杜教筛

求$\sum_{i=1}^{n} f(i)$，f为积性函数。
令$S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}f\left(\frac{i}{d}\right)g(d)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}[d|i]f\left(\frac{i}{d}\right)g(d)\\
&=\sum_{d=1}^{n}g(d)\sum_{i=1}^{n}[d|i]f\left(\frac{i}{d}\right)\\
&=\sum_{d=1}^{n}g(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}f(i)\\
&=\sum_{d=1}^{n}g(d)S\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right)\\
&=g(1)S(n)+\sum_{d=2}^{n}g(d)S\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right)
\end{aligned}
$$

所以可以得到
$g(1)S(n)=\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)-\sum_{d=2}^{n}g(d)S\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right)$
如果要求$\sum_{i=1}^{n}f(i)$，所要做的就是为f找到一个合适的g

常用的狄利克雷卷积如下：
在狄利克雷卷积下的单位元为ϵ,$\epsilon(n)=[n=1]$
设F,f为任意函数
$F*\epsilon=F$
$1*\mu=\epsilon$（1和μ互为逆元）
$1*F=f\Leftrightarrow f*\mu=F$
$1*\varphi=n\Leftrightarrow n*\mu=\varphi$（$\varphi$为欧拉函数）
$1*n=\sigma\Leftrightarrow\sigma*\mu=n$（$\sigma$为约数和）
$1*1=\tau\Leftrightarrow\tau*\mu=1$（$\tau$为约数个数）

例题：

1. 求μ的前n项和$S(n)$。
   为μ函数找到的合适的$g(i)=1$
   所以可以得到：
   $S(n)=1-\sum_{i=2}^{n}S\left(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\right)$
2. 求φ的前n项和$S(n)$。
   为φ函数找到的合适的$g(i)=1$
   所以可以得到：
   $$
   \begin{aligned}
   S(n)&=\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=2}^{n}S\left(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\right)\\
   &=\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{i=2}^{n}S\left(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\right)
   \end{aligned}
   $$
3. 求$\mu(i)*i^k$的前n项和$S(n)$。
   为$\mu(i)*i^k$函数找到的合适的$g(i)=i^k$
   所以可以得到：
   $$
   \begin{aligned}
   S(n)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}\mu(d)*d^k*\left(\frac{i}{d}\right)^k-\sum_{i=2}^{n}i^k*S\left(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\right)\\
   &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}\mu(d)*i^k-\sum_{i=2}^{n}i^k*S\left(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\right)\\
   &=\sum_{i=1}^{n}i^k\sum_{d|i}\mu(d)-\sum_{i=2}^{n}i^k*S\left(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\right)\\
   &=1-\sum_{i=2}^{n}i^k*S\left(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\right)
   \end{aligned}
   $$

莫比乌斯反演

莫比乌斯反演公式：
正向情况下：
$f(n)=\sum_{d|n}g(d)$
$g(n)=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})f(d)$
反向情况下：
$f(n)=\sum_{n|d}g(d)$
$g(n)=\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})f(d)$
另有：
$\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]$

积性函数的狄利克雷卷积也是积性函数。
常用狄利克雷卷积：
$\sum_{d|n}\varphi(d)=n$
$\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\varphi(n)$

注意，非积性函数一样可以反演。

例题：

1.计算$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}gcd(i,j)$

令$f(n)=n=\sum_{d|n}fr(d)$
所以$fr(n)=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})d=\varphi(n)$
将$gcd(i,j)$代入$f(n)$中得 $f(gcd(i,j))=gcd(i,j)=\sum_{d=1}[d|i][d|j]\varphi(d)$
代回原公式得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}gcd(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{min(n,m)}[d|i][d|j]\varphi(d)$$

化简后面两个和式得

$$原式=\sum_{d=1}^{min(n,m)}\varphi(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\lfloor\frac{m}{d}\rfloor$$

交换和式位置得

$$原式=\sum_{d=1}^{min(n,m)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[d|i][d|j]\varphi(d)=\sum_{d=1}^{min(n,m)}\sum_{d|i}^{n}\sum_{d|j}^{m}\varphi(d)=\sum_{d=1}^{min(n,m)}\varphi(d)\sum_{d|i}^{n}1\sum_{d|j}^{m}1$$

