Regras de inferência em Lógica Proposicional

- Modus Ponens

$$\frac{\alpha, \qquad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$$

- Eliminação de $\wedge$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

- Todas as equivalências do slide “Equivalência Lógica” podem ser usadas como regras de inferência:

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)}$$

Exemplo

- Assumindo R_1 a R_5:

$$\neg P_{1,1}, \quad B_{1,1} \Leftrightarrow \left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right), \quad B_{2,1} \Leftrightarrow \left(P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}\right), \quad \neg B_{1,1}, \quad B_{2,1}$$

- Como provar $\neg P_{1,2}$?

$$R_6 : \left(B_{1,1} \Rightarrow \left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right)\right) \wedge \left(\left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \Rightarrow B_{1,1}\right)$$

$$R_7 : \left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \Rightarrow B_{1,1}$$

$$R_8 : \neg B_{1,1} \Rightarrow \neg\left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right)$$

$$R_9 : \neg\left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right)$$

$$R_{10} : \neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$$

- Eliminação de bicondicional
- Eliminação de $\wedge$
- Contraposição
- Modens ponens
- De Morgan

Pesquisa de provas

- Encontrar provas é o mesmo que encontrar soluções para problemas de pesquisa
- A pesquisa pode ser feita para a frente (forward chaining) para derivar um golo (objectivo) ou para trás (backward chaining) a partir do golo
- Pesquisar provas não é mais eficiente do que enumerar os modelos, mas em muitos casos práticos é mais eficiente porque podemos ignorar propriedades irrelevantes.
- Monotonicidade: o conjunto de frases que se concluem só pode crescer à medida que mais informação é acrescentada à base de conhecimento.

para todo o α e β, se $KB \models \alpha$ então $KB \wedge \beta \models \alpha$.

Métodos de Prova

- Os métodos de prova agrupam-se em dois tipos:
- Aplicação de regras de inferência
  - Geração legítima (sólida) de novas proposições a partir de antigas
  - Prova = uma sequência de aplicação de regras de inferência
    - Regras de inferência podem ser operadores em algoritmos de procura
  - Habitualmente obrigam à tradução das frases para uma forma normal
- Verificação de modelos
  - enumeração por tabelas de verdade (sempre exponencial em n)
  - melhoramentos ao retrocesso, e.g Davis-Putnam-Logemann-Loveland
  - procura heurística em espaço de modelos (sólido mas incompleto)
    - e.g., algoritmos trepa-colinas com min-conflitos

Resolução

- Forma Normal Conjuntiva (FNC – universal)
  - Conjunção de disjunções de literais
    - disjunção de literais = cláusula
  - E.g., $(A \lor \neg B) \land (B \lor \neg C \lor \neg D)$
- Regra de inferência Resolução:

$$\frac{l_1 \lor \cdots \lor l_k, \qquad m_1 \lor \cdots \lor m_n}{l_1 \lor \cdots \lor l_{i-1} \lor l_{i+1} \lor \cdots \lor l_k \lor m_1 \lor \cdots \lor m_{j-1} \lor m_{j+1} \lor \cdots \lor m_n}$$

em que l_i e m_j são literais complementares. E.g.,

$$\frac{P_{1,3} \lor P_{2,2}, \qquad \neg P_{2,2}}{P_{1,3}}$$

- Resolução é sólida e completa para a lógica proposicional
  - Apenas deriva frases verdadeiras
  - Pode sempre ser usada para confirmar ou refutar uma frase

Conversão para FNC

$$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

1. Eliminar $\Leftrightarrow$ substituindo $\alpha \Leftrightarrow \beta$ por $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$

$$(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$$

2. Eliminar $\Rightarrow$ substituindo $\alpha \Rightarrow \beta$ por $\neg\alpha \vee \beta$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge (\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

3. Deslocar $\neg$ para dentro recorrendo às leis de De Morgan e absorção da dupla negação:

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge ((\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

4. Aplicar distributividade ($\vee$ sobre $\wedge$):

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge (\neg P_{1,2} \vee B_{1,1}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee B_{1,1})$$

Algoritmo de Resolução

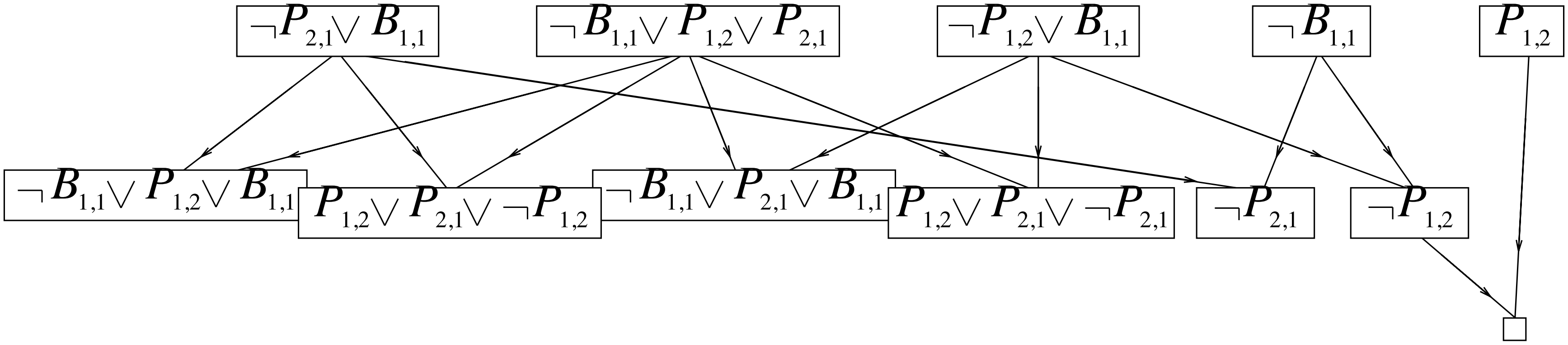
- Prova por contradição, i.e., demonstrar que KB∧¬α é insatisfazível

function PL-RESOLUTION(KB, α) **returns** *true* or *false*

    clauses ← the set of clauses in the CNF representation of $KB \wedge \neg\alpha$
    new ← { }
    loop do
        for each C_i, C_j **in** *clauses* **do**
            resolvents ← PL-RESOLVE(C_i, C_j)
            if *resolvents* contains the empty clause **then return** *true*
            new ← *new* ∪ *resolvents*
        if *new* ⊆ *clauses* **then return** *false*
        clauses ← *clauses* ∪ *new*

Exemplo de Resolução

- $KB = B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1}) \land \neg B_{1,1}$ $\alpha = \neg P_{1,2}$
- $KB \land \neg\alpha$ na FCN:
  - $(\neg B_{1,1} \lor P_{1,2} \lor P_{2,1}) \land (\neg P_{1,2} \lor B_{1,1}) \land (\neg P_{2,1} \lor B_{1,1}) \land \neg B_{1,1} \land P_{1,2}$



Encadeamento para a frente e para trás

- A completude da resolução tornam-no num modelo de inferência muito importante
- Uma parte significativa do conhecimento no mundo real apenas necessita de cláusulas de uma forma restrita:
- Cláusulas na Forma de Horn (ou Cláusulas de Horn)
  - Cláusula de Horn = disjunção de literais com, no máximo, um literal positivo
    - $\neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_n \vee \beta$
  - Podem ser re-escritas como uma implicação
    - $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$
  - Modus Ponens é completa para KBs de Horn:

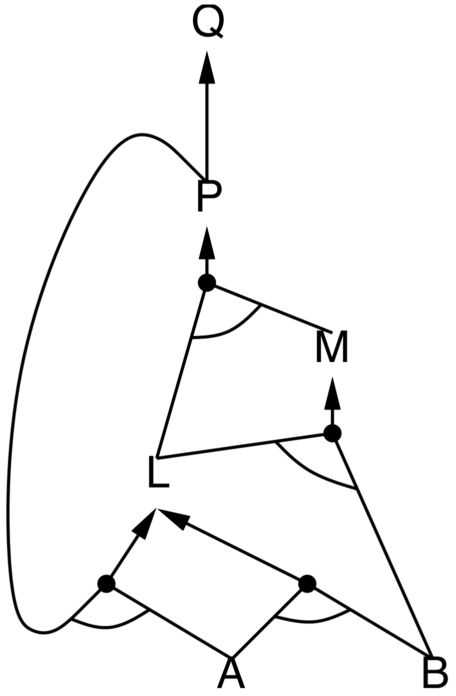
$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \qquad \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta}{\beta}$$

  - Pode ser utilizada com encadeamento para a frente ou para trás.
  - Estes algoritmos são muito naturais e executam em tempo linear.

Encadeamento para a frente

- Ideia: disparar toda a regra cujas premissas estão satisfeitas na KB,
- adicionar a sua conclusão à KB, até se chegar à pergunta

$$
\begin{aligned}
&P \Rightarrow Q\\
&L \wedge M \Rightarrow P\\
&B \wedge L \Rightarrow M\\
&A \wedge P \Rightarrow L\\
&A \wedge B \Rightarrow L\\
&A\\
&B
\end{aligned}
$$

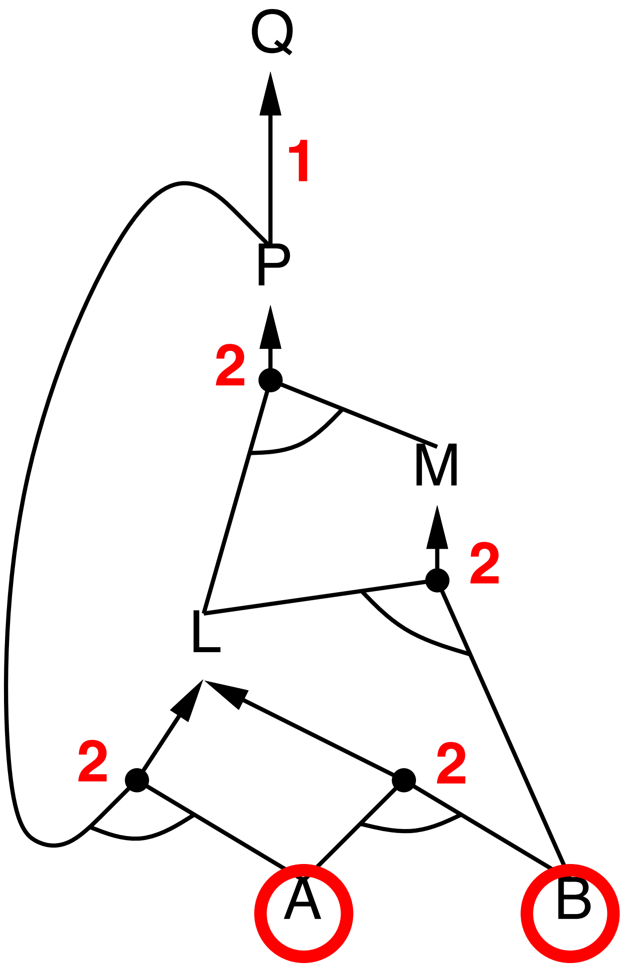


Algoritmo de encadeamento para a frente

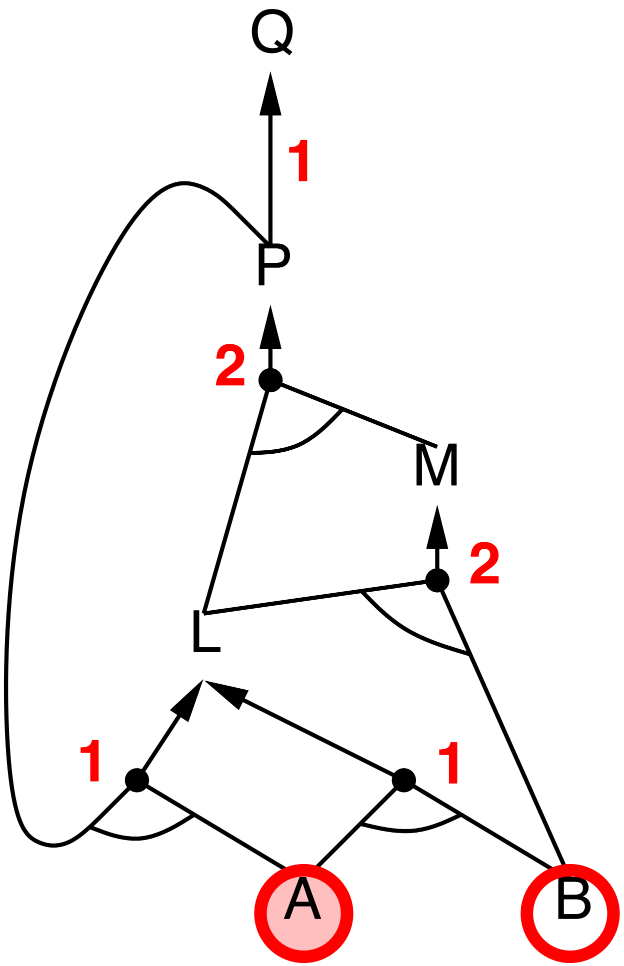
```
function PL-FC-ENTAILS?(KB, q) returns true or false
  local variables: count, a table, indexed by clause, initially the number of premises
                   inferred, a table, indexed by symbol, each entry initially false
                   agenda, a list of symbols, initially the symbols known to be true

   while agenda is not empty do
       p ← POP(agenda)
       unless inferred[p] do
           inferred[p] ← true
           for each Horn clause c in whose premise p appears do
               decrement count[c]
               if count[c] = 0 then do
                   if HEAD[c] = q then return true
                   PUSH(HEAD[c], agenda)
   return false
```

