连续傅里叶变换

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

线性	$af_1(t)+bf_2(t)\leftrightarrow aF_1(j\omega)+bF_2(j\omega)$
时移	$f(t\pm t_0)\leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0}F(j\omega)$
频移	$e^{\pm j\omega_0 t}f(t)\leftrightarrow F(j(\omega\mp\omega_0))$
尺度变换	$f(at+b)\leftrightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert}e^{j\frac{b}{a}\omega}F(j\frac{\omega}{a})$
反转	$f(-t)\leftrightarrow F(-j\omega)$
时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega)$
频域卷积	$f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)$
时域微分	$f'(t)\big/ f^{(n)}(t)\leftrightarrow j\omega F(j\omega)\big/(j\omega)^n F(j\omega)$
频域微分	$tf(t)\big/(-jt)^n f(t)\leftrightarrow j\frac{dF(j\omega)}{d\omega}\Big/\frac{d^nF(j\omega)}{d\omega^n}$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t}f(x)dx,\ f(-\infty)=0\leftrightarrow\frac{F(j\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
频域积分	$\pi f(0)t+\frac{f(t)}{(-jt)}\leftrightarrow\int_{-\infty}^{\omega}F(j\tau)d\tau, F(-\infty)=0$
对称	$F(jt)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$
帕斯瓦尔	$E=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert f(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(j\omega)\rvert^2\ d\omega$

连续拉普拉斯变换(单边)

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

线性	$af_1(t)+bf_2(t)\leftrightarrow aF_1(s)+bF_2(s)$
时移	$f(t\pm t_0)\leftrightarrow e^{\pm st_0}F(s)$
频移	$e^{\pm s_0 t}f(t)\leftrightarrow F(s\mp s_0)$
尺度变换	$f(at+b)\leftrightarrow\frac{1}{\lvert a\rvert}e^{\frac{b}{a}s}F(\frac{s}{a})$
反转	$f(-t)\leftrightarrow F(-s)$
时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$
时域微分	$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0_-)$ $f''(t)\leftrightarrow s^2F(s)-sy(0_-)-y'(0_-)$
S 域微分	$tf(t)\big/(-t)^n f(t)\leftrightarrow -F'(s)\Big/\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t}f(x)dx\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$
S 域积分	$\frac{f(t)}{t}\leftrightarrow\int_s^{\infty}F(\eta)d\eta$
初值	$f(0_+)=\lim_{s\to\infty}sF(s), F(s)$ **为真分式**
终值	$f(\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s), s=0$ **在收敛域内**

离散 Z 变换(单边)

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}$$

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_L F(z)z^{k-1}dz, k\ge 0$$

线性	$af_1(k)+bf_2(k)\leftrightarrow aF_1(z)+bF_2(z)$
时移	$f(k\pm m)\leftrightarrow z^{\pm m}F(z)$ **（双边）**
频移	$e^{\pm j\omega_0 k}f(k)\leftrightarrow F(e^{\mp j\omega_0}z)$ **（尺度变换）**
尺度变换	$a^kf(k)\leftrightarrow F(\frac{z}{a})$
反转	$f(-k)\leftrightarrow F(z^{-1})$ **（仅限双边）**
时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(z)F_2(z)$
时域差分	$f(k-1)\leftrightarrow z^{-1}F(z)+f(-1)$ $f(k-2)\leftrightarrow z^{-2}F(z)+z^{-1}f(-1)+f(-2)$ $f(k+1)\leftrightarrow zF(z)-zf(0)$ $f(k+2)\leftrightarrow z^2F(z)-z^2f(0)-zf(1)$
Z 域微分	$kf(k)\leftrightarrow -z\frac{dF(z)}{dz}$
部分求和	$f(k)*\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}f(i)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$
Z 域积分	$\frac{f(k)}{k+m}\leftrightarrow z^m\int_z^{\infty}\frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}}d\eta$
初值	$f(M)=\lim_{z\to\infty}z^MF(z)$ **（右边信号）**, $f(M+1)=\lim_{z\to\infty}[z^{M+1}F(z)-zf(M)]$
终值	$f(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$ **（右边信号）**

