

数値解析入門

2. 常微分方程式の時間積分

2. Time Integration of Ordinary Differential Equations

コンテンツ

1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

Python・MATLABによる実装

コンテンツ

1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

Python・MATLABによる実装

1. 小球の自由落下

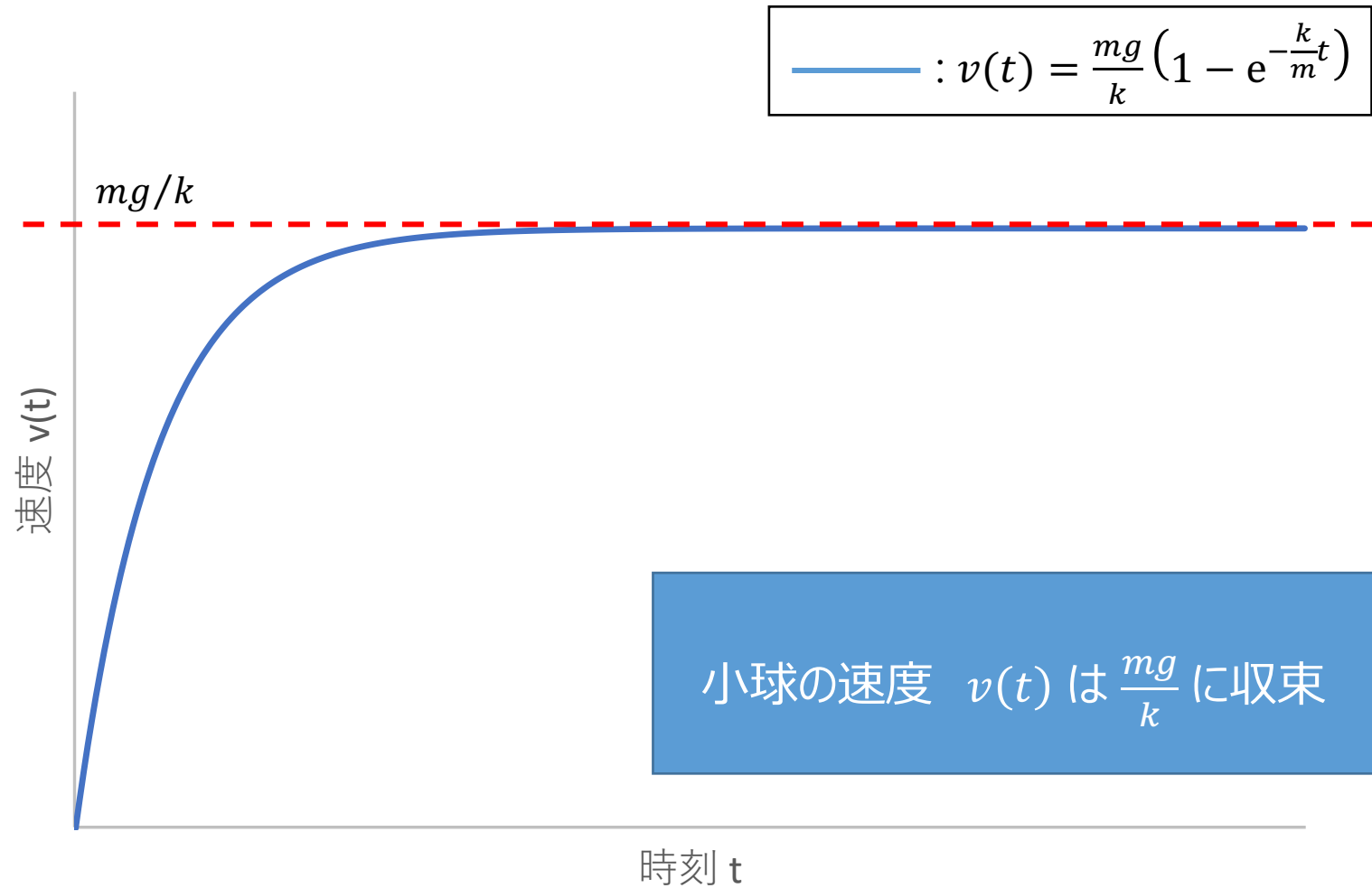
微分方程式

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

特殊解
($v(0) = 0$)

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

1. 小球の自由落下



コンテンツ

1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

Python・MATLABによる実装

1. コンピューターができる計算・できない計算
2. シミュレーションの方法
 - A) 離散化 / Discretization
 - B) 実際の計算（オイラー陽解法）
3. まとめ

2-1. コンピューターができる計算

四則計算のみ！

2-1. コンピューターができない計算

例：空気抵抗を考えた自由落下

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t) \text{ の解を求めよ.}$$

ただし $t = 0$ のとき $v = 0$ とする.

