

数值解析入門

拡散方程式（1次元，陽解法）

Diffusion Equation (1-Dimensional, Explicit method)

コンテンツ

1

拡散方程式

2

有限体積法

3

境界条件

4

実装

コンテンツ

1

拡散方程式

2

有限体積法

3

境界条件

4

実装

1. 拡散方程式

拡散 (diffusion) : 物理量が空間で散らばり、広がること

1次元の場合

$$\frac{\partial C}{\partial t} = a \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

$k > 0$ は拡散定数とよばれる正の量で, より一般には

$$\frac{\partial C}{\partial t} = a \nabla^2 C$$

1. 拡散方程式

長さ L の貯留層における圧力 $P(x, t)$ の時間変化を考える。

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x}$$

ϕ : 岩石の空隙率

k : 岩石の浸透率

c : 圧縮率

μ : 流体の粘度

※この偏微分方程式は境界条件と初期条件を与えれば解ける。

初期条件

$P(x, 0)$ での圧力分布

境界条件

$P(0, 0)$ と $P(L, 0)$ での条件

コンテンツ

1

拡散方程式

2

有限体積法

3

境界条件

4

実装

2. 有限体積法

差分法を実装したシミュレータ

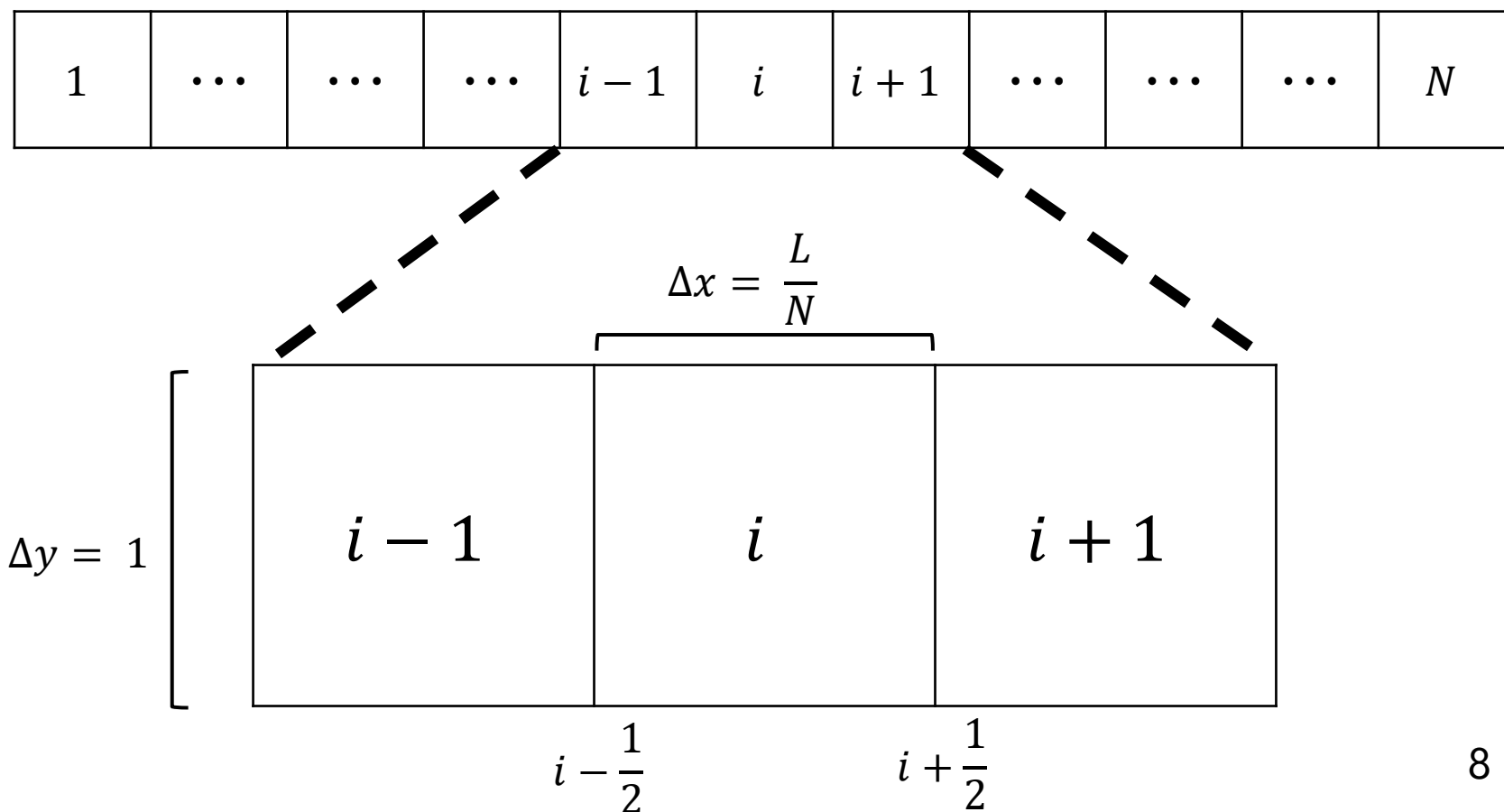
- HydroTherm
- TOUGH2
- tNavigator (Rock Flow Dynamics社)
- ECLIPSE (Schlumberger社)

