Hoofdstuk1: afgeleide functies

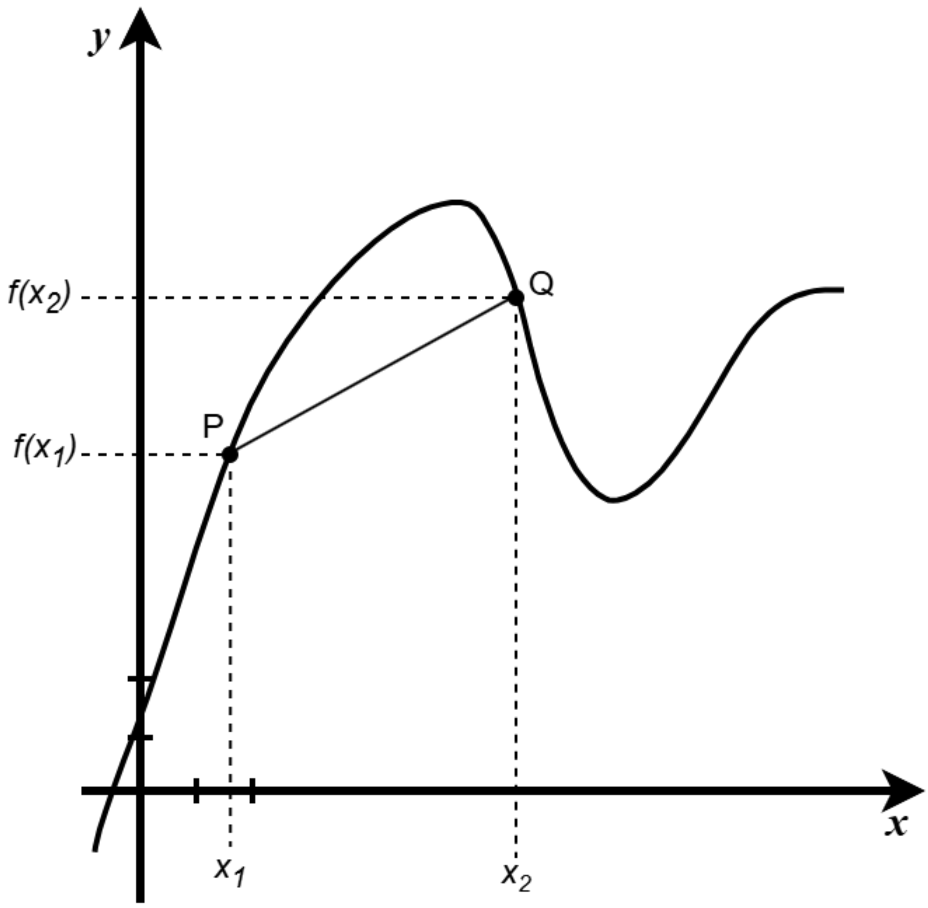
Leerdoelen: wat moet je kennen/kunnen
De afgeleide interpreteren en bepalen als limiet van een differentiequotiënt en als richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek.
Grafisch het verband leggen tussen een functie en haar afgeleide functie.
De afgeleide functie berekenen van veeltermfuncties.
Het verloop van functies analyseren met behulp van de eerste afgeleide functie.
Extremumproblemen oplossen.

Auteurs: T. De Ridder, L. Roggen

Wiskunde 6 Applicatie-en databeheer

Busleyden Atheneum

1 Differentiequotiënt



Figuur 1

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ is gedefinieerd als de verandering van de functiewaarden over het interval $[x_1, x_2]$ gedeeld door $(x_2 - x_1)$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ is zo een maat voor de gemiddelde verandering van een functie f over het beschouwde interval Δx.

$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$	f stijgt gemiddeld in het interval Δx
$\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$	f daalt gemiddeld in het interval Δx

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ is ook de richtingscoëfficiënt van de rechte door de twee beschouwde punten $P(x_1, f(x_1))$ en $Q(x_2, f(x_2))$.

1.1 Berekenen van differentiequotiënt uit een tabel

$$\Delta x = 7 - 2 = 5$$

x	-1	2	7
$f(x)$	4	-0,5	5

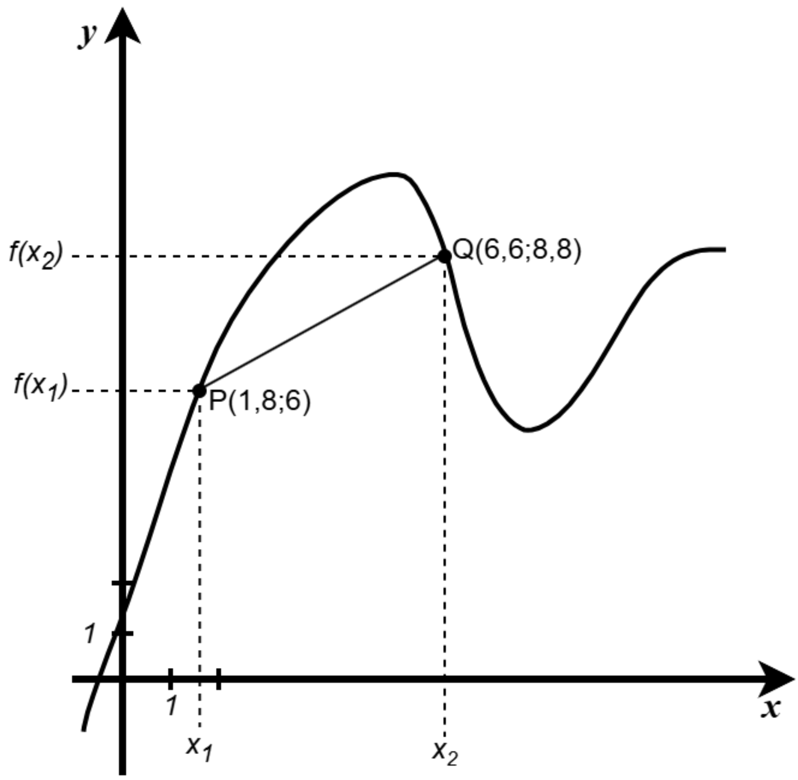
$$\Delta f = 5 - (-0{,}5) = 5{,}5$$

Voorbeeld: bereken het differentiequotiënt tussen 2 en 7.

- Duid de twee kolommen aan waartussen je het differentiequotiënt dient te berekenen (dit kunnen ook twee kolommen zijn die niet naast elkaar liggen)
- Bereken het verschil tussen de x-waarden
- Bereken het verschil tussen de functiewaarden van beide kolommen
- Deel de verandering in functiewaarden door de verandering in x-waarden

Het differentiequotiënt uit het voorbeeld is zo $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{5{,}5}{5} = 1{,}1$

1.2 Berekenen van differentiequotiënt uit de grafiek



Figuur 2

Om het differentiequotiënt te berekenen tussen twee punten op de grafiek wanneer de grafiek gegeven is, ga je als volgt te werk:

- Lees de x-waarde van het eerste punt af (hier $x_1 = 1{,}8$)
- Lees de x-waarde van het tweede punt af (hier $x_2 = 6{,}6$)
- Lees de functiewaarde van het eerste punt af (hier $f(x_1) = 6$)
- Lees de functiewaarde van het tweede punt af (hier $f(x_2) = 8{,}8$)
- Bereken het verschil tussen de x-waarden
- Bereken het verschil tussen de functiewaarden
- Deel de verandering in functiewaarden door de verandering in x-waarden

Het differentiequotiënt uit het voorbeeld is zo $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{8{,}8-6}{6{,}6-1{,}8} = \frac{2{,}8}{4{,}8} = 0{,}5833$

<u>Tip: controleer het teken van je uitkomst: kom je een positief getal uit, dan moet je grafiek in dat interval gemiddeld stijgen, kom je een negatief getal uit, dan moet je grafiek in dat interval gemiddeld dalen.</u>

1.3 Berekenen van differentiequotiënt uit het functievoorschrift

$$f(x) = 7x^2 - 9x + 2$$

Voorbeeld: Bepaal het differentiequotiënt van f in het interval $[-1,2]$.

Bepaal eerst de functiewaarden voor de grenzen van het interval.

$x_1 = -1$	$f(x_1) = f(-1) = 7(-1)^2 - 9(-1) + 2 = 18$
$x_2 = 2$	$f(x_2) = f(2) = 7(2)^2 - 9(2) + 2 = 12$
$\Delta x = 2 - (-1) = 3$	$\Delta f = f(x_2) - f(x_1) = 12 - 18 = -6$

Deel Δf door Δx: $-\frac{6}{3} = -2$

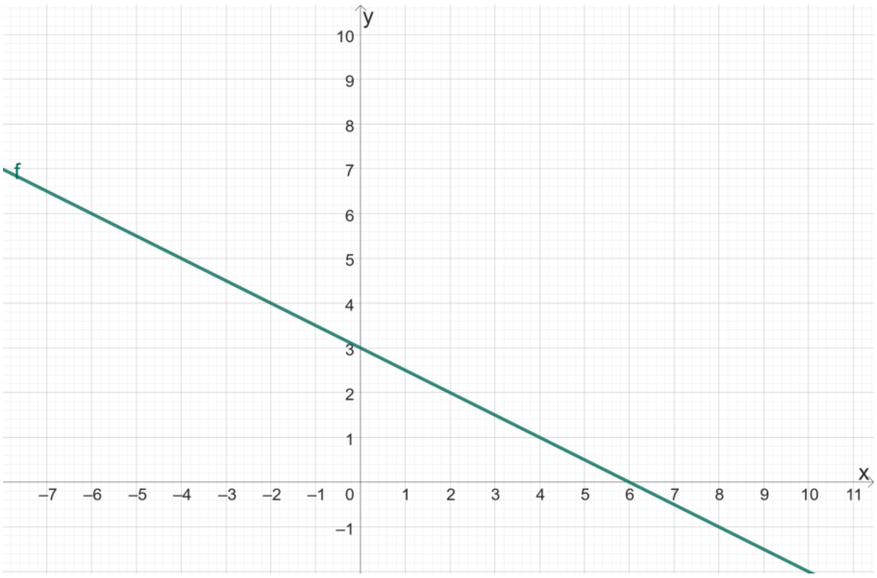
2 Gemiddelde en ogenblikkelijke verandering

2.1 Gemiddelde helling van een functie

De gemiddelde helling van een functie over een interval $[x_1, x_2]$ is gelijk aan het differentiequotiënt. In Figuur 1 is de gemiddelde helling tussen punt P en punt Q gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de rechte door de punten P en Q.

