数値解析入門

4. 貯留層シミュレーション入門

4. An Introduction to Reservoir Simulation

3 スケジュール

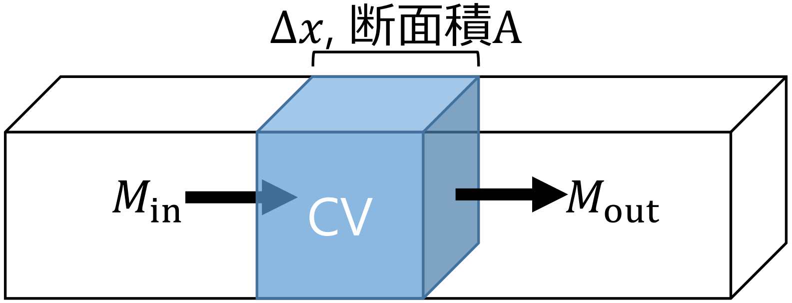
	題材	日時・場所	所要時間
STEP 1	常微分方程式の時間積分	4/11, 10:30- W2 – 544	説明15分 演習20~30分 追加説明15分
STEP 2	1次元移流方程式	4/11, 13:00- W2 – 544	説明15分 演習15分 追加説明15分
STEP 3	1次元拡散方程式	4/12, 13:00- W2 – 544	説明30分 演習30分
Extra STEP	貯留層解析入門	4/12, 14:15- W2 – 544	説明25分 演習10分 M2研究紹介?

コンテンツ

コンテンツ

1. 質量保存

（質量の時間変化） ＝ （流入） - （流入出）



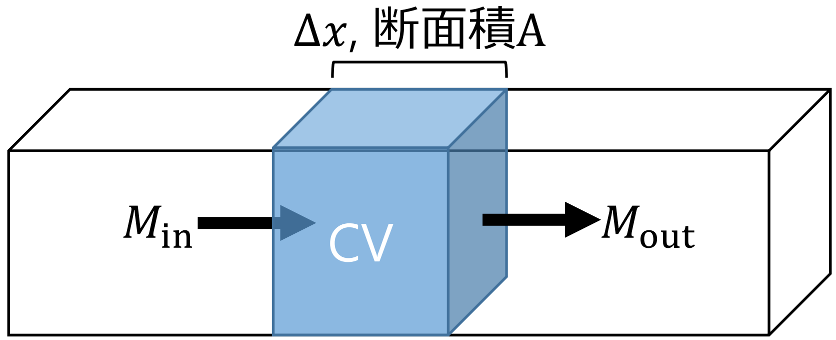
検査体積内部の流体質量 m は

$$m = \phi \rho A \Delta x$$

だから質量の時間変化は

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\phi \rho A \Delta x)}{\partial t} \cong A \Delta x \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t}$$

1. 質量保存

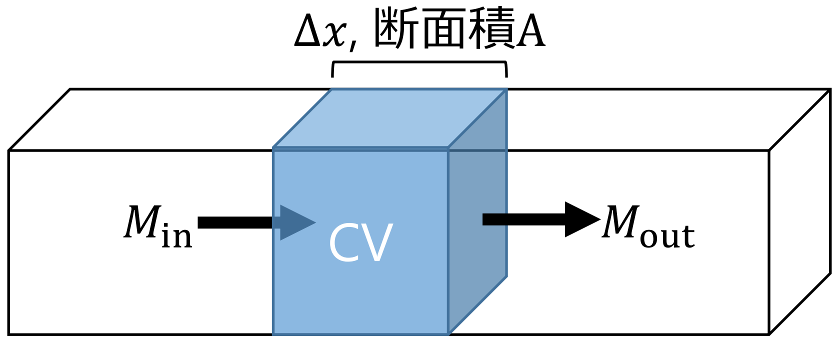


$$A\Delta x\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}=A\Delta x\left(\phi\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=A\Delta x\left(\phi\frac{\partial\rho}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}+\rho\frac{\partial\phi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}\right)$$

$$A\Delta x\cdot\phi\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P}+\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)\frac{\partial P}{\partial t}=A\Delta x\cdot\phi\rho(c_w+c_r)\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$=A\Delta x\cdot\phi\rho(c_w+c_r)\frac{\partial P}{\partial t}$$

