컴퓨터그래픽스 — 중간 정리

202104340, 김재덕

Mathematics: Basics

이론 정리

벡터

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- 수학에서의 벡터는 "덧셈과 스칼라 곱, 영 벡터 (zero vector) 등이 정의되는 벡터 공간의 원소"를 뜻함
- 과학 및 공학 분야에서 **벡터는 변위, 속도, 가속도와 같이 "크기와 방향을 갖는 물리량"을 나타낼 때 사용**
- 컴퓨터 그래픽스에서는 행 벡터 (row vector) 대신 열 벡터 (column vector)로도 벡터를 표현할 수 있음

단위 벡터

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- 벡터의 각 성분을 그 벡터의 길이로 나누는 것을 정규화 (normalization)라고 하며, 이렇게 정규화되어 길이가 1인 벡터를 단위 벡터 (unit vector)라고 함

벡터의 내적

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = |\vec{v}||\vec{w}| \; cos\ \theta$$

- **벡터의 내적을 이용하면 두 벡터 사이의 각도를 구할 수 있으며**, 특히 $\vec{v}$와 $\vec{w}$가 단위 벡터라면 $\vec{v} \cdot \vec{w} = cos\ \theta$이 되어 계산이 더 편해짐
- $y = cos\ x$의 그래프를 통해 $\theta > 0$이면 두 벡터가 예각 (acute angle)을, $\theta < 0$이면 두 벡터가 둔각 (obtuse angle)을 이룰 것임을 알 수 있음

벡터의 외적

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 \\ z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2 \\ x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

- 벡터의 외적은 3차원 공간에서만 정의되며, **벡터의 외적을 이용하면 두 벡터와 수직을 이루는 또다른 벡터를 구할 수 있음**
- **오른손 법칙 (right-hand rule):** $\vec{v}$를 오른손 검지, $\vec{w}$를 오른손 중지라고 생각하면, $\vec{v} \times \vec{w}$는 오른손 엄지 방향으로 향함
- 오른손 법칙 (또는 벡터의 외적을 직접 계산)에 의하면, $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$

행렬

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

- 1개 이상의 수식을 직사각형 형태로 배열한 것으로, **주로 여러 개의 벡터나 연립 일차 방정식 (system of linear equations)의 계수 등을 하나로 묶어서 표현하기 위해 사용함**
- 행렬의 가로 줄을 행 (row), 세로 줄을 열 (column)이라고 하며, 행의 개수가 Y이고 열의 개수가 X인 행렬의 크기는 $Y \times X$와 같이 나타냄

역행렬

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$의 조건을 만족하는 A^{-1}가 존재하는 경우, A를 가역 행렬 (invertible matrix)라고 하며 A^{-1}를 역행렬 (inverse matrix)라고 함
- 방정식 $Ax = b$의 해가 $x = A^{-1}b$ 단 하나인 경우, A의 역행렬이 존재함

전치 행렬

$$A^T = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

- A의 행과 열을 주 대각선 (main diagonal)을 기준으로 뒤집은 행렬을 전치 행렬 (transpose matrix)라고 함
- 두 벡터의 내적 $\vec{v} \cdot \vec{w}$은 $\vec{v}^T \vec{w}$로 표현할 수도 있음
- $(A+B)^T = A^T + B^T, (AB)^T = B^T A^T, (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

행렬의 곱

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot y_3 & x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot y_4 \\ y_1 \cdot x_3 + y_2 \cdot y_3 & y_1 \cdot x_4 + y_2 \cdot y_4 \\ z_1 \cdot x_3 + z_2 \cdot y_3 & z_1 \cdot x_4 + z_2 \cdot y_4 \end{bmatrix}$$

- $m \times n$ 크기의 행렬 A와 $n \times p$ 크기의 행렬 B의 곱은 $m \times p$의 행렬이 됨
- $m = p = 1$일 경우에 AB는 행 1개과 열 1개의 곱 (두 행렬의 내적)이 되지만, BA는 $n \times n$ 크기의 행렬이 되는 것을 확인할 수 있음 ($AB \neq BA$)

항등 행렬

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 주 대각선의 모든 원소가 1이고 나머지 원소가 1인 행렬을 단위 행렬 (unit matrix) 또는 항등 행렬 (identity matrix)라고 함
- 임의의 행렬 A와 항등 행렬 I를 곱하면 그 결과는 항상 A가 되며 ($AI = IA = A$), **항등 행렬은 변환 행렬 (transformation matrix)의 가장 기초적인 형태로 볼 수 있음**