2.计算$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[gcd(i,j)=t]$
将$\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]$代入得

$$原式=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{min(n,m)}[t|i][t|j][d|\frac{i}{t}][d|\frac{j}{t}]\mu(d)=\sum_{d=1}^{min(n,m)}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{t}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{t}\rfloor}[d|i][d|j]\mu(d)$$

$$原式=\sum_{d=1}^{min(n,m)}\mu(d)\lfloor\frac{n}{td}\rfloor\lfloor\frac{m}{td}\rfloor$$

奇怪的代换：
$\sum_{j=1}^{i-1}j[gcd(i,j)=1]=\frac{n\phi(n)+[n=1]}{2}$
证明 对于每一个与n互质的i，那么$n-i$也一定与n互质。原因考虑更相减损。

求乘法逆元

$ax+by=gcd(a,b)$
当$gcd(a,b)=1$时(a,b互质)，在$\pmod b$的同余系下，有：
$ax+by\equiv 1\pmod b$ $ax\equiv 1\pmod b$
所以当$gcd(a,b)=1$时，a存在$\pmod b$意义下的乘法逆元，$a^{-1}=x$。

欧拉定理求逆元

若n,a为正整数，且n,a互质，则: $a^{\phi(n)}\equiv 1(mod\ n)$
逆元即为： $a^{\phi(n)-1}$

求解线性同余方程

线性同余方程是最基本的同余方程，“线性”表示方程的未知数次数是一次，即形如：
$ax \equiv b \pmod p$ 此方程有解当且仅当 b 能够被 a 与 p
的最大公约数整除。 这时，如果 x_0
是方程的一个解，那么所有的解可以表示为： $\{x_0 + k\frac{p}{d}|(k \in z)\}$
其中 d 是 a 与 p 的最大公约数。在模 p 的完全剩余系 $0, 1, \ldots, p-1$
中，恰有 d 个解。
注意：算完记得判断答案是否合法，不合法用上式加到合法。
假如$gcd(a, p) = d$，我们可以把a, b, p同除以d，使得$gcd(a, p) = 1$。
$ax \equiv b \pmod p$ $x \equiv ba^{-1} \pmod p$

拓展欧几里得算法推导

不妨设$a > b, A > B$ 因为$ax + by = gcd(a, b)$，$gcd(a, b) = gcd(b, a\%b)$
考虑递归的过程，令$a = b$，$b = a\%b$
所以$bx' + (a\%b)y' = gcd(b, a\%b) = gcd(a, b) = ax + by$
即：$bx' + (a\%b)y' = ax + by$
$bx' + (a - \lfloor\frac{a}{b}\rfloor b)y' = ax + by$
$bx' + ay' - \lfloor\frac{a}{b}\rfloor by' = ax + by$
$ay' + b(x' - \lfloor\frac{a}{b}\rfloor y') = ax + by$
解得：$x = y' \quad y = x' - \lfloor\frac{a}{b}\rfloor y'$

组合数学相关

相关定理

定理1

$\{1, 2, \ldots n\}$的r组合$a_1, a_2, \ldots, a_r$出现在所有r组合中的字典序位置编号：
$index = C(n, r) - C(n - a_1, r) - C(n - a_2, r - 1) - \ldots - C(n - a_r, 1)$

定理2

$k * C(n, k) = n * C(n - 1, k - 1)$
$C(n, 0) + C(n, 2) + \ldots = C(n, 1) + C(n, 3) + \ldots$
$1 * C(n, 1) + 2 * C(n, 2) + \ldots + n * C(n, n) = n * 2^{n-1}$

错位排列

$$D_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Catalan数

凸多边形三角划分,n个节点组成二叉搜索树，n对括号正确匹配数目，1-n的出栈序列
$C_n = \frac{C(2*n, n)}{n+1}$
$C_n = \frac{(4*n-2)}{n+1} * C_n - 1$

$C_1 = 1$

Stirling数

第一类Stirling数

$s(p, k)$将 p 个不同元素构成 k 个圆排列的数目。
$s(p, k) = (p - 1) * s(p - 1, k) + s(p - 1, k - 1)$

第二类Stirling数

n个元素拆分k个集合的方案数记为S(n, k)。
$S(p, k) = k * S(p-1, k) + S(p-1, k-1)$
$S(p, 0) = 0, (p >= 1)$ $S(p, p) = 1, (p >= 0)$
$S(p, 1) = 1, (p >= 1)$ $S(p, 2) = 2^{p-1} - 1, (p >= 2)$
$S(p, p-1) = C(p, 2)$