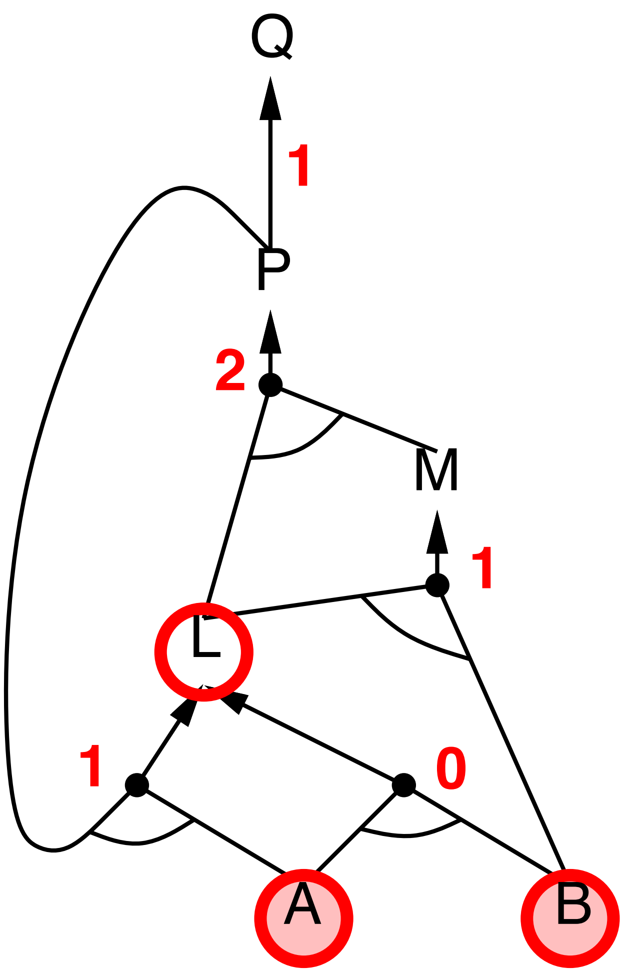
Exemplo de encadeamento para a frente



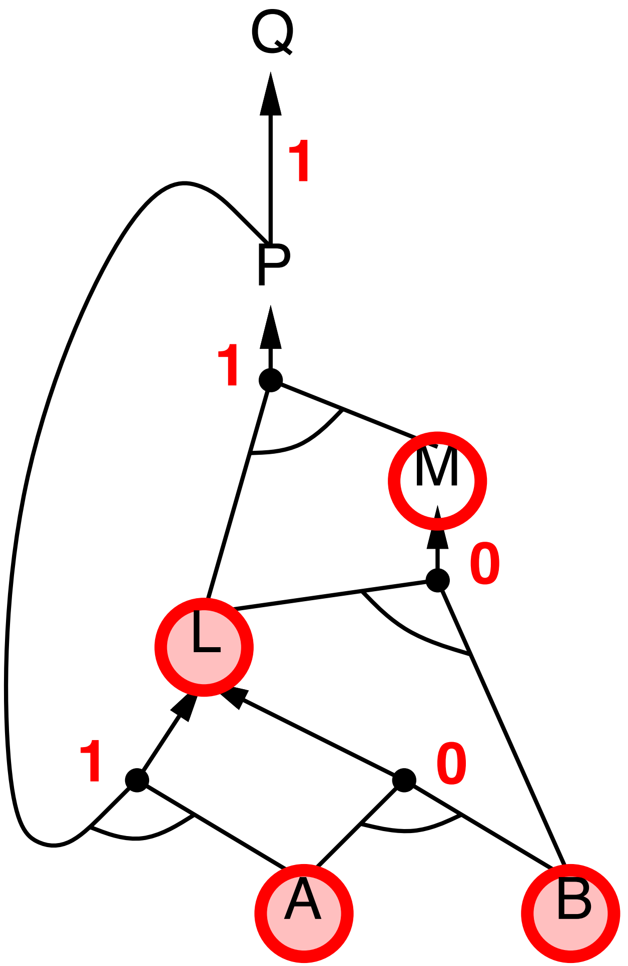
Exemplo de encadeamento para a frente



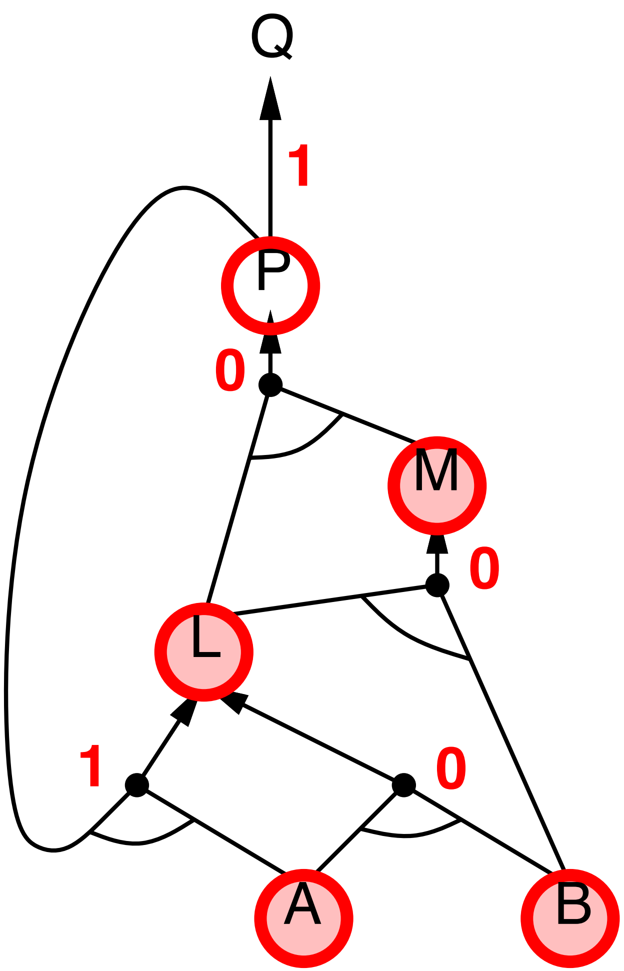
Exemplo de encadeamento para a frente



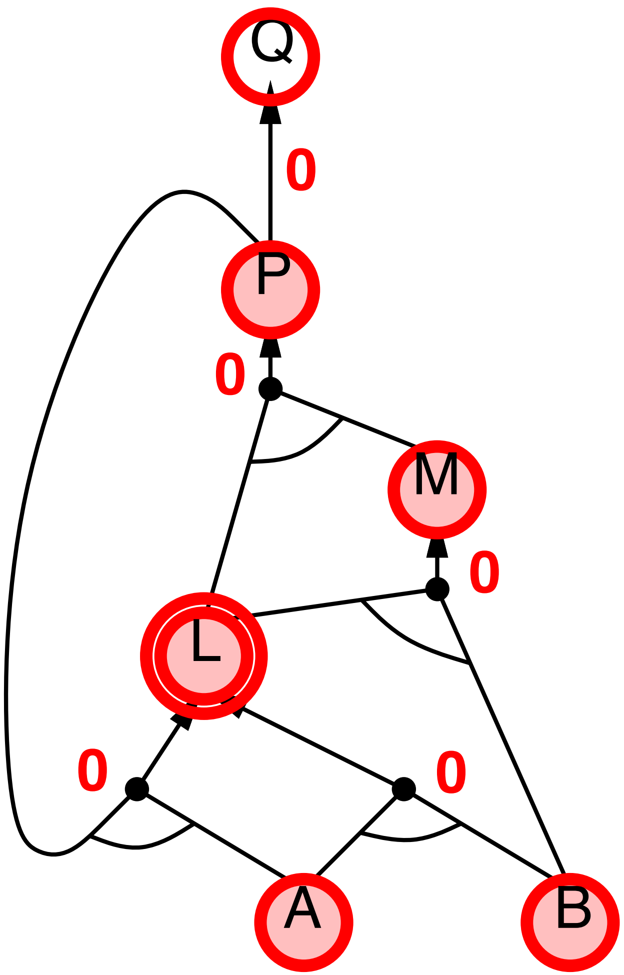
Exemplo de encadeamento para a frente



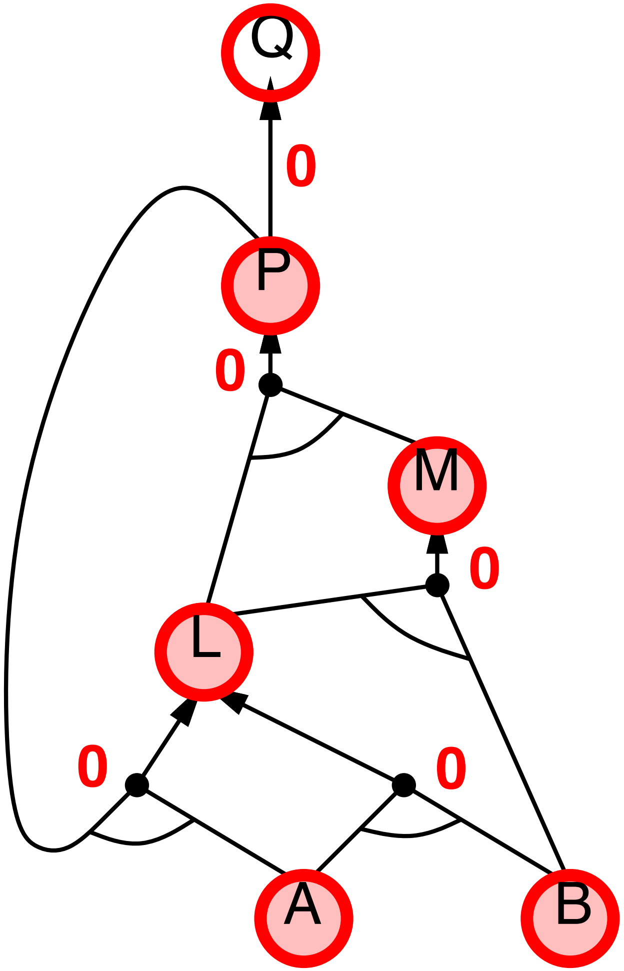
Exemplo de encadeamento para a frente



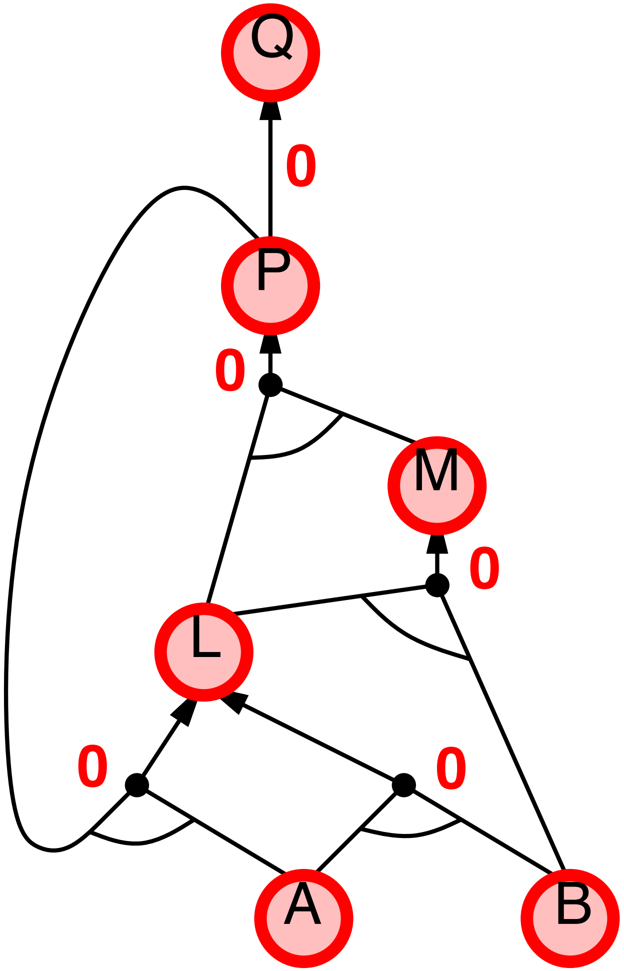
Exemplo de encadeamento para a frente



Exemplo de encadeamento para a frente



Exemplo de encadeamento para a frente



Demonstração de completude

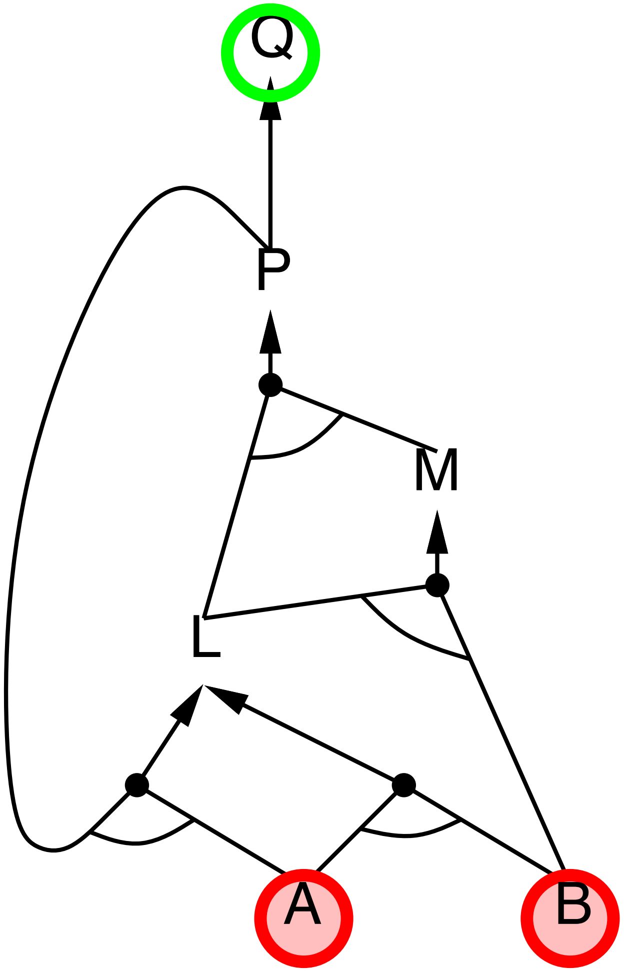
- EF deriva toda a proposição atómica que é concluída a partir de KB

1. EF atinge um ponto fixo em que não são derivadas novas proposições atómicas
2. Considere-se o estado final como um modelo m, atribuindo verdadeiro/falso aos símbolos
3. Toda a cláusula em KB inicial é verdadeira em m
   - Demo: Suponha-se que a cláusula $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \Rightarrow \beta$ é falsa em m
   - Logo $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ é verdadeiro em m e β é falso em m
   - Logo o algoritmo não atingiu um ponto fixo!
4. Portanto m é modelo de KB
5. Se $KB \vDash q$, q é verdadeiro em todo o modelo de KB, incluindo m

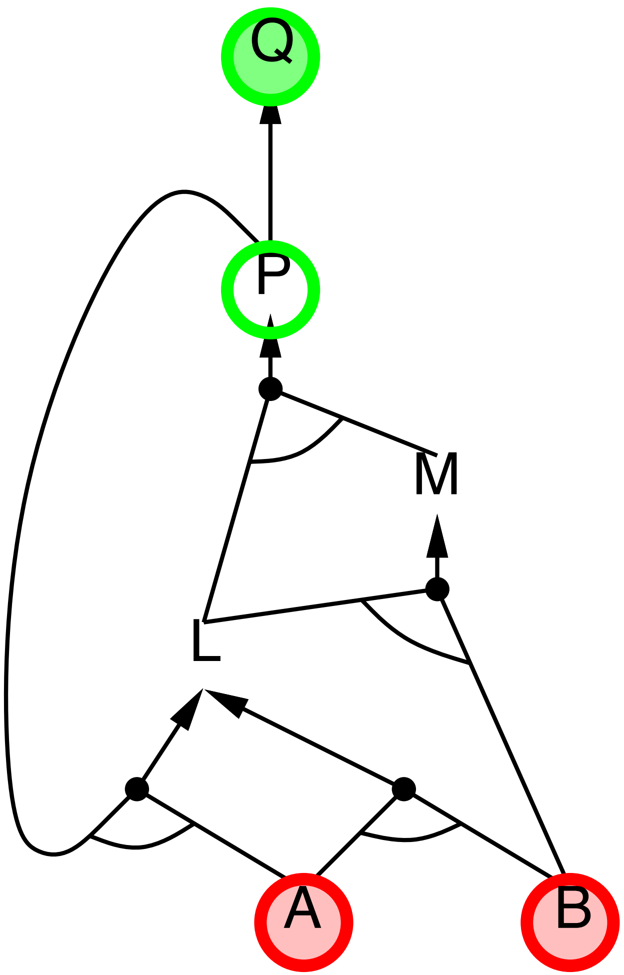
Encadeamento para trás

- Ideia: andar ao contrário a partir da pergunta q:
  - para provar q por ET,
    - verificar se q já é sabido, ou
    - provar por ET todas as premissas de alguma regra concluindo q
- Evitar ciclos: verificar se um novo sub-objectivo já se encontra na pilha de objectivos
- Evitar trabalho repetido: verificar se o novo sub-objectivo
  1. já foi demonstrado verdadeiro, ou
  2. já falhou

