

数值解析入門

移流方程式（1次元）

Advection Equation (1-Dimensional)

コンテンツ

1

移流方程式

2

空間の離散化

コンテンツ

1

移流方程式

2

空間の離散化

1. 移流方程式

「移流」：物理量が空間で**散らばらず**に運ばれること（匂い,
濃度, 熱 etc...)

1次元の場合

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

以下, ϕ を物質の濃度, $c > 0$ は伝播する速度とする。

1. 移流方程式

1次元移流方程式には解析解が存在

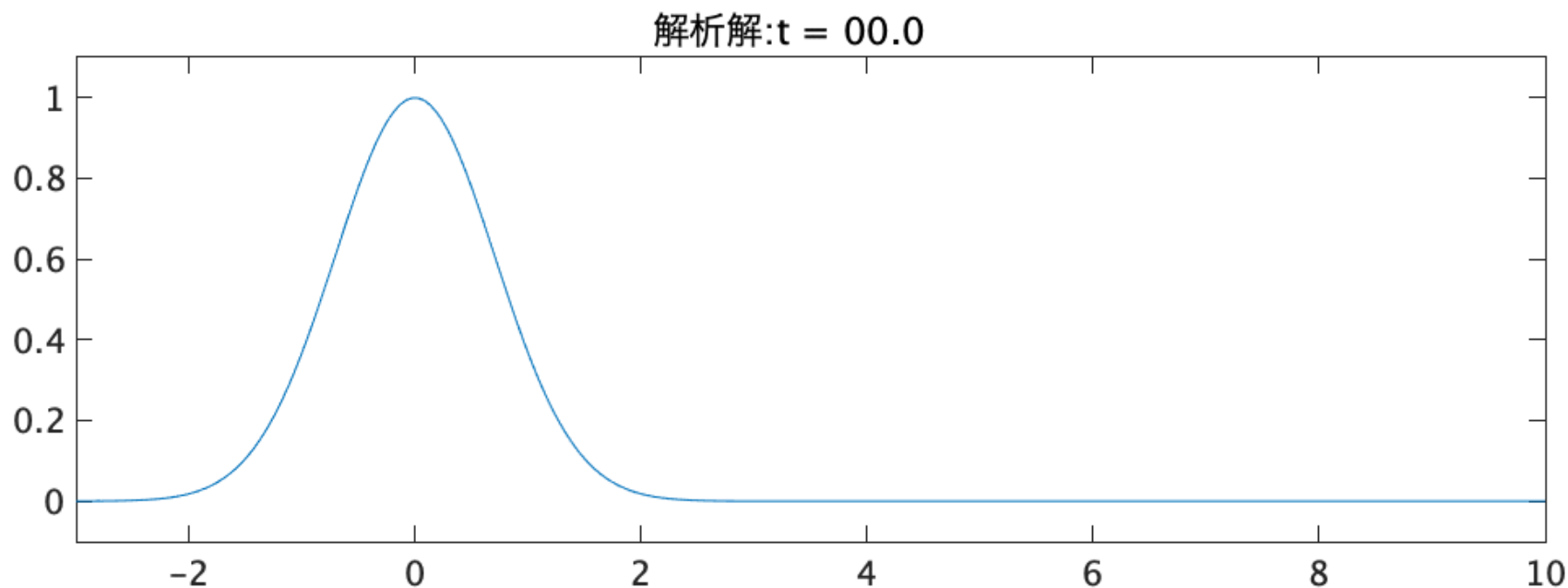
$$\phi(t, x) = \phi(x - ct)$$

ただし, f は任意の関数

ある関数が**平行移動**する

1. 移流方程式（解析解）

$\phi(x) = e^{-x^2}$ とすると $\phi(x - ct) = e^{-(x-ct)^2}$ なので、
 $c = 0.25$ の時



物理量が空間で散らばらずに平行移動する

コンテンツ

1

移流方程式

2

空間の離散化

2

空間の離散化

0

時間項の離散化

1

風上差分

2

CFL条件

3

補足説明

2-0. 時間項の離散化

移流方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

の左辺について,

時刻 t での分布を ϕ^n , $t + \Delta t$ での分布を ϕ^{n+1} として

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t}$$

2-1. 風上差分

風上方向の値を使った近似

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=i} \cong \frac{\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$\phi(x, t)$

