数値解析入門

2. 移流方程式（1次元）

2. Advection Equation (1-Dimensional)

3

スケジュール

	題材	日時・場所	所要時間
~~STEP 1~~	~~常微分方程式の時間積分~~	~~4/11, 10:30-~~ ~~W2 – 544~~	~~説明15分~~ ~~演習20~30分~~ ~~追加説明15分~~
STEP 2	1次元移流方程式	4/11, 13:00- W2 – 544	説明15分 演習15分 追加説明15分
STEP 3	1次元拡散方程式	4/12, 13:00- W2 – 544	説明30分 演習30分
Extra STEP	貯留層解析入門	4/12, 14:15- W2 – 544	説明25分 演習10分 M2研究紹介?

コンテンツ

コンテンツ

1．移流方程式

「移流」：物理量が空間で**散らばらず**に運ばれること（匂い，
濃度，熱 etc…）

1次元の場合

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

以下，ϕ を物質の濃度， $c > 0$ は伝播する速度とする。

1. 移流方程式

1次元移流方程式には解析解が存在

$$\phi(t,x) = \phi(x - ct)$$

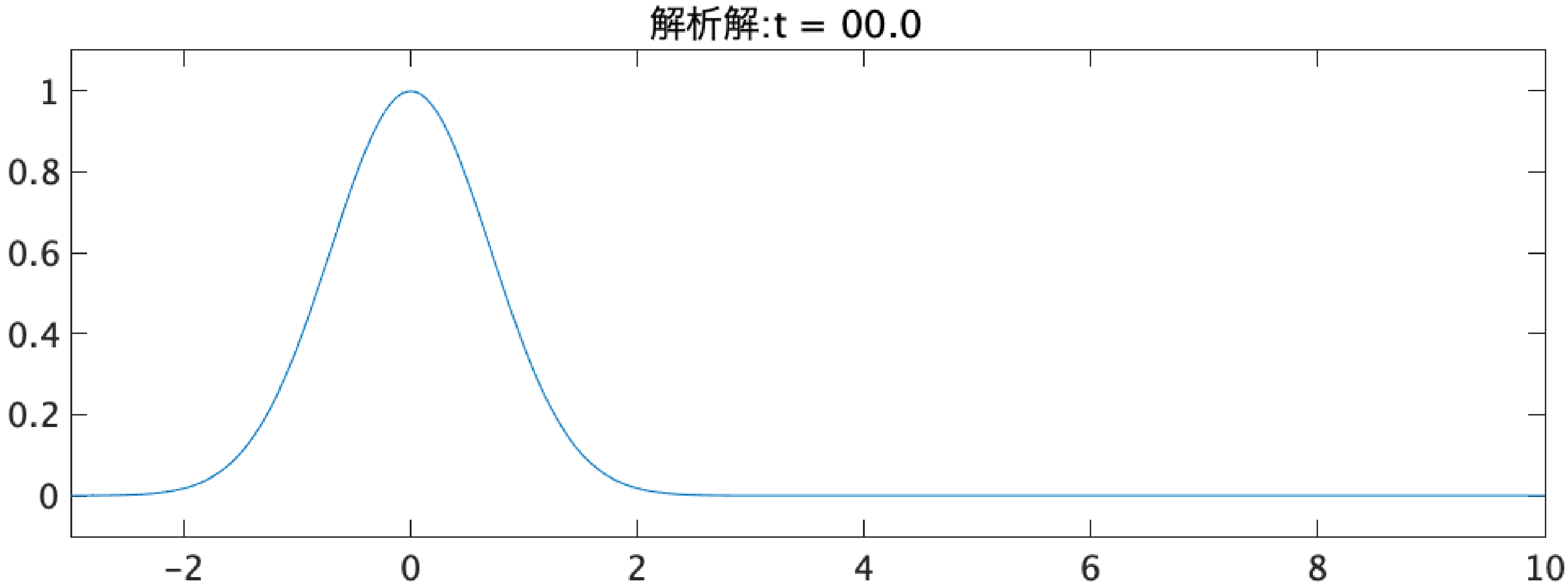
ただし, f は任意の関数

ある関数が**平行移動**する

1. 移流方程式（解析解）

$\phi(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ とすると$\phi(x - ct) = \mathrm{e}^{-(x-ct)^2}$ なので、