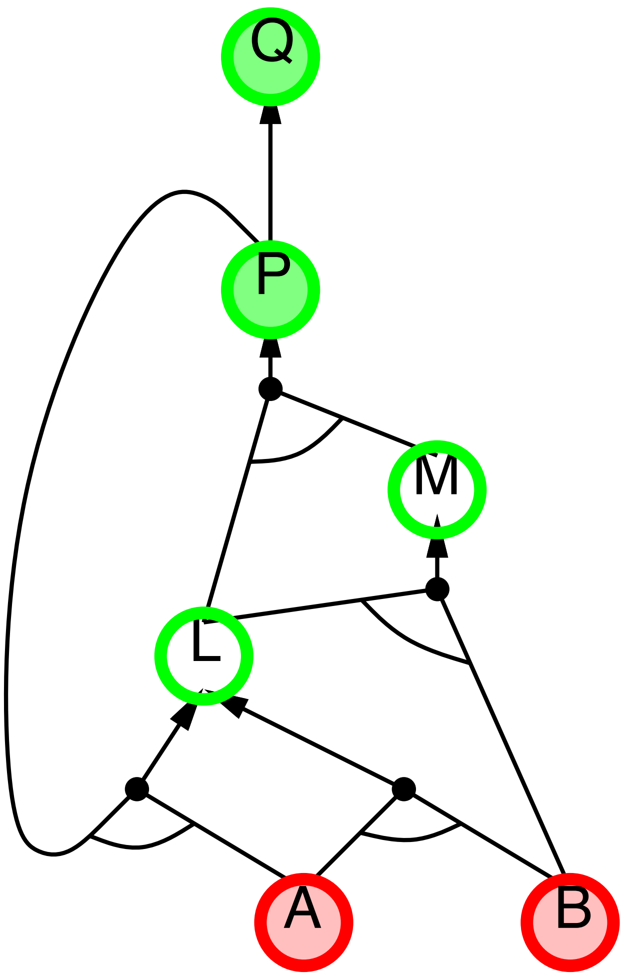
Exemplo de encadeamento para trás



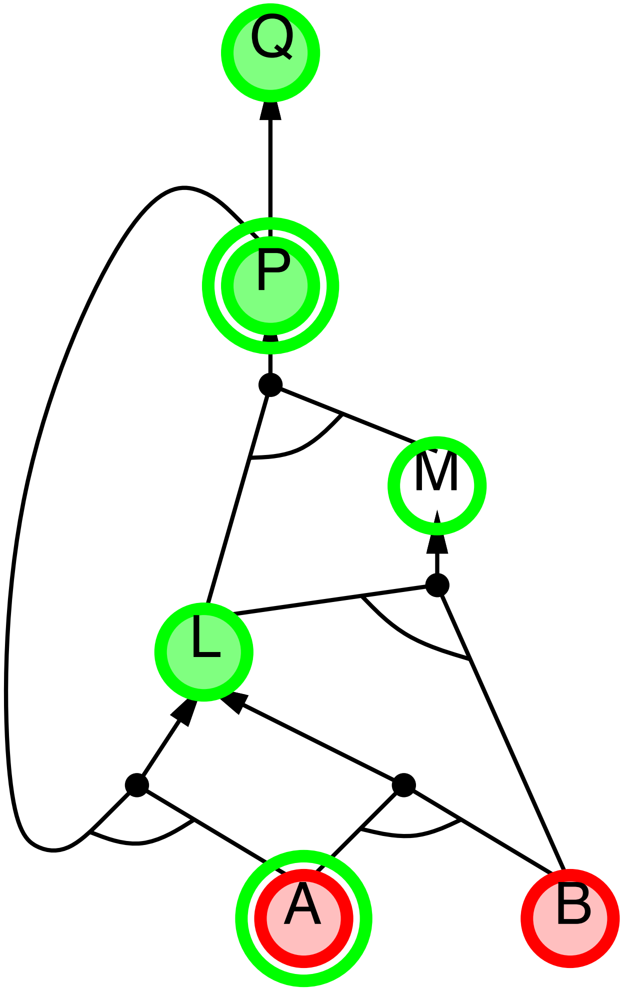
Exemplo de encadeamento para trás



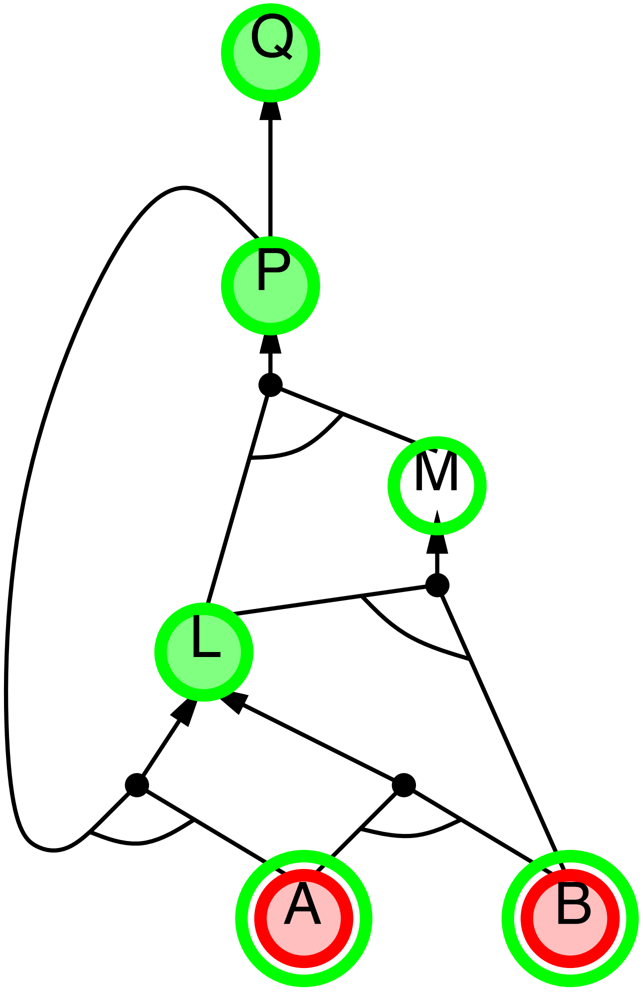
Exemplo de encadeamento para trás



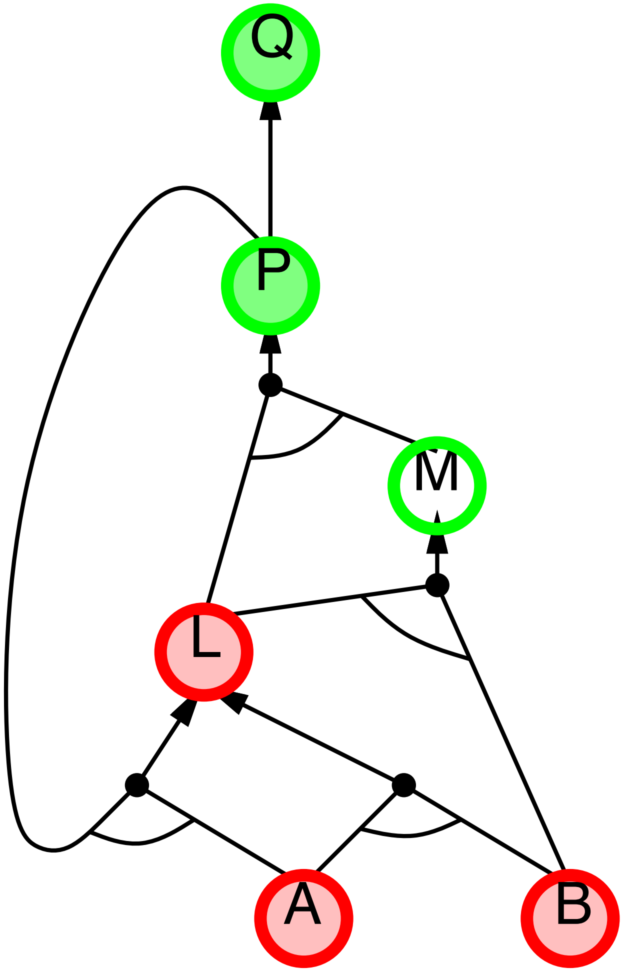
Exemplo de encadeamento para trás



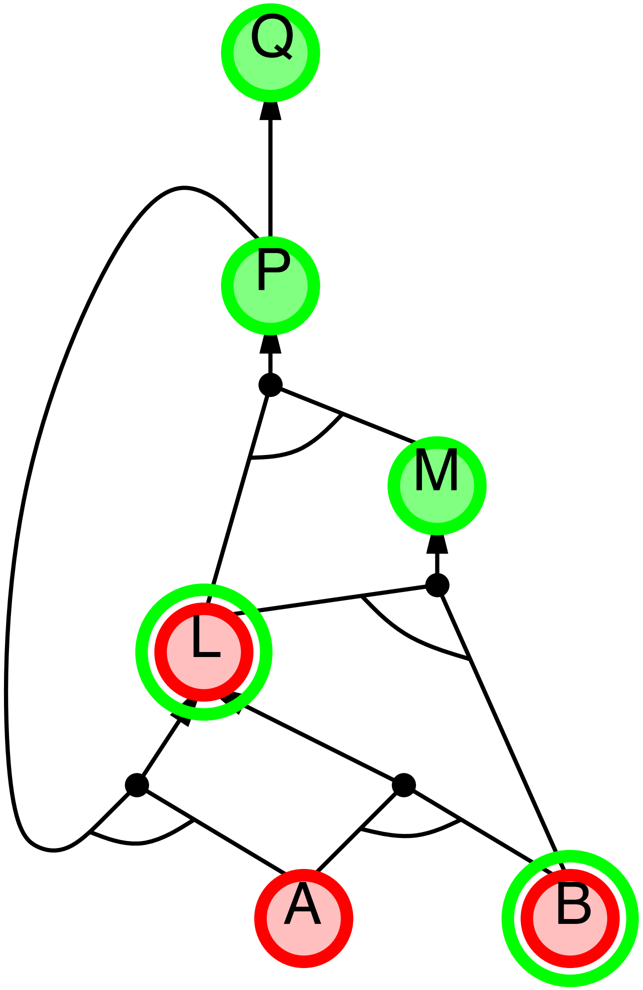
Exemplo de encadeamento para trás



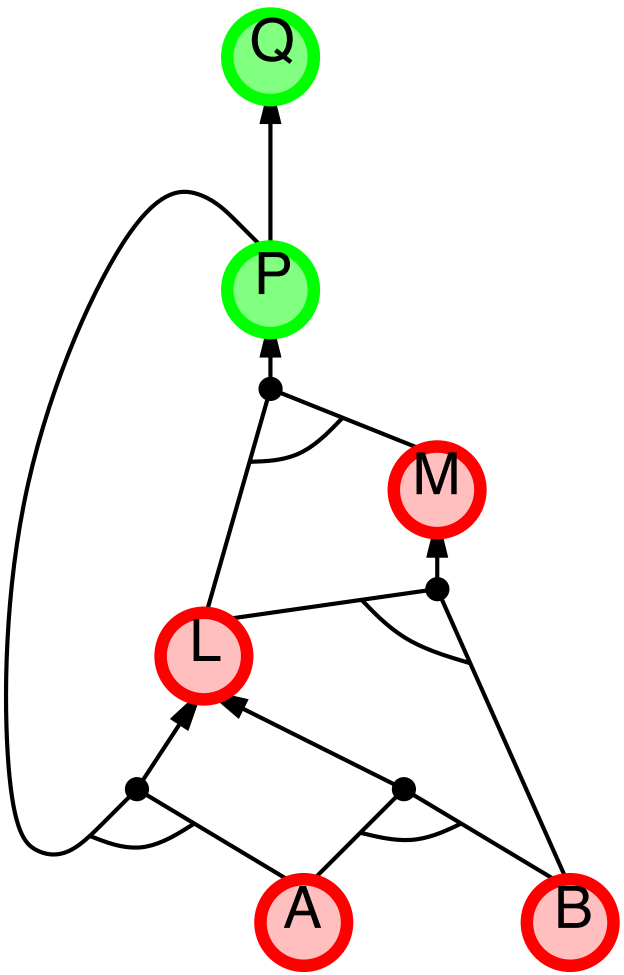
Exemplo de encadeamento para trás



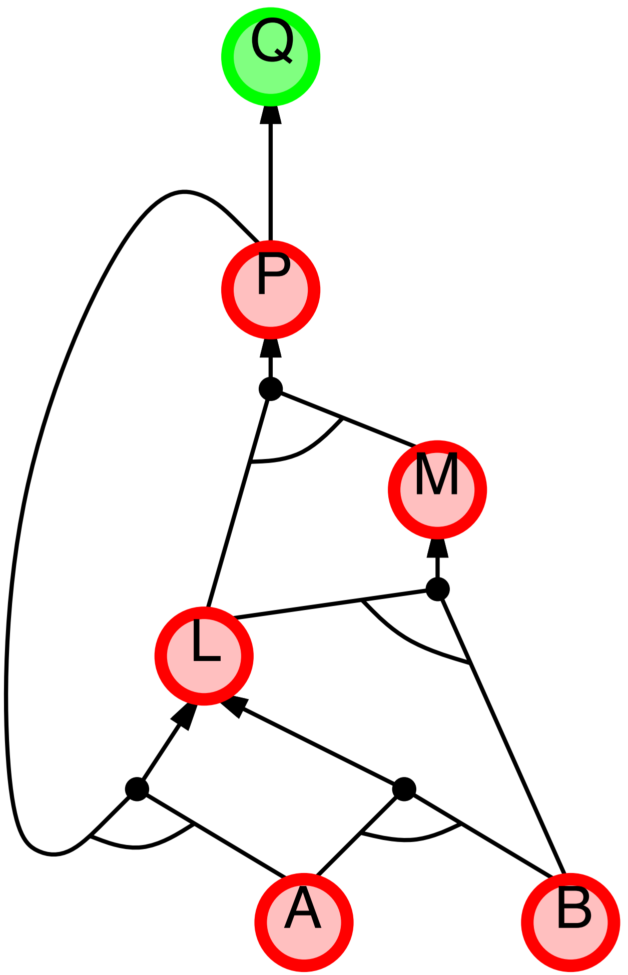
Exemplo de encadeamento para trás



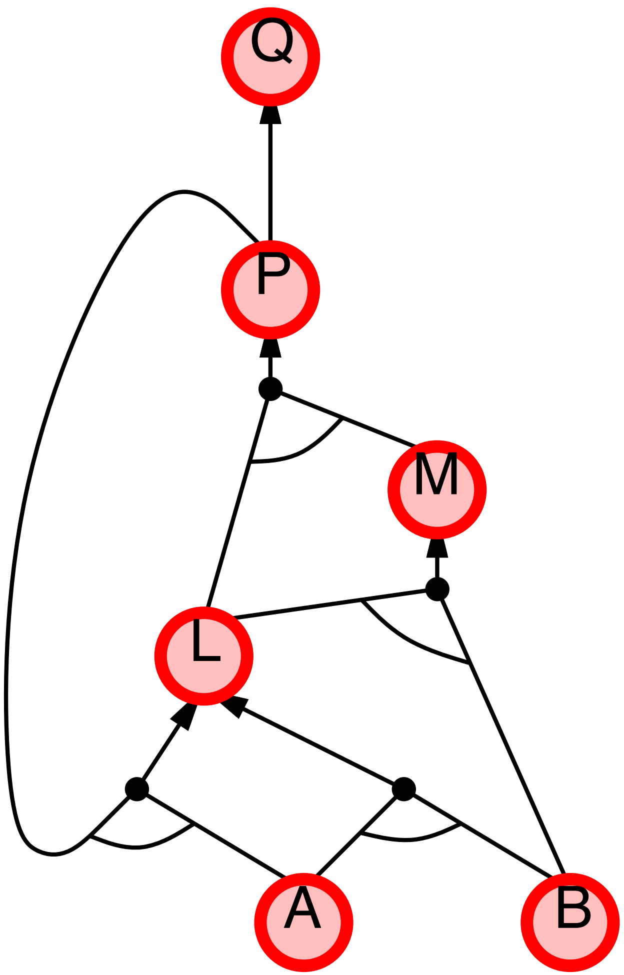
Exemplo de encadeamento para trás



Exemplo de encadeamento para trás



Exemplo de encadeamento para trás



Encadeamento para a frente vs. para trás

- EF é guiado pelos dados, cf. processamento automático, inconsciente, e.g., reconhecimento de objectos, decisões rotineiras
- Pode efectuar muito trabalho desnecessário que é irrelevante para o objectivo
- ET é guiado pelo objectivo, adequadao para a resolução de problemas, e.g.,
  - Onde estão as minhas chaves?
  - Como posso fazer um doutoramento?
- Complexidade do ET pode ser muito inferior do que linear no tamanho da KB

Verificação eficiente de satisfatibilidade

