

数值解析入門

4. 拡散方程式（1次元，陰解法）

4. Diffusion Equation (1-Dimensional, Implicit method)

コンテンツ

1

拡散方程式と離散化

2

ソース/シンク項

3

陰解法

4

補足説明

コンテンツ

1

拡散方程式と離散化

2

ソース/シンク項

3

陰解法の実装

4

補足説明

1. 拡散方程式

長さ L の貯留層における圧力 $P(x, t)$ の時間変化を考える。

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x}$$

ϕ : 岩石の空隙率

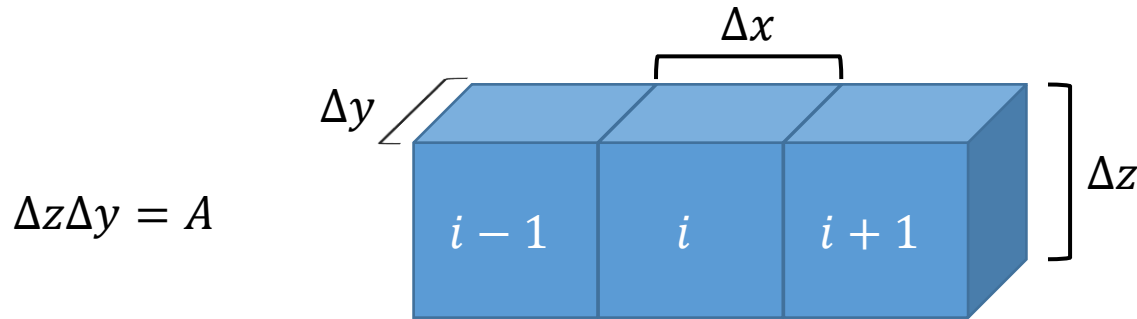
k : 岩石の浸透率

c : 圧縮率

μ : 流体の粘度

今回はこの拡散方程式を陰解法で解く

1. 拡散方程式（離散化）



$$\phi c \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i = \frac{k}{\mu_{i+1/2}} \frac{P_{i+1} - P_i}{0.5(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} \Delta y_i \Delta z_i - \frac{k}{\mu_{i-1/2}} \frac{P_i - P_{i-1}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \Delta y_i \Delta z_i$$

検査体積がすべて等しく ($V_{i-1} = V_i = V_{i+1}$)、 $\frac{k}{\mu_{i+1/2}} = \frac{k}{\mu_{i-1/2}}$ とすると

$$\frac{V_i \phi c}{\Delta t} (P_i^{n+1} - P_i^n) = \frac{kA}{\mu \Delta x} (P_{i+1} - P_i) - \frac{kA}{\mu \Delta x} (P_i - P_{i-1})$$

→単位が流量の離散化した式が得られた！

※これ以降 $\frac{V_i \phi c}{\Delta t} = B_i / \Delta t$, $\frac{kA}{\mu \Delta x} = T$ と置く

1. 拡散方程式（陰解法）

- 時間ステップによらず安定（※陽解法は時間ステップに制限）
- 多くの商用シミュレータは陰解法を採用

陰解法では、離散化した式の右辺に P^{n+1} を用いる（陽解法では P^n ）。

$$B_i / \Delta t (P_i^{n+1} - P_i^n) = T(P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - T(P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1})$$

【演習1】

上記の離散化式を左辺に P^{n+1} ，右辺に P^n が存在するように式変形してください。移項して， P^{n+1} については， $i-1$ ， i ， $i+1$ ごとに同類項をまとめて下さい。

1. 拡散方程式（陰解法）

- 時間ステップによらず安定（※陽解法は時間ステップに制限）
- 多くの商用シミュレータは陰解法を採用

陰解法では、離散化した式の右辺に P^{n+1} を用いる（陽解法では P^n ）。

$$B_i / \Delta t (P_i^{n+1} - P_i^n) = T(P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - T(P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1})$$

【演習1】

上記の離散化式を左辺に P^{n+1} ，右辺に P^n が存在するように式変形してください。移項して， P^{n+1} については， $i-1$ ， i ， $i+1$ ごとに同類項をまとめて下さい。

$$-TP_{i-1}^{n+1} + (2T + B_i / \Delta t)P_i^{n+1} - TP_{i+1}^{n+1} = B_i / \Delta t P_i^n$$

