数値解析入門

4. 貯留層シミュレーション入門

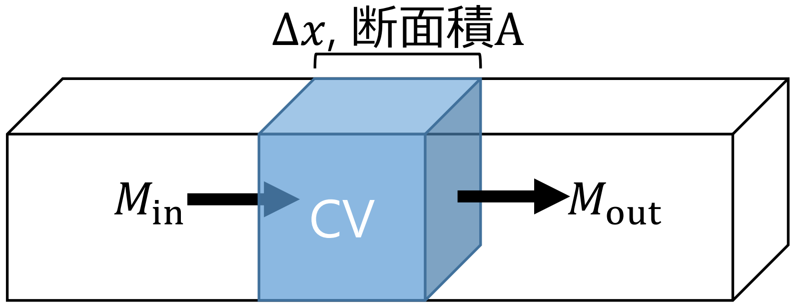
4. An Introduction to Reservoir Simulation

コンテンツ

コンテンツ

1. 質量保存

（質量の時間変化） = （流入） - （流出） + （生成 / 消失）



検査体積内部の流体質量 m は

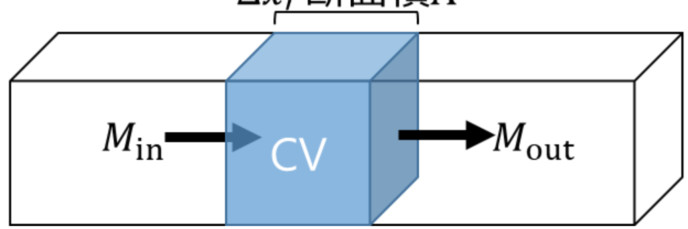
$$m = \phi\rho A\Delta x$$

だから質量の時間変化は

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\phi\rho A\Delta x)}{\partial t} \cong A\Delta x \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$$

1. 質量保存

（質量の時間変化） = （流入） - （流出） + （生成 / 消失）



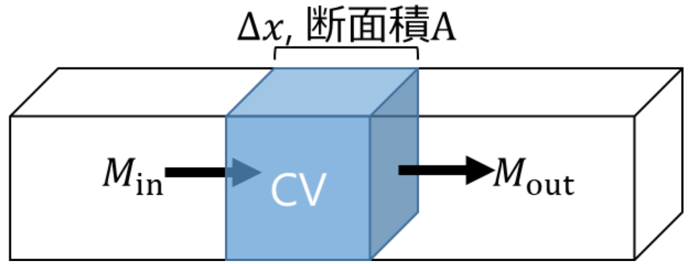
$$A\Delta x \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = A\Delta x\left(\phi\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = A\Delta x\left(\phi\frac{\partial\rho}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}\right)$$

$$A\Delta x\cdot\phi\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P} + \frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)\frac{\partial P}{\partial t} = A\Delta x\cdot\phi\rho(c_w + c_r)\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$= A\Delta x\cdot\phi\rho(c_w + c_r)\frac{\partial P}{\partial t}$$

1. 質量保存

（質量の時間変化） ＝ （流入） - （流出） + （生成 / 消失）



質量流量 $M_{\mathrm{in/out}}$ は 密度 × 断面積 × 流束 (flux) で表される。ダルシーの法則と合わせ、

$$M_{\mathrm{in/out}} = \rho v A = -\rho \frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} A$$

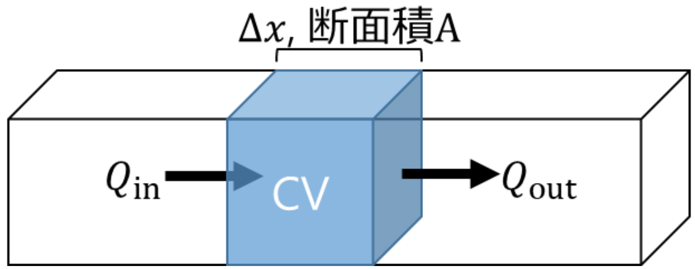
よって（流入量） - （流出量）

$$M_{\mathrm{in}} - M_{\mathrm{out}} = -\rho \frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} A\bigg|_{x=x} - \rho\left(-\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} A\bigg|_{x=x+\Delta x}\right)$$

$$= \rho A\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=x+\Delta x} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=x}\right)$$