离散傅里叶变换

$$F(e^{j\theta})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)e^{-j\theta k}$$

$$f(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}F(e^{j\theta})e^{j\theta k}d\theta$$

线性	$af_1(k)+bf_2(k)\leftrightarrow aF_1(e^{j\theta})+bF_2(e^{j\theta})$
时移	$f(k\pm m)\leftrightarrow e^{\pm j\theta m}F(e^{j\theta})$
频移	$e^{\pm jk\theta_0}f(k)\leftrightarrow F(e^{j(\theta\mp\theta_0)})$
尺度变换	$f_{(n)}(k)=\begin{cases}f(k/n)\\0\end{cases}\leftrightarrow F(e^{jn\theta})$
反转	$f(-k)\leftrightarrow F(e^{-j\theta})$
时域卷积	$f_1(k)*f_2(k)\leftrightarrow F_1(e^{j\theta})F_2(e^{j\theta})$
频域卷积	$f_1(k)f_2(k)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}F_1(e^{j\psi})F_2(e^{j(\psi-\theta)})d\psi$
时域差分	$f(k)-f(k-1)\leftrightarrow(1-e^{j\theta})F(e^{j\theta})$
频域微分	$kf(k)\leftrightarrow j\frac{dF(e^{j\theta})}{d\theta}$
时域累加	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)\leftrightarrow\frac{F(e^{j\theta})}{1-e^{j\theta}}+\pi F(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-2\pi k)$
	$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$，$f(1)=\lim_{z\to\infty}[zF(z)-zf(0)]$
帕斯瓦尔	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lvert f(k)\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\lvert F(e^{j\theta})\rvert^2\ d\theta$

常用连续傅里叶变换、拉普拉斯变换、Z 变换对一览表

连续傅里叶变换对 $F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$		拉普拉斯变换对（单边） $F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$		Z 变换对（单边） $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$			
函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(j\omega)$	函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$	函数 $f(k), k\ge 0$	象函数	函数 $f(k), k\ge 0$	象函数
$\delta(t)/1$	$1/2\pi\delta(\omega)$	$\delta(t)$	1	$\delta(k)$	1	$\delta(k-m), m\ge 0$	z^{-m}
$\delta'(t)/\delta^{(n)}(t)$	$j\omega/(j\omega)^n$	$\delta'(t)$	s	1	$\frac{z}{z-1}$	$\varepsilon(k-m), m\ge 0$	$\frac{z}{z-1}\cdot z^{-m}$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-1}$	$k^2\varepsilon(k)$	$\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$
$t\varepsilon(t)$	$j\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$	$t\varepsilon(t)/t^n\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s^2}\Big/\frac{n!}{s^{n+1}}$	$k\varepsilon(k)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$(k+1)a^k\varepsilon(k)$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)/te^{-\alpha t}\varepsilon(t), \alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}\Big/\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)/te^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}\Big/\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$a^k\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-a}$	$ka^{k-1}\varepsilon(k)$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
$\cos(\omega_0 t)$ $\sin(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$ $j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	$\cos(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$e^{\alpha k}\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-e^{\alpha}}$	$ka^k\varepsilon(k)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\frac{1}{t}$	$-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$	$\sin(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$e^{j\beta k}\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-e^{j\beta}}$	$k^2a^k\varepsilon(k)$	$\frac{az^2+a^2z}{(z-a)^3}$
$\|t\|$	$-\frac{2}{\omega^2}$	$\cosh(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$	$\frac{a^k-(-a)^k}{2a}\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$	$\frac{a^k+(-a)^k}{2a}\varepsilon(k)$	$\frac{z^2}{z^2-a^2}$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega\mp\omega_0)$	$\sinh(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$	$\frac{k(k-1)}{2}\varepsilon(k)$	$\frac{z}{(z-1)^3}$	$\frac{(k+1)k}{2}\varepsilon(k)$	$\frac{z^2}{(z-1)^3}$
$e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{j\omega+\alpha}{(j\omega+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{a^k-b^k}{a-b}\varepsilon(k)$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$	$\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\varepsilon(k)$	$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$
$e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{\beta}{(j\omega+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\cos(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$	$\sin(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$

