

Capítulo 4

El valor propio

Cuando un hombre tiene
voluntad y entusiasmo,
los dioses son sus aliados.

Esquilo h. 525-456 a.C.

Esa mañana me desperté decidido a aprovechar cada día al máximo con nuevas aventuras, porque pronto terminarían mis vacaciones y tendría que volver. Así que rápidamente me preparé para salir hacia el puerto en busca de esas experiencias. Había quedado con Laura allí y eso lo hacía aún más interesante. Sin embargo, llegando al Puerto de Salerno, recibí una llamada suya:

—*Ciao*, Guanche, ¿cómo estás hoy?, ¿ya lavaste la camisa? —dijo casi muerta de risa.

—*Ciao*, Laura. Sí, la camisa ya está impecable. Estoy muy bien, muy animado a navegar juntos.

—Por eso te llamaba, porque no voy a poder bajar al puerto esta mañana. Resulta que mis compañeras de piso y yo organizamos una fiesta esta noche para celebrar el final de curso y el comienzo de las vacaciones. Como comprenderás, me toca quedarme para prepararla.

—¿En serio que me vas a dejar colgado?

—Lo siento, pero no me acordaba de este compromiso hasta que hoy lo han mencionado. Por supuesto estás invitado. Ya sabes dónde vivo.

La decepción volvió a apoderarse de mí, pero esta vez fui yo quien se puso en modo sarcástico:

—¡Vaya, otra vez me das calabazas! Ahora tendré que navegar solo por este tempestuoso mar sin nadie que me salve si estoy en apuros.

Ella lo activó sobre la marcha. Parecía que empezábamos a desarrollar nuestro propio lenguaje comunicativo:

—Pues ten mucho cuidado, porque me han dicho que por ahí existen unas sirenas peligrosas que se dedican a pescar a los niños malos como tú.

—No lo creo porque yo soy muy buen pibe. Además, tengo otros planes para hoy. —dije siendo sincero, ya que, aunque no sabía con certeza a qué época viajaría, sí tenía claro que no quería irme tan lejos en el tiempo esta vez.

—Bueno, ya me explicarás esta noche qué es eso de que eres un *pibe*. Te esperamos por aquí hacia las ocho, ¿vale?

—Pero Laura, yo no conozco a nadie y además no hablo nada de italiano. —intenté escabullirme.

—Mis compañeras y yo vamos a la misma academia de español, así que no tienes excusa y será mejor que aparezcas por aquí esta noche. Todos mis amigos son muy simpáticos y quieren conocerte. —dijo desmontando completamente mi estrategia de escape.

—De acuerdo, Laura, veo que no me puedo negar. Nos veremos esta noche. *Ciao*.

—*Ciao*, Guanche. —dijo finalmente y colgó.

No lo entendía. ¿Cómo era que se necesitaba un día para preparar una fiesta de una noche en un piso entre varias chicas? Algo se me escapaba. Sus excusas empezaban a ser sospechosas.

La consecuencia era que se me presentaba otra mañana tranquila en la que no tendría que preocuparme de que Laura descubriera a dónde iba en mis excursiones subterráneas por la Costa Amalfitana. Ya en el puerto, Lucciano tenía todo preparado para que yo pudiera salir. Así, en un plis plas me encontraba navegando hacia la gruta mágica. Durante el trayecto iba pensando que algún día tendría que sincerarme con Laura y declarar abiertamente lo que estaba sintiendo hacia ella. Sin embargo, el temor a no recibir una respuesta satisfactoria me bloqueaba. Quizás había malinterpretado sus palabras, sus gestos, sus miradas. Además, tendría que volver a

mi tierra al cabo de pocos días y no sabía qué futuro podría haber en nuestra relación.

Algo raro me estaba sucediendo, porque antes no tenía este tipo de dudas. Solía ir a saco sin importarme si la otra persona sufriría o no por mi culpa, algo que tarde o temprano había sucedido en mis anteriores relaciones.

Esa noche, durante la fiesta, sería un buen momento para hablar con ella y aclarar mis dudas. Incluso le podría confesar la verdad de mis viajes a épocas remotas, aunque estaba convencido de que no me creería y que volvería a tomárselo en broma. No estaba seguro de si sería buena idea llevarla conmigo en alguna de mis aventuras por el pasado. Ni siquiera sabía si ella estaría dispuesta, aunque con su afición y su devoción por la Historia suponía que le entusiasmaría la idea. En cualquier caso, aun sin estar claro que cualquiera pudiera viajar por medio de aquella gruta, sería una gran oportunidad para resolver algunos de esos interrogantes que me rondaban continuamente por la cabeza.

Un tanto abstraído, llegué al punto que estaba señalado en mi GPS donde se ubicaba la gruta. Esta vez me apetecía trasladarme a una época cercana. Llevaba conmigo el portátil, el móvil, la brújula y algunas medicinas, igual que otras veces. Luego, la misma ceremonia de costumbre para alcanzar la sala subterránea al final del túnel siguiendo la luz y, entre todas aquellas imágenes de vidas pasadas, seleccionar una a donde me trasladaría en el tiempo. Sin pensarlo, lo tuve claro, me iría a principios del siglo XX. Deseaba conocer de primera mano el comienzo de la industria automovilística, cómo se idearon y construyeron aquellos primeros vehículos de tecnología aún incipiente. Miré con detenimiento los paneles que contenían aquellos episodios del pasado y, finalmente, me vi subido a unos de esos prototipos en una región costera de Francia: esa sería mi elección. Dicho y hecho: aparecí en una gruta que estaba a pocos metros de la costa y tenía aspecto de muy antigua. Me senté para serenarme e intentar descubrir entre mis pensamientos cuál era mi nueva identidad. En aquella ocasión, el lapso recorrido era menor que las otras veces y enseguida los recuerdos de esa persona afloraron en mi mente de forma nítida. Corría exactamente el año 1900. Sobre la marcha identifiqué dónde me encontraba. Se trataba de la Gruta de Lazaret, una cueva prehistórica localizada en Niza que había sido descubierta en el siglo XIX. Mi nombre era Fernand

Dubois, un joven de veinte años que ejercía de aprendiz de gestión empresarial en un banco. La ropa que llevaba Fernand antes de mi intromisión desde el futuro permanecía allí, en el suelo, justo al lado de donde me había sentado a la salida del túnel, como una envoltura olvidada que hubiera perdido su contenido. Me apresuré a ponérmelas antes de que alguien pudiera verme con aquellas pintas veraniegas. Luego cargué con mis enseres y salí de aquella cueva.

Recordé que trabajaba como ayudante del señor Leon Desjoyeaux, que era un hombre de negocios instalado en Niza y director del banco *Crédit Lyonnais*. Nos llevábamos bastante bien y teníamos muchos intereses en común a pesar de que me pasaba más de quince años. Lo que más nos unía era nuestra afición a los coches y a las carreras. Esa afición, además de su estatus social, le había permitido conocer al eminente Emil Jellinek. Este empresario y diplomático de origen austrohúngaro también era un fanático del automovilismo y estaba cerca de la cincuentena. Jellinek se codeaba con toda la clase aristocrática de Niza, de Francia e incluso del resto de Europa. La alta sociedad solía pasar algunas temporadas en aquella ciudad de la Riviera Francesa que estaba de moda en esa época como lugar de vacaciones en invierno. Esa amistad de ambos hizo que se asociaran en una empresa del sector del automóvil que levantó Jellinek. Más tarde se añadió un tercer contacto en París, Karl Lehmann: un ciclista que usaba el alias de C. L. Charley como agente comercial. Si bien Jellinek era el líder y tiraba del carro, la presencia de Leon en esa sociedad era esencial, puesto que, además de ser su mente pensante y gestora, su puesto en *Crédit Lyonnais* le proporcionaba algunas ventajas financieras.

Precisamente esa tarde me había pedido que nos viéramos en el número 54 de la *Promenade des Anglais*, donde Jellinek tenía su casa, Villa Mercedes. El señor Jellinek había puesto ese nombre a su casa en homenaje a su primera hija, Mercedes, una niña de casi once años que me tenía mucho afecto y deseaba jugar y cantar a todas horas. Rebosaba simpatía, pero era un torbellino que constantemente andaba corriendo de acá para allá sin ninguna razón aparente. Eso resultaba molesto por sus continuas interrupciones cuando su padre estaba reunido con su socio. Nada tenía que ver con su hermano Ferdinand, que era un año mayor que ella: un niño introvertido, tranquilo, educado, nada revoltoso, que disfrutaba sentado dibujando, mientras observaba a Mercedes cantar, gritar y

reír en el jardín.

Se trataba de una reunión de urgencia, ya que los dos coches que Jellinek había inscrito en la Semana de Velocidad de Niza habían obtenido resultados nefastos. De hecho, ese 30 de marzo, nada más empezar la carrera, el segundo coche de Jellinek había sufrido un grave accidente que le había costado la vida a su conductor Wilhelm Bauer. Ese duro revés en los planes de aquella sociedad los obligaba a actuar con celeridad y contundencia, si no querían estar fuera del negocio en poco tiempo.

En ciertas ocasiones me pedían que cuidara de los niños y vigilara que no cometieran ninguna trastada hasta la hora del baño, momento en el que me debía reunir con ellos. En verdad, se referían a Mercedes, porque Ferdinand era un santo. Me sentía utilizado como si fuera una niñera de turno, pero tengo que reconocer que me divertía mucho con los disparates de aquella imparable criatura. Primero los ayudaba con algunas tareas del colegio; luego íbamos a un salón amplio que había fuera de la casa donde había un piano y Mercedes comenzaba a cantar. Le gustaba y no lo hacía nada mal. Yo disfrutaba de su potente voz infantil mientras ella entonaba y Ferdinand tocaba el piano. Así pasábamos largos ratos en aquel salón dedicado a la música que estaba apartado lo justo del despacho del señor Jellinek para que no pudiera oírnos. Y cuando pensaba que Mercedes ya estaría cansada de tanto gorgorito, entonces me pedía jugar a la cogida, que en este caso significaba correr detrás de ella hasta alcanzarla; algo que jamás conseguí. Su hermano, en cambio, dimitía y volvía a sentarse por el jardín con algún libro. Más tarde, entre carrera y carrera, con sus risas y mi disnea, aparecía mi salvadora, la señora Madelaine, por aquel entonces embarazada, y los enviaba a bañarse antes de la cena. Jellinek se había casado apenas hacía un año en segundas nupcias con Madelaine, seis años después de haber enviudado de Rachel, la madre de Mercedes y Ferdinand. Al primogénito de Jellinek, que era mayor que yo, nunca llegué a conocerlo. No vivía allí.

A partir del milagroso instante del baño, era libre para acudir a la reunión en el despacho de Jellinek.

—Con su permiso, ya he dejado a sus hijos en su hora del baño.
—dije al entrar en la estancia después de haber golpeado la puerta.

—Pasa, pasa, Fernand —dijo Jellinek—. Siéntate con nosotros, quizás nos puedas aportar alguna idea fresca para el coche que es-

tamos proyectando. Aunque, la verdad, te veo muy acalorado para aportar frescura.

En realidad, estaba sudando por el calor, pero, sobre todo, por perseguir a Mercedes.

—Tiene razón, he estado jugando a las carreras con su hija en el jardín. Yo tenía que atraparla, pero fue una tarea imposible, Mercedes es como un bólido inalcanzable. —les expliqué mientras intentaba secar mi sudor con un pañuelo.

Entonces, aquellos dos hombres de negocio se miraron con un gesto de sorpresa y Leon exclamó:

—¡Eso es, si lo teníamos delante de los ojos!

Y comenzaron a reír sin parar mientras se dirigían hacia mí.

—¿Qué pasa, he dicho algo inapropiado? —pregunté con temor a haber metido la pata.

—No, hijo, no. Todo lo contrario, has resuelto sin querer el dilema que hemos estado discutiendo esta tarde: un nombre para nuestro primer automóvil. —respondió Jellinek mientras me achuchaban como quienes hacen carantoñas a un niño— Lo llamaremos Mercedes, como mi hija.

—Si me lo permite, le diré que ese nombre me parece una excelente idea, señor. —dije jugando con ventaja, ya que conocía cómo se iba a desarrollar después toda la historia de la marca Mercedes.

En el fondo me resultaba extraño que a un hombre como Jellinek, que participaba en la Semana de la Velocidad de Niza desde 1899 bajo el seudónimo de *Monsieur Mercedes*, que había puesto el nombre de Villa Mercedes a su casa y quién sabe a qué otras cosas, no se le hubiera ocurrido poner el nombre de Mercedes a su primer prototipo de automóvil. ¿No sería que había aprovechado mis oportunas e inocentes palabras para convencer sutilmente a Leon de poner ese mismo nombre a la nueva marca?

—Pues ya tenemos la idea de producto completa. Ahora debemos elaborar un plan de negocio para captar una buena cuota del mercado de automóviles —intervino Leon dirigiendo su mirada hacia mí—. Me tienes que ayudar con esto, en el banco tengo mucho lío y apenas dispongo de tiempo para disfrutar con la familia.

Leon se había casado hacía cuatro años con Jeanne y tenían una niña de dos años. Era lógico que deseara prestar más atención a su familia.

—Cuenta conmigo para ello. Haré todo cuanto esté en mi mano para que la empresa sea un gran éxito —respondí a Leon mostrando mi completa disposición—. ¿Qué variables estudiaremos para enfrentarnos a la competencia?

—Nos fijaremos en tres aspectos principales: la regulación del precio de venta de cada automóvil, la inversión en publicidad y la apuesta por los avances tecnológicos. Y no busques competidores pequeños, vete directamente a aquellos que nos pueden fastidiar el negocio: Panhard et Levassor, Peugeot y Mors. Olvida el resto, no hay tiempo que perder. —me indicó Leon.

Sacó de su cartera unos documentos con la información de aquellas empresas de la competencia y me los entregó. Les eché un vistazo por encima y los guardé.

—Perfecto —dijo Jellinek—, yo me centraré en los aspectos técnicos del nuevo prototipo. Seguiremos colaborando con la DMG. Son serios y me gusta cómo trabaja Maybach en sus diseños. Además, suelen aceptar todas las sugerencias que les proponemos. Eso es algo que no encontraremos en otras compañías. Avisaré a Charley para que vaya engrasando la maquinaria de ventas, porque lo venderemos muy bien.

