Robotik - Blatt 2

Lukas Graber: 4117151
Dorotea Ileshaj

Aufgabe 1

a) $d_1 = 0{,}7m$ $\quad L_1 = 1{,}4m$

$d_2 = 1{,}8m$ $\quad L_2 = 2{,}4m$

$d_3 = 0{,}5m$ $\quad L_3 = 1{,}5m$

| 1 | 2 | Σ |
|---|---|---|
| 8 | 8,5 | 16,5 |

Weltkoordinatenursprung in Roboterkoordinaten:

$x_W = \frac{L_1}{2} = 0{,}7m$

$y_W = \frac{L_2}{2} = 1{,}2m$

$z_W = \frac{L_3}{2} = 0{,}75m$

$\Rightarrow$ Roboterkoordinaten:

$d_1 = 0{,}7m \Rightarrow x_R = d_1 - x_W = 0{,}7m - 0{,}7m = 0$

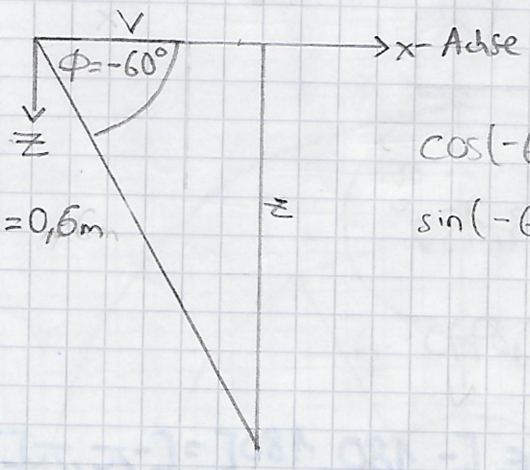
$d_2 = 1{,}8m \Rightarrow y_R = d_2 - y_W = 1{,}8m - 1{,}2m = 0{,}6$

$d_3 = 0{,}5m \Rightarrow z_R = d_3 - z_W = 0{,}5m - 0{,}75m = -0{,}25$

90° Drehung: Die Drehung ändert nichts an der Position. ✓

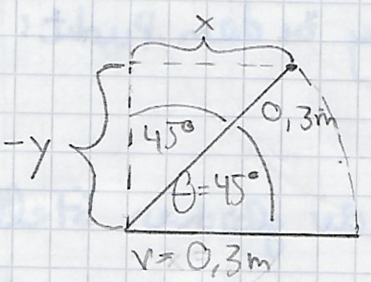
✓

b)




$\cos(-60°) = \frac{v}{0{,}6m} \Leftrightarrow v = \cos(-60°) \cdot 0{,}6m = 0{,}3m$

$\sin(-60°) = \frac{z}{0{,}6m} \Leftrightarrow z = \sin(-60°) \cdot 0{,}6m \approx -0{,}52$




$\sin(45°) = \frac{x}{0{,}3m} \Leftrightarrow x = \sin(45°) \cdot 0{,}3m \approx 0{,}21$

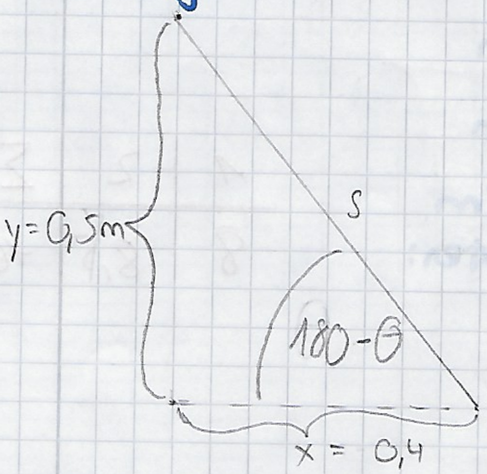
$\cos(45°) = \frac{-y}{0{,}3m} \Leftrightarrow -y = \cos(45°) \cdot 0{,}3m \approx 0{,}21$