- Existem algoritmos eficientes de satisfatibilidade, baseados em verificação de modelos, que nos permitem lidar com problemas combinatórios complexos
  - Todos os problemas NP-completos podem ser reduzidos ao problema da satisfatibilidade de cláusulas de lógica proposicional
- Duas famílias de algoritmos:
  - Baseados em retrocesso, e.g. Davis-Putnam-Logemann-Loveland
  - Por melhoramento iterativo (procura local), e.g. WalkSAT

Algoritmo DPLL

- Enumeração recursiva em profundidade primeiro de todos os modelos possíveis para proposições na FNC, com as seguintes melhorias em relação à enumeração por tabelas de verdade:
  - Terminação com modelos parciais: uma clausula é verdadeira quando pelo menos um dos literais é verdadeiro. Logo, os restantes valores dos símbolos proposicionais são irrelevantes.
  - Heurística dos símbolos puros: um símbolo é puro quando ocorre sempre com o mesmo sinal em todas as cláusulas. Nas proposições abaixo, A e ¬B são puros

$$(A \lor \neg B) \land (\neg B \lor \neg C) \land (C \lor A)$$

  - Heurística da cláusula unitária: Quando todos os literais são falsos à excepção de um, o valor desse fica automaticamente definido. Pode originar propagações unitárias em cascata.

