

Primena projektivne geometrije u računarstvu
<http://elearning.rcub.bg.ac.rs/moodle/>

Srdjan Vukmirović

Matematički fakultet, Beograd

septembar 2018.

Homogene koordinate u afinoj ravni

Definicija

Homogene koordinate tačke $M(x, y)$ afine ravni \mathbb{R}^2 su ma koja trojka $(x_1 : x_2 : x_3)$ takva da važi:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

Vektor $\vec{M} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ je **vektor predstavnik** tačke M .

Primer

Odrediti homogene koordinate i vektor predstavnik tačaka $A(1, 2)$, $B(\frac{2}{3}, -\frac{1}{5})$.

Prava $p : ax + by + c = 0$ u homogenim koordinatama postaje

$$p : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Trojka $[a : b : c]$ predstavlja **homogene koordinate prave** p .

Definicija

Prava $p_\infty : x_3 = 0$ naziva se **beskonačno daleka prava**, a svaka tačka $B_\infty(x_1 : x_2 : 0)$, koja joj pripada, **beskonačno daleka tačka**.

Primer

Odrediti homogene koordinate prave $p : x - 2y + 5 = 0$, a zatim odrediti beskonačno daleku tačku dobijene projektivne prave.

Afina ravan dopunjena tačkama beskonačno daleke prave $x_3 = 0$ naziva se **dopunjena ili proširena afina ravan** i označava sa $\bar{\mathbb{R}}^2$. Paralelne prave affine ravni se seku u beskonačno dalekoj tački dopunjene affine ravni.

Svaka prava dopunjene affine ravni ima jedinstvenu beskonačno daleku tačku i to je njen presek sa pravom $x_3 = 0$.

Primer

Odrediti presek pravih $a : 2x - 5y + 6 = 0$, $b : 2x - 5y + 7 = 0$ u i) afinoj ravni; ii) dopunjenoj afinoj ravni.

Realna projektivna ravan $\mathbb{R}P^2$

Definicija

Realna projektivna ravan je skup tačaka $\mathbb{R}P^2 := \{(x_1 : x_2 : x_3)\}$, pri čemu ne mogu sve tri homogene koordinate biti jednake nuli.

Možemo identifikovati $\mathbb{R}P^2$ sa prošrenom afinom ravni.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^2 &:= \{(x_1 : x_2 : x_3)\} = \{(x_1 : x_2 : x_3) \mid x_3 \neq 0\} \cup \{(x_1 : x_2 : 0)\} = \\ &= \left\{\left(\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1\right)\right\} \cup \{(x_1 : x_2 : 0)\} = \mathbb{R}^2 \cup p_\infty = \bar{\mathbb{R}}^2.\end{aligned}$$

Geometrijski možemo videti realnu projektivnu ravan kao snop pravih prostora, tj. skup pravih koje sadrže koordinatni početak u \mathbb{R}^3 . Svaka prava tog snopa predstavlja jednu tačku projektivne ravni. Vektor pravca te prave je upravo vektor predstavnik homogenih koordinata.

Sve prave realne projektivne ravni takođe čine projektivnu ravan

$$\tilde{\mathbb{R}}P^2 := \{[x_1 : x_2 : x_3]\}.$$

koja se zove **dualna projektivna ravan pravih**.

Svaka prava $p : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ projektivne ravni predstavljena je sa ravni kroz koordinatni početak, čiji je normalni vektor $\vec{p} = (a, b, c)$.

Geometrijski $\tilde{\mathbb{R}}P^2$ možemo videti kao skup svih ravni u prostoru \mathbb{R}^3 kroz koordinatni početak.

Homogene koordinate prave $p = AB$ se dobijaju vektorskim proizvodom $\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B}$ (objašnjenje !!!).

Primer

Odrediti jednačinu prave $p = AB$, ako je $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, -2)$.

U projektivnoj ravni se svake dve prave seku!

Homogene koordinate presečne tačke $\{P\} = a \cap b$ se dobijaju vektorskim proizvodom $\vec{P} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Primer

Odrediti presek P pravih $a : 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$ i $b : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

Princip dualnosti u projektivnoj ravni

Neka je \mathcal{I} iskaz geometrije projektivne ravni. Njemu **dualan iskaz** \mathcal{I}' je iskaz koji se dobija zamenom reči tačka i prava; pripada i sadrži; kolinearno i konkurentno....