$c = 0.25$ の時



物理量が空間で**散らばらず**に**平行移動**する

コンテンツ

1 移流方程式

2 空間の離散化

2 空間の離散化

0	時間項の離散化
1	風上差分
2	CFL条件
3	補足説明

2-0．時間項の離散化

移流方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

の左辺について，

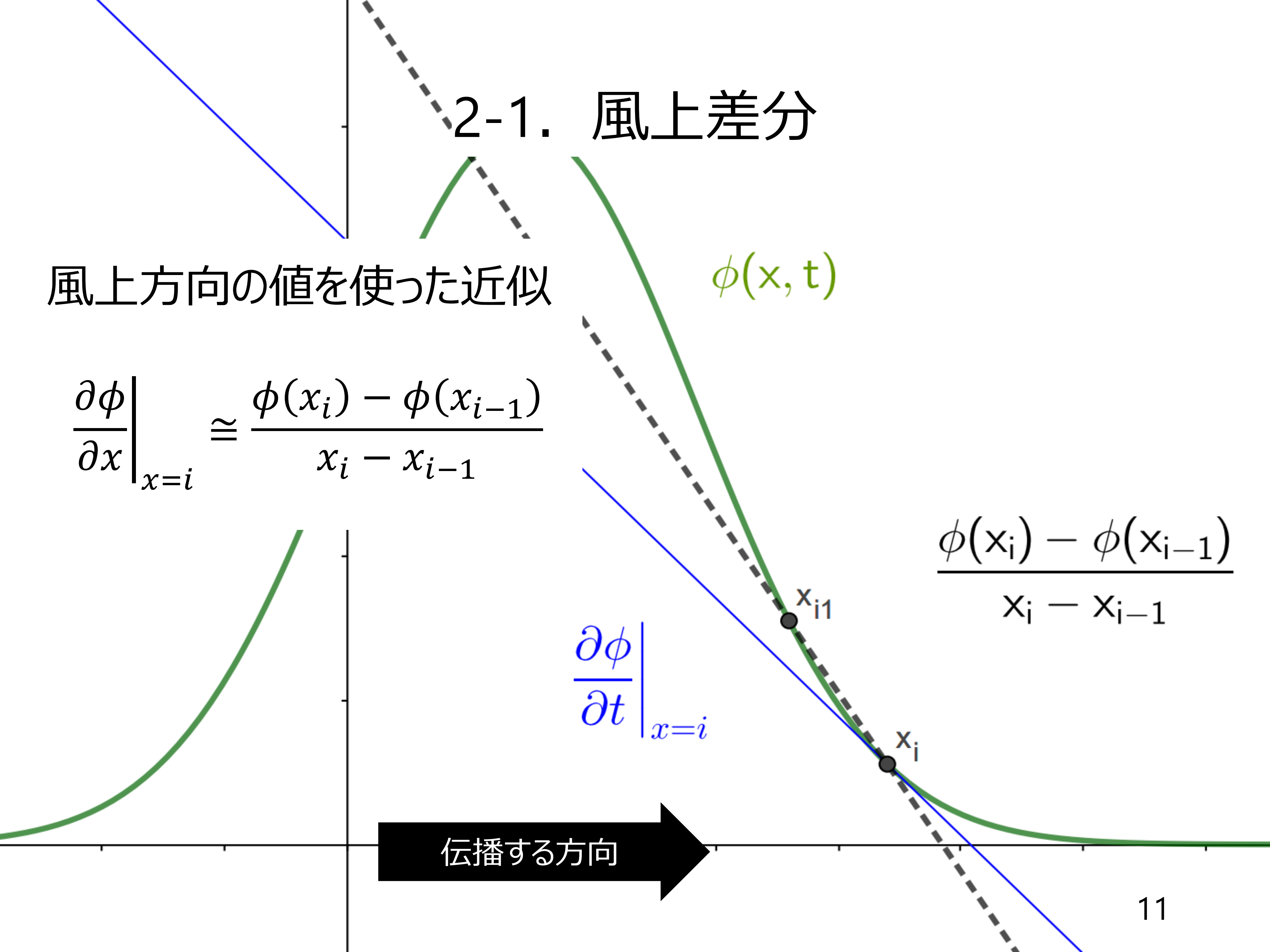
時刻 t での分布を ϕ^n, $t + \Delta t$ での分布を ϕ^{n+1} として