DMG eran las siglas de la empresa *Daimler Motoren Gesellschaft* que fabricaba los motores Daimler en Stuttgart. Leon añadió:

—Manos a la obra Fernand. Calcula cuánto vamos a necesitar para asaltar el mercado, que yo me encargo de buscar los fondos hasta debajo de las piedras si hiciera falta.

El señor Jellinek nos invitó a quedarnos para la cena, pero Leon prefería volver con su familia y a mí tampoco me apetecía alargar más la velada porque necesitaba empezar ya con aquel estudio. Recogí la bolsa donde llevaba mis pertenencias y marché hacia la pequeña casa donde vivía solo con mi perrita Fleur. Tendría que revisar toda la información que Leon me había proporcionado y ser capaz de redactar una propuesta de acciones encaminadas a hacernos con una importante cuota de mercado. Estaría encerrado toda la noche intentando simular cómo evolucionaría el mercado de coches teniendo en cuenta las consideraciones que Leon me había enumerado. Lo más simple para mí era implementar un sencillo juego de empresas utilizando cadenas de Markov para establecer las condiciones de equilibrio de mercado. Sin embargo, existía un ligero inconveniente: faltaban más de cinco años para que el matemático

ruso Markov presentara su modelo en 1906, por lo que la justificación de mi propuesta iba a ser complicada. En cualquier caso, no se me ocurría otra forma de salir adelante con mis limitados conocimientos en la materia. Al fin y al cabo, tampoco iba a explicar que mis resultados eran fruto de simulaciones realizadas con mi computadora. Así que lo más sensato sería resolver el problema como lo había pensado y luego presentar a Leon una memoria que justificara todas las decisiones, considerando que sus conocimientos no eran muy avanzados y no sería capaz de discutirme los detalles que en aquella época eran desconocidos. Me esperaba un día de arduo trabajo y ni siquiera estaba seguro de garantizar el éxito; pero tenía la voluntad de un legionario romano. Si mis fuerzas flaqueaban, al menos podría decir que mi propuesta era audaz y solo eso ya sería un premio para mí; en proyectos de tanta envergadura, esa voluntad debía ser suficiente para lograr mi objetivo.

Inspirado por los sabios clásicos como de costumbre, esa noche me aislé para dedicarme en cuerpo y alma a la propuesta. Clareando el día la terminé. Esa mañana me dirigí a la oficina para escribir la memoria en una de las pocas máquinas de escribir visibles que había en Niza y que, por supuesto, estaba guardada en el despacho de Leon.

—Buenos días, señor director —le dije al entrar en su despacho. Habíamos acordado un trato formal entre nosotros cuando estuviéramos en el banco—. Ya he terminado la propuesta, solo me falta ordenarla y escribirla correctamente. Por eso venía a solicitarle permiso para usar esta mañana la máquina de escribir.

—Buenos días —respondió—. De acuerdo, pero ten mucho cuidado con ella. No quiero que se estropee ahora. Pronto la voy a necesitar.

—Por supuesto, seré muy cuidadoso con ella. —respondí mientras me arrepentía de no haber traído una impresora portátil que me ahorrara el calvario de un largo día de tecleo

—Pero cuénteme, Dubois, ¿cuáles son sus conclusiones definitivas? —preguntó impaciente.

—Como resumen, le diré que he puesto números a las inversiones en publicidad y nuevas tecnologías, así como un precio orientativo de cada automóvil para ser competitivos y mantener un buen margen de beneficios. —contesté sin dar más detalles para que los comprobara en la memoria que más tarde le entregaría.

—Bien, pues termine ese informe cuanto antes. Al final de la mañana lo quiero en mi mesa para discutirlo. Estoy deseando que lo vea el señor Jellinek —dijo Leon—. Cierre la puerta al salir.

Me confiné con aquella Remington en un despacho vacío que estaba lejos de las oficinas. Iba a estar dándole a la tecla algunas horas y el ruido podría molestar a los empleados.

Terminé la memoria de aquella propuesta pasado el mediodía. No quedaba nadie en las oficinas del Crédit Lyonnais a excepción de Leon, que me esperaba con ansiedad. Yo estaba satisfecho con los resultados obtenidos mediante un simple juego de empresas⁴. Primero le entregaría el documento a Leon y, más tarde, lo discutiríamos con el señor Jellinek.

—Aquí lo tienes, Leon —dije y solté el documento en sus manos—, espero que las conclusiones te parezcan razonables.

Leon leyó con detenimiento mi informe. Paraba y me consultaba a medida que le surgían dudas sobre el proyecto.

—Esto es mucho dinero —atinó a decir al concluir la lectura—. Si nos sale bien, será un pelotazo; pero como se tuerza, iremos a la ruina. En fin, así son los negocios, quien no arriesga no gana. ¡Me gusta! ¡Veamos a Emil, el tiempo juega en nuestra contra!

Mi jefe conocía las costumbres de Jellinek y sabía que estaría almorzando en el hotel Scribe porque adoraba los platos de su chef. Cuando llegamos, Jellinek ya estaba en los postres, solo. Había muy poca gente en el comedor a esa hora, así que allí mismo podríamos mantener una reunión de trabajo. Nos invitó a tomar el café.

—Mira esto, Emil. Fernand ha hecho un trabajo excelente. —dijo Leon, dándole el documento.

El señor Jellinek no se anduvo con rodeos y fue rápidamente a las páginas finales donde se resumían los resultados y, por tanto, las acciones que debían ejecutarse. Al pasar la página, se enfrentó a la cifra que más le importaba y sus ojos se abrieron, incrédulos, ante semejante suma:

—Pero...

—Tranquilo, Emil —interrumpió Leon—. Sé que es una cantidad importante. No te preocupes, yo me encargo de conseguir los fondos necesarios.

—Si es así, estoy de acuerdo; pero vamos a asumir un gran riesgo —añadió Jellinek—. Por lo demás, bien; veo que Fernand ha hecho

⁴El desarrollo de este proyecto se encuentra en la sección 4.1

un gran trabajo en tiempo récord. Eso nos permitirá tener una respuesta rápida después del desastre de ayer.

Jellinek se refería con toda seguridad al accidente que le había costado la vida a Bauer.

—Muchas gracias, señor Jellinek, he hecho todo cuanto he podido para presentar esta propuesta sin demora. —le dije.

—Nada de señor Jellinek. A partir de hoy soy Emil para ti; se acabaron los formalismos entre nosotros. Te has ganado el derecho a formar parte de la empresa y si alcanzamos el éxito con tus ideas, entonces habrás ganado la gloria. —añadió más en tono de reproche que de felicitación, aunque estábamos acostumbrados a esa forma un tanto agresiva que tenía de expresarse.

Continuó explicándonos que al día siguiente tendríamos que ir con él a Stuttgart para visitar personalmente la fábrica de Cannstatt de la DMG. Además, avisaría a Charley para encontrarnos allí con él. Sabía que aquella era una misión de tal importancia que requeriría de la participación de todos en la reunión con los jefes de la DMG, aunque, como era habitual, él llevara la voz cantante. Todavía no hacía ni un mes que Gottlieb Daimler, el inspector general y fundador de la DMG, había fallecido por un problema cardíaco y ahora su único interlocutor de confianza era el director técnico, Wilhelm Maybach. No obstante, la última palabra la tendría el director de la empresa, Frederick Simms, aunque confiaba en que este no presentara demasiados problemas.

Jellinek envió un telegrama que avisaba de nuestra visita. Llegamos a la DMG por la tarde. Charley ya nos estaba esperando allí. Enseguida nos recibió Maybach, que tenía en muy alta estima a Jellinek y había mostrado mucho interés en sus propuestas las veces que había encargado automóviles. Él nos acompañó hasta la sala de juntas donde se celebraría la reunión. Simms no se hizo esperar mucho y apareció con una pequeña libreta de notas.

—Buenas tardes, señores —dijo Simms—. No podré estar mucho rato con ustedes porque tengo varios compromisos, así que vayamos al grano. No es la primera vez que hacemos negocios, no sé por qué se han molestado en venir hasta aquí. Hasta ahora nos habíamos comunicado bien por medio de telegramas.

—Igualmente, buenas tardes tengan ustedes —intervino Jellinek—. Mire usted, Simms, cuando hacía mis pedidos jamás tuve problemas con nuestro amigo Daimler. Hemos sentido mucho la

pérdida de una persona tan valiosa. Pero la vida continúa y ahora nos toca hacer negocios con usted. Como comprenderá, no puedo firmar un contrato importante con alguien que no conozco.

—Lo entiendo perfectamente, yo habría actuado del mismo modo en su caso —respondió Simms—. Pero bueno, aquí estamos, veamos de qué se trata, ¿qué es lo que necesitan?

—Pues es muy sencillo. Los coches que les compramos para la carrera de la semana pasada en Niza no dieron la talla. Los resultados han sido desastrosos —dijo Jellinek—. Necesitamos un nuevo prototipo que arrase el próximo año.

—Lo sé. Además, con un accidente fatal que no es buena publicidad para nuestra compañía —interrumpió Simms—. Esa es la razón por la que nuestra empresa ha decidido que ninguno de nuestros coches participe en próximas carreras.

—Siento oír esas noticias y espero que pueda cambiar de opinión, porque la propuesta que le traigo no es de esas que se puedan ignorar. —contraatacó Jellinek.

—Bien, acabemos con la intriga y díganos sin más demora los detalles de su petición. —añadió Simms.

Entonces Leon sacó el dossier que yo había preparado con el plan de negocio, se lo entregó a Simms y dijo:

—Aquí están descritos todos los aspectos de la propuesta. Como verán estamos hablando de un pedido de 550.000 marcos oro alemanes.

—¿Ha dicho 550.000? —preguntó sorprendido Maybach.

—Exactamente, Wilhelm, pero a cambio tenemos algunas condiciones que debe cumplir ese nuevo bólido —contestó Jellinek, que presumía de la relación cercana que tenía con el director técnico de la DMG—. En ese documento tienen un listado de las mejoras que deben incorporarse al nuevo prototipo, plazos de entrega y forma de pago. Serán en total 36 unidades de este nuevo coche y otras 36 del DMG estándar de 8 CV. No quiero un coche para hoy o mañana, este será el coche que marcará una época.

—Es una petición muy tentadora, señor Jellinek, pero se olvida usted de que tenemos el problema de nuestras patentes en Francia. No estamos autorizados a vender coches allí porque tenemos un acuerdo al respecto con la Panhard et Levassor. Nos llevarían a juicio por hacerlo. —dijo Simms apesadumbrado.

—Eso ya está resuelto —respondió Jellinek—, cambiaremos la marca de nuestros automóviles. Se llamarán Mercedes como mi querida hija.

—Imposible, ¿cómo vamos a fabricar coches con tal marca? En todo caso se llamarían Damlier–Mercedes. —reaccionó Simms.

De pronto Jellinek dejó salir la fiera que había estado ocultando y se olvidó de la cortesía que había mantenido hasta ese momento:

—El nombre con que fue bautizada mi hija pierde su valor publicitario si se le añade otro cualquiera. Es un nombre algo exótico, pero atractivo, fácil de pronunciar y suena bien. Si ustedes quieren, vendan nuevos Damlier o Damlier–Mercedes. Yo sólo venderé Mercedes. Ahí tienen nuestro pedido y nuestras condiciones. Nosotros ahora saldremos a tomar algo, que ya va siendo hora. Tienen hasta las siete para darnos una respuesta.

—Pero Emil, aquí aparecen nuevos requisitos técnicos que debo estudiar con detenimiento —insistió Maybach señalando el documento—. Además, observo que lo que pides es prácticamente un milagro.

—Por supuesto, Wilhelm, puedes leerlo con detenimiento. Por eso les damos cuatro horas. La gente espera milagros de los que somos capaces de fabricarlos —respondió Jellinek—. Ahora nos vamos. Volveremos esta tarde a las siete en punto.

En ese instante nos levantamos, nos despedimos de los dos jefes de la DMG y seguimos a Jellinek. La mirada socarrona de Jellinek al salir de aquel edificio indicaba que las gestiones habían ido bien en su opinión. Sin embargo, nada más sentarnos en un restaurante próximo, a Leon le asaltaron las dudas:

—¿No crees que has sido demasiado inflexible en la reunión, Emil?

—Nada de eso, Leon, verás que a la vuelta ya nos tienen preparado el contrato para la firma. —aseguró Jellinek.

Así ocurrió. Aunque al volver tanto Simms como Maybach nos interrogaron sobre la propuesta que le habíamos dejado, nos dimos cuenta de que la decisión ya estaba tomada: tenían el contrato preparado. La discusión solo tenía el objetivo de asegurarse de haber entendido de forma precisa las exigencias planteadas sobre el nuevo prototipo. Nuestro pedido había llegado en el momento apropiado, porque ese dinero les resolvería algunos problemas financieros. No tuvieron más remedio que aceptar el reto de construirnos aquel

automóvil a medida: debería ser más largo, tener mayor distancia entre ejes y amplitud del ancho de rodadura para ganar estabilidad; el motor se montaría más bajo en el bastidor para descender el centro de gravedad; y, además, llevaría el novedoso sistema de ignición eléctrica de Bosch.

Nos despedimos de Charley y regresamos a Niza con la satisfacción del deber cumplido. Estábamos pletóricos por haber conseguido que aceptaran el pedido y ansiosos por que llegara el momento de contemplar aquel primer Mercedes.

Esa noche entendí que mi misión en ese viaje al pasado había finalizado y que al día siguiente tendría que acudir a la Gruta de Lazaret para regresar a mi época. Sin embargo, eso significaría perderme todo lo mejor, lo que estaba por venir. No vería la llegada del nuevo prototipo, no podría disfrutar de un paseo en él y, sobre todo, no compartiría las victorias arrolladoras que obtendrían estos modelos en la Semana de la Velocidad de Niza de 1901, el año en que cambió definitivamente la historia de la automoción. Entonces se me ocurrió una idea que me permitiría asistir a estas carreras: regresar al siglo XXI y, en lugar de salir de la gruta, volver a la Niza del domingo 24 de marzo de 1901, un día antes del comienzo de las competiciones. Ya tenía cierta experiencia en el manejo de los paneles temporales y seguro que hallaría la manera de acertar con el instante que buscaba. Pero tendría que indicar a Fernand que debía acudir a Lazaret ese día cuando yo regresara. Eso en realidad no sería muy complicado: Fernand era un tipo muy ordenado y funcionaba con una curiosa agenda que llevaba a todas partes con él. Se trataba de un pequeño libro con hojas en blanco donde anotaba todas las tareas que debía realizar cada día. El único inconveniente era que iba fechando mes a mes las páginas del libro. No me quedó otra alternativa que irme a la última página y escribir allí la fecha y la hora aproximada del domingo en que tenía planeado regresar a esa época, indicando que debía acudir sin falta a la Gruta de Lazaret.