コンテンツ

1

拡散方程式と離散化

2

ソース/シンク項

3

陰解法の実装

4

補足説明

2. ソース/シンク項

$V_i \phi_c = B_i$, $\frac{kA}{\mu \Delta x} = T$ と置いた陰解法の離散化式

$$-TP_{i-1}^{n+1} + (2T + \frac{B_i}{\Delta t})P_i^{n+1} - TP_{i+1}^{n+1} = \frac{B_i}{\Delta t}P_i^n$$

検査体積内部での生成 / 消失を考えたい

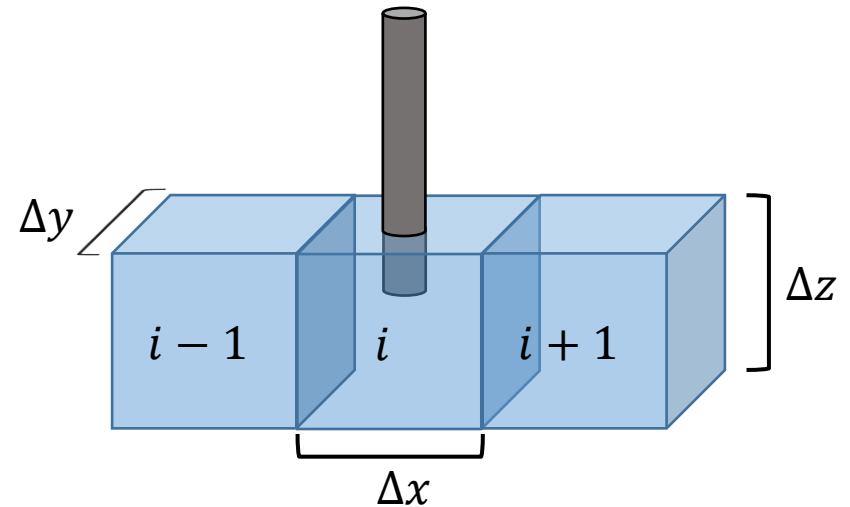


坑井モデル/ソース・シンク項の導入

2. ソース/シンク項

流量による表現

- 比較的簡単
- 特に単相流の場合は容易に実装可能



坑底圧力による表現（今回は説明しない）

- やや複雑
- スキンファクター等を考慮したモデル

2. ソース/シンク項

検査体積 i に掘削された坑井からの流量を Q_i [L^3/T] として、

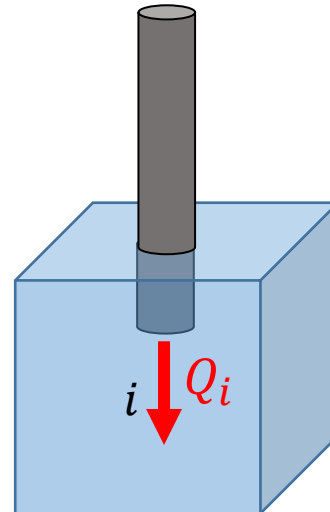
$$-TP_{i-1}^{n+1} + (2T + \frac{B_i}{\Delta t})P_i^{n+1} - TP_{i+1}^{n+1} = \frac{B_i}{\Delta t}P_i^n + Q_i$$

