4.1. Juego de empresas

El objetivo de este proyecto consiste en desarrollar un modelo matemático para la simulación de un juego de empresas simple en el que participen cuatro empresas, utilizando la teoría de las cadenas de Markov. Además, el modelo implementado permitirá guardar al final de cada partida la información necesaria para reiniciar nuevas simulaciones a partir de las condiciones finales de dicha partida.

Deben considerarse los siguientes aspectos y requisitos:

- Establecer las condiciones de partida para cuatro empresas.
- Definir los datos que influirán en el proceso, así como las funciones que regirán esa influencia.
- Construir la matriz de la cadena de Markov y obtener la situación de equilibrio de mercado.
- Plantear el proceso como un modelo evolutivo (por ejemplo, cambios de estrategias mensuales) y presentar los resultados finales de forma acumulada.

Se plantea, por tanto, el desarrollo de un modelo matemático que permita simular el comportamiento de un hipotético mercado de usuarios de un cierto producto ante la oferta presentada por cuatro empresas que parten de las condiciones iniciales diferentes en relación a presupuestos y costes (directos, indirectos, de almacenamiento, de ruptura y de no servicio), y poseen además la capacidad de actuar sobre su precio de venta al público, su inversión en marketing y su inversión en mejoras tecnológicas en cada uno de los pasos del periodo analizado.

4.1.1. Introducción teórica. Conceptos básicos

Un sistema cuyo estado varía a lo largo del tiempo se puede representar mediante una cadena de Markov, donde cada cambio de estado supone una transición de dicho sistema. Por tanto, se trata de un modelo probabilístico empleado para predecir la evolución y el comportamiento de determinados sistemas. Aunque dichos cambios no están definidos, sí lo está la probabilidad del próximo estado en función del anterior. Si el número de estados es finito, como lo es en el caso que de nuestro problema, por analogía se dice que la cadena de Markov es finita.

Definir una cadena de Markov finita pasa por determinar el conjunto de estados, las transiciones y la ley de probabilidad condicional de un nuevo estado a partir del anterior. Un estado consiste en la caracterización de la situación del sistema en un momento cualquiera. Este estado es una variable cuyos valores sólo pueden pertenecer al conjunto de estados del sistema en un instante concreto.

Se denomina transición al cambio en el tiempo experimentado por el valor del sistema representado por la cadena de Markov. Un modo sencillo de expresar la ley de probabilidad condicional de la cadena es utilizar una matriz de probabilidades de transición o matriz de la cadena. Esta matriz es cuadrada de dimensión igual al número de estados del sistema y sus elementos representan la probabilidad de que el estado próximo sea el que corresponde a la fila si el estado actual es el que corresponde a la columna. Por lo tanto, el sistema evolucionará a alguno de los n estados posibles, tal que,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$$

siendo $a_{ij} \geq 0$, ya que representan probabilidades. Una matriz de una cadena de Markov cuyos elementos verifican estas propiedades se dice que es estocástica. El elemento a_{ij} representa la probabilidad transición de un estado j al i. Denotemos por E_t los posibles estados del sistema. Como se trata de un sistema estocástico, su estado en un determinado momento no será posible conocerlo con certeza, aunque sí la probabilidad asociada a cada estado. En términos de probabilidad condicional se puede expresar,

$$a\{E_t = i, E_{t-1} = j, E_{t-2} = e_{t-2}, \ldots, E_{t-k} = e_{t-k}\}$$

siendo i, j y e posibles estados del sistema. Si la cadena de Markov es de orden uno (es decir, si el estado futuro sólo depende del inmediatamente anterior), la expresión anterior es igual a

$$a\{E_t = i, E_{t-1} = j\} = a_{ij}$$

Finalmente, se denomina vector de estado a un vector con ciertas propiedades específicas. Cada componente de este vector define el valor del respectivo estado del sistema en un instante de tiempo determinado.

4.1.2. Modelo de juego de empresas

El citado modelo está basado en la variación del vector de ventas a partir de cambios en la matriz de transición que produce el estado de equilibrio de mercado mediante una serie de funciones matemáticas relativas a la modificación de precios, inversión en marketing y en mejoras tecnológicas. El modelo asume una variación en la matriz de Markov según una función irracional en el caso de la modificación de precios, una función logarítmica para la inversión en marketing y una parábola equilátera para los avances tecnológicos. Para el efecto de los avances tecnológicos sobre los costes variables se ha utilizado una función logarítmica similar a la de marketing. Cada elemento m_{ij} de la matriz de Markov indica la probabilidad de cambio de un estado concreto a otro, es decir, la probabilidad de que un cliente de una empresa i cambie a cualquier otra j (si $j \neq i$, elemento no diagonal) o se mantenga en la empresa actual i (si $j = i$, elemento de la diagonal). Además, al tratarse de probabilidades, cada columna debe sumar 1. Una vez que el cada columna i de la matriz de la cadena de Markov, correspondiente a cada empresa i, es ajustada adecuadamente, esto es, evitando que sus elementos tengan valores superiores a 1 e inferiores a 0, se calculan sus autovalores y sus autovectores. La situación de equilibrio se produce cuando, al multiplicar esa matriz de probabilidades de cambio por el vector de ventas $v^{(k)}$ de un paso k, este permanece inalterado,

$$Mv^{(k)} = v^{(k)}$$

Es decir, el vector de ventas es proporcional al autovector correspondiente al autovalor 1. El modelo se plantea, por tanto, como un sistema evolutivo en el que cada empresa toma decisiones cada ciertos intervalos de tiempo y es capaz de producir una cantidad del producto que puede ser diferente a la máxima posible (de vender) ateniéndose a los consiguientes costes de almacenamiento o de ruptura de stock. En otras palabras, se trata de una simulación empresarial en la que puede analizarse la evolución de cada empresa y estudiarse la estrategia óptima para cada situación particular.