1. 質量保存



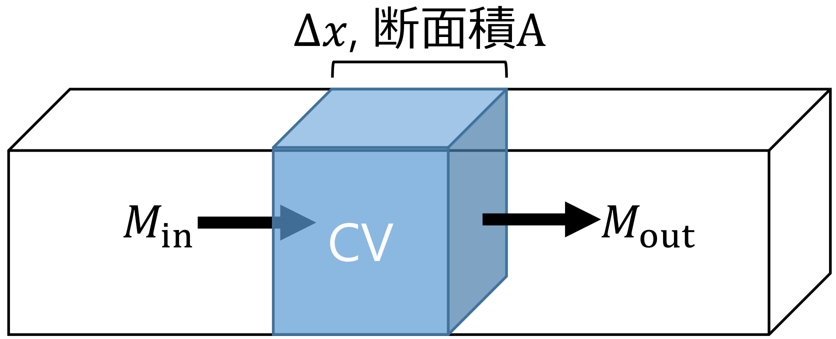
質量流量 $M_{in/out}$ は 密度 × 断面積 × 流束 (flux) で表される。ダルシーの法則と合わせ、

$$M_{in/out} = \rho v A = -\rho \frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} A$$

$$M_{in} - M_{out} = -\rho \frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} A\bigg|_{x=x} - \rho\left(-\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} A\bigg|_{x=x+\Delta x}\right)$$

$$= \rho A\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=x+\Delta x} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=x}\right)$$

1. 質量保存



$$\cancel{A}\Delta x \cdot \phi \cancel{\rho}(c_w + c_r)\frac{\partial P}{\partial t} = \cancel{\rho}\cancel{A}\left(\left.\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x+\Delta x} - \left.\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x}\right)$$

$$\phi(c_w + c_r)\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\left.\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x+\Delta x} - \left.\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x}}{\Delta x}$$

圧力の拡散方程式は
質量保存から導出可能

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$$

1. 質量保存

圧力拡散方程式の単位

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$[-] \frac{1}{\cancel{[\mathrm{Pa}]}} \frac{\cancel{[\mathrm{Pa}]}}{[\mathrm{T}]} = \frac{1}{\cancel{[\mathrm{L}]}} \cdot \frac{\cancel{[\mathrm{L}^2]}}{[\cancel{\mathrm{Pa}} \cdot \mathrm{T}]} \frac{\cancel{[\mathrm{Pa}]}}{\cancel{[\mathrm{L}]}}$$

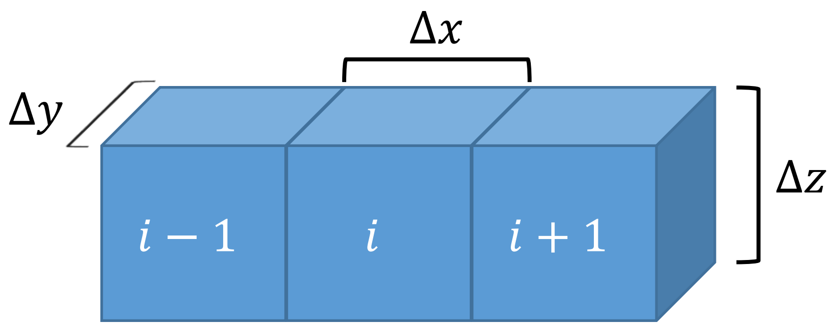
有限体積法では、圧力拡散方程式を検査体積で3重積すれば、

流量の単位 $\left[{}^{\mathrm{L}^3}\!/_{\mathrm{T}}\right]$ を持つ。

$$\iiint \phi c \frac{\partial P}{\partial t} dxdydz = \iiint \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz$$

1. 質量保存

$\Delta z \Delta y = A$



$$\phi c \Delta \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} x_i \Delta y_i \Delta z_i = \frac{k}{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \frac{P_{i+1} - P_i}{0.5(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} \Delta y_i \Delta z_i - \frac{k}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \frac{P_i - P_{i-1}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \Delta y_i \Delta z_i$$

検査体積がすべて等しく（$V_{i-1} = V_i = V_{i+1}$）、$\frac{k}{\mu_{i+1/2}} = \frac{k}{\mu_{i-1/2}}$とすると

$$\frac{V_i \phi c}{\Delta t}\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = \frac{kA}{\mu \Delta x}(P_{i+1} - P_i) - \frac{kA}{\mu \Delta x}(P_i - P_{i-1})$$