U projektivnoj ravni važi princip dualosti:

Teorema

Ako je iskaz \mathcal{I} teorema projektivne ravni, tada je i njemu dualan iskaz \mathcal{I}' teorema projektivne ravni.

Primer

\mathcal{I} : Za svake dve tačke A i B postoji jedinstvena prava p koja ih sadrži.

\mathcal{I}' : Za svake dve prave a i b postoji jedinstvena tačka P koja im pripada.

Realna projektivna prava

Pošto je prava p u prostoru predstavljena sa ravni, tačke $A, B, C \in p$ su predstavljene pravama koje pripadaju toj ravni. Zato tačka C pripada pravoj $p = AB$ ako i samo ako za njihove vektore predstavnike važi

$$\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}, \quad (1)$$

za neke brojeve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ koji nisu istovremeno nula.

Primetimo da $\lambda \vec{C} = \lambda \alpha \vec{A} + \lambda \beta \vec{B}, \lambda \neq 0$ predstavlja ista tačku.

Zato su $(\alpha : \beta)$ **homogene koordinate na pravoj p** .

Svaka prava projektivne ravni je tzv. **realna projektivna prava** \mathbb{RP}^1 koju dobijamo dodavanjem beskonačno daleke tačke P_∞ afinoj pravoj \mathbb{R} :

$$p = \mathbb{RP}^1 = \{(\alpha : \beta)\} = \left\{ \left(\frac{\alpha}{\beta} : 1 \right) \right\} \cup \{(1 : 0)\} = \mathbb{R} \cup \{P_\infty\}.$$

Model projektivne prave je krug.

Dakle, raspored tačaka na projektivnoj pravoj je kao na krugu, pa ne postoji relacija "izmedju", već **relacija razdvojenosti parova tačaka** koju za sada shvatamo intuтивно.

Kažemo da par tačka A, B razdvaja par tačaka C, D ($A, B \div C, D$).

Dve tačke A, B razbijaju pravu AB na dve **projektivne duži** - onu koja sadrži tačku C i onu koja sadrži D .

Trotemenik, četvorotemenik, . . .

U euklidskoj geometriji, trougao je oblast ograničena trougaonom linijom, tj. unijom tri duži. U projektivnoj geometriji, pojam "duži" je drugačiji, pa samim time i pojam "trougla."

Definicija

Trotemenik ABC je figura projektivne ravni koja se sastoji od tri nekolinearne tačke A, B, C i tri prave AB, BC, CA njima odredjene.

Tri prave koje nisu konkurentne razbijaju projektivnu ravan na 4 oblasti! (objašnjenje)

Za n tačkaka u ravni od kojih nikoje tri nisu kolinearne kažemo da su **u opštem položaju**.

Definicija

Četvorotemenik $ABCD$ je figura projektivne ravni koja se sastoji od četiri tačke u opštem položaju i šest pravih odredjenih tim tačkama (te prave se zovu ivice četvorotemenika).

Dijagonalne tačke četvorotemenika su preseci "nesusednih" ivica

$$P = AB \times CD, \quad Q = AC \times BD, \quad R = AD \times BC.$$

Kasnije ćemo videti da sa projektivne tačke gledišta ne postoji razlika izmedju tih tačaka.

Dvorazmera

Definicija

Neka su A, B, C, D kolinearne tačke i važi:

$$\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}, \quad \vec{D} = \gamma \vec{A} + \delta \vec{B}. \quad (2)$$

Dvorazmera tačaka A, B, C i D je broj

$$(A, B, C, D) := \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}. \quad (3)$$

Definicija je "dobra" - ne zavisi od izbora vektora predstavnika (objasniti).

Primer

$A(1 : 0 : 0), B(0 : 1 : 2), C(1 : 2 : 4), D(-1 : 1 : 2)$. Izračunati (A, B, C, D) .

Dvorazmera (a, b, c, d) pravih se definiše dualno.

Primer

Date su prave $a : 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$, $b : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$,
 $c : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$, $d : x_1 - x_2 = 0$. Izračunati dvorazmeru
 (a, b, c, d) .