$\Leftrightarrow y \approx -0{,}21$

$\Rightarrow x_R \approx 0{,}21$

c)

**Draufsicht:**

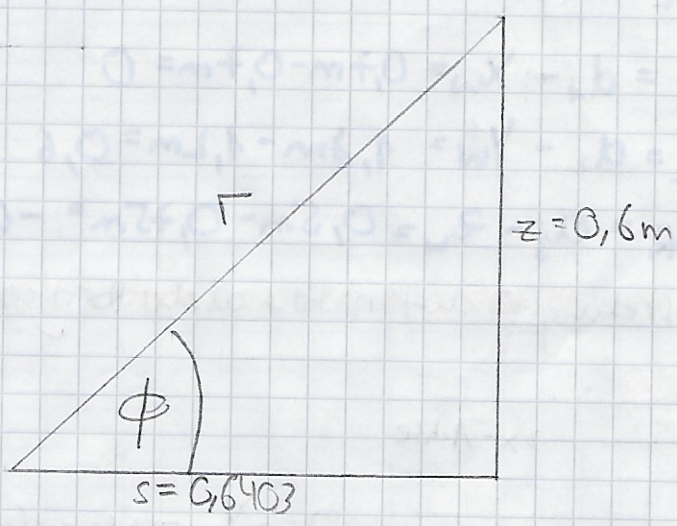



$$180-\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0,5}{-0,4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{0,5}{0,4}\right) \approx 128,66°$$

$$s = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0,4^2+0,5^2} \approx 0,6403$$

**Seitenansicht:**




$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0,6}{0,6403}\right) \approx 43,139°$$

$$r = \sqrt{0,6^2+0,6403^2} \approx 0,8775$$

$$\Rightarrow \quad \theta \approx -128,66° \in [-180, 180[ = [-\pi, \pi[$$

$$\phi \approx 43,139° \in [-45°; 45°] = [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}]$$

$$r \approx 0,8775 \in [0,75m, 2,5m]$$

d) Drehe θ von der anderen Richtung zu dem Punkt:

$$\theta' = 360° - 128,66° = 231,34°$$

$\Rightarrow$ Der Endeffektor befindet sich an der gleichen Stelle, wie wenn er $-128,66°$ dreht.

Lukas Graber
Dorotea Ileshaj

## Aufgabe 2

$\theta_0 \in [-180, 180]$ $\theta_2 \in [-90, 90]$

$\theta_1 \in [0, 180]$ $\theta_3 \in [-270, 270]$

$l_1 = 18cm$ $l_2 = 25cm$ $l_3 = 15cm$

a) Freiheitsgrad: minimale Anzahl benötigter Parameter, um die Position und Orientierung von Endeffektor zu bestimmen.

$\Rightarrow$ # Freiheitsgrade: x, y, z-Koordinaten + Rollen $\Rightarrow$ 4 Freiheitsgrade

