

# Теория графов и её приложения

## Отчёт по проектному заданию

Козырев С. А., Куклин Д. В.

Факультет прикладной математики — процессов управления  
Санкт-Петербургский государственный университет

6 июня 2020 г.



# Постановка задачи

Требовалось:



# Постановка задачи

Требовалось:

- 1 построить граф дорог Российского города,



# Постановка задачи

Требовалось:

- ① построить граф дорог Российского города,
- ② оценить удобство размещения зданий,



# Постановка задачи

Требовалось:

- ① построить граф дорог Российского города,
- ② оценить удобство размещения зданий,
- ③ спланировать размещение зданий.



# Что мы выбрали

① C++



# Что мы выбрали

- ① C++ , так как
  - большинство проектов написаны либо на C, либо на C++,



# Что мы выбрали

- ① C++ , так как
- большинство проектов написаны либо на C, либо на C++,
  - среди остальных C++ является наиболее быстрым,





# Что мы выбрали

## ① C++ , так как

- большинство проектов написаны либо на C, либо на C++,
- среди остальных C++ является наиболее быстрым,
- Python простой,



# Что мы выбрали

- ① C++ , так как
  - большинство проектов написаны либо на C, либо на C++,
  - среди остальных C++ является наиболее быстрым,
  - Python простой,
- ② *libosmium*,



# Что мы выбрали

- ① C++ , так как
  - большинство проектов написаны либо на C, либо на C++,
  - среди остальных C++ является наиболее быстрым,
  - Python простой,
- ② *libosmium*,
- ③ Нижний Новгород.



Спецификация *OSM* определяет следующие структуры данных:

- *Node* (узел),
- *Way* (путь),
- *Relation* (отношение).



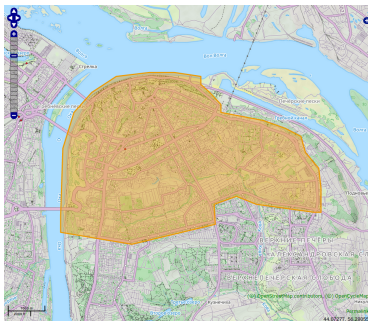


Рис.: Карта центра Нижнего Новгорода



# Добавление путей

```
unordered_map<uint64_t, bool> marked {};  
  
void way(Way& way) noexcept {  
    if (!way.has_key("highway")) { return; }  
    for (auto& node: way.nodes()) {  
        if (marked.contains(node)) {  
            marked[node] |= true;  
        } else {  
            marked.insert({ node, false });  
        }  
    }  
}
```



# Добавление путей

```
for (auto& curr: way.nodes()) {  
    if (curr != first && curr != last) {  
        if (marked.at(curr)) {  
            auto d = ... // One-way or two-way.  
            auto w = haversine(pred, curr);  
            routes.add_edge({ pred, curr }, w, d);  
            pred = &curr;  
        }  
    }  
}  
  
auto w = haversine(pred, last), d = ...;  
routes.add_edge({ pred, last }, w, d);
```



# Расстояние между узлами

Расстояние между двумя узлами можно вычислить, используя формулу гаверсинуса

$$\eta(\Theta) = \eta(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \eta(\lambda_2 - \lambda_1),$$
$$d = 2r \arcsin(\sqrt{\eta(\Theta)}),$$

где  $\Theta$  — центральный угол,  $\varphi_{1,2}$  — широты в радианах,  $\lambda_{1,2}$  — высоты в радианах и  $\eta(\theta) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$  для произвольного угла  $\theta$ .





# Структура Node

```
struct Node {  
private:  
    using Angle = long double;  
    uint64_t m_id = 0;  
    Angle m_latitude = 0;  
    Angle m_longitude = 0;  
};
```



# Структура Graph

```
struct Graph {  
private:  
    using Edge = pair<Node, Node>;  
    using OutEdges = unordered_map<Node, Distance>;  
    using AdjList = unordered_map<Node, OutEdges>;  
  
    AdjList m_data {};  
};
```



Для каждого здания на карте

- ① вычисляем барицентр здания,
- ② находим ближайший к зданию узел дороги,
- ③ в структуре *Building* связываем со зданием найденный узел.