→単位が流量の離散化した式が得られた！

1. 質量保存

$\frac{V_i \phi c}{\Delta t} = B_i$, $\frac{kA}{\mu \Delta x} = T$ と置く

$$B_i\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = T(P_{i+1} - P_i) - T(P_i - P_{i-1})$$

検査体積内部での生成 / 消失を考えたい

↓

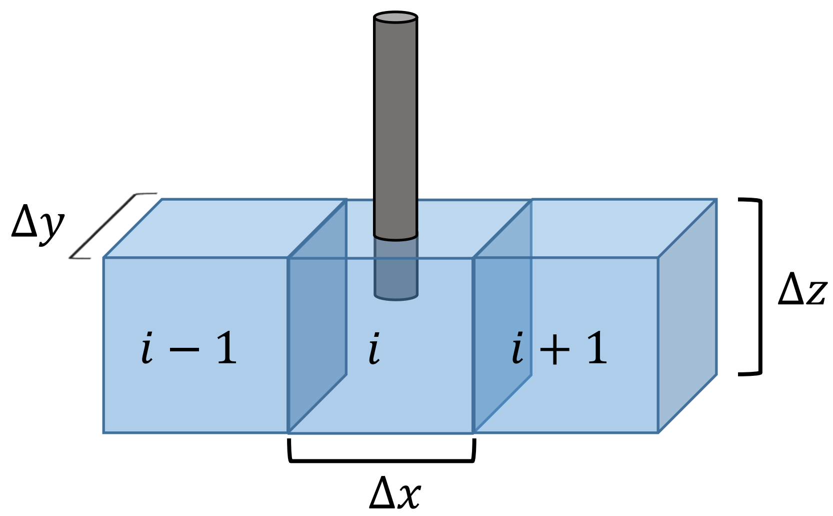
坑井モデルの導入

コンテンツ

2. 坑井モデル

流量による表現

- 比較的簡単
- 特に単相流の場合は容易に実装可能



坑底圧力（Bottom Hole Pressure）による表現

- やや複雑
- スキンファクター等を考慮したモデル

2. 坑井モデル（一定流量）

検査体積 i に掘削された坑井からの流量を q_i $[L^3/T]$ として、

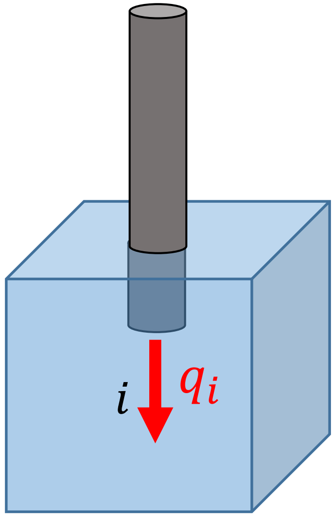
$$B_i\left(P_i^{n+1}-P_i^n\right)=T(P_{i+1}-P_i)-T(P_i-P_{i-1})+q_i$$

<u>生産井</u>

- $q_i < 0$

<u>圧入 / 還元井</u>

- $q_i > 0$



2. 坑井モデル（圧力一定）

坑底圧力を P_{wf} とする。

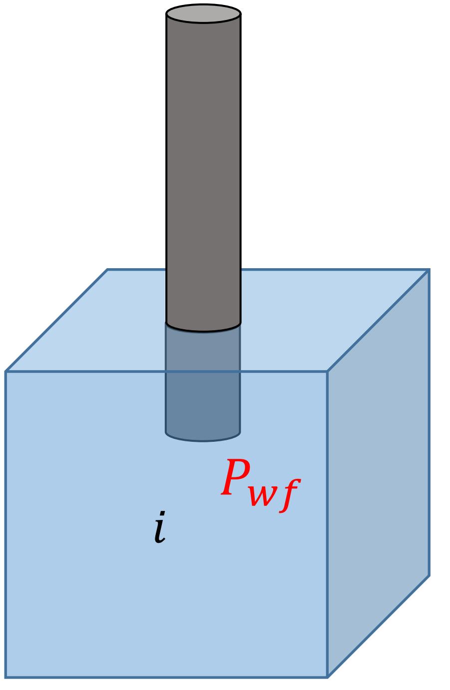
検査体積の圧力 P_i と差による流量 q_w は、

Productivity Index または Well Index と呼ばれる

定数を使って、

$$q_w = J_i\left(P_{wf} - P_i\right)$$

と表される。



$$B_i\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = T(P_{i+1} - P_i) - T(P_i - P_{i-1}) + J_i\left(P_{wf} - P_i\right)$$