1. 質量保存

（質量の時間変化） = （流入） - （流出） + （生成 / 消失）



$$\cancel{A}\Delta x \cdot \phi \cancel{\rho}(c_w + c_r)\frac{\partial P}{\partial t} = \cancel{\rho}\cancel{A}\left(\left.\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x+\Delta x} - \left.\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x}\right)$$

$$\phi(c_w + c_r)\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\left.\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x+\Delta x} - \left.\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x}}{\Delta x}$$

圧力の拡散方程式は

質量保存から導出可能

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$$

1. 質量保存

圧力拡散方程式の単位

$$\phi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$[-] \frac{1}{\cancel{[\mathrm{Pa}]}} \frac{\cancel{[\mathrm{Pa}]}}{[\mathrm{T}]} = \frac{1}{\cancel{[\mathrm{L}]}} \cdot \frac{\cancel{[\mathrm{L}^2]}}{\cancel{[\mathrm{Pa}} \cdot \mathrm{T}]} \frac{\cancel{[\mathrm{Pa}]}}{\cancel{[\mathrm{L}]}}$$

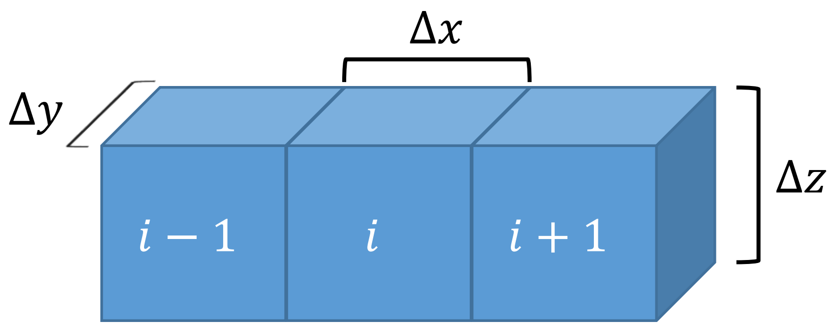
有限体積法では、圧力拡散方程式を検査体積で3重積分しているので、

流量の単位 $\left[{}^{\mathrm{L}^3}/_{\mathrm{T}}\right]$ を持つ。

$$\iiint \phi c \frac{\partial P}{\partial t} dxdydz = \iiint \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz$$

1. 質量保存

$$\Delta z \Delta y = A$$



$$\phi c \Delta \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} x_i \Delta y_i \Delta z_i = \frac{k}{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \frac{P_{i+1} - P_i}{0.5(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} \Delta y_i \Delta z_i - \frac{k}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \frac{P_i - P_{i-1}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \Delta y_i \Delta z_i$$

検査体積がすべて等しく（$V_{i-1} = V_i = V_{i+1}$）、$\frac{k}{\mu_{i+1/2}} = \frac{k}{\mu_{i-1/2}}$とすると

$$\frac{V_i \phi c}{\Delta t}\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = \frac{kA}{\mu \Delta x}(P_{i+1} - P_i) - \frac{kA}{\mu \Delta x}(P_i - P_{i-1})$$

→単位が流量の離散化した式が得られた！

1. 質量保存

$V_i \phi c = B_i$， $\frac{kA}{\mu \Delta x} = T$ と置く

$$\frac{B_i}{\Delta t}\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = T(P_{i+1} - P_i) - T(P_i - P_{i-1})$$