# Структура Building

```
struct Building {  
private:  
    enum class Type {  
        House,  
        Facility  
    };  
  
    uint64_t m_id = 0;  
    Type m_type;  
    Angle m_latitude = 0;  
    Angle m_longitude = 0;  
    Node m_closest_node; // Closest road node.  
};
```



# Структура Map

```
struct Map {  
    struct Path {  
        private:  
            Building m_from, m_to;  
            Distance m_distance;  
    };  
  
    struct TracedPath: public Path {  
        private:  
            vector<Node> m_trace;  
    };  
  
private:  
    Buildings m_buildings;  
    Graph m_graph;  
};
```



# Проблема производительности

Очевидно, карта составляется долго.

*Libosmium* каждый раз производит чтение карты и заполнение структур.

Вопрос итоговой сложности является открытым, но любой желающий может получить на него ответ, изучив исходный код библиотеки.



Мы обошли проблему, применив кэширование к структуре Map.

```
template<typename T>
bool serialize(fs::path& filename, T&& data) {
    ofstream binary { filename };
    boost::binary_oarchive archive { binary };
    archive << data;
    binary.close();
    return true;
}
```



```
template<typename T>
bool deserialize(fs::path& filename, T&& data) {
    if (!fs::exists(filename)) { return false; }
    ifstream binary { filename };
    boost::binary_iarchive archive { binary };
    archive >> data;
    binary.close();
    return true;
}
```





# Задача

Требовалось выбрать  $M$  объектов инфраструктуры и  $N$  жилых зданий и оценить удобство их размещения, используя расстояние как метрику.

```
const vector<string> houses =  
    { "apartments", "bungalow", "cabin", "detached",  
      "dormitory", "farm", "ger", "hotel", "house",  
      "houseboat", "residential", "terrace" };  
const vector<string> facilities =  
    { "fire_station", "hospital", "retail",  
      "kiosk", "supermarket" };
```



# Выбор ближайшего узла

Для каждого здания запоминаем ближайший узел.

```
void way(Way& way) noexcept {  
    const auto location = barycenter(way);  
    auto closest = min_element(routes.nodes(),  
        [&](const auto& lhs, const auto& rhs) {  
        return  
            haversine(lhs, location) <  
            haversine(rhs, location);  
        });  
    auto b = Building { way, location, closest };  
    buildings.push(b);  
}
```



# Алгоритм Дейкстры

Нами был реализован алгоритм Дейкстры с временной сложностью  $O(n \log n)$ .

Используя алгоритм, несложно как и определить ближайшие объекты, так и построить дерево кратчайших путей.



```
Running /home/dikuchan/Projects/graphs-labs/build-release/graphs
Run on (4 X 3300 MHz CPU s)
CPU Caches:
  L1 Data 32 KiB (x2)
  L1 Instruction 32 KiB (x2)
  L2 Unified 256 KiB (x2)
  L3 Unified 4096 KiB (x1)
Load Average: 1.41, 1.91, 2.07
***WARNING*** Library was built as DEBUG. Timings may be affected.

-----
Benchmark ..... Time ..... CPU ..... Iterations
-----
BM_ImportMap ..... 26.4 ms ..... 26.2 ms ..... 24
BM_SelectBuildings ..... 0.105 ms ..... 0.105 ms ..... 6358
BM_ShortestPaths ..... 45.8 ms ..... 45.5 ms ..... 15
BM_ShortestPathsWithTraces ..... 47.5 ms ..... 47.3 ms ..... 16
```

Рис.: Время выполнения основных функций



```
auto minmax(const Map& map, const Buildings& from,
            const Buildings& to) {
    unordered_map<Building, Distance> furthest {};
    for (auto& f: from) {
        auto paths = map.shortest_paths(f, to);
        furthest[f] = max_element(
            paths.cbegin(), paths.cend(),
            [](const auto& lhs, const auto& rhs) {
                return
                    lhs.distance() > rhs.distance() &&
                    lhs.distance() < INF;
            }).distance();
    }
}
```



```
auto result = min_element(  
    from.cbegin(), from.cend(),  
    [&](const auto& lhs, const auto& rhs) {  
        return furthest[lhs] < furthest[rhs];  
    });  
return result;  
}
```



# Иерархическая кластеризация

- вычисляем матрицу расстояний
- из каждого дома делаем кластер
- дальше добавляем новые кластеры путём объединения двух ближайших, пока не останется только один класс без предка



- вычисляем матрицу расстояний





# Иерархическая кластеризация

- вычисляем матрицу расстояний
- из каждого дома делаем кластер



# Иерархическая кластеризация

- вычисляем матрицу расстояний
- из каждого дома делаем кластер
- дальше добавляем новые кластеры путём объединения двух ближайших, пока не останется только один класс без предка



