深圳大学期末考试试卷

开/闭卷 闭　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　A/B卷 A

课程编号　　　　　　课程名称 高等数学B(1)　　　　　　学分 4

命题人(签字)__________ 审题人(签字)__________ 2006 年 12 月 10 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

学院________ 专业________ 姓名________ 学号________

（密封线内不答题）

密　　封　　线

高等数学B（1）21试卷

一.选择与填空题(每题3分，共18分)

1.当$x\to 0$时，$x(x+\sin x)$与x^2比较是（　）

A．同阶但不等价无穷小　　B．等价无穷小

C．高阶无穷小　　D．低阶无穷小

2.曲线$y=x^3-3x$上切线平行于x轴的点有（　）

A .(0,0)　　B .(1,2)　　C .(-1,2)　　D .(1,-2)

3.若$\int f(x)dx=x^2e^{-x}+c$ 则$f(x)=$（　）。

A． xe^x　B． x^2e^x　C． $2xe^x$　D． $e^{-x}(2x-x^2)$

4.求极限$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^x=$____________。

5.设e^x是$f(x)$的原函数，则$\int xf(x)dx=$__________。

6.曲线$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$的铅垂渐近线是__________。

二.计算题：(每题 6 分，共 48 分)

1.求极限$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

2.求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

3 . $y=e^x\sin x+\tan x$ 求$\frac{dy}{dx}$。

4. 设$xy=e^{x+y}$, y是x的函数，求y'；

5.设$y=e^{f(x)}$ 求y″；

6. 设 $y=2^{3x}\sin^2 x$, 求dy；

7. 求$\int\ln(x^2+1)dx$；

8. 求$\int x^2e^{-x^3}dx$；

三.设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\sin x & x<0 \\ k(\text{常数}) & x=0 \\ x\sin\frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$ 问当 k 为何值时，函数在 $x=0$ 处连续？为什么？（7 分）

四、 利用拉格朗日中值定理证明不等式 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ 对一切 $x>0$ 成立．（7 分）

五. 判定曲线$y = xe^{-x}$的单调性、极值、凹向及拐点 （10 分）

六. 某厂每批生产某种商品x单位的费用为

$$C(x) = 5x + 200 \quad （元）$$

得到的收益是

$$R(x) = 10x - 0.01x^2 \quad （元）$$

求:1.生产 10 个单位时的边际成本和边际收益.

2.每批应生产多少单位时才能使利润最大。 （10 分）

附加题：（(每题 10 分共 30 分)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$　　（10 分）

2. 求$1,\sqrt[2]{2},\sqrt[3]{3},\cdots\sqrt[n]{n},\cdots$中的最大值.

3．若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 $\int xf''(x)dx$

高等数学 B（1）21 试卷解答及评分标准

一、选择与填空题(每题 3 分，共 18 分)

1.当 $x \to 0$ 时，$x(x+\sin x)$ 与 x^2 比较是（A　）

A．同阶但不等价无穷小　　B．等价无穷小

C．　高阶无穷小　　D．低阶无穷小

2. 曲线 $y=x^3-3x$ 上切线平行于 x 轴的点有（D　）

A .(0,0)　　B .(1,2)　　C .(-1,2)　　D .(1,-2)

3.若 $\int f(x)dx = x^2e^{-x}+c$ 则 $f(x)=$ （ D ）

A． xe^x　　B． x^2e^x　　C． $2xe^x$　　D． $e^{-x}(2x-x^2)$

4.求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^x =$ ___e^4___

5. 设 e^x 是 $f(x)$ 的原函数，则 $\int xf(x)dx =$ ___$xe^x - e^x + c$___

6.曲线 $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的铅垂渐近线是___x=1___________。

二 计算题：(每题 6 分，共 48 分)

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-3}{2x}$　　**(4 分)**

$=\frac{1}{4}$　　**(6 分)**

2.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$　　**(1 分)**

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}$　　**(3 分)**

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x}$　　**(4 分)**

$=0$　　**(5 分)**

3 . $y=e^x\sin x+\tan x$ **求** $\frac{dy}{dx}$

解： $y'=e^x\sin x+e^x\cos x+\sec^2 x$ **（6 分）**

4. 设 $xy=e^{x+y}$ y**是** x **的函数，求** y'