検査体積内部での生成 / 消失を考えたい

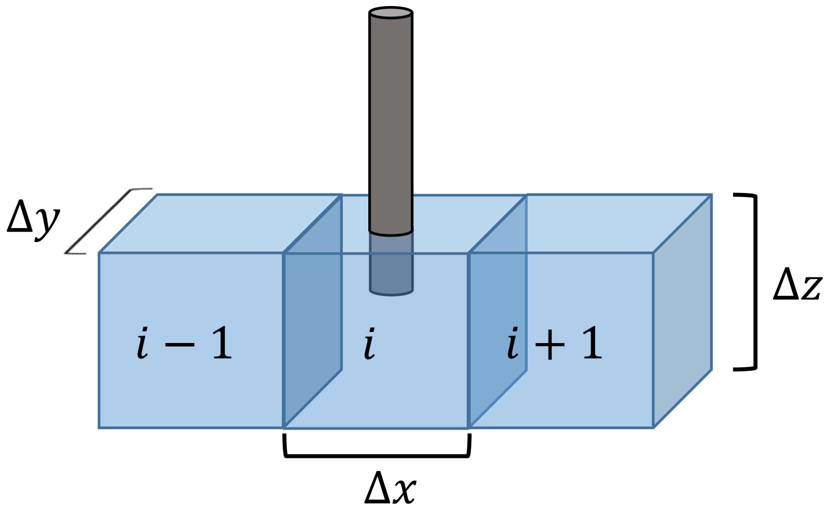
坑井モデルの導入

コンテンツ

2. 坑井モデル

流量による表現

- 比較的簡単
- スキンファクター等のパラメータは無視



坑底圧力（Bottom Hole Pressure）による表現

- やや複雑
- スキンファクター等を考慮したモデル

2. 坑井モデル（一定流量）

検査体積 i に掘削された坑井からの流量を q_i $[L^3/T]$ として、

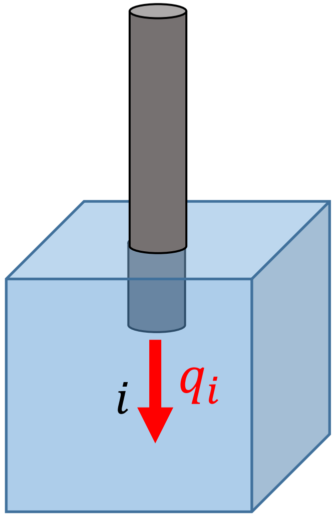
$$\frac{B_i}{\Delta t}\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = T(P_{i+1} - P_i) - T(P_i - P_{i-1}) + q_i$$

生産井

- $q_i < 0$

圧入 / 還元井

- $q_i > 0$



2. 坑井モデル（圧力一定）

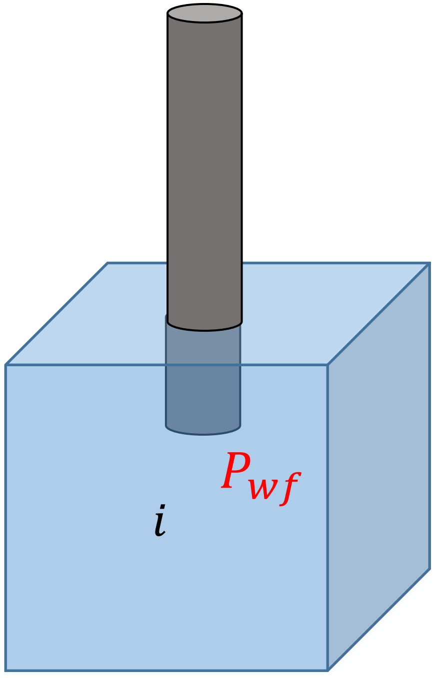
坑底圧力を P_{wf} とする。

検査体積の圧力 P_i と差による流量 q_w は、

Productivity Index と呼ばれる定数を使って、

$$q_w = J_i\left(P_{wf} - P_i\right)$$

と表される。



$$\frac{B_i}{\Delta t}\left(P_i^{n+1} - P_i^n\right) = T(P_{i+1} - P_i) - T(P_i - P_{i-1}) + J_i\left(P_{wf} - P_i\right)$$

コンテンツ

3. 陰解法

前回紹介した陽解法は時間ステップに制限がある。

多くの商用シミュレータは陰解法を採用している（らしい）。

陰解法では、離散化した式の右辺にP^{n+1}を用いる。

$$\frac{B_i}{\Delta t}\left(P_i^{n+1}-P_i^n\right)=T\left(P_{i+1}^{n+1}-P_i^{n+1}\right)-T\left(P_i^{n+1}-P_{i-1}^{n+1}\right)+J_i\left(P_{wf}-P_i^{n+1}\right)$$