コンテンツ

3. 陰解法

- 時間ステップによらず安定（※陽解法は時間ステップに制限）
- 多くの商用シミュレータは陰解法を採用

陰解法では、離散化した式の右辺にP^{n+1}を用いる。

$$B_i(P_i^{n+1} - P_i^n) = T(P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - T(P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) + J_i\left(P_{wf} - P_i^{n+1}\right)$$

【演習1】

離散化した式を

$$\dots = B_i P_i^n + J_i P_{wf}$$

の形に整理

3. 陰解法

【解答】

【演習2】

$\frac{V_i \phi c}{\Delta t} = B_i$, $\frac{kA}{\mu \Delta x} = T$ と置いた式

$$B_i\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = T(P_{i+1} - P_i) - T(P_i - P_{i-1})$$

について、陽解法の場合を考え、$P_i^{n+1} = \cdots$ の形に整理。さらに陽解法の安定条件を使って、$\Delta t \leq \cdots$ という不等式を導出

3. 陰解法

【解答】

3. 陰解法

【演習3】

演習2で求めた Δt の具体的な値を算出。物性値は以下の値を仮定。さらに、値が求まったらその Δt で40年計算するには、何ステップ進める必要があるか？

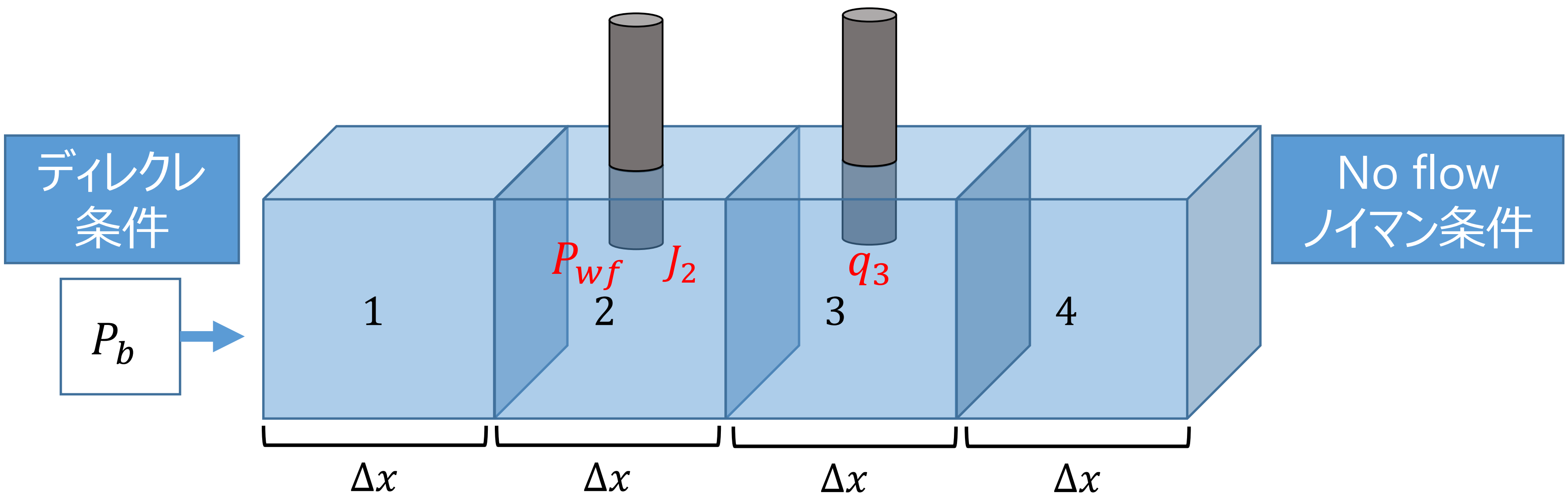
<table>
<tr><th colspan="2">原油</th><th colspan="2">貯留層モデル</th></tr>
<tr><td>c [Pa⁻¹]</td><td>1.E-05</td><td>Δx [m]</td><td>10</td></tr>
<tr><td>μ [Pa*s]</td><td>0.01</td><td>Δy [m]</td><td>10</td></tr>
<tr><th colspan="2">岩石</th><td>Δz [m]</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Φ [-]</td><td>0.1</td><td rowspan="2">Δtmax [s]</td><td rowspan="2">解答</td></tr>
<tr><td>k [m²]</td><td>1.E-12</td></tr>
</table>