体積法を実装したシミュレータ

- MRST (SINTEF、<https://www.sintef.no/projectweb/mrst/>)
- FaSTAR (JAXA、非圧縮性流体解析)

2.有限体積法 (**F**inite **V**olume **M**ethod)

貯留層を N 個の検査体積 (**C**ontrol **V**olume) に分割する。

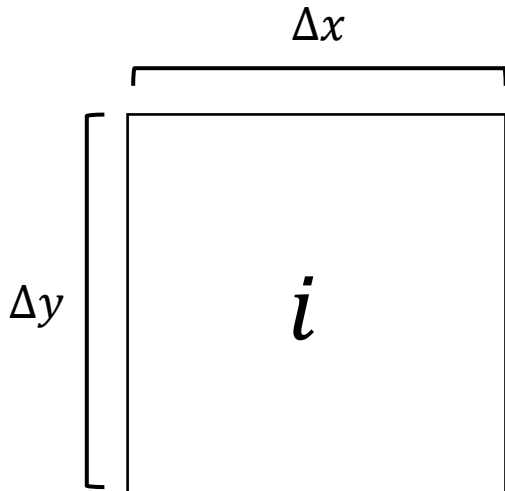


2. 有限体積法（時間項の積分）

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

検査体積 i で、拡散方程式の左辺 $\phi c \frac{\partial P}{\partial t}$ を面積分

$$\iint \phi c \frac{\partial P}{\partial t} dx dy \cong \phi c \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \Delta x \Delta y$$



$$= \phi c \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \Delta x \Delta y$$

2. 有限体積法（空間項の積分）

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

検査体積 i で、拡散方程式の右辺 $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$ を積分すると、**ストークスの定理**より、

$$\iint_{CV_i} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = \int_{\partial CV_i} \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} d\vec{r}$$

