数値解析入門

1. 常微分方程式の時間積分

1. Time Integration of Ordinary Differential Equations

コンテンツ

1	小球の自由落下
2	シミュレーション
3	Python・MATLABによる実装

コンテンツ

1. 小球の自由落下

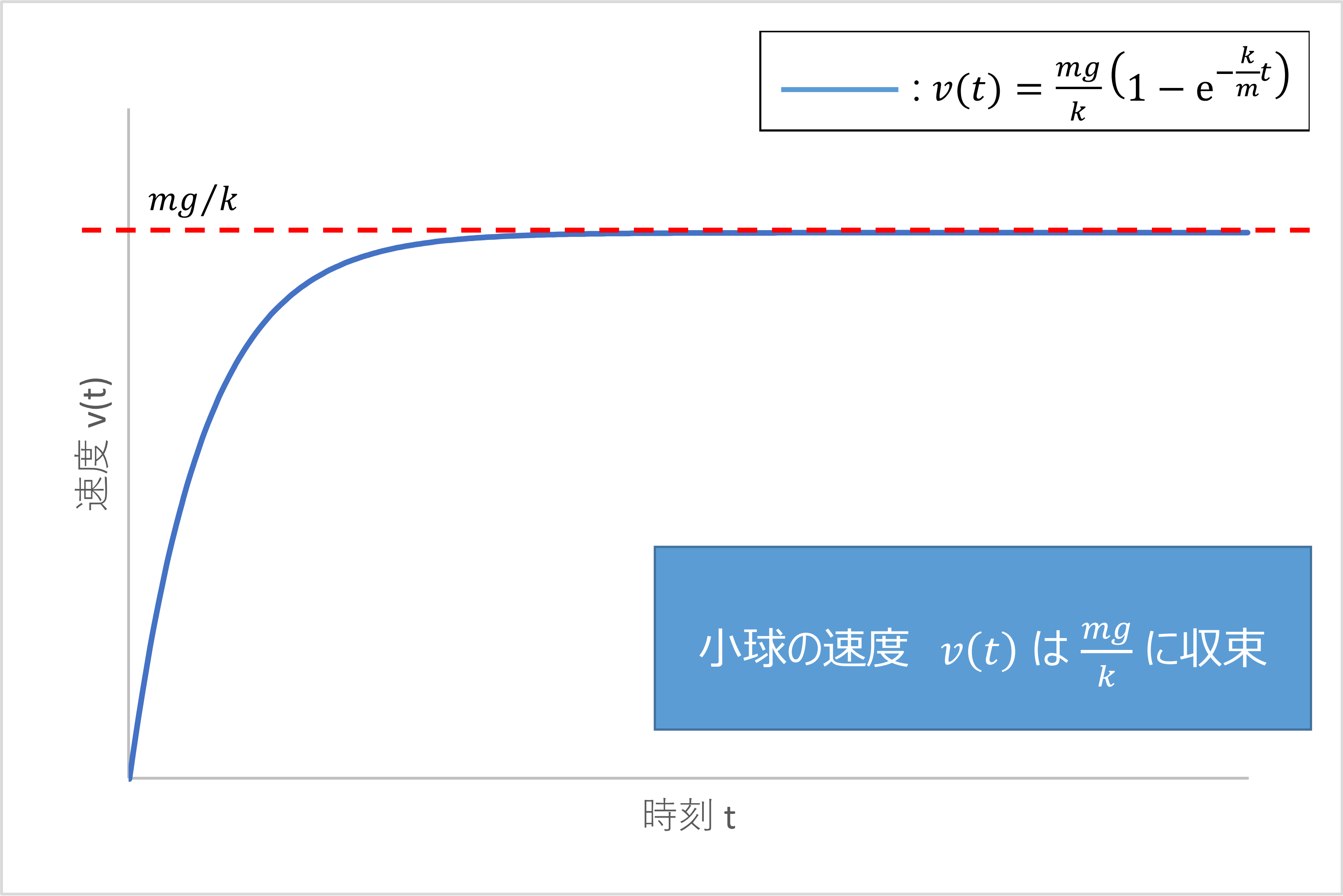
微分方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

特殊解
($v(0) = 0$)

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

1. 小球の自由落下



$: v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$
mg/k
速度 v(t)
時刻 t
小球の速度 $v(t)$ は $\frac{mg}{k}$ に収束

コンテンツ

2

シミュレーション

1. コンピューターができる計算・できない計算

2. シミュレーションの方法

   A) 離散化 / Discretization

   B) 実際の計算

2-1. コンピューターができる計算

四則計算のみ！

2-1. コンピューターができない計算

例：空気抵抗を考えた自由落下

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$ の解を求めよ.

