数値解析入門

4. 貯留層シミュレーション入門

4. An Introduction to Reservoir Simulation

3 スケジュール

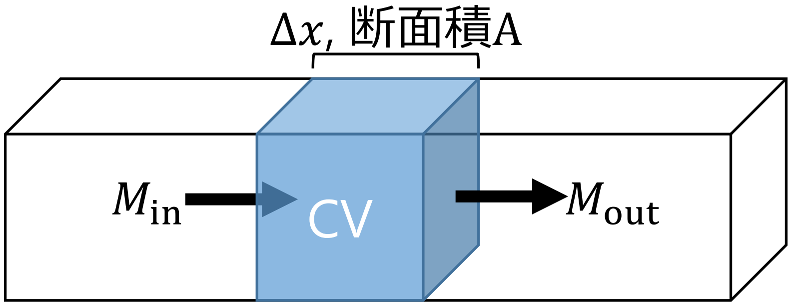
	題材	日時・場所	所要時間
STEP 1	常微分方程式の時間積分	4/11, 10:30- W2 – 544	説明15分 演習20~30分 追加説明15分
STEP 2	1次元移流方程式	4/11, 13:00- W2 – 544	説明15分 演習15分 追加説明15分
STEP 3	1次元拡散方程式	4/12, 13:00- W2 – 544	説明30分 演習30分
Extra STEP	貯留層解析入門	4/12, 14:15- W2 – 544	説明25分 演習10分 M2研究紹介?

コンテンツ

コンテンツ

1. 質量保存

（質量の時間変化） ＝ （流入）－（流出）＋（生成 / 消失）



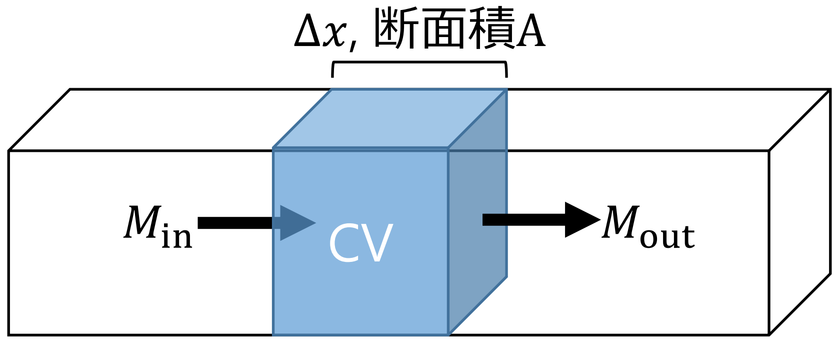
検査体積内部の流体質量 m は

$$m = \phi \rho A \Delta x$$

だから質量の時間変化は

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\phi \rho A \Delta x)}{\partial t} \cong A \Delta x \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t}$$

1. 質量保存

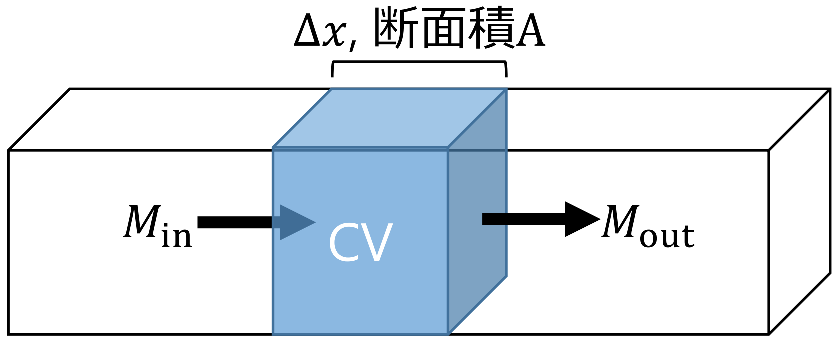


$$A\Delta x\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = A\Delta x\left(\phi\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = A\Delta x\left(\phi\frac{\partial\rho}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}\right)$$

$$A\Delta x\cdot\phi\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P} + \frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)\frac{\partial P}{\partial t} = A\Delta x\cdot\phi\rho(c_w + c_r)\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$= A\Delta x\cdot\phi\rho(c_w + c_r)\frac{\partial P}{\partial t}$$