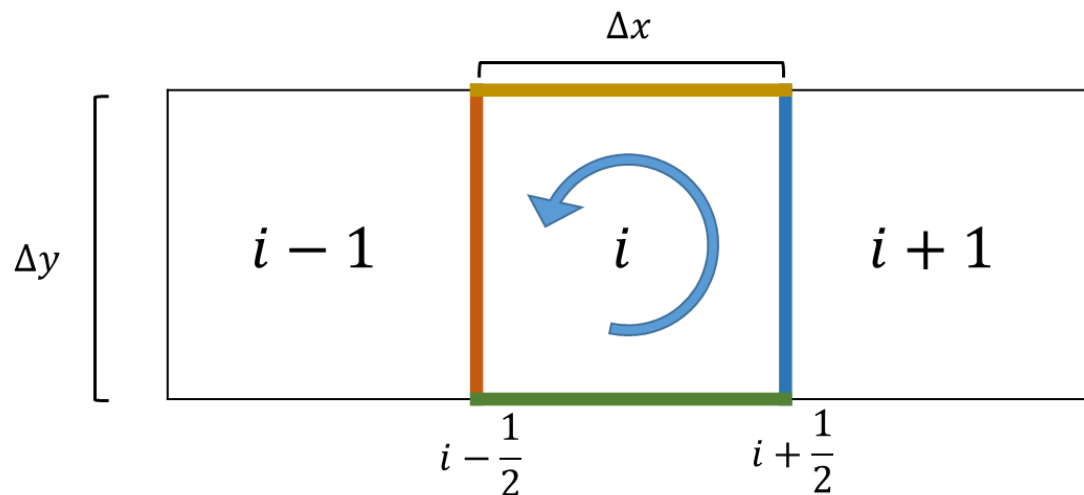
検査体積での面積分



境界での線積分

2.有限体積法（境界での線積分）

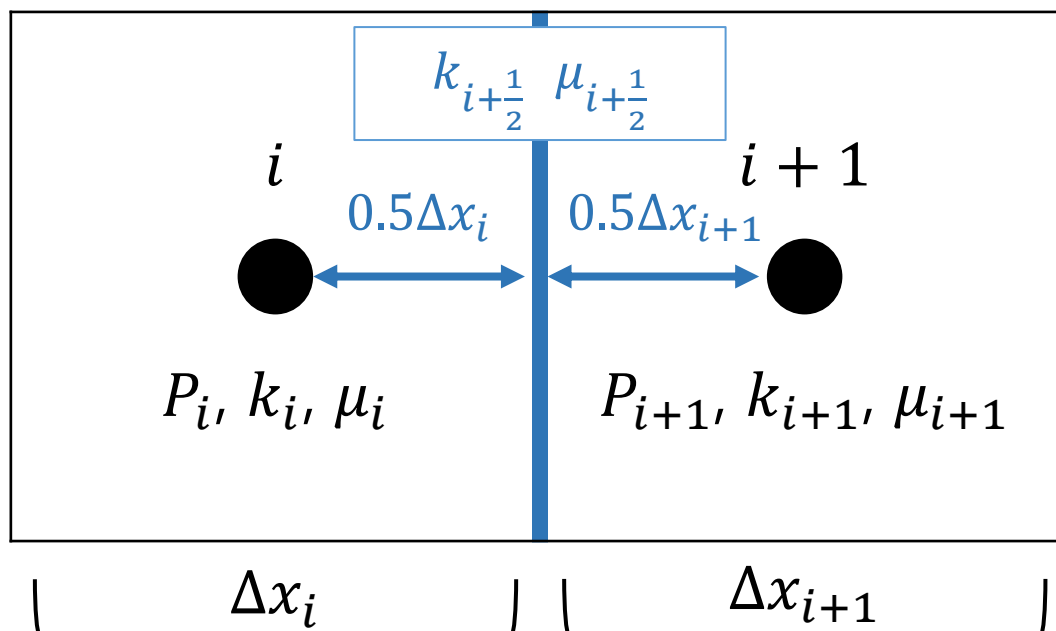
$$\int_{\partial CV_i} \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} d\vec{r}$$



$$= 0 \times \Delta x + \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}_{i+\frac{1}{2}} \times \Delta y + 0 \times (-\Delta x) + \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}_{i-\frac{1}{2}} \times (-\Delta y)$$

