Lukas Graber: 4117151
Dorotea Llosnaj: 3884087

Blatt 4

Aufgabe 1

a) $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & m \\ \sin\phi & \cos\phi & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar für beliebige m, n, ϕ?

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos\phi & -\sin\phi & m & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & n & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot\sin\phi \\ |\cdot\cos\phi \\ \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos\phi\cdot\sin\phi & -\sin^2\phi & m\cdot\sin\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ \cos\phi\cdot\sin\phi & \cos^2\phi & n\cdot\cos\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{II}-\mathrm{I}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos\phi\cdot\sin\phi & -\sin^2\phi & m\sin\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n\cos\phi - m\cdot\sin\phi & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:\sin\phi \\ |\cdot\sin\phi \\ \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos\phi & -\sin\phi & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\phi & \sin\phi(n\cdot\cos\phi - m\cdot\sin\phi) & -\sin^2\phi & \cos\phi\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{I}+\mathrm{II}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos\phi & 0 & m+\sin\phi(n\cdot\cos\phi - m\sin\phi) & 1-\sin^2\phi & \cos\phi\cdot\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \sin\phi(n\cdot\cos\phi - m\cdot\sin\phi) & -\sin^2\phi & \cos\phi\cdot\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:\cos\phi \\ |:\sin\phi \\ \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{m+\sin\phi(n\cdot\cos\phi - m\cdot\sin\phi)}{\cos\phi} & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & \cancel{\sin\phi}\,1 & n\cdot\cos\phi - m\cdot\sin\phi & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot\left(\frac{m+\sin\phi(n\cdot\cos\phi - m\sin\phi)}{\cos\phi}\right) \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \cos\phi & \sin\phi & -\frac{m+\sin\phi(n\cos\phi - m\sin\phi)}{\cos\phi} \\ 0 & 1 & n\cdot\cos\phi - m\cdot\sin\phi & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (+)\ \mathrm{I}-\mathrm{III} \\ (+)\ :\left(\frac{m+\sin\phi(n\cdot\cos\phi - m\sin\phi)}{\cos\phi}\right) \\ \hline |\cdot(n\cos\phi - m\cdot\sin\phi) \\ (+)\ \mathrm{II}-\mathrm{III} \\ (+) : (n\cos\phi - m\cdot\sin\phi) \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & -\frac{m+\sin\phi(n\cdot\cos\phi - m\cdot\sin\phi)}{\cos\phi} \\ 0 & 1 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & m\cdot\sin\phi - n\cdot\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & -\left(\frac{m}{\cos\phi} + n\cdot\sin\phi - m\cdot\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\right) \\ -\sin\phi & \cos\phi & m\cdot\sin\phi - n\cdot\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0/2

damit bewiesen dass die Matix invertierbar.

You only need to compute $\det(A) \neq 0$.

$\|A\| = 1 \neq 0$ $\therefore$ A is an invertible matrix

You can't compute A^{-1} until you know A is invertible.

4	1
3	X
2	5
1	4

b) • Jede Rotation ist invertierbar, denn $\det(R) = 1$ aus Eigenschaft.

• Die Inverse einer Rotationsmatrix ist ihre Transponierte.

aus Eigenschaft: $x^T \cdot y = (R \cdot x)^T (R \cdot y)$

$$\Leftrightarrow x^T \cdot y = x^T \cdot R^T \cdot R \cdot y \quad (1)$$

2/2

damit (1) stimmt muss gelten $R^T \cdot R = E$ ✓
aus Matrixeigenschaft $R^{-1} \cdot R = E$

$$\Rightarrow R^{-1} = R^T$$

c) $T^{-1} \cdot T = E$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} R_i & t_i \\ 0^{1\times3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & t \\ 0^{1\times3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{denn } R^T = R^{-1} \text{ (aus b))}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & t_{i1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & t_{i2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & t_{i3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{11} \cdot t_1 + a_{21} \cdot t_2 + a_{13} \cdot t_3 + t_{i1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{i1} = -(a_{11} \cdot t_1 + a_{21} \cdot t_2 + a_{31} \cdot t_3)$$