$$\frac{\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x=i}$$

伝播する方向

2-1. 風上差分

時間項の離散化と合わせて，プログラムにする式は

$$\frac{\phi^{n+1}(x_i) - \phi^n(x_i)}{\Delta t} = -c \frac{\phi^n(x_i) - \phi^n(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\phi^{n+1}(x_i) =$$

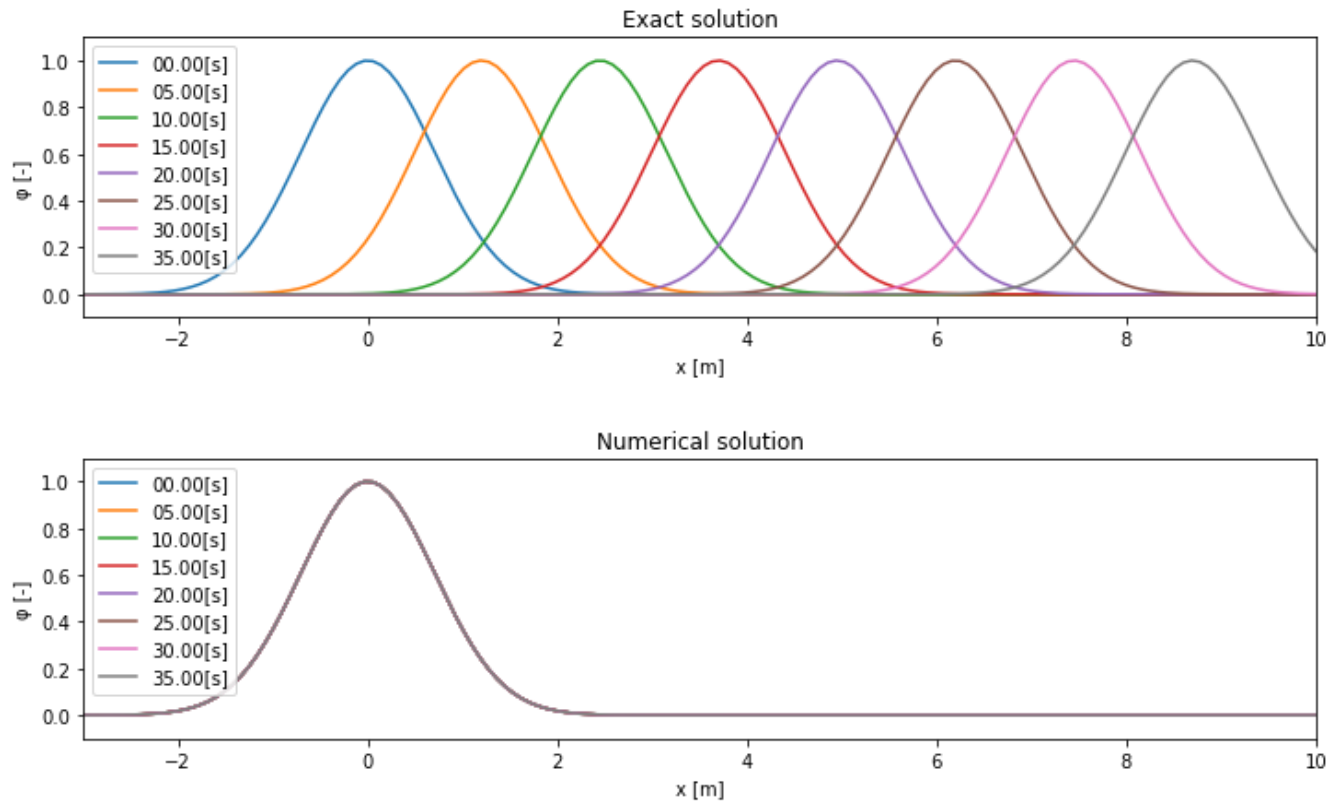
自由落下と同様，未来の情報が現在の情報から求まる。

(※ x 方向は等間隔に分割)