解：两边求导： $y+xy'=e^{x+y}(1+y')$ **（4 分）**

$$y'=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$$ **（6 分）**

5.设 $y=e^{f(x)}$ **求** y''

解： $y'=e^{f(x)}f'(x)$ **2 分**

$$y''=e^{f(x)}(f'^2(x)+f''(x))$$ **（5 分）**

6. 设 $y=2^{3x}\sin^2 x$，求dy；

$y'=(2^{3x})'\cdot\sin^2 x+2^{3x}\cdot(\sin^2 x)'$ 4 分

dy= $2^{3x}(3\ln 2\sin^2 x+2\sin x\cos x)\,dx$ 6 分

7. 求 $\int\ln(x^2+1)dx$

解：原式= $x\ln(1+x^2)-\int x\,d\ln(1+x^2)$ **（2 分）**

$$=x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$$ **（4 分）**

$$=x\ln(1+x^2)-2x+\arctan x+c$$ **（6 分）**

9. 求 $\int x^2e^{-x^3}dx$

解：原式= $\frac{1}{3}\int e^{-x^3}dx^3$ **（3 分）**

$$=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+c$$ **（6 分）**

三.设 f(x)= $\begin{cases}\frac{1}{x}\sin x & x<0\\ k(\text{常数}) & x=0\\ x\sin\frac{1}{x}+1 & x>0\end{cases}$ **问当 k 为何值时，函数在其定义域内连续？（7 分）**

解： $\because\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\sin x=1$ **2 分**

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x\sin\frac{1}{x}+1)=1$ **4 分**

$\therefore \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **6 分**

当 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=k$ 时函数连续，即 k=0 时，f(x)在 x=0 处连续。7 分

四、 利用拉格朗日中值定理证明不等式 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ 对一切 $x>0$ 成立．（7 分）

解: 设 $f(x)=\ln(1+x)$, 则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ 2 分

显然对一切 $x>0$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日定理条件 3 分

$\therefore$ 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi}$ 4 分

$\because\ 0<\xi<x \quad \therefore \frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1$ 即有 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ 成立 7 分

五. 判定曲线 $y=xe^{-x}$ 的单调性、极值、凹向及拐点 （10 分）

解： $y=xe^{-x}$ **的定义域为** $(-\infty,+\infty)$**，** **（1 分）**

$y'=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$ **令** $y'=0$, 得 **x=1** **（3 分）**

$y''=-2e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-2)$ **令** $y''=0$ **有** $x=2$ **（5 分）**

x	$(-\infty,1)$	**1**	**（1，2）**	**2**	$(2,+\infty)$
y'	+	**0**	_		+
y''	_		_	**0**	+
y		**极大值**		**拐点**	

8 分 **当 x=1 时，有极大值** $f(1)=e^{-1}$， **（9 分）；**

当 x=2 时， $(2,2e^{-2})$**，拐点为 （10 分）。**

六. 某厂每批生产某种商品 x **单位的费用为** $C(x)=5x+200$ **（元）**

得到的收益是 $R(x)=10x-0.01x^2$ **（元）**

求:1.生产 10 个单位是的边际成本和边际收益.

2.每批应生产多少单位时才能使利润最大 （10 分）

解：1. $C'(x)=5$ **（1 分）**

$R'(x)=10-0.02x$ **（2 分）**

生产 10 个单位时，边际成本 $C'(10)=5$ **边际收益** $R'(10)=10-0.02\times 10=9.8$ **（5 分）**

2.利润 $L(x)=10x-0.01x^2-5x-200$

$=5x-0.01x^2-200$ **（7 分）**

$L'(x)=5-0.02x$

令 $L'(x)=0$ **有** $x=250$ **（9 分）**

当每批生产 250 个单位时，能使利润最大。 （10 分）

附加题：

1、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\left[1-x\ln(1+\frac{1}{x})\right]}$$

4 分

因为 $$\lim_{x\to+\infty}x\left[1-x\ln(1+\tfrac{1}{x})\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1-\ln(1+t)}{t}}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2t(1+t)}=\frac{1}{2}$$ 9

分

所　　　　以　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$

10 分

2．　求$1,\sqrt[2]{2},\sqrt[3]{3},\cdots\sqrt[n]{n},\cdots$中的最大值.