El proceso parte de un estado inicial definido por una matriz de transición en el que probabilidad de cambio de un estado a otro es igual en todos los casos, esto es, los elementos de la matriz de la cadena de Markov son todos iguales a 0,25 para el caso de cuatro empresas.

Los cambios que producen las diferentes decisiones empresariales sobre la distribución de las ventas se pueden considerar modificando la matriz de la cadena de Markov o el vector de estado (ventas). Aquí se ha implementado la segunda opción, que consiste en realizar los cambios adecuados en el vector de ventas mediante alguna función matemática que relacione la distribución de ventas del mercado frente a una acción determinada de una empresa. Las acciones que afectan a la variación de las ventas de un producto serán de tres tipos:

- Modificación de los Precios de Venta al Público.
- Inversión en Marketing del producto.
- Inversión en Mejoras Tecnológicas.

4.1.2.1. Modificación de los Precios de Venta al Público

Al inicio del proceso de la partida, las cuatro empresas participantes en el juego se reparten las ventas totales de forma equitativa. Así, si D es la demanda inicial del mercado del producto fabricado, cada empresas podrá vender $0.25\,D$ unidades. Sea v al vector de las ventas posibles de cada empresa. La matriz M de la cadena de Markov asociada al momento inicial del problema será una matriz de 4×4 cuyos términos son todos iguales a 0.25. Resolviendo el problema de autovalores asociado ($Av = v$), es decir, calculando el autovector asociado al autovector unitario, se obtiene la distribución de equilibrio en las ventas. La hipótesis de distribución de precios inicial asume que todas las empresas venden el producto al mismo precio para el usuario, así como los costes fijos y variables asociados a la fabricación del producto. Los ingresos debidos a las ventas serán función directa de las unidades vendidas por cada empresa y del precio de venta al público, siendo crítica, por tanto, la consideración de ambas variables.
La función que modela la variación de la columna i de la matriz de Markov debido a un cambio en el precio de un producto i vendrá dada por:

$$m_{ii}^{(n+1)} = m_{ii}^{(n)} \left(\delta_p + \sqrt{\delta_p^2 + 4} \right)$$

siendo m_{ii}^{n+1} la probabilidad de permanencia de un comprador de la marca i en la misma firma en el periodo actual, $m_{ii}^{(n)}$ la del periodo anterior y δ_p el incremento relativo de precios dado por,

$$\delta_p = \tau \frac{p_n - p_{n+1}}{p_0}$$

donde p_{n+1} es el nuevo precio del producto, p_n el precio anterior, p_0 el precio inicial de referencia y τ la pendiente de la curva en la zona positiva. En este caso se ha tomado $\tau = 0.75$.

Es evidente que si el mercado sólo demanda D unidades y una de las empresas realiza una estrategia de bajada de precios que incrementa su probabilidad de permanencia en $\Delta m_{ii}^{(n)} = m_{ii}^{(n+1)} - m_{ii}^{(n)}$, el resto de empresas deben disminuir éstas a fin de que la suma de probabilidades de las empresas sea igual a 1. Este hecho se ha implementado en el modelo utilizado teniendo en cuenta que el incremento positivo o negativo en la empresa i que ha modificado los precios, supone un incremento de signo contrario en el resto de empresas que es distribuido entre ellas de forma equitativa, es decir, dividiendo aquel entre el número de empresas restantes. Si en un paso determinado se producen valores negativos de cualquier $m_{i,j}$ (y, por tanto, algún otro superará la unidad), se igualará a 0. El resto de elementos de la columna correspondiente se ajustará normalizando para que su suma sea la unidad. Esta modificación en la columna i de M permite obtener de forma inmediata los nuevos valores de la matriz de la cadena de Markov. Luego, este proceso se aplicará de forma similar a cada empresa que haya modificado el precio de venta de su producto.

4.1.2.2. Inversión en Marketing del producto

Una vez que se han calculado los efectos de la modificación de precios sobre las ventas, se procede a calcular las consecuencias que tiene sobre las ventas de cada empresa la inversión de una de ellas en los diferentes aspectos del Marketing. En este caso, el modelo implementado es de tipo logarítmico, donde la función que sirve para determinar el incremento de ventas está definida a trozos,

$$\Delta m_{ii}^{(n)} = m_{ii}^{(n+1)} = m_{ii}^{(n)} = \begin{cases} k_m \, ln \left(1 + \frac{M_n}{M_l + 1}\right) & \text{si} \quad M_n \leq M_l \\ m_l - m_{ii}^{(n)} & \text{si} \quad M_n > M_l \end{cases}$$

siendo,

$$k_m = \frac{m_l - m_{ii}^{(n)}}{ln\left(1 + \frac{M_l}{M_l+1}\right)}$$

$\Delta m_{ii}^{(n)}$ es el incremento producido en la probabilidad de venta m_{ii}; $m_{ii}^{(n+1)}$ la probabilidad actual de venta de la empresa en estudio i; $m_{ii}^{(n)}$, la probabilidad de venta antes de la inversión en publicidad; M_n, la inversión de la empresa en Marketing en el paso n; k_m, una constante que establece los límites definidos para la probabilidad e inversión en Marketing; m_l, la probabilidad de venta máxima que puede obtenerse al invertir en Marketing. M_l, la inversión límite, asociada a m_l, por encima de la cual ya no se aumenta más dicha probabilidad.