ただし $t = 0$ のとき $v = 0$ とする.

解

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

コンピューターは

「変数分離して両辺を積分」

という計算をできない

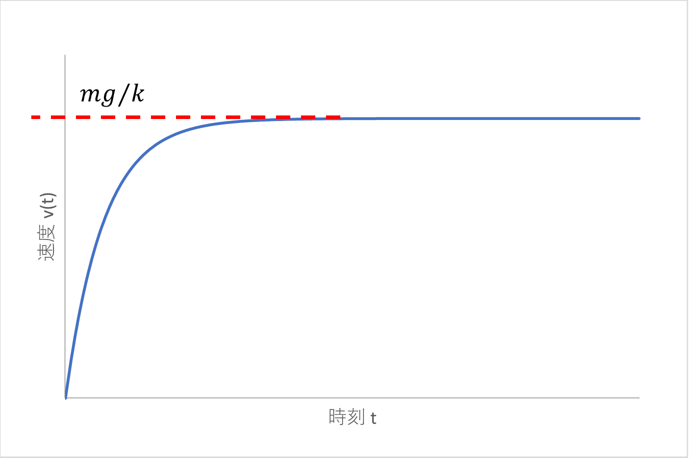
2-2. シミュレーションの方法

問題：空気抵抗を考えた自由落下

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

空気抵抗を考えた自由落下の速度変化をシミュレーションせよ.

ただし $t = 0$ のとき $v = 0$ とする.



小球の速度 $v(t)$ が $\frac{mg}{k}$ に収束することを確認

2-2. シミュレーションの方法

コンピューターは四則計算しかできない.

シミュレーション（コンピューターで計算）するために…

$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$ の $\dfrac{dv(t)}{dt}$ を **<u>四則計算</u>**で表したい！

2-2-A. 離散化 / Discretization

微分の定義より

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Δtが十分小さい時

$$\frac{dv(t)}{dt} \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

これを元の微分方程式に代入すると…

2-2-A.　離散化 / Discretization

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

$$m\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = mg - kv(t)$$

$$\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = g - \frac{k}{m}v(t)$$

現在（t秒）の情報

から

未来（$t+\Delta t$秒後）の状態

を計算可能

$$\boxed{v(t+\Delta t)} = \boxed{v(t) + \Delta t\left(g - \frac{k}{m}v(t)\right)}$$

未来　　　　現在

2-2-B.　実際の計算

$m = 1.0,\ g = 9.8,\ k = 10,\ \Delta t = 0.01,\ v(0) = 0$ のとき

シミュレーション

$$v(0.01) = v(0 + 0.01) \quad = v(0) + 0.01 \times \left(9.8 - \frac{10}{1.0} \times v(0)\right) \quad = 0.098$$

$$v(0.02) = v(0.01 + 0.01) = v(0.01) + 0.01 \times \left(9.8 - \frac{10}{1.0} \times v(0.01)\right) = 0.1862$$