$$a_{12} \cdot t_1 + a_{22} \cdot t_2 + a_{32} \cdot t_3 + t_{i2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{i2} = -(a_{12} \cdot t_1 + a_{22} \cdot t_2 + a_{32} \cdot t_3)$$

$$a_{13} \cdot t_1 + a_{23} \cdot t_2 + a_{33} \cdot t_3 + t_{i3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{i3} = -(a_{13} \cdot t_1 + a_{23} \cdot t_2 + a_{33} \cdot t_3)$$

$$\Rightarrow t_i = \begin{pmatrix} t_{i1} \\ t_{i2} \\ t_{i3} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = -R^T \cdot t = -R^{-1} \cdot t$$

✓ 3/3

Also:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1} \cdot t \\ 0^{1\times3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T \cdot t \\ 0^{1\times3} & 1 \end{pmatrix}$$

Lukas Graber : 4117151
Dorotea Lleshaj : 3884087

Aufgabe 2

a) Um den Punkt p_1 von Frame 1 in Frame 0 zu transformieren muss man eine Rotation um $-60°$ und eine Translation um $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} ; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^T$ machen ✓

Um den Punkt p_2 von Frame 2 in frame 0 zu transformieren muss man eine Rotation um $135°$ und eine Translation um $(1;1)^T$ machen ✓

2/2

b) $({}^0T_1)^{-1} = {}^1T_0$

$${}^0T_1 = Tl(t)\cdot\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & t \\ 0^{1\times2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & t_1 \\ \sin\phi & \cos\phi & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-60) & \sin(-60) & -\sqrt{3}/\sqrt{2} \\ \sin(60°) & \cos(60) & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^0T_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

$=0$?

$$({}^0T_1)^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}t \\ 0^{1\times2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{6}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^1T_0$$ $\sqrt{2}$!

R.F −0,5

$({}^0T_2)^{-1} = {}^2T_0$

1,5/2

$${}^0T_2 = Tl(t)\cdot\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & t \\ 0^{1\times2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(135°) & -\sin(135°) & t_1 \\ \sin(135°) & \cos(135°) & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^0T_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ +\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓ 1 Falsch übertragen ?

$$({}^0T_2)^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}t \\ 0^{1\times2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^2T_0$$ ✓

c) $${}^0q = {}^0T_2 \cdot {}^2q = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ +\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ✓ 1

Vorzeichen! −0,5

undsomit:

$${}^1q = {}^1T_0 \cdot {}^0q = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & \cancel{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & \cancel{-1/\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0417 \\ -1{,}7561 \\ 1 \end{pmatrix}$$ $\sqrt{2}$

1,5/2

FF

Aufgabe 3

a) T_1: skalierung/streckung ✓

T_2: Spiegelung an der ~~y~~-Achse ✓

T_3: translation und Spieglung am Ursprung ✓

T_4: rotation um $30°$ ✓

2/2

b) T_1: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ (Multiplizieren mit den jeweiligen Punkten des Dreiecks um den neuen Dreieck zu finden)

Somit haben wir $A_1 = (0\,;\,0{,}5)^T$
$B_1 = (8\,;\,2)^T$
$C_1 = (0\,;\,2{,}5)^T$

(✓)

T_2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ (Gleiche operation wie oben)

somit: $A_2 = (0\,;\,-1)^T$
$B_2 = (2\,;\,-2)^T$
$C_2 = (0\,;\,-3)^T$ ✓

T_3: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ (Gleiche Multiplikation)