En la implementación descrita se ha introducido un valor (M_l) por encima del cual un incremento en la inversión no tiene efecto alguno sobre la probabilidad de venta. Esto es debido a que, para mayores de ese límite, la población que recibe las acciones de Marketing no incrementa su tendencia a comprar el producto publicitado, produciéndose un efecto de saturación de los posibles clientes. Es preciso, por tanto, definir de alguna forma esos límites. En concreto, en este modelo se propone $m_l = 1.2\, m_{ii}^{(n)}$ y $M_l = 0.1\, R_n$, siendo R_n el máximo presupuesto medio de todas las empresas en ese momento.

Para la construcción de la nueva matriz de la cadena de Markov se sigue el mismo procedimiento que se siguió con la modificación de precios en relación a valores negativos o superiores a 1.

4.1.2.3. Inversión en Mejoras Tecnológicas

Se supone que las cuatro empresas participantes parten desde el comienzo con un nivel de tecnología particular. En cualquier caso, a partir de ese momento, pueden dedicar una parte de su presupuesto a la inversión en mejoras tecnológicas que les permitan destacarse de sus competidoras. Estas mejoras tendrán en nuestro modelo dos efectos importantes. Por un lado, las mejoras en el proceso de fabricación reducirán los costes variables asociados a la fabricación del producto. Por otro, las mejoras técnicas del producto en cuestión tendrán un efecto de reclamo y, por tanto, producirán un incremento en las probabilidades de venta. Para modelar matemáticamente el efecto de este tipo de inversión en la reducción de costes variables, se hace uso de una función logarítmica similar a la expuesta en el apartado anterior. En este caso, el límite de inversión con efecto sobre los avances tecnológicos viene impuesto por el 7.5 % del presupuesto mayor de estas empresas, es decir, $T_l = 0.075\, R_n$. Asimismo, se limita la reducción de costes variables hasta el 5 % del valor inicial ($c_l = 0.95\, c_0$). De esta forma, el incremento en los costes variable vendrá dado por,

$$\Delta c_n = c_{n+1} - c_n = \begin{cases} k_{tc}\, ln(T_n + 1) & \text{si} \quad T_n \leq T_l \\ c_l - c_0 & \text{si} \quad T_n > T_l \end{cases}$$

siendo,

$$k_{tc} = \frac{c_l - c_0}{ln(T_l + 1)}$$

Δc_n es el incremento producido en los costes variables; c_{n+1} el coste variable actual de la empresa en estudio; c_n, los costes variables antes de la inversión en Mejoras Tecnológicas; T_n, la inversión de la empresa en Mejoras Tecnológicas en el paso n; k_{tc}, una constante que establece los límites definidos para la reducción de costes variables e inversión en Mejoras Tecnológicas; c_l, el coste mínimo que se puede obtener al invertir en Mejoras Tecnológicas; T_l, la inversión límite, asociada a c_l, por encima de la cual ya no se reducen los costes variables.

Finalmente, se fija la máxima variación de la probabilidad de venta en un 10 % de las probabilidades anteriores, esto es, $m_l = 1.10\, m_{ii}^{(n)}$. Es evidente que las probabilidades de venta aumentarán a medida que la inversión crezca y viceversa. Si utilizamos la hipérbola equilátera para correlacionar las variables probabilidad de venta y la inversa de la inversión tecnológica, se obtiene que,

$$\frac{m_{ii}^{(n)}}{T_n} = \frac{m_{ii}^{(n+1)}}{T_{n+1}}$$

siendo T_n y T_{n+1} las cantidades invertidas en los dos últimos movimientos de la partida. Entonces el incremento de las probabilidades vendrá dado por la función,

$$\Delta m_{ii}^{(n)} = m_{ii}^{(n+1)} - m_{ii}^{(n)} = \begin{cases} k_{tv}\, T_{n+1} & \text{si} \quad T_{n+1} \leq T_l \\ m_l - m_{ii}^{(n)} & \text{si} \quad T_{n+1} > T_l \end{cases}$$

donde,

$$k_{tv} = \frac{m_l - m_{ii}^{(n)}}{T_l}$$

Por lo tanto, existe un paralelismo total con los modelos empleados en los apartados anteriores. Para aplicar estos incrementos sobre cada columna de probabilidades de venta en la matriz de la cadena de Markov se sigue el mismo método que en los casos anteriores.

4.1.2.4. Toma de decisiones sobre la oferta

Las ventas resultantes de los procedimientos anteriores son las posibles de cada empresa, es decir, las referentes al límite superior de cada una sobre su capacidad de ventas en el paso pertinente.
El modelo implementado contiene un módulo que permite a cada empresa producir un número de unidades que no tiene por qué coincidir con ese límite teórico. De hecho, puede producirse una situación de ruptura, cuando el número de unidades fabricadas sea inferior al límite teórico de la empresa analizada, que puede ser recuperable en la próxima jugada o no, si el cliente está dispuesto a esperar por el producto después de realizar su pedido; una situación en que la demanda sea satisfecha o, por último, otra donde exista exceso de producción frente a la demanda de ese momento, lo que conduce al almacenamiento de parte de las unidades fabricadas. Por otro lado, el modelo implementado tiene en cuenta que el exceso o defecto de productos fabricados del período anterior afecta directamente a los requerimientos de fabricación del período actual.