1. 質量保存



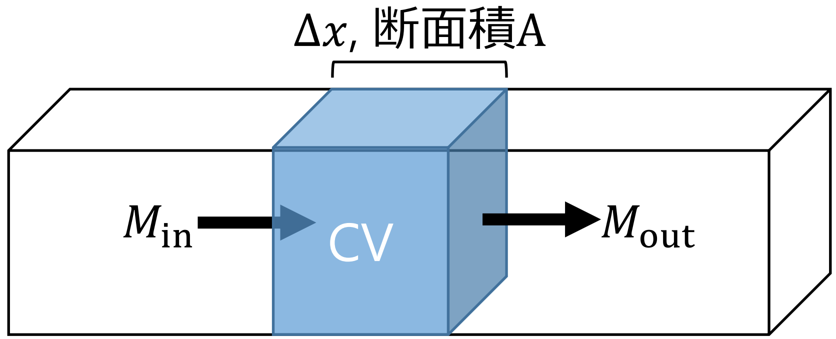
質量流量 $M_{\mathrm{in/out}}$ は 密度 × 断面積 × 流束 (flux) で表される。ダルシーの法則と合わせ、

$$M_{\mathrm{in/out}} = \rho v A = -\rho \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} A$$

$$M_{\mathrm{in}} - M_{\mathrm{out}} = -\rho \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} A \bigg|_{x=x} - \rho \left(-\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} A \bigg|_{x=x+\Delta x} \right)$$

$$= \rho A \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \bigg|_{x=x+\Delta x} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \bigg|_{x=x} \right)$$

1. 質量保存



$$\cancel{A}\Delta x\cdot\phi\cancel{\rho}(c_w+c_r)\frac{\partial P}{\partial t}=\cancel{\rho}\cancel{A}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=x+\Delta x}-\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=x}\right)$$

$$\phi(c_w+c_r)\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\left.\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x+\Delta x}-\left.\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x}}{\Delta x}$$

圧力の拡散方程式は

質量保存から導出可能

$$\phi c\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$$

1. 質量保存

圧力拡散方程式の単位

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$[-] \frac{1}{\cancel{[\mathrm{Pa}]}} \frac{\cancel{[\mathrm{Pa}]}}{[\mathrm{T}]} = \frac{1}{\cancel{[\mathrm{L}]}} \cdot \frac{\cancel{[\mathrm{L}^2]}}{[\cancel{\mathrm{Pa}} \cdot \mathrm{T}]} \frac{\cancel{[\mathrm{Pa}]}}{\cancel{[\mathrm{L}]}}$$

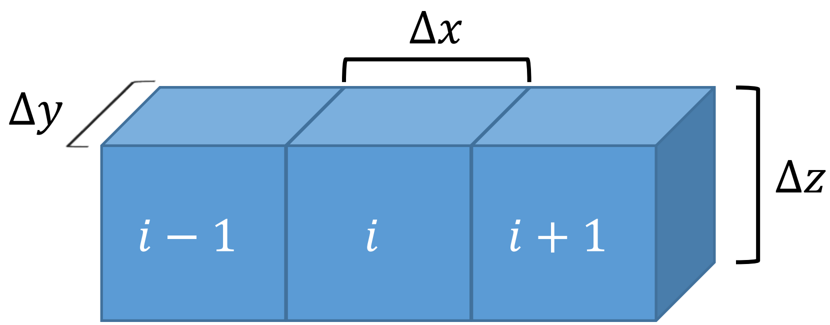
有限体積法では、圧力拡散方程式を検査体積で3重積すれば、

流量の単位 $\left[{}^{\mathrm{L}^3}/_{\mathrm{T}}\right]$ を持つ。

$$\iiint \phi c \frac{\partial P}{\partial t} dxdydz = \iiint \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz$$