3. 陰解法

$$-TP_{i-1}^{n+1} + (2T + B_i + J_i)P_i^{n+1} - TP_{i+1}^{n+1} = B_iP_i^n + J_iP_{wf}$$

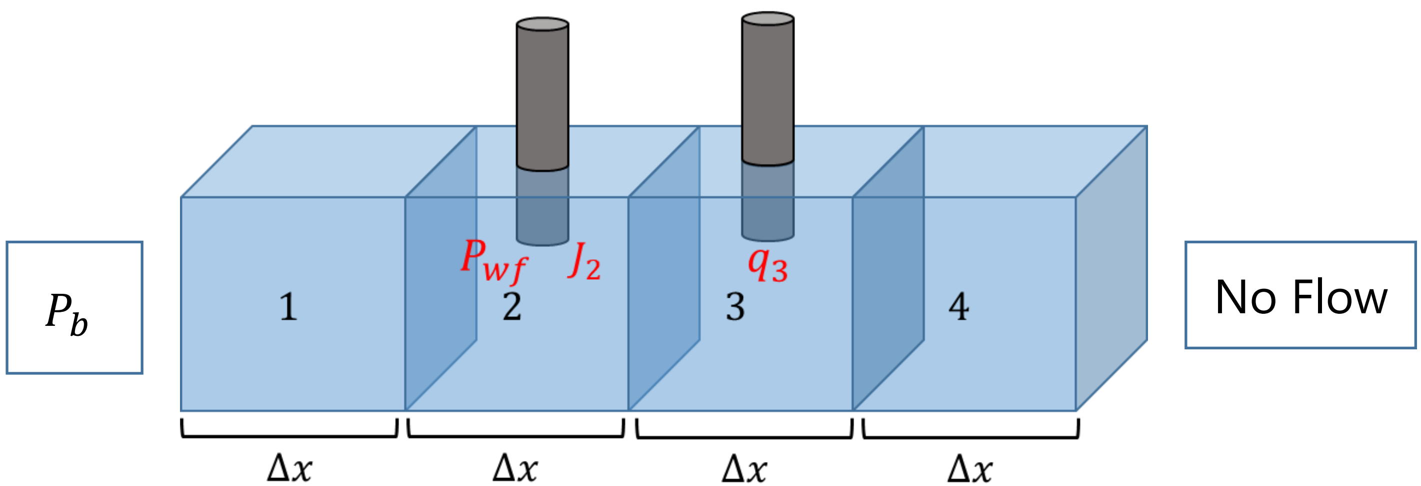
陰解法では、すべてのブロックについての式を連立方程式として解く。

例：断面積 A，浸透率 k の水単相貯留層を考える。



3. 陰解法

Block#1	$-T\left(2P_b - P_1^{n+1}\right) + (2T + B_1)P_1^{n+1} - TP_2^{n+1} = \frac{B_1}{\Delta t}P_1^n$
Block#2	$-TP_1^{n+1} \qquad + (2T + B_2 + J_2)P_2^{n+1} - TP_3^{n+1} = \frac{B_2}{\Delta t}P_2^n + J_2 P_{wf}$
Block#3	$-TP_2^{n+1} \qquad + (2T + B_3)P_3^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_3}{\Delta t}P_3^n + q_3$
Block#4	$-TP_3^{n+1} \qquad + (2T + B_4)P_4^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_4}{\Delta t}P_4^n$