解　设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ $(x\geq 1)$，则

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$$ 5 分

令$f'(x)=0$得唯一驻点$x=e$，且$1\leq x\leq e$时，$f'(x)>0$；$x>e$时，$f'(x)<0$；

$$f_{\max}=f_{极大}=f(e)=\sqrt[e]{e}$$ 7 分

最大值可能是$\sqrt{2}$或$\sqrt[3]{3}$。由于

$$2^3<3^2\ \Rightarrow\ 2<3^{\frac{2}{3}}\ \Rightarrow\ 2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$$

所以最大值为$\sqrt[3]{3}$　　10 分

3、　若$f(x)$的一个原函数是$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求$\int xf''(x)dx$

解　$\int xf''(x)dx=\int xdf'(x)$　　2 分

$$=xf'(x)-\int f'(x)dx$$ 3 分

$$=xf'(x)-f(x)+C$$ 5 分

$$f(x)=\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$ 7 分

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$ 8 分

$$\int xf''(x)dx=-\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$$ 10 分

$$=-\frac{2x^2+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}+C$$

深圳大学期末考试试卷

开/闭卷 闭卷　　　　　　　　　　　　　　　　A/B 卷 B

课程编号 2214000205　课程名称 高等数学 B（1）　　学分 4

命题人(签字)________ 审题人(签字)________ 06 年 12 月 10 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

学院________ 专业________ 姓名________ 学号________

（密 封 线 内 不 答 题）

密　封　线

高等数学 B（2）25 试卷

一、　单项选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1.　两曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$相交于点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),x_1<x_2$，且$f(x)>0,g(x)>0$，它们所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积 $V=$ (　　　)

(A) $\int_{x_1}^{x_2}\pi\left[f(x)-g(x)\right]^2dx$　　(B) $\int_{x_1}^{x_2}[\pi f(x)-\pi g(x)]^2dx$

(C) $\int_{x_1}^{x_2}\pi\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$　　(D) $\int_{x_1}^{x_2}[\pi f(x)]^2dx-\int_{x_1}^{x_2}[\pi g(x)]^2dx$

2.　下列级数中，条件收敛的是（　　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{\sqrt{2n^3+6}}$　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n}$

3.　设 $z=g(x,v),v=v(x,y)$ 其中 g,v 具有二阶连续偏导数. 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$（　　　）

(A) $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$　　(B) $\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial y})^2+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$　　(D) $\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

4.　$\int_{-1}^{1}\frac{2}{x^2}dx$（　　　）

（A）4　　　　　（B）-4　　　（C）0　　　　（D）发散

5. 求微分方程 $y'' = e^{2x}$ 的通解（　　　　）

（A）$y = \frac{e^{2x}}{4} + c_1 x + c_2$　　（B）$y = \frac{e^{2x}}{4} + cx$

（C）$y = \frac{e^{2x}}{4} + c$　　（D）$y = \frac{e^{2x}}{4} + c_1 x^2 + c_2$

二、　填空（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 若 $f(x) = \int_0^{x^2} 2x \sin t^2 dt$，则 $f'(x)$=________________________________

2. 设 $f(x,y)$是连续函数，交换积分次序：$\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x,y)dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x,y)dy$=________

3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 $R(0 \le R < +\infty)$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径是______________。

4. 已知 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，则 $2\int_0^2 x f''(x)dx =$______

通解为 $y = c_1 e^x + c_2 x$ 的微分方程为______________________

三、　计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

1. $z = (\ln x)^{\sin y}$，求 $\mathrm{d}z$。

2. 求 $\int_1^e (\ln x)^2 dx$。

3. 设$z=z(x,y)$由方程$\boldsymbol{y+2x+z=xyz}$所确定，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