Al siguiente día regresé a mi tiempo desde aquella cueva. Al llegar me detuve en la sala de imágenes para jugar con el panel que había utilizado en ese viaje. Ya había descubierto que el manejo de los paneles era completamente telepático, por lo que solo tuve que pensar en el avance de la historia que aparecía reflejada hasta llegar al momento preciso. Entonces seleccioné ese instante y aparecí de nuevo en aquella gruta de Niza. Me vestí con la ropa de Fernand,

que otra vez yacía en el suelo polvoriento de la cueva, y me dirigí a mi casa, donde me esperaba la fiel y juguetona Fleur. Accedí a sacarla un rato de paseo por la playa. Quería disfrutar de la noche de Niza, respirar aquel aire que traía el aroma del mar, sentir la quietud de una ciudad que descansaba como si se preparara para el evento que empezaría en unas horas.

Al clarear la mañana acudí muy temprano a la zona de espectadores de la primera carrera. Allí ya estaban esperándome Leon, Jellinek y también Charley, que había vuelto de París: no quería perderse aquellas carreras por nada del mundo. Cada día de esa semana tendríamos una carrera diferente. Los Mercedes que competían no eran todos de Jellinek. De hecho, el primer ejemplar del nuevo prototipo Mercedes 35 CV que había llegado hacía tres meses pertenecía a Henri de Rothschild, un aristócrata amigo de Jellinek al que este se lo había vendido. La carrera de ese día era larga, unos 392 kilómetros, con el recorrido Niza–Aix–Sénas–Salon–Niza en la Provenza Francesa. Duraría alrededor de siete horas en las que los espectadores podrían charlar, hacer negocios o degustar algunos aperitivos.

—Ya se ve la nube de polvo allá a lo lejos. —avisó Charley. Habría pasado algo más de seis horas y media.

—No logro distinguir cuál es el coche que va en cabeza. —dijo Leon, que miraba con unos prismáticos.

—Tráeme ese cachivache, déjame que lo vea bien —pidió Jellinek—. ¡Es un Mercedes! ¡Es un Mercedes!

—¿El tuyo o el del Doctor Pascal? —preguntó Leon refiriéndose al Barón de Rothschild, que solía utilizar ese alias en las carreras.

—Qué más da, Leon; lo importante para el negocio es que gane uno de los Mercedes. —respondió Jellinek, sin dejar de mirar.

—Es cierto, Emil. —añadió Charley.

Entonces Jellinek me pasó aquellas lentes de aumento y me dijo:

—Toma, Fernand, mira tú que eres más joven; con tu vista quizás los puedas distinguir.

En efecto, al observar de cerca el vehículo que se acercaba, comprobé quién iba a los mandos:

—¡Es Werner! ¡Es Wilhelm Werner! —grité entusiasmado; acababa de confirmar que el bólido del Barón iba a ganar.

—¿Estás seguro? —me interpeló Leon.

—Del todo —respondí—, puedo ver incluso el nombre que lleva rotulado.

En ese momento empezamos a festejarlo como si de nuestro prototipo se tratara. Gritamos, saltamos y nos abrazamos de alegría. El Mercedes 35 CV parecía responder como esperábamos. Werner había vencido con una velocidad promedio de alrededor de 58 kilómetros por hora: era la primera victoria de la firma Mercedes. El coche de Jellinek, pilotado por su amigo Claude Loraine-Barrow, terminó en quinta posición. Fue el comienzo de una semana fabulosa.

El martes 26 estaba programada una pequeña carrera local a la que todo el mundo daba menor importancia, así que directamente nos presentamos a la carrera del miércoles, que era de una milla en la *Promenade des Anglais*. Ese nombre del paseo marítimo hacía honor a la gran cantidad de ingleses que acudía a Niza en el periodo de invierno siguiendo la costumbre de años de la recién fallecida reina Victoria.

Era una prueba de velocidad que duraba pocos minutos. Enseguida sabríamos el comportamiento de nuestro Mercedes 35 CV cuando era forzado al máximo. Y la nueva victoria de los Mercedes no se hizo esperar: Werner volvió a vencer, alcanzando una velocidad máxima de más de 86 kilómetros por hora, una cifra impensable en aquella época. Además, Loraine-Barrow logró con el vehículo de Jellinek un récord mundial con un promedio de velocidad de casi 80 kilómetros por hora en el comienzo de esa carrera. Los Mercedes seguían consiguiendo las mejores marcas con mucha solvencia.

El jueves llegaba la carrera más esperada, por su complicado trazado y la exigencia de una subida de 15 kilómetros y medio desde Niza a la colina de La Turbie. Werner volvió a mandar proclamándose ganador de la carrera con una velocidad media de más de 51 kilómetros por hora. Era el coche de Rothschild, pero nuestra alegría no entendía de dueños, ni pilotos, sino de marcas. Además, el bólido de Jellinek, conducido esta vez por Lemaitre, había llegado en segunda posición, muy por delante del resto de marcas. Estas victorias convirtieron a Werner en el héroe de la Semana de la Velocidad de Niza. El dominio de los Mercedes quedaba patente y así lo reflejó Paul Meyan, del Automóvil Club de Francia; dijo algo que se hizo eco por todo el mundo: «Hemos entrado en la era Mercedes».

Nuestro objetivo se había cumplido con creces: el Mercedes 35 CV había ganado casi todo durante aquella semana. Ahora solo es-

perábamos que las ventas estuvieran en sintonía con los resultados deportivos. Pero eso no tardaría en llegar: el mago Jellinek se guardaba un as en la manga con un golpe de efecto. Hizo que el vehículo ganador de Werner circulara delante de toda la audiencia. Después ordenó que lo equiparan con un asiento trasero adicional, convirtiéndolo en un vehículo de cuatro asientos. Fue un spot publicitario realizado en directo ante infinidad de espectadores que eran potenciales compradores de aquel vehículo. El resultado fue inmediato: los pedidos le llovían. Habíamos hecho historia y aquellos éxitos iban a posicionar a la DMG como líder en la fabricación de vehículos deportivos y de lujo.

El viernes lo dedicamos a celebrar el triunfo del Mercedes 35 CV y cerrar todos los pedidos que surgieran. Ya entrada la noche tocó decir adiós. Supe que aquel era el momento de mi última despedida. No volví a casa, sino que me dirigí a la Gruta de Lazaret para regresar al presente.

Ya de vuelta, fui expulsado de la sala a través del túnel que me devolvía a la gruta de vibrantes luces de colores. Como otras veces, al mirar el reloj de mi móvil comprobé que el tiempo presente se había detenido durante mi aventura empresarial. No obstante, era hora de volver a Salerno. Alcancé a nado la zódiac y puse rumbo hacia el puerto. Tenía prácticamente el día completo para relajarme y preparar mi nueva aventura. La duda de implicar a Laura en estas experiencias me seguía rondando por la cabeza. Estaba decidido a no dejar pasar esa noche sin aclararme completamente al respecto.

«¿Cuál sería su respuesta ante semejante locura? Y en el caso de que me concediera el beneficio de la duda y aceptara acompañarme, ¿sería posible que Laura viera las luces y alcanzara la sala de imágenes del pasado atravesando el túnel? ¿Conseguiría luego ser transportada a alguna época pasada?». Esta incertidumbre me volvía loco, pero lo que más me angustiaba era la posibilidad de que ella pudiera correr algún peligro, no solo en el momento del desplazamiento temporal, sino también durante la estancia en otra época de la Historia. Esto último me preocupaba más que su previsible incredulidad sobre mi capacidad de viajar en el tiempo.

Estuve ordenando cada rincón del apartamento, que ya iba necesitando un repaso importante. Por la noche iría a casa de Laura, así que lo más lógico sería que pronto yo la invitara a la mía. No es que tuviera muchas ganas ni fuerzas para hacer limpieza, pero

la mínima posibilidad de su visita hacía que mi voluntad de hacerlo fuera firme. Y ya se sabe, quien tiene la voluntad tiene la fuerza, como decía Menandro. El hecho es que pude; a un ritmo lento por la falta de costumbre, pero al final quedé satisfecho de cómo había dejado el apartamento. Solo había un pequeño problema: la cita era a las 8:00 y el reloj ya marcaba las 7:45. Tendría que correr si no deseaba llegar con mucho retraso a la fiesta, porque puntual, lo que se dice puntual, no iba a ser esa noche.

En un tiempo récord me preparé y un taxi me dejó en el portal que últimamente visitaba cada noche. Laura me había enviado un mensaje que indicaba los números de la puerta del edificio y del apartamento. Pulsé en el telefonillo la tecla correspondiente y se escuchó una voz femenina:

—*Buonasera, chi chiama?*

—*Sono Nauzet.* —respondí con mi pobre italiano.

Entonces la chica que estaba al otro lado gritó a los presentes:

—*Ehi ragazzi, è Nauzet! Lo lasciamo passare?*

En medio de aquel bullicio, quitándole el teléfono de las manos, alguien le dijo :

—*Fammi parlare con lui.*

Era Laura, había reconocido su voz:

—*Ciao*, Guanche, llegas tarde. ¿Estás seguro de que deseas subir?

—Venga Laura, no me vaciles más, que parezco un vendedor a domicilio aquí pasmado en tu portal —le respondí—. Si has cambiado de opinión y no te apetece que suba, no te preocupes, lo entenderé.

—¡Mira que eres raro a veces, no seas tonto y sube ya anda!
—dijo Laura y pulsó el portero automático para abrirme el portal.

Al llegar a su piso, Laura estaba con la puerta abierta esperándome.

—*Ciao*, pasa que te presentaré a mis amigos.

Entré y me sorprendí del fiestón que habían preparado. «Estos italianos sí que saben montarse un buen fiestorro», pensé mientras recorría con mis ojos aquel amplio salón donde habían desplegado toda la munición festivalera. Además de Laura había otras cuatro chicas y seis chicos distribuidos por los rincones. Laura me cogió de la mano y me llevó hasta donde se encontraba una de ellas:

—Nauzet, te presento a mi amiga Carina, ella es quien te contes-
tó por el telefonillo. Como habrás comprobado, no habla español.

—*Ciao, Carina, piacere di conoscerti.* —Dije intentando ser amable. Ella dejó la copa que sostenía en la mesa de al lado y me saludó afectuosamente.

Después, me presentó a sus tres compañeras de piso, Emilia, Gaia y Lucía, que se dirigieron a mí en español. Eran tres chicas muy simpáticas y además daban la impresión de ser muy divertidas. Se les notaba muy intrigadas con mi persona, deseosas de conocerme. A continuación, Laura señaló hacia donde estaban hablando cuatro de sus amigos y procedió a la presentación pertinente: Luca, Darío, Lorenzo y Vincenzo. Ellos fueron más fríos con su acogida, formales, pero distantes. Y finalmente nos acercamos a un rincón donde discretamente dialogaban Massimo y Francesco, los últimos que me faltaba por conocer. Después de las presentaciones y de tomarnos un aperitivo, Laura nos llamó a todos:

—Venga, chicos, es hora de sentarse a la mesa.

Éramos una docena de jóvenes con ganas de cenar, charlar y pasarlo bien escuchando música o bailando. Aparentemente, cada uno se sentó donde le cuadró, pero me resultó muy extraño que la silla que estaba situada justamente frente a mí quedara vacía y reservada para Laura, que llegó en último lugar desde la cocina con una bandeja de sándwiches. Evidentemente, ocupó aquel único sitio libre que le permitía tenerme frente a ella y controlado en todo momento. La gente hablaba y reía sobre asuntos de los que yo difícilmente entendía alguna palabra. Por esa razón había permanecido muy callado durante lo que había transcurrido de la velada. En un instante determinado, Laura tomó la palabra y requirió la atención de todos:

—Atentos un momento, quiero que conozcan al verdadero Nauzet, que curiosamente ha estado muy callado toda la noche, ¡con lo que le gusta hablar al chaval! Nauzet tiene una imaginación para contar historias que, os los aseguro, ninguno de vosotros podríais sospechar. ¿Queréis que nos cuente una? —dijo en español Laura, mientras ella y sus compañeras de piso traducían lo que decía a sus vecinos de mesa.

Fue ahí donde sospeché que la distribución de los comensales en la mesa no era casual: cada uno tenía al lado a una de las chicas que sabía mi idioma.

—Sí, sí, que hable Nauzet, que nos cuente una historia. —dijeron al unísono las hispanoparlantes.

—¿Y qué queréis que os cuente? Yo no sé hablar italiano. —re-

pliqué intentando salir de aquel lío.

—No te preocupes —respondió Lucía—, nosotras iremos traduciendo simultáneamente lo que digas. Pero ve despacio para no liarnos.

—Cuéntanos una de tus aventuras, dónde has estado, a quién has conocido. Todo eso que Laura nos ha relatado sobre tus hazañas. —apuntó Gaia.

Su amiga la había delatado: había estado hablando de mí con sus compañeras. En el fondo eso me hacía sentir bien, porque suponía una muestra de interés hacia mi persona de su parte. Aunque acabara de criticarme en mi propia cara diciendo que yo hablaba mucho, al menos lo que le decía no parecía aburrirla.

—Sí, pero empieza por el principio —añadió Laura—. Queremos saber de dónde sacas tanta inventiva.

Estaba en un apuro. Tenía que empezar mi relato y si contaba la verdad con mucho detalle podrían descubrir el origen de mis aventuras. No obstante, era una ocasión inmejorable para que Laura supiera lo que me ocurría durante aquellos viajes temporales. Era mucha la tentación que mis nuevos amigos me brindaban y apartarla hacia un lado era algo superior a mis fuerzas.

—Bien —me atreví a hablar—, entonces empezaré por el principio como me ha pedido Laura. Todo comenzó un día que encontré una gruta en la costa, de donde procedía una potente luz. No sé cómo, pero esa gruta tenía el poder de transportarme a otras vidas anteriores que he tenido. La primera vez aparecí en la India. Corría el año 1150, es decir, estaba en plena época medieval. Ya se podrán imaginar el impacto que sufrí al encontrarme con aquel mundo del pasado.

