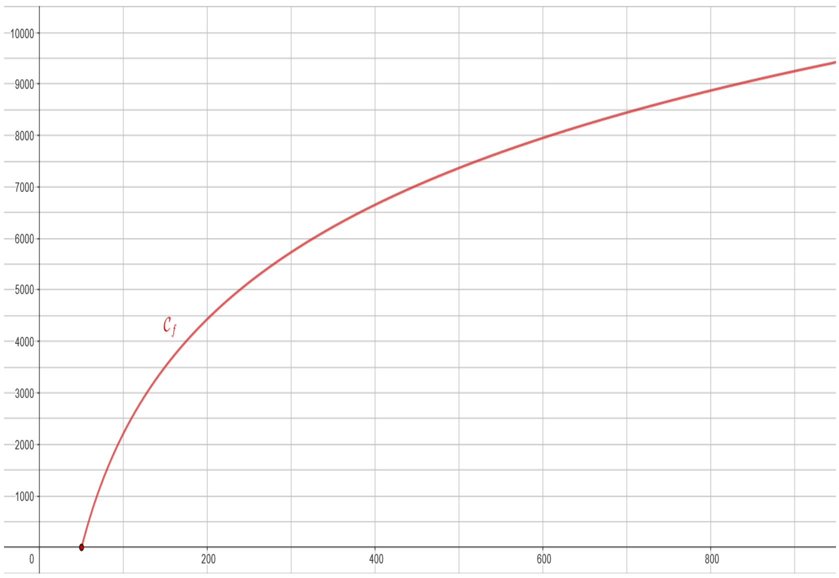
Projet Katherine Johnson

Dans le but d'envoyer un satellite de **10 tonnes** sur Jupiter, on vous demande de déterminer la trajectoire, la quantité nécessaire de carburant ainsi que les dimensions du réservoir.

Mission 1 (Calcul de la masse nécessaire d'hydrogène liquide)**.**
Avant de déterminer la trajectoire de la fusée, il nous faut d'abord déterminer la masse nécessaire de carburant.
La fusée a une masse à vide (masse sans carburant) de **40 tonnes**. L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les airs jusqu'à la combustion totale du carburant utilisé : ici de l'hydrogène liquide.
La vitesse finale de la fusée (vitesse lorsque les réservoirs sont vides) varie en fonction de la quantité d'hydrogène dans les réservoirs. Cette dernière doit être de $8000 m/s$ pour permettre la mise en orbite du satellite.
Le but de votre première mission est de déterminer la quantité nécessaire d'hydrogène pour permettre la mise en orbite souhaitée.
On note x la masse d'hydrogène liquide, en tonne, dans les réservoirs de la fusée.

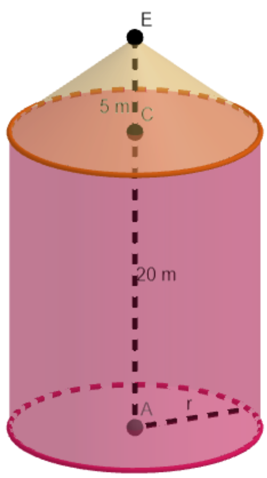
1. Exprimer la masse totale de la fusée au décollage en fonction de x (on n'oubliera pas la masse du satellite) ;



On représente ci-contre f la fonction qui à la masse totale de la fusée au décollage associe la vitesse finale de la fusée.

2. Que vaut $f(50)$? A quoi cela est-il dû ?
3. Avec 400 tonnes d'hydrogène liquide au décollage, la mission pourra-t-elle aboutir ?
4. Quelle est la quantité de carburant nécessaire ? Rentrer votre résultat dans la machine

---



Mission 2 (Conception des réservoirs)**.** Dans la partie précédente, il a été calculé qu'il fallait environ 560 tonnes d'hydrogène liquide pour pouvoir mettre la fusée en orbite.
Cahier de charges :

- Les deux réservoirs doivent mesurer 25 m de hauteur ;
- Les réservoirs doivent contenir la juste masse nécessaire de carburant sous peine d'exploser.