변환 행렬

- 컴퓨터 그래픽스에서 3차원 벡터를 표현할 때는 $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 형태의 3×1 행렬이 아닌 $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ 형태의 4×1 행렬을 이용하는데, 이렇게 N차원 공간에서의 좌표를 $(N+1) \times 1$의 성분으로 표현하는 좌표계를 동차 좌표계 (homogeneous coordinates)라고 함
- **동차 좌표계를 사용하는 이유는 원래 두 벡터의 합으로 나타내야 하는 이동 (translation) 연산을 크기 변환 (scale)과 회전 (rotation)처럼 행렬의 곱으로 나타내기 위해서임**

선형 보간법

- 시작 점 C_0과 끝 점 C_1을 잇는 선분에서 C_0과 C_1에 각각 특정한 값 c_0, c_1이 주어졌을 때, C_0과 C_1 사이의 임의의 점에 대응되는 값을 비례식을 통해 찾는 알고리즘
- 예를 들어, C_0과 C_1 사이에 B라는 점이 주어지고, B와 C_1 사이의 거리가 C_0과 B 사이의 거리의 t배라면, B에 대응되는 값은 $(1-t)c_0 + tc_1$이 됨

연습 문제

TODO: ...

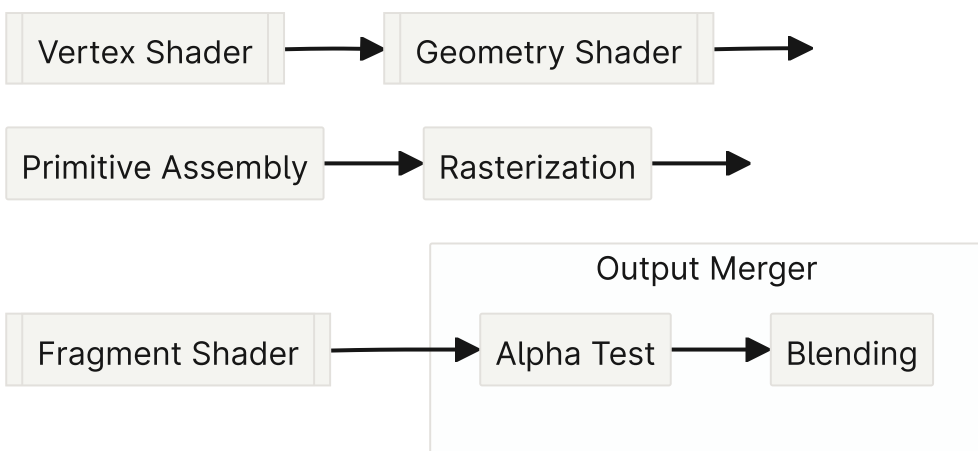
Modeling

이론 정리

렌더링 과정의 이해

- 컴퓨터 그래픽스에서 **모든 물체는 3차원 공간에 존재**하지만 (2차원 게임도 사실은 $z = 0$인 3차원 공간임), 게임을 하는 사람의 입장에서는 컴퓨터 모니터를 통해 **픽셀 (pixel)로 이루어진 2차원의 평평한 화면만을 볼 수 있음**
- 따라서, 그래픽 렌더링 과정의 핵심은 **3차원 좌표를 2차원 좌표로 표현하고, 그 2차원 좌표에 색상을 입혀 픽셀로 만드는 것**이라고 할 수 있음