2.2 Ogenblikkelijke helling van een functie

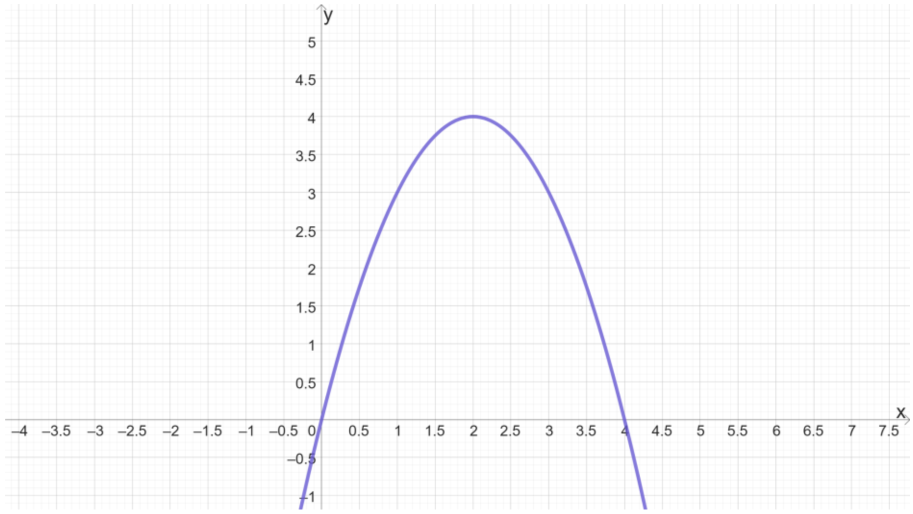
Beschouw de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$



Bereken je met behulp van het differentiequotiënt de gemiddelde helling van deze functie, dan krijg je altijd dezelfde waarde, ongeacht de grootte van het gekozen interval. Een rechte heeft namelijk overal dezelfde helling, die gelijk is aan de richtingscoëfficiënt.

Bekijk je de grafiek van een veeltermfunctie met een hogere graad dan 1, dan zie je dat zo'n functies in sommige intervallen dalen, in andere intervallen dan weer stijgen (of gelijk blijven).

Voorbeeld: $f(x) = -x^2 + 4x$



De functie stijgt voor x-waarden van $-\infty$ tot 2 en daalt voor het interval $]2, \infty[$. Uit Tabel 1 kan je aflezen dat de gemiddelde helling in een interval van 0,5 afneemt tot aan $x = 2$ waarna de gemiddelde helling steeds meer negatief wordt.

Tabel 1

Interval	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
[0,1/2]	3,5
[1/2,1]	2,5
[1,3/2]	1,5
[3/2,2]	0,5
[2,5/2]	-0,5
[5/2,3]	-1,5
[3,7/2]	-2,5
[7/2,4]	-3,5

Je zou je kunnen afvragen wat de helling is van de functie in een heel klein interval. Dat kan je nog steeds berekenen met het differentiequotiënt (zie Tabel 2).

Tabel 2

Interval	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
[3;3,5]	-2,5
[3;3,1]	-2,1
[3;3,01]	-2,009999
[3;3,001]	-2,000999
[3;3,0001]	-2,000100
Limiet voor x_2 naar $x_1 = 3$	-2

Als je het differentiequotiënt berekent tot op 2 decimalen, dan is dit differentiequotiënt vanaf een interval van 0,001 gelijk aan -2,00. Als je het differentiequotiënt zou berekenen voor een oneindig klein interval, dus wiskundig verwoord *voor de limiet van* x_2 *naar* x_1 , dan nadert het differentiequotiënt naar -2. Deze waarde is de ogenblikkelijke helling van de functie $f(x)$ in $x = 3$. Deze waarde wordt wiskundig ook de afgeleide van een functie in een punt genoemd. Het desbetreffende punt is hier $x = 3$.

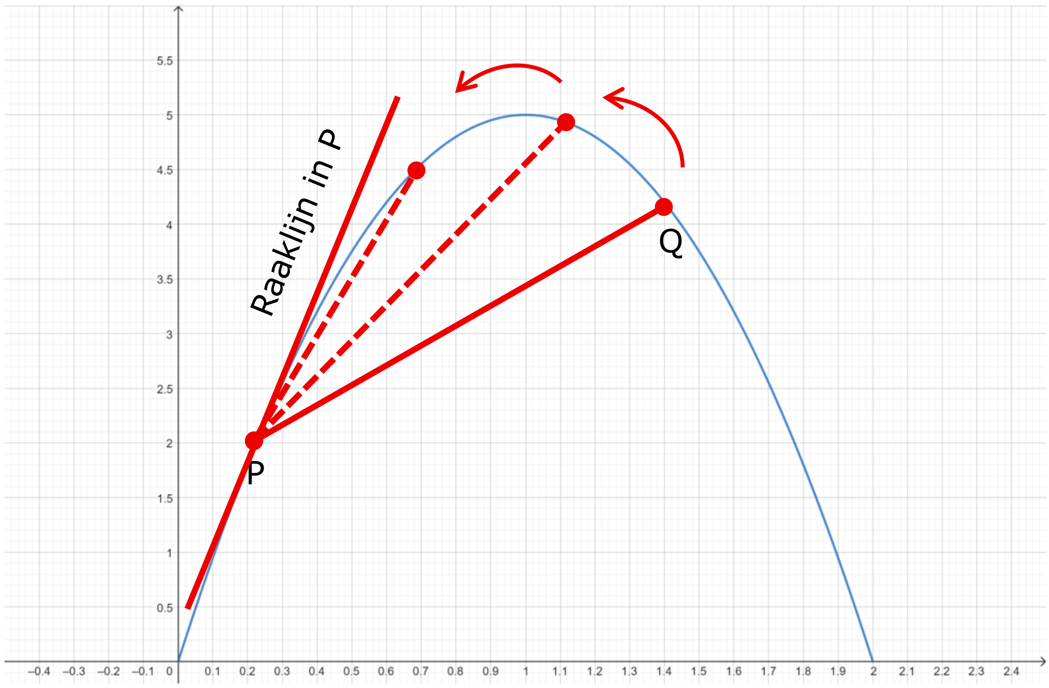
Je kan de ogenblikkelijke helling uiteraard ook berekenen voor andere punten.

Werkwijze berekening ogenblikkelijke helling in punt $x = a$ van een functie $f(x)$ m.b.v. het differentiequotiënt:

- Stel een tabel op van het differentiequotiënt voor intervallen [a,a+0,1], [a,a+0,001], [a,a+0,0001], …
- Bereken het differentiequotiënt voor al deze intervallen tot de gewenste nauwkeurigheid uit de opgave

Voor elke functie $f(x)$ kan je de ogenblikkelijke verandering of helling van de functie in een punt a benaderen door het differentiequotiënt te berekenen in een zeer klein interval rond a. In de praktijk is 0,001 een voldoende klein interval.

2.3 Grafische interpretatie



Figuur 3 – de uitleg uit de les noteer je hier

Het differentiequotiënt van een functie in een ingesloten interval is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van het lijnstuk dat de grenzen van dat ingesloten interval verbindt. Voor een rechte die twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) verbindt, is het functievoorschrift immers gegeven door $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Als je het interval Δx steeds kleiner maakt, breng je de grenzen van het interval steeds dichter bij elkaar. Dit kan je doen tot in de limiet waar de twee grenspunten van het interval samenvallen. Op dit moment wordt de rechte die je door de twee (samenvallende) grenspunten tekent gelijk aan de raaklijn aan de functie in dat punt. Als je dus de limiet bepaalt van het differentiequotiënt voor $x_2 \to x_1$, krijg je - indien die limiet bestaat - , een getal dat gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de functie in het beschouwde punt. Dit getal geeft de ogenblikkelijke helling van de grafiek in dat punt.

3 Afgeleide van een functie f in het punt a

Als $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bestaat dan noemt met de gevonden waarde $f'(a)$ de *afgeleide van de functie in* a. Deze waarde is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de functie f in het punt $x = a$.

Voor elk punt a uit het domein van een functie kan je de afgeleide functie in dat punt bepalen. Die verzameling punten vormt een nieuwe functie, de afgeleide functie $f'(x)$.

Er bestaan verschillende notaties voor de afgeleide van een functie.

Notatie 1: aanduiding met een ′ : $f'(x)$ duidt de afgeleide functie aan (zie later), $f'(a)$ duidt de functiewaarde van de afgeleide functie aan in $x = a$. Voordeel van deze notatie is zijn eenvoud, het nadeel is dat de notatie niet aangeeft naar welke onafhankelijke variabele je hebt afgeleid. Aangezien deze situatie vrijwel niet in deze cursus zal voorkomen, wordt meestal van deze notatie gebruik gemaakt.

Notatie 2: $\frac{d}{dx}f(x)$

Deze notatie verwijst naar het differentiequotiënt. De teller is weer de verandering in de functiewaarden, de noemer is de verandering in x-waarden. Δ is ingewisseld voor de kleine letter d. De kleine d staat voor *derivative* het Engelse woord voor afgeleide.

Deze notatie is nuttig wanneer je de rekenregels toepast om afgeleide functies van een gegeven functievoorschrift te bepalen (zie later).