Bell数

元素个数为n的集合的划分数目。 $B_p = \sum_{i=0}^{p} S(p, i)$
其中$S(p, i)$表示第二类Stirling数。
$B_p = C(p-1, 0) * B_0 + C(p-1, 1) * B_1 + \ldots + C(p-1, p-1) * B_{p-1}$

卢卡斯定理

若p是质数： $C(n, m)\%p = C(n/p, m/p) * C(n\%p, m\%p)\%p$
若p不是质数，令$p = p_1 * p_2 * \ldots * p_n$，这里$p_i$是质数$\begin{cases} C_n^m \equiv a_1 \pmod{p_1} \\ C_n^m \equiv a_2 \pmod{p_2} \\ \quad\vdots \\ C_n^m \equiv a_n \pmod{p_n} \end{cases}$ 则分别求出$a_1, a_2, \ldots, a_n$用中国剩余定理合并即可。

盒子放小球问题

n个小球，m个盒子。

n个小球有区别，m个盒子有区别

(1)允许空盒：每个球放到任意盒子里，总方案数m^n。
(2)不允许空盒：需满足$n \geq m \geq 1$，$m > n$时无解。其方案数及时看成m个盒子相同时的方案数，再乘以$m!$。答案即是$S(n, m) * m!$。S代表第二类斯特林数。

n个小球有区别，m个盒子无区别

(1)允许空盒：假设放了k个盒，$m \geq k \geq 1$。那么答案就是$\sum_{k=1}^{m} S(n, k)$。
(2)不允许有空盒：$S(n, m)$。

n个小球无区别，m个盒子有区别

(1)允许空盒：$n \geq m \geq 1$。“隔板法”。假设不允许有空盒，每一个盒里都先放一个小球，这样小球共有$n + m$个，然后插板，插板的方案数为C_{n+m-1}^{m-1}。
(2)不允许空盒：$n \geq m \geq 1$。“隔板法”。方案数C_{n-1}^{m-1}。

n个小球无区别，m个盒子无区别

(1)允许空盒：划分数问题。$dp[i][j]$表示i个球，j个盒子的方案数。转移方程为
$dp[i][j] = dp[i-j][j] + dp[i][j-1] (i \geq j)$
$dp[i][j] = dp[i][j-1] (i < j)$
如果$n < m$，答案为$dp[n][n]$，否则为$dp[n][m]$。
(2)不允许空盒：$n \geq m \geq 1$。转成上情况的$n - m$个小球，m个盒子。

计数原理与计数公式

可重复的排列与组合

可重复的排列

从n个不同元素中取m个元素（同一元素可以重复取出），按照一定的顺序排成一列。排列的个数为n^m。

可重复的组合

从n个不同元素中取m个元素（同一元素可以重复取出），并成一组。组合的个数为C_{n+m-1}^{m}。

不全相异元素的全排列

n个元素中，分别有$n_1, n_2, \ldots, n_k$个元素相同，且$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$，则称这n个元素的全排列为不全相异元素的全排列，个数为
$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$

多组组合

n个相异的元素分为$k(k \le n)$个按照**一定顺序**排列的组，其中第i组有n_i个元素$(i=1,2,\ldots,k)(n_1+n_2+\ldots+n_k=n)$。不同的分组方法为
$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$
【例】
从$n(n \ge 6)$个选手中选3对选手参加双打，问共有多少种选法。
答案为（注意不考虑**组的顺序**）
$\frac{C_n^6 * \frac{6!}{2!*2!*2!}}{3!}$

相异元素的圆排列和项链数

圆排列

n个元素不分首尾排成一圈，成为n个相异元素的圆排列。排列的种数为$(n-1)!$。

项链数

将n粒不相同的珠子，穿成一副项链，得到的不同的项链数。
由于项链顺时针和逆时针都是相同的，所以个数即是圆排列的一半。
$\begin{cases} 1, n=1\text{或}n=2 \\ \frac{1}{2}*(n-1)!, n \ge 3 \end{cases}$

错排问题

错排递推式。
$D(n)$代表n个数的错排公式，则
$D(n)=(n-1)*[D(n-1)+D(n-2)]$
错排公式
$D(n)=n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!})$