4. 计算二重积分$\iint\limits_{D}\boldsymbol{3\sqrt{x^2+y^2}dxdy}$，其中$D$：$a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$ $(b>a>0)$。

四、 解答下列各题（本题共 4 小题，每小题 10 分，满分 40 分）

1. 求曲线$\boldsymbol{y=2-|x^2-4|}$与x轴所围成的平面图形的面积。

2. 求 $f(x,y)=xy$ 在条件 $\boldsymbol{x+y=2}$ 下的可能极值点。

3. 试求函数 $f\left(x\right)=\arctan x$ 在点 $x_0=0$ 的泰勒级数展开式，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 之值。

4. 求微分方程 $y''-2y'+2y=0$ 的一条积分曲线，使其在点 $(0,1)$ 处有水平切线。

五、　附加题（本题共 **3** 小题，每小题 **10** 分，满分 **30** 分）

1. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx$，求 I。

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

3. 设 $f(x)=x\ln(1-x^2)$，（1）将 $f(x)$ 展成 x 的幂级数，并求收敛域；（2）求 $f^{(101)}(0)$。

高等数学B（2）25试卷解答及评分标准

六、　单项选择题（本题共**5**小题，每小题**4**分，满分**20**分）

C　A　C　D　A

七、　填空（本题共**5**小题，每小题**4**分，满分**20**分）

1. $2\int_0^{x^2}\sin t^2 dt+4x^2\sin x^4$

2. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y}}^{\mathrm{e}^y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

3. $\sqrt{R}$

4. 16

5. $\boldsymbol{(x-1)y''-xy'+y=0}$

八、　计算下列各题（本题共**4**小题，每小题**5**分，满分**20**分）

5. 解：$\mathrm{d}z=\dfrac{\sin y}{x\ln x}(\ln x)^{\sin y}\,\mathrm{d}x+\cos y(\ln x)^{\sin y}\ln(\ln x)\,\mathrm{d}y$

6. 解：原式$=x(\ln x)^2\Big|_1^e-2\int_1^e \ln x dx=e-2$.

7. 解：$\mathrm{d}y+2\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}z=yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}z=\frac{(1-xz)\,\mathrm{d}y+(2-yz)\,\mathrm{d}x}{xy-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-xz}{xy-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-yz}{xy-1}$$

8. 解：原式$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b r^2dr=2\pi(b^3-a^3)$

九、　解答下列各题（本题共**4**小题，每小题**10**分，满分**40**分）

1. 解：$\because y=\begin{cases}x^2-2,|x|\le 2,\\6-x^2,|x|>2.\end{cases}$ 2 分

$$x^2-2=0,\quad x=\pm\sqrt{2},\qquad \begin{cases}y=x^2-2,\\y=6-x^2,\end{cases}\quad x=\pm 2$$
$$6-x^2=0,\quad x=\pm\sqrt{6},$$
4 分

$$S=2\left[\int_0^{\sqrt{2}}-(x^2-2)dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^2-2)dx+\int_2^{\sqrt{6}}(6-x^2)dx\right]$$
7 分

$$=2(2x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^{\sqrt{2}}+2(\frac{x^3}{3}-2x)\Big|_{\sqrt{2}}^{2}+2(6x-\frac{x^3}{3})\Big|_2^{\sqrt{6}}$$

$$=2(\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{2}+4\sqrt{6}-\frac{28}{3})$$

$$=2(\frac{8}{3}\sqrt{2}+4\sqrt{6}-\frac{32}{3})=\frac{16}{3}\sqrt{2}+8\sqrt{6}-\frac{64}{3}.$$
10 分

2. 解：$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y-2)$ 4 分

令$\begin{cases}F_x'=y+\lambda=0\\F_y'=x+\lambda=0\\F_\lambda'=x+y-2=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=y=1$（唯一驻点） 7 分