生産井

- $q_i < 0$

圧入 / 還元井

- $q_i > 0$



コンテンツ

1

拡散方程式と離散化

2

ソース/シンク項

3

陰解法の実装

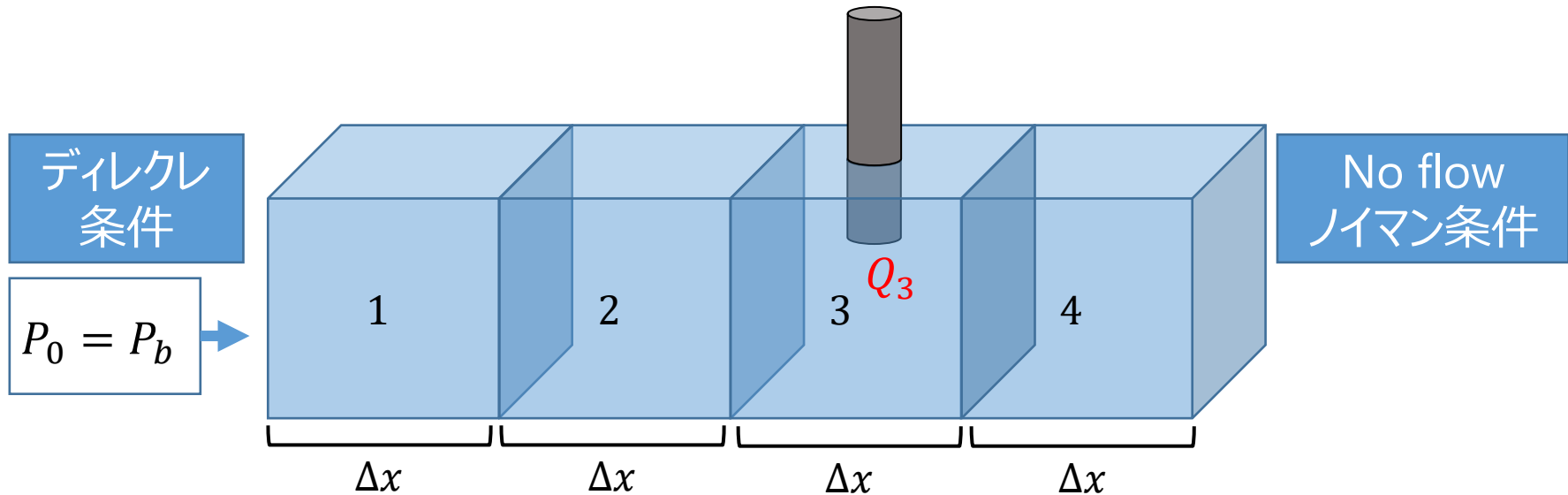
4

補足説明

3. 陰解法の実装

$$-TP_{i-1}^{n+1} + \left(2T + \frac{B_i}{\Delta t}\right)P_i^{n+1} - TP_{i+1}^{n+1} = \frac{B_i}{\Delta t}P_i^n + Q_i$$

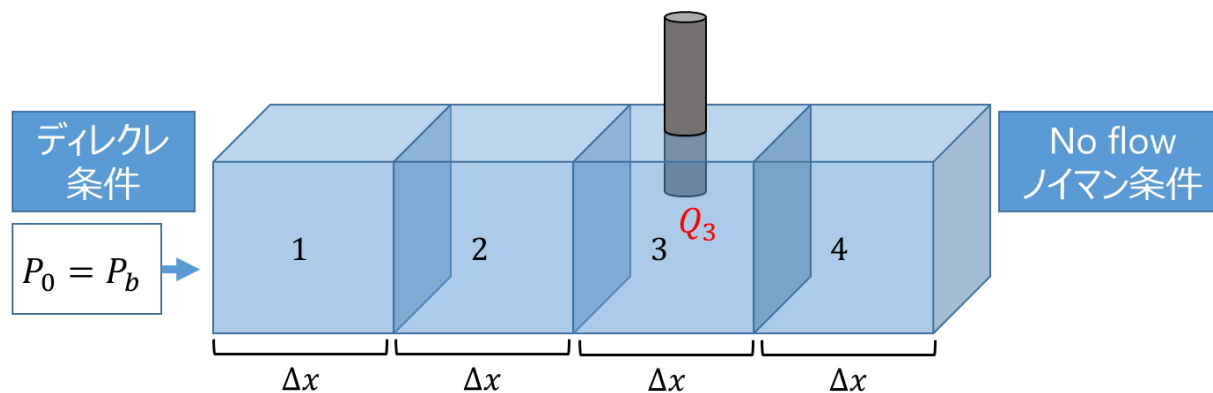
陰解法では、すべてのブロックについての式を連立方程式として解く。下図を例として説明をする。下図に示した水単相貯留層は断面積 A , 浸透率 k 。ブロック3には流量 Q_3 の坑井がある。



