数値解析基礎

1. 常微分方程式の時間積分

1. Time Integration of Ordinary Differential Equations

コンテンツ

1	小球の自由落下
2	シミュレーション
3	Python・MATLABによる実装

コンテンツ

1	小球の自由落下
2	シミュレーション
3	Python・MATLABによる実装

1. 小球の自由落下

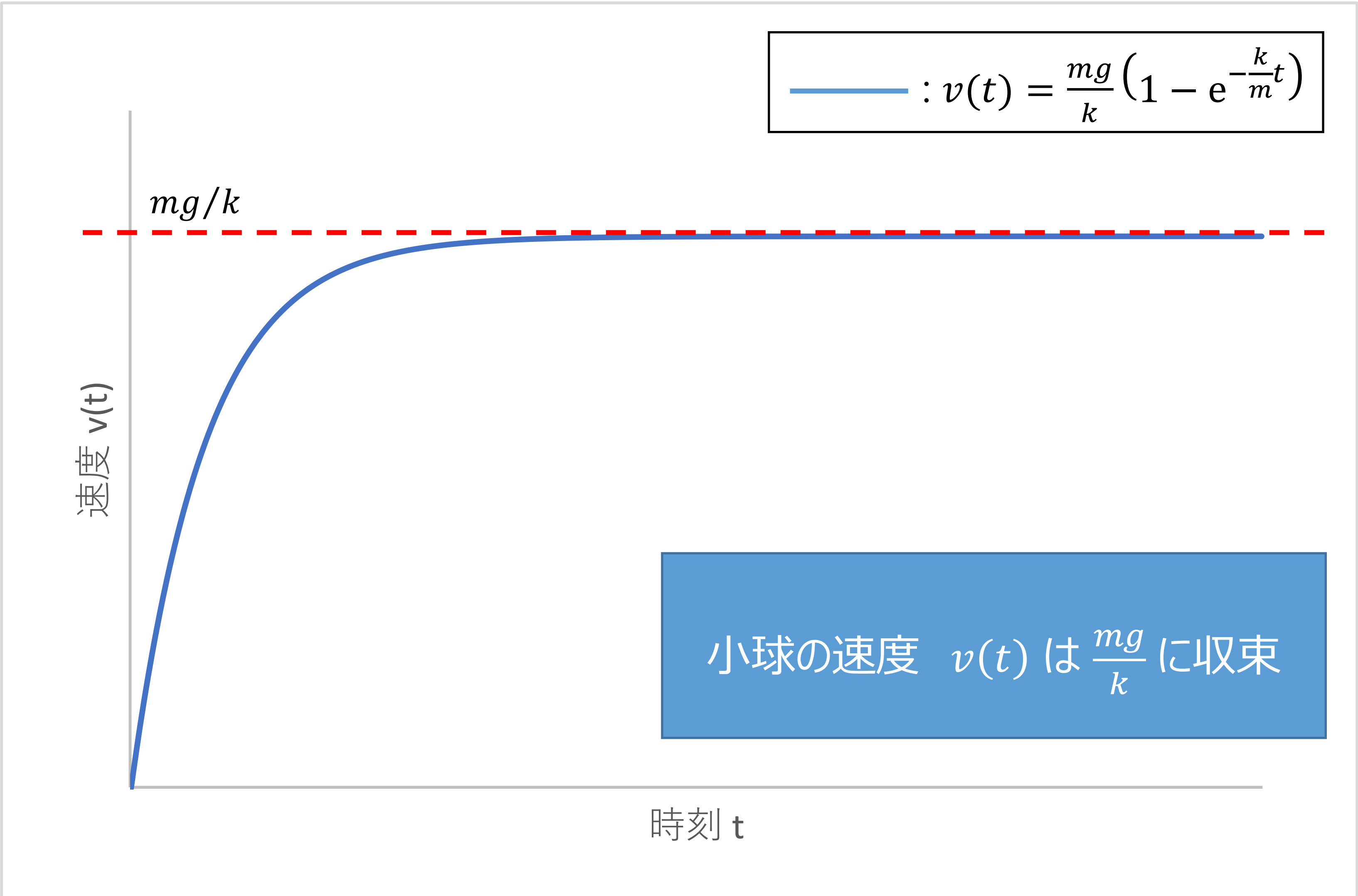
微分方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

特殊解
($v(0) = 0$)

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

1. 小球の自由落下



$: v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$
mg/k
速度 v(t)
時刻 t
小球の速度 $v(t)$ は $\frac{mg}{k}$ に収束

コンテンツ

1 小球の自由落下

2 シミュレーション

3 Python・MATLABによる実装

2 シミュレーション

1. コンピューターができる計算・できない計算

2. シミュレーションの方法

   A) 離散化 / Discretization

   B) 実際の計算

2-1. コンピューターができる計算

四則計算のみ！

2-1. コンピューターができない計算

例：空気抵抗を考えた自由落下

$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$ の解を求めよ.

