数値解析入門

4.拡散方程式（1次元，陰解法）

4. Diffusion Equation (1-Dimensional，Implicit method)

コンテンツ

コンテンツ

1.拡散方程式

長さ L の貯留層における圧力 $P(x,t)$ の時間変化を考える。

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x}$$

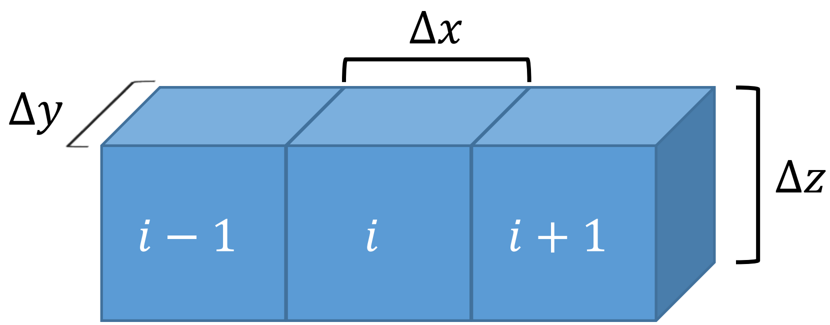
ϕ： 岩石の空隙率　　k： 岩石の浸透率

c： 圧縮率　　μ： 流体の粘度

今回はこの拡散方程式を陰解法で解く

1. 拡散方程式（離散化）

$\Delta z \Delta y = A$



$$\phi c \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i = \frac{k}{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \frac{P_{i+1} - P_i}{0.5(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} \Delta y_i \Delta z_i - \frac{k}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \frac{P_i - P_{i-1}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \Delta y_i \Delta z_i$$

検査体積がすべて等しく（$V_{i-1} = V_i = V_{i+1}$）、$\frac{k}{\mu_{i+1/2}} = \frac{k}{\mu_{i-1/2}}$とすると

$$\frac{V_i \phi c}{\Delta t}\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = \frac{kA}{\mu \Delta x}(P_{i+1} - P_i) - \frac{kA}{\mu \Delta x}(P_i - P_{i-1})$$

→単位が流量の離散化した式が得られた！

※これ以降 $\frac{V_i \phi c}{\Delta t} = {}^{B_i}/_{\Delta t}$, $\frac{kA}{\mu \Delta x} = T$ と置く

1. 拡散方程式（陰解法）

- 時間ステップによらず安定（※陽解法は時間ステップに制限）
- 多くの商用シミュレータは陰解法を採用

陰解法では、離散化した式の右辺にP^{n+1}を用いる（陽解法ではP^{n}）。

$$\frac{B_i}{\Delta t}\left(P_i^{n+1}-P_i^{n}\right)=T\left(P_{i+1}^{n+1}-P_i^{n+1}\right)-T\left(P_i^{n+1}-P_{i-1}^{n+1}\right)$$

【演習1】
上記の離散化式を左辺にP^{n+1}，右辺にP^{n}が存在するように式変形してください。移項して，P^{n+1}については，$i-1$，i，$i+1$ごとに同類項をまとめて下さい。

1. 拡散方程式（陰解法）

- 時間ステップによらず安定（※陽解法は時間ステップに制限）
- 多くの商用シミュレータは陰解法を採用

陰解法では、離散化した式の右辺にP^{n+1}を用いる（陽解法ではP^{n}）。

$$^{B_i}/_{\Delta t}\,(P_i^{n+1} - P_i^{n}) = T(P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - T(P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1})$$

【演習1】
上記の離散化式を左辺にP^{n+1}，右辺にP^{n}が存在するように式変形してください。移項して，P^{n+1}については，$i-1$，i，$i+1$ごとに同類項をまとめて下さい。

$$-TP_{i-1}^{n+1} + (2T + {}^{B_i}/_{\Delta t})P_i^{n+1} - TP_{i+1}^{n+1} = {}^{B_i}/_{\Delta t}\,P_i^{n}$$