Osobine dvorazmtere:

a) $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)^{-1}$

Dokaz: Ako zamenimo uloge tačkama A i B u formuli (4) tada brojevi α i β , odnosno γ i δ menjaju uloge, pa se iz (5) dobija traženo tvrdjenje.

b) $(A, B, C, D) = (C, D, A, B)$.

Dokaz: Relaciju (4) možemo zapisati matrično sa:

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Oznake vektora smo izostavili radi jednostavnosti zapisa. Šta je objekat na levoj strani prethodne formule?

Odatle, nalaženjem inverzne matrice dobijamo:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

To znači da je:

$$\vec{A} = \frac{\delta}{\Delta} \vec{C} + \frac{-\beta}{\Delta} \vec{D}, \quad \vec{B} = \frac{-\gamma}{\Delta} \vec{C} + \frac{\alpha}{\Delta} \vec{D}. \quad (4)$$

$$(C, D, A, B) = \frac{\frac{-\beta}{\Delta}}{\frac{\delta}{\Delta}} : \frac{\frac{\alpha}{\Delta}}{\frac{-\gamma}{\Delta}} = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = (A, B, C, D). \quad (5)$$

- c) Za različite tačke važi $(A, B, C, D) \neq 0, 1$. (za domaći)
- d) Ako su date tačke A, B i C i broj $\mu \neq 0, 1$ tada postoji jedinstvena tačka D takva da važi $(A, B, C, D) = \mu$. (za domaći)

Definicija

Parovi tačaka A, B i C, D su **harmonijski konjugovani** (pišemo $\mathcal{H}(A, B; C, D)$) ako $(A, B, C, D) = -1$.

Teorema

Ako su a, b, c, d konkurentne prave i $A \in a, B \in b, C \in c, D \in d$ kolinearne tačke. Tada je $(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$.

Dokaz: Po definiciji važi:

$$(a, b, c, d) := \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \quad \vec{d} = \gamma \vec{a} + \delta \vec{b}.$$

Prepostavimo da $A, B, C, D \in p$. Odredimo preseke:

$$\vec{c} \times \vec{p} = \alpha(\vec{a} \times \vec{p}) + \beta(\vec{b} \times \vec{p}), \quad \text{tj.} \quad \vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B},$$

$$\vec{d} \times \vec{p} = \gamma(\vec{a} \times \vec{p}) + \delta(\vec{b} \times \vec{p}), \quad \text{tj.} \quad \vec{D} = \gamma \vec{A} + \delta \vec{B}.$$

Zato je $(A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = (a, b, c, d)$. □

Posledica prethodne teoreme je: dvorazmerna je invarijanta centralnog projektovanja.

Teorema

Afino posmatrano, dvorazmerna je odnos dve razmere:

$$(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Dokaz: Ako su sve tačke konačne, tj. $x_3 \neq 0$, odaberimo vektore predstavnike svih tačaka tako da im treća koordinata bude jednaka jedan. Tada iz relacije $\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}$, sledi $\alpha + \beta = 1$.

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{C - A}{B - C} = \frac{A(\alpha - 1) + \beta B}{-\alpha A + (1 - \beta)B} = \frac{\beta(B - A)}{\alpha(B - A)} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Slično je za drugu razmeru, pa dobijamo traženo tvrdjenje. □

Posledica

Središte duži je konjugovano sa beskonačno dalekom tačkom.

Dokaz: Neka je S središte duži AB , a P_∞ beskonačno daleka tačka prave AB . Na osnovu afinog smisla dvorazmere dobijamo:

$$(A, B, S, P_\infty) = \lim_{P \rightarrow P_\infty} \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}} : \frac{\overrightarrow{AP_\infty}}{\overrightarrow{P_\infty B}} = \lim_{P \rightarrow P_\infty} \frac{\overrightarrow{P_\infty B}}{\overrightarrow{AP_\infty}} = -1. \quad \square$$

Na perspektivnim crtežima dvorazmera je važna invarijanta.

Primer

Telefonski stubovi $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ su u stvarnosti udaljeni 20m i kolinearni. Neka su $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, \dots$ njihove slike na perspektivnom crtežu i neka je $A'_1 A'_2 = 4\text{cm}$, $A'_2 A'_3 = 3\text{cm}$. a) Odrediti rastojanje $A'_3 A'_4$ b) Ako je $A' = \lim_{n \rightarrow \infty} A'_n$ odrediti rastojanje $A' A'_1$.