Para ello, se ha posibilitado el almacenamiento de estos datos de un período al siguiente o el de una hipotética satisfacción de una ruptura producida en un período anterior. Existe una opción para habilitar esta posibilidad. Tanto el almacenamiento de unidades sobrantes como la ruptura de stock por no tener suficientes unidades para afrontar la demanda propia tienen efectos económicos sobre la cuenta de resultados de cada empresa. Por eso es importante que cada una de ellas planee cuidadosamente su siguiente estrategia para reducir al máximo el coste de almacenamiento o el de ruptura. En este sentido, cada empresa deberá sopesar las ventajas e inconvenientes que podría tener la fabricación de una cantidad diferente a la que define el máximo teórico de cada empresa.

4.1.3. Aplicación al mercado del automóvil en la Francia de 1901

El proyecto de este capítulo consistía en aplicar en un juego de empresas los datos que Leon le había suministrado a Fernand que contenía información, en parte confidencial y en parte de dominio público, sobre el incipiente mercado del automóvil en Francia en 1900 y poder justificar de un modo razonable la viabilidad de acaparar una fracción interesante del mercado con la nueva marca Mercedes. La información de interés para las cuatro marcas que le propusieron que estudiara se refleja en la tabla 4.1. Aunque se supone que todas estas cantidades le fue entregada a Fernand, en la práctica para elaborar la tabla, muchas de ellas, como el número de unidades fabricadas de cada modelo de automóvil, fueron extraídas de documentos históricos de la época. Incluso algunos precios aparecen en varias referencias. Otros valores fueron construidos a partir de beneficios conocidos de alguna de las empresas. En el caso de los costes fijos, se ha utilizado un porcentaje de los costes fijos teóricos en el punto de equilibrio (considerando únicamente como costes no fijos los variables). Para todas las marcas, en la gama alta, este porcentaje fue del 8.9 % aproximadamente, mientras que para la gama baja se tomó alrededor del 39 %. Estas ratios permiten añadir otro tipo de gastos no incluidos aquí en los fijos y los variables, como las inversiones en Mejoras Tecnológicas y en Marketing, manteniendo un amplio margen de beneficios. Con respecto a la inversión en Mejoras Tecnológicas, también cada empresa decidió un porcentaje de sus costes variables medios mensuales. Sin embargo, en este caso, todas las empresas invirtieron 7.5 % en su gama alta y un 3,75 % en su gama baja. Con respecto a la inversión en Marketing, se dejó a cada empresa libertad para fijar un porcentaje de sus beneficios medios mensuales (incluyendo costes variables, fijos e inversión en Mejoras Tecnológicas y las propias de Marketing), diferenciando incluso en cada modelo. En este sentido, la Mercedes invirtió un 10 % y un 22 %, la Peugeot un 12 % y un 22 %, la Penhard et Levassor un 16 % y un 6 % y la Mors un 15 % y un 3 %, para sus gamas alta y baja, respectivamente. Los costes de stock, de no servicio y de ruptura se calcularon de forma idéntica para todas las empresas y modelos. Se trata de costes por unidad de producto, por lo que para cada caso se imputó un porcentaje anual sobre el precio de venta del producto y se repartió de forma equitativa en cada mes. Para el coste de stock se aplicó un 5 %, para el de no servicio un 3 % y para el de ruptura un 10 %.

En el caso de la Mercedes, se disponía de un dato adicional a tener en cuenta: los 72 automóviles tenían un coste de fabricación máximo de 550000 marcos que, con el cambio de divisas de esa época (1.239 francos/marco), equivalían a 681450 francos. En efecto, si se aplican los cálculos correspondientes a sumar los costes fijos, variables, de Marketing y de Mejoras Tecnológicas para la producción de ambos vehículos Mercedes, el resultado es la cantidad anterior, es decir, la invertida por la empresa de Jellinek. Se quedan fuera de este cálculo los costes posteriores relacionados con el stock y el proceso de venta, que se deberán afrontar con los beneficios de las ventas.

Es evidente que cada gama de vehículos estaba destinada a una clientela diferente tanto por el nivel económico como por el tipo de uso que se pretendía dar a los coches. En aquella época la capacidad para comprar cualquiera de estos automóviles estaba solo reservada a ciertas clases con un altísimo poder adquisitivo, más aún si hablamos de la gama alta. Además, adquirir un coche de alta gama era una muestra de poderío económico de su poseedor. Por otro lado, muchos de estos potentes bólidos eran adquiridos para competir con ellos en las pruebas de velocidad de aquellos años. Parece, por tanto, lógico tratar cada gama por separado como si de dos mercados diferentes se tratara.

Comenzando el juego de empresas por el mercado de alta gama, consideraremos que inicialmente todas las marcas dispondrán de un presupuesto equivalente a sus costes fijos, variables, de Marketing y de Mejoras Tecnológicas para todo el periodo de ejecución, que se ha definido de 6 meses, según se indica en la tabla 4.1. Con el fin de hacer competir a las empresas, partiremos de una demanda media mensual inicial de 16 unidades, lo que supone cubrir algo más del 80 % de la oferta total. Esto significa que inicialmente la demanda es inferior a la oferta y, por lo tanto, alguna empresa se quedará con unidades en su stock sin vender. No obstante, la demanda efectiva variará mes a mes ya que que se aplicará un incremento aleatorio de $\pm 10\,\%$ mes a mes.