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t}$$

2-1. 風上差分

風上方向の値を使った近似

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=i} \cong \frac{\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$



2-1. 風上差分

時間項の離散化と合わせて，プログラムにする式は

$$\frac{\phi^{n+1}(x_i) - \phi^n(x_i)}{\Delta t} = -c\frac{\phi^n(x_i) - \phi^n(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\phi^{n+1}(x_i) =$$

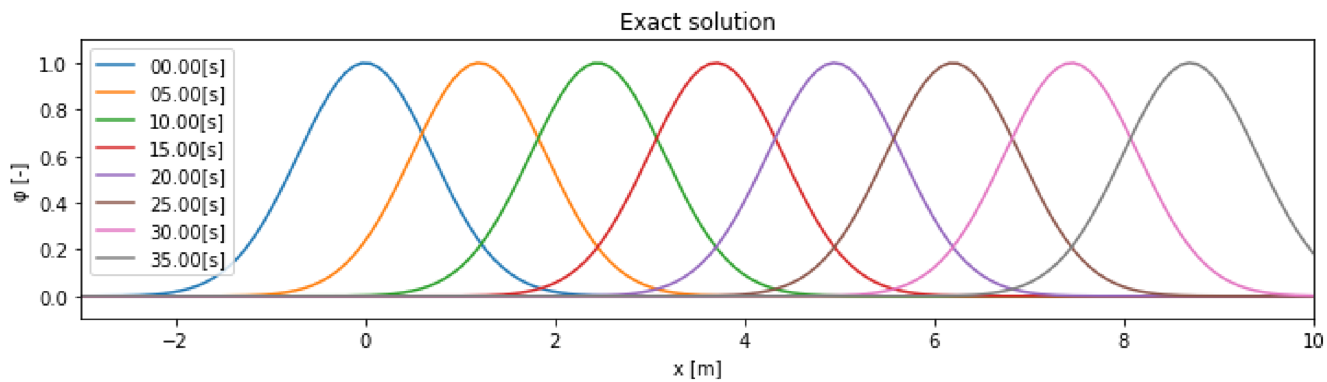
自由落下と同様，未来の情報が現在の情報から求まる。

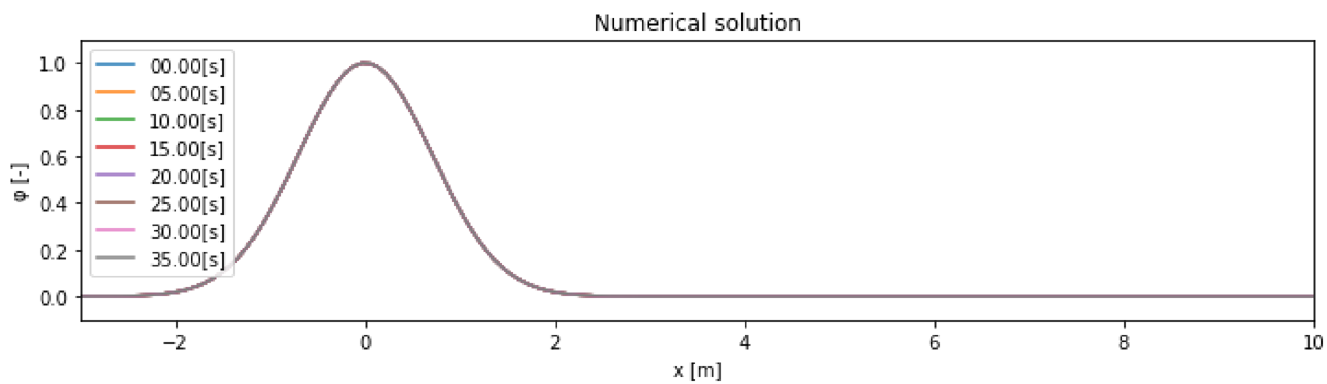
（※ x 方向は等間隔に分割）

演習

$$\phi^{n+1}(x_i) = \phi^n(x_i) - c\Delta t \frac{\phi^n(x_i) - \phi^n(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