Als je een functie $g(n)$ hebt, en je bepaalt de afgeleide naar n dan wordt de notatie uiteraard $\frac{d}{dn}g(n)$.

Notatie 3: Df. De grote D geeft aan dat het om de afgeleide functie gaat, f is de naam van de functie. De afgeleide functie van een functie g wordt dan uiteraard genoteerd als Dg.

Deze notatie zal zelden gebruikt worden in deze cursus.

4 Afgeleide van veeltermfuncties

4.1 Afgeleide van de constante functie (functie van graad 0)

$$f: y = c, met\ c \in \mathbb{R}$$

Grafisch: Je kan de afgeleide functie van $f(x)$ bepalen door terug te grijpen naar de grafische betekenis van de afgeleide van een functie. De ogenblikkelijke verandering van de constante functie is 0 over het hele domein van de functie f.

Algebraïsch:

Het differentiequotiënt voor een interval $[a, x]$ met $x \neq a$ is:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{c - c}{x - a} = 0$$

Vervolgens bepaal je de limiet voor het differentiequotiënt voor $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$$

4.2 Afgeleide van $f: y = x$ (functie van graad 1)

$$\boldsymbol{f: y = x}$$

Grafisch: het differentiequotiënt is de richtingscoëfficiënt van deze rechte is 1, voor het volledige domein van de functie f. Aangezien de gemiddelde verandering niet wijzigt over het domein van de functie, is dit ook de ogenblikkelijke verandering.

Algebraïsch:

Het differentiequotiënt voor een interval $[a, x]$ met $x \neq a$ is:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1$$

Vervolgens bepaal je de limiet voor het differentiequotiënt voor $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1$$

4.3 Afgeleide van $f: y = x^2$ (functie van graad 2)

$$\boldsymbol{f: y = x^2}$$

Algebraïsch:

Het differentiequotiënt voor een interval $[a, x]$ met $x \neq a$ is:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a$$

Vervolgens bepaal je de limiet voor het differentiequotiënt voor $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2a$$

De afgeleide functie f' in een punt a is $f'(a) = 2a, \forall a \in \mathbb{R}$. Of dus: $f'(x) = 2x$

Als je deze afgeleide berekent in een ander punt, bijvoorbeeld het punt b dan krijg je de waarde $2b$. a en b zijn maar willekeurige symbolen, je mag even goed x gebruiken om je punt te benoemen. Je kan dus concluderen dat de afgeleide functie f' voor elke waarde $x \in dom\, f$ gelijk is aan $2x$.

4.4 Afgeleide van $f: y = x^3$ (functie van graad 3)

$$\boldsymbol{f: y = x^3}$$

Algebraïsch:

Het differentiequotiënt voor een interval $[a, x]$ met $x \neq a$ is:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = x^2 + ax + a^2$$

Vervolgens bepaal je de limiet voor het differentiequotiënt voor $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

De afgeleide functie f’ in een punt a is $f'(a) = 3a^2, \forall a \in \mathbb{R}$. Of dus: $f'(x) = 3x^2$

5 Overzicht afgeleiden van basisfuncties en rekenregels

In paragraaf 4 werden de afgeleiden van een aantal basisfuncties bepaald. Deze dien je van buiten te kennen, samen met de rekenregels in deze paragraaf. Hiermee zal je de afgeleide functie van elke veeltermfunctie kunnen bepalen.

5.1 Constante functie

Oorspronkelijke functie	Afgeleide functie
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$

5.2 De functie wordt afgebeeld op zichzelf

Oorspronkelijke functie	Afgeleide functie
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$

5.3 De functie is een gehele macht van x met coëfficiënt = 1 ($n \in \mathbb{N}$)

Oorspronkelijke functie	Afgeleide functie
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

5.4 Veelvoudregel: de functie wordt vermenigvuldigd met factor a ($a \in \mathbb{R}_0$)

Oorspronkelijke functie	Afgeleide functie
$f(x) = a \cdot g(x)$	$f'(x) = a \cdot g'(x)$

De afgeleide van het product van een constante factor a en een functie is gelijk aan het product van die constante factor met de afgeleide van die functie.

Praktische aanpak: plaats de constante factor vooraan en plaats de rest van het functievoorschrift tussen haakjes. Bepaal vervolgens de afgeleide van wat tussen de haakjes staat, gebruik makend van alle rekenregels. Het resultaat hiervan vermenigvuldig je met de eerst afgezonderde factor.

Dit wordt een stukje complexer om duidelijk te noteren. Daarom wordt overgegaan op de notatie $\frac{d}{dx}(\,)$ waarbij de af te leiden uitdrukking tussen haakjes gezet wordt.

Voorbeelden:

$f(x) = 8x$	$\frac{df(x)}{dx} = 8 \cdot \frac{d(x)}{dx} = 8 \cdot 1 = 8$
$f(x) = 3x^2$	$\frac{df(x)}{dx} = 3 \cdot \frac{d(x^2)}{dx} = 3 \cdot (2x^1) = 6x$
$f(x) = \frac{1}{9}x^5$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{9} \cdot \frac{d(x^5)}{dx} = \frac{1}{9} \cdot (5x^4) = \frac{5}{9}x^4$

5.5 Algemene veeltermfuncties

Pas de regels 5.1 t.e.m. 5.4 toe op elke term afzonderlijk.

Voorbeeld:

$$f(x) = 2 + x + 3x^2 + 5x^3$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(2) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(5x^3)$$

$$= 0 + 1 + 3 \cdot 2 \cdot x + 5 \cdot 3 \cdot x^2 = 1 + 6x + 15x^2$$

5.6 Productregel

De afgeleide van een product van twee functies is de som van twee termen: de eerste term is het product van de afgeleide van de eerste functie en de originele tweede functie, de tweede term is het product van de originele eerste functie en de afgeleide van de tweede functie.

$$\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Of in andere notatie: $\left(f(x).g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Voorbeeld:

$$f\colon y = x^2 + 4$$

$$g\colon y = x^4$$

$$\frac{d(f(x)\cdot g(x))}{dx} = \frac{d(x^2+4)}{dx}\cdot x^4 + (x^2+4)\cdot\frac{d(x^4)}{dx} = (2x)\cdot x^4 + (x^2+4)\cdot 4x^3$$
$$= 2x^5 + 4x^5 + 16x^3 = 6x^5 + 16x^3$$

Opmerking: je had natuurlijk ook eerst het product van de twee functies kunnen uitwerken door de haakjes uit te werken. Vervolgens kan je de afgeleide van deze veeltermfunctie bepalen. De meest optimale aanpak leer je door heel veel oefeningen te maken waardoor je inzicht in de opgaven verwerft. Echter, hoe je ook de afgeleide bepaalt, het resultaat zal steeds hetzelfde zijn.

5.7 Kettingregel

Deze regel pas je toe bij een macht van een functie.

$$\frac{d((f(x))^n)}{dx} = n\cdot\big(f(x)\big)^{n-1}\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

Of in andere notatie: $(f(x))^n)' = n\cdot\big(f(x)\big)^{n-1}\cdot f'(x)$

Opmerking 1: de afgeleide van een n-de macht van x is een toepassing van deze regel: $\frac{d(x^n)}{dx} = n\cdot x^{n-1}\cdot\frac{dx}{dx} = n\cdot x^{n-1}\cdot 1 = n\cdot x^{n-1}$

Opmerking 2: deze kettingregel is een specifiek geval van de algemene kettingregel. Wanneer de af te leiden functie een functie van een functie is, vb. $f(g(x))$, dan zegt de kettingregel dat $(f\big(g(x)\big))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$. Je dient de regel enkel toe te kunnen passen op machten van functies.

Voorbeeld:

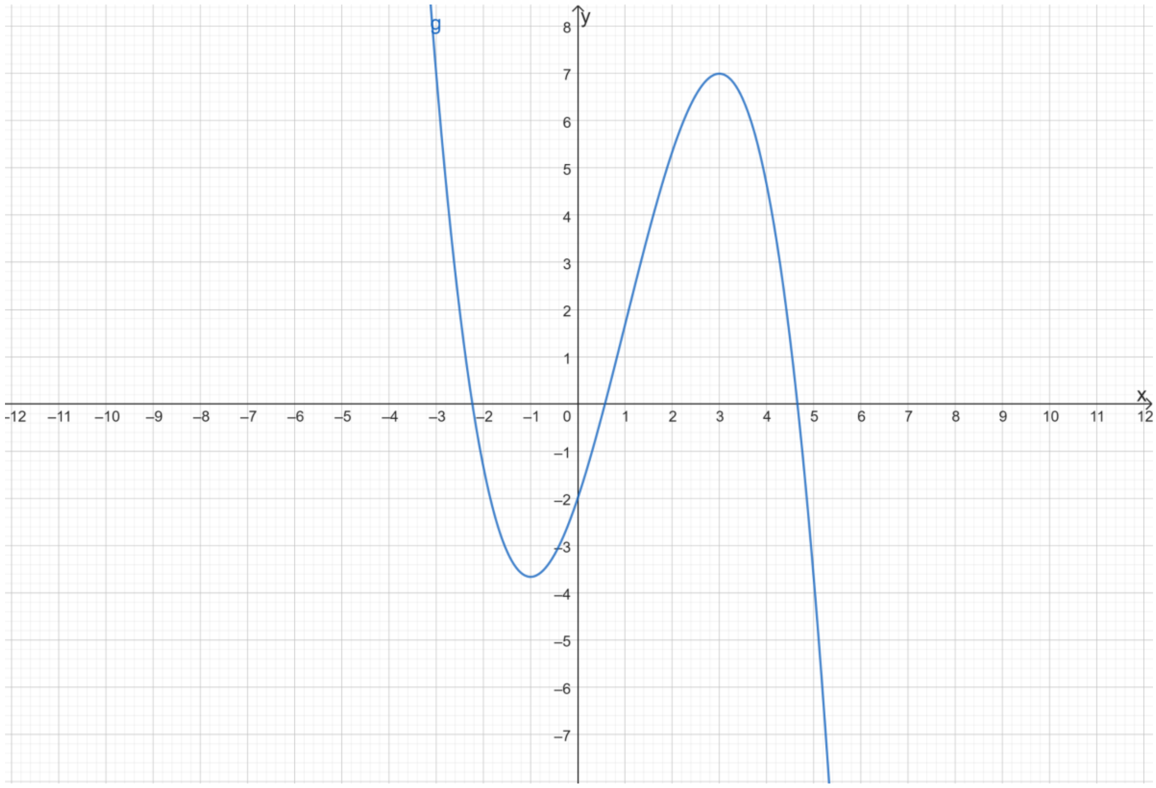
$$f: y = (2x^2+4)^3$$

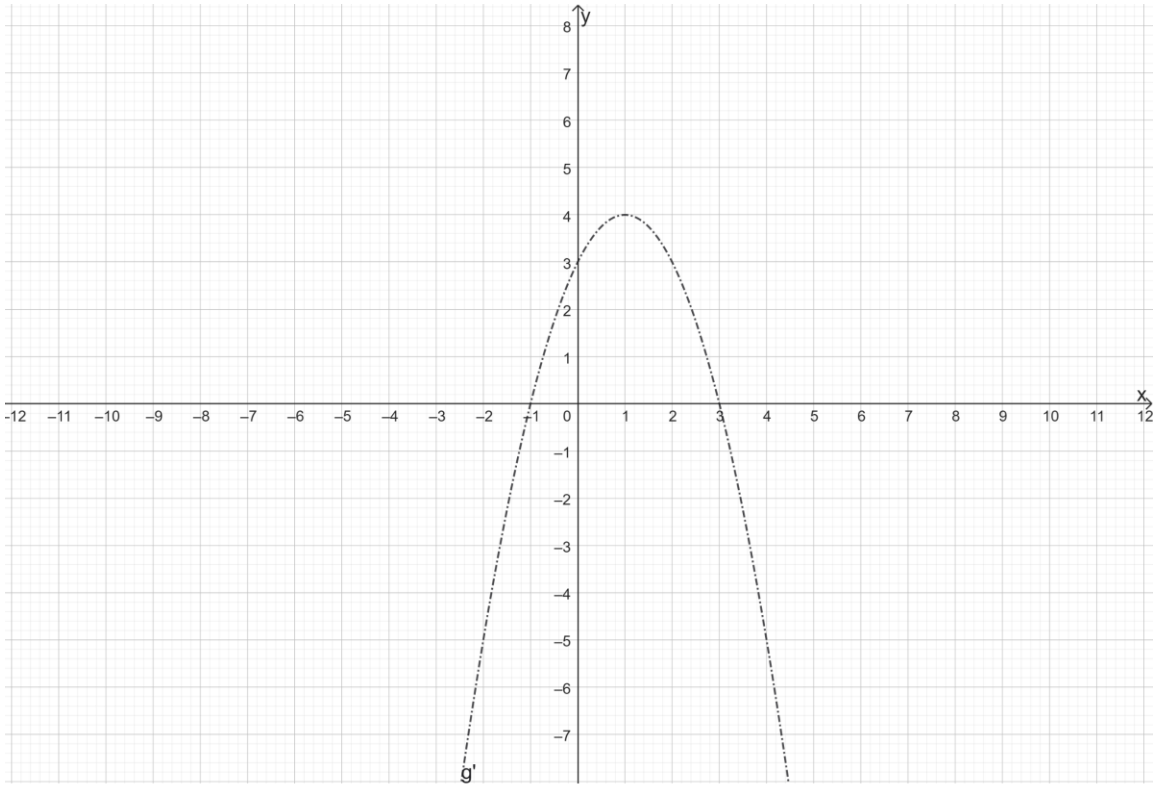
$$f'(x) = ((2x^2+4)^3)' = 3\cdot(2x^2+4)^2\cdot(4x) = 12x\cdot(4x^4+16x^2+16)$$
$$= 48x^5 + 192x^3 + 192x$$

Ook hier had je eerst de haakjes kunnen uitrekenen en dan het geheel afleiden.

6 Functieverloop bespreken aan de hand van de afgeleide functie

Voorbeeld 1: In onderstaande figuren zijn de grafiek van een functie g en de afgeleide functie g' getekend.





6.1 Stijgen en dalen van een functie

- In alle intervallen waar het teken van de afgeleide functie f' positief is, is de (oorspronkelijke) functie f stijgend
- In alle intervallen waar het teken van de afgeleide functie f' negatief is, is de (oorspronkelijke) functie f dalend

Controleer dit met de grafieken van g en g'.

<u>Voorbeeld 2:</u>

Afgeleide functie: $f'(x) = 4x - 16$

Nulpunt: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Teken van f' in $]-\infty, 4[$ is negatief $\Rightarrow f$ daalt in $]-\infty, 4[$. (Je kan snel het teken controleren in dit interval door $x = 0$ in het functievoorschrift in te vullen)

Teken van f' in $]4, \infty[$ is positief $\Rightarrow f$ stijgt in $]4, \infty[$. (Je kan snel het teken bepalen in dit interval want het voorschrift van de afgeleide functie is een rechte dus wisselt het teken voorbij het nulpunt van de rechte)

Oorspronkelijke functie: $f(x) = 2(x-4)^2 + 3$

Dit is een dalparabool met top $T(4,3)$. De oorspronkelijke functie daalt inderdaad in interval $]-\infty, 4[$ en stijgt in interval $]4, \infty[$. De functie f heeft een minimum voor $x = 0$.

6.2 Extrema (minimum en maximum) van een functie vinden

- Een functie f heeft een minimum voor alle waarden x waarvoor $f'(x) = 0$ én het teken van de afgeleide verandert van – naar + rond dit nulpunt.

- Een functie f heeft een maximum voor alle waarden x waarvoor $f'(x) = 0$ én het teken van de afgeleide verandert van + naar - rond dit nulpunt.

Voorbeeld:

Bepaal het functieverloop van $f(x) = x^3 - 3x + 3$

Om dit te doen zonder grafische rekenmachine of computer moet je de functie ontbinden in factoren om de nulpunten te vinden. Daarna moet je het teken in elk interval tussen de nulpunten bepalen. Met de afgeleide functie kan het sneller en eenvoudiger.

Bereken eerst de afgeleide functie: $f'(x) = 3x^2 - 3$

Bepaal de nulpunten van deze afgeleide functie $f'(x)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Maak de tabel met het tekenverloop:

x	$-\infty$		-1		$+1$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	max	↘	min	↗	

De functie f (opgelet, de oorspronkelijke functie dus, en niet de afgeleide functie) bereikt een maximum voor $x = -1$ en een minimum voor $x = 1$. De bereikte maximum- en minimumwaarde vind je door deze x-waarden in te vullen in het functievoorschrift van de oorspronkelijke functie.

Maximum: $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5$, coördinaten maximum: (-1,5)

Minimum: $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1$, coördinaten minimum: (1,1)

In de tabel van het functieverloop vul je de waarden in bij het extremum:

x	$-\infty$		-1		$+1$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	max (5)	↘	min (1)	↗	

6.3 Buigpunten

Het tekenonderzoek van de afgeleide functie f' geeft informatie over stijgen en dalen van de oorspronkelijke functie f. De afgeleide geeft verder ook informatie over de kromming van de oorspronkelijke functie f.

Hol versus bol

<u>Hol verloop</u>

Een dalparabool heeft een hol verloop. Links van het enige minimum daalt de grafiek, maar hoe dichter bij het minimum, hoe minder "hard" de grafiek daalt. Dit heet *afnemend dalend*: de functie daalt wel nog, maar de mate van daling neemt af.

Rechts van het minimum van de dalparabool stijgt de grafiek en die stijging gaat steeds "harder". Dit heet *toenemend stijgend*: de functie stijgt, en de mate van stijgen neemt toe.

<u>Bol verloop</u>

Een eenvoudig voorbeeld van een bol functieverloop is een bergparabool. Links van het enige maximum stijgt de grafiek, maar hoe dichter bij het maximum, hoe minder "hard" de grafiek stijgt. Dit heet *afnemend stijgend*: de functie stijgt wel nog, maar de mate van stijging neemt af.

Rechts van het maximum van de bergparabool daalt de grafiek en die daling gaat steeds "harder". Dit heet *toenemend dalend*: de functie daalt, en de mate van dalen neemt toe.

Verband met functieverloop afgeleide functie

Hoe hard een grafiek van f stijgt of daalt, dus de ogenblikkelijke helling wordt bepaald door de waarde van de afgeleide f' in dat punt.