ただし $t = 0$ のとき $v = 0$ とする.

解

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

コンピューターは
「変数分離して両辺を積分」
という計算をできない

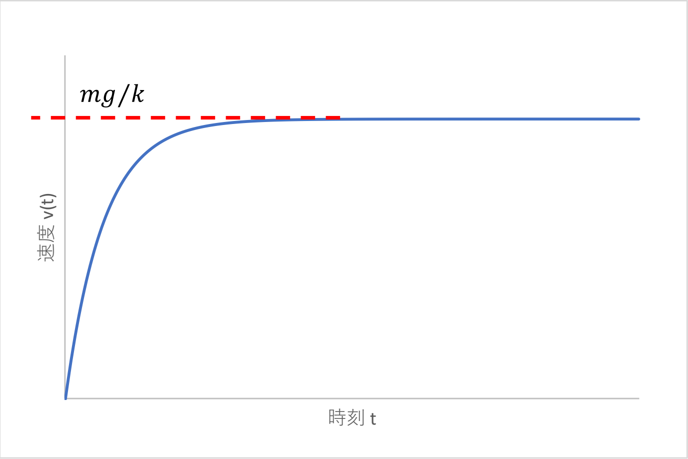
2-2. シミュレーションの方法

問題：空気抵抗を考えた自由落下

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

空気抵抗を考えた自由落下の速度変化をシミュレーションせよ.

ただし $t = 0$ のとき $v = 0$ とする.



小球の速度 $v(t)$ が $\frac{mg}{k}$ に収束することを確認

2-2．シミュレーションの方法

コンピューターは四則計算しかできない.

シミュレーション（コンピューターで計算）するために…

$m\frac{dv(t)}{dt}=mg-kv(t)$ の $\frac{dv(t)}{dt}$ を **四則計算** で表したい！

2-2-A. 離散化 / Discretization

微分の定義より

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Δtが十分小さい時

$$\frac{dv(t)}{dt} \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

これを元の微分方程式に代入すると…

2-2-A.　離散化 / Discretization

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

$$m\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = mg - kv(t)$$

$$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = g - \frac{k}{m}v(t)$$

現在 (t秒) の情報

から

未来 ($t+\Delta t$秒後) の状態

を計算可能

$$\boxed{v(t+\Delta t)} = \boxed{v(t) + \Delta t\left(g - \frac{k}{m}v(t)\right)}$$

未来　　　　現在

2-2-B．実際の計算

$m = 1.0,\ g = 9.8,\ k = 10,\ \Delta t = 0.01,\ v(0) = 0$ のとき

シミュレーション

$$v(0.01) = v(0 + 0.01) = v(0) + 0.01\times\left(9.8 - \frac{10}{1.0}\times v(0)\right) = 0.098$$

$$v(0.02) = v(0.01 + 0.01) = v(0.01) + 0.01\times\left(9.8 - \frac{10}{1.0}\times v(0.01)\right) = 0.1862$$