1. 質量保存

$$\Delta z \Delta y = A$$



$$\phi c \Delta \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} x_i \Delta y_i \Delta z_i = \frac{k}{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \frac{P_{i+1} - P_i}{0.5(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} \Delta y_i \Delta z_i - \frac{k}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \frac{P_i - P_{i-1}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \Delta y_i \Delta z_i$$

検査体積がすべて等しく（$V_{i-1} = V_i = V_{i+1}$）、$\frac{k}{\mu_{i+1/2}} = \frac{k}{\mu_{i-1/2}}$とすると

$$\frac{V_i \phi c}{\Delta t}\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = \frac{kA}{\mu \Delta x}(P_{i+1} - P_i) - \frac{kA}{\mu \Delta x}(P_i - P_{i-1})$$

→単位が流量の離散化した式が得られた！

1. 質量保存

$\frac{V_i \phi c}{\Delta t} = B_i$, $\frac{kA}{\mu \Delta x} = T$ と置く

$$B_i\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = T(P_{i+1} - P_i) - T(P_i - P_{i-1})$$

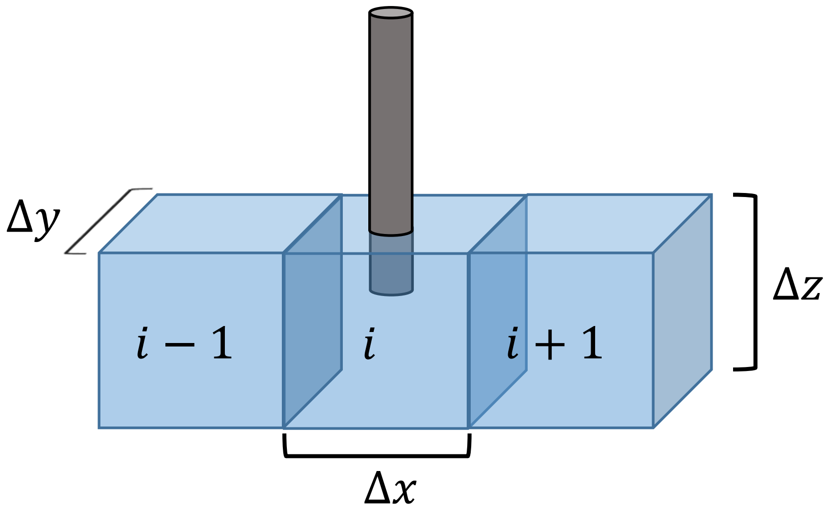
検査体積内部での生成 / 消失を考えたい

↓

坑井モデルの導入

コンテンツ

2. 坑井モデル



流量による表現

- 簡単
- スキンファクター等のパラメータは無視

坑底圧力（Bottom Hole Pressure）による表現

- やや複雑
- スキンファクター等を考慮したモデル

2. 坑井モデル（一定流量）

検査体積 i に掘削された坑井からの流量を q_i $[L^3/T]$ として、

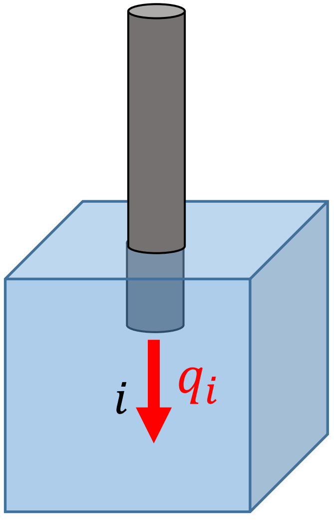
$$B_i\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = T(P_{i+1} - P_i) - T(P_i - P_{i-1}) + q_i$$

