

# 数值解析基礎

## 1. 常微分方程式の時間積分

## 1. Time Integration of Ordinary Differential Equations

# コンテンツ

1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

Python・MATLABによる実装

# コンテンツ

1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

Python・MATLABによる実装

# 1. 小球の自由落下

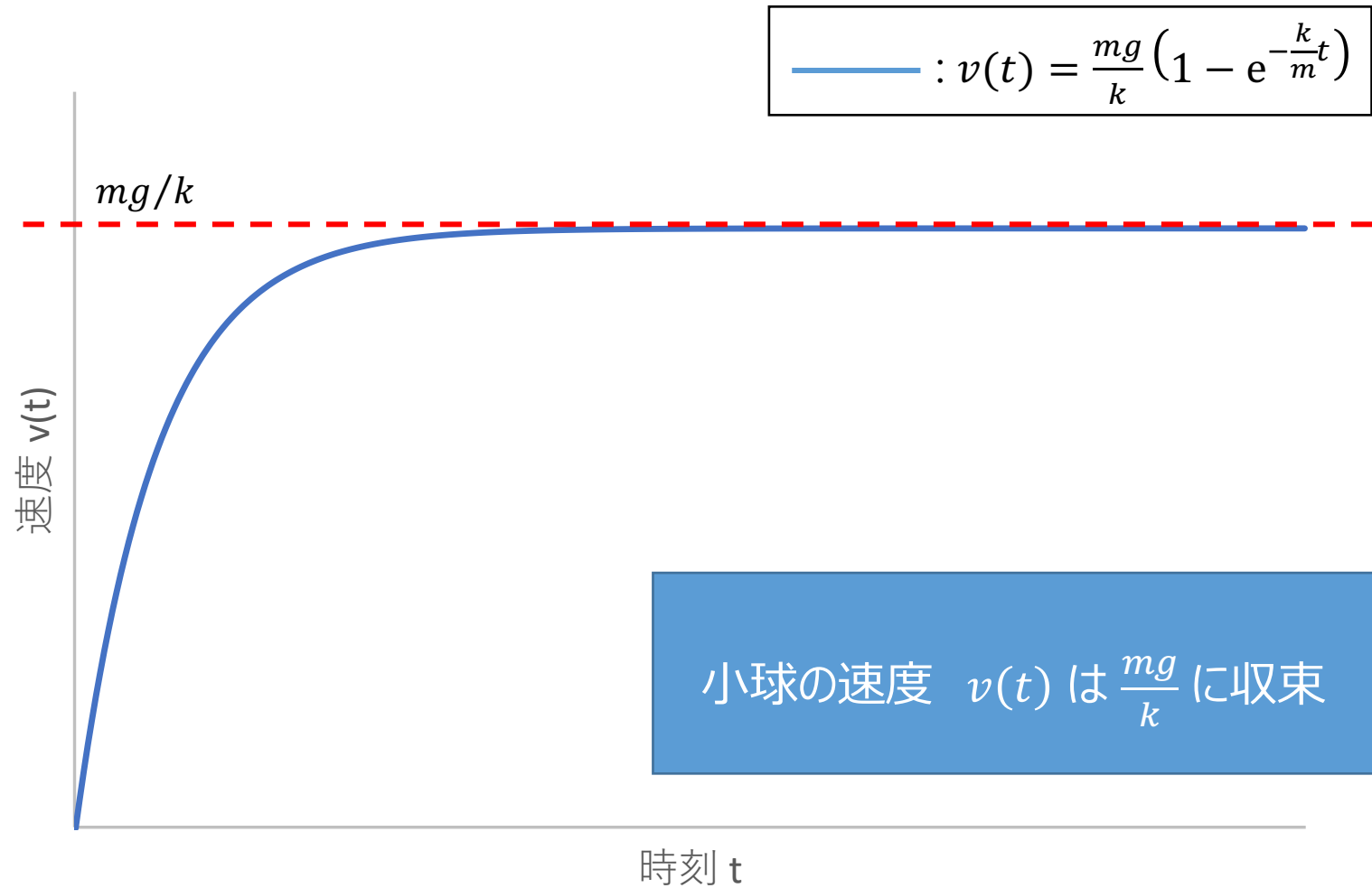
微分方程式

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

特殊解  
(  $v(0) = 0$  )

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

# 1. 小球の自由落下



# コンテンツ

1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

Python・MATLABによる実装

1. コンピューターができる計算・できない計算
2. シミュレーションの方法
  - A) 離散化 / Discretization
  - B) 実際の計算

## 2-1. コンピューターができる計算

**四則計算**のみ！



## 2-1. コンピューターができない計算

**例：空気抵抗を考えた自由落下**

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t) \quad \text{の解を求めよ.}$$

ただし  $t = 0$  のとき  $v = 0$  とする.