$$\vdots$$

$$v(1.50) = 0.97999986\ldots$$

解

$$v(1.50) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}1.5}\right)$$

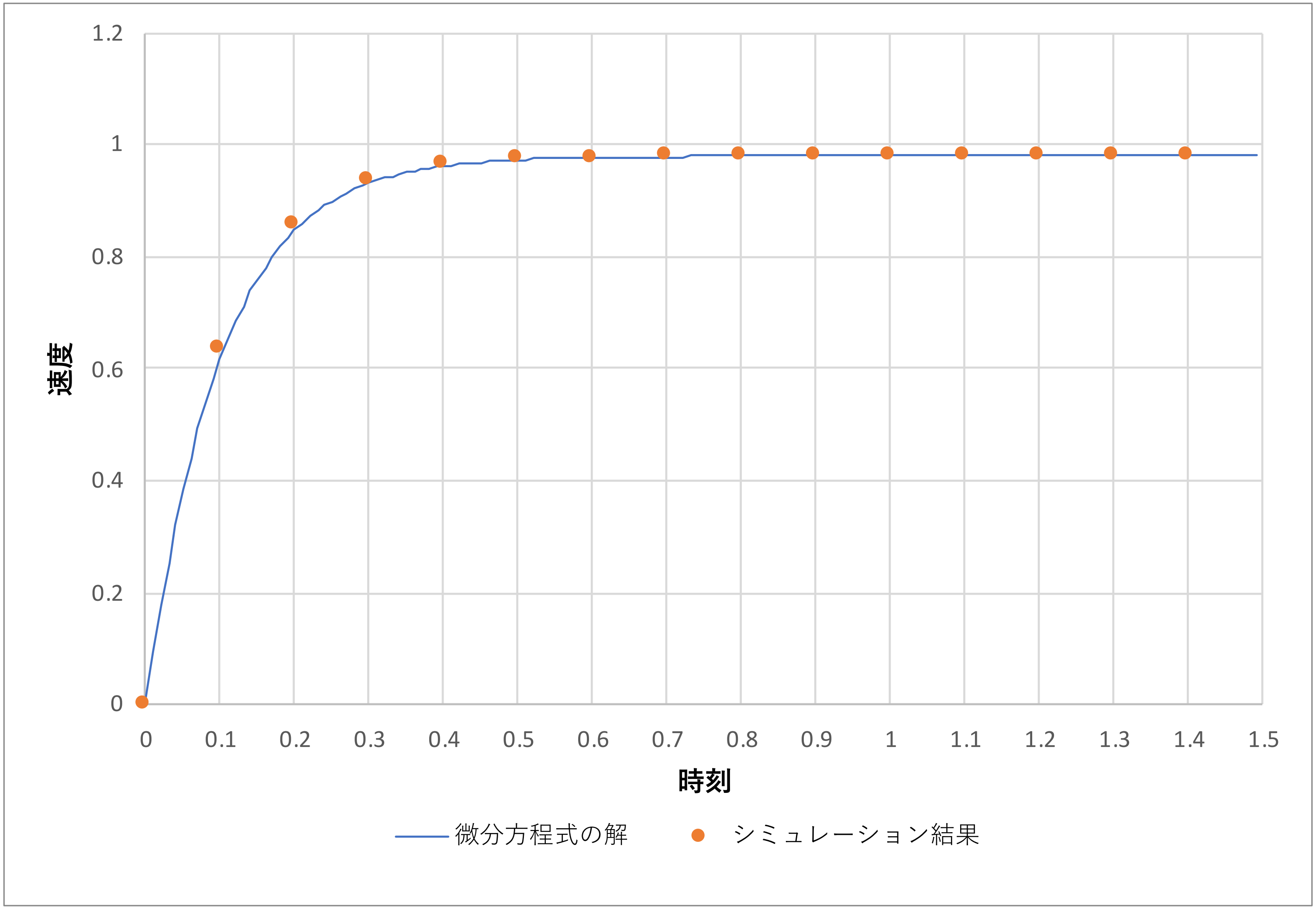
$$= \frac{1.0\times 9.8}{10}\left(1 - e^{-\frac{10}{1.0}\times 1.5}\right)$$

$$= 0.9799997002\ldots$$

シミュレーション結果と

微分方程式の解がほぼ一致

2-2-B. 実際の計算



速度
時刻
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
微分方程式の解
シミュレーション結果

コンテンツ

1 小球の自由落下

2 シミュレーション

3 Python・MATLABによる実装

3．Python・MATLABによる実装

2-2-Aで求めた式を，プログラムで表すと…？

演習・30分程度

MATLABによる実装（例）

```
%% Input Parameters
m    = 1.0; % mass of a small ball [kg]
g    = 9.8; % gravitational acceleration [m/s^2]
k    = 1.0; % coefficient of air resistance [N*s/m]
v0   = 0.0; % Initial velocity [m/s]
dt   = 0.1; % time step for simulation [s]
t_max =  10; % time which simulation is stopped [s]

%% Calculation
t = 0;
i = 1; % counter
v_hist = [v0]; % array to hold velocity value
while true
    v = v_hist(i) + dt*(g - (k/m)*v_hist(i));
    t = t + dt;
    if t >= t_max
        break
    end
    i = i+1;
    v_hist = [v_hist v]; % this code is not actually good.
end

%% Plot result
t_hist = 0:dt:t_max;
plot(t_hist, v_hist);
xlabel('t [s]');
ylabel('v [m/s]');
```

発展．SIRモデル・SEIRモデルなど