그래픽 파이프라인

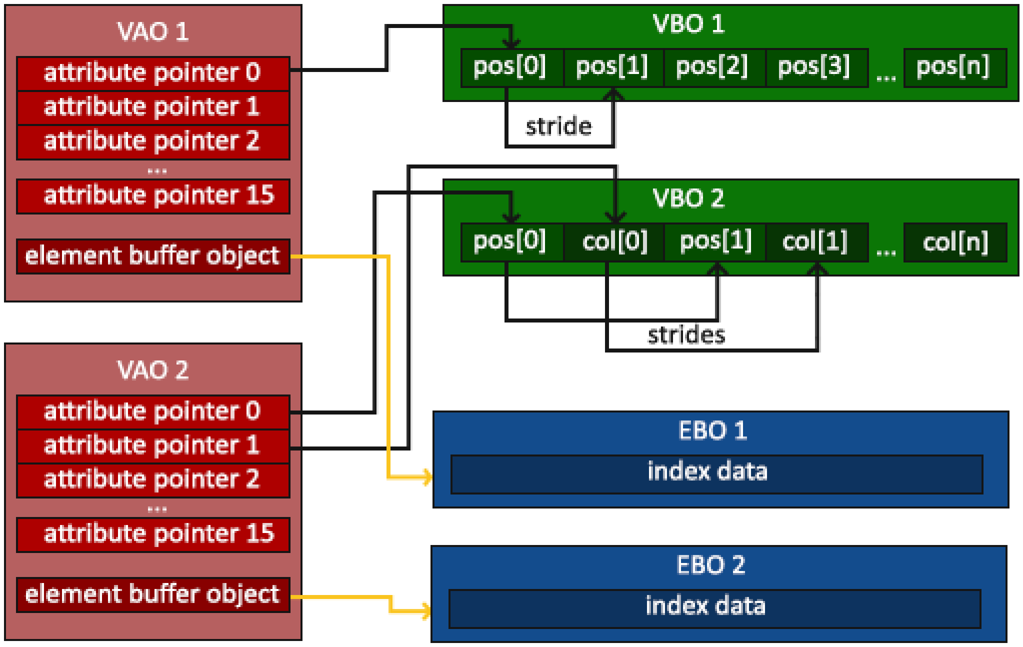


- 셰이더 (shader)는 CPU가 아닌 **GPU에서 실행되는 프로그램을 뜻하며,** 게임 프로그래머가 직접 작성해주어야 함
- 정점 셰이더 (vertex shader)는 3차원 공간에 존재하는 정점 좌표들을 적절하게 처리하여 다음 단계에 넘겨줌
- 래스터화 (rasterization) 단계에서는 정점으로 이루어진 도형을 게임 화면에 그릴 수 있는 '픽셀' (pixel) 단위로 변환하고, 프래그먼트 셰이더 (fragment shader)는 각 픽셀의 색상을 계산함
- **래스터화 단계와 출력 결과 병합 등의 과정은 NVIDIA 등의 GPU 제조사에서 만든 그래픽 드라이버가 직접 처리**하며, 게임 프로그래머가 바꿀 수 없음

정규화 장치 좌표계

- 정규화 장치 좌표계 (Normalized Device Coordinates, NDC)란 x 성분, y 성분과 z 성분이 모두 -1.0부터 1.0까지인 3차원 공간을 뜻함
- **정점 셰이더를 거친 모든 정점은 반드시 NDC에 속해야 게임 화면에 그려질 수 있음**

정점의 표현



- 프레임버퍼 (framebuffer)는 비디오 메모리 (video memory, VRAM)와 같은 뜻으로, 그래픽 카드 (graphics card)에서 다음으로 그릴 화면의 픽셀 정보가 저장되는 곳임
- 각 정점 (vertex)을 정점 셰이더에 넘겨주기 위해서는 2개 과정이 필요함
  - 모든 정점의 좌표를 1차원의 `float` 배열 (`float []`)에 때려넣고, 그 배열을 `glBufferData()` 함수를 통해 VRAM에 저장
  - VRAM에 저장된 1차원의 `float` 배열이 VRAM의 어느 곳에 저장되어 있는지, 그리고 배열로부터 어떻게 정점 좌표를 읽을지 (정점 좌표를 `float` 몇 개로 표현할 것인지 등)를 정의
- 첫 번째 과정으로 만들어지는 공간을 VBO (Vertex Buffer Object)라고 함
  - **Buffer Object라는 단어의 뜻은 그냥 "VRAM에 저장되는 데이터"라고 생각하면 편함** (예를 들면, VBO, EBO나 FBO 등)
- 두 번째 과정으로 만들어지는 공간을 VAO (Vertex Array Object)라고 함
  - VAO에는 VBO에 저장된 각 정점 좌표의 비디오 메모리 주소와 그 정점에 대한 속성이 저장됨
  - 따라서, **VAO를 가장 먼저 생성하고 그 다음에 VBO를 생성해** 정점 좌표를 VRAM으로 보낸 다음, 각 정점의 속성을 지정해주어야 함
  - (그러면... VAO를 레시피, VBO를 재료, EBO는 재료 손질 순서라고 생각하면 되나...?)