Primetimo da razdvojenost parova tačaka možemo formalno uvesti uz pomoć dvorazmere. Naime

$$A, B \div C, D \Leftrightarrow (A, B, C, D) < 0.$$

Ova definicija se poklapa razdvojenosti tačaka na krugu, koju smo uveli intuitivno.

Projektivna preslikavanja ravni $\mathbb{R}P^2$

Definicija

Projektivno preslikavanje je ono koje preslikava tačku $M(x_1 : x_2 : x_3)$ u tačku $M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ formulama

$$\lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \det(p_{ij}) \neq 0. \quad (6)$$

Broj $\lambda \neq 0$ sugerije da su u pitanju homogene koordinate.

Projektivno preslikavanje je indukovano linearnim preslikavanjem vektorskog prostora \mathbb{R}^3 .

Preslikavanje (6) kraće zapisujemo

$$\lambda x' = Px, \quad (7)$$

a njemu inverzno preslikavanje sa

$$\lambda x = Cx', \quad \text{gde je} \quad C = P^{-1}. \quad (8)$$

Matrice P i λP predstavljaju isto preslikavanje.

Kompoziciji preslikavanja odgovara množenje matrica, a inverznom preslikavanju inverzna matrica.

Projektivna preslikavanje čine **projektivnu grupu** $PGl_3(\mathbb{R})$. Zbog homogenosti ta grupa je opisana sa 8 parametara.

Projektivno preslikavanje slika čuva kolinearnost i konkurentost.

Ovo je tačno zato što linearno preslikavanje slika linearno zavisne vektore u linearno zavisne vektore.

Teorema

Projektivna preslikavanja čuvaju dvorazmeru.

Dokaz: Neka za slike A', B', C', D' tačaka A, B, C, D važi

$$\vec{C}' = \alpha \vec{A}' + \beta \vec{B}', \quad \vec{D}' = \gamma \vec{A}' + \delta \vec{B}'.$$

Primenom formula preslikavanja (7) na te relacije dobijamo

$$P\vec{C} = \alpha P\vec{A} + \beta P\vec{B}, \quad P\vec{D}' = \gamma P\vec{A}' + \delta P\vec{B}'.$$

Nakon množenja matricom P^{-1} sleva, dobijamo

$$\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}, \quad \vec{D} = \gamma \vec{A} + \delta \vec{B}$$

odakle je

$$(A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = (A', B', C', D'). \quad \square$$

Osnovna teorema Projektivne geometrije

Teorema

Postoji jedinstveno projektivno preslikavanje ravni $\mathbb{R}P^2$ koje četiri tačke A, B, C, D u opštem položaju slika redom u tačke A', B', C', D' , u opštem položaju.

Dokaz: Posmatramo **bazne tačke** A_0, B_0, C_0, D_0 , gde je

$$A_0(1 : 0 : 0), \quad B_0(0 : 1 : 0), \quad C_0(0 : 0 : 1), \quad D_0(1 : 1 : 1).$$

Pokažimo da postoji jedinstveno projektivno $f : A_0, B_0, C_0, D_0 \mapsto A, B, C, D$.

Kako su tačke A, B, C nekolinearne, odgovarajući vektori koordinata su nezavisni, pa je vektor \vec{D} moguće izraziti u obliku

$$\vec{D} = \lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C},$$

gde ni jedan od brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nije nula. Ako je, recimo, $\lambda_1 = 0$, tada bi tačke B, C, D bile kolinearne, suprotno pretpostavci.

Neka je P matrica čije su kolone redom $\lambda_1 \vec{A}, \lambda_2 \vec{B}$ i $\lambda_3 \vec{C}$. Preslikavanje f zadato sa $\lambda x' = Px$ je traženo preslikavanje. Zašto?

Matica P je do na množenje skalarom jedinstvena (po definiciji matrice linearnog preslikavanja), pa je f jedinstveno.

Na sličan način se dobija preslikavanje g koje slika A_0, B_0, C_0, D_0 u A', B', C', D' , pa je projektivno preslikavanje $g \circ f^{-1}$ jedinstveno preslikavanje iz tvrdjenja teoreme. \square

Primer

Odrediti projektivno preslikavanje ravni koje tačke A_0, B_0, C_0, D_0 sliju u $A(1 : 2 : 3)$, $B(3 : 2 : 1)$, $C(0 : 1 : 1)$, $D(7 : 11 : 10)$.

