数値解析入門

1. 常微分方程式の時間積分

1. Time Integration of Ordinary Differential Equations

3 スケジュール

	題材	日時・場所	所要時間
STEP 1	常微分方程式の時間積分	4/11, 10:30- W2 – 544	説明15分 演習20~30分 追加説明15分
STEP 2	1次元移流方程式	4/11, 13:00- W2 – 544	説明15分 演習15分 追加説明15分
STEP 3	1次元拡散方程式	4/12, 13:00- W2 – 544	説明30分 演習30分
Extra STEP	貯留層解析入門	4/12, 14:15- W2 – 544	説明25分 演習10分 M2研究紹介?

コンテンツ

コンテンツ

1. 小球の自由落下

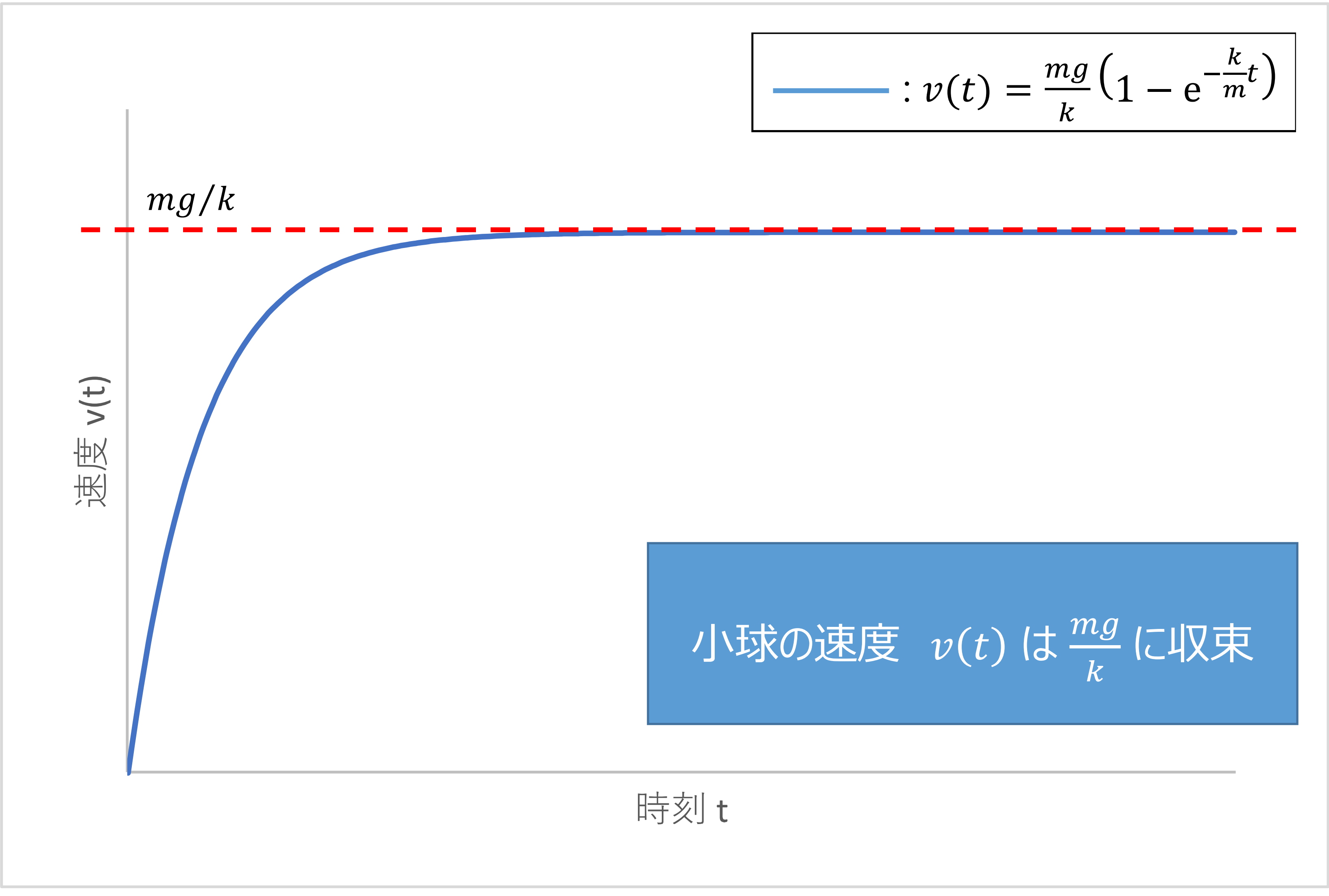
微分方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