生産井

- $q_i < 0$

圧入 / 還元井

- $q_i > 0$



2. 坑井モデル（圧力一定）

坑底圧力を P_{wf} とする。

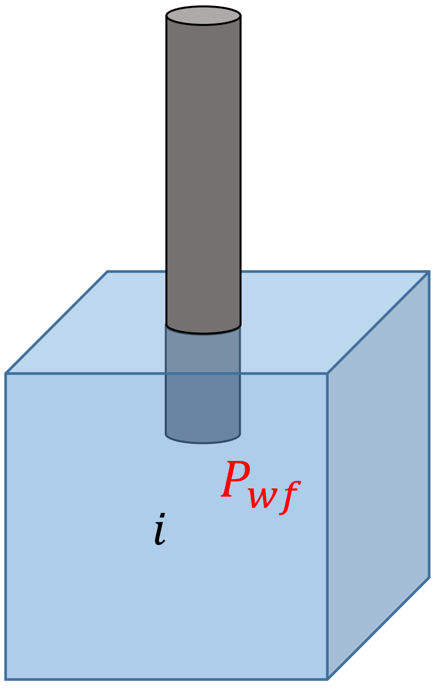
検査体積の圧力 P_i と差による流量 q_w は、

Productivity Index または Well Index と呼ばれる

定数を使って、

$$q_w = J_i\left(P_{wf} - P_i\right)$$

と表される。



$$B_i\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = T(P_{i+1} - P_i) - T(P_i - P_{i-1}) + J_i\left(P_{wf} - P_i\right)$$

コンテンツ

3. 陰解法

- 陽解法は時間ステップに制限
- 多くの商用シミュレータは陰解法を採用

陰解法では、離散化した式の右辺にP^{n+1}を用いる。

$$B_i(P_i^{n+1} - P_i^n) = T(P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - T(P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) + J_i\left(P_{wf} - P_i^{n+1}\right)$$

【演習】

離散化した式を

$$\ldots = B_i P_i^n + J_i P_{wf}$$

の形に整理

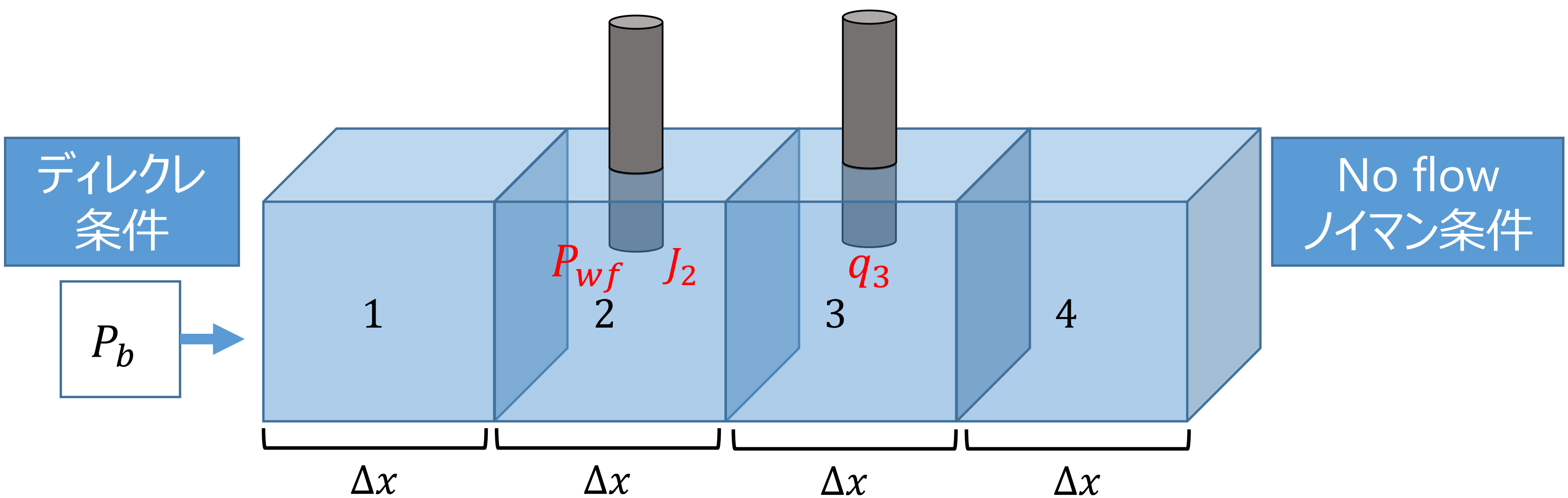
3. 陰解法

【回答】

$$-TP_{i-1}^{n+1} + (2T + B_i + J_i)P_i^{n+1} - TP_{i+1}^{n+1} = B_i P_i^n + J_i P_{wf}$$