3. 陰解法の実装

【演習2】

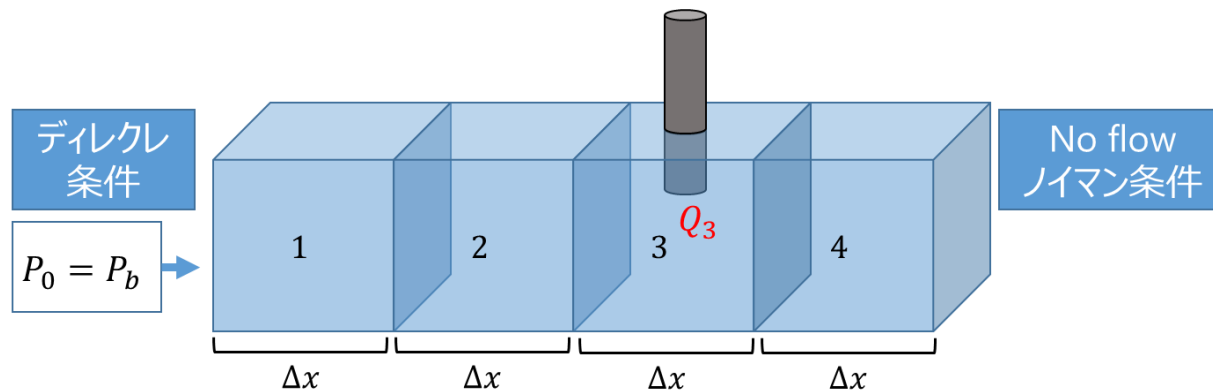
各ブロックごとの離散化式を書き下してください。



3. 陰解法の実装

解答

Block#1	$-T(P_b - P_1^{n+1}) + \left(2T + \frac{B_1}{\Delta t}\right) P_1^{n+1} - TP_2^{n+1} = \frac{B_1}{\Delta t} P_1^n$
Block#2	$-TP_1^{n+1} + \left(2T + \frac{B_2}{\Delta t}\right) P_2^{n+1} - TP_3^{n+1} = \frac{B_2}{\Delta t} P_2^n$
Block#3	$-TP_2^{n+1} + \left(2T + \frac{B_3}{\Delta t}\right) P_3^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_3}{\Delta t} P_3^n + Q_3$
Block#4	$-TP_3^{n+1} + \left(2T + \frac{B_4}{\Delta t}\right) P_4^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_4}{\Delta t} P_4^n$



3. 陰解法の実装

各検査体積についての式をまとめる

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(3T + \frac{B_1}{\Delta t} \right) P_1^{n+1} - TP_2^{n+1} = \frac{B_1}{\Delta t} P_1^n + 2TP_b \\ -TP_1^{n+1} + \left(2T + \frac{B_2}{\Delta t} \right) P_2^{n+1} - TP_3^{n+1} = \frac{B_2}{\Delta t} P_2^n \\ -TP_2^{n+1} + \left(2T + \frac{B_3}{\Delta t} \right) P_3^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_3}{\Delta t} P_3^n + Q_3 \\ -TP_3^{n+1} + \left(T + \frac{B_4}{\Delta t} \right) P_4^{n+1} = \frac{B_4}{\Delta t} P_4^n \end{array} \right.$$

線形連立方程式は行列とベクトルで表現できる

3. 陰解法の実装

$$\left(\begin{bmatrix} 3T & -T & 0 & 0 \\ -T & 2T & -T & 0 \\ 0 & -T & 2T & -T \\ 0 & 0 & -T & T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix} / \Delta t \right) \begin{bmatrix} P_1^{n+1} \\ P_2^{n+1} \\ P_3^{n+1} \\ P_4^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^n \\ P_2^n \\ P_3^n \\ P_4^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TP_b \\ 0 \\ Q_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

次のようなイメージがあるとプログラムを書きやすい。

$$\left(\mathbf{T} + \frac{\mathbf{B}}{\Delta t} \right) \vec{P}_{n+1} = \frac{\mathbf{B}}{\Delta t} \vec{P}_n + \vec{Q}$$

- 「コンピュータで連立方程式を解く」のは大変（だった）
 - \mathbf{T} , \mathbf{B} , \mathbf{J} の扱いもポイント（省メモリ）