정점의 인덱스 참조

```
float vertices[] = {
    /* 첫 번째 삼각형 */
     0.5f,  0.5f, 0.0f,  // #0
```

```
     0.5f, -0.5f, 0.0f,  // #1
    -0.5f,  0.5f, 0.0f,  // #2

    /* 두 번째 삼각형 */
     0.5f, -0.5f, 0.0f, // #3
    -0.5f, -0.5f, 0.0f, // #4
    -0.5f,  0.5f, 0.0f  // #5
};
```

- `vertices` 배열로 만든 VBO로 사각형을 그린다고 하면, `(#1, #3)`, `(#2, #5)`와 같이 중복되는 좌표가 존재하는 것을 알 수 있음
- 정점 좌표를 이렇게 저장하면 VRAM 공간이 낭비되기 때문에, 정점 좌표를 직접 사용하는 대신 각 좌표의 인덱스로 사각형을 표현할 방법이 필요한데, 이때 `indices`와 같이 **정점 좌표의 인덱스들이 저장될 VRAM 공간을 EBO (Element Buffer Object)라고 함**

```
float vertices[] = {
     0.5f,  0.5f, 0.0f,
     0.5f, -0.5f, 0.0f,
    -0.5f, -0.5f, 0.0f,
    -0.5f,  0.5f, 0.0f
};

unsigned int indices[] = {
    /* 첫 번째 삼각형 */
    0, 1, 3,

    /* 두 번째 삼각형 */
    1, 2, 3
};
```

모델과 메시

- 모델 (model)은 현실 세계의 물체를 컴퓨터로 표현한 것을 뜻하며, 메시 (mesh)라고 불리는 삼각형 또는 사각형 조각이 수백, 수천 또는 수만 개가 모여서 만들어짐
- 다각형 메시로 구성된 모델이 게임 등의 실시간 소프트웨어 (real-time applications)에 많이 사용되는 이유는 **GPU가 다각형 처리를 빠르게 할 수 있기 때문임**
- 모델을 구성하는 다각형 메시의 개수 (정점 개수)가 많으면 많을수록 모델을 더 정교하게 표현 가능한데, 이것을 LOD (Level of Detail)이라고 함

표면 법선

$$\overrightarrow{n}_{surface} = \frac{\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}}{|\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}|}$$

- 표면 법선 (surface normal)은 삼각형 메시에서 모델의 바깥쪽을 향하는 법선 벡터를 뜻함
- 시계 반대 방향 (counter-clockwise, CCW)으로 정렬된 정점 v_1, v_2, v_3를 가진 삼각형의 표면 법선은 v_1을 지나는 두 변의 벡터 $\vec{e_1} = \overrightarrow{v_2 - v_1}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{v_3 - v_1}$의 외적을 통해 구할 수 있음

정점에 대한 법선

- 삼각형 메시 위의 어떤 **정점에 대한 법선 (vertex normal)은 그 정점을 가진 모든 삼각형 메시의 표면 벡터의 평균을 뜻함**

GLSL

```
#version version_number

in type in_variable_name;
in type in_variable_name;

out type out_variable_name;

uniform type uniform_name;

void main() {
    out_variable_name = weird_stuff_we_processed;
}
```

- GLSL (Open**GL** **S**hading **L**anguage)는 셰이더 프로그램을 작성할 때 사용하는 프로그래밍 언어로, C언어와 비슷한 형태를 띠고 있음
- `int`, `float`, `double`과 `bool` 등의 기본 자료형 외에도 벡터와 행렬을 위한 별도의 자료형이 존재함
- 벡터와 행렬도 기본 자료형과 마찬가지로 `+`, `-`, `+=` 등의 산술 연산자를 통해 두 벡터의 합, 행렬의 곱 등을 계산할 수 있음

GLSL의 벡터 자료형

- 벡터는 `vec2`, `bvec3`, `ivec4`, `uvec3`, `dvec2`와 같이 2 - 4개의 요소를 정의할 때 사용하며, `b`는 `bool`, `i`는 `int`, `u`는 `unsigned int` (`uint`), `d`는 `double`을 뜻함
- 벡터의 `x`, `y,` `z`, `w` 성분에 접근할 때는 `v.x`, `v.y`, `v.z`, `v.w`를 이용함
- **스위즐링 (swizzling):** 벡터의 성분을 "뒤섞어서 (swizzle)" 또다른 벡터를 정의하는 것을 스위즐링이라고 하며, GLSL에 존재하는 고유 기능임

```
vec2 myVec2 = vec2(1.0f, 0.5f);

// vec3 myVec3 = vec3(1.0f, 0.5f, 1.0f);
```

```
vec3 myVec3 = myVec2.xyx;

// vec4 myVec4 = vec4(1.0f, 1.0f, 0.5f, 1.0f);
vec4 myVec4 = myVec3.zxyz;

// myVec2 = vec2(0.5f, 1.0f);
myVec2.yx = vec2(1.0f, 0.5f);
```