Tabla 4.1: Información económica relevante de las empresas Mercedes,Peugeot, Penhard et Levassor y Mors. Los datos son relativos a una actividad desarrollada en 6 meses del año 1901. La tabla se ha dividido en dos partes que corresponden a distintos segmentos del mercado del automóvil en 1900. Se ha tomado como unidad monetaria el franco.

Modelos de gama alta

Modelo de automóvil	**Unidades fabricadas (Uds/mes)**	**Presup. inicial**	**P.V.P.** /ud	**Invers. Market. (/mes)**	**Invers. Mej. Tecn. (/mes)**	**Costes fijos (/mes)**	**Costes variables (/mes)**	**Coste stock (unit.)**	**Coste no serv. (unit.)**	**Coste rupt. (unit.)**
Mercedes 35 HP	36 (6×6)	505863	24000	5969	6323	7032	10831	100	60	200
Peugeot Type 36 6 HP	28 ($3 + 5 \times 5$)	101229	5000	775	1265	831	3000	21	13	42
Penhard et Levassor 30 HP	27 ($2 + 5 \times 5$)	472288	25000	5406	5904	4406	14000	104	63	208
Mors 60 HP	24 (6×4)	505831	30000	5354	6323	4628	17000	125	75	250

Modelos de gama baja

Modelo de automóvil	**Unidades fabricadas (Uds/mes)**	**Presup. inicial**	**P.V.P.** /ud	**Invers. Market. (/mes)**	**Invers. Mej. Tecn. (/mes)**	**Costes fijos (/mes)**	**Costes variables (/mes)**	**Coste stock (unit.)**	**Coste no serv. (unit.)**	**Coste rupt. (unit.)**
Mercedes DMG-8 HP	36 (6×6)	175587	8000	4122	1097	4227	3303	33	20	67
Peugeot Type 33 5 HP	21 ($1 + 5 \times 4$)	59493	4000	899	372	945	2200	17	10	33
Penhard et Levassor A2-7 HP	83 ($13 + 5 \times 14$)	331204	7000	3331	2070	8300	3000	29	18	58
Mors Tonneau 10 HP	100 ($15 + 5 \times 17$)	456471	7500	4892	2853	10000	3500	31	19	63

La estrategia seguida para simular la competencia entre las cuatro marcas fue aplicar de forma constante los respectivos precios, costes e inversiones que se introdujeron al inicio del juego. Los resultados obtenidos siguiendo este plan se representan para los distintos meses en las tablas 4.2, 4.3 y 4.4.

En ellas se muestra la evolución de la venta de los cuatro modelos de automóvil. El modelo de gama alta de la firma Peugeot tiene unas prestaciones más parecidas a los modelos de la gana baja de las otras marcas, pero se incluyó aquí porque era considerado el modelo insignia de la marca en ese periodo. El menor costo de este modelo frente a los otros le posiciona inicialmente en ventaja por su precio tan competitivo. Sin embargo, la inversiones mayores de Mercedes en Marketing y Mejoras tecnológicas, así como un precio de venta menor que sus dos máximos rivales, le sitúan en poco tiempo como líder del mercado. Evidentemente, la estrategia se ha forzado de forma rígida sin capacidad de variación hasta el final. En una aplicación más realista, las empresas habrían reaccionado ante los resultados variando precios, inversión en Marketing y Mejoras Tecnológicas. Por otro lado, la demanda global se ha fijado por debajo de la demanda, cuando en realidad la oferta de estas empresas corresponde a las unidades vendidas en la época. Incluso la variación aleatoria mensual de la demanda ha sido a la baja disminuyendo de las 16 unidades iniciales y luego subiendo a 12 del último mes, lo cual nos sitúa en un escenario muy desfavorable donde aun así la venta de Mercedes fue la más exitosa.

Con respecto al resultado final de esta simulación, lo más relevante son los beneficios sobre el presupuesto inicial de cada empresa, que fueron de 59,76 %, 6,58 %, 23,53 % y 42,78 %, para Mercedes, Peugeot, Penhard et Levassor y Mors, respectivamente. Otro aspecto a destacar es el porcentaje de la demanda que cada empresa conseguido al final del periodo, esto es, en el mismo orden, 34,07 %, 20,88 %, 21,98 % y 23,07 %, respectivamente.

Tabla 4.2: Evolución de las ventas de los modelos de gama alta de las cuatro empresas (meses 1 y 2).

Modelos de gama alta

Mes 1

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	3	2	4
Demanda de la empresa	3	5	4	3
Ventas de la empresa	3	3	2	3
Clientes en espera	0	2	2	0
Costes variables	10289	2878	13308	14262
Unidades en stock	3	0	10	1
Costes de stock	300	0	0	113
Costes de no servicio	0	26	126	0
Ingresos	72000	15000	50000	81000
Costes Totales	81361	11405	40478	70402
Presupuesto	496502	104067	469944	450044

Mes 2

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	5	5	4
Demanda de la empresa	4	3	4	4
Ventas de la empresa	4	5	5	4
Clientes en espera	0	0	1	0
Costes variables	9748	2755	12614	13523
Unidades en stock	5	0	0	1
Costes de stock	500	0	0	113
Costes de no servicio	0	0	63	0
Ingresos	96000	25000	125000	108000
Costes Totales	78311	16522	76867	67444
Presupuesto	514192	112545	518076	490600

Tabla 4.3: Evolución de las ventas de los modelos de gama alta de las cuatro empresas (meses 3 y 4).