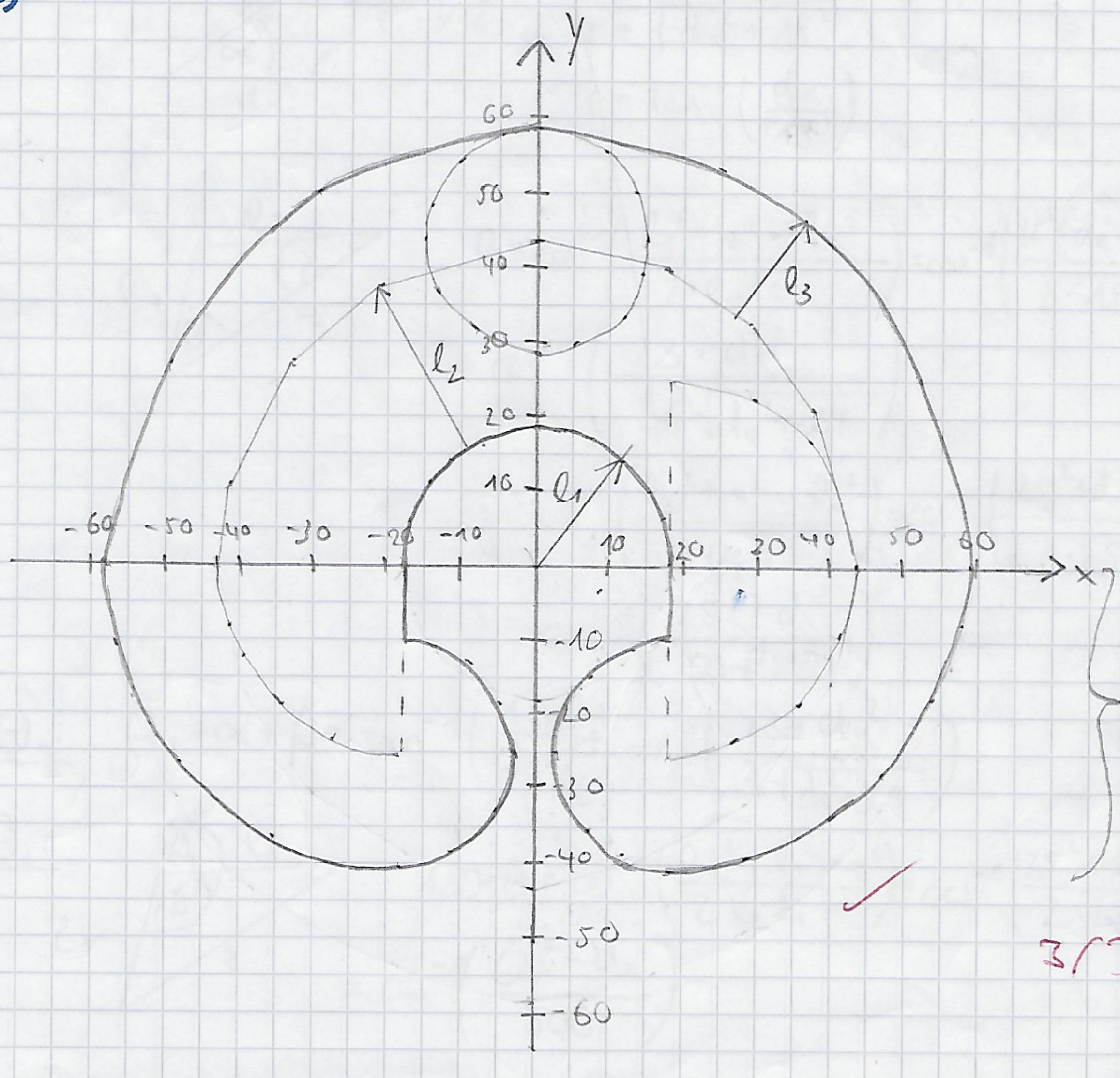
Mobilitätsgrad: minimale Anzahl benötigter Parameter, um die Konfiguration aller Gelenke zu beschreiben.

= # Gelenke

1/1

$\Rightarrow$ # Mobilitätsgrade: $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \Rightarrow$ 4 Mobilitätsgrade

b)