3. 陰解法

各検査体積についての式をまとめる

$$\begin{cases} (3T + B_1)P_1^{n+1} - TP_2^{n+1} = \dfrac{B_1}{\Delta t}P_1^n + 2TP_b \\ -TP_1^{n+1} + (2T + B_2 + J_2)P_2^{n+1} - TP_3^{n+1} = \dfrac{B_2}{\Delta t}P_2^n + J_2P_{wf} \\ -TP_2^{n+1} + (2T + B_3)P_3^{n+1} - TP_4^{n+1} = \dfrac{B_3}{\Delta t}P_3^n + q_3 \\ -TP_3^{n+1} + (T + B_4)P_4^{n+1} = \dfrac{B_4}{\Delta t}P_4^n \end{cases}$$

連立方程式は行列とベクトルで表現できる

3. 陰解法

$$\left(\begin{bmatrix}3T & -T & 0 & 0\\ -T & 2T & -T & 0\\ 0 & -T & 2T & -T\\ 0 & 0 & -T & T\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & B_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & J_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}P_1^{n+1}\\ P_2^{n+1}\\ P_3^{n+1}\\ P_4^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & B_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1^{n}\\ P_2^{n}\\ P_3^{n}\\ P_4^{n}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2TP_b\\ J_2P_{wf}\\ q_3\\ 0\end{bmatrix}$$

次のようなイメージがあるとプログラムを書きやすい。

$$(\mathbf{T}+\mathbf{B}+\mathbf{J})\vec{P}_{n+1}=\mathbf{B}\vec{P}_n+\vec{Q}$$

- 「コンピュータで連立方程式を解く」のは大変（だった）
  - $\mathbf{T}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{J}$ の扱いもポイント （省メモリ）

    Key Word : 掃き出し法，疎行列計算，ヤコビ法
- Python (NumPy・SciPy) や MATLABでは一行で完結

3. 陰解法

演習：15分

3. 陰解法

サンプルコードには改善の余地があり！

Tm, B, はN*Nのサイズ

→実際には対角成分 + αしか使わない

　Tm なら N*N – (3N-4) 個の要素が無駄

　B なら N*N – N 個の要素が無駄

Hint : scipy.spdiags

コンテンツ

プログラミング言語の選択肢

1. **Python**

   無料で、教材があふれている。ただ、計算速度の問題から、陽解法によるコード作成は現実的ではない（ベクトルと行列でまとめればそれなり？）。

2. **MATLAB**

   使いやすいが有料。先生に言えば（多分）ライセンスを買ってもらえる。

   Octaveによる代用は個人的に微妙。こちらも計算速度の問題から、陽解法によるコード作成は非現実的。

3. **Fortran**

   速い。陽解法でコードを書くならFortranがおすすめ。結果を可視化する機能はないので、Python 又は GNU plot 等を使うことになる。松本先生はFortranを主に使っていらっしゃる。

   →それでも時間ステップが…という場合は**並列計算**という選択肢

貯留層の支配方程式

圧力

→拡散方程式

トレーサー濃度

→移流拡散方程式

今回説明していない事（一部）

- ■ 2次元・3次元の場合
- ■ 重力の影響
- ■ 多相流

  今回は水の流れのみ（単相流）だが，実際の貯留層は水-蒸気，水-油，水-油-ガス，水-CO2等が混在

  - 飽和率，Saturation
  - 相対浸透率，Relative Permeability
  - 毛細管圧力，Capillary Pressure
- ■ 容積係数 Formation Volume Factor
  - 貯留層条件と標準状態では体積が異なる
- ■ Productivity Indexの詳細
- ■ エネルギー保存
  - 地熱の資源価値は熱エネルギー
  - 油ガスは質量（体積）

インターネット上の資料

PetroWiki

- 石油工学関連のWiki，SPE公式なので信頼できる

石油天然ガス用語辞典，JOGMEC

- 知らない用語が出てきたらここで調べると◎

  https://oilgas-info.jogmec.go.jp/termlist/index.html

PGE 323M Reservoir Engineering III (Simulation), UT Austin

- 全編英語だが、特に貯留層エンジニア志望なら、勉強する価値あり。
- 講義動画も YouTube で閲覧可能。

  講義資料：https://johnfoster.pge.utexas.edu/PGE323M-ResEngineeringIII/

  講義動画：https://www.youtube.com/channel/UCkCwNnLZnRoaHYFyKTdySDw

九大の講義（他学部）

数値解析，理学部物理学科情報理学コース

- 諸々の数値解析手法について網羅的に解説