

# 数值解析入門

3. 拡散方程式（1次元）

3. Diffusion Equation (1-Dimensional)

# コンテンツ

1

拡散方程式

2

有限体積法

3

境界条件

4

実装

# コンテンツ

1

拡散方程式

2

有限体積法

3

境界条件

4

実装

# 1. 拡散方程式

拡散 (diffusion) : 物理量が空間で散らばり、広がること

1次元の場合

$$\frac{\partial C}{\partial t} = a \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

$k > 0$  は拡散定数とよばれる正の量で, より一般には

$$\frac{\partial C}{\partial t} = a \nabla^2 C$$

# 1.拡散方程式

長さ  $L$  の一様な貯留層における圧力  $P(x, t)$  の時間変化を考える。

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$\phi$  : 岩石の空隙率

$k$  : 岩石の浸透率

$c$  : 圧縮性

$\mu$  : 流体の粘度

※この偏微分方程式は境界条件と初期条件を与えれば解ける。

初期条件

$P(x, 0)$  での圧力分布

境界条件

$P(0, 0)$  と  $P(L, 0)$  での条件

# コンテンツ

1

拡散方程式

2

有限体積法

3

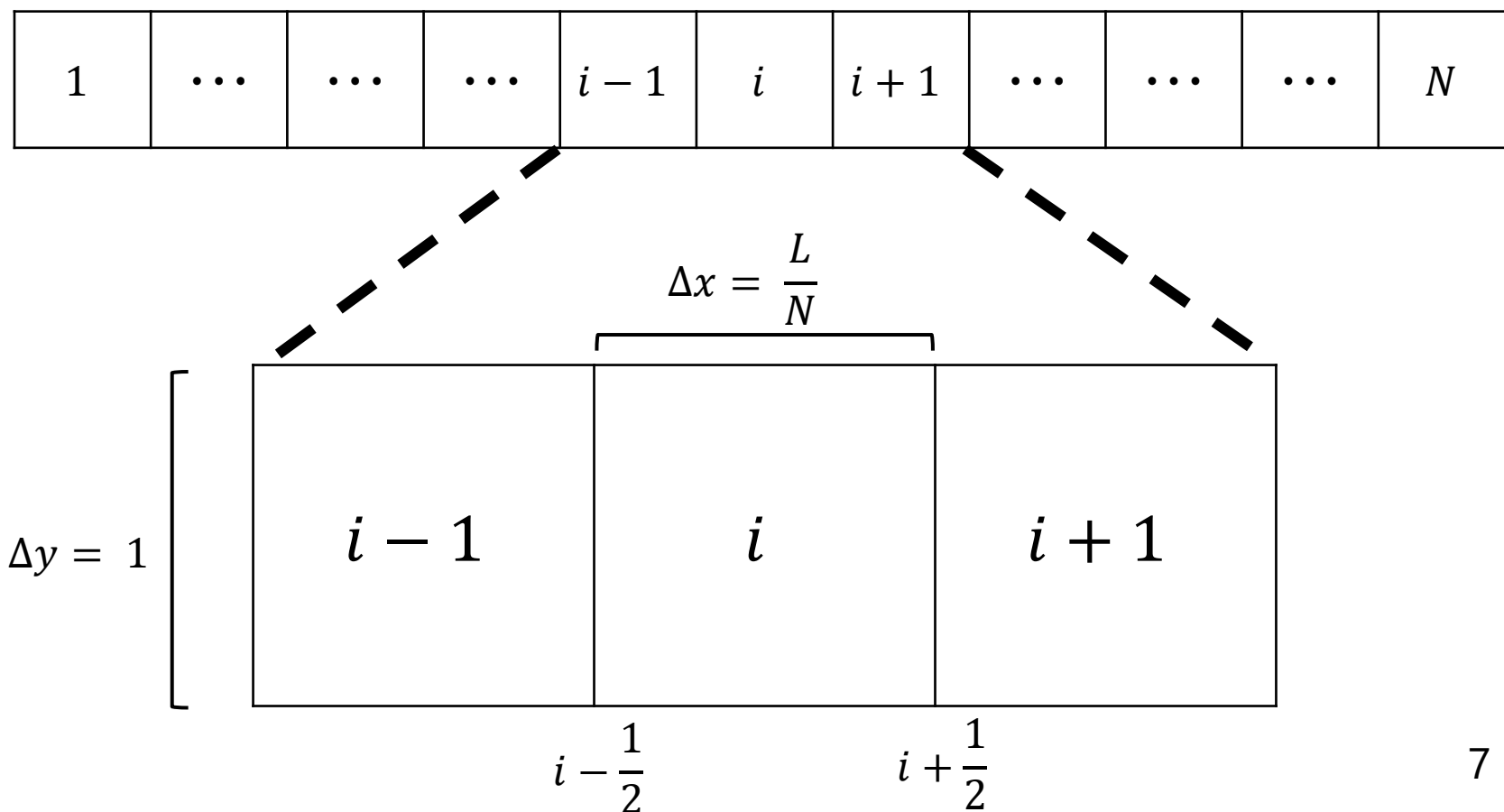
境界条件

4

実装

## 2.有限体積法 (**F**inite **V**olume **M**ethod)

貯留層を  $N$  個の検査体積 (**C**ontrol **V**olume) に分割する。

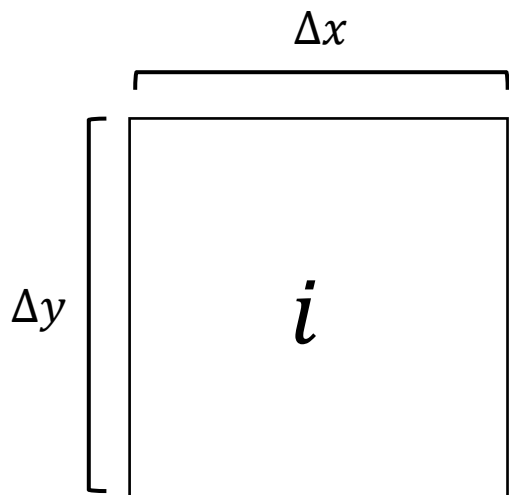


## 2. 有限体積法（時間項の積分）

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

検査体積  $i$  で、拡散方程式の左辺  $\phi c \frac{\partial P}{\partial t}$  を面積分

$$\iint \phi c \frac{\partial P}{\partial t} dx dy \cong \phi c \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \Delta x \Delta y$$



$$= \phi c \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \Delta x \Delta y$$



## 2. 有限体積法（空間項の積分）

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

検査体積  $i$  で、拡散方程式の右辺  $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$  を積分すると、**発散定理**より、

$$\iint_{CV_i} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = \int_{\partial CV_i} \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} d\vec{r}$$

