óptima para o problema relaxado é uma heurística admissível para o problema original!

Considere-se a charada- n novamente

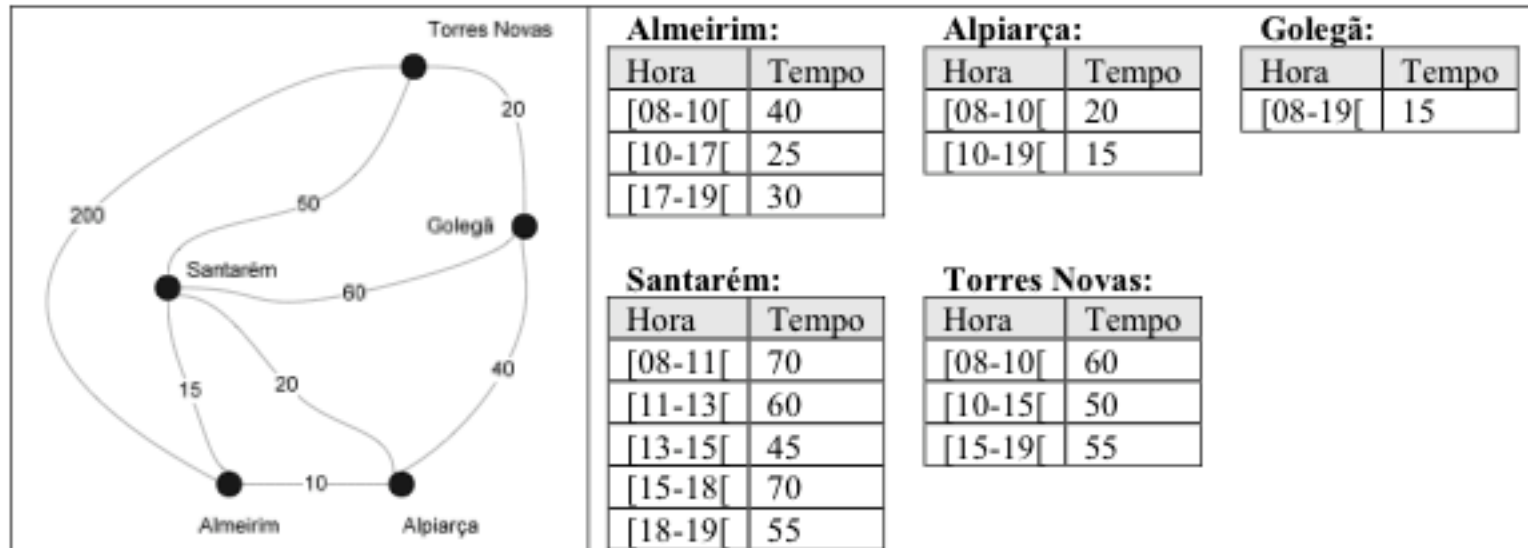
- Se as regras da charada- n forem relaxadas de maneira a que uma peça se possa movimentar para **qualquer posição**, então $h_1(n)$ dá-nos a melhor solução.
- Se as regras da charada- n forem relaxadas de maneira a que uma peça se possa movimentar para **qualquer posição adjacente**, então $h_2(n)$ dá-nos a melhor solução.

Problema do caixeiro viajante

- Encontrar o circuito mais curto que visita todas as cidades exatamente uma vez.
- Árvore de cobertura mínima pode ser obtida em $O(n^2)$ e é um limite inferior ao menor circuito (aberto)



Caixeiro viajante dependente do tempo



Pretende-se partir de uma cidade, entregando produtos em cada uma das cidades, voltando ao início. O tempo de entrega nas cidades depende da hora de chegada. A viatura parte às 8 horas da manhã.

- Heurística admissível ?

