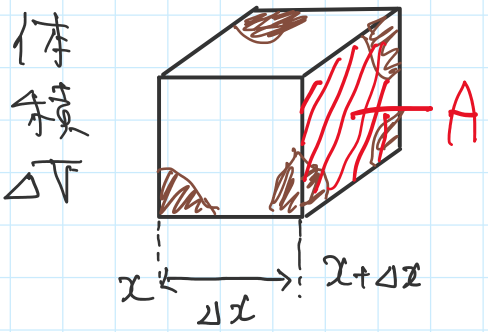
IMPESの支配方程式

2023年1月25日 水曜日　19:45

多孔質媒体の質量保存則

(質量の変化) = (流入) − (流出) + ソース/シンク



"すきま"の割合：ϕ

ϕのうち水の〃：S_w

ϕのうち油の〃：S_o

(水)

$$\left(\rho_w S_w \phi\Big|_{t+\Delta t} - \rho_w S_w \phi\Big|_{\Delta t}\right)\Delta V = \left(\rho_w u_w\Big|_{x} - \rho_w u_w\Big|_{x+\Delta x}\right)A\Delta t + m_{w,well}\Delta V \Delta t$$

両辺を $V\Delta t$ ($= A\cdot\Delta x\cdot\Delta t$) でわると

$$\frac{\rho_w S_w \phi|_{t+\Delta t} - \rho_w S_w \phi|_{t}}{\Delta t} = -\frac{\rho_w u_w|_{x+\Delta x} - \rho_w u_w|_{x}}{\Delta x} + m_{w,well}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \phi S_w) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_w u_w) + m_{w,well} \quad [M/T]$$

ここで、密度が位置と時間に対して一定($\partial_t = \partial_x = 0$)とすると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \phi S_w) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_w u_w) + m_{w,well} \quad \text{—(※)}$$

上式のρ_wは、貯留層における密度。一方、流量の計測を行うのは地表だから、容積係数を導入する。

$$B_w = \frac{V_{w,sc}}{V_{w,RC}} = \frac{\dfrac{m_{w,sc}}{\rho_{w,sc}}}{\dfrac{m_{w,RC}}{\rho_{w,RC}}} = \frac{\rho_{wRC}}{\rho_{wSC}}$$

(※)の両辺をρ_{wRC}で割ると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_w}{B_w}\right) + q_w^{sc}$$

ここに、相対浸透率を考えたダルシーの法則を代入すると、

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{k k_{rw}}{\mu_w B_w}\frac{\partial P_w}{\partial x} + q_w^{sc}}$$

油 同様に 油相からガス相、ガス相から油相をみにすれば

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{k k_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x} + q_o^{sc}}$$

支配方程式と数値計算法

以下の連立方程式を解くことを考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{k k_{rw}}{\mu_w B_w}\frac{\partial P_w}{\partial x} + q_w^{sc} & \text{—①} \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{k k_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x} + q_o^{sc} & \text{—②} \end{cases}$$

上式は4つの未知数を含む(S_w, S_o, P_w, P_o)のでそのままでは解くことができない。また、相対浸透率、粘度、容積係数は S_w, S_o P_w, P_o は、に依存するので、①,②は非線形連立方程式である

1. 未知数の削減

$S_w + S_o = 1$ とすれば、②から S_o を消去できる。
P_o と P_w の差は Capillary Pressure(毛管圧力)となる。

$$P_c = P_{non\_wett} - P_{wett}$$

また、P_c は一般に飽和率の関数となる。今回は $P_{non.wett} - P_{wett}$ 比べて、小さく、無視できるとする。つまり

$$P_o - P_w \cong 0 \quad \rightarrow \quad P_o = P_w = P \text{ とおく。}$$

2. 圧力の式の導出（途中まで）。

①の右辺は連鎖律によって

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) = \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{S_w}{B_w}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi S_w \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{B_w}\right)$$

$$= \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{S_w}{B_w}\frac{\partial \phi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} + \phi S_w \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{B_w}\right)\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$= \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\phi S_w}{B_w}\underbrace{\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial P}}_{C_r}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\phi S_w}{B_w}\cdot\underbrace{B_w\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{B_w}\right)}_{C_w}\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$= \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t} + \left(\frac{\phi S_w}{B_w}C_r + \frac{\phi S_w}{B_w}C_w\right)\frac{\partial P}{\partial t}.$$

同様に ②について、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) = \cdots = \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t} + \left(\frac{\phi S_o}{B_o}C_r + \frac{\phi S_o}{B_o}C_o\right)\frac{\partial P}{\partial t}$$