コンテンツ

2.ソース/シンク項

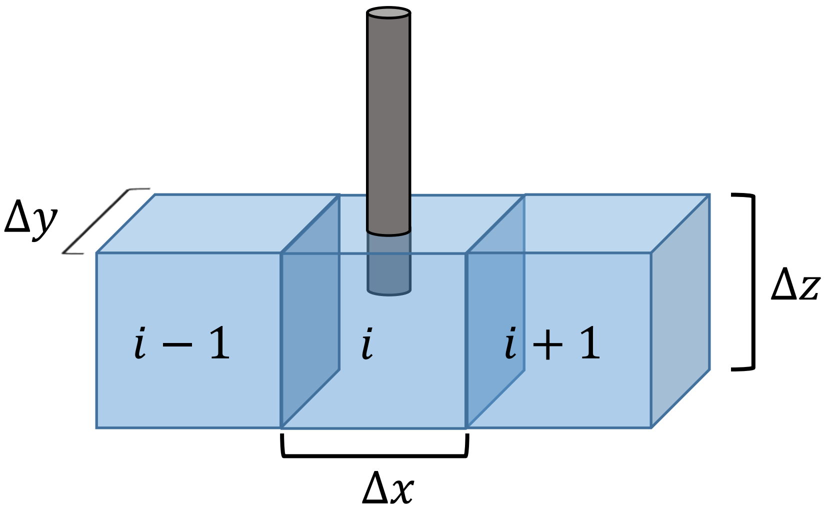
$V_i \phi c = B_i$, $\frac{kA}{\mu \Delta x} = T$ と置いた陰解法の離散化式

$$-TP_{i-1}^{n+1} + (2T + \frac{B_i}{\Delta t})P_i^{n+1} - TP_{i+1}^{n+1} = \frac{B_i}{\Delta t}P_i^n$$

検査体積内部での生成 / 消失を考えたい

坑井モデル/ソース・シンク項の導入

2.ソース/シンク項



流量による表現

- 比較的簡単
- 特に単相流の場合は容易に実装可能

坑底圧力による表現（今回は説明しない）

- やや複雑
- スキンファクター等を考慮したモデル

2.ソース/シンク項

検査体積 i に掘削された坑井からの流量を $Q_i\ [L^3/T]$ として、

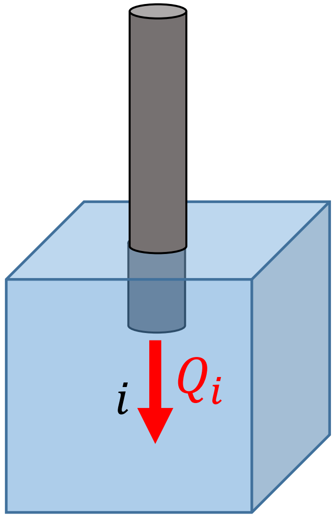
$$-TP_{i-1}^{n+1} + (2T + \frac{B_i}{\Delta t})P_i^{n+1} - TP_{i+1}^{n+1} = \frac{B_i}{\Delta t}P_i^n + Q_i$$