$e^{-\alpha\lvert t\rvert}\varepsilon(t),\alpha>0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$	$(b_0t+b_1)\varepsilon(t)$	$\frac{b_0+b_1s}{s^2}$	$\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$	$\frac{z^2\cos\theta-z\cos(\beta-\theta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$	$\sin(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$	$\frac{z^2\sin\theta+z\sin(\beta-\theta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$
t/t^n	$j2\pi\delta'(\omega)/2\pi(j)^n\delta^{(n)}(\omega)$	$\frac{b_0}{\alpha}-(\frac{b_0}{\alpha}-b_1)e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{b_1s+b_0}{s(s+\alpha)}$	$a^k\cos(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{z(z-a\cos\beta)}{z^2-2az\cos\beta+a^2}$	$a^k\sin(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{az\sin\beta}{z^2-2az\cos\beta+a^2}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	$\frac{1}{\beta^3}[\beta t-\sin(\beta t)]\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s^2(s^2+\beta^2)}$	$a^k\cosh(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{z(z-a\cosh\beta)}{z^2-2az\cosh\beta+a^2}$	$a^k\sinh(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{az\sinh\beta}{z^2-2az\cosh\beta+a^2}$
$\begin{cases}-e^{\alpha t},t<0\\e^{-\alpha t},t>0\end{cases},(\alpha>0)$	$-j\frac{2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$	$\frac{1}{2\beta^3}[1-\beta t)]\sin(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\frac{a^k}{k}\varepsilon(k),k>0$	$\ln\left(\frac{z}{z-a}\right)$	$\frac{a^k}{k!}\varepsilon(k)$	$e^{\frac{a}{z}}$
$f(t)=\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{\tau}t),\lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\\0,\lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\end{cases}$	$\frac{\pi\tau}{2}\cdot\frac{\cos(\frac{\omega\tau}{2})}{(\frac{\pi}{2})^2-(\frac{\omega\tau}{2})^2}$	$\frac{1}{2\beta}t\sin(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\frac{(\ln a)^k}{k!}\varepsilon(k)$	$a^{\frac{1}{z}}$	$\frac{1}{(2k)!}$	$\cosh\sqrt{\frac{1}{z}}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega),\Omega=\frac{2\pi}{T}$	$\frac{1}{2\beta}[\sin(\beta t)+\beta t\cos(\beta t)]\varepsilon(t)$	$\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\frac{1}{k+1}\varepsilon(k)$	$z\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$	$\frac{1}{2k+1}\varepsilon(k)$	$\frac{1}{2}\sqrt{z}\ln\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}$
$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\delta_\Omega(\omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)$ $\Omega=\frac{2\pi}{T}$	$t\cos(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$[\frac{b_0-b_1\alpha}{\beta-\alpha}e^{-\alpha t}+(\frac{b_0-b_1\beta}{\beta-\alpha})e^{-\beta t}]\varepsilon(t)$		$\frac{b_1s+b_0}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	
$g_\tau(t)=\begin{cases}1,\lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\\0,\lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\end{cases}$	$\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)=\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	$[(b_0-b_1\alpha)t+b_1]e^{-\alpha t}$	$\frac{b_1s+b_0}{(s+\alpha)^2}$	$[\frac{b_0-b_1\alpha+b_2\alpha^2}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}e^{-\alpha t}+\frac{b_0-b_1\beta+b_2\beta^2}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}e^{-\beta t}$ $+\frac{b_0-b_1\gamma+b_2\gamma^2}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}e^{-\gamma t}]\varepsilon(t)$		$\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	
$\frac{W}{\pi}Sa(Wt)=\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$F(j\omega)=\begin{cases}1,\lvert\omega\rvert<\frac{W}{2}\\0,\lvert\omega\rvert>\frac{W}{2}\end{cases}$	$Ae^{-\alpha t}\sin(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$，其中 $Ae^{j\theta}=\frac{b_0-b_1(\alpha-j\beta)}{\beta}$	$\frac{b_1s+b_0}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$[\frac{b_0-b_1\beta+b_2\beta^2}{(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}+\frac{b_0-b_1\alpha+b_2\alpha^2}{\beta-\alpha}\cdot te^{-\alpha t}$ $-\frac{b_0-b_1\beta+b_2\alpha(2\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t}]\varepsilon(t)$		$\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(s+\alpha)^2(s+\beta)}$	
$f_\Delta(t)=\begin{cases}1-\frac{2\lvert t\rvert}{\tau},\lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\\0,\lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\end{cases}$	$\frac{\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$	$[b_2e^{-\alpha t}+(b_1-2b_2\alpha)te^{-\alpha t}+$ $\frac{1}{2}(b_0-b_1\alpha+b_2\alpha^2)t^2e^{-\alpha t}]\varepsilon(t)$	$\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(s+\alpha)^3}$	$[\frac{b_0-b_1\gamma+b_2\gamma^2}{\gamma^2+\beta^2}e^{-\gamma t}+A\sin(\beta t+\theta)]\varepsilon(t)$ 其中 $Ae^{j\theta}=\frac{(b_0-b_2\beta^2)+jb_1\beta}{\beta(\gamma+j\beta)}$		$\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(s+\gamma)(s^2+\beta^2)}$	