Excepto el cuchicheo de las traductoras, no se oía nada. Hasta la música había parado y nadie se había molestado en volver a ponerla. Sus caras expresaban el interés real que les estaba suscitando mi historia.

Continué con mi relato:

—Cuando me trasladé en el tiempo, no aparecí físicamente allí tal y como soy hoy, sino que me reconocí en el cuerpo de otra persona, aunque sabía que esa persona era yo mismo. No sé si entienden lo que quiero decir.

—*Perfettamente, per favore continua.* —me pidió Carina rápidamente.

—Pues eso, entonces me había quedado en que aparecí en la India de mitad del siglo XII... —continué explicando aquel viaje.

Ante sus atentas miradas, les describí todo mi periplo entre Ujjain y Bhopal, de cómo conocí al maestro Bhāskara y de cómo conseguí que mi hermana Saraswati lograra su sueño de estudiar matemáticas en una época de sumisión bajo una sociedad patriarcal. Ninguno de mis contertulios había casi pestañeado mientras contaba mi relato.

—¿Y qué pasó con Saraswati y contigo cuando se aclaró todo gracias al rey Kumarapala? —preguntó Emilia, aunque meramente como traductora de Darío.

—Pues no lo sé, no te puedo contestar —respondí—. Se supone que Sama estudiaría en el centro de estudios de Bhoj Shala y que Saraswati seguiría con Bhāskara en su academia hasta que fuera mayor de edad y pudiera ingresar en ese centro también; pero, como os he contado, yo volví a la actualidad antes de que todo eso sucediera.

—*Wow, che storia interessante.* —dijo Francesco sin poder contenerse— *E dove altro sei stato?*

Yo hice un gesto de no haber entendido la pregunta. Laura me la tradujo:

—Quiere que cuentes otra aventura. ¿Dónde fuiste después?

—¿Otra? —pregunté. Todos asintieron.

—De acuerdo. El siguiente viaje fue más distante en el tiempo y de mayor duración; muy complicado y peligroso, pero asimismo muy gratificante por las cosas que aprendí y las maravillosas personas que conocí. —dije a modo de introducción de mi nueva historia.

Esta vez me entretuve más explicando mis andanzas por la Atlántida y el Antiguo Egipto allá por el año 10500 a.C. en plena Edad de Hielo; de cómo tenía cinco esposas, cómo realicé los murales decorativos del palacio de Atlantia y cómo tuve que ingeniármelas para salir hacia Egipto por orden del rey atlante y así lograr escapar de las garras de la reina; de cómo formamos el grupo de los siete sabios que fueron recibidos en Egipto para hacer grandes obras de arquitectura y mejorar la agricultura, la ganadería y la medicina. Todos atendían atónitos a cuanto salía de mi boca, mientras Laura me miraba con su sonrisa marca de la casa que mostraba cierto orgullo por cómo iba desarrollándose la fiesta.

Cuando terminé de contar esa historia, se creó un airoso debate sobre las situaciones descritas.

Alguno, como Lorenzo, se reía comentando:

—*Questo ragazzo sta fatto!*

Otros mostraban cierto enfado, como Massimo:

—*Non mi farò ingannare da questo tizio!*

Lucía intervino parándolos:

—Aquí no se va a insultar a nadie, porque nadie se está burlando de nosotros. *È chiaro?*

Las aguas parecieron volver a su cauce.

Me consultaron sobre aspectos geográficos como la localización de la Atlántida, los reinos en que se dividía o la visión de Egipto sin las pirámides. Incluso lo de las cinco esposas suscitó una gran discusión:

—¿Cómo se puede convivir con cinco esposas a la vez? —me preguntó Lucía, que no paraba de discutir sobre el tema con Vincenzo, quien, por contra, lo veía normal—. Yo no compartiría a mi esposo con otras cuatro mujeres.

—No lo sé con certeza, Lucía —respondí—. Lo cierto es que no conviví mucho con ellas. La mayor parte de la aventura transcurrió entre Atlantia y Egipto. Pero todas se llevaban bien.

—Vaya, por un momento me has hecho creer que esa historia era cierta —intervino Laura—. Lo cuentas con tanta sencillez y naturalidad que parece real.

Entonces la miré fijamente y le dije:

—¿Y quién te dice que todo lo que he contado no sucedió de verdad? —y dejé que el misterio y la duda volvieran a revolucionar la mesa.

A un extremo de la mesa discutían sobre la existencia de la Atlántida, de cómo habría desaparecido sin dejar ningún rastro. Por el otro extremo, acaloradamente, debatían sobre el origen extraterrestre de las pirámides. Y a mi alrededor, en la zona central de la mesa estaban más interesados en la justificación moral de la poligamia. Me encontraba, por así decirlo, en mi salsa. Esos ambientes universitarios, donde uno se podía divertir con amigos riendo de cosas banales o discutiendo sobre temas interesantes, siempre me habían provocado una sensación de placer como cuando en la orilla del mar, acostado sobre la arena, te abandonas al vaivén que las olas, al romper, te transmiten con pertinaz intermitencia.

Fue Luca quien en medio de aquel alboroto nos propuso salir de la discusión:

—*Ascolta tutti per un minuto, perché non mettiamo un po' di musica e balliamo?*

La respuesta fue unánime y enseguida estábamos todos bailando en aquel salón. Algunos como yo, más que bailar, nos movíamos como zombis desorientados. Por contra, Luca era el rey de la pista, todo un profesional de la danza. Brillaba con luz propia. Pero en medio de todos destacaba Gaia. Ella resplandecía con su danza alegre y sus suaves movimientos que la hacían flotar de un lado para otro como una ninfa etérea que presumiera de vencer las leyes de la gravedad.

Al cabo de un rato se hizo la hora de acabar la fiesta. La música podría molestar a los vecinos y a las anfitrionas no les convenía tener problemas de convivencia. Antes de que empezáramos a abandonar la casa, Laura se dirigió hacia donde estaba yo y me dijo:

—Qué buenas historias cuentas, Guanche. ¿De dónde las sacas?, ¿cómo te las inventas?

—Pues de la realidad, Laura, ¿o es que crees que alguien se puede inventar todas esas cosas sin vivirlas? —estaba completamente decidido a compartir mis experiencias con ella.

Laura se puso a la defensiva:

—Si piensas que vas a vacilarme, ya te adelanto que te equivocas yendo por ese camino.

—No intento tomarte el pelo, no estoy bromeando. —insistí.

—No querrás que me crea así, por tu cara bonita, que todo lo que has contado sucedió de verdad. Te lo aviso: no he bebido nada de alcohol. —replicó con aires de suficiencia.

—No, por supuesto, quiero que lo compruebes mañana tú misma —me lancé abiertamente—. Sé que es algo muy difícil de creer, así que no tendrás más remedio que ir para descubrirlo en directo.

—Mira, Nauzet, espero que todo esto no sea otra broma de las tuyas para conseguir llevarme al huerto. —dijo llamándome por mi nombre, con lo que daba muestras de que la conversación había tomado tintes de seriedad. Ella nunca me llamaba así, a no ser que de algo importante se tratara.

Intenté quitarle hierro al asunto y empecé a bromear lanzando el mensaje que pretendía:

—Al huerto no, a donde quiero llevarte es a mi gruta sagrada. Allí vas a alucinar en colores, te lo aseguro.

—Más te vale, porque como te estés burlando de mí, no pienso volver a mirarte a la cara ni a dirigirte la palabra. —sentenció.

—De acuerdo —respondí—, te espero mañana en el puesto de Lucciano sobre las diez.

—Allí estaré, no lo dudes.

Eso fue lo último que dijo antes de despedirnos. Me fui a mi apartamento con bastante inquietud por lo que sucedería al día siguiente. No estaba seguro de que Laura pudiera tener acceso a aquellas ventanas temporales. Tenía ante mí un grave problema, porque si aquel milagro no funcionaba con ella, la magia de nuestra amistad podría desaparecer.

En aquellos instantes de incertidumbre e inseguridad, solía acordarme de los grandes sabios de la antigüedad y buscaba en ellos las repuestas a mis dilemas. Entre los clásicos, recordé aquellas palabras de Zenón de Citio: *El sentimiento debe ser más fuerte que la materia, y la voluntad más poderosa que el sufrimiento físico o moral*. En efecto, existía un sentimiento que se vestía de ilusión y una férrea voluntad de vivir aquella experiencia con Laura. Esa voluntad debería proporcionarme fuerzas suficientes para alcanzar mi objetivo. No sabía si tendría que intentarlo una, diez o mil veces como planteaba Confucio, pero eso no me importaba. Lo único que tenía claro era que debía intentarlo: *nadie sabe de lo que es capaz hasta que lo intenta*. Ese pensamiento de Publio Siro fue mi último recuerdo antes de quedarme dormido.

4.1. Juego de empresas

El objetivo de este proyecto consiste en desarrollar un modelo matemático para la simulación de un juego de empresas simple en el que participen cuatro empresas, utilizando la teoría de las cadenas de Markov. Además, el modelo implementado permitirá guardar al final de cada partida la información necesaria para reiniciar nuevas simulaciones a partir de las condiciones finales de dicha partida.

Deben considerarse los siguientes aspectos y requisitos:

- Establecer las condiciones de partida para cuatro empresas.
- Definir los datos que influirán en el proceso, así como las funciones que registrarán esa influencia.
- Construir la matriz de la cadena de Markov y obtener la situación de equilibrio de mercado.
- Plantear el proceso como un modelo evolutivo (por ejemplo, cambios de estrategias mensuales) y presentar los resultados finales de forma acumulada.

Se plantea, por tanto, el desarrollo de un modelo matemático que permita simular el comportamiento de un hipotético mercado de usuarios de un cierto producto ante la oferta presentada por cuatro empresas que parten de las condiciones iniciales diferentes en relación a presupuestos y costes (directos, indirectos, de almacenamiento, de ruptura y de no servicio), y poseen además la capacidad de actuar sobre su precio de venta al público, su inversión en marketing y su inversión en mejoras tecnológicas en cada uno de los pasos del periodo analizado.

4.1.1. Introducción teórica. Conceptos básicos

Un sistema cuyo estado varía a lo largo del tiempo se puede representar mediante una cadena de Markov, donde cada cambio de estado supone una transición de dicho sistema. Por tanto, se trata de un modelo probabilístico empleado para predecir la evolución y el comportamiento de determinados sistemas. Aunque dichos cambios no están definidos, sí lo está la probabilidad del próximo estado en función del anterior. Si el número de estados es finito, como

lo es en el caso que de nuestro problema, por analogía se dice que la cadena de Markov es finita.

Definir una cadena de Markov finita pasa por determinar el conjunto de estados, las transiciones y la ley de probabilidad condicional de un nuevo estado a partir del anterior. Un estado consiste en la caracterización de la situación del sistema en un momento cualquiera. Este estado es una variable cuyos valores sólo pueden pertenecer al conjunto de estados del sistema en un instante concreto.

Se denomina transición al cambio en el tiempo experimentado por el valor del sistema representado por la cadena de Markov. Un modo sencillo de expresar la ley de probabilidad condicional de la cadena es utilizar una matriz de probabilidades de transición o matriz de la cadena. Esta matriz es cuadrada de dimensión igual al número de estados del sistema y sus elementos representan la probabilidad de que el estado próximo sea el que corresponde a la fila si el estado actual es el que corresponde a la columna. Por lo tanto, el sistema evolucionará a alguno de los n estados posibles, tal que,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$$

siendo $a_{ij} \geq 0$, ya que representan probabilidades. Una matriz de una cadena de Markov cuyos elementos verifican estas propiedades se dice que es estocástica. El elemento a_{ij} representa la probabilidad transición de un estado j al i . Denotemos por E_t los posibles estados del sistema. Como se trata de un sistema estocástico, su estado en un determinado momento no será posible conocerlo con certeza, aunque sí la probabilidad asociada a cada estado. En términos de probabilidad condicional se puede expresar,

$$a\{E_t = i, E_{t-1} = j, E_{t-2} = e_{t-2}, \dots, E_{t-k} = e_{t-k}\}$$

siendo i, j y e posibles estados del sistema. Si la cadena de Markov es de orden uno (es decir, si el estado futuro sólo depende del inmediatamente anterior), la expresión anterior es igual a

$$a\{E_t = i, E_{t-1} = j\} = a_{ij}$$

Finalmente, se denomina vector de estado a un vector con ciertas propiedades específicas. Cada componente de este vector define el valor del respectivo estado del sistema en un instante de tiempo determinado.

4.1.2. Modelo de juego de empresas

El citado modelo está basado en la variación del vector de ventas a partir de cambios en la matriz de transición que produce el estado de equilibrio de mercado mediante una serie de funciones matemáticas relativas a la modificación de precios, inversión en marketing y en mejoras tecnológicas. El modelo asume una variación en la matriz de Markov según una función irracional en el caso de la modificación de precios, una función logarítmica para la inversión en marketing y una parábola equilátera para los avances tecnológicos. Para el efecto de los avances tecnológicos sobre los costes variables se ha utilizado una función logarítmica similar a la de marketing. Cada elemento m_{ij} de la matriz de Markov indica la probabilidad de cambio de un estado concreto a otro, es decir, la probabilidad de que un cliente de una empresa i cambie a cualquier otra j (si $j \neq i$, elemento no diagonal) o se mantenga en la empresa actual i (si $j = i$, elemento de la diagonal). Además, al tratarse de probabilidades, cada columna debe sumar 1. Una vez que el cada columna i de la matriz de la cadena de Markov, correspondiente a cada empresa i , es ajustada adecuadamente, esto es, evitando que sus elementos tengan valores superiores a 1 e inferiores a 0, se calculan sus autovalores y sus autovectores. La situación de equilibrio se produce cuando, al multiplicar esa matriz de probabilidades de cambio por el vector de ventas $v^{(k)}$ de un paso k , este permanece inalterado,

$$Mv^{(k)} = v^{(k)}$$

Es decir, el vector de ventas es proporcional al autovector correspondiente al autovalor 1. El modelo se plantea, por tanto, como un sistema evolutivo en el que cada empresa toma decisiones cada ciertos intervalos de tiempo y es capaz de producir una cantidad del producto que puede ser diferente a la máxima posible (de vender) ateniéndose a los consiguientes costes de almacenamiento o de ruptura de stock. En otras palabras, se trata de una simulación empresarial en la que puede analizarse la evolución de cada empresa y estudiarse la estrategia óptima para cada situación particular.