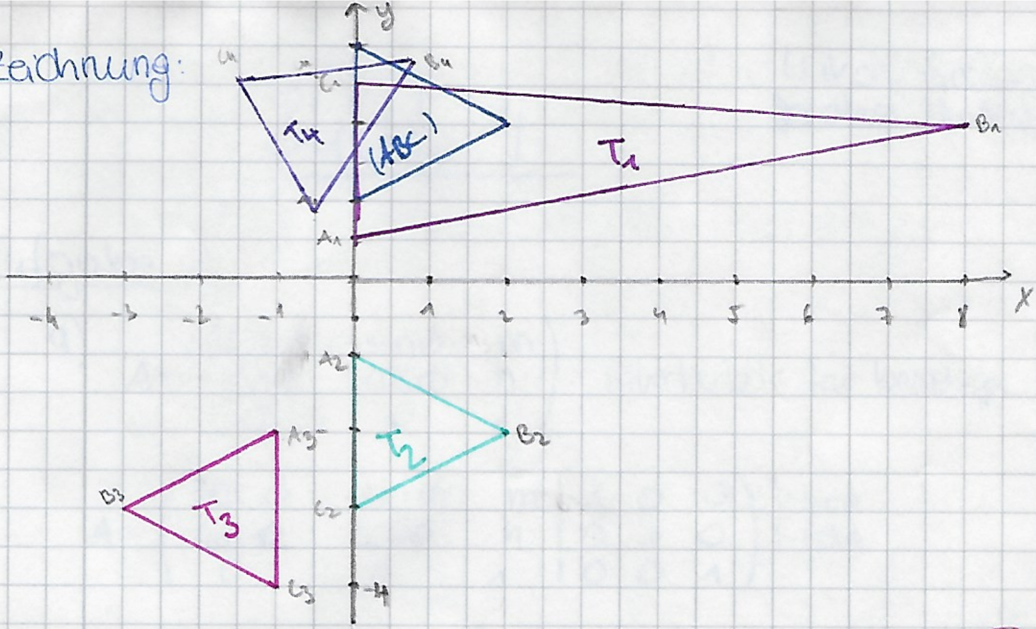
somit: $A_3 = (-1\,;\,-2)^T$
$B_3 = (-3\,;\,-3)^T$
$C_3 = (-1\,;\,-4)^T$ ✓

T_4: $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Gleiche Multiplikationsoperation)

Somit: $A_4: (-0{,}5\,;\,\sqrt{3}/2)^T$ ✓
$B_4: (0{,}732\,;\,2{,}732)^T$ ✓
$C_4: (-0{,}5\,;\,2{,}598)^T$ ✓

Lukas Graber
4117151
Dorotea Lleshaj
3884087

Zeichnung:



2/2

c) $T_5 = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & t_x \\ \sin\phi & \cos\phi & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

$A' = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ I: $-\sin\phi + t_x = a$
II: $\cos\phi + t_y = 0$

$B' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ III: $2 \cdot \cos\phi - 2 \cdot \sin\phi + t_x = 0$
IV: $2 \cdot \sin\phi + 2 \cdot \cos\phi + t_y = 0$

$C' = \begin{pmatrix} b \\ >0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ V: $-3\sin\phi + t_x = b$
$3\cos\phi + t_y > 0$

Somit durch Einsetzen:

I': $t_x = a + \sin\phi$
II': $t_y = -\cos\phi$

III': $2 \cdot \cos\phi - 2 \cdot \sin\phi + \overbrace{a + \sin\phi}^{t_x} = 0$
IV': $2 \cdot \sin\phi + 2 \cdot \cos\phi - \cos\phi = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin\phi + \cos\phi = 0$
$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin\phi = -\cos\phi$
$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -1$
$\Leftrightarrow 2 \cdot \tan\phi = -1$
$\Leftrightarrow \tan\phi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \phi = -26{,}57°$

in III': $t_x = 2 \cdot \sin\phi - 2 \cdot \cos\phi$
$t_x = -2{,}68$

in II': $t_y = -\cos\phi$
$t_y = -0{,}89$

$\Rightarrow T_5 = \begin{pmatrix} \cos(-26{,}57) & -\sin(-26{,}57) & -2{,}68 \\ \sin(-26{,}57) & \cos(-26{,}57) & -0{,}89 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3/3