解

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

コンピューターは
「変数分離して両辺を積分」
という計算をできない

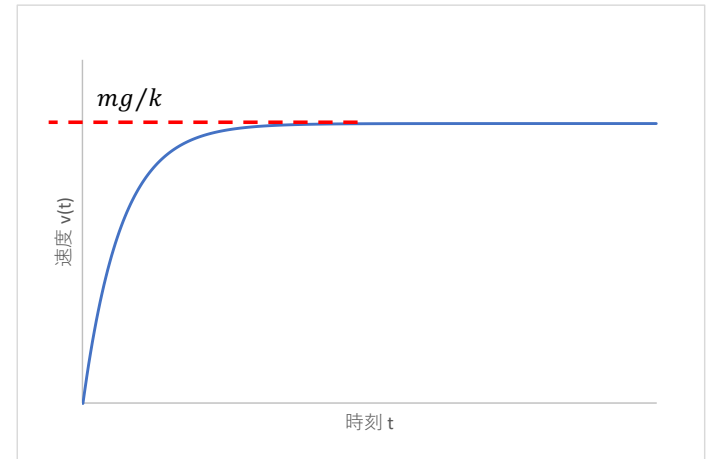
2-2. シミュレーションの方法

問題：空気抵抗を考えた自由落下

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

空気抵抗を考えた自由落下の速度変化をシミュレーションせよ.

ただし $t = 0$ のとき $v = 0$ とする.



小球の速度 $v(t)$ が $\frac{mg}{k}$ に収束することを確認

2-2. シミュレーションの方法

コンピューターは四則計算しかできない。

シミュレーション（コンピューターで計算）するために...

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t) \text{ の } \frac{dv(t)}{dt} \text{ を } \underline{\text{四則計算}} \text{ で表したい！}$$

2-2-A. 離散化 / Discretization

微分の定義より

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Δt が十分小さい時

$$\frac{dv(t)}{dt} \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

これを元の微分方程式に代入すると...

2-2-A. 離散化 / Discretization

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - kv(t)$$

$$m \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = mg - kv(t)$$

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = g - \frac{k}{m} v(t)$$

$$\boxed{v(t + \Delta t)} = \boxed{v(t) + \Delta t \left(g - \frac{k}{m} v(t) \right)}$$

未来

現在

現在 (t 秒) の情報

から

未来 ($t + \Delta t$ 秒後) の状態

を計算可能

2-2-B. 実際の計算

$m = 1.0, g = 9.8, k = 10, \Delta t = 0.01, v(0) = 0$ のとき

シミュレーション

$$v(0.01) = v(0 + 0.01) = v(0) + 0.01 \times \left(9.8 - \frac{10}{1.0} \times v(0) \right) = 0.098$$

$$v(0.02) = v(0.01 + 0.01) = v(0.01) + 0.01 \times \left(9.8 - \frac{10}{1.0} \times v(0.01) \right) = 0.1862$$

:

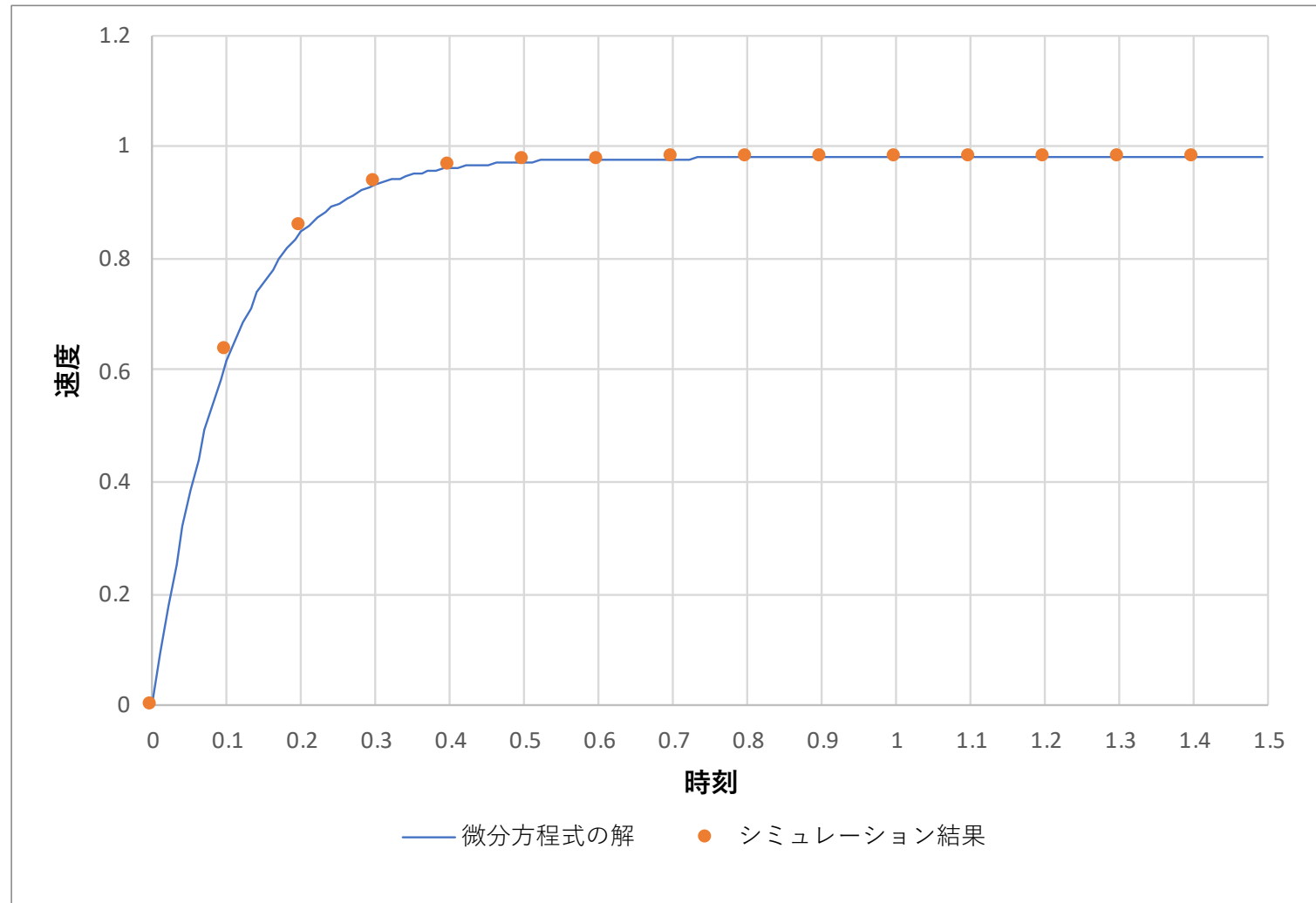
$$v(1.50) = 0.97999986 \dots$$

解

$$\begin{aligned} v(1.50) &= \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} 1.5} \right) \\ &= \frac{1.0 \times 9.8}{10} \left(1 - e^{-\frac{10}{1.0} \times 1.5} \right) \\ &= 0.9799997002 \dots \end{aligned}$$

シミュレーション結果と
微分方程式の解がほぼ一致

2-2-B. 実際の計算



コンテンツ

1

小球の自由落下

2

シミュレーション

3

Python・MATLABによる実装

3. Python・MATLABによる実装

2-2-Aで求めた式を，プログラムで表すと...？

MATLABによる実装（例）

```
%% Input Parameters
m    = 1.0; % mass of a small ball [kg]
g    = 9.8; % gravitational acceleration [m/s^2]
k    = 1.0; % coefficient of air resistance [N*s/m]
v0   = 0.0; % Initial velocity [m/s]
dt   = 0.1; % time step for simulation [s]
t_max = 10; % time which simulation is stopped [s]

%% Calculation
t = 0;
i = 1; % counter
v_hist = [v0]; % array to hold velocity value
while true
    v = v_hist(i) + dt*(g - (k/m)*v_hist(i));
    t = t + dt;
    if t >= t_max
        break
    end
    i = i+1;
    v_hist = [v_hist v]; % this code is not actually good.
end

%% Plot result
t_hist = 0:dt:t_max;
plot(t_hist, v_hist);
xlabel('t [s]');
ylabel('v [m/s]');
```