演習

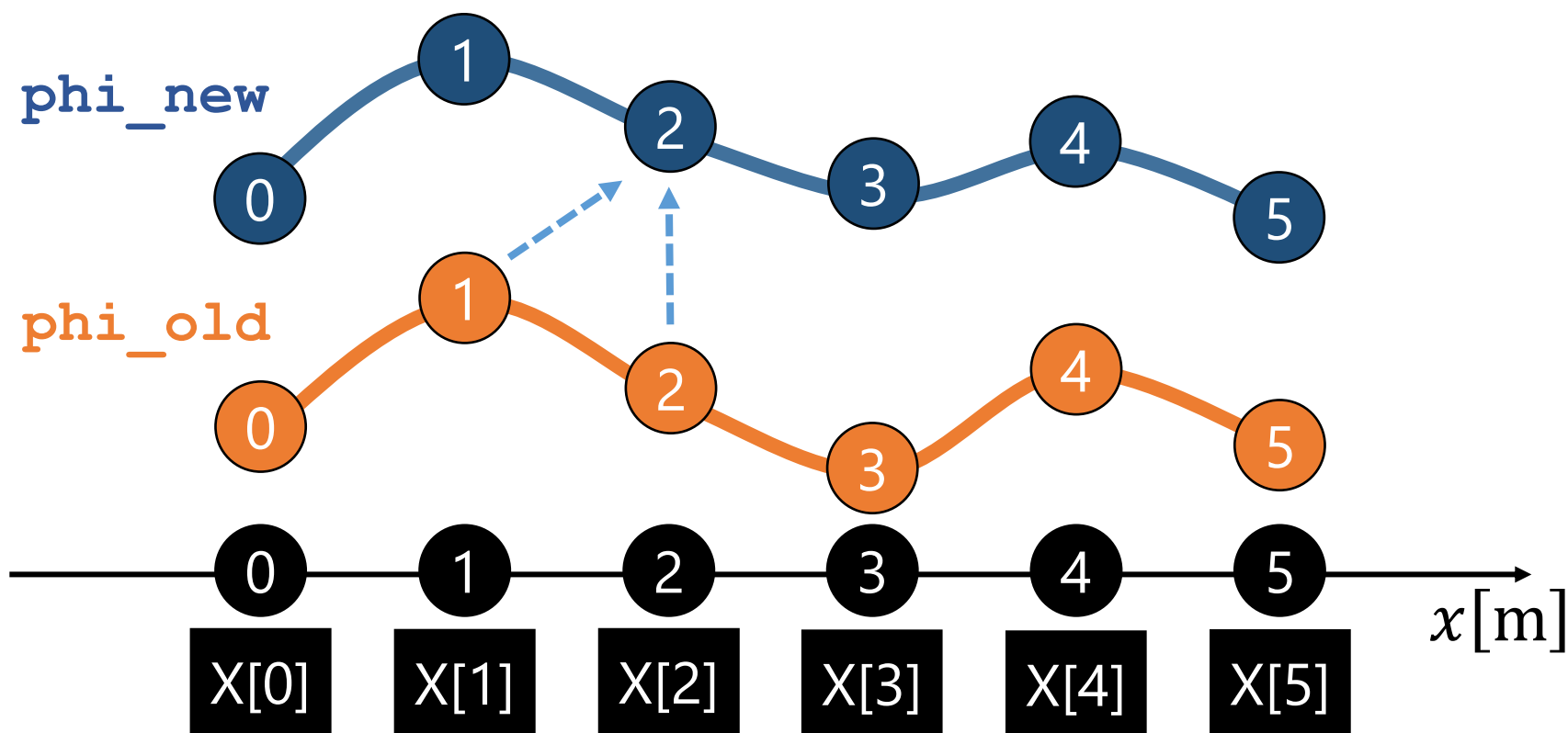
$$\phi^{n+1}(x_i) = \phi^n(x_i) - c\Delta t \frac{\phi^n(x_i) - \phi^n(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