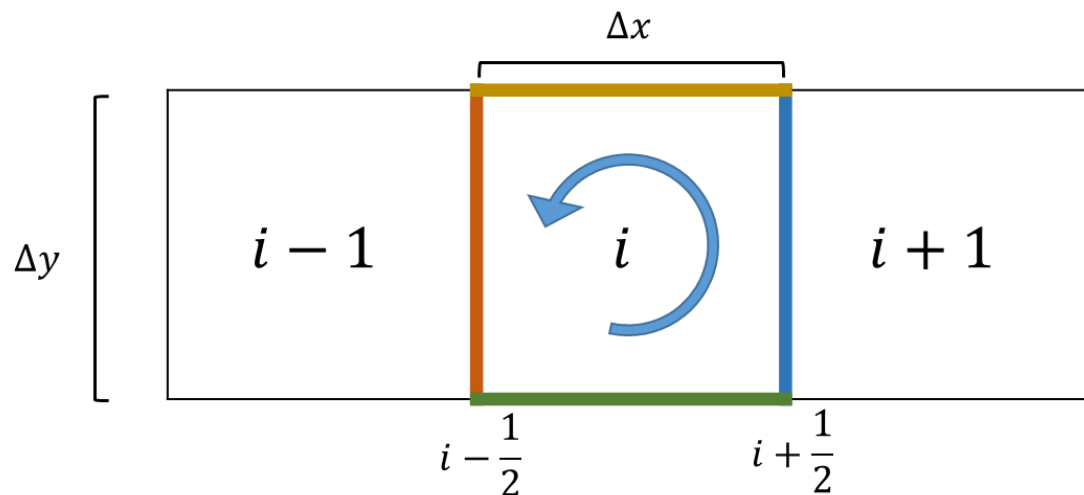
検査体積での面積分



境界での線積分

## 2.有限体積法（境界での線積分）

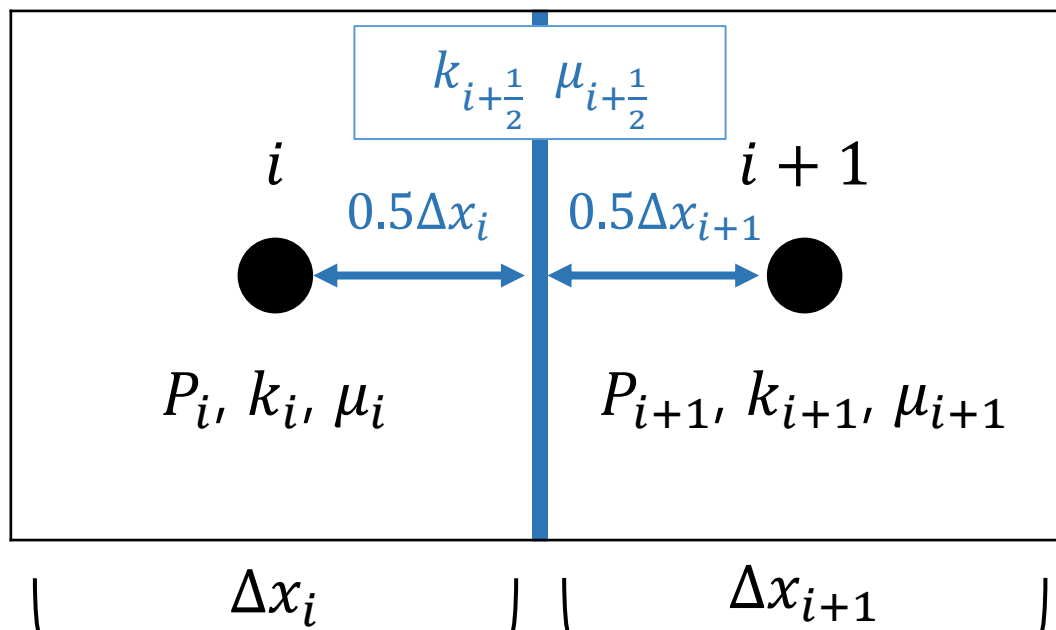
$$\int_{\partial CV_i} \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} d\vec{r}$$



$$= 0 \times \Delta x + \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}_{i+\frac{1}{2}} \times \Delta y + 0 \times (-\Delta