El proceso parte de un estado inicial definido por una matriz de transición en el que probabilidad de cambio de un estado a otro es igual en todos los casos, esto es, los elementos de la matriz de la cadena de Markov son todos iguales a 0,25 para el caso de cuatro empresas.

Los cambios que producen las diferentes decisiones empresariales sobre la distribución de las ventas se pueden considerar modificando la matriz de la cadena de Markov o el vector de estado (ventas). Aquí se ha implementado la segunda opción, que consiste en realizar los cambios adecuados en el vector de ventas mediante alguna función matemática que relacione la distribución de ventas del mercado frente a una acción determinada de una empresa. Las acciones que afectan a la variación de las ventas de un producto serán de tres tipos:

- Modificación de los Precios de Venta al Público.
- Inversión en Marketing del producto.
- Inversión en Mejoras Tecnológicas.

4.1.2.1. Modificación de los Precios de Venta al Público

Al inicio del proceso de la partida, las cuatro empresas participantes en el juego se reparten las ventas totales de forma equitativa. Así, si D es la demanda inicial del mercado del producto fabricado, cada empresa podrá vender $0.25 D$ unidades. Sea v al vector de las ventas posibles de cada empresa. La matriz M de la cadena de Markov asociada al momento inicial del problema será una matriz de 4×4 cuyos términos son todos iguales a 0.25 . Resolviendo el problema de autovalores asociado ($Av = v$), es decir, calculando el autovector asociado al autovector unitario, se obtiene la distribución de equilibrio en las ventas. La hipótesis de distribución de precios inicial asume que todas las empresas venden el producto al mismo precio para el usuario, así como los costes fijos y variables asociados a la fabricación del producto. Los ingresos debidos a las ventas serán función directa de las unidades vendidas por cada empresa y del precio de venta al público, siendo crítica, por tanto, la consideración de ambas variables.

La función que modela la variación de la columna i de la matriz de Markov debido a un cambio en el precio de un producto i vendrá dada por:

$$m_{ii}^{(n+1)} = m_{ii}^{(n)} \left(\delta_p + \sqrt{\delta_p^2 + 4} \right)$$

siendo m_{ii}^{n+1} la probabilidad de permanencia de un comprador de la marca i en la misma firma en el periodo actual, $m_{ii}^{(n)}$ la del periodo

anterior y δ_p el incremento relativo de precios dado por,

$$\delta_p = \tau \frac{p_n - p_{n+1}}{p_0}$$

donde p_{n+1} es el nuevo precio del producto, p_n el precio anterior, p_0 el precio inicial de referencia y τ la pendiente de la curva en la zona positiva. En este caso se ha tomado $\tau = 0.75$.

Es evidente que si el mercado sólo demanda D unidades y una de las empresas realiza una estrategia de bajada de precios que incrementa su probabilidad de permanencia en $\Delta m_{ii}^{(n)} = m_{ii}^{(n+1)} - m_{ii}^{(n)}$, el resto de empresas deben disminuir éstas a fin de que la suma de probabilidades de las empresas sea igual a 1. Este hecho se ha implementado en el modelo utilizado teniendo en cuenta que el incremento positivo o negativo en la empresa i que ha modificado los precios, supone un incremento de signo contrario en el resto de empresas que es distribuido entre ellas de forma equitativa, es decir, dividiendo aquel entre el número de empresas restantes. Si en un paso determinado se producen valores negativos de cualquier $m_{i,j}$ (y, por tanto, algún otro superará la unidad), se igualará a 0. El resto de elementos de la columna correspondiente se ajustará normalizando para que su suma sea la unidad. Esta modificación en la columna i de M permite obtener de forma inmediata los nuevos valores de la matriz de la cadena de Markov. Luego, este proceso se aplicará de forma similar a cada empresa que haya modificado el precio de venta de su producto.

4.1.2.2. Inversión en Marketing del producto

Una vez que se han calculado los efectos de la modificación de precios sobre las ventas, se procede a calcular las consecuencias que tiene sobre las ventas de cada empresa la inversión de una de ellas en los diferentes aspectos del Marketing. En este caso, el modelo implementado es de tipo logarítmico, donde la función que sirve para determinar el incremento de ventas está definida a trozos,

$$\Delta m_{ii}^{(n)} = m_{ii}^{(n+1)} - m_{ii}^{(n)} = \begin{cases} k_m \ln \left(1 + \frac{M_n}{M_l + 1} \right) & \text{si } M_n \leq M_l \\ m_l - m_{ii}^{(n)} & \text{si } M_n > M_l \end{cases}$$

siendo,

$$k_m = \frac{m_l - m_{ii}^{(n)}}{\ln \left(1 + \frac{M_l}{M_l + 1} \right)}$$

$\Delta m_{ii}^{(n)}$ es el incremento producido en la probabilidad de venta m_{ii} ; $m_{ii}^{(n+1)}$ la probabilidad actual de venta de la empresa en estudio i ; $m_{ii}^{(n)}$, la probabilidad de venta antes de la inversión en publicidad; M_n , la inversión de la empresa en Marketing en el paso n ; k_m , una constante que establece los límites definidos para la probabilidad e inversión en Marketing; m_l , la probabilidad de venta máxima que puede obtenerse al invertir en Marketing. M_l , la inversión límite, asociada a m_l , por encima de la cual ya no se aumenta más dicha probabilidad.

En la implementación descrita se ha introducido un valor (M_l) por encima del cual un incremento en la inversión no tiene efecto alguno sobre la probabilidad de venta. Esto es debido a que, para mayores de ese límite, la población que recibe las acciones de Marketing no incrementa su tendencia a comprar el producto publicitado, produciéndose un efecto de saturación de los posibles clientes. Es preciso, por tanto, definir de alguna forma esos límites. En concreto, en este modelo se propone $m_l = 1.2 m_{ii}^{(n)}$ y $M_l = 0.1 R_n$, siendo R_n el máximo presupuesto medio de todas las empresas en ese momento.

Para la construcción de la nueva matriz de la cadena de Markov se sigue el mismo procedimiento que se siguió con la modificación de precios en relación a valores negativos o superiores a 1.

4.1.2.3. Inversión en Mejoras Tecnológicas

Se supone que las cuatro empresas participantes parten desde el comienzo con un nivel de tecnología particular. En cualquier caso, a partir de ese momento, pueden dedicar una parte de su presupuesto a la inversión en mejoras tecnológicas que les permitan destacarse de sus competidoras. Estas mejoras tendrán en nuestro modelo dos efectos importantes. Por un lado, las mejoras en el proceso de fabricación reducirán los costes variables asociados a la fabricación del producto. Por otro, las mejoras técnicas del producto en cuestión tendrán un efecto de reclamo y, por tanto, producirán un incremento en las probabilidades de venta. Para modelar matemáticamente

el efecto de este tipo de inversión en la reducción de costes variables, se hace uso de una función logarítmica similar a la expuesta en el apartado anterior. En este caso, el límite de inversión con efecto sobre los avances tecnológicos viene impuesto por el 7.5 % del presupuesto mayor de estas empresas, es decir, $T_l = 0.075 R_n$. Asimismo, se limita la reducción de costes variables hasta el 5 % del valor inicial ($c_l = 0.95 c_0$). De esta forma, el incremento en los costes variable vendrá dado por,

$$\Delta c_n = c_{n+1} - c_n = \begin{cases} k_{tc} \ln(T_n + 1) & \text{si } T_n \leq T_l \\ c_l - c_0 & \text{si } T_n > T_l \end{cases}$$

siendo,

$$k_{tc} = \frac{c_l - c_0}{\ln(T_l + 1)}$$

Δc_n es el incremento producido en los costes variables; c_{n+1} el coste variable actual de la empresa en estudio; c_n , los costes variables antes de la inversión en Mejoras Tecnológicas; T_n , la inversión de la empresa en Mejoras Tecnológicas en el paso n ; k_{tc} , una constante que establece los límites definidos para la reducción de costes variables e inversión en Mejoras Tecnológicas; c_l , el coste mínimo que se puede obtener al invertir en Mejoras Tecnológicas; T_l , la inversión límite, asociada a c_l , por encima de la cual ya no se reducen los costes variables.

Finalmente, se fija la máxima variación de la probabilidad de venta en un 10 % de las probabilidades anteriores, esto es, $m_l = 1.10 m_{ii}^{(n)}$. Es evidente que las probabilidades de venta aumentarán a medida que la inversión crezca y viceversa. Si utilizamos la hipérbola equilátera para correlacionar las variables probabilidad de venta y la inversa de la inversión tecnológica, se obtiene que,

$$\frac{m_{ii}^{(n)}}{T_n} = \frac{m_{ii}^{(n+1)}}{T_{n+1}}$$

siendo T_n y T_{n+1} las cantidades invertidas en los dos últimos movimientos de la partida. Entonces el incremento de las probabilidades vendrá dado por la función,

$$\Delta m_{ii}^{(n)} = m_{ii}^{(n+1)} - m_{ii}^{(n)} = \begin{cases} k_{tv} T_{n+1} & \text{si } T_{n+1} \leq T_l \\ m_l - m_{ii}^{(n)} & \text{si } T_{n+1} > T_l \end{cases}$$

donde,

$$k_{tv} = \frac{m_l - m_{ii}^{(n)}}{T_l}$$

Por lo tanto, existe un paralelismo total con los modelos empleados en los apartados anteriores. Para aplicar estos incrementos sobre cada columna de probabilidades de venta en la matriz de la cadena de Markov se sigue el mismo método que en los casos anteriores.

4.1.2.4. Toma de decisiones sobre la oferta

Las ventas resultantes de los procedimientos anteriores son las posibles de cada empresa, es decir, las referentes al límite superior de cada una sobre su capacidad de ventas en el paso pertinente.

El modelo implementado contiene un módulo que permite a cada empresa producir un número de unidades que no tiene por qué coincidir con ese límite teórico. De hecho, puede producirse una situación de ruptura, cuando el número de unidades fabricadas sea inferior al límite teórico de la empresa analizada, que puede ser recuperable en la próxima jugada o no, si el cliente está dispuesto a esperar por el producto después de realizar su pedido; una situación en que la demanda sea satisfecha o, por último, otra donde exista exceso de producción frente a la demanda de ese momento, lo que conduce al almacenamiento de parte de las unidades fabricadas. Por otro lado, el modelo implementado tiene en cuenta que el exceso o defecto de productos fabricados del período anterior afecta directamente a los requerimientos de fabricación del período actual.

Para ello, se ha posibilitado el almacenamiento de estos datos de un período al siguiente o el de una hipotética satisfacción de una ruptura producida en un período anterior. Existe una opción para habilitar esta posibilidad. Tanto el almacenamiento de unidades sobrantes como la ruptura de stock por no tener suficientes unidades para afrontar la demanda propia tienen efectos económicos sobre la cuenta de resultados de cada empresa. Por eso es importante que cada una de ellas planee cuidadosamente su siguiente estrategia para reducir al máximo el coste de almacenamiento o el de ruptura. En este sentido, cada empresa deberá sopesar las ventajas e inconvenientes que podría tener la fabricación de una cantidad diferente a la que define el máximo teórico de cada empresa.

4.1.3. Aplicación al mercado del automóvil en la Francia de 1901

El proyecto de este capítulo consistía en aplicar en un juego de empresas los datos que Leon le había suministrado a Fernand que contenía información, en parte confidencial y en parte de dominio público, sobre el incipiente mercado del automóvil en Francia en 1900 y poder justificar de un modo razonable la viabilidad de acaparar una fracción interesante del mercado con la nueva marca Mercedes. La información de interés para las cuatro marcas que le propusieron que estudiara se refleja en la tabla 4.1. Aunque se supone que todas estas cantidades le fue entregada a Fernand, en la práctica para elaborar la tabla, muchas de ellas, como el número de unidades fabricadas de cada modelo de automóvil, fueron extraídas de documentos históricos de la época. Incluso algunos precios aparecen en varias referencias. Otros valores fueron contruidos a partir de beneficios conocidos de alguna de las empresas. En el caso de los costes fijos, se ha utilizado un porcentaje de los costes fijos teóricos en el punto de equilibrio (considerando únicamente como costes no fijos los variables). Para todas las marcas, en la gama alta, este porcentaje fue del 8.9 % aproximadamente, mientras que para la gama baja se tomó alrededor del 39 %. Estas ratios permiten añadir otro tipo de gastos no incluidos aquí en los fijos y los variables, como las inversiones en Mejoras Tecnológicas y en Marketing, manteniendo un amplio margen de beneficios. Con respecto a la inversión en Mejoras Tecnológicas, también cada empresa decidió un porcentaje de sus costes variables medios mensuales. Sin embargo, en este caso, todas las empresas invirtieron 7.5 % en su gama alta y un 3,75 % en su gama baja. Con respecto a la inversión en Marketing, se dejó a cada empresa libertad para fijar un porcentaje de sus beneficios medios mensuales (incluyendo costes variables, fijos e inversión en Mejoras Tecnológicas y las propias de Marketing), diferenciando incluso en cada modelo. En este sentido, la Mercedes invirtió un 10 % y un 22 %, la Peugeot un 12 % y un 22 %, la Penhard et Levassor un 16 % y un 6 % y la Mors un 15 % y un 3 %, para sus gamas alta y baja, respectivamente. Los costes de stock, de no servicio y de ruptura se calcularon de forma idéntica para todas las empresas y modelos. Se trata de costes por unidad de producto, por lo que para cada caso se imputó un porcentaje anual sobre el precio de venta del produc-

to y se repartió de forma equitativa en cada mes. Para el coste de stock se aplicó un 5 %, para el de no servicio un 3 % y para el de ruptura un 10 %.

En el caso de la Mercedes, se disponía de un dato adicional a tener en cuenta: los 72 automóviles tenían un coste de fabricación máximo de 550000 marcos que, con el cambio de divisas de esa época (1.239 francos/marco), equivalían a 681450 francos. En efecto, si se aplican los cálculos correspondientes a sumar los costes fijos, variables, de Marketing y de Mejoras Tecnológicas para la producción de ambos vehículos Mercedes, el resultado es la cantidad anterior, es decir, la invertida por la empresa de Jellinek. Se quedan fuera de este cálculo los costes posteriores relacionados con el stock y el proceso de venta, que se deberán afrontar con los beneficios de las ventas.