Algoritmo de Davis-Putnam

function DPLL-SATISFIABLE?(s) **returns** *true* or *false*
  inputs: s, a sentence in propositional logic

  clauses ← the set of clauses in the CNF representation of s
  symbols ← a list of the proposition symbols in s
  return DPLL(*clauses*, *symbols*, [ ])

---

function DPLL(*clauses*, *symbols*, *model*) **returns** *true* or *false*

  if every clause in *clauses* is true in *model* **then return** *true*
  if some clause in *clauses* is false in *model* **then return** *false*
  P, *value* ← FIND-PURE-SYMBOL(*symbols*, *clauses*, *model*)
  if P is non-null **then return** DPLL(*clauses*, *symbols*–P, [$P =$ *value*|*model*])
  P, *value* ← FIND-UNIT-CLAUSE(*clauses*, *model*)
  if P is non-null **then return** DPLL(*clauses*, *symbols*–P, [$P =$ *value*|*model*])
  P ← FIRST(*symbols*); *rest* ← REST(*symbols*)
    return DPLL(*clauses*, *rest*, [$P =$ *true*|*model*]) **or** DPLL(*clauses*, *rest*,
[$P =$ *false*|*model*])

Algoritmo de Davis-Putnam

Verifica se todas as cláusulas são verdadeiras. Se forem, s é satisfazível.

function DPLL-SATISFIABLE?(s) **returns** *true* or *false*
  inputs: s, a sentence in propositional logic

  clauses ← the set of clauses in the CNF representation of s
  symbols ← a list of the proposition symbols in s
  return DPLL(*clauses*, *symbols*, [ ])

---

function DPLL(*clauses*, *symbols*, *model*) **returns** *true* or *false*

  if every clause in *clauses* is true in *model* **then return** *true*
  if some clause in *clauses* is false in *model* **then return** *false*
  P, *value* ← FIND-PURE-SYMBOL(*symbols*, *clauses*, *model*)
  if P is non-null **then return** DPLL(*clauses*, *symbols*–P, [P = *value*|*model*])
  P, *value* ← FIND-UNIT-CLAUSE(*clauses*, *model*)
  if P is non-null **then return** DPLL(*clauses*, *symbols*–P, [P = *value*|*model*])
  P ← FIRST(*symbols*); *rest* ← REST(*symbols*)
    return DPLL(*clauses*, *rest*, [P = *true*|*model*]) **or** DPLL(*clauses*, *rest*,
[P = *false*|*model*])

Algoritmo de Davis-Putnam

Verifica se alguma cláusula é falsa. Se for, s é insatisfazível.

```
function DPLL-SATISFIABLE?(s) returns true or false
   inputs: s, a sentence in propositional logic

   clauses ← the set of clauses in the CNF representation of s
   symbols ← a list of the proposition symbols in s
   return DPLL(clauses, symbols, [])
```

```
function DPLL(clauses, symbols, model) returns true or false

   if every clause in clauses is true in model then return true
   if some clause in clauses is false in model then return false
   P, value ← FIND-PURE-SYMBOL(symbols, clauses, model)
   if P is non-null then return DPLL(clauses, symbols–P, [P = value|model])
   P, value ← FIND-UNIT-CLAUSE(clauses, model)
   if P is non-null then return DPLL(clauses, symbols–P, [P = value|model])
   P ← FIRST(symbols); rest ← REST(symbols)
      return DPLL(clauses, rest, [P = true|model]) or DPLL(clauses, rest,
[P = false|model])
```

Algoritmo de Davis-Putnam

Para um literal puro, atribui o valor de verdade correspondente:
T se literal positivo
F se literal negativo

function DPLL-SATISFIABLE?(s) **returns** *true* or *false*
inputs: s, a sentence in propositional logic

clauses ← the set of clauses in the CNF representation of s
symbols ← a list of the proposition symbols in s
return DPLL(*clauses*, *symbols*, [ ])

---

function DPLL(*clauses*, *symbols*, *model*) **returns** *true* or *false*

if every clause in *clauses* is true in *model* **then return** *true*
if some clause in *clauses* is false in *model* **then return** *false*
P, *value* ← FIND-PURE-SYMBOL(*symbols*, *clauses*, *model*)
if P is non-null **then return** DPLL(*clauses*, *symbols*–P, [P = *value*|*model*])
P, *value* ← FIND-UNIT-CLAUSE(*clauses*, *model*)
if P is non-null **then return** DPLL(*clauses*, *symbols*–P, [P = *value*|*model*])
P ← FIRST(*symbols*); *rest* ← REST(*symbols*)
return DPLL(*clauses*, *rest*, [P = *true*|*model*]) **or** DPLL(*clauses*, *rest*, [P = *false*|*model*])

Algoritmo de Davis-Putnam

Para uma cláusula unitária, atribui o valor de verdade ao literal:
T se literal positivo
F se literal negativo

```
function DPLL-SATISFIABLE?(s) returns true or false
   inputs: s, a sentence in propositional logic

   clauses ← the set of clauses in the CNF representation of s
   symbols ← a list of the proposition symbols in s
   return DPLL(clauses, symbols, [])

function DPLL(clauses, symbols, model) returns true or false

   if every clause in clauses is true in model then return true
   if some clause in clauses is false in model then return false
   P, value ← FIND-PURE-SYMBOL(symbols, clauses, model)
   if P is non-null then return DPLL(clauses, symbols–P, [P = value|model])
   P, value ← FIND-UNIT-CLAUSE(clauses, model)
   if P is non-null then return DPLL(clauses, symbols–P, [P = value|model])
   P ← FIRST(symbols); rest ← REST(symbols)
      return DPLL(clauses, rest, [P = true|model]) or DPLL(clauses, rest,
[P = false|model])
```

Algoritmo de Davis-Putnam

function DPLL-SATISFIABLE?(s) **returns** *true* or *false*
  inputs: s, a sentence in propositional logic

  clauses ← the set of clauses in the CNF representation of s
  symbols ← a list of the proposition symbols in s
  return DPLL(*clauses*, *symbols*, [ ])

---

function DPLL(*clauses*, *symbols*, *model*) **returns** *true* or *false*

  if every clause in *clauses* is true in *model* **then return** *true*
  if some clause in *clauses* is false in *model* **then return** *false*
  P, *value* ← FIND-PURE-SYMBOL(*symbols*, *clauses*, *model*)
  if P is non-null **then return** DPLL(*clauses*, *symbols*–P, [P = *value*|*model*])
  P, *value* ← FIND-UNIT-CLAUSE(*clauses*, *model*)
  if P is non-null **then return** DPLL(*clauses*, *symbols*–P, [P = *value*|*model*])
  P ← FIRST(*symbols*); *rest* ← REST(*symbols*)
    return DPLL(*clauses*, *rest*, [P = *true*|*model*]) **or** DPLL(*clauses*, *rest*, [P = *false*|*model*])

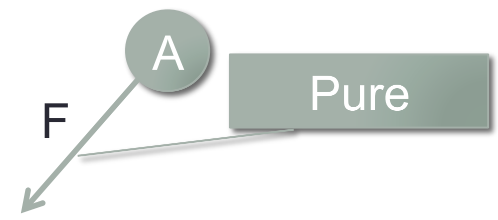
Escolhe uma variável sem valor de verdade atribuído e, recursivamente, chama o DPLL para ambos os casos i.e. atribuíndo o valor T ou F.

Exemplo de aplicação

- $\neg A \lor B$
- $\neg A \lor \neg C \lor D$
- $B \lor \neg C$
- $\neg B \lor C$
- $\neg C \lor D$
- $\neg C \lor \neg D$

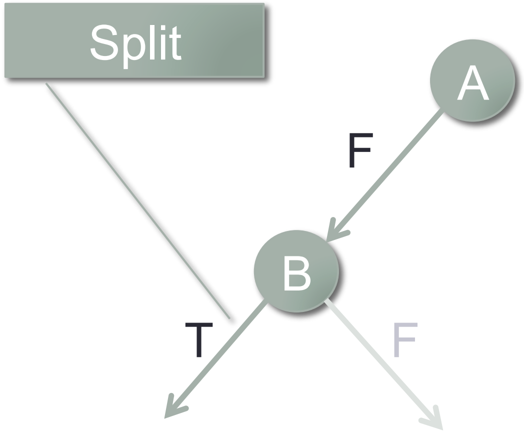
Exemplo de aplicação

- $\neg A \lor B$
- $\neg A \lor \neg C \lor D$
- $B \lor \neg C$
- $\neg B \lor C$
- $\neg C \lor D$
- $\neg C \lor \neg D$



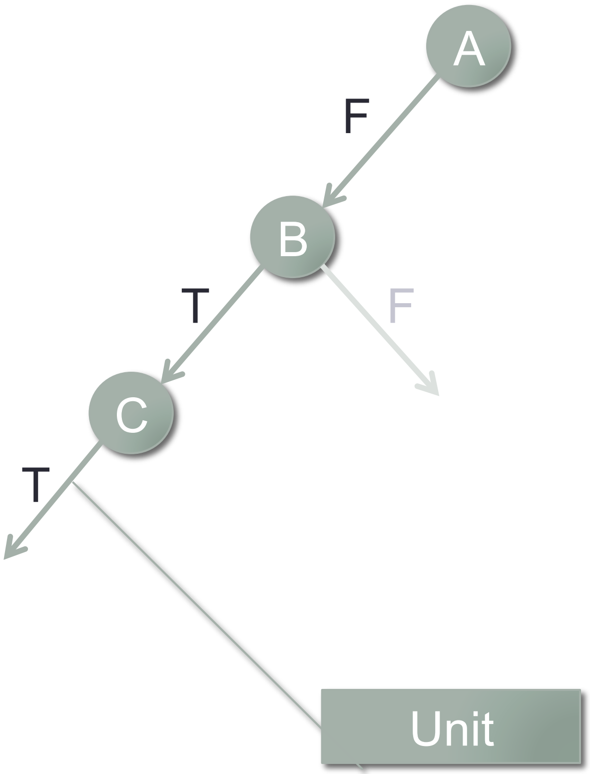
Exemplo de aplicação

- $\neg A \lor B$
- $\neg A \lor \neg C \lor D$
- $B \lor \neg C$
- $\neg B \lor C$
- $\neg C \lor D$
- $\neg C \lor \neg D$



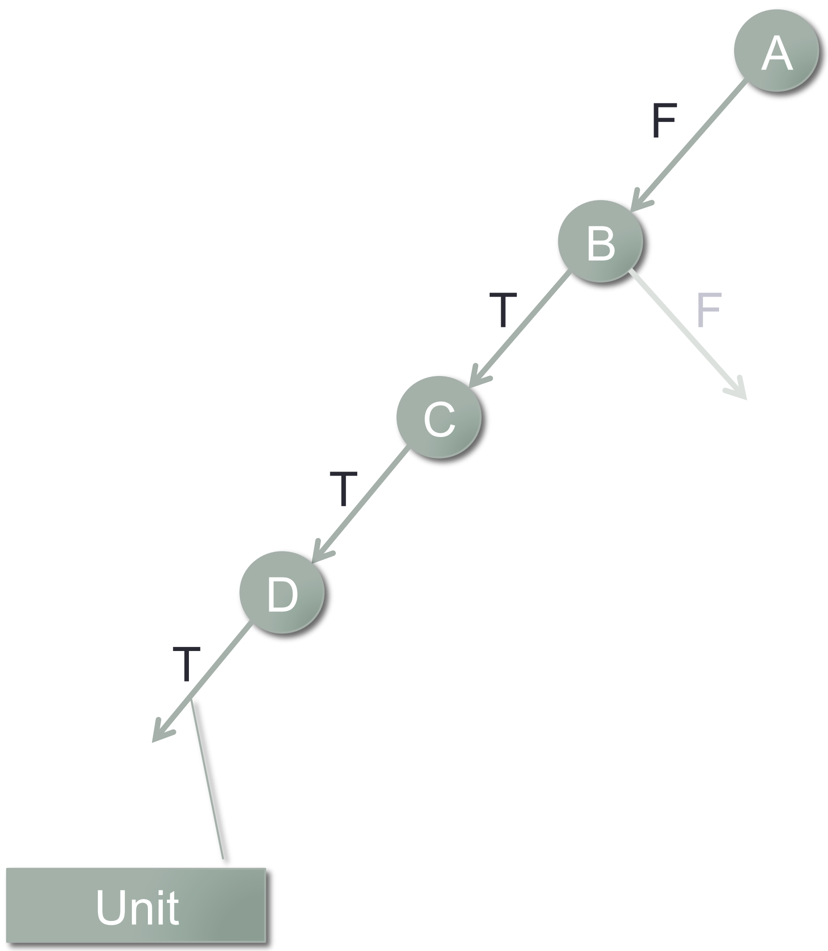
Exemplo de aplicação

- $\neg A \vee B$
- $\neg A \vee \neg C \vee D$
- $B \vee \neg C$
- $\neg B \vee C$
- $\neg C \vee D$
- $\neg C \vee \neg D$