x) + \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}_{i-\frac{1}{2}} \times (-\Delta y)$$

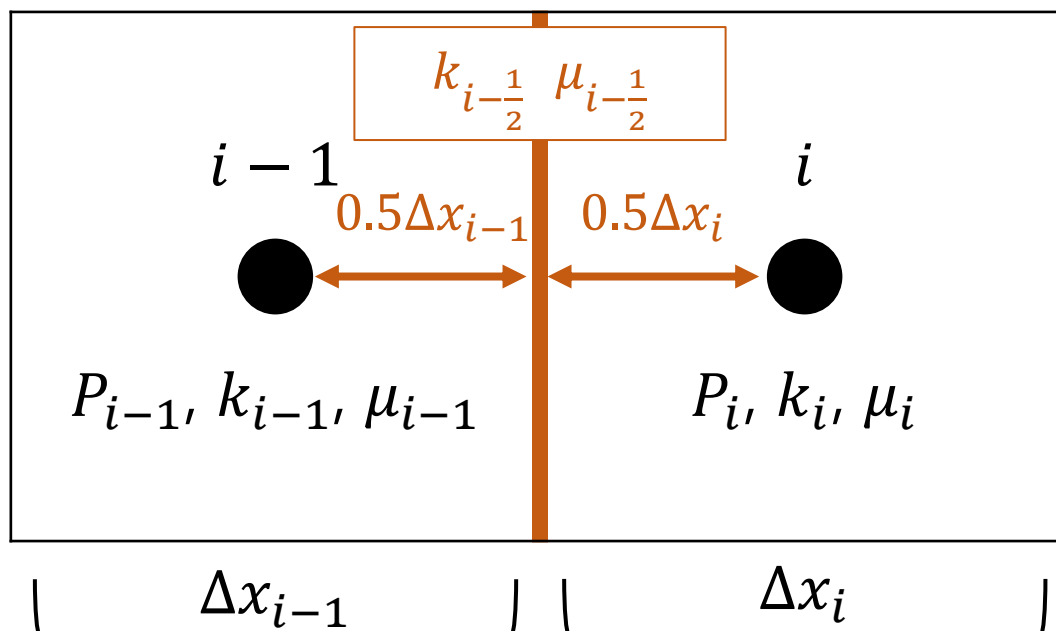
## 2.有限体積法（境界での線積分）

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \bigg|_{i+\frac{1}{2}} \times \Delta y = \frac{k}{\mu} \bigg|_{i+\frac{1}{2}} \frac{P_{i+1} - P_i}{0.5(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} \Delta y$$