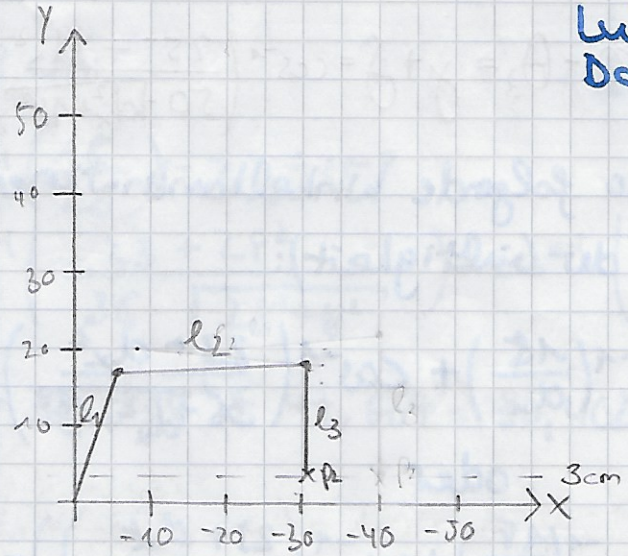

Falls es einen Boden gibt, dann können diese Positionen natürlich nicht erreicht werden

3/3

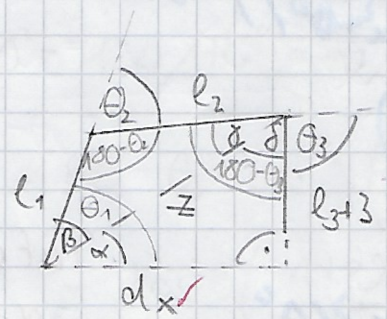
· Da $\theta_0 = 0$ gibt es kein Spielraum zur Rotation in Y-Richtung. Daher genügt die Seitenansicht, um den gesamten Arbeitsraum des Roboters zu zeichnen.

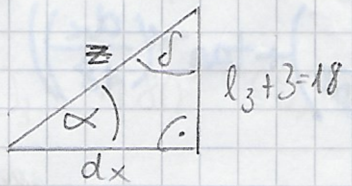
Lukas Graber
Dorotea Ileshaj

c)




Euer Ansatz ist viel zu kompliziert...

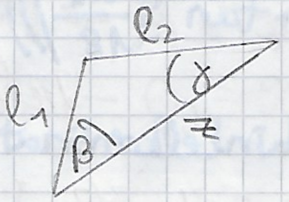



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{18}{d_x}\right)$$

$$z = \sqrt{d_x^2 + 18^2}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{d_x}{18}\right)$$




$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + z^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot z}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{18^2 + d_x^2 + 18^2 - 25^2}{2 \cdot 18 \cdot \sqrt{d_x^2 + 18^2}}\right)$$

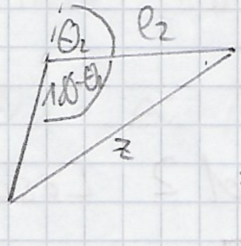
$$= \cos^{-1}\left(\frac{23 + d_x^2}{36\sqrt{d_x^2 + 324}}\right)$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{l_2^2 + z^2 - l_1^2}{2 l_2 \cdot z}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{25^2 + d_x^2 + 18^2 - 18^2}{2 \cdot 25 \cdot \sqrt{d_x + 324}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{25^2 + d_x^2}{50\sqrt{d_x^2 + 324}}\right)$$

$\theta_1$: $$\theta_1 = \alpha + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{18}{d_x}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{23 + d_x^2}{36\sqrt{d_x^2 + 324}}\right)$$

$\theta_2$:




$$180 - \theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{l_2^2 + l_1^2 - z^2}{2 l_2 l_1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{25^2 + 18^2 - (d_x + 18^2)}{2 \cdot 25 \cdot 18}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{625 - d_x}{900}\right)$$

$\underline{\theta_3:}$ $180° - \theta_3 = \gamma + \delta = \cos^{-1}\left(\frac{25^2 + d_x^2}{50\sqrt{d_x^2+18^2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{d_x}{18}\right)$

Es gibt also folgende Winkelkombinationen (ohne Berücksichtigung der Gültigkeit):

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{18}{d_x}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{23 + d_x^2}{36\sqrt{d_x^2+18^2}}\right)$$

① ②

oder

$$\theta_1 = \left(\tan^{-1}\left(\frac{18}{d_x}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{23 + d_x^2}{36\sqrt{d_x^2+18^2}}\right)\right) - 360°$$