$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{\tau}(t+\frac{\tau}{2}), \lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\\ 0, \lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\end{cases}$	$j\frac{1}{\omega}\left[e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}-Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]$	$f(t)=\begin{cases}1, \lvert t\rvert<\frac{\tau_1}{2}\\ \frac{\tau}{\tau-\tau_1}(1-\frac{2\lvert t\rvert}{\tau}), \frac{\tau_1}{2}<\lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\\ 0, \lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\end{cases}$ $\leftrightarrow\frac{8}{\omega^2(\tau-\tau_1)}\sin\left[\frac{\omega(\tau+\tau_1)}{4}\right]\times\sin\left[\frac{\omega(\tau-\tau_1)}{4}\right]$	$[\frac{b_0-b_1\gamma+b_2\gamma^2}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}e^{-\gamma t}+Ae^{-\alpha t}\sin(\beta t+\theta)]\varepsilon(t)$ 其中 $Ae^{j\theta}=\frac{b_0-b_1(\alpha-j\beta)+b_2(\alpha-j\beta)^2}{\beta(\gamma-\alpha+j\beta)}$	$\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$

双边拉普拉斯变换与双边 Z 变换对一览表

双边拉普拉斯变换对 $F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$		双边 Z 变换对 $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$	
函数	象函数 $F(s)$ 和收敛域	函数	象函数 $F(z)$ 和收敛域
$\delta(t)$	1，整个 S 平面	$\delta(k)$	1，整个 Z 平面
$\delta^{(n)}(t)$	s^n，有限 S 平面	$\Delta^n\delta(k)$	$\frac{z^n}{(z-1)^n}, \lvert z\rvert>0$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}, \mathrm{Re}\{s\}>0$	$\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-1}, \lvert z\rvert>1$
$t\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s^2}, \mathrm{Re}\{s\}>0$	$(k+1)\varepsilon(k)$	$\frac{z^2}{(z-1)^2}, \lvert z\rvert>1$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s^n}, \mathrm{Re}\{s\}>0$	$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}\varepsilon(k)$	$\frac{z^n}{(z-1)^n}, \lvert z\rvert>1$
$-\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{s}, \mathrm{Re}\{s\}<0$	$-\varepsilon(-k-1)$	$\frac{z}{z-1}, \lvert z\rvert<1$
$-t\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{s^2}, \mathrm{Re}\{s\}<0$	$-(k+1)\varepsilon(-k-1)$	$\frac{z^2}{(z-1)^2}, \lvert z\rvert<1$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{s^n}, \mathrm{Re}\{s\}<0$	$-\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}\varepsilon(-k-1)$	$\frac{z^n}{(z-1)^n}, \lvert z\rvert<1$
$e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}$	$a^k\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-a}, \lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$te^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}, \mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}$	$(n+1)a^n\varepsilon(k)$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}, \lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}, \mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}$	$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}a^n\varepsilon(k)$	$\frac{z^n}{(z-a)^n}, \lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-e^{-at}\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\}<\mathrm{Re}\{-a\}$	$-a^k\varepsilon(-k-1)$	$\frac{z}{z-a}, \lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}, \mathrm{Re}\{s\}<\mathrm{Re}\{-a\}$	$-\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}a^n\varepsilon(-k-1)$	$\frac{z^n}{(z-a)^n}, \lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$\cos(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}, \mathrm{Re}\{s\}>0$	$\cos(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$