## 2.有限体積法（境界での線積分）

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \bigg|_{i-\frac{1}{2}} \times (-\Delta y) = \frac{k}{\mu} \bigg|_{i-\frac{1}{2}} \frac{P_i - P_{i-1}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} (-\Delta y)$$



## 2.有限体積法（境界での線積分）

|   |                            |
|---|----------------------------|
| $k_{i+\frac{1}{2}}$ $k_{i-\frac{1}{2}}$     | $k_i$ と $k_{i\pm 1}$ の調和平均 |
| $\mu_{i+\frac{1}{2}}$ $\mu_{i-\frac{1}{2}}$ | 今回は一定とする                   |

### Pythonの場合

```
>>> a=1;b=0;
```

```
>>> 2/(1/a + 1/b)
```

```
Traceback (most recent call last):  
File "<stdin>", line 1, in <module>  
ZeroDivisionError: division by zero
```

```
from scipy.stats import hmean
```

がおすすめ

### MATLABの場合

```
>> a = 1; b = 0;
```

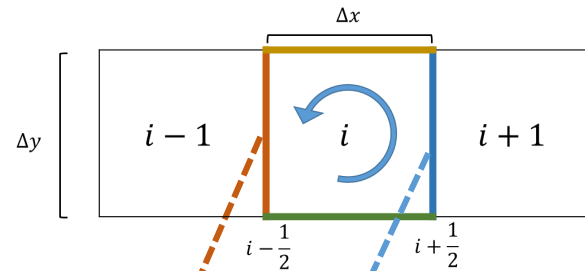
```
>> 2/(1/a + 1/b)
```

```
ans = 0
```

以降、 $\frac{k}{\mu} = \lambda$  とおく

## 2. 有限体積法（漸化式）

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$



$$\phi c \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_i = \lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{P_{i+1} - P_i}{0.5(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} \Delta y_i - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{P_i - P_{i-1}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \Delta y_i$$

### 【仮定】

- 貯留層を等分しているので  $\Delta x_i = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1}$
- 貯留層の厚さは1とする（ $\Delta y_i = 1$ ）
- 右辺の圧力はすべて  $P^n$

漸化式を  $P_i^{n+1}$  について整理しよう！

## 2. 有限体積法（漸化式）

$$P_i^{n+1} =$$

解答

ただし、 $\alpha = \frac{\Delta t}{\phi c}$ 、 $\lambda_w = \lambda_{i-\frac{1}{2}}$ 、 $\lambda_e = \lambda_{i+\frac{1}{2}}$

# コンテンツ

1

拡散方程式

2

有限体積法

3

境界条件

4

実装



### 3. 境界条件

両端の検査体積では何が起こるのか?

|   |   |     |     |       |     |       |     |     |     |       |
|---|---|-----|-----|-------|-----|-------|-----|-----|-----|-------|
| 0 | 1 | ... | ... | $i-1$ | $i$ | $i+1$ | ... | ... | $N$ | $N+1$ |
|---|---|-----|-----|-------|-----|-------|-----|-----|-----|-------|

$$\text{CV\#1} \quad P_1^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_2^n + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w\right) P_1^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_0^n$$

$$\text{CV\#N} \quad P_N^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_{N+1}^n + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w\right) P_N^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_{N-1}^n$$