Es evidente que cada gama de vehículos estaba destinada a una clientela diferente tanto por el nivel económico como por el tipo de uso que se pretendía dar a los coches. En aquella época la capacidad para comprar cualquiera de estos automóviles estaba solo reservada a ciertas clases con un altísimo poder adquisitivo, más aún si hablamos de la gama alta. Además, adquirir un coche de alta gama era una muestra de poderío económico de su poseedor. Por otro lado, muchos de estos potentes bólidos eran adquiridos para competir con ellos en las pruebas de velocidad de aquellos años. Parece, por tanto, lógico tratar cada gama por separado como si de dos mercados diferentes se tratara.

Comenzando el juego de empresas por el mercado de alta gama, consideraremos que inicialmente todas las marcas dispondrán de un presupuesto equivalente a sus costes fijos, variables, de Marketing y de Mejoras Tecnológicas para todo el periodo de ejecución, que se ha definido de 6 meses, según se indica en la tabla 4.1. Con el fin de hacer competir a las empresas, partiremos de una demanda media mensual inicial de 16 unidades, lo que supone cubrir algo más del 80 % de la oferta total. Esto significa que inicialmente la demanda es inferior a la oferta y, por lo tanto, alguna empresa se quedará con unidades en su stock sin vender. No obstante, la demanda efectiva variará mes a mes ya que se aplicará un incremento aleatorio de $\pm 10\%$ mes a mes.

Tabla 4.1: Información económica relevante de las empresas Mercedes, Peugeot, Penhard et Levassor y Mors. Los datos son relativos a una actividad desarrollada en 6 meses del año 1901. La tabla se ha dividido en dos partes que corresponden a distintos segmentos del mercado del automóvil en 1900. Se ha tomado como unidad monetaria el franco.

Modelos de gama alta										
Modelo de automóvil	Unidades fabricadas (Uds/mes)	Presup. inicial	P.V.P. /ud	Invers. Market. (/mes)	Invers. Mej. Tecn. (/mes)	Costes fijos (/mes)	Costes variables (/mes)	Coste stock (unit.)	Coste no serv. (unit.)	Coste rupt. (unit.)
Mercedes 35 HP	36 (6 × 6)	505863	24000	5969	6323	7032	10831	100	60	200
Peugeot Type 36 6 HP	28 (3 + 5 × 5)	101229	5000	775	1265	831	3000	21	13	42
Penhard et Levassor 30 HP	27 (2 + 5 × 5)	472288	25000	5406	5904	4406	14000	104	63	208
Mors 60 HP	24 (6 × 4)	505831	30000	5354	6323	4628	17000	125	75	250
Modelos de gama baja										
Modelo de automóvil	Unidades fabricadas (Uds/mes)	Presup. inicial	P.V.P. /ud	Invers. Market. (/mes)	Invers. Mej. Tecn. (/mes)	Costes fijos (/mes)	Costes variables (/mes)	Coste stock (unit.)	Coste no serv. (unit.)	Coste rupt. (unit.)
Mercedes DMG-8 HP	36 (6 × 6)	175587	8000	4122	1097	4227	3303	33	20	67
Peugeot Type 33 5 HP	21 (1 + 5 × 4)	59493	4000	899	372	945	2200	17	10	33
Penhard et Levassor A2-7 HP	83 (13 + 5 × 14)	331204	7000	3331	2070	8300	3000	29	18	58
Mors Tonneau 10 HP	100 (15 + 5 × 17)	456471	7500	4892	2853	10000	3500	31	19	63

La estrategia seguida para simular la competencia entre las cuatro marcas fue aplicar de forma constante los respectivos precios, costes e inversiones que se introdujeron al inicio del juego. Los resultados obtenidos siguiendo este plan se representan para los distintos meses en las tablas 4.2, 4.3 y 4.4.

En ellas se muestra la evolución de la venta de los cuatro modelos de automóvil. El modelo de gama alta de la firma Peugeot tiene unas prestaciones más parecidas a los modelos de la gama baja de las otras marcas, pero se incluyó aquí porque era considerado el modelo insignia de la marca en ese periodo. El menor costo de este modelo frente a los otros le posiciona inicialmente en ventaja por su precio tan competitivo. Sin embargo, la inversiones mayores de Mercedes en Marketing y Mejoras tecnológicas, así como un precio de venta menor que sus dos máximos rivales, le sitúan en poco tiempo como líder del mercado. Evidentemente, la estrategia se ha forzado de forma rígida sin capacidad de variación hasta el final. En una aplicación más realista, las empresas habrían reaccionado ante los resultados variando precios, inversión en Marketing y Mejoras Tecnológicas. Por otro lado, la demanda global se ha fijado por debajo de la demanda, cuando en realidad la oferta de estas empresas corresponde a las unidades vendidas en la época. Incluso la variación aleatoria mensual de la demanda ha sido a la baja disminuyendo de las 16 unidades iniciales y luego subiendo a 12 del último mes, lo cual nos sitúa en un escenario muy desfavorable donde aun así la venta de Mercedes fue la más exitosa.

Con respecto al resultado final de esta simulación, lo más relevante son los beneficios sobre el presupuesto inicial de cada empresa, que fueron de 59,76 %, 6,58 %, 23,53 % y 42,78 %, para Mercedes, Peugeot, Penhard et Levassor y Mors, respectivamente. Otro aspecto a destacar es el porcentaje de la demanda que cada empresa conseguido al final del periodo, esto es, en el mismo orden, 34,07 %, 20,88 %, 21,98 % y 23,07 %, respectivamente.

Tabla 4.2: Evolución de las ventas de los modelos de gama alta de las cuatro empresas (meses 1 y 2).

Modelos de gama alta				
Mes 1				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	3	2	4
Demanda de la empresa	3	5	4	3
Ventas de la empresa	3	3	2	3
Clientes en espera	0	2	2	0
Costes variables	10289	2878	13308	14262
Unidades en stock	3	0	10	1
Costes de stock	300	0	0	113
Costes de no servicio	0	26	126	0
Ingresos	72000	15000	50000	81000
Costes Totales	81361	11405	40478	70402
Presupuesto	496502	104067	469944	450044
Mes 2				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	5	5	4
Demanda de la empresa	4	3	4	4
Ventas de la empresa	4	5	5	4
Clientes en espera	0	0	1	0
Costes variables	9748	2755	12614	13523
Unidades en stock	5	0	0	1
Costes de stock	500	0	0	113
Costes de no servicio	0	0	63	0
Ingresos	96000	25000	125000	108000
Costes Totales	78311	16522	76867	67444
Presupuesto	514192	112545	518076	490600

Tabla 4.3: Evolución de las ventas de los modelos de gama alta de las cuatro empresas (meses 3 y 4).

Modelos de gama alta				
Mes 3				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	5	5	4
Demanda de la empresa	4	3	4	3
Ventas de la empresa	4	3	5	3
Clientes en espera	0	0	0	0
Costes variables	9208	2633	11923	12787
Unidades en stock	7	2	0	2
Costes de stock	700	42	0	226
Costes de no servicio	0	0	0	0
Ingresos	96000	15000	125000	81000
Costes Totales	75271	15954	73352	64613
Presupuesto	534920	111592	569724	506986

Mes 4				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	5	5	4
Demanda de la empresa	4	4	3	4
Ventas de la empresa	4	4	3	4
Clientes en espera	0	0	0	0
Costes variables	8674	2512	11240	12059
Unidades en stock	9	3	2	2
Costes de stock	900	63	208	226
Costes de no servicio	0	0	0	0
Ingresos	96000	20000	75000	108000
Costes Totales	72265	15371	70144	61701
Presupuesto	558655	116220	574580	553285

Tabla 4.4: Evolución de las ventas de los modelos de gama alta de las cuatro empresas (meses 5 y 6).

Modelos de gama alta				
Mes 5				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	5	5	4
Demanda de la empresa	7	2	3	4
Ventas de la empresa	7	2	3	4
Clientes en espera	0	0	0	0
Costes variables	8140	2392	10557	11331
Unidades en stock	6	0	6	10
Costes de stock	600	0	624	1250
Costes de no servicio	0	26	0	0
Ingresos	168000	10000	75000	108000
Costes Totales	68963	14832	66939	58792
Presupuesto	657692	111389	582640	602493
Mes 6				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	5	5	4
Demanda de la empresa	9	2	2	3
Ventas de la empresa	8	5	1	0
Clientes en espera	0	0	0	0
Costes variables	7614	2273	9885	10615
Unidades en stock	5	9	7	3
Costes de stock	500	189	728	339
Costes de no servicio	0	0	0	0
Ingresos	216000	10000	50000	81000
Costes Totales	65508	14301	63890	56039
Presupuesto	808184	107088	568751	627454

El segundo estudio está orientado al mercado de gama baja. En este caso, consideraremos también 6 meses de ejecución. Todas las marcas dispondrán de un presupuesto diferente, resultado de cubrir sus gastos principales de forma idéntica al caso de gama alta. La demanda media mensual inicial será de 36 unidades, es decir, un 90 % de la oferta total en esta gama. De forma similar al caso anterior, la demanda efectiva variará mes a mes dado que se aplicará también un incremento aleatorio de $\pm 10\%$, que podrá modificarse cada mes de simulación. Inicialmente las cuatro empresas tendrán un presupuesto igual la suma de sus costes fijos, variables, de Marketing y de Mejoras Tecnológicas para todo el periodo de ejecución, que se ha definido de 6 meses, según se indica en la tabla 4.1.

Nuevamente, la estrategia adoptada consistió en fijar al inicio los respectivos precios, costes e inversiones y mantenerlos constantes en todo el proceso. Los resultados obtenidos siguiendo este plan se representan para los distintos meses en las tablas 4.5, 4.6 y 4.7. En ellas se muestra la evolución de la venta de los cuatro modelos. El modelo de Peugeot sigue teniendo un costo significativamente menor que los otros automóviles, lo que le proporciona cierta ventaja en el mercado. Pero otra vez las inversiones mayores de las otras marcas en Marketing y Mejoras tecnológicas equilibran esa desventaja. Todo ello produce que el modelo de Mercedes se haya vendido completamente y disponga de una amplia cartera de clientes que permanecen a la espera de la llegada de nuevos vehículos para proceder a su compra.

Como resultados destacables de esta simulación, tenemos los beneficios (o pérdidas) sobre el presupuesto inicial de cada empresa. Mercedes obtuvo uno de 72,94 %, Peugeot del 49,54 %, Penhard et Levassor de 25,01 % y Mors 10,12 %, mientras que los porcentajes de cada una sobre la demanda total fueron 23,47 %, 23,50 %, 25,35 % y 28,17 %, respectivamente.

Tabla 4.5: Evolución de las ventas de los modelos de gama baja de las cuatro empresas (meses 1 y 2).

Modelos de gama baja				
Mes 1				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	1	13	15
Demanda de la empresa	10	10	9	9
Ventas de la empresa	6	1	9	9
Clientes en espera	4	9	0	0
Costes variables	3169	2125	2868	3339
Unidades en stock	0	0	4	6
Costes de stock	0	0	116	186
Costes de no servicio	80	90	0	0
Ingresos	48000	4000	63000	67500
Costes Totales	28542	4430	51096	68016
Presupuesto	195045	59062	343108	455955

Mes 2				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	4	14	17
Demanda de la empresa	9	9	10	10
Ventas de la empresa	6	4	10	10
Clientes en espera	7	14	0	0
Costes variables	3036	2049	2735	3178
Unidades en stock	0	0	8	13
Costes de stock	0	0	232	403
Costes de no servicio	140	140	0	0
Ingresos	48000	16000	70000	75000
Costes Totales	27800	10533	52225	72174
Presupuesto	215245	64509	360884	458780

Tabla 4.6: Evolución de las ventas de los modelos de gama baja de las cuatro empresas (meses 3 y 4).

Modelos de gama baja				
Mes 3				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	4	14	17
Demanda de la empresa	9	8	10	9
Ventas de la empresa	6	4	10	9
Cientes en espera	10	18	0	0
Costes variables	2902	1974	2603	3017
Unidades en stock	0	0	12	21
Costes de stock	0	0	348	651
Costes de no servicio	200	180	0	0
Ingresos	48000	16000	70000	67500
Costes Totales	27058	10292	50488	69687
Presupuesto	236187	70216	380395	456593

Mes 4				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	4	14	17
Demanda de la empresa	7	8	8	10
Ventas de la empresa	6	4	8	10
Cientes en espera	11	22	0	0
Costes variables	2768	1899	2470	2856
Unidades en stock	0	0	18	28
Costes de stock	0	0	522	868
Costes de no servicio	220	220	0	0
Ingresos	48000	16000	56000	75000
Costes Totales	26276	10031	48808	67168
Presupuesto	257911	76185	387587	464425

Tabla 4.7: Evolución de las ventas de los modelos de gama baja de las cuatro empresas (meses 5 y 6).

Modelos de gama baja				
Mes 5				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	4	14	17
Demanda de la empresa	8	6	8	10
Ventas de la empresa	6	4	8	10
Clientes en espera	13	24	0	0
Costes variables	2635	1824	2338	2696
Unidades en stock	0	0	24	35
Costes de stock	0	0	696	1085
Costes de no servicio	260	240	0	0
Ingresos	48000	16000	56000	75000
Costes Totales	25516	9751	47132	64653
Presupuesto	280396	82435	396455	474772
Mes 6				
Concepto	Empresa			
	Mercedes	Peugeot	Penhard et Levassor	Mors
Unidades fabricadas	6	4	14	17
Demanda de la empresa	7	6	9	12
Ventas de la empresa	6	4	9	12
Clientes en espera	14	26	0	0
Costes variables	2502	1749	2206	2535
Unidades en stock	0	0	29	40
Costes de stock	0	0	841	1240
Costes de no servicio	280	260	0	0
Ingresos	48000	16000	63000	90000
Costes Totales	24737	9471	45432	62084
Presupuesto	303658	88964	414023	502688

4.2. Valores y vectores propios

4.2.1. Introducción a los valores y vectores propios

Valores y vectores propios

Definición 4.1 *Valor propio.*

Se dice que el número λ , real o complejo, es un valor propio A si existe un vector no nulo u , real o complejo tal que

$$Au = \lambda u,$$

es decir,

$$(A - \lambda I)u = 0$$

Definición 4.2 *Vector propio.*

El vector u se denomina vector propio de A asociado al valor propio λ .