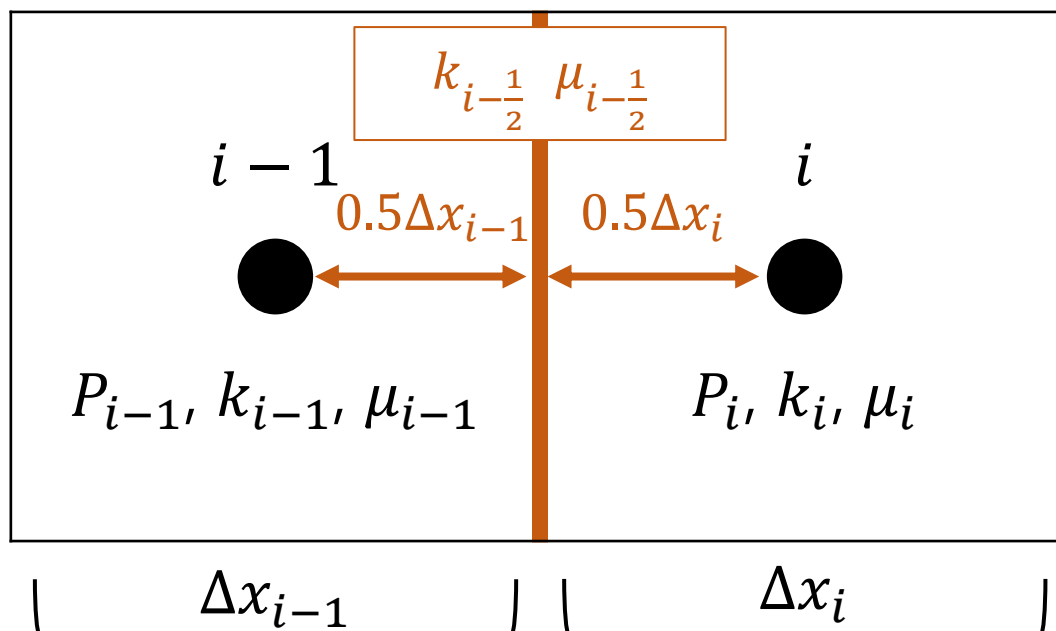
2.有限体積法（境界での線積分）

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \bigg|_{i+\frac{1}{2}} \times \Delta y = \frac{k}{\mu} \bigg|_{i+\frac{1}{2}} \frac{P_{i+1} - P_i}{0.5(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} \Delta y$$



2.有限体積法（境界での線積分）

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \bigg|_{i-\frac{1}{2}} \times (-\Delta y) = \frac{k}{\mu} \bigg|_{i-\frac{1}{2}} \frac{P_i - P_{i-1}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} (-\Delta y)$$



2.有限体積法（境界での線積分）

$k_{i+\frac{1}{2}}$ $k_{i-\frac{1}{2}}$	k_i と $k_{i\pm 1}$ の調和平均
$\mu_{i+\frac{1}{2}}$ $\mu_{i-\frac{1}{2}}$	今回は一定とする

Pythonの場合

```
>>> a=1;b=0;
```

```
>>> 2/(1/a + 1/b)
```

```
Traceback (most recent call last):  
File "<stdin>", line 1, in <module>  
ZeroDivisionError: division by zero
```

```
from scipy.stats import hmean
```

がおすすめ

MATLABの場合

```
>> a = 1; b = 0;
```

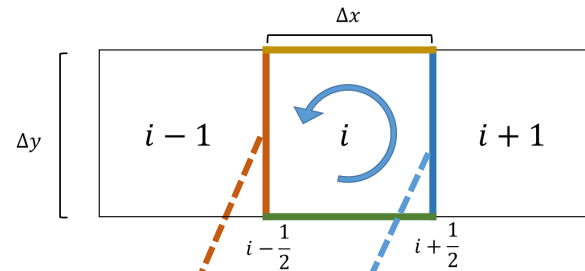
```
>> 2/(1/a + 1/b)
```

```
ans = 0
```

以降、 $\frac{k}{\mu} = \lambda$ とおく

2. 有限体積法（漸化式）

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$



$$\phi c \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_i = \lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{P_{i+1} - P_i}{0.5(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} \Delta y_i - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{P_i - P_{i-1}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \Delta y_i$$