Projektivno preslikavanje ravni sa 4 fiksne tačke u opštem položaju je identitet.

Primer

- a) Pravougaonik i trapez su projektivno ekvivalentni u $\bar{\mathbb{R}}^2$.
- b) Dijagonalne tačke četvorotemenika su medjusobno projektivno ekvivalentne.

Projektivna preslikavanje ne čuvaju razmeru ni paralelnost.

U primenama, obično su i koordinate originalnih tačaka i koordinate njihovih slika, konačne. Ipak, kako je svako projektivno preslikavanje bijekcija, postoji prava koja se slika u beskonačno daleku pravu p_∞ .

Teorema

Pri projektivnom preslikavanju f zadatom sa (6) prava
 $u : p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3 = 0$, odredjena zadnjom vrstom matrice
 P se slika u beskonačno daleku pravu p_∞ .

Dokaz: Kako je u slici $p_\infty : x'_3 = 0$ važi

$$0 = x'_3 = p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3,$$

tj. slika ma koje tačke $(x_1 : x_2 : x_3) \in u$ je beskonačno daleka.

Dakle $f(u) = p_\infty$. □

Afina preslikavanja - podsećanje

Definicija

Afino preslikavanje tačku $M(x, y)$ preslikava u tačku $M'(x', y')$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0. \quad (9)$$

Kolone matrice $A = (a_{ij})$ su koordinate slika baznih vektora, a $O'(b_1, b_2)$ slika koordinatnog početka.

Osobine afinih preslikavanja:

- bijekcije su;
- čuvaju kolinearnost, konkurentnost, paralelnost, razmeru;
- mogu da preslikaju trougao u proizvoljan trougao.

Afina i projektivna preslikavanja

Afino preslikavanje (9) nakon prelaska u homogene koordinate postaje

$$\lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Vidimo da je afino preslikavanje specijalan slučaj projektivnog preslikavanja proširene affine ravni $\bar{\mathbb{R}}^2$.

Vidimo (iz Teoreme 6) da je projektivno preslikavanje afino ako preslikava beskonačno daleku pravu u sebe, i obrnuto.

Posledica

Grupa afinih preslikavanja je izomorfna podgrupi projektivnih preslikavanja ravni $\bar{\mathbb{R}}^2$ koje čuvaju beskonačno daleku pravu p_∞ .

Sada je jasno zašto afina preslikavanja ravni predstavljamo 3×3 matricama i zašto kompoziciji preslikavanja odgovara množenje matrica.

Algoritam za određivanje projektivnog preslikavanja (naivni)

Ulaz: Homogene koordinate 4 originalne tačke A, B, C, D i 4 njihove slike A', B', C', D' (obe četvorke u opštem položaju).

Izlaz: 3×3 matrica P projektivnog preslikavanja **ravni** koje slika A, B, C, D redom u A', B', C', D' .

Algoritam (prati dokaz Teoreme 5):

1) Odrediti $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ tako da $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$;

P_1 je matrica sa kolonama $\alpha A, \beta B, \gamma C$;

2) Odrediti $\alpha', \beta', \gamma' \neq 0$ tako da $D' = \alpha' A' + \beta' B' + \gamma' C'$;

P_2 je matrica sa kolonama $\alpha' A', \beta' B', \gamma' C'$;

3) $P = P_2 P_1^{-1}$ je tražena matrica preslikavanja.

Napomena: Matrica preslikavanja je odredjena do na λP , $\lambda \neq 0$.

Prednosti algoritma: geometrijski jasan, jednostavan za implementaciju.

Mane: radi sam za 4 para odgovarajućih tačaka (u praksi često imamo veći broj korespondencija, koji bi trebali da daju preciznije rešenje).

Primetimo da je matrica $P = (p_{ij})$ odredjena sa 8 parametara, a dobija se iz 4 odgovarajuće tačke.

Dakle svaki par odgovarajućih tačaka daje dve jednačine po p_{ij} .
Jedan način da se one opišu je dat sledećom lemom.

Lema

Neka su $M(x_1 : x_2 : x_3)$ i $M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)$, $x'_3 \neq 0$ odgovarajuće tačke projektivnog preslikavanja ravni čija je matrica $P = (p_{ij})$.