【演習】

離散化した式を

$$\frac{B_i}{\Delta t}P_i^n+J_iP_{wf}=\cdots$$

の形に整理

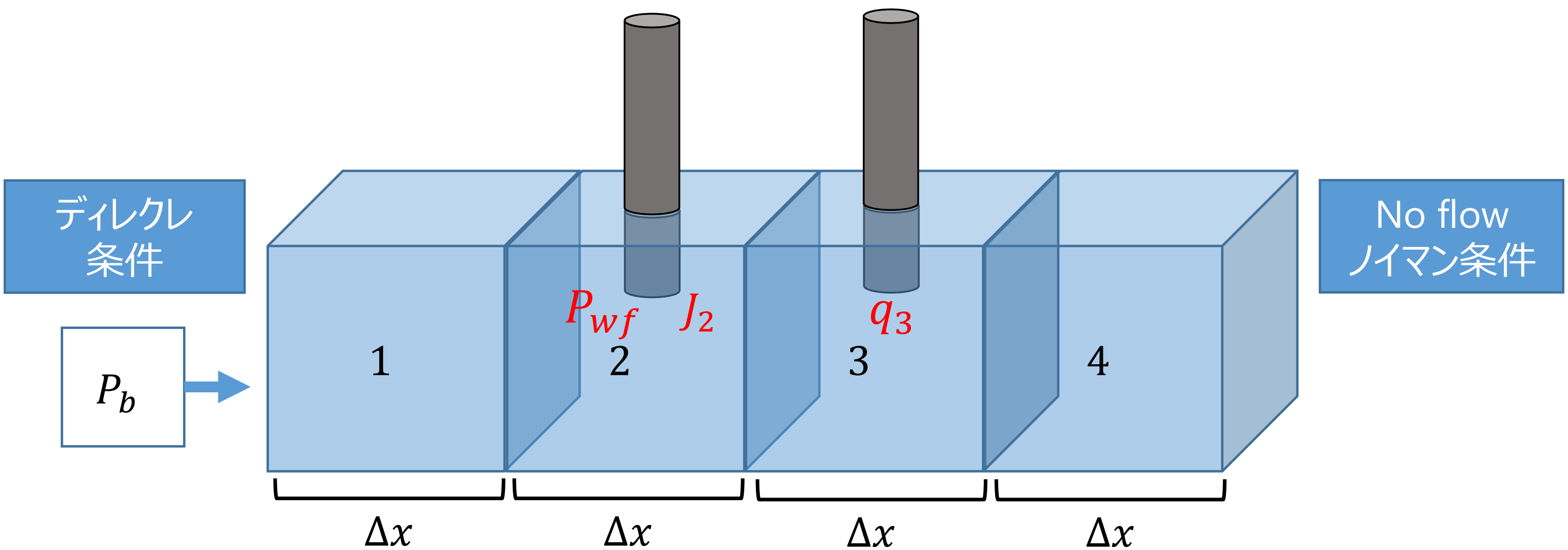
3. 陰解法

【回答】

$$-TP_{i-1}^{n+1}+\left(2T+\frac{B_i}{\Delta t}+J_i\right)P_i^{n+1}-TP_{i+1}^{n+1}=\frac{B_i}{\Delta t}P_i^n+J_iP_{wf}$$