组合数常用公式

$$C_n^2=\frac{n*(n-1)}{2}$$

$$C_n^3=\frac{n*(n-1)(n-2)}{6}$$

$$C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m$$

$$m*C_n^m=n*C_{n-1}^{m-1}$$

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$$

$$1C_n^1+2C_n^2+\ldots+nC_n^n=n2^{n-1}$$

$$1^2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+n^2C_n^n=n(n+1)2^{n-2}$$

$$\frac{C_n^1}{1}-\frac{C_n^2}{2}+\frac{C_n^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{C_n^n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$
范德蒙恒等式:
$\sum_{i=0}^k C_n^i C_m^{k-i}=C_{n+m}^k$

$$\sum_{i=0}^n C_n^i * r^i=(r+1)^n\text{（广义二项式定理）}$$

$$\sum_{i=0}^n i*C_n^i=n*2^{n-1}$$

$$\sum_{i=0}^n C_i^k=C_{n+1}^{k+1}$$

$$\sum_{i=0}^k C_{n+i}^i=C_{n+k+1}^k$$

抽屉原理与平均值原理

抽屉原理

第一抽屉原理

如果将m个物件放入n个抽屉内，那么必有一个抽屉内至少有$[\frac{m-1}{n}]+1$个物件。
【推广】
如果将$m_1+m_2+...+m_n+1$个物件放入n个抽屉内，那么或者第一个抽屉内至少有m_1+1个物件，或者第二个抽屉内至少有m_2+1个物件......或者第n个抽屉内至少有m_n+1个物件。

第二抽屉原理

如果将m个物件放入n个抽屉内，那么必有一个抽屉内至多有$[\frac{m}{n}]$个物件。
【推广】
如果将$m_1+m_2+...+m_n-1$个物件放入n个抽屉内，那么或者第一个抽屉内至多有m_1-1个物件，或者第二个抽屉内至多有m_2-1个物件......或者第n个抽屉内至多有m_n-1个物件。

平均值原理

（1）设$a_1,a_2,...,a_n$是实数，$A=\frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)$，则$a_1,a_2,...,a_n$中必有一个数不小于A，也有一个数不大于A。
（2）设$a_1,a_2,...,a_n$是实数，$G=\frac{1}{n}\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$，则$a_1,a_2,...,a_n$中必有一个数不小于G，也有一个数不大于G。

生成函数

生成函数的定义：
实数序列 $a_0,a_1,...,a_k,...$的生成函数是无穷级数
$G(x)=a_0+a_2x+...+a_kx^k+...=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$
a_k的普通生成函数。
广义二项式系数：
$\binom{u}{k}=\begin{cases}u(u-1)(u-2)...(u-k+1)/k!, & k>0\\ 1, & k=0\end{cases}$
【例】
$$\begin{aligned}\binom{1/2}{3}&=\frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!}\\&=\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}\\&=1/16\end{aligned}$$
设x是实数，$|x|<1$，u是实数，那么
$(1+x)^u=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{u}{k}x^k$

常用生成函数

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k$$

$$\frac{1}{1-ax}=\sum_{k=0}^{\infty}a^kx^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k}x^k$$

$$\frac{1}{(1+x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k}(-1)^kx^k$$

计数问题

特殊计数序列

Catalan数列

前几项：$1,1,2,5,14,42,132,429,1430,4862,16796,58786,208012,......$即$c[0]=1,c[1]=1,c[2]=2...$

递推式1：$f[n] = \sum_{i=0}^{n-1} f[i] * f[n-i-1]$

递推式2：$f[n] = \frac{4n-2}{n+1} f[n-1]$

组合式1：$f[n] = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$

组合式2：$f[n] = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$

应用：

1. 二叉树计数1：已知二叉树有n个节点，能够构成C_n种不同的二叉树。（二叉搜索树）
2. 二叉树计数2：已知二叉树的叶子n个，能够构成C_{n-1}种不同的二叉树。（二叉搜索树）
3. 括号匹配数：一个合法的表达式由()包围，()可以嵌套和连接，给出n对括号，可以组成的合法表达式的个数为C_n。
4. 划分问题：将一个凸$n+2$多边形区域分成三角形区域的方法数为C_n。
5. 出栈问题1：一个栈的进栈序列为$1, 2, 3, ..n$，不同的出栈序列有C_n种。
6. 出栈问题2：有2n个人排成一行进入剧场。入场费5元。其中只有n个人有一张5元钞票，另外n人只有10元钞票，剧院无其它钞票，问有多少种方法使得只要有10元的人买票，售票处就有5元的钞票找零。5元的相当于入栈，10元的相当于出栈，转化成上问题。
7. 路径问题：在$n * n$的方格地图中，从一个角到另外一个角，不跨越对角线的路径数有C_n种。
8. 握手问题：$2n$个人均匀坐在一个圆桌边上，某个时刻所有人同时与另一个人握手，要求手之间不能交叉，共有C_n种握手方法。