Definición 4.3 *Polinomio característico.*

En general, el polinomio que resulta de desarrollar $|A - \lambda I|$, cuyos ceros son precisamente los valores propios de A , se denomina polinomio característico.

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

- $\sum_{i=1}^n \lambda_i = -\frac{a_1}{(-1)^n} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr} A$
- $\prod_{i=1}^n \lambda_i = a_n = |A|$

Definición 4.4 *Radio espectral.*

Se denomina radio espectral ρ de una matriz A al valor

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

Propiedades

Propiedades 4.1 *Valores propios de una matriz cualquiera.*

- *Si λ es complejo, entonces u es complejo.*
- *Los valores propios de $B = C^{-1}AC$ son los mismos de A . Si x es el vector propio asociado a λ , entonces Cx es un vector propio de B asociado a λ .*

Propiedades 4.2 Valores propios de matrices simétricas.

- Si D es la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores propios de A , entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $D = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$.
- Asimismo, existen n vectores propios de A que forman un conjunto ortonormal, y coinciden con las columnas de la matriz ortogonal Q .
- Todos los valores propios de A son reales.
- A es definida positiva si y solo si todos los valores propios de A son positivos.

4.2.2. Teoremas principales

Teorema 4.1 Teorema de Cayley-Hamilton.

Sea A una matriz cuyo polinomio característico es,

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

entonces la matriz A verifica,

$$(-1)^n A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I = 0$$

Teorema 4.2 Teorema de Schur.

Sea A una matriz $n \times n$ cualquiera. Entonces existe una matriz U ortogonal tal que

$$T = U^{-1}AU$$

siendo T una matriz triangular superior cuyos elementos diagonales son los valores propios de A .

El conocimiento del espectro de una matriz, esto es, el conjunto de sus valores propios, tiene mucho interés a la hora de estudiar su condicionamiento para aplicar métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. El teorema de Gerschgorin define la zona donde se encuentra dicho espectro.

Teorema 4.3 Teorema de Gerschgorin.

Sea A una matriz $n \times n$ y denotemos por R_i el círculo del plano complejo

con centro a_{ii} y radio $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, es decir,

$$R_i = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|\}$$

donde C denota el conjunto de los números complejos. Entonces los valores propios de A están contenidos en $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$. Es más, si la unión de k de estos círculos no se corta con los restantes $n - k$, entonces dicha unión contiene k valores propios (incluyendo los valores propios múltiples)

4.2.3. Métodos de obtención del polinomio característico

Método de Krylov

Se basa en el teorema de Cayley-Hamilton ($P(A) = 0$):

$$(-1)^n A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I = 0$$

Multiplicando por x resulta,

$$(-1)^n A^n x + a_1 A^{n-1} x + \dots + a_n x = 0$$

Si $A^{n-i} x = v_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$, se obtiene el sistema lineal

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = (-1)^{n+1} A^n x$$

cuya resolución nos proporciona los coeficientes a_i de $P(\lambda)$.

El método de Krylov, basado en el teorema de Cayley-Hamilton, conduce a la obtención de los coeficientes del polinomio característico. Sin embargo, para el caso de matrices de orden elevado suele resultar excesivamente costoso.

Método de Leverrier modificado

Se basa en la fórmula de Newton. Sea el polinomio de grado n

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}, a_0 = 1$$

y la suma

$$S_k = \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

La fórmula de Newton nos da la siguiente relación entre S_k y a_k ,

$$ka_k + S_k + \sum_{i=1}^{k-1} S_i a_{k-i} = 0$$

Fórmulas de Leverrier o de Faddeev

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k} \text{tr}(AB_{k-1}), & k = 1, 2, \dots, n \\ B_k &= -AB_{k-1} + a_k I, & k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

siendo $B_0 = I$ y $B_n = 0$.

Algoritmo 4.1 Leverrier Modificado.

Dada una matriz A

$$A_1 = A$$

$$a_1 = \text{tr}(A_1)$$

$$B_1 = A_1 - a_1 I$$

Para $i = 2$ hasta n **Hacer**

$$A_i = B_{i-1} A$$

$$a_i = \frac{1}{i} \text{tr}(A_i)$$

$$B_i = A_i - a_i I$$

Fin Para

El método de Leverrier modificado construye de forma recursiva los coeficientes del polinomio característico, aunque su coste para matrices de orden elevado puede ser prohibitivo.

$$\begin{array}{lll} A_1 = A & a_1 = \text{tr}(A_1) & B_1 = A_1 - a_1 I \\ A_2 = B_1 A & a_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(A_2) & B_2 = A_2 - a_2 I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n = B_{n-1} A & a_n = \frac{1}{n} \text{tr}(A_n) & B_n = A_n - a_n I \end{array}$$

donde los a_i son los coeficientes del polinomio característico.

Como resultado se puede aplicar el método para calcular la inversa de la matriz A . En efecto, como $B_n = 0$, se obtiene que $A^{-1} = \frac{1}{a_n} B_{n-1}$.

4.2.4. Métodos de obtención de algunos valores propios

Métodos de las potencias

El método de las potencias permite aproximar el valor absoluto del mayor valor propio de una matriz, utilizando simplemente productos matriz-vector.

Sucesión de los vectores del subespacio de Krylov
Supongamos que los valores propios de una matriz A cumplen,

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Consideremos cualquier vector v , que puede ser escrito

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = v_0$$

Entonces multiplicando por la matriz A se tiene,

$$\begin{aligned} v_1 &= Av_0 = Av = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i u_i \\ v_2 &= Av_1 = A^2 v = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \alpha_i u_i \\ &\dots \dots \dots \\ v_k &= Av_{k-1} = A^k v = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \alpha_i u_i \\ v_k &= \lambda_1^k \left(\alpha_1 u_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k u_i \right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Luego el límite del cociente de las componentes r -ésimas de dos vectores consecutivos resulta,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(v_{k+1})_r}{(v_k)_r} = \lambda_1 \frac{\alpha_1 (u_1)_r + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{k+1} (u_i)_r}{\alpha_1 (u_1)_r + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k (u_i)_r} = \lambda_1$$

si $\alpha_1 \neq 0$ y $(u_1)_r \neq 0$.

Para evitar que los v_i sean muy grandes, se suele construir la sucesión normalizada,

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{Av}{\|Av\|_\infty} \\ w_2 &= \frac{Aw_1}{\|Aw_1\|_\infty} \\ \dots &\dots \dots\dots\dots\dots\dots \\ w_k &= \frac{Aw_{k-1}}{\|Aw_{k-1}\|_\infty} \end{aligned}$$

siendo, en este caso

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(Aw_{k+1})_j}{(w_k)_j} = \lambda_1$$

donde j hace referencia a la posición de una componente cualquiera de esos vectores.

Algoritmo 4.2 Potencias.

Dada una matriz A de orden $n \times n$, cualquier vector v de orden n , cualquier j , $1 \leq j \leq n$

$$w_1 = \frac{Av}{\|Av\|_\infty}$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$w_2 = \frac{Aw_1}{\|Aw_1\|_\infty}$$

$$\lambda_2 = \frac{(Aw_2)_j}{(w_1)_j}$$

$$i = 3$$

Mientras $|\lambda_i - \lambda_{i-1}| > \varepsilon$ **Hacer**

$$w_i = \frac{Aw_{i-1}}{\|Aw_{i-1}\|_\infty}$$

$$\lambda_i = \frac{(Aw_i)_j}{(w_{i-1})_j}$$

$$i = i + 1$$

Fin Mientras

4.2.5. Ejercicios

Ejercicio 4.1 Se dispone de un bus de 10 servidores que contienen mensajes. Cada segundo, los servidores pueden enviar mensajes a los servidores adyacentes, al de la derecha con probabilidad 0.5 y al de la izquierda con probabilidad 0.3. Debido a la sobrecarga, parte de los mensajes no son enviados y permanecen en la cola de envíos hasta que llegue su turno.

a. El vector $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_{10}^{(k)})$ expresa la distribución de los mensajes entre los servidores en el tiempo k . Construir la matriz M de la cadena de Markov en la línea de comandos de MATLAB tal que $x^{(k+1)} = Mx^{(k)}$.

b. Determinar la situación de equilibrio en la distribución.

c. Si en un instante t la distribución es $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1)$, ¿cuál era la distribución anterior?

Ejercicio 4.2 La oferta de gasolina de 98 octanos para locomoción en una provincia está concentrada en seis compañías A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6 . El consumo mensual de esta gasolina es de 16000000 de litros. Cada litro de gasolina vendido produce un beneficio de 0.3 euros independientemente de la compañía. La cadena de Markov del mercado está representada por la siguiente matriz de transición semanal entre las marcas, cuyos términos son todos positivos y tales que la suma de los términos de cada columna es 1,

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.0 & 0.5 & 0.2 & 0.0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$$

donde a_{ij} representa la probabilidad de que una persona que llena su depósito en los surtidores de A_j pase a llenarlo en A_i . Cuánto debe estar dispuesta a invertir en publicidad mensualmente la empresa A_6 , para mejorar su imagen en el mercado con el fin de cambiar la sexta columna a $[0.1, 0.1, 0.0, 0.1, 0.0, 0.7]$.

Ejercicio 4.3 Supongamos que las probabilidades de que una persona que utiliza una marca X se cambie a la marca Y o a la Z son, respectivamente,

0.4 y 0.2; que las probabilidades de que una persona que utiliza una marca Y se cambie a la marca X o a la Z son, respectivamente, 0.2 y 0.2; y que las probabilidades de que una persona que utiliza una marca Z se cambie a la marca X o a la Y son, respectivamente, 0.1 y 0.1. La ecuación de transición para esta cadena de Markov es

$$P_{k+1} = AP_k = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

Determinar la distribución estable para una ciudad de 80000 habitantes.

Ejercicio 4.4 Una empresa comercializa sus productos en 10 tiendas diferentes. Cada año el 5 % de los productos de la tienda i se trasladan a la tienda $i + 1$, y el 7 % a la tienda $i - 1$.

a. Escribir en la línea de comandos de MATLAB la matriz que proporciona el número de productos que hay en cada tienda a partir de los que había el año anterior.

b. Un determinado año n , el número de productos en cada una de las 10 tiendas viene dado por el vector,

(10800, 28100, 22200, 45900, 13300, 21800, 64000, 25500, 58200, 80200)

¿Cuál será este número al año siguiente?

c. Un nuevo gerente llega a la empresa y se encuentra el siguiente número de productos en cada una de las 10 tiendas,

(10300, 19800, 29800, 39800, 49800, 59800, 67300, 33800, 46600, 13000)

Averiguar la distribución de productos que había en año anterior.

d. ¿Se puede prever una distribución de productos en cada tienda a largo plazo?

Ejercicio 4.5 Se considera un modelo para el estudio de las probabilidades de ganar un Gran Premio de Fórmula 1. Por simplicidad, solo se estudian individualmente los pilotos Kimi Räikkönen, Lewis Hamilton, Fernando

Alonso y Felipe Massa, y el resto de forma conjunta. La cadena de Markov del modelo fue construida en función de las posiciones de cada piloto en los Grandes Premios de la pasada temporada y está representada por la siguiente tabla, cuyos términos son todos positivos y tales que la suma de los términos de cada columna es 1,

Piloto	K. R.	L. H.	F. A.	F. M.	Otros
K. R.	0.1765	0.2121	0.3030	0.2821	0.2553
L. H.	0.2940	0.1212	0.2425	0.2051	0.2553
F. A.	0.2060	0.3030	0.1212	0.2564	0.2766
F. M.	0.1765	0.2425	0.1818	0.0769	0.2128
Otros	0.1470	0.1212	0.1515	0.1795	0.0000

donde a_{ij} representa la probabilidad de que un piloto i quede por delante de otro j en un gran premio $\forall i \neq j$, y a_{ii} es la probabilidad de que el piloto i quede el primero. La situación de equilibrio proporciona los porcentajes de carreras donde cada piloto quedaría por delante del resto. Atendiendo a estos porcentajes, cómo estaría constituido el podium final.

Ejercicio 4.6 Una empresa tiene montada una granja de gallinas. Las hembras, que son vendidas a los 9 meses, tienen una tasa de supervivencia de 0.625 durante el primer mes, de 0.635 durante el segundo, de 0.628 durante el tercero, de 0.620 durante el cuarto, de 0.578 durante el quinto, de 0.515 durante el sexto, de 0.362 durante el séptimo, de 0.361 durante el octavo y de 0.366439090416 durante el noveno. Además, cada hembra produce 13 nuevas hembras durante el sexto mes, 15 durante el séptimo, 18 durante el octavo y 20 durante el noveno. La matriz que describe la contribución de una gallina a la población de gallinas del mes siguiente es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 15 & 18 & 20 \\ 0.625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.635 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.628 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.620 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.578 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.515 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.362 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.361 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.366439090416 & 0 \end{pmatrix}$$

donde el elemento a_{ij} representa la contribución probabilística de una sola gallina de edad j a la población de gallinas de edad i del mes siguiente. Es-

tudiar si existe una situación de equilibrio para la población de gallinas. Si la población final de gallinas es de 3810 unidades, cuál sería la distribución por edades (aproximando a valores enteros).

Ejercicio 4.7 Supongamos que tres empresas se disputan el mercado del trigo en la situación de equilibrio anterior. La cadena de Markov del mercado viene definida por la siguiente tabla:

Empresa	C. DE F. S.A.	A. S.A.	C. S.A.
Cortijo de Frías S.A.	0.5	0.3	0.2
Agrocampina S.A.	0.3	0.4	0.4
Corbasa S.A.	0.2	0.3	0.4

donde el término a_{ij} representa la probabilidad de que una persona que consume la marca j pase a consumir la marca i . Calcular la distribución de equilibrio de cada empresa.

Ejercicio 4.8 En un juego de tiro al blanco compiten cuatro jugadores, A, B, C y D, respectivamente. Se ha estudiado la evolución de aciertos de los tiradores y se ha modelizado mediante una cadena de Markov, donde cada elemento de la matriz que la define corresponde a la probabilidad de que un tirador aumente o disminuya los aciertos a costa de otro:

Tirador	A	B	C	D
A	0.55	0.22	0.13	0.10
B	0.30	0.40	0.20	0.10
C	0.05	0.28	0.47	0.20
D	0.10	0.10	0.20	0.60

Obtener la situación de equilibrio del juego, indicando el porcentaje de aciertos de cada uno.