生産井

- $q_i < 0$

圧入 / 還元井

- $q_i > 0$

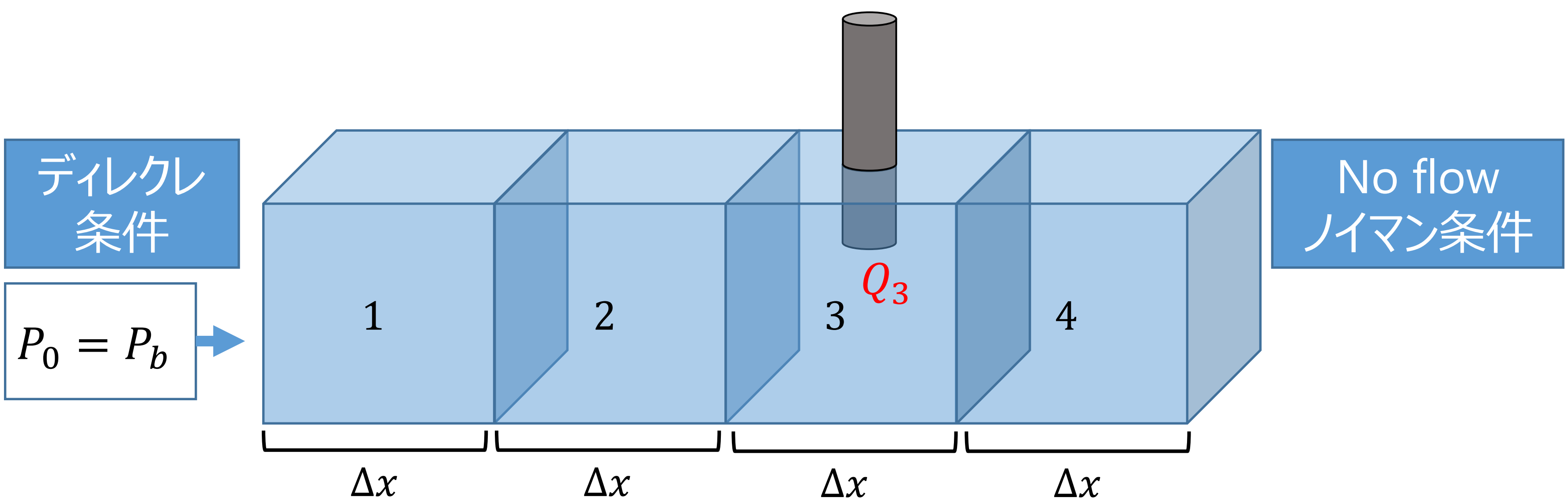


コンテンツ

3. 陰解法の実装

$$-TP_{i-1}^{n+1} + \left(2T + \frac{B_i}{\Delta t}\right) P_i^{n+1} - TP_{i+1}^{n+1} = \frac{B_i}{\Delta t} P_i^n + Q_i$$

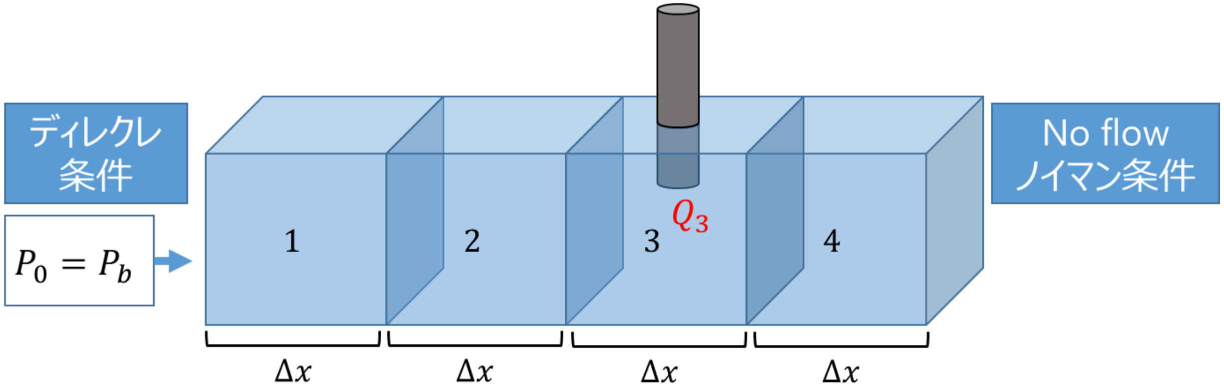
陰解法では、すべてのブロックについての式を連立方程式として解く。下図を例として説明をする。下図に示した水単相貯留層は断面積 A， 浸透率 k。ブロック3には流量Q3の坑井がある。