$\sin(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}, \mathrm{Re}\{s\}>0$	$\sin(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$
$e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}, \mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}$	$a^k\cos(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{z^2-za\cos\beta}{z^2-2za\cos\beta+1}$
$e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\varepsilon(t)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}, \mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}$	$a^k\sin(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{za\sin\beta}{z^2-2za\cos\beta+1}$
$e^{-\alpha\lvert t\rvert}, \mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{-2a}{s^2-a^2}, \mathrm{Re}\{a\}>\mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}$	$a^{\lvert k\rvert}, \lvert a\rvert<1$	$\frac{(a^2-1)z}{(z-a)(az-1)}, \lvert a\rvert<\lvert z\rvert<\lvert\frac{1}{a}\rvert$
$e^{-\alpha\lvert t\rvert}\mathrm{sgn}(t)$, $\mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{2s}{s^2-a^2}, \mathrm{Re}\{a\}>\mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}$	$a^{\lvert k\rvert}\mathrm{sgn}, \lvert a\rvert<1$	$\frac{a(z^2-z)}{(z-a)(az-1)}, \lvert a\rvert<\lvert z\rvert<\lvert\frac{1}{a}\rvert$

卷积积分一览表

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t)*f_2(t)$	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t)*f_2(t)$
$f(t)$	$\delta'(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$\delta(t)$	$f(t)$
$f(t)$	$\varepsilon(t)$	$\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda$	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)$	$t\varepsilon(t)$
$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)$	$t\varepsilon(t)$	$\frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)$
$e^{-\alpha_1 t}\varepsilon(t)$	$e^{-\alpha_2 t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}(e^{-\alpha_1 t}-e^{-\alpha_2 t})\varepsilon(t),\alpha_1\neq\alpha_2$	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$te^{-\alpha t}\varepsilon(t)$
$te^{-\alpha_1 t}\varepsilon(t)$	$e^{-\alpha_2 t}\varepsilon(t)$	$\left[\frac{(\alpha_2-\alpha_1)t-1}{(\alpha_2-\alpha_1)^2}e^{-\alpha_1 t}+\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)^2}e^{-\alpha_2 t}\right]\varepsilon(t)$ $\alpha_2\neq\alpha_1$	$t\varepsilon(t)$	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\left(\frac{\alpha t-1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}\right)\varepsilon(t)$
$e^{-\alpha_1 t}\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$	$e^{-\alpha_2 t}\varepsilon(t)$	$\left[\frac{\cos(\beta t+\theta-\varphi)}{\sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+\beta^2}}e^{-\alpha_1 t}-\frac{\cos(\theta-\varphi)}{\sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+\beta^2}}e^{-\alpha_2 t}\right]\varepsilon(t)$ $\varphi=\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha_2-\alpha_1}\right)$	$te^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$