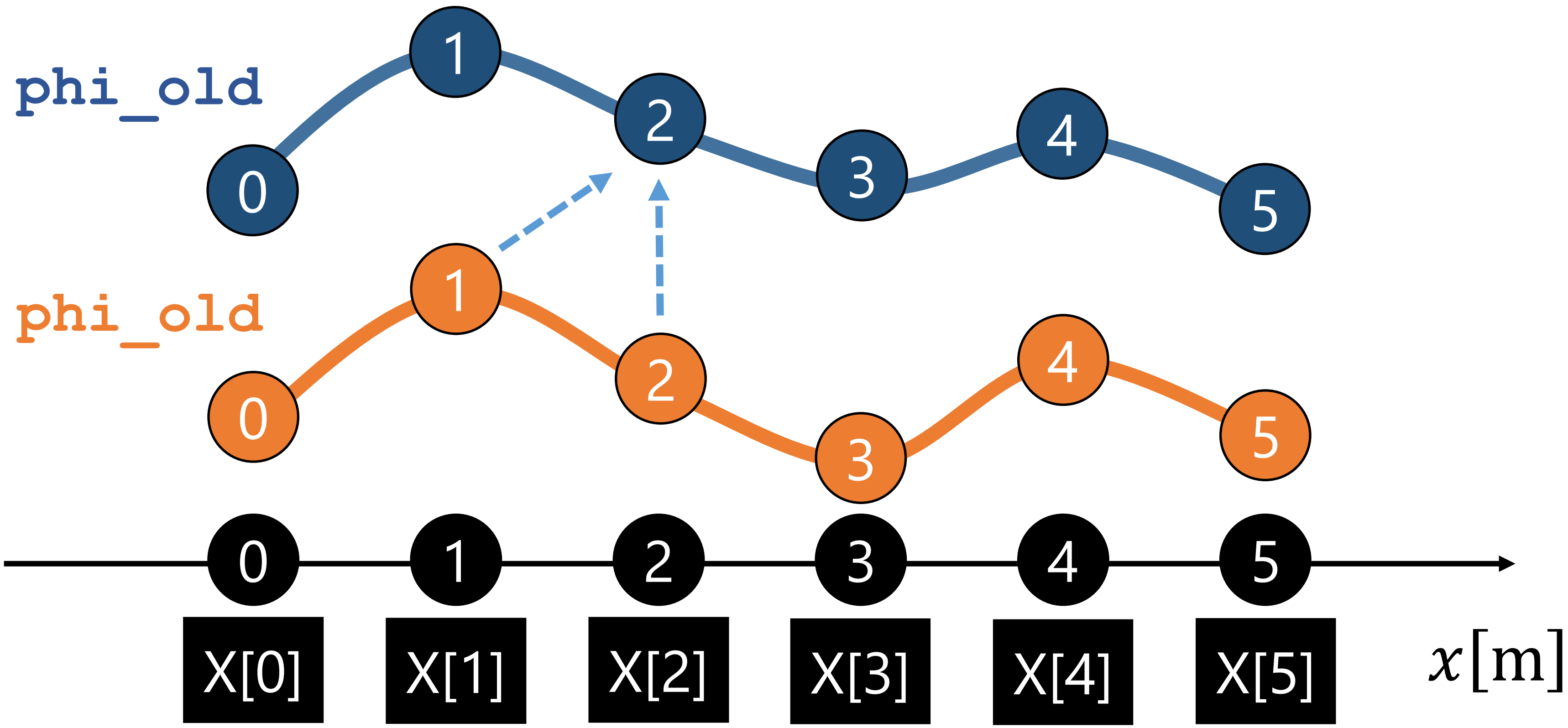
まずプログラムを実行して、次のような図が出力される事を確認



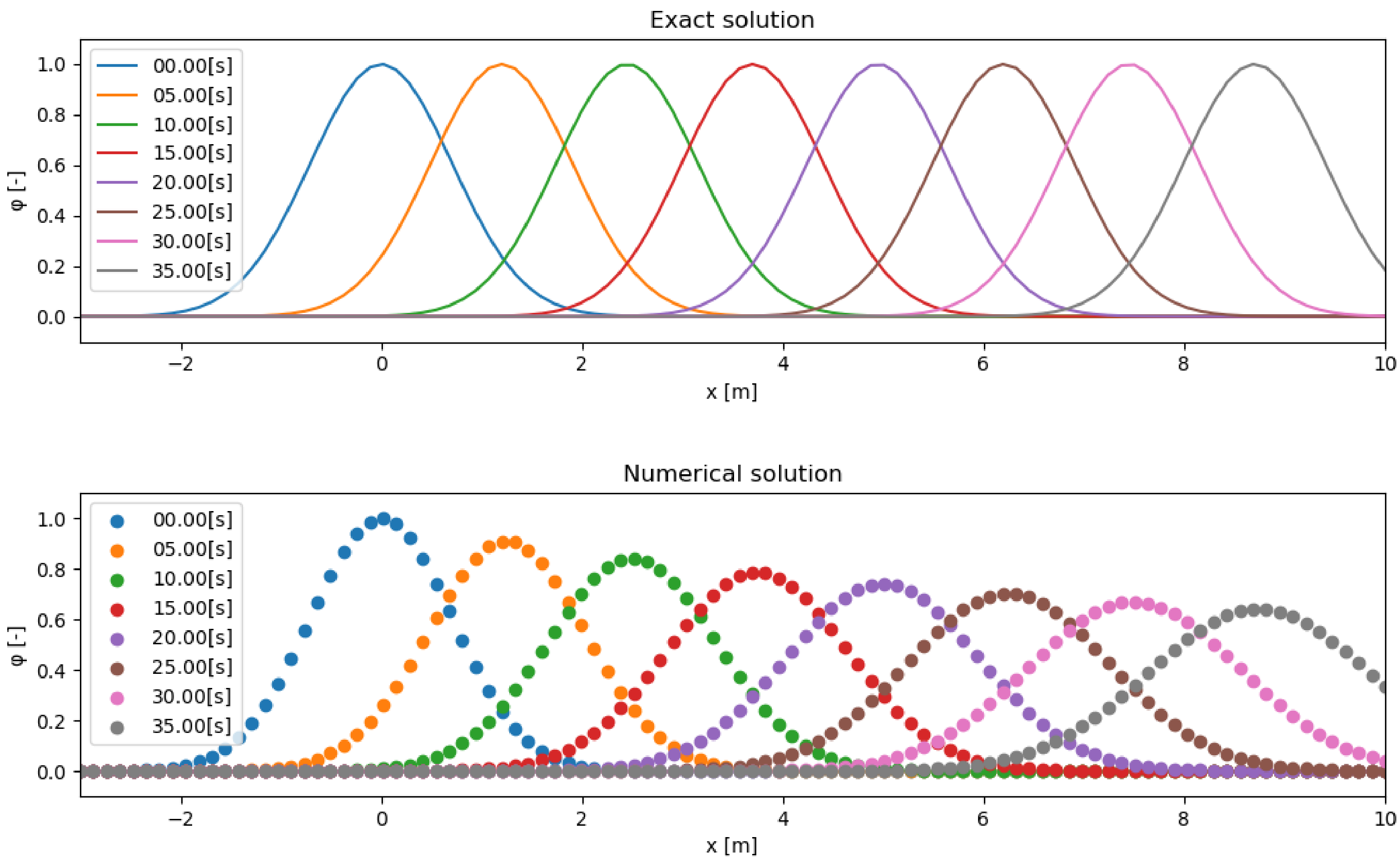


演習　補足説明

$$\phi^{n+1}(x_i) = \phi^n(x_i) - c\Delta t \frac{\phi^n(x_i) - \phi^n(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$