Modelos de gama alta

Mes 3

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	5	5	4
Demanda de la empresa	4	3	4	3
Ventas de la empresa	4	3	5	3
Clientes en espera	0	0	0	0
Costes variables	9208	2633	11923	12787
Unidades en stock	7	2	0	2
Costes de stock	700	42	0	226
Costes de no servicio	0	0	0	0
Ingresos	96000	15000	125000	81000
Costes Totales	75271	15954	73352	64613
Presupuesto	534920	111592	569724	506986

Mes 4

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	5	5	4
Demanda de la empresa	4	4	3	4
Ventas de la empresa	4	4	3	4
Clientes en espera	0	0	0	0
Costes variables	8674	2512	11240	12059
Unidades en stock	9	3	2	2
Costes de stock	900	63	208	226
Costes de no servicio	0	0	0	0
Ingresos	96000	20000	75000	108000
Costes Totales	72265	15371	70144	61701
Presupuesto	558655	116220	574580	553285

Tabla 4.4: Evolución de las ventas de los modelos de gama alta de las cuatro empresas (meses 5 y 6).

Modelos de gama alta

Mes 5

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	5	5	4
Demanda de la empresa	7	2	3	4
Ventas de la empresa	7	2	3	4
Clientes en espera	0	0	0	0
Costes variables	8140	2392	10557	11331
Unidades en stock	6	0	6	10
Costes de stock	600	0	624	1250
Costes de no servicio	0	26	0	0
Ingresos	168000	10000	75000	108000
Costes Totales	68963	14832	66939	58792
Presupuesto	657692	111389	582640	602493

Mes 6

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	5	5	4
Demanda de la empresa	9	2	2	3
Ventas de la empresa	8	5	1	0
Clientes en espera	0	0	0	0
Costes variables	7614	2273	9885	10615
Unidades en stock	5	9	7	3
Costes de stock	500	189	728	339
Costes de no servicio	0	0	0	0
Ingresos	216000	10000	50000	81000
Costes Totales	65508	14301	63890	56039
Presupuesto	808184	107088	568751	627454

El segundo estudio está orientado al mercado de gama baja. En este caso, consideraremos también 6 meses de ejecución. Todas las marcas dispondrán de un presupuesto diferente, resultado de cubrir sus gastos principales de forma idéntica al caso de gama alta. La demanda media mensual inicial será de 36 unidades, es decir, un $90\,\%$ de la oferta total en esta gama. De forma similar al caso anterior, la demanda efectiva variará mes a mes dado que se aplicará también un incremento aleatorio de $\pm 10\,\%$, que podrá modificarse cada mes de simulación. Inicialmente las cuatro empresas tendrán un presupuesto igual la suma de sus costes fijos, variables, de Marketing y de Mejoras Tecnológicas para todo el periodo de ejecución, que se ha definido de 6 meses, según se indica en la tabla 4.1.

Nuevamente, la estrategia adoptada consistió en fijar al inicio los respectivos precios, costes e inversiones y mantenerlos constantes en todo el proceso. Los resultados obtenidos siguiendo este plan se representan para los distintos meses en las tablas 4.5, 4.6 y 4.7. En ellas se muestra la evolución de la venta de los cuatro modelos. El modelo de Peugeot sigue teniendo un costo significativamente menor que los otros automóviles, lo que de proporciona cierta ventaja en el mercado. Pero otra vez la inversiones mayores de las otras marcas en Marketing y Mejoras tecnológicas equilibran esa desventaja. Todo ello produce que el modelo de Mercedes se haya vendido completamente y disponga de una amplia cartera de clientes que permanecen a la espera de la llegada de nuevos vehículos para proceder a su compra.

Como resultados destacables de esta simulación, tenemos los beneficios (o pérdidas) sobre el presupuesto inicial de cada empresa. Mercedes obtuvo uno de 72,94 %, Peugeot del 49,54 %, Penhard et Levassor de 25,01 % y Mors 10,12 %, mientras que los porcentajes de cada una sobre la demanda total fueron 23,47 %, 23,50 %, 25,35 % y 28,17 %, respectivamente.

Tabla 4.5: Evolución de las ventas de los modelos de gama baja de las cuatro empresas (meses 1 y 2).

Modelos de gama baja

Mes 1

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	1	13	15
Demanda de la empresa	10	10	9	9
Ventas de la empresa	6	1	9	9
Clientes en espera	4	9	0	0
Costes variables	3169	2125	2868	3339
Unidades en stock	0	0	4	6
Costes de stock	0	0	116	186
Costes de no servicio	80	90	0	0
Ingresos	48000	4000	63000	67500
Costes Totales	28542	4430	51096	68016
Presupuesto	195045	59062	343108	455955

Mes 2

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	4	14	17
Demanda de la empresa	9	9	10	10
Ventas de la empresa	6	4	10	10
Clientes en espera	7	14	0	0
Costes variables	3036	2049	2735	3178
Unidades en stock	0	0	8	13
Costes de stock	0	0	232	403
Costes de no servicio	140	140	0	0
Ingresos	48000	16000	70000	75000
Costes Totales	27800	10533	52225	72174
Presupuesto	215245	64509	360884	458780

Tabla 4.6: Evolución de las ventas de los modelos de gama baja de las cuatro empresas (meses 3 y 4).