1,5 / 3

$$\theta_2 = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{625 - d_x^2}{900}\right)$$

oder

$$\theta_2 = \left(180° - \cos^{-1}\left(\frac{625 - d_x^2}{900}\right)\right) - 360°$$

$$\theta_3 = 180° - \left(\cos^{-1}\left(\frac{25^2 + d_x^2}{50\sqrt{d_x^2+18^2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{d_x}{18}\right)\right)$$

oder

$$\theta_3 = \left(180° - \left(\cos^{-1}\left(\frac{25^2 + d_x^2}{50\sqrt{d_x^2+18^2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{d_x}{18}\right)\right)\right) - 360°$$

Tatsächlich ~~sollten~~ sind diese Lösungen möglich, allerdings von außen ununterscheidbar. Gefragt waren eingefüh nicht triviale Lösungen die tatsächlich unterscheidbar sind.

$\Rightarrow$ Es gibt also $2^3 = 8$ verschiedene Winkelkombinationen. f

Wenn man die Winkelbereiche $[-360°, 360°]$ wählt sollten es tatsächlich $2 \cdot 2^3$ Lösungen sein...

Die zweite Winkelausrichtung entsteht für jeden Winkel durch Ausrichtung im Uhrzeigersinn. Also erreicht man dieselbe Position, nur eben von der anderen Richtung. Sind Winkelbereiche für die Winkel angegeben, so wird die Anzahl der Winkelkombinationen reduziert.

1,5

Grenzfall Distanz d ?

Tatsächlich gibt es für x<d 2 Lösungen. Abgesehen von den Fall ⌐ $\theta_1 = 90°$ $\theta_2 = -90°$...

d) Für $d_x = 28$ cm:

Lukas Graber
Dorotea Ilešhaj

$$\theta_1: \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{18}{28}\right) = 32{,}735°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{23 + 28^2}{36 \cdot \sqrt{28^2+18^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{807}{36 \cdot \sqrt{1108}}\right) = 47{,}667°$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \alpha + \beta = 32{,}735° + 47{,}667° = 80{,}402°$$

✓

$$\theta_2 = 180 - \cos^{-1}\left(\frac{625 - 28^2}{900}\right) = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{-159}{900}\right)$$

$$= 180° - 100{,}176° = 79{,}824°$$

$$\theta_3: \quad 180° - \theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{25^2 + 28^2}{50\sqrt{28^2+18^2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{28}{18}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1409}{50 \cdot \sqrt{1108}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{28}{18}\right)$$

$$= 32{,}158° + 57{,}265° = 89{,}423°$$

$$\Rightarrow \quad \theta_3 = 180° - 89{,}423° = 90{,}577°$$

$\Rightarrow$ Möglichkeiten:

$\in [0, \pi] \leftarrow \theta_1 = 80{,}402° \lor \theta_1 = 80{,}402° - 360° = -279{,}598° \rightarrow \notin [0, \pi]$

$\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \leftarrow \theta_2 = 79{,}824° \lor \theta_2 = 79{,}824° - 360° = -280{,}176° \rightarrow \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \leftarrow \theta_3 = 90{,}577° \lor \theta_3 = 90{,}577° - 360° = -269{,}423° \rightarrow \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

(✓) Fast

Es gibt also folgende 2 gültige Winkelkombinationen:

1.) $\theta_1 = 80{,}402°$, $\theta_2 = 79{,}824°$, $\theta_3 = 90{,}577°$ ✓

2.) $\theta_1 = 80{,}402°$ (✓), $\theta_2 = 79{,}824°$ (✓), $\theta_3 = -269{,}423°$ (✓)

Es fehlt eine zweite nicht triviale Lösung:

$$\theta_1' = \alpha - \beta \; ; \; \theta_2' = -\theta_2 \; ; \; \theta_3' = -\frac{\pi}{2} - \theta_1' - \theta_2'$$

−2

3/5