A vous de déterminer le rayon r du réservoir.

1. (a) Exprimer le volume du cylindre (partie violette) en fonction de r ;

(b) Exprimer le volume du cône en fonction de r ;

(c) En déduire une expression du volume du réservoir en fonction de r :

2. Sachant que la masse volumique de l'hydrogène liquide vaut 70 kg/m^3, calculer le volume nécessaire d'un réservoir pour stocker la quantité nécessaire de carburant.

3. En déduire le rayon d'un réservoir (arrondir au dixième de mètre supérieur).

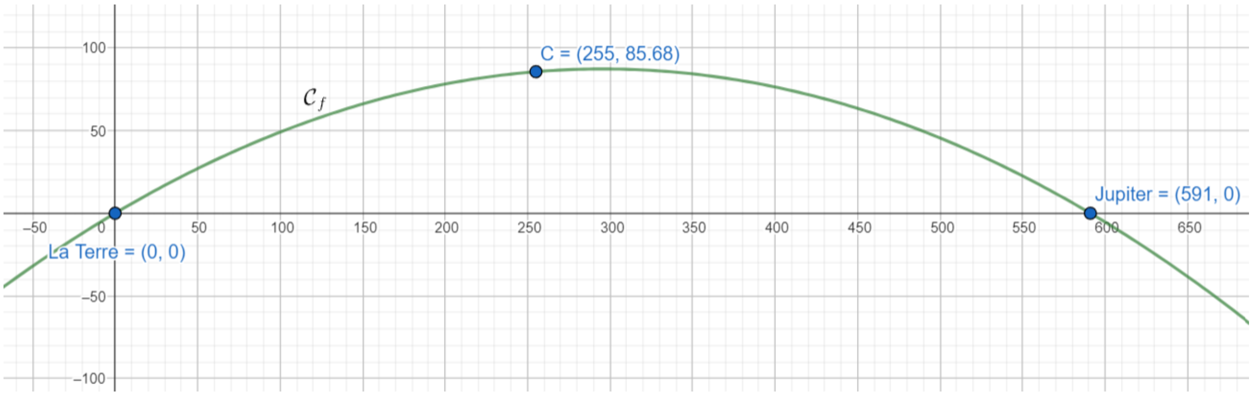
Mission 3 (Décollage !)**.**

Le décollage est fixé dans un mois jour pour jour. La planète Jupiter sera alors à une distance de 591 millions de km.

Cette fusée part de la base de Kourou en Guyane pour arriver sur Jupiter en évitant la ceinture d'astéroïde située entre Mars et Jupiter. En prenant comme origine du repère la base spatiale de Kourou, des ingénieurs ont prédit la forme de la trajectoire de la fusée : en notant x l'abscisse de la fusée **en million de km**, et f la trajectoire de la fusée (qui représente la hauteur de la fusée en million de km en fonction de son abscisse x), f s'écrit : $f(x) = a(x-b)(x-c)$.

De plus, afin d'éviter la ceinture d'astéroïde, il faut que la fusée passe suffisamment loin de la ceinture d'astéroïde sans trop s'en éloigner (pour limiter les coûts en essence). Une étude d'optimisation a montré qu'elle devait passer par le point C de coordonnées $C(255; 85,68)$.

Voici la représentation graphique de la fonction f :



Le but de votre dernière mission est de déterminer les coefficients a, b et c et de rentrer les données dans la machine.

Rappel 4.

- Volume $\mathcal{V}$ d'un cône de rayon r et de hauteur h : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
- Volume $\mathcal{V}$ d'un cylindre de rayon r et de hauteur h : $\mathcal{V} = \pi r^2 h$
- Formule de la masse volumique ρ: $\rho = \frac{m}{V}$ avec m la masse en kg et V le volume en m^3.