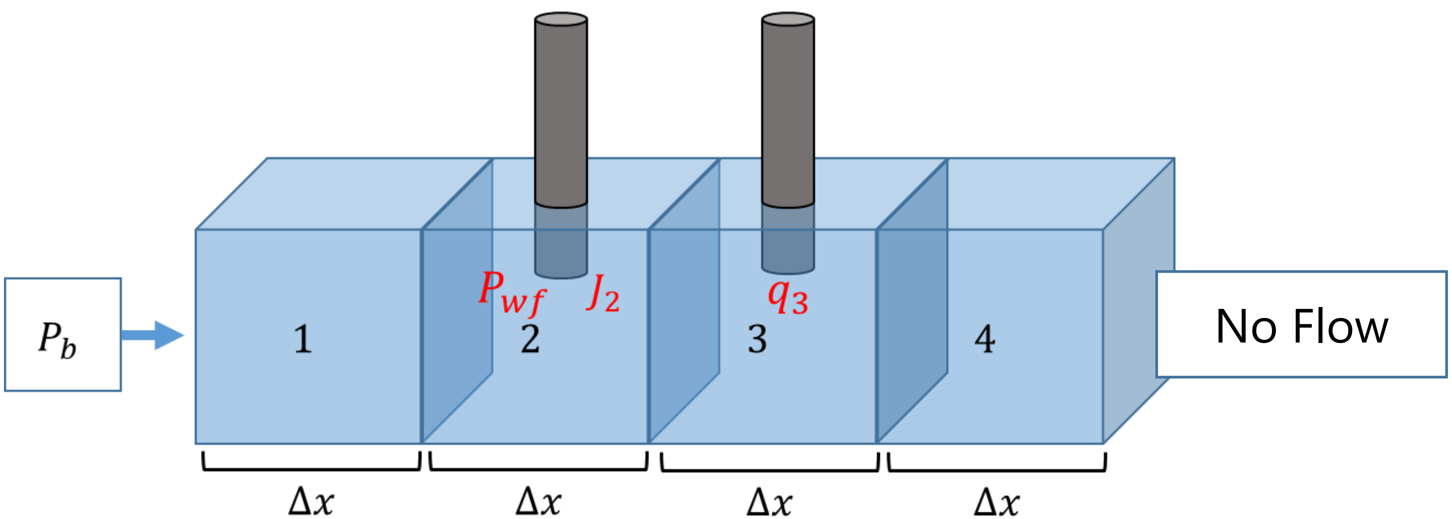
具体的にはすべてのブロックについての式を連立方程式として解く。

例：断面積 A，浸透率 k の水単相貯留層を考える。



3. 陰解法

CV#1	$-T\left(2P_b - P_1^{n+1}\right) + \left(2T + \frac{B_1}{\Delta t}\right)P_1^{n+1} - TP_2^{n+1} = \frac{B_1}{\Delta t}P_1^n$
CV#2	$-TP_1^{n+1} + \left(2T + \frac{B_2}{\Delta t} + J_2\right)P_2^{n+1} - TP_3^{n+1} = \frac{B_2}{\Delta t}P_2^n + J_2 P_{wf}$
CV#3	$-TP_2^{n+1} + \left(2T + \frac{B_3}{\Delta t}\right)P_3^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_3}{\Delta t}P_3^n + q_3$
CV#4	$-TP_3^{n+1} + \left(2T + \frac{B_4}{\Delta t}\right)P_4^{n+1} - TP_4^{n+1} = \frac{B_4}{\Delta t}P_4^n$



3. 陰解法

各検査体積についての式をまとめる

$$
\begin{cases}
\left(3T + \dfrac{B_1}{\Delta t}\right)P_1^{n+1} - TP_2^{n+1} = \dfrac{B_1}{\Delta t}P_1^n + 2TP_b \\
-TP_1^{n+1} + \left(2T + \dfrac{B_2}{\Delta t} + J_2\right)P_2^{n+1} - TP_3^{n+1} = \dfrac{B_2}{\Delta t}P_2^n + J_2P_{wf} \\
-TP_2^{n+1} + \left(2T + \dfrac{B_3}{\Delta t}\right)P_3^{n+1} - TP_4^{n+1} = \dfrac{B_3}{\Delta t}P_3^n + q_3 \\
-TP_3^{n+1} + \left(T + \dfrac{B_4}{\Delta t}\right)P_4^{n+1} = \dfrac{B_4}{\Delta t}P_4^n
\end{cases}
$$

連立方程式は行列とベクトルで表現できる

3. 陰解法

$$\left(\begin{bmatrix} 3T & -T & 0 & 0 \\ -T & 2T & -T & 0 \\ 0 & -T & 2T & -T \\ 0 & 0 & -T & T \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} P_1^{n+1} \\ P_2^{n+1} \\ P_3^{n+1} \\ P_4^{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1^n \\ P_2^n \\ P_3^n \\ P_4^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2TP_b \\ J_2P_{wf} \\ q_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

次のようなイメージがあるとプログラムを書きやすい。

$$\left(\mathbf{T} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{B} + \mathbf{J}\right)\vec{P}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{B}\vec{P}_n + \vec{Q}$$

- 「コンピュータで連立方程式を解く」のは大変（だった）
  - $\mathbf{T}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{J}$ の扱いもポイント （省メモリ）

    Key Word : 掃き出し法，疎行列計算，ヤコビ法
- Python (NumPy・SciPy) や MATLABでは一行で完結

コンテンツ

今回説明していない事（一部）

■ 多相流

今回は水の流れのみ（単相流）だが，実際の貯留層は水-蒸気，水-油，水-油-ガス，水-CO2等が混在

- 飽和率，Saturation
- 相対浸透率，Relative Permeability
- 毛細管圧力，Capillary Pressure

■ 容積係数 Formation Volume Factor

- 貯留層条件と標準状態では体積が異なる

■ Productivity Indexの詳細

■ エネルギー保存→地熱の資源価値は熱エネルギー油ガスは質量（体積）