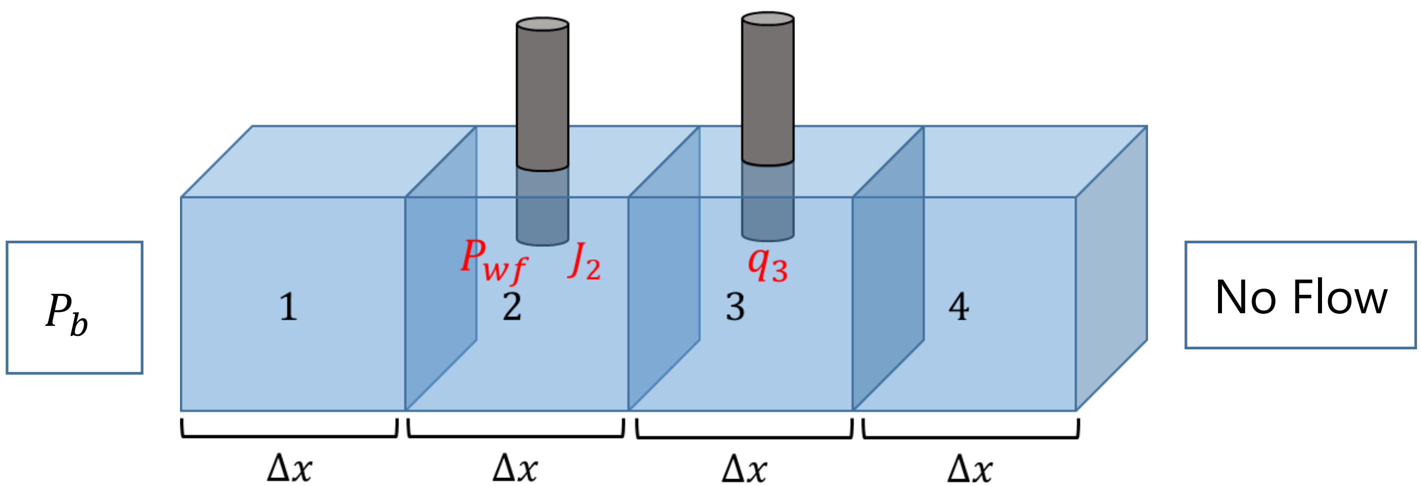
具体的にはすべてのブロックについての式を連立方程式として解く。

例：断面積 A ， 浸透率 k の水単相貯留層を考える。



3. 陰解法

Block#1	$-T\left(2P_b - P_1^{n+1}\right) + (2T + B_1)P_1^{n+1} - TP_2^{n+1} = \frac{B_1}{\Delta t}P_1^n$
Block#2	$-TP_1^{n+1} + (2T + B_2 + J_2)P_2^{n+1} - TP_3^{n+1} = \frac{B_2}{\Delta t}P_2^n + J_2P_{wf}$
Block#3	$-TP_2^{n+1} + (2T + B_3)P_3^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_3}{\Delta t}P_3^n + q_3$
Block#4	$-TP_3^{n+1} + (2T + B_4)P_4^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_4}{\Delta t}P_4^n$



3. 陰解法

各検査体積についての式をまとめる

$$
\begin{cases}
(3T + B_1)P_1^{n+1} - TP_2^{n+1} = \dfrac{B_1}{\Delta t}P_1^n + 2TP_b \\
-TP_1^{n+1} + (2T + B_2 + J_2)P_2^{n+1} - TP_3^{n+1} = \dfrac{B_2}{\Delta t}P_2^n + J_2 P_{wf} \\
-TP_2^{n+1} + (2T + B_3)P_3^{n+1} - TP_4^{n+1} = \dfrac{B_3}{\Delta t}P_3^n + q_3 \\
-TP_3^{n+1} + (T + B_4)P_4^{n+1} = \dfrac{B_4}{\Delta t}P_4^n
\end{cases}
$$