Je kan 4 situaties onderscheiden voor het gedrag van de oorspronkelijke functie $f(x)$, bepaald door het teken van $f'(x)$ enerzijds en het stijgend/dalend gedrag van $f'(x)$ anderzijds:

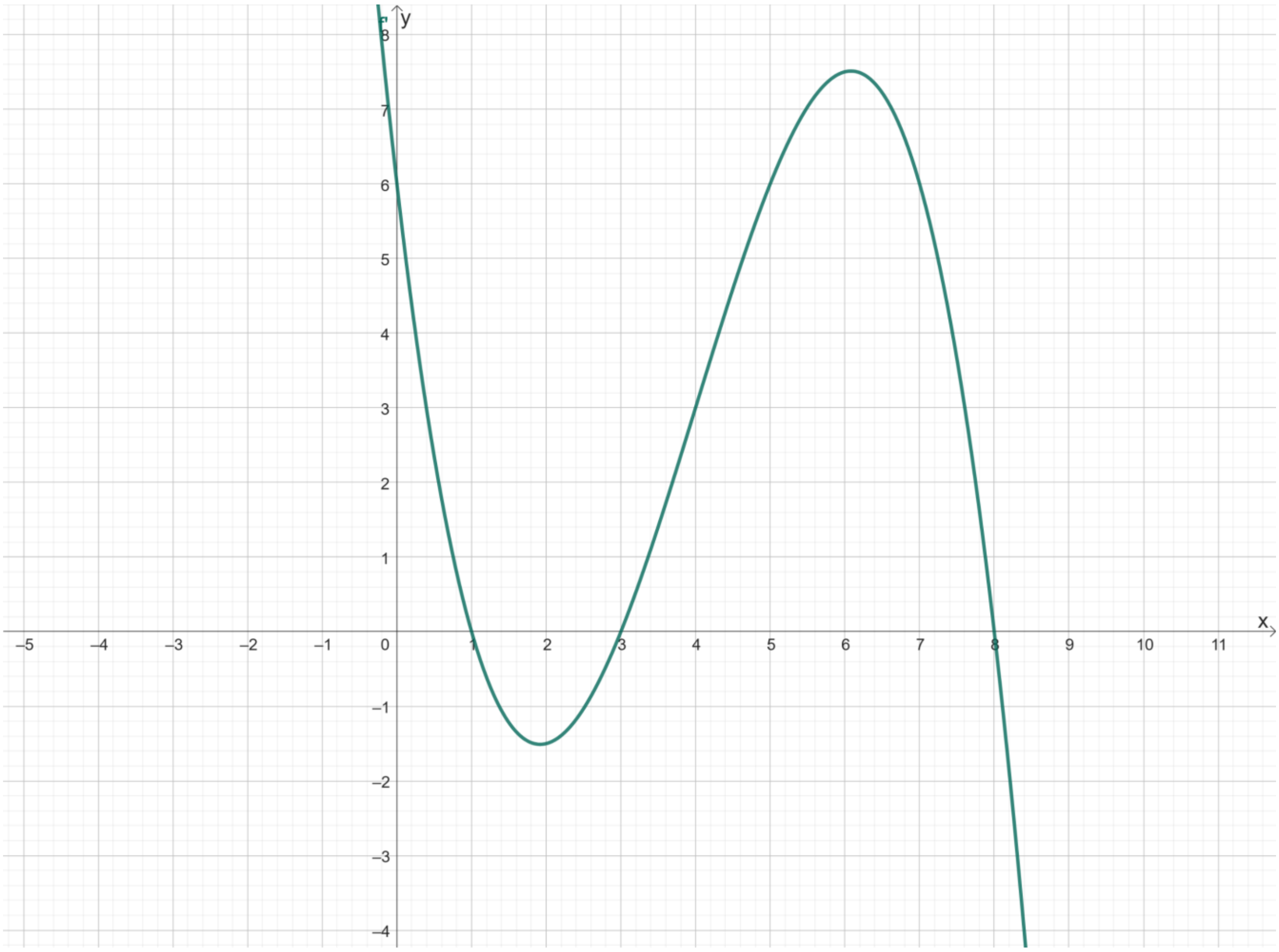
	$f'(x) > 0$ $\Rightarrow f$ is stijgend	$f'(x) < 0$ $\Rightarrow f$ is dalend
f' is stijgend $\Rightarrow f$ is hol	Grafiek van f is hol en stijgend	Grafiek van f is hol en dalend
f' is dalend $\Rightarrow f$ is bol	Grafiek van f is bol en stijgend	Grafiek van f is bol en dalend

Buigpunten

Het punt tussen de overgang van een hol naar bol verloop of omgekeerd heet een buigpunt. Dit is het punt waar de afgeleide functie overgaat van stijgen naar dalen of omgekeerd.

Functieonderzoek van f aan de hand van de afgeleide functie f'

Voorbeeld: $f'(x) = -\frac{x^3}{4} + 3x^2 - \frac{35}{4}x + 6$



Figuur 4 Afgeleide functie f'

Stap 1: Maak een tabel met 4 rijen

Stap 2: Vul in de eerste rij van links naar rechts alle nulpunten en extreme waarden van de afgeleide functie in. Als de x-waarde van de extrema niet gegeven is, dan schat je deze. Links schrijf je $-\infty$, rechts $+\infty$

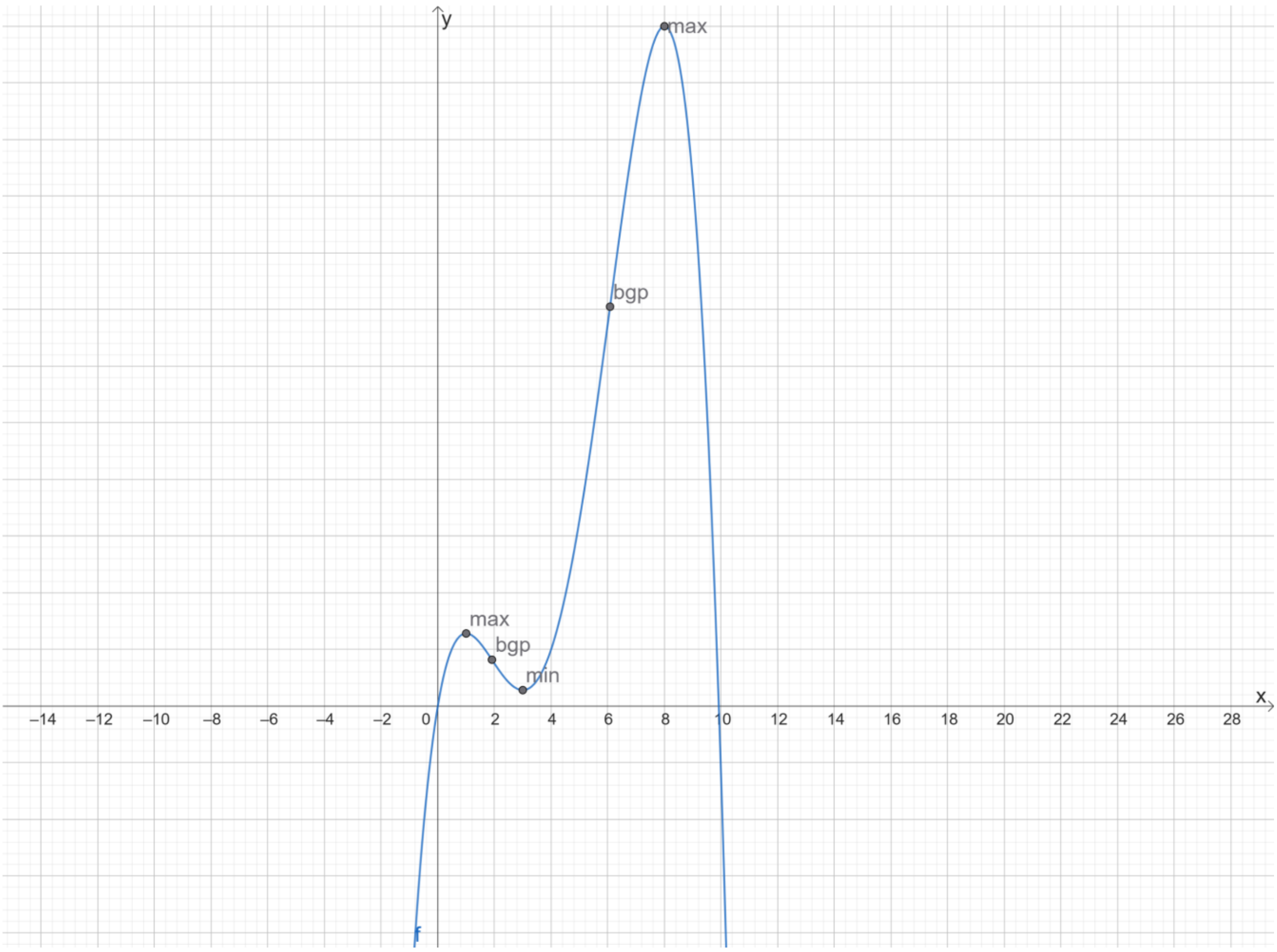
Stap 3: Zet in rij 2 een 0 bij de nulpunten van de afgeleide functie. Vul de tweede rij aan met het teken van f' in elk interval.

Stap 4: Noteer in rij 3 het stijgen en dalen van f' in elke interval. Noteer ook de extrema van f'

Stap 5: nu leidt je het gedrag van de functie f af uit de combinatie van rij 2 en 3. Duid eerst extrema en buigpunten aan. Vul dan aan met pijltjes die de kromming (hol/bol en stijgend/dalend) van f aangeven.

x	$-\infty$		1		1,91		3		6,08		8		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-
$f'(x)$ ↗↘	↘	↘	↘	↘	min	↗	↗	↗	max	↘	↘	↘	↘
$f(x)$			max		bgp		min		bgp		max		

Maak vervolgens een schets van f. Je kan uit dit functieonderzoek enkel een <u>mogelijke functie f</u> schetsen. Aangezien de afgeleide van een constante factor steeds 0 is, is deze originele functie f slechts op een constante factor bepaald. Daarom staat er geen verdeling op de y-as in Figuur 4.



Figuur 5 Schets van f

Opmerking: vorig jaar heb je geleerd hoe je een functieonderzoek uitvoert, door te kijken naar de functie $f(x)$ zelf, waarbij je de grafiek tekende op je grafisch rekenmachine, of de grafiek gegeven was. Het is nu de bedoeling om het functieonderzoek van $f(x)$ te doen, door het gedrag van de afgeleide functie $f'(x)$ te gaan onderzoeken, waarbij de grafiek van deze afgeleide functie zal gegeven zijn, of getekend dient te worden. Met de beschikbaarheid van grafische rekentoestellen en computers lijkt deze aanpak een beetje omslachtig. Echter, vóór er rekenmachines en computers beschikbaar waren, was functieonderzoek enkel mogelijk via het bestuderen van de afgeleiden van die te onderzoeken functie.