Procura informada com memória limitada

- Procura informada com memória limitada
 - Algoritmo IDA*
 - Algoritmo recursivo de procura pelo melhor primeiro (RBFS)
 - Algoritmo A* de memória limitada simplificado

IDA* - A* por aprofundamento progressivo

- Reduzir requisitos de memória do A*, adaptando os conceitos do aprofundamento progressivo.
 - Resulta no algoritmo IDA*
- Em vez de usar a profundidade, usa-se o custo f , ($g+h$), sendo o valor do corte o menor valor de f de um nó que excede o valor de corte da iteração anterior.

A* por aprofundamento progressivo

function IDA*(*problem*) **returns** a solution sequence

inputs: *problem*, a problem

local variables: *f-limit*, the current *f*- COST limit
root, a node

root \leftarrow MAKE-NODE(INITIAL-STATE[*problem*])

f-limit \leftarrow *f*- COST[*root*]

loop do

solution, *f-limit* \leftarrow DFS-CONTOUR(*root*, *f-limit*)

if *solution* is non-null **then return** *solution*

if *f-limit* = ∞ **then return** failure; **end**

A* por aprofundamento progressivo

```
function DFS-CONTOUR(node, f-limit) returns a solution
sequence and a new f- COST limit
  inputs: node, a node
           f-limit, the current f- COST limit
  local variables: next-f, the f- COST limit for the next contour, initially  $\infty$ 
  if f- COST[node] > f-limit then return null, f- COST[node]
  if GOAL-TEST[problem](STATE[node]) then return node, f-limit
  for each node s in SUCCESSORS(node) do
    solution, new-f  $\leftarrow$  DFS-CONTOUR(s, f-limit)
    if solution is non-null then return solution, f-limit
    next-f  $\leftarrow$  MIN(next-f, new-f); end
  return null, next-f
```

Propriedades do IDA*

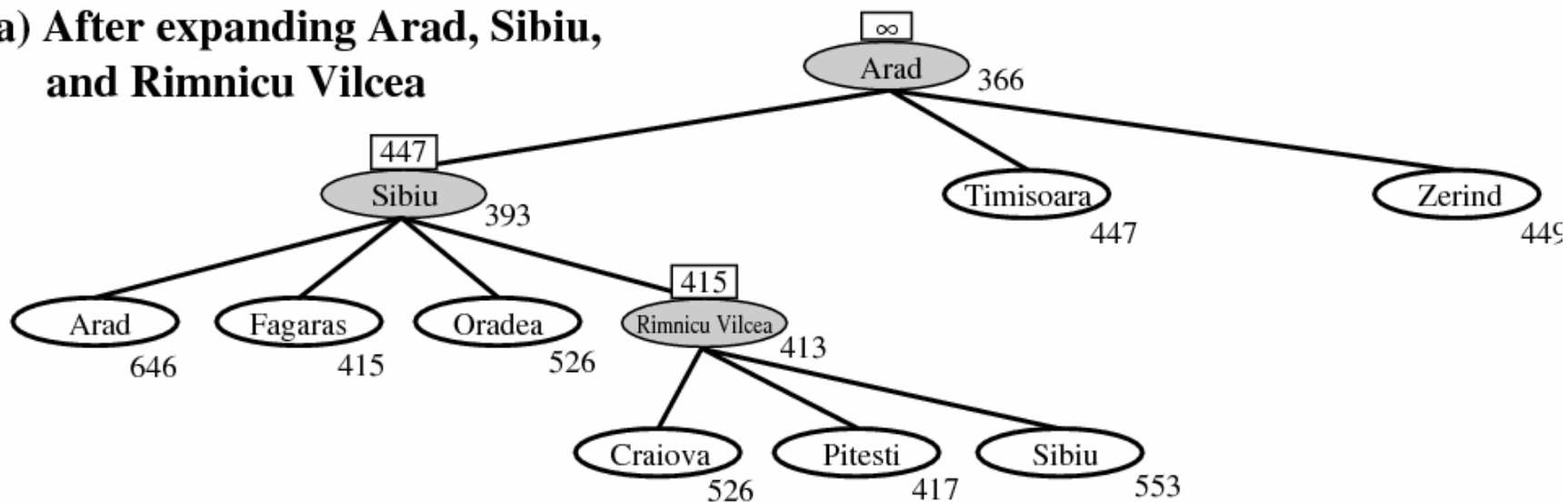
- Completo? Sim, se h for admissível, b for finito e custo das acções >0
- Óptimo? Sim, se h for admissível, b for finito e custo das acções >0
- Espaço? $O(bm)$
- Tempo? $O(b^m)$, mas uma boa heurística pode ter melhorias espetaculares
- Prático se os custos dos passos forem unitários
- Dificuldade em lidar com custos reais, podendo acarretar grande tempo de processamento motivado por regenerações sucessivas de nós.