3. 陰解法の実装

【演習2】
各ブロックごとの離散化式を書き下してください。

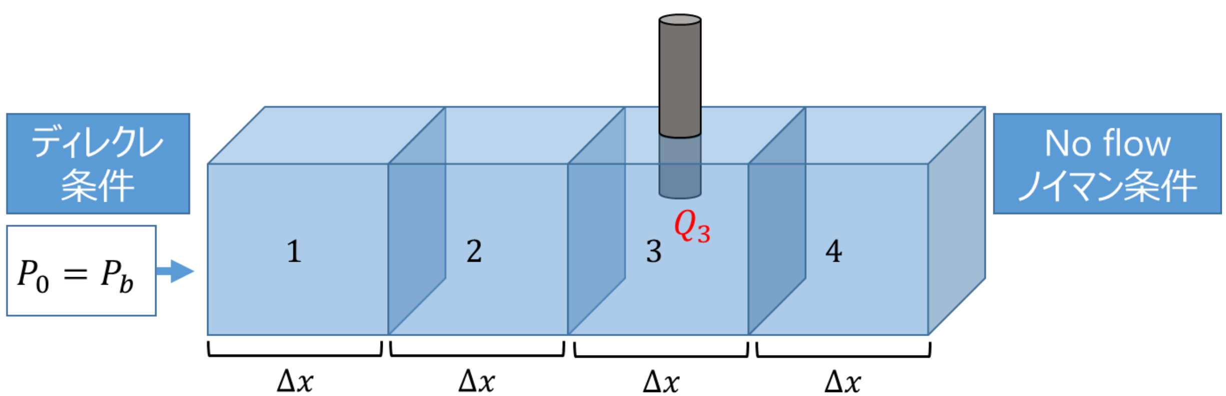
Block#1	
Block#2	
Block#3	
Block#4	



3. 陰解法の実装

解答

Block#1	$-T\left(P_b - P_1^{n+1}\right) + \left(2T + \frac{B_1}{\Delta t}\right)P_1^{n+1} - TP_2^{n+1} = \frac{B_1}{\Delta t}P_1^n$
Block#2	$-TP_1^{n+1} + \left(2T + \frac{B_2}{\Delta t}\right)P_2^{n+1} - TP_3^{n+1} = \frac{B_2}{\Delta t}P_2^n$
Block#3	$-TP_2^{n+1} + \left(2T + \frac{B_3}{\Delta t}\right)P_3^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_3}{\Delta t}P_3^n + Q_3$
Block#4	$-TP_3^{n+1} + \left(2T + \frac{B_4}{\Delta t}\right)P_4^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_4}{\Delta t}P_4^n$



3. 陰解法の実装

各検査体積についての式をまとめる

$$
\begin{cases}
\left(3T + \dfrac{B_1}{\Delta t}\right) P_1^{n+1} - T P_2^{n+1} = \dfrac{B_1}{\Delta t} P_1^n + 2T P_b \\
-T P_1^{n+1} + \left(2T + \dfrac{B_2}{\Delta t}\right) P_2^{n+1} - T P_3^{n+1} = \dfrac{B_2}{\Delta t} P_2^n \\
-T P_2^{n+1} + \left(2T + \dfrac{B_3}{\Delta t}\right) P_3^{n+1} - T P_4^{n+1} = \dfrac{B_3}{\Delta t} P_3^n + Q_3 \\
-T P_3^{n+1} + \left(T + \dfrac{B_4}{\Delta t}\right) P_4^{n+1} = \dfrac{B_4}{\Delta t} P_4^n
\end{cases}
$$

線形連立方程式は行列とベクトルで表現できる

3. 陰解法の実装

$$\left(\begin{bmatrix} 3T & -T & 0 & 0 \\ -T & 2T & -T & 0 \\ 0 & -T & 2T & -T \\ 0 & 0 & -T & T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix} \Big/ \Delta t\right) \begin{bmatrix} P_1^{n+1} \\ P_2^{n+1} \\ P_3^{n+1} \\ P_4^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^{n} \\ P_2^{n} \\ P_3^{n} \\ P_4^{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TP_b \\ 0 \\ Q_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

次のようなイメージがあるとプログラムを書きやすい。

$$\left(\mathbf{T} + \frac{\boldsymbol{B}}{\Delta t}\right)\vec{P}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{B}}{\Delta t}\vec{P}_n + \vec{Q}$$

- 「コンピュータで連立方程式を解く」のは大変（だった）
  - $\mathbf{T}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{J}$ の扱いもポイント （省メモリ）