6.4 Toepassing: raaklijn vinden

Een toepassing op functies afleiden, is het vinden van de raaklijn aan een punt op die functie. Hiervoor moet je het voorschrift van een rechte (of eerstegraadsfunctie) $y = ax + b$ bepalen.

Voorbeeld: zoek het voorschrift van de raaklijn aan $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ in het punt P(3,9).

Stap 1: bepaal de afgeleide van de gegeven functie: $f'(x) = x^2$

Stap 2: Neem het eerste getal van de gegeven coördinaat: $x = 3$

Stap 3: Zoek de functiewaarde van de afgeleide voor deze x-waarde. Dit is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn en dus de waarde van a: $a = f'(3) = 9$

Stap 4: b bepaal je uit de kennis dat P op de raaklijn ligt. Je vult de coördinaten van P in in $y = ax + b$ en lost de vergelijking op naar b:

$$9 = 9 \cdot 3 + b \Longrightarrow b = -18$$

Oplossing: $r: y = 9x - 18$

<u>Controleren van je antwoord m.b.v. je grafisch rekenmachine (TI):</u>

Duw op Y= en geef het voorschrift van f in.

Duw op 2ND en dan op DRAW(PRGM)

Kies Tangent

Duw op 2ND

Tik het argument in van de gegeven coördinaat (dit is het eerste getal)

Duw op enter

Rond zo nodig af

6.5 Toepassing: extremumvraagstukken

Een extremumvraagstuk is een vraagstuk dat je kan oplossen door de extrema (minima en maxima) van een functie te vinden.

Uitgewerkt voorbeeld:

Een reisbureau organiseert een groepsreis. De reis kan alleen plaatsvinden als er minimaal 30 deelnemers zijn. Elke deelnemer betaalt 800 euro. Als er meer dan 30 personen deelnemen, krijgt elke deelnemer een korting van 4 euro per extra deelnemer. Bij welk aantal deelnemers zijn de inkomsten voor het reisbureau maximaal?

Begin met het opstellen van de basisberekening (= de inkomsten bij 30 deelnemers)

Begin met het opstellen van de basisberekening (=de inkomsten bij 30 deelnemers):

Aantal deelnemers	Kostprijs p.p. (€)	Inkomsten (€)
30	800	30x800=24000

Onderzoek de inkomsten voor stijgend aantal deelnemers d.m.v. aanvullen van de tabel.

Aantal deelnemers	Kostprijs p.p. (€)	Inkomsten (€)
30	800	30x800=24000
31	800-4=796	31x796=24676
32	800-4-4=792	32x792=25344
x	$800-(x-30)\cdot 4$	$x\cdot[800-(x-30)\cdot 4]$

De definitie van een extremumvraagstuk geeft aan dat je op zoek moet gaan naar een functie die je dan moet gaan optimaliseren (maximum of minimum zoeken). De vraag in het vraagstuk geeft aan wat je moet optimaliseren, hier nl. de inkomsten. De onafhankelijke variabele van de functie is het aantal deelnemers. Dit aantal deelnemers noemen we x (je mag uiteraard ook een ander symbool gebruiken). Je stelt vervolgens een formule op die het verband beschrijft tussen het aantal deelnemers x en de inkomsten. Deze is weergegeven in de laatste rij van de vorige tabel.

De inkomsten f in functie van het aantal deelnemers x kan beschreven worden met het voorschrift: $f(x)=-4x^2+920x$

Als volgende stap bereken je de afgeleide van deze functie: $f'(x)=-8x+920$

Daarna stel je het verloopschema op van de afgeleide functie en bepaal je wat dit wil zeggen over het verloop van de originele functie f.

x	$-\infty$		115		∞
$f'(x) = -8x + 920$		$+$	0	$-$	
$f(x) = -4x^2 + 920x$		↗	max (52900)	↘	

De afgeleide functie heeft een nulpunt voor $x = 115$. Het teken van de afgeleide gaat van + naar − rond dit nulpunt. De functie f heeft dus een maximum voor $x = 115$.

Om de maximale inkomsten te berekenen, bepaal je de functiewaarde van f: $f(115) = 52900$.

De groepsreis kan maximaal 52900 euro aan inkomsten opleveren. Dit komt overeen met 115 deelnemers.

7 Oefeningen

7.1 Differentiequotiënten

Bereken het differentiequotiënt

Vanuit de tabel:

a.

x	-3	-2	0	2	6
$f(x)$	10	4	2	8	-10

Bereken het differentiequotiënt tussen -2 en 6.
Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ tussen -3 en 0

b.

jaartal	1900	1950	1991	2010	2022
Bevolkingsaantal (1000 inwoners)	6719	8639	10004	10840	11584

Wat is de gemiddelde bevolkingsgroei tussen 1950 en 2010?

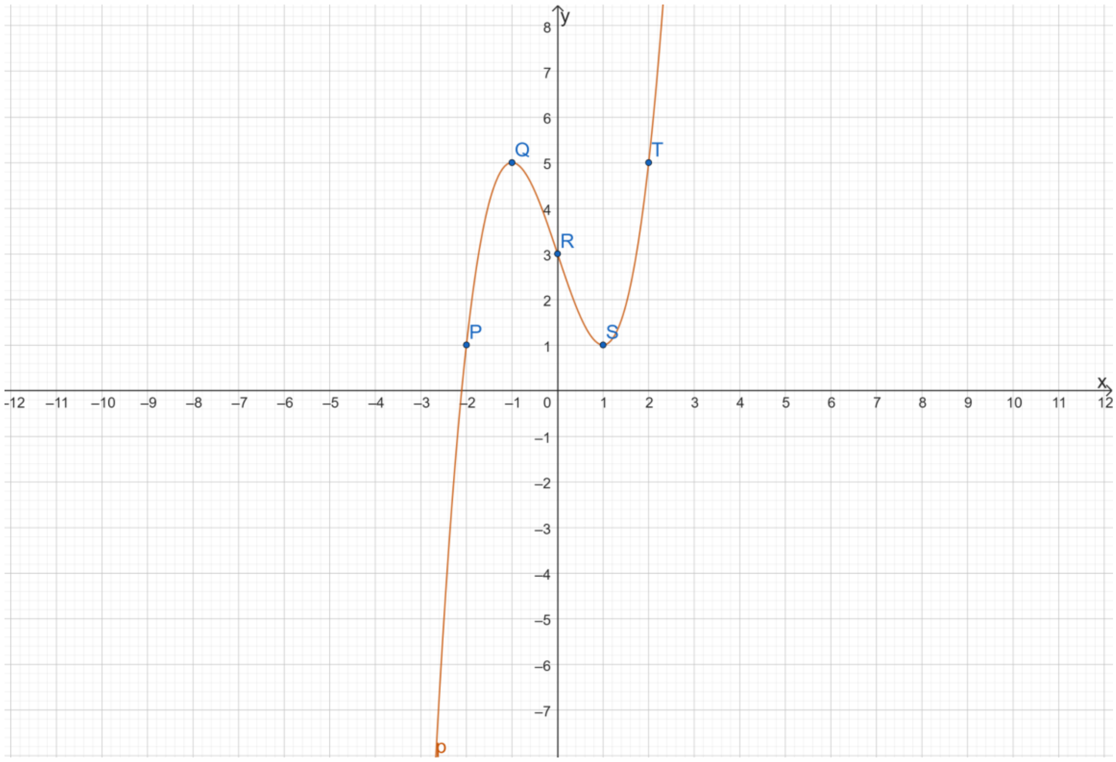
c.

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	2	4	6	4	2

Bereken het differentiequotiënt voor elk interval in de tabel.
In welke intervallen daalt de functie $g(x)$ gemiddeld?

Wanneer de grafiek gegeven is:

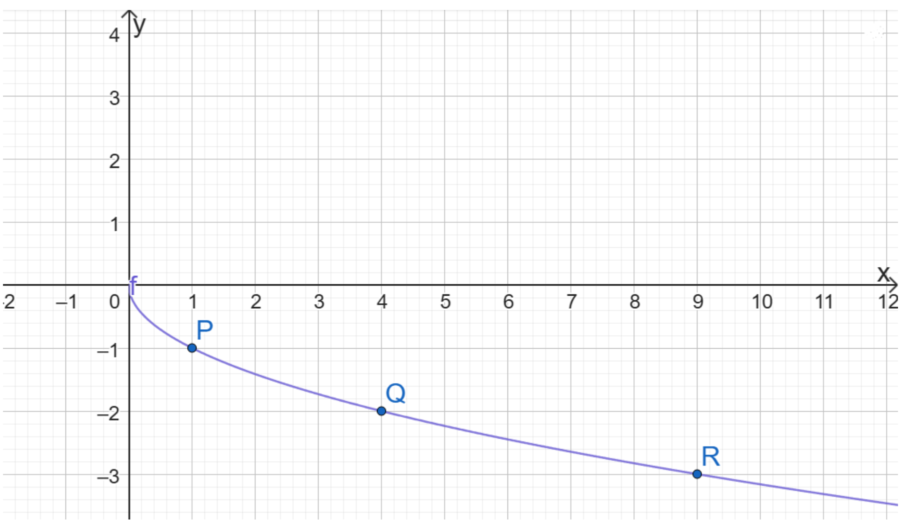
d.



Bereken het differentiequotiënt van $p(x)$ voor

- [-2,1]
- [-1,1]
- [-1,2]
- [0,1]
- [-2,2]

e.



Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ voor

- [0,9]
- [1,4]
- [4,9]

Met behulp van het functievoorschrift:

f. $f(x) = x^7$ in $[1{,}3]$
g. $g(x) = -4x^2 + 3$ in $[-1{,}3]$
h. $h(x) = -\frac{6}{x} + 3$ in $[2{,}4]$

7.2 Bepalen van afgeleide in een punt m.b.v. differentiequotiënt

Gebruik het differentiequotiënt om de ogenblikkelijke verandering van de gegeven functie te schatten in het gevraagde punt. Bereken hiervoor het differentiequotiënt achtereenvolgens voor een interval van 0,1;0,01 en 0,001.

