数值解析入門

- 1. 常微分方程式の時間積分
- 1. Time Integration of Ordinary Differential Equations

1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

1. 小球の自由落下

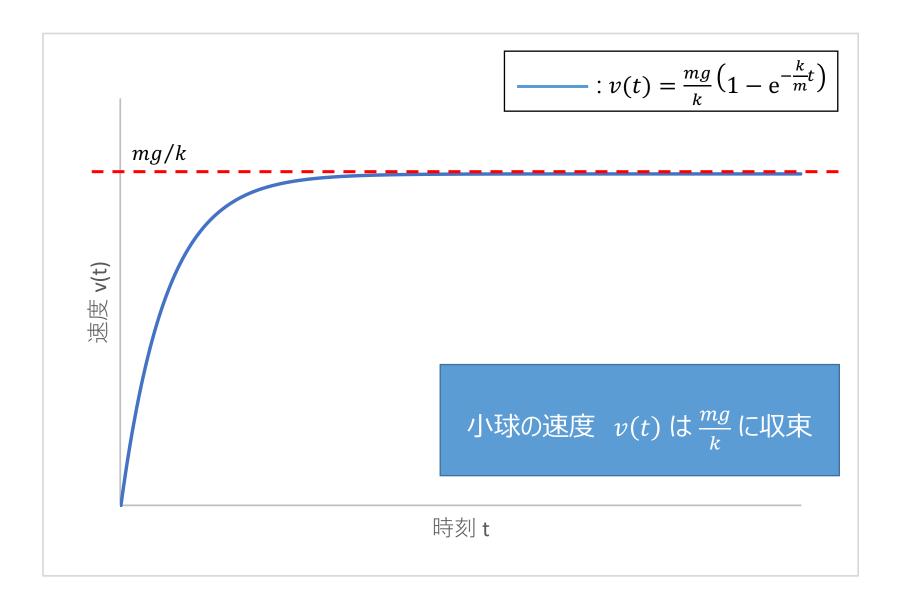
微分方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

特殊解 (v(0) = 0)

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

1. 小球の自由落下



1

小球の自由落下

2

シミュレーション

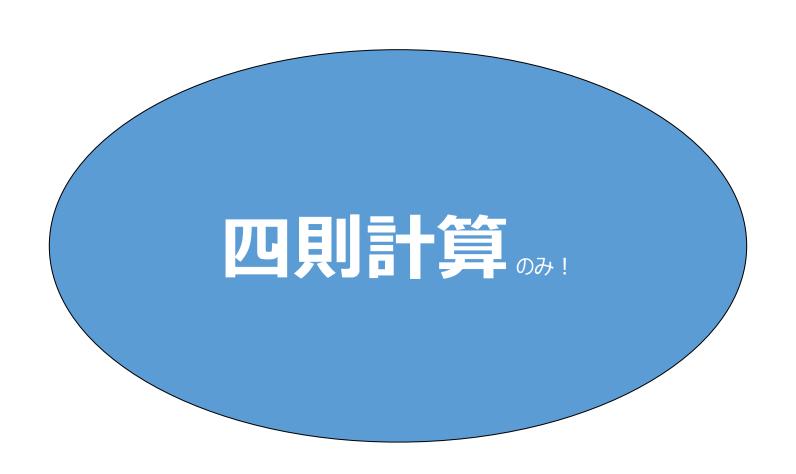
3

2

シミュレーション

- 1. コンピューターができる計算・できない計算
- 2. シミュレーションの方法
 - A) 離散化 / Discretization
 - B) 実際の計算
- 3. まとめ

2-1. コンピューターができる計算



2-1. コンピューターができない計算

例:空気抵抗を考えた自由落下

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$
 の解を求めよ.

ただし t=0 のとき v=0 とする.

ma

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

コンピューターは

「変数分離して両辺を積分」 という計算をできない

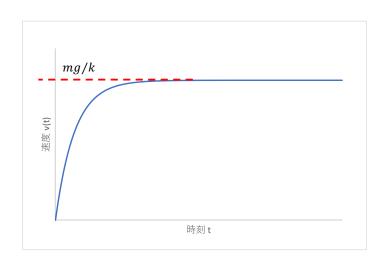
2-2. シミュレーションの方法

問題:空気抵抗を考えた自由落下

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

空気抵抗を考えた自由落下の速度変化をシミュレーションせよ.