Tada vektor $(p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{31}, p_{32}, p_{33})$ zadovoljava homogeni sistem ranga 2 čija je matrica formata 2×9 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -x'_3 x_1 & -x'_3 x_2 & -x'_3 x_3 & x'_2 x_1 & x'_2 x_2 & x'_2 x_3 \\ x'_3 x_1 & x'_3 x_2 & x'_3 x_3 & 0 & 0 & 0 & -x'_1 x_1 & -x'_1 x_2 & -x'_1 x_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Dokaz: Označimo vektore kolone sa $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, $X' = (x'_1, x'_2, x'_3)^T$, a vrste matrice P sa $p_i^T = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3})$, $i = 1, 2, 3$ (kao kolone). Tada se množenje matrice i vektora može zapisati kao

$$PX = (p_1^T X, p_2^T X, p_3^T X)^T = (X^T p_1, X^T p_2, X^T p_3)^T.$$

Pošto je $\lambda X' = PX$, vektori $X' = (x'_1, x'_2, x'_3)^T$ i PX su kolinearni, pa im je vektorski proizvod jednak nula vektoru

$$(0, 0, 0) = X' \times PX = (x'_2 X^T p_3 - x'_3 X^T p_2, x'_3 X^T p_1 - x'_1 X^T p_3, x'_1 X^T p_2 - x'_2 X^T p_1).$$

Dakle, vrste matrice P zadovoljavaju homogeni sistem jednačina

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x'_3 X^T & x'_2 X^T \\ x'_3 X^T & 0 & -x'_1 X^T \\ -x'_2 X^T & x'_1 X^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Matrica tog sistema je formata 3×9 , ali je ranga 2 (ako pomnožimo prvu vrstu sa x'_1 , drugu sa x'_2 , a treću sa x'_3 i saberemo, dobijamo nula). Zato se, za $x'_3 \neq 0$, mogu posmatrati samo prve dve vrste te matrice, a one su u koordinatnoj formi upravo (11). □

Primetimo da uslov $x'_3 \neq 0$ u praksi ne predstavlja problem jer je preslikavanje zadato konačnim tačkama.

SVD dekompozicija matrice

U praksi je poželjno imati veći broj korespondencija kako bi se eliminisao šum i razne druge nepreciznosti.

Međutim 4 korespondencije jednoznačno određuju projektivno preslikavanje koje neće zadovoljiti ostale parove tačaka. Zato se numeričkim metodama traže preslikavanja koje minimizuju odredjenu geometrijsku ili statističku grešku.

Za ovaj problem (a i mnoge druge) pokazala se korisnim SVD (Singular Value Decomposition) dekompozicija matrice.

Ako je A matrica formata $m \times n$ postoji jednoznačna dekompozicija

$$A = UDV^T$$

gde je $U, U^{-1} = U^T$ ortogonalna matrica formata $n \times n$, $V, V^{-1} = V^T$ ortogonalna matrica formata $m \times m$, a D kvazidijagonalna matrica formata $n \times m$, pri čemu su njene dijagonalne vrednosti pozitivne i sortirane opadajući.

DLT algoritam za određivanje projektivnog preslikavanja

Ulaz: Homogene koordinate $n, n \geq 4$, originalnih tačaka M_i i n njihovih slika M'_i ;

Izlaz: 3×3 matrica P projektivnog preslikavanja, takvog da je $\lambda M'_i = PM_i, i = 1 \dots n$.

Algoritam:

- 1) Za svaku korespondenciju $M_i \leftrightarrow M'_i$ odrediti 2×9 matricu (11).
- 2) Spojiti te matrice u jednu matricu A formata $2n \times 9$;
- 3) Odrediti SVD dekompoziciju matrice A , $A = UDV^T$. Tražena matrica P je poslednja kolona matrice V (podrazumeva se da D ima opadajuće dijagonalne vrednosti).

DLT algoritam je algebarske, a ne geometrijske prirode i to ima odredjene negativne posledice.

Kada bi sve korespondencije $M_i \leftrightarrow M'_i$ bile sasvim tačne (tj. nema šuma), tada bi bilo $M'_i = PM_i$ za svako i . Naravno, u praksi to nije tako pa se M'_i i PM_i ne poklapaju, tj. matrica P neminovno sadrži odredjenu grešku.