特殊解
($v(0) = 0$)

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

1. 小球の自由落下



: $v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$
mg/k
速度 v(t)
時刻 t
小球の速度 $v(t)$ は $\frac{mg}{k}$ に収束

コンテンツ

2

シミュレーション

1. コンピューターができる計算・できない計算

2. シミュレーションの方法

   A) 離散化 / Discretization

   B) 実際の計算

2-1. コンピューターができる計算

四則計算のみ！

2-1. コンピューターができない計算

例：空気抵抗を考えた自由落下

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$ の解を求めよ.

ただし $t = 0$ のとき $v = 0$ とする.

解

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

コンピューターは
「変数分離して両辺を積分」
という計算をできない

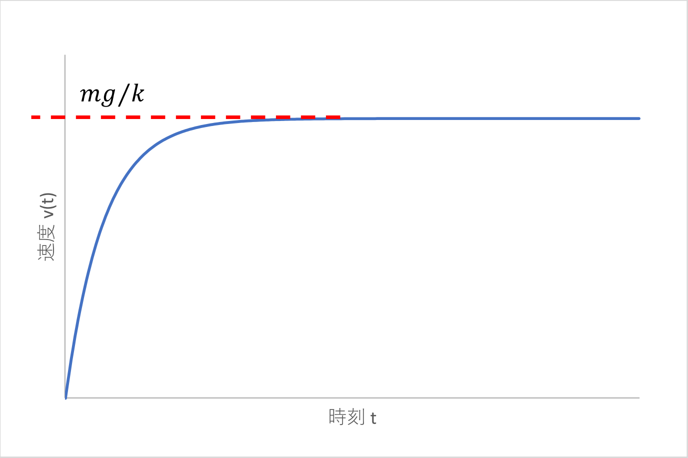
2-2. シミュレーションの方法

問題：空気抵抗を考えた自由落下

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

空気抵抗を考えた自由落下の速度変化をシミュレーションせよ.

ただし $t=0$ のとき $v=0$ とする.



小球の速度 $v(t)$ が $\frac{mg}{k}$ に収束することを確認

2-2. シミュレーションの方法

コンピューターは四則計算しかできない.

シミュレーション（コンピューターで計算）するために...

$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$ の $\frac{dv(t)}{dt}$ を **<u>四則計算</u>** で表したい！

2-2-A.　離散化 / Discretization

微分の定義より

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Δtが十分小さい時

$$\frac{dv(t)}{dt} \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

これを元の微分方程式に代入すると…

2-2-A. 離散化 / Discretization

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

$$m\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = mg - kv(t)$$

$$\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = g - \frac{k}{m}v(t)$$

現在（t秒）の情報

から

未来（$t + \Delta t$秒後）の状態

を計算可能

$$\boxed{v(t + \Delta t)} = v(t) + \Delta t\left(g - \frac{k}{m}v(t)\right)$$

未来　　　　現在

2-2-B．実際の計算

$m = 1.0,\ g = 9.8,\ k = 10,\ \Delta t = 0.01,\ v(0) = 0$ のとき

シミュレーション

$$v(0.01) = v(0 + 0.01) = v(0) + 0.01 \times \left(9.8 - \frac{10}{1.0} \times v(0)\right) = 0.098$$

$$v(0.02) = v(0.01 + 0.01) = v(0.01) + 0.01 \times \left(9.8 - \frac{10}{1.0} \times v(0.01)\right) = 0.1862$$