卷积和一览表

$$f_1(t)*f_2(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)f(k-i)$$

$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t)*f_2(t)$	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t)*f_2(t)$
$f(k)$	$\delta(k)$	$f(k)$	$f(k)$	$\varepsilon(k)$	$\sum_{i=-\infty}^{k}f(i)$
$\varepsilon(k)$	$\varepsilon(k)$	$(k+1)\varepsilon(k)$	$k\varepsilon(k)$	$\varepsilon(k)$	$\frac{1}{2}(k+1)k\varepsilon(k)$
$a^k\varepsilon(k)$	$\varepsilon(k)$	$\frac{1-a^{k+1}}{1-a}\varepsilon(k),a\neq 0$	$a_1^k\varepsilon(k)$	$a_2^k\varepsilon(k)$	$\frac{a_1^{k+1}-a_2^{k+1}}{a_1-a_2}\varepsilon(k),a_1\neq a_2$
$a^k\varepsilon(k)$	$a^k\varepsilon(k)$	$(k+1)a^k\varepsilon(k)$	$k\varepsilon(k)$	$a^k\varepsilon(k)$	$\frac{k}{1-a}\varepsilon(k)+\frac{a(a^k-1)}{(1-a)^2}\varepsilon(k)$
$k\varepsilon(k)$	$k\varepsilon(k)$	$\frac{1}{6}(k+1)k(k-1)\varepsilon(k)$	$a_1^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$	$a^k\varepsilon(k)$	$\frac{a_1^{k+1}\cos[\beta(k+1)+\theta-\varphi]-a_2^{k+1}\cos(\theta-\varphi)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2-a_1a_2\cos\beta}}\varepsilon(k)$ $\varphi=\arctan\left[\frac{a_1\sin\beta}{a_1\cos\beta-a_2}\right]$

关于δ(t)、δ(k)函数公式一览表

$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$	$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$	$\delta(-t)=\delta(t)/\delta'(-t)=-\delta'(t)$	$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$
$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)$	$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$	$\delta[f(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mid f'(t_i)\mid}\delta(t-t_i)$	$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta^{(n)}(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0)$
$\delta(at)=\frac{1}{\mid a\mid}\delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\Big/\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\varepsilon(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt=0\Big/\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)d\tau=\delta(t)$	$f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0)$

$\delta^{(n)}(at) = \frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot \frac{1}{a^n} \delta^{(n)}(t)$	$\delta(ak) = \delta(k) / \delta(-k) = \delta(k)$	$f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k)$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k) = f(0)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t - t_0)dt = -f'(t_0)$

常用的连续傅里叶变换对及其对偶关系

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad\qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