RBFS - Recursive Best-First Search

- Semelhante à procura em profundidade primeiro recursiva.
- Em vez de continuar indefinidamente por um caminho, usa uma variável (f_limit) como registo da **melhor alternativa** a partir de um qualquer antecessor do nó corrente.
- Se chegar a um nó com um valor f superior a f_limit , retrocede até à alternativa, substituindo, à medida que a recursão retrocede, o valor f de cada nó com o melhor valor de f de cada um dos seus filhos, memorizando assim o melhor valor da sub-árvore abandonada.

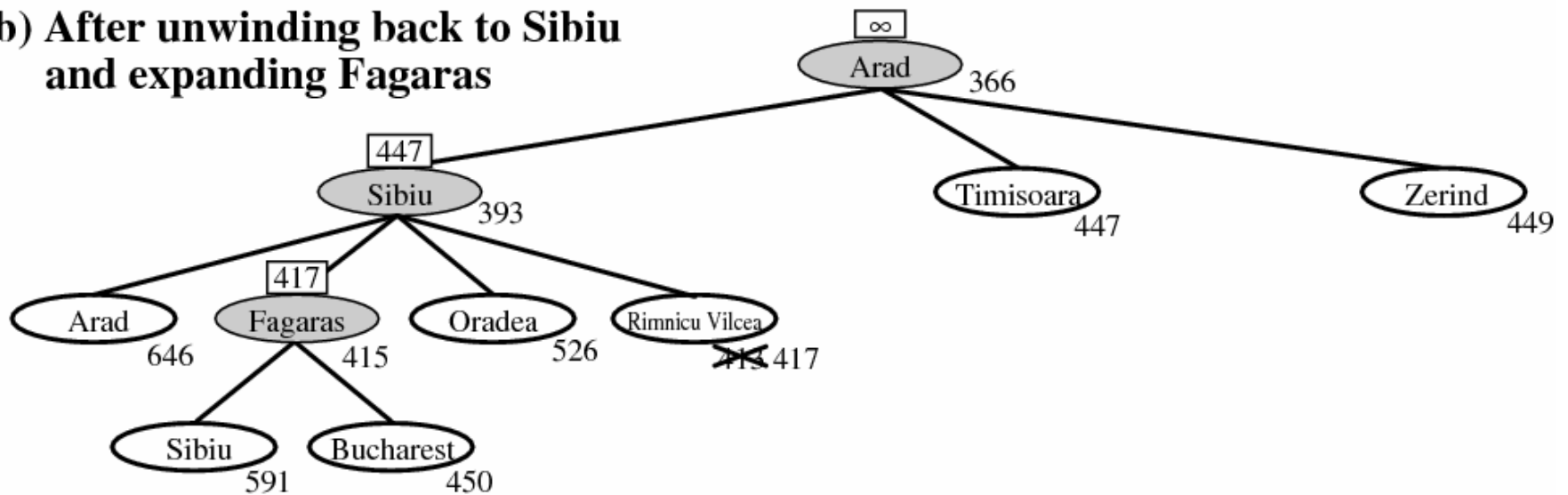
Exemplo RBFS (1)