$\Rightarrow$ 故$(1,1)$是$f(x,y)$的可能极值点。 10 分

3. 解：因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} x\in(-1,\ 1)$ 4 分

所以 $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}x\in[-1,\ 1]$ 7 分

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 10 分

4. 解：特征方程：$r^2-2r+2=0\qquad r=1\pm i$ 4 分

通解：$y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$ 6 分

因为过点（0，1）且在此处有水平切线，即$y'=0$ 8 分

$\therefore\begin{cases}c_1=1\\c_2=-1\end{cases}$

故积分曲线为：$y=e^x(\cos x-\sin x)$ 10 分

十、 **附加题（本题共 3 小题，每小题 10 分，满分 30 分）**

1. 解：$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{10}x-\sin^{10}x}{4-\cos x-\sin x}dx=0 \quad\Rightarrow\quad I=0$

2. 解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$

3. 解：（1）$f(x)=x\ln(1-x^2)=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(-x^2\right)^{n+1}}{n+1}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{n+1}$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2(n+1)+1}}{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n}\qquad(-1<x<1)$$

（2）取$n=50$，对上式两边求$x=0$处的 101 阶导数得 $f^{(101)}(0)=-\frac{101!}{50}$

深圳大学期末考试试卷

开/闭卷 闭卷　　　　　　　　　　　　　　　　　　　A/B 卷 B

课程编号 2214000205　课程名称 高等数学 B（1）　学分 4

命题人(签字)__________ 审题人(签字)__________ 06 年 12 月 10 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

学院________ 专业________ 姓名________ 学号________

（密封线内不答题）

密 封 线

高等数学 B（2）24 试卷

十一、 单项选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 由$[a,b]$上连续曲线$y=g(x)$，直线$x=a$，$x=b$ $(a<b)$和x轴围成图形的面积$S=($　　　　$)$.

(A) $\int_a^b g(x)dx$　　　(B) $\left|\int_a^b g(x)dx\right|$

(C) $\int_a^b |g(x)|dx$　　　(D) $\frac{[g(b)+g(a)](b-a)}{2}$

2. 下列级数中，绝对收敛的是（　　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{3n-1}$　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3\ln(n+1)}$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{\sqrt{n^2+9}}$　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$

3. 设$z=f(x,v),v=v(x,y)$其中f,v具有二阶连续偏导数. 则$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=($　　　　$)$.

(A) $\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$　　(B) $\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial y})^2+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$　　(D) $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

4. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$（　　　　）

（A）2　　　　（B）-2　　　（C）0　　　（D）发散

5. 求微分方程 $y''=x^2$ 的通解（　　　　）

（A）$y=\frac{x^4}{12}+c_1x+c_2$　　（B）$y=\frac{x^4}{12}+cx$　（C）$y=\frac{x^4}{12}+c$　　（D）$y=\frac{x^4}{12}+c_1x^2+c_2$

十二、 填空（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

5. 若 $f(x)=\int_0^{x^2}3x\sin t^2dt$，则 $f'(x)=$__________________

6. 设 $f(x,y)$是连续函数，交换积分次序：$\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx=$__________

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛半径是________

8. 已知 $f(0)=1$, $f(2)=3$, $f'(2)=5$，则 $\int_0^2 xf''(x)dx=$_______

通解为 $y=ce^x+x$ 的微分方程为________________________

十三、 计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

9. $z=(\ln y)^{\cos x}$，求 $\mathrm{d}z$。

10. 求 $\int_0^1 15x\sqrt{2+x}dx$。

11. 设$z=z(x,y)$由方程$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$所确定，求$z_x, z_y$。

12. 计算二重积分$\iint\limits_D 15xy^2dxdy$，其中$D$为$x=\sqrt{4-y^2}$与$y$轴所围成的区域。

十四、 解答下列各题（本题共 4 小题，每小题 10 分，满分 40 分）

1. 求由曲线 $y=\sin x$，$y=\cos x$，（$0\leqslant x\leqslant \pi/4$）及直线 $x=0$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积。

2. 已知两种商品的需求函数为$Q_1 = 8 - p_1 + p_2$；$Q_2 = 10 + 2p_1 - 5p_2$，其中 p_1, p_2 为两种商品的价格，总成本函数为$C = 3Q_1 + 2Q_2$，问如何定价可使利润最大？