ただし t=0 のとき v=0 とする.



小球の速度 v(t) が $\frac{mg}{k}$ に収束することを確認

2-2. シミュレーションの方法

コンピューターは四則計算しかできない.

シミュレーション (コンピューターで計算) するために...

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$
の $\frac{dv(t)}{dt}$ を
で表したい!

2-2-A. 離散化 / Discretization

微分の定義より

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

 Δt が十分小さい時

$$\frac{dv(t)}{dt} \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

これを元の微分方程式に代入すると...

2-2-A. 離散化 / Discretization

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

$$m\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = mg - kv(t)$$

$$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = g - \frac{k}{m}v(t)$$

現在 (t秒) の情報

から

未来 (t + Δt秒後) の状態

を計算可能

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t \left(g - \frac{k}{m}v(t)\right)$$

未来

現在

2-2-B. 実際の計算

$$m=1.0,\ g=9.8,\ k=10,\ \Delta t=0.01,\ v(0)=0$$
 のとき

シミュレーション

$$v(0.01) = v(0 + 0.01) = v(0) + 0.01 \times \left(9.8 - \frac{10}{1.0} \times v(0)\right) = 0.098$$

$$v(0.02) = v(0.01 + 0.01) = v(0.01) + 0.01 \times \left(9.8 - \frac{10}{1.0} \times v(0.01)\right) = 0.1862$$

:

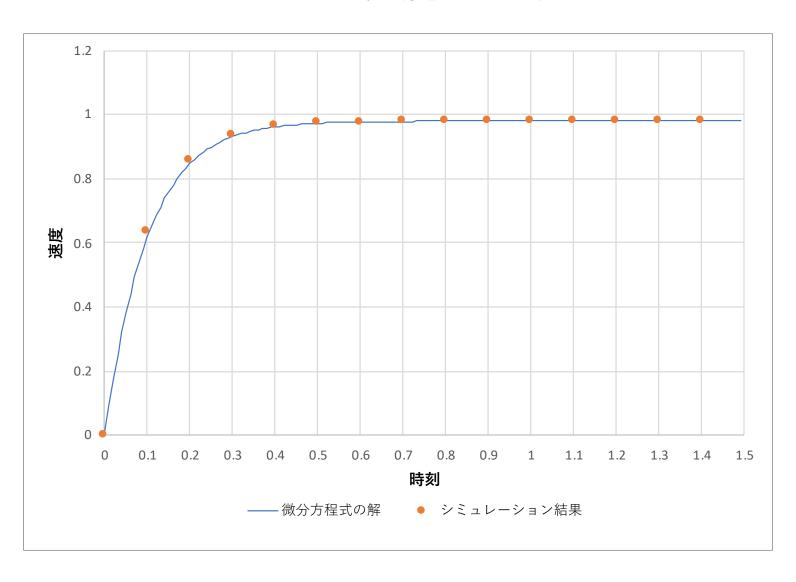
$$v(1.50) = 0.97999986 \dots$$

解

$$v(1.50) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}1.5} \right)$$
$$= \frac{1.0 \times 9.8}{10} \left(1 - e^{-\frac{10}{1.0} \times 1.5} \right)$$
$$= 0.9799997002 \dots$$

シミュレーション結果と 微分方程式の解がほぼ一致

2-2-B. 実際の計算



1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

3. Python・MATLABによる実装

2-2-Aで求めた式を, プログラムで表すと...?

MATLABによる実装(例)

```
%% Input Parameters
    = 1.0; % mass of a small ball [kg]
m
    = 9.8; % gravitational acceleration [m/s^2]
   = 1.0; % coefficient of air resistance [N*s/m]
k
v0 = 0.0; % Initial velocity [m/s]
dt = 0.1; % time step for simulation [s]
t max = 10; % time which simulation is stopped [s]
%% Calculation
t = 0;
i = 1; % counter
v hist = [v0]; % array to hold velocity value
while true
    v = v hist(i) + dt*(g - (k/m)*v hist(i));
   t = t + dt;
    if t >= t max
        break
    end
    i = i+1;
    v hist = [v hist v]; % this code is not actually good.
end
%% Plot result
t hist = 0:dt:t max;
plot(t hist, v hist);
xlabel('t [s]');
ylabel('v [m/s]');
```