    Key Word : 掃き出し法，疎行列計算，ヤコビ法

- Python (NumPy・SciPy) や MATLABでは一行で完結

3. 陰解法の実装

【演習3 】

取り組んでもらうのは，係数行列Tの定義

TはN*Nの配列

i = 0	T[0,0]	T[0,1]	0	0	0
	⋱	⋱	⋱	0	0
i番目 →	0	T[i,i-1]	T[i,i]	T[i,i+1]	0
	0	0		⋱	
i = N-1	0	0	0		T[N-1,N-1]

※境界条件への対応は赤の部分で記述済み

```
# T
for i in range(0, N):
    if i == 0:
        Tw =  #-ここにコードを書く-#
        Te = #-ここにコードを書く-#
        T[i,i] =  Tw + Te;
        T[i,i+1] =  #-ここにコードを書く-#
    elif i == N-1:
        Tw =  #-ここにコードを書く-#
        Te =  #-ここにコードを書く-#
        T[i,i]     =  Tw + Te;
        T[i, i-1] =  #-ここにコードを書く-#
    else:
        Tw = #-ここにコードを書く-#
        Te = #-ここにコードを書く-#
        T[i,i] = Tw + Te;
        T[i,i-1] = -Tw
        T[i,i+1] = -Te


# B
for i in range(0, N):
    B[i,i] = A*dx*phi[i]*c
```

```
# Boundary Condition and Q
if BC_east == 0:
    Q[0] = 2*T[0,0]*Pb_east
    T[0,0] = T[0,0] + T[0,0];
if BC_west == 0:
    Q[N-1] = 2*T[N-1, N-1]*Pb_west
    T[N-1,N-1] = T[N-1,N-1] + T[N-1,N-1]
```

3. 陰解法の実装（演習の考察）

サンプルコードには改善の余地があり！

Tm, B, はN*Nのサイズ

→実際には対角成分 + αしか使わない

Tm なら N*N – (3N-4) 個の要素が無駄

B なら N*N – N 個の要素が無駄

Hint : scipy.spdiags

コンテンツ

プログラミング言語の選択肢

1. **Python**

   無料で、教材があふれている。ただ、計算速度の問題から、陽解法によるコード作成は現実的ではない（ベクトルと行列でまとめればそれなり？）。

2. **MATLAB**

   使いやすいが有料。先生に言えば（多分）ライセンスを買ってもらえる。

   Octaveによる代用は個人的に微妙。こちらも計算速度の問題から、陽解法によるコード作成は非現実的。

3. **Fortran**

   速い。陽解法でコードを書くならFortranがおすすめ。結果を可視化する機能はないので、Python 又は GNU plot 等を使うことになる。松本先生はFortranを主に使っていらっしゃる。

   →それでも時間ステップが…という場合は**並列計算**という選択肢

貯留層の支配方程式

圧力
→拡散方程式

トレーサー濃度
→移流拡散方程式

今回説明していない事（一部）

- ■ 2次元・3次元の場合
- ■ 重力の影響
- ■ 多相流

  今回は水の流れのみ（単相流）だが，実際の貯留層は水-蒸気，水-油，水-油-ガス，水-CO2等が混在

  - 飽和率，Saturation
  - 相対浸透率，Relative Permeability
  - 毛細管圧力，Capillary Pressure
- ■ 容積係数 Formation Volume Factor
  - 貯留層条件と標準状態では体積が異なる
- ■ Productivity Indexの詳細
- ■ エネルギー保存
  - 地熱の資源価値は熱エネルギー
  - 油ガスは質量（体積）

インターネット上の資料

PetroWiki

- 石油工学関連のWiki，SPE公式なので信頼できる

石油天然ガス用語辞典，JOGMEC

- 知らない用語が出てきたらここで調べると◎

  https://oilgas-info.jogmec.go.jp/termlist/index.html

PGE 323M Reservoir Engineering III (Simulation), UT Austin

- 全編英語だが、特に貯留層エンジニア志望なら、勉強する価値あり。
- 講義動画も YouTube で閲覧可能。

  講義資料：https://johnfoster.pge.utexas.edu/PGE323M-ResEngineeringIII/

  講義動画：https://www.youtube.com/channel/UCkCwNnLZnRoaHYFyKTdySDw

九大の講義（他学部）

数値解析，理学部物理学科情報理学コース

- 諸々の数値解析手法について網羅的に解説