(a) After expanding Arad, Sibiu, and Rimnicu Vilcea



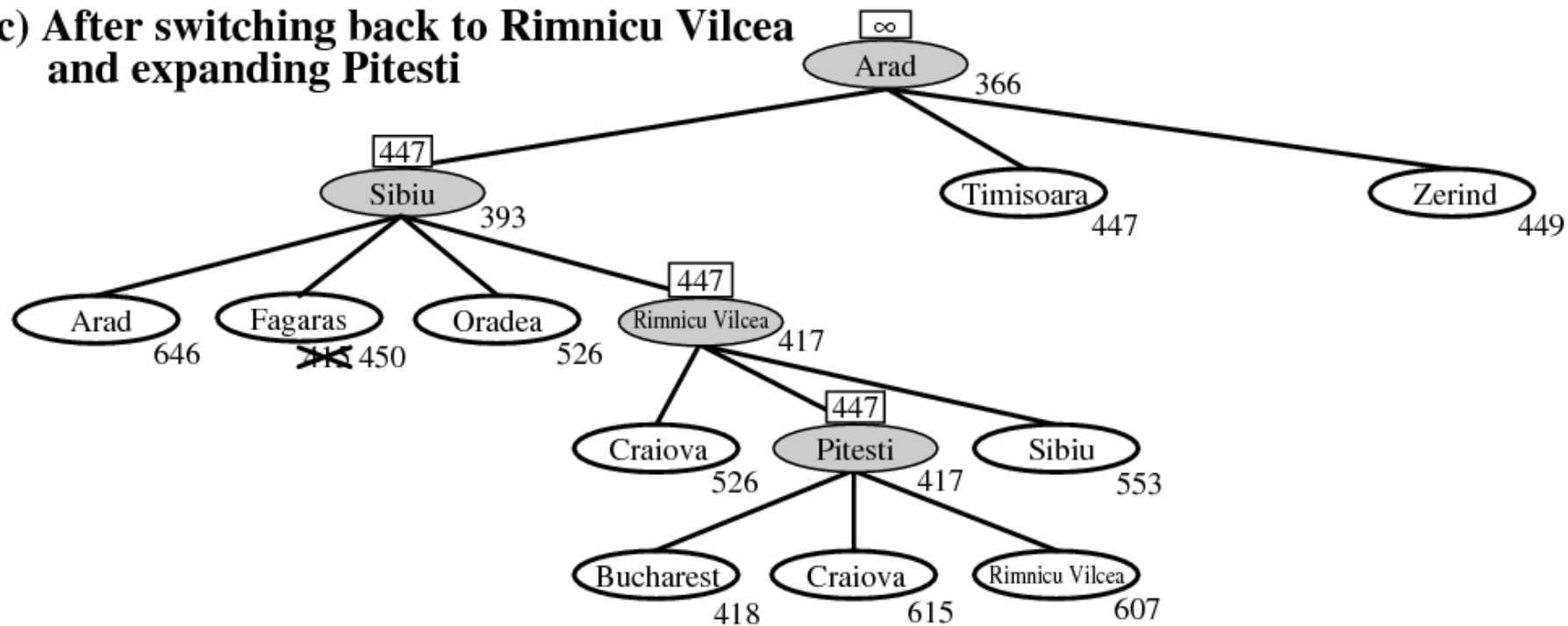
Exemplo RBFS (2)

(b) After unwinding back to Sibiu and expanding Fagaras



Exemplo RBFS (3)