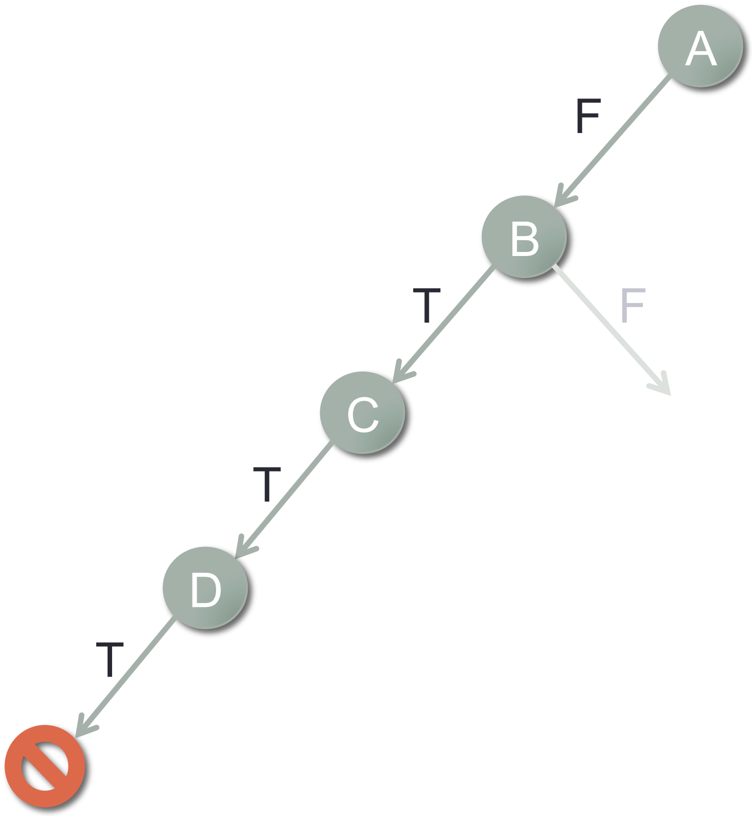
Exemplo de aplicação

- $\neg A \vee B$
- $\neg A \vee \neg C \vee D$
- $B \vee \neg C$
- $\neg B \vee C$
- $\neg C \vee D$
- $\neg C \vee \neg D$



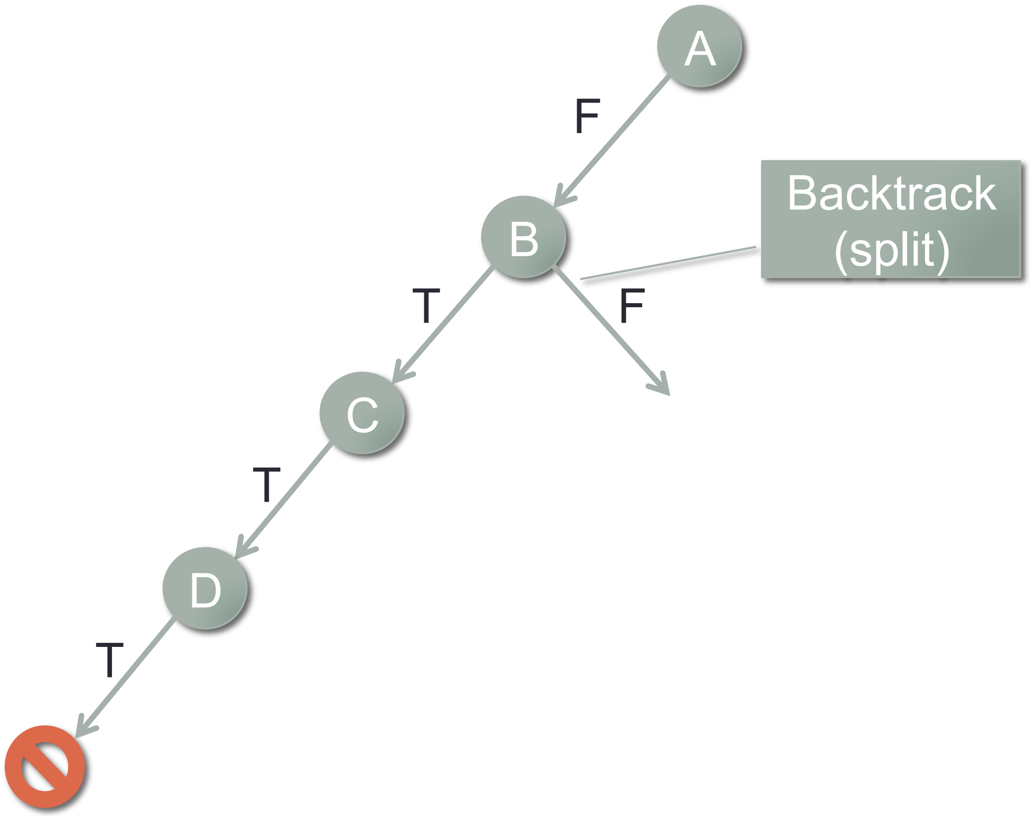
Exemplo de aplicação

- $\neg A \vee B$
- $\neg A \vee \neg C \vee D$
- $B \vee \neg C$
- $\neg B \vee C$
- $\neg C \vee D$
- $\neg C \vee \neg D$



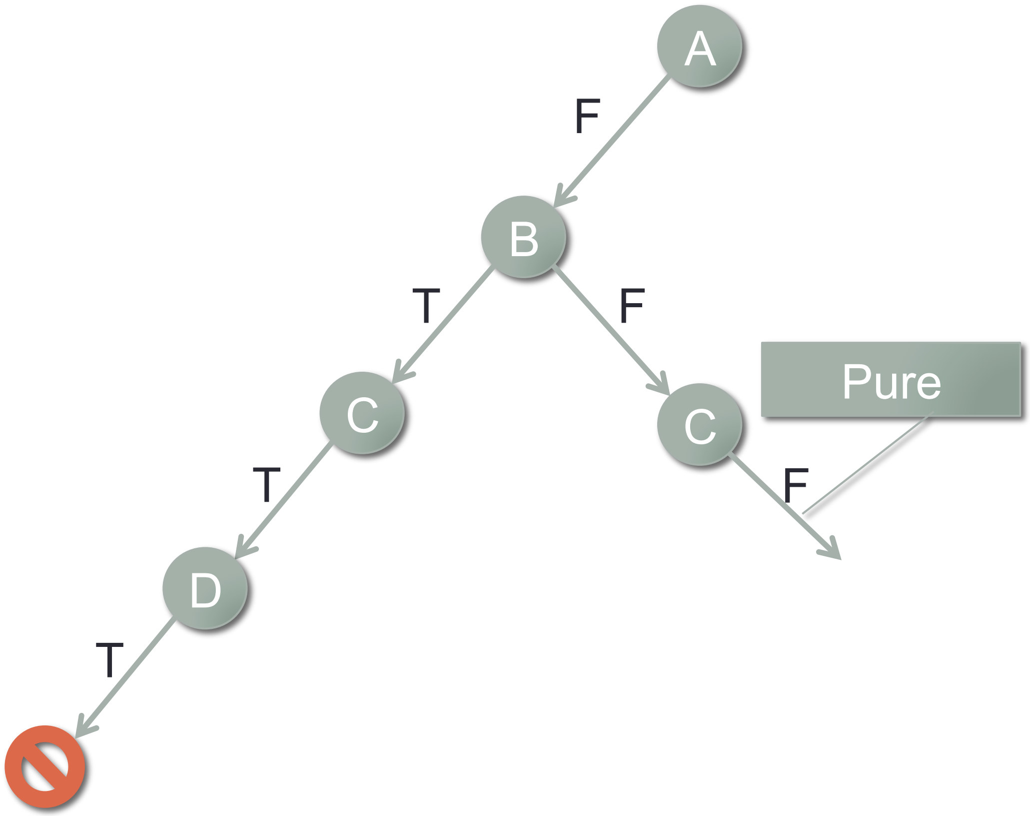
Exemplo de aplicação

- $\neg A \vee B$
- $\neg A \vee \neg C \vee D$
- $B \vee \neg C$
- $\neg B \vee C$
- $\neg C \vee D$
- $\neg C \vee \neg D$



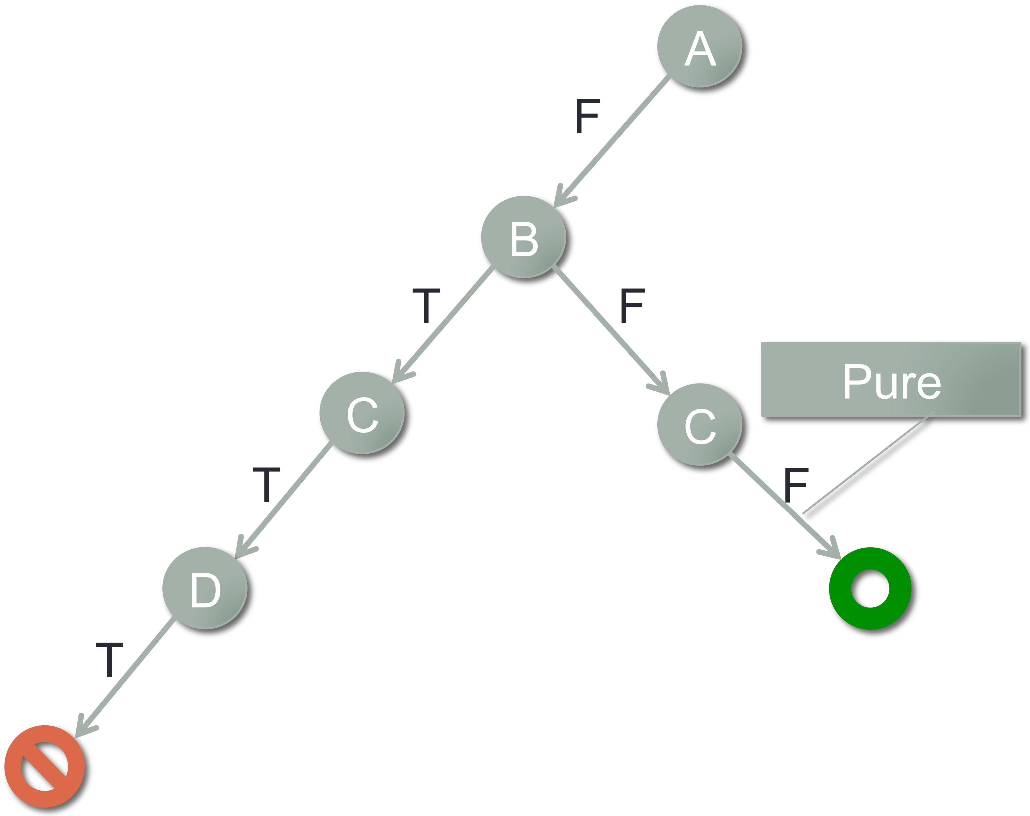
Exemplo de aplicação

- $\neg A \vee B$
- $\neg A \vee \neg C \vee D$
- $B \vee \neg C$
- $\neg B \vee C$
- $\neg C \vee D$
- $\neg C \vee \neg D$