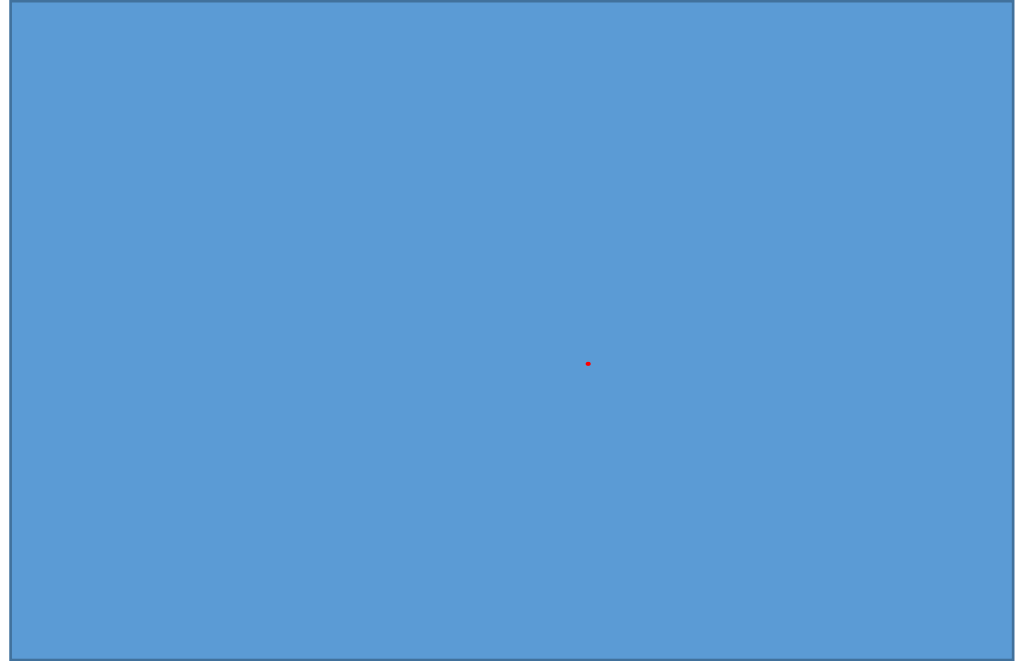
【仮定】

- 貯留層を等分しているので $\Delta x_i = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1}$
- 貯留層の厚さは1とする（ $\Delta y_i = 1$ ）
- 右辺の圧力はすべて P^n

漸化式を P_i^{n+1} について整理しよう！

2. 有限体積法（漸化式）

$$P_i^{n+1} =$$



ただし、 $\alpha = \frac{\Delta t}{\phi c}$ 、 $\lambda_w = \lambda_{i-\frac{1}{2}}$ 、 $\lambda_e = \lambda_{i+\frac{1}{2}}$

2. 有限体積法（漸化式）

$$\begin{aligned} P_i^{n+1} = & \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_{i+1}^n \\ & + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w \right) P_i^n \\ & + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_{i-1}^n \end{aligned}$$

解の安定条件は、 $1 - \frac{\frac{\Delta t}{\phi c}}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\frac{\Delta t}{\phi c}}{(\Delta x)^2} \lambda_w \geq 0$

コンテンツ

1

拡散方程式

2

有限体積法

3

境界条件

4

実装

3. 境界条件

両端の検査体積では何が起こるのか?

0	1	$i-1$	i	$i+1$	N	$N+1$
---	---	-----	-----	-------	-----	-------	-----	-----	-----	-------

$$\text{CV\#1} \quad P_1^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_2^n + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w\right) P_1^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_0^n$$

$$\text{CV\#N} \quad P_N^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_{N+1}^n + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w\right) P_N^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_{N-1}^n$$