3. 利用 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ 的展开式，求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{4}{2n+1}$的和。

4. 求解初值问题$\begin{cases} y' + 2y + \int_0^x y\,\mathrm{d}\,x = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $x \ge 0$

十五、 附加题（本题共 **3** 小题，每小题 **10** 分，满分 **30** 分）

1. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$，求 I。

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+2n}\right)$

3. 设 $f(x)=x^{100}e^{x^2}$，（1）将 $f(x)$ 展成 x 的幂级数，（2）求 $f^{(200)}(0)$

高等数学 B（2）24 试卷解答及评分标准

十六、 单项选择题（本题共 **5** 小题，每小题 **4** 分，满分 **20** 分）

C　D　C　D　A

十七、 填空（本题共 **5** 小题，每小题 **4** 分，满分 **20** 分）

1. $3\int_0^{x^2}\sin t^2 dt+6x^2\sin x^4$

2. $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

3. $+\infty$

4. 8

5. $y'=y-x+1$

十八、 计算下列各题（本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，满分 **20** 分）

13. 解：$\mathrm{d}z=\dfrac{\cos x}{y\ln y}(\ln y)^{\cos x}\mathrm{d}y-\sin x(\ln y)^{\cos x}\ln(\ln y)\mathrm{d}x$

14. 解：令 $\sqrt{2+x}=t$，原式 $=15\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(t^2-2)\cdot t\cdot 2tdt=15(\frac{2}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}=16\sqrt{2}-6\sqrt{3}$.

15. 解：$\dfrac{1}{z}\mathrm{d}x-\dfrac{x}{z^2}\mathrm{d}z=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}-\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$

$$\mathrm{d}z=\frac{z^2}{x+z}\left(\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\right)$$

$$z_y=\frac{z^2}{y(x+z)}$$

$$z_x=\frac{z}{x+z}$$

16. 解：原式 $=15\int_{-2}^{2}y^2dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}}xdx=\int_0^2 y^2(4-y^2)dy=64$

十九、 解答下列各题（本题共 **4** 小题，每小题 **10** 分，满分 **40** 分）

5. 解：$V=\pi\int_0^{\pi/4}(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$ 6 分

$=\pi\int_0^{\pi/4}\cos 2xdx$ 8 分

$=\frac{\pi}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4}$ 10 分

$=\frac{\pi}{2}.$

6. 解：$R=p_1Q_1+p_2Q_2$

$L=R-C=(p_1-3)(8-p_1+p_2)+(p_2-2)(10+2p_1-5p_2)$ 4 分

令$\begin{cases}L'_{p_1}=7-2p_1+3p_2=0\\L'_{p_2}=17+3p_1-10p_2=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $p_1=11$，$p_2=5$（唯一驻点） 7 分

$\Rightarrow\quad L_{\max}=L(11,5)$ 10 分

7. 解： 因为 $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ $x\in(-1,\ 1)$ 4 分

所以 $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $x\in[-1,\ 1]$ 7 分

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{2n+1}=\pi$ 10 分

8. 解：将积分方程化为微分方程：$y''+2y'+y=0$ 2 分

特征方程：$r^2+2r+1=0$ $r_{1,2}=-1$ 4 分

通解：$y=e^{-x}(c_1+c_2x)$ $\therefore y'=e^{-x}(c_2-c_1-c_2x)$ 6 分

由原方程得另一初值条件：$y'+2=1, y'=-1$ 8 分

$\therefore\begin{cases}c_1=1\\-c_1+c_2=-1\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}c_1=1\\c_2=0\end{cases}$

$\therefore y=e^{-x}$ 10 分

二十、 **附加题（本题共 3 小题，每小题 10 分，满分 30 分）**

1. 解：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

$$\Rightarrow\quad I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)+f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{4}$$

2. 解：原式$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx=\ln 3$

3. 解：（1）$f(x)=x^{100}e^{x^2}=x^{100}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+100}}{n!}$

（2）取$n=50$，对上式两边求$x=0$处的 200 阶导数得$f^{(200)}(0)=\frac{200!}{50!}$