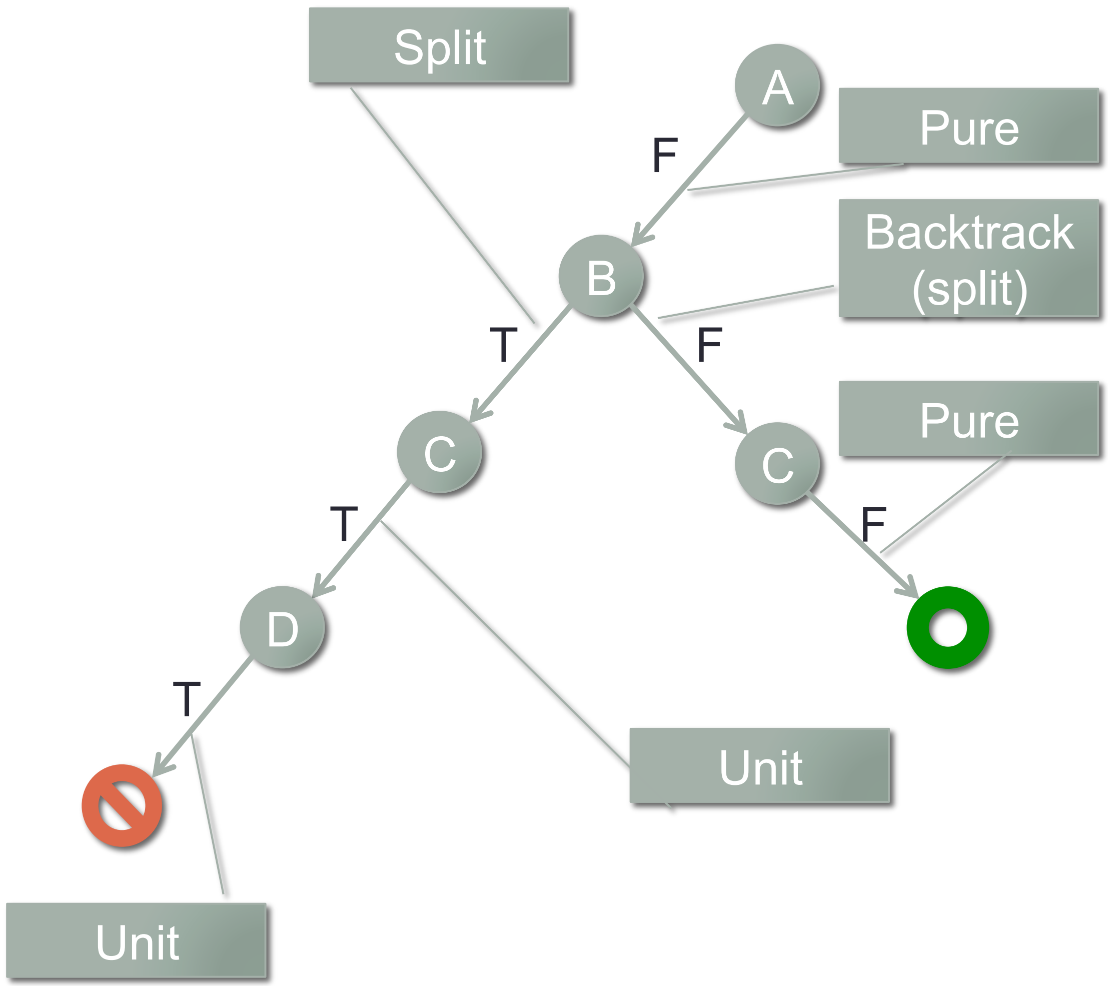
Exemplo de aplicação

- $\neg A \vee B$
- $\neg A \vee \neg C \vee D$
- $B \vee \neg C$
- $\neg B \vee C$
- $\neg C \vee D$
- $\neg C \vee \neg D$



Exemplo de aplicação

- $\neg A \vee B$
- $\neg A \vee \neg C \vee D$
- $B \vee \neg C$
- $\neg B \vee C$
- $\neg C \vee D$
- $\neg C \vee \neg D$



Propriedades do algoritmo DPLL

- Completo
- Eficaz na pratica, podendo resolver problemas de vericação de Hardware com 1 milhão de variaveis
- O algoritmo DPLL é, na verdade, uma família de algoritmos, pois depende da:
  - Escolha do símbolo na heurística do símbolo puro
  - Escolha da cláusula na heurística da cláusula unitária
  - Escolha do símbolo no “split”
  - Óptimizações em cada passo

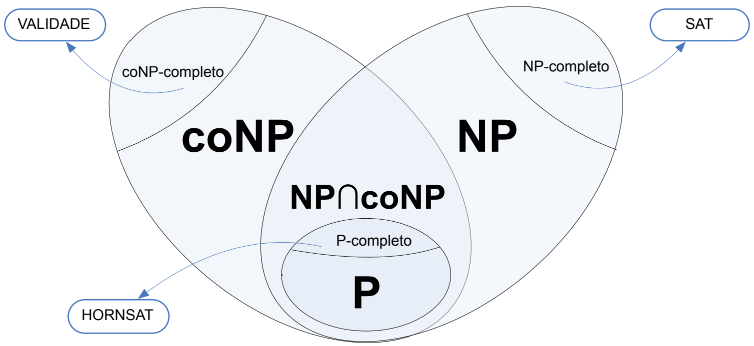
Resumo das classes de complexidade (P)

- Um problema pertence à classe P quando pode ser resolvido por uma máquina de Turing determinista em tempo polinomial.
- Um problema de decisão é P-completo se pertence a P e qualquer problema na classe P pode ser reduzido a ele (em espaço logarítmico).
- Saber se um conjunto de cláusulas de Horn e satisfatível é um um problema P-completo (HORNSAT)
- Saber qual o valor de um circuito booleano dados os seus inputs é P-completo (CIRCUIT VALUE)
- Saber se um número inteiro é primo pertence a P (provado em 2002)!

Resumo das classes de complexidade (NP e coNP)

- Um problema pertence a classe NP, quando pode ser resolvido por uma máquina de Turing não determinista em tempo polinomial.
- Um problema de decisão é NP-completo quando a solução pode ser verificada em tempo polinomial. Formalmente, um problema é NP-completo
  1. se pertence a NP
  2. qualquer problema na classe NP pode ser reduzido a ele por uma transformação polinomial
- Caso um problema só obedeca ao criterio (2) diz-se NP-difícil.
- Um problema pertence à classe coNP quando o seu complementar pertence à classe NP (pode-se vericar que não é solução em tempo polinomial).
- Presume-se que P ≠ NP e que NP ≠ coNP.

Complexidade e Lógica Proposicional



- Teorema de Cook-Levin (1971): O problema SAT é NP-completo.
- NOTA: Testar a validade de um conjunto de fórmulas booleanas é um problema coNP-completo (VALIDITY).

Outros problemas NP-completos

- SAT
- 0-1 INTEGER PROGRAMMING
- CLIQUE
- SET PACKING
- VERTEX COVER
- SET COVERING
- FEEDBACK ARC SET
- FEEDBACK NODE SET
- DIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT
- UNDIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT
- 3-SAT
- CHROMATIC NUMBER
- CLIQUE COVER
- EXACT COVER
- 3D MATCHING
- STEINER TREE
- HITTING SET
- KNAPSACK
- JOB SEQUENCING
- PARTITION
- MAX-CUT

WalkSAT

- Trepa-colinas no espaço de atribuições completas
  - Algoritmo de pesquisa local.
- Em cada iteração, o algoritmo escolhe uma cláusula não satisfeita e um símbolo dessa cláusula para trocar. A forma de escolha do símbolo a trocar de valor é ela própria aleatória, podendo ser:
  - Utilizando a heurística “min-conflitos”, minimizando o número de cláusulas insatisfeitas no passo seguinte
  - Escolha aleatória do símbolo a trocar na cláusula (“passeio aleatório”)

WalkSAT

function WALKSAT(*clauses*, *p*, *max-flips*) **returns** a satisfying model or *failure*
  inputs: *clauses*, a set of clauses in propositional logic
    p, the probability of choosing to do a "random walk" move, typically around 0.5
    max-flips, number of flips allowed before giving up

  model ← a random assignment of *true*/*false* to the symbols in *clauses*
  for $i = 1$ **to** *max-flips* **do**
    if *model* satisfies *clauses* **then return** *model*
    clause ← a randomly selected clause from *clauses* that is false in *model*
    with probability *p* flip the value in *model* of a randomly selected symbol from *clause*
    else flip whichever symbol in *clause* maximizes the number of satisfied clauses
  return *failure*

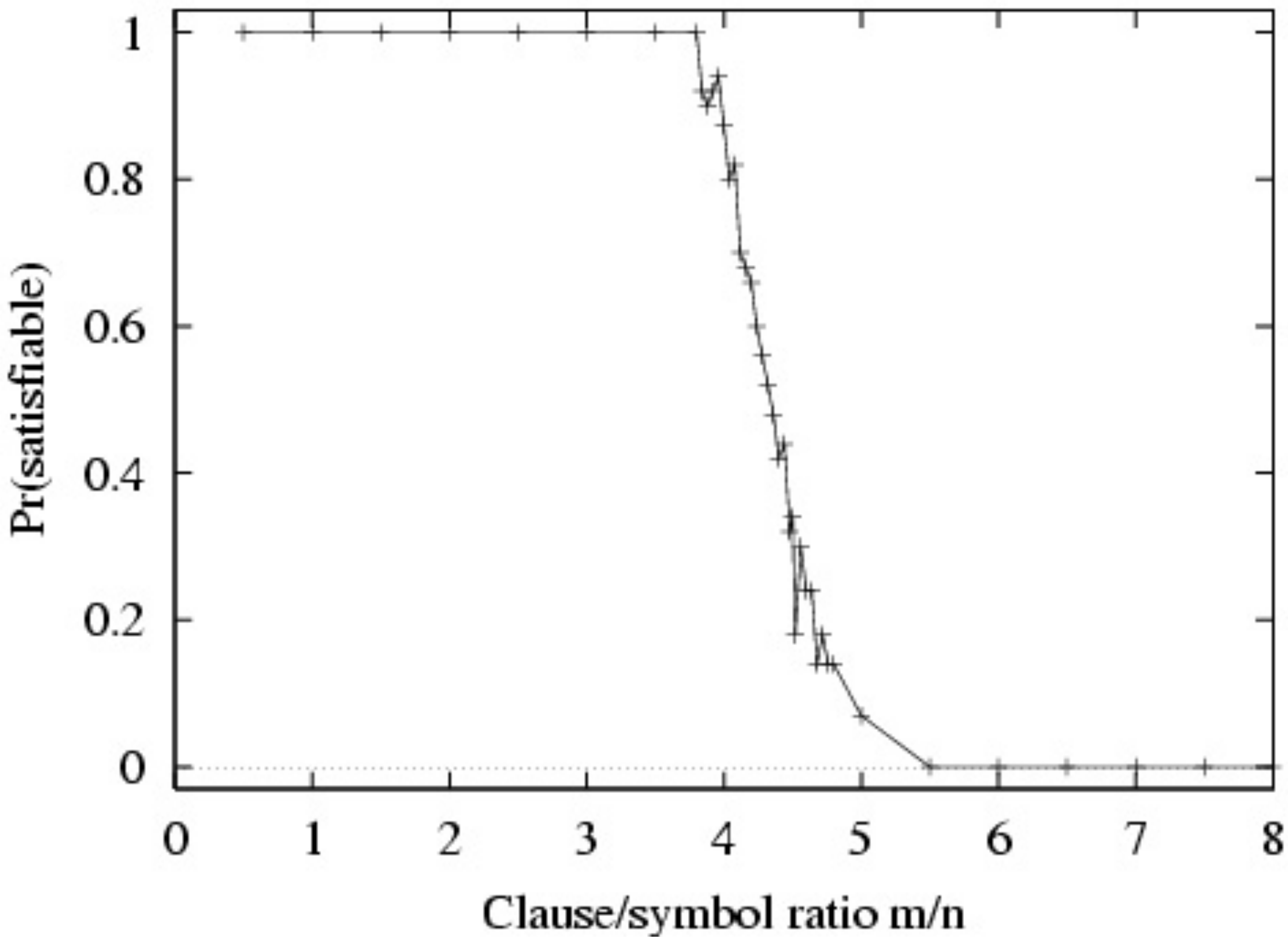
Propriedades do WalkSAT

- Incompleto
- Se uma proposição é insatisfazível então o algoritmo não termina: limita-se a max flips...
- Logo, procura local não serve em geral para resolver o problema da consequência lógica
- Algoritmos locais como o WalkSAT são mais eficazes quando se espera que uma solução exista
- Muito eficiente na prática...

