三角関数

あお

2019 年 6 月 27 日

概要

このファイルは高校生を対象に三角関数を学んでもらうためのものです。当然ですがこのファイルの複製及びコピー及び他人への譲渡は筆者の許可のない限り禁止いたします。この文書を読むために必要なのは日本語と中学数学までの知識です。

目次

0.1　言葉の説明

諸君がいまだ知らない言葉がこの先出てくるかもしれないので先に説明しておく。

0.1.1　任意の x について〜

すべての x について〜

0.1.2　一般に x は y である

x は例外なく y である

第 1 章

図形と計量

1.1　三角比

以下のような、斜辺の長さ r 底辺の長さ x 縦の長さ y の直角三角形を考える。そして、各辺を $n(n > 0)$ 倍[†1]してみたものがその右のものである。この時、この二つの三角形は二つの角がそれぞれ等しいことから相似の関係である。

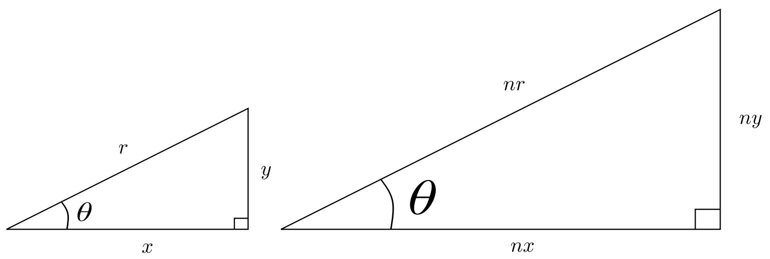

図 1.1

さて、二つの直角三角形は相似なのであるから、各辺の比は常に一定である。

$$x : y : r = nx : ny : nr \tag{1.1.1}$$

または、次のように書き換えることもできる。[†2]

$$y : r = ny : nr \quad , \quad x : r = nx : nr \quad , \quad y : x = ny : nx \tag{1.1.2}$$

さらに、比とは分数で書き換えることができることを思い出していただきたい。(1.1.2) は分数を用いて次のように書き換えが可能である。

$$\frac{y}{r} = \frac{ny}{nr} \quad , \quad \frac{x}{r} = \frac{nx}{nr} \quad , \quad \frac{y}{x} = \frac{ny}{nx} \tag{1.1.3}$$

ここで、何度も n 倍をした三角形の辺の比も一緒に式に書くのは、**相似でさえあればその値は約分されて、左辺と同じ比を表現する**ことを強調したいからである。(または、どれだけ拡大・縮小されようが、各辺の比は変化しない) つまり、直角三角形の場合、θ さえ定まれば各辺の比も定まるのである (θ の値と $90°$ で二つの角が決まるため、相似の条件が決まる)。

[†1] n は任意なる正の実数である。また、θ も別に $0°$ から $90°$ の間の値であれば何でもよい。
[†2] ここに書いた比の関係は n で割れば片方の辺と一致するのだから当たり前だと思って読んでいただいて構わない。

したがって、直角三角形の比 (1.1.3) は (直角の部分とは別に)θ の値が与えられれば一意的に定まる。つまり、(1.1.3) の三つの比はそれぞれ θ **の関数である**と言えるのである。この θ の関数を (1.1.3) を用いて以下のように定義する。

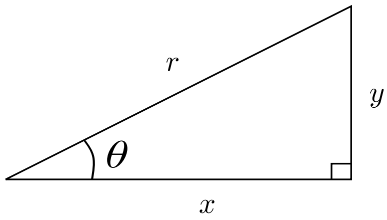

図 1.2　斜辺と底辺とのなす角が θ の直角三角形

図 1.2 のような構造をとる直角三角形に対して、

$$\text{sine} \quad : \quad \sin\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{y}{r} \tag{1.1.4}$$

$$\text{cosine} \quad : \quad \cos\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{r} \tag{1.1.5}$$

$$\text{tangent} \quad : \quad \tan\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{y}{x} \tag{1.1.6}$$

ここで、$A \overset{\text{def}}{=} B$ は「A を B として定義する」という意味であることを注意しておく。上の三つの比の関数は明らかに異なる関数[†3]であるのでそれぞれに **sine(正弦)**、**cosine(余弦)**、**tangent(正接)** という名前を付けられている。これらを三角比とか三角関数と呼ぶ。