Postoje razni kriterijumi za minimizaciju te greške: algebarski, geometrijski, statistički (vidi [Zisserman]). DLT algoritam minimizuje algebarsku grešku.

Mana DLT algoritma je što nije invarijantan u odnosu na promenu koordinata (čak ni na obično skaliranje i translaciju).

Naime, promenimo koordinate originala i koordinate slike transformacijama T i T' :

$$\bar{X}_i = TX_i, \quad \bar{X}'_i = T'X'_i.$$

Ako je P matrica transformacije u starim koordinatama, tada je matrica transformacije u novim koordinatama

$$\bar{P} = T'PT^{-1}.$$

Ali DLT nije geometrijski, pa ako smo u starim koordinatama dobili matricu P u novim nećemo dobiti \bar{P} .

Normalizaciju koordinata tačaka radimo zato:

- da matrica preslikavanja P ne bi zavisila od izbora koordinata;
- da bi značajno smanjili numeričku grešku.

Algoritam normalizacije tačaka

Algoritam normalizacije tačaka:

- 1) Izračunati težište sistema tačaka (afino);
- 2) Transirati težište u koordinatni početak (matrica translacije G);
- 3) Skalirati tačke tako da prosečna udaljenost tačke od koordinatnog početka bude $\sqrt{2}$ (matrica homotetije S);
- 4) Matrica normalizacije je $T = SG$.

Primer

Naći transformaciju normalizacije tačaka $M_1(7 : 4 : 1)$,
 $M_2(6 : 4 : 2)$, $M_3(5 : 2 : 0.5)$, $M_4(0 : 0 : 10)$, $M_5(-5 : -5 : -1)$.

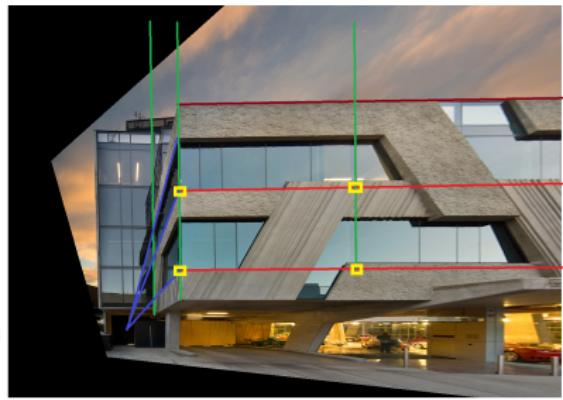
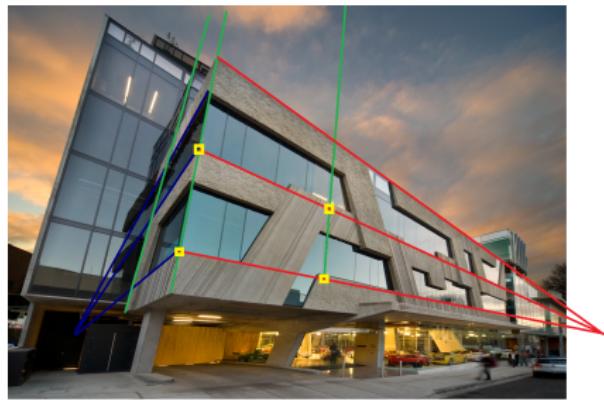
Normalizovani DLT Algoritam za projektivno preslikavanje

Ulaz: Homogene koordinate $n, n \geq 4$ originalnih tačaka M_i i n njihovih slika M'_i ;

Izlaz: 3×3 matrica P projektivnog preslikavanja, takvog da je $\lambda M'_i = PM_i$.

Algoritam:

- 1) Normalizovati originalne tačke $\bar{M} = TM_i$, transformacijom T ;
- 2) Normalizovati slike tačaka $\bar{M}'_i = T'M'_i$, transformacijom T' ;
- 3) Odrediti *DLT* algoritmom matricu transformacije \bar{P} iz korespondencija $\bar{M}_i \leftrightarrow \bar{M}'_i$;
- 4) Tražena matrica transformacije je $P = T'^{-1}\bar{P}T$.



Slika: Ispravljanje projektivne distorzije na prednoj fasadi zgrade