Bepaal eerst de grenzen van het interval. De ondergrens is steeds opgegeven.

1. De afgelegde weg s van een zwemster in functie van de tijd is gegeven door $s(t) = 8 \cdot t - 7 \cdot t^2 + 2 \cdot t^3$. Schat haar snelheid op $t = 0{,}5$.

Interval	Differentiequotiënt
[0,5;0,6]	$(2{,}712-2{,}5)/0{,}1 = 2{,}12$
[0,5, 0,51]	$\frac{2{,}5246-2{,}5}{0{,}01} = 2{,}46$
[0,5, 0,501]	2,5

Differentiequotiënt nadert naar ..2,5..

2. $f(x) = 3x^2 - x + 9$ in $x = 2$

Interval	Differentiequotiënt
[2;2,1]	$\frac{20{,}13-19}{0{,}1} = 11{,}3$
[2;2,01]	$\frac{19{,}1103-19}{0{,}01} = 11{,}03$
[2;2,001]	$\frac{19{,}11-19}{0{,}001} = 11$

Differentiequotiënt nadert naar ..11..

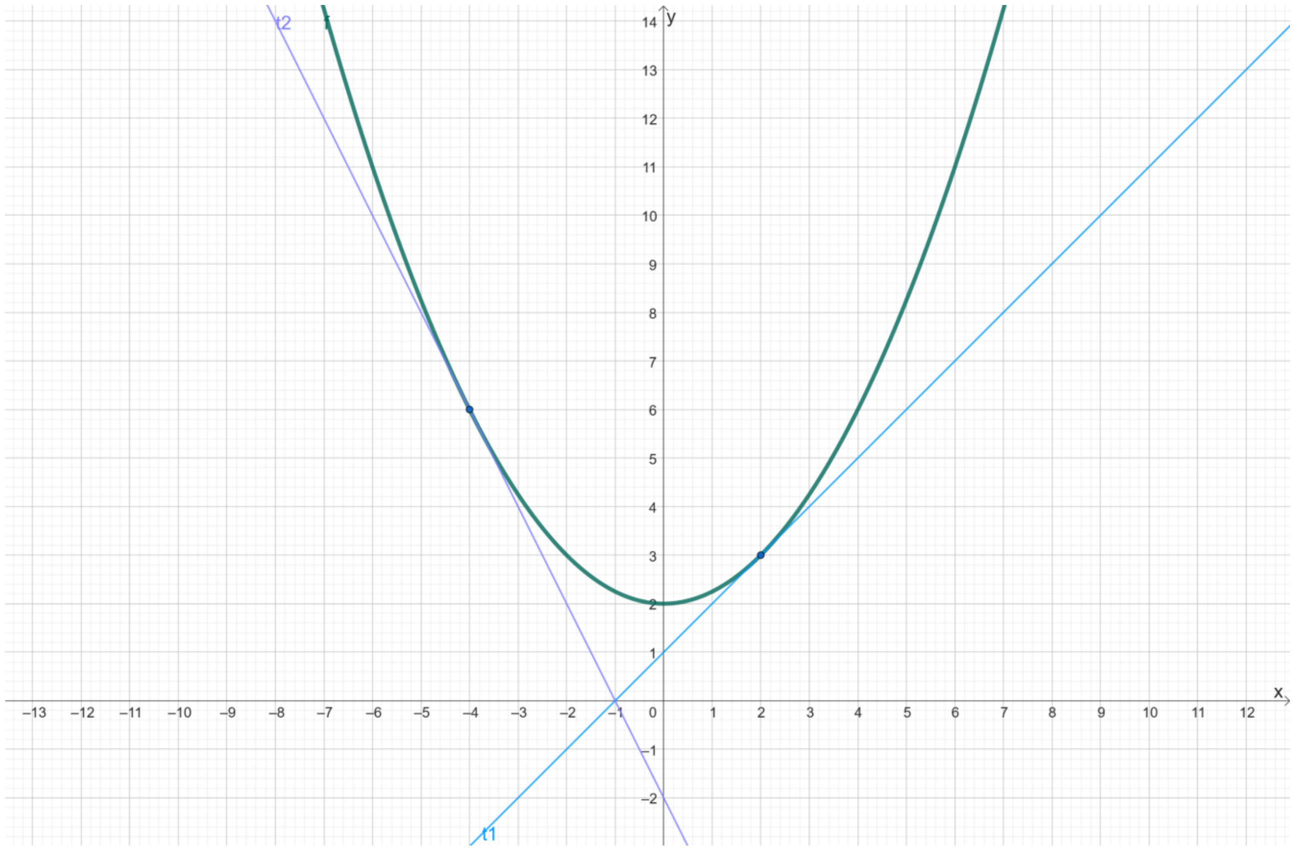
3. $h(t) = 4t^3 - 2t^2$ in $t = -5$

Interval	Differentiequotiënt
[−5;−4,9]	$\frac{-518{,}616+550}{0{,}1} = 313{,}84$
[−5;−4,99]	$\frac{-546{,}8061-(-550)}{0{,}01} = 319{,}38$
[−5;−4,999]	$\frac{-549{,}68006-(-550)}{0{,}001} = 319{,}938$

Differentiequotiënt nadert naar ..320..

7.3 Afgeleide van een functie in een punt

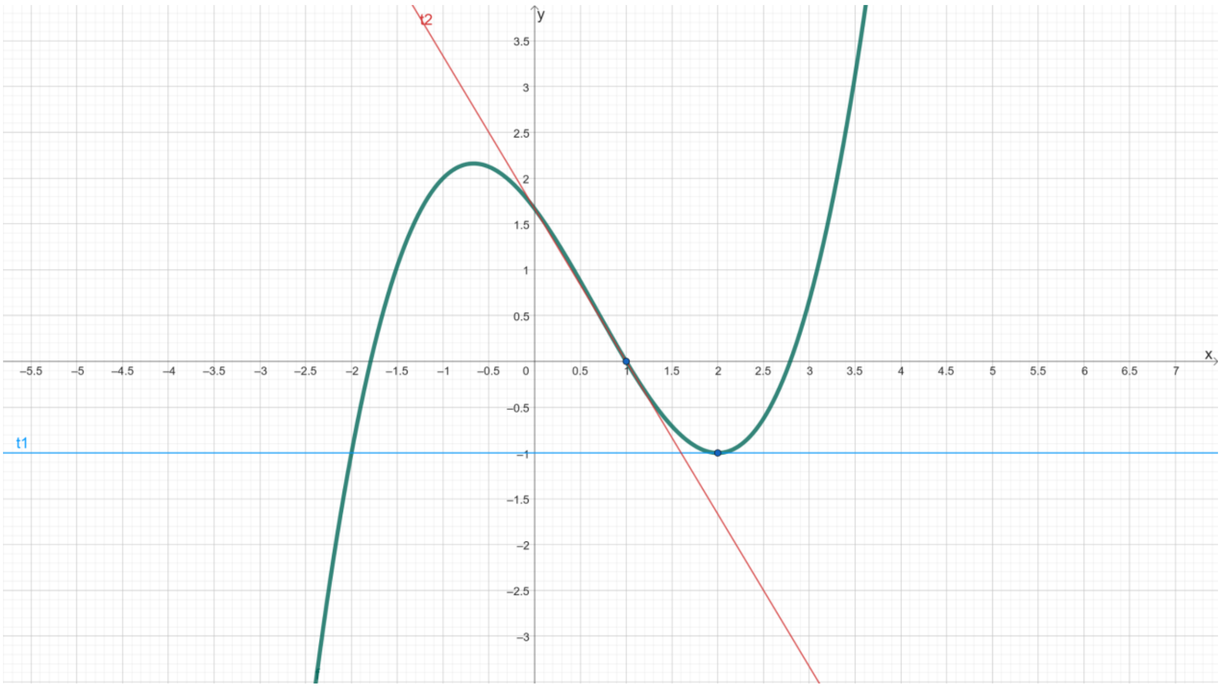
a. Aan de grafiek van f zijn twee raaklijnen getekend ($t1$ en $t2$). Bereken $f'(-4)$ en $f'(2)$



f'(-4) is gelijk aan de rico van t2. Hiervoor neem je 2 punten op t2 en bepaal je het differentiequotiënt. Vb. snijpunt met y-as en snijpunt met x-as. Hieruit volgt dat rico van t2=-2. Dus f'(-4)=-2

Je kan voor de bepaling van f'(2) dezelfde aanpak volgen met raaklijn aan f in x=2. Je ziet ook op het zicht dat de rico van t1=1 (want voor elk kotje dat de raaklijn stijgt, gaat de x-coördinaat van de raaklijn een kotje naar rechts). Dus f'(2)=1