$$\vdots$$

$$v(1.50) = 0.97999986\ldots$$

解

$$v(1.50) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}1.5}\right)$$

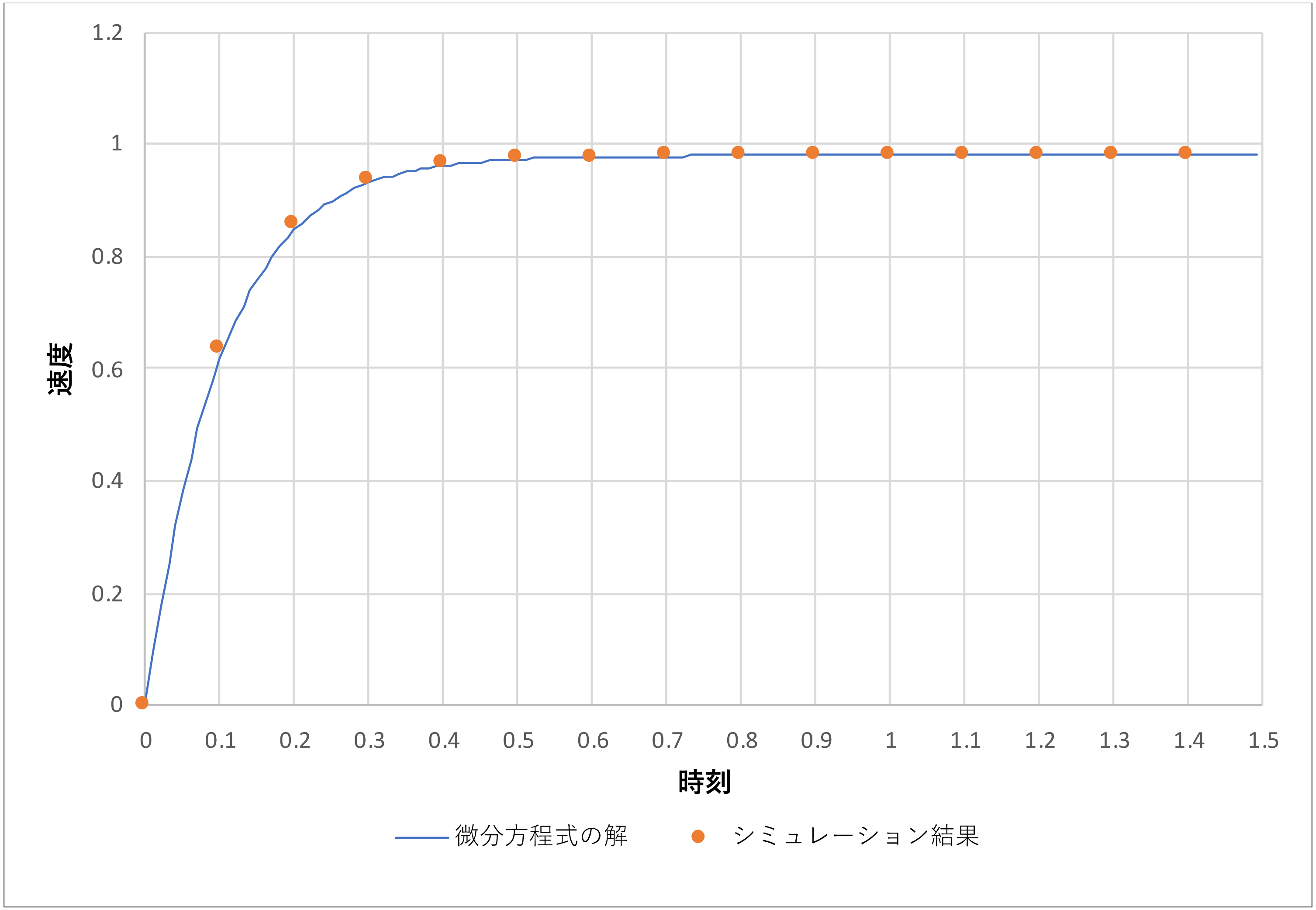
$$= \frac{1.0 \times 9.8}{10}\left(1 - e^{-\frac{10}{1.0} \times 1.5}\right)$$

$$= 0.9799997002\ldots$$

シミュレーション結果と

微分方程式の解がほぼ一致

2-2-B．実際の計算


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
速度
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5
時刻
微分方程式の解
シミュレーション結果

コンテンツ

3. Python・MATLABによる実装（20分）

$$v(t+\Delta t) \;=\; v(t) + \Delta t\left(g - \frac{k}{m}v(t)\right)$$

```
## Input Parameters
m : 小球の質量
g : 重力加速度
k : 空気抵抗の定数
v0: 初速度
dt: 時間間隔Δt
t_max:シミュレーションを終える時刻
```

```
# Calculation
t :
i : 計算回数のカウンター
v_hist : 計算結果を記録する配列
t_hist : 計算時刻を記録する配列
v_old = v0
while True:
  # i(≠0) 回目の計算
  v = v_old + …
  t = #時間ステップの更新
  i = #計算回数の更新
  v_old = #v_oldの更新
  if t が t_max以上
    while Loopを抜ける
  t_histにデータを追加
  v_histにデータを追加
```