まずプログラムを実行して、次のような図が出力される事を確認



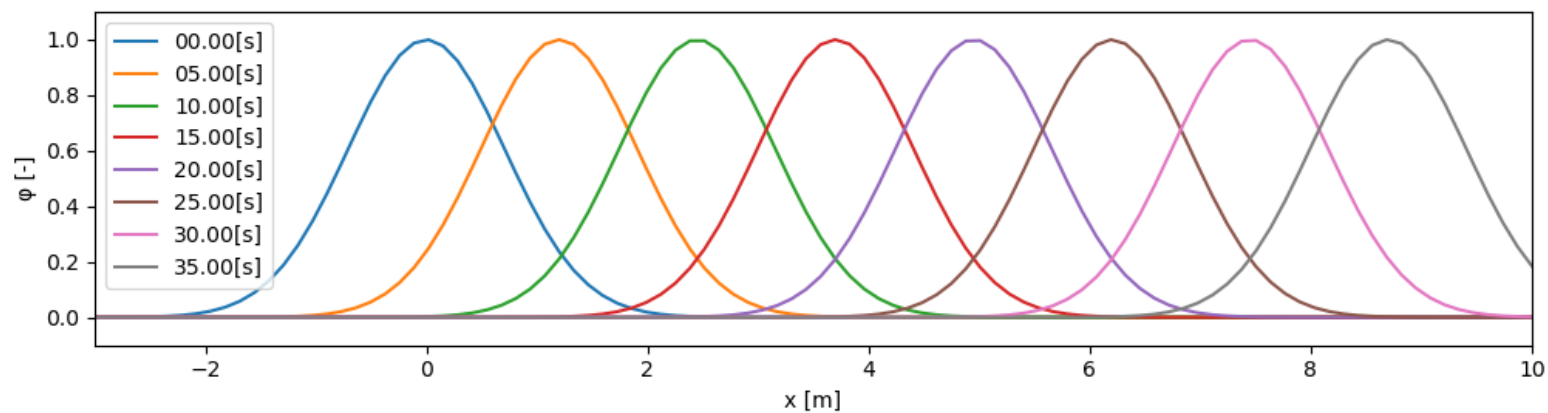
演習 補足説明

$$\phi^{n+1}(x_i) = \phi^n(x_i) - c\Delta t \frac{\phi^n(x_i) - \phi^n(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