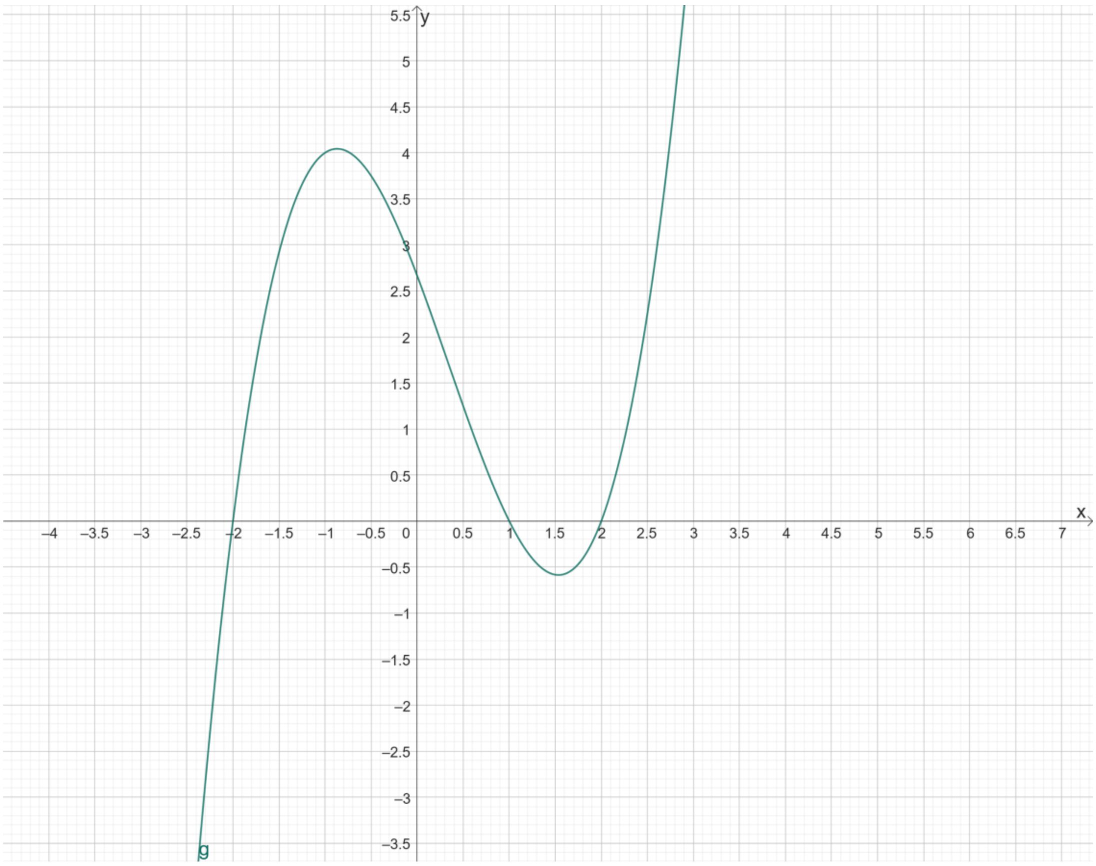
b. Aan de grafiek van f zijn twee raaklijnen getekend ($t1$ en $t2$). Bereken $f'(2)$ en $f'(1)$.



Je zoekt f’(2) of de rico van t1. Dit is een horizontale rechte dus de rico = 0. Bijgevolg is f’(2)=0

Voor f’(1) zoek je de rico van t2. Hiervoor kies je twee punten. Het gemakkelijkst zijn de snijpunten met y-as en x-as, respectievelijk (0;1,7) en (1,0). De rico is dus $\frac{1,7-0}{0-(1)} = -1,7$ en f’(1)=-1,7. Je had met een andere keuze van punten een iets andere waarde uit kunnen komen omdat de rico van t2=-5/3 en dit niet helemaal uitkomt met de verdeling van de assen. Wanneer de coördinaten niet exact af te lezen zijn van de grafiek is het best om de gekozen waarden te noteren zodat ik kan zien waarmee je het differentiequotiënt uitrekent.

c. Welke set uitspraken is correct?



~~1. $g'(-2) > 0$, $g'(0) > 0$ en $g'(1) < 0$~~
2. $g'(-2) > 0$, $g'(0) < 0$ en $g'(1) < 0$
~~3. $g'(-2) < 0$, $g'(0{,}5) < 0$ en $g'(2) < 0$~~
~~4. $g'(-2) > 0$, $g'(0{,}5) > 0$ en $g'(2) > 0$~~

7.4 Bepaal de afgeleide functie door gebruik te maken van de rekenregels

1. $f(x) = 28$ $f'(x) = 0$
2. $f(x) = -5384$ $f'(x) = 0$
3. $f(x) = x^7$ $f'(x) = 7x^6$
4. $f(x) = 2x$ $f'(x) = 2$
5. $f(x) = x^2 - x + 4$ $f'(x) = 2x - 1$
6. $f(x) = x^4 - x^3$ $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$
7. $f(x) = 1 - x - x^3$ $f'(x) = -1 - 3x^2$
8. $f(x) = x^{14} + 14$ $f'(x) = 14x^{13}$
9. $f(x) = -x^3 - x^7 - x - 5$ $f'(x) = -3x^2 - 7x^6 - 1$
10. $f(x) = 5x$ $f'(x) = 5$
11. $f(x) = 2x^2$ $f'(x) = 4x$
12. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ $f'(x) = \frac{3}{4}x^2$
13. $f(x) = 5x^2 - 12x + 15$ $f'(x) = 10x - 12$

7.5 Bepaal de afgeleide functie door gebruik te maken van product- of kettingregel

1. $f(x) = x^2(4x + 6)$ $f'(x) = 12x(x + 1)$
2. $f(x) = x^7(4 - x^2)$ $f'(x) = 28x^6 - 9x^8$
3. $f(x) = (2x - 4)(3x - 2)$ $f'(x) = 12x - 16$
4. $f(x) = x^3(x^2 + 7x - 4)$ $f'(x) = 5x^4 + 28x^3 - 12x^2$
5. $f(x) = (6x^2 - 3x + 2)(5 - 3x)$ $f'(x) = -54x^2 + 78x - 21$
6. $f(x) = (x^3 - x)(4x^2 + 7x - 8)$ $f'(x) = 20x^4 + 28x^3 - 36x^2 - 14x + 8$
7. $f(x) = (2x - 3)^3$ $f'(x) = 6(2x - 3)^2$
8. $f(x) = (8x - 12)^6$ $f'(x) = 48(8x - 12)^5$
9. $f(x) = (x^2 + 1)^3$ $f'(x) = 6x(x^2 + 1)$
10. $f(x) = (5x^2 - 2x - 4)^5$ $f'(x) = 5(5x^2 - 2x - 4)(10x - 2)$
11. $f(x) = x^2(3x - 5)^3$ $f'(x) = 2x(3x - 5)^3 + 9x^2(3x - 5)^2$
12. $f(x) = (x^2 - 4)^3(4x^2 - x)^2$ $f'(x) = 8(x^2 - 4)^2(4x^2 - x)(3x^3 + x^2 - 8x + 1)$

7.6 Verloop van functies aan de hand van afgeleide functie

Bepaal aan de hand van de afgeleide functie:

a. De intervallen waarin de functie stijgt
b. De intervallen waarin de functie daalt
c. De extreme waarden
d. Buigpunten

Vat alles samen in een verloopschema.

1. $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 12x)$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
3. $f(x) = -x^3 + 3x$
4. $f(x) = (x - 1)^2(x - 3)$
5. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$
6. $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$
7. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
8. $f(x) = 5x^3 - x^5$
9. $f(x) = 2x^3 - x^4$
10. $f(x) = x^2(x - 1)(x - 2)$

7.7 Vergelijking raaklijn bepalen

1. Stel een vergelijking op van de raaklijn t aan de functie met voorschrift $f(x) = -4x^2 + 2$ in $P(-1, f(-1))$ en in $Q(0, f(0))$.

2. Stel een vergelijking op van de raaklijn t aan de functie met voorschrift $f(x) = x^4$ in $P(-1,1)$).

7.8 Extremumvraagstukken

1. In je tuin heb je aan een kant een muur. Je wil voor je dwergkonijn tegen die muur een rechthoekig buitenverblijf bouwen dat een zo groot mogelijke oppervlakte heeft. Wat worden de afmetingen als je 10 meter gaas hebt?
2. Op een stuk grand van 1 hectare staan 60 appelbomen. Aan elke appelboom groeien gemiddeld 500 appels. Men denkt erover om bomen bij te planten. Voor elke boom die men extra plant daalt de gemiddelde opbrengst per boom met 5 appels. Hoeveel bomen moet men extra planten om een maximale opbrengst te krijgen?
3. Wat zijn de kleinst mogelijke waarden van a en b in $a^3 + b^3$ als je weet dat $a + b = 10$.
4. We hebben een rechthoekig stuk karton met een lengte van 60 cm en een breedte van 40 cm. Door in elke hoek een vierkant weg te knippen en de randen om te plooien kunnen we van het stuk karton een doos maken. Hoe lang moet de zijde van het weg te knippen vierkant zijn om de doos een maximaal volume te geven?
5. Rond een balkvormige doos zit een lint. Het lint (75 cm) gaat rond de vierkanten van de doos en met het overblijvende stuk (15 cm) wordt bovenaan een strik gemaakt. Het grondvlak van de doos heeft als lengte x en als breedte $x + 4$. Bij welke waarde van x is het volume van de doos het grootst?
6. Een ambachtelijk bedrijfje verkoopt elke week x stoelen tegen $(106 - 0{,}25x^2)$ euro. x stoelen maken, kost echter $(500 + 10x)$ euro. Met het huidige aantal werknemers kan het bedrijfje maximaal 15 stoelen per week maken. Bij welk aantal stoelen is de winst het grootst?
7. Een bedrijf produceert elektrische treintjes. Het aantal stuks dat kan worden verkocht, wordt als volgt berekend: $n = 8100 - 180p$ (p=prijs). Het maken van de treintjes kost natuurlijk ook iets, nl. $40000 + 5n$ euro. Bij welke prijs is de winst maximaal.
8. Als je twee getallen optelt, is de uitkomst 10. Welke waarde moeten die twee getallen hebben om de uitkomst van het product ervan zo groot mogelijk te maken?
9. x aantal scheerapparaten maken kost $10000 - 100x + x^2$ euro. Om de winst zo hoog mogelijk te maken, moet de kostprijs per stuk zo klein mogelijk zijn. Hoeveel scheerapparaten moet men maken om die minimale kostprijs per stuk te verkrijgen?

10. Voor a en b geldt $2a + b = 21$. Bepaal de waarde van a en b zodat het product van $a^2 \cdot b$ zo groot mogelijk is.