連立方程式は行列とベクトルで表現できる

3. 陰解法

$$\left(\begin{bmatrix}3T & -T & 0 & 0\\ -T & 2T & -T & 0\\ 0 & -T & 2T & -T\\ 0 & 0 & -T & T\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & B_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & J_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}P_1^{n+1}\\ P_2^{n+1}\\ P_3^{n+1}\\ P_4^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & B_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1^{n}\\ P_2^{n}\\ P_3^{n}\\ P_4^{n}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2TP_b\\ J_2P_{wf}\\ q_3\\ 0\end{bmatrix}$$

次のようなイメージがあるとプログラムを書きやすい。

$$(\mathbf{T}+\mathbf{B}+\mathbf{J})\vec{P}_{n+1}=\mathbf{B}\vec{P}_n+\vec{Q}$$

- 「コンピュータで連立方程式を解く」のは大変（だった）
  - $\mathbf{T}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{J}$ の扱いもポイント （省メモリ）

    Key Word : 掃き出し法，疎行列計算，ヤコビ法

- Python (NumPy・SciPy) や MATLABでは一行で完結

3. 陰解法

演習：15分

3. 陰解法

サンプルコードには改善の余地があり！

Tm, B, はN*Nのサイズ

→実際には対角成分 + αしか使わない

　Tm なら N*N – (3N-4) 個の要素が無駄

　B なら N*N – N 個の要素が無駄

Hint : scipy.spdiags

コンテンツ

プログラミング言語の選択肢

1. **Python**

   無料で、教材があふれている。ただ、計算速度の問題から、陽解法によるコード作成は現実的ではない（ベクトルと行列でまとめればそれなり？）。

2. **MATLAB**

   使いやすいが有料。先生に言えば（多分）ライセンスを買ってもらえる。

   Octaveによる代用は個人的に微妙。こちらも計算速度の問題から、陽解法によるコード作成は非現実的。

3. **Fortran**

   速い。陽解法でコードを書くならFortranがおすすめ。結果を可視化する機能はないので、Python 又は GNU plot 等を使うことになる。松本先生はFortranを主に使っていらっしゃる。

   →それでも時間ステップが…という場合は**並列計算**という選択肢

貯留層の支配方程式

圧力
→拡散方程式

トレーサー濃度
→移流拡散方程式

今回説明していない事（一部）

■ 2次元・3次元の場合

■ 重力の影響

■ 多相流

今回は水の流れのみ（単相流）だが，実際の貯留層は水-蒸気，水-油，水-油-ガス，水-CO2等が混在

- 飽和率，Saturation
- 相対浸透率，Relative Permeability
- 毛細管圧力，Capillary Pressure

■ 容積係数 Formation Volume Factor

- 貯留層条件と標準状態では体積が異なる

■ Productivity Indexの詳細

■ エネルギー保存

- 地熱の資源価値は熱エネルギー
- 油ガスは質量（体積）

インターネット上の資料

PetroWiki

- 石油工学関連のWiki，SPE公式なので信頼できる

石油天然ガス用語辞典，JOGMEC

- 知らない用語が出てきたらここで調べると◎

  https://oilgas-info.jogmec.go.jp/termlist/index.html

PGE 323M Reservoir Engineering III (Simulation), UT Austin

- 全編英語だが、特に貯留層エンジニア志望なら、勉強する価値あり。
- 講義動画も YouTube で閲覧可能。

    講義資料：https://johnfoster.pge.utexas.edu/PGE323M-ResEngineeringIII/

    講義動画：https://www.youtube.com/channel/UCkCwNnLZnRoaHYFyKTdySDw

九大の講義（他学部）

数値解析，理学部物理学科情報理学コース

- 諸々の数値解析手法について網羅的に解説