连续傅里叶变换对			相对偶的连续傅里叶变换对		
重要	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	重要
√	$\delta(t)$	1	1	$2\pi\delta(\omega)$	√
√	$\frac{d}{dt}\delta(t)$	$j\omega$	t	$j2\pi\frac{d}{d\omega}\delta(\omega)$	
	$\frac{d^k}{dt^k}\delta(t)$	$(j\omega)^k$	t^k	$2\pi j^k\frac{d^k}{d\omega^k}\delta(\omega)$	
√	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	$\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{1}{j2\pi t}$	$u(\omega)$	
	$tu(t)$	$j\pi\frac{d}{d\omega}\delta(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$			
	$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1,t>0\\-1,t<0\end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$	$\frac{1}{\pi},t\neq 0$	$F(\omega)=\begin{cases}-j,\omega>0\\j,\omega<0\end{cases}$	
√	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	√
	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	$\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)$	$2\cos\omega t_0$	
	$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	$\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)$	$j2\sin\omega t_0$	
√	$f(t)=\begin{cases}1,\lvert t\rvert<\tau\\0,\lvert t\rvert>\tau\end{cases}$	$\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$	$\frac{W}{\pi}Sa(Wt)$	$F(\omega)=\begin{cases}1,\lvert\omega\rvert<W\\0,\lvert\omega\rvert>W\end{cases}$	√
√	$f(t)=\begin{cases}1-\lvert t\rvert/\tau,\lvert t\rvert<\tau\\0,\lvert t\rvert>\tau\end{cases}$	$\tau Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})$	$\frac{W}{2\pi}Sa^2(\frac{Wt}{2})$	$F(\omega)=\begin{cases}1-\lvert\omega\rvert/W,\lvert\omega\rvert<W\\0,\lvert\omega\rvert>W\end{cases}$	
√	$e^{-at}u(t),\mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	$\frac{1}{\tau-jt}$	$2\pi e^{-\tau\omega}u(\omega),\tau>0$	
	$e^{-a\lvert t\rvert},\mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{2a}{\omega^2+a^2}$	$\frac{\tau}{t^2+\tau^2}$	$\pi e^{-\tau\lvert\omega\rvert},\tau>0$	
√	$e^{-at}\cos\omega_0 tu(t),\mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$			
√	$e^{-at}\sin\omega_0 tu(t),\mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$			
	$te^{-at}u(t),\mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	$\frac{1}{(\tau-jt)^2},\tau>0$	$2\pi\omega e^{-\tau\omega}u(\omega)$	
	$\frac{t^{k-1}e^{-at}}{(k-1)!}u(t),\mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^k}$			
√	$\delta_T(t)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(t-lT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$			
√	$e^{-(\frac{t}{\tau})^2}$	$\sqrt{\pi}\tau e^{-(\frac{\omega\tau}{2})^2}$			
√	$[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]\cos\omega_0 t$	$\frac{\tau}{2}[Sa\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}+Sa\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}]$			
	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F_k\delta(\omega-k\omega_0)$			

连续傅里叶变换性质及其对偶关系

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)d\omega \qquad F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt$$

连续傅里叶变换对					相对偶的连续傅里叶变换对		
重要	名称	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	名称	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	重要
√	线性	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	$\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$				
√	尺度比例变换	$f(at), a\neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{\omega}{a})$				
	对偶性	$f(t)$	$g(\omega)$		$g(t)$	$2\pi f(-\omega)$	√
√	时移	$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$	频移	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$	√
	时域微分性质	$\frac{d}{dt}f(t)$	$j\omega F(\omega)$	频域微分性质	$-jtf(t)$	$\frac{d}{d\omega}F(\omega)$	√
	时域积分性质	$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$	频域积分性质	$\frac{f(t)}{-jt}+\pi f(0)\delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\omega}F(\sigma)d\sigma$	
√	时域卷积性质	$f(t)*h(t)$	$F(\omega)H(\omega)$	频域卷积性质	$f(t)p(t)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)$	√
√	对称性	$f(-t)$ $f^*(t)$ $f^*(-t)$	$F(-\omega)$ $F^*(-\omega)$ $F^*(\omega)$	奇偶虚实性质	$f(t)$ 是实函数 $f_o(t)=Od\{f(t)\}$ $f_e(t)=Ev\{f(t)\}$	 $j\,\mathrm{Im}\{F(\omega)\}$ $\mathrm{Re}\{F(\omega)\}$	
	希尔伯特变换	$f(t)=f(t)u(t)$	$F(\omega)=R(\omega)+jI(\omega)$ $R(\omega)=I(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}$				
√	时域抽样	$f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(\omega-k\frac{2\pi}{T})$	频域抽样	$\frac{1}{\omega_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t-n\frac{2\pi}{\omega_0})$	$F(\omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$	
√	帕什瓦尔公式	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert f(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\omega)\rvert^2d\omega$					

取反----------取反

共轭----共轭取反

共轭取反----共轭