Modelos de gama baja

Mes 3

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	4	14	17
Demanda de la empresa	9	8	10	9
Ventas de la empresa	6	4	10	9
Clientes en espera	10	18	0	0
Costes variables	2902	1974	2603	3017
Unidades en stock	0	0	12	21
Costes de stock	0	0	348	651
Costes de no servicio	200	180	0	0
Ingresos	48000	16000	70000	67500
Costes Totales	27058	10292	50488	69687
Presupuesto	236187	70216	380395	456593

Mes 4

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	4	14	17
Demanda de la empresa	7	8	8	10
Ventas de la empresa	6	4	8	10
Clientes en espera	11	22	0	0
Costes variables	2768	1899	2470	2856
Unidades en stock	0	0	18	28
Costes de stock	0	0	522	868
Costes de no servicio	220	220	0	0
Ingresos	48000	16000	56000	75000
Costes Totales	26276	10031	48808	67168
Presupuesto	257911	76185	387587	464425

Tabla 4.7: Evolución de las ventas de los modelos de gama baja de las cuatro empresas (meses 5 y 6).

Modelos de gama baja

Mes 5

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	4	14	17
Demanda de la empresa	8	6	8	10
Ventas de la empresa	6	4	8	10
Clientes en espera	13	24	0	0
Costes variables	2635	1824	2338	2696
Unidades en stock	0	0	24	35
Costes de stock	0	0	696	1085
Costes de no servicio	260	240	0	0
Ingresos	48000	16000	56000	75000
Costes Totales	25516	9751	47132	64653
Presupuesto	280396	82435	396455	474772

Mes 6

	Empresa			
Concepto	**Mercedes**	**Peugeot**	**Penhard et Levassor**	**Mors**
Unidades fabricadas	6	4	14	17
Demanda de la empresa	7	6	9	12
Ventas de la empresa	6	4	9	12
Clientes en espera	14	26	0	0
Costes variables	2502	1749	2206	2535
Unidades en stock	0	0	29	40
Costes de stock	0	0	841	1240
Costes de no servicio	280	260	0	0
Ingresos	48000	16000	63000	90000
Costes Totales	24737	9471	45432	62084
Presupuesto	303658	88964	414023	502688

4.2. Valores y vectores propios

4.2.1. Introducción a los valores y vectores propios

Valores y vectores propios

Definición 4.1 *Valor propio.*
Se dice que el número λ, real o complejo, es un valor propio A si existe un vector no nulo u, real o complejo tal que

$$Au = \lambda u,$$

es decir,

$$(A - \lambda I)u = 0$$

Definición 4.2 *Vector propio.*
El vector u se denomina vector propio de A asociado al valor propio λ.

Definición 4.3 *Polinomio característico.*
En general, el polinomio que resulta de desarrollar $|A - \lambda I|$, cuyos ceros son precisamente los valores propios de A, se denomina polinomio característico.

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

- $\sum_{i=1}^n \lambda_i = -\dfrac{a_1}{(-1)^n} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = trA$
- $\prod_{i=1}^n \lambda_i = a_n = |A|$

Definición 4.4 *Radio espectral.*
Se denomina radio espectral ρ de una matriz A al valor

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

Propiedades

Propiedades 4.1 *Valores propios de una matriz cualquiera.*

- *Si λ es complejo, entonces u es complejo.*
- *Los valores propios de $B = C^{-1}AC$ son los mismos de A. Si x es el vector propio asociado a λ, entonces Cx es un vector propio de B asociado a λ.*

Propiedades 4.2 *Valores propios de matrices simétricas.*

- *Si D es la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores propios de A, entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $D = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$.*

- *Asimismo, existen n vectores propios de A que forman un conjunto ortonormal, y coinciden con las columnas de la matriz ortogonal Q.*

- *Todos los valores propios de A son reales.*

- *A es definida positiva si y solo si todos los valores propios de A son positivos.*

4.2.2. Teoremas principales

Teorema 4.1 *Teorema de Cayley-Hamilton.*
Sea A una matriz cuyo polinomio característico es,

$$P(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdot + a_n$$

entonces la matriz A verifica,

$$(-1)^nA^n + a_1A^{n-1} + \cdot + a_nI = 0$$

Teorema 4.2 *Teorema de Schur.*
Sea A una matriz $n\times n$ cualquiera. Entonces existe una matriz U ortogonal tal que

$$T = U^{-1}AU$$

siendo T una matriz triangular superior cuyos elementos diagonales son los valores propios de A.

El conocimiento del espectro de una matriz, esto es, el conjunto de sus valores propios, tiene mucho interés a la hora de estudiar su condicionamiento para aplicar métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. El teorema de Gerschgorin define la zona donde se encuentra dicho espectro.