Ejercicio 4.9 La distribución de la producción de energía eléctrica de un determinado país viene dada por una cadena de Markov del mercado, donde cada elemento de la matriz que la define corresponde a la probabilidad de que un sector productivo pierda o gane cuota de mercado con respecto a otro. En este caso, consideraremos cuatro sectores: Fósil, Nuclear, Alternativas y Otras,

Sector	Fósil	Nuclear	Alternat.	Otras
Fósil	0.53	0.21	0.15	0.11
Nuclear	0.29	0.33	0.22	0.16
Alternat.	0.05	0.25	0.46	0.24
Otras	0.13	0.21	0.17	0.49

Obtener la situación de equilibrio del mercado, indicando la cuota de mercado acaparada por cada sector.

Ejercicio 4.10 Para los clientes de un Banco, en la actualidad hay disponibles tres planes de inversión A, B y C. Un cliente solo puede usar un plan a la vez y puede cambiar de uno a otro solo al final de cada año. La probabilidad de que alguien en el plan A continúe con él es del 30 % y de que cambie a B es del 10 %. La probabilidad de que alguien en el plan B continúe con él es del 40 % y de que cambie a A es del 20 %. La probabilidad de que alguien en el plan C continúe con él es del 50 % y de que cambie a A es del 50 %.

a. Construir la matriz de transición para los clientes.

b. Cuál de los planes es el más popular y cuál el menos popular a largo plazo.

Ejercicio 4.11 Tres tipos de fuentes de energía se disputan el mercado del suministro de energía eléctrica en la situación de equilibrio anterior: los combustibles fósiles (CF), la energía eólica (EE) y la Energía solar (ES). La cadena de Markov del mercado viene definida por la siguiente tabla,

Fuente	CF	EE	ES
CF	0.7	0.3	0.0
EE	0.2	0.4	0.4
ES	0.1	0.3	0.6

donde el término ij representa la probabilidad de que un consumidor de energía obtenida de una fuente tipo j pase a consumir energía producida por una fuente tipo i . Calcular la distribución de equilibrio del mercado de energía.

Ejercicio 4.12 Una empresa sufre una plaga de larvas de la mariposa nocturna Modest Sphinx (*Pachysphinx Modesta*). La matriz de transición de

la evolución de la población diaria para los días de una semana es,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 7 & 13 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 20 & 7 & 17 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 0 \end{pmatrix}$$

donde el elemento a_{ij} representa la contribución probabilística de una sola hembra de edad j a la población de hembras de edad i del día siguiente. Indicar si la plaga desaparecerá por sí sola o si habrá que fumigar.

Ejercicio 4.13 Una empresa se dedica a desarrollar expediciones aeroespaciales. Para definir el alcance de las expediciones debe conocer los tipos de experimentos demandados por sus potenciales clientes. Las posibles opciones a elegir para la próxima oferta son tres: no viajar, expedición a la Luna y expedición a Marte. Respectivamente, la matriz de la cadena de Markov relativa a las probabilidades de demanda de los clientes es,

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Atendiendo al estado de equilibrio del mercado, deducir cuál es la opción más rentable para la empresa.

Ejercicio 4.14 Se considera el movimiento horizontal del sistema de masas y resortes representado en la figura. Los desplazamientos x_1 , x_2 y x_3 de las masas $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ y $m_3 = 1$ (dadas en kg) se miden a partir de la posición de equilibrio estático del sistema. Las rigideces de los resortes $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$ y $k_4 = 5$ (dadas en $kg\ s^{-2}$) son las fuerzas necesarias para estirarlos o comprimirlos una unidad de longitud. Las ecuaciones del movimiento del sistema son,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= k_2 x_1(t) - (k_2 + k_3)x_2(t) + k_3 x_3(t) \\ m_3 \ddot{x}_3(t) &= k_3 x_2(t) - (k_3 + k_4)x_3(t) \end{aligned}$$

Sustituyendo $x_i(t) = b_i e^{j\omega t}$, para $i = 1, 2, 3$, resulta el problema de auto-
valores,

$$\begin{pmatrix} \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-(k_2+k_3)}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & \frac{-(k_3+k_4)}{m_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Los valores que ω puede tomar representan las frecuencias circulares natu-
rales de vibración del sistema. Deducir los desplazamientos en función del
tiempo a partir del cálculo de los valores y vectores propios.

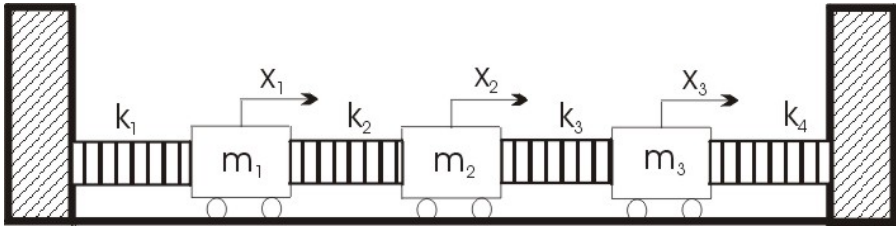


Figura 4.1: Sistema de resortes

Ejercicio 4.15 La figura representa un esquema de las dos principales ma-
sas giratorias de un motor de dos cilindros y del volante concéntrico con
ellas. $I_1 = 2$, $I_2 = 2$ e $I_3 = 10$ son los momentos de inercia (en $N m s^{-2}$)
de las tres masas. Las rigideces $k_1 = 4 \cdot 10^6$ y $k_2 = 5 \cdot 10^6$ (en $N m$) son
los momentos necesarios para producir un giro relativo en los extremos de
cada tramo de una unidad angular. θ_1 , θ_2 y θ_3 son los giros de las masas
con respecto a una posición inicial.

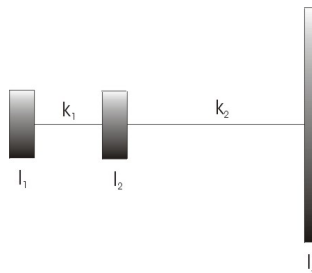


Figura 4.2: Sistema de volantes

Igualando el momento exterior al producto del momento de inercia de cada masa por su aceleración angular, se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1(t) &= -k_1 \theta_1(t) + k_1 \theta_2(t) \\ I_2 \ddot{\theta}_2(t) &= k_1 \theta_1(t) - (k_1 + k_2) \theta_2(t) + k_2 \theta_3(t) \\ I_3 \ddot{\theta}_3(t) &= k_2 \theta_2(t) - k_2 \theta_3(t) \end{aligned}$$

Calcular las frecuencias naturales y los vectores de desplazamientos relativos asociados para cada sistema de oscilaciones torsionales.

Ejercicio 4.16 *En una población la oferta de agua mineral está concentrada en cinco marcas A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 . El consumo semanal de agua mineral es de 5000000 de litros, 10 litros por persona a la semana. Cada litro de agua vendido produce un beneficio de 0.1 euro independientemente de la marca. De forma empírica se ha construido una cadena de Markov del mercado, representada por la siguiente matriz de transición semanal entre las marcas, cuyos términos son todos positivos y tales que la suma de los términos de cada columna es 1,*

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

donde a_{ij} representa la probabilidad de que una persona que consume la marca A_j pase a consumir la marca A_i . Una campaña publicitaria le costaría a la empresa que produce la marca A_1 1000000 de euros al mes, pero su imagen se haría más fuerte en el mercado cambiando la primera columna a $[0.3, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3]$. Estudiar si la empresa debe o no invertir en publicidad.

Ejercicio 4.17 *Hallar las tensiones y direcciones principales de siguiente matriz si ésta representa el estado de tensiones de un sólido rígido sometido a una serie de esfuerzos.*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.18 Los consumidores de café en una zona de Gran Canaria usan tres marcas A, B, C. En marzo de 2014 se hizo una encuesta en lo que entrevistó a las 25700 personas que compran café y los resultados fueron:

Compra actual	Marca A	Marca B	Marca C
Marca A	6425	3855	1799
Marca B	8995	16705	3341
Marca C	10280	5140	20560
Total	25700	25700	25700

donde el término a_{ij} representa la probabilidad de que una persona que consume la marca j pase a consumir la marca i . A la larga, ¿cómo se distribuirán los clientes de café?

Ejercicio 4.19 Supongamos que las probabilidades de que una persona que utiliza una marca X se cambie a la marca Y o a la Z son, respectivamente, 0.4 y 0.2; que las probabilidades de que una persona que utiliza una marca Y se cambie a la marca X o a la Z son, respectivamente, 0.2 y 0.2; y que las probabilidades de que una persona que utiliza una marca Z se cambie a la marca X o a la Y son, respectivamente, 0.1 y 0.1. La ecuación de transición para esta cadena de Markov es

$$p_{k+1} = Ap_k = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

Obtener la distribución de equilibrio x, y, z , para 8000 habitantes.

Ejercicio 4.20 En un artículo de Dorn y Burdick, se informa de que la longitud media de las alas de la mosca de la fruta (*Drosophila melanogaster*) que resulta cuando se cruzan tres variedades mutantes de dicha especie puede expresarse mediante la matriz simétrica,

$$A = \begin{pmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{pmatrix}$$

donde a_{ij} denota la longitud media de las alas de una cría nacida del cruce de un macho tipo i con una hembra tipo j .

Determinar los autovalores y autovectores de la matriz A .

Ejercicio 4.21 Según establece el teorema de diagonalización de matrices,

$$V^{-1}AV = B$$

donde, V es la matriz de autovectores de A y B es una matriz diagonal semejante a A , en la cual, los términos de la diagonal principal son los autovalores de matriz A . Comprobar que el teorema se cumple para la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.22 La representación en el espacio de estados del circuito eléctrico de la figura es la que se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

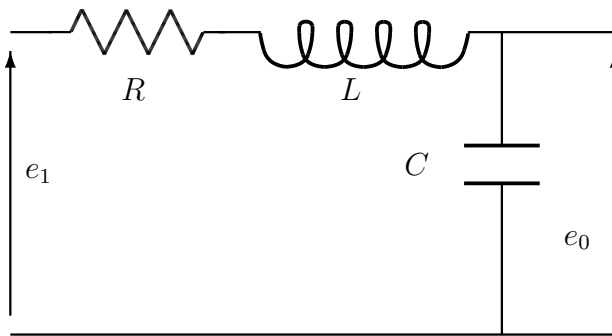


Figura 4.3: Circuito eléctrico

Debido a la mayor funcionalidad de la representación, se propone modificarla, para que la matriz A quede como diagonal para lo cual se propone el cambio de variables $x = Pz$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

siendo λ_i , $i = 1, 2$, los autovalores de la matriz A .

Datos: $L = 10 \text{ mH}$, $C = 100 \mu\text{F}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$.

Ejercicio 4.23 Una estructura de hormigón está deteriorada en un 25 %, debido un proceso de corrosión. Se envuelve la estructura en una malla de titanio a la que se aplica un microvoltaje que invierte el proceso químico de corrosión, logrando que mensualmente se recupere el 40 % de la zona deteriorada, aunque se sigue deteriorando mensualmente un 20 % de la zona sana. ¿Cual será la situación a los 3 meses? ¿Y a los 10 meses?

Ejercicio 4.24 De acuerdo al siguiente circuito, se desea obtener las fórmulas de las tensiones, es decir de los voltajes $V_1(t)$ y $V_2(t)$ que describen cómo éstos cambian con el tiempo a consecuencia de las pérdidas de tensión debidas a las resistencias R_1 y R_2 .

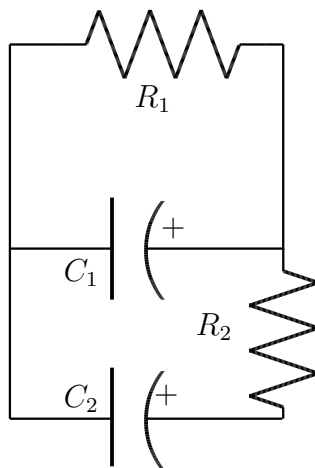


Figura 4.4: Circuito eléctrico

Se supone que el valor de las resistencias es $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, de los capacitores $C_1 = 2 \text{ F}$, $C_2 = 1 \text{ F}$ y que la carga inicial sobre el capacitor C_1 es de 5 V y sobre el C_2 es de 4 V. Los capacitores C_1 y C_2 almacenan cargas porque se les suministró 5 V y 4 V, respectivamente (representado por el vector inicial x_0). Luego se retiran los generadores y se estudia el comportamiento de los voltajes a lo largo del tiempo en el recorrido del circuito. Este circuito idealizado, puede escribirse por medio del sistema diferencial,

$$\begin{pmatrix} V_1'(t) \\ V_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R_1 + R_2)/C_1 & R_2/C_1 \\ R_2/C_2 & -R_2/C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Según los datos, $x_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, esto es, los valores iniciales del vector $x = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.25 Se tienen 120 ratones en una caja distribuidos en tres salas conectadas entre sí como se indica en la figura.

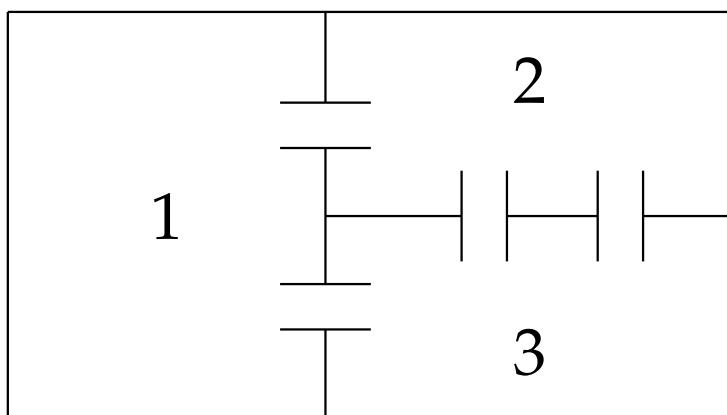


Figura 4.5: Caja con ratones

Cada ratón se mueve de la sala que ocupa a otra eligiendo una puerta aleatoriamente (las puertas se abren cada minuto y, cuando lo hacen, los ratones son forzados a moverse ya que el suelo de la sala ocupada queda electrificado).

- Obtener la matriz de transición para la cadena de Markov.
- Cuando haya pasado largo tiempo, ¿cuál será la distribución de ratones en cada sala?