解答

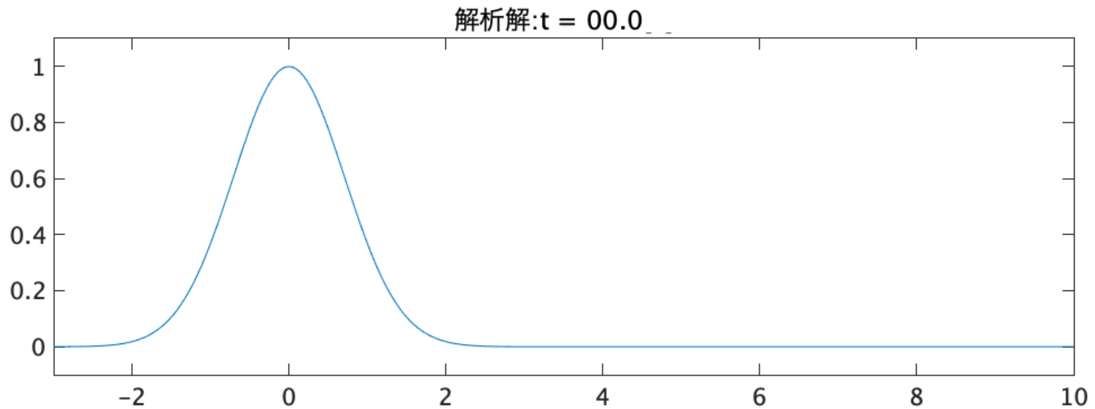


Exact solution
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
φ [-]
00.00[s]
05.00[s]
10.00[s]
15.00[s]
20.00[s]
25.00[s]
30.00[s]
35.00[s]
−2
0
2
4
6
8
10
x [m]
Numerical solution
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
φ [-]
00.00[s]
05.00[s]
10.00[s]
15.00[s]
20.00[s]
25.00[s]
30.00[s]
35.00[s]
−2
0
2
4
6
8
10
x [m]