Key Word : 掃き出し法, 疎行列計算, ヤコビ法

- Python (NumPy・SciPy) や MATLABでは一行で完結

3. 陰解法の実装

【演習3】

取り組んでもらうのは、係数行列Tの定義

TはN*Nの配列

$i = 0$			0	0	0
				0	0
	0				0
	0	0			
$i = N-1$	0	0	0		

※境界条件への対応は赤の部分で記述済み

```
# T
for i in range(0, N):
    if i == 0:
        Tw = #-ここにコードを書く-#
        Te = #-ここにコードを書く-#
        T[i,i] = Tw + Te;
        T[i,i+1] = #-ここにコードを書く-#
    elif i == N-1:
        Tw = #-ここにコードを書く-#
        Te = #-ここにコードを書く-#
        T[i,i] = Tw + Te;
        T[i, i-1] = #-ここにコードを書く-#
    else:
        Tw = #-ここにコードを書く-#
        Te = #-ここにコードを書く-#
        T[i,i] = Tw + Te;
        T[i,i-1] = -Tw
        T[i,i+1] = -Te
```

```
# B
for i in range(0, N):
    B[i,i] = A*dx*phi[i]*c
```

```
# Boundary Condition and Q
if BC_east == 0:
    Q[0] = 2*T[0,0]*Pb_east
    T[0,0] = T[0,0] + T[0,0];
if BC_west == 0:
    Q[N-1] = 2*T[N-1, N-1]*Pb_west
    T[N-1,N-1] = T[N-1,N-1] + T[N-1,N-1]
```

3. 陰解法の実装（演習の考察）

サンプルコードには改善の余地があり！

$T_m, B,$ は $N \times N$ のサイズ

→ 実際には対角成分 + α しか使わない

T_m なら $N \times N - (3N - 4)$ 個の要素が無駄

B なら $N \times N - N$ 個の要素が無駄

Hint : `scipy.spdiags`

コンテンツ

1

拡散方程式と離散化

2

ソース/シンク項

3

陰解法の実装

4

補足説明

プログラミング言語の選択肢

1. Python

無料で、教材があふれている。ただ、計算速度の問題から、陽解法によるコード作成は現実的ではない（ベクトルと行列でまとめればそれなり？）。

2. MATLAB

使いやすいが有料。先生に言えば（多分）ライセンスを買ってもらえる。Octaveによる代用は個人的に微妙。こちらも計算速度の問題から、陽解法によるコード作成は非現実的。

3. Fortran

速い。陽解法でコードを書くなればFortranがおすすめ。結果を可視化する機能はないので、Python 又は GNU plot 等を使うことになる。松本先生はFortranを主に使っている。

→それでも時間ステップが...という場合は**並列計算**という選択肢

貯留層の支配方程式

圧力

→ 拡散方程式

トレーサー濃度

→ 移流拡散方程式

今回説明していない事（一部）

■ 2次元・3次元の場合

■ 重力の影響

■ 多相流

今回は水の流れのみ（単相流）だが、実際の貯留層は水-蒸気，水-油，水-油-ガス，水-CO₂等が混在

- 飽和率, Saturation
- 相対浸透率, Relative Permeability
- 毛細管圧力, Capillary Pressure

■ 容積係数 Formation Volume Factor

- 貯留層条件と標準状態では体積が異なる

■ Productivity Indexの詳細

■ エネルギー保存

- 地熱の資源価値は熱エネルギー
- 油ガスは質量（体積）

インターネット上の資料

PetroWiki

- 石油工学関連のWiki, SPE公式なので信頼できる

石油天然ガス用語辞典, JOGMEC

- 知らない用語が出てきたらここで調べると◎

<https://oilgas-info.jogmec.go.jp/termlist/index.html>

PGE 323M Reservoir Engineering III (Simulation), UT Austin

- 全編英語だが、特に貯留層エンジニア志望なら、勉強する価値あり。
- 講義動画も YouTube で閲覧可能。

講義資料 : <https://johnfoster.pge.utexas.edu/PGE323M-ResEngineeringIII/>

講義動画 : <https://www.youtube.com/channel/UCkCwNnLZnRoahYFyKTdySDw>

九大の講義（他学部）

数値解析, 理学部物理学科情報理学コース

- 諸々の数値解析手法について網羅的に解説