解

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

コンピューターは  
「変数分離して両辺を積分」  
という計算をできない

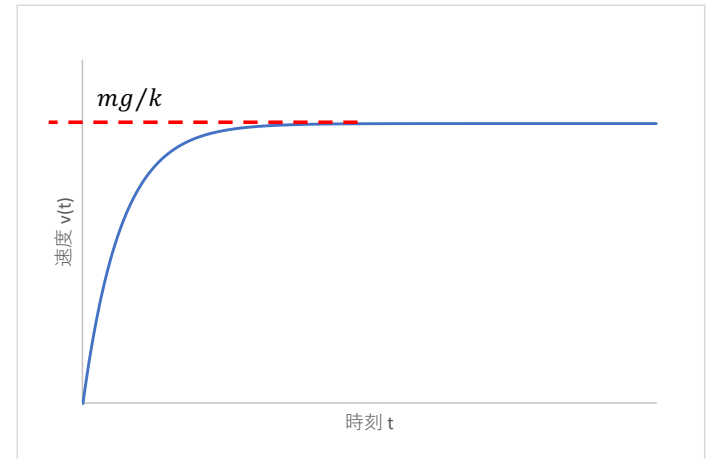
## 2-2. シミュレーションの方法

### 問題：空気抵抗を考えた自由落下

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

空気抵抗を考えた自由落下の速度変化をシミュレーションせよ.

ただし  $t = 0$  のとき  $v = 0$  とする.



小球の速度  $v(t)$  が  $\frac{mg}{k}$  に収束することを確認

## 2-2. シミュレーションの方法

コンピューターは四則計算しかできない。

シミュレーション（コンピューターで計算）するために...

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t) \text{ の } \frac{dv(t)}{dt} \text{ を } \underline{\text{四則計算}} \text{ で表したい！}$$

## 2-2-A. 離散化 / Discretization

微分の定義より

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$\Delta t$ が十分小さい時

$$\frac{dv(t)}{dt} \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

これを元の微分方程式に代入すると...

## 2-2-A. 離散化 / Discretization

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

$$m \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = mg - kv(t)$$

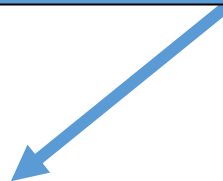
$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = g - \frac{k}{m} v(t)$$

$$\boxed{v(t + \Delta t)} = \boxed{v(t) + \Delta t \left( g - \frac{k}{m} v(t) \right)}$$

未来

現在

現在 ( $t$ 秒) の情報  
から  
未来 ( $t + \Delta t$ 秒後) の状態  
を計算可能



## 2-2-B. 実際の計算

$m = 1.0, g = 9.8, k = 10, \Delta t = 0.01, v(0) = 0$  のとき

シミュレーション

$$v(0.01) = v(0 + 0.01) = v(0) + 0.01 \times \left( 9.8 - \frac{10}{1.0} \times v(0) \right) = 0.098$$

$$v(0.02) = v(0.01 + 0.01) = v(0.01) + 0.01 \times \left( 9.8 - \frac{10}{1.0} \times v(0.01) \right) = 0.1862$$

:

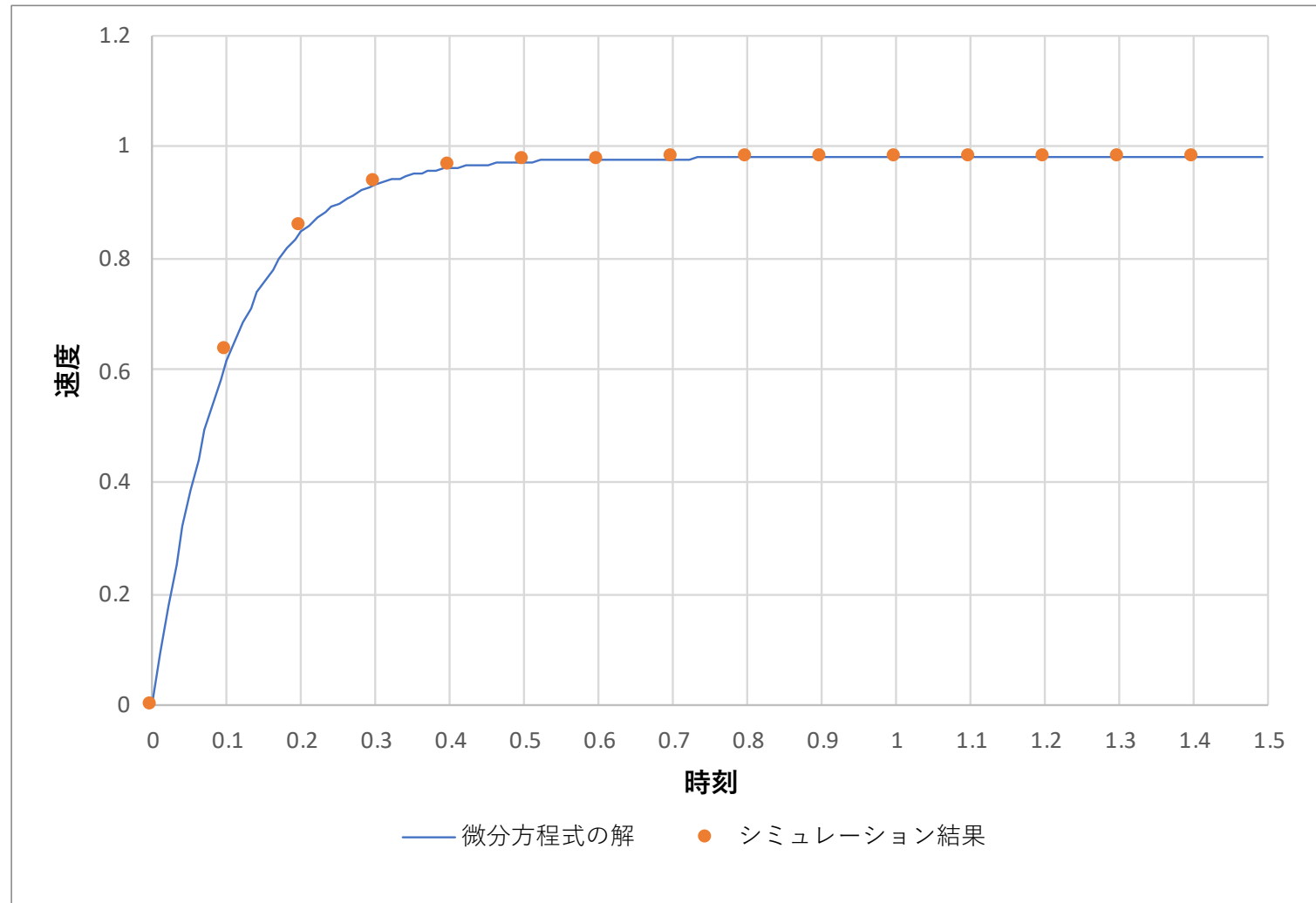
$$v(1.50) = 0.97999986 \dots$$

解

$$\begin{aligned} v(1.50) &= \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m} 1.5} \right) \\ &= \frac{1.0 \times 9.8}{10} \left( 1 - e^{-\frac{10}{1.0} \times 1.5} \right) \\ &= 0.9799997002 \dots \end{aligned}$$

シミュレーション結果と  
微分方程式の解がほぼ一致

## 2-2-B. 実際の計算



# コンテンツ

1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

Python・MATLABによる実装



### 3. Python・MATLABによる実装

2-2-Aで求めた式を, プログラムで表すと...?

# MATLABによる実装（例）

```
%% Input Parameters
m    = 1.0; % mass of a small ball [kg]
g    = 9.8; % gravitational acceleration [m/s^2]
k    = 1.0; % coefficient of air resistance [N*s/m]
v0   = 0.0; % Initial velocity [m/s]
dt   = 0.1; % time step for simulation [s]
t_max = 10; % time which simulation is stopped [s]

%% Calculation
t = 0;
i = 1; % counter
v_hist = [v0]; % array to hold velocity value
while true
    v = v_hist(i) + dt*(g - (k/m)*v_hist(i));
    t = t + dt;
    if t >= t_max
        break
    end
    i = i+1;
    v_hist = [v_hist v]; % this code is not actually good.
end

%% Plot result
t_hist = 0:dt:t_max;
plot(t_hist, v_hist);
xlabel('t [s]');
ylabel('v [m/s]');
```