`in`과 `out` 한정자

```
layout (location = 0) in vec3 aPosition;
```

- `in`과 `out` 키워드는 셰이더의 입력 값과 출력 값을 지정하며, 셰이더 사이에 값을 넘겨줄 때도 사용할 수 있음
- 예를 들어, 정점 셰이더에서 `out vec4 vertexColor;`가 정의되어 있고 프래그먼트 셰이더에서는 `in vec4 vertexColor;`가 정의되어 있다면, OpenGL에서는 셰이더 프로그램을 링킹할 때 정점 셰이더의 `vertexColor` 값을 그대로 프래그먼트 셰이더에 넘겨줌

`uniform` 한정자

```
uniform vec4 myColor;
```

- `uniform` 한정자는 모든 셰이더 프로그램에서 사용되는 "전역 변수" (global variable)을 정의할 때 사용됨
- `uniform`이 붙은 변수는 **셰이더 프로그램이 활성화된 상태일 경우** `glGetUniformLocation()` 함수를 통해 그래픽 파이프라인 외부에서 직접 값을 지정해줄 수 있음

연습 문제

TODO: ...

Spaces and Transforms

이론 정리

크기 변환 행렬 (2차원)

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ x_y \cdot y \end{bmatrix}$$

- 크기 변환 행렬 (scaling matrix)은 다각형을 구성하는 각 좌표의 x성분과 y성분에 각각 s_x와 s_y를 곱해서 다각형의 크기를 변경함
- 크기 변환 연산에서 $s_x = s_y$인 경우를 균등 크기 변환 (uniform scaling), $s_x \neq s_y$인 경우를 비균등 크기 변환 (non-uniform scaling)이라고 함

크기 변환 행렬 (3차원)

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ s_z \cdot z \end{bmatrix}$$

회전 행렬 (2차원)

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

- $x = rcos\phi, y = rsin\phi$, 즉 (x, y)가 중심이 원점이고 반지름이 r인 원 위에 있는 경우 $x' = rcos(\phi + \theta)$, $y' = rsin(\phi + \theta)$가 되고, 삼각 함수의 덧셈 법칙으로 전개하면 회전 행렬 (rotation matrix) $R(\theta)$를 구할 수 있음
- $R(\theta)$는 **벡터를 원점 기준으로 반시계 방향으로 회전**시키는데, θ가 음수일 경우 $R(\theta)$는 벡터를 원점 기준으로 시계 방향으로 회전시킴

회전 행렬 (3차원)

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 2차원에서의 회전 연산은 원점을 기준으로 점을 회전시키지만, **3차원에서의 회전 연산은 축 (axis)을 기준으로 점을 회전시킴**

이동 행렬 (2차원)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \end{bmatrix}$$

- **이동 (translation)은 크기 변환이나 회전과 달리, 행렬의 곱으로 표현할 수 없음** $\rightarrow$ 동차 좌표계 (homogeneous coordinates) 이용!

동차 좌표계

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+d_x \\ y+d_y \\ w \end{bmatrix}$$

- n차원 공간의 좌표, 즉 n개의 성분을 가진 점을 $n+1$의 성분을 가진 벡터로 표현하는 좌표계
- 예를 들면, 2차원 공간의 점 (x, y)는 성분을 하나 더 추가하여 (wx, wy, w)의 형태로 나타낼 수 있음
- **동차 좌표계를 이용하면 좌표의 이동을 행렬의 곱으로 표현 가능**
- 동차 좌표 (wx, wy, w)에서 원래 좌표를 구할 때는 마지막 성분이 1이 되도록 모든 성분을 w로 나누면 됨 $\rightarrow (\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1)$

이동 행렬 (3차원)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+d_x \\ y+d_y \\ z+d_z \\ w \end{bmatrix}$$

- 2차원에서의 이동 연산과 마찬가지로, 동차 좌표계를 이용해 좌표의 이동을 행렬의 곱으로 표현

변환 행렬

- 앞에서 정리한 크기 변환, 이동 및 회전 연산을 변환 (transformation)이라고 함
- 변환은 행렬 곱으로 표현되므로 교환 법칙이 성립하지 않음
- 원점이 아닌 다른 점 (a, b)를 기준으로 회전 연산을 하려는 경우
  1. 점 (x, y)를 $(-a, -b)$만큼 이동시키고...
  2. $(x-a, y-b)$를 원점을 기준으로 회전시킨 다음...
  3. 그 점을 (a, b)만큼 다시 이동시키면 됨!