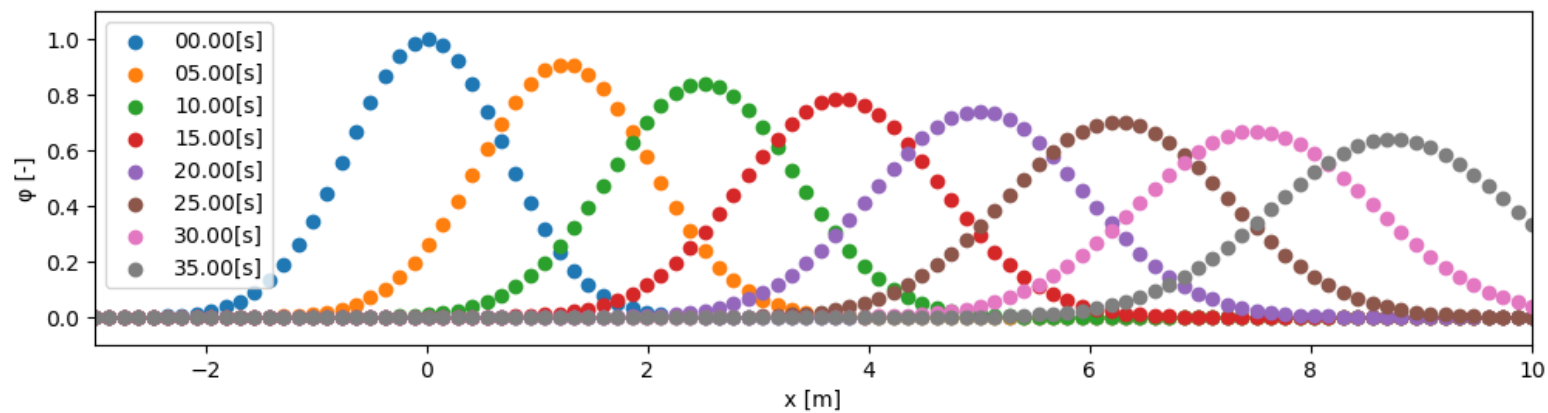


解答

Exact solution



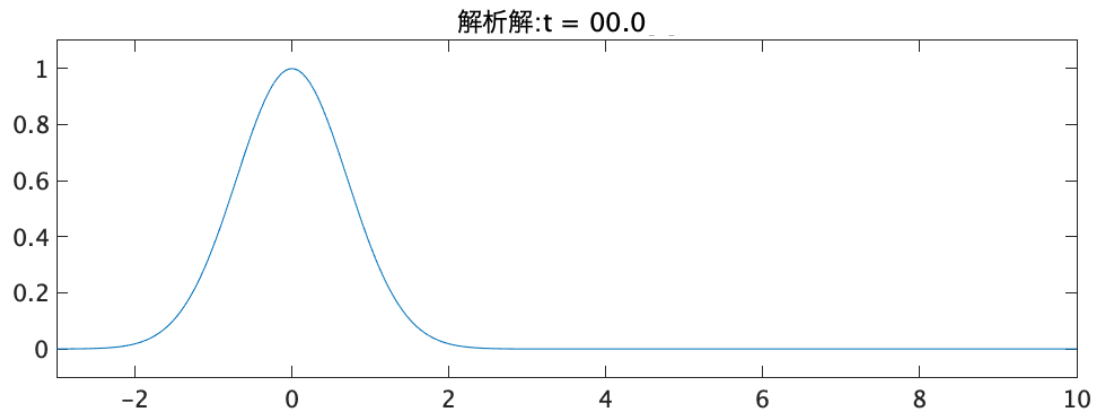
Numerical solution



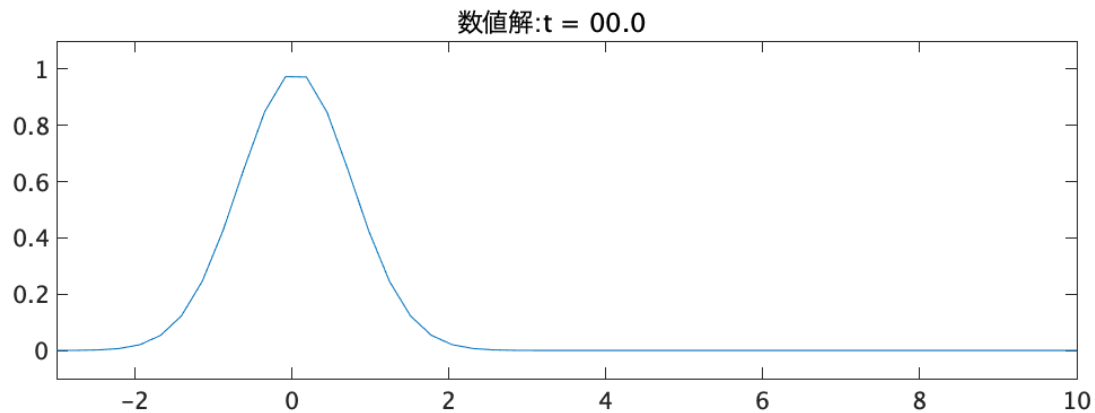
2-1. 風上差分

$c = 0.25, \Delta t = 0.2$ として計算する

解析解



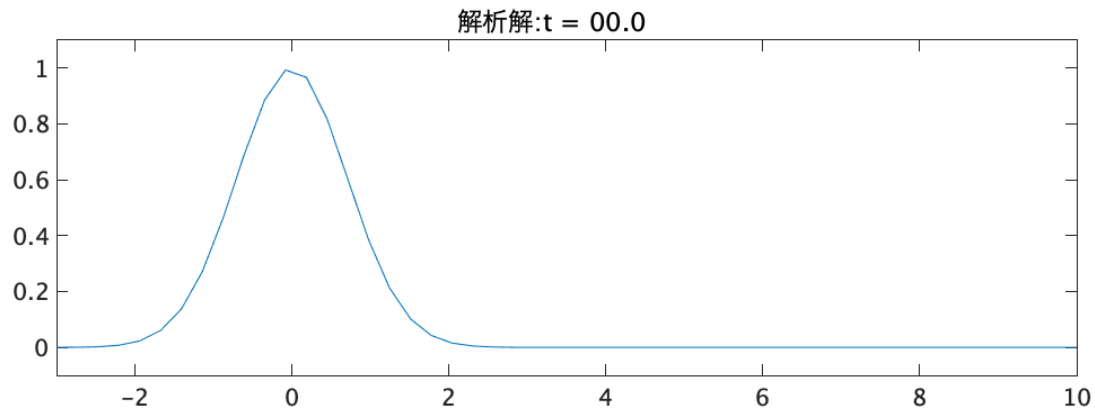
数値解



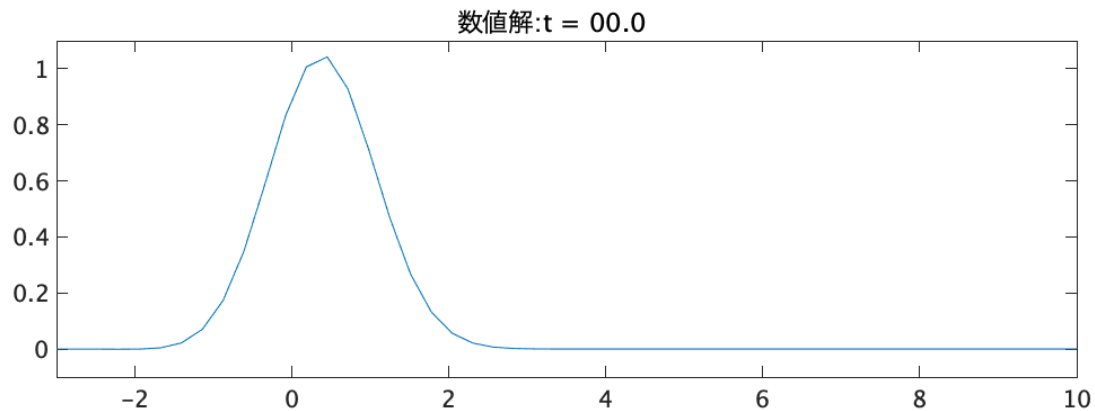
2-2. CFL条件

$c = 2$ に増加させると

解析解



数値解



2-2. CFL条件

定義

CFL条件（シーエフエルじょうけん、Courant-Friedrichs-Lewy Condition）
またはクーラン条件とは、数値解析によるコンピュータシミュレーションにおいて、
「**情報が伝播する速さ**」は「**実際の現象で波や物理量が伝播する速さ**」よりも速くなければならないという必要条件のことである。(Wikipedia より)

数式で表すと

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > c \text{ 或いは } 1 > \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

※ $c\Delta t/\Delta x$ をクーラン数という

2-2. CFL条件

スライド13, 14の例では $[-3, 10]$ を 50 個の要素で離散化

$$\Delta x = \frac{10 - (-3)}{50 - 1} \cong 0.2653$$

$\Delta t = 0.2$ なのでCFL条件を満たす限界の c は

$$c < \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.2653}{0.2} \cong 1.3265$$

CFL条件を満たさない $c, \Delta x, \Delta t$ を設定すると, 振動が発生

2-3. 補足説明

Δx の間隔を細かく ($0.26 \rightarrow 0.00001$)

→ Δt を大きくできないので, 時間がかかる

風上差分以外の方法

1. 中心差分, 前進差分, 後退差分
2. FTCS 法
3. Lax 法
4. CIP法 など