また、もうひとつ注意してほしいことがある。三角比を考えるとき、三角形は基本、図 1.2 のように描いて考えられることが多いが、実際にこれを使う場になると三角形は常にこの形をしてくれているわけではないのである。これが原因で $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を間違える者が大勢いる。そこで、読者がこれにつまずかないように次のように説明しておく。（上の影付きの枠で書いた、「図 1.2 のような構造」の説明である。）

斜辺と角度 θ をなすもう一つの辺を底辺としてみる。

この考えを適用することによって考えたい三角形を図 1.2 に落とし込むことができるのである。そして、**このような三角形にのみ上の定義は適用可能である**。乃ち、θ と底辺との位置関係がわかっていない限り上の定義は使えないのである。

三角比を決めるために底辺を定めることにはもう一つメリットがある。sine、cosine、tangent の意味である。乃ち、sine は斜辺と縦の辺[†4]との比、cosine は斜辺と底辺との比、tangent は底辺と縦の辺との比と表現できるのである。これはどれが底辺か決めていなかったら分からなかったことである。

[†3] θ によって決まる関数ではあるがこの三つの関数は明らかに異なる。sine、cosine、tangent の値が異なるのは (1.1.4)(1.1.5)(1.1.6) の右辺を見れば明らかである。

[†4] 斜辺、底辺以外のもう一つの辺をこのように名付けることにする

1.2　もう一つの角

前節で使った三角形について、今度は θ と名付けなかったもう一つの角について考えることにしよう。この角の大きさは、三角形の内角の和が 180° であることから、$90^\circ - \theta$ であるとわかる。では、$90^\circ - \theta$ の三角比はどうなるだろうか？これが知りたければ、今度は長さが y の辺を底辺に見ればよい。

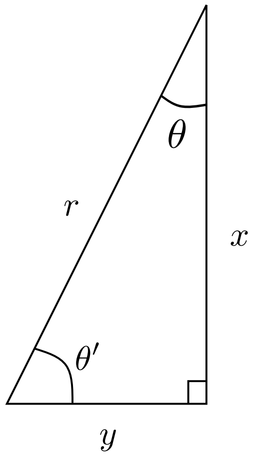

図 1.3　y の辺を底辺と見たときの直角三角形

いちいち $90^\circ - \theta$ と書くのは面倒なので、θ' と置き換えて、後で戻すことにする。[†5]さて、前節で確認したように、各辺の比にはそれぞれ意味があった。sine は斜辺と高さの辺の比、cosine は斜辺と底辺の比、tangent は底辺と縦の辺の比であると考えた。今回底辺はどれか？斜辺と θ' をなす辺のはずであるから、長さが y の辺であろう。[†6]すると、前節と同じ考え方で、

$$\sin\theta' = \frac{x}{r} \tag{1.2.1}$$

$$\cos\theta' = \frac{y}{r} \tag{1.2.2}$$

$$\tan\theta' = \frac{x}{y} \tag{1.2.3}$$

であるとわかるだろう。さて、これらの値と前節で決めた三角比の値を見比べると、次のような関係があるとわかる。

$$\sin\theta' = \frac{x}{r} = \cos\theta \tag{1.2.4}$$

$$\cos\theta' = \frac{y}{r} = \sin\theta \tag{1.2.5}$$

[†5] ところで図 1.3 は図 1.2 をくるっと回しただけでは得られないことに気が付いただろうか？実は回した後にもうひと操作別の回転をしないといけないのであるが、ここでは特別重要ではないのでこれ以上何も言及しないことにする。

[†6] 斜辺は直角の反対側と決まっているので常に r の長さの辺である。

$$\tan\theta' = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta} \tag{1.2.6}$$

これにより、$\theta' = 90^\circ - \theta$ と戻すことで次の 3 式が成り立つとわかる。

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta \tag{1.2.7}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta \tag{1.2.8}$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta} \tag{1.2.9}$$

1.3　三角比の相互関係

今度は角度 θ における三角比 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の間にどのような関係があるのかを考える。ここでは、定義の式を頻繁に使うのでもう一度ここに表示させておく。

下の図のような構造をとる直角三角形に対して、

$$\text{sine} \quad : \quad \sin\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{r} \tag{1.3.1}$$

$$\text{cosine} \quad : \quad \cos\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{r} \tag{1.3.2}$$

$$\text{tangent} \quad : \quad \tan\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{x} \tag{1.3.3}$$