Fibonacci数列

通项公式：$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$
递推式：
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
性质：
$F_1 + F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$

$F_1 + 2F_2 + 3F_3 + ... + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$

$F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$

$F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

$F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
定理：
$F_n F_m + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n-1}$

$F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n = F_{m+n}$

$m = n$时，
$F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$

$F_{2n} = (F_{n-1} + F_{n+1}) F_n = (2F_{n-1} + F_n) F_n$

F_n整除F_m当且仅当n整除m，其中$n \geq 3$

任意连续三个$Fibonacci$数两两互素。

Lucas数列

定义：
$L_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ L_{n-1} + L_{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$
通项公式：
$L_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

与Fibonacci数的关系：
$F_{2n}=L_nF_n$

$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$

$F_n=\frac{L_{n-1}+L_{n+1}}{5}$

$L_n^2=5F_n^2+4(-1)^n$

Stirling数

第一类Stirling数

$S1(n,m)$表示的是将n个不同元素构成m个圆排列的数目。
递推式：
$S1(n,m)=(n-1)*S1(n-1,m)+S1(n-1,m-1)(n>1,m>1)$

边界条件：
$S1(0,0)=1,S1(n,0)=0$
$S1(n,n)=1$
性质：
$\sum_{k=0}^{n}S1(n,k)=n!$
【例】n个仓库， $2n$把钥匙，n 位官员。如果把n位官员分成m个不同的部，部中的官员数量与管理的仓库数量一致。有多少种方案使得所有同部的官员可以打开所有本部管理的仓库，而无法打开其他管理的仓库。（n把钥匙放到仓库，n把钥匙分给官员）
方案数即为$S1(n,m)n!$。
前面的是放到仓库里的方案数，后面说官员的分配方案。

第二类Stirling数

$S2(n,m)$表示的是把n个不同元素划分到m个集合的方案数。
递推式：
$S2(n,m)=m*S2(n-1,m)+S2(n-1,m-1)(1\le m\le n-1)$
边界条件：
$S2(n,0)=0,S2(n,1)=1$
$S2(n,n)=1$

类欧几里得

类欧几里得可以在$O(logn)$的复杂度下求解类似以下的式子；
$f(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}\left\lfloor\frac{ai+b}{c}\right\rfloor$
$g(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}i\left\lfloor\frac{ai+b}{c}\right\rfloor$
$h(n,a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}\left\lfloor\frac{ai+b}{c}\right\rfloor^2$

$f(n,a,b,c)$函数的计算：

1. 当$a=0$时，原式$=(n+1)\lfloor\frac{b}{c}\rfloor$
2. 当$a\ge c||b\ge c$时，

$$\begin{aligned}原式&=\sum_{i=0}^{n}\left\lfloor\frac{(\lfloor\frac{a}{c}\rfloor c+a\%c)i+(\lfloor\frac{b}{c}\rfloor c+b\%c)}{c}\right\rfloor\\&=\sum_{i=0}^{n}\lfloor\frac{a}{c}\rfloor i+\lfloor\frac{b}{c}\rfloor+\lfloor\frac{(a\%c)i+b\%c}{c}\rfloor\\&=\lfloor\frac{a}{c}\rfloor\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\lfloor\frac{b}{c}\rfloor+\sum_{i=0}^{n}\left\lfloor\frac{(a\%c)i+b\%c}{c}\right\rfloor\\&=\lfloor\frac{a}{c}\rfloor\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\lfloor\frac{b}{c}\rfloor+f(n,a\%c,b\%c,c)\end{aligned}$$

3. 当$a<c\&\&b<c$

$$\begin{aligned}原式&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor-1}1\\&=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor-1}\sum_{i=0}^{n}\left[j<\left\lfloor\frac{ai+b}{c}\right\rfloor\right]\end{aligned}$$

然后对于$j<\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor$进行一些变换

$$\begin{aligned}
j<\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor &\Leftrightarrow j+1\le\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor\Leftrightarrow j+1\le\frac{ai+b}{c}\\
&\Leftrightarrow jc+c\le ai+b\Leftrightarrow jc+c-b-1<ai\\
&\Leftrightarrow \frac{jc+c-b-1}{a}<i\\
&\Leftrightarrow \left\lfloor\frac{jc+c-b-1}{a}\right\rfloor<i
\end{aligned}$$

此时令$m=\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor, t=\lfloor\frac{jc+c-b-1}{a}\rfloor$
所以可以得到