# Матрица расстояний

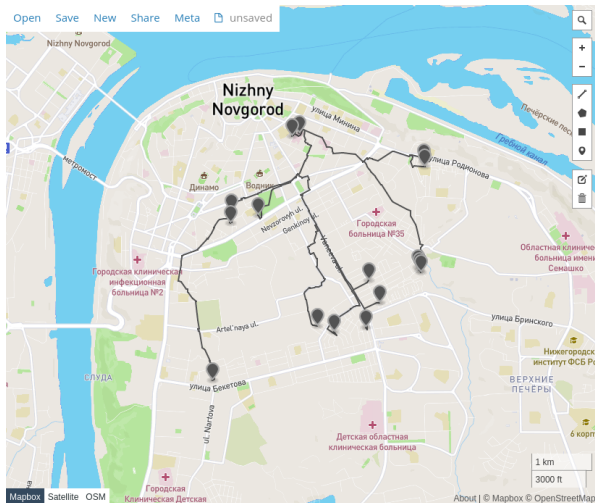
Матрицу расстояний вычисляем путём запуска алгоритма Дейкстры из каждой вершины.



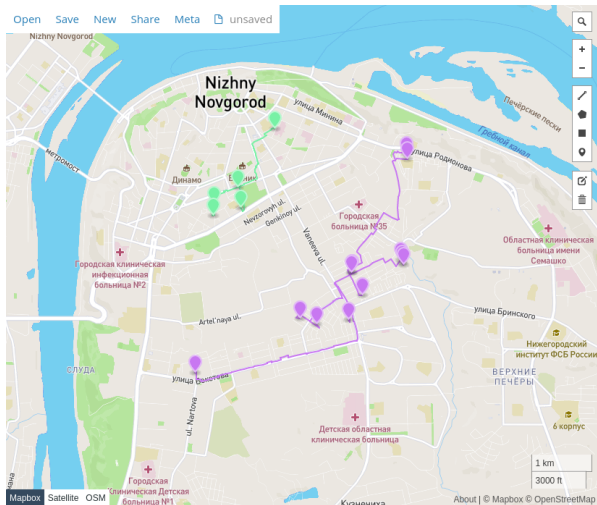
Дано 15 домов, будем разбивать их на кластеры, находить длину деревьев кратчайших путей, и сумму кратчайших путей.



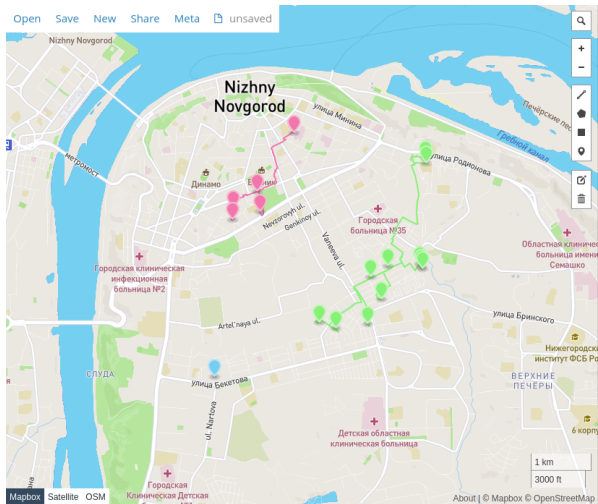
1 кластер; 32,3 км; 12,8 км



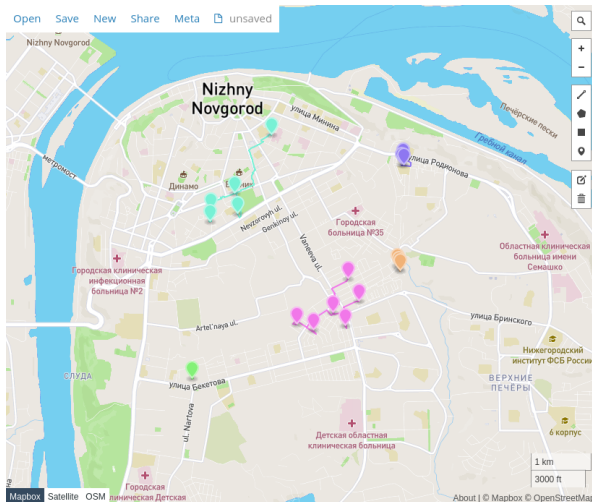
2 кластера; 13,2 км; 8,2 км



3 кластера; 11,3 км; 6,3 км



5 кластеров; 4,6 км; 3,9 км





# Дендрограмма