存在しない値を参照



両端の検査体積には
特別な条件が必要

3. 境界条件

境界条件では**存在しない値をどう決めるか**がポイント

3-1

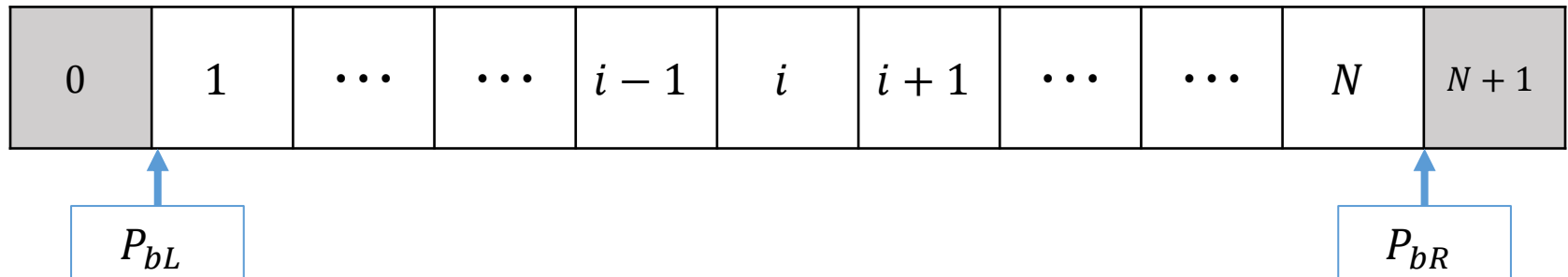
境界値を直接決める

3-2

境界値の勾配を決める

3-1

境界値を直接決める



境界での圧力値を P_{bR} , P_{bL} とする($k_0 = k_1$, $k_N = k_{N+1}$ と仮定)。

このとき、

$$P_{bL} = \frac{P_1 + P_0}{2} \quad \Rightarrow \quad P_0 = 2P_{bL} - P_1$$

$$P_{bR} = \frac{P_{N+1} + P_N}{2} \quad \Rightarrow \quad P_{N+1} = 2P_{bR} - P_N$$

3-1

境界値を直接決める

$P_0 \cdot P_{N+1}$ の値は次のように置換できる

$$P_1^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_2^n + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w\right) P_1^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w (2P_{bL} - P_1)$$

$$P_N^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e (2P_{bR} - P_N) + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w\right) P_N^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_{N-1}^n$$

境界値を直接決める：ディクレ条件

3-2

境界との勾配を決める

P_0 と P_1 間の $\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_{i+\frac{1}{2}}}$ の値を決める。この境界で一番多いのは

勾配を 0 にする境界条件

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_{1-\frac{1}{2}}} = \frac{k}{\mu} \frac{P_1 - P_0}{0.5(\Delta x_1 + \Delta x_0)} = 0$$

$$P_1 - P_0 = 0$$

$$P_1 = P_0$$

境界との勾配を決める：ノイマン条件

3-2

境界との勾配を決める

境界で $\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$ の時、 $P_1 = P_0$ また $P_{N+1} = P_N$ だから

$$P_1^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_2^n + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w \right) P_1^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_1$$

$$P_N^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_N + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w \right) P_N^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_{N-1}^n$$