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor-1}\sum_{i=0}^{n}\left[j<\left\lfloor\frac{ai+b}{c}\right\rfloor\right]\\
&=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n}[i>t]\\
&=\sum_{j=0}^{m-1}n-t=nm-\sum_{j=0}^{m-1}t\\
&=nm-\sum_{j=0}^{m-1}\left\lfloor\frac{jc+c-b-1}{a}\right\rfloor\\
&=nm-f(m-1,c,c-b-1,a)
\end{aligned}$$

总结$f(n,a,b,c)$的函数值，令$m=\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor$
当$a=0$时，$f(n,a,b,c)=(n+1)\lfloor\frac{b}{c}\rfloor$
当$a\ge c||b\ge c$时，$f(n,a,b,c)=\lfloor\frac{a}{c}\rfloor\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\lfloor\frac{b}{c}\rfloor+f(n,a\%c,b\%c,c)$
当$a<c\&\&b<c$，$f(n,a,b,c)=nm-f(m-1,c,c-b-1,a)$

$g(n,a,b,c)$函数的计算：
此处主要推导当$a<c\&\&b<c$的情况：
还是令$m=\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor, t=\lfloor\frac{jc+c-b-1}{a}\rfloor$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \sum_{i=0}^{n}i\left\lfloor\frac{ai+b}{c}\right\rfloor=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor-1}i\\
&=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor-1}\sum_{i=0}^{n}i\left[j<\left\lfloor\frac{ai+b}{c}\right\rfloor\right]\\
&=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n}i[i>t]\\
&=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(n-m)(m+1+n)}{2}\\
&=\frac{1}{2}[nm(n+1)-h(m-1,c,c-b-1,a)-f(m-1,c,c-b-1,a)]
\end{aligned}$$

总结$g(n,a,b,c)$的函数值，令$m=\lfloor\frac{an+b}{c}\rfloor$
当$a=0$时，$g(n,a,b,c)=\frac{n(n+1)}{2}\lfloor\frac{b}{c}\rfloor$
当$a\ge c||b\ge c$时，$g(n,a,b,c)=\lfloor\frac{a}{c}\rfloor\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\lfloor\frac{b}{c}\rfloor\frac{n(n+1)}{2}+g(n,a\%c,b\%c,c)$
当$a<c\&\&b<c$，$g(n,a,b,c)=\frac{1}{2}[nm(n+1)-h(m-1,c,c-b-1,a)-f(m-1,c,c-b-1,a)]$

$h(n,a,b,c)$函数的计算：
此处主要推导当$a<c\&\&b<c$的情况：
首先进行一步代换：$n^2=2\frac{n(n+1)}{2}-n=(2\sum_{i=0}^{n}i)-n$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left[\left(2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor} j \right) - \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor \right] \\
&= \left(2 \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor} j \right) - f(n,a,b,c)
\end{aligned}
$$

对于左边一部分：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor} j &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor -1} (j+1) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (j+1) \sum_{i=0}^{n} \left[j < \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor \right] \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (j+1) \sum_{i=0}^{n} [i > t] \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (j+1)(n-t) \\
&= \frac{1}{2} nm(n+1) - g(m-1,c,c-b-1,a) - f(m-1,c,c-b-1,a)
\end{aligned}
$$

综上$h(n,a,b,c) = nm(n+1) - 2g(m-1,c,c-b-1,a) - 2f(m-1,c,c-b-1,a) - f(n,a,b,c)$

总结$h(n,a,b,c)$的函数值，令$m = \lfloor \frac{an+b}{c} \rfloor$
当$a=0$时，$h(n,a,b,c) = (n+1)\lfloor \frac{b}{c} \rfloor^2$
当$a \geq c || b \geq c$时，
$h(n,a,b,c) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \lfloor \frac{a}{c} \rfloor^2 + (n+1)\lfloor \frac{b}{c} \rfloor^2 + \lfloor \frac{a}{c} \rfloor \lfloor \frac{b}{c} \rfloor n(n+1) + h(n, a\%c, b\%c, c) + 2\lfloor \frac{b}{c} \rfloor f(n, a\%c, b\%c, c) + 2\lfloor \frac{a}{c} \rfloor g(n, a\%c, b\%c, c)$

当$a < c \&\& b < c$，$h(n,a,b,c) = \frac{1}{2}[nm(n+1) - h(m-1,c,c-b-1,a) - f(m-1,c,c-b-1,a)]$