(c) After switching back to Rimnicu Vilcea and expanding Pitesti



function RECURSIVE-BEST-FIRST-SEARCH(*problem*)
returns a solution, or failure
 RBFS(*problem*, MAKE-NODE(INITIAL-STATE[*problem*]), ∞)

function RBFS(*problem*, *node*, *f-limit*) **returns** a solution, or failure and a new *f*-cost limit

if GOAL-TEST[*problem*](STATE[*node*]) **then return** *node*

successors \leftarrow EXPAND(*node*, *problem*)

if *successors* is empty **then return** *failure*, ∞

for each *s* **in** *successors* **do**

$f[s] \leftarrow \text{MAX}(g(s)+h(s), f[\text{node}])$

repeat

best \leftarrow the lowest *f*-value node in *successors*

if $f[\text{best}] > f\text{-limit}$ **then return** *failure*, $f[\text{best}]$

alternative \leftarrow the second lowest *f*-value node among *successors*

result, $f[\text{best}] \leftarrow \text{RBFS}(\text{problem}, \text{best}, \min(f\text{-limit}, \text{alternative}))$

if *result* \neq *failure* **then return** *result*

Propriedades do RBFS

- Completo? Sim, se h for admissível
- Espaço? $O(bm)$
- Ótimo? Sim, se h for admissível
- Melhor que o IDA* em termos de complexidade temporal, mas difícil de caracterizar pois depende da qualidade da heurística
- Continua a ter problemas com regenerações sucessivas de nós: utiliza pouca memória...

SMA* - Simplified Memory-bounded A*

- Tal como no A*, expande-se a melhor folha até ficar com a memória cheia
- Quando a memória fica toda ocupada, esquece a folha mais antiga com o pior valor, e guarda no pai o seu valor, para possível regeneração
- Um nó só é regenerado quando todos os outros caminhos se mostrarem piores do que aqueles do nó esquecido

```

function SMA*(problem) returns a solution sequence
inputs: problem, a problem
local variables: Queue, a queue of nodes ordered by f-cost

Queue ← MAKE-QUEUE(MAKE-NODE(INITIAL-STATE[problem]))
loop do
    if Queue is empty then return failure
    n ← deepest least-f-cost node in Queue
    if GOAL-TEST(n) then return success
    s ← NEXT-SUCCESSOR(n)
    if s is not a goal and is at maximum depth then  $f(s) \leftarrow \infty$ 
    else  $f(s) \leftarrow \text{MAX}(f(n), g(s) + h(s))$ 
    if all of n's successors have been generated then
        update n's f-cost and those of its ancestors if necessary
    if SUCCESSORS(n) all in memory then remove n from Queue
    if memory is full then
        delete shallowest, highest-f-cost node in Queue
        remove it from its parent's successor list
        insert its parent on Queue if necessary
    insert s on Queue
end

```

Propriedades do SMA*

- O SMA* utiliza *toda a memória* disponível para levar a cabo a procura
- O SMA* é *completo se existir uma solução alcançável* (cujo caminho caiba em memória)
- *Ótimo se existir uma solução ótima alcançável*, caso contrário devolve a melhor solução cujo caminho cabe em memória
- Retira da fronteira nós superficiais com valores elevados da função de avaliação. Um nó retirado da fronteira só é regenerado se todos os irmãos forem piores do que ele.
- SMA* é o melhor algoritmo para procurar soluções óptimas, nomeadamente quando o espaço de estados é um grafo, os custos não são uniformes e a *geração de nós é mais dispendiosa do que manter listas de nós abertos e fechados*.
- Mas as limitações de memória podem tornar um problema intratável...

Outros cenários de procura

- Podem-se resolver problemas de procura “online” com ações deterministas em que se **sabem as ações possíveis em cada estado, mas desconhece-se o seu efeito antes das executar**.
 - Algoritmo cego: Online-DFS (assume ações reversíveis)
 - Algoritmo informado: LRTA*
- Existem ainda outros algoritmos que permitem a **alteração dos custos dos arcos em runtime** (exemplo navegação robótica):
 - Dynamic A* (D*) e D* Lite
- Outros algoritmos são **incrementais** e permitem ir melhorando a solução obtida, caso o tempo o permita:
 - ARA* (Anytime repairing A*)
 - AD* (Anytime dynamic A*) = ARA* + D*

Bibliografia

- Capítulos 4.1 e 4.2 (4.5 versões online)