$$\vdots$$

$$v(1.50) = 0.97999986 \ldots$$

解

$$v(1.50) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}1.5}\right)$$

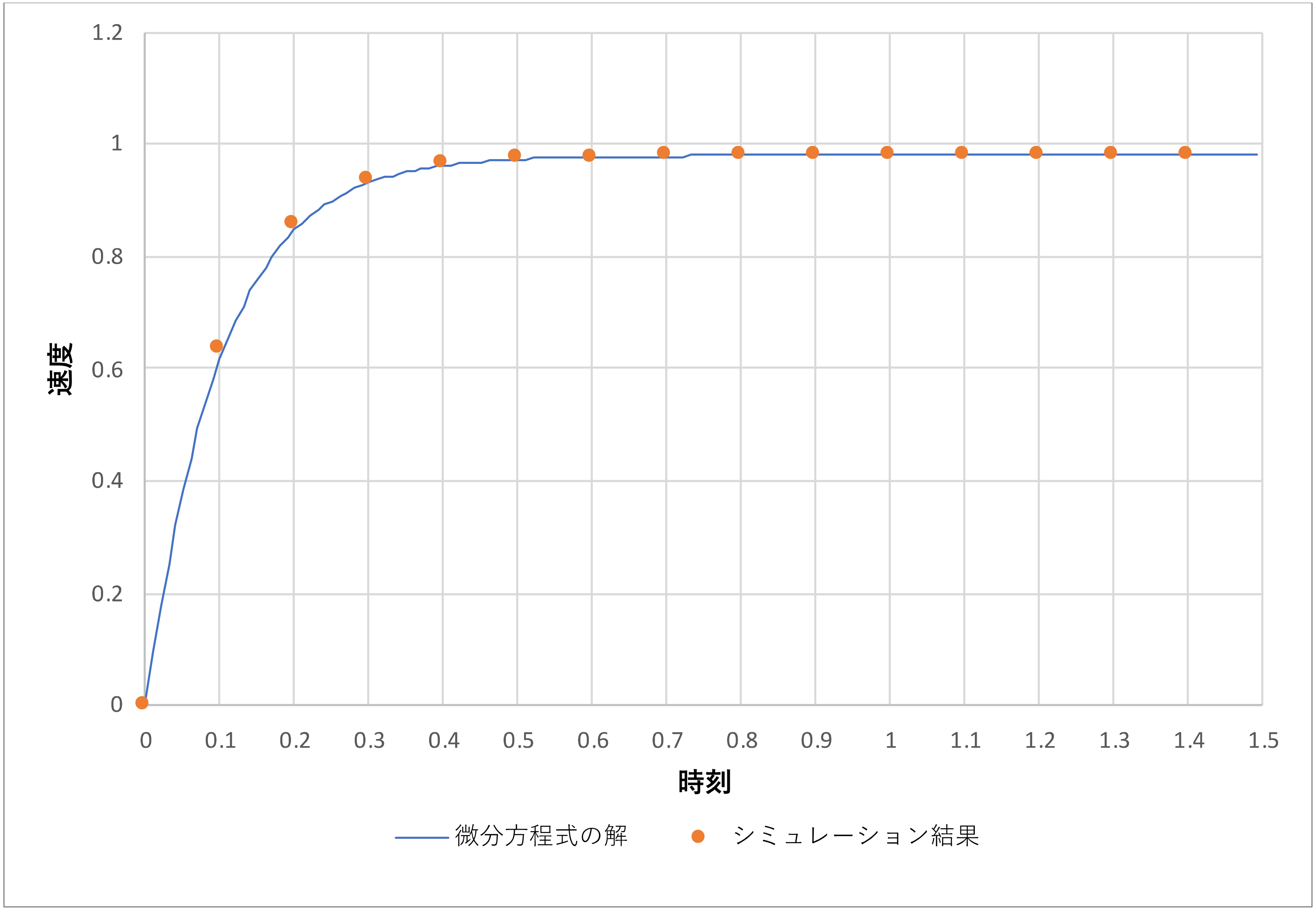
$$= \frac{1.0 \times 9.8}{10}\left(1 - e^{-\frac{10}{1.0} \times 1.5}\right)$$

$$= 0.9799997002 \ldots$$

シミュレーション結果と

微分方程式の解がほぼ一致

2-2-B．実際の計算



1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
速度
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5
時刻
微分方程式の解
シミュレーション結果

コンテンツ

3. Python・MATLABによる実装

【演習】20分

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta t\left(g - \frac{k}{m}v(t)\right)$$

MATLABによる実装（例）

```
%% Input Parameters
m     = 1.0; % mass of a small ball [kg]
g     = 9.8; % gravitational acceleration [m/s^2]
k     = 1.0; % coefficient of air resistance [N*s/m]
v0    = 0.0; % Initial velocity [m/s]
dt    = 0.1; % time step for simulation [s]
t_max =  10; % time which simulation is stopped [s]

%% Calculation
t = 0;
i = 1; % counter
v_hist = [v0]; % array to hold velocity value
while true
    v = v_hist(i) + dt*(g - (k/m)*v_hist(i));
    t = t + dt;
    if t >= t_max
        break
    end
    i = i+1;
    v_hist = [v_hist v]; % this code is not actually good.
end

%% Plot result
t_hist = 0:dt:t_max;
plot(t_hist, v_hist);
xlabel('t [s]');
ylabel('v [m/s]');
```

発展．SIRモデル・SEIRモデルなど