아핀 변환 (2차원)

$$S' = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R'(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 아핀 변환 (affine transform)은 크기 변환, 회전, 반사 (reflection) 등의 선형 변환 (linear transform) 연산, 그리고 이동 연산을 가리킴
- 아핀 변환 행렬은 몇 개가 주어지든 항상 하나의 행렬로 결합할 수 있으며, **아핀 변환 행렬의 마지막 행은 반드시 $[0 \quad 0 \quad 1]$의 형태를 가짐**
- 마지막 행을 제외한 2×3 행렬은 왼쪽 2×2 행렬 (L)과 오른쪽 2×1 열 벡터 (t)를 합친 $[L \mid t]$ 형태로 볼 수 있으며, 이때 L에는 크기 변환과 회전 연산만이 포함되고 열 벡터 t는 이동 연산

까지 포함됨

- 어떤 점 p에 아핀 변환을 적용할 때는 먼저 L을 적용, 즉 크기 변환과 회전을 먼저 하고 그 다음에 t를 적용하여 최종 위치 $Lp+t$를 구할 수 있음

아핀 변환 (3차원)

$$S' = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_x'(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 2차원에서의 아핀 변환 행렬과 유사하게, **아핀 변환 행렬의 마지막 행은 반드시 $[0 \quad 0 \quad 1]$의 형태를 가짐**
- 마지막 행을 제외한 3×4 행렬은 왼쪽 3×3 행렬 (L)과 오른쪽 3×1 열 벡터 (t)를 합친 $[L \mid t]$ 형태로 볼 수 있으며, 이때 L에는 크기 변환과 회전 연산만이 포함되고 열 벡터 t는 이동 연산까지 포함됨

강체 운동

- 변환 행렬에 오직 회전과 이동 연산만이 포함된 경우 물체의 회전 각도와 위치만 변하고 물체의 모양은 변경하지 않으므로, 이러한 행렬을 강체 운동 (rigid-body motion) 행렬이라고도 함

크기 및 이동 변환 행렬의 역행렬

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & 0 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 & -d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (당연한 얘기지만) 변환 행렬의 역행렬을 물체에 적용하면 그 물체의 크기, 회전 각도와 위치가 원래대로 되돌아가게 됨 ($SS^{-1} = S^{-1}S = I$, $TT^{-1} = T^{-1}T = I$)

회전 행렬의 역행렬

$$R^{-1} = R^T$$

- 3×3 회전 행렬의 열을 각각 u, v, n이라고 하면, $u \cdot u = v \cdot v = n \cdot n = 1$이고 $u \cdot v = v \cdot n = n \cdot u = 0$임을 알 수 있는데, 이것은 u, v, n이 각각 물체 공간 (object space, local space)의 x축, y축과 z축을 나타내는 단위 벡터임을 뜻함
- **회전 행렬을 통해 물체 공간의 세 축을 구할 수 있으며, 물체 공간의 세 축을 통해 회전 행렬을 구할 수 있음**

연습 문제

TODO: ...

Vertex Processing

이론 정리

정점 셰이더

Object Space —(world trans.)→ World Space —(view trans.)→

Camera Space —(projection trans.)→ Clip Space ⟶ Viewport

- 정점 셰이더에서 가장 중요한 작업은 VAO로부터 정점을 하나씩 입력받고, **각 정점에 변환 행렬을 적용하여 정점의 좌표가 NDC 내에 있도록 만드는 것임**

물체 공간

- 중심이 원점이고 회전 축이 물체와 완전히 고정된 공간
- 내가 게임 캐릭터라고 가정하면, 내가 어디에 서 있고 내 몸이 어느 방향을 향하는지에 관계없이 항상 내 몸의 중심은 $(x=0, y=0, z=0)$이고 회전 축도 전부 다 나를 기준으로 x축, y축, z축이 결정되는 공간

연습 문제

TODO: ...