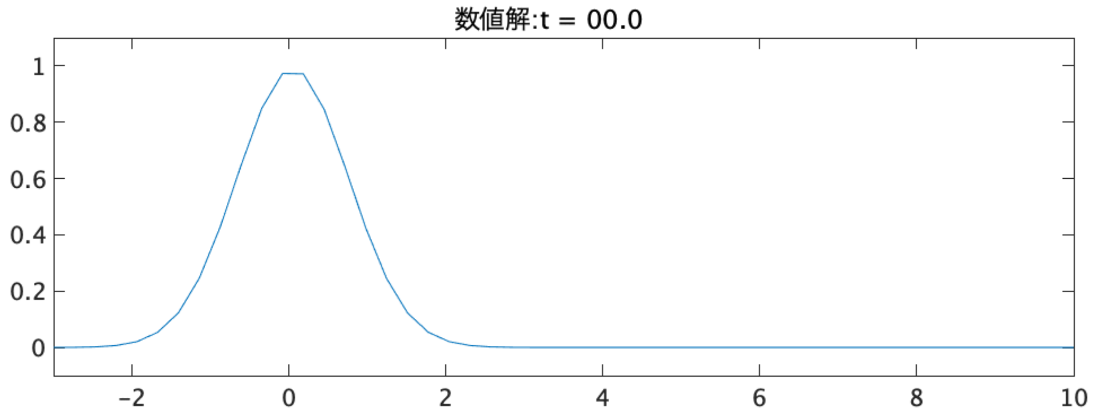
2-1. 風上差分

$c = 0.25$, $\Delta t = 0.2$ として計算する

解析解



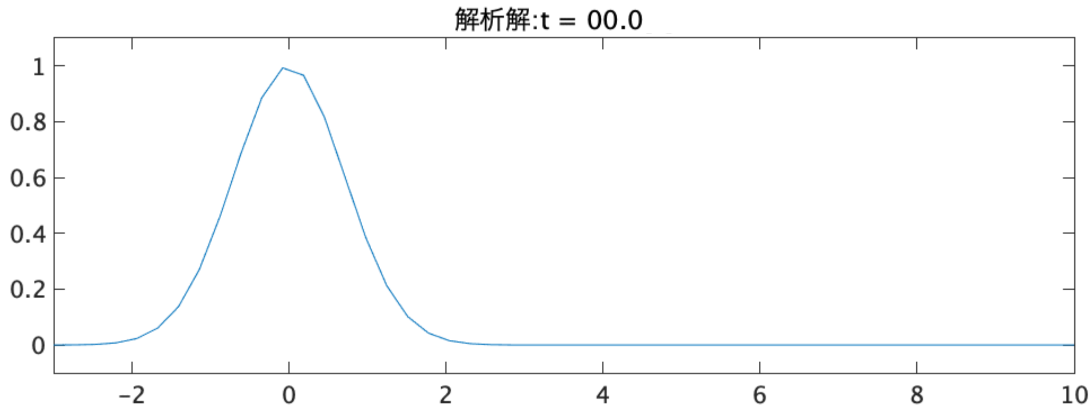
数値解



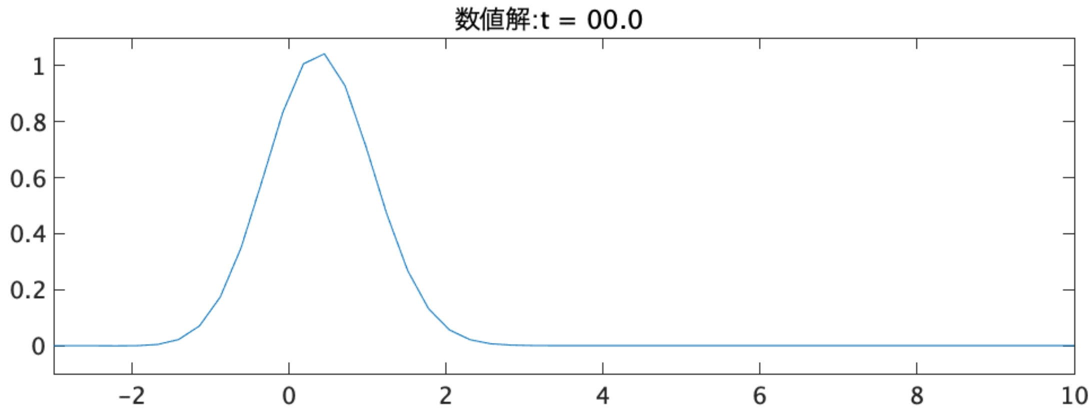
2-2．CFL条件

$c\ =\ 2$ に増加させると

解析解



数値解



2-2. CFL条件

定義

CFL条件（シーエフエルじょうけん、Courant-Friedrichs-Lewy Condition）またはクーラン条件とは、数値解析によるコンピュータシミュレーションにおいて、「**情報が伝播する速さ**」は「**実際の現象で波や物理量が伝播する速さ**」より も速くなければならないという必要条件のことである。(Wikipedia より)

数式で表すと

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > c \text{ 或いは } 1 > \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

※ $c\Delta t/\Delta x$ をクーラン数という

2-2．CFL条件

スライド13，14の例では $[-3, 10]$ を 50 個の要素で離散化

$$\Delta x = \frac{10-(-3)}{50-1} \cong 0.2653$$

$\Delta t = 0.2$ なのでCFL条件を満たす限界の c は

$$c < \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.2653}{0.2} \cong 1.3265$$

CFL条件を満たさない $c, \Delta x, \Delta t$ を設定すると，振動が発生

2-3．補足説明

Δx の間隔を細かく（0.26 → 0.00001）

→　Δt を大きくできないので，時間がかかる

<u>風上差分以外の方法</u>

1. 中心差分
2. FTCS 法
3. Lax 法
4. CIP法　など