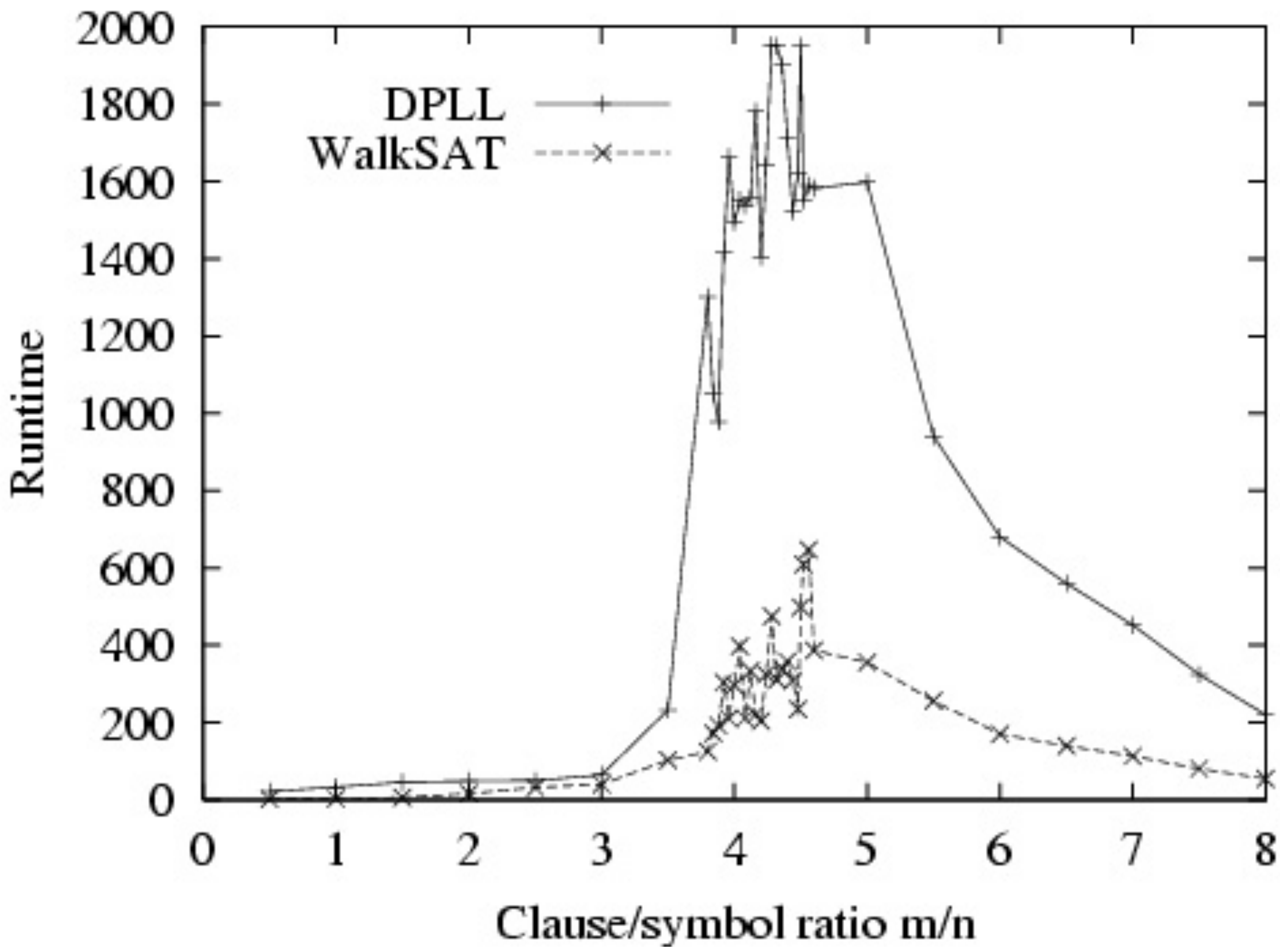
Problemas de satisfatibilidade difíceis

- Considere cláusulas 3-CNF geradas aleatoriamente, e.g:
  $(\neg D \lor \neg B \lor C) \land (B \lor \neg A \lor \neg C) \land (\neg C \lor \neg B \lor \neg E) \land (E \lor \neg D \lor B) \land (B \lor E \lor \neg C)$
- Seja
- m = número de cláusulas
- n = número de símbolos
- Os problemas mais difíceis parecem concentrar-se perto do valor do rácio m/n = 4.3 (ponto crítico)

Problemas de satisfatibilidade difíceis



Problemas de satisfatibilidade difíceis



Um agente lógico no mundo do Wumpus

- Formulação em lógica proposicional:

$$\neg P_{1,1}$$
$$\neg W_{1,1}$$
$$B_{x,y} \Leftrightarrow (P_{x,y+1} \vee P_{x,y-1} \vee P_{x+1,y} \vee P_{x-1,y})$$
$$S_{x,y} \Leftrightarrow (W_{x,y+1} \vee W_{x,y-1} \vee W_{x+1,y} \vee W_{x-1,y})$$
$$W_{1,1} \vee W_{1,2} \vee \ldots \vee W_{4,4}$$
$$\neg W_{1,1} \vee \neg W_{1,2}$$
$$\neg W_{1,1} \vee \neg W_{1,3}$$
$$\vdots$$

- São necessárias 64 variáveis proposicionais e 155 frases
- Uma casa na fronteira é demonstravelmente segura se a frase $(\neg P_{i,j} \wedge \neg W_{i,j})$ é uma consequência lógica da KB.

Um agente lógico no mundo do Wumpus

function PL-WUMPUS-AGENT(*percept*) **returns** an *action*
  inputs: *percept*, a list, [*stench*, *breeze*, *glitter*]
  static: *KB*, a knowledge base, initially containing the "physics" of the world
    x, *y*, *orientation*, the agent's position (initially [1,1]) and orientation (initially *right*)
    visited, an array indicating which squares have been visited, initially *false*
    action, the agent's most recent action, initially null
    plan, an action sequence, initially empty

  update *x*, *y*, *orientation*, *visited* based on *action*
  if *stench* **then** TELL(KB, $S_{x,y}$) **else** TELL(KB, $\neg S_{x,y}$)
  if *breeze* **then** TELL(KB, $B_{x,y}$) **else** TELL(KB, $\neg B_{x,y}$)
  if *glitter* **then** *action* ← *grab*
  else if *plan* is nonempty then *action* ← POP(*plan*)
  else if for some fringe square [*i*,*j*], ASK(KB, $(\neg P_{i,j} \land \neg W_{i,j})$) is *true* **or**
    for some fringe square [*i*,*j*], ASK(KB, $(P_{i,j} \lor W_{i,j})$) is *false* **then do**
      plan ← A*-GRAPH-SEARCH(ROUTE-PROBLEM([*x*,*y*], *orientation*, [*i*,*j*], *visited*))
    action ← POP(*plan*)
  else *action* ← a randomly chosen move
  return *action*

Limites da expressividade da lógica proposicional

- KB contém cláusulas capturando as leis “física” para cada casa
  - Seria melhor ter apenas duas frases, uma para aragens e uma para o mau cheiro, que fossem válidas para todas as casas.
- Para cada instante t e casa [x,y],

$$L_{x,y} \wedge FacingRight^t \wedge Forward^t \Rightarrow L_{x+1,y}$$

- Proliferação rápida do número de clausulas

O SuDoKu* em lógica proposicional

8								3
			5	9	1			4
	5	7		3		6		
	4		8		2		6	
		3		7	6		1	
	7	8				5	9	
2					9	8		
		1	6				3	
4				2				9

- Cada célula contém um inteiro entre 1 e 9
- Nenhum par de células na mesma linha contém o mesmo valor
- Nenhum par de células na mesma coluna contém o mesmo valor
- Nenhum par de células num bloco 3x3 contém o mesmo valor

- Saber se existe ou não solução para um dado puzzle SuDoKu é um problema NP-completo e, como tal, pode ser reduzido por uma transformação polinomial a um problema de satisfatibilidade booleana. * - “suji wa dokushin ni kagiru”

Tradução do SuDoKu para lógica proposicional

8								3
			5	9	1			4
	5	7		3		6		
	4		8		2		6	
		3		7	6		1	
	7	8				5	9	
2					9	8		
		1	6				3	
4				2				9

- São necessárias $n \times n \times n = n^3$ variáveis para um SuDoKU $n \times n$.
- Variável $c_{i,j,k}$ $(1 \leq i,j,k, \leq n)$ é verdadeira quando $i \times j$ contém o valor k.
- Cláusulas de célula $(n^2 \times (1+(n \times (n-1))/2))$

  $c_{i,j,1} \vee \ldots \vee c_{i,j,k}$ uma cláusula por cada casa $1 \leq i,j \leq n$

  $\neg c_{i,j,k} \vee \neg c_{i,j,l}$ $(1 \leq k < l \leq n)$ $n \times (n-1)/2$ cláusulas para cada casa $1 \leq i,j \leq n$
- Cláusulas de linha $(n^2 \times (1+(n \times (n-1))/2))$

  $c_{i,1,k} \vee \ldots \vee c_{i,n,k}$ uma cláusula por cada casa $1 \leq i,k \leq n$

  $\neg c_{i,j,k} \vee \neg c_{i,l,k}$ $(1 \leq j < l \leq n)$ $n \times (n-1)/2$ cláusulas para cada casa $1 \leq i,k \leq n$
- Adicionam-se cláusulas semelhantes para tratar as colunas e os blocos, obtendo
- um total $2n^4-2n^3+4n^2$ cláusulas.
  - Para um puzzle 9x9 temos assim exactamente 11988 cláusulas.
- Junta-se a proposição $c_{i,j,k}$ para cada casa i,j ocupada com o valor k.

O Nosso puzzle SuDoKu em lógica proposicional

8	1	4	2	6	7	9	5	3
3	6	2	5	9	1	7	8	4
9	5	7	4	3	8	6	2	1
1	4	9	8	5	2	3	6	7
5	2	3	9	7	6	4	1	8
6	7	8	1	4	3	5	9	2
2	3	5	7	1	9	8	4	6
7	9	1	6	8	4	2	3	5
4	8	6	3	2	5	1	7	9

$c_{1,1,1} \vee c_{1,1,2} \vee \ldots \vee c_{1,1,8} \vee c_{1,1,9}$ (células)

$\neg c_{1,1,1} \vee \neg c_{1,1,2}$

$\neg c_{1,1,1} \vee \neg c_{1,1,3}$

$\vdots$

$c_{1,1,1} \vee c_{1,2,1} \vee \ldots \vee c_{1,8,1} \vee c_{1,9,1}$ (linhas)

$\neg c_{1,1,1} \vee \neg c_{1,2,1}$

$\neg c_{1,1,1} \vee \neg c_{1,3,1}$

$\vdots$

$c_{1,1,1} \vee c_{2,1,1} \vee \ldots \vee c_{8,1,1} \vee c_{9,1,1}$ (colunas)

$\neg c_{1,1,1} \vee \neg c_{2,1,1}$

$\neg c_{1,1,1} \vee \neg c_{3,1,1}$

$\vdots$

$c_{1,1,1} \vee c_{1,2,1} \vee \ldots \vee c_{3,2,1} \vee c_{3,3,1}$ (blocos)

$\neg c_{1,1,1} \vee \neg c_{2,2,1}$

$\neg c_{1,1,1} \vee \neg c_{2,3,1}$

$\vdots$

$c_{1,1,8} \wedge c_{1,9,3} \wedge \ldots \wedge c_{9,9,9}$ (valores)

- A solução do puzzle SuDoKu pode ser extraída das variáveis verdadeiras num modelo que satisfaça todas as cláusulas. Encontrar esse modelo é um problema da classe FNP (function NP problem, na terminologia inglesa).

Sumário

- Agentes lógicos aplicam inferência a bases de conhecimento para derivar nova informação
- e tomar decisões
- Conceitos básicos de lógica:
  - sintaxe: estrutura formal das frases declarativas
  - semântica: veracidade das frases relativamente a modelos
  - conclusão: verdade necessária de uma frase dado outra
  - inferência: derivação de frases a partir de outras frases
  - solidez: derivações produzem apenas frases que são conclusões lógicas
  - completude: derivações conseguem produzir todas as frases que são consequência lógicas
- O mundo do Wumpus requer a capacidade de lidar com informação parcial e negativa, raciocínio por casos, etc.
- Encadeamento para a frente e para trás têm complexidade temporal linear na dimensão da KB, completos para cláusulas de Horn. Resolução é completa para a lógica proposicional
- A lógica proposicional não tem poder expressivo suficiente