コンテンツ

1

拡散方程式

2

有限体積法

3

境界条件

4

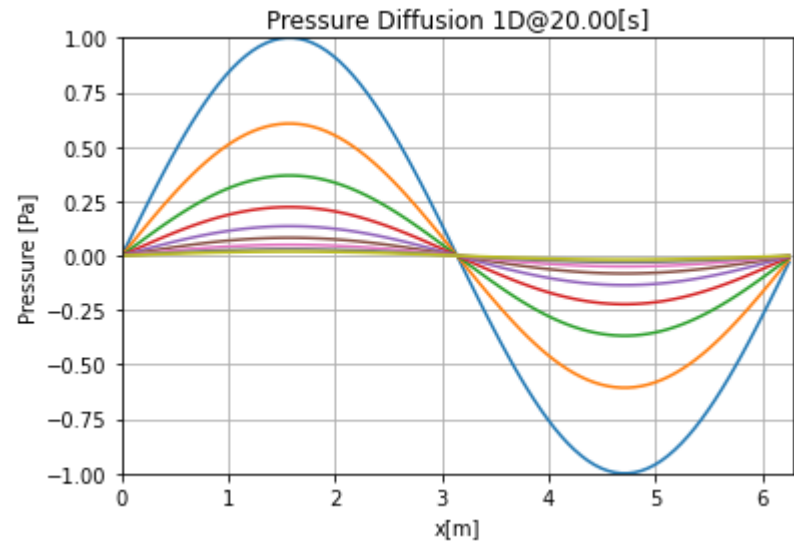
実装

4. 実装

```
while 無限ループ:
    for 両端を除くcv:
        # 係数 (A, B, C) の決定
        # A = , B = , C =
        #  $P_{new} = A \cdot P_{old}(i+1) + B \cdot P_{old}(i) + C \cdot P_{old}(i-1)$ 
    if 境界条件@x = 0:
        # ディレクレ条件
        # ノイマン条件

    if 境界条件@x = L:
        # ディレクレ条件
        # ノイマン条件

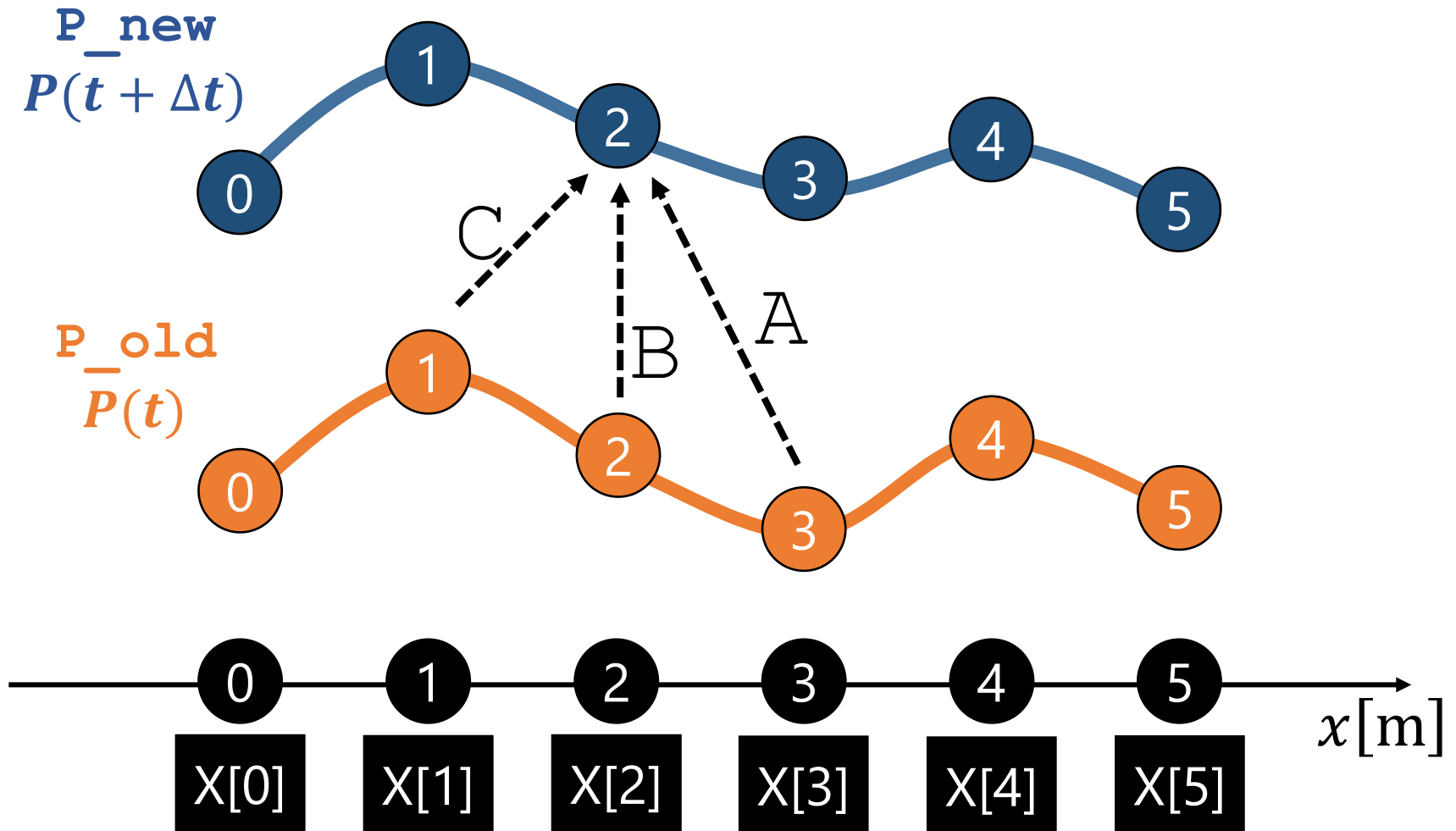
    # 値のアップデート
    #  $P_{old} = P_{new}$ 
    #  $t = t + dt$ 
    if t >= tmax:
        whileループを抜ける。
```



このようなグラフが表示されれば成功

4. 実装

$$P_{\text{new}} = A \cdot P_{\text{old}}(i+1) + B \cdot P_{\text{old}}(i) + C \cdot P_{\text{old}}(i-1)$$



5. 補足

- 2つの境界条件の物理的な意味は？
- スライド #14 ~ #15の過程で、右辺の圧力を P^{n+1} とするとどうなる？また、それらの関係式はどう解く？
→Hint : 陰解法, Implicit Method