存在しない値を参照



両端の検査体積には  
特別な条件が必要

### 3. 境界条件

境界条件では**存在しない値をどう決めるか**がポイント

3-1

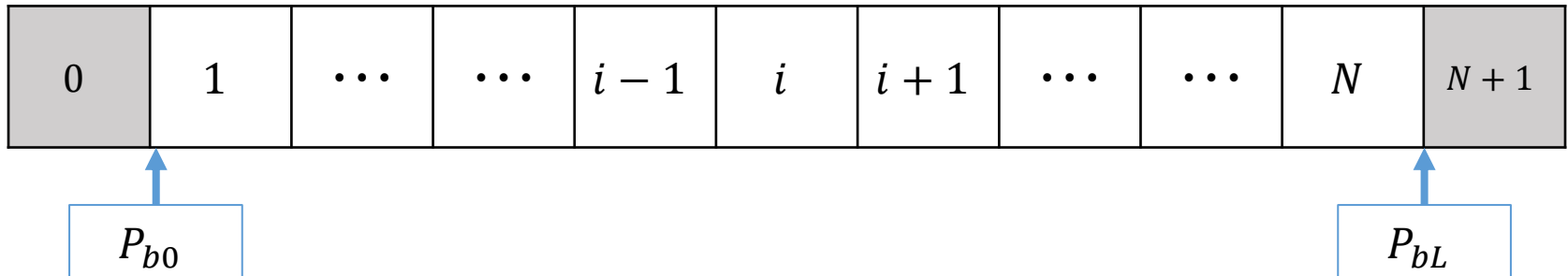
境界値を直接決める

3-2

境界値の勾配を決める

## 3-1

## 境界値を直接決める



境界での圧力値を  $P_{b0}$  ,  $P_{bL}$  とする(物性値は等しいと仮定)。このとき、

$$P_{b0} = \frac{P_1 + P_0}{2} \quad \Rightarrow \quad P_0 = 2P_{b0} - P_1$$
$$P_{bL} = \frac{P_{N+1} + P_N}{2} \quad \Rightarrow \quad P_{N+1} = 2P_{bL} - P_N$$

## 3-1

## 境界値を直接決める

$P_0 \cdot P_{N+1}$  の値は次のように置換できる

$$P_1^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_2^n + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w\right) P_1^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w (2P_{b0} - P_1)$$

$$P_N^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e (2P_{bL} - P_N) + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w\right) P_N^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_{N-1}^n$$

境界値を直接決める：ディクレ条件

## 3-2

## 境界との勾配を決める

$P_0$  と  $P_1$  間の  $\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_{i+\frac{1}{2}}}$  の値を決める。この境界で一番多いのは

勾配を 0 にする境界条件

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_{1-\frac{1}{2}}} = \frac{k}{\mu} \frac{P_1 - P_0}{0.5(\Delta x_1 + \Delta x_0)} = 0$$

$$\Leftrightarrow P_1 - P_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow P_1 = P_0$$

境界との勾配を決める：ノイマン条件

## 3-2

## 境界での勾配を決める

境界で  $\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$  の時、 $P_1 = P_0$  また  $P_{N+1} = P_N$  だから

$$P_1^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_2^n + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w\right) P_1^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_1$$

$$P_N^{n+1} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e P_N + \left(1 - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_e - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w\right) P_N^n + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \lambda_w P_{N-1}^n$$

# コンテンツ

1

拡散方程式

2

有限体積法

3

境界条件

4

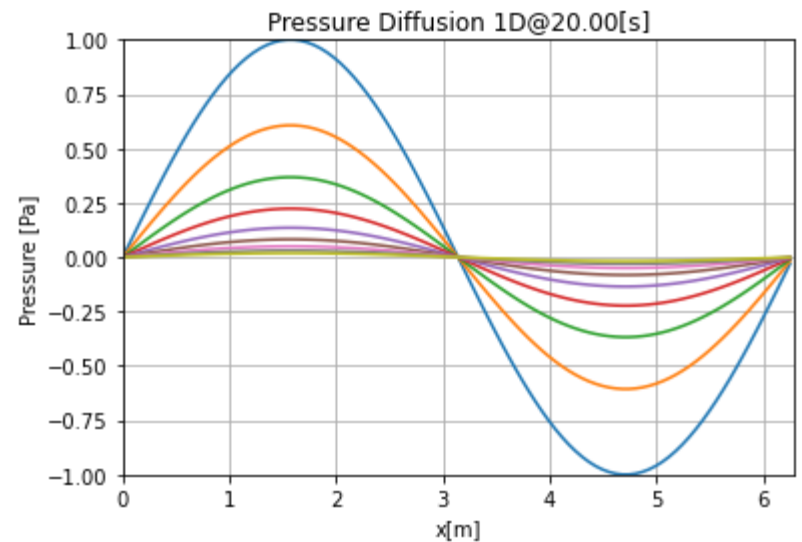
実装

## 4. 実装

```
while 無限ループ:
    for 両端を除くcv:
        # 係数 (A, B, C) の決定
        # A =
        # B =
        # C =
        # P_new =
    if 境界条件@x = 0:
        # ディレクレ条件
        # ノイマン条件

    if 境界条件@x = L:
        # ディレクレ条件
        # ノイマン条件

    # 値のアップデート
    # P_old = P_new
    # t = t + dt
    if t >= tmax:
        whileループを抜ける。
```



このようなグラフが表示されれば成功



## 5. 補足

- 陽解法の解の安定条件は？
- 2つの境界条件の物理的な意味は？
- スライド #14 ~ #15の過程で、右辺の圧力を $P^{n+1}$ とするとどうなる？また、それらの関係式はどう解く？  
→Hint : 陰解法, Implicit Method