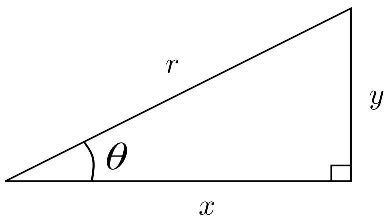

図 1.4

さらに、x, y の長さは (1.3.1)、(1.3.2) から、

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \tag{1.3.4}$$

と得られるということも知っておいてほしい。[†7]

[†7] (1.3.1)、(1.3.2) で両辺に r をかけることで得られる。

1.3.1　相互関係の導出

三角比で用いられる相互関係は次の三式である。

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

左から順に証明していく。いつものように次のような直角三角形を想定する。

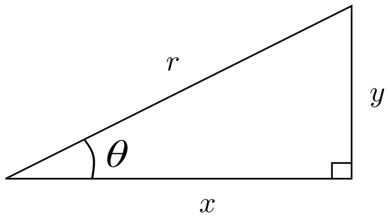

図 1.5

[証明 i]

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

次の証明は Pythagoras の定理を用いる。証明は付録に載せておく。

[証明 ii]
Pythagoras の定理より、

$$r^2 = x^2 + y^2$$

(1.3.4) より、

$$r^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$
$$\Rightarrow \quad 1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

[証明 iii]
証明 ii より、

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

両辺を $\cos^2\theta$ で割って、

$$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$\Rightarrow 1 + (\frac{\sin\theta}{\cos\theta})^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

さらに証明 i を用いて、

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

を得る。以上。

ここまでの議論により、はじめに伝えていた次の三つの相互関係が証明された。

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{1.3.5}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{1.3.6}$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \tag{1.3.7}$$

1.4 正弦定理

ここでは「正弦定理」というものを導くがそのためにいくつか準備が必要である。

1.4.1 円周角の定理

付録にする？

1.4.2 外接円の存在性

1.5 単位円の導入、定義の拡張

To Be Continued

付録

A　Pythagoras の定理 (3 平方の定理)

Pythagoras の定理を諸君は覚えているだろうか？

> 直角三角形の三辺について、斜辺の長さ r、その他の残りの辺を y, z としたとき、
> $$r^2 = x^2 + y^2 \tag{A.1}$$
> が成り立つ。

おそらく忘れているであろう諸君のために証明をここに与えておこう。次のような直角三角形について考える。

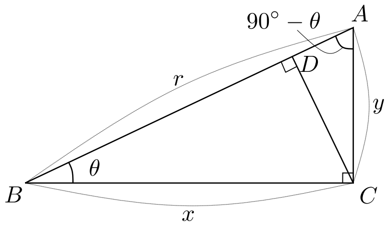

図 A.1

θ の値を任意としておけば、この直角三角形は任意の直角三角形を表す。直角三角形は、図 1.5 から分かるように、内部に（直角の頂点から斜辺に向かって）垂線を落とすことで二つの直角三角形の組み合わせに分けることができる。これを利用して証明しよう。[†8]

[証明]

三角形 BDC の面積について、x を斜辺、BD を底辺とみれば、

$$\frac{1}{2}BD \cdot DC = \frac{1}{2}x\cos\theta \cdot x\sin\theta = \frac{1}{2}x^2\sin\theta\cos\theta$$

同様に三角形 ADC の面積について。y を斜辺、AD を底辺とみれば、

$$\frac{1}{2}AD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot y\cos(90^\circ - \theta) \cdot y\sin(90^\circ - \theta) = \frac{1}{2}y\sin\theta \cdot y\cos\theta = \frac{1}{2}y^2\sin\theta\cos\theta$$

さらに、全体の面積は、

$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}r\cos\theta \cdot r\sin\theta = \frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta$$

[†8] この証明はあまたの手段の中のひとつにすぎない。

と書ける。全体の面積 $= \Delta BDC$ の面積 $+ \Delta ADC$ の面積となるはずであるから、

$$\frac{1}{2}r^2 \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2}x^2 \sin\theta \cos\theta + \frac{1}{2}y^2 \sin\theta \cos\theta$$

両辺を $\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$ で割ることで、

$$r^2 = x^2 + y^2$$

を得る。以上。