Teorema 4.3 *Teorema de Gerschgorin.*
Sea A una matriz $n \times n$ y denotemos por R_i el círculo del plano complejo

con centro a_{ii} y radio $\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$, es decir,

$$R_i = \{z \in C \quad \textit{tal que} |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\}$$

donde C denota el conjunto de los números complejos. Entonces los valores propios de A están contenidos en $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$. Es más, si la unión de k de estos círculos no se corta con los restantes $n - k$, entonces dicha unión contiene k valores propios (incluyendo los valores propios múltiples)

4.2.3. Métodos de obtención del polinomio característico

Método de Krylov

Se basa en el teorema de Cayley-Hamilton ($P(A) = 0$):

$$(-1)^n A^n + a_1 A^{n-1} + \cdot + a_n I = 0$$

Multiplicando por x resulta,

$$(-1)^n A^n x + a_1 A^{n-1} x + \cdot + a_n x = 0$$

Si $A^{n-i}x = v_i$, para $i = 1, 2, \ldots n$, se obtiene el sistema lineal

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = (-1)^{n+1} A^n x$$

cuya resolución nos proporciona los coeficientes a_i de $P(\lambda)$.

El método de Krylov, basado en el teorema de Cayley-Hamilton, conduce a la obtención de los coeficientes del polinomio característico. Sin embargo, para el caso de matrices de orden elevado suele resultar excesivamente costoso.

Método de Leverrier modificado

Se basa en la fórmula de Newton. Sea el polinomio de grado n

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}, a_0 = 1$$

y la suma

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

La fórmula de Newton nos da la siguiente relación entre S_k y a_k,

$$ka_k + S_k + \sum_{i=1}^{k-1} S_i a_{k-i} = 0$$

Fórmulas de Leverrier o de Faddeev

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k} tr(AB_{k-1}), \qquad & k = 1, 2, \ldots, n \\ B_k &= -AB_{k-1} + a_k I, \qquad & k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

siendo $B_0 = I$ y $B_n = 0$.

Algoritmo 4.1 Leverrier Modificado.

Dada una matriz A
$A_1 = A$
$a_1 = tr(A_1)$
$B_1 = A_1 - a_1 I$
Para $i = 2$ hasta n **Hacer**
  $A_i = B_{i-1}A$
  $a_i = \frac{1}{i} tr(A_i)$
  $B_i = A_i - a_i I$
Fin Para

El método de Leverrier modificado construye de forma recursiva los coeficientes del polinomio característico, aunque su coste para matrices de orden elevado puede ser prohibitivo.

$$\begin{array}{lll} A_1 = A & a_1 = tr(A_1) & B_1 = A_1 - a_1 I \\ A_2 = B_1 A & a_2 = \frac{1}{2} tr(A_2) & B_2 = A_2 - a_2 I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n = B_{n-1} A & a_n = \frac{1}{n} tr(A_n) & B_n = A_n - a_n I \end{array}$$

donde los a_i son los coeficientes del polinomio característico.

Como resultado se puede aplicar el método para calcular la inversa de la matriz A. En efecto, como $B_n = 0$, se obtiene que $A^{-1} = \frac{1}{a_n} B_{n-1}$.

4.2.4. Métodos de obtención de algunos valores propios

Métodos de las potencias

El método de las potencias permite aproximar el valor absoluto del mayor valor propio de una matriz, utilizando simplemente productos matriz-vector.

Sucesión de los vectores del subspacio de Krylov
Supongamos que los valores propios de una matriz A cumplen,

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Consideremos cualquier vector v, que puede ser escrito

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = v_0$$

Entonces multiplicando por la matriz A se tiene,

$$\begin{aligned}
v_1 &= Av_0 = Av = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i u_i \\
v_2 &= Av_1 = A^2 v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \alpha_i u_i \\
\cdots \quad &\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \\
v_k &= Av_{k-1} = A^k v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \alpha_i u_i \qquad (4.1) \\
v_k &= \lambda_1^k \left(\alpha_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k u_i \right)
\end{aligned}$$

Luego el límite del cociente de las componentes r-ésimas de dos vectores consecutivos resulta,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(v_{k+1})_r}{(v_k)_r} = \lambda_1 \frac{\alpha_1 (u_1)_r + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{k+1} (u_i)_r}{\alpha_1 (u_1)_r + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{k} (u_i)_r} = \lambda_1$$

si $\alpha_1 \neq 0$ y $(u_1)_r \neq 0$.

Para evitar que los v_i sean muy grandes, se suele construir la sucesión normalizada,

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & \dfrac{Av}{||Av||_\infty} \\ w_2 & = & \dfrac{Aw_1}{||Aw_1||_\infty} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ w_k & = & \dfrac{Aw_{k-1}}{||Aw_{k-1}||_\infty} \end{array}$$

siendo, en este caso

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(Aw_{k+1})_j}{(w_k)_j} = \lambda_1$$

donde j hace referencia a la posición de una componente cualquiera de esos vectores.

Algoritmo 4.2 Potencias.

Dada una matriz A de orden $n \times n$, cualquier vector v de orden n, cualquier j, $1 \leq j \leq n$

$w_1 = \dfrac{A\,v}{||A\,v|\,|_\infty}$

$\lambda_1 = 0$

$w_2 = \dfrac{A\,w_1}{||A\,w_1|\,|_\infty}$

$\lambda_2 = \dfrac{(A\,w_2)_j}{(w_1)_j}$

$i = 3$

Mientras $|\lambda_i - \lambda_{i-1})| > \varepsilon$ **Hacer**

  $w_i = \dfrac{A\,w_{i-1}}{||A\,w_{i-1}|\,|_\infty}$

  $\lambda_i = \dfrac{(A\,w_i)_j}{(w_{i-1})_j}$

  $i = i + 1$

Fin Mientras